



*Rebound 1938*

Library of the Museum  
OF  
COMPARATIVE ZOOLOGY,  
AT HARVARD COLLEGE, CAMBRIDGE, MASS.

The gift of *Académie Royale*

*No. 159*





**MÉMOIRES**  
**DE L'ACADÉMIE ROYALE**

DES

**SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS**

**DE BELGIQUE.**



**MÉMOIRES**  
DE  
**L'ACADÉMIE ROYALE**  
DES  
SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS  
DE BELGIQUE.

---

**TOME XLIII.**

---



**BRUXELLES,**  
F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE.

---

**1882**





# TABLE

DES

## MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME XLIII.

---

### Première partie.

---

#### CLASSE DES SCIENCES.

1. Description des fossiles du calcaire grossier de Mons (5<sup>e</sup> partie; supplément aux deux premières parties); par Alph. Briart et F.-L. Cornet (avec 6 planches).
2. Recherches sur les mouvements de l'aiguille aimantée à Bruxelles; par Ernest Quetelet.
5. Remarques sur la théorie des moindres carrés; par Eugène Catalan.
4. Études sur les variations d'énergie potentielle des surfaces liquides (premier Mémoire); par G. Van der Mensbrughe.
5. Mémoire sur les Orques observés dans les mers d'Europe; par P.-J. Van Beneden (avec 4 planches).

---

### Seconde partie.

---

#### CLASSE DES SCIENCES.

6. De la détermination du rapport proportionnel entre l'argent, les chlorures et les bromures; par J.-S. Stas (avec 2 planches).
  7. Mémoire sur les courbes du 5<sup>e</sup> ordre; par Folie et Le Paige (première partie).
  8. Note sur la quadrature des courbes paraboliques; par Eugène Catalan.
  9. Note sur les fonctions  $X_n$  de Legendre; par Eugène Catalan.
  10. Mémoire sur une suite de polynômes entiers et sur quelques intégrales définies; par Eugène Catalan.
  11. Bibliographie analytique des principaux phénomènes subjectifs de la vision (2<sup>e</sup> supplément, comprenant les années 1878-1879); par J. Plateau.
  12. Deux Plésiosaures du lias inférieur du Luxembourg; par P.-J. Van Beneden.
  15. Recherches expérimentales sur la relation qui existe entre la résistance de l'air et sa température. — Conséquences physiques et philosophiques qui découlent de ces expériences (avec 4 planches); par G.-A. Hirn.
-



**MÉMOIRES**  
**DE L'ACADÉMIE ROYALE**  
**DES**  
**SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS**  
**DE BELGIQUE.**



MÉMOIRES  
DE  
L'ACADÉMIE ROYALE  
DES  
SCIENCES. DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS  
DE BELGIQUE.

---

**TOME XLIII.**

---

PREMIÈRE PARTIE.



BRUXELLES,

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE.

---

1880



# TABLE

DES

## MEMOIRES CONTENUS DANS LA PREMIERE PARTIE DU TOME XLIII.

CLASSE DES SCIENCES

1. Description des fossiles du calcaire grossier de Mons (5<sup>e</sup> partie; supplément aux deux premières parties); par Alph. Briart et F.-L. Cornet (avec 6 planches).
2. Recherches sur les mouvements de l'aiguille aimantée à Bruxelles; par Ernest Quetelet
3. Remarques sur la théorie des moindres carrés; par Eugène Catalan.
4. Études sur les variations d'énergie potentielle des surfaces liquides (premier Mémoire); par G. Van der Mensbrugghe.
5. Mémoire sur les Orques observés dans les mers d'Europe; par P.-J. Van Beneden (avec 4 planches)





# DESCRIPTION

DES

## FOSSILES DU CALCAIRE GROSSIER DE MONS.

---

### TROISIÈME PARTIE.

---

SUPPLÉMENT AUX DEUX PREMIÈRES PARTIES.

PAR

**Alph. BRIART et F.-L. CORNET,**

INGÉNIEURS CIVILS.

---

(Présenté à la classe des sciences de l'Académie dans la séance du 3 mars 1877.)



## INTRODUCTION.

---

Les deux premières parties du grand travail que nous avons entrepris pour la *Description des fossiles du calcaire grossier de Mons*, ont été publiées respectivement en 1870 et en 1873 <sup>1</sup>. Elles ont eu pour objet l'étude des espèces comprises dans les genres des GASTÉROPODES PROSOBRANCHES SIPHONÉS et un grand nombre de celles qui appartiennent aux PROSOBRANCHES HOLOSTOMES. La troisième partie, que nous présentons aujourd'hui à la classe des sciences, n'est pas la suite naturelle des deux premières; elle doit plutôt en être considérée comme le complément.

En 1874 la ville de Mons fut choisie par la Société géologique de France, pour y tenir la première partie de sa session extraordinaire. Des fouilles importantes, qu'à cette occasion nous avons fait ouvrir dans le calcaire de Mons, nous ont procuré un si grand nombre d'espèces nouvelles appartenant aux genres précédemment étudiés, que nous avons cru devoir en donner la description avant d'aborder celle des espèces comprises dans les genres qui viennent après, en suivant l'ordre d'exposition que nous avons adopté.

Les fouilles pratiquées dans le calcaire de Mons pour permettre à nos savants confrères français d'étudier ce dépôt si intéressant, ont consisté dans

<sup>1</sup> *Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers*, t. XXXVI et XXXVII.

le creusement d'un puits de 1<sup>m</sup>,80 de diamètre et de 20 mètres de profondeur. Ce travail fut exécuté sur le territoire de la ville de Mons, dans la propriété de M. Fernand Coppée, à 40 mètres au couchant d'un premier puits creusé en 1865 et dont les déblais nous avaient fourni la plupart des espèces de nos collections. La nouvelle fouille ne nous a révélé aucun fait nouveau bien important, si ce n'est l'existence, à la partie tout à fait supérieure de l'assise, d'une couche de calcaire jaune, friable et très-fossilifère, qui ne paraît pas se continuer jusqu'au puits voisin. C'est dans cette couche que nous avons recueilli la plus grande partie des espèces que nous n'avions pas encore rencontrées, ou dont nous n'avions trouvé que des spécimens incomplets. Cependant la couche supérieure ne peut pas être considérée comme possédant un caractère paléontologique particulier, car, avec les espèces dont nous venons de parler, nous y avons aussi récolté la plupart de celles qui se rencontrent dans les bancs inférieurs sur toute la hauteur du puits.

Les fouilles pratiquées en 1874 eurent donc pour principal résultat paléontologique, d'enrichir de nouveaux types les genres dont les espèces ont été décrites dans nos deux premiers mémoires. C'est ce qui nous oblige, dans la troisième partie, à revenir en quelque sorte sur nos pas. Nous pouvions, il est vrai, renvoyer à un supplément que nous aurions donné à la fin de notre travail, la description de ces espèces nouvelles; mais il nous a paru préférable d'en finir avec elles dès maintenant, pour n'avoir plus à y revenir plus tard.

Aux cent et trente et une espèces décrites dans les deux premières parties, nous ajoutons aujourd'hui cinquante-quatre formes nouvelles se répartissant, pour la plupart, dans les mêmes divisions génériques. Cependant des genres non représentés jusqu'à présent, sont venus s'ajouter aux anciens. Ce sont entre autres les genres *Mathildia*, *Ringicula*, *Vermetus* et le genre nouveau *Halloysia* que nous créons pour une espèce très-remarquable rapportée provisoirement, par nous, à la famille des *Pyramidellides*.

La famille des *Strombides*, dont nous n'avions précédemment recueilli que quelques débris provenant de l'aile épineuse d'un grand *Pterocera* ou *Rostellaria*, se trouve maintenant représentée par une grande et magnifique espèce. La classe des Céphalopodes, dont nous ne possédions que de rares fragments naérés ayant appartenu à un *Nautilus*, nous a procuré deux espèces inédites du genre *Beloptera*.

Une récolte aussi abondante de nouveaux types ne pouvait pas non plus laisser subsister toutes nos précédentes déterminations dans leur intégrité. Des formes intermédiaires sont venues nous engager à supprimer le *Pseudoliva cunaticulatu*. Cependant nous n'avons pas abandonné le nom que nous avons donné à cette espèce ; nous le transmettons à une forme réellement nouvelle.

Nous avons aussi reconnu qu'une espèce très-abondante dans le calcaire grossier de Mons et dans laquelle nous avons cru reconnaître le *Cerithium biserialis* des sables inférieurs, doit être rapportée au *C. inopinatum*, Desh., des marnes strontianifères de Meudon.

De toutes les espèces décrites dans cette troisième partie de notre travail, une seule, le *Voluta elevata*, Lamk, est connue dans le bassin de Paris où elle se rencontre abondamment dans les sables inférieurs.

Nous ajouterons que nos nouvelles récoltes nous ont aussi permis de rectifier quelques-unes des descriptions d'espèces dont nous n'avions pu recueillir, au puits Goffint, que des spécimens incomplets ou qui n'étaient pas de l'âge adulte. Nous citerons, entre autres, le *Pleurotoma amplu*, le *Mitra dilatata* et deux cérites de grande taille qui ne le cèdent, sous ce rapport, qu'au *Cerithium giganteum* du bassin de Paris.

Bien que loin encore d'être terminée, la description des coquilles fossiles du calcaire grossier de Mons n'a pas été sans rendre quelques services à la géologie. Dans une note publiée dans les *Annales des sciences géologi-*

ques<sup>1</sup> M. le professeur Hébert, après avoir parlé des relations paléontologiques existant entre le calcaire de Mons et les assises tertiaires françaises supérieures aux sables de Bracheux, continue comme suit :

« Mais une affinité des plus curieuses, c'est celle qui lie ce dépôt (le calcaire de Mons) au calcaire pisolitique du bassin de Paris. J'ai recueilli à Montainville et à Port-Marly, en plein calcaire pisolitique, l'une des espèces de Mons figurées par MM. Briart et Cornet, *Pseudoliva robusta*, et je pense qu'il y aura d'autres rapprochements, sinon de véritables identités à établir. »

Nous sommes, sous ce dernier rapport, du même avis que M. Hébert. Nous avons la conviction que lorsqu'on aura étudié la faune du calcaire pisolitique, encore aujourd'hui si peu connue quoiqu'il en existe, depuis longtemps, de nombreux spécimens dans les collections publiques et particulières, on trouvera entre ce dépôt et le calcaire de Mons, des relations paléontologiques d'un grand intérêt. Il est vrai que dans tous les gisements connus du calcaire pisolitique, les fossiles ne se trouvent qu'à l'état de moules; mais il existe un procédé de reproduction en plâtre employé avec tant d'habileté et d'intelligence par M. Munier-Chalmas qu'il est parvenu à retrouver la forme des fruits et des fleurs fossiles qui se trouvent, également à l'état de moules, dans le calcaire de Sézanne. C'est ce procédé qui lui a permis de reconstruire le *Pseudoliva robusta* de Montainville et, depuis la publication du travail de M. Hébert, une autre de nos espèces, le *Mitra Dewalquei*, rencontrée à Ambleville<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> *Comparaison de l'Éocène inférieur de la Belgique et de l'Angleterre avec celui du bassin de Paris* (ANNALES DES SCIENCES GÉOLOGIQUES, t. IV).

<sup>2</sup> Nous croyons devoir faire remarquer que dans la faune du calcaire pisolitique, la classe des Gastéropodes n'est représentée que par un nombre relativement très-petit d'individus, tandis que les bivalves y sont très-nombreux. C'est donc dans la comparaison de ceux-ci avec les fossiles de la même classe qui abondent aussi dans le calcaire de Mons, que l'on peut espérer rencontrer le plus grand nombre d'espèces communes. Il est vraiment à désirer, dans l'intérêt de la géologie et de la paléontologie, que quelques savants français, s'aidant des procédés de reproduction de M. Munier, entreprennent bientôt la description des fossiles du calcaire pisolitique.

Le calcaire pisolitique est recouvert directement dans la carrière des Moulinaux, près de Meudon, par une marne blanchâtre empâtant des noyaux strontianifères et des parties endurcies qui renferment, à l'état de moules, des fossiles parmi lesquels, après reproduction par son procédé, M. Munier-Chalmas a reconnu deux espèces du calcaire de Rilly-la-Montagne, *Pupa Rillyensis* et *Paludina aspersa*. Ce fait a porté M. Hébert, qui depuis longtemps considère le calcaire pisolitique comme appartenant au terrain crétacé, à admettre l'existence à la base de la marne strontianifère de Meudon, d'une lacune correspondant au *sable de Rilly* et au *poudingue de Nemours*, c'est-à-dire que la surface de contact du calcaire pisolitique et de la marne strontianifère de Meudon serait, dans cette localité, la limite des terrains crétacé et tertiaire. Mais, d'après M. de Lapparent<sup>1</sup>, la marne strontianifère appartiendrait au calcaire pisolitique et proviendrait de la destruction de la partie supérieure de cette assise opérée sous l'influence des actions chimiques qui ont vraisemblablement précédé le dépôt des argiles bigarrées.

Quoi qu'il en soit, il est certain que les parties endurcies de la marne strontianifère de Meudon renferment des fossiles appartenant à des espèces abondamment représentées dans le calcaire de Mons. Les recherches de MM. Hébert et Munier-Chalmas, ainsi que les nôtres, ne nous laissent aucun doute à ce sujet. Nous avons cité plus haut le *Cerithium inopinatum*, Desh. Nous pouvons y ajouter le *Melanopsis buccinoidea*, Ferr., et un Gastéropode très-remarquable non décrit jusqu'à présent, que M. Hébert considère comme voisin des *Liotia*, mais que nous croyons plutôt devoir rapprocher du genre *Vivipara*.

Nous ajouterons, pour terminer, que par une note publiée dans les Bulletins de l'Académie royale de Belgique<sup>2</sup>, nous avons signalé la présence au-

<sup>1</sup> *Bull. de la Soc. géol. de France*, 5<sup>e</sup> série, t. II. — Session extraordinaire à Mons et à Avesnes en 1874.

<sup>2</sup> *Ibid.*, 2<sup>me</sup> série, t. XLIII, n<sup>o</sup> 1.

dessus du calcaire de Mons et en dessous du système landenien, d'une nouvelle assise géologique assez importante. Il s'agit de couches principalement constituées par des marnes blanches ou grisâtres, renfermant souvent des traces de lignite et par du calcaire argileux à texture compacte ou subcompacte, blanchâtre ou bleu grisâtre, ayant tout à fait l'aspect ordinaire du calcaire d'eau douce. Ces couches, qui n'affleurent à la surface sur aucun point connu, ont été rencontrées par des sondages, sous les territoires de la ville de Mons et du village de Boussu, où leur épaisseur, qui est variable, dépasse quelquefois 20 mètres. Dans quelques-uns de ces sondages, elles sont très-fossilifères, mais tous les fossiles qu'on a recueillis sont à l'état de moules et appartiennent à une seule forme du genre d'eau douce *Physa*. Nous possédons de cette unique espèce quelques spécimens bien conservés provenant du calcaire grossier de Mons. Elle est assez petite et n'a rien de commun avec le *Physa gigantea* de Rilly-la-Montagne.

La présence d'un calcaire lacustre, immédiatement au-dessus du calcaire grossier de Mons, nous amène à conclure à l'existence d'une certaine relation entre le dépôt de ces deux assises. Nous avons déjà eu l'occasion de dire que le calcaire de Mons, dont la faune est un mélange d'espèces marines, d'eau saumâtre, d'eau douce et même d'espèces terrestres, constitue pour nous un dépôt d'estuaire. Par suite d'un exhaussement de la contrée ou de la formation de cordons littoraux et de hauts fonds qui auraient soustrait cet estuaire à l'invasion des marées, il se serait, peu à peu, changé en un lac dans lequel seraient venus se déposer le calcaire d'eau douce et les argiles ligniteuses dont nous venons de parler.

Mars, 1877.

---



# DESCRIPTION

DES

## FOSSILES DU CALCAIRE GROSSIER DE MONS.

---

### CÉPHALOPODES.

---

Famille : SÉPIOÏDES.

---

Genre **BELOPTERA**, Desh., 1824.

Ce genre a été créé par Deshayes pour certains corps fossiles connus avant lui, mais que l'on ne savait où placer dans la classification. Il en a donné les caractères dans son premier ouvrage<sup>1</sup> et il faut reconnaître qu'ils furent assez vaguement indiqués d'après la seule espèce connue à cette époque. Depuis, d'autres formes sont venues auxquelles ils ne se rapportent plus très-bien.

La seule espèce qui était connue en 1824 est le *B. belemuïtoïdea*, Blainv. En 1865, Deshayes en décrivit deux nouvelles, le *B. Levesquei*, Ferr. et d'Orb. et le *B. Edwardsi*, Desh. Cette dernière espèce est bien un Béloptère, malgré quelques légères différences qui nous semblent purement spécifiques. La première nous paraît renfermer deux types bien distincts, et nous ne serions nullement étonnés, bien que les *additions et corrections* de l'auteur n'en disent rien, qu'une erreur se fût glissée dans les descriptions ou dans les planches. Le *B. Levesquei* figuré pl. CVII, fig. 1, 2, est encore un

<sup>1</sup> *Desc. des coq. foss. des env. de Paris*, t. II, p. 759.

véritable Béloptère se rapprochant assez du *B. Edwardsi*, si toutefois ce n'est pas la même espèce. Mais celui figuré pl. CVI, fig. 9, 10, est tellement différent qu'il nécessiterait peut-être la création d'un nouveau genre. Or, c'est de ce dernier type que se rapprochent les deux espèces du calcaire grossier de Mons.

Nous n'avons, en ce moment, ni le temps, ni les matériaux nécessaires à l'étude de la question, mais nous comptons bien la reprendre plus tard. En attendant, nous croyons devoir donner nos deux espèces sous le nom générique de *Beloptera*.

**BELOPTERA KONINCKI, *Nov. sp.***

Pl. XIII, fig. 5a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,011
	Largeur — . . . . .	0,007
	Épaisseur — . . . . .	0,005

Osselet calcaire assez petit, terminé à la partie inférieure par un rostre assez pointu, irrégulier, arrondi, et à la partie supérieure par deux ailes latérales assez minces, se réunissant sur le dos en un angle assez ouvert, et à la face postérieure desquelles on remarque comme deux impressions musculaires. Ces deux ailes maintiennent, à l'intérieur de l'angle, un cône alvéolaire recourbé en avant vers le sommet à la partie postérieure; ce cône a ses parois parfaitement distinctes du restant de l'osselet et montre fort bien les traces des cloisons. Du sommet du cône partent des stries rayonnantes plus ou moins régulières qui tapissent presque toute la surface ventrale du rostre en y dessinant quelques sillons et recoupant quelques stries concentriques. La partie dorsale de l'osselet est lisse et unie.

*Remarques.* — Cette espèce est très-rare. Elle se distingue parfaitement du *B. Levesquei*, Ferr. et d'Orb. des sables inférieurs (Desh. 1865, III, p. 619, pl. CVI, fig. 9, 10; non pl. CVII, fig. 1, 2), en ce qu'elle est beaucoup plus courte, qu'elle a les ailes maintenant le cône alvéolaire plus dilatées et le rostre plus pointu.

Nous dédions cette espèce à notre savant confrère M. de Koninck.

Fig. 5a, vue de face, grossie deux fois.

— 5b, vue latérale, grossie deux fois.

— 5c, vue par-dessus, grossie cinq fois.

**BELOPTERA HOUZEAU.** *Nov. sp.*Pl. XIII, fig. 2*a*, *b*, *c*.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille.	. . . . .	0,0145
	Largeur	— . . . . .	0,008
	Épaisseur	— . . . . .	0,0085

Osselet calcaire assez petit, terminé à sa partie inférieure par un rostre très-obtus, globuleux, et en avant par deux ailes se réunissant sur le dos en un angle assez fermé, mais dont l'arête est un peu arrondie. Ces deux ailes maintiennent à l'intérieur un cône alvéolaire recourbé en avant à la partie postérieure, ayant ses parois parfaitement distinctes du restant de la coquille et montrant très-bien les traces recourbées des cloisons intérieures. Des stries et des sillons irréguliers rayonnent du sommet du cône et tapissent la partie ventrale du rostre en traversant quelques sillons concentriques. La partie dorsale de l'osselet est lisse et unie.

Cette espèce appartient également au groupe du *B. Levesquei*, Ferr. et d'Orb. Elle est beaucoup plus nombreuse que la précédente et s'en distingue aisément par son rostre beaucoup plus obtus et par son angle dorsal beaucoup moins ouvert. Nous en possédons des spécimens, moins bien conservés que celui que nous avons dessiné, mais d'une taille un peu plus grande qui pouvait aller jusqu'à 18 millimètres.

Nous dédions cette espèce à notre excellent ami M. A. Houzeau de Lehaie, professeur à l'École des mines de Mons, dont les recherches nous ont été si utiles, et qui nous a procuré, entre autres, les deux *Beloptera* que nous décrivons et le magnifique Rostellaire dont nous parlerons plus loin.

Fig. 2*a*, vue de face, grossie deux fois.

— 2*b*, vue de côté, grossie deux fois.

— 2*c*, vue par-dessus, grossie quatre fois.

## GASTÉROPODES.

---

### ORDRE I. — PROSOBRANCHES.

#### SECTION A. — SIPHONOSTOMES.

---

#### Famille : STROMBIDES.

(Voy. 1<sup>re</sup> partie, p. 4.)

---

Genre **ROSTELLARIA**, Lamarck. 1799.

*Car. gen.* — Coquille turriculée à spire allongée ; ouverture prolongée en un canal antérieur long et droit ; bord droit simple ou aliforme, quelquefois légèrement digité, ayant un sinus antérieur contigu au canal, avec ou sans canal postérieur.

*Remarques.* — Les genres de la famille des *Strombides* sont purement artificiels et très-mal limités, surtout les deux principaux au point de vue paléontologique et qui sont les *Pterocera* et les *Rostellaria*. Malgré cela, on a encore essayé de nouvelles coupes. Conrad, en 1860, a proposé le genre *Calyptrophorus* pour les Rostellaires dont le canal postérieur, après s'être prolongé le long de la spire jusque vers le sommet, retourne plus ou moins loin sur le dos de la coquille, quelquefois jusqu'au dernier tour. C'est le cas de l'unique espèce que nous a procuré le calcaire grossier de Mons. Cependant, pour rester fidèles à la marche que nous avons suivie jusqu'à présent, nous nous en tiendrons au genre *Rostellaria*.

Ce genre a commencé à se montrer à l'époque jurassique. Ses plus nombreux représentants datent de la période crétacée. Les espèces tertiaires sont encore assez nombreuses, mais le genre décroît de plus en plus en importance, et il n'est plus que faiblement représenté dans les mers actuelles.

Le calcaire grossier de Mons, comme nous venons de le dire, nous en a fourni une seule mais très-remarquable espèce.

ROSTELLARIA HOUZEAU, *Nov. sp.*

Pl. XIII, fig. 1a, b.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,070 — 100
Largeur (aile non comprise) . . . . .	0,025 — 56
Hauteur du dernier tour. . . . .	0,047 — 67
Angle apical . . . . .	50° à 55°

Grande coquille conique, à tours nombreux, plats, séparés par des sutures peu profondes mais bien marquées, les quatre derniers seuls étant visibles, les autres sont cachés par la callosité du canal postérieur. Les tours à découvert sont ornés de côtes transverses faiblement accusées, plus rapprochées à mesure que l'on avance vers l'ouverture, à peine visibles au dernier tour, parallèles à de nombreuses stries de croissance; le dernier tour très-développé, légèrement earéné à la partie postérieure, déformé en deux larges gibbosités à l'opposé de l'ouverture et dilaté en une aile de forme inconnue. Ouverture et canal antérieurs inconnus; canal postérieur formé d'un côté par l'aile de la coquille et de l'autre par un bourrelet calleux très-fort à l'origine du canal, dépassant un peu le milieu de la spire et remontant ensuite sur le dos de la coquille jusque près de la suture du dernier tour; une callosité semblable recouvre le sommet de la spire dont elle laisse cependant apercevoir les sutures des tours, ainsi que tout l'espace compris entre les deux branches du canal et correspondant à l'ouverture, c'est-à-dire du côté opposé à l'aile.

*Remarques.* — Cette coquille remarquable, la seule que nous possédions de cette espèce, appartient au genre *Calyptrophorus* de Conrad. Elle est malheureusement incomplète, la plus grande partie de l'aile et l'extrémité du canal antérieur sont enlevées. L'espèce reste cependant très-bien caractérisée par ce que nous en avons dit, et nous pouvons la rapprocher du *Calyptrophorus Lamurkii*, Lea. sp., fossile tertiaire de l'Alabama (*Rostellaria*, 1833, *Contributions to geology*, p. 158, pl. V, fig. 164), avec laquelle elle a de très-grands rapports. Dans la coquille de l'Alabama, la callosité recouvre une grande partie de la coquille, même une grande partie du dernier tour et la partie à l'intérieur de la courbe formée par le canal postérieur. Cette callosité cache des ornements assez nombreux formés de rides transverses recoupées par des stries longitudinales. La coquille de Mons est beaucoup moins enroulée par la callosité; la moitié du dernier tour est entièrement à nu, ainsi que toute la partie antérieure de la spire circonscrite par le canal postérieur. Cette particularité nous

permet de constater que ses ornements sont beaucoup moins complexes ; ils ne consistent qu'en des rides faiblement accusées et des stries de croissance.

FIG. 1a, vue latérale, grandeur naturelle.

— 1b, vue du côté de l'ouverture, grandeur naturelle.

Famille : MURICIDES.

—

Genre **TRITON**, Monfort, 1810.

(Voy. 1<sup>re</sup> partie, p. 4.)

Nous avons décrit, dans notre première partie, trois espèces de ce genre. Nous en ajoutons trois autres que nous a fournies le puits Coppée, ce qui porte à six le nombre total des Tritons rencontrés jusqu'à ce jour dans le calcaire grossier de Mons.

**TRITON CURTULUM.** Br. et C.

Pl. XIII, fig. 7a, b, c.

(Voy. 1<sup>re</sup> partie, p. 7, pl. 1, fig. 4a, b, c.)

Nous possédons, du puits Coppée, des spécimens moins frustes que celui que nous avons dessiné et décrit en 1870 et qui nous permettent de compléter ce que nous avons dit des ornements. Les côtes transverses des tours ne sont pas simples, mais traversées par des stries longitudinales dessinant parfois de minces filets au nombre de trois principaux, le médian à la carène de la base, l'antérieur qui reçoit le retour de la spire et le postérieur à la même distance en arrière. Toute la surface est polie. La dent columellaire antérieure est formée par le relèvement du bord gauche à l'extrémité du canal, de sorte qu'il n'y en a, à proprement parler, que deux. Quant au canal, il est un peu plus long que nous ne l'avions cru, et il a son extrémité quelque peu rejetée en arrière.

La troncature de la spire et son remplacement par une spire plate et sans ornements n'existent pas toujours. Nous en avons vu un spécimen qui a sa

spire intacte dans la collection de notre excellent ami M. Potier, à Paris. Cela ne constitue, du reste, qu'une très-rare exception.

Nous croyons devoir donner le dessin d'un de nos spécimens bien conservé.

- FIG. 7*a*, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.  
 — 7*b*, vue par-dessus, grossie trois fois.  
 — 7*c*, grandeur naturelle.

TRITON SUBLEVE, *Nov. sp.*Pl. XIII, fig. 4*a*, *b*, *c*.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,014 ? — 100
	Largeur — . . . . .	0,007 ? — 50
	Hauteur de l'ouverture . . . . .	0,006 ? — 45
	Angle apical . . . . .	45°

Coquille assez petite, mince, composée de six ou sept tours arrondis, s'enroulant sous un angle régulier, séparés par des sutures profondes et bien marquées; ces tours sont ornés de côtes transverses ou bourrelets arrondis au nombre de deux ou trois pour une révolution de la spire, plus ou moins saillants et prolongés, se montant sur tous les tours depuis le sommet de la spire jusqu'à l'ouverture, séparés par de larges intervalles dans lesquels ne se montrent que quelques côtes également transverses, assez vaguement accusées, assez espacées, un peu tuberculeuses au milieu; tous ces ornements sont parallèles à de fines stries de croissance et recoupés par des stries longitudinales plus fines encore.

*Remarques.* — Nous devons nous borner à cette description incomplète, la plus grande partie de l'ouverture manquant à l'unique spécimen que nous possédons de cette espèce assez remarquable. Une petite dent columellaire postérieure est conservée, mais nous ignorons s'il s'en trouvait d'autres en avant et s'il y en avait au bord droit. La détermination générique est cependant fort peu douteuse, et l'espèce est assez bien caractérisée par l'absence de tout ornement hormis les bourrelets périodiques et quelques côtes à peine visibles. Sous ce rapport, elle ne peut être confondue avec aucune des espèces de Mons ou du bassin de Paris. Le *T. formosum*, Desh. (1865, III, p. 310, pl. LXXXVI, fig. 4-6) est celui qui semble s'en approcher le plus, mais ses ornements sont bien plus compliqués.

- FIG. 4*a*, vue par-dessus, grossie trois fois.  
 — 4*b*, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.  
 — 4*c*, grandeur naturelle.

**TRITON MULTICOSTATUM, *Nor. sp.***

Pl. XIII, fig. 5a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,015	—	100
Largeur — . . . . .	0,0065	—	50
Hauteur de l'ouverture . . . . .	0,0075	—	42
Angle apical . . . . .			53°

Coquille assez petite, conique, composée de cinq tours arrondis, s'enroulant sous un angle un peu convexe, séparés par des sutures assez profondes et bien marquées, ornés de côtes transverses simples, au nombre de vingt à vingt-deux pour une révolution de la spire, assez saillantes, peu régulières, arquées, parallèles aux stries d'accroissement et ne se prolongeant pas sur la base; des côtes variquenses assez rares, moins de deux pour une révolution de la spire, et assez larges, interrompent la régularité de ces ornements. Ouverture subquadrangulaire, presque droite, rétrécie en arrière, terminée en avant par un canal court; bord droit arqué, un peu infléchi vers le milieu, portant cinq dents, la postérieure écartée du bord gauche par un intervalle assez large, forte et saillante, les autres diminuant progressivement jusqu'à l'antérieure qui, cependant, redevient un peu plus forte; bord columellaire fortement infléchi à la base de la columelle; cette dernière, un peu oblique, renversée dans l'ouverture, portant six dents inégales, assez peu élevées.

*Remarques.* — Cette espèce est très-voisine du *T. simplicicostatum*, Br. et C. (1<sup>re</sup> partie, p. 6, pl. 1, fig. 3a, b, c,) et n'en est peut-être qu'une variété. Elle s'en distingue, un peu par ses dimensions proportionnelles, et principalement par les dents columellaires plus nombreuses.

Fig. 5a, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.

— 5b, vue par dessus, grossie trois fois.

— 5c, grandeur naturelle.

**TRITON PLANISULCATUM, *Nor. sp.***

Pl. XIII, fig. 6a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0085	—	100
Largeur — . . . . .	0,004	—	47
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0045	—	55
Angle apical . . . . .			42°

Coquille assez petite, conique, composée de six tours convexes s'enroulant régulièrement, séparés par des sutures profondes et bien marquées; ces tours sont ornés de côtes



transverses, droites ou arquées, arrondies, assez fortes, au nombre de dix pour une révolution de la spire au dernier tour, mais un peu plus nombreuses vers le sommet, séparées par des sillons plats parallèles aux stries de croissance, occupant toute la largeur du tour mais ne se prolongeant pas sur la base, interrompues par des côtes périodiques variqueuses, beaucoup plus saillantes, plus longues et se reproduisant à peu près tous les demi-tours. Ouverture ovale, arrondie, légèrement oblique, rétrécie à la partie postérieure, terminée en avant par un canal court; le bord droit largement arqué, renflé à l'intérieur, portant cinq dents saillantes à peu près égales et également espacées; le bord columellaire fortement infléchi à la base de la columelle; celle-ci droite, avec deux petites dents vers le milieu.

*Remarques.* — Voisine du *T. Simplicicostatum* Br. et C. (1<sup>re</sup> partie, p. 6, pl. I, fig. 3*a*, *b*, *c*.) par sa forme élancée, cette espèce s'en distingue par le nombre de dents columellaires et par la disposition des côtes transverses moins nombreuses, séparées par des sillons plats et s'écartant de plus en plus vers l'ouverture.

- FIG. 6*a*, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.  
 — 6*b*, vue par-dessus, grossie trois fois.  
 — 6*c*, grandeur naturelle.

Genre *TURBINELLA*. Lamk, 1790.

(Voy. 1<sup>re</sup> partie, p. 8.)

Nous ajoutons deux nouvelles et magnifiques espèces aux deux déjà décrites dans notre première partie. Le nombre des espèces connues jusqu'à présent dans le calcaire grossier de Mons s'élève donc de deux à quatre.

*TURBINELLA RETICULATA*, *Nov. sp.*

Pl. XII, fig. 9*a*, *b*.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,010 — 100
	Largeur — . . . . .	0,018 — 45
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,025 — 57
	Angle apical. . . . .	42°

Assez grande coquille fusiforme, composée de neuf tours convexes, s'enroulant régulièrement en une spire aiguë, séparés par des sutures profondes et ondulées. Ces tours sont ornés de très-grosses côtes transverses, tuberculeuses, droites, au nombre de six ou sept

pour une révolution de la spire, commençant en avant de la suture postérieure et se prolongeant sur la base jusqu'à l'origine du canal; toute la surface de la coquille est recouverte de filets longitudinaux très-fins et très-nombreux, fort irréguliers en grosseur et en espacement, un peu plus gros à la partie saillante des tours, recoupés presque à angle droit par d'autres filets beaucoup plus irréguliers, plus minces, lamelleux, parallèles aux stries de croissance. Base conique. Ouverture oblique, allongée, aiguë en arrière, terminée en avant par un canal assez long et rejeté en arrière; columelle très-forte, tordue, recouverte d'un bord gauche assez mince, infléchi à sa base, renflée à l'origine du canal, portant, en arrière de ce renflement, un pli oblique assez fort, et un peu plus loin un second pli beaucoup plus petit.

*Remarques.* — Le petit pli postérieur ne se voit bien que quand une assez grande partie du bord droit est enlevée.

Quoique la forme générale de cette espèce se rapproche beaucoup de celle des espèces déjà décrites dans notre première partie (pp. 9 et 10), elle ne pourra cependant jamais être confondue avec elles à cause de ses ornements treillisés et plus nombreux, et de la disposition des plis columellaires. Elle appartient également, du reste, au groupe du *Fusus uniplicatus*, Lamk (*Deshayes*, 1824, II, p. 536, pl. XCVI<sup>bis</sup>, fig. 1-2) qui doit changer de genre ainsi que plusieurs autres espèces, et dont elle se distingue aussi par ses ornements extérieurs plus serrés et plus nombreux.

Fig. 9a, vue du côté de l'ouverture, grandeur naturelle.

— 9b, vue par-dessus, grandeur naturelle.

**TURBINELLA GRANULOSA.** *Nov. sp.*

Pl. XIV, fig. 1a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,027 ? — 100
Largeur — . . . . .	0,0105 — 59
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,015 — 56
Angle apical . . . . .	55°

Assez grande coquille fusiforme, composée de huit tours convexes, s'enroulant régulièrement en une spire assez aiguë, séparés par des sutures profondes. Ces tours sont ornés de très-grosses côtes transverses, légèrement obliques, parallèles aux stries de croissance, au nombre de six ou sept pour une révolution de la spire, ne correspondant pas d'un tour à l'autre, commençant près de la suture postérieure et se prolongeant au delà de la suture

antérieure qu'elles rendent onduleuse, pour finir avant d'atteindre la forte dépression de la base. Toute la surface de la coquille est recouverte de nombreux filets longitudinaux, dont onze à treize ne sont pas cachés par le retour de la spire; ces filets sont arrondis, séparés par des sillons plats de même largeur, plus serrés vers la suture postérieure, s'élargissant et s'écartant au milieu du tour pour se rapprocher de nouveau et de plus en plus jusqu'à l'extrémité du canal où ils deviennent très-fins et très-serrés; des granules allongés dans le sens longitudinal, fort irréguliers et indépendants des stries de croissance, recouvrent ces filets. Base fortement infléchie à l'origine de la columelle. Ouverture ovale, allongée, droite, aiguë et montrant une petite gouttière à la partie postérieure, terminée en avant par un canal long, oblique, un peu tortueux et rejeté en arrière; le bord droit mince, légèrement crénelé; columelle fortement infléchie à la base, saillante vers le milieu, recouverte d'un bord gauche très-bien limité, épaissi vers la suture et se détachant à la partie antérieure d'un bourrelet contournant cette columelle; celle-ci portant deux plis presque transverses entre la base et le renflement.

*Remarques.* — Du même groupe que notre *T. reticulata*, p. 9, elle s'en distingue aisément par sa forme plus allongée et ses ornements moins nombreux et non treillisés. Sous ce dernier rapport, elle est plus voisine du *T. striatula*, Br. et C. (1<sup>re</sup> partie, p. 18, pl. I, fig. 6*a*, *b*, *c*.) dont elle se distingue principalement par son canal rejeté en arrière. Cette dernière espèce affecte plutôt la forme des *Borsonia*, tandis que la présente espèce a plus de rapports avec les *Fusus*, sans cependant que ni l'une ni l'autre puisse appartenir à ces deux genres.

- FIG. 4*a*, vue du côté de l'ouverture, grossie deux fois.  
 — 4*b*, vue par-dessus, grossie deux fois.  
 — 4*c*, grandeur naturelle.

Genre CANCELLARIA. Lamk, 1790.

Le puits Coppée nous a fourni six espèces de ce genre, tandis que nos anciennes fouilles ne nous en avaient procuré qu'une seule. Cela porte à sept le nombre total des cancellaires du calcaire grossier de Mons.

**CANCELLARIA MOURLONI, *Nov. sp.***

Pl. XIV, fig. 5a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,009 — 100
Largeur — . . . . .	0,005 — 56
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,005 — 56
Angle apical . . . . .	46°

Coquille petite, ovale, composée de six tours convexes, s'enroulant régulièrement, séparés par des sutures profondes et ondulées. Le premier tour est lisse et sans ornements, les suivants sont ornés de côtes transverses parallèles aux stries de croissance, très-fortes à la suture postérieure, se prolongeant quelquefois très-avant sur la base ou s'arrêtant un peu en arrière de la suture antérieure en laissant la base entièrement lisse; ces côtes sont au nombre de douze pour une révolution de la spire; elles sont traversées, au tiers postérieur du tour, par un filet longitudinal vague, formant une carène obtuse et rendant les côtes transverses un peu granuleuses; un second filet se trouve en avant et un troisième en arrière de cette carène, mais sont beaucoup moins bien acusés. Ouverture ovale, oblique, à bord continu, arrondie en arrière, terminée en avant par un canal court; le bord droit largement arqué, épaissi en un bourrelet intérieur portant onze plis transverses répartis sur toute la longueur, les six antérieures plus faibles et plus serrés; le bord gauche assez épais, détaché du tour précédent sur environ les deux tiers antérieurs, relevé en une callosité assez forte près de la suture, portant trois plis sur le renflement de la columelle, le postérieur très-fort, l'antérieur beaucoup plus faible.

*Remarques.* — Cette espèce a la spire plus pointue que notre *C. biplacata* (1<sup>re</sup> partie, p. 12, pl. I, fig. 7a, b, c). Elle est très-voisine du *C. separata*, Desh. (1864, III, p. 97, pl. LXXII, fig. 20-22), espèce du calcaire grossier, mais elle a le labre beaucoup plus dilaté.

- FIG. 5a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.  
 — 5b, vue par-dessus, grossie quatre fois.  
 — 5c, grandeur naturelle.

**CANCELLARIA DUPONTI, *Nov. sp.***

Pl. XIV, fig. 4a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,006 — 100
Largeur — . . . . .	0,0055 — 58
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,004 — 67
Angle apical . . . . .	55° à 60°

Petite coquille ovale, composée de cinq tours arrondis, séparés par des sutures profondes et simples, s'enroulant régulièrement. Les deux premiers tours sont lisses et sans orne-

ments; les suivants sont ornés de côtes transverses assez peu régulières, commençant en avant de la suture postérieure et devenant un peu tuberculeuse au delà d'une légère dépression longeant la suture, au nombre de douze à quatorze pour une révolution de la spire, devenant fort vagues et fort irrégulières au dernier tour où elles se confondent avec les plis de croissance. Ouverture ovale, oblique, aiguë en arrière, arrondie en avant; le bord droit simple, largement arqué; le bord gauche très-mince; columelle tordue, portant deux plis obliques assez forts sur son renflement, et un pli embryonnaire en avant.

*Remarques.* — Les ornements de cette espèce sont très-simples; c'est ce qui la distingue de celles déjà décrites. Elle ne peut être, pensons-nous, le jeune âge d'une espèce plus grande.

Nous n'avons rien trouvé d'analogue dans les collections de l'École des mines de Paris, ni dans les descriptions des auteurs.

FIG. 4a, vue du côté de l'ouverture, grossie cinq fois.

— 4b, vue par-dessus, grossie cinq fois.

— 4c, grandeur naturelle.

CANCELLARIA CREPINI, *Nov. sp.*

PL. XIV, fig. 6a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,009	— 100
	Largeur — . . . . .	0,003 ?	— 56
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,005	— 56
	Angle apical . . . . .		50°

Petite coquille ovale, subfusiforme, composée de cinq ou six tours arrondis, s'enroulant régulièrement, séparés par des sutures profondes. Les deux premiers tours sont lisses et sans ornements, les suivants sont ornés de côtes transverses, irrégulières, un peu obliques et sinuées, parallèles aux stries de croissance, au nombre de douze à quatorze pour une révolution de la spire, relativement très-fortes, mais diminuant de saillie au dernier tour, commençant en avant de la suture postérieure et se prolongeant au delà de la suture antérieure qu'elles rendent un peu onduleuse; ces ornements sont traversés par des filets longitudinaux irréguliers, dont deux au milieu du tour plus saillants que les autres. Ouverture grande; bord columellaire tordu, infléchi à la base de la columelle; cette dernière portant sur une assez forte saillie au delà de cette inflexion deux plis très-forts, le postérieur beaucoup plus saillant que l'autre.

*Remarques.* — Cette coquille est très-rare et nous ne la possédons pas à l'état complet. C'est une espèce beaucoup plus ornée que celles que nous

avons décrites jusqu'à présent. Une coquille, également très-rare dans le bassin de Paris, le *C. spectabilis*, Desh. (1864, III, p. 492, pl. LXXII, fig. 23-25) en est assez voisin, mais elle a trois plis à la columelle au lieu de deux.

FIG. 6a, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.

— 6b, vue par-dessus, grossie trois fois.

— 6c, grandeur naturelle.

CANCELLARIA CARINATA. *Nov. sp.*

Pl. XIV, fig. 5a, b, c.

DIMENSIONS : ?

Angle apical . . . . . 60° à 65°

Coquille composée de plus de cinq tours s'enroulant régulièrement et séparés par des sutures profondes. Ces tours sont très-saillants à la partie postérieure où ils forment une carène assez prononcée; ils sont ornés de côtes transverses très-élevées, séparées par des sillons arrondis, larges et profonds, au nombre de dix ou douze pour une révolution de la spire, traversées par des filets dont deux très-faibles postérieurs à la carène et quatre autres antérieurs beaucoup plus saillants, le quatrième recevant le retour de la spire, tous acquérant un peu plus de saillie en traversant les côtes et dessinant avec elles un réticule irrégulier, très-bien marqué, allongé dans le sens longitudinal; des côtes et des filets semblables se remarquent sur toute la base, où ils dessinent un réticule semblable.

*Remarques.* — L'unique spécimen que nous possédons de cette espèce est fort incomplet. Cependant, le genre n'en peut être douteux et ce que nous en disons suffit pour la bien caractériser. Tout ce que nous pouvons ajouter quant aux particularités de l'ouverture, c'est que le bord gauche est très-mince et laisse facilement voir les ornements du tour précédent, et que la columelle portait plusieurs plis, le postérieur plus fort que les autres.

Cette espèce appartient au groupe du *C. evulsa*, Sow. (*Min. conch.*, pl. CCCLXI, fig. 2-4) et du *C. subevulsa*, espèce des sables inférieurs que d'Orbigny a séparée de la précédente laquelle est de l'étage du calcaire grossier et se rencontre fréquemment à Barton-Cliff, en Angleterre. Mais les ornements de notre espèce sont plus simples et ne comportent pas, entre

autres, les côtes variqueuses et épaisses qui interrompent la régularité des autres.

FIG. 5a et 5b, vues grossies trois fois.  
— 5c, grandeur naturelle.

CANCELLARIA MALAISI. *Nov. sp.*

Pl. XIV, fig. 2a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille. . . . .	0,006	— 100
Largeur — . . . . .	0,0053	— 58
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,005	— 50
Angle apical . . . . .		40° à 45°

Petite coquille ovale, composée de cinq tours convexes, s'enroulant régulièrement, séparés par des sutures profondes et ondulées. Le premier tour est lisse et sans ornements, les autres sont ornés de côtes transverses très-fortes, parallèles aux stries de croissance, occupant toute la largeur du tour et se prolongeant sur toute la base, au nombre de dix pour une révolution de la spire; ces côtes sont traversées par des filets longitudinaux dont quatre occupent à peu près les deux tiers antérieurs des tours, le postérieur plus fort que les autres, ceux-ci diminuant progressivement de saillie jusqu'à un cinquième filet sur lequel se fait le retour de la spire; quelques filets longitudinaux se remarquent également sur la base, mais de plus en plus faibles et disparaissant bientôt. Ouverture ovale, oblique, arrondie en arrière, terminée en avant par un canal court; le bord largement arqué, épaissi à l'intérieur en un bourrelet portant huit plis à peu près égaux répartis sur toute la longueur; le bord gauche assez épais, détaché du tour précédent sur environ ses deux tiers antérieurs, portant une callosité en forme de pli à la partie postérieure près de la suture; columelle très-forte, infléchie à la base et portant sur le renflement, trois plis, le postérieur très-fort, l'antérieur beaucoup plus faible.

*Remarques.* — Cette espèce est très-voisine du *C. Mourloni* Br. et C. (p. 12). Toutes deux ont le même aspect et les mêmes proportions. Seulement, les ornements transverses de cette dernière sont beaucoup moins forts et les plis du bord droit plus nombreux (onze au lieu de huit). Elle est également très-voisine du *C. striatula*, Desh. (1824, II, p. 503, pl. XXXIX, fig. 29-30, et 1865, III, p. 106) qui a les côtes transverses beaucoup moins fortes et plus nombreuses.

FIG. 2a, vue du côté de l'ouverture, grossie cinq fois.  
— 2b, vue par-dessus, grossie cinq fois.  
— 2c, grandeur naturelle.

*CANCELLARIA INCOMPTA*, *Nor. sp.*

Pl. XIV, fig. 7a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0035 —	100
Largeur — . . . . .	0,005 —	56
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,005 —	56
Angle apical . . . . .		50°

Petite coquille ovale, composée de quatre à cinq tours arrondis, s'enroulant régulièrement, séparés par des sutures profondes et simples. Ces tours sont lisses et sans ornements, recouverts seulement de stries de croissance très-fines, une légère dépression longeant la suture à la partie postérieure du dernier tour. Ouverture ovale, oblique, terminée en arrière par un angle arrondi et en avant par un canal court; le bord droit largement arqué, un peu saillant à l'angle antéro-postérieur, avec un large renflement intérieur sur lequel on remarque dix dents très-serrées, laissant un grand intervalle libre entre la dernière et l'angle postérieur, l'antérieure plus forte et séparée de la suivante par un intervalle plus grand qu'aux autres; le bord gauche assez mince, attaché sur toute sa longueur, montrant une callosité en forme de dent près de l'angle postérieur; columelle très-forte, tordue et renflée jusqu'au canal, portant deux plis sur le renflement, le postérieur plus fort.

*Remarques.* — Cette espèce, entièrement lisse et sans ornements, se distingue facilement du *C. Malaisei* (p. 45) qui, cependant, appartient au même groupe. Outre cette absence d'ornements, on remarquera que les dents du labre sont beaucoup plus serrées et laissent un plus grand intervalle libre vers l'extrémité postérieure.

Nous n'avons rien trouvé d'analogue à cette espèce dans les collections de l'École des mines de Paris, non plus que dans les descriptions des auteurs.

- FIG. 7a, vue du côté de l'ouverture, grossie cinq fois.  
 — 7b, vue par-dessus, grossie cinq fois.  
 — 7c, grandeur naturelle.

*Genre FUSUS*, Bruguières, 1791.

Nous avons décrit dix espèces de ce genre dans notre première partie. Nous en ajoutons aujourd'hui quatre nouvelles, ce qui porte à quatorze le



nombre total des espèces du calcaire grossier de Mons. De plus, nous revenons sur une de nos anciennes espèces, dont nous n'avions pu nous procurer que des types du jeune âge, ce qui rendait naturellement notre description incomplète.

**Fusus LUCIANI, Br. et C.**

Pl. XV, fig. 1a, b.

Voy. 1<sup>re</sup> partie. p. 24. pl. II, fig. 3a, b, c.

Les fouilles du puits Coppée nous ont procuré un individu complet de cette espèce. Il est d'une taille beaucoup plus grande que celle que nous avons donnée dans notre première partie. De plus, nous avons recueilli quelques fragments qui semblent indiquer une taille plus considérable encore. Voici les dimensions de l'individu que nous avons dessiné, en grandeur naturelle, pour les planches de notre troisième partie.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,058 — 100
Largeur — . . . . .	0,028 — 74
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,027 — 75
Angle apical. . . . .	85°

La description que nous en avons donnée en 1870 est fautive et incomplète en quelques points. Les tours ne sont pas plats, mais un peu concaves entre la carène formant la circonférence de la base et la carène postérieure; il y a sept filets depuis et y compris celui sur lequel se fait le retour de la spire jusqu'à celui de la carène postérieure, et un septième en arrière de cette carène; la base est ornée de filets semblables au nombre de seize à dix-huit; tous ces filets sont arrondis et d'autant plus saillants et espacés qu'ils se rapprochent de la circonférence de la base; les sillons les plus larges sont occupés chacun par un filet plus mince et plus élevé; des stries de croissance droites à la base, infléchies en arrière à l'extérieur du tour, recoupent tous ces ornements; l'ouverture est grande, subrhomboidale, atténuée à ses deux extrémités, très-dilatée au milieu; le canal antérieur est très-court, rejeté en arrière et il correspond à un bourrelet contourant la

columelle; le bord droit épais, le bord gauche largement arqué, recouvert jusqu'à l'extrémité antérieure d'une épaisse callosité.

Telles sont les principaux caractères de cette coquille, que l'état trop incomplet de nos premiers spécimens ne nous avait pas permis de signaler. Son canal échancré et beaucoup plus court qu'il ne le paraissait d'abord, son bourrelet antérieur et sa forme ventrue la rapprochent des *Buccins*.

Fig. 1a, vue du côté de l'ouverture, grandeur naturelle.

— 1b, vue par-dessus, grandeur naturelle.

**FUSUS LAPPARENTI, Nov. sp.**

Pl. XIV, fig. 10a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	00,035 — 100
Largeur — . . . . .	0,0025 — 46
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0025 — 46
Angle apical . . . . .	53° à 42°

Petite coquille fusiforme, composée de six à sept tours assez saillants, s'enroulant régulièrement, séparés par des sutures profondes et un peu ondulées. Les deux premiers tours sont lisses et sans ornements, les autres sont ornés de grosses côtes transverses, droites, arrondies, très-saillantes au milieu du tour, commençant à la suture postérieure et se prolongeant très-peu sur la base, au nombre de sept à huit pour une révolution de la spire; ces côtes sont traversées par des filets longitudinaux simples, dont cinq restent à découvert par le retour de la spire, les trois antérieurs plus saillants que les deux autres, séparés par des sillons assez larges au milieu desquels on remarque d'autres filets plus petits mieux marqués sur la zone postérieure où ils deviennent presque égaux aux premiers; toute la base est également recouverte de semblables ornements, devenant plus serrés à mesure que l'on approche du canal. Ouverture assez petite, ovale, aiguë en arrière, terminée en avant par un canal assez court; le bord droit simple, le bord gauche fort infléchi à la base de la columelle, celle-ci simple, assez forte et comme tordue.

*Remarques.* — Les proportions de cette espèce sont un peu variables. Nous en avons rencontré des spécimens plus allongés, mais cela ne suffit pas pour les séparer de l'espèce type. Elle diffère du *F. Potieri*, p. 19, par le canal beaucoup moins long et la spire plus aiguë.

Cette espèce, assez rare dans le calcaire grossier de Mons, est très-voisine, par ses ornements, du *F. interstriatus*, Desh. (1865, III, p. 275, pl. LXXXV,

fig. 13-16), mais elle est beaucoup plus allongée. Du reste, l'espèce française a la columelle plissée et devra probablement changer de genre. La forme générale de notre espèce la rapprocherait assez du *F. intortus*, Lamk (*Ann. du Museum*, VI, pl. XLVI, fig. 4a, b,) également du calcaire grossier, mais qui se rencontre dans beaucoup d'autres localités en dehors du bassin de Paris; seulement les ornements longitudinaux de cette dernière sont beaucoup plus serrés.

- FIG. 10a, vue du côté de l'ouverture, grossie cinq fois.  
 — 10b, vue par-dessus, grossie cinq fois.  
 — 10c, grandeur naturelle.

**FUSCS POTIERI**, *Nov. sp.*

Pl. XIV, fig. 9a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille. . . . .	0,009	— 100
Largeur — . . . . .	0,004	— 44
Hauteur du dernier tour. . . . .	0,0053	— 61
Angle apical. . . . .	50° à 55°	

Assez petite coquille fusiforme, composée de six tours très-convexes, s'enroulant sous un angle légèrement concave en une spire aiguë, séparés par des sutures profondes un peu ondulées. Les deux premiers tours sont lisses et sans ornements; les suivants portent de grosses côtes transverses, légèrement obliques et parallèles aux stries de croissance, arrondies et très-saillantes, séparées par des sillons larges et profonds commençant à la suture postérieure et se prolongeant très-peu sur la base, au nombre de neuf à dix pour une révolution de la spire; ces côtes sont traversées par des filets longitudinaux simples et bien marqués, surtout à la partie saillante des tours, plus faibles et plus serrés à la partie postérieure et dont neuf ou dix sont laissés à découvert par le retour de la spire; toute la base est également recouverte de semblables filets diminuant de plus en plus de saillie jusqu'au canal. Ouverture subtriangulaire, terminée en avant par un canal assez allongé, droit; le bord droit simple; le bord gauche lisse, infléchi à la base de la columelle; celle-ci droite, allongée, aiguë antérieurement.

*Remarques.* — Cette espèce a un faux air de pleurotome, genre dans lequel, cependant, elle ne peut entrer.

Il y a quelques espèces du bassin de Paris qui s'en approchent assez, surtout le *F. angulatus*, Lamk (*Deshayes*, 1824, II, p. 520, pl. LXXIX, fig. 4, 5, 11, 12) dont les ornements longitudinaux sont beaucoup moins

nombreux et les grosses côtes transverses plus droites. Une espèce du Cotentin, probablement inédite, que nous avons vue dans les collections de l'école des mines de Paris, en est plus voisine encore. Il serait à désirer que la comparaison pût se faire sur un nombre suffisant d'individus. Malheureusement, les deux espèces sont rares.

FIG. 9a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.

— 9b, vue par-dessus, grossie quatre fois.

— 9c, grandeur naturelle.

**FUSUS HEBERTI.** *Nor. sp.*

Pl. XIV, fig. 8a, b, c, d.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,028 — 100
	Largeur — . . . . .	0,008 — 29
	Hauteur de l'ouverture, canal compris . . . . .	0,019 — 70
	Angle apical. . . . .	45° à 45°

Grande coquille fusiforme, très-allongée, composée de huit tours saillants, séparés par des sutures très-profondes, s'enroulant régulièrement sous un angle assez aigu. Ces tours sont ornés d'une carène longitudinale très-prononcée, aiguë, divisant l'extérieur des tours en deux parties sensiblement égales, la postérieure sans ornements, l'antérieure ornée de deux côtes également longitudinales, la première un peu en avant de la carène même, la seconde plus loin encore, reçoit le retour de la spire; ces deux côtes ainsi que la carène sont rendues tuberculeuses par des côtes transverses assez peu régulières, au nombre de dix à douze pour une révolution de la spire; une troisième côte longitudinale, simple, cachée par le retour de la spire, se voit à la circonférence de la base et est suivie de cordonnets plus petits et plus serrés jusqu'à l'extrémité du canal. Ouverture assez petite, ovale, aiguë en arrière, terminée en avant par un canal droit, très-long et très-étroit; columelle aiguë, recouverte d'une mince callosité.

*Remarques.* — Nous n'avons pu nous procurer des individus complets de grande taille de cette espèce; mais quelques fragments de columelle qui lui appartiennent incontestablement, semblent indiquer que parfois l'espèce pouvait atteindre une longueur de dix à douze centimètres. Un de nos spécimens, au lieu d'avoir la columelle droite, l'a renversée en arrière: c'est probablement un accident, car les autres particularités ne diffèrent en rien et ne nécessitent pas la création d'une espèce distincte.

Cette espèce appartient au groupe du *F. serratus*, Desh. (1824, p. 513,

pl. LXXV, fig. 12, 13). Outre que les ornements de l'espèce de Deshayes sont beaucoup plus nombreux, la carène de l'espèce de Mons est beaucoup plus saillante et elle a, de plus, un peu en avant, la petite côte, tuberculeuse comme elle, ce qui produit comme une double rangée de tubercules.

Fig. 8a et 8b, deux vues, grossies deux fois, du spécimen à columelle courbe.  
 — 8c, grandeur naturelle du même.  
 — 8d, spécimen à l'état normal, grandeur naturelle.

#### FUSUS MCNIERI.

Pl. XIV, fig. 11a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,010	— 100
Largeur — . . . . .	0,004	— 40
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0035	— 35
Angle apical . . . . .		42°

Assez petite coquille fusiforme, composée de six à sept tours s'enroulant régulièrement sous un angle assez aigu, presque plats, séparés par des sutures peu profondes mais bien marquées. Ces tours sont lisses et sans ornements, si ce n'est quelques stries de croissance. Base conique, terminée à sa circonférence par une carène obtuse; ouverture allongée, oblique, aiguë en arrière, terminée en avant par un canal court; bord droit largement arqué; bord columellaire infléchi au milieu, recouvert d'une mince et brillante callosité.

*Remarques.* — L'absence presque complète d'ornements range cette espèce dans le groupe du *F. bulbiformis*, Lamk, avec laquelle, cependant, on ne pourra jamais la confondre. C'est, du reste, une forme un peu spéciale, n'ayant pas d'analogue dans le bassin de Paris.

Elle se rapproche plutôt de notre *F. canaliculatus* (1<sup>re</sup> partie, p. 26, pl. 1, fig. 40a, b, c,) dont le canal est moins allongé, l'angle apical plus ouvert et les dimensions proportionnelles toutes différentes.

Cette espèce est très-rare dans le calcaire grossier de Mons.

Fig. 11a, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.  
 — 11b, vue par-dessus, grossie trois fois.  
 — 11c, grandeur naturelle.

Famille : BUCCINIOES.

Genre **BUCCINUM**, Linné, 1767.

Nous ajoutons une espèce aux deux précédemment décrites. Mais comme une de ces dernières doit changer de genre pour entrer dans le genre *Harpopsis* de Mayer, le nombre des *Buccins* du calcaire grossier de Mons reste toujours de deux.

**BUCCINUM LONGULUM**, *Nov. sp.*

Pl. XIII, fig. 11a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,007 — 100
Largeur — . . . . .	0,005 — 45
Hauteur de l'ouverture . . . . .	0,004 — 57
Angle apical. . . . .	47°

Coquille assez petite, ovale, composée de cinq tours convexes s'enroulant régulièrement, séparés par des sutures profondes et bien marquées, les deux premiers lisses et sans ornements, les autres ornés de côtes transverses striées en long, assez irrégulières, séparées par des sillons profonds occupant toute la surface de la coquille, recoupées par des côtes longitudinales de même forme et sensiblement de mêmes dimensions, produisant à la rencontre des premières des granulations parfois fort régulières. Base conique; ouverture allongée, ovale, oblique, aiguë en arrière, terminée en avant par une échancrure produisant un bourrelet peu saillant revenant dans l'ouverture en contournant la columelle; le bord droit simple, largement arqué; le bord gauche un peu infléchi à la base de la columelle.

*Remarques.* — Cette espèce est très-rare. Elle se distingue du *B. Montense*, Br. et C. (1<sup>re</sup> partie, p. 30, pl. II, fig. 9a, b, c, d,) par son facies tout différent, et surtout par l'ouverture proportionnellement beaucoup plus allongée. Elle se rapproche davantage, pensons-nous, du *B. deceptum*, Desh. sp. *Fusus deceptus* Defr. (Deshayes, 1824, II, p. 552, pl. LXXVI, fig. 7-9; et 1865, III, p. 504, pl. XCIV, fig. 19-20.) C'est une espèce des sables inférieurs de Chalons-sur-Vesles, mais qui paraît remonter jusque

dans le calcaire grossier inférieur. Mais, pour cette espèce aussi, de plus grande taille d'ailleurs, la distinction est facile à cause de la longueur proportionnelle de l'ouverture beaucoup plus grande dans l'espèce de Mons. Toutes les espèces du bassin de Paris ont l'ouverture moins allongée.

Fig. 11a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.

— 11b, vue par-dessus, grossie quatre fois.

— 11c, grandeur naturelle.

Genre **HARPOPSIS**, Mayer.

Nous ne connaissons que le nom de ce nouveau genre de Mayer, sans en connaître les caractères distinctifs. Nous savons également qu'il a été créé spécialement pour retirer des *Buccinum* le *B. stromboïdes* et toutes les coquilles de cette forme. Nous ne l'aurions pas signalé, bien que le *B. stromboïdes* ait été recueilli par nous dans le calcaire grossier de Mons, si une forme analogue et nouvelle n'était venue s'y ajouter.

**HARPOPSIS STROMBOIDES**, Mayer, *sp.*

SYNONYMIE : *Buccinum stromboïdes*, Herman, 1781

(Voy. 1<sup>re</sup> partie, p. 28.)

**HARPOPSIS TRITONOIDES**, *Noc. sp.*

Pl. XIII, fig. 10a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,010	— 100
	Largeur — . . . . .	0,0065	— 65
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,007	— 70
	Angle apical . . . . .		65°

Coquille assez petite, ovale, globuleuse, solide, composée de cinq tours arrondis, s'enroulant régulièrement en une spire courte, le dernier très-développé, séparés par des sutures profondes et bien marqués. Ces tours portent, pour tout ornement, des stries de croissance très-fines, devenant irrégulières et se groupant en sillons transverses au der-

nier tour. Ouverture grande, ovale, allongée et assez large, un peu oblique, l'angle postérieur arrondi, terminée en avant par un canal très-court; le bord droit largement arqué, la partie extérieure peu courbée, renflé à l'extérieur et principalement à l'intérieur en un large bourrelet; le bord gauche recouvert d'une mince callosité, infléchi au milieu; la columelle solide, un peu tordue, contournée antérieurement par un bourrelet partant du canal et qui en est séparé vers la pointe par une dépression ombilicale étroite, mais profonde.

*Remarques.* — Cette curieuse coquille, dont nous ne possédons qu'un seul spécimen, est assez remarquable en ce sens qu'elle semble n'être que la miniature de l'*Harpopsis stromboïdes* (Buccinum, Hermann) (voy. 1<sup>re</sup> partie, p. 28, pl. II, fig. 10a, b) sans cependant en être le jeune âge. En effet, le bourrelet du labre indique qu'elle était parvenue ou à peu près, à toute sa croissance. Nous signalerons, cependant, une particularité, c'est que la trace d'un bourrelet précédent existe déjà un peu en arrière et se voit parfaitement à l'intérieur comme à l'extérieur de la coquille, ce qui constitue une ressemblance de plus. Les ressemblances, du reste, s'arrêtent là : les proportions sont loin d'être les mêmes, l'ouverture du *B. stromboïdes* est plus étroite et moins grande, et la partie antérieure porte des plis longitudinaux qui n'existent pas dans l'espèce que nous décrivons.

Comme nous l'avons dit, le *B. stromboïdes* doit entrer dans le genre *Harpopsis*, de Muller, et notre nouvelle espèce doit l'y suivre. Mais d'un autre côté, cette dernière a un canal antérieur véritable, et, à ce point de vue, s'écarte notablement du *Stromboïdes* pour se rapprocher du genre *Triton*. Signalons ici sa grande ressemblance avec une espèce vivante décrite par M. Crosse dans le *Journal de Conchytiologie* (1871, p. 174, pl. VI, fig. 9 et 10) sous le nom de *Tritonium Schwartzianum*, mais que l'auteur, cependant, rapproche de plusieurs *Buccins*.

- FIG. 10a, vue du côté de l'ouverture, grossie deux fois et demie.  
 — 10b, vue par-dessus, grossie deux fois et demie.  
 — 10c, grandeur naturelle.



Genre **PSEUDOLIVA**, Swainson, 1840.

(Voy. 1<sup>re</sup> partie, p. 31.)

Une nouvelle espèce de *Pseudoliva* a été trouvée au puits Coppée. Par contre, nous avons dû en supprimer une de notre première partie, le *P. canaliculata*, dont nous avons recueilli quelques spécimens de grande taille qui nous ont prouvé qu'il n'est que le jeune âge du *P. robusta*. Nous transférons le nom de *Canaliculata* à la nouvelle espèce du puits Coppée.

Il résulte de ceci que le nombre des espèces de ce genre du calcaire grossier de Mons reste fixé comme nous l'avions dit dans notre première partie, c'est-à-dire à neuf.

**PSEUDOLIVA ROBUSTA**, Br. et C.

(Voy. 1<sup>re</sup> partie, p. 32, pl. III, fig. 1a, b et *P. canaliculata*, Br. et C., p. 33, pl. III, fig. 1a, b, c.

Nous n'avions recueilli d'abord, de cette espèce, que des individus incomplets et en petit nombre. Les fouilles du puits Coppée nous en ont procuré une quantité bien plus considérable, dont quelques-uns sont tout à fait complets et d'une parfaite conservation.

Les dimensions proportionnelles sont assez variables; plus allongés généralement que le spécimen dessiné en 1870, quelques-uns se rapprochent du *P. prima*, Defr. sp. (*Struthiolaria*, Defr. *Buccinum*, Desh.), mais sans jamais atteindre à sa forme élancée. Voici les dimensions de l'individu complet qui s'en rapproche le plus, et que nous croyons inutile de reproduire par le dessin.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,056 — 100
	Largeur — . . . . .	0,056 — 65
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,041 — 75
	Angle apical . . . . .	95°

Nous n'avons, du reste, aucune particularité bien saillante à signaler. Le bord droit, largement arqué, est mince et tranchant, mais s'épaissit rapidement; il porte une dent très-forte et très-saillante vers le tiers antérieur correspondant au large et profond sillon de l'extérieur du tour.

Dans nos remarques sur le *P. canaliculata* (1<sup>re</sup> partie, p. 24), nous émettions l'avis que cette espèce pourrait bien être le jeune âge du *P. robusta*. Nous ajoutons qu'il y avait, cependant, trop de différence dans la taille et les autres caractères des deux coquilles pour pouvoir les identifier avant de posséder les formes intermédiaires. Les fouilles du puits Coppée nous ont fourni ces formes intermédiaires, de sorte que les deux espèces n'en doivent plus former qu'une seule sous le nom de *P. robusta*.

Cette espèce a acquis, depuis que nous l'avons décrite en 1870, une importance paléontologique aussi remarquable qu'inattendue, en ce sens qu'elle a été recueillie par M. Hébert, à Montainville et à Port-Marly, en plein calcaire pisolitique. Nous avons pu conclure de ce fait et d'autres faits analogues, d'abord, que la place du calcaire grossier de Mons dans la série de nos assises tertiaires est bien celle que nous lui avons assignée dans le principe; ensuite, que le calcaire pisolitique, que quelques géologues rangent encore dans la formation crétacée, doit nécessairement être remonté dans les assises tertiaires dont il formerait le terme inférieur dans le bassin de Paris. (Voy. Introduction de cette troisième partie.)

**PSEUDOLIVA CANALICULATA, Nov. sp.**

Pl. XIII, fig. 8a, b.

(Non *P. canaliculata*, 1<sup>re</sup> partie, p. 23, pl. III, fig. 4a, b, c.)

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,051 — 100
Largeur — . . . . .	0,013 — 49
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,018 — 59
Angle apical . . . . .	45°

Coquille de moyenne grandeur, ovale, allongée, deux fois aussi longue que large, composée de six ou sept tours s'enroulant en une spire légèrement convexe, séparés par des sutures canaliculées. Ces tours sont ornés de côtes transverses, saillantes, obliques, au nombre de onze ou douze pour une révolution de la spire, commençant à la suture postérieure qu'elles surplombent et finissant antérieurement avant d'atteindre le sillon caractéristique du genre; ce sillon est très-bien marqué et se fait un peu en avant du retour de la spire. La surface antérieure de la base porte des stries longitudinales nombreuses, interrompues par des sillons parallèles irréguliers au nombre de six; la surface postérieure porte aussi des sillons analogues, également espacés, mais beaucoup plus faibles et

ne se prolongeant pas jusqu'au milieu du tour; des stries de croissance, non parallèles aux côtes transverses, recourent tous ces ornemens. Ouverture assez grande, ovale, terminée en arrière par une petite gouttière et en avant par une tronçature oblique et peu profonde; le bord columellaire largement infléchi, aigu en avant, recouvert sur toute sa longueur d'une large callosité qui s'avance en arrière sur le tour précédent et qui produit, au dernier tour, une bande inclinée, plus ou moins large, longeant la suture et striée tangentiellement au tour précédent; le bord droit largement arqué, tranchant, un peu épaissi en arrière, portant une dent saillante correspondant au sillon caractéristique extérieur et à un court renflement intérieur.

*Remarques.* — Cette espèce se rapproche beaucoup du *P. robusta*, Br. et C. (1<sup>re</sup> partie, p. 32, pl. III, fig. 1a, b), mais elle s'en distingue aisément par sa forme beaucoup plus allongée.

Ayant réuni au *P. robusta* (p. 26) le *P. canaliculata*, Br. et C. de 1869 (1<sup>re</sup> partie, p. 33, pl. III, fig. 4a, b, c) qui n'en est que le jeune âge, nous transférons ce dernier nom à la présente espèce qui a également la suture canaliculée.

Il est extraordinaire que cette espèce, assez commune dans le calcaire grossier de Mons au puits Coppée, n'ait pas été rencontrée lors de nos premières fouilles au puits Goffin. Le puits Coppée nous a fourni un nombre assez considérable de spécimens parfaitement conservés.

FIG. 8a, vue du côté de l'ouverture, grandeur naturelle.

— 8b, vue par-dessus, grandeur naturelle.

Famille : CONIDES.

—

Genre **PLEUROTOMA**, Lamk, 1810

(Voy. 1<sup>re</sup> partie, p. 50.)

Aux sept espèces précédemment décrites, nous en ajoutons une huitième que nous a fournie le puits Coppée. Nous y avons également recueilli un spécimen complet du *P. ampla*, Br. et C. qui nous a permis de mieux fixer l'espèce et que nous avons cru devoir figurer.

## PLEUROTOMA AMPLA, Briart et Cornet.

Pl. XV, fig. 7.

(Voy. 1<sup>re</sup> partie, p. 51, pl. IV, fig. 8.)

*Remarques.* — Plusieurs beaux spécimens tout à fait complets de cette espèce ont été recueillis au puits Coppée. Elle atteint une taille bien plus considérable que nous n'aurions pu le supposer. C'est certainement une des plus grandes espèces du genre. Nous donnons le dessin du plus grand spécimen qui a été trouvé et qui nous permet d'en donner les dimensions exactes, peu différentes du reste de celles que nous avons données dans notre première partie.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,125 — 100
	Largeur — . . . . .	0,062 — 50
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,077 — 62

Nous pouvons aussi compléter la description. L'ouverture est ovale, oblique, terminée en arrière par un angle fort aigu et en avant par un long canal oblique; le bord columellaire est recouvert d'une callosité très-épaisse à l'origine du canal et à l'angle postérieur; le labre est tranchant et crénelé. Nous ferons remarquer également que les ornements longitudinaux, très-nettement accusés parfois chez les individus jeunes, s'effacent peu à peu et finissent par disparaître ou par devenir des plis vaguement accusés comme ceux de la base ou de la partie postérieure des tours.

Cette espèce doit-elle changer de genre? Les spécimens incomplets que nous avaient procurés les premières fouilles dans le calcaire grossier de Mons, affectaient beaucoup plus que les individus complets du puits Coppée la forme et le faciès des Pleurotomes. A l'inspection du dessin, que nous donnons aujourd'hui, chacun sera frappé de la grande ressemblance de notre spécimen avec quelques *fusus* actuellement vivants. Cependant, on remarquera également que l'échancre du bord droit est beaucoup plus prononcée chez notre espèce que chez ces fuseaux, et, en outre, que cette échancre ne se fait pas sur la carène, comme il arrive à ces derniers, mais en arrière, à peu

près à mi-distance de cette carène à la suture. Or, c'est bien là le véritable caractère des Pleurotomes, et nous ne voyons pas de motifs suffisants pour modifier ce qui a été fait en premier lieu.

FIG. 7, grandeur naturelle.

**PLEUROTOMA DEWALQUEI, Nov. sp.**

Pl. XV, fig. 2a, b.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,051 — 100
	Largeur — . . . . .	0,015 — 42
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,025 — 74
	Angle apical . . . . .	55°

Coquille assez grande, fusiforme, allongée, composée de huit tours, s'enroulant en une spire saillante sous un angle un peu concave, presque plats et même infléchis au milieu. Ces tours sont fortement carénés à la partie antérieure correspondant à la circonférence de la base, et sont ornés de côtes obliques, très-courtes, très-fortes à la carène où elles commencent brusquement en se prolongeant très-peu sur la base et formant, aux tours précédents et le long de la suture, une bande de tubercules plus ou moins réguliers au nombre de quinze environ pour une révolution de la spire; ces côtes sont parallèles aux stries de croissance, lesquelles forment un sinus bien marqué en arrière de la carène, où elles sont traversées par de nombreux filets longitudinaux très-minces et très-serrés. Ouverture oblique, ovale, aiguë à la partie postérieure, terminée en avant par un canal très-long et très-étroit.

*Remarques.* — Cette espèce se distingue du *P. ampla*, Br. et C. (1<sup>re</sup> partie, p. 51, pl. IV, fig. 8. Voyez aussi 3<sup>me</sup> partie, p. 28) par la longueur du canal et les tubercules moins tranchants et moins réguliers de la carène. Ainsi que lui, notre espèce appartient au groupe du *P. dentata*, Lk, mais elle a l'angle apical beaucoup plus ouvert.

FIG. 2a, vue du côté de l'ouverture, grandeur naturelle.

— 2b, vue par-dessus, grandeur naturelle.

Genre **BORSONIA**, Bellardi, 1858.

(Voy. 1<sup>re</sup> partie, p. 60.)

Nous n'avons donné qu'une seule espèce de ce genre dans notre première partie. Nous en ajoutons quatre provenant du puits Coppée, ce qui porte à cinq le nombre total.

**BORSONIA NYSTI**, *Nov. sp.*

Pl. XV, fig. 5a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,014	—	100
Largeur — . . . . .	0,006	—	45
Hauteur de l'ouverture . . . . .	0,0073	—	55
Angle apical . . . . .			45°

Coquille assez petite, fusiforme, composée de sept tours s'enroulant en une spire aiguë sous un angle légèrement convexe, séparés par des sutures bien marquées. Ces tours sont saillants et carénés au milieu; ils portent sur la carène des tubercules fort bien marqués et fort réguliers dans les premiers tours, mais s'irrégularisant de plus en plus et devenant très-confus au dernier; en arrière de ces tubercules se trouve une légère dépression; toute la surface est ornée de stries de croissance fortement sinueuses dans la dépression en arrière de la carène, et de stries longitudinales beaucoup plus fines. Ouverture allongée, ovale, oblique, aiguë en arrière, terminée en avant par un canal droit, assez large; le bord gauche orné, à la base de la columelle, de cinq plis obliques, réguliers et peu saillants.

*Remarques.* — Les cinq plis columellaires de cette espèce la distinguent facilement des autres qui, généralement, n'en ont que trois, mais beaucoup plus saillants. Nous ne connaissons rien d'analogue dans les fossiles du bassin de Paris.

FIG. 5a, vue du côté de l'ouverture, grossie deux fois et demie.

— 5b, vue par-dessus, grossie deux fois et demie.

— 5c, grandeur naturelle.

**BORSONIA CONOIDEA**, *Nov. sp.*

Pl. XV, fig. 6a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,009	—	100
Largeur — . . . . .	0,005	—	56
Hauteur de l'ouverture . . . . .	0,006	—	67
Angle apical . . . . .			65°

Coquille assez petite, ovale, fusiforme, composée de sept tours s'enroulant sous un angle légèrement concave, le dernier très-développé, montrant au quart postérieur une carène obtuse formant la circonférence de la base et sur laquelle se fait le retour de la spire. Ces tours sont à peu près lisses, ornés seulement de stries de croissance dessinant très-bien le sinus caractéristique un peu en arrière de la carène, et d'une rangée de granulations assez régulières longeant la suture. Base conique. Ouverture allongée, oblique, aiguë en arrière, prolongée en avant en un canal court; le bord columellaire légèrement arqué, recouvert d'une mince callosité, portant quatre plis minces, obliques, les deux médians plus élevés que les deux extrêmes.

*Remarques.* — Nous ne possédons qu'un seul spécimen de cette espèce dont la forme est assez remarquable. Le bord droit, en partie enlevé, rend sa description incomplète et empêche de juger de l'échancrure autrement que par les stries de croissance. Sa forme générale s'écarte notablement de celle de la plupart de ses congénères, et elle se rapproche autant ou même plus du genre *Conus* que du genre *Pleurotoma* d'où est dérivé le genre *Borsonia*. L'absence de tout ornement transverse en est le caractère distinctif. Nous n'avons rien trouvé, dans le bassin de Paris ni ailleurs, qui lui soit analogue, même de loin.

Fig. 6a, vue du côté de l'ouverture, grossie trois fois.

— 6b, vue par-dessus, grossie trois fois.

— 6c, grandeur naturelle.

**BORSONIA MITRATA**, *Nov. sp.*

Pl. XV, fig. 4a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,050	—	100
Largeur — . . . . .	0,0115	—	58
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,018	—	60
Angle apical . . . . .			52° à 59°

Coquille assez grande, fusiforme, allongée, à spire pointue, composée de sept ou huit tours assez peu saillants, s'enroulant en une spire légèrement convexe. Ces tours sont

ornés de côtes transverses, au nombre de dix à quinze pour une révolution de la spire, obliques, un peu sinueuses en arrière et parallèles aux stries de croissance, commençant insensiblement à la suture postérieure, acquérant assez de saillie et devenant même parfois tuberculeuses au milieu du tour, et se prolongeant sur la base jusque dans l'inflexion à l'origine du canal; ces côtes sont recoupées par des filets longitudinaux assez minces séparés par des sillons assez larges et arrondis, assez réguliers, quoique un peu plus écartés à la saillie des tours; huit de ces filets restent à découvert par le retour de la spire, les autres se prolongent sur la base où ils se resserrent de plus en plus jusqu'à l'extrémité antérieure. Ouverture assez étroite, ovale, aiguë en arrière, presque droite, prolongée en avant en un canal assez allongé; le bord droit tranchant, légèrement sinueux à la partie saillante des tours; le bord columellaire un peu infléchi à la base de la columelle, celle-ci presque droite, portant en avant de l'inflexion trois plis saillants transverses, l'antérieur un peu plus faible que les autres.

*Remarques.* — Malgré la faible échancrure du bord droit, nous avons cru devoir mettre cette espèce dans le genre *Borsonia* plutôt que dans le genre *Mitra*. L'ouverture est, en effet, canaliculée et n'est pas échancrée antérieurement, ce dont on peut facilement juger à l'inspection des lignes de croissance.

Nous ne connaissons rien, dans le bassin de Paris, dont on puisse la rapprocher. Les *Borsonia* tertiaires décrites par Deshayes, Rouault, Edwards et autres auteurs, n'ont généralement que deux plis à la columelle, sont plus renflées et ont les ornements transverses plus tuberculeux.

- FIG. 4a, vue du côté de l'ouverture, grossie une fois et demie.  
 — 4b, vue par-dessus, grossie une fois et demie.  
 — 4c, grandeur naturelle.

**BORSONIA BELLARDII.**

Pl. XV, fig. 5a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,027 — 100
Largeur — . . . . .	0,0105 — 59
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,015 — 54
Angle apical . . . . .	55° à 40°

Coquille assez grande, fusiforme, allongée, à spire pointue, composée de huit à neuf tours assez saillants, s'enroulant en une spire un peu convexe. Ces tours sont ornés de côtes transverses assez grosses, parallèles aux stries de croissance, au nombre de douze pour



une révolution de la spire, assez régulières mais perdant beaucoup de cette régularité en approchant de l'ouverture, commençant un peu en avant de la suture postérieure, acquérant immédiatement une assez forte saillie et finissant sur la base dans la dépression à l'origine du canal; ces côtes sont traversées de nombreux filets arrondis et irrégulièrement striés en long, très-rapprochés à la partie postérieure des tours ainsi qu'à la partie antérieure de la base, et partout ailleurs séparés par des sillons plats moins larges qu'eux-mêmes. Ouverture ovale, allongée, oblique, aiguë en arrière, prolongée en avant en un canal conique assez long; le bord droit mince et tranchant, légèrement échancré dans une dépression en arrière du milieu du tour; le bord columellaire revêtu d'une mince callosité et portant, sur la moitié postérieure de la columelle, trois plis transverses, saillants.

*Remarques.* — Ce qui milite le plus en faveur du genre *Borsonia* pour cette espèce ainsi que pour la suivante, c'est sa forme allongée et en fuseau. Les *Mitra* n'ont pas de canal véritable, mais une ouverture rétrécie et échancrée en avant. Il y a quelques espèces, rangées par les auteurs dans ce dernier genre, qui devront nécessairement être transférées dans le genre *Borsonia*. Tel nous paraît être le cas du *Mitra cineta*, Rouault (*Desc. des foss. du terr. éocène des env. de Pau*, p. 42, pl. XVIII, fig. 10) que son auteur a décrite d'après une coquille incomplète et dont la forme est, dans tous les cas, beaucoup plus élancée que celle de la nôtre.

Fig. 5a, vue du côté de l'ouverture, grossie une fois et demie.

— 5b, vue par-dessus, grossie une fois et demie.

— 5c, grandeur naturelle.

Famille : VOLUTIDES.

Genre *VOLUTA*, Lamk, 1802.

Voy. 1<sup>re</sup> partie, p. 62.

Aux trois espèces précédemment décrites, nous en ajoutons une quatrième. C'est le *Voluta elevata*, Lk, sp. que l'on trouve abondamment dans les terrains tertiaires de France et d'Angleterre, et qui caractérise le niveau des sables inférieurs.

**VOLUTA ELEVATA.** Lamk, *sp.*

Pl. XV, fig. 90, b.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,054 — 100
	Largeur — . . . . .	0,017 — 30
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,024 — 74
	Angle apical . . . . .	64°

- SYNONYME : *Voluta ambigua*, Lamarek, 1811, *Ann. du Muséum*, t. XVII, p. 77, n° 12.  
 — — Lamarek, 1822  
 — — Deshayes, 1824, *Desc. des coq. foss.*, t. II, p. 691, pl. XGIII, fig. 40 et 41.  
 — *elevata*, Sowerby, 1840, *Min. Conch.*, t. VII, p. 7, pl. DCCXIII, fig. 4.  
 — *ambigua* ? d'Archiac, 1847, *Desc. des foss. du groupe numm. des env. de Bayonne et de Dax*, p. 51.  
 — — Renault, 1848, *Desc. des foss. du terr. coque des env. de Pau*, p. 44, n° 437, pl. XVIII, fig. 15 et 16.  
 — — Bronn, 1848, *Index pal.*, p. 1367.  
 — — d'Orbigny, *Prodrôme*, t. II, 2<sup>e</sup> étage, p. 314, n° 313.  
 — *elevata*, Morris, 1851, *British foss.*, p. 286.  
 — — Edwards, 1855, *The coc. moll., Pal. soc.*, p. 153, pl. XIX, fig. 2a, b.  
 — — Desh., 1865, *An. sans vert.*, t. III, p. 591.  
 — — Watelet, 1870, *Cat. des moll. des sables inf.*, p. 14.

Coquille ovale, oblongue, composée de six à sept tours légèrement convexes, le dernier très-développé, s'enroulant régulièrement en une spire assez aiguë. Ces tours sont ornés de fortes côtes transverses, arrondies, séparées par de larges sillons également arrondis, parallèles aux stries de croissance, au nombre de douze à treize pour une révolution de la spire au dernier tour, mais souvent plus nombreuses aux tours précédents, se prolongeant d'une suture à l'autre et sur la base jusqu'à la partie antérieure où elles se recourbent un peu à gauche et finissent insensiblement; ces côtes sont recoupées par des cordonnets longitudinaux d'une forme particulière, dessinant une espèce d'imbrication très-régulière sur toute la surface de la coquille, au nombre de vingt-cinq à trente, les postérieurs plus forts, assez écartés, devenant un peu tuberculeux sur les côtes transverses, surtout le premier, ce qui rend la suture ondulée, les autres se rapprochant de plus en plus et d'une manière progressive jusqu'à la partie antérieure où ils finissent par être très-serrés. Base conique; ouverture ovale, allongée, légèrement oblique, aiguë à la partie postérieure; le bord droit mince et tranchant; le bord gauche infléchi au tiers postérieur, recouvert d'une large callosité souvent peu épaisse mais remplissant surtout les creux des ornements; la columelle, aiguë antérieurement, porte deux ou trois plis assez prononcés, le premier sur le renflement du tiers antérieur plus saillant que les deux autres, et d'autres plis plus fins et plus rapprochés se remarquent, soit entre les premiers, soit en arrière.

*Remarques.* — Les ornements extérieurs de cette espèce paraissent assez constants, de sorte qu'elle est très-bien caractérisée. Il n'en est pas de même

des plis columellaires, qui, tout en conservant le même faciès, sont assez variables d'un individu à l'autre. Nous avons recueilli plusieurs spécimens de cette espèce dans les déblais du puits Coppée, mais toujours en assez mauvais état. Ils ne nous laissent cependant aucun doute quant à l'exactitude de notre détermination.

La synonymie de cette espèce a été assez longtemps confuse. On la réunissait au *V. ambigua*, Brander, sp. (*Strombus ambiguus*, Soland). C'est Sowerby qui distingua les deux espèces en 1840 et sa distinction fut admise depuis par les paléontologistes. M. Edwards en a donné, en 1855, une synonymie qui n'est pas encore entièrement exempte de toute confusion, et que nous avons essayé de rectifier en la complétant.

Nous admettons l'opinion de Deshayes, que, cependant, nous n'avons pu contrôler, en ce qui regarde le *V. ambigua*, Grateloup, du bassin de l'Adour. Cette espèce n'est pas la même que le *V. elevata*, et d'Orbigny en a fait le *V. sub-ambigua*, en le classant, probablement à tort, dans son 26<sup>me</sup> étage ou Falunien inférieur, au lieu de le laisser dans l'éocène où Grateloup l'avait placé.

Nous hésitons à admettre l'identification proposée par d'Archiac d'une coquille de Biarritz, Bos-d'Arros, les Corbières, etc., avec le *V. elevata* de Sowerby. Il rapproche, en effet, sa coquille du *V. ambigua* de la planche CCCXCIX, fig. 1, de l'auteur anglais, au lieu de la rapporter à la figure 4 de la planche DCXIII, qui est le véritable *V. elevata*, comme font, du reste, les autres auteurs, excepté d'Orbigny.

Quant à l'opinion de Rouault, elle nous paraît incontestable. Son espèce est bien le *V. elevata*.

Partout où cette espèce a été recueillie, elle caractérise les sables inférieurs ou des assises du même âge. Elle est très-abondante à Cuise-la-Motte, Laon..., dans le midi, à Bos-d'Arros, les Corbières (si l'espèce de d'Archiac est bien la même). En Angleterre, on la trouve dans les couches de Braklesham.

Outre le calcaire grossier de Mons, dans lequel elle est assez rare, on la trouve, en Belgique, dans l'argilite de Morlanwelz ainsi que dans le panisielien de Mons et de Renaix.

FIG. 9a, vue du côté de l'ouverture, grandeur naturelle.

— 9b, vue par-dessus, grandeur naturelle.

Genre **MITRA**. Lamk, 1801.

Voy. 1<sup>re</sup> partie, p. 69.)

Trois nouvelles espèces, venant s'ajouter aux sept précédemment décrites, portent à dix le nombre total des mitres du calcaire grossier de Mons. Un magnifique exemplaire du *M. dilatata*, Br. et C., a également été trouvé au puits Coppée, ce qui nous permet de compléter sa description. Nous avons cru devoir le figurer.

**MITRA DILATATA**, Br. et C.

Pl. XVI, fig. 1.

Voy. 1<sup>re</sup> partie, p. 73, pl. V, fig. 12a, b.

Cette espèce est beaucoup plus grande que ne le supposait notre première description. Les fouilles du puits Coppée nous en ont procuré un spécimen que nous avons cru devoir dessiner pour nos nouvelles planches, en grandeur naturelle, et dont voici les dimensions :

Dimensions : Longueur de la coquille . . . . .	0,070	—	100
Largeur — . . . . .	0,040	—	57
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,057	—	81
Angle apical . . . . .			90°

La coquille continue donc, en avançant en âge, à se dilater plus que proportionnellement à son accroissement en longueur ; l'ouverture s'allonge, l'angle apical devient plus ouvert en même temps que sa concavité s'accroît. Quant aux ornements tuberculeux de la carène, ils perdent de leur régularité en devenant plus saillants, et se montrent, sur les trois derniers tours, au nombre de seize à vingt pour une révolution de la spire. En arrière de la carène principale, il y en a une seconde plus obtuse, accompagnée de quelques sillons parallèles que l'on ne voit que sur un peu plus de la moitié du dernier tour et qui semble même s'effacer en arrivant à l'ouverture. La partie antérieure de la colamelle est contournée par un bourrelet correspondant à l'échancrure antérieure de l'ouverture.

Le genre de cette espèce, que nous signalions déjà comme douteux dans la première partie de notre travail, en 1870, semble le devenir encore davantage. La forme de l'individu adulte que nous dessinons aujourd'hui se rapproche de plus en plus de celle des volutes; et quant aux plis columellaires, leurs dimensions relatives ne présentent pas assez de différence pour arriver à une conclusion incontestable. L'espèce reste donc flottante entre les deux genres et, rigoureusement, elle devrait être rangée dans le genre *Volutomitra*, Gray, qui n'est pas encore généralement admis, mais qui pourrait l'être sans inconvénient.

FIG. 1, vue du côté de l'ouverture, grandeur naturelle.

**MITRA DEWALQUEI**, Br. et C.

(Voy. 1<sup>re</sup> partie, p. 72, pl. V, fig. 11a, b, c.)

Cette espèce se rencontre, paraît-il, dans le bassin de Paris. M. Hébert nous a communiqué une empreinte en cire d'une espèce identique à la nôtre pour la taille, les dimensions proportionnelles et les ornements. Elle provient d'Ambleville, où elle aurait été recueillie, si nous avons bonne mémoire, dans une assise appartenant au calcaire pisolitique. Malheureusement, cette empreinte est la vue de la coquille par-dessus et nous ne pouvons juger des particularités de l'ouverture. Néanmoins, les doutes que nous conservons, quant à l'identification des deux coquilles, sont très-faibles, ou plutôt, nous regardons cette identification comme devant être admise. Ce serait une nouvelle preuve que le calcaire pisolitique ne peut plus faire partie des terrains crétacés.

**MITRA QUINQUEPLICATA**, Nov. sp.

Pl. XV, fig. 11a, b.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,050 — 100
Largeur — . . . . .	0,014 — 46
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,022 — 74
Angle apical. . . . .	60°

Coquille assez grande, brillante, ovale, pyriforme, composée de cinq tours s'enroulant sous un angle un peu concave, séparés par des sutures linéaires assez irrégulières, le pre-

mier tour globuleux, le second très-étroit, les suivants plus larges et assez réguliers, le dernier très-développé, atténué à la partie antérieure, renflé au milieu, montrant à la partie postérieure une carène assez vague ornée de tubercules au nombre de quinze environ pour une révolution de la spire, plus serrés aux premiers tours et disparaissant à la seconde partie du dernier; le retour de la spire se fait un peu en avant de cette carène. Toute la surface est ornée de fines stries de croissance recoupées de stries longitudinales beaucoup plus fines. Ouverture allongée, aiguë en arrière, très-élargie au milieu; le bord droit largement arqué, un peu anguleux à la carène, un peu rentrant à la partie antérieure; le bord columellaire largement infléchi au milieu, portant cinq plis minces et saillants, séparés par des sillons plats, les trois postérieurs assez rapprochés, plus forts que les deux antérieurs qui sont plus écartés et plus obliques; columelle fine, conique, droite, recouverte d'une légère callosité depuis le pli postérieur jusqu'à son extrémité.

*Remarques.* — Cette espèce est à peu près identique à notre *M. dilatata* (1<sup>re</sup> partie, p. 73, pl. V, fig. 12*a, b*) et nous avons quelque peu hésité avant d'en faire une espèce nouvelle. Le *M. dilatata* n'a que quatre plis columellaires très-réguliers et jamais l'ombre d'un pli embryonnaire en avant. Or, la présente espèce porte cinq plis bien marqués et disposés d'une manière beaucoup moins régulière. Nous n'avons, il est vrai, qu'un seul exemplaire de cette forme, mais elle nous a paru tellement tranchée que nous nous sommes décidés à la produire comme espèce nouvelle.

Comme son congénère que nous venons de citer, cette espèce devrait appartenir au genre *Volutomitra*, Gray.

Fig. 11*a*, vue du côté de l'ouverture, grandeur naturelle.

— 11*b*, vue par-dessus, grandeur naturelle.

*MITRA DENTATA, Nov. sp*

Pl. XV, fig. 10*a, b, c*.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,011	— 100
	Largeur — . . . . .	0,0042	— 58
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,005	— 45
	Angle apical . . . . .		50° à 52°

Coquille petite, allongée, fusiforme, lisse et polie, à spire aiguë, composée de cinq tours presque plats, séparés par des sutures linéaires peu visibles, sans ornements et montrant à peine quelques stries ou plis d'accroissement en approchant de l'ouverture, le dernier

tour très-allongé. Ouverture ovale, un peu oblique, aiguë en arrière, légèrement échancrée en avant; le bord droit arqué, portant trois dents arrondies et saillantes au milieu, une moins forte à la partie postérieure et deux moins fortes encore à la partie antérieure; bord columellaire infléchi au milieu, portant quatre plis aigus, également espacés, le postérieur à la base de la columelle, presque transverse, les autres s'obliquant de plus en plus jusqu'au dernier qui se trouve sur le renflement antérieur.

*Remarques.* — Cette espèce se rapproche beaucoup par sa forme extérieure et les plis columellaires du *M. Gosseleti*, Br. et C. (1<sup>re</sup> partie, p. 76, pl. V, fig. 7a, b, c), mais elle s'en distingue par la dentelure du bord droit. C'est aussi cette dentelure remarquable, qui la sépare des mitres lisses et polies décrites par les auteurs. Elle pourrait être rangée dans le genre *Strigatella*, Swainson. Elle est très-rare.

FIG. 10a, vue du côté de l'ouverture, grossie deux fois et demie.

— 10b, vue par-dessus, grossie deux fois et demie.

— 10c, grandeur naturelle.

**MITRA BREVIS, Nov. sp.**

Pl. XV, fig. 8a, b.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,055 — 100
Largeur — . . . . .	0,018 — 52
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,022 — 65
Angle apical . . . . .	50°

Assez grande coquille ovale, trapue, le dernier tour très-développé, orné, ainsi que le précédent, de grosses côtes transverses au nombre de huit pour une révolution de la spire, presque droites, arrondies, très-saillantes au point où se fait le retour de la spire, les dernières moins fortes proportionnellement, commençant à la suture postérieure et se prolongeant sur la base jusqu'à une forte dépression contournant la columelle. Ouverture relativement assez étroite, allongée, un peu arquée, oblique, les deux bords presque parallèles, le bord droit non épaissi, la columelle très-forte, renversée, portant quatre plis simples un peu obliques; échancrure de l'ouverture assez large, donnant naissance extérieurement à un bourrelet très-prononcé, séparé du restant du tour par une dépression large et profonde.

*Remarques.* — Nos spécimens de cette espèce, assez rare, sont malheureusement un peu frustes. Les caractères qu'ils ont conservés suffisent cepen-

dant pour la fixer convenablement. Elle se distingue du *M. viciua*, Br. et C. (1<sup>re</sup> partie, p. 70, pl. V, fig. 4a, b) par le nombre moindre de ses côtes et par sa forme plus trapue. Quant aux espèces du bassin de Paris, le *M. Parisiensis*, Desh. (1824, II, p. 677, pl. LXXXIX, fig. 16-17 et 1863, III, p. 370), espèce du calcaire grossier, peut seule, pensons-nous, lui être comparée et encore la forme type seulement, les deux variétés distinguées par l'auteur dans son dernier ouvrage étant beaucoup plus élancées. Dans tous les cas, les ornements de l'espèce de France sont plus tuberculeux et l'espèce de Mons est plus trapue.

FIG. 8a, vue du côté de l'ouverture, grandeur naturelle.  
— 8b, vue par-dessus, grandeur naturelle.

Famille : NATICIDES.

Genre NATICA, Adanson, 1757.

Voy. 2<sup>me</sup> partie, p. 1.

Une seule espèce nouvelle provient des fouilles du puits Coppée. Elle est de beaucoup plus grande taille que celles décrites précédemment. Elle porte à cinq le nombre total des Natices du calcaire grossier de Mons.

NATICA LAVALLEEI, *Nov. sp.*

Pl. XVI, fig. 2.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,060 — 100
Largeur — . . . . .	0,052 — 87
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,046 — 77
Angle apical . . . . .	125°

Grande et belle coquille globuleuse, un peu plus longue que large, composée de six tours séparés par des sutures profondes, s'enroulant sous un angle concave au sommet mais devenant convexe au dernier, lequel est cependant très-développé. Ces tours portent à la partie postérieure une carène bien marquée limitant une bande creuse qui rejoint la suture; le restant du tour est arrondi, mais accuse cependant un peu plus de saillie vers le



milieu, un peu en avant du retour de la spire. Ces tours sont ornés de nombreuses stries de croissance obliques, bien marquées et devenant assez irrégulières au dernier. Ouverture grande, semi-lunaire, oblique; le bord antérieur tranchant, s'épaississant rapidement en arrière et donnant naissance à un bord gauche assez large, se creusant de plus en plus pour former un ombilic profond, bien limité, conservant intérieurement des stries de croissance et dont la lèvre externe reste tranchante, tandis que la lèvre interne, formant le véritable bord gauche du côté de l'ouverture, rejoint la suture en s'épaississant assez fort et en se recouvrant d'une callosité mince et saillante.

*Remarques.* — Cette espèce est assez rare; nous en possédons beaucoup de fragments, mais un seul spécimen à peu près complet que nous avons dessiné. Il a 60 millimètres de longueur et certains de ces fragments annoncent une taille plus considérable encore. Ce sont ces fragments que nous réunissons à tort au *N. Parisiensis* (1<sup>re</sup> partie, p. 2, pl. VI, fig. 1a, b). Mais les plus grands spécimens du bassin de Paris atteignent tout au plus 40 millimètres de longueur, tandis que les spécimens les plus nombreux vont à peine à la moitié de cette taille. Du reste, comme forme générale les deux espèces se ressemblent beaucoup et appartiennent toutes deux au groupe du *N. patula*, Desh. (1824, p. 169, pl. XXI, fig. 3, 4), mais notre espèce s'en distingue aisément en ce que la lèvre externe de l'ombilic et son prolongement antérieur restent toujours très-saillants au lieu de se déverser en dehors.

Nous dédions cette espèce à M. de la Vallée-Poussin, professeur de géologie à l'Université de Louvain.

FIG. 2, vue du côté de l'ouverture, grandeur naturelle.

Famille : PYRAMIDELLIDES.

—  
Voy. 2<sup>me</sup> partie, p. 7.

Cette famille était représentée, dans le calcaire grossier de Mons, par quatre genres : *Pyramidella*, *Turbouilla*, *Coemansia* et *Eulima*. Les fouilles du puits Coppée viennent y joindre deux autres genres, *Muthillia* et *Ringicula*, plus un genre nouveau que nous avons créé pour une forme que nous rapportons provisoirement à cette famille, et que nous avons nommé *Halloysia*.

Genre **TURBONILLA**, Risso, 1826

Voy. 2<sup>me</sup> partie, p. 9.

Une seule espèce est venue s'ajouter aux huit précédemment connues. Cela porte à neuf le nombre total des turbonilles du calcaire grossier de Mons.

**TURBONILLA SULCATA**, *Nov. sp.*

Pl. XVI, fig. 5a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,004	— 100
	Largeur — . . . . .	0,00173	— 44
	Hauteur de l'ouverture . . . . .	0,00125 ?	— 51
	Angle apical . . . . .		50°

Petite coquille conique, brillante, composée de huit tours assez larges, s'enroulant régulièrement, séparés par des sutures linéaires et bien marquées, le tour antérieur débordant un peu la suture. Ces tours sont ornés d'un sillon longitudinal très-bien marqué, longeant la suture postérieure vers le sommet de la spire et occupant le milieu du tour ou même le dépassant vers l'ouverture; de nombreuses stries longitudinales très-fines sont parallèles à ce sillon, et le tout est recoupé de stries de croissance également très-fines. Base ovale, conique; ouverture allongée, aiguë en arrière, arrondie en avant, un peu oblique; columelle droite, portant au tiers postérieur un pli assez fort, saillant, séparé du tour précédent par un sillon profond.

*Remarques.* — Le sillon du milieu du tour n'est peut-être qu'un accident de l'unique spécimen que nous possédons; cependant, il est tellement prononcé qu'il peut fort bien caractériser une espèce spéciale, et la distinguer de toutes les coquilles du même genre ou de la même famille qui se rencontrent dans les assises tertiaires inférieures. Cet ornement longitudinal rapproche cette espèce de notre genre *Coemansia* (2<sup>me</sup> partie, p. 17).

FIG. 5a, vue du côté de l'ouverture, grossie huit fois.

— 5b, vue par-dessus, grossie huit fois.

— 5c, grandeur naturelle.

Genre **MATHILDIA**, O. Semper, 1865.

*Car. gén.* — Coquille turriculée, à sommet sénestre et enroulé latéralement; tours ornés de côtes longitudinales, concellés ou striés transversalement; ouverture entière, arrondie ou dilatée en avant, à bords simples; columelle unie, non plissée.

*Remarques.* — Ce genre (*Mathilda*) fut créé par O. Semper, en 1865 (*Journ. de Conch.*, p. 328), pour un groupe de petits Gastéropodes ayant entre eux des caractères communs nettement tranchés et des affinités évidentes. Le nom fut modifié plus tard par Bosquet qui changea sa terminaison en *ia* pour le faire accorder avec les règles de la nomenclature (*Notice sur deux espèces tertiaires nouvelles du genre Mathildia.*)

Ce genre est complètement tertiaire. La première espèce jusqu'à présent décrite est, pensons-nous, le *Scalarin impur*, Desh., qui est un fossile des sables inférieurs. Les autres espèces, en assez grand nombre, se montrent principalement dans les assises tertiaires moyennes et supérieures. Parmi celles que l'on signale dans les étages subapennin et scaldisien, il y en a qui se retrouvent à l'état vivant dans les mers actuelles.

Le calcaire grossier de Mons nous a procuré deux espèces de ce genre. Toutes les deux proviennent du puits Coppée. Ce sont donc les deux espèces les plus anciennes du genre.

**MATHILDIA BIMORPHA**, *Nov. sp.*

Pl. XVI, fig. 5a, b, c, d.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,00525 — 100
Largeur — . . . . .	0,00100 — 50
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0005 — 18
Angle apical . . . . .	14°

Très-petite coquille conique, turriculée, très-allongée, composée de neuf tours arrondis, assez larges, séparés par des sutures profondes, s'enroulant régulièrement en une spire terminée par un nucléus composé d'un tour et demi à enroulement sénestre; ce nucléus est orné de côtes transverses, arrondies, bien visibles surtout du côté le plus ombiliqué et d'un bourrelet assez bien marqué dessinant une ouverture d'où semble sortir la coquille même dont les ornements sont tout différents. Ces ornements se composent de cinq côtes

longitudinales très-saillantes, arrondies, régulières, séparées par des sillons profonds dans le creux desquels on remarque des sillons transverses interrompus par les côtes longitudinales; un autre sillon, orné de la même manière, se trouve à la circonférence de la base et est caché par le retour de la spire; deux côtes simples, beaucoup plus petites, se trouvent un peu en deça de cette circonférence; le restant de la base est lisse et sans ornements. Ouverture arrondie.

*Remarques.* — Cette coquille est fort remarquable, en ce qu'elle nous offre un nucléus sénestre dont les ornements diffèrent complètement de ceux de la coquille même et dont l'ouverture était munie d'un bourrelet d'où cette dernière semble sortir. C'est, pensons-nous, la première fois qu'une particularité aussi curieuse est signalée.

L'espèce est très-rare. Sa forme allongée la distingue facilement de toutes les coquilles du même genre des terrains tertiaires.

- Fig. 5a, vue du côté de l'ouverture, grossie douze fois.  
 — 5b, vue par-dessus, grossie douze fois.  
 — 5c, vue du sommet de la spire, fortement grossie.  
 — 5d, grandeur naturelle.

**MATILIDIA PARVA, Nov. sp**

Pl. XVI, fig. aa, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0055	—	100
Largeur — . . . . .	0,0017	—	46
Hauteur de l'ouverture . . . . .	0,0012	—	54
Angle apical . . . . .			50°

Très-petite coquille conique, turriculée, composée de six tours arrondis, assez larges, séparés par des sutures profondes, s'enroulant régulièrement en une spire terminée par un nucléus sénestre. Ces tours sont ornés de six côtes longitudinales très-saillantes, les plus fortes au milieu, l'antérieure recevant le retour de la spire; ces côtes sont séparées par des sillons profonds dans le creux desquels on remarque des sillons transverses interrompus par les côtes longitudinales. Base lisse et sans ornements; ouverture arrondie.

*Remarques.* — Le sommet de la spire est un peu fruste; nous n'avons pu reconnaître au nucléus les curieuses particularités de l'espèce précédente.

On y voit très-facilement l'enroulement sénestre. Elle s'en distingue aisément, du reste, par son angle apical beaucoup plus ouvert.

Quant aux espèces du bassin de Paris, il en est une qui lui est très-voisine, c'est le *M. costellata*, que nous avons pu voir dans les collections de l'École des mines de Paris, mais qui a les ornements beaucoup moins forts.

FIG. 6a, vue du côté de l'ouverture, grossie onze fois.

— 6b, vue par-dessus, grossie onze fois.

— 6c, grandeur naturelle.

Genre **HALLOYSIA**, Briart et Cornet.

*Car. gén.* — Coquille allongée, turriculée, à tours nombreux, largement perforée dans toute sa longueur; ouverture arrondie ou subquadrangulaire, à columelle plissée.

*Remarques.* — Nous créons ce genre nouveau pour une espèce fort remarquable, dont nous avons trouvé assez bon nombre de spécimens dans le calcaire grossier de Mons. Malheureusement, ces spécimens sont plus ou moins frustes et le sommet de la spire est toujours enlevé. Cette dernière circonstance nous empêche de décider, d'une manière bien positive, si le nouveau genre doit se placer parmi les Pyramidellides, ou s'il doit plutôt se rapprocher des Nérinéides. Les représentants de cette dernière famille sont, comme on sait, tous fossiles et ne dépassent pas les limites de la période secondaire. De plus, la place à leur assigner, dans l'échelle malacologique, n'est pas encore certaine. Jusqu'à preuve du contraire, nous rapportons notre genre à la famille des Pyramidellides, et nous ne voyons en lui qu'un *Niso* à columelle plissée, se plaçant entre ce genre et le genre *Mathildia* de Semper.

Il y a quelques espèces vivantes du genre *Pyramidella* dont la columelle est perforée, ou plutôt, qui sont simplement ombiliquées. Tel paraît être le cas de l'*Obeliscus cinctus* de Reeve, qui pourrait, dans ce cas, rentrer dans notre genre. Cependant toutes ces espèces sont beaucoup moins largement perforées que la nôtre.

Nous sommes heureux de pouvoir rappeler, par la création de ce genre,

le nom de M. d'Omalius d'Halloy, l'illustre savant dont nous déplorerons toujours la perte, qui a tant fait pour les sciences géologiques, et dont les bons conseils nous ont, en particulier, été si profitables.

**HALLOYSIA BIPPLICATA, *Nov. sp.***

Pl. XVI, fig. 7a, b, c, d.

Dimensions : Longueur de la coquille . . . . .	0,012 ? — 100
Largeur — . . . . .	0,004 — 55
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,00175 — 15
Angle apical . . . . .	20°

Coquille assez petite, turriculée, composée de tours nombreux assez étroits, arrondis, s'enroulant sous un angle un peu convexe, séparés par des sutures assez profondes. Ces tours sont ornés à la circonférence de la base d'une carène longitudinale assez aiguë, sur laquelle se fait le retour de la spire, et à l'extérieur des tours de quatre filets arrondis, peu saillants et assez réguliers. Base à peu près plane, ne montrant que des stries de croissance, ayant au centre un ombilic large, perforant toute la coquille et limité par une carène assez obtuse. Ouverture subquadrangulaire; le bord columellaire portant deux plis vers le milieu, le postérieur plus saillant que l'autre.

*Remarques.* — Nous possédons plusieurs spécimens de cette forme remarquable et qui, jusqu'à présent, semble particulière au calcaire grossier de Mons. Tous sont malheureusement un peu frustes, mais d'après certaines parties mieux conservées, nous pouvons constater que la coquille devait être brillante et polie. Les stries de croissance de la base nous indiquent, de leur côté, que le bord droit de l'ouverture devait rester assez en arrière. Toutes ces circonstances tendent à confirmer le rapprochement que nous faisons de notre nouveau genre de la famille des Pyramidellides.

- FIG. 7a, vue du côté de l'ouverture, grossie cinq fois et demie.  
 — 7b, vue par-dessus, grossie cinq fois et demie.  
 — 7c, vue de la base, montrant l'ombilic, grossie cinq fois et demie.  
 — 7d, grandeur naturelle.

Genre *RINGICULA*, Desh., 1858.

*Car. gén.* — Coquille petite, ovale, globuleuse, à spire courte; les tours ornés ou sillonnés longitudinalement; ouverture droite, étroite en arrière, élargie en avant; columelle calleuse portant deux ou trois plis inégaux, saillants, l'anérieur simulant une échancrure terminale; bord droit épaissi en dedans et en dehors.

*Remarques.* — Ce genre a éprouvé passablement de difficultés pour trouver sa place dans l'échelle malacologique. Des observations assez récentes de Woodward semblent avoir, en partie du moins, résolu la question. Il résulte de ces observations que l'animal des *Ringicula* se rapproche beaucoup de celui des Tornatellides. C'est dans cette famille et dans le voisinage des *Cinulia* que le genre doit être placé.

Nous croyons cependant que la question pourrait bien n'être qu'en partie résolue, car le genre, tel qu'il est caractérisé jusqu'à présent, présente deux groupes assez bien limités par les ornements extérieurs. Chez l'un, ces ornements sont formés de côtes longitudinales nombreuses, séparées par des sillons dans le creux desquels on remarque une ponctuation spéciale et également régulière. Ce sont probablement les animaux de ce groupe qui ont donné lieu aux observations de Woodward, et qui lui ont fait proposer de rapprocher le genre tout entier des *Cinulia* dont les ornements sont les mêmes. L'autre groupe, au contraire, a une coquille parfaitement unie, lisse et brillante, comme celles de la famille des *Pyramidellides*, et nous ne serions nullement étonnés d'apprendre que des observations nouvelles faites sur les animaux des espèces lisses obligeassent les naturalistes à subdiviser le genre *Ringicula* en deux genres distincts, qui seraient placés dans des familles différentes : le premier, comprenant les espèces costulées resterait où l'a placé Woodward, dans la famille des *Tornatellides*, le second, renfermant les espèces lisses et brillantes, prendrait place parmi les *Pyramidellides*.

L'unique espèce que nous a procurée le calcaire grossier de Mons est dans ce dernier cas. Nous croyons donc devoir la décrire ici sans autrement préjuger la question.

Ce genre ne paraît pas s'être montré avant la période tertiaire. Les pre-

mières espèces se rencontrent dans les sables inférieurs. Depuis, les espèces n'ont fait qu'augmenter en nombre, et elles paraissent être à leur maximum dans les mers actuelles.

L'espèce de Mons deviendrait donc la plus ancienne de toutes.

**RINGICULA SIMPLEX, *Nov. sp***

Pl. XVI, fig. 4a, b, c, d, e, f.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille. . . . .	0,0055	— 100
Largeur — . . . . .	0,00175	— 50
Hauteur du dernier tour. . . . .	0,002	— 57
Angle apical . . . . .		40°

Très-petite coquille ovale, globuleuse, composée de trois ou quatre tours légèrement arrondis, s'enroulant sous un angle assez aigu, séparés par des sutures linéaires peu profondes, mais bien marquées. Ces tours sont lisses et brillants sans le moindre ornement, le dernier très-développé, à base arrondie. Ouverture ovale, oblique, aiguë en arrière, dilatée en avant; le bord droit saillant antérieurement, fortement renflé en un bourrelet solide, à l'intérieur comme à l'extérieur, principalement vers le milieu; le bord gauche fortement infléchi à la base de la columelle, calleux, portant deux plis très-saillants, l'an-  
térieur très-fort, projeté en avant et dessinant, avec le bord droit, une espèce d'échancre assez large, le postérieur moins fort, séparé du premier par un assez large sillon arrondi, et du tour précédent par un sillon plus faible également arrondi.

*Remarques.* — Les spécimens que nous avons de cette espèce ne sont pas tout à fait complets; il manque, à celui que nous avons dessiné, l'extrémité de la spire et la partie antérieure du premier pli. La restauration a cependant été très-facile, et, on peut le dire, tout à fait certaine.

Deshayes cite et décrit, du bassin de Paris, trois espèces qu'il est inutile d'énumérer et qui se distinguent parfaitement de la nôtre par leurs ornements extérieurs et par leur forme plus trapue.

- Fig. 4a, âge adulte, vue du côté de l'ouverture, grossie neuf fois.  
 — 4b, — vue par-dessus, grossie neuf fois.  
 — 4c, — grandeur naturelle.  
 — 4d, jeune âge, vue du côté de l'ouverture, grossie neuf fois.  
 — 4e, — vue par-dessus, grossie neuf fois.  
 — 4f, — grandeur naturelle.



Famille : CÉRITHIQUES.

Genre **CERITHIUM**, Bruguières. 1789.

(Voy. 2<sup>me</sup> partie, p. 24.

Comme on devait s'y attendre, le nouveau contingent fourni par ce genre a été très-important. Nous en avons décrit trente-cinq espèces dans la 2<sup>me</sup> partie de notre travail; dix nouvelles espèces sont venues s'y ajouter, ce qui porte à quarante-cinq le nombre total de nos Cérithes.

Nous avons cru devoir revenir sur une de nos identifications. Le *Cerithium* de Mons que nous avons rapporté au *C. biserialis*, des sables inférieurs, est le *C. inopinatum*, Desh., des marnes strontianifères de Meudon.

Les descriptions de deux de nos précédentes espèces ont été complétées; ce sont celles du *C. Dejaeri* et du *C. Coemansi*. Nous avons constaté que cette dernière espèce est une des plus grandes du genre.

**CERITHIUM INOPINATUM.** Desh.

Voy. 2<sup>me</sup> partie, p. 25, pl. VIII, fig. 1a, b.)

SYNONYME : *C. inopinatum*, Desh., 1864, t. III, p. 191, pl. LXXXII, fig. 32.

*C. biserialis*, Br. et C., 2<sup>me</sup> partie, p. 25, pl. VIII, fig. 1a, b.

*C. inopinatum*, Hébert, *Comparaison de l'écoène inférieur de la Belgique et de l'Angleterre avec celui du bassin de Paris*, p. 46.

On ne peut nier qu'il n'y ait de très-grandes ressemblances entre ce *Cerithium*, si abondant dans le calcaire grossier de Mons, et le *C. biserialis* des sables inférieurs du bassin de Paris. On doit même reconnaître que les deux espèces se rejoignent par quelques types extrêmes. Cependant, nous devons abandonner notre première identification.

La principale et, pour ainsi dire, l'unique différence que l'on remarque entre les deux espèces, consiste dans la disposition des tubercules sur les côtes transverses. Les deux cordonnets longitudinaux postérieurs, en traver-

sant ces côtes, produisent ces tubercules; mais dans l'espèce de Mons, ils sont plus saillants au cordonnet antérieur occupant presque le milieu du tour, tandis que dans l'espèce des sables inférieurs, c'est au cordonnet postérieur longeant la suture que la plus forte saillie a lieu. La différence entre les deux rangées de tubercules est quelquefois très-faible, aussi bien dans l'une que dans l'autre espèce, et l'on conçoit que cette circonstance a pu nous conduire à les identifier.

Quant à reconnaître la coquille de Mons dans la figure fort imparfaite de Deshayes, c'était excessivement difficile. Depuis, nous avons pu voir l'original, de l'étage des lignites (conglomérats de Meudon), qui lui a servi de type et qui fait partie de la collection de M. Hébert, et surtout nous avons examiné les nombreux moulages exécutés par M. Munier-Chalmas dans les cavités que l'on remarque dans les marnes strontianifères de la même localité et qui toutes sont des moules de fossiles. Or, il se fait, comme l'a déjà signalé M. Hébert, que trois espèces au moins de notre assise de Mons se rencontrent dans ces marnes, et le *C. inopinatum* est du nombre. C'est même l'espèce la plus abondante, et elle s'y rencontre avec tous ses caractères, de sorte que l'identification proposée par MM. Hébert et Munier ne peut faire l'objet d'aucun doute.

Nous devons faire remarquer que notre dessin a été assez mal rendu par le lithographe. Les côtes transverses sont beaucoup mieux accusées, généralement du moins, et les ornements plus réguliers. Nous ne pensons pas, pourtant, devoir figurer à nouveau cette intéressante espèce; ce que nous avons dit suffit amplement pour la caractériser.

CERITHIUM DEJAERI, BE. ET C.

Voy. 2<sup>me</sup> partie, p. 27, pl. VIII, fig. 2a, b.)

Nos premières recherches ne nous avaient procuré que quelques spécimens incomplets de cette belle espèce. Le puits Coppée nous en a fourni, au contraire, un très-grand nombre, de sorte qu'elle est devenue une des plus abondantes du calcaire grossier de Mons. Plusieurs de nos spécimens sont

tout à fait complets, ce qui nous permet d'entrer dans plus de détails sur les particularités de l'ouverture. Celle-ci était ovale, arrondie, très-oblique, le bord droit très-dilaté, arrondi, s'avancant très-fort en avant, mince mais s'épaississant rapidement, retournant brusquement en arrière vers le canal, lequel est court et tortueux; le bord gauche mince, largement arqué, se détachant du tour précédent vers la gouttière postérieure et vers l'extrémité du canal.

Voici les dimensions d'un individu complet :

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,056 — 100
	Largeur — . . . . .	0,014 — 50
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,010 — 28

Cet individu n'avait pas acquis tout son développement et sa largeur proportionnelle, beaucoup plus considérable que celle que nous avons indiquée d'abord, prouve que l'angle apical devient, comme nous l'avons dit, convexe vers les derniers tours, et que cette largeur ne s'accroît pas dans la même proportion que la longueur.

CERITHIUM COLMANI, Br. et C.

Pl. XVII, fig. *ta, b.*

Voy. 2<sup>me</sup> partie, p. 47, pl. IX, fig. *6a, b, c.*

Les fouilles du puits Coppée nous ont procuré un très-grand spécimen de cette espèce, à peu près complet et dont nous donnons les dimensions.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,123 — 100
	Largeur — . . . . .	0,05 — 40
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,053 — 28
	Angle apical aux premiers tours . . .	23°
	— aux derniers tours . . . . .	50°

D'après quelques fragments de columelle, cette espèce devait atteindre une taille bien plus grande encore et dépasser 23 centimètres de longueur. Il n'y aurait donc que le *C. giganteum* du bassin de Paris qui pût offrir des dimensions plus considérables.

Comme dans toutes les grandes espèces, les ornements se modifient consi-

dérablement à mesure que la coquille se développe. Ceux que nous avons décrits dans notre première partie sont ceux du jeune âge. Les tours sont plus ou moins concaves, mais cette concavité disparaît dans l'âge adulte en même temps que les autres ornements s'oblitérent. Ainsi, les granulations disparaissent, même celles de la suture postérieure pour ne laisser que des bandelettes striées longitudinalement, s'effaçant à leur tour de plus en plus, ce qui permet de supposer que, à la taille de 25 centimètres, les tours devaient être tout à fait simples et sans ornements ou à peine striés. Toute la surface est parsemée de petites perforations disposées sans régularité apparente.

Quant aux plis columellaires, notre grand spécimen en montre deux à la partie antérieure, mais le premier disparaît bientôt sous l'enroulement du retour de la spire; le second, de son côté, n'existe que dans les derniers tours, ce qui peut parfaitement se constater, notre coquille ayant été brisée en la détachant de la roche. Nous pouvons en conclure que le spécimen dessiné dans notre première partie n'était pas la pointe détachée d'un plus grand individu, mais représentait une coquille complète n'ayant pas encore atteint l'âge adulte, puisque le pli columellaire est conservé.

L'espèce appartient évidemment au groupe du *C. giganteum*, Lk (*Ann. du Muséum*, t. III, p. 459, n° 57, pl. XIV, fig. 1. — Deshayes, 1824, t. III, p. 309, pl. XLII, fig. 1, 2), comprenant quelques espèces décrites par Sowerby (*Min. couch.*), par Dixon (*Geol. of Sussex*), par Deshayes dans son dernier ouvrage et par M. Bayan dans ces derniers temps. Les ornements du jeune âge paraissent se ressembler beaucoup dans toutes ces espèces, ainsi que dans celle de Mons; ce n'est que l'âge adulte qui amène entre eux des différences bien sensibles. Quelques-unes de ces espèces sont, du reste, encore un peu douteuses pour Deshayes lui-même (*C. incomptum*, 1864, t. III, p. 116.)

En général, les ornements des espèces étrangères paraissent s'effacer beaucoup moins avec l'âge, et se transformer en tubercules plus ou moins gros et plus ou moins allongés dans le sens transverse aux tours. Nous citerons comme étant dans ce cas, le *C. Parisiensis*, Desh. (1864, t. III, p. 117, pl. LXXVI, fig. 1.) chez lequel les perforations de l'espèce de Mons

semblent se rencontrer, si nous en jugeons d'après la figure, car le texte de Deshayes n'en parle pas, le *C. cornu copia*, Sow. (*Min. conch.*, 1818, pl. CLXXXVIII, fig. 1-4) et le *C. incomptum*, Dixon (1850, p. 101, pl. VI, fig. 18.)

Si nous voulions sortir de l'étage des sables inférieurs et du calcaire grossier, nous pourrions citer deux espèces des sables moyens, qui ont beaucoup de rapports, d'un côté avec le *C. giganteum*, Lk, dont elles pourraient à la rigueur passer pour des variétés, et de l'autre avec notre *C. Coemansi*. Ce sont : *C. Auversianum*, Desh. (1864, t. III, p. 116, pl. LXXIX, fig. 1) et *C. paratum*, Desh. (1864, p. 118, pl. LXXXI, fig. 1). Notre espèce est même excessivement voisine de cette dernière, laquelle, cependant, conserve ses ornements jusque dans l'âge adulte.

Les mêmes remarques paraissent s'appliquer à quelques autres grandes espèces tertiaires décrites dans ces derniers temps par M. Bayan (1870, *Moll. tert.*) entre autres au *C. Lachesis* (p. 23, pl. IV, fig. 2, et pl. V, fig. 2) et au *C. Bedechei* (p. 31, pl. X, fig. 1).

Fig. 1a, vue de la coquille, grandeur naturelle.

— 1b, vue d'un fragment de columelle appartenant à un autre individu.

CERITHIUM NERINEALE. *Nov. sp.*

Pl. XVII, fig. 2a, b.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,065 — 100
	Largeur — . . . . .	0,052 — 49
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,015 — 25
	Angle apical, aux premiers tours. . . . .	25°
	— aux derniers tours . . . . .	55°

Grande et belle coquille conique, turriculée, à spire pointue, composée d'un grand nombre de tours relativement assez étroits, s'enroulant sous un angle régulier d'abord mais devenant de plus en plus concave aux derniers tours. Ces tours sont fortement excavés au milieu et réunis par des sutures saillantes assez peu régulières; les ornements sont très-variables suivant l'âge de la coquille : assez complexes vers le sommet de la spire, ils se composent d'un bourrelet postérieur assez fort, granuleux, et d'un bourrelet antérieur moindre, correspondant à la carène de la base et également granuleux; sur la partie concave des tours se trouvent deux filets portant également de petits granules; tous

ces ornements sont longitudinaux et séparés par des sillons plats; ils ne tardent pas à s'effacer presque complètement, ne laissant, aux derniers tours, qu'une surface concave fortement striée en long et quelques rares granules au bourrelet postérieur; ces ornements sont recoupés par des stries de croissance fortement arquées en arrière. Columelle portant deux plis, le premier très-fort, presque contigu au bord antérieur, le second plus faible, ne se montrant qu'au second tour, et tous les deux persistant jusqu'au sommet de la spire. Base plane terminée extérieurement par une carène saillante.

*Remarques.* — L'ouverture et le canal de cette belle espèce sont inconnus.

D'après quelques fragments de columelle que nous possédons, les dimensions devaient parfois être bien plus considérables que celles que nous avons indiquées. La longueur de certains individus ayant acquis tout leur développement devait aller jusqu'à dix-huit centimètres et la largeur jusqu'à neuf. L'ouverture devait être carrée et le canal assez renversé en arrière.

Cette grande espèce n'a pas été décrite sous une forme de jeune âge dans notre seconde partie, comme l'a été le *C. Coemansi*; c'est une espèce entièrement inédite.

Le *C. Ryckholti*, Br. et C. (2<sup>me</sup> partie, p. 46, pl. IX, fig. 40a, b,) dont elle se rapproche le plus, a les ornements extérieurs assez différents et le labre dentelé périodiquement. Quant au *C. Coemansi* (id., p. 47, pl. IX, fig. 6a, b, c. — Voyez aussi p. 51), elle s'en distingue par des différences essentielles. D'abord, les plis columellaires, au nombre de deux, persistent, dans la présente espèce, depuis le sommet de la spire jusque vers le dernier tour, où le pli antérieur se montre seul, le postérieur, toujours plus petit, n'apparaissant qu'un peu plus en arrière. Au contraire, le pli unique du *C. Coemansi*, très-saillant au dernier tour, disparaît bientôt par le remplissage du sillon qui le sépare du bord antérieur, de manière à n'être presque plus visible au tour précédent et à être complètement effacé au troisième. Les perforations du test, si abondantes et si bien marquées dans le *C. Coemansi*, ne paraissent presque pas dans le *C. nerineale*. Enfin, la suture est toute différente chez les deux espèces.

FIG. 2a, vue de la coquille, grandeur naturelle.

— 2b, columelle d'un individu plus grand, grandeur naturelle.

CERITHIUM FIMGULOSUM, *Nov. sp.*

Pl. XVII, fig. 5a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,0075	— 100
	Largeur — . . . . .	0,00225	— 50
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,002	— 27
	Angle apical . . . . .		18°

Très-petite coquille conique, composée de neuf ou dix tours presque plats, s'enroulant sous un angle un peu convexe, ornés de quatre côtes longitudinales, arrondies, presque égales, les deux postérieures un peu plus écartées; une cinquième côte, sur laquelle se fait le retour de la spire, reparait en un mince filet à la suture, laquelle, sans cela, serait assez difficile à distinguer; des côtes transverses, au nombre d'une vingtaine environ pour une révolution de la spire, traversent les côtes longitudinales presque à angle droit, en dessinant un réticule assez régulier, et produisant, aux intersections, des granulations assez élevées. Base arrondie à la circonférence, reconverte, jusqu'à l'origine du canal, de côtes simples également longitudinales; columelle assez forte, droite, avec un gros pli en avant; le canal rejeté un peu en arrière.

*Remarques.* — Cette espèce, très-rare dans le calcaire grossier de Mons, se distingue de notre *C. Franciscæ* (2<sup>me</sup> partie, p. 42, pl. VIII, fig. 11a, b, c), par ses tours aplatis et par les ornements de la base qui se prolongent jusqu'à l'origine du canal; et de notre *C. Mourtouli* (id., p. 43, pl. IX, fig. 4a, b, c), par sa base non carénée et par ses tours de niveau au lieu de surplomber la suture à la partie antérieure.

Elle se rapproche beaucoup du *C. Cuisense*, Deshayes (1865, t. III, p. 211, pl. LXXIX, fig. 12-14) des sables inférieurs, par le nombre et la disposition des ornements, mais cette espèce a deux plis à la columelle, ce qui suffit pour la distinguer. Elle est également voisine d'une espèce décrite par M. Tournouër (1873, *Desc. des foss. numm. nouv. ou peu connus, rec. à Biarritz par M. le comte R. de Bouillé*, p. 2, pl. V, fig. 13). C'est le *C. Mariæ* qui n'a que trois cordons granuleux à l'extérieur des tours et un quatrième caché par le retour de la spire.

- Fig. 5a, vue du côté de l'ouverture, grossie cinq fois.  
 — 5b, vue par-dessus, grossie cinq fois.  
 — 5c, grandeur naturelle.

**CERITHIUM GOSSILETI, *Nov. sp.***

Pl. XVII, fig. 6a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,00625	—	100
Largeur — . . . . .	0,003	—	47
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0025	—	40
Angle apical . . . . .			55°

Coquille assez petite, conique, composée de dix tours s'enroulant sous un angle un peu concave, saillants et comme carénés à la partie antérieure, séparés par des sutures profondes et bien marquées; les premiers sont ornés de trois cordons longitudinaux, l'antérieur plus saillant que les autres, se chargeant peu à peu de granules arrondis de plus en plus gros, disposés en côtes transverses au nombre de neuf pour une révolution de la spire, les plus gros au cordon antérieur, les autres plus petits et plus allongés; quelques filets plus minces, également longitudinaux, se remarquent entre ces cordons. Base à peu près lisse, montrant seulement quelques faibles cordonnets longitudinaux recoupés de légères stries de croissance. Ouverture arrondie, oblique, aiguë à la partie postérieure, terminée en avant par un canal court rejeté quelque peu en arrière.

*Remarques.* — Cette espèce ressemble beaucoup à notre *C. instabile*, (2<sup>me</sup> partie, p. 48, pl. IX, fig. 8a, b, c), mais elle s'en distingue aisément par ses ornements plus réguliers et par l'enroulement de ses tours qui se fait sous un angle concave au lieu de se faire sous un angle convexe.

Cette espèce est très-rare.

FIG. 8a, vue du côté de l'ouverture, grossie six fois.

— 8b, vue par-dessus, grossie six fois.

— 8c, grandeur naturelle.

**CERITHIUM BARROISI, *Nov. sp.***

Pl. XVII, fig. 4a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,009	—	100
Largeur — . . . . .	0,0055	—	59
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0025	—	28
Angle apical . . . . .			25°

Coquille petite, conique, assez allongée, à tours nombreux, un peu convexes, s'enroulant sous un angle régulier, séparés par des sutures simples. Ces tours sont occupés par trois



cordons longitudinaux sur plus de la moitié antérieure, le médian moins fort que les deux autres, l'antérieur recevant le retour de la spire, le postérieur très-saillant dessinant comme une carène au milieu du tour; en arrière se trouve un large sillon plat limité par un quatrième cordon granuleux longeant la suture. Base plane; ouverture quadrangulaire, le bord antérieur portant deux dents périodiques.

*Remarques.* — Si l'on ne considérait que la forme extérieure des tours, on rapprocherait cette espèce du *C. perforatum*, Lk (*Ann. du Museum*, t. III, p. 437, n° 40. — Desh., 1824, t. II, p. 399, pl. LVIII, fig. 1-3 et 18-23, et 1865, t. III, p. 220). Mais, outre que son angle apical est un peu plus ouvert, la coquille de Mons n'offre pas la particularité d'avoir la columelle perforée.

Cette espèce est rare.

- Fig. 4a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.  
 — 4b, vue par-dessus, grossie quatre fois.  
 — 4c, grandeur naturelle.

**CERITHIUM CHELLONEIAI.** *Nov. sp.*

Pl. XVII, fig. 5a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,009 — 100
	Largeur — . . . . .	0,004 — 44
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,002 — 22
	Angle apical . . . . .	25° à 27°

Coquille petite, conique, assez allongée, à tours nombreux, assez larges, s'enroulant sous un angle régulier, séparés par des sutures simples assez difficiles à distinguer. Ces tours sont carénés à la circonférence de la base, et portent sur cette carène un cordon simple, saillant, sur lequel se fait le retour de la spire; en arrière se trouve un sillon large et plat, auquel succède, vers le milieu du tour, un cordon granuleux de plus en plus saillant à mesure que l'on approche du sommet, ce qui fait que la suture s'y montre dans un renforcement plus ou moins prononcé; deux autres cordons granuleux plus faibles se trouvent en arrière, le dernier longeant la suture. Base plane, ouverture subquadrangulaire, le bord antérieur portant deux dents périodiques, l'une à peu près au milieu, l'autre à l'angle extérieur.

Cette espèce et le *C. Barroisi* (p. 56) sont assez voisines et appartiennent au même groupe des cérithes à dents périodiques. Cette dernière espèce a

l'angle apical plus ouvert et les ornements de l'extérieur des tours disposés d'une tout autre façon.

- FIG. 5a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.  
 — 5b, vue par-dessus, grossie quatre fois.  
 — 5c, grandeur naturelle.

*CERITHIUM TENUFILUM*, *Nor. sp.*

Pl. XVI, fig. 5a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,014 ?	— 100
Largeur — . . . . .	0,002	— 14
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0015	— 11
Angle apical . . . . .		7°

Petite coquille conique, turriculée, à spire très-allongée, composée d'un grand nombre de tours s'enroulant régulièrement en une spire très-aiguë. Ces tours sont convexes près du sommet et deviennent plats par la suite; ils sont ornés à l'extérieur de quatre côtes ou filets longitudinaux simples, séparés par des sillons profonds, les trois antérieurs à peu près égaux, le postérieur plus fort débordant un peu la suture qui apparaît dans un sillon plus large que les autres; un autre filet plus petit se fait voir vers la circonférence de la base, et reçoit le retour de la spire. Ouverture subquadrangulaire, terminée en avant par un canal court.

*Remarques.* — Cette coquille, dont nous n'avons que quelques spécimens incomplets, devait être très-allongée: l'angle apical est certainement un des plus aigus du genre. Les ornements longitudinaux simples et sans granulations, la rapprochent d'une espèce des sables inférieurs décrite par Melleville sous le nom de *C. Canaliculatum* (1843, *Sables inf.*, p. 59, pl. VII, fig. 12, 13), et dont d'Orbigny a fait le *C. proelongum* (*Prodr.* II, p. 317, n° 573. Voir aussi Deshayes, 1865, t. III, p. 209, pl. LXXIX, fig. 4-6). Les seules différences que nous puissions y constater, sont que les côtes longitudinales semblent être plus uniformes en grosseur et en écartement dans l'espèce de Mons. Une espèce du calcaire grossier de Paris, le *C. quadrifidum*, Desh. (1824, t. II, p. 396, pl. LV, fig. 18-20 et 1865, t. III, p. 223), s'en approche

encore davantage, par ses ornements qui sont à peu près les mêmes; mais elle a l'angle apical beaucoup plus ouvert.

- FIG. 8a, vue du côté de l'ouverture, grossie cinq fois.  
 — 8b, vue par-dessus, grossie cinq fois.  
 — 8c, grandeur naturelle.

CERITHIUM TRITONOIDES, *Nov. sp.*

Pl. XVII, fig. 7a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,008 — 100
Largeur — . . . . .	0,005 — 57
Hauteur du dernier tour. . . . .	0,005 — 57
Angle apical. . . . .	50° à 55°

Coquille assez petite, conique, turriculée, composée de huit tours s'enroulant régulièrement en une spire assez aiguë, séparés par des sutures profondes. Ces tours sont ornés de côtes transverses très-saillantes, presque épineuses à l'extérieur des tours, et finissant insensiblement aux deux sutures, droites, parallèles aux stries de croissance, se correspondant assez bien d'un tour à l'autre, au nombre de sept pour une révolution de la spire. Base conique; ouverture ovale, terminée en avant par un canal court, arrondie en arrière; le bord droit arqué, tranchant mais épaissi en bourrelet un peu en arrière tant à l'intérieur qu'à l'extérieur, et portant, à l'intérieur, trois dents assez bien marquées, la première à l'origine du canal, les autres équidistantes et se partageant à peu près exactement l'espace jusqu'à l'angle postérieur.

*Remarques.* — C'est une coquille assez remarquable. Par son bourrelet dentelé à l'intérieur elle se rapproche des Tritons, mais sa ressemblance avec ce genre ne va pas plus loin.

C'est ce bourrelet dentelé qui distingue principalement notre coquille de deux espèces du bassin de Paris, toutes deux du calcaire grossier. Ce sont : *C. fragile*, Desh. (1829, t. II, p. 363, pl. LIV, fig. 16-21), et *C. costulatum*, Lk, sp. (*C. subulatum*, Lk, 1804, *Ann. sans vert.*, t. VII, p. 84) qui, toutes deux, ont le labre simple, mais dont les ornements se rapprochent beaucoup de ceux de notre espèce. Seulement, les stries longitudinales sont plus prononcées aux espèces du bassin de Paris.

- FIG. 7a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.  
 — 7b, vue par-dessus, grossie quatre fois.  
 — 7c, grandeur naturelle.

CERITHIUM ÖRTLIEBI, *Nov. sp.*

Pl. XVI, fig. 9a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0095 — 100
Largeur — . . . . .	0,004 — 42
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,005 — 52
Angle apical . . . . .	52°

Coquille petite, conique, turriculée, composée de dix tours s'enroulant en une spire pointue sous un angle régulier, séparés par des sutures bien marquées, les premiers arrondis, les deux derniers beaucoup plus plats. Les premiers tours sont ornés de côtes transverses au nombre de 12 à 14 pour une révolution de la spire, se prolongeant d'une suture à l'autre, et dont une ou deux par tour acquièrent plus de saillie et deviennent variqueuses; des filets longitudinaux répartis au nombre de sept d'une suture à l'autre, traversent ces côtes en y acquérant plus de saillie et deviennent parfois granuleux; le second et le quatrième filets en partant de la suture antérieure sont relativement très-forts aux premiers tours, mais diminuent de saillie en acquérant plus d'uniformité à mesure que la coquille avance en âge, pendant que de leur côté les côtes transverses s'effacent et disparaissent presque aux deux derniers tours. La base est également ornée de filets longitudinaux, mais plus faibles qu'à l'extérieur des tours. Le bord gauche de l'ouverture, assez mince, est très-infléchi au milieu, un peu renflé à la gouttière postérieure et rejeté en arrière à l'extrémité antérieure; un bourrelet variqueux transverse, assez fort, se remarque au dernier tour, à l'opposé de l'ouverture.

*Remarques.* — L'ouverture de cette coquille ne nous est pas connue. Elle devait être petite, arrondie, oblique, terminée en arrière par une gouttière peu large et en avant par un canal court.

Elle se rapproche beaucoup de notre *C. planovaricosum* (2<sup>me</sup> partie, p. 30, pl. VIII, fig. 5a, b, c), mais chez cette dernière les côtes transverses persistent jusqu'à l'ouverture. Elle se rapproche aussi très-fort du *C. inabsolutum*, Desh. (1865, t. III, p. 170, pl. LXXIV, fig. 28) du calcaire grossier supérieur, mais les ornements longitudinaux de cette dernière espèce sont moins nombreux et par conséquent plus écartés.

FIG. 9a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.

— 9b, vue par-dessus, grossie quatre fois.

— 9c, grandeur naturelle.

CERITHIUM TENCICULUM, *Nov. sp.*

Pl. XVII, fig. 6a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0065 — 100
Largeur — . . . . .	0,002 — 51
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0012 — 18
Angle apical . . . . .	16° à 17°

Coquille petite, conique, allongée, à spire pointue, composée de dix à douze tours arrondis, séparés par des sutures profondes, enroulés régulièrement, portant extérieurement deux carènes longitudinales, saillantes dans les premiers tours mais s'émoissant un peu dans les derniers; ces carènes divisent l'extérieur des tours en trois bandes égales, et elles sont recoupées par des côtes transverses, parallèles aux stries de croissance, bien marquées vers le sommet où elles sont au nombre de dix à douze pour une révolution de la spire, mais s'effaçant insensiblement dans les derniers où elles deviennent obtuses et sont remplacées par des plis plus irréguliers. Deux autres carènes, également longitudinales existent, l'une à la circonférence de la base, plus saillante, sur laquelle se fait le retour de la spire, et l'autre sur la base, à peu près à la même distance que les autres.

*Remarques.* — Cette espèce est très-fragile; nous ne possédons aucun spécimen dont l'ouverture soit complète. La détermination générique ne peut cependant être douteuse. Elle se rapproche assez du *C. Luciani*, Br. et C. (2<sup>me</sup> partie, p. 28, pl. VIII, fig. 10a, b, c), mais elle est beaucoup plus allongée, et ses ornements, moins prononcés, ne sont jamais tuberculeux.

FIG. 6a, vue du côté de l'ouverture, grossie cinq fois.

— 6b, vue par-dessus, grossie cinq fois.

— 6c, grandeur naturelle.

**CERITHIUM TURRITELLOSUM, Nov. sp.**

Pl. XVII, fig. 9a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille. . . . .	0,0085 — 100
Largeur — . . . . .	0,005 — 53
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0025 — 50
Angle apical, aux premiers tours. . . . .	55°
— aux derniers tours . . . . .	14°

Petite coquille conique, turritulée, à spire pointue, composée de dix tours assez larges, s'enroulant, vers le sommet, sous un angle régulier, cet angle devenant convexe par la suite et assez fermé aux derniers tours, séparés par des sutures profondes, simples et bien marquées. Les premiers tours sont arrondis, les derniers plus plats et carénés à la partie antérieure où ils débordent la suture; ils sont ornés de filets assez réguliers, longitudinaux, peu saillants, presque égaux et striés en long, au nombre de sept, l'un formant la saillie de la carène, un autre en avant et les cinq autres en arrière; ils sont recouverts par des stries de croissance rares et peu visibles. Ouverture assez petite, terminée en arrière par une gouttière mince, et en avant par un canal court; le bord gauche fortement arqué, très-épais, détaché de la columelle sur sa moitié antérieure.

*Remarques.* — Cette élégante coquille, dont nous ne possédons qu'un seul spécimen, est fort bien conservée, le bord droit seul manquant. L'ouverture devait être arrondie. Il est fort heureux que les caractères génériques principaux aient été conservés, car les ornements et la forme générale des tours la rapprocheraient plutôt des Turritelles. Ces ornements ne semblent pas se prolonger sur la base qui est à peu près lisse.

Cette espèce appartient au groupe du *C. unisulcatum*, Lk, et se rapproche particulièrement de notre *C. Queteleti* (2<sup>me</sup> partie, p. 53, pl. X, fig. 6a, b, c.), mais elle s'en distingue aisément par la forme des tours carénés antérieurement et comme imbriqués, et par les ornements longitudinaux beaucoup moins nombreux.

- Fig. 9a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.  
 — 9b, vue par-dessus, grossie quatre fois.  
 — 9c, grandeur naturelle.

Famille : MÉLANIDES.

Genre **MELANIA**, Lamk, 1801.

(Voy. 2<sup>me</sup> partie, p. 67.)

Six nouvelles espèces sont venues s'ajouter aux trois précédemment connues, ce qui porte à neuf le nombre total.

**MELANIA SCALAROIDES**. *Nov. sp.*

Pl. XVIII, fig. *4a, b, c.*

DIMENSIONS : . . . . . ?

Coquille allongée, turriculée, à tours nombreux assez peu convexes, portant deux carènes saillantes, l'une à la circonférence de la base, l'autre à la partie postérieure, ces deux carènes se rejoignant pour former une suture peu profonde. Ces tours sont ornés de côtes transverses au nombre de vingt-cinq à trente pour une révolution de la spire, obliques à l'axe des tours et arquées en arrière, commençant à la carène antérieure et finissant en un petit granule avant d'atteindre la carène postérieure, parallèles aux stries de croissance. Base lisse, ayant une légère dépression le long de la suture et ne montrant que des lignes de croissance obliques; ouverture inconnue.

*Remarques.* — Le genre de cette espèce, dont nous ne possédons qu'un exemplaire fort incomplet, reste un peu douteux. Nous avons pensé d'abord à en faire un scalaire, mais ce qui reste du bord columellaire tend à la rapprocher des Mélanies; il en est de même des ornements extérieurs.

Nous avons de Cuise-la-Motte un fragment d'une coquille inédite qui est assez voisine de cette espèce. Elle a les mêmes côtes obliques et arquées, aboutissant des deux côtés à une carène. Mais, sur l'espèce française ces côtes sont traversées de filets longitudinaux dont est dépourvue entièrement l'espèce de Mons. Nous ne connaissons pas, pour notre espèce, d'autre rapprochement possible.

Fig. *4a*, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.

— *4b*, vue par-dessus, grossie quatre fois.

— *4c*, grandeur naturelle.

**MELANIA BENEDEMI, *Nor. sp.***

Pl. XVIII, fig. 6a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,007	— 100
	Largeur — . . . . .	0,004	— 57
	Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0055	— 50
	Angle apical . . . . .		50°

Coquille assez petite, conique, turriculée, composée de sept ou huit tours s'enroulant régulièrement en une spire aiguë, séparés par des sutures profondes et bien marquées; les premiers tours sont arrondis, les suivants deviennent plats et carénés à la partie postérieure. Ces tours sont ornés, ainsi que la base, de nombreuses côtes longitudinales saillantes, séparées par des sillons arrondis, la plus forte à la carène, les autres diminuant de saillie et se resserrant de plus en plus jusqu'au centre de la base; le retour de la spire se fait sur la quatrième côte; des stries de croissance très-légères recourent tous ces ornements. Base conique, arrondie; ouverture ovale, oblique, dilatée en avant, atténuée en arrière, aiguë à la suture, anguleuse à la carène; le bord droit largement arqué, saillant antérieurement et retournant vers la columelle en dessinant un angle arrondi; le bord gauche mince, légèrement infléchi au milieu, attaché sur toute sa longueur au tour précédent.

*Remarques.* — Cette forme est assez remarquable dans le genre *Melania*, où, d'habitude, la carène postérieure des tours se combine avec des ornements transverses.

Nous ne connaissons aucune coquille analogue dans les descriptions des auteurs.

Cette espèce est très-rare.

- FIG. 6a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.  
 — 6b, vue par-dessus, grossie quatre fois.  
 — 6c, grandeur naturelle.



MELANIA ANOMALA, *Nov. sp.*

Pl. XVIII, fig. 7a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,006 — 100
Largeur — . . . . .	0,005 — 50
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,005 — 50
Angle apical . . . . .	45° à 55°

Coquille assez petite, brillante, composée de sept ou huit tours irréguliers, les premiers et les derniers légèrement arrondis, les intermédiaires plus plats, s'enroulant en une spire aiguë sous un angle concave, le dernier très-développé. Base arrondie, obtuse, terminée extérieurement par une carène arrondie; le retour de la spire se fait à peu près au milieu de l'espace compris entre cette carène et la suture postérieure, quelquefois un peu en arrière. Ces tours, ainsi que la base, sont ornés de stries ou sillons longitudinaux, nombreux, séparés par des espaces plats, assez écartés à la carène, plus rapprochés sur la base et à la partie postérieure des tours, le tout recoupé par des stries de croissance beaucoup plus fines et plus rares. Ouverture petite, fort allongée et aiguë en arrière, arrondie en avant; le bord columellaire fortement infléchi au milieu, rejeté un peu en dehors à la partie antérieure où le retour du bord produit un léger pli; toute la partie postérieure jusqu'à la suture recouverte d'une mince callosité.

*Remarques.* — Nous avons décrit, dans notre seconde partie (p. 74, pl. XI, fig. 4a, b, c), une coquille de forme fort singulière, sous le nom de *Pirena gibbosa*. L'aspect de la spire, les ornements et le développement du dernier tour ont beaucoup de rapports avec ce que l'on remarque dans celle que nous décrivons aujourd'hui. Celle-ci pourrait, par conséquent, n'en être que le jeune âge et n'avoir pas encore subi la déformation bizarre de l'ouverture dans l'âge adulte. Nous l'en séparons, cependant, parce que la taille de la coquille, la même que celle du *P. Gibbosa*, ainsi que l'absence complète du bord gauche, semble écarter cette supposition.

- FIG. 7a, vue du côté de l'ouverture, grossie cinq fois.  
 — 7b, vue par-dessus, grossie cinq fois.  
 — 7c, grandeur naturelle.

*MELANIA RIZONATA, Nov. sp.*

Pl. XVIII, fig. 5a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,008	— 100
Largeur — . . . . .	0,0033	— 44
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0025	— 51
Angle apical . . . . .		56°

Coquille petite, conique, turriculée, composée de huit tours s'enroulant en une spire assez aiguë sous un angle régulier jusqu'au dernier où l'angle devient un peu convexe, séparés par des sutures simples et bien marquées. Ces tours sont arrondis vers le sommet, mais au troisième, leur surface extérieure se divise en deux zones bien tranchées, la zone antérieure, un peu plus large et plus élevée que la postérieure, en est séparée par une ligne aussi bien marquée que la suture. Ces deux zones sont recouvertes de filets longitudinaux très-fins, peu saillants, striés en long et assez irréguliers, au nombre de trois sur la zone postérieure et de quatre sur la zone antérieure. La base est entièrement recouverte d'ornements semblables mais de plus en plus fins et serrés, recoupés par des stries de croissance rares et à peine visibles. Ouverture arrondie, subcanaliculée en avant et terminée en arrière par une petite gouttière; le bord droit largement arqué; le bord gauche très-infléchi au milieu, assez mince sur sa moitié postérieure et se détachant du tour précédent sur la moitié antérieure.

*Remarques.* — Cette espèce est très-rare; nous n'en possédons aucun spécimen bien complet. Il ne serait pas indifférent, cependant, de connaître les particularités de l'ouverture, pour donner plus de certitude à notre détermination générique. Nous croyons pourtant que notre coquille est bien un *Melania*, appartenant au groupe de *M. Lactea*, Lk, sans qu'il soit possible de confondre les deux espèces.

- FIG. 5a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.  
 — 5b, vue par-dessus, grossie quatre fois.  
 — 5c, grandeur naturelle.

*MELANIA MORRENT, Nov. sp.*

Pl. XVIII, fig. 9a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,0092 — 100
Largeur — . . . . .	0,004 — 47
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0055 — 59
Angle apical . . . . .	55°

Assez petite coquille turriculée, mince, à tours nombreux, s'enroulant sous un angle régulier assez aigu, séparés par des sutures profondes. Ces tours portent une carène longitudinale fort bien marquée, située environ au tiers antérieur du tour et disparaissant vers l'ouverture; ils sont en outre recouverts de nombreuses stries de croissance. Ouverture ovale, oblique, aiguë en arrière, arrondie en avant, les deux bords simples et largement arqués, le bord gauche attaché au tour précédent, mais laissant une fente ombilicale au milieu de la base.

Cette espèce appartient au groupe de *M. Lactea*, Lk (*Ann. du Museum*, t. IV, p. 430. — Desh., 1824, t. II, p. 106, pl. XIII, fig. 4-5) avec laquelle elle ne pourra, cependant, jamais être confondue.

Fig. 9a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.

— 9b, vue par-dessus, grossie quatre fois.

— 9c, grandeur naturelle.

*MELANIA MALAISEI, Nov. sp.*

Pl. XVIII, fig. 8a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,005 — 100
Largeur — . . . . .	0,005 — 60
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0025 — 50
Angle apical . . . . .	55°

Coquille conique, assez courte, composée de cinq tours séparés par des sutures profondes, s'enroulant régulièrement sous un angle assez ouvert. Ces tours portent une carène longitudinale à la partie antérieure près de la suture où ils débordent le tour précédent; cette carène forme la circonférence de la base; deux carènes moins fortes, également longitudinales, se remarquent un peu en avant sur la base, le retour de la spire se faisant entre les deux; deux autres carènes également peu marquées occupent la partie

postérieure des tours, en arrière de la carène principale. Base assez obtuse; ouverture ovale, arrondie, anguleuse à la partie postérieure, peu oblique, assez proéminente.

*Remarques.* — Cette coquille est très-rare. Le spécimen que nous avons dessiné n'est pas complet, le bord droit étant enlevé sur à peu près un quart du dernier tour. Cela ne nous permet pas de nous étendre davantage sur les particularités de l'ouverture et nous laisse quelques doutes quant à la détermination générique, d'autant plus que l'angle apical est plus obtus qu'il ne l'est d'habitude chez les *Melanies*. Tous les autres caractères et particularités sont, cependant, tellement bien conservés, que nous avons cru devoir donner l'espèce.

FIG. 8a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois.

— 8b, vue par-dessus, grossie quatre fois.

— 8c, grandeur naturelle.

Genre **MELANOPSIS**, Lamk, 1801.

**MELANOPSIS BUCCINOIDEA**, Ferr

Voy. 2<sup>me</sup> partie, pp. 71-73, pl. VII, fig. 7a, b, c, 8a, b, c, 9a, b, c.

Cette espèce ne serait pas confinée, ainsi que nous l'avons dit, dans l'étage des lignites du bassin de Paris. Monsieur Hébert dit, en effet (*Comparaison de l'éocène inf. de la Belgique et de l'Angleterre avec celui du bassin de Paris*, p. 17) : « Un *Melanopsis* assez fréquent dans les marnes strontianiennes de Meudon est tout à fait identique avec une espèce d'Obourg (de Mons). » Nous avons pu vérifier le fait par nous-mêmes.

Bien que l'illustre professeur de la Sorbonne ne désigne pas le *Melanopsis* de Meudon sous le nom de *M. buccinoides*, il ne rejette pas non plus cette identification que nous n'avions pas encore produite quand il a écrit sa notice. M. Munier-Chalmas, que nous avons consulté à ce sujet, quelque temps après, ne voyait non plus aucun motif de la révoquer en doute. Nous pouvons donc la considérer comme admise, et résumer l'histoire de l'espèce en disant : apparue pour la première fois en Belgique, dès l'époque du calcaire grossier de Mons, elle se montra depuis, à deux époques différentes dans le

bassin de Paris, d'abord lors du dépôt des marnes stroutianifères de Meudon, ensuite lors du dépôt des lignites. Elle ne remonte pas plus haut que ce dernier étage dans la série tertiaire de France, mais elle se rencontre dans notre pays dans les séries correspondantes, c'est-à-dire, dans les couches landeniennes fluvio-marines supérieures (Puits artésien d'Ostende).

Famille : TURRITELLIDES.

(Voy. 2<sup>me</sup> partie, p. 76.)

Il est étonnant que le genre *Turritella*, dont nous avons trouvé tant d'espèces au puits Goffint, ne nous ait présenté aucun type nouveau aux nouvelles fouilles du puits Coppée. Le nombre de nos espèces reste donc fixé à seize.

Par contre, un genre que nous n'avions pas constaté dans notre première partie, est venu s'y joindre ; c'est le genre *Vermetus*.

Genre *SCALARIA*, Lamk, 1801.

(Voy. 2<sup>me</sup> partie, p. 91.)

Trois nouvelles espèces ont été trouvées par nos dernières fouilles. Ajoutées aux trois précédemment connues, elles portent à six le nombre total des Scalaires du calcaire grossier de Mons.

*SCALARIA TOURNOURI*, *Nov. sp.*

Pl. XVIII, fig. 1a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,007	— 100
Largeur — . . . . .	0,0055	— 50
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,00225	— 52
Angle apical . . . . .		50° à 52°

Assez petite coquille, turriculée, composée de six ou sept tours arrondis, séparés par des sutures profondes, s'enroulant régulièrement sous un angle assez aigu. Ces tours sont

ornés de côtes transverses parallèles aux stries de croissance, fines, saillantes et lamelleuses, au nombre de seize à dix-huit pour une révolution de la spire, séparées par de larges espaces plats traversés de stries longitudinales; ces côtes occupent toute la surface extérieure de la coquille et se prolongent sur toute la base, au delà d'une côte longitudinale qui en marque la circonférence. Ouverture arrondie.

*Remarques.* — Le calcaire grossier de Mons nous a procuré plusieurs spécimens de cette espèce. Généralement, les *Scalaires* qui ont une côte longitudinale à la circonférence de la base, voient les côtes transverses s'y arrêter et laisser la base lisse ou à peu près. Il n'en est pas ainsi de notre espèce, dont les côtes transverses se prolongent sur toute la base comme si elles n'avaient pas rencontré la côte longitudinale. C'est ce caractère, ainsi que la forme plus régulière des côtes, qui la distinguent du *S. plicata*, Lk (Deshayes, *Coq. foss. du bassin de Paris*, 1824, t. II, p. 199, pl. XXIII, fig. 9, 10, et 1862, t. II, p. 346) appartenant à l'étage du calcaire grossier, et du *S. acuta*, Sow. (*Min. Conch.*, 1813, p. 50, pl. XVI. — Deshayes, 1862, t. II, p. 340, pl. XXIII, fig. 7-9), espèce de Barton-Cliff et de Cuise-la-Motte.

Toutes ces espèces appartiennent au groupe *Opalia*, H. et A. Adams.

- Fig. 1a, vue du côté de l'ouverture, grossie cinq fois.  
 — 1b, vue par-dessus, grossie cinq fois.  
 — 1c, grandeur naturelle.

SCALARIA WATELETI, *Nov. sp.*

Pl. XVIII, fig. 2a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,005	— 100
Largeur — . . . . .	0,002	— 40
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,00125	— 25
Angle apical . . . . .		25°

Coquille petite, conique, turriculée, à tours nombreux, arrondis vers le sommet mais s'aplatissant de plus en plus vers l'ouverture, séparés par des sutures profondes et s'enroulant sous un angle régulier en une spire aiguë. Ces tours sont ornés de côtes transverses, droites, étroites et saillantes, séparées par de larges intervalles plats, au nombre de sept ou huit pour une révolution de la spire, se prolongeant d'une suture à l'autre

mais s'arrêtant à une côte saillante formant la circonférence de la base et sur laquelle se fait le retour de la spire; deux vagues carènes longitudinales se remarquent à peine entre les sutures et divisent l'extérieur des tours en trois zones à peu près égales. Base unie et sans ornements; ouverture arrondie.

*Remarques.* — Nous pouvons comparer cette espèce, assez rare dans le calcaire grossier de Mons, au *S. Heteromorpha*, Desh. (1862, t. II, p. 349, pl. XI, fig. 20, 22) d'autant plus qu'à cette espèce du calcaire grossier de Paris, deux côtes ou carènes saillantes divisent également l'extérieur des tours en trois parties à peu près égales. Cependant, les tours de notre espèce sont plus plats que ceux de l'espèce française, et l'angle apical paraît être un peu plus aigu. Remarquons, une fois de plus, avec combien peu de soins sont quelquefois faites les figures de Deshayes. D'après sa description, la largeur de la coquille est le tiers de sa longueur, tandis que d'après la figure elle serait de la moitié.

FIG. 2a, vue du côté de l'ouverture, grossie six fois.

— 2b, vue par-dessus, grossie six fois.

— 2c, grandeur naturelle.

SCALARIA REMARDI. *Nov. sp.*

Pl. XVIII, fig. 5a, b, c.

DIMENSIONS : Longueur de la coquille . . . . .	0,005? — 100
Largeur — . . . . .	0,0016 — 52
Hauteur du dernier tour . . . . .	0,0015 — 28
Angle apical . . . . .	18°

Petite coquille, conique, turriculée, composée de tours nombreux, assez larges, arrondis, séparés par des sutures profondes, s'enroulant sous un angle régulier. Ces tours sont ornés de côtes longitudinales saillantes et fines sans être lamelleuses, presque égales entre elles, au nombre de sept, l'antérieure, sur laquelle se fait le retour de la spire, limite sur la base une surface presque unie et montrant simplement quelques stries parallèles, les autres réparties uniformément jusqu'à la suture postérieure; ces côtes longitudinales sont recoupées par des côtes transverses à peu près de même saillie et de même forme, au nombre de dix-huit à vingt-quatre pour une révolution de la spire, moins serrées aux tours postérieurs qu'au dernier, et dessinant avec les premières un réticule parfois très-régulier, mais le plus souvent allongé. Ouverture ronde.

*Remarques.* — Cette espèce est très-rare dans le calcaire grossier de Mons. Elle est très-rapprochée du *S. decussata*, Lk (*Ann. du Museum*, t. IV, p. 213, et t. VIII, pl. XXXVII, fig. 3. — Deshayes, 1824, t. II, p. 197, pl. XXIII, fig. 1, 2), comme elle très-élégamment treillissée; mais les ornements de notre espèce sont beaucoup mieux marqués et plus uniformes.

FIG. 5a, vue du côté de l'ouverture, grossie six fois.

— 5b, vue par-dessus, grossie six fois.

— 5c, grandeur naturelle.

Genre VERMETUS, Adanson, 1757.

*Car. gén.* — Coquille tubulaire, s'enroulant régulièrement dans le jeune âge, à tours désumés et en spirale irrégulière dans l'âge adulte; ouverture arrondie, à bords simples et tranchants.

*Remarques.* — On a souvent confondu les espèces de ce genre, dans le jeune âge avec les Turritelles, et dans l'âge adulte avec les Serpules.

On en cite quelques espèces, plus ou moins douteuses, dans les terrains crétaqués. Les espèces tertiaires sont plus nombreuses et plus authentiques. Elles vivent à leur maximum dans les mers actuelles.

Ce genre n'avait pas été signalé par nous dans le calcaire grossier de Mons. Les fouilles du puits Coppée nous en ont procuré une seule espèce.

VERMETUS MONTENSIS, *Nov. sp.*

Pl. XVIII, fig. 10a, b, c.

DIMENSIONS :	Longueur de la coquille . . . . .	0,009	— 100
	Largeur — . . . . .	0,0025	— 28
	Hauteur de l'ouverture . . . . .	0,002	— 22
	Angle apical . . . . .		45°

Coquille assez petite, conique, turriculée, composée de dix à douze tours, arrondis vers le sommet mais plus aplatis par la suite, s'enroulant en une spire aiguë sous un angle un peu convexe, séparés par des sutures bien marquées, le dernier se détachant du tour précédent. Ces tours sont carénés en avant et en arrière à la face extérieure, les deux



carènes se joignant pour former la suture ; quelques vagues sillons, longitudinaux comme les carènes, souvent à peine indiqués, au nombre de quatre, ornent l'extérieur des tours. Ouverture entière, arrondie ou subpolygonale, à bords simples.

*Remarques.* — Cette espèce est fort abondante dans le calcaire grossier de Mons. Elle nous avait échappé d'abord, probablement parce que nous prenions ses nombreux représentants pour des sommets de spire détachés de quelque Turritelle. Depuis, nous avons reconnu, par des spécimens plus complets, que le dernier tour se sépare du tour précédent, ce qui est le caractère le plus tranché du genre *Vermetus*.

Cette coquille est fort remarquable par sa forme. Nous ne lui avons trouvé aucun point de comparaison dans le bassin de Paris.

- FIG. 10a, vue du côté de l'ouverture, grossie quatre fois  
 — 10b, vue par-dessus, grossie quatre fois.  
 — 10c, grandeur naturelle.

FIN DE LA TROISIÈME PARTIE.

## ADDITIONS ET CORRECTIONS AUX DEUX PREMIÈRES PARTIES.

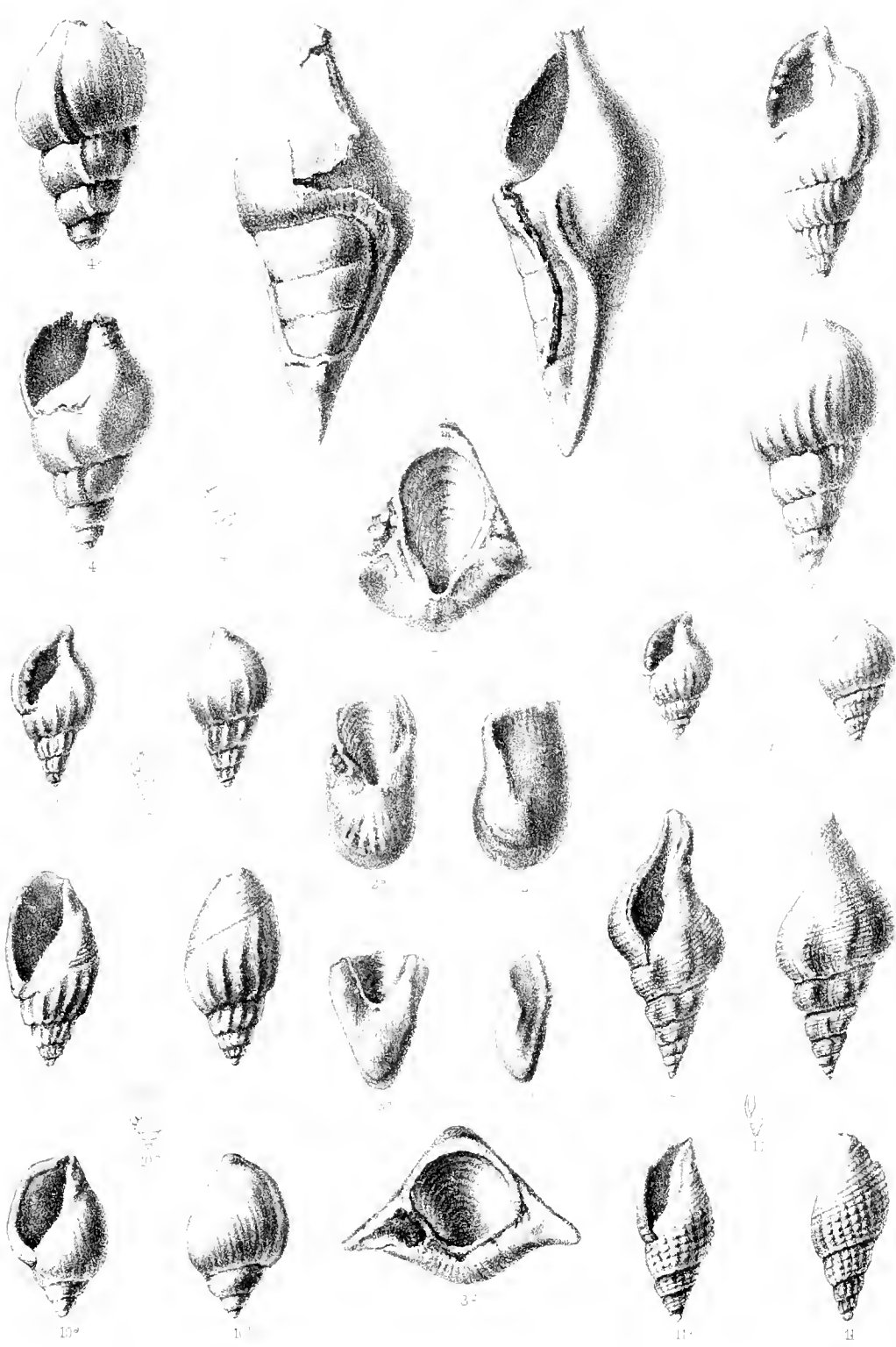
1<sup>re</sup> PARTIE, page 21, 7<sup>e</sup> ligne, au lieu de : fig. 4a, b, c, lisez : fig. 5a, b, c.

- 55, 25<sup>e</sup> — — — *Pseudoliva canaliculata*, lisez : *Pseudoliva robusta*, jeune âge.
- 58, 2<sup>e</sup> — — — pl. VI, lisez : pl. IV.
- 72, au-dessous de : *Mitra Devalquvi*, sp. n., ajoutez : pl. V, fig. 11a, b, c.

2<sup>e</sup> PARTIE, page 1, (titre), 7<sup>e</sup> ligne, au lieu de : *Syphonostomes*, lisez : *Holostomes*.

- 2, 7<sup>e</sup> ligne, au lieu de : pl. IV, fig., lisez : pl. VI, fig.
- 5, 52<sup>e</sup> — — — 4a, lisez : 2a.
- 5, 55<sup>e</sup> — — — 4b, — 2b.
- 5, 54<sup>e</sup> — — — 4c, — 2c.
- 25, 18<sup>e</sup> — — — *biseriale*, — *mopinatam*.





10<sup>a</sup>

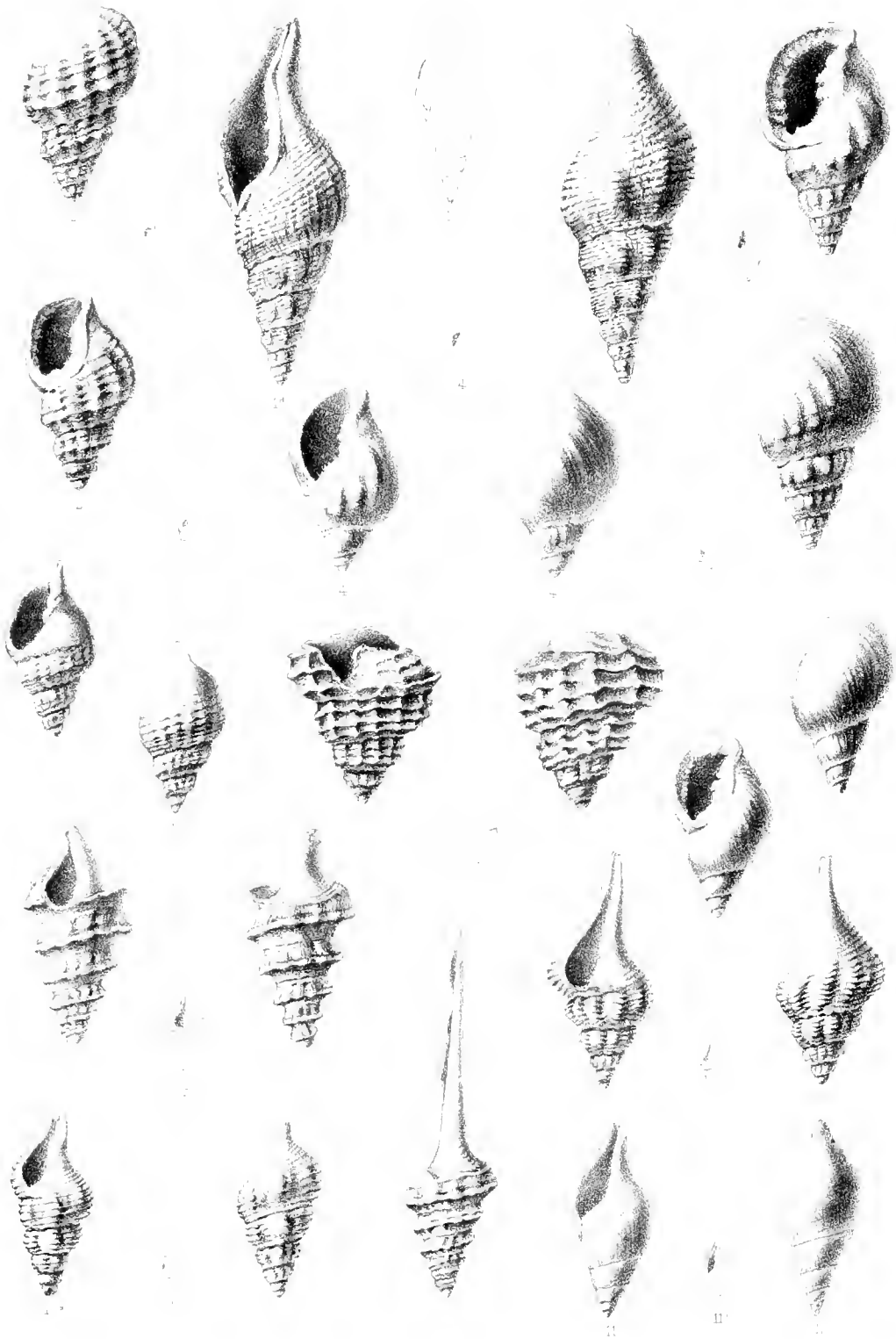
11<sup>a</sup>

3<sup>a</sup>

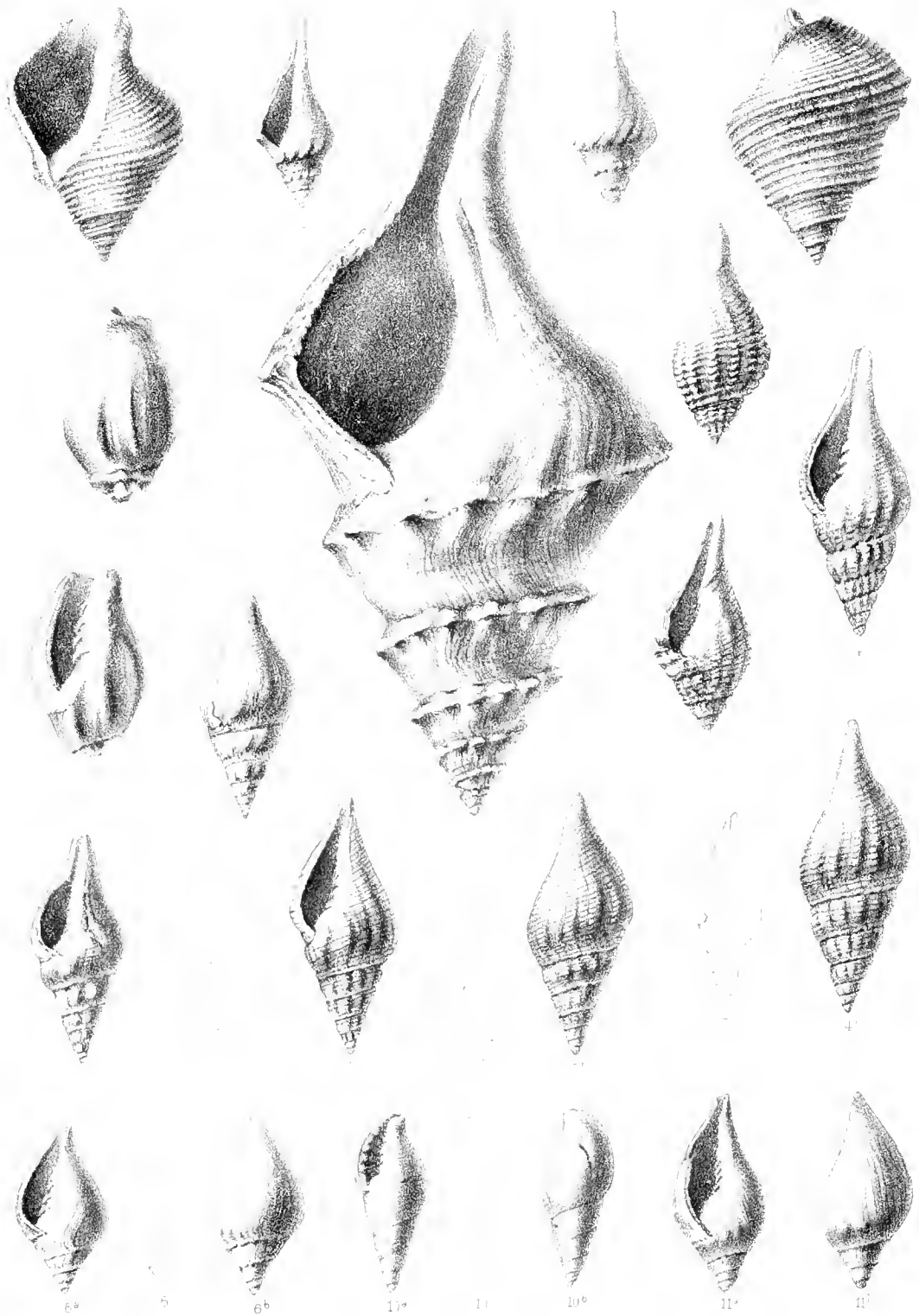
12<sup>a</sup>

14<sup>a</sup>



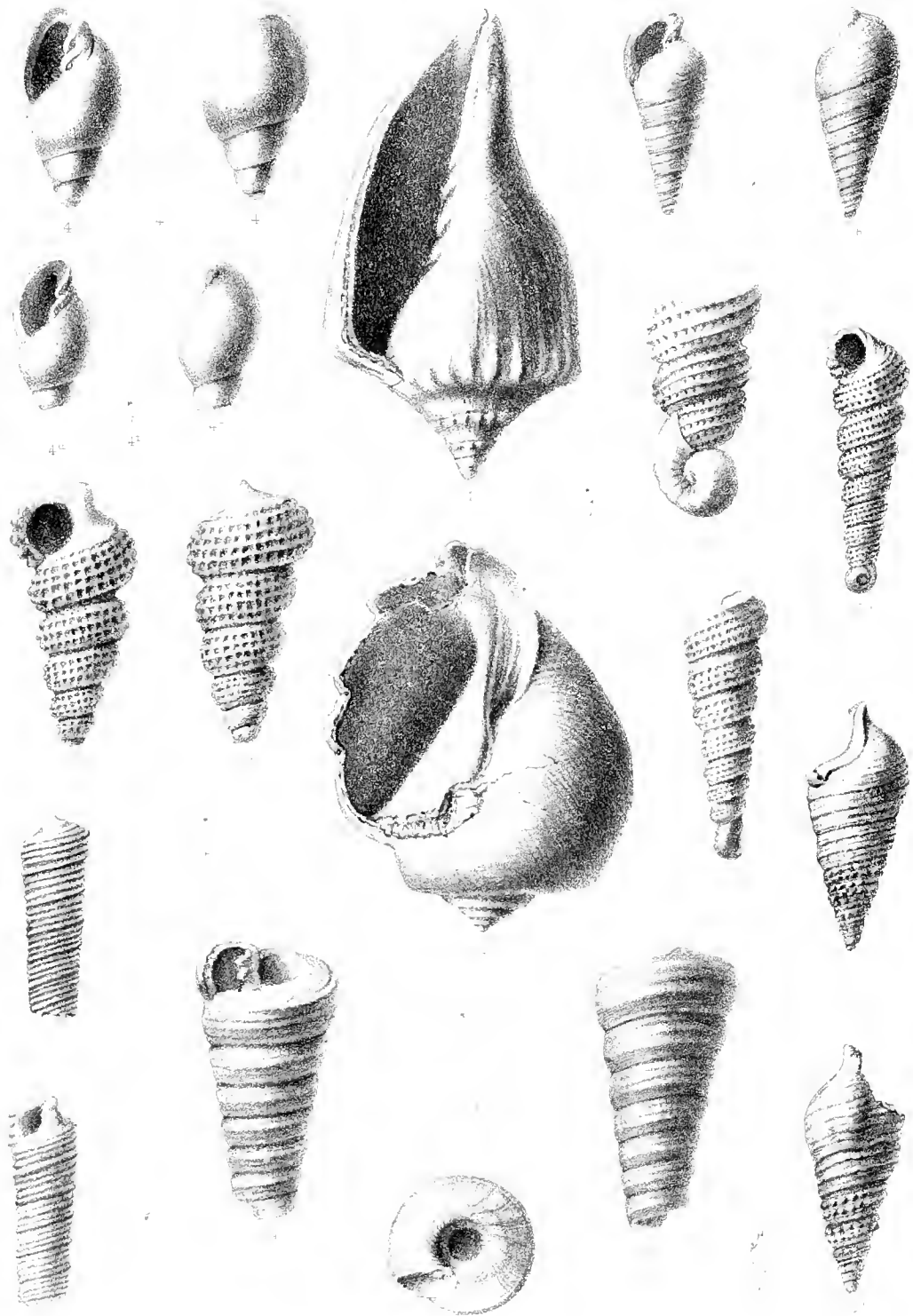




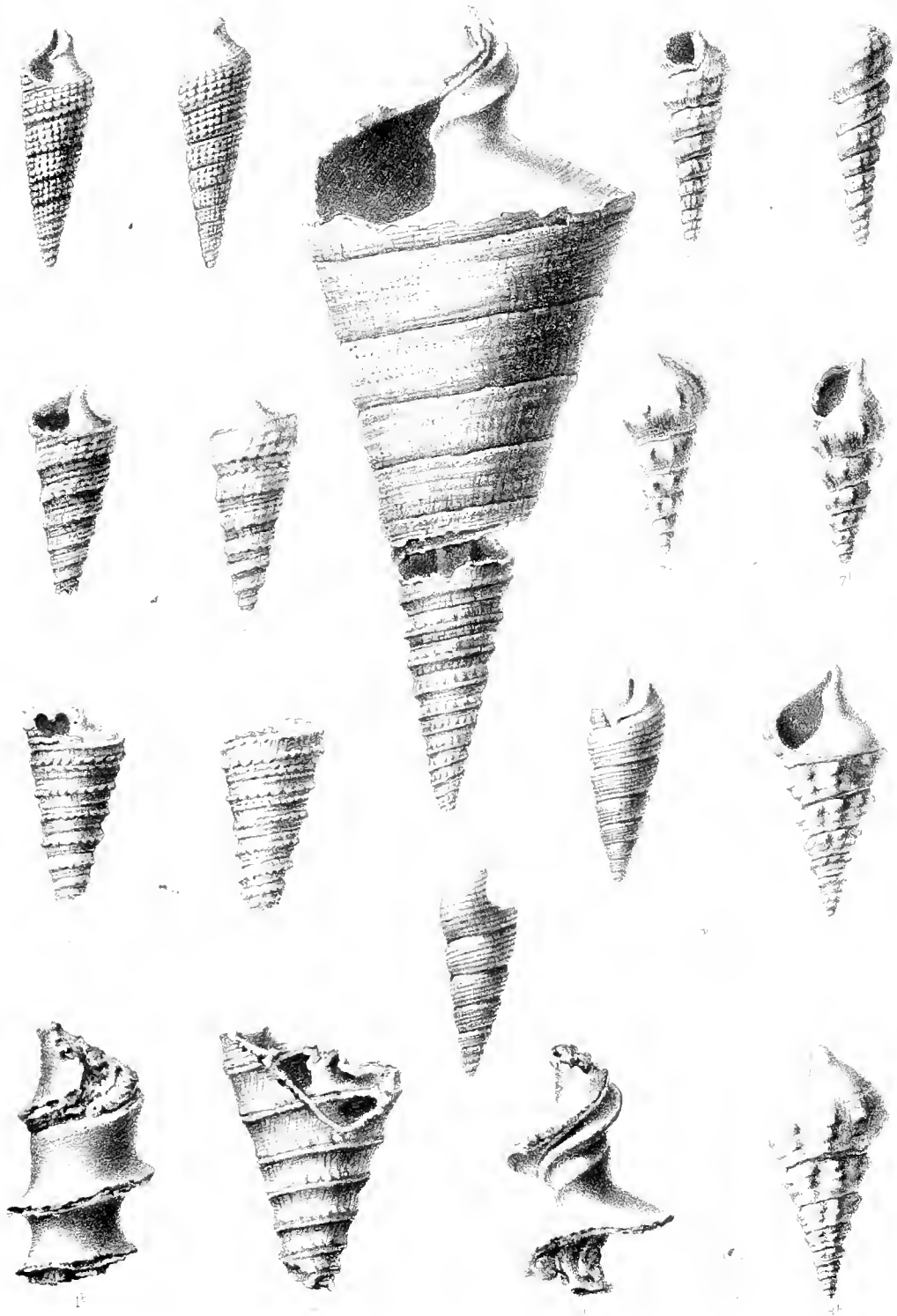


















**RECHERCHES**

SUR LES

**MOUVEMENTS DE L'AIGUILLE AIMANTÉE**

A BRUXELLES

PAR

**ERNEST QUETELET,**

MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

---

( Présenté à la classe des sciences dans la séance du 2 février 1878. )

---





# RECHERCHES

SUR

## LES MOUVEMENTS DE L'AIGUILLE AIMANTÉE

A BRUXELLES.



Parmi les forces naturelles qui ont fait l'objet des recherches des physi-  
ciens, une des plus mystérieuses et assurément une des plus difficiles à  
étudier est la force magnétique. L'attraction qui ne dépend que des distances  
mutuelles et des masses des corps en présence, offre déjà d'immenses diffi-  
cultés au calculateur; les distances seules varient cependant et les masses  
peuvent être regardées comme constantes. Quand il s'agit du magnétisme,  
au contraire, non-seulement les distances sont variables, mais les forces  
elles-mêmes varient spécifiquement.

Il est bien établi aujourd'hui que la force magnétique obéit à la même  
loi que l'attraction, c'est-à-dire qu'elle varie dans le rapport inverse du  
carré de la distance; c'est en partant de cette loi et par une habile définition  
de l'unité absolue de la force que Gauss est parvenu à représenter avec  
une exactitude inespérée les phénomènes magnétiques que l'on observe à

la surface du globe. A la vérité, les constantes qui entraient dans les formules du célèbre géomètre laissaient encore à désirer, par suite du manque de données suffisantes, fournies par l'observation; mais Ad. Erman a repris le problème, depuis que l'on possède des données plus complètes, et ces constantes peuvent être regardées aujourd'hui comme déterminées avec une assez grande précision.

Cependant les formules de Gauss se rapportent au système magnétique du globe pour une époque déterminée et l'on sait que, par la suite des temps, ce système se modifie profondément; c'est même par une étude suivie de ces changements qu'on arrivera sans doute à pénétrer plus avant dans la connaissance intime de cette force remarquable; mais ici les données positives font encore défaut.

J'ai donc pensé que les recherches contenues dans ce mémoire et qui se rapportent à la direction de l'aiguille aimantée à Bruxelles, seraient favorablement accueillies des physiciens. Le mémoire est divisé en trois sections : dans la première, après avoir réuni les observations magnétiques faites à Bruxelles, telles qu'elles ont été obtenues sans modification, je les ai corrigées et régularisées. Dans la deuxième section, je présente une étude nouvelle sur le mouvement séculaire de l'aiguille aimantée à Bruxelles; dans la troisième section, enfin, il sera traité des mouvements divers qu'éprouve l'aiguille par différentes causes.

---

## SECTION PREMIÈRE.

DES OBSERVATIONS MAGNÉTIQUES ET DE LEUR RÉDUCTION.

---

On sait que pour fixer la direction d'une ligne droite dans l'espace, deux angles coordonnés sont nécessaires; les angles qui ont été adoptés dans ce mémoire sont : 1° l'angle que fait, avec le méridien astronomique, le plan vertical qui contient l'aiguille aimantée, c'est la *déclinaison magnétique*; 2° l'angle qui est compris entre la ligne magnétique elle-même et sa projection sur le plan de l'horizon du lieu, c'est la *inclinaison magnétique*. Pour Bruxelles, à l'époque actuelle, l'extrémité de l'aiguille qui regarde le nord dévie vers l'ouest et elle est fortement déprimée au-dessous du plan de l'horizon.

Les observations qui ont été utilisées dans les recherches sur le magnétisme contenues dans ce mémoire ont été commencées en 1828; elles sont de deux espèces : 1° les déterminations que l'on peut nommer *absolues*, qui ont été obtenues chaque année dans le jardin de l'Observatoire, et habituellement vers l'équinoxe du printemps; 2° les observations faites chaque jour aux instruments différentiels dans une des salles de l'Observatoire même.

Les nombres observés ont été généralement publiés, soit dans la collection des *Annales de l'Observatoire* ou dans les *Bulletins de l'Académie des sciences*; on trouve en outre dans le tome XII des *Mémoires de l'Académie* un travail présentant les conclusions tirées de onze années d'observations,

de 1828 à 1839, et dans le tome XIII des *Annales* un deuxième mémoire dans lequel la discussion des documents recueillis a été étendue par mon père à la période de trente-deux années qui s'est écoulée de 1825 à 1859.

Je crois inutile de donner ici la description des appareils ni de traiter de leur emploi et des précautions qui ont été prises pendant les observations; ce sujet a déjà été développé d'une manière approfondie dans les mémoires cités ci-dessus; mais il est, je pense, nécessaire que j'entre dans quelques détails sur la construction des trois tableaux qui suivent et qui serviront de principaux matériaux à ce travail.

Le premier de ces tableaux, qui présente les *moyennes normales* des lectures faites au magnétomètre unifilaire ou barreau de déclinaison à échelle arbitraire, a exigé beaucoup de précautions dans sa construction. Voici d'abord ce qu'il faut entendre par *moyenne normale*. Si l'on observe le barreau à minuit, à 2 heures du matin et ainsi de suite jusqu'à 10 heures du soir, de deux en deux heures, on obtient douze lectures dont la moyenne sera la moyenne normale du jour. Quand on a déterminé ainsi les moyennes normales des trente jours d'un mois, la moyenne des trente nombres sera la moyenne normale du mois. Comme on le comprend, cette détermination suppose que les constantes de l'instrument n'ont pas varié pendant toute la durée du mois.

D'après la définition qui précède, rien ne serait plus facile que d'obtenir cette moyenne normale, si l'on possédait des observations régulières faites sans interruption de deux en deux heures, mais comme on ne possède pas une série complète, il a été nécessaire de suppléer par le calcul aux observations qui font défaut.

Depuis le mois de juin 1841 jusqu'au mois de mai 1844, les observations ont été faites régulièrement douze fois par jour; il a donc été possible de calculer directement les moyennes normales pour cette période. Depuis le mois de juin 1844 jusqu'à la fin de 1847, l'observation de 2 heures du matin n'a plus été faite; le nombre correspondant à cette heure a dû être calculé par interpolation. A cet effet, j'ai déterminé, d'après les trois années précédentes et séparément pour chaque mois, la petite correction qu'il faut ajouter au nombre observé à minuit pour en déduire celui de 2 heures du

matin, et de même en prenant 4 heures du matin comme terme de comparaison. J'ai formé ainsi le tableau suivant :

TABLEAU a. — *Corrections à appliquer aux lectures faites au magnétomètre unifilaire à minuit et à 4 heures du matin pour en déduire celles de 2 heures du matin.*

Corrections à ajouter :	Janv.	Fév.	Mars.	Avril.	Mai.	Juin.	Juill.	Août.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
A MINUIT . . . . .	-0,29	-0,21	0,00	+0,04	+0,10	+0,06	+0,14	+0,01	-0,16	-0,10	-0,15	-0,27
A 4 <sup>h</sup> DU MATIN . . . .	+0,02	+0,05	+0,06	-0,04	-0,21	-0,19	-0,07	+0,01	+0,02	+0,07	+0,08	+0,09

La moyenne des deux valeurs très-concordantes obtenues ainsi a été adoptée comme la lecture vraie faite à 2 heures du matin, ce qui a permis de calculer les moyennes normales jusqu'à la fin de 1847.

A partir de l'année 1848, le barreau de déclinaison n'a plus été observé que quatre fois par jour : à 9 heures du matin, à midi, à 3 heures et à 9 heures du soir; la moyenne de ces quatre observations n'est pas la moyenne normale du jour, mais elle en diffère peu, et celle-ci peut se calculer aisément en ajoutant au premier nombre une petite correction qui a été déterminée par les six années 1841-1847 et qui est donnée dans le tableau b.

TABLEAU b. — *Correction pour convertir en moyenne normale la moyenne des quatre observations diurnes (9 heures du matin, midi, 3 heures et 9 heures du soir).*

Janv.	Fév.	Mars.	Avril.	Mai.	Juin.	Juill.	Août.	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
+0,18	+0,21	+0,55	+0,40	+0,45	+0,44	+0,42	+0,55	+0,47	+0,29	+0,18	+0,15

Le tableau a, qui a été calculé de cette manière, présente pour chaque mois, pendant les trente-six années écoulées de 1841-1876, la lecture moyenne normale du barreau qui s'écarte sans doute fort peu de celle que l'on aurait obtenue si l'on avait effectivement observé de deux en deux heures pendant toute la période.

Lorsqu'il s'agira de faire usage de ce tableau A, on devra avoir égard aux remarques suivantes :

A la fin de l'année 1852, le miroir a été déplacé.

Le 17 juin 1857, la lunette d'observation a été changée.

Le 23 juillet de la même année, la nouvelle lunette a été retirée momentanément de sa position.

Le 14 septembre 1858, le 20 avril 1859 et le 31 mars 1867, le miroir a été déplacé.

Outre ces changements opérés volontairement, le barreau a éprouvé plusieurs dérangements :

Le 12 juin 1866, le barreau a subi un changement qui est resté sans explication certaine.

Le 16 février 1874, à la suite d'un choc, le miroir a été déplacé.

Le 30 novembre 1874, il a encore éprouvé un dérangement subit.

On remarquera enfin que, depuis le mois d'octobre 1851 jusqu'au mois de juin 1855, le barreau a éprouvé de fréquents dérangements.

Ces déplacements fortuits n'ont pas été complètement expliqués; il y a cependant des raisons de croire que dans la boîte où le barreau fait ses oscillations, il s'est introduit de petites araignées dont les toiles, vers certaines époques, ont empêché le barreau de se mouvoir librement.

Je crois devoir encore attirer l'attention sur une autre cause de dérangement dont il est malheureusement presque impossible de mesurer l'importance; je veux parler des constructions qui se sont élevées successivement autour de l'Observatoire. Lorsque les observations magnétiques ont commencé, l'Observatoire était presque isolé; aujourd'hui il est entouré de toutes parts de constructions nombreuses qui peuvent avoir un peu influé sur la direction de l'aiguille aimantée.

DE L'AIGUILLE AIMANTÉE.

TABLEAU A. — Moyennes normales des lectures faites au barreau de déclinaison.

ANNÉES.	Janv	Fév.	Mars.	Avril.	Mai.	Juin.	Juill.	Août.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
1841 . . . . .	.....	.....	.....	.....	.....	53,41	55,75	56,06	56,06	56,40	56,71	56,88
1842 . . . . .	57,92	57,57	57,90	58,15	58,11	58,52	58,78	59,14	59,55	59,51	59,90	60,45
1845 . . . . .	61,05	62,54	62,94	63,55	63,82	64,24	64,80	65,12	65,40	65,51	65,81	66,70
1844 . . . . .	67,04	67,25	67,47	67,70	67,87	67,85	68,64	68,85	69,21	69,15	69,08	69,02
1845 . . . . .	68,82	68,76	69,26	69,49	69,54	69,64	69,85	69,81	70,05	70,50	70,69	70,75
1846 . . . . .	70,84	71,19	71,15	71,50	71,86	72,11	72,56	72,50	72,56	72,85	72,74	72,99
1847 . . . . .	75,15	75,18	75,45	75,66	75,79	74,24	75,95	75,85	74,48	74,84	74,75	74,86
1848 . . . . .	74,92	75,09	75,89	76,52	76,85	77,25	77,42	77,64	77,92	78,05	78,28	78,89
1849 . . . . .	79,57	80,40	81,10	81,44	82,02	82,25	82,26	82,01	82,27	82,65	82,76	85,20
1850 . . . . .	84,14	85,48	86,00	86,44	86,65	86,78	86,96	87,56	87,66	87,87	88,14	89,55
1851 . . . . .	89,97	90,46	90,65	90,99	91,51	91,22	91,58	91,85	92,54	92,89	90,46	89,61
1852 . . . . .	89,26	89,50	90,88	91,90	92,04	91,45	92,51	95,21	95,52	95,59	95,58	95,68
1855 . . . . .	51,58	52,26	52,91	55,78	54,40	54,75	55,20	55,50	55,71	56,40	57,01	57,06
1854 . . . . .	57,58	57,57	57,55	57,71	57,89	58,76	58,59	58,44	61,40	65,55	65,85	65,00
1855 . . . . .	66,54	68,90	67,52	.....	62,16	61,91	62,00	62,26	62,52	62,51	62,55	62,82
1856 . . . . .	65,51	65,42	65,60	65,95	64,08	64,50	64,49	64,48	64,88	65,66	66,05	66,24
1857 . . . . .	66,80	67,02	67,58	67,14	67,79	.....	67,50	68,25	68,74	68,95	68,92	69,57
1858 . . . . .	69,81	69,91	69,76	70,05	70,60	71,25	71,55	71,67	.....	57,10	57,48	58,52
1859 . . . . .	58,71	59,14	59,52	.....	55,06	55,41	55,96	56,24	56,51	56,62	57,10	57,18
1860 . . . . .	57,89	58,50	58,05	58,86	58,92	59,27	60,07	60,44	60,40	60,60	61,21	61,59
1861 . . . . .	61,55	61,55	61,65	62,10	62,57	62,60	65,05	65,05	65,56	65,87	64,12	64,16
1862 . . . . .	64,11	64,71	65,05	65,58	65,66	65,56	65,28	65,55	65,96	66,64	66,97	67,27
1865 . . . . .	67,51	67,64	67,64	67,95	68,22	68,46	68,46	68,81	69,08	69,16	69,55	69,62
1864 . . . . .	69,90	70,05	69,99	70,44	70,95	70,96	71,29	71,24	71,56	71,82	72,00	72,11
1865 . . . . .	72,17	72,48	72,82	75,24	75,51	75,64	75,85	75,74	74,68	75,01	75,50	75,65
1866 . . . . .	75,95	75,94	76,15	76,20	76,44	77,96	78,76	78,41	78,50	78,94	79,15	79,24
1867 . . . . .	79,78	79,79	80,26	51,97	52,61	55,55	55,69	54,28	54,79	55,21	55,85	56,57
1868 . . . . .	56,75	57,25	57,66	57,98	58,15	58,69	59,19	59,70	40,10	40,40	40,74	41,09
1869 . . . . .	41,42	41,45	41,65	41,66	41,90	42,06	42,29	42,74	42,88	45,14	45,44	45,68
1870 . . . . .	45,81	45,94	45,84	44,15	44,49	44,92	44,92	45,08	45,51	45,64	45,55	45,97
1871 . . . . .	46,21	46,58	46,29	46,81	46,70	47,00	47,55	47,90	47,72	48,25	48,65	48,68
1872 . . . . .	49,01	49,24	49,59	49,96	50,05	50,57	50,59	50,59	51,07	51,27	51,62	51,74
1875 . . . . .	52,27	52,54	52,21	52,49	52,87	55,19	55,42	55,81	55,97	54,17	54,56	54,75
1874 . . . . .	57,59	57,45	57,46	57,74	58,07	58,05	58,51	58,65	59,50	59,76	59,55	56,98
1875 . . . . .	56,75	56,85	57,16	58,64	58,91	59,50	59,64	59,97	60,11	60,49	60,92	61,28
1876 . . . . .	61,69	61,68	61,54	61,98	62,08	61,85	62,18	62,29	62,95	65,42	65,46	64,05

Dans les tableaux **B** et **C**, j'ai réuni toutes les observations absolues recueillies à Bruxelles; ces observations ont été faites par mon père jusqu'en 1855; pendant les vingt dernières années, j'ai été chargé moi-même de les exécuter.

Le tableau **B** se rapporte à la déclinaison, le tableau **C** à l'inclinaison; l'année, le mois, la date sont indiqués, et autant que possible l'heure à laquelle chaque observation a été faite; en outre, depuis l'année 1843, j'ai inscrit en regard des déclinaisons observées les lectures du barreau de déviation que l'on avait soin de consulter à l'instant même où l'on opérait dans le jardin.

Les valeurs obtenues directement par l'observation doivent être corrigées pour les variations diurne et annuelle. En ce qui concerne la déclinaison, on doit distinguer deux périodes, celle qui précède 1843 et celle qui s'étend de 1843 à 1877. Pour cette dernière, on possède des observations correspondantes faites à l'instrument de déviation; si l'on compare donc la lecture faite à cet instrument au moment de la détermination absolue avec la moyenne normale de l'année, il sera facile d'en conclure la correction qui doit être appliquée à la mesure prise dans le jardin pour la réduire en déclinaison moyenne. Cette méthode n'a pu cependant être généralement employée, parce que le barreau n'a pas toujours une marche assez régulière pendant tout le cours d'une année; il a paru plus sûr de comparer la lecture faite au moment de la détermination absolue avec la moyenne normale du mois, ce qui élimine suffisamment l'influence de la variation diurne et des perturbations, et de transformer ensuite la moyenne normale du mois en moyenne normale de l'année par le tableau **A** qui sera donné plus loin.

Pour les déterminations absolues qui précèdent 1843, on ne possède pas d'observations correspondantes du barreau, il faut donc déterminer directement les corrections nécessaires pour transformer la valeur obtenue à une certaine heure du jour et à une certaine époque de l'année en déclinaison moyenne normale; cette correction, pour la variation diurne, est donnée dans le tableau **C** qui a été déduit des observations bi-horaires faites pendant les années 1841-1847.



TABLEAU c. — Variation diurne de la déclinaison magnétique.

MOIS.	MINUIT.	MATIN.							MIDI.	SOIR.						
		2 h.	4 h.	6 h.	8 h.	9 h.	11 h.	1 h.		2 h.	3 h.	4 h.	6 h.	8 h.	9 h.	10 h.
Janv. .	-65"	-24"	-24"	-17"	-11"	+6"	+55"	+109"	+122"	+84"	+56"	+28"	-4"	-45"	-56"	-68"
Fév. . .	-72	-47	-58	-59	-26	-11	+56	+156	+154	+152	+85	+56	-5	-59	-60	-82
Mars. .	-67	-60	-56	-50	-95	-80	-7	+196	+255	+219	+150	+85	-20	-39	-75	-87
Avril .	-65	-73	-67	-90	-151	-118	-20	+222	+279	+257	+187	+117	-4	-60	-62	-65
Mai . .	-51	-61	-86	-147	-154	-95	+10	+245	+245	+225	+170	+114	+1	-29	-52	-54
Juin. .	-44	-58	-104	-167	-168	-117	-20	+198	+254	+254	+191	+145	+25	-17	-24	-51
Juill. .	-56	-74	-90	-145	-159	-84	+5	+191	+250	+255	+184	+155	+20	-22	-59	-57
Août .	-85	-97	-89	-129	-122	-59	+58	+254	+278	+260	+189	+121	-10	-35	-62	-70
Sept. .	-76	-57	-72	-77	-90	-50	+46	+254	+245	+212	+156	+60	-25	-78	-78	-80
Oct. . .	-61	-58	-58	-59	-91	-84	+5	+192	+207	+189	+126	+65	-26	-66	-78	-91
Nov. .	-55	-51	-17	-12	-28	-27	+24	+159	+151	+108	+75	+59	-10	-65	-80	-95
Déc. . .	-60	-21	-14	-12	-18	-22	+21	+111	+117	+95	+68	+58	-10	-57	-67	-76
Moy.	-65	-54	-58	-77	-91	-62	+14	+181	+208	+189	+154	+82	-5	-49	-59	-69

La correction relative à la variation annuelle peut être trouvée par le tableau a donné à la page 9; en écartant momentanément les années 1844, 1843, 1851, 1853, 1854, 1855, 1858, 1859, 1867, 1874 et 1875, pendant lesquelles des dérangements du barreau ou des déplacements du miroir ont eu lieu, il reste vingt-cinq années qui ont permis de conclure les écarts mensuels moyens qui suivent :

TABLEAU d. — Écart mensuel de la moyenne annuelle.

Janv.	Fév.	Mars.	Avril.	Mai.	Juin.	Juill.	Août.	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
-1450	-1422	-9296	-6360	-9355	-9215	+9215	+9257	+9265	+9296	+1216	+1246
+209"	+170"	+155"	+85"	+49"	+18"	-21"	-52"	-90"	-155"	-161"	-205"

On a admis qu'une division de l'échelle représente une variation de la déclinaison égale à 139 secondes d'arc. Par exemple, il en résulte qu'une déclinaison observée le 15 mars, à 1 heure de l'après-midi, doit être diminuée de 233 secondes pour être réduite en déclinaison moyenne du jour, elle doit être diminuée encore de 133 secondes pour être réduite en déclinaison moyenne de l'année, c'est-à-dire subir une correction totale de 6 minutes et 6 secondes d'arc.

En ce qui concerne l'inclinaison, les observations de Bruxelles n'ont pas offert d'éléments suffisants pour trouver les corrections relatives aux variations diurne et annuelle; ces corrections sont heureusement fort petites et ne s'élèvent pas, réunies, à 1 minute d'arc. J'ai tâché de combler cette lacune au moyen des documents que j'ai pu recueillir dans les publications étrangères <sup>1</sup>.

Le tableau **B** est divisé en six colonnes; les trois premières indiquent l'année, la date du mois, l'heure; la quatrième présente la déclinaison observée; dans la cinquième, on trouve la lecture correspondante du magnétomètre différentiel; dans la sixième, enfin, est donnée la déclinaison moyenne correspondante calculée.

Le tableau **C**, qui a la même forme que le tableau **B**, se rapporte à la détermination de l'inclinaison.

<sup>1</sup> Les *Annales de l'Observatoire de Paris* et le *Bulletin de l'Observatoire de Montsouris* m'ont particulièrement été utiles dans cette circonstance. Je dois citer encore avec reconnaissance les renseignements que je dois à l'obligeance du célèbre physicien M. Lamont et de M. Ellis, chargé des appareils magnétiques à Greenwich.

TABLEAU B. — Déclinaison magnétique observée.

ANNÉE.	DATE.	HEURE.	DÉCLINAISON OBSERVÉE.	LECTURE correspondante du BARREAU.	DÉCLINAISON OBSERVÉE RÉDUITE.
1828 . . . .	Nov. 22 . . . .	Midi.	22° 28,6	.....	22° 29,5
	22 . . . .	1	22 27,6	.....	22 28,1
	22 . . . .	2	22 28,7	.....	22 29,8
	24 . . . .	1	22 51,7	.....	22 52,2
	24 . . . .	2	22 27,7	.....	22 28,8
	24 . . . .	5	22 26,5	.....	22 28,2
	24 . . . .	4	22 24,5	.....	22 26,7
1829 . . . .	Mai 6 . . . .	1	22 29,0	.....	22 25,8
1850 . . . .	Mars 5 . . . .	1 $\frac{1}{2}$	22 25,5	.....	22 19,6
1852 . . . .	Mars 28 . . . .	5 $\frac{1}{2}$	22 16,1	.....	22 12,1
	51 . . . .	1	22 19,9	.....	22 15,9
1855 . . . .	Mars 29 . . . .	?	22 11,9	.....	22 6,6?
	51 . . . .	?	22 15,1	.....	22 9,8?
1854 . . . .	Avril 4 . . . .	1	22 15,2	.....	22 9,2
1855 . . . .	Mars 28 . . . .	Midi.	22 6,8	.....	22 1,5
	28 . . . .	2	22 5,6	.....	21 59,8
1856 . . . .	Mars 21 . . . .	Midi $\frac{1}{2}$	22 9,9	.....	22 4,8
	21 . . . .	1	22 6,5	.....	22 0,4
	21 . . . .	1 $\frac{1}{4}$	22 6,5	.....	22 0,5
1857 . . . .	Mars 24 . . . .	1	22 5,5	.....	21 57,4
	24 . . . .	1 $\frac{1}{2}$	22 4,7	.....	21 58,8
1858 . . . .	Mars 26 . . . .	1 $\frac{1}{2}$	22 4,9	.....	21 59,0
	26 . . . .	2 $\frac{1}{2}$	22 2,5	.....	21 57,5
1859 . . . .	Mars 29 . . . .	1	21 55,1	.....	21 46,7
	29 . . . .	2	21 54,2	.....	21 48,5
1840 . . . .	Mars 27 . . . .	2	21 51,6	.....	21 45,8
	27 . . . .	2 $\frac{1}{2}$	21 55,5	.....	21 48,1
	Avril 2 . . . .	?	21 48,1	.....	21 42,9
	Mars 26-27 . . . .	?	21 26,1	62,00	21 19,2
1844 . . . .	Juill. 22 . . . .	5 $\frac{1}{2}$	21 7,0	68,66	21 10,2
1845 . . . .	Avril 8 . . . .	Midi.	21 9,7	68,67	21 6,1
	8 . . . .	1	21 8,4	68,67	21 4,9
	22 . . . .	10 $\frac{1}{2}$	21 7,2	69,52	21 6,0
	22 . . . .	11 $\frac{1}{2}$	21 11,7	68,22	21 7,5
	Mars 50 . . . .	5 $\frac{1}{2}$	21 0,5	70,15	20 57,2
1849 . . . .	Avril 6 . . . .	5	20 59,7	79,40	20 55,7
	6 . . . .	4	20 59,1	80,15	20 54,8

## RECHERCHES SUR LES MOUVEMENTS

TABLEAU II. — Déclinaison magnétique observée (suite).

ANNÉE.	DATE.	HEURE.	DÉCLINAISON OBSERVÉE.	LECTURE correspondante du BARREAU.	DÉCLINAISON OBSERVÉE RÉDUITE.
1850 . . . . .	Avril 12 . . . . .	10 $\frac{1}{2}$	20° 25,6	86,47	20° 26,7
1851 . . . . .	Avril 24 . . . . .	Midi.	20 25,2	89,06	20 19,4
	24 . . . . .	Midi $\frac{1}{2}$	20 22,7	88,85	20 18,4
1852 . . . . .	Mars 30 . . . . .	2 $\frac{1}{2}$	20 17,9	91,11	20 11,5
1855 . . . . .	Avril 21 . . . . .	?	20 6,5	52,48	20 2,4
	28 . . . . .	? (après midi)	20 5,6	55,58	20 5,7
1854 . . . . .	Mars 29 . . . . .	10 $\frac{3}{4}$	19 55,6	57,50	19 55,0
	29 . . . . .	11 $\frac{1}{4}$	19 59,8	56,24	19 56,8
1855 . . . . .	Avril 5 . . . . .	10	19 56,5	68,68	19 50,0
	5 . . . . .	2 $\frac{1}{2}$	19 58,5	67,82	19 50,0
	6 . . . . .	?	19 55,5	68,80	19 49,0
	6 . . . . .	?	19 56,1	67,48	19 46,8
	24 . . . . .	?	19 52,8	58,72	19 46,0
1856 . . . . .	Mars 27 . . . . .	5 $\frac{1}{2}$	19 48,7	60,80	19 40,6
	28 . . . . .	5	19 46,9	65,02	19 44,0
1857 . . . . .	Mars 25 . . . . .	1 $\frac{1}{4}$	19 45,1	65,65	19 56,5
	25 . . . . .	2 $\frac{1}{4}$	19 45,5	65,92	19 57,5
	25 . . . . .	4 $\frac{1}{4}$	19 59,1	67,97	19 53,5
1858 . . . . .	Avril 15 . . . . .	11 $\frac{1}{2}$	19 54,5	68,91	19 50,8
	15 . . . . .	5	19 59,4	68,75	19 55,6
	17 . . . . .	10 $\frac{1}{2}$	19 27,8	70,16	19 26,9
1859 . . . . .	Mars 31 . . . . .	10 $\frac{1}{2}$	19 24,7	59,94	19 25,2
	Avril 1 . . . . .	10 $\frac{1}{2}$	19 54,8	59,05	19 51,6
	1 . . . . .	Midi.	19 50,8	57,79	19 24,5
	1 . . . . .	2	19 51,2	57,84	19 25,1
	4 . . . . .	10 $\frac{1}{4}$	19 22,4	60,84	19 25,5
	4 . . . . .	?	19 29,6	59,26	19 26,9
1860 . . . . .	Avril 4 . . . . .	1 $\frac{1}{4}$	19 50,6	56,14	19 21,4
	4 . . . . .	2 $\frac{1}{4}$	19 25,6	57,51	19 19,2
1861 . . . . .	Mars 25 . . . . .	Midi.	19 19,0	59,04	19 8,5
	25 . . . . .	1 $\frac{1}{4}$	19 28,2	58,55	19 16,2
	25 . . . . .	2 $\frac{1}{4}$	19 27,5	58,84	19 16,5
1862 . . . . .	Avril 2 . . . . .	10	19 8,1	65,29	19 4,6
	2 . . . . .	11	19 13,7	64,05	19 9,2
1865 . . . . .	Avril 18 . . . . .	10 $\frac{1}{2}$	18 58,0	67,21	18 58,5
	Mai 5 . . . . .	10 $\frac{1}{4}$	18 52,9	68,52	18 56,6
1864 . . . . .	Avril 9 . . . . .	10 $\frac{3}{4}$	18 49,9	70,66	18 48,4

TABEAU II. — *Déclinaison magnétique observée (suite).*

ANNÉE.	DATE.	H. URL.	DÉCLINAISON OBSERVÉE.	LECTURE correspondante du BARREAU.	DÉCLINAISON OBSERVÉE RÉDUITE.
1865 . . . . .	Avril 7 . . . . .	11 $\frac{1}{2}$	18° 47,8	72,10	18° 41,8
1866 . . . . .	Avril 19 . . . . .	10 $\frac{1}{2}$	18 55,0	75,96	18 51,0
	19 . . . . .	1 $\frac{1}{2}$	18 41,5	74,19	18 55,5
1867 . . . . .	Mars 29 . . . . .	11	18 26,5	79,55	18 21,7
	29 . . . . .	2 $\frac{1}{2}$	18 54,5	78,41	18 27,6
	Mai 16 . . . . .	11 $\frac{1}{2}$	18 25,0	51,80	18 24,2
1868 . . . . .	Avril 1 . . . . .	11 $\frac{1}{2}$	18 24,7	57,10	18 14,5
	1 . . . . .	1 $\frac{1}{2}$	18 28,5	56,57	18 16,4
1869 . . . . .	Avril 22 . . . . .	Midi.	18 7,9	40,40	18 6,9
1870 . . . . .	Avril 1 . . . . .	11	17 57,2	45,70	17 57,4
	1 . . . . .	Midi.	18 2,6	42,25	17 59,5
1871 . . . . .	Juin 50 . . . . .	10 $\frac{1}{2}$	17 55,0	46,71	17 51,1
1875 . . . . .	Juill. 29 . . . . .	10 $\frac{3}{4}$	17 59,4	55,21	17 57,1
1875 . . . . .	Juin 9 . . . . .	11 $\frac{3}{4}$	17 24,4	57,85	17 19,4
	25 . . . . .	11	17 25,1	58,65	17 21,6
1876 . . . . .	Mai 16 . . . . .	Midi $\frac{1}{4}$	17 14,7	61,51	17 15,5
	16 . . . . .	1 $\frac{1}{4}$	17 15,6	61,27	17 14,1
1877 . . . . .	Fev 5 . . . . .	Midi.	17 11,2	65,11	.....
	5 . . . . .	1	17 15,1	62,95	.....

TABLEAU C. — *Inclinaison magnétique observée.*

ANNÉE.	DATE.	HEURE.	INCLINAISON observée.	INCLINAISON observée réduite.	ANNÉE.	DATE.	HEURE.	INCLINAISON observée.	INCLINAISON observée réduite.			
1828.	Sept.	20	9 <sup>h</sup>	68° 53,7	68° 56,2	1845.	Mars	28	5 <sup>h</sup>	68° 11,6	68° 11,2	
		20	4 $\frac{1}{4}$	68 56,6	68 57,2			28	5 $\frac{1}{2}$	68 10,0	68 9,6	
		21	2	69 0,5	69 0,8	1844.	Mars	28	?	68 9,5	68 8,8 <sup>2</sup>	
		24	11 $\frac{1}{2}$	68 57,5	68 57,8			1845.	Avril	7	5 $\frac{1}{2}$	68 7,0
		25	11	68 55,8	68 54,2		7			4 $\frac{1}{2}$	68 5,7	68 5,4
		26	10 $\frac{1}{4}$	68 57,5	68 57,8	1846.	Mars	50	11 $\frac{1}{2}$	68 4,1	68 5,5	
		27	10 $\frac{1}{2}$	68 54,5	68 54,8				50	Midi $\frac{1}{2}$	68 2,8	68 2,5
		28	10	68 56,5	68 56,5	1847.	Mai	27	10 $\frac{1}{2}$	68 2,4	68 1,9	
		Oct.	22	1 $\frac{1}{2}$	68 53,7			68 56,4	1848.	Avril	14	11
		Nov.	4	Midi $\frac{1}{2}$	68 56,4	68 57,5		14			Midi.	67 59,9
	1829.	Mai	5	2	68 56,4	68 56,1	1849.	Avril	4	10 $\frac{1}{2}$	67 55,4	67 54,7
1850.	Mars	4	?	68 52,5	68 52,1 <sup>2</sup>				4	11 $\frac{1}{2}$	67 58,2	67 57,6
		5	?	68 50,9	68 50,5 <sup>2</sup>	1850.	Avril	11	2 $\frac{1}{2}$	67 54,8	67 54,5	
1852.	Mars	28	1 $\frac{1}{2}$	68 47,5	68 46,9			1851.	Avril	25	10 $\frac{1}{2}$	67 50,5
		51	5 $\frac{1}{2}$	68 50,9	68 50,5	1852.	Mars			29	10	67 46,8
1853.	Mars	28	2	68 45,1	68 42,7				29	11	67 50,4	67 49,7
		50	2	68 42,4	68 42,0	1853.	Avril	22	10	67 47,8	67 47,0	
1854.	Avril	5	1	68 56,5	68 55,9				22	11	67 47,4	67 46,7
		5	2	68 40,5	68 40,1	1854.	Mars	20	10 $\frac{1}{2}$	67 44,1	67 45,5	
1855.	Mars	25	Midi $\frac{1}{2}$	68 27,1 <sup>2</sup>	68 26,6			1855.	Avril	5	10	67 45,1
		25	2 $\frac{1}{2}$	68 54,1	68 55,7		Juill.			15	?	67 42,5
		25	5 $\frac{1}{2}$	68 55,9	68 55,5	1856.	Mars	29	5 $\frac{1}{2}$	67 59,5	67 58,9	
1856.	Mars	22	Midi $\frac{1}{2}$	68 52,4	68 51,9				Avril	1	4	67 59,1
		22	1 $\frac{1}{2}$	68 51,9	68 51,5		Avril	5	10	67 45,1	67 42,5	
1857.	Mars	29	Midi $\frac{1}{2}$	68 29,4	68 28,9		Avril	15	?	67 42,5	67 42,1 <sup>2</sup>	
		29	1 $\frac{1}{2}$	68 28,2	68 27,8	1856.	Mars	29	5 $\frac{1}{2}$	67 59,5	67 58,9	
1858.	Mars	25	1 $\frac{1}{2}$	68 28,1	68 27,8				Avril	1	4	67 59,1
		25	2 $\frac{1}{2}$	68 24,1	68 25,8		Avril	5	10	67 45,1	67 42,5	
1859.	Mars	50	11 $\frac{1}{2}$	68 22,2	68 21,6	1857.	Mars	24	10 $\frac{1}{4}$	67 57,5	67 56,6	
		50	Midi.	68 22,7	68 22,2				24	11	67 41,9	67 40,5
		50	Midi $\frac{1}{2}$	68 22,2	68 21,7		25	10 $\frac{3}{4}$	67 40,0	67 59,2		
1840.	Mars	27	5	68 21,4	68 21,0		25	11 $\frac{1}{2}$	67 55,7	67 55,1		
		27	5 $\frac{1}{2}$	68 21,9	68 21,5		26	10 $\frac{1}{4}$	67 54,0	67 55,1		
1841.	Mars	27	?	68 16,6	68 16,0 <sup>2</sup>		26	11 $\frac{1}{4}$	67 55,2	67 52,6		
		27	?	68 15,8	68 15,2 <sup>2</sup>		26	11 $\frac{1}{2}$	67 55,5	67 54,9		
1842.	Mai	25	5	68 18,9	68 18,4 <sup>2</sup>		Sept.	8	10 $\frac{1}{2}$	67 56,8	67 56,9	
		28	10 $\frac{1}{2}$	68 15,2	68 14,4		8	11 $\frac{1}{2}$	67 54,4	67 54,5		
1842.	Mars	28	11 $\frac{1}{2}$	68 15,6	68 15,0		9	9 $\frac{1}{2}$	67 56,2	67 56,5		
		28	11 $\frac{1}{2}$	68 15,6	68 15,0	1858.	Avril	16	Midi.	67 55,8	67 55,5	
	28	11 $\frac{1}{2}$	68 15,6	68 15,0				16	2 $\frac{3}{4}$	67 52,5	67 51,8	
1859.	Mars	21	11 $\frac{1}{2}$	67 58,1	67 57,5		1859.	Mars	21	11 $\frac{1}{2}$	67 58,1	67 57,5

TABLEAU C. — *Inclinaison magnétique observée (suite).*

ANNÉE.	DATE.	HEURE.	INCLINAISON observée.	INCLINAISON observée réduite.	ANNÉE.	DATE.	HEURE.	INCLINAISON observée.	INCLINAISON observée réduite.
1859.	Mars 21	5	67° 51',4	67° 51',1	1864.	Avril 21	1 $\frac{3}{4}$	67° 21',5	67° 20',8
	25	11 $\frac{1}{2}$	67 52,9	67 52,5	1865.	Avril 4	11 $\frac{3}{4}$	67 19,0	67 18,5
	25	1	67 50,7	67 50,5		4	2 $\frac{1}{4}$	67 20,8	67 20,4
1860.	Avril 5	11 $\frac{1}{2}$	67 55,0	67 52,4	1866.	Avril 11	11 $\frac{1}{2}$	67 18,5	67 17,7
	Mars 27	11 $\frac{1}{4}$	67 51,5	67 50,7		11	5 $\frac{3}{4}$	67 15,4	67 15,0
	27	Midi.	67 52,0	67 51,5	1867.	Avril 12	11 $\frac{3}{4}$	67 15,5	67 14,8
1861.	27	1	67 50,8	67 50,4	1868.	Mars 50	11 $\frac{1}{4}$	67 11,9	67 11,5
	Avril 2	2 $\frac{1}{4}$	67 27,6	67 27,5		50	2	67 11,1	67 10,7
	5	2 $\frac{1}{4}$	67 51,0	67 50,6	Sept. 5	5 $\frac{3}{4}$	67 11,1	67 11,5	
	6	10 $\frac{1}{4}$	67 52,6	67 51,8	1869.	Avril 14	Midi.	67 10,7	67 10,2
	Mai 29	11 $\frac{1}{4}$	67 50,4	67 50,4	1870.	Avril 19	11	67 10,2	67 9,5
1862.	Mars 21	10 $\frac{3}{4}$	67 29,4	67 28,6	1871.	19	Midi $\frac{3}{4}$	67 15,1	67 12,6
	21	Midi.	67 26,4	67 26,0		Juin 29	11	67 8,0	67 7,9
1863.	Mars 28	10 $\frac{3}{4}$	67 26,8	67 26,0	1872.	Août 17	10 $\frac{3}{4}$	67 8,1	67 8,5
	28	11 $\frac{1}{4}$	67 25,9	67 25,5	1875.	Mars 25	Midi.	67 6,2	67 5,7
1865.	Avril 18	5	67 25,4	67 24,9	1874.	Avril 21	Midi $\frac{1}{4}$	66 59,4	66 58,9
	18	4	67 25,8	67 25,4	1875.	Avril 14	11 $\frac{1}{2}$	66 56,6	66 56,0
1864.	Avril 7	11 $\frac{1}{2}$	67 18,4	67 17,8	Avril 22	11 $\frac{1}{2}$	66 58,8	66 58,4	
	7	2	67 26,5	67 25,8	1876.	Avril 5	Midi $\frac{1}{4}$	66 57,7	66 57,5

Des tableaux **B** et **C**, on peut immédiatement déduire le tableau final **D**. Celui-ci présente pour chaque année la déclinaison et l'inclinaison magnétiques moyennes; les valeurs données sont les moyennes des différentes déterminations qui ont été obtenues chaque année et qui sont consignées dans la dernière colonne des tableaux **B** et **C**.

Les deux séries de nombres présentent cependant encore des irrégularités d'une certaine importance qui peuvent provenir de perturbations magnétiques, d'erreurs d'observation, quelquefois aussi d'éléments imparfaits de réduction.

Avant d'entreprendre des calculs, d'après ces nombres, il a paru convenable de les régulariser; à cet effet, j'ai appliqué le procédé de régularisation qui a déjà été employé dans un mémoire précédent : la déclinaison moyenne pour 1832,5, par exemple, est 22° 13',0; pour 1833,5 elle

est  $22^{\circ} 8',2$  et pour 1834,5  $22^{\circ} 9',2$ . En admettant que ces nombres procèdent selon la loi de continuité, la déclinaison serait pour 1833,0  $22^{\circ} 10',6$  et pour 1834,0  $22^{\circ} 8',7$ , et de ces deux dernières valeurs on déduirait pour 1833,5 le nombre  $22^{\circ} 9',65$  qui devrait être substitué à  $22^{\circ} 8',2$ . En opérant ainsi sur toute la série, on obtient une nouvelle série régularisée. Si celle-ci était encore trop accidentée, on pourrait renouveler l'opération. Les deux séries régularisées ainsi obtenues constituent le but principal que je m'étais proposé dans cette section, et elles doivent servir de point de départ pour les recherches contenues dans la section suivante.

TABLEAU D. — Direction moyenne de l'aiguille aimantée à Bruxelles.

ANNÉE.	DÉCLINAISON		INCLINAISON		ANNÉE.	DÉCLINAISON		INCLINAISON	
	moyenne.	regularisée.	moyenne.	regularisée.		moyenne.	regularisée.	moyenne.	regularisée.
1828	22° 29,0	22° 29,0	68° 56,9	68° 56,9	1855	20° 5,1	20° 4,9	67° 46,8	67° 46,0
9	25,8	24,1	56,1	55,1	4	19 55,9	19 57,7	45,5	45,7
50	19,6	20,0	51,5	52,4	5	48,4	50,7	42,2	41,5
1	16,5	16,5	50,0	49,8	6	42,5	44,0	58,5	58,8
2	15,0	12,9	48,7	46,4	7	56,4	57,4	55,9	56,5
5	8,2	9,7	42,4	42,4	8	51,1	51,1	55,5	54,2
4	9,2	6,7	58,0	58,4	9	25,8	24,7	52,7	52,1
5	0,6	5,7	51,9	54,7	60	20,5	18,2	50,4	29,9
6	1,8	0,6	51,7	51,5	1	15,6	11,5	27,5	27,7
7	21 58,1	21 56,9	28,5	28,5	2	6,9	4,4	24,7	25,5
8	58,1	52,5	25,8	25,6	5	18 57,6	18 56,8	24,1	25,4
9	47,6	47,1	21,8	22,8	4	48,4	49,0	21,5	21,5
40	45,6	40,9	21,2	20,0	5	41,8	41,0	19,5	19,1
1	55,0	54,2	16,5	17,1	6	55,2	52,7	16,4	16,9
2	27,7	27,1	14,7	14,2	7	24,5	24,5	14,8	14,8
5	19,2	19,8	10,4	11,4	8	15,5	15,7	11,2	12,9
4	10,2	12,5	8,8	8,7	9	6,9	7,4	10,2	11,2
5	6,1	5,5	6,0	6,2	70	17 58,5	17 59,5	11,0	9,8
6	20 57,2	20 57,9	2,9	5,7	1	51,1	51,4	7,9	8,5
7	52,4	50,4	1,9	1,5	2	45,9	45,8	8,5	6,6
8	45,5	42,7	67 59,8	67 58,8	5	57,1	56,5	5,7	4,1
9	54,5	53,0	56,1	56,5	4	28,5	28,6	66 58,9	0,7
50	26,7	27,5	54,5	55,6	5	20,5	20,8	57,2	66 57,7
1	18,9	19,7	49,6	51,0	1876	17 15,7	17 15,7	66 57,5	66 57,5
1852	20 11,5	20 12,2	67 47,8	67 48,5					



## SECTION DEUXIÈME.

## DU MOUVEMENT SÉCULAIRE DE LA LIGNE MAGNÉTIQUE A BRUXELLES.

---

Dans la première section, j'ai calculé les séries qui présentent pour chaque année, depuis 1828 jusqu'à 1876, la déclinaison et l'inclinaison magnétiques moyennes complètement réduites et corrigées, même des écarts accidentels et non périodiques, par un procédé spécial systématique de régularisation. A la simple inspection de ces valeurs, on voit que la direction magnétique change assez rapidement à Bruxelles; la variation est fort appréciable d'une année à l'autre; on reconnaît de plus que le principal caractère de ce mouvement est la continuité; les variations accidentelles sont relativement peu importantes quand on les compare au mouvement général qui entraîne la ligne magnétique avec une régularité presque astronomique.

La nature du cône que décrit cette ligne n'est pas encore connue; elle ne pourra l'être que lorsqu'on aura défini la force qui produit ce mouvement remarquable. On se trouve donc en présence d'une surface conique dont les génératrices ont été observées depuis 1828 jusqu'en 1876, mais dont la définition géométrique n'est pas donnée. Dans cette circonstance, le moyen de recherche qui se présente le plus naturellement à l'esprit est de comparer cette surface avec une autre surface simple ayant une définition géométrique, et la plus simple de toutes dans le cas actuel est le cône de révolution. J'ai

done commencé par définir un cône de révolution au moyen de trois génératrices observées, et pour diminuer les chances de discordances, j'ai choisi celles qui partagent également la période de quarante-huit années pendant lesquelles on a observé, c'est-à-dire celles qui répondent aux années 1836, 1852 et 1868.

Ce cône de révolution aura pour base, sur la sphère de rayon indéfini ou égal à l'unité, un petit cercle dont le pôle sera le point où l'axe du cône perce la sphère. Soient XYZ les coordonnées rectangulaires d'un point de ce petit cercle relativement au plan de l'horizon et au méridien astronomique de Bruxelles; si l'on désigne par D et par I la déclinaison et l'inclinaison magnétiques, on aura :

$$X = \cos D \cos I \quad Y = \sin D \cos I \quad Z = \sin I$$

et l'équation du petit cercle sera :

$$MX + NY + PZ + Q = 0.$$

Donc le pôle aura les coordonnées :

$$X_p = \frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2 + P^2}} \quad Y_p = \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2 + P^2}} \quad Z_p = \frac{P}{\sqrt{M^2 + N^2 + P^2}};$$

ou en mesures angulaires :

$$P \cos D_p = M \operatorname{tg} I_p \quad P \sin D_p = N \operatorname{tg} I_p.$$

Si l'on assujettit le cône à passer par trois génératrices déterminées, l'équation du petit cercle devra être satisfaite par trois systèmes de valeurs de D et de I et les constantes MNPQ seront déterminées.

En appliquant ces formules aux génératrices régularisées de 1836, 1852 et 1868, on trouvera pour éléments du cône A :

$$\begin{array}{llll} M = 0,51304 & N = 0,04580 & P = 0,95295 & Q = -1. \\ & D_p = 8^\circ 16' & I_p = 71^\circ 52' & \end{array}$$

Le cône étant ainsi déterminé, il faut voir comment les autres génératrices observées sont représentées par ce système d'éléments; cette comparaison est représentée dans les deux tableaux **E** et **F**, où l'on a inscrit en regard des valeurs magnétiques moyennes, relatives à chaque année, les coordonnées correspondantes des génératrices du cône A. En ce qui concerne les inclinaisons, cette comparaison est assez satisfaisante, elle l'est moins pour les déclinaisons; il y a surtout de 1828 à 1840 une fluctuation singulière dont il est assez difficile de se rendre compte. Hansteen et mon père avaient déjà remarqué une discordance vers cette époque; je reviendrai sur cette question dans la section troisième.

La discordance la plus considérable s'étant présentée pendant les premières années où l'on a observé à Bruxelles, j'ai essayé si un cône B calculé d'après d'autres données ne présenterait pas un résultat plus avantageux. J'ai choisi à cet effet pour génératrices fondamentales la première observation faite en 1828, la deuxième faite en 1876 et l'observation moyenne de 1852; j'ai ainsi trouvé pour le pôle de ce nouveau cône B :

$$D_p = 11^{\circ} 11' \quad I_p = 70^{\circ} 55'$$

Quand on compare les positions observées avec les résultats de ce nouveau calcul, les discordances sont à peu près du même ordre de grandeur que pour le premier cône; seulement le plus grand écart se trouve naturellement déplacé. J'ai donc calculé un troisième cône C occupant une position intermédiaire et ayant pour coordonnées de son pôle :

$$D_p = 9^{\circ} 45' \quad I_p = 71^{\circ} 5'$$

les valeurs des constantes sont dans ce cas :

$$\log M = \bar{1}.596\ 855\ 1 \quad \log N = \bar{2}.740\ 459\ 4 \quad \log P = \bar{1}.977\ 589\ 1$$

Les différences entre les observations et les résultats de ce troisième calcul seront trouvées dans les dernières colonnes des tableaux **E** et **F**.

TABLEAU E.

ANNÉE	Valeurs magnétiques moyennes.	Cône A	Calc.-Obs.	Cône B.	Calc.-Obs.	Cône C.	Calc. Obs.
1828. . . . .	22° 29,0	22° 48,4	+ 19,4	22° 29,0	0,0	22° 40,2	+ 11,2
29. . . . .	25,8	42,6	+ 18,8	24,4	+ 0,6	54,9	+ 11,1
50. . . . .	19,6	56,8	+ 17,2	19,7	+ 0,1	29,5	+ 9,9
51. . . . .	16,5	50,9	+ 14,6	14,9	- 1,4	24,2	+ 7,9
52. . . . .	15,0	25,0	+ 12,0	9,9	- 5,1	18,5	+ 5,5
55. . . . .	8,2	18,9	+ 10,7	4,9	- 5,5	12,9	+ 4,7
54. . . . .	9,2	12,9	+ 5,7	21 59,8	- 9,4	7,2	- 2,0
55. . . . .	0,6	6,7	+ 6,1	54,5	- 6,1	1,5	+ 0,9
56. . . . .	1,8	0,6	- 1,2	49,5	- 12,5	21 55,7	- 6,1
57. . . . .	21 58,1	21 54,1	- 4,0	45,9	- 14,2	49,8	- 8,5
58. . . . .	58,1	47,6	- 10,5	58,5	- 19,8	45,8	- 14,5
59. . . . .	47,6	41,1	- 6,5	52,7	- 14,9	57,8	- 9,8
40. . . . .	45,6	54,6	- 11,0	27,0	- 18,6	51,7	- 15,9
41. . . . .	53 0	28,1	- 6,9	21,5	- 15,7	25,5	- 9,5
42. . . . .	27,7	21,5	- 6,2	15,4	- 12,5	19,5	- 8,4
45. . . . .	19,2	14,9	- 4,5	9,5	- 9,7	15,0	- 6,2
44. . . . .	10,2	8,0	- 2,2	5,5	- 6,9	6,6	- 5,6
45. . . . .	6,1	1,2	- 4,9	20 57,2	- 8,9	0,2	- 5,9
46. . . . .	20 57,2	20 54,5	- 2,9	51,1	- 6,1	20 55,7	- 5,5
47. . . . .	52,4	47,5	- 4,9	44,8	- 7,6	47,1	- 5,5
48. . . . .	45,5	40,5	- 4,8	58,4	- 6,9	40,5	- 4,8
49. . . . .	54,5	55,5	- 0,8	52,0	- 2,5	55,8	- 0,5
50. . . . .	26,7	26,4	- 0,5	25,4	- 1,5	27,1	+ 0,4
51. . . . .	18,9	19,5	+ 0,4	18,9	0,0	20,5	+ 1,4
52. . . . .	11,5	12,2	+ 0,9	12,2	+ 0,9	15,5	+ 2,2
55. . . . .	5,1	5,2	+ 2,1	5,5	+ 2,4	6,6	+ 5,5
54. . . . .	19 55,9	58,2	+ 2,5	19 58,7	+ 2,8	19 59,6	+ 5,7
55. . . . .	48,4	19 51,2	+ 2,8	51,8	+ 5,4	52,5	+ 4,1
56. . . . .	42,5	44,2	+ 1,9	45,0	+ 2,7	45,4	+ 5,1
57. . . . .	56,4	57,0	+ 0,6	58,0	+ 1,6	58,5	+ 1,9
58. . . . .	51,1	29,8	- 1,5	59,9	- 0,2	51,1	0,0
59. . . . .	25,8	22,6	- 5,2	25,7	- 2,1	25,9	- 1,9
60. . . . .	20,5	15,5	- 5,0	16,5	- 5,8	16,6	- 5,7
61. . . . .	15,6	8,1	- 5,5	9,2	- 4,4	9,5	- 4,5
62. . . . .	6,9	0,8	- 6,1	2,0	- 4,9	1,9	- 5,0
65. . . . .	18 57,6	18 55,4	- 4,2	18 54,6	- 5,0	18 54,5	- 5,1
64. . . . .	48,4	45,9	- 2,5	47,1	- 1,5	47,0	- 1,4
1865. . . . .	18 41,8	18 58,5	- 5,5	18 59,6	- 2,2	18 59,5	- 2,5

TABLEAU E (suite).

ANNÉE.	Valeurs magnétiques moyennes.	Cône A.	Calc.-Obs.	Cône B.	Calc.-Obs.	Cône C.	Calc.-Obs.
1866. . . . .	18° 55,2	18° 51,1	- 2,1	18° 52,0	- 1,2	18° 51,9	- 1,5
67. . . . .	24,5	25,5	- 1,0	24,1	- 0,1	24,5	- 0,2
68. . . . .	15,5	15,7	+ 0,4	16,8	+ 1,5	16,7	+ 1,4
69. . . . .	6,9	8,0	+ 1,1	9,1	+ 2,2	9,0	+ 2,1
70. . . . .	17 58,5	0,1	+ 1,6	1,5	+ 2,8	1,2	+ 2,7
71. . . . .	51,1	17 52,4	+ 1,5	17 53,5	+ 2,4	17 53,4	+ 2,5
72. . . . .	45,9	44,5	+ 0,6	45,6	+ 1,7	45,6	+ 1,7
73. . . . .	57,1	56,6	- 0,5	57,7	+ 0,6	57,8	+ 0,7
74. . . . .	28,5	28,8	+ 0,5	29,8	+ 1,5	29,8	+ 1,5
75. . . . .	20,5	20,8	+ 0,5	21,8	+ 1,5	21,9	+ 1,4
76. . . . .	17 15,7	12,9	- 0,8	15,7	0,0	17 15,9	+ 0,2
1877. . . . .	.....	17 4,9	....	17 5,6	....	.....	....

TABLEAU F.

ANNÉE.	Valeurs magnétiques moyennes.	Cône A.	Calc.-Obs.	Cône B.	Calc.-Obs.	Cône C.	Calc.-Obs.
1828. . . . .	68° 56,9	68° 54,8	- 2,1	68° 56,9	0,0	68° 55,7	- 1,2
29. . . . .	56,1	51,9	- 4,2	53,8	- 2,5	52,8	- 3,5
50. . . . .	51,5	48,9	- 2,4	50,6	- 0,7	49,9	- 1,4
51. . . . .	50,0	46,0	- 4,0	47,6	- 2,4	46,9	- 3,1
52. . . . .	48,7	45,1	- 5,6	44,5	- 4,2	45,9	- 4,8
53. . . . .	42,4	40,2	- 2,2	41,4	- 1,0	40,9	- 1,5
54. . . . .	58,0	57,5	- 0,7	58,4	+ 0,4	58,0	0,0
55. . . . .	51,9	51,4	+ 2,5	55,6	+ 5,7	53,1	+ 5,2
56. . . . .	51,7	51,5	- 0,2	52,5	+ 0,8	52,2	+ 0,5
57. . . . .	28,5	28,7	+ 0,4	29,5	+ 1,2	29,5	+ 1,0
58. . . . .	25,8	25,8	0,0	26,5	+ 0,7	26,4	+ 0,6
59. . . . .	21,8	25,0	+ 1,2	25,6	+ 1,8	25,6	+ 1,8
40. . . . .	21,2	20,1	- 1,1	20,8	- 0,4	20,7	- 0,5
41. . . . .	16,5	17,4	+ 0,9	17,9	+ 1,4	17,9	+ 1,4
42. . . . .	14,7	14,6	- 0,1	15,1	+ 0,4	15,2	+ 0,5
45. . . . .	10,4	11,9	+ 1,5	12,5	+ 1,9	12,4	+ 2,0
44. . . . .	8 8	9,5	- 0,5	9,5	+ 0,7	9,7	+ 0,9
1845. . . . .	68 6,0	68 6,6	+ 0,6	68 6,7	+ 0,7	7,0	+ 1,0

TABLEAU B (suite).

ANNEE.	Valeurs magnétiques moyennes.	Cône A.	Calc.-Obs	Cône B.	Calc.-Obs	Cône C.	Calc.-Obs.
1846 . . . . .	68° 2,9	68° 4,0	+1,1	68° 4,1	+1,2	68° 4,5	+1,4
47. . . . .	1,9	1,5	- 0,6	1,4	- 0,5	1,7	- 0,2
48. . . . .	67 59,8	67 58,7	- 1,1	67 58,7	- 1,1	67 59,0	- 0,8
49. . . . .	56,1	56,1	0,0	56,0	- 0,1	56,5	+ 0,4
50. . . . .	54,5	55,5	- 0,8	55,5	- 0,8	55,9	- 0,4
51. . . . .	49,6	51,0	+ 1,4	50,9	+ 1,5	51,5	+ 1,7
52. . . . .	47,8	48,5	+ 0,7	48,5	+ 0,7	48,7	+ 0,9
53. . . . .	46,8	46,0	- 0,8	45,9	- 0,9	46,5	- 0,5
54. . . . .	45,5	45,7	+ 0,4	45,5	+ 0,2	45,9	+ 0,6
55. . . . .	42,2	41,5	- 0,9	41,0	- 1,2	41,4	- 0,8
56. . . . .	58,5	59,0	+ 0,7	58,6	+ 0,5	59,0	+ 0,7
57. . . . .	55,9	56,6	+ 0,7	56,5	+ 0,4	56,6	+ 0,7
58. . . . .	55,5	54,5	+ 0,8	55,9	+ 0,4	54,5	+ 0,8
59. . . . .	52,7	52,2	- 0,5	51,5	- 1,2	52,0	- 0,7
60. . . . .	50,4	49,2	- 1,2	49,5	- 1,1	49,6	- 0,8
61. . . . .	27,5	27,8	+ 0,5	26,9	- 0,4	27,4	+ 0,1
62. . . . .	24,7	25,6	+ 0,9	24,6	- 0,1	25,2	+ 0,5
63. . . . .	24,1	25,4	- 0,7	22,5	- 1,6	22,9	- 1,2
64. . . . .	21,5	21,2	- 0,5	20,5	- 1,2	20,7	- 0,8
65. . . . .	19,5	19,2	- 0,5	18,1	- 1,4	18,7	- 0,8
66. . . . .	16,4	17,1	+ 0,7	16,1	- 0,5	16,7	+ 0,5
67. . . . .	14,8	15,1	+ 0,5	14,0	- 0,8	14,5	- 0,5
68. . . . .	11,2	12,9	+ 1,7	12,0	+ 0,8	12,4	+ 1,2
69. . . . .	10,2	10,9	+ 0,7	10,1	- 0,1	10,5	+ 0,1
70. . . . .	11,0	8,9	- 2,1	8,1	- 2,9	8,5	- 2,7
71. . . . .	7,9	7,0	- 0,9	6,2	- 1,7	6,4	- 1,5
72. . . . .	8,5	5,0	- 3,5	4,4	- 3,9	4,4	- 3,9
73. . . . .	5,7	5,0	- 0,7	2,5	- 1,2	2,6	- 1,1
74. . . . .	66 58,9	1,1	+ 2,2	0,6	+ 1,7	0,7	+ 1,8
75. . . . .	57,2	66 59,2	+ 2,0	66 59,0	+ 1,8	66 58,8	+ 1,6
76. . . . .	66 57,5	57,5	0,0	57,5	0,0	66 57,0	- 0,5
1877. . . . .	.....	66 55,5	....	67 55,6	....	.....	....

Afin de posséder tous les éléments de comparaison qui permettront de décider autour de quel axe la ligne magnétique opère actuellement son mouvement giratoire, j'ai réuni dans le tableau G qui suit quelques nombres caractéristiques, calculés dans les trois hypothèses.

TABLEAU G. — Quelques données caractéristiques calculées pour les trois cônes de comparaison.

	Cône A.	Cône B.	Cône C.
Années qui ont servi . . . . .	1856-1852-1868	1828-1852-1876	—
Azimuth du pôle du cône . . . . .	8° 16' W.	11° 11' W.	9° 45' W.
Inclinaison du pôle du cône. . . . .	71 52	70 55	71 5
Distance polaire astronomique du pôle du cône . . . . .	122 51	121 52	122 6
Angle horaire du pôle du cône. . . . .	5 6 W.	4 21 W.	5 45 W.
Ouverture du cône ou double angle du sommet. . . . .	11 8	8 27	9 48
Durée de la révolution . . . . .	376 ans.	446 ans.	512 ans.
Déclinaison maximum. . . . .	26° 5' W.	25° 59' W.	24° 57' W.
Inclinaison correspondante . . . . .	72 21	71 1	71 40
Année de la déclinaison maximum. . . . .	1768	1792	1780
Inclinaison minimum . . . . .	65° 58'	66° 21'	66° 9'
Déclinaison correspondante . . . . .	8 16 W.	11 11 W.	9 45 W.
Année du minimum. . . . .	1958	1918	1927
Déclinaison maximum vers l'Orient . . . . .	9° 50' E.	1° 57' E.	5° 51' E.

Le maximum de déclinaison par lequel l'aiguille aimantée doit avoir passé quelques années avant que mon père commençât ses observations, a été trouvé par le calcul : de 26° 2' au moyen du cône A; de 23° 52' par le cône B et de 24° 57' par le cône C. Or le maximum, observé à Paris en 1814, était de 22° 34'; à Londres vers la même époque on avait 24° 20'; on voit que c'est le cône B qui présente les résultats les plus concordants; pour l'époque de ce maximum, le cône B indique l'année 1792, tandis que les deux autres donnent les époques 1768 et 1780.

Pigott, astronome anglais, a déterminé en 1772, la déclinaison magnétique dans les Pays-Bas; il a trouvé 20° 35'  $\frac{1}{2}$  à Ostende et 18° 50' à Luxembourg. L'abbé Mann, dans un mémoire, lu à l'Académie des sciences de Bruxelles en 1774, donne pour Nieuport le nombre 19° 47' à 19° 50' qui, probablement, se rapporte à une époque antérieure de quelques années, puisqu'il cite une observation faite en 1767. Ces nombres sont plus faibles que ceux fournis par les trois cônes, mais se rapprochent de ceux donnés par le cône B qui, sous ce rapport, paraît offrir les meilleurs résultats.

Les déclinaisons extrêmes vers l'Orient, calculées par les trois cônes sont respectivement  $9^{\circ} 30'$ ,  $1^{\circ} 30'$ ,  $5^{\circ} 31'$ . Or, si l'on remarque que l'écart extrême, observé à Paris et à Londres, a été de  $11^{\circ} 30'$  et de  $11^{\circ} 45'$ , que Kircher mentionne une observation qui donne une déclinaison orientale de  $9^{\circ}$  pour Anvers avant 1600, et qu'un astrolabe construit à Louvain en 1568, et qui se trouve dans les collections académiques, paraît indiquer par une flèche gravée sur cuivre, une déclinaison orientale qui approche de  $15^{\circ}$ , on devra conclure que le cône A paraît ici donner des résultats plus avantageux que les deux autres.

Ainsi les éléments de comparaison que l'on possède en dehors de la série de mesures obtenues pendant le dernier demi-siècle, ne permettent pas d'asseoir un jugement décisif sur la position la plus probable de l'axe. Ce qui paraît cependant ressortir de ces comparaisons, c'est que l'axe giratoire instantané est soumis lui-même à un mouvement oscillatoire d'une nature encore inconnue. On pourrait à la vérité déterminer une surface conique plus complexe, par exemple un cône général du second degré dont l'identification avec le cône observé serait plus parfaite, mais cette détermination serait en ce moment de peu d'intérêt avec les éléments limités que possède le calculateur pour Bruxelles.

En résumé, il résulte de ce qui précède que l'aiguille aimantée s'écarte fort peu d'une direction fixe dont l'azimuth probable est de  $9^{\circ} 43'$  vers l'Ouest et l'inclinaison de  $71^{\circ} 3'$ . La ligne magnétique ne paraît pas devoir s'écarter de cet axe giratoire de plus de cinq à six degrés, et cette faible variation tend encore à mettre en relief l'invariabilité générale de la direction principale. Le mouvement giratoire s'opère avec une vitesse angulaire annuelle d'environ  $42\frac{1}{2}$ ; par conséquent, s'il était permis de tirer des conclusions pour une période de temps d'aussi longue durée, on trouverait qu'une giration complète de la ligne magnétique s'opère en 512 ans.

La source de l'action singulière dont une des manifestations a été étudiée dans cette section n'est pas encore bien connue. Elle a cependant fait déjà l'objet des recherches des plus célèbres physiciens; il suffira de citer ici les noms de Halley, Euler, Mayer, Humboldt, Oersted, Ampère, Sabine, Biot, Arago, Hansteen, Gauss, Weber, Faraday, Quetelet, Erman, Lamont,



Barlow, Duperrey, Airy, Lloyd, Pouillet, Becquerel, De la Rive, Gautier, Secchi, Brück, Linder, Zöllner, etc.

Avant la découverte d'Ørsted on assimilait la terre à un fort aimant ou à un système de deux aimants; les pôles magnétiques s'expliquaient naturellement dans cette hypothèse, mais les différents phénomènes magnétiques qui se passent à la surface de notre globe n'étaient que très-imparfaitement représentés. Aussi quand Ørsted eut découvert l'action réciproque des courants et des aimants, et qu'Ampère eut fondé l'électro-dynamique, cette première théorie a été généralement abandonnée.

L'hypothèse d'un puissant courant terrestre, dirigé de l'Est vers l'Ouest, mise en avant par Ampère, a été adoptée par Barlow et De la Rive et par presque tous les physiciens. Il résulte des expériences de Faraday que le globe terrestre agit pour produire l'induction comme agirait un fort aimant, placé dans l'intérieur du globe dans la direction de l'aiguille d'inclinaison ou comme une ceinture de courants électriques, dirigés de l'Est à l'Ouest autour de l'équateur magnétique. Brück admet également l'action des courants, quoiqu'il diffère d'opinion relativement à la constitution de ceux-ci.

Selon De la Rive le développement de l'électricité statique sur notre globe serait dû à l'action chimique continue qui a lieu sur la surface intérieure de l'écorce solide du globe, là où est la limite entre la portion déjà solidifiée et celle qui est encore à l'état de liquidité incandescente. Quant à la direction des courants principaux qui circulent de l'Est vers l'Ouest, elle serait liée, d'après le célèbre physicien, au mouvement de rotation de la terre qui a lieu de l'Ouest vers l'Est, et par conséquent elle serait le résultat d'une action magnétique extérieure à la terre. Celle-ci ne pourrait provenir que du soleil.

Brück partage cette manière de voir; le soleil, origine de l'électrisation du globe, décrit des parallèles dans son mouvement diurne, il décrit l'écliptique dans son mouvement annuel; les courants terrestres induits suivent, d'après ce savant, une direction moyenne entre celle qu'ils suivraient par ces deux causes considérées isolément, et l'équateur magnétique partage à peu près en deux parties égales l'angle que fait l'écliptique avec l'équateur géographique.

Il est donc généralement admis que la cause principale des courants

terrestres réside dans le soleil, mais il existe en outre une foule de causes secondaires susceptibles de produire de l'électricité sous différentes formes; on peut même dire que toute action mécanique est accompagnée d'un développement d'électricité. Après les puissantes actions physico-chimiques dont le siège est situé sous la croûte solidifiée du globe, je citerai particulièrement les phénomènes d'évaporation, de végétation, les actions thermo-électriques, les mouvements des fluides, les frottements, les soulèvements, les influences de corps célestes secondaires, etc.

Ce mémoire ayant surtout pour but d'étudier les faits positifs qui se rapportent à la position de la ligne magnétique à Bruxelles, je n'aurais pas touché à la question encore controversée de l'origine théorique des déplacements qu'elle éprouve, si cela ne m'avait offert l'occasion de parler d'une relation assez remarquable, qui, je crois, n'est guère connue.

On a vu que l'aiguille aimantée (autant qu'on peut le conclure des données que l'on possède) éprouve un mouvement giratoire autour d'une position moyenne dont elle ne s'écarte que de cinq degrés environ. Ce mouvement, s'il est périodique, comme cela paraît assez probable, s'opère dans l'espace de 512 ans en adoptant les constantes relatives au cône moyen. Or si l'on admet que le magnétisme terrestre est le résultat de l'électrisation du globe par le soleil, toutes les lois astronomiques qui régissent les positions relatives de ces deux corps doivent être applicables aux variations du magnétisme. Le mouvement de rotation du globe autour de son axe en 24 heures donne lieu à la variation diurne et le mouvement de translation de la terre autour du soleil en un an produira la variation annuelle.

Mais en outre, si l'on étudie les relations réciproques de ces deux périodes astronomiques, on trouvera des relations nouvelles qui ont, je crois, été signalées pour la première fois par R. Brück.

L'année tropique, comme on sait, ne comprend pas un nombre exact de jours moyens solaires, mais elle équivaut à peu près à  $365\frac{1}{4}2225$ ; il s'ensuit qu'à la fin d'une année le soleil ne se trouve pas dans la même position relativement à un certain point du globe, mais qu'il a dépassé ce point de près de  $90^\circ$  de longitude terrestre. Ce n'est qu'au bout de 4 années que le soleil a repris à peu près sa position primitive; cependant il s'en faut de

0,031 que le soleil ait exactement la même situation qu'il avait à l'origine; cette fraction équivalant à  $\frac{11}{524}$  il en résulte qu'au bout de 129 ans la position du soleil est redevenue la même, en ce qui concerne ce petit déplacement d'Occident en Orient; comme d'autre part il faut tenir compte du mouvement principal quadriennal d'Orient en Occident, la période astronomique se trouve fixée à 4 fois 129 ans ou à 516 ans.

La concordance de ce nombre avec celui qui a été déduit des observations magnétiques est assez remarquable, et ajoute quelque poids aux hypothèses de natures très-différentes qui ont été faites dans les deux cas.

Après avoir cherché la position moyenne de l'aiguille et la loi de sa variation séculaire, il reste à étudier les diverses variations magnétiques à périodes relativement courtes; ce sera l'objet de la troisième section de ce travail.



# REMARQUES

SUR LA

# THÉORIE DES MOINDRES CARRÉS;

PAR

EUGÈNE CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.

---

(Mémoire présenté à la Classe des sciences le 2 mars 1878.)



# REMARQUES

SUR LA

## THÉORIE DES MOINDRES CARRÉS (\*).

---

### I.

#### PRÉLIMINAIRES.

1. Soient

$$\left. \begin{array}{l} ax + by + cz + du + ev + f = w, \\ a'x + b'y + c'z + d'u + e'v + f' = w', \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

des équations du premier degré, en nombre supérieur à celui des inconnues  $x, y, z, u, v$ . Si l'on veut que la quantité

$$\Omega = w^2 + w'^2 + w''^2 + \dots \dots \dots (2)$$

soit minimum, on doit résoudre les équations *normales* :

$$\left. \begin{array}{l} (aa) x + (ab) y + (ac) z + (ad) u + (ae) v + (af) = 0, \\ (ba) x + (bb) y + (bc) z + (bd) u + (be) v + (bf) = 0, \\ (ca) x + (cb) y + (cc) z + (cd) u + (ce) v + (cf) = 0, \\ (da) x + (db) y + (dc) z + (dd) u + (de) v + (df) = 0, \\ (ea) x + (eb) y + (ec) z + (ed) u + (ee) v + (ef) = 0, \end{array} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

(\*) La première rédaction de ce Mémoire, lue au Congrès de Lille, en 1874, a été détruite dans l'incendie de l'imprimerie Danel.





et, si  $N$  est le nombre des équations (1), le nombre de celles-ci est  $\frac{N(N-1)}{2} = N'$ .

4. Au moyen des notations et des transformations (5), le système (1) prend la forme

$$\left. \begin{aligned} (gg)y + (gb)z + (gi)u + (gj)v + (gk) &= 0, \\ (hg)y + (hb)z + (hi)u + (hj)v + (hk) &= 0, \\ (ig)y + (ih)z + (ii)u + (ij)v + (ik) &= 0, \\ (jg)y + (jb)z + (ji)u + (jj)v + (jk) &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

5. Supposons qu'entre les équations (7), prises deux à deux, on élimine  $y$ . L'équation-type étant

$$(gh' - hg')z + (g'i - ig')u + (g'l' - hg'v) + (gk' - kg) = 0,$$

posons

$$\left. \begin{aligned} gh' - hg' &= l, & g'i - ig' &= m, & gj' - jg' &= n, & gk' - kg &= o, \\ gh'' - hg'' &= l', & g'i'' - ig'' &= m', & gj'' - jg'' &= n', & gk'' - kg'' &= o', \\ g'h'' - h'g'' &= l'', & g'i'' - i'g'' &= m'', & g'j'' - j'g'' &= n'', & g'k'' - k'g'' &= o'', \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots (9)$$

nous aurons les  $\frac{N'(N'-1)}{2} = N''$  équations :

$$\left. \begin{aligned} lz + mu + nv + o &= 0, \\ l'z + m'u + n'v + o' &= 0, \\ l''z + m''u + n''v + o'' &= 0, \\ \dots & \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

donnant

$$\left. \begin{aligned} (ll)z + (lm)u + (ln)v + (lo) &= 0, \\ (ml)z + (mm)u + (mn)v + (mo) &= 0, \\ (ul)z + (um)u + (un)v + (uo) &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

Ces équations *normales* sont celles qu'amènerait l'élimination de  $y$ , entre la première des équations (8) et chacune des trois autres.

6. Si l'on fait

$$\left. \begin{aligned} lm' - ml' &= p, & ln' - nl' &= q, & lo' - ol' &= r, \\ lm'' - ml'' &= p', & ln'' - nl'' &= q', & lo'' - ol'' &= r', \\ lm''' - ml''' &= p'', & ln''' - nl''' &= q'', & lo''' - ol''' &= r'', \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

on aura les équations normales :

$$\left. \begin{aligned} (pp)u + (pq)v + (pr) = 0, \\ (qp)u + (qq)v + (qr) = 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

conséquences du système

$$\left. \begin{aligned} pu + qv + r = 0, \\ p'u + q'v + r' = 0, \\ p''u + q''v + r'' = 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

renfermant  $\frac{N''(N''-1)}{2} = N'''$  équations.

**7. Continuant de même, on trouve l'équation normale**

$$(ss)r + (st) = 0, \dots \dots \dots (15)$$

dans laquelle

$$\left. \begin{aligned} pq' - qp' = s, \quad pr' - rp' = t, \\ pq'' - qp'' = s', \quad pr'' - rp'' = t', \\ p'p'' - q'p'' = s'', \quad p'r'' - r'p'' = t'', \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

**8. Posons enfin :**

$$\left. \begin{aligned} st' - ts' = \omega, \\ st'' - ts'' = \omega', \\ s't'' - t's'' = \omega'', \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

de manière que

$$(\omega\omega) = \sum (st' - ts')^2: \dots \dots \dots (18)$$

relation dont nous aurons besoin.

**9. Avant d'aller plus loin, nous ferons une remarque importante, à laquelle donne lieu le calcul précédent.**

Soient les équations

$$\left. \begin{aligned} ax + by + cz + \dots + f = 0, \\ a'x + b'y + c'z + \dots + f' = 0, \\ a''x + b''y + c''z + \dots + f'' = 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

en nombre *inférieur, égal ou supérieur* à celui des inconnues. Le système

normal, déduit du système donné, est

$$\left. \begin{aligned} (aa)x + (ab)y + (ac)z + \dots + (af) &= 0, \\ (ba)x + (bb)y + (bc)z + \dots + (bf) &= 0, \\ (ca)x + (cb)y + (cc)z + \dots + (cf) &= 0, \\ \dots & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Éliminant  $x$ , entre la première équation et chacune des équations suivantes, on forme le nouveau système normal :

$$\left. \begin{aligned} (gg)y + (gh)z + \dots + (gk) &= 0, \\ (hg)y + (hh)z + \dots + (hk) &= 0, \\ \dots & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

En effet, d'après les relations (5) et (6) :

$$(aa)(bb) - (ab)^2 = (gg), \quad (aa)(bc) - (ab)(ac) = (gh), \dots$$

Au lieu d'opérer de la sorte, commençons par éliminer  $x$  entre les équations (49), prises deux à deux, de toutes les manières possibles : nous obtiendrons, comme précédemment, les équations *auxiliaires* :

$$\left. \begin{aligned} gy + hz + \dots + k &= 0, \\ g'y + h'z + \dots + k' &= 0, \\ g''y + h''z + \dots + k'' &= 0, \\ \dots & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Cela posé, le système normal, déduit de ces équations (7), est le système (8), résultant du système normal (5) (\*).

(\*) Cette propriété ne diffère pas de celle que nous avons signalée ci-dessus; mais les équations (1), annulation faite des seconds membres, étaient en nombre *supérieur* à celui des inconnues; tandis que, d'après la dernière remarque, le nombre des équations peut être quelconque. La propriété est donc générale.

## II.

## APPLICATIONS.

10. Soient les équations

$$\left. \begin{aligned} 2x + 5y + 4z &= 1, \\ 7x + 2y + 5z &= 6, \\ 5x + 4y + 2z &= 7. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

Le premier système normal est

$$\begin{aligned} 2(2x + 5y + 4z) + 7(7x + 2y + 5z) + 5(5x + 4y + 2z) &= 2.1 + 7.6 + 5.7, \\ 5(2x + 5y + 4z) + 2(7x + 2y + 5z) + 4(5x + 4y + 2z) &= 5.1 + 2.6 + 4.7, \\ 4(2x + 5y + 4z) + 5(7x + 2y + 5z) + 2(5x + 4y + 2z) &= 4.1 + 5.6 + 2.7; \end{aligned}$$

ou

$$\left. \begin{aligned} 78x + 40y + 59z &= 79, \\ 40x + 29y + 26z &= 45, \\ 59x + 26y + 29z &= 56. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

On en déduit celui-ci :

$$\begin{aligned} (78.29 - 40^2) y + (78.26 - 40.59) z &= 78.45 - 40.79, \\ (78.26 - 59.40) y + (78.29 - 59^2) z &= 78.56 - 79.59; \end{aligned}$$

ou

$$\left. \begin{aligned} 662y + 468z &= 194, \\ 468y + 741z &= -275. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22)$$

Si l'on élimine  $x$  entre les proposées, prises deux à deux, on trouve

$$\left. \begin{aligned} 17y + 22z &= -5, \\ -7y - 16z &= 9, \\ 18y - z &= 19. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

Les équations normales, déduites de ces équations (23), sont

$$\begin{aligned} (289 + 49 + 524) y + (574 + 112 - 18) z &= -85 - 65 + 542, \\ (274 + 112 - 18) y + (484 + 256 - 1) z &= -110 - 144 - 19; \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 662 y + 468 z &= 194, \\ 468 y + 741 z &= -275; \end{aligned}$$

comme ci-dessus.

11. On a encore, par l'élimination de  $y$  :

$$(662.741 - 468^2)z = -(642.275 + 468.194),$$

ou

$$271.518z = -271.518. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Si l'on éliminait  $y$  entre les équations (25), prises deux à deux, on trouverait

$$\begin{aligned} - (17.16 - 7.22)z &= 17.9 - 7.5, \\ - (17.1 + 18.22)z &= 17.19 + 18.5, \\ (7.1 + 18.16)z &= -7.19 - 18.19; \end{aligned}$$

ou

$$- 118z = + 118, \quad - 415z = 415, \quad 295z = - 295.$$

L'équation *normale*, qui doit donner  $z$ , est donc

$$(118^2 + 415^2 + 295^2)z = -(118^2 + 415^2 + 295^2);$$

ou

$$(15.924 + 170.569 + 87.025)z = -(15.924 + 170.569 + 87.025);$$

ou enfin

$$271.518z = -271.518.$$

### III.

#### CALCUL DE LA FONCTION $\Omega$ .

12. Prenons, dans chacun des systèmes (5), (8), (14), (15), (15), la première des équations qui le composent. Nous formerons ainsi le système

$$\left. \begin{aligned} (aa)x + (ab)y + (ac)z + (ad)u + (ae)v + (af) &= 0, \\ (gg)y + (gh)z + (gi)u + (gj)v + (gk) &= 0, \\ (ll)z + (lm)u + (ln)v + (lo) &= 0, \\ (pp)u + (pq)v + (pr) &= 0, \\ (ss)v + (st) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

employé par Gauss pour simplifier la fonction  $\Omega$ . Cette réduction, assez compliquée dans l'ouvrage cité, peut être présentée comme il suit.

13. D'après les équations (1), (2), la valeur de  $\Omega$ , ordonnée par rapport à  $x$ , est

$$(aa)x^2 + 2[(ab)y + (ac)z + (ad)u + (ae)v + (af)]x + \sum [by + cz + du + ev + f]^2.$$

Multipliant par  $(aa)$ , et ayant égard à la première des équations (23), on trouve

$$(aa)\Omega = (aa)\sum [by + cz + du + ev + f]^2 - [(ab)y + (ac)z + (ad)u + (ae)v + af]^2. \quad (26)$$

Supposons le second membre ordonné suivant les carrés et les doubles produits des inconnues  $y, z, u, \dots$  :

Le coefficient de  $y^2$  est

$$(aa)(bb) - (ab)^2 = \sum (ab' - ba')^2 = (gg);$$

le coefficient de  $2yz$  est

$$(aa)(bc) - (ab)(ac) = \sum (ab' - ba')(ac' - ca') = (gh);$$

etc.

Ainsi, la relation (26) devient

$$(aa)\Omega = \sum [(gg)y^2 + 2(gh)yz + (hh)z^2 + \dots + 2(jk)v + (kk)],$$

ou

$$(aa)\Omega = \sum [gy + hz + iu + jv + k]^2, \dots \dots \dots (27)$$

14. *Remarque.* Des formules (26), (27), on conclut l'identité

$$(aa)\sum [by + cz + du + ev + f]^2 = \left\{ \begin{array}{l} [(ab)y + (ac)z + (ad)u + (ae)v + af]^2 + \sum [gy + hz + iu + jv + k]^2, \end{array} \right\} \quad (28)$$

applicable à l'Algèbre et à la Théorie des nombres. Elle permet, par exemple, de décomposer le produit d'une somme de  $N$  carrés par une somme de  $N$  carrés, en une somme de  $1 + \frac{N(N-1)}{2}$  carrés; de décomposer la somme des carrés de  $N^2$  polynômes entiers, en  $1 + \frac{N(N-1)}{2}$  carrés de polynômes entiers; etc.

## 15. APPLICATION (\*).

$$\begin{aligned}
 & (2^2 + 3^2 + 5^2 + 5^2 + 4^2) [(5y + 4)^2 + (y + 1)^2 + (2y + 5)^2 + (7y + 4)^2 + (5y + 2)^2] \\
 & = (62y + 48)^2 + (7y + 10)^2 + (5y + 6)^2 + (y + 12)^2 + (6y + 12)^2 + (5y + 6)^2 \\
 & + (16y + 7)^2 + (5y + 2)^2 + (11y - 5)^2 + (y - 6)^2 + (15y + 6)^2;
 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 & (6y + 8)^2 + (2y + 2)^2 + (4y + 6)^2 + (14y + 8)^2 + (6y + 4)^2 \\
 & + (9y + 12)^2 + (5y + 5)^2 + (6y + 9)^2 + (21y + 12)^2 + (9y + 6)^2 \\
 & + (9y + 12)^2 + (5y + 5)^2 + (6y + 9)^2 + (21y + 12)^2 + (9y + 6)^2 \\
 & + (15y + 20)^2 + (5y + 5)^2 + (10y + 15)^2 + (55y + 20)^2 + (15y + 10)^2 \\
 & + (12y + 16)^2 + (4y + 4)^2 + (8y + 12)^2 + (28y + 16)^2 + (12y + 8)^2 \\
 & = (62y + 48)^2 + (7y + 10)^2 + (5y + 6)^2 + (y + 12)^2 + (6y + 12)^2 + (5y + 6)^2 \\
 & + (16y + 7)^2 + (5y + 2)^2 + (11y - 5)^2 + (y - 6)^2 + (15y + 6)^2;
 \end{aligned}$$

et, si l'on suppose  $y = 1$  :

$$\begin{aligned}
 & (2^2 + 3^2 + 5^2 + 5^2 + 4^2) (7^2 + 2^2 + 5^2 + 11^2 + 5^2) \\
 & = 110^2 + 17^2 + 11^2 + 15^2 + 18^2 + 9^2 + 25^2 + 7^2 + 8^2 + 5^2 + 19^2.
 \end{aligned}$$

En effet, cette égalité équivaut à

$$65 \cdot 224 = 14 \cdot 112;$$

ce qui est exact.

16. *Autre remarque.* Le produit d'une somme de  $N$  carrés, par une somme de  $N$  carrés, contient  $N^2$  carrés. Donc, en vertu de l'identité (28), une somme de  $N^2$  carrés se réduit spontanément, pour ainsi dire, à une somme de  $1 + \frac{N(N-1)}{2}$  carrés (\*\*).

(\*) Le calcul sera développé plus loin.

(\*\*) Par exemple :

$$\begin{aligned}
 & (a^2 + a'^2)(b^2 + b'^2) = (ab + a'b')^2 + (ab' - ba'), \\
 & (a^2 + a'^2 + a''^2)(b^2 + b'^2 + b''^2) = (ab + a'b' + a''b'')^2 + (ab' - ba')^2 + (a'b'' - b'a'')^2 + (a''b - b''a'')^2, \\
 & (a^2 + a'^2 + a''^2 + a'''^2)(b^2 + b'^2 + b''^2 + b'''^2) = (ab + a'b' + a''b'' + a'''b''')^2 + (ab' - ba')^2 + (a'b'' - b''a'')^2 \\
 & + (ab''' - ba''')^2 + (a'b''' - b'a''')^2 + (a''b''' - b'''a'')^2;
 \end{aligned}$$

identités évidentes et connues.

17. Dans les équations (7), remplaçons les seconds membres par  $w_1, w'_1, w''_1, \dots$ , et considérons les équations *virtuelles*

$$\left. \begin{aligned} gy + hz + iu + jv + k &= w_1, \\ g'y + h'z + i'u + j'v + k' &= w'_1, \\ g''y + h''z + i''u + j''v + k'' &= w''_1, \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29)$$

Si ces équations résultaient d'observations faites, et qu'on voulût disposer des valeurs de  $y, z, \dots$ , de manière à rendre minimum la quantité

$$\Omega_1 = w_1^2 + w'_1{}^2 + w''_1{}^2 + \dots = \sum [gy + hz + iu + jv + k]^2,$$

on aurait à résoudre le système (23), abstraction faite de la première équation, c'est-à-dire

$$\left. \begin{aligned} (gg) y + (gh) z + (gi) u + (gj) v + (gk) &= 0, \\ (ll) z + (lm) u + (ln) v + (lo) &= 0, \\ (pp) u + (pq) v + (pr) &= 0, \\ (ss) v + (st) &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (50)$$

Conséquemment :

1°. Si la somme des carrés des erreurs véritables,  $w, w', w'', \dots$ , est un minimum, la somme des carrés des erreurs virtuelles,  $w_1, w'_1, w''_1, \dots$ , est aussi un minimum (\*);

2°  $\Omega$  étant le premier minimum, et  $\Omega_1$  le second, on a

$$(aa) \Omega = \Omega_1 \dots \dots \dots (51)$$

(\*) Il n'est peut-être pas inutile de faire observer que, d'après les équations (1) et (29), les erreurs *virtuelles* sont données, en fonction des erreurs *véritables*, par les formules

$$w_1 = aw' - a'w, w'_1 = aw'' - a''w, w''_1 = a''w' - a''w', \dots;$$

d'où l'on tire aisément

$$\sum w_1^2 = (aa) \sum w^2 - [aw + a'w' + a''w'' + \dots]^2.$$

Dans le cas où  $\sum w^2$  est minimum, le terme négatif s'annule, en vertu des équations (1) et (5); et, par conséquent,

$$\sum w_1^2 = (aa) \Omega;$$

ce qui est la relation (51). Mais cette remarque ne prouverait pas que  $(aa) \Omega$  est le minimum de  $\sum w_1^2$ . La démonstration donnée dans le texte est donc nécessaire.



18. Sans nouveaux calculs, nous pouvons écrire, d'après cette équation (31) :

$$(gg) \Omega_1 = \Omega_2, \quad (ll) \Omega_2 = \Omega_3, \quad (pp) \Omega_3 = \Omega_4, \quad (ss) \Omega_4 = (\infty); (*) \dots \dots (52)$$

et, par conséquent,

$$\Omega = \frac{(\infty)}{(aa)(gg)(ll)(pp)(ss)} \dots \dots \dots (55)$$

On voit donc que la quantité  $\Omega$ , égale à une somme de carrés, est le quotient d'une somme de carrés, par un produit dont tous les facteurs sont des sommes de carrés.

19. *Remarques.* I. Si, comme on le peut supposer, les coefficients  $a, b, c, \dots, a', b', c', \dots$  sont entiers, les deux termes de la fraction (55) sont entiers. Quant aux carrés  $w^2, w'^2, \dots$ , qui composent  $\Omega$ , ils sont généralement fractionnaires.

II. Dans cette même fraction (55), le dénominateur est le déterminant des quantités

$$\begin{matrix} (aa), & (ab), & (ac), & (ad), & (ae), \\ 0, & (gg), & (gb), & (gi), & (gj), \\ 0, & 0, & (ll), & (lm), & (ln), \\ 0, & 0, & 0, & (pp), & (pq), \\ 0, & 0, & 0, & 0, & (ss), \end{matrix}$$

qui entrent, comme coefficients des inconnues, dans le système (50).

(\*) Si l'on considère les équations *virtuelles*

$$sv + t = w_4, \quad s'v + t' = w'_4, \quad s''v + t'' = w''_4, \dots,$$

on trouve que le minimum de  $\Sigma w_4^2$  est donné par les relations

$$\Omega_4 = \Sigma (sv + t)^2, \quad (ss)v + (tt) = 0;$$

d'où résulte celle-ci :

$$(ss) \Omega_4 = (ss)(tt) - (st)^2 = \Sigma (st' - s't)^2;$$

c'est-à-dire (18)

$$(ss) \Omega_4 = (\infty)$$

20. *Application et vérifications.* Soient les équations à deux inconnues  $x, y$ :

$$\begin{aligned} 2x + 5y + 4 &= w, \\ 5x + y + 1 &= w', \\ 5x + 2y + 5 &= w'', \\ 5x + 7y + 4 &= w''', \\ 4x + 5y + 2 &= w^v. \end{aligned}$$

1° Éliminant  $x$ , on trouve :

$$\begin{aligned} -7y - 10 &= w_1, & -5y - 6 &= w'_1, & -y - 12 &= w''_1, & -6y - 12 &= w'''_1, & 5y + 6 &= w^v_1, \\ 16y + 7 &= w'_1, & 5y + 2 &= w''_1, & 11y - 5 &= w'''_1, & y - 6 &= w^v_1, & -15y - 6 &= w^v_1. \end{aligned}$$

2° Les valeurs de  $\omega, \omega', \omega'', \dots$  sont :

$$\begin{aligned} 7.6 - 5.10 &= -8, & 7.12 - 10.1 &= 74, & 7.12 - 6.10 &= 24, \\ -7.6 + 10.5 &= -12, & -7.7 + 10.16 &= 111, & -7.2 + 5.10 &= 56, \\ 7.5 + 11.10 &= 151, & 7.6 + 1.10 &= 52, & 7.6 - 15.10 &= -88; \\ 5.12 - 6.1 &= 54, & 5.12 - 6.6 &= 24, & -5.6 + 5.6 &= -12, & -5.7 + 16.6 &= 61, \\ -5.2 + 5.6 &= 20, & 5.5 + 11.6 &= 81, & 5.6 + 1.6 &= 56, & 5.6 - 15.6 &= -48; \\ 1.12 - 6.12 &= -60, & -1.6 + 5.12 &= 50, & -1.7 + 16.12 &= 185, \\ -1.2 + 5.12 &= 58, & 1.5 + 11.12 &= 155, & 1.6 + 1.12 &= 18, & 1.6 - 15.12 &= -150; \\ -6.6 + 5.12 &= 0, & -6.7 + 16.12 &= 150, & -6.2 + 5.12 &= 48, \\ 6.5 + 11.12 &= 150, & 6.6 - 15.12 &= -120; \\ 5.7 - 16.6 &= -75, & 5.2 - 5.6 &= -24, & -5.5 - 11.6 &= -75, \\ -5.6 - 1.6 &= -24, & -5.6 + 15.6 &= 60; \\ 16.2 - 5.7 &= -5, & -16.5 - 11.7 &= -125, & -16.6 - 1.7 &= -105, & -16.6 + 15.7 &= -5; \\ -5.5 - 11.2 &= -57, & -5.6 - 1.2 &= -52, & -5.6 + 15.2 &= -4; \\ -11.6 + 1.5 &= -65, & -11.6 - 15.5 &= -105; & -1.6 - 6.15 &= -84. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} (\omega\omega) &= (8^2 + 74^2 + 24^2 + 12^2 + 111^2 + 56^2 + 151^2 + 52^2 + 88^2) \\ &+ (54^2 + 24^2 + 12^2 + 61^2 + 20^2 + 81^2 + 56^2 + 48^2) \\ &+ (60^2 + 50^2 + 185^2 + 58^2 + 155^2 + 18^2 + 150^2) \\ &+ (0^2 + 150^2 + 48^2 + 150^2 + 48^2 + 120^2) + (75^2 + 24^2 + 75^2 + 24^2 + 60^2) \\ &+ (5^2 + 125^2 + 105^2 + 5^2) + (57^2 + 52^2 + 42^2) + (65^2 + 105^2) + 84^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (64 + 5\,476 + 576 + 144 + 12\,521 + 1\,296 + 17\,161 + 2\,704 + 7\,744) \\
&+ (2\,916 + 576 + 144 + 5\,721 + 400 + 6\,561 + 1\,296 + 2\,504) \\
&+ (5\,600 + 900 + 54\,225 + 5\,564 + 18\,225 + 524 + 22\,500) \\
&+ (22\,500 + 2\,504 + 22\,500 + 2\,504 + 14\,400) + (5\,625 + 576 + 5\,625 + 576 + 5\,600) \\
&+ (9 + 15\,625 + 10\,609 + 25) + (1\,569 + 1\,024 + 16) + (5\,969 + 11\,025) + 7\,056 \\
&= 47\,486 + 17\,918 + 85\,158 + 64\,008 + 16\,002 + 26\,268 + 2\,409 + 14\,994 + 7\,056;
\end{aligned}$$

ou enfin

$$(\omega\omega) = 279\,279.$$

3° Les équations normales, déduites des proposées, sont

$$65x + 62y + 48 = 0,$$

$$62x + 72y + 55 = 0;$$

de manière que

$$(aa) = 2^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 4^2 = 65, \quad (ab) = 62, \quad (bb) = 72, \quad (af) = 48, \quad (bf) = 55,$$

$$(gg) = 7^2 + 5^2 + 1^2 + 6^2 + 5^2 + 16^2 + 5^2 + 11^2 + 1^2 + 15^2$$

$$= 49 + 25 + 1 + 36 + 9 + 256 + 25 + 121 + 1 + 225 = 692 (*).$$

4° Éliminant  $x$ , on trouve

$$692y + 565 = 0;$$

puis

$$y = -\frac{565}{692}, \quad x = -\frac{170}{692}, \quad w = -\frac{1\,559}{692}, \quad w' = -\frac{181}{691}, \quad w'' = \frac{840}{692},$$

$$w''' = -\frac{625}{692}, \quad w'' = -\frac{585}{692};$$

$$\Omega = \frac{1\,559^2 + 181^2 + 840^2 + 625^2 + 585^2}{692^2} = \frac{5\,067\,656}{692^2};$$

(\* D'après ces diverses valeurs, on a, par la formule (28):

$$\begin{aligned}
&(2^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 4^2) [15y + 4]^2 + (y + 1)^2 + (2y + 5)^2 + (7y + 4)^2 + (5y + 2)^2 \\
&= (62y + 48)^2 + (7y + 10)^2 + (5y + 6)^2 + (y + 12)^2 + (6y + 12)^2 + (5y + 6)^2 \\
&+ (16y + 7)^2 + (5y + 2)^2 + (11y - 5)^2 + (y - 6)^2 + (15y + 6)^2;
\end{aligned}$$

identité considérée ci-dessus (15).

5° Au moyen de ces valeurs, et de la formule (55), on doit avoir

$$\frac{5\ 067\ 656}{692^2} = \frac{279\ 279}{65 \cdot 692},$$

ou

$$5\ 067\ 656 \cdot 65 = 279\ 279 \cdot 692;$$

ce qui est exact (\*).

6° Si, dans la dernière égalité, on remplace chaque facteur par la somme de carrés équivalente, on obtient

$$\begin{aligned} & (1\ 559^2 + 181^2 + 840^2 + 625^2 + 585^2) (2^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 4^2) = \\ & (8^2 + 74^2 + 24^2 + 12^2 + 111^2 + 56^2 + 151^2 + 52^2 + 88^2 + 54^2 + 24^2 + 12^2 + 61^2 \\ & \quad + 20^2 + 81^2 + 56^2 + 48^2 + 60^2 + 50^2 + 183^2 + 58^2 + 155^2 + 18^2 + 150^2 + 0^2 \\ & \quad + 150^2 + 48^2 + 150^2 + 48^2 + 120^2 + 75^2 + 24^2 + 75^2 + 24^2 + 60^2 + 5^2 + 125^2 \\ & \quad + 105^2 + 5^2 + 57^2 + 52^2 + 4^2 + 65^2 + 103^2 + 84^2) \\ & \times (7^2 + 5^2 + 1^2 + 6^2 + 5^2 + 16^2 + 5^2 + 11^2 + 1^2 + 15^2). \end{aligned}$$

Le second membre est une somme de *quatre cent quarante carrés* (\*\*); tandis que le premier membre en contient seulement *vingt-cinq*. Voici donc un nouvel exemple des réductions curieuses auxquelles donnent lieu les formules établies ci-dessus. Développons un peu ce sujet.

21. Pour fixer les idées, et ne pas compliquer inutilement les notations, nous avons supposé que les équations données (1) renfermaient seulement cinq inconnues :  $x, y, z, u, v$ . Mais il est visible que les formules (50), (51), (52), ... s'étendent à un nombre quelconque d'inconnues. En général,  $\nu$  étant ce nombre, le diviseur de  $(\omega\omega)$ , dans la relation (55), sera le produit de  $\nu$  facteurs, égaux chacun (sauf le premier) à une *somme de carrés de déterminants binaires*, ces déterminants se déduisant, les uns des autres, par

(\*) En outre

$$\frac{5\ 067\ 656}{692} = \frac{279\ 279}{65} = 4\ 455$$

Ainsi, le numérateur de la fraction qui représente  $\Omega$  est divisible par  $692 = (gg)$ . Comme on le verra plus loin, cette réduction n'est pas fortuite.

(\*\*) Par la suppression de  $0^2$ .

une loi fort simple. Quant au dividende  $(\omega\omega)$ , il est également une *somme de carrés de déterminants binaires*. Afin de rendre le langage plus clair, nous dirons que ces premiers déterminants sont, respectivement, du 1<sup>er</sup>, du 2<sup>me</sup>, ... du  $(\nu - 1)^e$  ordre :  $(\omega\omega)$  est une somme de carrés de déterminants du  $\nu^e$  ordre.

22. D'après ce que l'on a vu précédemment  $(3, 4)$ ,  $(aa)$  contient  $N$  termes,  $(gg)$  en contient  $\frac{N(N-1)}{2} = N'$ ,  $(ll)$  en contient  $\frac{N(N-1)}{2} = N''$ , ... Ces nombres  $N, N', N'', \dots$ , qui croissent très-rapidement, paraissent suivre une loi compliquée (\*).

Dans l'exemple traité par Gauss, (\*\*),  $N = 11$ ,  $\nu = 6$ ; par conséquent

$$\Omega = \frac{(\omega\omega)}{ABCDEF}.$$

A étant une somme de 11 carrés,

B » » 55 »

C » » 1 485 »

D » » 1 401 870 »

etc.

23. Il est très-facile de trouver des expressions de  $\Omega$ , différentes de celle qui a été donnée ci-dessus. D'abord, en vertu de la *définition* (2), cette quantité peut être représentée par  $U_2 + U_1 + U_0$ ;  $U_2, U_1, U_0$  étant des fonctions homogènes, en  $x, y, z, \dots$ . Les équations (5) ne diffèrent pas des relations connues :

$$\frac{d\Omega}{dx} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dy} = 0, \dots$$

On conclut, de celles-ci,

$$x \frac{d\Omega}{dx} + y \frac{d\Omega}{dy} + z \frac{d\Omega}{dz} + \dots = 0;$$

(\*) Ils appartiennent à des *combinaisons de combinaisons de combinaisons*, ...

(\*\*) *Méthode des moindres carrés*, p. 135.

puis, par le *théorème des fonctions homogènes*,

$$2U_2 + U_1 = 0.$$

Conséquemment,

$$\Omega = \frac{1}{2} U_1 + U_0 \quad \dots \quad (54)$$

**24.** Ce n'est pas tout :

$$U_1 = 2 \sum f(ax + by + cz + du + ev) = 2 [(af)x + (bf)y + (cf)z + (df)u + (ef)v],$$

$$U_0 = \sum f^2 = (ff):$$

donc

$$\Omega = (af)x + (bf)y + (cf)z + (df)u + (ef)v + (ff): \quad \dots \quad (55)$$

ou encore

$$\Omega = \sum fvc. \quad \dots \quad (56)$$

à cause des équations (1) (\*).

**25.** Enfin, la fonction  $\Omega$  peut être mise sous la forme d'une fraction dont les deux termes sont des déterminants.

En effet, écrivons ainsi les équations (5) et (55) :

$$\begin{aligned} (aa)x + (ab)y + (ac)z + (ad)u + (ae)v + 0 \cdot \Omega &= -(af), \\ (ba)x + (bb)y + (bc)z + (bd)u + (be)v + 0 \cdot \Omega &= -(bf), \\ (ca)x + (cb)y + (cc)z + (cd)u + (ce)v + 0 \cdot \Omega &= -(cf), \\ (da)x + (db)y + (dc)z + (dd)u + (de)v + 0 \cdot \Omega &= -(df), \\ (ea)x + (eb)y + (ec)z + (ed)u + (ee)v + 0 \cdot \Omega &= -(ef), \\ (fa)x + (fb)y + (fc)z + (fd)u + (fe)v + 0 \cdot \Omega &= -(ff). \end{aligned}$$

Si l'on fait

$$\Delta = \begin{vmatrix} (aa) & (ab) & (ac) & (ad) & (ae) \\ (ba) & (bb) & (bc) & (bd) & (be) \\ (ca) & (cb) & (cc) & (cd) & (ce) \\ (da) & (db) & (dc) & (dd) & (de) \\ (ea) & (eb) & (ec) & (ed) & (ee) \end{vmatrix}$$

(\*) Nous rappelons ces formules connues, parce qu'elles nous serviront plus tard.

$$N = \begin{vmatrix} (aa), & (ab), & (ac), & (ad), & (ae), & (af), \\ (ba), & (bb), & (bc), & (bd), & (be), & (bf), \\ (ca), & (cb), & (cc), & (cd), & (ce), & (cf), \\ (da), & (db), & (dc), & (dd), & (de), & (df), \\ (ea), & (eb), & (ec), & (ed), & (ee), & (ef), \\ (fa), & (fb), & (fc), & (fd), & (fe), & (ff), \end{vmatrix}$$

il résulte, des plus simples notions de la théorie des déterminants, que

$$\Omega = \frac{N}{\Delta} \dots \dots \dots (57)$$

**26. Remarque.** Si les valeurs de  $x, y, z, u, v$ , tirées des cinq premières équations, sont

$$x = \frac{\mathfrak{A}}{\Delta}, \quad y = \frac{\mathfrak{B}}{\Delta}, \quad z = \frac{\mathfrak{C}}{\Delta}, \quad u = \frac{\mathfrak{D}}{\Delta}, \quad v = \frac{\mathfrak{E}}{\Delta};$$

la sixième équation, c'est-à-dire la formule (55), donne

$$\Omega = \frac{\mathfrak{A}(af) + \mathfrak{B}(bf) + \mathfrak{C}(cf) + \mathfrak{D}(df) + \mathfrak{E}(ef) + \Delta(ff)}{\Delta};$$

valeur identique avec la précédente, d'après les formules de Cramer.

**27.** Les valeurs de  $x, y, z, u, v$ , tirées des équations (25), sont des fractions dont le dénominateur commun est

$$(aa)(yy)(ll)(pp)(ss) = \frac{(\ast\ast)}{\Omega} = P \text{ (*) } \dots \dots \dots (58)$$

Par conséquent :

1° On peut supposer

$$w = \frac{\Lambda}{P}, \quad w' = \frac{\Lambda'}{P}, \quad w'' = \frac{\Lambda''}{P}, \dots \dots \dots (59)$$

$\Lambda, \Lambda', \Lambda'', \dots$  étant des *quantités entières* ;

(\*) On verra, plus loin, que ce dénominateur commun est réductible à (ss).

$$2^{\circ} \quad \Omega = \frac{\sum A^2}{p^2}; \quad \dots \quad (40)$$

puis, par les formules (56) et (58) :

$$\Omega = \frac{\sum M}{p} = \frac{(aa)}{p} \quad \dots \quad (41)$$

$$3^{\circ} \quad \sum M = (aa) \quad \dots \quad \sum A^2 = (aa)(gg)(ll)(pp)(ss)(xx) \quad \dots \quad (42)$$

4<sup>e</sup> D'après la dernière relation, *une somme de N<sup>2</sup> carrés est le produit d'une somme de N carrés, par une somme de N<sup>1</sup> carrés, par une somme de N<sup>1</sup> carrés, ....*

28. *Vérifications.* Dans l'exemple ci-dessus (20) :

$$w = \frac{1\,559}{692}, \quad w' = -\frac{181}{692}, \quad w'' = \frac{840}{692}, \quad w''' = -\frac{625}{692}, \quad w^{\text{iv}} = -\frac{585}{692};$$

$$P = (aa)(gg) = 65 \cdot 692;$$

donc

$$A = 1\,559 \cdot 65, \quad A' = -181 \cdot 65, \quad A'' = 840 \cdot 65, \quad A''' = -625 \cdot 65, \quad A^{\text{iv}} = -585 \cdot 65.$$

Les relations (42) deviennent

$$65 [1\,559 \cdot 4 - 181 \cdot 1 + 840 \cdot 5 - 625 \cdot 4 - 585 \cdot 2] = 279 \cdot 279,$$

$$65^2 [1\,559^2 + 181^2 + 840^2 + 625^2 + 585^2] = 65 \cdot 692 \cdot 279 \cdot 279;$$

ou

$$5\,556 - 181 + 2\,520 - 2\,492 - 770 = 4\,455,$$

$$1\,792\,921 + 52\,761 + 705\,600 + 588\,129 + 148\,225 = 5\,067\,656 = 692 \cdot 4\,455;$$

et ces dernières sont identiques.

De plus,

$$1\,559^2 + 181^2 + 840^2 + 625^2 + 585^2 =$$

$$(7^2 + 5^2 + 1^2 + 6^2 + 5^2 + 16^2 + 5^2 + 11^2 + 1^2 + 15^2) (1\,559 \cdot 4 - 181 \cdot 1 + 840 \cdot 5 - 625 \cdot 4 - 585 \cdot 2).$$



IV.

EXAMEN D'UN CAS PARTICULIER.

29. Supposons, comme dans l'exemple numérique précédent, qu'il y ait seulement deux inconnues; c'est-à-dire, prenons les équations

$$\left. \begin{aligned} ax + by + c &= w, \\ a'x + b'y + c' &= w', \\ a''x + b''y + c'' &= w'', \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad (45)$$

en nombre  $N$ . Si l'on pose, comme dans le paragraphe I :

$$\left. \begin{aligned} ab' - ba' &= g, & ac' - ca' &= h, \\ ab'' - ba'' &= g', & ac'' - ca'' &= h', \\ a'b'' - b'a'' &= g'', & a'c'' - c'a'' &= h'', \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots$$

on obtient les équations

$$(aa) x + (ab) y + (ac) = 0, \quad (gg) y + (gh) = 0; \quad \dots \dots \dots \quad (44)$$

d'où l'on tire

$$y = -\frac{(gh)}{(gg)}, \quad x = -\frac{(ac)(gg) - (ab)(gh)}{(aa)(gg)}; \quad \dots \dots \dots \quad (45)$$

La valeur de  $x$  ne doit différer, de celle de  $y$ , que par le changement de  $a, a', a'', \dots$ , en  $b, b', b'', \dots$ , et *vice versa*. Par conséquent, si l'on fait

$$\left. \begin{aligned} bc' - cb' &= \gamma, \\ bc'' - cb'' &= \gamma', \\ b'c'' - c'b'' &= \gamma'', \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\}$$

et si l'on a égard au changement de signe des binômes  $g, g', g'', \dots$ , on aura

$$x = +\frac{(g\gamma)}{(gg)}; \quad \dots \dots \dots \quad (46)$$

et, en conséquence,

$$(ab)(gh) - (ac)(gy) = (aa)(gz),$$

ou

$$\sum a^2 \sum (ab' - ba')(bc' - cb') + \sum ac \sum (ab' - ba')^2 = \sum ab \sum (ab' - ba')(ac' - ca').$$

ou enfin

$$\sum (ab' - ba') [(bc' - cb') \sum a + (ca' - ac') \sum ab + (ab' - ba') \sum ac] = 0 \quad . \quad (47)$$

**30. Remarque.** Lorsque  $N = 3$ , cette *identité* se réduit à

$$\begin{aligned} & (ab' - ba') [(bc' - cb')(a^2 + a'^2 + a''^2) + (ca' - ac')(ab + a'b' + a'b'') + (ab' - ba')(ac + a'c' + a''c'')] \\ & + (a'b'' - b'a'') [(b'c'' - c'b'')(a^2 + a'^2 + a''^2) + (c'a'' - a'c'')(ab + a'b' + a'b'') + (a'b'' - b'a'')(ac + a'c' + a''c'')] \\ & + (a''b - b'a'') [(b''c - c'b)(a^2 + a'^2 + a''^2) + (c'a - a'c)(ab + a'b' + a'b'') + (a''b - b'a'')(ac + a'c' + a''c'')] = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Si l'on représente par  $\alpha, \beta, \gamma$  les faces d'un trièdre, et par  $\alpha', \beta', \gamma'$  les faces correspondantes du trièdre *supplémentaire*, on la transforme aisément en

$$\sin \alpha \cos \beta' + \sin \beta \cos \gamma \cos \alpha' + \sin \gamma \cos \beta = 0;$$

ou, en introduisant les angles dièdres du premier trièdre :

$$\sin \gamma \cos \beta = \sin \alpha \cos B + \sin \beta \cos \gamma \cos A.$$

Or, cette dernière relation devient identique, au moyen des formules :

$$\cos A = \frac{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}, \quad \cos B = \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma}.$$

**31.** Si, par analogie avec les formules (17), on prend

$$\begin{aligned} \omega &= gh' - hg', \\ \omega' &= gh'' - hg'', \\ \omega'' &= g'h'' - h'g'', \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

on a cette première expression :

$$\Omega = \frac{(\omega\omega)}{(aa)(gg)} \dots \dots \dots (49)$$

D'un autre côté (25) :

$$\Delta = \begin{pmatrix} (aa), & (ab), & (ac) \\ (ba), & (bb); & (bc) \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} (aa), & (ab), & (ac) \\ (ba), & (bb), & (bc) \\ (ca), & (cb), & (cc) \end{pmatrix} :$$

ou, plus simplement :

$$\begin{aligned} \Delta &= (aa)(bb) - (ab)^2 = (yy) = \sum (ab' - ba')^2, \\ N &= (aa)[(bb)(cc) - (bc)^2] + (ba)[(cb)(ac) - (ab)(cc)] + (ca)[(ab)(bc) - (bb)(ac)] \\ &= (aa) \sum (bc' - cb')^2 + (ab) \sum (br' - cb')(ca' - ac') + (ac) \sum (br' - cb')(ab' - ba') \\ &= \sum (bc' - cb')[(br' - cb') \sum a^2 + (ca' - ac') \sum ab + (ab' - ba') \sum ac]; \end{aligned}$$

done

$$\Omega = \frac{\sum (bc' - cb')[(br' - cb') \sum a^2 + (ca' - ac') \sum ab + (ab' - ba') \sum ac]}{\sum (ab' - ba')^2}. \quad (50)$$

32. La comparaison des formules (49), (50) donne cette nouvelle identité :

$$\begin{aligned} & \frac{\sum a^2 (ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'')^2}{\sum a^2} \\ &= \sum (bc' - cb')[(bc' - cb') \sum a^2 + (ca' - ac') \sum ab + (ab' - ba') \sum ac]; \end{aligned} \quad (51)$$

qui, dans le cas de  $N = 3$ , se réduit à

$$\begin{aligned} & (ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'')^2 = \\ & \sum (bc' - cb')[(bc' - cb') \sum a^2 + (ca' - ac') \sum ab + (ab' - ba') \sum ac]. \end{aligned} \quad (52)$$

33. APPLICATION. Soient, par exemple :

$$\begin{aligned} a &= 2, & a' &= 5, & a'' &= 4, \\ b &= 5, & b' &= 1, & b'' &= 2, \\ c &= 5, & c' &= 2, & c'' &= 1; \end{aligned}$$

d'où résultent les valeurs des déterminants *binaires* :

$$\begin{aligned} bc' - cb' &= 1, & ca' - ac' &= 11, & ab' - ba' &= -7, \\ b'c'' - c'b'' &= -5, & c'a'' - a'c'' &= 5, & a'b'' - b'a'' &= 2, \\ b''c - c''b &= 7, & c''a - a''c &= -18, & a''b - b''c &= 8; \end{aligned}$$

puis

$$a(b'e'' - e'b'') + a'(b''e - e''b) + a''(be' - eb') = 19,$$

$$\sum a^2 = 29, \quad \sum ab = 17, \quad \sum ac = 20$$

L'égalité (32) devient donc

$$19^2 = [29 + 11 \cdot 17 - 7 \cdot 20] - 5[-5 \cdot 29 + 5 \cdot 17 + 2 \cdot 20] + 7[7 \cdot 29 - 18 \cdot 17 + 8 \cdot 20],$$

ou

$$561 = 29 \cdot 59 - 17 \cdot 150 + 20 \cdot 45;$$

ce qui est exact.

**34. Remarque.** Le second membre de l'égalité (32) peut encore être écrit sous les deux formes :

$$\sum (ca' - ac')[(ca' - ac') \sum b^2 + (ab' - ba') \sum bc + (bc' - cb') \sum ba],$$

$$\sum (ab' - ba')[(ab' - ba') \sum c^2 + (bc' - cb') \sum ca + (ca' - ac') \sum cb];$$

car le premier membre est une fonction symétrique de  $a, b, c$ .

## V.

### THÉORÈMES SUR DES DÉTERMINANTS (\*)

**35. Notations symboliques.** Soient  $n^2$  quantités

$$\left. \begin{array}{l} a_1, \quad b_1, \quad c_1, \quad \dots, \quad k_1, \quad l_1, \\ a_2, \quad b_2, \quad c_2, \quad \dots, \quad k_2, \quad l_2, \\ \dots, \quad \dots, \quad \dots, \quad \dots, \quad \dots, \quad \dots, \\ a_n, \quad b_n, \quad c_n, \quad \dots, \quad k_n, \quad l_n. \end{array} \right\} \dots \dots \dots (35)$$

Représentons, par **A, B, C, ... , L** les *colonnes* du système : celui-ci sera représenté, symboliquement, par

$$\mathbf{A, B, C, \dots, L:}$$

(\*) Ces théorèmes, qui nous servent à compléter les recherches précédentes, sont, sinon nouveaux, du moins peu connus.

et nous désignerons ainsi :

$$\det (A, B, C, \dots, L),$$

le déterminant des quantités données.

**36. THÉORÈME. I.** *Les déterminants des trois systèmes*

$$A, B \quad | \quad M, B \quad | \quad A + M, B,$$

satisfont à la relation

$$\det (A + M, B) = \det (A, B) + \det (M, B) \quad (*) \quad \dots \quad (54)$$

**37. COROLLAIRES.**

I.  $\det (A + M, B, C, \dots) = \det (A, B, C, \dots) + \det (M, B, C, \dots).$  (55)

II.  $\det (A + M, B + N) = \det (A, B) + \det (A, N) + \det (M, B) + \det (M, N).$  (56)

III. 
$$\left. \begin{aligned} \det (A + M, B + N, C + P) \\ = \det (A, B, C) + \det (M, B, C) + \det (A, B, P) + \det (M, B, P) \\ + \det (A, N, C) + \det (M, N, C) + \det (A, N, P) + \det (M, N, P) \end{aligned} \right\} \dots \quad (57)$$

IV. Etc. (\*\*)

**38. APPLICATION. Connaissant**

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ 5. & 2. & 4. \\ 3. & 1. & 5. \\ 6. & 7. & 2. \end{vmatrix} \quad \Delta = \begin{vmatrix} M & N & P \\ 2. & 5. & 4. \\ 5. & 8. & 1. \\ 6. & 2. & 5. \end{vmatrix}$$

trouver

$$\Delta = \begin{vmatrix} A + M & B + N & C + P \\ 5. & 7. & 8. \\ 8. & 9. & 4. \\ 11. & 9. & 5. \end{vmatrix}$$

(\*) Pour la démonstration, presque inutile d'ailleurs, voir les *Bulletins de l'Académie*, tome XIII, p. 183.

(\*\*) Comme moyen mnémorique, on peut effectuer les produits

$$(A + M) (B + N), \quad (A + M) (B + N) (C + P), \dots$$

en ayant soin de ne pas intervertir l'ordre des facteurs

Soient les déterminants auxiliaires :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A & X & C \\ 5. & 3. & 4. \\ 3. & 8. & 5. \\ 6. & 2. & 2. \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} M & B & C \\ 2. & 2. & 4. \\ 5. & 1. & 5. \\ 6. & 7. & 2. \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} M & N & C \\ 2. & 5. & 4. \\ 5. & 8. & 5. \\ 6. & 2. & 2. \end{vmatrix},$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} A & B & P \\ 5. & 2. & 4. \\ 3. & 1. & 1. \\ 6. & 7. & 5. \end{vmatrix}, \quad \Delta_6 = \begin{vmatrix} A & X & P \\ 5. & 5. & 4. \\ 3. & 8. & 1. \\ 6. & 2. & 5. \end{vmatrix}, \quad \Delta_7 = \begin{vmatrix} M & B & P \\ 2. & 2. & 4. \\ 5. & 1. & 1. \\ 6. & 7. & 5. \end{vmatrix}.$$

Cela posé :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 5(2 - 21) + 5(28 - 4) + 6(6 - 4) = -57 + 120 + 12 = 75, \\ \Delta_2 &= 5(16 - 6) + 5(8 - 10) + 6(15 - 52) = 50 - 10 - 402 = -82, \\ \Delta_3 &= 2(2 - 24) + 5(28 - 4) + 6(6 - 4) = -58 + 72 + 12 = 46, \\ \Delta_4 &= 2(16 - 6) + 5(8 - 10) + 6(15 - 52) = 20 - 10 - 402 = -88, \\ \Delta_5 &= 5(5 - 7) + 5(28 - 6) + 6(2 - 4) = -12 + 110 - 12 = 86, \\ \Delta_6 &= 5(24 - 2) + 5(8 - 15) + 6(5 - 52) = 66 - 55 - 462 = -451, \\ \Delta_7 &= 2(5 - 7) + 5(28 - 6) + 6(2 - 4) = -8 + 110 - 12 = 90, \\ \Delta_8 &= 2(24 - 2) + 5(8 - 15) + 6(5 - 52) = 44 - 55 - 462 = -473. \end{aligned}$$

Donc

$$\Delta = 75 - 82 + 46 - 88 + 86 - 451 + 90 - 473 = -187.$$

En effet,

$$\Delta = 5(15 - 56) + 8(72 - 75) + 12(28 - 72) = 45 + 296 - 528 = -187.$$

### 39. AUTRE COROLLAIRE.

$$\det(A, B - A, C - A, \dots) = \det(A, B, C, \dots) \quad (38)$$

Dans l'équation générale

$$\det(A + M, B + X, C + P, \dots) = \det(A, B, C, \dots) + \det(M, B, C, \dots) + \dots,$$

supposons

$$M = 0, \quad X = -A, \quad P = -A, \dots$$

Tous les termes du second membre disparaissent, sauf le premier; donc, etc.

40. APPLICATION.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7, & 8, & 4, \\ 9, & 5, & 5, \\ 6, & 7, & 2, \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 7, & 1, & -5, \\ 9, & -6, & -4, \\ 6, & 1, & -4 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta = 7(6 - 55) + 9(28 - 16) + 6(40 - 12) = -205 + 108 + 168 = 75;$$

$$\Delta_1 = 7(24 + 4) + 9(-5 + 4) + 6(-4 - 18) = 196 + 9 - 152 = 75 = \Delta.$$

41. *Décomposition d'un déterminant.* Considérons encore le système de  $n^2$  quantités :

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1, & \dots & k_1, & l_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & \dots & k_2, & l_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n, & b_n, & c_n, & \dots & k_n, & l_n. \end{matrix}$$

et décomposons-le en deux parties A, B :

$$\begin{matrix} & \text{A} & & \text{B} \\ a_1, & b_1, & c_1, & \dots & f_1, & g_1, & h_1, & \dots & k_1, & l_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & \dots & f_2, & g_2, & h_2, & \dots & k_2, & l_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n, & b_n, & c_n, & \dots & f_n, & g_n, & h_n, & \dots & k_n, & l_n. \end{matrix}$$

Soient  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  les *lignes* composant A, et  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  celles qui composent B. Soient  $p$  le nombre des *colonnes* de A,  $n - p$  celui des colonnes de B. Cherchons à former le déterminant  $\Delta$  du système *résultant* donné, au moyen des déterminants des systèmes *composants*. A cet effet, prenons d'abord, pour plus de clarté, un cas particulier :

$$\begin{matrix} & \text{A} & & \text{B} \\ a_1, & b_1, & c_1, & d_1, & e_1, & f_1, & g_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2, & e_2, & f_2, & g_2, \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3, & e_3, & f_3, & g_3, \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4, & e_4, & f_4, & g_4, \\ a_5, & b_5, & c_5, & d_5, & e_5, & f_5, & g_5, \\ a_6, & b_6, & c_6, & d_6, & e_6, & f_6, & g_6, \\ a_7, & b_7, & c_7, & d_7, & e_7, & f_7, & g_7. \end{matrix}$$

Dans  $\Delta$ , le coefficient de  $a_1 b_2 c_5$  est

$$d e f g_7 - d f e g_7 + \dots = \det(\psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7).$$

Ce déterminant multiplie, non-seulement  $a_1 b_2 c_5$ , mais encore :  $-b_1 a_2 c_5$ ,  $+c_1 a_2 b_5$ , etc. Une partie de  $\Delta$  est donc

$$\det(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5) \times \det(\psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7) \quad (*)$$

Le coefficient de  $a_1 b_2 c_4$ , dans  $\Delta$ , est

$$-d e f_6 g_7 + \dots = -\det(\psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7).$$

En effet, le terme  $a_1 b_2 d_5 c_4 e_3 f_6 g_7$  doit avoir le signe  $-$ . Ce coefficient multiplie

$$a_1 b_2 c_4 - b_1 a_2 c_4 + \dots = \det(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4).$$

(\*) Cette proposition, à peu près évidente, le devient tout à fait au moyen des remarques suivantes :

1° Si l'on fait abstraction des signes, la partie P de  $\Delta$ , qui contient les lettres a, b, c, affectées des indices 1, 2, 5, et les lettres d, e, f, g, affectées des indices 4, 5, 6, 7, est égale au produit du polynôme  $\det(\tau_1, \tau_2, \tau_5)$ , par le polynôme  $\det(\psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7)$ , les termes de ces polynômes étant rendus positifs.

En effet, un terme de P, tel que  $b_1 a_2 c_5 e_4 g_3 d_6 f_7$ , est décomposable en  $b_1 a_2 c_5 \times e_4 g_3 d_6 f_7$ ; et, réciproquement, le produit de deux termes  $c_1 b_2 a_5$ ,  $f_4 d_3 e_6 g_7$  pris dans les polynômes dont il s'agit, est un terme de P.

2° Soient  $i, i', i''$  les nombres respectifs d'inversions alphabétiques, dans  $b_1 a_2 c_5$ ,  $e_4 g_3 d_6 f_7$ ,  $b_1 a_2 c_5 e_4 g_3 d_6 f_7$  : je dis que  $i'' = i + i'$ .

Quand on écrit, à la suite de  $b_1 a_2 c_5$ , les lettres  $e_4 g_3 d_6 f_7$ , le nombre des inversions, d'abord égal à  $i$ , devient, successivement :  $i, i, i + 2$  (à cause des deux inversions  $ed, gd$ ),  $i + 5 = i + i'$  (à cause de l'inversion  $gf$ ).

3° Si l'on a égard aux signes,

$$P = \det(\tau_1, \tau_2, \tau_5) \times \det(\psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7).$$

Les signes des éléments

$$b_1 a_2 c_5 e_4 g_3 d_6 f_7, \quad b_1 a_2 c_5, \quad e_4 g_3 d_6 f_7$$

sont, respectivement, ceux des quantités

$$(-1)^{i''}, \quad (-1)^i, \quad (-1)^{i'};$$

donc, par ce qui précède,

$$P = \sum (-1)^i b_1 a_2 c_5 \times \sum (-1)^{i'} e_4 g_3 d_6 f_7;$$

etc.



Une deuxième partie de  $\Delta$  est donc

$$- \det(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \times \det(\psi_3, \psi_5, \psi_6, \psi_7);$$

il y a une inversion *numérique*, correspondant à celle qui provient de  $a_1 b_2 c_4 \times d_3 e_5 f_6 g_7$ .

Continuant de la même manière, on trouve

$$\begin{aligned} \Delta = & \det(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_7) \times \det(\psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7) - \det(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5) \times \det(\psi_3, \psi_5, \psi_6, \psi_7) \\ & + \det(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \times \det(\psi_3, \psi_4, \psi_6, \psi_7) - \dots; \end{aligned}$$

et, en général :

**42. THÉOREME II** (\*).

$$\begin{aligned} \Delta = & \det(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \times \det(\psi_{p+1}, \psi_{p+2}, \dots, \psi_n) \\ & - \det(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{p-1}, \varphi_{p+1}) \times \det(\psi_p, \psi_{p+2}, \dots, \psi_n) \\ & + \dots \\ & + \dots \end{aligned} \quad (59)$$

chaque produit ayant le signe  $+$  ou le signe  $-$ , selon que les indices présentent un nombre pair ou un nombre impair d'inversions numériques.

**43.** Prenons, pour fixer les idées :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_6 & b_6 & c_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{vmatrix}$$

Dans chaque ligne, divisons tous les termes par le premier; et soit

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1, & \frac{b_1}{a_1}, & \frac{c_1}{a_1}, & \frac{d_1}{a_1}, & \frac{e_1}{a_1}, & \frac{f_1}{a_1}, \\ 1, & \frac{b_2}{a_2}, & \frac{c_2}{a_2}, & \frac{d_2}{a_2}, & \frac{e_2}{a_2}, & \frac{f_2}{a_2}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & \frac{b_6}{a_6}, & \frac{c_6}{a_6}, & \frac{d_6}{a_6}, & \frac{e_6}{a_6}, & \frac{f_6}{a_6}; \end{vmatrix};$$

(\*) Ce théorème paraît dû à Laplace.

ou, ce qui est équivalent (\*):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, \\ \frac{b_1}{a_1}, & \frac{b_2}{a_2}, & \frac{b_3}{a_3}, & \frac{b_4}{a_4}, & \frac{b_5}{a_5}, & \frac{b_6}{a_6}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{f_1}{a_1}, & \frac{f_2}{a_2}, & \frac{f_3}{a_3}, & \frac{f_4}{a_4}, & \frac{f_5}{a_5}, & \frac{f_6}{a_6}. \end{vmatrix}$$

Il est visible que

$$\Delta_1 = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \Delta' \dots \dots \dots (z)$$

D'un autre côté, d'après le dernier corollaire (59) :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ \frac{b_1}{a_1}, & \frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}, & \frac{b_3}{a_3} - \frac{b_1}{a_1}, & \frac{b_4}{a_4} - \frac{b_1}{a_1}, & \frac{b_5}{a_5} - \frac{b_1}{a_1}, & \frac{b_6}{a_6} - \frac{b_1}{a_1}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{f_1}{a_1}, & \frac{f_2}{a_2} - \frac{f_1}{a_1}, & \frac{f_3}{a_3} - \frac{f_1}{a_1}, & \frac{f_4}{a_4} - \frac{f_1}{a_1}, & \frac{f_5}{a_5} - \frac{f_1}{a_1}, & \frac{f_6}{a_6} - \frac{f_1}{a_1}. \end{vmatrix}$$

ou simplement, à cause des termes nuls,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}, & \frac{b_3}{a_3} - \frac{b_1}{a_1}, & \frac{b_4}{a_4} - \frac{b_1}{a_1}, & \frac{b_5}{a_5} - \frac{b_1}{a_1}, & \frac{b_6}{a_6} - \frac{b_1}{a_1}, \\ \frac{c_2}{a_2} - \frac{c_1}{a_1}, & \frac{c_3}{a_3} - \frac{c_1}{a_1}, & \frac{c_4}{a_4} - \frac{c_1}{a_1}, & \frac{c_5}{a_5} - \frac{c_1}{a_1}, & \frac{c_6}{a_6} - \frac{c_1}{a_1}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{f_2}{a_2} - \frac{f_1}{a_1}, & \frac{f_3}{a_3} - \frac{f_1}{a_1}, & \frac{f_4}{a_4} - \frac{f_1}{a_1}, & \frac{f_5}{a_5} - \frac{f_1}{a_1}, & \frac{f_6}{a_6} - \frac{f_1}{a_1}. \end{vmatrix};$$

ou encore, en vertu de la relation (z):

$$\Delta = \frac{1}{a_1^6 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6} \Delta_2 \dots \dots \dots (5)$$

(\*) Lorsque, dans un système de n<sup>2</sup> éléments, on remplace les colonnes par les lignes, et réciproquement, le déterminant ne change pas.

pourvu que l'on suppose

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1b_2 - b_1a_2, & a_1c_2 - c_1a_2, & a_1d_2 - d_1a_2, & a_1e_2 - e_1a_2, & a_1f_2 - f_1a_2, \\ a_1b_3 - b_1a_3, & a_1c_3 - c_1a_3, & a_1d_3 - d_1a_3, & a_1e_3 - e_1a_3, & a_1f_3 - f_1a_3, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1b_6 - b_1a_6, & a_1c_6 - c_1a_6, & a_1d_6 - d_1a_6, & a_1e_6 - e_1a_6, & a_1f_6 - f_1a_6 \end{vmatrix} \quad (7)$$

44. Les éléments de  $\Delta_2$  sont les *déterminants binaires* considérés au commencement de ce Mémoire. Pour abrégér, représentons-les par

$$\begin{matrix} g_1, & h_1, & i_1, & j_1, & k_1, \\ g_2, & h_2, & i_2, & j_2, & k_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_5, & h_5, & i_5, & j_5, & k_5; \end{matrix}$$

de manière que  $\Delta_2$  soit le déterminant de ce nouveau système. Éliminant  $\Delta'$  entre les équations  $(x), (\bar{z})$ , on a cette relation simple et remarquable :

$$\Delta_1 = \frac{1}{a_1^2} \Delta_2 \quad (8)$$

De même, soient :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} l_1, & m_1, & n_1, & o_1, \\ l_2, & m_2, & n_2, & o_2, \\ l_3, & m_3, & n_3, & o_3, \\ l_4, & m_4, & n_4, & o_4; \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} p_1, & q_1, & r_1, \\ p_2, & q_2, & r_2, \\ p_3, & q_3, & r_3; \end{vmatrix}, \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} s_1, & t_1, \\ s_2, & t_2; \end{vmatrix};$$

les éléments de chaque déterminant étant déduits, de ceux du déterminant précédent, comme les éléments de  $\Delta_2$  l'ont été de ceux de  $\Delta_1$ . L'égalité (8) donne, successivement :

$$\Delta_2 = \frac{1}{g_1^2} \Delta_1, \quad \Delta_3 = \frac{1}{h_1^2} \Delta_1, \quad \Delta_4 = \frac{1}{i_1^2} \Delta_1;$$

et, en conséquence,

$$\Delta_1 = \frac{1}{a_1^2 g_1^2 h_1^2 i_1^2} \Delta_5 \quad (9)$$

Nous pouvons, maintenant, énoncer cette proposition générale :

45. THÉORÈME III. Soient  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{j-1}$  des déterminants composés de  $\nu^2, (\nu - 1)^2, \dots, 2^2$  éléments. Soient, respectivement,  $a_1, a'_1, a''_1, \dots, a_1^{(\nu-2)}$  le premier élément de chacun d'eux, ces éléments se déduisant ainsi les uns des autres :

$$a'_1 = a_1 b_2 - b_1 a_2, \quad a''_1 = a'_1 b_2 - b'_1 a'_2, \dots, a_1^{(\nu-2)} = a_1^{(\nu-7)} b_2^{(\nu-1)} - b_1^{(\nu-5)} a_2^{(\nu-1)}$$

On a, entre  $\Delta_j$  et  $\Delta_{j-1}$ , la relation

$$\Delta_j = \frac{\Delta_{j-1}}{(a_1)^{\nu-2} (a'_1)^{\nu-3} \dots (a_1^{(\nu-5)})^2} \dots \dots \dots \quad (69)$$

46. COROLLAIRE. Si les quantités données sont entières,  $\Delta_{j-1}$  est divisible par  $(a_1)^{\nu-2} (a'_1)^{\nu-3} \dots (a_1^{(\nu-5)})^2$ .

47. APPLICATION ET VÉRIFICATION.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2. & 5. & 5. & 4. & 7. \\ 5. & 7. & 2. & 4. & 5. \\ 6. & 2. & 4. & 5. & 5. \\ 3. & 2. & 5. & 6. & 4. \\ 7. & 5. & 2. & 4. & 5. \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5. & -11. & -4. & -15. \\ -14. & -22. & -14. & -56. \\ -11. & -19. & -8. & -27. \\ -11. & -51. & -20. & -45. \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -264. & -126. & -590. \\ -216. & -84. & -500. \\ -276. & -144. & 580. \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 264. 84. -216. 126. & 264. 500. -216. 590. \\ 264. 144. -276. 126. & 264. 580. -276. 590. \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 22 176 - 27 216. & 79 200 - 84 240. & -5 040. & -5 040 \\ 58 010 - 54 776. & 100 520 - 107 640. & 5 240. & -7 520 \end{vmatrix}$$

$$= 5 040 (7 520 + 5 240) = 5 040 \cdot 10 560.$$

Ainsi, par la relation (60),

$$\Delta = \frac{5 040 \cdot 10 560}{2^5 \cdot 5^2 (-264)} = - \frac{252 \cdot 1 056}{264} = -1 008.$$

Mais, si l'on fait

$$\begin{aligned} A_1 = 2, 5, 5; \quad M_1 = 4, 7; \quad A_2 = 5, 7, 2; \quad M_2 = 4, 5; \quad A_3 = 6, 2, 4; \quad M_3 = 5, 5; \\ A_4 = 5, 2, 5; \quad M_4 = 6, 4; \quad A_5 = 7, 5, 2; \quad M_5 = 4, 5; \end{aligned}$$

on a, par le Théorème II (42) :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \det(A_1, A_2, A_3) \det(M_1, M_5) - \det(A_1, A_2, A_3) \det(M_5, M_3) \\ &+ \det(A_1, A_2, A_3) \det(M_7, M_1) + \det(A_1, A_3, A_4) \det(M_2, M_5) \\ &- \det(A_2, A_3, A_4) \det(M_1, M_5) + \det(A_2, A_3, A_5) \det(M_1, M_1) \\ &- \det(A_2, A_4, A_5) \det(M_1, M_5) + \det(A_5, A_4, A_5) \det(M_1, M_2) \\ &= -152.2 + 108.5 - 158.2 + 0 + 96.2 - 66.5 + 12.16 - 96.26 + 25.66 + 0 \\ &= -264 + 524 - 276 + 192 - 198 - 2496 + 1518 = -1008; \end{aligned}$$

comme ci-dessus.

## VI.

### RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS.

48. Soient des équations du premier degré, en nombre égal à celui des inconnues :

$$\left. \begin{aligned} ax + by + cz + du + ev + f &= 0, \\ a'x + b'y + c'z + d'u + e'v + f' &= 0, \\ \dots \dots \dots &\dots \dots \dots \\ a^nx + b^ny + c^nz + d^nu + e^nv + f^n &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad (61)$$

Supposons que, par des éliminations successives, on en déduise le système

$$\left. \begin{aligned} ax + by + cz + du + ev + f &= 0, \\ gy + hz + ia + jr + k &= 0, \\ lz + mu + nv + o &= 0, \\ pu + qv + z &= 0, \\ sv + t &= 0; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad (62)$$

dans lequel  $g, h, \dots, l, m, \dots, s, t$  sont des déterminants *binaires* (\*).

(\*)  $g = ab' - ba', h = bc' - cb', \dots, l = gl' - hg', \dots$ ; c'est-à-dire que les éliminations sont faites dans le même ordre que celles qui nous ont donné, ci-dessus, les équations *réduites*

D'après la dernière égalité ,

$$v = -\frac{t}{s}.$$

Il y a lieu de remarquer, touchant cette expression :

- 1° Que les deux termes sont divisibles par  $a^5g^2t$  ;  
 2° Que les valeurs des inconnues  $x, y, z, u$  sont réductibles à la forme  $\frac{X}{s}$ ,  
 $X$  étant une fonction entière des coefficients donnés.

En effet :

- 1° Si l'on suppose les équations (61) résolues par les formules de Cramer , on a  $v = -\frac{s}{\Delta}$ . Cette fraction équivaut à  $-\frac{t}{s}$ . D'ailleurs (44),  $\Delta = \frac{s}{a^5g^2t}$  ; donc

$$t = Sa^5g^2t$$

- 2° Les valeurs des inconnues :

$$\frac{t}{s}, \quad \frac{u}{ps}, \quad \frac{z}{tps}, \quad \frac{y}{gps}, \quad \frac{x}{agtps}$$

sont réductibles à

$$\frac{S}{\Delta}, \quad \frac{P}{\Delta}, \quad \frac{L}{\Delta}, \quad \frac{K}{\Delta}, \quad \frac{H}{\Delta}.$$

A cause de la relation

$$s = \Delta a^5g^2t,$$

elles sont donc, à plus forte raison, réductibles à la forme  $\frac{X}{s}$ .

49. Autre remarque.  $t$  est divisible par  $a^5g^2t$  ;  $U$  est divisible par  $pa^5g^2t$  ;  
 $Z$  est divisible par  $pl$ ,  $a^5g^2t = pa^5g^2t^2$  ;  $Y$  est divisible par  $plg$ ,  $a^5g^2t = pa^5g^5t^2$  ;  
 $X$  est divisible par  $plga$ ,  $a^5g^2t = pa^4g^5t^2$ .

50. APPLICATION. Le système donné étant

$$\begin{aligned} 2x + 5y + 5z + 4u + 7v + 5 &= 0, \\ 5x + 7y + 2z + 4u + 5v + 4 &= 0, \\ 6x + 2y + 4z + 5u + 5v + 2 &= 0, \\ 5x + 2y + 5z + 6u + 4v + 7 &= 0, \\ 7x + 5y + 2z + 4u + 5v + 6 &= 0, \end{aligned}$$

on en déduit, successivement :

$$\begin{aligned}
 5y - 11z - 4u - 15v - 7 &= 0, \\
 -14y - 22z - 14u - 56v - 14 &= 0, \\
 11y - 19z - 8u - 27v - 1 &= 0, \\
 -11y - 51z - 20u - 45v - 15 &= 0; \\
 -264z - 126u - 590v - 168 &= 0, \\
 -216z - 84u - 500v - 82 &= 0, \\
 -276z - 144u - 580v - 142 &= 0; \\
 -5\,040u - 5\,040v - 14\,640 &= 0, \\
 5\,240u - 7\,520v - 8\,880 &= 0; \\
 5\,040, 10\,560v + 92\,188\,800 &= 0;
 \end{aligned}$$

puis le système *résultant* :

$$\begin{aligned}
 2x + 5y + 5z + 4u + 7v + 5 &= 0, \\
 5y - 11z - 4u - 15v - 7 &= 0, \\
 -264z - 126u - 590v - 168 &= 0, \\
 -5\,040u - 5\,040v - 14\,640 &= 0, \\
 5\,040, 10\,560v + 92\,188\,800 &= 0,
 \end{aligned}$$

On tire, de celui-ci :

$$\begin{aligned}
 v &= -\frac{92\,188\,800}{5\,040, 10\,560} = -\frac{291}{168} = -\frac{1\,746}{1\,008}, & u &= -\frac{197}{168} = -\frac{1\,182}{1\,008}, \\
 z &= \frac{417}{168} = \frac{2\,502}{1\,008}, & y &= \frac{122}{168} = \frac{752}{1\,008}, & x &= -\frac{65}{168} = -\frac{590}{1\,008}.
 \end{aligned}$$

A cause de  $\Delta = \Delta_1 = -1008$  (47), on a donc, dans cet exemple :

$$\begin{aligned}
 S &= 1\,746, & P &= 1\,182, & L &= 2\,502, & K &= -752, & H &= 590; \\
 s &= 5\,040, 10\,560, & p &= -5\,040, & l &= -264, & g &= 5, & a &= 2; \\
 t &= 92\,188\,800, & U &= \frac{291}{168}, 5\,040^2, 10\,560 = 197, 5\,040, 50, 10\,560, \\
 Z &= \frac{417}{168}, 5\,040^2, 10\,560, 264 = 417, 5\,040, 50, 10\,560, 264, \text{ etc.}
 \end{aligned}$$

## VII.

## MOINDRES CARRES

54. Soient, comme dans le paragraphe 4 :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (aa), & (ab), & (ac), & \dots & (af), \\ (ba), & (bb), & (bc), & \dots & (bf), \\ (ca), & (cb), & (cc), & \dots & (cf), \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (fa), & (fb), & (fc), & \dots & (ff); \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (gg), & (gh), & \dots & \dots & (gk), \\ (hg), & (hh), & \dots & \dots & (hk), \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (kg), & (kh), & \dots & \dots & (kk); \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (ll), & (lm), & (ln), & (lo), \\ (ml), & (mm), & (mn), & (mo), \\ (nl), & (nm), & (nn), & (no), \\ (ol), & (om), & (on), & (oo); \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} (pp), & (pq), & (pr), \\ (qp), & (qq), & (qr), \\ (rp), & (rq), & (rr); \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} (ss), & (st), \\ (ts), & (tt). \end{vmatrix}$$

D'après l'équation (ε) :

$$(\omega\omega) = (aa)^4 (gg)^5 (ll)^2 (pp) \Delta_1$$

Mais, d'un autre côté (5s) :

$$\Omega = \frac{(\omega\omega)}{(aa)(gg)(ll)(pp)(ss)}$$

donc

$$\Omega = \frac{(aa)^5 (gg)^2 (ll)}{(ss)} \Delta_1 \dots \dots \dots (65)$$

Ainsi, la dernière des équations réduites étant, par hypothèse,  $(ss)v + (st) = 0$ ,



la fonction  $\Omega$ , qui représente le minimum de la somme des carrés des erreurs, est réductible à la forme  $\frac{N}{(ss)}$ ,  $N$  étant une quantité entière (\*).

52. Par analogie avec les valeurs (58), soient

$$w = \frac{W}{(ss)}, \quad w' = \frac{W'}{(ss)}, \quad w'' = \frac{W''}{(ss)}, \dots \quad (64)$$

$W, W', W'', \dots$  étant des quantités entières (\*\*). On aura

$$\Omega = \frac{\sum W^2}{(ss)^2};$$

puis, à cause de la formule (62) :

$$\Delta_2 = \frac{\sum W^2}{(aa)^5 (gg)^2 (ll) (ss)} \quad (65)$$

Ainsi (les coefficients étant toujours supposés entiers), la somme des carrés des numérateurs  $W, W', \dots$  est divisible par  $(aa)^5 (gg)^2 (ll) (ss)$  (\*\*\*) .

53. APPLICATION. Reprenons l'exemple déjà considéré (20) :

$$\begin{aligned} 2x + 5y + 4 &= w, \\ 5x + y + 1 &= w', \\ 5x + 2y + 5 &= w'', \\ 5x + 7y + 4 &= w''', \\ 4x + 5y + 2 &= w^{iv}. \end{aligned}$$

1° Nous en avons déduit les équations normales :

$$\begin{aligned} 65x + 62y + 48 &= 0, \\ 65x + 72y + 55 &= 0; \end{aligned}$$

(\*) Cette proposition, que nous croyons nouvelle, résulte aussi de la formule (57), combinée avec la seconde remarque ci-dessus (48). Observons que, dans le cas actuel, le diviseur  $s$  est remplacé par  $(ss)$ .

(\*\*) Les nouvelles fractions sont, on le voit, beaucoup plus simples que les premières.

(\*\*\*) En général, le diviseur serait  $(a_1 a_1)^5 \cdot (a_1' a_1')^2 \dots$

puis les équations réduites :

$$\begin{aligned} 65x + 62y + 48 &= 0, \\ 692y + 565 &= 0; \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} y &= -\frac{565}{692}, & x &= -\frac{170}{692}, & w &= \frac{1\ 559}{692}, & w' &= -\frac{181}{692}, & w'' &= \frac{840}{692}, \\ w''' &= -\frac{625}{692}, & w^{iv} &= -\frac{585}{692}. \end{aligned}$$

2° La valeur de  $\Omega$ , réduite, est donnée par la formule

$$\Omega = \sum fw. \quad (56)$$

Il en résulte

$$\Omega = \frac{1}{692} [4 \cdot 1\ 559 - 181 + 5 \cdot 840 - 4 \cdot 625 - 2 \cdot 585] = \frac{4\ 455}{692}.$$

fraction équivalente à

$$\sum w^2 = \frac{1}{692^2} [1\ 559^2 + 181^2 + 840^2 + 625^2 + 585^2] = \frac{5\ 067\ 656}{692} \quad (*)$$

3° Si l'on suppose

$$\Delta = \begin{vmatrix} 65 & 62 \\ 62 & 72 \end{vmatrix}, \quad N = \begin{vmatrix} 65 & 62 & 48 \\ 62 & 72 & 55 \\ 48 & 55 & 46 \end{vmatrix};$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \Delta &= 692, \\ N &= 65(72 \cdot 46 - 55^2) + 62(55 \cdot 48 - 62 \cdot 46) + 48(62 \cdot 55 - 72 \cdot 48) \\ &= 65(5\ 512 - 2\ 809) + 62(2\ 544 - 2\ 852) + 48(5\ 286 - 5\ 456) \\ &= 65 \cdot 505 - 62 \cdot 508 - 48 \cdot 170 = 51\ 689 - 19\ 096 - 8\ 160 = 4\ 455, \end{aligned}$$

ou doit avoir aussi (25)

$$\Omega = \frac{N}{\Delta};$$

ce qui a lieu.

(\*) 20 (5°).

(\*\*) 46 = (cc) = 4<sup>2</sup> + 1<sup>2</sup> + 5<sup>2</sup> + 4<sup>2</sup> + 2<sup>2</sup>.

4<sup>e</sup> La formule

$$(\omega) = \Omega(aa)(yy)(ll)(pp)(ss) \dots \dots \dots \quad (58)$$

se réduit, dans le cas actuel, à

$$(\omega) = \Omega(aa)(yy).$$

Donc

$$(\omega) = \frac{4455}{692} \cdot 65 \cdot 692 = 279 \cdot 279;$$

résultat trouvé précédemment.

5<sup>e</sup> Enfin, comme on l'a déjà vu (20, 6<sup>e</sup>) :

$$\begin{aligned} & (4 \cdot 559^2 + 181^2 + 840^2 + 625^2 + 585^2)(2^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 4^2) = \\ & (\omega)(7^2 + 5^2 + 1^2 + 6^2 + 5^2 + 16^2 + 5^2 + 11^2 + 1^2 + 15^2) \\ & = (8^2 + 74^2 + 24^2 + 12^2 + 111^2 + 56^2 + 151^2 + 52^2 + 88^2 + 54^2 + 24^2 + 12^2 + 61^2 \\ & \quad + 20^2 + 81^2 + 56^2 + 48^2 + 60^2 + 50^2 + 185^2 + 58^2 + 155^2 + 18^2 + 150^2 + 48^2 \\ & \quad + 150^2 + 48^2 + 120^2 + 75^2 + 24^2 + 75^2 + 24^2 + 60^2 + 5^2 + 125^2 + 105^2 + 5^2 \\ & \quad + 57^2 + 52^2 + 42^2 + 65^2 + 105^2 + 84^2) \\ & \quad \times (7^2 + 5^2 + 1^2 + 6^2 + 5^2 + 16^2 + 5^2 + 11^2 + 1^2 + 15^2), \end{aligned}$$

ou

$$5 \cdot 067 \cdot 656 \cdot 65 = 279 \cdot 279 \cdot 69^2.$$

54. Autre application. 4<sup>e</sup> Système donné :

$$2x + 5y + 5z + 4u + 7 = w,$$

$$5x + 7y + 2z + 4u + 5 = w',$$

$$6x + 2y + 4z + 5u + 5 = w'',$$

$$5x + 2y + 5z + 6u + 4 = w''',$$

$$7x + 5y + 2z + 4u + 5 = w''''.$$

2<sup>e</sup> Equations normales :

$$125x + 84y + 69z + 108u + 82 = 0,$$

$$84x + 91y + 55z + 82u + 71 = 0,$$

$$69x + 55y + 58z + 74u + 71 = 0,$$

$$108x + 82y + 74z + 109u + 91 = 0.$$

3<sup>e</sup> Élimination de  $x$  :

$$\begin{aligned} (125.91 - 84^2)y + (125.55 - 84.69)z + (125.82 - 84.108)u + (125.71 - 84.82) &= 0, \\ (125.55 - 84.69)y + (125.38 - 69^2)z + (125.74 - 69.108)u + (125.71 - 69.82) &= 0, \\ (125.82 - 108.84)y + (125.74 - 108.69)z + (125.109 - 108^2)u + (125.91 - 108.82) &= 0; \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} (11.195 - 7.056)y + (6.519 - 5.796)z + (10.086 - 9.072)u + (8.755 - 6.888) &= 0, \\ (6.519 - 5.796)y + (7.154 - 4.761)z + (9.102 - 7.452)u + (8.755 - 5.658) &= 0, \\ (10.086 - 9.072)y + (9.102 - 7.452)z + (15.407 - 11.664)u + (11.195 - 8.856) &= 0; \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 4.157y + 725z + 1.014u + 1.845 &= 0, \\ 725y + 2.575z + 1.650u + 5.075 &= 0, \\ 1.014y + 1.650z + 1.745u + 2.557 &= 0. \end{aligned}$$

4<sup>e</sup> Élimination de  $y$  :

$$\begin{aligned} (4.157.2.575 - 725^2)z + (4.157.1.650 - 725.1.014)u + (4.157.5.075 - 725.1.845) &= 0, \\ (4.157.1.650 - 1.014.725)z + (4.157.1.745 - 1.014^2)u + (4.157.2.557 - 1.014.1.845) &= 0; \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} (9.817.101 - 522.729)z + (6.826.050 - 755.122)u + (12.721.275 - 1.555.955) &= 0, \\ (6.826.050 - 755.122)z + (7.210.791 - 1.028.196)u + (9.668.169 - 1.870.850) &= 0; \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 9.294.572z + 6.092.928u + 11.587.540 &= 0, \\ 6.092.928z + 6.182.595u + 7.797.559 &= 0; \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 569.25.188z + 569.16.512u + 569.50.860 &= 0, \\ 569.16.512z + 569.16.755u + 569.21.151 &= 0. \end{aligned}$$

5<sup>e</sup> Élimination de  $z$  :

$$569^2(25.188.16.755 - 16.512^2)u + 569^2(25.188.21.151 - 16.512.50.860) = 0,$$

ou

$$569^2.6^2(2.099.5.585 - 2.752^2)u + 569^2.12(2.099.21.151 - 5.504.7.715) = 0,$$

ou

$$569^2.6^2(11.722.915 - 7.575.504)u + 569^2.12(44.555.969 - 42.465.560) = 0,$$

ou

$$569^2.6^2.4.449.411u + 569^2.6^2.650.205 = 0,$$

ou enfin

$$569^2 \cdot 6^2 \cdot 1\,579 \cdot 5\,009u + 569^2 \cdot 6^2 \cdot 1\,579 \cdot 457 = 0.$$

6° *Valeurs des inconnues x, y, z, u :*

$$\begin{aligned} u &= -\frac{457}{5\,009}; \\ z &= -\frac{7\,715 \cdot 5\,009 - 4\,128 \cdot 457}{6\,297 \cdot 5\,009} = -\frac{25\,214\,455 - 1\,886\,496}{6\,297 \cdot 5\,009} \\ &= -\frac{21\,527\,959}{6\,297 \cdot 5\,009} = -\frac{5\,587}{5\,009}; \\ y &= -\frac{5\,073 \cdot 5\,009 - 2\,575 \cdot 5\,587 - 1\,650 \cdot 457}{725 \cdot 5\,009} \\ &= -\frac{9\,252\,675 - 8\,057\,551 - 754\,050}{725 \cdot 5\,009} = -\frac{441\,074}{725 \cdot 5\,009} = -\frac{658}{5\,009}; \\ x &= -\frac{71 \cdot 5\,009 - 55 \cdot 658 - 58 \cdot 5\,587 - 74 \cdot 457}{69 \cdot 5\,009} \\ &= -\frac{215\,659 - 55\,814 - 196\,446 - 55\,818}{69 \cdot 5\,009} = -\frac{50\,459}{69 \cdot 5\,009} = -\frac{751}{5\,009}. \end{aligned}$$

7° *Valeurs des erreurs :*

$$\begin{aligned} w &= \frac{2 \cdot 751 - 5 \cdot 658 - 5 \cdot 5\,587 - 4 \cdot 457 + 7 \cdot 5\,009}{5\,009} \\ &= \frac{1\,462 - 1\,914 - 16\,955 - 1\,828 + 21\,065}{5\,009} = \frac{1\,848}{5\,009} = \frac{616}{1\,005}; \\ w' &= \frac{5 \cdot 751 - 7 \cdot 658 - 2 \cdot 5\,587 - 4 \cdot 457 + 5 \cdot 5\,009}{5\,009} \\ &= \frac{2\,195 - 4\,606 - 6\,774 - 1\,828 + 9\,027}{5\,009} = -\frac{1\,848}{5\,009} = -\frac{616}{1\,005}; \\ w'' &= \frac{6 \cdot 751 - 2 \cdot 658 - 4 \cdot 5\,587 - 5 \cdot 457 + 5 \cdot 5\,009}{5\,009} \\ &= \frac{4\,586 - 1\,276 - 15\,548 - 2\,285 + 9\,027}{5\,009} = -\frac{5\,696}{5\,009} = -\frac{1\,252}{1\,005}; \\ w''' &= \frac{5 \cdot 751 - 2 \cdot 658 - 5 \cdot 5\,587 - 6 \cdot 457 + 4 \cdot 5\,009}{5\,009} \\ &= \frac{5\,655 - 1\,276 - 10\,161 - 2\,742 + 12\,056}{5\,009} = \frac{1\,512}{5\,009} = \frac{504}{1\,005}; \end{aligned}$$

$$w^a = \frac{7.751 - 5.658 - 2.5587 - 4.457 + 5.5009}{5.009}$$

$$= \frac{5.117 - 5.190 - 6.774 - 1.828 + 9.027}{5.009} = \frac{2.552}{5.009} = \frac{784}{1.005}$$

8° *Moindre somme des carrés des erreurs :*

$$\Omega = \frac{1}{1.005} (7.616 - 5.616 - 5.1252 + 4.504 + 5.784)$$

$$= \frac{1}{1.005} (4.512 - 1.848 - 5.696 + 2.016 + 2.552) = \frac{5.156}{1.005}$$

On a aussi, par définition,

$$\Omega = \sum w^2 = \frac{616^2 + 616^2 + 1.252^2 + 504^2 + 784^2}{1.005^2}$$

$$= \frac{1}{1.005^2} (579.456 + 579.456 + 1.517.824 + 254.016 + 614.656) = \frac{5.145.408}{1.005^2} = \frac{5.156}{1.005}$$

9° D'après le système résultant :

$$125x + 84y + 69z + 108u + 82 = 0,$$

$$4.157y + 725z + 1.014u + 1.845 = 0,$$

$$569.25.188z + 569.16.512u + 569.50.860 = 0,$$

$$569^2.6^2.1.579.5.009u + 569^2.6^2.1.579.457 = 0;$$

$$(aa) = 125, \quad (yy) = 4.157, \quad (ll) = 569.25.188, \quad (pp) = 569^2.6^2.1.579.5.009;$$

et, par conséquent,

$$(\infty\infty) = \frac{5.156}{1.005} \cdot 125 \cdot 4.157 \cdot 569 \cdot 25.188 \cdot 569^2 \cdot 6^2 \cdot 1.579 \cdot 5.009 = 2^{10} \cdot 5^{12} \cdot 7^3 \cdot 41^3 \cdot 197^2 \cdot 2.099, \quad (*)$$

(\*)

$$(aa) = 2^2 + 5^2 + 6^2 + 5^2 + 7^2;$$

$$(yy) = 3^2 + 14^2 + 11^2 + 56^2 + 29^2 + 54^2 + 2^2 + 16^2 + 11^2$$

est une somme de dix carrés; (ll) est une somme de quarante-cinq carrés; (pp), une somme de neuf cent nonante carrés. Enfin ( $\infty\infty$ ) est une somme de quatre cent quatre-vingt-neuf mille, cinq cent cinquante-cinq carrés.



ÉTUDES  
SUR  
**LES VARIATIONS D'ÉNERGIE POTENTIELLE**  
DES  
**SURFACES LIQUIDES;**

PAR

**G. VAN DER MENSBRUGGHE,**

CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GAND.

---

**PREMIER MÉMOIRE.**

ÉNERGIE POTENTIELLE D'UNE SURFACE LIQUIDE SOIT LIBRE, SOIT EN CONTACT AVEC UN SOLIDE OU AVEC UN AUTRE LIQUIDE. —  
PRINCIPE GÉNÉRAL CONCERNANT L'ACCROISSEMENT D'UNE SURFACE LIQUIDE. —  
VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES.

**PREMIÈRE PARTIE.** — I. CAS DES LAMES LIQUIDES LIBRES, PLANES OU COURBES. —  
II. CAS DES LAMES LIQUIDES A UNE SEULE FACE LIBRE.

---

Présenté à la classe des sciences de l'Académie le 7 mai 1878.





# ÉTUDES

SUR

## LES VARIATIONS D'ÉNERGIE POTENTIELLE DES SURFACES LIQUIDES.

### PREMIER MÉMOIRE.

ÉNERGIE POTENTIELLE D'UNE SURFACE LIQUIDE SOIT LIBRE, SOIT EN CONTACT  
AVEC UN SOLIDE OU AVEC UN AUTRE LIQUIDE.

§ 1. Dans mes recherches précédentes, j'ai étudié la tension superficielle des liquides au point de vue des effets qu'elle produit lorsque, pour chaque liquide, on suppose à la tension de sa surface une valeur déterminée par unité de longueur, et invariable pendant la durée des expériences, sauf dans le cas de l'eau distillée et du mercure<sup>1</sup>. Après avoir constaté, par différents moyens, l'existence de cette force dans les lames liquides<sup>2</sup>, je me suis occupé longuement de certains phénomènes qu'on observe au contact de deux liquides à tensions inégales, ou d'une parcelle solide d'un liquide

<sup>1</sup> Depuis les travaux de MM. Hagen et Quincke, il est démontré, en effet, que la tension de l'eau distillée et celle du mercure pur subissent, au bout de quelque temps, une diminution très-notable: je reviendrai sur ce point délicat dans la deuxième partie du Mémoire actuel, et je m'efforcerai alors de prouver que le fait en question est une conséquence naturelle de ma théorie.

<sup>2</sup> *Sur la tension des lames liquides* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE. 1866, t. XXII, p. 528, et 1867, t. XXIII, p. 448).

qui la dissout plus ou moins <sup>1</sup>; enfin j'ai cherché la nature de la force qui se développe à la surface commune à un solide et à un liquide, suivant que le solide est mouillé ou non par ce dernier <sup>2</sup>. Dès lors il m'a semblé très-utile d'embrasser sous un même nom les forces d'où dépendent tous les phénomènes que présente soit la surface libre d'un liquide, soit la surface de séparation de deux liquides qui ne se mêlent pas, soit enfin la surface de contact d'un solide et d'un liquide; or, pour atteindre ce but, je suis parti de la théorie de Gauss <sup>3</sup>, et j'ai été conduit naturellement à rapporter les forces moléculaires non plus à l'unité de longueur, mais bien à l'unité de surface. En généralisant une expression introduite par MM. Clerk-Maxwell et Bosscha, j'ai nommé *énergie potentielle* d'une surface liquide libre ou bien d'une surface de contact de deux liquides, ou encore d'un solide et d'un liquide, le travail que peut produire l'unité de la surface considérée. Par exemple, si la surface libre d'un liquide exige un travail de 7,5 milligrammes-millimètres pour un accroissement d'un millimètre carré, l'énergie potentielle de la surface en question sera 7,5. Comme je l'ai déjà dit ailleurs <sup>4</sup>, il est à remarquer que la valeur numérique de l'énergie potentielle est absolument égale à celle de la tension superficielle. De même, si pour produire une diminution d'un millimètre carré dans la surface de contact d'un solide et d'un liquide, il faut dépenser un travail de 3 milligrammes-millimètres, cette surface de contact ou plutôt la couche liquide soumise à l'action du solide aura pour énergie potentielle 3; seulement comme, dans le premier cas, le travail est employé à effectuer un accroissement dans la surface, tandis que, dans le second, il sert à y opérer une diminution, je regarderai les deux énergies potentielles 7,5 et 3 comme étant de signes contraires.

<sup>1</sup> *Sur la tension superficielle des liquides considérée au point de vue de certains mouvements observés à leur surface* (MÉM. COUR. ET MÉM. DES SAV. ÉTRANGERS, collect. in-4°, 1869, t. XXXIV, et 1875, t. XXXVII).

<sup>2</sup> *Sur les propriétés de la surface de contact d'un solide et d'un liquide* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1875, t. XL, p. 541).

<sup>3</sup> *La théorie capillaire de Gauss et l'extension d'un liquide sur un autre* (IBID., 1875, 2<sup>me</sup> série, t. XXXIX, p. 575).

<sup>4</sup> *Sur les propriétés de la surface de contact d'un solide et d'un liquide* (IBID., t. XL, pp. 541-545).

## PRINCIPE GÉNÉRAL CONCERNANT L'ACCROISSEMENT D'UNE SURFACE LIQUIDE.

§ 2. La notion de l'énergie potentielle étant bien comprise, on peut se demander si une variation dans l'étendue de la surface d'un liquide n'entraîne pas un changement dans l'énergie potentielle qui caractérise la surface considérée. Or j'ai appliqué récemment à cette question les principes de la thermodynamique <sup>1</sup>, et, complétant une solution déjà proposée par Sir W. Thomson <sup>2</sup>, je suis arrivé à une formule d'où j'ai déduit de nombreuses conséquences sur lesquelles j'ai l'intention de revenir successivement pour les soumettre à l'épreuve décisive de l'expérience.

Je vais rappeler ici cette formule; si  $S$  représente la surface libre d'une masse liquide, ou la surface commune à deux liquides qui ne se mêlent pas, ou encore la surface de contact d'un solide et d'un liquide,  $T$  l'énergie potentielle correspondante,  $t$  la température absolue,  $A$  l'équivalent calorifique de l'unité de travail, et  $dQ$  la quantité de chaleur gagnée ou perdue par la masse lorsque la surface  $S$  prend un accroissement  $dS$ , j'ai trouvé qu'on a l'équation différentielle :

$$dQ = At d \left( S \frac{dT}{dt} \right).$$

§ 3. Cette équation montre immédiatement que toute variation  $dS$  donnée à la surface, détermine dans la masse une variation de chaleur  $dQ$ ; mais reste à connaître le signe de cette dernière, pour savoir si la masse s'échauffe ou se refroidit. A cet effet, il faut recourir aux résultats de l'expérience; or il suit des recherches de plusieurs observateurs que la tension superficielle ou ce qui est numériquement la même chose, l'énergie potentielle des liquides est une fonction de  $t$  telle que les valeurs de  $T$  correspondantes à des températures peu différentes ne s'écartent pas beaucoup les unes des

<sup>1</sup> *Application de la thermodynamique à l'étude des variations d'énergie potentielle des surfaces liquides* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1876, t. XL1, p. 769, et t. XLII, p. 21).

<sup>2</sup> *On the thermal effect of drawing out a film of liquid* (PHILOS. MAGAZ., 1859, t. XVII, 4<sup>me</sup> série, p. 61).

autres ; on peut donc écrire, en désignant par  $t_0$  la température comptée à partir du zéro de la glace fondante :

$$T = a + bt_0 + ct_0^2 + dt_0^3 \dots,$$

$a$  étant la valeur de  $T$  à  $0^\circ\text{C}$ ., et  $b, c, \dots$  représentant des quantités très-petites. Or M. Wolf <sup>1</sup> a constaté par de nombreuses mesures, que, pour l'eau, les coefficients des puissances de  $t_0$  vont en diminuant très-rapidement quand ces puissances augmentent, de sorte que l'on peut se borner aux trois ou quatre premiers termes du développement. En outre, il résulte de ces mêmes mesures que le coefficient différentiel  $\frac{dT}{dt_0}$  est négatif ; par conséquent, il en est de même de  $\frac{dT}{dt}$ , puisque  $t_0 = t - 274$ . On peut donc dire que l'énergie potentielle de l'eau diminue, lorsque la température va en croissant. D'un autre côté, tous les physiciens qui se sont occupés de la tension superficielle ont observé que, pour tous les liquides, cette force croît quand la température diminue. Il suit de là qu'en général le coefficient différentiel  $\frac{dT}{dt}$  est négatif, en ce qui concerne la surface libre d'un liquide quelconque. Il en serait encore de même pour la surface commune à deux liquides ou pour la surface de contact d'un liquide et d'un solide, attendu que les forces moléculaires vont en diminuant à mesure que la température s'élève. J'ajoute que la différentielle  $d\left(S \frac{dT}{dt}\right)$ , et conséquemment  $dQ$ , doit également être regardée comme négative, car le terme  $S \frac{d^2T}{dt^2} dt$  est négligeable à côté du terme  $dS \frac{dT}{dt}$ , du moins dans tous les cas où la valeur de  $S$  n'est pas très-considérable. Dans le Mémoire actuel, je ne traiterai spécialement que de la surface libre des liquides ; je suis ainsi amené, d'après ce qui précède, à énoncer la proposition suivante :

*Tout accroissement de surface libre d'une masse liquide déterminée dans celle-ci un abaissement de température, et, réciproquement, toute diminution de la surface libre y produit un échauffement.*

§ 3<sup>bis</sup>. A cette proposition se rattache immédiatement le cas d'une masse liquide dont la surface, au lieu de s'accroître à proprement parler, se renou-

<sup>1</sup> Sur l'influence de la température sur les phénomènes qui se passent dans les tubes capillaires (ANN. DE CHIM. ET DE PHYS. DE PARIS, 5<sup>me</sup> série, 1857, t. XLIX, p. 250).

velle par la disparition de la couche superficielle primitive; en effet, la portion du liquide qui, grâce à cette disparition, devient le nouveau siège de l'énergie potentielle, sans qu'on ait modifié directement son état calorifique, ne peut acquérir cette énergie qu'aux dépens de la chaleur qu'elle contient; de là une diminution de la température dans la portion considérée et une tension supérieure à celle qui correspond à sa température initiale. Ce cas se présente, par exemple, lorsqu'un liquide s'évapore et que chaque couche réduite en vapeur met à nu une surface fraîche qui se renouvelle à son tour; ma théorie rend ainsi bien simplement compte du froid produit par l'évaporation.

Réciproquement, si une mince couche d'un liquide est superposée à la surface du même liquide, il y a de l'énergie potentielle perdue, par conséquent un accroissement de température et une diminution de tension. C'est ce qui a lieu quand de la vapeur se condense et que le liquide ainsi formé se dépose à la surface du même liquide.

Les deux cas se présentent à la fois lorsqu'une surface liquide est sillonnée par des courants; nous en verrons des exemples plus loin.

Je puis donc remplacer le principe déjà énoncé par cet autre plus général :

*Si la couche superficielle d'un liquide augmente ou qu'elle devienne le siège d'une énergie potentielle qu'elle ne possédait pas d'abord, il y a refroidissement, et la tension est plus grande que primitivement; au contraire, si la couche superficielle diminue ou bien que son énergie potentielle disparaisse par la superposition d'une couche nouvelle, il y a échauffement, et la tension est moindre que d'abord.*

#### VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES.

§ 4. Il me paraît très-important de faire voir que des effets de ce genre qu'on serait tenté, au premier abord, de regarder comme insensibles, se manifestent, au contraire, d'une façon parfois étonnante; dans ce but, je vais décrire une série de faits qui mettront, je pense, hors de doute la pro-

position énoncée plus haut. J'examinerai d'abord les lames liquides minces, soit libres, soit en contact par l'une de leurs faces avec un autre liquide. Tel sera l'objet de la première partie de ce Mémoire ; dans la deuxième partie, que j'espère pouvoir présenter prochainement à l'Académie, j'étudierai les variations d'énergie potentielle de la surface libre d'une masse liquide pleine.

## PREMIÈRE PARTIE.

---

### I

#### *Cas des lames liquides libres, planes ou courbes.*

§ 5. Les lames liquides à faces libres conviennent particulièrement à l'étude que nous avons en vue; en effet, la masse dont elles sont formées est très-minime, et, par conséquent, à une très-petite quantité de chaleur gagnée ou perdue peut correspondre une variation sensible de la température; d'un autre côté, les changements de température même très-faibles s'y accusent aisément, sans l'emploi d'appareils thermométriques, ainsi que je l'ai déjà rappelé et confirmé dans mes recherches précédentes<sup>1</sup>. Aussi les résultats que m'ont fournis les lames en question, me semblent mettre parfaitement en lumière la conséquence théorique qu'il s'agit de vérifier par l'expérience.

§ 6. 1° Au moyen d'un fil de fer très-fin, façonnons un triangle isocèle ayant environ 15 millimètres de base et 30 millimètres de hauteur; attachons au sommet et au milieu de la base une fourche en fil de fer plus gros, qui permet de manier aisément le petit appareil; plongeons le triangle dans un liquide volatil, de l'essence de térébenthine, par exemple; si nous retirons le triangle dans une position horizontale, il sera occupé par une lame où se montreront aussitôt les plus vives couleurs et qui crèvera au

<sup>1</sup> Voir mon Mémoire intitulé: *L'électricité statique exerce-t-elle une influence sur la tension superficielle d'un liquide?* § 25 (MÉM. COUR. ET MÉM. DES SAV. ÉTRANGERS, 1875, t. XL).

bout de quelques instants; l'évaporation rapide est ici, on le comprend, la principale cause de la prompte rupture de la lame. Mais on peut faire l'expérience de telle manière que l'évaporation soit, au contraire, la cause déterminante du maintien de la lame pendant un temps relativement considérable; à cet effet, on supprime la fourche, et l'on fixe une tige en fil de fer au sommet du triangle et dans le prolongement de la hauteur de celui-ci; dès lors si on soulève la tige, le triangle se trouvera toujours dans un plan vertical, et émergera d'abord par le sommet; seulement, au lieu de retirer complètement l'appareil, on attache la tige à un support quand le triangle n'a émergé du liquide qu'aux deux tiers, par exemple, de sa hauteur; on réalise encore ainsi une lame triangulaire, mais dont la base, au lieu d'être constituée par le fil solide, est la crête rectiligne du relèvement capillaire formé à la surface du niveau. En employant comme vase renfermant le liquide, un simple tube ayant 25 millimètres environ de diamètre intérieur et rempli jusqu'au bord, afin de rendre l'évaporation aussi libre que possible, j'ai obtenu des lames d'essence de térébenthine qui ont duré plus de 17 minutes, et où s'étalaient les plus riches couleurs; outre une persistance si longue, ces mêmes lames offraient encore d'autres particularités bien curieuses; elles étaient plus minces en bas qu'en haut, présentaient une extrême ténuité, qui était accusée, dans la partie inférieure, par des teintes du premier ordre, et avaient en certains points une épaisseur qui variait à peine pendant toute leur durée, ce dont on s'assurait par le simple aspect des couleurs.

§ 7. Je regarde cette expérience non-seulement comme étant intéressante en elle-même, mais encore comme constituant une vérification très-importante de ma théorie. En effet, examinons ce qui doit se passer pendant qu'on retire partiellement le triangle du liquide; chaque tranche horizontale de la lame mince déjà formée se refroidit évidemment d'autant plus, en vertu de l'évaporation, c'est-à-dire du renouvellement des portions superficielles sur les deux faces, que cette tranche a émergé depuis un intervalle de temps plus long, ou, ce qui revient au même, qu'elle est plus rapprochée du sommet; le principe énoncé plus haut exige donc que la tension soit la plus



forte au sommet et aille en décroissant jusqu'à la base même du triangle. Si ce raisonnement est exact, il faut qu'aussitôt après la formation de la lame, il y ait un appel du liquide de bas en haut sur les deux faces, et que cet appel persiste grâce à l'évaporation continue de la petite masse constituant la figure laminaire; or c'est ce que l'observation confirme pleinement; j'ai pu voir distinctement une série de filets liquides se détacher du relèvement capillaire et s'élever rapidement sur la lame mince, pour dessiner à la partie supérieure de celle-ci, des portions irrégulières variant sans cesse de forme et de position.

Ce qui précède fait aussi comprendre aisément pourquoi l'épaisseur de la lame est plus grande dans le voisinage du sommet qu'en bas; en effet, le liquide qui afflue sans cesse vers le haut, passe successivement par des tranches horizontales plus courtes, et doit par conséquent en augmenter l'épaisseur. Il est vrai qu'en même temps, grâce à la forme et à la disposition de la figure, certaines portions du liquide doivent repasser de la surface à l'intérieur de la petite masse constituant cette lame, d'où résulte nécessairement, d'après mon principe, un léger échauffement, ainsi qu'une diminution de tension; mais si l'évaporation du liquide est assez rapide, l'effet du renouvellement des surfaces l'emporte de beaucoup sur celui de leur disparition partielle par le passage de leurs molécules à l'intérieur de la masse, ce qui assure le mouvement ascensionnel permanent.

§ 8. Il m'a paru curieux de faire aussi l'expérience en disposant le sommet du triangle en bas et retirant conséquemment la figure de manière que la base émergeât la première; j'ai obtenu ainsi, toujours en ne retirant le triangle que partiellement, une lame trapézoïdale où les mouvements m'ont semblé plus rapides que dans le cas précédent; abstraction faite de l'effet prédominant de l'évaporation, les tranches horizontales devenaient de plus en plus longues à mesure qu'elles s'élevaient, ce qui devait contribuer à augmenter la tension vers le haut de la lame; ici encore, cette dernière était plus mince en bas qu'en haut, mais les teintes des premiers ordres étaient distribuées dans toute son étendue, et variaient sans cesse à cause du liquide qui redescendait en plusieurs filets se transformant en lentilles pendant leur descente

même; ces lentilles étaient animées d'une vitesse de plus en plus faible, et n'atteignaient pas le plus souvent la crête du relèvement capillaire; dans le voisinage de celui-ci, elles paraissaient vivement rejetées soit à droite, soit à gauche, pour rejoindre le liquide baignant les deux côtés latéraux du trapèze; la raison de l'arrêt momentané de ces lentilles est, je crois, l'impulsion assez vive du liquide qui monte incessamment, jointe à l'excès de tension qui règne vers le haut. La persistance des lames trapézoïdales (10' à 12' au plus) était moindre que celle des lames triangulaires, sans doute à cause de la complication des mouvements qu'on y observe.

J'ai répété les mêmes expériences avec le naphte, l'essence de citron et l'alcool; les résultats étaient entièrement analogues aux précédents, sauf que les durées étaient moindres.

§ 9. Je viens de montrer les effets remarquables du renouvellement de la surface en vertu des propriétés mêmes des liquides soumis à l'essai; je vais décrire maintenant quelques expériences où j'ai recours à des moyens mécaniques pour produire des surfaces fraîches dans une lame liquide plane; après les phénomènes si frappants signalés plus haut, nous pouvons examiner avec confiance le résultat de l'augmentation ou de la diminution de surface qu'éprouve la petite masse dont est formée la lame, quel que soit, du reste, le mode dont cette augmentation ou cette diminution s'est opérée.

§ 10. 2° Procurons-nous un anneau en fil de fer de 7 à 8 centimètres de diamètre et muni de trois pieds, plongeons-le dans du liquide glycérique, et quand, après l'avoir retiré, nous aurons réalisé une lame plane, posons-le sur ses pieds de manière à rendre la lame parfaitement horizontale; nouons alors les deux bouts d'un fil de cocon de 10 à 12 centimètres de longueur, et, après l'avoir mouillé du même liquide, engageons-le avec précaution dans la lame; crevons ensuite la partie laminaire intérieure au fil qui deviendra aussitôt circulaire, et attendons quelques minutes pour que la lame restante devienne colorée. Cela fait, écartons vivement de sa position le contour mobile à l'aide de la pointe d'une aiguille tenue verticalement, pointe qu'on appuie contre le fil à l'intérieur de l'ouverture circulaire; aus-

sitôt que nous relèverons l'aiguille, nous verrons le contour mobile retourner plus ou moins vite vers sa position primitive. Voici, selon moi, la théorie de ce singulier phénomène; dans les portions que quitte le fil, il se développe des surfaces fraîches, tandis que, dans les parties vers lesquelles marche le contour mobile, il disparaît nécessairement, sur chaque face de la lame, une certaine portion superficielle que le fil de cocon ramasse sur elle-même; de là une augmentation de tension dans les parties d'où s'éloigne le fil, et une diminution de tension dans celles vers lesquelles il marche.

§ 11. On pourrait, à la vérité, objecter à cette explication la tendance que possède la lame horizontale à affecter partout la même épaisseur, de sorte que, si l'on vient à l'amincir sur une certaine étendue pour la rendre plus épaisse dans une autre, il doit naître dans la lame un mouvement qui rétablisse la même épaisseur dans les diverses parties. Pour réfuter complètement cette objection, je dirai d'abord que la tendance dont il s'agit est loin d'être absolue, puisque l'on peut déposer sur une lame horizontale formée depuis quelque temps une goutte de liquide glycérique sans voir celle-ci s'étaler immédiatement et disparaître dans le liquide constituant la lame. Mais ce qui confirme encore davantage mon opinion, c'est que, comme je l'ai constaté bien des fois, le mouvement de retour du fil est plus rapide quand on opère avec une lame très-mince et déjà colorée qu'avec une lame incolore; pourtant, avec une lame épaisse, la masse liquide qui produirait le déplacement est bien plus grande que dans le cas d'une lame extrêmement mince, et l'on ne comprendrait guère pourquoi la tendance présumée ne se manifesterait pas avec plus d'énergie dans le premier cas. Enfin, j'ajouterai que les mouvements nécessaires pour que la lame ait partout la même épaisseur, sont d'autant plus difficiles que cette épaisseur est plus petite, ce qui achève, selon moi, d'ôter toute valeur sérieuse à l'objection dont il s'agit.

§ 12. Présentons ici une remarque; quand on crève la portion laminaire intérieure au fil, on conçoit que toute l'énergie potentielle que possédait cette portion se trouve transformée d'abord en énergie cinétique, puis brusquement anéantie, du moins en apparence, lors de la formation du contour

circulaire; il faut donc que cette énergie se retrouve en chaleur, c'est-à-dire que le liquide accumulé le long du fil soit à une température un peu supérieure à celle du restant de la lame; aussi voit-on, pendant plusieurs secondes, des gouttelettes liquides se détacher d'une infinité de points du fil de cocon et s'étaler dans la lame restante, en raison de leur moindre tension, sans qu'on puisse le moins du monde attribuer ces mouvements à la vitesse acquise.

§ 13. 3<sup>o</sup> En deux points quelconques *a* et *b* (fig. 1) de l'anneau en fil

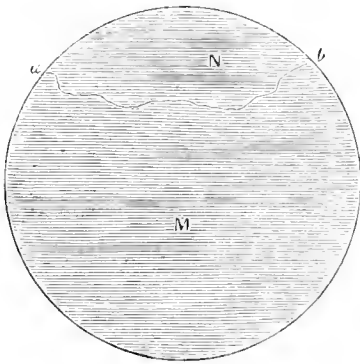


Fig. 1.

de fer déjà décrit, fixons les extrémités d'un fil de cocon ayant une longueur qui dépasse de 2 ou 3 centimètres la distance *ab*; réalisons alors dans l'anneau une lame liquide qui sera partagée par le fil en deux parties inégales *M* et *N*; dans la plus grande *M*, mettons en contact avec le liquide tous les points d'un second anneau, lequel est formé d'un fil de fer très-fin et muni d'une tige destinée à le manœuvrer; dès que cet anneau se trouve inséré dans la lame, faisons-le glisser dans

son plan vers les portions voisines du point d'attache *a*, mais de manière à ne pas déranger le fil de cocon; continuons le mouvement, jusqu'à ce que le petit anneau solide ait quitté la lame. Par cette opération, le liquide de la portion laminaire *M* a acquis un accroissement d'énergie potentielle égal au produit de la tension par la double surface du cercle limité par le fil de fer fin; la portion restante en *M* doit donc s'être refroidie, ce qui donne nécessairement lieu à un accroissement de tension; s'il en est réellement ainsi, le fil de cocon se mouvra de *N* vers *M*, jusqu'à ce que, par l'accroissement de l'aire *N* et la diminution correspondante de *M*, les tensions des deux parties laminaires soient redevenues égales; or c'est précisément ce qu'on observe, et l'on peut même faire plusieurs fois l'expérience sur la même lame.

Peut-être objectera-t-on à ce raisonnement que si l'on augmente une lame

d'un côté quelconque, le liquide afflue naturellement de toutes parts pour permettre la formation de la nouvelle portion laminaire; mais je répondrai que mes premières expériences de vérification (§§ 6-10) ont montré que l'afflux invoqué a lieu précisément en vertu de l'excès de tension des surfaces fraîches, et nullement à cause de la tendance à l'égalité d'épaisseur en tous les points de la lame.

Il n'est pas difficile de faire l'expérience inverse; pour cela, on réalise une lame dans le petit anneau en fil de fer fin, puis on fait doucement glisser celui-ci suivant le plan du grand anneau, jusqu'à ce qu'il soit inséré complètement dans la portion M de la lame occupant ce dernier; au fur et à mesure que le petit anneau s'engagera davantage dans la partie laminaire M, celle-ci deviendra plus épaisse et perdra de l'énergie potentielle, ce qui diminuera sa tension, et forcera le fil de cocon à se mouvoir de M vers N.

§ 14. 4<sup>o</sup> Prenons encore l'anneau porté par trois pieds et muni du fil

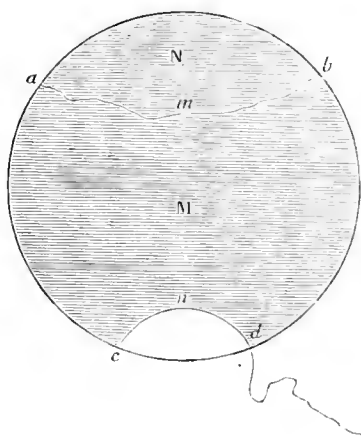


Fig. 2.

du cocon attaché en deux points  $a$ ,  $b$  du contour solide (fig. 2); en un autre point  $c$  du même contour, fixons une extrémité d'un second fil de cocon, l'autre extrémité demeurant libre. Plongeons l'anneau dans le liquide glycérique, en ayant soin de retenir à la main l'extrémité libre du second fil, afin d'empêcher celui-ci de s'engager dans le liquide. Nous réaliserons ainsi, comme au § 13, une lame plane partagée par le fil de cocon en deux parties M et N. L'anneau étant disposé horizontalement, attendons quelques

minutes pour que la lame se soit amincie vers les bords, et enlevons la petite masse liquide que la pesanteur a accumulée sous la lame. Cela étant, insérons dans la portion M une petite longueur  $cmd$  du second fil de cocon, qui s'appuie alors sur un autre point  $d$  du contour solide, puis prenant en main l'extrémité libre du même fil, crevons la petite lame comprise entre ce dernier et l'anneau solide; abandonnant ensuite doucement et par degrés le

fil que nous tenons à la main, nous verrons l'ouverture pratiquée dans la portion M augmenter de plus en plus, grâce à la tension de chacune des faces de cette dernière, tandis que le fil *amb* marchera de M vers N. Pour expliquer cet effet, on pourrait dire que le fil dont les bouts sont attachés n'obéit qu'au retrait général de la lame; si c'était là la vraie cause du phénomène, celui-ci devrait durer avec une intensité tout au moins égale aussi longtemps que la lame M diminue; or, au contraire, le mouvement du fil va en se ralentissant de plus en plus. Il faut donc recourir à une autre explication; pour la trouver, il suffit de remarquer que l'énergie potentielle de la portion M diminue graduellement, ce qui amène une augmentation de température et une diminution de tension; dès lors la tension en N devient prépondérante, et provoque le mouvement de retrait du fil *amb*; mais comme la portion N subit alors elle-même une perte d'énergie potentielle, la tension y diminue également, et, par conséquent, le mouvement observé doit devenir de moins en moins prononcé; or, c'est exactement ce qui a lieu.

Si l'on attend ensuite quelques minutes jusqu'à ce que l'équilibre général soit rétabli dans les deux portions M et N, on peut opérer d'une manière inverse, c'est-à-dire retirer peu à peu le fil *end* de manière à faire croître graduellement la surface M; le fil *amb* marchera de N vers M, et accusera donc une augmentation de tension dans la portion laminaire qui s'accroît successivement. S'il y a une quantité notable de liquide accumulée le long du fil qu'on retire, on voit même de petites masses s'en détacher et se déplacer sur la lame en sens inverse du mouvement qu'on imprime.

§ 43. 5° On sait que, d'après Lüdgtge <sup>1</sup>, un fil de cocon inséré dans une lame liquide inclinée à l'horizon, et dont les extrémités sont fixées en deux points du contour solide situés sur une même horizontale, dessine d'abord une espèce de chaînette dont le sommet est en bas; mais plus l'épaisseur de la lame diminue, plus on voit s'élever le fil, qui finit par figurer une courbe dont le sommet est en haut. Ce fait, que l'auteur expliquait en attribuant à la tension d'une lame liquide une valeur d'autant plus forte que cette lame est

<sup>1</sup> *Ueber die Spannung flüssiger Lamellen* (ANN. DE POGG., 1870, t. CXXXIX, p. 620).

plus mince, et dont j'ai essayé de rendre compte par le jeu des tensions des surfaces concaves qui avoisinent le fil, me paraît maintenant susceptible de recevoir son explication véritable. Certainement la tension est plus grande dans la partie supérieure que dans la partie inférieure de la lame; seulement, la différence ne provient pas immédiatement de ce que cette dernière partie est plus épaisse que l'autre, mais bien de ce que, vers le haut de la lame, la descente du liquide détermine constamment la mise à nu de nouvelles portions qui, acquérant une énergie potentielle qu'elles n'avaient pas d'abord, se refroidissent et sont ainsi douées d'une tension plus forte que vers le bas de la figure.

A cette expérience se lient étroitement plusieurs observations faites éga-

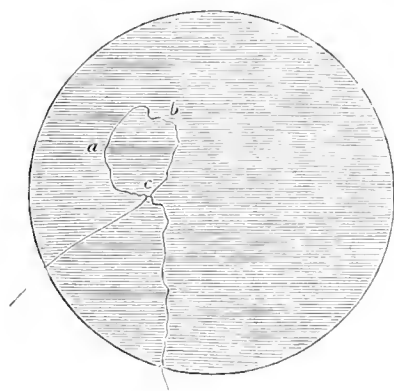


Fig. 3.

lement par Lüdgtge : entre autres, il a constaté que si l'on pose un fil de cocon de manière qu'il s'appuie en deux points d'un anneau solide où se trouve formée une lame, puis, qu'on le fasse glisser sur l'anneau, on voit aussitôt le fil flexible dessiner une courbe convexe vers la portion laminaire qui a grandi et qui est devenue ainsi la plus mince; cette forme se prononce encore davantage aussitôt qu'on lâche les extrémités. De même si l'on pose un fil de

cocon sur une lame, comme le montre la figure 3, et qu'on tire l'un des bouts du fil, la lamelle comprise à l'intérieur du nœud devient plus épaisse que le restant de la lame; il y a disparition de surface libre à l'intérieur du contour, et développement de surface fraîche à l'extérieur; la tension doit donc être plus forte en dehors, et le fil doit devenir circulaire, en montrant une tendance à s'élargir; c'est aussi ce que Lüdgtge a observé.

§ 16. Les considérations qui précèdent me fournissent l'occasion de rappeler l'opinion que j'ai exprimée sur ces expériences dans une Note spéciale<sup>1</sup>;

<sup>1</sup> *Sur un principe de statique moléculaire avancé par M. Lüdgtge* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1870, 2<sup>me</sup> série, t. XXX, p. 522).

j'ai cherché à confirmer cette proposition, déjà établie par M. Plateau <sup>1</sup> et par Dupré de Rennes <sup>2</sup>, que la tension d'une lame liquide ne dépend pas de son épaisseur, c'est-à-dire qu'une lame liquide mince possède, dans des conditions identiques et conséquemment à la même température, une tension égale à celle d'une lame plus épaisse; mais, d'après mes idées actuelles, si une lame s'amincit graduellement ou qu'une cause quelconque provoque le développement continu de surfaces fraîches, cette lame se refroidit et conséquemment *acquiert* une tension plus grande, du moins pour quelques instants. Au contraire, Lüdgtge a voulu établir par ses expériences que la tension d'une lame est une fonction de l'épaisseur, sans distinguer le cas où une lame liquide *est* plus mince de celui où elle *s'amincit* graduellement; c'est pourquoi j'ai été amené à combattre ses assertions.

La proposition énoncée plus haut n'est elle-même exacte, en vertu de la théorie exposée plus haut, que si l'on compare des lames ayant des épaisseurs différentes, mais la même température; or, la dernière condition est bien difficile à réaliser en pratique; car si, d'une part, l'air ambiant tend à égaliser les températures en tous les points d'une lame mince, d'autre part, le renouvellement ou la disparition d'une portion quelconque de la surface y produit des variations calorifiques d'autant plus prononcées que l'épaisseur est devenue moindre.

En résumé, les expériences de Lüdgtge s'expliquent de la manière la plus nette pourvu que les augmentations de tension admises par le physicien allemand dans certaines parties d'une lame soient attribuées *au développement de surfaces fraîches sur les deux faces de cette lame, et à la diminution de température qui en résulte.*

§ 17. Poursuivons la démonstration expérimentale du principe de l'augmentation de la tension dans toute surface liquide qui s'accroît ou se renouvelle; considérons, à cet effet, non plus des lames planes, mais des bulles et des calottes laminaires; comme, dans ces figures d'équilibre, il y a toujours

<sup>1</sup> *Recherches expérimentales et théoriques sur les figures d'équilibre des liquides sans pesanteur*, 5<sup>me</sup> série, §§ 51-55 (MÉM. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, t. XXXIII, 1861).

<sup>2</sup> *Théorie mécanique de la chaleur*, chap. IX; Paris, 1869.



un grand développement de surface libre en même temps qu'une masse extrêmement petite, nous pouvons nous attendre à ce qu'elles fournissent de curieuses vérifications.

6° Procurons-nous un anneau plat en fer AB (fig. 4), dont le bord intérieur soit taillé en biseau, de telle sorte que le tranchant circulaire  $ab$ , qui a 4 centimètres environ de diamètre, soit dans le plan de l'une des faces de l'anneau; celui-ci est muni d'une fourche destinée à fixer le système dans une position quelconque. Cela étant, attachons la fourche de manière que la face  $ab$  soit tournée vers le haut et se trouve exactement dans un plan horizontal; mouillons alors de liquide glycérique les deux faces de l'anneau, et déposons sur la supérieure une bulle de 5 centimètres au moins de diamètre; aussitôt cette bulle se transformera en un système de deux calottes sphériques dont l'une s'appuiera sur la face  $ab$  suivant une circonférence passant par des points tels que  $c$  et  $d$ , tandis que l'autre, beaucoup plus petite, partira du tranchant même du biseau, comme on le voit dans la figure. On introduit alors à l'intérieur de la grande calotte l'extrémité effilée d'un tube préalablement mouillée de liquide glycérique, et l'on aspire de l'air jusqu'à ce que la

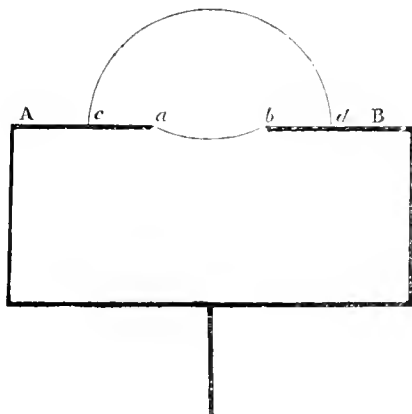


Fig. 4.

calotte supérieure s'appuie également sur le tranchant  $ab$ , et que chacune des deux lames courbes ne représente plus qu'une portion d'hémisphère. Attendons ensuite une quinzaine de minutes, et enlevons soigneusement la goutte qui s'est formée au bas de la lame inférieure. Si la tension était rigoureusement la même dans les deux lames et que l'action de la pesanteur fût absolument négligeable, il est clair que les flèches de ces calottes devraient être exactement égales entre elles. Si, au con-

traire, pour une cause quelconque, la tension est plus forte dans l'une des lames, la pression exercée par elle sur l'air intérieur ne pourra égaler celle qu'exerce l'autre lame que s'il se manifeste une diminution dans la courbure de la calotte à plus forte tension et une augmentation de courbure dans la

lame où la tension est la plus faible; dès lors les flèches des deux figures laminaires seraient inégales, et la lame ayant la plus petite flèche aurait nécessairement la plus forte tension.

§ 18. Or, il existe précisément une cause qui tend à rendre inégales les énergies potentielles des deux calottes; en effet, supposons qu'au moment où l'on a cessé d'aspirer de l'air et où les deux lames, s'appuyant l'une et l'autre sur le tranchant  $ab$ , se trouvent réduites à de petites portions de sphère, la température et la tension y soient rigoureusement les mêmes; les deux flèches devront donc être égales entre elles. Mais aussitôt la pesanteur tendra à faire descendre le liquide dont les calottes sont formées; dans la supérieure, une tranche liquide horizontale ne pourrait se substituer à la tranche immédiatement inférieure qu'à la condition d'augmenter d'étendue et de développer une surface fraîche; à l'accroissement d'énergie potentielle ainsi produit, correspond par conséquent une petite perte de chaleur; il s'ensuit que, dans la calotte supérieure, la température diminue d'une certaine quantité, ce qui doit donner lieu à un accroissement de tension. Dans la calotte inférieure, au contraire, une tranche liquide horizontale ne peut descendre, en vertu de la pesanteur, qu'en diminuant de surface, ce qui doit amener une perte d'énergie potentielle, un accroissement de température et une diminution de tension.

Il est à remarquer toutefois que le liquide de chaque lame obéit à l'action de la pesanteur avec d'autant plus de difficulté que cette lame est devenue plus mince; il en résulte que les deux effets contraires se manifesteront à un degré d'autant moins élevé que les lames auront duré plus longtemps, et qu'ainsi la température y deviendra de plus en plus rapprochée de celle de l'air ambiant; il faut donc s'attendre à voir la différence entre les deux flèches aller d'abord en augmentant jusqu'à une certaine limite, puis décroître graduellement jusqu'à devenir extrêmement petite.

Les raisonnements qui précèdent, supposent qu'au premier moment la température des deux lames soit rigoureusement la même; or, d'après le mode d'opération indiqué plus haut, la lame supérieure est réduite par l'aspiration de l'air à une surface notablement moindre, ce qui doit donner lieu à une

légère augmentation de la température, tandis que la calotte inférieure a dû augmenter de surface pour acquérir sensiblement la même courbure que la première, d'où résulte un léger refroidissement; il est vrai que ce dernier effet est masqué en grande partie par la descente d'une quantité notable du liquide à l'instant où les deux lames s'appuient toutes les deux sur le tranchant du biseau; il se forme ainsi une grosse goutte liquide au bas de la lame inférieure, goutte qu'il faut enlever à l'aide d'une pointe de papier à filtre, ce qui détermine encore un léger trouble dans l'équilibre général. C'est pourquoi j'ai attendu un quart d'heure avant de prendre les mesures des flèches au cathétomètre, et de permettre à la pesanteur de produire les deux effets bien distincts signalés au commencement de ce paragraphe.

§ 19. Pour vérifier l'exactitude des considérations précédentes, j'ai pris une série de mesures de 5 en 5 minutes, et j'en ai déduit les valeurs des flèches des deux calottes à la fin de chaque période. Le tableau suivant donne ces valeurs successives à partir des 15 premières minutes après la réalisation des deux calottes s'appuyant l'une et l'autre sur le tranchant *ab* du biseau.

Temps écoulé . . .	15'	20'	25'	30'	35'	40'	45'	50'	55'	60'	65'
Flèche de la calotte supérieure . . .	mm. 16,55	mm. 16,65	mm. 17,05	mm. 17,05	mm. 17,15	mm. 17,15	mm. 17,30	mm. 17,25	mm. 17,15	mm. 17,25	mm. 17,15
Flèche de la calotte inférieure . . .	17,70	17,55	17,50	17,35	17,35	17,35	17,40	17,60	17,50	17,45	17,50

Toutes les mesures indiquées dans ce tableau accusent en réalité une flèche moindre dans la calotte supérieure que dans l'inférieure; la différence maxima a été de 1<sup>mm</sup>,15, et la plus petite de 0<sup>mm</sup>,10; on voit nettement que, comme il fallait s'y attendre, la différence a été presque constamment en diminuant jusqu'à devenir extrêmement faible au bout de 45'. A partir de

ce moment, les flèches ont varié assez brusquement tout en différant de moins de  $0^{\text{mm}},5$ . Après que le système eut persisté pendant  $4^{\text{h}} 5'$ , j'ai retourné l'anneau de manière que la fourche fût alors au-dessus, et j'ai mesuré la flèche de la calotte actuellement inférieure (la supérieure dans les expériences précédentes); je l'ai trouvée égale à  $17^{\text{mm}},20$  au lieu de  $17^{\text{mm}},15$ . C'est ce qui nous montre clairement que les différences si notables obtenues d'abord, n'étaient pas dues directement au poids des lames; ce qui le prouve encore très-bien, c'est que la différence maxima  $1^{\text{mm}},15$  entre les deux flèches a diminué peu à peu jusqu'à s'annuler presque entièrement; or, il est évident que l'influence de la pesanteur, si elle était sensible avec des masses si minimes et présentant un si grand développement de surface, devrait, sinon devenir continûment plus forte, au moins demeurer la même. Enfin je citerai un fait qui établit de la façon la plus catégorique combien les forces capillaires combattent ici avec avantage les effets directs de la pesanteur; au moment où, par l'aspiration graduelle de l'air, les deux calottes, d'abord fort inégales en dimensions, viennent ensuite s'appuyer l'une et l'autre sur le tranchant *ab* de l'anneau, la masse liquide accumulée le long de ce tranchant tend à descendre; aussi voit-on de petites portions s'en détacher, et glisser le long de la calotte inférieure; mais, chose curieuse, chacune de ces petites masses, en descendant, laisse derrière elle une traînée, formant une saillie qui se transforme aussitôt en plusieurs fractions isolées, et l'une quelconque de celles-ci, au lieu de prendre une vitesse accélérée, semble retenue dans sa descente par des liens invisibles; elle finit même par s'arrêter pendant quelques instants à une petite distance (4 ou 5 millimètres) du liquide déjà amassé au bas de la calotte, jusqu'à ce que, par l'addition de portions subséquentes, elle achève sa descente. A mes yeux, ce phénomène est dû à ce que chaque masse liquide descendante donne lieu à des surfaces fraîches dans toutes les parties de la lame qu'elle quitte, d'où résulte un accroissement de tension qui détruit à chaque instant une portion de la vitesse déjà acquise.

Quand on opère avec le liquide glycérique, il y a, en général, une cause perturbatrice provenant de l'absorption de la vapeur d'eau par ce liquide; c'est pourquoi j'ai répété les mêmes expériences avec une bonne solution de

savon de Marseille (à  $\frac{1}{10}$ ); j'ai trouvé avec un anneau plat dont l'ouverture était de 40 millimètres environ :

Hauteur de la calotte supérieure . . . . .	mm 9,95	mm. 9,70	mm. 9,90	mm. 9,70
»       »       inférieure . . . . .	12,70	12,45	12,20	12,25

et avec un anneau de 10 millimètres environ d'ouverture :

Flèche de la calotte supérieure . . . . .	mm. 2,95	mm. 2,60
»       »       inférieure . . . . .	3,25	3,05

On le voit, ces derniers nombres accusent des différences plus grandes encore que dans le cas du liquide glycérique; on comprend d'ailleurs qu'en raison du peu de durée des calottes actuelles, les mesures étaient prises sans interruption.

§ 20. Les résultats précédents donnent la clef de l'explication d'un grand nombre de faits qui ont plus ou moins embarrassé les physiciens, ou qu'on a rattachés à des causes diverses.

7° Je citerai, en premier lieu, une expérience de Lüdte consistant à réaliser deux lames planes aux extrémités d'un cylindre creux, en attendant toutefois, avant de produire la seconde lame, que la première montre déjà des couleurs; soufflant alors de l'air dans le cylindre, il a vu toujours la calotte provenant de la lame la plus mince, affecter la plus faible courbure, ce qui prouvait que la tension y était supérieure à celle de l'autre calotte. Je croyais autrefois <sup>1</sup> que cette expérience n'avait pas été faite avec toute la

<sup>1</sup> Voir le travail déjà cité dans la première note du § 16.

rigueur nécessaire, et que, malgré l'assertion du physicien allemand, la tension devait demeurer sensiblement la même dans les deux lames courbes. Ce qui m'affermait encore dans mon opinion, c'est qu'en opérant à la manière indiquée par Lüdgtge, et maintenant à l'une des lames une épaisseur pour laquelle se montraient toujours le rose et le vert des derniers ordres, grâce au dépôt de gouttes successives du liquide sur cette lame, je n'avais pu constater que des différences de tension extrêmement petites. Cela devait être, car en déposant ainsi des gouttes de liquide glycérique sur la calotte la plus épaisse, j'en renouvelais constamment la surface libre, ce qui, d'après la théorie que je propose aujourd'hui, devait nécessairement avoir pour effet d'y augmenter la tension et de masquer l'accroissement de tension produit par l'amincissement de l'autre lame.

D'après cela, les observations de Lüdgtge ne montrent nullement, comme le prétendait l'auteur, qu'une lame liquide aussitôt après sa formation, a une épaisseur moindre que le double du rayon d'activité des forces moléculaires; seulement elles prouvent, suivant ma théorie actuelle, que la tension d'une lame augmente, en général, d'autant plus que sa surface libre s'y renouvelle plus rapidement, et que la masse liquide dont elle est formée est moindre.

§ 21. 8<sup>e</sup> J'aborde actuellement l'explication d'un autre phénomène dont s'est occupé d'abord Fusinieri <sup>1</sup> et qui, plus récemment, a fait l'objet des recherches minutieuses de M. Plateau <sup>2</sup>; je veux parler de ce que ce dernier physicien a justement appelé *l'inversion* des teintes d'une calotte laminaire; ce curieux phénomène consiste essentiellement en ce que l'épaisseur de la calotte, au lieu d'aller en augmentant depuis le sommet jusqu'à la base, croit, au contraire, de la base au sommet, et donne ainsi lieu à des teintes *inverses* de celles d'une lame d'eau de savon, par exemple. Au § 5, j'ai déjà eu l'occasion de signaler des lames planes où les couleurs sont distribuées de la même façon.

<sup>1</sup> *La dinamica molecolare* secondo Fusinieri et Reichenbach, Foligno, 1866; voir le chapitre *Delle bolle dei liquidi combustibili volatili*, p. 81.

<sup>2</sup> *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, 1875, t. II, chap. VII.

L'inversion des teintes a été étudiée par M. Plateau dans les calottes d'acide lactique, d'acide acétique cristallisable, d'essence de térébenthine et d'alcool. On peut constater que les liquides qui ont offert la particularité dont il s'agit, sont très-volatils, sauf le premier, qui absorbe, au contraire, l'humidité de l'air; c'est ce qui m'avait suggéré la théorie suivante, que M. Plateau a bien voulu rapporter <sup>1</sup>: j'admettais que, pour une cause que je ne pouvais assigner, l'évaporation était un peu plus forte au sommet de la lame qu'à la base, d'où devait résulter, dans la portion supérieure de la calotte, un refroidissement plus grand et par suite, une augmentation de tension; de là, un appel incessant du liquide de la partie inférieure et une épaisseur croissante de bas en haut. On le voit, la théorie que j'avais proposée offrait une lacune regrettable que M. Plateau a du reste signalée; en effet, elle ne montrait pas l'origine de l'excès d'évaporation au sommet de la calotte, et faisait ainsi dériver l'inversion des teintes, d'une proposition non démontrée.

§ 22. Grâce à mes nouvelles idées, je crois pouvoir établir nettement aujourd'hui la raison des faits observés. En premier lieu, tâchons de prouver que, lors de la formation de la calotte, il se développe des forces qui attirent le liquide vers le sommet de celle-ci; à cet effet, il nous suffira de faire un raisonnement analogue à celui du § 5. Aussitôt qu'une bulle d'air s'élève de l'intérieur du liquide au-dessus du niveau, les premières tranches horizontales qui émergent doivent, en vertu de l'évaporation rapide puisqu'il s'agit de liquides très-volatils, se refroidir un peu plus que le liquide ambiant; car ces tranches sont trop minces pour que le liquide intérieur puisse réparer les pertes successives de chaleur à la surface; de là une tension superficielle un peu plus forte dans la portion déjà soulevée que dans le liquide environnant. Mais une nouvelle tranche émerge au-dessus du niveau; pour le même motif que ci-dessus, la tension y est plus grande qu'en bas; je dis de plus qu'elle est un peu inférieure à celle des premières tranches; en effet, pendant que la tranche actuelle monte, les autres continuent leur mouvement ascensionnel; donc l'évaporation à faible épaisseur et sans réparation suffisante des pertes

<sup>1</sup> Voir l'ouvrage cité, p. 256.

de chaleur, y aura duré un peu plus longtemps que dans la tranche nouvelle. Appliquant le même raisonnement à toutes les tranches horizontales qui se soulèvent jusqu'à ce que la calotte soit formée complètement et que les pressions capillaires fassent équilibre à la poussée hydrostatique, on peut conclure qu'il doit se manifester, comme je l'ai avancé, un mouvement d'appel du liquide ambiant vers le sommet de la calotte. Ce mouvement d'appel, aussitôt après la réalisation de la calotte, existe effectivement; c'est sous la forme de filets très-ténus qui s'élèvent sur la lame, que je l'ai observé chez tous les liquides volatils dont les calottes m'ont présenté des teintes inverses. On comprend donc que, du moins dans les premiers moments, l'épaisseur de la lame soit moindre en bas qu'en haut, et qu'ainsi l'ordre des teintes soit inverse.

En second lieu, comment se maintient le mouvement ascensionnel du liquide sur la lame? Comment les teintes inverses, une fois produites, peuvent-elles persister? Pour répondre à ces questions, remarquons que toute quantité de liquide qui s'élève en vertu de l'excès de tension des couches supérieures, se refroidit d'autant plus qu'elle traverse en s'évaporant un plus grand nombre de sections horizontales de la lame; mais, en revanche, les filets liquides montent en passant successivement par des sections d'autant plus petites qu'elles sont plus voisines du sommet; conséquemment certaines portions superficielles doivent disparaître et se confondre alors avec la masse intérieure de la calotte; de là non-seulement un accroissement d'épaisseur dans les couches supérieures, mais encore un échauffement qui compense, du moins en partie, la perte de chaleur due au renouvellement de la surface. Il suit de ce raisonnement que si, d'un côté, l'évaporation produit des températures décroissantes à partir de la base, le mouvement ascensionnel donne lieu, au contraire, à des échauffements successifs qui sont le plus marqués vers le sommet, de sorte que si le premier effet l'emporte sur le second, comme le fait supposer une évaporation assez active, il pourra s'opérer une compensation parfaite entre les quantités de liquide qui abandonnent chaque section de la lame et celles qui s'élèvent dans la couche considérée, à cause de l'appel incessant du liquide vers le sommet de la calotte. Dans ces conditions et en l'absence de toute influence perturbatrice, il se manifeste une sorte



de régime permanent, grâce auquel les teintes changent à peine et persistent d'une façon surprenante. Mais le moindre courant d'air, le plus léger obstacle à l'évaporation libre suffit pour déplacer les bandes colorées, qui, toutefois, reviennent souvent à leur position primitive, pourvu que la cause perturbatrice n'agisse que quelques instants. Au contraire, la moindre trace de substance étrangère fait crever la lame; c'est sans doute aux petits fragments de poussière qui flottent partout dans l'air qu'il faut surtout attribuer la rupture des calottes à teintes inverses.

§ 23. Faisons ici une remarque importante : puisque la naissance d'une surface liquide fraîche donne lieu à une perte de chaleur, il est évident que la température de la couche superficielle développée s'abaissera d'autant plus que le calorique spécifique du liquide est moindre; c'est ce qui explique parfaitement la production des teintes inverses observées par M. Plateau avec l'essence de térébenthine, dont le calorique spécifique  $c$  est de 0,426 à une température de 15° à 20°, avec l'acide acétique cristallisable ( $c=0,46$ ) et avec l'alcool ( $c=0,67$ ). Quant au sulfure de carbone, qui est très-volatil en même temps que sa capacité calorifique est très-faible ( $c=0,22$ ), et sa tension assez forte (3,7 environ), les différences de température et conséquemment de tension sont tellement marquées que les mouvements ne peuvent manquer d'être extrêmement tumultueux; aussi les lames de ce liquide crevent aussitôt après leur formation. Avec l'éther sulfurique qui a un calorique spécifique voisin de 0,5, mais une tension très-faible (environ 1,9) il faut que les mouvements soient moins vifs qu'avec le précédent; il y a donc plus de chances pour que les lames présentent des couleurs; c'est aussi ce que M. Plateau a observé, seulement les teintes sont tantôt directes, tantôt inverses.

§ 24. Guidé par ces considérations, je suis arrivé à conclure que, pour obtenir aisément des calottes à teintes inverses, il faut opérer sur des liquides à l'égard desquels il existe des rapports convenables entre la tension, la volatilité, le calorique spécifique, la densité et la viscosité superficielle. J'ai pensé que les variations de la tension provenant du renouvellement de la

surface doivent être comprises entre certaines limites; pour ce motif, il est utile de ne recourir qu'aux liquides à faible tension et d'une volatilité moyenne. En second lieu, si le calorique spécifique ne s'écarte pas trop de 0,5, la substitution d'une surface fraîche à la surface primitive entrainera une différence de température notable, sans qu'elle puisse devenir trop grande. En troisième lieu, pour que la calotte ait quelque persistance, il m'a semblé nécessaire de choisir un liquide dont le poids spécifique soit assez petit; de cette manière, l'action de la pesanteur peut être aisément contrebalancée par l'excès de tension des couches voisines du sommet. Enfin, il faut que le mouvement ascensionnel le long de la lame puisse s'effectuer facilement, c'est-à-dire que le liquide ait une viscosité superficielle très-faible.

En conséquence, j'ai essayé successivement l'esprit de bois (tension  $T = 2,41$ , poids spécifique  $\rho = 0,8$ ,  $c = 0,58$ ), le naphte ( $T = 2,60$ ,  $\rho = 0,75$ ) et l'essence de citron ( $T = 5,5$ ,  $\rho = 0,84$ ,  $c = 0,45$ ) qui me paraissaient remplir le mieux les conditions énoncées ci-dessus. Par une circonstance fortuite mais très-favorable, je me suis servi d'un tube en verre n'ayant que 15 millimètres environ de diamètre intérieur, j'y ai versé le liquide que je voulais soumettre à l'essai, de manière que le niveau s'élevât un peu au-dessus du bord, puis, à l'aide d'une poire en caoutchouc terminée par un tube en verre effilé, j'ai réalisé une calotte qui demeurait au milieu de la surface libre. J'ai eu ainsi la satisfaction de constater non-seulement des teintes inverses, mais encore des durées relativement très-grandes; par exemple, les calottes d'essence de citron ayant 8 millimètres environ de diamètre, ont persisté pendant 12'; une calotte d'esprit de bois ayant 7 millimètres de diamètre a duré 18'; enfin le naphte m'a fourni une petite calotte de 5 millimètres de diamètre, qui a persisté pendant plus de 45'. Pour maintenir la lame au milieu de la surface du liquide, il convient, on le comprend, d'ajouter de temps en temps quelques gouttes du liquide soumis à l'expérience, de sorte que le tube soit constamment plein jusqu'un peu au-dessus du bord.

Si l'on veut obtenir des résultats aussi frappants, il importe de rendre l'évaporation autour de la calotte aussi libre et aussi égale que possible; c'est pourquoi l'emploi d'un tube de 15 à 20 millimètres de diamètre doit être

préféré à celui d'une capsule ou d'un vase quelconque où la surface du liquide qui environne la calotte serait trop étendue. En outre, il est nécessaire d'éviter jusqu'au moindre courant d'air; je dirai même que la cause la plus indifférente en apparence ne tarde pas à faire crever les lames; par exemple, il m'a suffi d'amener une plaque de verre horizontalement à 5 centimètres au-dessus d'une calotte d'esprit de bois pour voir aussitôt changer les teintes et la faire éclater au bout de quelques secondes. C'est ce qui explique sans doute pourquoi les durées des calottes d'acide acétique, d'alcool et d'essence de térébenthine, observées par M. Plateau, étaient si faibles en comparaison de celles que j'ai constatées; en effet, ces liquides remplissent parfaitement les conditions énumérées plus haut; mais M. Plateau réalisait ses lames dans un bocal ouvert, ce qui devait gêner plus ou moins l'évaporation; aussi l'essence de térébenthine ne lui a-t-elle fourni qu'une durée de 4' au plus, pour des calottes de 10 à 12 millimètres de diamètre, tandis que j'ai obtenu, avec le même liquide et des calottes de même grandeur, des durées dépassant 20'.

§ 23. Une conséquence très-importante de ma théorie, c'est, comme on le voit, le mouvement ascensionnel du liquide sur une lame à teintes inverses; ainsi que je l'ai dit plus haut (§ 22), on aperçoit à la simple vue une multitude de filets qui semblent s'élever en réalité et donnent souvent lieu à de petites masses qui retombent du haut de la lame; mais ne peut-on pas s'assurer de l'existence de ce mouvement ascensionnel par des expériences directes? Je l'ai essayé vainement; même je n'ai pu recourir au dépôt du plus léger nuage de poudre de lycopode sans faire éclater aussitôt la lame; mais je puis citer au moins une preuve indirecte bien simple et concluante: c'est que si l'on couvre d'une mince couche d'essence de térébenthine ou de naphite la surface d'un petit disque en verre de 15 millimètres à peu près de diamètre, puis qu'on réalise une calotte sur cette couche, on constate nettement que la lame a des teintes inverses, mais elle persiste à peine quelques secondes. Ainsi, bien que toutes les autres conditions favorables à la persistance des calottes fussent encore remplies dans le cas actuel, l'absence d'une quantité de liquide capable de renouveler incessamment la surface de la figure

laminaire a suffi pour amener la rupture presque immédiate de cette dernière.

§ 26. Pour terminer l'exposé des preuves qu'apporte à ma théorie le phénomène de l'inversion des teintes, je dois éclaircir encore deux points, l'un concernant les liquides qui ont fourni des teintes inverses même dans un milieu saturé de vapeur, l'autre relatif à l'acide lactique qui absorbe l'humidité de l'air.

Puisque toute calotte, qu'elle soit soufflée directement, ou qu'elle provienne d'une bulle d'air montée à travers le liquide supposé toujours très-volatil, possède un très-grand développement de surface eu égard à la masse qui la constitue, elle doit, au moins pour quelques instants, avoir une température d'autant plus basse que son énergie potentielle s'est accrue plus rapidement et que son calorique spécifique est moindre; c'est ce qui explique, selon moi, les teintes inverses que M. Plateau a observées, dans un milieu presque complètement saturé, avec les calottes d'essence de térébenthine, de chloroforme et d'éther sulfurique, qui, du reste, ont toutes éclaté au bout de fort peu d'instants. J'ai constaté le même phénomène sur des lames d'alcool, de naphte, d'essence de citron, réalisées dans des flacons fermés.

Quant à l'acide lactique dont les calottes ont également fourni à M. Plateau des teintes inverses dans un bocal ouvert, je regarde comme probable que la couche superficielle libre du liquide est plus riche en eau que les couches sous-jacentes; or, si l'on réfléchit que la tension de l'acide lactique concentré n'est que  $4,5$ , on peut légitimement admettre que l'absorption de l'eau produit une augmentation de cette force. Cela posé, si une bulle d'air s'élève à travers le liquide et se présente sous les couches très-voisines de la surface, celles-ci sont soulevées graduellement, mais à mesure que la tranche horizontale qui atteint le plan du niveau grandit davantage, la portion liquide destinée à former la tranche suivante contient vraisemblablement de moins en moins d'eau, parce qu'elle provient de couches plus profondes; il résulterait de là que, par suite de la présence de l'eau, la tension serait plus forte vers la partie la plus élevée, et qu'ainsi les tranches inférieures pourraient, du moins pendant un court intervalle de temps, demeurer les plus minces;

mais bientôt la vapeur d'eau contenue dans l'air ambiant est sans doute absorbée plus fortement au bas de la calotte qu'en haut; dès lors le mouvement ascensionnel ne peut plus continuer; enfin les irrégularités dans la distribution des tensions doivent ne pas tarder à faire éclater la lame. Une circonstance bien favorable à l'explication précédente, c'est que, d'après M. Plateau, l'acide lactique ne donne des teintes inverses qu'à la condition d'avoir été préalablement concentré.

§ 27. Les raisonnements que j'ai fait valoir jusqu'ici, font comprendre aisément, je pense, d'où proviennent dans une bulle de savon ou de liquide glycérique les mouvements singuliers qu'on observe à sa surface; comme je l'ai dit dans une communication préliminaire <sup>1</sup>, l'insufflation de l'air produit évidemment une surface libre de plus en plus grande, et par conséquent la masse doit prendre en ses divers points des températures d'autant plus basses que la surface fraîche fournie par chaque portion de la lame est plus considérable; ces différences de température et par suite de tension font naître une multitude de courants tantôt dans un sens, tantôt en sens contraire; la descente continuelle du liquide, mettant toujours à nu de nouvelles surfaces, entretient longtemps ces phénomènes jusqu'à ce que la lame se soit suffisamment amincie; alors les déplacements relatifs deviennent de plus en plus difficiles; car non-seulement, les masses descendantes étant extrêmement petites, la résistance due au frottement et à la viscosité est moins aisément vaincue; mais encore toute surface fraîche développée par un déplacement quelconque, produit un excès de tension d'autant plus prononcé que la masse qui l'a fournie est plus minime; or, cet excès de tension provoquerait aussitôt un mouvement en sens contraire au premier. En réalité, j'ai pu observer nettement une infinité de petits mouvements de va-et-vient qui me paraissent entièrement conformes à ma théorie. Dans toute lame constituant une bulle quelconque, l'équilibre n'existe donc réellement en aucun point; seulement toute portion laminaire qui se déplace, donne aussitôt lieu à des forces

<sup>1</sup> *Application de la thermodynamique aux variations d'énergie potentielle des surfaces liquides* (BULLET. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1876, t. XLI, p. 769; voir le § I).

qui tendent à la ramener à sa position primitive; comme d'ailleurs ces forces dépendent de la température à laquelle on opère, on conçoit que les plus longues persistances des figures laminaires s'obtiennent à des températures que l'expérience a fait connaître.

§ 28. Pour confirmer l'explication qui précède, j'ai fait les expériences suivantes : ayant à peu près rempli de liquide glycérique un vase cylindrique en verre de 12 centimètres de diamètre et de 7 centimètres de hauteur, j'ai plongé dans le liquide la tête d'une pipe, et j'ai soufflé rapidement une quantité notable d'air par le tuyau; j'ai vu se former aussitôt une ou plusieurs calottes ayant 3 à 6 centimètres de diamètre, et à la surface desquelles montaient avec une extrême rapidité de petites masses détachées du bord annulaire de raccordement. Ces mouvements ascensionnels proviennent de ce que, d'après ma théorie, la tension doit être plus grande dans la calotte qu'à la surface du liquide du vase, à cause du grand et si prompt développement de la surface laminaire et de l'extrême petitesse de la masse ayant fourni l'énergie potentielle qui y a son siège. On peut aussi opérer de la manière suivante : on dépose à la surface du liquide une calotte de 5 à 4 centimètres de diamètre, puis à l'aide d'une poire en caoutchouc munie d'un ajutage en verre, on gonfle la calotte jusqu'à lui donner 8 à 10 centimètres de diamètre; pendant l'opération, on voit partir d'une infinité de points de la crête de raccordement, de petites masses qui s'élèvent le long de la lame; seulement elles se meuvent avec bien moins d'énergie que dans le cas précédent, ce que j'attribue à ce que, d'une part, les surfaces fraîches ont mis actuellement bien plus de temps à se développer, et que, de l'autre, la minceur de la calotte constituée, nous le savons, un grand obstacle à tout déplacement rapide. Comme la surface se renouvelle aux points que quitte chacune des petites masses, la tension s'y accroît et retient ainsi en arrière une portion de celle-ci.

Un autre procédé consiste à réaliser sur le liquide une grande calotte de 10 centimètres environ de diamètre, puis d'amener en contact avec la surface de cette dernière un anneau horizontal en fil de fer muni d'une fourche; si l'on soulève alors rapidement l'anneau d'une hauteur de 2 centimètres,

par exemple, la surface latérale de la lame prend aussitôt un accroissement notable, et par conséquent doit acquérir une tension plus forte; aussi voit-on de nombreuses masses se détacher non-seulement de la crête de raccordement avec la surface du liquide, mais encore de la crête du liquide adhérent à l'anneau; on aperçoit ainsi deux espèces de mouvements, l'un de bas en haut, l'autre de haut en bas, qui se contrarient mutuellement à une certaine hauteur. Afin de s'assurer que l'explication précédente est exacte, il suffit de descendre promptement l'anneau; immédiatement cesse le double mouvement observé d'abord. On peut ainsi recommencer deux ou trois fois la même expérience et toujours avec succès; toutefois la masse liquide adhérente à l'anneau est bientôt trop petite, ce qui fait crever la figure laminaire.

Le dernier mode d'expérience est susceptible d'être encore simplifié; il suffit, en effet, de plonger dans le liquide l'anneau en fil de fer dont je viens de parler, puis de le retirer horizontalement, de manière qu'il se forme une lame caténoïdale ayant 2 centimètres de hauteur; on attend alors quelques instants, puis, soulevant avec rapidité l'anneau de 1 à 1,5 centimètres, on verra nettement deux séries de courants verticaux et de sens contraires, partant, l'une, de la crête de raccordement du niveau, l'autre de la petite masse liquide qui adhère à l'anneau.

Je n'essaierai pas de multiplier davantage les exemples où ma théorie s'applique aux phénomènes que présentent les lames liquides à deux faces libres, et je passerai actuellement au cas des lames qui sont en contact par l'une de leurs faces avec un autre liquide.

## II

### *Cas des lames liquides à une seule face libre.*

§ 29. Après avoir étudié l'influence des variations de surface dans les lames liquides minces dont les deux faces sont exposées à l'air, occupons-nous maintenant, au même point de vue, des lames produites à la surface d'un liquide par l'étalement d'un autre liquide.

Dans un Mémoire publié en 1869<sup>1</sup>, j'ai étudié l'extension d'un liquide sur un autre en faisant intervenir, dans le phénomène, les tensions superficielles des deux liquides amenés en contact et celle de leur surface commune. Seulement je croyais à cette époque que la tension d'une petite masse liquide demeure à fort peu près la même, malgré son étalement sur un autre liquide; actuellement je suis conduit par ma nouvelle théorie à admettre, dans chaque portion de la lame, une tension d'autant plus grande que cette portion a fourni une surface fraîche plus étendue; en outre, puisque la surface libre du liquide où s'opère l'extension diminue à mesure que celle-ci se développe, l'énergie potentielle doit y décroître, en vertu du principe que je cherche à établir; enfin, en ce qui concerne la surface de contact, il se produira un échauffement partout où elle se sera formée par glissement de la petite masse étalée sur la surface du liquide du vase; car à la tension superficielle de ce dernier liquide se sera alors substituée une tension moindre, savoir celle de la surface commune, ce qui détermine une perte d'énergie potentielle et, par compensation, un accroissement de température; au contraire, partout où la surface de contact se sera développée par le retrait de la couche superficielle du liquide du vase, il y aura refroidissement; car il en sera résulté de l'énergie potentielle dans des portions liquides qui n'en avaient pas primitivement.

On conclut de là que l'équilibre de la lame mince, aussitôt après l'étalement, doit être dans un état très-prononcé d'instabilité, puisque les forces qui ont déterminé l'extension ont toutes subi des modifications très-différentes en général aux divers points de la lame: il faut donc s'attendre à des transformations plus ou moins complexes dans la forme et les dimensions de cette dernière. En réalité, tous les physiciens qui se sont occupés de la question sont d'accord pour affirmer la singularité des effets qu'ils ont observés et décrits, tantôt sans présenter une explication quelconque, tantôt en invoquant les causes les plus diverses. Je dois déclarer ici que, jusque dans ces derniers temps, plusieurs faits que j'avais constatés dans mes premiers essais, me semblaient absolument inexplicables.

<sup>1</sup> *Sur la tension superficielle des liquides considérée au point de vue de certains mouvements observés à leur surface.* (MÉM. COUR. ET MÉM. DES SAVANTS ÉTRANGERS, in-4°, t. XXXIV).



§ 30. Pour appuyer la conclusion que je viens d'énoncer, je vais passer rapidement en revue quelques phénomènes bien connus et les interpréter d'après mes nouvelles idées.

1° Sur une large surface d'eau distillée, on dispose un fil de cocon dont les deux bouts sont noués, de manière que son contour est fermé; à l'intérieur de celui-ci, on dépose une gouttelette d'éther pur; aussitôt, comme je l'ai dit au § 41 du Mémoire cité, le fil se tend vivement, mais revient immédiatement après sur lui-même; j'ai avancé que le mouvement de retour est dû à la grande volatilité de l'éther laquelle refroidit l'eau sous-jacente; à cette raison bien légitime, il faut ajouter le complément qui suit: l'action de l'éther est tellement vive que la couche libre de l'eau voisine du point où l'on a fait le dépôt, se ment violemment vers l'extérieur, et donne même lieu à de petites ondulations causées par la viscosité de la surface de liquide du vase; la tension de l'eau extérieure au contour flexible diminue donc, tandis que la couche aqueuse demeurée libre après l'évaporation de l'éther s'est notablement refroidie et a, par conséquent, une tension plus grande que celle de l'eau avant l'expérience: de là l'extrême vivacité du mouvement de retour du fil.

Cette explication est évidemment applicable à une série de liquides très-volatils qui se conduisent d'une manière analogue à celle de l'éther.

§ 31. 2° Rappelons ici un phénomène que j'ai signalé déjà (Mémoire cité, § 44), mais sans pouvoir alors en pénétrer la cause; on dépose une fine gouttelette d'essence de térébenthine sur une surface fraîche d'eau distillée; et il se produit aussitôt une lame présentant la teinte blanche du premier ordre et recouvrant toute la surface libre; sur cette lame on dépose une nouvelle goutte d'essence et l'on voit celle-ci s'étendre à son tour en une couche colorée qui ramasse sur elle-même la lame environnante, s'arrête pendant quelques instants, et revient enfin de plusieurs millimètres vers son centre. Ce mouvement final auquel j'étais loin de m'attendre, est provoqué, d'après ma théorie actuelle, par les deux causes suivantes: d'une part la lame nouvellement formée acquiert une tension d'autant plus grande que l'étalement est plus prononcé et que, par l'effet de l'évaporation, la sur-

face s'est plus rapidement renouvelée; d'autre part, la première lame se ramassant sur elle-même (ce dont on juge par sa teinte *jaune* du premier ordre), affecte une tension qui va en diminuant à mesure que la surface décroît : pour ces motifs, on comprend que la tension de la lame réalisée en dernier lieu puisse acquérir une valeur supérieure à celle de la couche d'essence primitive, d'où résulte le retrait observé; celui-ci n'a plus lieu, du moment où l'on supprime l'une des causes que je viens d'indiquer, par exemple l'évaporation, ce qu'on peut faire en recouvrant simplement le vase.

§ 32. 5° Un autre fait bizarre que j'ai décrit (§ 45 du Mémoire cité), consiste en ce que le dépôt d'une goutte de sulfure de carbone sur une surface peu étendue d'eau distillée, donne lieu à une lame brillante échancrée à son bord et animée d'un mouvement ondulatoire. On conçoit très-bien que la lame n'augmente pas progressivement en surface, lorsqu'on réfléchit que la vapeur du liquide déposée sur l'eau et les filets liquides très-ténus qui se détachent du bord, diminuent suffisamment la tension de l'eau pour rendre impossible l'extension de la goutte en lame très-mince. Mais d'où provient le mouvement ondulatoire du bord? Je crois pouvoir en faire connaître l'origine; en effet, à cause du renouvellement si rapide de la surface de la lame, la tension s'accroît sans cesse, mais inégalement aux divers points, car l'évaporation n'est jamais rigoureusement la même partout, et fût-elle encore la même, les inégalités d'épaisseur de la lame produiraient des effets différents; ces accroissements inégaux de tension provoquent non-seulement la formation du bord échancré, mais encore les perpétuels changements qu'il présente jusqu'à l'instant de la disparition presque complète du sulfure de carbone.

A cette cause, il faut, je pense, ajouter la suivante : le bord légèrement renflé de la lame constitue une figure liquide dont une dimension est très-grande par rapport aux deux autres; de là, d'après un principe démontré par M. J. Plateau, une tendance à la transformation de la figure; il doit naître ainsi des portions alternativement saillantes et rentrantes, ce qui donne lieu à des augmentations ou à des diminutions locales de surface et, par conséquent, à des différences de tension qui provoquent des mouvements contraires aux premiers.

Si la surface où l'on dépose la goutte est suffisamment étendue, la lame brillante à peine formée se déchire, comme je l'ai dit dans mon Mémoire, en un nombre plus ou moins considérable de parties qui présentent chacune un bord ondulé; ce déchirement provient sans doute de ce que, par la rapidité même de l'étalement, la tension s'accroît tellement vite qu'elle devient suffisante pour vaincre la cohésion en un ou plusieurs points. Je ne vois aucune raison théorique pour recourir à l'hypothèse d'une force explosive au sein de la petite masse qui s'étale, comme l'a proposé d'abord Fusinieri, et comme l'admettent encore aujourd'hui plusieurs physiciens.

§ 33. 4<sup>o</sup> Tâchons maintenant de nous rendre compte d'un fait bien curieux et constaté par de nombreux observateurs : il consiste en ce que des gouttes de certains liquides, après leur étalement à la surface d'un autre liquide, reviennent plus ou moins vivement sur elles-mêmes, puis s'étendent de nouveau pour se contracter parfois encore, en donnant lieu aux mouvements les plus étranges. Voici, à cet égard, quelques exemples remarquables :

La *passiflora fetida* est munie de poils qui, étant plongés dans l'eau, dégagent chacun une petite goutte d'huile laquelle, s'élevant jusqu'à la surface, s'étale et se contracte plusieurs fois, et finit par éclater violemment en diverses portions présentant les mêmes phases <sup>1</sup>. — Zantedeschi a observé une suite de contractions et d'évolutions dans une très-petite quantité d'acide valérianique versée sur une large surface d'eau <sup>2</sup>. — M. Tomlinson a obtenu un résultat semblable avec l'alcool isobutylique; seulement les mouvements sont encore plus vifs que dans le cas précédent <sup>3</sup>. — « Une goutte d'alcool déposée sur l'huile de castor froide, s'étend en un large disque à bandes colorées; après avoir atteint un diamètre de trois pouces environ, la lame revient vers le centre en laissant un élégant réseau de petits globules. Avec

<sup>1</sup> Fait rapporté en 1858 par Morren (*Correspond. mathém. et phys. de Quetelet*, t. X, p. 559).

<sup>2</sup> Citation de M. Luvini dans son *Saggio di un corso di fisica elementare*, Turin, 1868, p. 256).

<sup>3</sup> *On the motions of camphor and of certain liquids on the surface of water* (PHILOS. MAGAZ., 1875, 4<sup>me</sup> série, t. XLVI, p. 576).

l'alcool camphré, la figure obtenue est plus brillante encore, et nulle description ne peut donner une idée de la beauté du phénomène : la lame revient lentement vers le centre, abandonnant le camphre sous forme de petits fragments disposés suivant des lignes radiales ; ces lignes, à leur tour, opèrent leur mouvement de retraite vers le centre, où le camphre se réunit en dessinant un petit anneau <sup>1</sup>. » — « Une goutte d'esprit de bois, après s'être étalée sur l'huile d'olive, est revenue vers le centre avec l'élasticité d'un ressort en abandonnant une infinité de petites lentilles ; la petite masse a pris alors la forme d'une scie circulaire qui s'est encore mise en retraite, chaque dent projetant une série de globules ; la dernière figure était un petit disque central entouré d'une infinité de lentilles très-ténues <sup>2</sup>. » — Enfin, d'après M. Cintolesi, « quand on dépose sur une dissolution étendue d'ammoniaque une goutte d'huile d'amandes douces, on la voit aussitôt s'élargir et se rétrécir rapidement, offrant ainsi une espèce de mouvement vibratoire ; après un certain temps, cette goutte éclate et se réduit en petits fragments dont chacun donne lieu à une petite lame qui se rompt et se contracte en gouttelettes <sup>3</sup>. »

Tous ces exemples font bien voir que, grâce à l'accroissement d'énergie potentielle de la petite masse liquide qui s'étale et à la perte d'énergie qu'éprouve alors la surface où s'opère l'extension, la résultante des forces qui sollicitent un point quelconque de la lame déjà formée peut changer de signe et provoquer ainsi les mouvements centripètes qui ont tant excité l'admiration et je dirai même la profonde surprise des observateurs ; un nouveau changement de signe de cette résultante explique tout aussi facilement les mouvements centrifuges qui succèdent parfois aux contractions des lames, et ainsi de suite. Quant à l'espèce d'explosion que les gouttelettes de certains liquides ont manifestée, elle est due, d'après moi, à la diminution de tension de la surface commune à ces gouttelettes et au liquide du vase, soit par simple dissolution de l'un des liquides dans l'autre, soit par une action chimique exercée entre eux (comme dans le cas signalé par M. Cintolesi). Je

<sup>1</sup> *On the cohesion-figures of liquids* (PHILOS. MAGAZ., 1864, 4<sup>me</sup> série, t. XXVIII, p. 554).

<sup>2</sup> *Ibid.*, *ibid.*

<sup>3</sup> *Phénomènes qui se produisent quand on dépose des gouttes de divers liquides sur des liquides autres que l'eau* (BIBLIOTH. UNIV., 1877, t. LX, p. 569).

regarde donc comme dénué de fondement le reproche d'insuffisance qu'à la vue de ces phénomènes en apparence si bizarres, on a été tenté, par un manque d'études plus complètes des faits, d'adresser à la théorie de la tension superficielle.

§ 34. Pour terminer l'examen des preuves si frappantes tirées de l'extension des liquides, je dirai que mon principe trouve son application immédiate à l'étalement limité d'une gouttelette très-minime d'eau de savon sur une lame de solution de saponine ou de bois de Panama <sup>1</sup>; à l'étalement stationnaire de l'alcool sur l'huile, ainsi qu'au mouvement de retrait de l'ensemble des petites lentilles d'alcool après que l'écoulement de ce liquide sur l'huile a été suspendu <sup>2</sup>; enfin à la formation des figures de cohésion, au sujet desquelles M. le professeur Tomlinson a décrit tant et de si curieux exemples. Je suis convaincu aujourd'hui que ces figures, avec leurs variations presque caractéristiques pour chaque substance, sont dues, non pas, comme je l'ai avancé en 1872 <sup>3</sup>, au dégagement de petites bulles gazeuses, mais aux différences entre les tensions qui règnent aux divers points d'une lame liquide aussitôt après son étalement sur un autre liquide : en effet, ces différences constituent une cause de déformation dans toute l'étendue de la lame et expliquent naturellement les mouvements parfois bizarres qui s'observent depuis le moment où cette lame est étalée jusqu'à celui où elle est remplacée par un système de petites lentilles séparées.

<sup>1</sup> *Sur la tension superficielle des liquides considérée au point de vue de certains mouvements observés à leur surface. Second mémoire, § 52 (MÉM. COUR. ET MÉM. DES SAV. ÉTRANGERS DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1875, t. XXXVII).*

<sup>2</sup> *Ibid.*, § 51.

<sup>3</sup> *Note préliminaire sur un fait remarquable qu'on observe au contact de certains liquides à tensions superficielles très-différentes (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 2<sup>me</sup> série, t. XXXIII, p. 225).*



# MÉMOIRE

SUR LES

## ORQUES OBSERVÉS DANS LES MERS D'EUROPE;

PAR

**M. P.-J. VAN BENEDEN,**

MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

---

(Présenté à la Classe des sciences de l'Académie le 1<sup>er</sup> mars 1879.)





# MÉMOIRE

sur

## LES ORQUES OBSERVÉS DANS LES MERS D'EUROPE.

### § I.

#### INTRODUCTION.

De tous les animaux aquatiques, les plus dangereux et les plus terribles dans l'attaque sont évidemment les Orques; ils n'ont qu'une vingtaine de pieds de longueur et leur ennemi de prédilection c'est la Baleine; de l'aveu de tous les baleiniers, il n'y a pas de spectacle comparable à celui d'un groupe d'Orques, s'élançant sur une Baleine ou une Balénoptère; à peine ces animaux sont-ils aux prises avec leur proie, que les blessures rougissent l'eau et que le combat continue dans le sang. Ce n'est pas sans raison que Fabricius appelle l'Orque *Tyrannus balænarum* et que Chamisso le nommait *Formidabilis Balænarum hostis*.

L'Épaulard des Saintongeais, souvent de vingt à vingt-cinq pieds de long, avec ses dents grosses, coniques, un peu crochues, au nombre de onze, est l'ennemi mortel de la Baleine, dit Cuvier; il attaque en troupe ces géants de la mer et les harcèle jusqu'à ce qu'elles ouvrent la gueule et qu'il puisse leur arracher la langue <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Les anciens connaissaient déjà la férocité de ces Cétacés : un passage du livre IX de Pline ne laisse pas de doute à cet égard. « Les Orques s'efforcent de les arrêter, dit-il en parlant des Baleines, de s'opposer à leur passage, de les acculer dans une anse pour les y égorger, de les pousser sur les bas-fonds, de les froisser contre les rochers. — Ces combats sont vraiment un spectacle. — Il semble que la mer soit furieuse contre elle-même. » (*Histoire naturelle de Pline*, trad. nouv. par AJASSON DE GRANDSAGNE. Paris, 1859, vol. VII, p. 41.

Quelques naturalistes ont eu la bonne fortune de disséquer ces Cétacés et de confirmer leur voracité par la visite de leur estomac. Il est vrai, J. Hunter n'y a observé qu'une queue de Marsouin, et Claas Mulder des morceaux de Raie; mais Nilsson a trouvé, dans l'estomac d'un animal de sept mètres de long, quatre Phoques en chair dont trois *Halichaerus grypus* et un *Phoca vitulina* à côté de plusieurs Saumons entiers; et nous avons déjà signalé l'observation d'Eschricht, qui a vu dans l'estomac d'un Orque capturé sur la côte de Jutland, quinze Phoques étendus à côté de treize Marsouins, et une peau de Phoque retournée dans la bouche.

Il n'y a donc plus lieu de révoquer en doute la voracité de ces animaux et les combats sanglants qu'ils livrent aux Baleines. Fréd. Cuvier exprimait cependant encore des doutes à cet égard, mais les observations du commandant Holböll confirment complètement ce que nous venons de dire : j'ai été présent à un grand carnage accompli par ces animaux sanguinaires, écrit-il à Eschricht; une troupe de *Beluga* avait été poussée par eux dans une baie voisine de Godhavn et y fut entièrement massacrée; les Ardluk, c'est ainsi qu'on les appelle au Groënland, en tuèrent beaucoup plus qu'il ne leur en fallait pour se rassasier, et il va sans dire que les Groënländais surent parfaitement tirer profit du surplus de la proie. En 1830, écrit encore le même capitaine Holböll, un grand Keporkak fut assommé par un Ardluk, près de Neparsok, et mis en morceaux après sa mort <sup>1</sup>.

Les Orques nagent communément par groupes de quatre ou cinq individus, formant de petites colonnes qui montrent de temps en temps une nageoire dorsale, longue et étroite comme une épée, au-dessus de la surface de l'eau. La frayeur que ces animaux inspirent est si grande, qu'à la vue d'une lame de bois, qui imite leur nageoire dorsale, les Phoques se sauvent comme les poules à la vue d'un oiseau de proie, et les pêcheurs ont tiré partie de cette frayeur pour mettre les Phoques en déroute. Une planchette en bois peint, fichée dans la glace, suffit à cet effet.

Leur nageoire pectorale n'est pas moins remarquable que leur nageoire dorsale; elle est excessivement large et ressemble plutôt à une spatule qu'à

<sup>1</sup> D. FR. ESCHRICHT, *Die nordische Wallthiere*; Beilagen, p. 191. Leipzig, 1849.

une rame véritable. Du reste, au lieu de faire exception sous ce rapport, les Orques ressemblent, par ces derniers organes, au Narval, au Béluga, au *Pontoparia Blainvillii* et au Sotalia de la Guyane, que nous avons décrit dernièrement dans nos *Bulletins*; si l'on adoptait la nomenclature proposée par M. Van Bambeke, on devrait les appeler *Platyptères*<sup>1</sup>.

Les Orques ne se distinguent pas seulement par leur grande férocité, mais leurs formes grossières et trapues, leur bouche peu fendue, leurs fortes dents coniques et leurs singulières nageoires, dont nous venons de parler, les éloignent des autres Cétodontes; leur système de coloration ne permet pas, du reste, de les confondre avec aucun autre mammifère marin.

La forme de leur nageoire dorsale leur a valu le nom de *Schwerdfish*<sup>2</sup> de la part des baleiniers allemands et ce nom les a fait confondre parfois avec les poissons désignés sous le nom d'*Espadons*. Les Orques ou gladiateurs des Baleines, dit Du Hamel, portent sur le dos une lame de sabre très-tranchante avec laquelle elles ouvrent le ventre de la Baleine<sup>3</sup>.

Schlegel pense que les Orques sont les seuls Cétacés dont les nageoires pectorales sont arrondies, et que le mot de *Schwerdfisch*, sous lequel les Allemands le désignent, provient de la forme des nageoires pectorales qu'il compare aux *Zweerden* des bateaux bélandres. Nous sommes, au contraire, persuadé que c'est la nageoire dorsale, que l'on a comparée avec raison à un sabre, qui leur a fait donner ce nom significatif. Ce nom a fait confondre quelquefois, comme nous venons de le dire, les Orques avec les Espadons (poissons), et l'auteur d'un article de la *Revue des deux Mondes* parlait dernièrement d'une lutte entre deux Espadons et une Baleine qui avait succombé, percée de coups par les *poissons*.

Il n'est pas sans intérêt de faire remarquer que les Orques, tout en avalant les Phoques en entier, les dépouillent complètement de leur peau et que celle-ci se retourne comme un doigt de gant dans l'intérieur de l'estomac. Comme nous venons de le dire, Eschricht en a vu un exemple : il a trouvé

<sup>1</sup> VAN BAMBEKE, *Sur le squelette de l'extrémité antérieure des Cétacés*, BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 2<sup>e</sup> sér., t. XIX. 1865.

<sup>2</sup> Ce mot de *Schwerdfish* a fait commettre de singulières erreurs.

<sup>3</sup> DU HAMEL, *Traité général des pêches*, p. 50. Paris, 1769.

un corps entier de phoque dans l'estomac d'un Orque et la peau du même animal dans la cavité de la bouche.

Cette observation rend compte d'une histoire racontée par Pline : un Orque auquel l'empereur Claude livra combat dans le port d'Ostie, avait vomé des peaux et leur origine fut attribuée au naufrage d'un navire chargé de peaux de la Gaule, dont l'animal se serait repu pendant plusieurs jours. Le souvenir de cet exploit est conservé sur une médaille romaine, qui représente l'empereur Claude assis sur l'Orque. Mais comme le vrai Cétacé de ce nom a le museau effilé, Cuvier pense que les anciens n'ont pas désigné sous cette dénomination le même animal que nous. N'y a-t-il pas plutôt lieu d'admettre que le graveur a représenté une tête de fantaisie.

Les baleiniers français désignent l'Orque sous le nom d'*Épaulard*, les Anglais sous celui de *Grampus*; les Danois et les Norwégiens disent *Spock-luggeren*, les Groënlandais *Ardluk*, les Kamchadales *Aguluck*.

Il n'y a plus de doute à exprimer, ni sur la présence de ces Amphithériens dans la Méditerranée ni sur le genre de Cétacé que Pline désignait sous ce nom. C'est bien le même animal et après la Balénoptère commune, l'Orque est le plus grand Cétacé de la Méditerranée.

Cet animal est en somme toujours reconnaissable à sa taille, à ses grosses dents aux deux mâchoires, à ses nageoires et aux dessins de sa peau, qui sont plus prononcés chez les jeunes que chez les vieux.

L'Orque a été souvent figuré, mais ce n'est que dans ces derniers temps que l'on en a donné des dessins quelque peu fidèles; comme nous l'avons dit plus haut, il a été reproduit déjà sur une médaille romaine et Rondelet en a donné une figure qui n'est pas mauvaise pour l'époque <sup>1</sup>. Du Hamel en a publié une sous le nom de Cachalot d'Anderson, d'après un animal capturé à l'embouchure de la Loire à peu de distance de Vannes. Il est resté vivant pendant trois mois après avoir reçu une balle. Cette figure n'est pas mauvaise.

Sous le nom de Mulard, Du Hamel donne une autre figure qui rappelle celle de Rondelet.

<sup>1</sup> *De piscibus*, lib. XVI, p. 485

Dans son *Histoire naturelle des Cétacés*, Fréd. Cuvier <sup>1</sup> dit que l'on n'en possède pas encore une bonne représentation. Il n'a pas reconnu celle de Du Hamel. En 1834 Dewhurst a publié une planche représentant très-fidèlement un Orque et une gravure sur bois, faite d'après un mâle échoué dans le havre de Lynn (*Lynn Harbour*) le 19 novembre 1830.

Schlegel a donné dans ses *Abhandlungen* une excellente figure d'une femelle de 16 pieds de long, échouée à Wyk-op-Zee et dont le squelette est conservé au Musée de Leide; notre dessin est fait également d'après une femelle, échouée à Ostende et dont le squelette ainsi que la peau montée se trouvent au Musée de Bruxelles. La différence que l'on remarque entre ces deux femelles, c'est que celle qui a échoué à Ostende est un peu plus trapue et que sa nageoire dorsale est comparativement plus grande et plus droite.

La science est depuis peu en possession d'un autre bon dessin fait d'après nature d'un jeune Orque mâle, capturé dans les eaux de la Garonne le 11 juin 1876 <sup>2</sup>.

Le Dauphin capturé le 22 juin 1787, dont parle l'abbé Bonnaterre sous le nom de *Feres*, était également un Orque qui se trouvait au milieu d'une troupe nombreuse dans le golfe de Fréjus. La prise de ce Cétacé a la plus grande analogie avec la prise de l'Orque dans la baie de Kiel en novembre 1861.

« Le 22 juin 1787, dit l'abbé Bonnaterre, un bâtiment qui venait de Malte, ayant mouillé dans une petite plage de la Méditerranée, voisine de Saint-Tropès, du département du Var, fut bientôt environnée d'une troupe nombreuse de Cétacés, suivant une relation adressée par M. Lambert, habitant de Saint-Tropès, à un chanoine de Fréjus et envoyée par ce dernier au professeur Bonnaterre <sup>3</sup>.

Le *Dauphin ferès* fournit les caractères suivants : Dents  $\frac{10}{10}$ , dont cinq sont semblables et plus grosses que les autres. La partie de chaque dent que l'alvéole renferme est égale à celle qui sort, et représente un cône recourbé

<sup>1</sup> *Hist. nat. des Cétacés*, p. 178.

<sup>2</sup> D<sup>r</sup> SOWERBIE, *Capture d'un Orque*, ACT. SOC. LINN. DE BORDEAUX, 1876.

<sup>3</sup> BONNATERRE, *Encyclopédie méthodique*.

et un peu aplati; l'autre partie est arrondie à son sommet, ovoïde ET DIVISÉE EN DEUX PAR UNE RAINURE LONGITUDINALE. »

Fréd. Cuvier a reproduit intégralement ce que Bonnaterre rapporte de cette espèce <sup>1</sup> et son frère suppose, dans ses *Recherches sur les ossements fossiles* <sup>2</sup>, que le *Dauphin ferès* de Bonnaterre se rapproche des *Globiceps*. Il est vrai, G. Cuvier trouve que les dents du *Ferès* ne correspondent pas avec celles du *Globiceps*, mais il ne songe pas que ce que Bonnaterre dit des dents ne s'applique guère qu'à l'Orque.

G. Cuvier a eu bien raison de dire à cette occasion : « ... Dans une circonstance, où les témoignages précis nous abandonnent, au lieu de nous livrer à des conjectures qui ne feraient peut-être que reproduire une confusion nouvelle, nous nous bornerons à décrire positivement les objets sur lesquels nous avons des notions certaines et intuitives. » Et en partant de ce principe il décrit l'Orque ou l'Épaulard, le même dont une partie du squelette est encore conservée au Muséum.

Jusqu'aujourd'hui le Muséum de Paris ne possède pas encore un squelette complet et bien conservé de ce Cétodonte.

Les Orques sont répandus dans toutes les mers : Fabricius <sup>3</sup> et Holböll les ont observés dans le détroit de Davis, Pallas dans la mer d'Okhotsk, Chamisso dans la mer de Chine; le capitaine Scammon fait mention d'un Orque dans le Golfe de Georgia, « about the northern end of van Couver Island; » Steindaehner a rapporté une superbe tête d'*Orca* de Californie sous le nom d'*Orca Atra*; Tilesius en signale dans l'Océan Pacifique, Eydoux sur la côte du Pérou, Verreaux et Castelnau en ont rapporté des crânes du cap de Bonne-Espérance, et tout récemment le professeur Flower en a reçu de la Tasmanie où ils font même l'objet d'une pêche régulière; le British Museum a reçu des crânes des îles Seychelles et sur la côte ouest de Ceylan M. Holdsworth a observé le 7 avril 1868 un Cétacé qui, d'après la nageoire dorsale, ne peut être qu'un Orque <sup>4</sup>.

<sup>1</sup> *Hist. nat. des Cétacés*, p. 219.

<sup>2</sup> Vol. V, p. 287.

<sup>3</sup> Cuvier pense que l'*Orca* de Linné est celui des anciens et non celui de Fabricius.

<sup>4</sup> Note of a Cetacean observed on the West Coast of Ceylan, P. Z. S., 1872, p. 585.

Il est à remarquer que la distribution géographique des Orques, pour autant qu'elle est connue, est, à peu de chose près, celle des Globiceps.

Malheureusement aucune de ces espèces n'est suffisamment représentée, même dans les Musées de Londres et de Paris, pour apprécier l'importance des modifications que l'on observe ; il en est sans doute de ces Amphithériens comme des Géothériens : telle espèce est sujette à de grandes variations, telle autre est partout et toujours la même et cette connaissance est de première importance pour juger si les variations sont individuelles, locales ou spécifiques.

Fréd. Cuvier prétendait qu'il n'était pas certain que l'Épaulard se trouve dans la Méditerranée ; il n'y a pas plus de doute aujourd'hui pour l'Orque que pour le Grindewall : Paul Gervais a déposé, au Muséum de Paris, le crâne de l'Orque pris sur la côte de Cette, et nous possédons à Louvain un squelette complet de Grindewall, capturé dans les mêmes parages.

En Europe on trouve ainsi les Orques comme les Globiceps sur la côte de Norwège et de Suède, dans la mer du Nord, dans la Manche et dans la Méditerranée.

Depuis le commencement de ce siècle quatre Orques sont venus se perdre sur nos côtes et, grâce au zèle de feu Paret, les squelettes en ont été conservés. Ce sont les squelettes de ces quatre individus qui font le sujet principal de ce travail<sup>1</sup>.

Nous avons voulu savoir si ces quatre Orques appartiennent à la même espèce, ou, si parmi ces animaux il y a lieu de distinguer des *Zweërdfisch* et des *Gladiator*.

Vient ensuite la question si les Orques, observés dans l'Atlantique depuis les côtes du Groënland jusqu'à la Méditerranée comme ceux qui se sont fait prendre dans la Baltique, appartiennent à une seule et même espèce.

Le docteur E. Gray est un des premiers, si pas le premier, qui a établi diverses espèces d'Orques, et, depuis lors, le professeur Lilljeborg a fait connaître les caractères propres de celles qui habitent les côtes de Norwège.

<sup>1</sup> Depuis que ces lignes sont écrites, un jeune individu a été capturé en avril 1874 sur les côtes de la Zélande. Son squelette est au Musée de l'Université de Liège.

M. Lilljeborg en admet deux, l'une à nageoire dorsale en forme d'épée qui lui a valu dans tout le Nord le nom de *Schweerdtfisch*, le *Grampus gladiator*, avec douze côtes et une tache ronde au cou; l'autre à nageoire dorsale plus courte et moins effilée, le *Grampus orca*, qui n'a que onze côtes et point de tache ronde à la nuque.

Nous allons d'abord donner la description des squelettes d'Orques échoués sur nos côtes; nous dirons ensuite quelques mots de ceux qui sont venus se perdre en Europe et dont les os ont été conservés.

Nous consacrerons un chapitre à leur système de coloration et nous examinerons ensuite la question des espèces.

## § II.

### DESCRIPTION DES QUATRE SQUELETTES RECUEILLIS EN BELGIQUE.

Nous donnons dans ce paragraphe la description des quatre squelettes d'Orques recueillis sur les côtes de Belgique dans le courant du siècle par Paret, de Slykens. Un de ces squelettes est d'un mâle adulte et se trouve au Musée de Louvain; un autre de femelle, également adulte, est au Musée royal de Bruxelles ainsi qu'un squelette d'un jeune animal dont nous reproduisons la figure. Le quatrième squelette d'un animal à peu près adulte se trouve au Musée de Gand; nous allons les faire connaître successivement.

#### A. — *Squelettes de deux individus échoués près du port d'Ostende, conservés l'un à Bruxelles, l'autre à Louvain.*

Ces squelettes proviennent de deux animaux adultes; l'un d'une femelle, trouvée morte sur l'estran en 1848; il est conservé au Musée royal à Bruxelles; l'autre est celui d'un mâle trouvé également sur la plage près d'Ostende et qui est conservée au Musée de Louvain. Ils proviennent tous les deux de la collection de Paret à Slykens.

Les deux squelettes ont à peu près la même longueur et mesurent ap-



proximativement 5 mètres et demi. Nous ne pouvons donner la mesure exacte, parce que l'on a négligé de la prendre sur le cadavre et l'on n'a pas tenu exactement compte, en montant les squelettes, de la distance qui sépare les disques intervertébraux.

En comparant le crâne des deux squelettes adultes et de sexe différent, nous trouvons certaines modifications qu'il n'est pas sans intérêt de signaler, d'autant plus que ces animaux devaient avoir à peu près le même âge.

Le rostre est un peu plus étroit dans le mâle tout en étant un peu plus élargi en avant, et il a l'air d'être plus allongé que dans la femelle.

Les deux intermaxillaires se terminent en haut autour des événements de la même manière dans les deux sexes; celui de droite est plus étroit et remonte moins haut que celui de gauche.

L'os maxillaire dans toute la partie qui recouvre le frontal est plus allongé d'avant en arrière dans le mâle et la saillie antérieure qui recouvre la portion élargie et antérieure de l'os malaire, est notablement plus rugueuse et plus forte dans le mâle.

Les deux crânes, vus de profil, montrent fort peu de différence. Le mâle a le maxillaire supérieur un peu plus élevé et par conséquent un peu plus fort que la femelle. L'os malaire, comme toute l'arcade orbitaire et l'apophyse antérieure du temporal offrent exactement la même conformation.

D'après Eschricht le type normal des dents serait de treize, dont la première surtout, puis les deux dernières, ne se développeraient pas complètement. Dans son opinion ces Cétacés auraient donc pour formule dentaire  $\frac{10}{10}$ . On trouve cependant plus souvent  $\frac{11}{11}$  et ne serait-il pas plus juste de ne voir qu'une seule dent en arrêt de développement ?

C'est entre les nombres 10 et 13 que nous voyons les dents varier.

Les crânes de Leide et de Paris comme celui de 31 pieds, pris à Greenwich en 1793, que Lacépède a décrit, ainsi que les deux qui nous occupent, ont  $\frac{12}{12}$ , dont les deux antérieures et supérieures sont fort petites et cachées en partie dans les gencives. La formule est la même dans les deux sexes.

L'Orque décrit par Hunter n'avait que  $\frac{11}{11}$ <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Le crâne rapporté d'Algoa-Bay par J. Verreaux n'en a que  $\frac{10}{10}$ , tandis que celui du Chili, rapporté par Eydoux et qui est adulte, en a  $\frac{13}{11}$ .

Dans le jeune squelette que nous décrivons plus loin il y a une dent de plus au maxillaire supérieur, de manière qu'une des dents disparaît avec l'âge, et le nombre devient normal.

Indépendamment de leur nature, ces dents sont distinctes de celles de tous les autres Cétacés; leur racine est fort grande et dans toute leur longueur, un sillon plus ou moins profond la divise en des lobes, surtout à la face postérieure; les dents de devant sont encore arrondies par leur face antérieure que déjà la face postérieure montre un sillon longitudinal.

Elles sont toutes un peu plus fortes dans le mâle que dans la femelle, mais ce qui les distingue surtout, c'est que la couronne est usée notablement aux deux mâchoires chez le mâle jusque vers le milieu du maxillaire, tandis que la femelle a les dents peu usées et seulement les trois ou quatre antérieures.

Nous n'oserions affirmer que cette différence n'est pas plutôt individuelle que sexuelle.

C'est ce caractère si remarquable des dents d'Orque dont nous parlons plus haut, que Bonnaterre veut exprimer, sans doute, à propos du *Dauphin ferès*<sup>1</sup>: *La partie qui est à découvert, dit-il, égale en longueur celle qui entre dans la gencive; elle est d'une figure ovale, arrondie au sommet, et comme divisée en deux lobes par une rainure qui règne sur toute la longueur.*

Dans les Orques que nous avons sous les yeux, les racines sont comparativement plus fortes que la couronne, mais elles ne sont qu'en partie logées dans les alvéoles; la couronne et la partie de la racine, non enchâssée, peut égaler celle qui entre dans l'alvéole. Bonnaterre aura pris le mot gencive pour alvéole.

Nous comptons dans la colonne vertébrale cinquante vertèbres, mais il est évident, d'après la dimension de la dernière vertèbre, que la colonne vertébrale n'est pas complète. A en juger par analogie, par le volume de la dernière vertèbre ainsi que par la surface articulaire et les trous, nous croyons qu'il en manque deux; ce qui élève le nombre à cinquante-deux. C'est en effet le nombre que Schlegel a trouvé dans la femelle d'Orque échouée à *Wyk-op-Zee*.

<sup>1</sup> Nous avons parlé déjà de ce Dauphin de l'abbé Bonnaterre dans une Notice sur le *Grampus griseus*, BULLET. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 2<sup>me</sup> série, t. XLI, avril 1876.

Dans le jeune squelette dont nous donnons plus loin la description il existe cinquante et une vertèbres dont la dernière est extraordinairement petite.

Ces vertèbres sont réparties ainsi : sept dans la région cervicale, onze dans la région thoracique, dix dans la région lombaire et vingt et une dans la région caudale.

En prenant pour base les trous qui livrent passage aux vaisseaux, à l'origine des apophyses transverses ou aux corps des vertèbres, on élèverait le nombre des vertèbres lombaires de trois. Schlegel pense que ces trois premières vertèbres qui portent des os en V sont situées devant les os du bassin et au-devant de l'anus. Mais le bassin peut aisément être déplacé au milieu de toutes ces parties molles.

La région cervicale a ses vertèbres partiellement soudées et, ce qui n'est pas sans intérêt, c'est qu'il existe une différence, sous ce rapport, entre le mâle et la femelle. Le mâle a les trois premières vertèbres sinon complètement soudées les unes aux autres, du moins légèrement réunies; en effet, le corps de la troisième est encore libre, tandis que son apophyse épineuse est soudée aux deux apophyses épineuses de l'atlas et de l'axis. Les quatre vertèbres qui suivent sont complètement séparées. Les apophyses épineuses s'allongent depuis la première jusqu'à la septième vertèbre.

Dans la femelle, les quatre premières vertèbres cervicales sont soudées entre elles : les deux premières complètement par le corps et les apophyses, les deux suivantes par les apophyses épineuses supérieures seulement.

Les deux suivantes, c'est-à-dire la cinquième et la sixième sont soudées de la même manière par les apophyses épineuses.

La septième seule est complètement libre.

Dans la femelle, dont nous parlons plus loin, les trois dernières vertèbres sont complètement libres.

Il y a donc, sous ce rapport, de grandes différences entre ces deux squelettes.

Les autres vertèbres sont un peu plus petites et plus délicates dans la femelle que dans le mâle.

Ce que l'abbé Bonmatte dit des premières cervicales soudées du *Dauphin feres* vient confirmer la détermination que nous avons faite d'après les dents.

Nous comptons onze vertèbres dorsales. Le corps de la première est à peine plus épais que celui de la septième cervicale, mais il s'épaissit successivement, de manière que les deux dernières ont le double d'épaisseur de la quatrième et de la cinquième.

Les apophyses épineuses de ces vertèbres s'élèvent successivement depuis la première jusqu'à la dernière, en même temps qu'elles prennent plus de développement d'avant en arrière.

Les vertèbres de la région lombaire ont, à peu de différence près, l'épaisseur de la dernière dorsale, et diffèrent entre elles par les apophyses épineuses comme par les apophyses transverses; celles-ci diminuent insensiblement d'avant en arrière. Il est presque inutile de faire remarquer que le canal vertébral se rétrécit insensiblement à commencer par la première vertèbre de cette région.

Nous comptons neuf vertèbres lombaires.

Depuis la première vertèbre caudale, les apophyses épineuses et transverses, ainsi que le canal vertébral vont toujours en diminuant, mais le corps de la vertèbre gagne en diamètre vertical jusqu'à la neuvième qui a, par conséquent, la surface articulaire la plus étendue de toute la colonne vertébrale.

A la seizième vertèbre lombaire, le corps perd en hauteur pour gagner en largeur et les dernières, qui ne possèdent plus ni apophyses ni canal vertébral, sont le double plus larges que hautes.

Nous comptons dix os en V qui varient notablement de forme. Les derniers sont seuls séparés.

Les côtes au nombre de onze, comme dans le squelette du Musée de Leyde, n'ont rien de remarquable. Les sept premières ont une double surface articulaire pour s'articuler à la fois avec le corps des vertèbres et leurs apophyses transverses; les quatre suivantes ne sont unies qu'avec l'apophyse transverse.

Ces os vont en diminuant d'épaisseur depuis la première jusqu'à la dernière.

Les dix premières s'unissent directement au sternum par des côtes sternales osseuses comme dans tous les vrais Cétodontes; ces côtes sternales

s'allongent de plus en plus à commencer de la première et gagnent en longueur ce qu'elles perdent en épaisseur.

La dernière côte est un peu plus faible dans la femelle que dans le mâle.

Le sternum est formé de trois pièces : l'antérieure, la plus grande, est légèrement échancrée en avant et n'a pas de trou sur la ligne médiane ; la seconde pièce est aussi large que longue et a ses angles coupés pour l'insertion des côtes. La troisième pièce est plus large que longue et porte trois paires de côtes.

Dans le squelette qui est au Musée de Bruxelles le sternum n'a que deux pièces, à peu près de longueur égale ; les deux postérieures sont soudées et si complètement, qu'on ne découvre aucune trace de leur coalescence. Cette dernière s'articule avec quatre paires de côtes, tandis que la première ne s'articule qu'avec deux paires.

Ainsi dans le squelette mâle que nous décrivons, le sternum est formé de trois pièces distinctes, tandis que dans celui de la femelle les deux dernières pièces sont réunies. Dans l'individu de Leyde, échoué en 1844, ce sont les deux pièces *antérieures* qui sont soudées. Nous trouvons ainsi dans ces trois squelettes des différences dans le sternum.

Les deux os du bassin présentent de notables différences dans les deux sexes sous le rapport de leur volume : ils sont tous les deux le double plus forts dans le mâle que dans la femelle et ceux du mâle ont en même temps un peu plus de longueur. Leur forme diffère très-peu.

Nous ne trouvons aucune différence dans les os hyoïdes.

La nageoire pectorale est fort remarquable par sa brièveté et par sa forme ovale et, si, sous quelques rapports, les Orques se rapprochent des Grindewalls, ils s'en éloignent au contraire beaucoup par les nageoires. Les Grindewalls, comme on sait, se distinguent de tous les autres par la forme effilée du membre antérieur.

Le squelette de la nageoire traduit parfaitement cette forme particulière ; les doigts des Orques sont fortement écartés les uns des autres et l'espace carpien est fort large.

L'humérus se fait remarquer par sa forme massive et le grand développement de ses tubercules. Il est relativement court.

Le radius constitue une masse carrée un peu plus longue que large et touche le cubitus dans toute sa longueur.

Le cubitus a la moitié de la largeur du radius. L'apophyse olécrânienne est médiocrement développée.

Le procarpe est fort remarquable par le peu de développement des os. M. Van Bambeke a fait observer avec raison la disposition exceptionnelle de ces osselets dans le squelette de l'Université de Gand.

Dans la publication posthume d'Eschricht, *Von Spækhuggeren* (1862), figure une nageoire pectorale d'Orque qui montre bien la division des cartilages, mais qui n'a, comme le précédent, qu'un seul os développé. Dans la nageoire de Gand, l'os est également unique et ne représente ni le *radial* ni le *cubital*, c'est un *intermédial*. Le squelette mâle de Louvain n'a aussi qu'un seul os, un intermédial.

A Copenhague, nous avons trouvé un beau squelette d'Orque, très-adulte, et qui porte des deux côtés cinq os carpiens fort distincts.

Le mésocarpe n'a point d'os distinct, mais il existe cinq métacarpiens fort bien développés.

Les doigts sont, comme dans tous les Cétodontes, au nombre de cinq : le pouce, en dehors du métacarpe, ne comprend qu'une seule phalange; l'index en compte quatre parfaitement développées; le médian n'en a que trois; l'annulaire deux, et le petit doigt une seule.

Ainsi le petit doigt ne compte, comme le pouce, qu'une seule phalange, et le nombre va en diminuant de l'une à l'autre, depuis l'index jusqu'au petit doigt inclusivement.

La nageoire figurée par Eschricht comprend un nombre de phalanges plus considérable : le premier doigt en a six, le second quatre, le troisième trois et le dernier deux.

Il n'est pas sans importance de faire remarquer que, si les os de la région carpienne sont peu nombreux dans la femelle, les doigts ont également tous une phalange de moins que dans le mâle; ainsi le pouce, comme le petit doigt, n'en a qu'une seule en dehors du métacarpien; l'index en a quatre parfaitement développées; le médian trois, et l'annulaire seulement deux.

Nous ferons encore remarquer que toutes ces phalanges sont fort éloignées les unes des autres, et, au lieu d'être liées entre elles par un cartilage, elles semblent plutôt logées dans une vaste gangue cartilagineuse commune.

B. — *Squelette d'Orque de l'Université de Gand.*

Ce squelette provient d'une femelle échouée vivante sur nos côtes à une lieue d'Ostende, et mesurait 5 mètres. Il a été préparé, comme les précédents, par les soins de Paret.

Les épiphyses des vertèbres et les nageoires pectorales indiquent que l'animal n'était pas complètement adulte.

Il est assez complet. Toutes les dents sont restées en place.

La tête montre jusque dans ses plus petits détails une légère différence si nous la comparons avec la tête du mâle. Les cinq premières dents en bas et les trois premières en haut ont leur couronne usée ; les maxillaires supérieures et inférieures sont un peu plus faibles ; toutes les saillies, et surtout les saillies formées au-dessus des orbites par le maxillaire supérieur, sont plus fortement accusées. Enfin, la taille de l'animal, comme la dimension de la tête est moins forte que dans le mâle dont nous parlons plus haut.

Les dents, comme nous venons de le dire, sont toutes en place et l'on peut, par conséquent, se faire une bonne idée de leur disposition. Elles sont au nombre de treize au-dessus et de douze au-dessous, et elles sont toutes moins fortes que dans le mâle. La première de dessus est très-petite. Le même nombre se reproduit des deux côtés et à gauche en bas et en arrière la dernière molaire est située au devant de l'avant-dernière supérieure. Les trois premières inférieures et surtout les deux antérieures ont leur couronne fortement usée. Les suivantes n'ont plus que la pointe usée et les autres ont la couronne complète.

Les vertèbres sont au nombre de quarante-neuf ; il en est resté deux dans la nageoire caudale qui n'ont pas été retrouvées.

Les vertèbres sont plus délicates et plus minces que dans le mâle, surtout

les quatre premières cervicales. L'atlas a son échancrure qui livre passage à l'artère vertébrale mieux prononcée.

Les quatre premières cervicales sont soudées entre elles, de manière que le corps des deux dernières est parfaitement distinct, ainsi que la base de l'arc, tandis que les apophyses épineuses supérieures de toutes les quatre sont soudées les unes aux autres. Les trois autres vertèbres qui suivent ont à peu près le corps aussi gros que la troisième et la quatrième et les apophyses épineuses supérieures sont un peu moins élevées.

La septième est un peu plus épaisse, l'apophyse épineuse plus allongée, et l'apophyse transverse forme une véritable empaumure.

Le canal vertébral de la septième vertèbre est le plus grand, puis il se rétrécit jusqu'au bord de l'atlas. C'est là qu'il est le plus étroit.

Ce canal a 75 millimètres en hauteur et 70 millimètres en largeur.

La septième cervicale a une empaumure qui fait la transition à l'apophyse transverse des vertèbres dorsales. Cette empaumure est échancrée du côté droit, mais pas du côté opposé.

Les deux premières vertèbres dorsales sont également plus minces, ainsi que leurs apophyses articulaires.

Les deux premières dorsales, ainsi que les suivantes, augmentent insensiblement en épaisseur. Les apophyses articulaires sont assez fortes. Les apophyses épineuses des deux premières dorsales sont dirigées, l'une d'avant en arrière, l'autre d'arrière en avant.

C'est à peine si dans les vertèbres lombaires, on voit encore les deux apophyses articulaires antérieures qui sont presque à la hauteur de la pointe de l'apophyse épineuse. Dans le mâle, ces apophyses sont notablement plus bas.

Les os en V ou en chevrons sont au nombre de onze. Ils diffèrent notablement de forme entre eux. Le premier, qui est encore adhérent à la vertèbre, a la forme la plus singulière que nous ayons vue jusqu'à présent. Il ressemble à un bouclier ou à un plastron semblable à un sternum sans bréchet, montre en avant sur le côté deux branches disposées comme un coracoïde d'oiseau et qui s'articulent séparément au corps de la vertèbre. En arrière deux autres apophyses s'étendent librement au-dessous de la vertèbre suivante et ces quatre apophyses donnent à cet os la forme d'un X.



On dirait deux os du bassin qui seraient soudés au milieu.

Les côtes sont au nombre de onze de chaque côté. Les six premières sont complètes et s'articulent avec le sternum, les cinq autres ont leur bout inférieur libre, de manière qu'il y a cinq paires de fausses côtes.

Le sternum est formé seulement de deux pièces sans cependant qu'il y ait coalescence des deux pièces inférieures.

L'omoplate de droite offre les deux apophyses très-bien développées; sa forme n'a rien de particulier.

L'humérus est court et ramassé. Les deux os de l'avant-bras sont de même très-forts.

Il n'y a qu'un seul os dans la région carpienne et encore est-il fort petit, comme M. Van Bambeke l'a fait connaître. Nous trouvons exactement la même chose dans une nageoire d'Orque du Musée de Cambridge.

Le pouce a un métacarpien et une seule phalange peu développée.

L'index, qui est le plus long de tous, ne compte, outre le métacarpien qui est le plus fort de tous les métacarpiens, que trois phalanges, la moitié seulement de celui de Copenhague.

Le médian a un métacarpien plus long que les autres doigts et deux phalanges.

L'annulaire n'a qu'une seule phalange.

Le petit doigt n'est représenté que par le métacarpien sans phalanges.

Les os du bassin se ressemblent beaucoup entre eux; l'un est seulement un peu plus long que l'autre; chacun d'eux mesure environ 12 centimètres en longueur. Au milieu ils sont larges de 1 centimètre; en arrière ils se courbent et s'élargissent légèrement en s'aplatissant et tournent leur pointe, la partie la plus étroite de tout l'os, légèrement en dehors.

Ces os sont beaucoup plus petits et moins forts que dans le mâle.

Cette observation de la différence des os du bassin d'après les sexes a été faite déjà par Eschricht.

Dans son Mémoire sur les Cétacés des Musées de Suède, *Hvaldjur i sveriges Museer*, 1869, M. Malm communique le résultat de ses observations sur le Carpe et le Bassin.

C. — *Squelette du jeune Orque.*

Si nous ne nous trompons, ce jeune Orque a été pris vivant avec sa mère en 1843-1844 à une lieue de la ville d'Ostende; un dessin fort exact en a été fait d'après nature par Van Cuyt, planche I; la peau et le squelette en ont été conservés et sont déposés aujourd'hui au Musée de Bruxelles.

Le squelette est complet planche II. Toutes les pièces sont encore en place, manière que l'on ne peut se tromper sur leurs rapports.

Les dents sont complètes et conservées; nous en comptons treize au-dessus et douze au-dessous, fort peu différentes entre elles par leur dimension, si ce n'est les deux premières supérieures qui sont fort petites. C'est le même nombre que chez l'adulte, du moins quant à celles du maxillaire inférieur; le maxillaire supérieur en a quelquefois une de moins à l'âge adulte.

Les sept vertèbres cervicales ont une grande ressemblance entre elles et les apophyses épineuses supérieures diffèrent fort peu les unes des autres, tant sous le rapport de leur longueur que de leur coalescence. Les modifications de quelques-unes de ces apophyses ne surgissent qu'à un âge plus avancé.

Il existe onze vertèbres thoraciques et, par conséquent, onze côtes, dont six s'articulent directement avec le sternum.

Les onze vertèbres dorsales sont suivies de trente et une vertèbres qui se répartissent ainsi: douze vertèbres lombaires, ne portant ni côtes ni os en V; neuf vertèbres portant, au contraire, des os en V qui vont en diminuant depuis le premier jusqu'au dernier; douze vertèbres sont sans os en V et ce nombre constitue donc la région caudale proprement dite.

Nous trouvons donc en tout dans la colonne vertébrale cinquante et une vertèbres comme nombre normal.

Le sternum est formé de trois pièces distinctes qui n'ont pas encore leur forme définitive. La femelle de 16 pieds de long, observée par Schlegel, a les deux pièces antérieures du sternum réunies.

Nous ne voyons aucune disposition dans les os des membres qui mérite une mention spéciale, pas plus que dans l'arrangement des os du carpe et du métacarpe.

Voici toutefois la disposition des phalanges et des métacarpiens. Il n'y a pas d'os proprement dit du carpe. Le pouce a deux phalanges; l'index, six; le médian, quatre; l'annulaire, trois; et le petit doigt deux comme le pouce.

Les deux os du bassin sont conservés et, d'après leur dimension, ils sont d'un mâle.

Le squelette mesure en tout 2<sup>m</sup>,05.

### § III.

#### LES ORQUES OBSERVÉS OU CAPTURÉS DANS LES MERS D'EUROPE.

Passons en revue les divers Orques échoués ou harponnés dans les mers d'Europe, et dont les débris sont conservés ou dont les auteurs ont fait mention.

Claas Mulder a publié, en 1836, une Notice fort intéressante sur les Cétacés des côtes des Pays-Bas. Cette Notice est publiée à l'occasion d'un travail de M. Bodel-Nyenhuis sur les Cétacés qui ont échoué sur ces mêmes côtes depuis les temps les plus reculés; ce travail est écrit au point de vue de l'histoire de la géographie physique du pays.

Claas Mulder fait mention d'abord d'un Orque, pris le 15 avril 1832, près de *Zwarte Haan*, et dont il a fait l'acquisition pour sa collection. Il en a parlé dans les nos 37, 43, 45 et 47 du *Courrier de Leeuwaerden*, 1832, et dans le *Letterbode* de la même année, nos 19 et 20<sup>1</sup>. On appelait cet animal *een Tonijn*, dit-il, ou bien *Zabelvisch*.

Un autre Orca, cité par Claas Mulder, paraît avoir échoué *op de Engelsche Plaat*, en 1811. La tête et douze vertèbres en ont été vendues. Ces os sont indiqués dans le catalogue du Dr Quæstius, dans le n° 773, page 41.

Le Musée de Leyde est en possession de deux squelettes dont l'un n'est pas tout à fait complet, mais qui montre cependant douze côtes; l'autre est

<sup>1</sup> CLAAS MULDER, *Iets over walvischaardige dieren, op de kusten van Nederland van tyd tot tyd gestrand of gevangen*, LETTERBODE, 1856.

parfaitement conservé. Il existe neuf vertèbres lombaires dans le premier. Le dernier provient de la femelle que Schlegel a représentée <sup>1</sup> et qui est venu échouer en novembre 1841, à Wyk-op-Zee.

Ce Musée contient, en outre, deux crânes assez grands dont l'un est un peu défectueux dans la partie supérieure qui entoure l'évent.

En 1759, un mâle de 24 pieds de long, à nageoire dorsale élevée, s'est fait prendre à l'embouchure de la Tamise. Il avait plusieurs Marsouins dans son estomac. Hunter en a donné une bonne description et une excellente figure <sup>2</sup>.

Quelques années après (1772), un autre individu de 18 pieds seulement et à nageoire dorsale basse s'est fait prendre dans la Tamise même, et, comme le précédent, tomba heureusement entre les mains du même naturaliste. Hunter l'a également représenté.

Un troisième fut pris dans la Tamise devant Greenwich en 1793; il faisait partie d'une bande de cinq ou six; il mesurait 31 pieds; c'est celui dont sir John Banks a envoyé la figure à Lacépède <sup>3</sup> qui l'a fait graver. La description vaut mieux que la figure qui n'est évidemment pas faite d'après nature, puisqu'il n'est tenu aucun compte de la distribution si caractéristique des couleurs.

Le 19 novembre 1830, un mâle de 21 pieds a été capturé par des pêcheurs dans le havre de Lynn; c'est de lui que nous avons parlé plus haut et dont Dewhurst donne un dessin sur bois. Le crâne de cet individu est conservé dans la collection de M. Bell <sup>4</sup>.

En 1864, une petite bande a paru *in the Parrett*, près de Bridgewater; les individus qui la composaient variaient de 11 à 12 pieds de longueur <sup>5</sup>.

M. Couch a également signalé des Orques sur la côte de Cornouailles.

<sup>1</sup> *Abhandlungen aus dem Gebiete der Zoologie und vergleichenden Anatomie*. Leiden, 1841, II<sup>es</sup> Heft, pl. VII.

<sup>2</sup> *Phil. Transactions*, 1787, pl. V, fig. 1-2.

<sup>3</sup> LACÉPÈDE, *Cétacés*, p. 504, pl. V, fig. 126.

<sup>4</sup> *Some account of a Grampus recently captured in Lynn Harbour*, LONDON'S MAG. OF NAT. HIST., 1851, t. IV, p. 558.

<sup>5</sup> *A School of ten in the Parrett, near Britgewater, 24 march 1864 (J. CLARK) varying from 11 to 22 feet long*. GRAY, ON BRIT. CETAC., PROC. ZOOL. SOC. May 24, 1864, p. 50.

Le Musée britannique possède un squelette de 20 pieds de long, de Weymouth, qui a été offert par M. R. Pearce, Esq., un crâne de la côte d'Essex, provenant de la collection de M. Cross et un autre crâne de la collection de M. Turner.

On trouve des Orques aux Musées de Bergen, de Lund et de Christiania (V. Lilljeborg). On trouve également une tête et les principales parties du squelette d'un Orque, pris dans la Baltique, au Musée de Greifswald.

L'Orque conservé à Lund est probablement celui dans l'estomac duquel Nilsson a trouvé plusieurs Phoques.

Le Musée de Stockholm renferme plusieurs beaux squelettes d'Orque provenant surtout de la côte de Fimmarken; nous y avons vu une tête qui a au moins 4 pieds de long.

Les Orques se montrent de temps en temps aux îles Feroë; en 1838, Eschricht en a reçu trois têtes à la fois qui étaient parfaitement bien conservées. Je pense qu'une de ces têtes se trouve aujourd'hui au Musée de Stuttgart.

L'Orque est connu également sur la côte du Groënland; Ot. Fabricius le cite sous le nom de *Physeter microps*, croyant qu'il n'a pas de dents au maxillaire supérieur. Ot. Fabricius lui accorde comme pâture des Phoques, des Marsouins, des Béluga et jusqu'à des Baleines, ce qui prouve clairement que ce n'est pas d'un *Physeter* qu'il s'agit, puisque le *Physeter* ne mange que des Céphalopodes.

Martens, en parlant du Grindewall, fait mention d'un Dauphin dont la nageoire dorsale est trois fois plus élevée que celle du Globiceps; il lui trouve une couleur plus foncée que ce dernier, mais il atteint une longueur à peu près égale; on voit par ce caractère de la nageoire dorsale seule qu'il veut parler de l'Orque. Il est probable qu'il n'a vu cet animal que dans l'eau et qu'il n'a pu juger de ses couleurs que par la peau de la tête et du dos.

Nous avons fait mention plus haut des observations de Holböll sur la présence des Orques dans les parages de Godhavn.

On connaît aussi quelques Orques échoués à l'ouest sur des côtes de France et dans la Manche.

Nous avons vu plus haut que Du Hamel, dans son *Traité général des*

*pêches* <sup>1</sup>, figure, sous le nom de *Cachalot d'Anderson*, un Orque qu'il est facile de reconnaître à son système de coloration. Ce dessin est bien fait. Il a été exécuté d'après un animal qui avait échoué près de Vannes, à l'embouchure de la Loire; nous ne trouvons aucune indication que des os en aient été conservés.

Au Musée de Boulogne-sur-Mer on voit un jeune Orque monté, ainsi qu'une tête d'adulte mutilée. Ce sont évidemment des individus pris dans ces parages.

D'après ce que rapporte le *Courrier de Bretagne*, le 19 juillet 1864, on a trouvé échoué dans les vases sur la côte de Plélan, un poisson énorme ressemblant à une Baleine; il avait 7 mètres de longueur et l'on présume que c'est un Souffleur. Il avait le ventre blanc, le dos noir et deux taches blanches sur le cou; ses dents très-usées faisaient supposer, dit le journal, qu'il était vieux <sup>2</sup>. Les taches blanches sur le cou et la taille ne nous laissent pas de doute sur la nature de cet animal; c'est évidemment un Orque qui est venu se perdre là. Nous ne croyons pas que l'on en ait conservé quelques débris.

Il est assez étonnant, comme nous l'avons fait remarquer plus haut, qu'il n'y ait pas un squelette bien conservé d'Orque au Muséum à Paris. Le plus complet qui s'y trouve ne comprend que le crâne et une partie de la colonne vertébrale; il est placé debout au fond de la salle à côté de la tête du Cachalot. Les dents sont  $\frac{1\frac{3}{2}}{1\frac{0}{2}}$ , quoique la figure donnée par Cuvier n'en représente que  $\frac{1\frac{0}{2}}{1\frac{0}{2}}$ . A en juger par les surfaces articulaires, il existe au moins dix côtes. Il est probable que ces débris proviennent d'un animal pris sur les côtes de France, mais on n'a conservé aucun renseignement sur son origine.

Le Dr Souverbie a lu une note à la Société linnéenne de Bordeaux sur la prise d'un jeune Orque mâle en rade de Bordeaux le 11 juin 1876. D'après le Dr Souverbie, cette espèce n'avait pas encore été observée sur les côtes à l'embouchure de la Garonne. Ses dents présentent la formule dentaire suivante :  $\frac{1\frac{1}{1}-1\frac{1}{2}}{1\frac{1}{1}-1\frac{1}{2}}$ . Il y a cinquante et une vertèbres et onze côtes.

<sup>1</sup> Tome IV, page 55, planche IX, figure 1

<sup>2</sup> *Courrier de Bretagne*, juillet, 1864.

On a tenu note de la capture de quelques Orques dans la Méditerranée. M. Cornalia cite ce Cétacé dans sa *Fauna d'Italia* sous le nom de *Delphinus orca*, mais sans faire mention d'une observation particulière.

Le Dauphin de Bayer, long de 14 mètres, qui a échoué à Nice en 1726, est, sans aucun doute, un Épaulard, dont les dimensions ont été exagérées.

Il y a environ trente-cinq ans un Épaulard a été pris à Cette (Hérault). M. Gervais a déposé la tête au Muséum d'histoire naturelle de Paris et en a donné une bonne figure <sup>1</sup>.

Il n'est plus douteux pour personne aujourd'hui que l'Orque visite la Méditerranée et le soupçon, que l'*Aries marinus* des anciens n'est autre chose que ce même Cétacé, paraît entièrement confirmé. La tache jaunâtre en forme de corne, que l'animal porte sur le côté de la tête et qui se détache nettement sur le fond noir de la peau, lui a valu ce nom. Pline, comme nous l'avons dit dans l'Introduction, en fait également mention en parlant d'un grand poisson échoué qui avait vomé des peaux.

Il ne sera pas sans intérêt pour la science de reproduire ici ce que feu Eschricht pensait des Orques.

Un télégramme du *Jutland* m'apprend, disait-il dans une de ses lettres, qu'une Baleine de 22 pieds venait d'être trouvée dans la mer par le propriétaire d'un château qui lui fit savoir que, s'il voulait partir de suite, l'animal resterait intact jusqu'à son arrivée. Puis il ajoute : « Je partis de suite. J'ai trouvé un Orque mâle. Quelle bête ! Ses couleurs étaient brillantes et rappellent la belle planche de Schlegel. Savez-vous ce qu'il avait dans son estomac ? Devinez s'il vous plaît : quinze Phoques et treize Marsouins. Voilà le quatrième squelette de mon musée. »

Quinze jours après il me disait dans une autre lettre : « Envoyez-moi un croquis des os du bassin de l'Orque et j'espère pouvoir vous dire si c'est d'un mâle ou d'une femelle. Chez le mâle, ils sont bien grands, mais celui-ci

<sup>1</sup> « Je ne connais sur nos côtes que deux captures certaines de ce grand Cétacé, dit Gervais ; un exemplaire a été pris à Cette (Hérault) vers 1840, un autre a échoué en face d'Elne (Pyrénées-Orientales) en 1857. » *Zoologie et paléontologie françaises*, p. 299, pl. XXXVII, fig. 5-4.

paraît être plus rare que la femelle. Rien de plus facile que de le reconnaître à sa nageoire dorsale. En le voyant, j'ai compris la chasse aux Phoques des Groënlandais quand ils sont arrêtés sur la glace. Vous vous souvenez qu'ils imitent cette nageoire par une rame perpendiculaire et colorée en noir. La vue de cette rame met tous les Phoques en fuite. »

Au mois d'octobre de la même année, Eschricht m'écrivit au sujet des Orques : *Je suis parvenu à distinguer quelques espèces.*

Dans la dernière lettre que j'ai reçue de lui, le 30 décembre 1862, après avoir mentionné ses embarras avec l'imprimeur et ses ennuis à Paris, il ajoute : « Bref, à mon retour (à Copenhague), j'avais à peu près perdu toute envie de continuer ce grand travail qui m'a occupé pendant si longtemps. Enfin, je me suis rétabli et j'y suis de nouveau. Seulement à chaque pas reviennent les scrupules; je vois mille choses à refaire, mille recherches à exécuter de nouveau. Est-ce la vieillesse qui commence à se faire sentir ? En mars prochain, je vais entrer dans ma soixante-cinquième année. » Puis il continue : « Pendant deux ou trois mois, j'ai été presque entièrement distrait par ces coquins d'Orques. Un zoologiste suédois, M. Lilljeborg, d'Upsal, avait insisté de nouveau sur la différence du Gladiateur et de l'Orque commun à nageoire dorsale plus basse. J'avais supposé que ce n'est qu'une différence de sexe, car, en effet, les uns, autant qu'ils ont été décrits, ont bien été des mâles, les autres des femelles. Cependant, il a bien fallu examiner de nouveau mes quatre squelettes, mes crânes et mes autres ossements provenant des Feroë. Il me semble qu'il y a là, non deux, mais trois espèces. Enfin, je m'y perds comme dans l'examen des Baleines à aileron. Il a fallu écrire en Norvège pour chercher de nouvelles instructions, faire un voyage en Suède; il faut examiner et comparer séparément les dents, les crânes, les extrémités, les vertèbres, mais je reviens toujours aux trois espèces. Voilà encore un mémoire qu'il faut terminer et qui me distrait beaucoup. »

Eschricht était en train d'étudier ces squelettes quand la mort est venue malheureusement l'enlever à la science et à ses nombreux amis. Il est mort dans le courant de janvier suivant.



## § IV.

## SYSTÈME DE COLORATION.

Nous avons déjà attiré l'attention des naturalistes sur le système de coloration des Cétacés. Les Orques méritent sous ce rapport une attention particulière; souvent ce sera le seul guide pour l'appréciation des affinités d'un animal dont on ne connaît que les caractères extérieurs. Certains genres, en apparence très-voisins, s'éloignent complètement les uns des autres par le système de coloration, comme les Pseudorques et les Grindewals.

Eschricht avait été frappé déjà de la coloration de certains fœtus; il avait eu l'occasion d'en voir plusieurs tout frais. Ces petits *Cochons de mer*, disait-il, en parlant des fœtus de Marsouins, sont décorés d'une manière bizarre de lignes fantastiques en forme de lunettes attachées sur le nez.

L'Orque est d'un beau noir dans toute sa partie supérieure, y compris les nageoires pectorale et dorsale, jaune dans toute sa partie inférieure, depuis le bout du menton jusqu'à l'anus et depuis la base jusqu'au bord de la nageoire caudale.

Sur le côté, cette couleur jaune remonte jusqu'à la commissure de la bouche, puis descend jusqu'à la nageoire pectorale, de manière que cette nageoire est presque complètement entourée de jaune à sa base. Derrière la nageoire pectorale, l'animal, vu de flanc, est tout noir et la bande de couleur jaune ne continue que sur la ligne médiane en se rétrécissant jusqu'au milieu de l'abdomen. Sur les flancs, au-dessus des organes sexuels, la bande jaune s'étend de chaque côté, se termine en arrière de façon à former un fer à cheval, de la concavité duquel part une petite bande qui va entourer l'anus et les organes sexuels. Toute la face inférieure de la nageoire caudale est jaune, tandis que la face supérieure est complètement noire. Au-dessus et en arrière de l'œil, il existe une grande tache jaune entièrement isolée et de forme allongée, terminée en pointe en arrière et que les anciens avaient comparée à une corne.

La différence que nous observons entre notre figure et celle de Schlegel au sujet de cette tache, c'est que dans notre jeune Orque elle est plus large au milieu, ressemble à un cœur, tandis que dans celui de Schlegel cette tache ressemble plutôt à une nageoire tronquée obliquement en avant. La place qu'elle occupe dans les deux Orques est absolument la même.

L'animal décrit par Schlegel, et dont il a donné un dessin d'après nature, est une femelle et celui que le chambellan Benzon de Benzon a rencontré flottant dans le Cattégat est un mâle.

Ainsi nous possédons des renseignements sur la couleur des mâles, des femelles et des jeunes et la ressemblance est complète, sauf l'intensité de la couleur. La femelle n'a, outre le noir, que des bandes d'un blanc jaunâtre, dit Schlegel.

L'animal figuré par Dewhurst présente une distribution de couleurs absolument semblable, avec cette seule différence, que la tache jaune, au lieu de s'étendre derrière les yeux, est située plutôt au-dessus de ces organes. Dans la gravure sur bois du même auteur, cette tache jaune est située plus en arrière.

Pallas a fait également mention de leur système de coloration à propos de l'Orque de la mer d'Ochotsk, et nous voyons dans plusieurs autres dessins les limites du noir et du jaune fort bien indiquées.

Le système de coloration du jeune Orque, capturé en rade de Bordeaux, ne présente pas la moindre différence avec celui de nos côtes que nous figurons ici.

Dans une notice sur deux dessins de l'album de Castelnau, nous avons cru devoir identifier le *Delphinus heavisidii* de Gray, dont il a fait plus tard le genre *Eutropia* ou Marsouin du Cap de Dussumier et de Cuvier, avec l'Orque du Cap des auteurs. Nous avons eu tort. Ce sont deux Cétacés tout à fait différents ; mais différent-ils autant que le système dentaire et d'autres caractères semblent l'indiquer ? Nous ne le pensons pas. Ce Cétacé a, comme les *Orcella* de la baie de Bengale, une nageoire pectorale large et tronquée, les premières cervicales réunies comme les Orques, de manière qu'il pourrait bien avec ces dernières constituer un groupe naturel. L'*Orcella* est d'un blanc sale, dit M. Anderson, caractère qui le rapprocherait ainsi que celui tiré de la nageoire pectorale, du *Beluga* et du Narval.

Nous venons de recevoir sous le nom de *Clymenia obscura* le squelette et la peau d'un Cétacé adulte de la Nouvelle-Zélande, qui a la taille du Marsouin commun de notre hémisphère, et, tout en étant complètement desséchée, la peau montre encore parfaitement la distribution des couleurs, qui est celle des Orques. Ce cétodonte n'a cependant ni la forme trapue, ni les dents, ni les nageoires pectorales des Orques, et le caractère des couleurs n'a pas l'importance que nous avons cru devoir lui attribuer en reproduisant le dessin de Castelnau.

## § V.

### SYSTÉMATISATION.

La plupart des auteurs admettent l'existence de deux Orques, mais sous des dénominations différentes, de manière à faire voir clairement qu'ils ne distinguent pas ces espèces entre elles et qu'ils les confondent avec d'autres Cétodontes. Ainsi nous en voyons qui disent : l'Orque se nourrit de Hareng et le Swerdfisch seul attaque la Baleine.

Il nous reste à examiner dans ce chapitre les caractères propres des Orques et si les individus qui sont venus sur nos côtes présentent les mêmes caractères spécifiques.

Depuis quelques années, l'attention a été particulièrement attirée sur ces animaux et l'on n'est pas éloigné de croire que la même espèce hante l'Atlantique ou le Pacifique et peut même commettre ses déprédations, tantôt dans l'hémisphère Nord, tantôt dans l'hémisphère Sud. L'étude des divers crânes autorise à croire que le nombre d'espèces d'Orques a été exagéré par plusieurs auteurs.

Les matériaux sont toutefois encore bien insuffisants pour trancher définitivement cette question et c'est dans le but de l'éclaircir, que nous avons comparé les squelettes des quatre individus qui sont venus se perdre sur nos côtes. Ce travail nous a paru d'autant plus nécessaire, que des zoologistes ont signalé dans la mer du Nord deux espèces, qui se distingueraient

par le nombre de côtes, par la forme des taches jaunes à la nuque et le développement de la nageoire dorsale.

Fabricius distingue déjà deux espèces différentes qu'il place dans des genres à part, et Ot.-Fred. Muller en signale même trois.

D'après Desmarest, le Dauphin-Orque, inconnu des naturalistes de nos jours, dit-il, le *Dauphin ferès* et le *Dauphin épaulard* formeraient trois espèces distinctes.

Lesson n'admet pas que l'Épaulard soit le même animal que l'Orque des anciens; il pense que ce dernier est un Cachalot. C'est ce que plusieurs naturalistes ont pensé d'après certaines descriptions qui font supposer que les anciens ont confondu sous le même nom des animaux fort différents les uns des autres.

En 1870 le docteur Gray croit devoir également admettre dans les mers d'Europe deux espèces, d'après les crânes conservés au British Museum : l'*Orca latirostris*, conforme au crâne figuré par Cuvier dans ses Ossements fossiles, et l'*Orca stenorynchus*.

Lilljeborg admet aussi deux espèces d'Orques, le *Grampus gladiator*, qui a douze côtes, une tache ronde au cou et une nageoire dorsale longue, et le *Grampus orca*, qui n'a que onze côtes, point de tache à la nuque et une nageoire dorsale obtuse.

Je crois que la première idée, qu'il existe des espèces différentes d'Orques dans nos parages, provient de la différence de longueur de la nageoire dorsale; comme il est arrivé souvent, des différences sexuelles ont été prises parfois pour des différences spécifiques et nous ignorons jusqu'à présent l'importance qu'il faut attacher à la forme si particulière et à la hauteur de la nageoire dorsale. On a vu dans la même *gamme* des Orques à nageoire élevée et des Orques à nageoire ordinaire.

Le mâle de vingt-quatre pieds, capturé à l'embouchure de la Tamise, en 1759, et décrit par Hunter (pl. V, fig. 1) est, d'après M. Lilljeborg, le *Grampus gladiator*, tandis que l'individu échoué à Wyk-op-Zee et figuré par Schlegel dans ses *Abhandlungen*, planche VII, est un *Grampus orca*.

Eschricht a cru, comme nous venons de le voir, mais seulement dans les dernières années de sa vie, à plus d'une espèce, mais il lui a été impossible de les limiter nettement.

Dans l'*Ostéographie* que je publie avec Gervais, mon collaborateur admet l'*Orca gladiator* et l'*Orca Eschrichtii*.

Les quatre squelettes d'Orques échoués sur nos côtes présentent la plus grande ressemblance dans toute leur conformation et les faibles différences que l'on observe entre eux sont dues à l'âge ou au sexe.

Nous avons dans ces quatre individus à peine une disposition particulière qui mérite d'être signalée. Il en est de même de ceux observés sur les côtes de Hollande. Le squelette aussi bien que les caractères extérieurs correspondent complètement avec les nôtres. Les côtes sont au nombre de onze, la nageoire dorsale est peu développée, le système de coloration est en tout semblable et nous croyons devoir réunir tous ces animaux sous le nom de *Orca gladiator*.

En résumé, les Orques dont nous faisons connaître les squelettes appartiennent à une seule et unique espèce, et cette espèce vit, dans notre hémisphère, la mer du Nord, la Manche, la Méditerranée, la Baltique, les côtes du Groënland, l'Atlantique et l'océan glacial Arctique.

C'est du moins le résultat auquel nous conduit l'étude des différents crânes conservés dans les Musées.

## LITTÉRATURE.

---

GUNNER, *Trondh. Jemske Selskabets Skrifter*, vol. IV.

OT. FABRICIUS, *Fauna groenlandica*, in-8°. 1780.

PALLAS, *Zoogr. rosso-asiat.*, I, p. 285, n° 146.

*Zool. danic. prodromus.*

DESMAREST, *Mammalogie*. Paris, 1820.

TILESIIUS, *Isis*, p. 725. 1855.

HUNTER, *Observations on the structure and economy of Whales*, PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS, 1787, vol. XVI, p. 506, pl. V, fig. 1 et 2. Ces figures de Hunter sont copiées dans Schreber, Tab. 540, et dans le *Naturalist's Library*, Wales, p. 20.

LACÉPÈDE, *Histoire naturelle des Cétacés*, in-4°, Paris, fan XII, pp. 298 et 502.

LESSON, *Histoire naturelle générale et particulière...* Cétacés. Paris, 1828.

CLAAS MULDER, *Over Delphinus Orca, den 15 april 1852 gevangen.*

CLAAS MULDER, *Courrier de Leeuwaerden*, 1852, n<sup>os</sup> 57-45, 43 et 47, et *Letterbode*, 1852, n<sup>os</sup> 19 et 20.

— *Iets over Walvischaardige dieren op de kusten van Nederland gestrand of gevangen*, in-8°, 1856.

DE WHURST, *The natural history of the ordre Cetacea*, in-8°. London, 1854.

HOLBÖLL, DRIS ESCHRICHT, *Nord. Wallthiere*, p. 194. 1840.

SCHLEGEL, *Abhandlungen aus dem Gebiete der Zoologie*, Leiden, 1841, I, p. 55, et II, p. 2, pl. VII et VIII.

OWEN, *A history of British fossil mammals and Birds*, London, 1846, p. 516.

GRAY, *The Zoology of the voyage of H. M. S. Erebus and Terror, mammalia*, London, 1846, p. 54.

— *Catalogue of the Spec. of mammalia*, London, 1850, p. 94.

*Notices historiques sur l'Orca*, PROCEED. AMER. ASSOC., 8<sup>e</sup> meeting, tenu à Washington, 1854, p. 259.

NILLSON, *Om den tandwal (DELPH. ORCA). Förhandlingar vid de Skandinaviske naturforsk. Stockholm*, July, 1855, p. 55.

COUCH, *Cétacés de la côte de Cornouailles*, ANN. NAT. HIST., vol. XX, p. 424.

GERVAIS, *Zool. et paléont. franç.* Paris, 1859, p. 299.

SUNDEVALL, *Ueber einige Walarten. (D. TUISIO et ORCA), ÖFVERSIGT AF KÖNGL. VET. AKAD. FÖRH.*, 1861.

*Upsala Universitets Arsskrift*, 1861.

W. LILLJEBORG, *Öfersigt af de inom Skandinavien (Sverige och Norrige) anträffade Hvalartade Däggdjur (Cetacea)*. Upsala, 1862.

D. FR. ESCHRICHT, *Om Spaekbluggeren (Delphinus Orca L.) Kiøbenhavn*, 1862.

D<sup>r</sup> J.-E. GRAY, *On Brit. Cetacea*, PROCEED. ZOOLOG. SOC. OF LONDON, may, 1864.

— *Notes on the Skulls of the genus Orca in the british Museum, and notice of a specimen of the genus from the Seychelles*, PROCEED. ZOOLOG. SOC. JANVIER 1870.

OTTO VON FRIESEN, *Antekningar aengående en Orca, som antraffats vid Bohuslänska Kusten*, 1 decembre 1871. ÖFVERSIGT AF KÖNGL. VET. AKAD. FÖRH.

D<sup>r</sup> SOUVERBIE, *Capture d'un Orque en rade de Bordeaux*, ACT. SOC. LINN. DE BORDEAUX, 4<sup>e</sup> sér., t. I. Juin 1876.

## EXPLICATION DES PLANCHES.

—

PLANCHE I. Jeune Orque échoué à Ostende; dessin, d'après nature, par Van Cuyck.

PLANCHE II. Le squelette du même, montrant l'os hyoïde et l'ischion en place, d'après une photographie. Les disques intervertébraux sont très-épais et l'arc neural n'est pas encore soudé au corps des vertèbres. Tous les os sont restés en place.

PLANCHE III. Fig. 1. Crâne d'une femelle vu de profil.

— 2. Les maxillaires du même avec les dents.

— 3. Crâne du mâle.

— 4. Les maxillaires avec les dents du même.

PLANCHE IV. Fig. 1. Crâne de mâle vu de face.

— 2. Crâne de femelle vu du même côté.

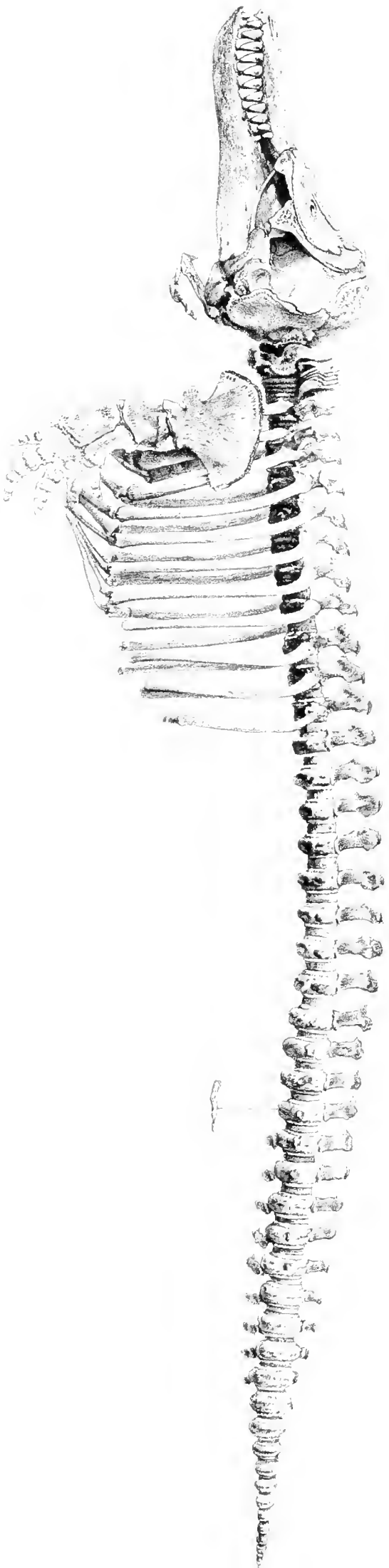




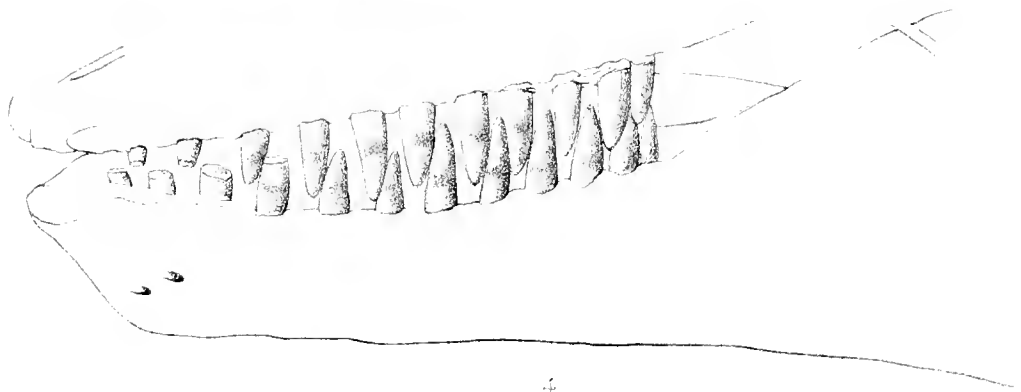
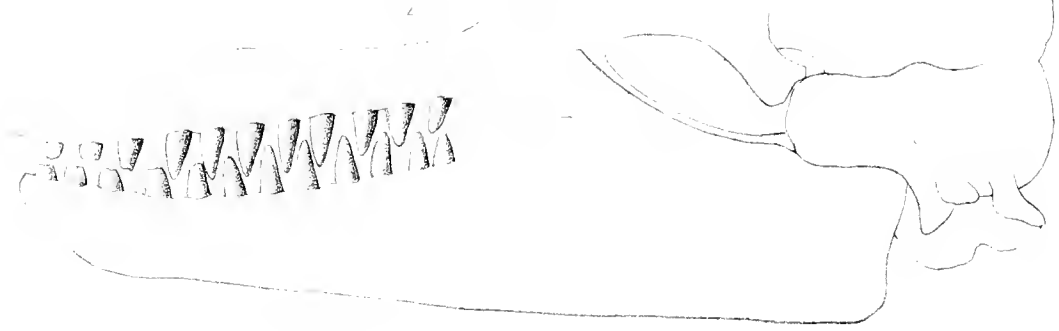




















**MÉMOIRES**  
**DE L'ACADÉMIE ROYALE**

DES

SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS

DE BELGIQUE.



MÉMOIRES  
DE  
L'ACADÉMIE ROYALE

DES  
SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS  
DE BELGIQUE.

---

**TOME XLIII.**

---

SECONDE PARTIE.



BRUXELLES,

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE.

---

**1882**



# LISTE DES MEMBRES,

DES

CORRESPONDANTS ET DES ASSOCIÉS DE L'ACADÉMIE.

(8 février 1882.)

---

LE ROI, PROTECTEUR.

---

M. Alph. LE ROY, président pour 1882.  
» J.-B.-J. LIAGRE, secrétaire perpétuel.

---

COMMISSION ADMINISTRATIVE.

Le directeur de la Classe des Sciences, M. Ch. MONTIGNY.

» des Lettres, M. Alph. LE ROY.

» des Beaux-Arts, M. Ad. SIRET.

Le Secrétaire perpétuel, M. J.-B.-J. LIAGRE.

Le délégué de la Classe des Sciences, M. J.-S. STAS, trésorier.

» des Lettres, M. Ch. FAIDER.

» des Beaux-Arts, M. \* \* \*

---

CLASSE DES SCIENCES.

MM. Ch. MONTIGNY, directeur pour 1882.

» J.-B.-J. LIAGRE, secrétaire perpétuel.

50 MEMBRES.

*Section des sciences mathématiques et physiques (15 membres).*

M. PLATEAU, Joseph A.-F.: à Gand . . . . .	Élu le	15	décemb.	1856.
» STAS, Jean S.: à St-Gilles-lez-Bruxelles. . . . .	—	14	décemb.	1841.
» DE KONINCK, Laurent G.: à Liège . . . . .	—	15	décemb.	1842.
» MILSENS, Louis F. H.: à Bruxelles . . . . .	—	15	décemb.	1850.
» LIAGRE, J.-B.-Joseph: à Ixelles . . . . .	—	15	décemb.	1855.
» DUPREZ, François J.: à Gand . . . . .	—	16	décemb.	1854.
» HOUZEAU, Jean C.: à Bruxelles . . . . .	—	15	décemb.	1856.
» MAUS, Henri J.: à Ixelles . . . . .	—	15	décemb.	1864.
» DONNY, François M. L.: à Gand . . . . .	—	15	décemb.	1866.
» MONTIGNY, Charles: à Schaerbeek . . . . .	—	16	décemb.	1867.
» STEICHEN, Michel: à Ixelles . . . . .	—	15	décemb.	1868.
» BRIALMONT, Alexis H.: à St-Josse-ten-Noode . . . . .	—	15	décemb.	1869.
» FOLIE, François: à Liège . . . . .	—	15	décemb.	1874.
» MAILLY, Édouard: à Saint-Josse-ten-Noode . . . . .	—	15	décemb.	1876.
» DE TILLY, Joseph: à Anvers . . . . .	—	16	décemb.	1878.

*Section des sciences naturelles (15 membres).*

M. VAN BENEDEN, Pierre J.: à Louvain . . . . .	—	15	décemb.	1842.
» Le baron DE SELYS LONGCHAMPS, Edm.: à Liège.	—	16	décemb.	1846.
» GLUGE, Théophile: à Bruxelles . . . . .	—	15	décemb.	1849.
» DEWALQUE, Gustave: à Liège . . . . .	—	16	décemb.	1859.
» CANDÈZE, Ernest: à Liège . . . . .	—	15	décemb.	186 .
» DUPONT, Édouard: à St-Gilles-lez-Bruxelles . . . . .	—	15	décemb.	1869.
» MORREN, Édouard: à Liège. . . . .	—	15	décemb.	1871.
» VAN BENEDEN, Édouard: à Liège . . . . .	—	16	décemb.	1872.
» MALAISE, Constantin: à Gembloux. . . . .	—	15	décemb.	1875.
» BRIART, Alphonse: à Mariemont . . . . .	—	15	décemb.	1874.
» PLATEAU, Félix: à Gand. . . . .	—	15	décemb.	1874.

- M. CRÉPIN, François; à Ixelles. . . . . Élu le 15 décemb. 1873.  
 » CORNET, François, Léopold; à Mons. . . . . — 15 décemb. 1878.  
 » VAN BAMBEKE, Charles; à Gand . . . . . — 15 décemb. 1879.  
 » GILKINET, Alfred; à Liège . . . . . — 15 décemb. 1880.

CORRESPONDANTS (10 au plus).

*Section des sciences mathématiques et physiques.*

- M. HENRY, Louis; à Louvain . . . . . Élu le 15 décemb. 1863.  
 » VALERIUS, Henri; à Gand . . . . . — 15 décemb. 1869.  
 » VAN DER MENSBRUGHE, G.; à Gand . . . . . — 15 décemb. 1873.  
 » SPRING, Walthère; à Liège . . . . . — 14 décemb. 1877.  
 » N. . . . .

*Section des sciences naturelles.*

- M. MOURLON, Michel; à Ixelles. . . . . Élu le 15 décemb. 1876.  
 » DELBOEUF, J.; à Liège. . . . . — 14 décemb. 1877.  
 » FREDERICQ, Léon; à Liège . . . . . — 15 décemb. 1879.  
 » MASIUS, Victor; à Liège. . . . . — 15 décemb. 1880.  
 » N. . . . .

50 ASSOCIÉS.

*Section des sciences mathématiques et physiques (25 associés).*

- M. SABINE, Édouard; à Londres . . . . . Élu le 2 février 1828.  
 » DUMAS, Jean-Baptiste; à Paris. . . . . — 17 décemb. 1845.  
 » AIRY, Georges BIDDELL; à Greenwich . . . . . — 15 décemb. 1855.  
 » KEKULÉ, Auguste; à Bonn . . . . . — 15 décemb. 1864.  
 » BUNSEN, Robert G.; à Heidelberg . . . . . — 15 décemb. 1865.  
 » CATALAN, Eugène C.; à Liège . . . . . — 15 décemb. 1865.  
 » VON BAEYER, J. Joseph; à Berlin . . . . . — 15 décemb. 1868.  
 » KIRCHHOFF, Gustave Robert; à Heidelberg . . . . . — 15 décemb. 1868.  
 » HIRN, G. A.; à Colmar (Alsace) . . . . . — 16 décemb. 1872.  
 » DE COLNET D'HUART; à Luxembourg . . . . . — 15 décemb. 1875.  
 » HELMHOLTZ, H.-L.-F.; à Berlin . . . . . — 15 décemb. 1875.  
 » MENABREA DE VAL-DORA, le marquis Louis-Frédéric; à Rome . . . . . — 15 décemb. 1874.  
 » STRUVE, Otto; à Pulkowa . . . . . — 15 décemb. 1874.  
 » CLAUSIUS, Rodolphe-J.-Em.; à Bonn. . . . . — 15 décemb. 1875.  
 » CHEVREUL, M.-Eugène; à Paris. . . . . — 15 décemb. 1875.

M. BUYS-BALLOT, C.-H.-D.; à Utrecht . . . . .	Élu le 15 décemb. 1875.
Sa Majesté DOM PEDRO II. D'ALCANTARA, empereur du Brésil; à Rio-de-Janeiro. . . . .	— 15 décemb. 1876.
M. WEBER, Guillaume; à Göttingue . . . . .	— 14 décemb. 1877.
» BOUSSINGAULT, J.-B. J. D.; à Paris . . . . .	— 16 décemb. 1878.
» FAVÉ, H.; à Paris . . . . .	— 16 décemb. 1872.
» THOMSON, W.; à Glasgow . . . . .	— 16 décemb. 1878.
» PASTEUR, L.; à Paris . . . . .	— 15 décemb. 1879.
» SCHIAPARELLI, à Milan . . . . .	— 15 décemb. 1879.
» GENOCCHI, Angelo; à Turin . . . . .	— 15 décemb. 1881.
» WURTZ, C.-A.; à Paris . . . . .	— 15 décemb. 1881.

*Section des sciences naturelles (25 associés).*

M. DECAISNE, Joseph; à Paris . . . . .	Élu le 15 décemb. 1856.
» OWEN, Richard; à Londres. . . . .	— 17 décemb. 1847.
» MILNE EDWARDS, Henri; à Paris . . . . .	— 15 décemb. 1850.
» SCHLEGEL, Hermann; à Leyde . . . . .	— 16 décemb. 1857.
» VALENTIN, Gabriel-Gustave; à Berne . . . . .	— 15 décemb. 1861.
» DANA, James D.; à New-Haven (États-Unis) . . . . .	— 15 décemb. 1864.
» DAVIDSON, Thomas; à Brighton . . . . .	— 15 décemb. 1865.
» DE CANDOLLE, Alphonse; à Genève . . . . .	— 15 décemb. 1869.
» HEER, Oswald; à Zurich . . . . .	— 15 décemb. 1869.
» DONDEBS, F.-C.; à Utrecht . . . . .	— 15 décemb. 1869.
» DARWIN, Ch.; à Down, Beckenham (Angleterre). . . . .	— 15 décemb. 1870.
» HOOKER, Jos.-Dalton; à Kew (Angleterre). . . . .	— 16 décemb. 1872.
» RAMSAY, André Crombie; à Londres. . . . .	— 16 décemb. 1872.
» STEENSTRUP, J.-Japetus-S.; à Copenhague . . . . .	— 16 décemb. 1872.
» HUXLEY, Thomas-Henri; à Londres. . . . .	— 15 décemb. 1874.
» PRINGSHEIM, Nathaniel; à Berlin . . . . .	— 15 décemb. 1874.
» NILSSON, Sven; à Lund . . . . .	— 15 décemb. 1874.
» VON DECHEN, Henri; à Bonn . . . . .	— 15 décemb. 1875.
» GOSSELET, Jules; à Lille . . . . .	— 15 décemb. 1876.
» DAUBRÉE, J.; à Paris . . . . .	— 14 décemb. 1877.
» KÖLLIKER, Albert; à Wurtzbourg; . . . . .	— 14 décemb. 1877.
» LE MARQUIS DE SAPORTA, G.; à Aix (France) . . . . .	— 14 décemb. 1877.
» VON SIEBOLD, Ch.-T.-E.; à Munich . . . . .	— 16 décemb. 1878.
» VON BISCHOFF, T.-L.; à Munich . . . . .	— 15 décemb. 1879.
» N. . . . .	



CLASSE DES LETTRES.

M. Alph. LE ROY, directeur pour 1882.  
» J.-B.-J. LIAGRE, secrétaire perpétuel.

50 MEMBRES.

*Section des lettres et Section des sciences morales et politiques réunies.*

M. GACHARD, Louis Prosper; à Bruxelles . . .	Élu le	9 mai	1842.
» VAN PRAET, Jules; à Bruxelles . . . . .	—	10 janvier	1846.
» DE DECKER, Pierre J. F.; à Schaerbeek . . .	—	10 janvier	1846.
» LECLERCQ, M. N. J.; à St-Josse-ten-Noode . .	—	17 mai	1847.
» Le baron DE WITTE, Jean J. A. M.; à Anvers.	—	6 mai	1851.
» FAIDER, Charles; à Bruxelles . . . . .	—	7 mai	1855.
» Le h <sup>on</sup> KERVYN DE LETTENHOVE, J. M. B. C.; à Saint-Michel (lez-Bruges) . . . . .	—	4 mai	1859.
» CHALON, Renier; à Ixelles . . . . .	—	4 mai	1859.
» THONISSEN, J. J.; à Louvain . . . . .	—	9 mai	1864.
» JUSTE, Théodore; à Ixelles. . . . .	—	5 mai	1866.
» NÈVE, Félix; à Louvain. . . . .	—	11 mai	1868.
» WAUTERS, Alphonse; à Bruxelles . . . . .	—	11 mai	1868.
» CONSCIENCE, Henri; à Ixelles . . . . .	—	10 mai	1869.
» DE LAVELEYE, Émile; à Liège . . . . .	—	6 mai	1872.
» NYPELS, J. S. Guillaume; à Liège. . . . .	—	6 mai	1872.
» LE ROY, Alphonse; à Liège. . . . .	—	12 mai	1875.
» DE BORCHIGRAVE, Émile; à Belgrade . . . . .	—	12 mai	1875.
» LIAGRE, J.-B.-Joseph; à Ixelles . . . . .	—	5 mai	1874.
» WAGENER, Auguste; à Gand . . . . .	—	10 mai	1874.
» HEREMANS, Jacques F. J.; à Gand . . . . .	—	8 mai	1876.
» WILLEMS, Pierre; à Louvain . . . . .	—	14 mai	1877.
» POULLET, Edmond; à Louvain. . . . .	—	6 mai	1878.
» TIELEMANS, F.; à Ixelles. . . . .	—	6 mai	1878.
» ROLIN-JAEQUEMYS, Gustave; à Gand. . . . .	—	6 mai	1878.

M.	BORMANS, Stanislas; à Namur . . . . .	Élu le	5 mai	1879.
»	PIOT, Charles-G.-J.; à St-Gilles-lez-Bruxelles . . . . .	—	5 mai	1879.
»	POTVIN, Charles; à Ixelles . . . . .	—	9 mai	1881.
»	STECHEK, J.; à Liège . . . . .	—	9 mai	1881.
»	LAURENT, François; à Gand . . . . .	—	9 mai	1881.
»	N. . . . .			

CORRESPONDANTS (10 au plus).

M.	LOISE, Ferdinand; à Mons . . . . .	Élu le	12 mai	1875.
»	LAMY, T.-J.; à Louvain . . . . .	—	5 mai	1879.
»	HENRARD, Paul; à Anvers . . . . .	—	5 mai	1879.
»	VANDENPEEREBOOM, Alphonse; à St-Gilles-lez- Bruxelles. . . . .	—	5 mai	1879.
»	HYMANS, Louis; à Ixelles . . . . .	—	10 mai	1880.
»	GANTRELLE, J.; à Gand. . . . .	—	9 mai	1881.
»	LOOMANS, C.; à Liège . . . . .	—	9 mai	1881.

50 ASSOCIÉS.

M.	RANKE, Léopold; à Berlin . . . . .	Élu le	9 février	1846.
»	MIGNET, F. A. A.; à Paris. . . . .	—	9 février	1846.
»	LEEMANS, Conrad; à Leyde . . . . .	—	11 janvier	1847.
»	NOLET DE BRAUWERE VAN STEELAND, J.; à Vilvorde . . . . .	—	7 mai	1849.
»	Le chevalier DE ROSSI, J. B.; à Rome . . . . .	—	7 mai	1855.
»	DE REUMONT, Alfred; à Boreette (Aix-la-Chapelle). . . . .	—	26 mai	1856.
»	Le baron DE CZOERNIG, Ch.; à Ischl (Autriche) . . . . .	—	4 mai	1859.
»	MINERVINI, Jules; à Naples . . . . .	—	4 mai	1859.
»	Le baron DE KÖHNE, Bernard; à St-Petersbourg . . . . .	—	15 mai	1861.
»	CANTÙ, César; à Milan. . . . .	—	15 mai	1861.
»	DE LÖHER, François; à Munich. . . . .	—	15 mai	1862.
»	DE VRIES, Mathieu; à Leyde . . . . .	—	19 mai	1865.
»	Le chevalier d'ARNETH, Alfred; à Vienne . . . . .	—	9 mai	1864.
»	RENIER, Léon; à Paris. . . . .	—	10 mai	1865.
»	MOMMSEN, Théodore; à Berlin . . . . .	—	5 mai	1866.
»	DE DÖLLINGER, J. J. Ignace; à Munich. . . . .	—	5 mai	1866.
»	FARR, William; à Londres . . . . .	—	6 mai	1867.
»	STEPHANI, Ludolphe; à Saint-Petersbourg . . . . .	—	6 mai	1867.
»	LABOULAYE, Édouard; à Paris . . . . .	—	6 mai	1867.

M. SCHELER, Auguste; à Ixelles . . . . .	Élu le	41 mai	1868.
» EGGER, Émile; à Paris . . . . .	—	10 mai	1869.
» DE SYBEL, Henri Ch. L.; à Berlin . . . . .	—	10 mai	1869.
» CARRARA, François; à Pise . . . . .	—	9 mai	1870.
» Le DAFON DE HOLTZENDORFF, F.; à Munich . . . . .	—	8 mai	1871.
» BRUNN, Henri; à Munich . . . . .	—	8 mai	1871.
» LENORMANT, François; à Paris . . . . .	—	8 mai	1871.
» Le chevalier d'ANTAS, M.; à Madrid . . . . .	—	6 mai	1872.
» ALBERDINGHK THYM, Jos.-Alb.; à Amsterdam . . . . .	—	6 mai	1872.
» CURTIUS, Ernest; à Berlin . . . . .	—	6 mai	1872.
» RIVIER, Alphonse; à Ixelles . . . . .	—	12 mai	1875.
» FRANCK, Adolphe; à Paris . . . . .	—	12 mai	1875.
» DESMAZES, Charles; à Paris . . . . .	—	4 mai	1874.
» OPPERT, Jules; à Paris . . . . .	—	4 mai	1874.
» JONCKBLOET, W.-J.-A.; à La Haye . . . . .	—	4 mai	1874.
» TENNYSON, Alfred; à Londres . . . . .	—	10 mai	1875.
» LEPSIUS, Richard; à Berlin . . . . .	—	10 mai	1875.
» DELISLE, Léopold; à Paris . . . . .	—	10 mai	1875.
» ARNTZ, Égide; à Ixelles . . . . .	—	8 mai	1876.
» CAMPBELL, F.-G.-H.; à La Haye . . . . .	—	14 mai	1877.
» BANCROFT, George; à Washington . . . . .	—	14 mai	1877.
» SARIPOLOS, Nicolas; à Athènes . . . . .	—	6 mai	1878.
» DI GIOVANNI, Vincenzo; à Palerme . . . . .	—	6 mai	1878.
» COLMEIRO, Manuel; à Madrid . . . . .	—	10 mai	1880.
» d'OLIVECRONA, Canut; à Stockholm . . . . .	—	10 mai	1880.
» BOUL, Jean; à Amsterdam . . . . .	—	9 mai	1881.
» CANOVAS DEL CASTILLO, Antoine; à Madrid . . . . .	—	9 mai	1881.
» CASTAN, Auguste, à Besançon . . . . .	—	9 mai	1881.
» N. . . . .			
» N. . . . .			
» N. . . . .			

CLASSE DES BEAUX-ARTS.



M. Ad. SIRET, directeur pour 1882.

» J.-B.-J. LIAGRE, secrétaire perpétuel



50 MEMBRES.

**Section de Peinture :**

M. DE KEYSER, Nicaise ; à Anvers . . . . .	Nommé le	1 <sup>er</sup> décemb.	1845.
» GALLAIT, Louis ; à Schaerbeek . . . . .	—	1 <sup>er</sup> décemb.	1845.
» DE BRAEKELEER, Ferdinand ; à Anvers . . .	Élu le	8 janvier	1847.
» PORTAELS, Jean ; à St-Josse-ten-Noode . .	—	4 janvier	1855.
» SLINGENEYER, Ernest ; à St-Josse-ten-Noode.	—	7 avril	1870.
» ROBERT, Alexandre ; à St-Josse-ten-Noode.	—	7 avril	1870.
» GUFFENS, Godfried ; à Schaerbeek . . . .	—	6 janvier	1876.
» WILLEMS, Florent, C. ; à Paris . . . . .	—	10 janvier	1878.
» WAUTERS, Émile ; à Bruxelles. . . . .	—	5 janvier	1882.

**Section de Sculpture :**

M. GEEFS, Guillaume ; à Schaerbeek . . . .	Nommé le	1 <sup>er</sup> décemb.	1845.
» SIMONIS, Eugène ; à Bruxelles. . . . .	—	1 <sup>er</sup> décemb.	1845.
» GEEFS, Joseph ; à Anvers . . . . .	Élu le	9 janvier	1846.
» FRAIKIN, Charles Auguste ; à Schaerbeek .	—	8 janvier	1847.

**Section de Gravure :**

M. FRANCK, Joseph ; à St-Josse-ten-Noode .	Élu le	7 janvier	1864.
» LECLERCQ, Julien ; à Bruxelles . . . . .	—	12 janvier	1866.

**Section d'Architecture :**

M. BALAT, Alphonse ; à Ixelles . . . . .	Élu le	9 janvier	1862.
--	--------	-----------	-------

M. DE MAN, Gustave; à Ixelles . . . . .	Élu le	12 janvier	1865.
» PAULI, Adolphe; à Gand. . . . .	—	6 janvier	1875.
» SCHADDE, Joseph; à Anvers . . . . .	—	10 janvier	1878.

**Section de Musique :**

M. Le chevalier DE BURBURE, Léon; à Anvers.	Élu le	9 janvier	1862.
» GEVAERT, Auguste F.; à Bruxelles . . . . .	—	4 janvier	1872.
» SAMUEL, Adolphe; à Gand. . . . .	—	8 janvier	1874.
» RADOUX, Théodore; à Liège . . . . .	—	5 avril	1879.
» BENOIT, Pierre; à Anvers . . . . .	—	5 janvier	1882.

**Section des sciences et des Lettres dans leurs rapports avec les Beaux-Arts :**

M. ALVIN, Louis J.; à Ixelles . . . . .	Nommé le 1 <sup>er</sup> décemb.	1845.
» FETIS, Édouard; à Bruxelles . . . . .	Élu le	8 janvier 1847.
» SIRET, Adolphe; à St-Nicolas . . . . .	—	12 janvier 1866.
» LIAGRE, J.-B.-Joseph; à Ixelles . . . . .	—	5 mai 1874.
» STAPPAERTS, Félix; à Bruxelles . . . . .	—	6 janvier 1876.
» N. . . . .		

**CORRESPONDANTS (10 au plus).**

**Pour la Peinture :**

M. DYCKMANS, Joseph L.; à Anvers . . . . .	Élu le	8 janvier	1847.
» N. . . . .			
» N. . . . .			

**Pour la Sculpture :**

M. JEBOTTE, Louis; à Bruxelles . . . . .	Élu le	9 janvier	1846.
--	--------	-----------	-------

**Pour la Gravure :**

M. DEMANNEZ, Joseph, à St-Josse-ten-Noode.	Élu le	10 janvier	1878.
--	--------	------------	-------

**Pour l'Architecture :**

» N. . . . .			
--------------	--	--	--

**Pour la Musique :**

M. TERRY, L.; à Liège . . . . .	Élu le	8 janvier	1874.
» N. . . . .			

**Pour les sciences et les Lettres dans leurs rapports avec les Beaux-Arts :**

M. PINCHART, Alexandre; à Bruxelles . . . . .	Élu le	4 janvier	1878.
» N. . . . .			

50 ASSOCIÉS.

**Pour la Peinture :**

M. HAGHE, Louis; à Londres . . . . .	Élu le	8 janvier	1847.
» ROBERT FLEURY, Joseph N.; à Paris . . . . .	—	7 janvier	1864.
» GÉROME, Jean Léon; à Paris . . . . .	—	12 janvier	1865.
» MADRAZO, Frédéric; à Madrid. . . . .	—	12 janvier	1865.
» BENDEMANN, Édouard; à Dusseldorf. . . . .	—	9 janvier	1868.
» MEISSONIER, Jean L. E.; à Paris . . . . .	—	7 janvier	1869.
» HÉBERT, Aug. Ant. Ernest; à Paris . . . . .	—	12 janvier	1871.
» BECKER, Charles; à Berlin. . . . .	—	8 janvier	1874.
» FITH, William Powell; à Londres . . . . .	—	8 janvier	1874.
» VON PILOTY, Charles; à Munich . . . . .	—	6 janvier	1857.
» BAUDRY, Paul; à Paris . . . . .	—	10 janvier	1878.
» MAKART, Jean; à Vienne . . . . .	—	5 janvier	1882.

**Pour la Sculpture :**

M. DEMONT, Alexandre Augustin; à Paris . . . . .	Élu le	22 septemb.	1852.
» LE COMTE DE NIEUWERKERKE, Alf.; à Paris . . . . .	—	22 septemb.	1852.
» CAVELIER, Pierre Jules; à Paris . . . . .	—	7 janvier	1846.
» JOUFFROY, François; à Paris . . . . .	—	11 janvier	1866.
» DRAKE, Frédéric; à Berlin. . . . .	—	11 janvier	1866.
» MONTEVERDE, à Rome . . . . .	—	8 janvier	1874.
» BONNASSIEUX, J.; à Paris . . . . .	—	6 janvier	1875.
» GUILLAUME, Eugène; à Paris . . . . .	—	6 janvier	1876.

**Pour la Gravure :**

M. HENRIQUEL DUPONT, Louis P.; à Paris . . . . .	Élu le	8 janvier	1847.
» MERCURI, Paul; à Rome . . . . .	—	8 janvier	1857.
» OUDINÉ, Eugène André; à Paris . . . . .	—	8 janvier	1857.

M. MANDEL, Édouard; à Berlin . . . . .	Élu le	12 janvier 1865.
» FRANÇOIS, Alphonse; à Paris. . . . .	—	8 janvier 1874.
» STANG, Rudolphe; à Dusseldorf. . . . .	—	8 janvier 1874.

**Pour l'Architecture :**

M. DONALDSON, Thomas L.; à Londres . . . . .	Élu le	6 février 1846.
» LEINS, C.; à Stuttgart . . . . .	—	7 janvier 1864.
» DALY, César; à Paris . . . . .	—	12 janvier 1865.
» LABROUSTE, Théodore F. M.; à Paris . . . . .	—	9 janvier 1868.
» Le comte VESPIGNANI, Virginio; à Rome . . . . .	—	12 janvier 1871.
» Le chevalier VON FERSTEL, Henri; à Vienne. . . . .	—	8 janvier 1874.
» DE CONTRERAS, Raphaël; à Grenade . . . . .	—	5 janvier 1882.
» RASCHDOFF, J.-C.; à Berlin . . . . .	—	5 janvier 1882.

**Pour la Musique :**

M. LACHNER, François; à Munich . . . . .	Élu le	8 janvier 1847.
» THOMAS, Ch. L. Ambroise; à Paris. . . . .	—	8 janvier 1865.
» VERDI, Joseph; à Naples . . . . .	—	12 janvier 1865.
» GOUNOD, Félix Charles; à Paris. . . . .	—	4 janvier 1872.
» BASEVI, Abraham; à Florence . . . . .	—	4 janvier 1872.
» HILLER, Ferdinand; à Cologne . . . . .	—	6 janvier 1876.
» MASSÉ, Victor; à Paris . . . . .	—	4 janvier 1877.
» LIMANDER DE NIEUWENHOVE, le baron Arm <sup>d</sup> ; à Moignanville (Oise). . . . .	—	9 janvier 1879.

**Pour les Sciences et les Lettres dans leurs rapports avec les Beaux-Arts :**

M. RAVAISSON, Félix J. G.; à Paris. . . . .	Élu le	10 janvier 1856.
» GAILHABAUD, Jules; à Paris . . . . .	—	9 janvier 1868.
» LUBKE, Guillaume; à Stuttgart . . . . .	—	9 janvier 1875.
» VOSMAER; à La Haye . . . . .	—	9 janvier 1875.
» DELABORDE, le vicomte Henri; à Paris . . . . .	—	8 janvier 1874.
» Le radja SOURINDRO MOHUN TAGORE; à Calcutta . . . . .	—	4 janvier 1877.
» SCHLIEMANN, Henry; à Athènes . . . . .	—	5 janvier 1882.
» N. . . . .		

---

*Secrétaire adjoint de l'Académie :* Le chevalier Edmond MARCIAL.

---

## NÉCROLOGIE.

### CLASSE DES SCIENCES.

- DU MORTIER, Barthélemy-Charles; membre, décédé à Tournai le 9 juillet 1878.  
QUETELET, Ernest; membre, décédé à Ixelles le 6 septembre 1878.  
CHAPUIS, Félicien; membre, décédé à Hensy (Verviers) le 50 septembre 1879.  
NYST, Henri; membre, décédé à Molenbeek Saint-Jean le 6 avril 1880.  
ADAN, Émile; correspondant, décédé à Ixelles le 15 janvier 1882.  
GERVAIS, Paul; associé, décédé à Paris le 10 février 1879.  
DOVE, Henri-Guillaume; associé, décédé à Berlin le 5 avril 1879.  
LAMONT, Jean; associé, décédé à Bogenhausen (Munich) le 6 août 1879.  
CHASLES, Michel; associé, décédé à Paris le 18 décembre 1880.  
SAINTÉ-CLAIRE-DEVILLE, Henri; associé, décédé à Paris le 1<sup>er</sup> juillet 1881.  
SCHWANN, Théodore; associé, décédé à Cologne le 11 janvier 1882.

### CLASSE DES LETTRES.

- BORMANS, Jean-Henri; membre, décédé à Liège le 4 juin 1878.  
DEVAUX, Paul; membre, décédé à Bruxelles le 50 janvier 1880.  
STEUR, Charles-Joseph; membre, décédé à Gand le 23 janvier 1881.  
HAUS, Jacques-Joseph; membre, décédé à Gand le 25 février 1881.  
Le baron NOTHOMB, Jean-Baptiste; membre, décédé à Berlin le 15 septembre 1881.  
VAN BEMMEL, Eugène; correspondant, décédé à Saint-Josse-ten-Noode le 19 août 1880.  
LAFUENTE, Modeste; associé, décédé à Madrid en 1867.  
SALVA, Miguel; associé, décédé à Majorque le 5 novembre 1875.  
VREEDE, Guillaume; associé, décédé à Utrecht le 50 juin 1880.  
ARRIVABENE, le comte; associé, décédé à Mantoue le 11 janvier 1881.  
PARIS, Paulin; associé, décédé à Paris le 15 février 1881.  
DISRAELI, Benjamin (Lord Beaconsfield); associé, décédé à Londres le 18 avril 1881.  
BLUNTSCHLI; associé, décédé à Heidelberg le 21 octobre 1881.  
DE LONGPÉBIER, Adrien; associé, décédé à Paris le 14 janvier 1882.

### CLASSE DES BEAUX-ARTS.

- VERBOECKHOVEN, Eugène; membre, décédé à Schaerbeek le 19 janvier 1881.  
VIEUXTEMPS, Henri; membre, décédé à Alger le 6 juin 1881.  
DE BUSSCHER, Edmond; membre, décédé à Gand le 17 janvier 1882.  
DE BIEFVE, Édouard; correspondant, décédé à Bruxelles le 7 février 1882.  
SCHNAASE, Charles; associé, décédé à Wiesbaden le 20 mai 1875.  
VIOULET-LE-DUC, E.; associé, décédé à Lausanne le 17 septembre 1879.  
COGNIET, Léon; associé, décédé à Paris le 20 novembre 1880.  
MARIETTE-BEY; associé, décédé au Caire en janvier 1881.  
HITZIG; associé, décédé à Berlin le 12 octobre 1881.  
BLANC, Charles; associé, décédé à Paris le 17 janvier 1882.



# TABLE

DES

## MÉMOIRES CONTENUS DANS LA SECONDE PARTIE DU TOME XLIII.

---

CLASSE DES SCIENCES.

1. De la détermination du rapport proportionnel entre l'argent, les chlorures et les bromures ; par J.-S. Stas (avec 2 planches).
  2. Mémoire sur les courbes du troisième ordre; par Folie et Le Paige (première partie).
  3. Note sur la quadrature des courbes paraboliques; par Eugène Catalan.
  4. Note sur les fonctions  $X_n$  de Legendre; par Eugène Catalan.
  5. Mémoire sur une suite de polynômes entiers et sur quelques intégrales définies; par Eugène Catalan.
  6. Bibliographie analytique des principaux phénomènes subjectifs de la vision (deuxième supplément comprenant les années 1878 et 1879); par J. Plateau.
  7. Deux Plésiosaures du lias inférieur du Luxembourg; par P.-J. Van Beneden.
  8. Recherches expérimentales sur la relation qui existe entre la résistance de l'air et sa température. — Conséquences physiques et philosophiques qui découlent de ces expériences (avec 4 planches); par G.-A. Hirn.
-



DE LA DÉTERMINATION  
DU  
RAPPORT PROPORTIONNEL ENTRE L'ARGENT,  
LES  
CHLORURES ET LES BROMURES;

PAR  
M. J.-S. STAS,  
MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

---

(Mémoire présenté à la classe des sciences dans la séance du 5 août 1876.)



DE LA DÉTERMINATION  
DU  
RAPPORT PROPORTIONNEL ENTRE L'ARGENT,  
LES  
CHLORURES ET LES BROMURES.

---

INTRODUCTION.

---

En entreprenant mes *Recherches de statique chimique au sujet du chlorure et du bromure d'argent*<sup>1</sup>, j'avais pour but, ainsi que je l'ai fait connaître, de découvrir la cause des faits anormaux que l'on observe lors de l'action mutuelle des solutions diluées d'argent et de l'acide chlorhydrique et des chlorures; je désirais aussi mesurer la limite d'erreur que comporte une détermination du rapport proportionnel entre l'argent et les chlorures, exécutée par la *voie humide*; enfin je voulais chercher la méthode à suivre pour arriver à une détermination aussi exacte que possible de ce rapport proportionnel et appliquer cette méthode à la vérification des travaux consignés dans mes *Recherches sur les rapports réciproques des poids atomiques*<sup>2</sup> et dans mes *Nouvelles recherches sur les lois des proportions chimiques, sur les poids atomiques et leurs rapports mutuels*<sup>3</sup>. J'ai considéré, en effet,

<sup>1</sup> *Annales de chimie et de physique*, Paris, 4<sup>e</sup> série, t. XXV, p. 22, et 5<sup>e</sup> série, t. III, pp. 145 et 289.

<sup>2</sup> *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 2<sup>e</sup> série, t. X, n<sup>o</sup> 8.

<sup>3</sup> *Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, t. XXXV, 1865.

comme un devoir rigoureux de soumettre moi-même ces travaux à un nouveau contrôle, d'autant plus que la longue étude à laquelle je venais de me livrer, pour élucider tous les faits anormaux constatés, m'avait familiarisé avec ce moyen d'investigation au point de ne plus trouver de grandes difficultés là où, en commençant mes recherches, je rencontrais des obstacles presque insurmontables. Aussi dès que j'ai eu pénétré la cause des anomalies et que j'ai pu mesurer exactement la limite d'erreur qu'elles peuvent entraîner, j'ai procédé à cette vérification. Je m'y suis fait aider par MM. Arthur Nyst et Julien Cabilliau, essayeurs à l'Administration des Monnaies, dont le concours m'a été si utile pour l'étude de toutes ces questions, ainsi que je l'ai dit, du reste, dans mes *Recherches de statique chimique au sujet du chlorure et du bromure d'argent*.

Pour faire bien comprendre les motifs des méthodes auxquelles j'ai eu recours pour effectuer une détermination du rapport proportionnel entre l'argent et les chlorures, je crois devoir résumer en peu de mots les phénomènes exposés dans mes *Recherches de statique chimique*.

Le chlorure d'argent obtenu, à la température ordinaire, par double décomposition à l'aide de solutions diluées de sels d'argent et de chlorures, est soluble à froid dans l'eau pure et dans l'eau acidulée par l'acide azotique.

Le degré de cette solubilité est à la fois fonction de l'état du chlorure, de la température, de la nature et de la quantité du dissolvant. La solubilité est à son *maximum* dans le chlorure caséux, floconneux; elle est à son *minimum* dans le chlorure pulvérulent.

Le mouvement et le repos subséquent, en amenant un changement dans l'état du chlorure caséux, floconneux, en diminuent également la solubilité.

Une solution saturée de ces chlorures caséux et pulvérulent est précipitée tant par une liqueur décime d'un sel d'argent que par une liqueur décime de sel marin. Le chlorure d'argent est éliminé intégralement de sa solution lorsque la quantité d'argent ou de chlore ajoutée ainsi s'élève au *triple* de la quantité du métal ou du métalloïde dissous à l'état de combinaison.

La précipitation du chlorure d'argent par les sels d'argent ou les chlorures est instantanée lorsque la solution est saturée, mais le trouble tarde à paraître à mesure que le liquide est plus appauvri en chlorure dissous. Ainsi lors-

qu'on approche du terme de l'élimination, le précipité peut se faire attendre *trente* et même *quarante-cinq minutes* après l'addition d'une liqueur décime. Toutes les conditions étant égales, l'élimination se fait dans un temps plus court par la liqueur décime d'argent que par la liqueur décime saline.

Une solution de chlorure d'argent caséux ou pulvérulent produit une opalescence d'une intensité égale, par l'addition, à un volume identique, de volumes égaux de liqueurs décimes d'argent et de chlorures.

Après avoir précipité une solution neutre ou acide d'un sel d'argent par un chlorure de manière à atteindre la dernière limite de la précipitation, mais sans la dépasser, si l'on ajoute au liquide éclairci par l'agitation et le repos, d'abord de la liqueur décime d'azotate d'argent jusqu'à cessation complète du trouble qui se produit et ensuite un volume de liqueur décime saline exactement égal à la moitié de la liqueur décime d'argent employée, on obtient un liquide qui, convenablement éclairci, éprouve une opalescence d'une *intensité égale*, par l'addition, à un volume identique, de volumes égaux de liqueurs décimes d'argent et de sel. Dans le liquide ainsi produit l'argent et le chlore existent à l'état de chlorure d'argent. En effet, le liquide offre le caractère fondamental et exclusif d'une solution de chlorure de ce métal.

Le bromure d'argent, obtenu à la température ordinaire par double décomposition, à l'aide de solutions diluées de sels d'argent et de bromures, est *insoluble à froid* dans l'eau pure et dans l'eau acidulée par les acides azotique, sulfurique et acétique.

L'insolubilité du bromure d'argent à froid est telle que l'acide bromhydrique ou un bromure produit au bout de *trois minutes* au *maximum* une zone opalescente à la surface de l'eau acidulée à l'acide azotique contenant de  $\frac{1}{2.000.000}$  à  $\frac{1}{2.500.000}$  d'argent à l'état dissous. Il se produit encore à la surface du liquide un trouble très-sensible au bout de *douze à quinze minutes*, lorsque la dilution est portée à  $\frac{1}{5.000.000}$ . Si, après avoir précipité à l'aide d'un BROMURE, à peu près tout l'argent en solution dans le liquide acide, on y verse goutte à goutte de la liqueur décime d'un bromure jusqu'à ce que la dernière goutte ne produise plus de zone opalescente, après une attente de *quinze minutes*, et si l'on annihile cette dernière goutte par une goutte de solution décime d'argent, dans ce cas, la liqueur obtenue, essayée soit à

l'aide de la liqueur décime d'argent, soit à l'aide d'une liqueur décime d'acide bromhydrique ou d'un bromure, n'éprouve absolument aucun trouble, même après une attente de *vingt-quatre heures*.

Les phénomènes ne se passent pas absolument de même lorsqu'on procède inversement, en précipitant une solution d'un bromure par un sel d'argent dissous et si le liquide n'est pas acidifié. Mais ce n'est pas le lieu ici d'insister sur cette anomalie; j'y reviendrai dans les préliminaires de la détermination du rapport proportionnel entre l'argent et les bromures. Mais quoi qu'il en soit, on voit par l'exposé qui précède que la méthode de la voie humide appliquée à la détermination du rapport proportionnel entre l'argent et les bromures, doit conduire à des résultats rigoureusement exacts pour l'argent et les bromures mis en œuvre et qu'on exécute l'opération dans des conditions convenables, c'est-à-dire en précipitant une solution *acidifiée* d'argent par un bromure.

Il ne peut en être de même pour la détermination du rapport proportionnel entre l'argent et les chlorures. En effet, les faits résumés ci-dessus démontrent que le rapport de l'argent à un chlorure doit être différent suivant qu'on l'a déterminé en précipitant le chlorure par l'argent, ou en précipitant la solution métallique par le chlorure. Dans les deux cas, on arrive nécessairement à des limites extrêmes différentes, limites extrêmes qui sont à la fois fonction de l'état du chlorure d'argent produit et du volume de l'eau mère. Pour un même chlorure et un volume d'eau mère identique, le terme moyen des deux écarts doit donner le rapport proportionnel cherché.



# PREMIER MÉMOIRE.

---

DE LA DÉTERMINATION DU RAPPORT PROPORTIONNEL ENTRE L'ARGENT  
ET LES CHLORURES DE POTASSIUM, DE SODIUM ET D'AMMONIUM.

---

DE LA DÉTERMINATION DU RAPPORT PROPORTIONNEL ENTRE L'ARGENT  
ET LES CHLORURES.

---

Pour appliquer *la voie humide* à la détermination d'un rapport proportionnel, il est nécessaire de partir du résultat d'une expérience ou d'une hypothèse qu'on en a déduite. Je dirai ailleurs <sup>1</sup> comment je crois que le dosage du chlore d'un chlorure, de l'argent d'un sel de ce métal peut être effectué et fournir des résultats suffisamment exacts pour servir de base à une expérimentation rigoureuse. Afin de ne pas compliquer cet exposé, je vais supposer que l'on ait en vue une *vérification* quelconque.

Le problème à résoudre est d'opérer une double décomposition entre des poids donnés d'argent et de chlorure, et de déterminer ensuite soit la quantité d'argent, soit la quantité de chlore restée libre. A cet effet, la double décomposition ayant eu lieu, et le chlorure d'argent produit ayant été amené à un état relativement stable d'abord par une agitation suffisamment prolongée et ensuite par un long repos, il s'agit de porter, à l'aide d'additions ménagées de liqueurs décimes, préparées avec soin <sup>2</sup> l'eau mère successivement aux

<sup>1</sup> Voir la note n° 1 à la fin du mémoire.

<sup>2</sup> Voir la note n° 2 à la fin du mémoire.

limites extrêmes opposées de la précipitation, ainsi que je viens de le dire. Le terme moyen des quantités reconnues nécessaires pour atteindre les deux limites extrêmes, représente le rapport proportionnel cherché. On contrôle le résultat ainsi constaté en ajoutant au liquide une quantité de liqueur décime opposée égale à la moitié de celle qui a été reconnue indispensable pour atteindre la dernière limite. Si toutes les opérations ont été faites avec exactitude, et si le chlorure d'argent a été soustrait à la radiation lumineuse, la liqueur finale produite doit être constituée exclusivement par une solution de chlorure d'argent et doit partant, comme elle, éprouver une opalescence égale, par l'addition, à un volume identique de volumes égaux de liqueurs décimes d'argent et de sel.

L'application de ce que je viens d'exposer constitue la première méthode. Il est possible d'arriver au résultat cherché sans constater les limites extrêmes. En effet, ainsi que M. Mulder l'a déjà conseillé pour les essais d'argent, et que cela est pratiqué à l'Hôtel des Monnaies d'Utrecht, on peut rechercher directement la quantité de l'une ou de l'autre liqueur décime nécessaire pour amener l'eau mère au sein de laquelle la double décomposition, entre les solutions d'argent et de chlorure employées, s'est accomplie, à produire une opalescence d'une intensité égale, par l'addition, à un volume identique de cette eau mère, de volumes égaux de liqueurs décimes d'argent et de sel.

L'exécution de cette recherche constitue ce que j'appelle la *seconde* méthode.

J'ai mis en pratique les deux modes d'opérer; convenablement exécutés, ils ont conduit à des résultats qu'on peut considérer comme identiques. Il doit en être ainsi par le motif que la première méthode renferme implicitement la seconde. Mais la première, par les nombreux tâtonnements qu'elle exige, pour atteindre successivement les deux limites extrêmes, expose plus que la seconde le chlorure d'argent à subir l'action altérante de la lumière jaune incomplètement dépouillée d'action chimique.

La seconde méthode, en effet, peut être exécutée sans que la masse de chlorure d'argent qui existe au fond du flacon d'essai soit soumise pendant un seul instant à l'action de la lumière jaune.

Aussi ne suis-je parvenu à réaliser la presque identité des résultats que

grâce au long apprentissage par lequel j'ai passé et en prenant les soins les plus minutieux et les plus fastidieux.

Je crois devoir attirer l'attention des chimistes sur ces difficultés d'exécution, afin de les mettre en garde contre des résultats obtenus sans avoir pris les soins auxquels j'ai dû m'astreindre pour ne pas me tromper.

J'ai appliqué les deux méthodes d'investigation à la détermination du rapport proportionnel entre l'argent et les chlorures de potassium, de sodium et d'ammonium.

L'application de la première méthode a été faite en entier avec le concours de MM. Nyst et Cabilliauw.

---

DE LA DÉTERMINATION DU RAPPORT PROPORTIONNEL ENTRE L'ARGENT ET LES  
CHLORURES DE POTASSIUM, DE SODIUM ET D'AMMONIUM.

---

A. — Par la première méthode.

L'argent employé à ces travaux a été une partie du métal qui a servi aux synthèses de l'iode, du bromure et de l'azotate d'argent et de quelques déterminations du rapport proportionnel entre l'argent, le chlorure de lithium et le bromure de potassium, consignées dans mes *Nouvelles recherches sur les lois des proportions chimiques*, etc. J'ai fait connaître suffisamment les moyens auxquels j'ai eu recours pour me procurer ce métal et les soins que j'ai pris pour m'assurer de sa pureté. Je puis donc me dispenser de revenir sur ce sujet et me borner à dire que l'argent, avant d'être pesé, a été chauffé pendant longtemps près de son point de fusion dans une flamme brûlant avec excès d'air et abandonné ensuite au refroidissement sous une cloche renfermant de l'air maintenu sec par la présence d'un vase ouvert contenant de l'acide sulfurique.

Le chlorure de potassium mis en expérience provenait du chloro-platinate de potassium, obtenu par voie de cristallisation; c'était une partie du chlorure

désigné sous le n° 2 à la page 237 de mes *Nouvelles recherches sur les lois des proportions chimiques*: il contenait de deux à deux et demi cents millièmes de silice.

Le *chlorure de sodium* provenait du chloro-platinate de sodium; c'est une partie du premier tiers dont j'ai décrit la préparation pages 246 et 247 de mes *Nouvelles recherches*: il renfermait trois et demi cents millièmes de silice mêlée de traces de silicate de sodium.

Le *chlorure d'ammonium* employé est une partie de celui que j'ai décrit sous le n° 2 pages 4 et 50 de mes *Nouvelles recherches*. Il renfermait des traces de sodium et de potassium sensibles seulement à l'analyse spectrale. Ces métaux proviennent sans doute du vase de verre dur dans lequel le sel ammoniac a été volatilisé.

Avant d'être pesés, les chlorures de potassium et de sodium, introduits dans un creuset de platine fermé, ont été chauffés jusqu'au rouge très-sombre; à cet effet le creuset a été enfermé dans un moufle neuf d'un fourneau de coupellation. Lorsqu'ils étaient encore très-chauds, ils ont été enfermés dans des tubes bouchés à l'émeril et ceux-ci ont été abandonnés au refroidissement sous une cloche contenant de l'air séché à l'acide sulfurique.

Le chlorure d'ammonium, qui avait été sublimé dans une atmosphère d'ammoniaque sèche, a été chauffé ensuite au point d'émettre d'abondantes vapeurs, dans le tube même où il devait être pesé.

La pesée de l'argent et des chlorures a été faite à l'aide de poids de platine, vérifiés avec le plus grand soin. Quoiqu'elle ait été exécutée avec une balance assez sensible pour accuser une différence de trois centièmes de milligramme, la pesée comporte néanmoins une *erreur possible* de  $\pm 0^{\text{sr}},000,05$ . L'incertitude de  $0^{\text{sr}},000,10$  provient du déplacement du zéro, qui s'opère lorsqu'on soulève le tube pendu au crochet de la balance.

Lorsqu'il s'agit de poids relativement considérables, il faut d'ailleurs une balance bien parfaite pour ne pas entraîner à des incertitudes qui s'élèvent au double et même au triple de celles que je viens d'indiquer.

Les masses mises en expériences ont été calculées en admettant par hypothèse le poids atomique de l'argent = 108 et les poids moléculaires des chlorures de potassium, de sodium et d'ammonium respectivement = 74,50 58,50 et 53,50.

J'ai procédé de la manière suivante à l'exécution des déterminations : j'ai pris des flacons très-solides, bouchés à l'émeril. Les bouchons étaient soigneusement doucis afin de permettre une fermeture hermétique, sans laisser des vides et partant sans interposition possible de liquide. Après avoir introduit l'argent dans les flacons, j'y ai versé six et demi centimètres cubes d'acide azotique d'un poids spécifique de 1,24, quantité indispensable lorsqu'on veut dissoudre, à chaud, comme je l'ai fait, le métal en *vase fermé*. L'acide azotique normal et pur avait été, dans ce but, amené à 1,24 par l'addition d'eau pure.

Après la dissolution de l'argent et le refroidissement des flacons, j'ai descendu ceux-ci dans un double sac de toile noire d'un tissu très-serré; les bords libres du sac ont été liés autour du goulot de manière à empêcher complètement la lumière de pénétrer dans le flacon.

Le bouchon et les bords du goulot qui avaient eu le contact des doigts ont été lavés à l'eau pure pour leur enlever les traces de chlorure adhérent. Après avoir débouché les flacons avec une pince de bois, on y a introduit avec précaution une quantité d'eau pure égale à *quinze* fois le poids de l'argent dissous. Dans cet état les vases ont été portés dans une chambre obscure et placés dans une position inclinée à 45 degrés devant un faisceau de lumière jaune suffisant pour éclairer l'opérateur. On a fait pénétrer ensuite dans le goulot de chaque flacon le tube contenant le chlorure destiné à l'essai. En tournant légèrement le tube sur lui-même on en a fait sortir le chlorure de manière à le laisser tomber sur la paroi du flacon pour atteindre, en glissant, le fond sans produire de projection du liquide argentifère. Le tube est lavé ensuite suffisamment à l'eau pure et toutes les eaux de lavages sont ajoutées au liquide contenu dans le flacon. On ajoute enfin de l'eau pure en quantité suffisante pour porter le poids total à *trente fois* celui du poids de l'argent employé et en tout cas pour remplir la moitié au moins et les deux tiers au plus de sa capacité.

On bouche le flacon et l'on fixe solidement, à l'aide de ficelles, le bouchon au goulot. On couvre le tout d'une double coiffe noire qu'on serre à l'aide d'un anneau de caoutchouc.

Dans le but de diminuer la solubilité du chlorure d'argent qui a pris nais-

sance et de le ramener à un état de stabilité nécessaire pour pouvoir arriver à des limites extrêmes *constantes*, on a soumis dans la chambre obscure le contenu de tous les flacons à une agitation vive et prolongée pendant *deux heures*, de manière à désagréger le plus possible les flacons, et à transformer les chlorures à peu près à l'état pulvérulent. Après on a abandonné tous les flacons couverts de leur double enveloppe dans une armoire obscure à un repos de vingt heures.

Au bout de ce temps on a procédé à la détermination des limites extrêmes. Deux essais ont été institués sur chacun des trois chlorures soumis à l'expérimentation, soit en tout *six* déterminations qui, pour être déterminées le même jour, ont exigé un travail de *neuf heures* de six personnes. Trois, MM. Nyst, Cabilliau et moi, constataient la production de l'opalescence résultant de l'addition, faite par M. Nyst, de la liqueur décime et jugeaient de l'intensité de ce trouble. Trois aides étaient chargés de procéder à l'agitation pour obtenir l'éclaircissement des liquides rendus opalescents.

Le premier de chaque double essai a servi de moyen de recherche, le second de moyen de contrôle. On verra que grâce aux soins extrêmes pris pour soustraire pendant l'expérimentation les essais à toute radiation lumineuse douée de pouvoir chimique, le résultat a été presque identique pour chacun d'eux.

Pour la recherche des limites, les flacons ont été posés successivement deux par deux à la hauteur de l'œil près d'une glace de verre jaune large de deux décimètres, et haute d'un décimètre, le restant de la croisée et de la salle étant dans une obscurité complète.

Après avoir enlevé les coiffes qui recouvrent les goulots et les ligatures qui fixent les bouchons, et les bords du sac qui attachent celui-ci au goulot, enfin après avoir lavé à l'eau pure le bouchon et le goulot, on a débouché les flacons au moyen d'une pince en bois, et en abaissant le sac jusqu'au niveau du liquide contenu dans le flacon, on a laissé tomber près de la surface du liquide du premier flacon cinq gouttes exploratrices de liqueur décime saline, à l'aide d'une pipette graduée qui, dans une position verticale, en débite *vingt-cinq* par centimètre cube <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Voir à la fin du mémoire la note. n° 5.

Ainsi que je l'ai dit dans mes *Recherches de statique chimique*, d'après le temps requis pour l'apparition de l'opalescence qui se produit toujours à la surface du liquide et aussi d'après l'intensité du trouble, on a réglé la quantité de liqueur décime à ajouter.

On a agi absolument de la même manière avec le second flacon.

Le résultat étant constaté, on a procédé à une nouvelle agitation afin de rendre au liquide sa limpidité primitive, en prenant la précaution de couvrir toujours les flacons de leur sac et le goulot de leur coiffe et avant de déboucher le flacon, de laver, après le maniement, le bouchon et le goulot à l'eau pure.

On a commencé d'abord par les essais au chlorure de potassium. Pendant que cette agitation s'effectuait, on a opéré ensuite sur les flacons d'essai avec le chlorure de sodium et enfin avec les essais au chlorure d'ammonium.

Quand, par suite d'additions successives de liqueur décime, on a eu atteint la limite extrême saline pour chacun des six essais, on a cherché la limite extrême de précipitation pour l'argent, en commençant encore par les essais au chlorure de potassium.

Ce résultat étant obtenu, on a ajouté au contenu de chaque flacon une quantité de liqueur décime saline égale à la moitié de la quantité de liqueur décime d'argent reconnue nécessaire pour atteindre la dernière limite.

Les essais, étant devenus ainsi très-fortement opalescents, ont été soumis, avec tous les soins nécessaires pour éviter l'intervention de la lumière, à une longue agitation afin de leur restituer leur limpidité perdue.

Enfin, on a recherché l'état des eaux mères de chaque flacon, en comparant *directement* à la lumière d'un jaune pur l'opalescence produite par l'addition de *dix gouttes* de liqueurs décimes d'argent et de sel à *cinquante centimètres cubes* de liquide contenu dans des vases cylindriques de forme et de diamètre identiques.

Après la constatation du résultat chaque liquide a été introduit dans le flacon où il avait été puisé et les flacons, après avoir été soumis à une longue agitation, ont été abandonnés à eux-mêmes jusqu'au lendemain dans une armoire obscure.

Le lendemain on a procédé à une vérification de l'état des eaux mères, d'abord à la lumière jaune pure, et ensuite à la lumière diffuse ordinaire.

Voici les résultats de ces six déterminations :

*Chlorure de potassium.*

1° a.	Poids du chlorure dans l'air. . . . .	7 <sup>er</sup> ,081,75
b.	» » dans le vide. . . . .	7 <sup>er</sup> ,085,51
c.	» de l'argent dans l'air. . . . .	10 <sup>er</sup> ,271,01
d.	» » dans le vide. . . . .	10 <sup>er</sup> ,271,60

La double décomposition étant opérée et la désagrégation des flacons étant effectuée par une agitation suffisamment prolongée, j'ai abandonné l'essai à lui-même. Le lendemain, en opérant par la voie de gouttes exploratrices, j'ai constaté que :

1° Cinq centimètres cubes de liqueur décime saline y produisent *instantanément* un trouble très-intense;

2° Cinq centimètres cubes de liqueur décime saline, répandus à la surface de l'eau mère préalablement éclaircie par l'agitation suivie d'un repos convenable, y produisent *instantanément* un trouble très-intense;

3° Cinq centimètres cubes de liqueur décime saline, répandus à la surface de l'eau mère préalablement éclaircie, y produisent *instantanément* un trouble très-intense;

4° Cinq centimètres cubes de liqueur décime saline, répandus à la surface de l'eau mère préalablement éclaircie, y produisent *instantanément* une zone opalescente peu intense;

5° Cinq centimètres cubes de liqueur décime saline, répandus à la surface de l'eau mère préalablement éclaircie, y produisent *instantanément* une zone opalescente très-peu intense;

6° Deux centimètres cubes de liqueur décime saline, répandus à la surface de l'eau mère préalablement éclaircie, y produisent *instantanément* une zone opalescente très-faible;

7° Un centimètre cube de liqueur décime saline, répandu à la surface de l'eau mère préalablement éclaircie, y produit, au bout de *cinq minutes*, une zone opalescente très-faible;



8° Un centimètre cube de liqueur décime saline, répandu avec précaution à la surface du liquide préalablement éclairci, y produit, au bout de *cinq minutes*, une zone opalescente extraordinairement faible;

9° Un centimètre cube de liqueur décime saline, répandu goutte à goutte à la surface du liquide préalablement éclairci, y produit, au bout de *huit minutes*, une zone opalescente tellement faible qu'on peut regarder l'essai amené à la limite extrême saline;

10° Cinq gouttes de liqueur décime saline, répandues avec précaution à la surface du liquide préalablement éclairci, n'y produisent aucune zone opalescente au bout de *quinze minutes*;

11° Cinq gouttes de liqueur décime saline ajoutées aux cinq gouttes précédentes, sans remuer le liquide, ne produisent, au jugement de deux observateurs, aucune zone opalescente au bout de *trente minutes*; au jugement du troisième observateur la conservation de la limpidité absolue est *douteuse*; en aucun cas l'incertitude ne dépasse la quantité de cinq gouttes de liqueur décime.

*L'essai, pour être amené à la limite extrême saline, exige donc au MINIMUM l'addition de TRENTE CENTIMÈTRES cubes de liqueur décime saline et au MAXIMUM TRENTE ET DEUX DIXIÈMES CENTIMÈTRES cubes.*

Pour amener l'essai à l'extrême limite opposée, j'ai ajouté successivement :

1° Cinq centimètres cubes de liqueur décime d'azotate d'argent qui y ont produit *instantanément* un trouble très-intense;

2° Deux centimètres cubes de liqueur décime d'azotate d'argent, répandus à la surface du liquide préalablement éclairci par l'agitation, qui y ont produit *instantanément* un trouble très-intense;

3° Deux centimètres cubes de liqueur décime d'azotate d'argent, répandus à la surface du liquide préalablement éclairci, qui y ont produit *instantanément* un trouble très-intense;

4° Deux centimètres cubes de liqueur décime d'azotate d'argent, répandus à la surface du liquide préalablement éclairci, qui y ont produit *instantanément* un trouble faible;

5° Deux centimètres cubes de liqueur décime d'azotate d'argent, répandus à la surface du liquide préalablement éclairci, qui y ont produit *instantanément* un trouble faible;

6° Un centimètre cube de liqueur décime d'argent, répandu à la surface de l'essai préalablement éclairci, qui y a produit *instantanément* un trouble très-faible;

7° Un centimètre cube de liqueur décime d'argent, répandu à la surface de l'essai préalablement éclairci, qui y a produit au bout de *deux minutes* une zone opalescente faible;

8° Un centimètre cube de liqueur décime d'argent, répandu à la surface du liquide éclairci, qui y a produit au bout de *deux minutes* une zone opalescente faible;

9° Un centimètre cube de liqueur décime d'argent, répandu à la surface du liquide préalablement éclairci, qui y a produit au bout de *quatre minutes* une zone opalescente très-faible;

10° Un centimètre cube de liqueur décime d'argent, répandu à la surface du liquide préalablement éclairci, qui y a produit, au bout de *huit minutes*, une zone opalescente très-faible;

11° Un demi-centimètre cube de liqueur décime d'argent, répandu goutte à goutte à la surface de l'essai parfaitement éclairci, qui y a produit au bout de *seize minutes* une zone opalescente excessivement faible;

12° Un demi-centimètre cube de liqueur décime d'argent, répandu goutte à goutte à la surface de l'essai parfaitement éclairci, qui y a produit au bout de *vingt-quatre minutes* une zone opalescente tellement faible qu'on peut considérer comme atteinte la limite extrême d'argent;

13° Un demi-centimètre cube de liqueur décime d'argent, répandu goutte à goutte à la surface de l'essai parfaitement éclairci, qui n'y a produit au bout de trente minutes qu'une zone opalescente douteuse.

Au *minimum dix-neuf centimètres* de liqueur décime d'argent ont donc été nécessaires pour porter l'essai à la limite extrême de ce métal et au *maximum dix-neuf et vingt-cinq centièmes centimètres cubes* en y comprenant la moitié du demi-centimètre douteux.

La limite extrême d'argent ayant été atteinte, on a ajouté à la fois au liquide *neuf et demi centimètres cubes* de liqueur décime saline, et après une longue agitation suivie d'un repos convenable, pour restituer à l'essai sa limpidité perdue, on a constaté tant le jour même que le lendemain, que l'ad-

dition de *cinq gouttes* de liqueur décime de sel et d'argent à *cinquante centimètres* cubes de liqueur d'épreuve, produisait une opalescence d'une égale intensité, soit qu'on ait jugé le trouble à la lumière jaune pure, ou à la lumière blanche diffuse.

Ainsi, pour arriver respectivement : *a.* aux limites extrêmes il a fallu une addition :

1° De trente centimètres cubes de liqueur décime saline représentant 0<sup>gr</sup>,020,736 de chlorure de potassium;

2° De dix-neuf centimètres cubes de liqueur décime d'argent, représentant 0<sup>gr</sup>,019 de ce métal;

Et *b.* au terme moyen il a fallu une addition subséquente de *neuf et demi centimètres* cubes de liqueur décime saline, représentant 0<sup>gr</sup>,00656 de chlorure de potassium.

Il résulte de toutes ces données que la limite extrême saline =

$$\frac{7,08551 + 0,020756}{10,2716} = 69,185,57$$

la limite extrême d'argent =

$$\frac{7,008551 + 0,202756}{10,2716 + 0,019} = 69,055,64$$

et le terme moyen, soit le vrai rapport proportionnel entre l'argent, le chlorure de potassium

$$\frac{69,185,57 + 69,055,64}{2} = 69,119,5$$

11° <i>a.</i>	Poids du chlorure dans l'air. . . . .	7 <sup>gr</sup> ,066,50
<i>b.</i>	»           »       dans le vide. . . . .	7 <sup>gr</sup> ,070,06
<i>c.</i>	»       de l'argent dans l'air. . . . .	10 <sup>gr</sup> ,248,62
<i>d.</i>	»           »       dans le vide. . . . .	10 <sup>gr</sup> ,249,20

Après la double décomposition, l'essai, pour être porté à la limite extrême saline, a exigé l'addition successive de *trente centimètres* cubes au *minimum*

et de trente et vingt-cinq centièmes au *maximum* de liqueur décime saline, soit une quantité de chlorure de potassium = 0<sup>sr</sup>,020736.

La limite opposée a été atteinte par l'addition successive de *dix-neuf* à *dix-neuf vingt* centièmes centimètres cubes de liqueur décime d'argent, représentant 0<sup>sr</sup>,019 de ce métal.

On a ajouté à l'essai *neuf et demi* centimètres cubes de liqueur décime saline, soit 0<sup>sr</sup>,00656 de chlorure de potassium; après son éclaircissement complet par une agitation suivie d'un repos suffisant, on a constaté le jour même et le lendemain que l'eau mère éprouvait une opalescence d'une égale intensité par l'addition de cinq gouttes de liqueurs décimes d'argent et de sel à cinquante centimètres cubes du liquide d'épreuve.

Il résulte de ces données que la limite extrême saline est

$$:: 100,000 : 69,185,85,$$

la limite extrême d'argent est

$$:: 100,000 : 69,055,82,$$

dont le terme moyen est

$$:: 100,000 : 69,119,8.$$

La première détermination ayant donné le rapport de

$$100,000 : 69,119,5,$$

et la seconde le rapport de

$$100,080 : 69,119,8,$$

la moyenne est

$$100,000 : 69,119,65.$$

Mais j'ai dit plus haut que le chlorure de potassium employé contenait deux et demi cents millièmes de silice, ce qui ramène le rapport de

$$100,000 : 69,117,92.$$

*Chlorure de sodium.*

1° a.	Poids du chlorure dans l'air.	. . . . .	6 <sup>sr</sup> ,076,50
b.	» » dans le vide.	. . . . .	6 <sup>sr</sup> ,079,76
c.	» de l'argent dans l'air.	. . . . .	11 <sup>sr</sup> ,225,55
d.	» » dans le vide.	. . . . .	11 <sup>sr</sup> ,224,17

Après la double décomposition, l'essai, pour être porté :

1° A la limite extrême saline, a exigé seize centimètres cubes de liqueur décime saline, représentant 0<sup>sr</sup>,00867 de chlorure sodique;

2° A la limite extrême d'argent, a exigé quinze et demi centimètres cubes de liqueur décime de ce métal, soit 0<sup>sr</sup>,0155 d'argent. Il a requis exactement sept et soixante-quinze centièmes centimètres cubes de liqueur décime saline, soit 0<sup>sr</sup>,0042 de sel marin pour fournir une liqueur dans laquelle tout le chlore et tout l'argent sont exclusivement à l'état de chlorure de ce métal.

Ces résultats conduisent aux rapports suivants :

1° Pour la limite extrême saline :

$$:: 100,000 : 54,245,95;$$

2° Pour la limite extrême d'argent :

$$:: 100,000 : 54,169,15;$$

3° Pour le terme moyen :

$$:: 100,000 : 54,206,5.$$

11° a.	Poids du chlorure dans l'air.	. . . . .	5 <sup>sr</sup> ,728,40
b.	» » dans le vide.	. . . . .	5 <sup>sr</sup> ,751,47
c.	» de l'argent dans l'air.	. . . . .	10 <sup>sr</sup> ,580,50
d.	» » dans le vide.	. . . . .	10 <sup>sr</sup> ,581,10

Après la double décomposition, l'essai a exigé pour être amené :

1° A la limite extrême saline, quatorze centimètres cubes de liqueur décime, soit 0<sup>sr</sup>,00759 de sel;

2° A la limite extrême d'argent, douze et demi centimètres cubes de liqueur décime d'argent, soit 0<sup>sr</sup>,0125 de ce métal;

3° A contenir l'argent et le chlore à l'état de chlorure de ce métal, six et vingt-cinq centièmes de centimètres cubes de liqueur saline, soit 0<sup>sr</sup>,0034 de chlorure.

Ces données conduisent aux rapports suivants :

1° Pour la limite extrême saline,

$$:: 100,000 : 54,258,7;$$

2° Pour la limite extrême d'argent,

$$:: 100,000 : 54,174,7;$$

3° Pour le terme moyen,

$$:: 100,000 : 54,206,76.$$

La première détermination a donné le rapport de

$$100,000 \text{ à } 54,206,5,$$

et la seconde de

$$100,000 \text{ à } 54,206,76,$$

dont la moyenne est

$$100,000 \text{ à } 54,206,65.$$

Mais le chlorure sodique mis en expérience contenait trois et demi cents millièmes de silice, ce qui ramène le rapport proportionnel à 54<sup>sr</sup>,204,71.

#### *Chlorure d'ammonium.*

1° a.	Poids du chlorure dans l'air.	. . . . .	5 <sup>sr</sup> ,556,70
b.	»	» dans le vide.	. . . . . 5 <sup>sr</sup> ,561,14
c.	»	de l'argent dans l'air.	. . . . . 11 <sup>sr</sup> ,225,59
d.	»	» dans le vide.	. . . . . 11 <sup>sr</sup> ,226,25

Après la double décomposition, l'essai a exigé pour être amené :

1° A la limite extrême saline, vingt-trois et vingt-cinq centièmes centimètres cubes de liqueur décime saline, représentant 0<sup>gr</sup>,01153 de sel ammoniac;

2° A la limite extrême d'argent, dix-huit centimètres cubes de liqueur décime, soit 0<sup>gr</sup>,016 de ce métal;

3° A contenir l'argent et le chlore exclusivement à l'état de chlorure d'argent, neuf centimètres cubes de liqueur décime saline, soit 0<sup>gr</sup>,00446 de sel ammoniac.

Ces données conduisent aux rapports suivants :

1° Pour la limite extrême saline :

$$:: 100,000 : 49,659,8;$$

2° Pour la limite extrême d'argent :

$$:: 100,000 : 49,560,5;$$

3° Pour le terme moyen :

$$:: 100,000 : 49,600.$$

11° a.	Poids du chlorure dans l'air.	. . . . .	5 <sup>gr</sup> ,565,70
b.	»	» dans le vide.	. . . . . 5 <sup>gr</sup> ,570,15
c.	» de l'argent dans l'air.	. . . . .	11 <sup>gr</sup> ,245,76
d.	»	» dans le vide.	. . . . . 11 <sup>gr</sup> ,244,40

Après la double décomposition, l'essai a exigé pour être amené :

1° A la limite extrême saline, vingt-trois et vingt-cinq centièmes centimètres cubes de liqueur décime saline, soit 0<sup>gr</sup>,01153 de sel ammoniac;

2° A la limite extrême d'argent, dix-huit centimètres cubes de liqueur décime, soit 0<sup>gr</sup>,018 de ce métal;

3° A contenir l'argent et le chlore exclusivement à l'état de chlorure d'argent, neuf centimètres cubes de liqueur décime saline, soit 0<sup>gr</sup>,00446 de chlorure d'ammonium.

Ces données fournissent les rapports suivants :

1° Pour la limite extrême saline :

$$:: 100,000 : 49,659,66;$$

2° Pour la limite extrême d'argent :

$$:: 100,000 : 49,560,52;$$

3° Pour le terme moyen :

$$:: 100,000 : 49,599,99.$$

La moyenne de la première et de la seconde détermination est **49,600**.

*B. — Par la seconde méthode.*

Ainsi que je l'ai dit plus haut, dans cette seconde méthode, le but à atteindre est d'amener directement l'eau mère d'un essai à produire une opalescence d'une intensité égale, par l'addition, à un volume identique, de volumes égaux de liqueurs décimes.

Ce résultat peut être réalisé sans exposer un seul instant la masse de chlorure d'argent à la radiation de la lumière qui, dans l'état actuel de nos connaissances, est la seule action connue capable d'altérer l'exactitude de la recherche. En effet, toutes les opérations doivent nécessairement être exécutées sur une partie de l'eau mère séparée du chlorure.

Pendant la séparation du liquide le flacon renfermant l'essai peut être placé dans l'obscurité et il peut ensuite y être conservé. La quantité de chlorure devant être exposée à la lumière n'atteint pas un cent millième du poids du liquide mis en expérience. D'ailleurs les poids de l'argent et du chlorure peuvent être combinés de manière à réduire les tâtonnements à fort peu de chose pour arriver au résultat cherché. Dans les vérifications que j'ai entreprises par cette méthode, *j'ai pris pour point de départ les résultats fournis*



*par la première méthode.* J'ai supposé donc que le rapport proportionnel entre l'argent et les chlorures soumis à mon investigation est :

a.	Pour le chlorure de potassium.	. . .	:: 100,000 : 69,120
b.	»	» de sodium.	. . . :: 100,000 : 54,207
c.	»	» d'ammonium.	. . . :: 100,000 : 49,600

Après avoir pesé en premier lieu les chlorures sur lesquels je voulais opérer, j'ai pesé ensuite l'argent d'après le poids du chlorure constaté. Pour la dissolution du métal j'ai employé *quatre centimètres cubes* d'acide azotique de 1,24 de poids spécifique par gramme de métal. Ce volume étant insuffisant pour opérer la dissolution de l'argent à vase fermé, j'ai pris les dispositions suivantes :

A l'aide d'un bouchon en caoutchouc désulfuré, j'ai adapté un tube à dégagement recourbé à 45° au flacon contenant l'argent et l'acide azotique dilué d'eau, et j'ai fixé le flacon incliné à 45° dans un bain d'eau. La branche du tube traversant le bouchon pénétrait assez avant dans le flacon et sa partie verticale dont le bout était effilé se rendait dans un ballon à *long col*, contenant environ *cent centimètres cubes* d'eau pure chauffée vers 100°. Le long col de ce ballon était engagé dans un manchon plein d'eau froide renouvelée.

Par ces dispositions les gaz provenant de l'attaque de l'acide azotique ne pouvaient pas venir en contact avec le caoutchouc et l'argent que ces gaz pouvaient contenir devait se dissoudre dans le liquide de la condensation de la vapeur d'eau du ballon laveur.

L'acide azotique était dilué au point de ne se laisser attaquer par l'argent que lentement et vers la température de 100°; aussi la dissolution du métal a exigé de cinq à six heures, quoique cependant son poids ait été compris entre 10 et 21 grammes.

Après la dissolution on a laissé pénétrer dans le flacon l'eau de lavage des gaz, maintenue à 100°, et on a abandonné le tout au refroidissement dans le bain même. Le tube et le ballon ont été lavés avec une partie de l'eau qui devait servir d'eau mère à l'essai.

Ayant besoin d'un volume considérable de liquide pour contrôler les résultats, au lieu de produire la double décomposition au sein d'un liquide pesant trente fois le poids de l'argent employé, j'ai pris constamment un poids d'eau pure *centuple* de celui de l'argent et un flacon d'une capacité *double* de celui du volume d'eau.

Pour soustraire à l'action de la lumière le chlorure d'argent produit, j'ai pris toutes les dispositions que j'ai fait connaître dans l'exposé de la première méthode. Afin d'être certain d'avoir amené le chlorure à l'état de division extrême et de stabilité suffisante, on a soumis dans une obscurité complète tous les essais pendant *cinq heures* à une agitation continue; les flacons ont été conservés ensuite vingt-quatre heures au repos dans une armoire obscure.

Pour extraire le liquide nécessaire à l'expérimentation, sans mettre une trace de chlorure en suspension, j'ai pris les dispositions suivantes : j'ai adapté au flacon d'essai débouché un bouchon en caoutchouc muni de deux tubes étroits et ouverts des deux bouts, l'un droit ayant le bout inférieur légèrement effilé et recourbé, l'autre courbé en siphon et dont le bout plongeant dans le liquide était également effilé et recourbé de bas en haut, de manière à transformer le flacon en appareil de Mariotte. Le siphon a été amorcé en faisant passer par le tube droit de l'air pur à travers l'eau mère contenue dans le flacon. Le liquide, à mesure qu'il s'écoulait, a été reçu dans un entonnoir placé à hauteur convenable. Cet entonnoir était muni d'une bourre de fils fins de platine, couverte d'une couche épaisse d'asbeste feutré et purifié. J'ai décrit page 33 de mes *Recherches de statique chimique*, la manière de se procurer des filtres qui permettent la filtration rapide d'une solution de chlorure d'argent et les soins à prendre pour ne pas l'altérer. Je puis donc me dispenser d'entrer ici dans d'autres détails; je me bornerai à dire que l'entonnoir et le vase destiné à recevoir le liquide filtré étaient couverts et entourés de papier noir.

Pour comparer entre elles l'opalescence des eaux mères additionnées de liqueurs décimes, j'ai eu successivement recours aux deux moyens que j'ai fait connaître dans mes *Recherches de statique*. La comparaison directe de l'opalescence qui est d'une exécution rapide et facile a toujours précédé l'em-

ploi du second moyen qui consiste à mesurer la hauteur de colonne de liquide présentant à la vue une opalescence identique.

La comparaison directe a été effectuée sur un volume de cinquante centimètres cubes additionné d'un demi-centimètre cube de liqueur décime. Dans l'exécution de cette méthode j'ai attendu d'abord cinq minutes pour laisser au chlorure le temps de se séparer du liquide et ensuite j'ai laissé les vases au repos jusqu'à ce que l'opalescence fût arrivée à un état de *stabilité relative*, ce qui s'est généralement réalisé entre sept et dix minutes après l'addition de la liqueur décime. Après ce laps de temps l'opalescence a été en augmentant. J'ai démontré, en effet, qu'une solution de chlorure d'argent, rendue opalescente par le composé à l'état de division extrême s'en dépouille assez rapidement. De sorte que l'augmentation du trouble que l'on constate au bout de peu de temps dépend non-seulement du changement d'état du chlorure en suspension, mais de l'élimination de celui qui était resté en solution. Dans mes *Recherches de statique*, j'ai prouvé que l'élimination est totale, lorsque le liquide s'est complètement éclairci. Du reste, j'ai institué de nouvelles investigations pour m'assurer de la possibilité de déduire des indications quantitatives précises de l'opalescence produite dans une solution saturée de chlorure par des quantités croissantes de liqueurs décimes. Ces investigations m'ont fait reconnaître qu'on ne peut rien conclure de cette comparaison si l'on ne met pas en liberté tout le chlorure en solution. Or, en agissant ainsi le trouble est trop intense pour qu'on puisse apprécier de petites différences. La comparaison de l'opalescence ne peut donc conduire qu'à une notion de rapport et encore la déduction doit-elle être tirée après une observation de courte durée et comprise entre cinq et dix minutes.

Dans l'exécution de l'expérience, lorsque, après quelques tâtonnements, j'étais arrivé à réaliser l'égalité de l'opalescence par la comparaison directe à la lumière jaune, j'ai eu recours à l'emploi du second moyen. A cet effet j'ai opposé des colonnes de liquide variant entre douze et quinze centimètres de hauteur, sur cinq centimètres environ de diamètre. Les dispositions ont été celles que j'ai indiquées dans mes *Recherches de statique* et que je crois inutile de reproduire ici.

Il me reste à faire connaître les résultats constatés.

*Chlorure de potassium.*

1° Le chlorure de potassium mis en expérience a été une partie de celui qui a servi aux expériences exécutées par la première méthode ; il provenait du chloro-platinate de potassium cristallisé par voie de solution et l'on tenait deux et demi cents millièmes de silice.

L'argent est une partie du métal employé dans les précédents essais.

a.	Poids du chlorure dans l'air.	. . . . .	8 <sup>gr</sup> ,157,40
b.	»	» dans le vide.	. . . . . 8 <sup>gr</sup> ,141,70
c.	»	de l'argent dans l'air.	. . . . . 11 <sup>gr</sup> ,778,10
d.	»	» dans le vide.	. . . . . 11 <sup>gr</sup> ,779,08

L'eau mère de l'essai essayée à volume égal par les liqueurs décimes a éprouvé une opalescence sensiblement plus forte par le sel que par l'argent. La différence mesurée en hauteur de colonnes a conduit au rapport de 120 Ch à 127 Ag.

Treize gouttes de liqueur décime saline ont été ajoutées à toutes les eaux mères réunies dans le flacon. Après une agitation convenable, suivie d'un repos de *vingt* minutes et de la filtration subséquente, le liquide d'épreuve s'est troublé en sens inverse et de la même manière. La différence mesurée en hauteur de colonne a été trouvée dans le rapport de

128 Ch à 122 Ag.

Six gouttes de liqueur décime d'argent ajoutées aux eaux mères réunies dans le flacon ont fourni un liquide qui, après agitation, repos et filtration, a éprouvé une opalescence d'une intensité égale, mesurée directement ou en hauteur de colonne.

En effet, l'expérience a donné, après une attente de *sept* minutes, le rapport :

- 1° de 145 Ag à 146 Ch.
- 2° de 145 Ag à 145 Ch.
- 5° de 145 Ag à 147 Ch.

Les liquides d'épreuve ayant été introduits dans le flacon avec le reste des eaux mères, le tout, après quelques instants d'agitation, a été abandonné *dix-huit* heures dans l'armoire obscure.

Le lendemain j'ai vérifié l'état du liquide et j'ai constaté qu'il s'était conservé intact.

Il résulte de ce qui précède qu'après la double décomposition opérée entre les quantités mises en expérience, il est resté non précipitée une quantité d'argent égale à  $13 - 6$  gouttes = 7 gouttes, représentant  $0^{\text{sr}},00028$  de métal; il manquait donc pour la quantité de métal pesé  $0^{\text{sr}},00019$  de chlorure de potassium.

Ce qui conduit au rapport de

$$100,000 \text{ à } 69,121.$$

Toutes les expériences suivantes ont été exécutées dans les mêmes conditions; il est sans utilité de reproduire ces détails, je me bornerai à donner les résultats.

2° Le chlorure de potassium provenait de la décomposition du chlorate de potassium aussi pur qu'il m'a été possible de le préparer. Le chlorure avait été fondu à deux reprises avec du chlorure d'ammonium et soumis dans le platine à trois cristallisations successives, puis fondu seul dans un double creuset de platine. Il laissait à la volatilisation cinq cents millièmes de silice et de silicate de potassium et donnait néanmoins en se dissolvant dans l'eau une solution d'une limpidité parfaite et neutre au tournesol.

L'argent est une partie du métal employé dans les précédents essais.

a.	Poids du chlorure dans l'air.	. . . . .	$10^{\text{sr}},006,5$
b.	»            »            dans le vide.	. . . . .	$10^{\text{sr}},011,88$
c.	»   de l'argent dans l'air.	. . . . .	$14^{\text{sr}},485,87$
d.	»            »            dans le vide.	. . . . .	$14^{\text{sr}},484,70$

Après la double décomposition, l'eau mère a exigé *quinze* gouttes de liqueur décime saline, pour amener tout l'argent à l'état de chlorure; elle

contenait donc 0<sup>gr</sup>,0006 d'argent non combiné au chlore et il manquait 0<sup>gr</sup>,00041 de chlorure de potassium, ce qui conduit au rapport de

100,000 à 69,125.

La première détermination a donné

69,121 ;

et la seconde

69,125 ;

la moyenne est

69,122.

Mais le chlorure employé au premier essai contenait deux et demi cents millièmes de silice et celui du second essai en renfermait cinq cents millièmes. La moyenne des deux est donc trois et soixante-quinze cents millièmes de silice, ce qui ramène de 69,122 à 69,119,41 le rapport cherché, tandis que par l'application de la première méthode j'ai obtenu 69,117,92, chiffres qu'on peut considérer comme identiques puisqu'ils ne diffèrent entre eux que d'un cent millième et demi.

#### *Chlorure de sodium.*

1° Le chlorure de sodium provenait du carbonate monosodique préparé comme il est dit dans une note à la fin du mémoire. Il avait été fondu à deux reprises avec du chlorure d'ammonium et redissous chaque fois dans l'eau froide, en ayant soin de laisser reposer la solution avant de la filtrer au travers de la mousse de platine. Le sel a été fondu seul dans un double creuset de platine, à une température aussi élevée que possible pour éliminer le chlorure d'ammonium qu'il retient facilement. Quoique fournissant avec l'eau une solution d'une limpidité parfaite, il a laissé à la volatilisation cinq cents millièmes de silice mêlée de silicate de sodium.

a.	Poids du chlorure dans l'air. . . . .	11 <sup>gr</sup> ,528,00
b.	»      »      dans le vide. . . . .	11 <sup>gr</sup> ,554,07
c.	»      de l'argent dans l'air. . . . .	20 <sup>gr</sup> ,907,68
d.	»      »      dans le vide. . . . .	20 <sup>gr</sup> ,908,87

Après la double décomposition, l'eau mère a exigé dix-sept gouttes de liqueur décime saline pour amener tout l'argent à l'état de chlorure; il restait donc 0<sup>sr</sup>,00068 d'argent libre et il manquait 0<sup>sr</sup>,000476 de sel.

Ces résultats conduisent au rapport de

100,000 à 54,209,4.

2° Chlorure de sodium du chloro-platinate; il était une partie du dernier tiers dont j'ai indiqué la préparation pages 246 et 247 de mes *Nouvelles recherches sur les lois des proportions chimiques*. Il a laissé à la volatilisation quatre et demi cents millièmes de silice mêlée de silicate de sodium et de calcium.

a. Poids du chlorure dans l'air. . . . .	6 <sup>sr</sup> ,089,2
b. » » dans le vide. . . . .	6 <sup>sr</sup> ,092,58
c. » de l'argent dans l'air. . . . .	11 <sup>sr</sup> ,258,47
d. » » dans le vide. . . . .	11 <sup>sr</sup> ,259,10

Après la double décomposition l'eau mère a exigé neuf gouttes de liqueur décime d'argent, soit 0<sup>sr</sup>,00036 de ce métal pour amener tout le chlore du chlorure pesé à l'état de chlorure d'argent.

Ce résultat fournit le rapport de

100,000 à 54,203,4.

La première détermination a donné

54,209,4 ;

la seconde

54,203,4 ;

dont la moyenne est

54,207,23.

Mais les chlorures sodiques employés contenaient respectivement cinq cents millièmes et quatre et demi cents millièmes de silice, soit en moyenne quatre et soixante-quinze cents millièmes, le rapport 54,207,23 est donc

ramené à 54,204,68. L'application de la première méthode m'a conduit à 54,204,71. Ces chiffres se confondent absolument.

*Chlorure d'ammonium.*

1° Le chlorure d'ammonium a été préparé en amenant à la fois de l'acide chlorhydrique gazeux et pur et de l'ammoniaque pure dans de l'eau continue dans un grand vase de platine. L'ammoniaque provenait de la réduction à froid du nitre en contact d'une solution d'hydrate de potassium, de zinc et du fer métalliques. La solution, maintenue toujours alcaline, a été évaporée dans le platine jusqu'à pellicule et le sel ammoniac cristallisé par refroidissement a été séparé de l'eau mère et séché dans le vase de platine, dans une atmosphère d'ammoniaque sèche.

Le sel introduit dans un tube à peser y a été chauffé à 150° dans un courant d'ammoniaque, puis soumis à froid à un courant d'air pur jusqu'à l'élimination complète de l'ammoniaque condensée. *Sa réaction était acide.*

a.	Poids du sel ammoniac dans l'air . . . . .	5 <sup>gr</sup> ,421,80
b.	»           »           dans le vide . . . . .	5 <sup>gr</sup> ,426,14
c.	» de l'argent dans l'air . . . . .	10 <sup>gr</sup> ,959,16
d.	»           »           dans le vide . . . . .	10 <sup>gr</sup> ,959,79

Après la double décomposition, l'essai a exigé cinq gouttes de liqueur décime d'argent, soit 0<sup>gr</sup>,00020 de métal pour contenir tout le chlore du sel ammoniac à l'état de chlorure d'argent.

D'où

$$100,000 : 49,599.$$

2° Le chlorure d'ammonium était une partie de celui qui a été employé pour les recherches effectuées à l'aide de la première méthode.

a.	Poids du chlorure dans l'air. . . . .	5 <sup>gr</sup> ,602,10
b.	»           »           dans le vide. . . . .	5 <sup>gr</sup> ,606,58
c.	» de l'argent dans l'air. . . . .	11 <sup>gr</sup> ,502,95
d.	»           »           dans le vide. . . . .	11 <sup>gr</sup> ,505,59



Après la double décomposition, l'essai a exigé six gouttes de liqueur décime saline pour contenir tout l'argent pesé à l'état de chlorure, soit 0<sup>sr</sup>,000031 de sel ammoniac.

Ce résultat fournit le rapport de

100,000 à 49,600;

3° Le chlorure d'ammonium employé a été préparé par M. Henri Sainte-Claire Deville pour mes recherches. Il était cristallisé par voie de solution et avait été obtenu en saturant de l'eau acidulée par de l'acide chlorhydrique à l'aide de l'ammoniaque retirée du sel ammoniac qui avait été préalablement traité à l'eau régale faible.

Avant d'être pesé, le chlorure cristallisé a été séché d'abord à 145° dans un courant de gaz ammoniac sec et après la dessiccation l'ammoniaque condensée a été éliminée à froid par un courant d'air pur.

La réaction du sel ammoniac était *acide*.

a. Poids du sel dans l'air . . . . .	6 <sup>sr</sup> ,045,70
b. » » dans le vide . . . . .	6 <sup>sr</sup> ,048,50
c. » de l'argent dans l'air. . . . .	12 <sup>sr</sup> ,195,86
d. » » dans le vide . . . . .	12 <sup>sr</sup> ,194,53

Après la double décomposition l'eau mère a exigé huit gouttes de liqueur décime d'argent pour contenir tout le chlore à l'état de chlorure d'argent, soit 0<sup>sr</sup>,000032 de métal.

Ce résultat conduit au rapport de :

100,000 à 49,597.

La première détermination a donné

49,599;

la deuxième

49,600;

la troisième

49,597;

dont la moyenne est

**49,598,7.**

L'application de la première méthode m'a fourni en moyenne 49,599,5, résultats qu'on doit considérer comme identiques. Pour la détermination du rapport proportionnel entre l'argent et les chlorures on peut donc se servir indifféremment de l'une ou de l'autre méthode indiquée ci-dessus. Je m'abstiens de déduire des faits qui précèdent des conclusions au sujet du poids atomique de l'argent et des poids moléculaires des chlorures de potassium, de sodium et d'ammonium. Je me réserve d'examiner ces questions après l'exposé de mes recherches sur le rapport proportionnel entre l'argent et les bromures de sodium et d'ammonium qui font l'objet d'un second mémoire.

## SECOND MÉMOIRE.

---

DE LA DÉTERMINATION DU RAPPORT PROPORTIONNEL ENTRE L'ARGENT  
ET LES BROMURES DE SODIUM ET D'AMMONIUM.

---

### INTRODUCTION.

---

Après les vérifications que j'ai faites de mes anciennes déterminations du rapport proportionnel entre l'argent et les chlorures de potassium, de sodium et d'ammonium, on peut se demander s'il existait encore quelque intérêt à rechercher le rapport proportionnel entre l'argent et les bromures de sodium et d'ammonium. J'ai hâte de le dire, j'ai entrepris ces travaux dans un but tout autre que celui qui m'a guidé dans mes précédentes investigations. Ce but le voici : dès que je me suis assuré que l'essai des matières d'argent par la *voie humide*, telle qu'elle est pratiquée généralement, peut entraîner à des erreurs, je me suis appliqué à chercher si, en substituant le brome au chlore, il n'est pas possible de faire disparaître toutes les incertitudes. Dans une lettre adressée, au mois de novembre 1868, à mon illustre maître M. Dumas, et communiquée en extrait par lui à l'Académie des sciences de l'Institut de France, j'ai fait connaître que cette substitution était possible et qu'elle annulait d'une manière absolue toutes les anomalies présentées par le chlore. On le conçoit, la substitution du brome au chlore dans l'essai des matières d'argent n'est pratiquement possible qu'en tant qu'on trouve une méthode de se procurer *facilement et économiquement* de l'*acide bromhy-*

*drique* ou un *bromure*, absolument dépouillé de chlore et d'iode, ou d'autres matières étrangères capables de fausser l'exactitude du résultat.

J'ai institué une longue série de recherches pour découvrir cette méthode. J'emprunte au travail *inédit* la partie qui concerne les investigations auxquelles j'ai dû me livrer pour m'assurer si l'acide bromhydrique et les bromures, obtenus par le procédé auquel je me suis arrêté, sont convenablement dépouillés de chlore et d'iode.

Parmi les moyens qui se sont présentés à mon esprit, se trouve en première ligne la recherche du rapport proportionnel entre l'argent et le bromure, obtenu à l'aide de l'acide bromhydrique ou du brome, préparé en grand par la méthode imaginée. Il est facile de s'en convaincre, cette recherche doit, mieux que toute autre, conduire au résultat cherché. Reposant sur l'invariabilité du rapport de combinaison de l'argent avec le brome et le chlore, elle est absolument indépendante de l'entraînement possible du chlorure d'argent avec le bromure de ce métal, fait auquel on s'expose en se servant d'autres moyens d'investigations et notamment lorsqu'on recherche la présence du chlore dans l'eau mère d'un essai d'argent faite au bromure contenant des *traces* de chlorure. En effet, dans ce cas, la masse de bromure d'argent semble rendre insoluble le chlorure d'argent formé aux dépens du chlore qui était contenu dans le bromure ou l'acide bromhydrique employé. Il m'a paru que l'action dissolvante de l'eau ne devient bien évidente que lorsque la quantité de chlorure dépasse une certaine limite que je crois pouvoir fixer à *cinq dix millièmes*.

Quant à la précision à laquelle le mode de détermination permet d'atteindre, elle est à la fois fonction d'un bromure et d'un chlorure métallique donnés à l'argent et de la limite extrême à laquelle on parvient à déceler l'argent par les bromures et les chlorures et réciproquement.

En admettant par hypothèse :  $\text{Ag} = 108$  ;  $\text{Na} = 23$  ;  $\text{Br} = 80$  et  $\text{Cl} = 35,5$ ,

$$100,000 \text{ Na Br} = 104,854 \text{ Ag} \quad \text{et} \quad 100,000 \text{ Na Cl} = 184,615 \text{ Ag},$$

d'où il résulte qu'à *poids égal* le chlorure de sodium exige 0,798 d'argent de plus que le bromure sodique.

La présence de  $\frac{1}{1000}$  de chlorure dans le bromure sodique réclame donc une différence en plus de 0,000,798 d'argent.

Or, je l'ai déjà dit, une goutte de liqueur décime d'un bromure ou d'acide bromhydrique produit au bout de *trois minutes au maximum* une zone opalescente formée de bromure d'argent dans un liquide *acidifié*, contenant de  $\frac{1}{2,000,000}$  à  $\frac{1}{2,500,000}$  de son poids de ce métal à l'état dissous.

Lorsque la dilution du liquide *acidifié* est portée au double, c'est-à-dire lorsqu'il ne renferme plus que de  $\frac{1}{4,000,000}$  à  $\frac{1}{5,000,000}$  d'argent, une goutte de liqueur décime d'acide bromhydrique y produit encore une zone opalescente très-sensible au bout de douze à quinze minutes.

Dans ces limites la présence ou l'absence de l'argent peut être très-couramment constatée par l'emploi d'un bromure. Ce résultat, qui est déjà consigné dans mes *Recherches de statique chimique*, a été confirmé par des *milliers* d'essais d'argent exécutés à l'Hôtel des Monnaies de Bruxelles depuis huit années, en déterminant le titre de lingots et de monnaies d'argent, à l'acide bromhydrique par la méthode que j'y ai installée en 1868. Si ce résultat n'avait pas été suffisamment établi par mes recherches de principe et l'application que j'en ai faite, il recevrait une consécration nouvelle par les travaux consignés dans le présent mémoire.

La détermination du rapport proportionnel entre l'argent et un bromure permet donc de s'assurer de la présence de  $\frac{1}{10,000}$  de chlorure dans le bromure de sodium lorsqu'on est certain que celui-ci ne contient pas d'autres matières étrangères et que le rapport proportionnel entre le bromure pur et l'argent a été au préalable établi avec une exactitude suffisante.

Dans le raisonnement qui précède, je suis parti de l'hypothèse que  $\text{Ag} = 108$ ;  $\text{Na} = 23$ ;  $\text{Br} = 80$  et  $\text{Cl} = 35,5$ . D'après mon expérience personnelle, aucun de ces quatre termes n'est conforme à la vérité des faits. Je répéterai toutefois ce que j'ai dit dans mes *Nouvelles recherches sur les lois des proportions chimiques*, que la composition centésimale du bromure d'argent peut, sans erreur appréciable, être représentée par le rapport de 80 à 108 et que le poids moléculaire du chlorure de sodium est représenté par la somme de 35,5 et 23, soit 58,5. J'ajouterai que le poids moléculaire du bromure de sodium est égal à la somme de 80 et 23, soit 103, mais la con-

formité des poids moléculaires des chlorure et bromure sodiques avec les nombres entiers, dérive, non de leur exactitude absolue, mais de la compensation qui se fait, d'une part, à ce qui manque aux poids atomiques du chlore et du brome et, d'autre part, à l'excès que présente le poids atomique du sodium pour représenter des chiffres ronds. Pour s'en convaincre il suffit de rappeler les valeurs des poids atomiques consignés dans mes travaux.

J'ai trouvé, en effet, qu'en moyenne le chlore = 35,457, le brome = 79,955 et le sodium = 23,0455, l'oxygène étant 16.

Or,

$$55,457 + 25,045 = 58,502 \quad \text{et} \quad 79,955 + 25,045 = 105,000.$$

Quant à la conformité de la composition centésimale du bromure d'argent avec celle qui résulte des poids atomiques de l'argent et du brome représentés respectivement par 108 et 80, elle s'explique par ce fait que la différence qui existe entre 108 et 107,93 et 80 et 79,955 est très-sensiblement proportionnelle à la valeur des poids atomiques hypothétiques et à la valeur déduite de l'expérience.

Pour ce motif l'emploi du bromure de sodium pour la détermination du poids atomique de l'argent permet ainsi mieux que tout autre composé de se faire une idée de la valeur de l'hypothèse sur laquelle repose l'admission du poids atomique de l'argent représenté par 108, et réciproquement l'emploi d'un bromure doit être préféré à tout autre composé lorsqu'il s'agit de la détermination d'un poids moléculaire dont le métal possède un poids atomique élevé. Mais je ne veux pas traiter incidemment cette question et j'espère pouvoir y revenir dans un autre mémoire.

Je reprends l'ordre d'idées dont je me suis écarté. Il est à peine nécessaire de faire remarquer que le mode de recherche du degré de pureté d'un bromure n'est valable qu'en tant qu'on ait prouvé *a priori* que le rapport proportionnel constaté est bien celui qui correspond au bromure pur. Pour ces motifs j'ai été obligé de procéder au préalable avec des bromures préparés avec des éléments que dans l'état actuel de nos connaissances on peut considérer comme purs.

Dans l'impuissance où je me suis trouvé de me procurer de l'hydrate ou

du carbonate de potassium *pur* pour être transformé en bromure, j'ai opéré sur les bromures de sodium et d'ammonium et pour ces deux composés, j'ai au préalable déterminé le rapport proportionnel sur ces bromures préparés à l'acide bromhydrique dépouillé de toute trace de chlore et d'iode. Je vais exposer successivement les moyens auxquels j'ai eu recours pour me procurer l'acide bromhydrique type, le brome, l'acide bromhydrique et les bromures préparés en grand pour être employés dans l'essai des matières d'argent.

Pour ne pas compliquer cet exposé je renverrai à des notes les détails des opérations et je me bornerai à faire connaître dans le texte les principes sur lesquels reposent ces opérations. Enfin je consacrerai une notice spéciale au mode de détermination du rapport proportionnel entre l'argent et les bromures.

---

#### DE LA PRÉPARATION DE L'ACIDE BROMHYDRIQUE TYPE.

---

L'acide bromhydrique type a été préparé par l'action de l'acide sulfhydrique sur le bromure d'argent pur, suspendu dans un volume suffisant d'eau. Le bromure d'argent employé à cet effet a été produit en précipitant, à froid, un excès de solution saturée de bromure de potassium *complètement dépouillé d'iode*, par une solution diluée au centième d'azotate d'argent fondu.

Dans une note <sup>1</sup> jointe au mémoire j'expose tous les détails de ces opérations.

Le liquide, surnageant le sulfure d'argent qui a pris naissance, a été soumis à la distillation; l'acide distillé ainsi obtenu était absolument incolore et s'est conservé incolore, étant même exposé, dans un flacon en vidange, à la radiation solaire directe.

Lorsque j'ai utilisé cet acide bromhydrique pour la préparation des bromures, j'ai pris la précaution de le soumettre à une nouvelle distillation, de le recueillir dans un ballon de verre *dur*, inaltérable aux acides et de l'utiliser ensuite immédiatement de la manière que je le dirai plus loin.

---

<sup>1</sup> Voir la note n° 4 à la fin de ce mémoire.

DE LA PRÉPARATION DE L'ACIDE BROMHYDRIQUE DESTINÉ AUX ESSAIS  
DES MATIÈRES D'ARGENT.

—

La méthode à laquelle je me suis arrêté consiste à transformer du brome, privé de chlore et d'iode, en acide bromhydrique, à l'aide du phosphore amorphe, rouge, suspendu au sein de l'eau froide et pure.

Je me suis procuré du brome privé de chlore et d'iode en soumettant à la distillation du brome dissous dans une solution de bromure de potassium, et tenant de l'oxyde de zinc en suspension. J'ai constaté par des essais préliminaires que dans cette condition le brome distillé est dépouillé complètement du chlore et de l'iode que j'y avais intentionnellement introduit. On peut remplacer l'oxyde de zinc par de l'oxyde de magnésium. Le chlore passe ainsi à l'état de chlorure de potassium, et l'iode est retenu en entier à l'état insoluble par l'oxyde de zinc. Afin de ne pas interrompre le récit, je renvoie à une note <sup>1</sup> jointe au mémoire l'exposé des moyens employés successivement pour procéder à la purification du brome, à sa transformation subséquente en acide bromhydrique à l'aide du phosphore rouge et à la distillation de l'acide liquide pour le séparer de l'acide phosphorique produit en même temps.

L'acide bromhydrique distillé a présenté absolument les mêmes propriétés que celui préparé par l'action de l'acide sulfhydrique sur le bromure d'argent pur, suspendu dans une quantité suffisante d'eau. Comme lui il était et s'est conservé incolore, étant exposé à la lumière dans un vase fermé à moitié rempli, condition dans laquelle l'acide contenant des traces d'acide iodhydrique se colore rapidement en jaune.

Avant d'être employé pour la préparation des bromures, il a été distillé une seconde fois, recueilli dans un récipient de verre dur et transformé immédiatement après en bromure de sodium ou d'ammonium.

<sup>1</sup> Voir la note n° 5 à la fin de ce mémoire.

---



## PRÉPARATION DU BROMURE DE SODIUM.

Le bromure sodique employé a été obtenu en saturant le carbonate mono-sodique pur, d'une part à l'aide de l'acide bromhydrique type et d'autre part à l'aide de l'acide bromhydrique destiné aux essais des matières d'argent. Le carbonate mono-sodique est une partie de celui dont je donne la préparation dans une note <sup>1</sup> à la fin de ce mémoire. Ainsi que je l'ai dit dans le précédent mémoire, du chlorure sodique obtenu dans le platine, avec ce carbonate, a laissé, à la volatilisation, cinq cents millièmes de silice, mêlée de silicate de sodium. En admettant que la teneur en silice d'un chlorure et d'un bromure obtenus dans les mêmes conditions avec un même carbonate sodique, soit proportionnelle au sodium contenu dans les deux composés, le bromure sodique mis en expérience doit renfermer environ trois cents millièmes de son poids de matières étrangères.

La préparation du bromure sodique a été faite ainsi qu'il suit :

Le carbonate mono-sodique, contenu dans une cucurbitte d'une grande cornue de platine, a été additionné d'acide bromhydrique, récemment distillé, jusqu'à cessation de dégagement d'anhydride carbonique par la solution, préalablement chauffée, du bromure produit. Cette solution était *faiblement acide*. Après avoir converti la cucurbitte de son chapiteau et avoir fait pénétrer le col de celui-ci dans le col d'un récipient, de diamètre à peu près identique, pour exclure l'accès libre de l'air, on a évaporé rapidement le bromure jusqu'à siccité et on a chauffé le résidu jusqu'au rouge sombre pour rendre insolubles la silice et l'alumine contenues dans le carbonate et pour éliminer aussi complètement que possible l'excès d'acide bromhydrique, resté dans le bromure. Dans cet état, le résidu a été repris par de l'eau froide pure. La solution manquait de limpidité; elle a été abandonnée à elle-même pendant dix-huit heures, puis filtrée au travers d'un petit filtre de papier, contenu dans une feuille de platine, pliée sous forme conique. Le filtre de papier avait été préalablement lavé à l'eau acidulée à l'acide bromhydrique, puis à l'eau pure.

<sup>1</sup> Voir la note n° 6 à la fin de ce mémoire.

Cette solution filtrée, additionnée d'une goutte d'acide bromhydrique concentré, a été évaporée de nouveau jusqu'à siccité dans la cornue de platine et le résidu a été encore rougi. Quel qu'ait été l'acide bromhydrique employé, il a fallu renouveler une troisième fois, la solution, la filtration, l'évaporation et la calcination du résidu pour obtenir un bromure susceptible d'être dissous par l'eau froide, en produisant une solution absolument limpide et incolore.

Tel est le traitement général que j'ai fait subir au bromure produit par l'acide bromhydrique type et par l'acide bromhydrique destiné aux essais des matières d'argent. A l'occasion de l'exposé de la détermination du rapport proportionnel, je ferai connaître le traitement particulier auquel j'ai soumis chaque échantillon de bromure purifié comme je viens de le dire.

---

#### PRÉPARATION DU BROMURE D'AMMONIUM.

---

A l'exception d'un bromure que je dois à l'amitié de M. Sainte-Claire Deville, tous les bromures d'ammonium employés dans les déterminations ont été préparés en faisant passer un courant d'ammoniaque pure dans de l'acide bromhydrique, contenu dans la cucurbite d'une cornue de platine. Le courant a été continué jusqu'à ce que la solution de bromure répandit sensiblement l'odeur de l'ammoniaque; tantôt la solution a été évaporée à siccité dans la cucurbite et le résidu pulvérisé, et traité comme il sera dit plus loin, a servi directement à l'expérimentation; tantôt la solution, convenablement concentrée, à chaud, après avoir été additionnée d'ammoniaque liquide, a été brusquement refroidie, pour provoquer la cristallisation du bromure à l'état de poussière cristalline. Le sel, lavé à l'eau glacée, a été soumis, dans une expérience, à une seconde cristallisation. Lorsqu'on a procédé à la cristallisation, toutes les eaux mères ont été écartées.

On le sait, le bromure d'ammonium peut être volatilisé sans décomposi-

tion dans un courant de gaz ammoniac sec. Dans le but de me procurer ce sel à l'état compact et partant facile à peser et à manier, j'ai essayé d'avoir recours à cette volatilisation, mais après plusieurs tentatives infructueuses, j'ai été obligé d'y renoncer. En effet, à une température très-peu supérieure à sa volatilisation, il se dissocie, du brome même devient parfois libre. On constate aisément la présence de ce corps par la coloration de la vapeur du bromure, et par la coloration en jaune du sel condensé, qui a produit des fumées lorsqu'on l'a chauffé dans de l'ammoniaque sèche.

Le bromure préparé à l'aide de l'acide bromhydrique et de l'ammoniaque purs est d'un blanc éblouissant et reste indéfiniment blanc lorsqu'il est séché à la température ordinaire sous une cloche contenant de l'air en contact avec de la potasse fondue, ou de l'acide sulfurique normal. Chauffé au contact de l'air, à une température supérieure à 100°, il perd sa blancheur et devient grisâtre. La coloration acquise ainsi augmente peu de 115° à 180°. Le bromure, teinté de gris par la chaleur et l'air, blanchit sensiblement aux mêmes limites de températures, dans un courant de gaz ammoniac, sans reprendre toutefois sa blancheur primitive.

Le bromure employé aux déterminations était sous forme de poussière. A cet effet, le résidu de l'évaporation jusqu'à siccité de la solution du bromure obtenue par la saturation de l'acide bromhydrique à l'aide de l'ammoniaque en excès, ou le bromure cristallisé, après avoir été séché à l'étuve à 115°, dans un courant d'air pur et sec, a été pulvérisé à chaud et la poussière a été introduite dans un tube à peser, muni à un bout d'un bouchon de verre percé et à l'autre bout par un tube ouvert étroit. Le poids de ce tube était connu, ou il était équilibré avec des poids de platine dépassant le poids du bromure à employer.

Le tube contenant le bromure a été placé dans une étuve à air chaud dont la température a été élevée de 115° à 180°, pendant qu'un courant lent d'ammoniaque pure et sèche le traversait. Après une demi-heure de chauffe, le bromure a été abandonné au refroidissement, tout en maintenant le courant d'ammoniaque. Lorsqu'il fut ramené vers 20°, l'ammoniaque a été remplacée par un courant d'air pur et sec, qui a été maintenu jusqu'à l'élimination complète de l'ammoniaque condensée, élimination qui ne s'est réalisée que

fort lentement. Il a fallu, en effet, prolonger le renouvellement lent de l'air pendant huit heures et quelquefois même pendant toute une journée.

Aucun des échantillons de bromure, desséché dans les conditions que je viens d'indiquer, n'était d'une blancheur parfaite. *Ce bromure, en solution aqueuse, rongit le papier de tournesol.*

J'ai considéré comme normal le mode de production du bromure d'ammonium, décrit ci-dessus, parce que j'ai constaté avec certitude par mes anciens et mes nouveaux travaux, que le chlorure d'ammonium produit dans des conditions absolument identiques renferme la même quantité de chlore que celui qui a été sublimé dans une atmosphère d'ammoniaque sèche et chauffé ensuite au point d'émettre des vapeurs dans le but d'éliminer l'ammoniaque condensée. C'est donc de propos délibéré que j'ai eu recours à ce moyen de préparation du bromure d'ammonium.

---

DU MODE DE DÉTERMINATION DU RAPPORT PROPORTIONNEL ENTRE L'ARGENT  
ET LES BROMURES DE SODIUM ET D'AMMONIUM.

---

Dans l'exposé des travaux sur le rapport proportionnel entre l'argent et le bromure de potassium, exécutés soit par M. de Marignac, soit par moi, aucun de nous n'a signalé ni difficulté ni anomalie.

Il résulte de l'ensemble de mes observations qu'une solution d'un sel d'argent acidifiée, amenée à la limite extrême de la dilution pour la constatation de la présence du métal est troublée dans l'espace de trois à quinze minutes par une solution d'un bromure jusqu'à ce que la dernière trace de l'argent dissous soit précipitée.

Il n'en est pas de même d'une solution de *bromure* au degré correspondant de dilution qu'on essaye de précipiter par un sel d'argent. Lorsque la solution de bromure, au  $\frac{1}{10,000}$ , par exemple, est neutre l'addition d'un sel d'argent n'y produit de trouble même dans l'espace de *trente minutes*, qu'en tant

que la quantité d'argent ajoutée dépasse  $\frac{1}{100.000}$  du poids du liquide <sup>1</sup>, tandis qu'une solution d'un *sel d'argent* à  $\frac{1}{5.000.000}$  acidifiée et même neutre est troublée dans l'espace de 12 à 15 minutes par une quantité équivalente de bromure.

Un liquide *neutre* au sein duquel il s'est produit du bromure d'argent, ne se clarifie point par l'agitation suivie d'un repos quelques prolongés qu'ils soient. Au contraire, lorsque le liquide est acidifié par les acides sulfurique et azotique, ils se clarifient d'autant plus rapidement qu'initialement l'acidité a été plus prononcée, mais comprise entre  $\frac{1}{1000}$  et  $\frac{5}{100}$ .

La conséquence à déduire de ces observations est que le rapport proportionnel entre l'argent et les bromures doit être déterminé en précipitant, à l'aide d'un bromure, une solution légèrement acidulée d'argent. J'ai procédé de cette manière, en suivant absolument la méthode que j'ai exposée pour la détermination du rapport proportionnel entre l'argent et les chlorures. Le bromure d'argent, formé au sein d'un liquide concentré et fortement acidulé, produit des flocons épais, difficiles à désagréger et partout disposés à retenir de l'azotate d'argent; pour ce motif, j'ai réduit au minimum la quantité d'acide azotique nécessaire à la dissolution du métal. Cette réduction était également nécessaire pour permettre une diminution proportionnelle dans la quantité d'eau. J'ai employé respectivement quatre et demi centimètres cubes d'acide azotique et de trente à quarante grammes d'eau par gramme d'argent, au lieu de sept à huit c. c. d'acide et de cent c. c. d'eau, comme cela se pratique dans les essais d'argent exécutés au brome et au chlore.

Ayant reconnu que l'on constate d'autant plus facilement la présence de l'argent dans un liquide, lorsqu'on répand, sur une surface *moins* étendue, les gouttes exploratrices, j'ai remplacé les flacons qui m'ont pas servi pour mes précédentes opérations et dont le diamètre intérieur était de 12 à 15 centimètres, par des flacons éprouvettes n'ayant que de 5 à 6 centimètres de diamètre intérieur. La capacité du flacon était telle qu'il restait un espace vide égal à celui du volume du liquide de l'essai.

<sup>1</sup> La même anomalie se présente avec les solutions très-diluées des iodures; mais on ne la constate pas avec les chlorures.

La réduction du volume de l'acide azotique ne m'a pas permis d'opérer la dissolution de l'argent à vase fermé et j'ai procédé à cette dissolution ainsi que je l'ai indiqué dans l'exposé de la seconde méthode de détermination du rapport proportionnel entre l'argent et les chlorures où je me suis trouvé devant la même difficulté.

Après la dissolution j'ai laissé pénétrer dans le flacon l'eau de lavage du gaz et j'ai abandonné le tout au refroidissement. Le tube de dégagement et le ballon ont été lavés avec une partie de l'eau qui devait servir d'eau mère à l'essai.

J'ai entouré ensuite le flacon d'une double enveloppe de toile noire, et on l'a placé ainsi dans la chambre obscure, dans une position inclinée à 45°. J'ai d'abord introduit avec précaution la moitié du volume d'eau réservé, afin d'avoir au-dessus de la solution d'azotate acide d'argent une couche d'eau pure. J'ai fait pénétrer alors dans le flacon le bout ouvert du tube contenant le bromure de sodium, ou d'ammonium pesé. J'ai déterminé la sortie du bromure sodique en tournant le tube sur lui-même, ainsi que je l'ai exposé pour les chlorures et j'ai lavé ensuite le tube avec l'eau réservée, en ajoutant successivement les eaux de lavage au contenu du flacon.

Il n'a pas toujours été possible de faire sortir de cette manière du tube tout le bromure d'ammonium; lorsque je me suis trouvé devant cette difficulté, j'ai adapté au tube étroit, soudé au bout opposé, un petit tube en caoutchouc et j'ai engagé dans celui-ci la pointe d'une pipette remplie d'une partie de l'eau réservée pour parfaire le volume total de l'eau mère de l'essai. J'ai déplacé ainsi par voie de solution et de lavage tout le bromure d'ammonium pesé, en laissant couler constamment la solution et les eaux de lavage dans le flacon d'essai.

Après avoir bouché le flacon et fixé solidement le bouchon, et enfin après avoir couvert celui-ci d'une double enveloppe noire, on a soumis l'essai pendant *deux heures* à une vive agitation. Cette agitation prolongée est indispensable, non pour clarifier l'essai, car ce résultat est atteint en cinq minutes, mais pour diviser complètement le bromure d'argent formé et éliminer intégralement l'azotate de ce métal qui est entraîné avec le bromure, plus encore qu'avec le chlorure d'argent lors de la production de ces composés à l'état

caséux. Ainsi que je l'ai reconnu on est exposé à commettre de grossières erreurs lorsqu'on procède à la recherche de la limite dès que l'éclaircissement de l'essai est obtenu. *Ce mode de procéder ne peut être suivi que lorsque le bromure d'argent a pris naissance dans un poids d'eau CENTUPLE de celui de l'argent mis en expérience.*

Après l'agitation, l'essai a été abandonné à lui-même, dans une armoire obscure jusqu'au lendemain.

Dans toutes les déterminations que j'ai exécutées, les bromures de sodium et d'ammonium et l'argent ont été pesés en admettant par hypothèse  $\text{Na Br} = 103$ ,  $\text{Az H}^4 \text{Br} = 98$  et  $\text{Ag} = 108$ . Pour réduire les pesées au vide j'ai admis le poids spécifique du bromure de sodium = 3,079 tel qu'il a été déterminé par M. Kremers et j'ai recherché moi-même le poids spécifique du bromure d'ammonium que j'ai trouvé = 2,436, réduit au vide; j'ai pesé, à cet effet, le bromure dans le sulfure carbonique pur dont le poids spécifique à 14°,4 était 1,27087 réduit également au vide.

Ainsi qu'on le verra plus loin, l'eau mère de tous les essais, faits dans les rapports de poids indiqués ci-dessus, a renfermé une certaine quantité d'azotate d'argent libre. J'ai cherché donc à fixer cette quantité par l'addition successive de liqueur décime de bromure de sodium ou d'ammonium, jusqu'à ce que j'eusse précipité tout l'argent libre et que j'eusse un excès de bromure que j'ai éliminé à son tour par l'addition de liqueur décime d'argent jusqu'à la production d'un liquide dépourvu à la fois de la propriété de se troubler par l'une et l'autre des liqueurs décimes.

A l'occasion de la première détermination j'exposerai toutes les données d'un essai de ce genre; pour les autres, exécutées absolument de la même manière, je me bornerai à inscrire le résultat constaté.

---

## BROMURE DE SODIUM.

—

A. — *Bromure de sodium préparé à l'aide de l'acide bromhydrique type.*

1° Le bromure de sodium employé, traité préalablement comme il l'est dit ci-dessus, a été soumis à chaud à *trois cristallisations* successives dans un vase de platine, en éliminant chaque fois toutes les eaux mères. Avant d'être pesé il avait été chauffé près de son point de fusion, dans un creuset de platine et introduit très-chaud dans le tube bouché dans lequel il a été pesé, après son refroidissement complet opéré sous une cloche contenant de l'air sec. Il était sans action sur les papiers bleu et rouge de tournesol.

a.	Poids du bromure dans l'air . . . . .	10 <sup>gr</sup> ,775,70
b.	»        »        dans le vide . . . . .	10 <sup>gr</sup> ,779,50
c.	»        de l'argent dans l'air . . . . .	11 <sup>gr</sup> ,502,12
d.	»        »        dans le vide . . . . .	11 <sup>gr</sup> ,502,78

La double décomposition et la désagrégation des flocons étant effectuée par l'agitation suffisamment prolongée, j'ai procédé le lendemain à la recherche de l'état des eaux mères. En opérant par la voie de gouttes exploratrices de liqueurs décimes, j'ai constaté que :

1° Cinq centimètres cubes de liqueur décime de bromure de sodium y produisent *instantanément* un trouble très-fort;

2° Deux centimètres de liqueur décime de bromure répandus à la surface du liquide préalablement éclairci y produisent *instantanément* un trouble fort;

3° Un demi-centimètre cube de liqueur décime de bromure répandu à la surface du liquide préalablement éclairci y produit *instantanément* un trouble faible;

4° Un demi-centimètre cube de liqueur décime de bromure répandu goutte à goutte, à la surface du liquide préalablement éclairci y produit, au



bout de *trois minutes*, une zone opalescente faible de quelques millimètres d'épaisseur;

5° Un demi-centimètre cube de liqueur décime de bromure répandu goutte à goutte à la surface du liquide préalablement éclairci produit, au bout de *dix minutes*, une zone opalescente excessivement faible de deux à trois millimètres d'épaisseur;

6° Cinq gouttes de liqueur décime de bromure répandues à la surface du liquide préalablement éclairci ne produisent aucune zone opalescente même après une attente de vingt-cinq minutes;

7° Cinq gouttes de liqueur décime d'*argent* répandues à la surface du liquide préalablement agité et éclairci par le repos produisent, au bout de *deux minutes*, une zone opalescente sensible;

8° Cinq gouttes de liqueur décime d'*argent* répandues à la surface du liquide préalablement éclairci par l'agitation suivie d'un repos convenable, ne produisent aucun trouble ni aucune zone opalescente après une attente de dix minutes;

9° Cinq gouttes de liqueur décime de *bromure* répandues à la surface du liquide préalablement agité et éclairci par le repos produisent une zone opalescente après une attente de *trois minutes*.

L'eau mère de l'essai, pour ne plus se troubler par le bromure de sodium, a donc exigé une somme de *huit et demi centimètres cubes* de liqueur décime de ce corps, déduction faite des gouttes de liqueurs décimes d'argent et de bromure nécessaires pour m'assurer de ce résultat.

J'ai essayé de contrôler cette donnée par les moyens suivants : après avoir éclairci le liquide par l'agitation suivie d'un repos, je l'ai filtré au travers d'une couche épaisse d'asbeste, calciné à l'acide sulfurique et feutré ensuite. J'ai ajouté, d'une part, à deux cents centimètres cubes du liquide parfaitement limpide, contenu dans un vase cylindrique de cinq centimètres de diamètre, une goutte de liqueur décime de bromure, et d'autre part, à deux cents centimètres cubes du même liquide limpide contenu dans un vase de forme identique, une goutte de liqueur décime d'argent. Aucune zone opalescente ne s'étant produite après une attente de vingt-cinq minutes, j'ai versé les liquides d'épreuve des verres cylindriques dans lesquels ils étaient cou-

tenus, dans deux autres cylindres de même diamètre pour opérer le mélange de la goutte de liqueur décime ajoutée à chacun d'eux, et j'ai laissé tomber une goutte de liqueur décime d'argent à la surface du liquide ayant reçu la goutte de liqueur décime de bromure et inversement une goutte de liqueur décime de bromure dans le liquide ayant reçu la goutte de liqueur décime d'argent.

Il s'est formé ainsi une très-faible zone opalescente à la surface du premier liquide après une attente de seize minutes et dans le second vase après une attente de quinze minutes.

L'essai, ayant été répété une seconde fois, a donné le même résultat.

J'ai opéré de nouveau l'éclaircissement du liquide par l'agitation suivie du repos et de la filtration par le tampon épais d'asbeste feutré et j'ai ajouté à deux cents centimètres cubes cinq gouttes de liqueur décime de bromure et à deux cents autres centimètres cubes cinq gouttes de liqueur décime d'argent. J'ai transvasé chaque liquide à trois reprises d'un vase dans un autre pour répartir également dans toute la masse la liqueur décime ajoutée. J'ai versé ensuite, jusqu'à 128 millimètres de hauteur, de chaque mélange dans un des cylindres employés pour la comparaison de l'opalescence relative des liquides. Pendant vingt-cinq minutes la liqueur d'épreuve ayant reçu le bromure a conservé sa limpidité; mais au bout de ce laps de temps le liquide qui avait reçu de l'argent a perdu sa limpidité absolue, mais toutefois pas plus fortement que l'eau pure contenant  $\frac{1}{10.000.000}$  d'argent qu'on transforme en bromure de ce métal.

Le contrôle que j'ai institué démontre donc qu'on peut, avec des soins convenables, constater, par la formation d'une zone opalescente, la présence de  $0^{\text{sr}},00004$  d'argent dans  $200^{\text{sr}},000$  d'eau mère, soit  $\frac{1}{5.000.000}$  de ce métal, quantité égale à celle que j'ai indiquée dans mes *Recherches de statique chimique*. Il résulte aussi de ce contrôle que l'opération a été terminée avec cette approximation. En m'exprimant ainsi, je ne prétends pas que l'erreur commise ne dépasse  $0^{\text{sr}},00004$  sur la quantité d'argent mise en expérience. J'admets, au contraire, que l'erreur possible sur l'argent pesé s'élève à  $0^{\text{sr}},0001$ . Du reste la détermination du rapport proportionnel entre l'argent et le bromure de sodium comporte du chef de la pureté du bromure et de l'argent et

de la conservation de l'intégralité des masses pesées et de l'intervention possible de la lumière, d'autres incertitudes que celle qui peut être attribuée à la titration de l'eau mère, qui, j'ose l'affirmer, peut être exécutée avec une exactitude presque mathématique.

Quoi qu'il en soit, après la double décomposition, il a donc fallu *huit et demi centimètres cubes* de liqueur décime de bromure, représentant 0<sup>gr</sup>,008109 de bromure sodique pour précipiter les 0<sup>gr</sup>,0085 d'argent restés dissous. De là il résulte que

$$100,000 \text{ Ag} = 95,442 \text{ Na Br} \quad \text{et} \quad 100,000 \text{ Na Br} = 104,7806 \text{ Ag}.$$

2° Le bromure était une partie du précédent qui avait été soumis à une *quatrième* cristallisation. Avant d'être pesé, il avait été chauffé près de son poids de fusion. Il était neutre au tournesol.

a.	Poids du bromure dans l'air . . . . .	14 <sup>gr</sup> ,846,40
b.	»        »        dans le vide . . . . .	14 <sup>gr</sup> ,851,67
c.	»        de l'argent dans l'air . . . . .	15 <sup>gr</sup> ,571,75
d.	»        »        dans le vide . . . . .	15 <sup>gr</sup> ,572,62

Après la double décomposition *onze centimètres cubes* et un *dixième* de liqueur décime de bromure, soit 0<sup>gr</sup>,01058 de bromure sodique, ont été nécessaires pour précipiter l'argent resté dissous à l'état d'azotate, soit 0<sup>gr</sup>,0115 de métal, ce qui conduit au rapport de :

$$100,000 \text{ Ag} = 95,4585 \text{ Na Br} \quad \text{et} \quad 100,000 \text{ Na Br} = 104,7770 \text{ Ag}.$$

#### B. — Bromure de sodium obtenu à l'aide de l'acide bromhydrique préparé pour les essais des matières d'argent.

1° Le bromure de sodium mis en expérience a été préparé comme je l'ai indiqué plus haut. Il constitue donc le produit de la saturation du carbonate monosodique pur par l'acide bromhydrique. On s'est borné à éliminer le plus possible la silice qui existe toujours dans le carbonate sodique le plus

pur. Avant d'être pesé, il a été chauffé au rouge sombre. Il était sans action sur les papiers de tournesol.

a.	Poids du bromure dans l'air . . . . .	15 <sup>sr</sup> ,971,50
b.	» » dans le vide . . . . .	15 <sup>sr</sup> ,976,50
c.	» de l'argent dans l'air . . . . .	14 <sup>sr</sup> ,554,15
d.	» » dans le vide . . . . .	14 <sup>sr</sup> ,654,97

Après la double décomposition il a fallu *onze centimètres cubes et un dixième* de liqueur décime de bromure, représentant 6<sup>sr</sup>,01058 de bromure sodique pour précipiter l'argent dissous; ce qui conduit à :

$$100,000 \text{ Ag} = 95,442,6 \text{ Na Br} \quad \text{et} \quad 100,000 \text{ Na Br} = 104,7750 \text{ Ag.}$$

2° Le bromure est une partie du précédent qui a été soumis à *quatre* cristallisations successives, en écartant chaque fois l'eau mère.

Avant d'être pesé, il a été chauffé jusqu'au point de l'agglutiner. Il était sans action sur les papiers de tournesol.

a.	Poids du bromure dans l'air . . . . .	10 <sup>sr</sup> ,059,40
b.	» » dans le vide . . . . .	10 <sup>sr</sup> ,042,96
c.	» de l'argent dans l'air . . . . .	10 <sup>sr</sup> ,529,88
d.	» » dans le vide . . . . .	10 <sup>sr</sup> ,550,48

Après la double décomposition, il a fallu *sept centimètres cubes et six dixièmes* de liqueur décime de bromure, représentant 0<sup>sr</sup>,00725 de bromure sodique pour précipiter l'argent dissous.

D'où le rapport de

$$100,000 \text{ Ag} = 95,459,2 \text{ Na Br} \quad \text{et} \quad 100,000 \text{ Na Br} = 104,778,0 \text{ Ag.}$$

Le rapport proportionnel entre l'argent et le bromure de sodium a donc été le suivant :

A° pour le bromure produit par l'*acide bromhydrique type* :

$$1^{\circ} \quad \text{Ag} : \text{Na Br} :: 100,000 : 95,442;$$

$$2^{\circ} \quad \text{Ag} : \text{Na Br} :: 100,000 : 95,458,5.$$

*B*<sup>o</sup> pour le bromure produit à l'aide de l'acide bromhydrique préparé pour les essais des matières d'argent :

1<sup>o</sup> Ag : Na Br : : 100,000 : 95,442,6 ;

2<sup>o</sup> Ag : Na Br : : 100,000 : 95,459,2.

On peut considérer ces différences comme étant dans la limite des erreurs d'observation inévitables et partant comme nulles. La moyenne est :

: : 100,000 : **95,449,5**.

D'après les considérations exposées plus haut, le bromure sodique mis en expérience a dû renfermer environ trois cents millièmes de son poids de silice. En tenant compte de cette quantité de matière étrangère, on a : **95,4376** pour le rapport proportionnel cherché.

---

BROMURE D'AMMONIUM.

---

A. — *Bromure d'ammonium préparé à l'aide de l'acide bromhydrique type.*

1<sup>o</sup> Le bromure d'ammonium employé provenait de la saturation de l'acide bromhydrique à l'aide de l'ammoniaque gazeuse, extraite du chlorure d'ammonium purifié à l'eau régale. Il avait subi *deux cristallisations*, en écartant toutes les eaux mères. Il avait été séché à 113<sup>o</sup> dans un courant d'ammoniac, et l'ammoniaque condensée avait été éliminée par un courant d'air froid. Il était légèrement teinté de gris, et rougissait le papier bleu de tournesol.

<i>a.</i>	Poids du bromure dans l'air . . . . .	10 <sup>es</sup> ,766,70
<i>b.</i>	»        »        dans le vide . . . . .	10 <sup>es</sup> ,771,63
<i>c.</i>	»        de l'argent dans l'air . . . . .	11 <sup>es</sup> ,870,10
<i>d.</i>	»        »        dans le vide . . . . .	11 <sup>es</sup> ,870,79

Après la double décomposition l'eau mère a exigé *onze centimètres cubes* et *quatre-vingt-huit centièmes* de liqueur décime de bromure, représentant  $0^{\text{sr}},01078$  de bromure d'ammonium pour précipiter tout l'argent resté en solution, soit  $0^{\text{sr}},01188$  de ce métal, d'où :

$$100,000 \text{ Ag} = 90,851 \text{ Az II}^{\text{e}} \text{ Br} \quad \text{et} \quad 100,000 \text{ Az II}^{\text{e}} \text{ Br} = 110,095 \text{ Ag.}$$

2° Le bromure d'ammonium provenait de l'ammoniaque obtenue par la réduction de l'azotate de potassium. Il avait cristallisé dans le platine et était tout à fait blanc. Il a été séché à  $120^{\circ}$  dans le gaz ammoniac, puis soumis à la température ordinaire à un courant d'air pur pour éliminer complètement l'ammoniaque fixée. Sa réaction était acide.

a.	Poids du bromure dans l'air . . . . .	$10^{\text{sr}},515,20$
b.	»        »        dans le vide . . . . .	$10^{\text{sr}},519,95$
c.	»        de l'argent dans l'air . . . . .	$11^{\text{sr}},572,55$
d.	»        »        dans le vide . . . . .	$11^{\text{sr}},575,00$

Après la double décomposition, l'eau mère a exigé *onze centimètres cubes* et *trente-deux centièmes* de liqueur décime de bromure, représentant  $0^{\text{sr}},01127$  de bromure d'ammonium pour précipiter tout l'argent dissous; il était donc resté  $0^{\text{sr}},01132$  de ce métal.

D'où :

$$100,000 \text{ Ag} = 90,851 \text{ Az II}^{\text{e}} \text{ Br} \quad \text{et} \quad 100,000 \text{ Az II}^{\text{e}} \text{ Br} = 110,094 \text{ Ag.}$$

3° Le bromure d'ammonium provenait de l'évaporation à  $100^{\circ}$  des eaux mères qui avaient fourni le bromure cristallisé précédent. Il avait été séché à  $155^{\circ}$  dans un courant d'ammoniac. Il était légèrement teinté en gris après l'élimination de l'ammoniaque par un courant d'air froid entretenu pendant onze heures. Sa réaction était acide.

a.	Poids du bromure dans l'air . . . . .	$20^{\text{sr}},425,20$
b.	»        »        dans le vide . . . . .	$20^{\text{sr}},454,58$
c.	»        de l'argent dans l'air . . . . .	$22^{\text{sr}},518,46$
d.	»        »        dans le vide . . . . .	$22^{\text{sr}},519,74$

Après la double décomposition il a fallu ajouter à l'eau mère *vingt-deux centimètres cubes* et *huit centièmes* de liqueur décime de bromure, représentant  $0^{\text{sr}},020035$  de bromure d'ammonium pour précipiter tout l'argent dissous; il était donc resté  $0^{\text{sr}},02208$  de ce métal à l'état d'azotate, d'où :

$$100,000 \text{ Ag} = 90,8297 \text{ Az H}^{\text{t}} \text{ Br} \quad \text{et} \quad 100,000 \text{ Az H}^{\text{t}} \text{ Br} = 110,096,0 \text{ Ag}.$$

B. — *Bromure d'ammonium obtenu à l'aide de l'acide bromhydrique préparé pour les essais des matières d'argent.*

1° Le bromure a été produit en saturant l'acide bromhydrique liquide des essais d'argent à l'aide de l'ammoniaque gazeuse provenant de la réduction du nitre et en évaporant à siccité le liquide obtenu. Il a été séché à  $150^{\circ}$  dans un courant de gaz ammoniac sec, qui a été remplacé ensuite par de l'air froid jusqu'à ce que l'ammoniaque condensée fût complètement éliminée. Il était légèrement grisâtre. Sa réaction était acide.

a. Poids du bromure dans l'air . . . . .	11 <sup>gr</sup> ,270,76
b. » » dans le vide . . . . .	11 <sup>gr</sup> ,275,94
c. » de l'argent dans l'air . . . . .	12 <sup>gr</sup> ,425,84
d. » » dans le vide . . . . .	12 <sup>gr</sup> ,426,54

Après la double décomposition, l'eau mère a exigé *douze centimètres cubes* et *quatre dixièmes* de liqueur décime de bromure, soit  $0^{\text{sr}},01025$  de bromure d'ammonium pour se dépouiller complètement de l'argent dissous. Il était donc resté  $0^{\text{sr}},0124$  de ce métal à l'état d'azotate.

D'où :

$$100,000 \text{ Ag} = 90,825 \text{ Az H}^{\text{t}} \text{ Br} \quad \text{et} \quad 100,000 \text{ Az H}^{\text{t}} \text{ Br} = 110,105 \text{ Ag}.$$

2° Le bromure était une partie du précédent; il avait été séché à  $160^{\circ}$  dans un courant d'ammoniac sec; il était légèrement gris après l'élimination

de l'ammoniaque condensée, opérée par un courant d'air froid. Il rougissait le papier bleu de tournesol mouillé.

a.	Poids du bromure dans l'air . . . . .	15 <sup>gr</sup> ,596,40
b.	»        »        dans le vide . . . . .	15 <sup>gr</sup> ,402,56
c.	»        de l'argent dans l'air . . . . .	14 <sup>gr</sup> ,769,55
d.	»        »        dans le vide . . . . .	14 <sup>gr</sup> ,770,17

Après la double décomposition, l'eau mère a exigé *quatorze centimètres cubes* et *huit dixièmes* de liqueur décime de bromure, représentant 0<sup>gr</sup>,01343 de bromure d'ammonium pour se dépouiller complètement de l'argent dissous. Il était donc resté 0<sup>gr</sup>,0148 de ce métal à l'état d'azotate.

D'où :

$$100,000 \text{ Ag} = 90,851,7 \text{ Az H}^4 \text{ Br} \quad \text{et} \quad 100,000 \text{ Az H}^4 \text{ Br} = 110,095,6 \text{ Ag}.$$

3° Le bromure provenait d'une nouvelle préparation de l'acide bromhydrique destiné aux essais des matières d'argent, qui avait été saturé par de l'ammoniaque obtenue par la réduction du nitre. Il a été séché à 180° dans un courant de gaz ammoniac sec. L'ammoniaque condensée fut éliminée par un courant d'air froid entretenu pendant huit heures. Il était légèrement grisâtre. Sa réaction était acide.

a.	Poids du bromure dans l'air . . . . .	24 <sup>gr</sup> ,551,50
b.	»        »        dans le vide . . . . .	24 <sup>gr</sup> ,562,70
c.	»        de l'argent dans l'air . . . . .	26 <sup>gr</sup> ,847,16
d.	»        »        dans le vide . . . . .	26 <sup>gr</sup> ,848,69

Après la double décomposition, l'eau mère a exigé *vingt-six centimètres cubes* et *soixante-douze centièmes* de liqueur décime de bromure, représentant 0<sup>gr</sup>,02424 de bromure d'ammonium pour se dépouiller complètement d'argent dissous. Il était donc resté 0<sup>gr</sup>,02672 de métal à l'état d'azotate.

D'où :

$$100,000 \text{ Ag} = 90,851,1 \text{ Az H}^4 \text{ Br} \quad \text{et} \quad 100,000 \text{ Az H}^4 \text{ Br} = 110,090,4 \text{ Ag}.$$



4° Le bromure employé a été préparé pour mes recherches par mon ami M. Henri Sainte-Claire Deville en faisant réagir sur une solution d'ammoniaque pure le brome purifié, comme il est dit dans la note n° 5 jointe à ce travail.

Le bromure était cristallisé et d'un blanc parfait. Chauffé à 135° dans un courant d'ammoniac sec, il est devenu grisâtre; cette coloration s'est encore accentuée par l'élimination, à l'aide d'un courant d'air froid, de l'ammoniaque condensée. Sa réaction était acide.

a. Poids du bromure dans l'air. . . . .	8 <sup>gr</sup> ,950,80
b. » » dans le vide. . . . .	8 <sup>gr</sup> ,954,90
c. » de l'argent dans l'air. . . . .	9 <sup>gr</sup> ,846,04
d. » » dans le vide. . . . .	9 <sup>gr</sup> ,846,60

Après la double décomposition, l'eau mère a exigé *neuf centimètres cubes et soixante-dix-huit centièmes* de liqueur décime de bromure, représentant 0<sup>gr</sup>,00878 de bromure d'ammonium pour se dépouiller complètement de l'argent dissous. Il est donc resté 0<sup>gr</sup>,0968 de ce métal à l'état d'azotate.

D'où :

$$100,000 \text{ Ag} = 90,850,2 \text{ Az H}^4 \text{ Br} \quad \text{et} \quad 100,000 \text{ Az H}^4 \text{ Br} = 110,095,4 \text{ Ag.}$$

Le rapport proportionnel entre l'argent et le bromure d'ammonium a donc été le suivant :

*A* pour le bromure produit par l'acide bromhydrique type.

1°	Ag : Az H <sup>4</sup> Br ::	100,000 : 90,851,0 ;
2°	» » » »	: 90,851,0 ;
3°	» » » »	: 90,829,7.

*B* pour le bromure produit par l'acide bromhydrique préparé pour les essais d'argent.

1°	Ag	:	Az H <sup>+</sup> Br	:	100,000	:	90,825;
2°	"	"	"	"	"	:	90,851,7;
3°	"	"	"	"	"	:	90,851,4;
4°	"	"	"	"	"	:	90,850,2.

Le rapport moyen est :

100.000 : **90.829.6.**

---

## CONCLUSIONS.

---

Je vais essayer de déduire des faits exposés dans ces deux mémoires les conséquences qui en découlent au point de vue des poids atomiques des éléments contenus dans les chlorures et bromures soumis à l'expérimentation. Je tiens toutefois à répéter ce que j'ai dit en commençant, qu'en entreprenant ces recherches je n'ai pas eu pour but de soumettre à une vérification mes déterminations de poids atomiques, mais bien de chercher l'erreur que je pourrais avoir commise dans l'application de la méthode de la *voie humide* à la détermination du rapport proportionnel entre l'argent et les chlorures, telle que je l'ai exécutée antérieurement, et de corriger mes premiers résultats, si effectivement ils étaient reconnus inexacts. Les deux méthodes décrites et pratiquées dans le premier mémoire ont conduit à un résultat identique; je puis donc me borner à comparer ce résultat à celui de mes anciennes expériences.

### *Chlorure de potassium.*

Les essais exécutés il y a un quart de siècle au moins et consignés dans mes *Recherches sur les rapports réciproques des poids atomiques*, publiées en 1860, m'ont donné le rapport de :

Ag : K Ch :: 100,000 : 69,105

avec un écart de 0,00004.

Par la première méthode j'ai eu le rapport moyen

$$\text{Ag : K Cl} :: 100,000 : 69,117,92$$

et par la seconde méthode j'ai eu en moyenne

$$\text{Ag : K Cl} :: 100,000 : 69,119,41.$$

La moyenne de ces deux résultats est

$$\text{Ag : K Cl} :: 100,000 : 69,118,66.$$

Dans l'hypothèse de Prout ce rapport est

$$\text{Ag : K Cl} :: 100,000 : 68,981.$$

Le poids atomique du potassium déduit de mes anciennes déterminations est

$$k = 59,15.$$

Ce poids atomique semblait confirmé par les résultats de la transformation du chlorure de potassium en azotate qui conduisent à un chiffre compris entre 39,130 et 39,135, ainsi que je l'ai dit dans mes *Nouvelles recherches sur les lois des proportions chimiques*. Toutefois, les déterminations du rapport proportionnel entre l'argent et le bromure de potassium, consignées dans ce même travail, ont démontré que le poids atomique est compris entre 39,130 et 39,144 et en moyenne = 39,137.

En prenant les poids atomiques de l'argent et du chlore = 107,93 et 35,457, déduits de l'ensemble des travaux de M. de Marignac et des miens, et recherchant ensuite le poids atomique du potassium à l'aide du rapport proportionnel entre l'argent et le chlorure de potassium tel que je viens de le trouver dans l'application des deux méthodes employées, j'arrive à

$$1^{\circ} \quad 59,142;$$

$$2^{\circ} \quad 59,145;$$

en moyenne :

$$59,142,5.$$

Ainsi disparaît le désaccord, très-léger, il est vrai, constaté dans mes *Nouvelles recherches sur les lois des proportions chimiques*, entre le poids atomique du potassium déduit du chlore et du brome. En évitant l'erreur à laquelle je n'ai pu échapper en commençant mes travaux, le chlore et le brome conduisent donc pour le potassium à une *constante* = 39,1425 supérieure au maximum de  $\frac{1}{1000}$  trouvée antérieurement par moi.

Cette constante est nécessairement liée à l'argent; si j'élimine l'intervention du métal et si je calcule partant de  $K = 39,142$  et  $Cl = 35,457$  la quantité d'oxygène que doit renfermer le chlorate de potassium  $O = 16,000$ , je trouve 39,1518.

Or Berzelius a obtenu en moyenne. . . . .	59,150
et par l'action de l'acide chlorhydrique sur le chlorate j'ai trouvé en	
moyenne . . . . .	59,151

Je crois ne pas agir témérairement en disant que, dans l'état actuel de nos connaissances et en s'en tenant à l'expérience, on doit fixer le poids atomique du potassium à

	59,142	l'oxygène étant 16
et à	59,044	»        »        15,96

*Chlorure de sodium.*

Dans mes *Recherches sur les rapports réciproques des poids atomiques*, j'ai fait connaître que le rapport proportionnel entre l'argent et le chlorure sodique, préparé par six procédés différents, est en moyenne :

$$:: 100,000 : 54,2078$$

avec un écart de  $\pm 0,000015$ .

Tous les chlorures mis en expérience contenaient des traces de silice dont je n'ai pas tenu compte, vu qu'à l'époque à laquelle ces essais ont été exécutés, j'en ignorais la quantité et j'ajouterai même l'existence. J'ai consigné dans mes *Nouvelles recherches sur les lois des proportions chimiques*, une

série de déterminations du rapport proportionnel entre le chlorure sodique et l'argent de différentes provenances, d'où il résulte « que 100,000 d'argent » exigent entre 54,206,5 et 54,207,5 de chlorure de sodium, mais j'ai » constaté par deux essais directs que le chlorure employé à la détermination du titre de l'argent renferme entre 0,000047 et 0,000050 de silice » mêlée de silicate de sodium. Son titre moyen est donc 99,99515. Les » 54,207 sont donc ramenés à 54,204 de chlorure réel. »

Toute déduction faite des traces de matières étrangères contenues dans le chlorure de sodium mis en expérience pour la détermination du rapport proportionnel par les deux méthodes décrites dans le premier des mémoires du présent travail, je trouve par l'application de la première méthode le rapport moyen de

$$\text{Ag : Na Cl} :: 54,204,71.$$

par l'application de la seconde méthode le rapport de

$$\text{Ag : Na Cl} :: 100,000 : 54,204,68.$$

Tous ces résultats sont identiques et je suis autorisé à en conclure que mes anciennes déterminations sont exactes.

En admettant le poids atomique de l'argent = 107,93, le poids moléculaire du chlorure sodique = 58,503 et le poids atomique du sodium est bien 23,046, comme je l'ai établi par mes précédents travaux en prenant le chlore = 35,457. Et inversement, si l'on prend le poids moléculaire du chlorure sodique = 58,500, le poids atomique de l'argent est égal à 107,924.

#### *Chlorure d'ammonium.*

J'ai fait connaître, dans mes *Recherches sur les rapports réciproques des poids atomiques*, neuf déterminations du rapport proportionnel entre l'argent et le chlorure d'ammonium dont la moyenne est :

$$:: 100,000 : 49,5944$$

avec un écart de  $\pm 0,00006$ .

Ayant repris postérieurement ces essais, j'ai trouvé comme moyenne de douze déterminations le rapport de

$$100,000 : 49,5975,$$

avec un écart de  $\pm 0,00003$ . Ces douze déterminations sont consignées dans mes *Nouvelles recherches sur les lois des proportions chimiques*.

Dans le présent travail, je suis arrivé par l'application de la première méthode au rapport de

$$100,000 \text{ à } 49,5995,$$

et par l'application de la seconde méthode au rapport de

$$100,000 \text{ à } 49,5987.$$

On peut considérer comme identiques ces trois derniers résultats et en conclure que mes anciennes déterminations ne sont pas affectées d'erreurs sensibles. Le poids atomique de l'argent étant 107,93, le poids moléculaire du chlorure d'ammonium est en moyenne = 53,532. Le chlore étant 35,457, le poids moléculaire de l'ammonium = 18,075.

#### *Bromure de sodium.*

Le rapport proportionnel entre l'argent et le bromure sodique, tel qu'il résulte des quatre déterminations consignées dans le second mémoire, est

$$:: 100,000 : 95,4405,$$

avec un écart maximum de  $\pm 0,00002$ .

En tenant compte des matières étrangères contenues dans le bromure soumis à l'essai, ce rapport devient :

$$:: 100,000 : 95,45764.$$

Le poids atomique de l'argent étant 107,93, le poids moléculaire du bromure sodique = 103,0038.

Mes synthèses du bromure et l'analyse du bromate d'argent, ainsi que les déterminations entre le rapport proportionnel entre l'argent et le bromure de potassium, conduisent pour le brome à un poids atomique compris entre 79,945 et 79,965, soit en moyenne  $\text{Br} = 79,955$ . Déduisant de ces données le poids atomique du sodium, on obtient  $\text{Na} = 23,045$ . Et inversement, en admettant le poids moléculaire du bromure sodique = 103,000, on trouve le poids atomique de l'argent = 107,9238.

*Bromure d'ammonium.*

Le rapport proportionnel entre l'argent et le bromure d'ammonium qui résulte des *sept* déterminations consignées dans le second mémoire est :

$$:: 100,000 : 90,829,6 ,$$

avec un écart extrême de  $- 0,000066$  et de  $+ 0,000021$ .

L'argent étant 107,93, le poids moléculaire de bromure d'ammonium = 98,032 et le poids moléculaire de l'ammonium = 18,077.

J'ai montré plus haut que le poids moléculaire de l'ammonium, déduit du rapport proportionnel entre l'argent et le chlorure d'ammonium, est égal à 18,075. Ces deux résultats se confondent et donnent en moyenne 18,076.

*Poids atomique de l'azote.*

Dans mes *Nouvelles recherches sur les lois des proportions chimiques*, j'ai déduit le poids atomique de l'azote d'une part du rapport de poids des chlorures de potassium, de sodium, de lithium et d'argent à l'azotate de ces métaux.

En admettant  $\text{K} = 39,137$ ;  $\text{Na} = 23,046$ ;  $\text{Li} = 7,022$  et  $\text{Ag} = 107,93$ , le poids atomique de l'azote = 14,045 avec un écart de  $\pm 0,0025$ . D'autre part, par la synthèse de l'azotate d'argent, on a trouvé que ce poids atomique est égal à 14,042, si on le déduit du poids de l'azotate d'argent fondu, tandis qu'il est = 14,054, lorsque pour le calculer on prend le poids



de l'azotate d'argent, *séché à son point de fusion*. En effet, le poids de l'azotate produit par une unité de métal diffère dans ces deux conditions, comme d'ailleurs j'ai eu soin de le faire remarquer dans mes *Recherches sur les rapports réciproques des poids atomiques* et dans mes *Nouvelles recherches sur les lois des proportions chimiques*. Mes dernières synthèses ont prouvé que cette différence atteint à  $\frac{1}{15748}$ . Si pour remonter au poids de la molécule de l'ammonium on prend  $Az = 14,054$  et si l'on y ajoute le poids de quatre atomes d'hydrogène tel qu'il dérive du poids spécifique de ce corps déterminé par M. Regnault, soit 1,0023, l'oxygène étant 16,000, on obtient  $14,054 + 4,01 = 18,064$ , valeur qui ne diffère que de 0,012 du poids moléculaire 18,076, qui dérive de la détermination du rapport proportionnel entre l'argent et le chlorure et le bromure d'ammonium.

En calculant le poids atomique de l'azote et le poids moléculaire de l'ammonium d'après les poids spécifiques de l'azote, de l'hydrogène et de l'oxygène déterminés par M. Regnault, on arrive absolument au même résultat. D'après ces poids spécifiques, le poids atomique de l'azote est 14,0569 et l'ammonium 18,0669.

Enfin, si l'on recherche comment le poids atomique de l'azote représenté par 14,0569 se concilie avec le résultat de la transformation des chlorures en azotates, on arrive au résultat suivant :

Parmi les nombreuses déterminations de rapport proportionnel entre les chlorures et azotates consignées dans mes *Nouvelles recherches sur les lois des proportions chimiques*, il s'en trouve une exécutée en collaboration avec mon ami et confrère M. Kekulé, pour laquelle vases et matières ont été pesés en double avant et après l'expérience. Elle concerne la transformation du chlorure de sodium en azotate. Les détails sont inscrits pages 229, 230 et 247. Elle a fourni :

$$\text{Na Cl} : \text{Na Az O}^5 : : 100,000 : 145,468.$$

Deux autres déterminations faites à l'aide de chlorure sodique de la même origine et avec les mêmes soins ont donné respectivement :

$$1^\circ \text{ Na Cl} : \text{Na Az O}^5 : : 100,000 : 145,465;$$

$$2^\circ \text{ Na Cl} : \text{Na Az O}^5 : : 100,000 : 145,459.$$

La moyenne de ces trois résultats est

$$:: 100,000 : 145,464.$$

Or, en admettant  $\text{Na} = 23,046$ ,  $\text{Az} = 14,0569$  et  $\text{Cl} = 35,457$ , on trouve que

$$\text{Na Cl} : \text{Na Az O}^5 :: 100,000 : 145,467.$$

Les résultats fournis par la transformation du chlorure sodique en azotate se concilient donc parfaitement avec le poids atomique de l'azote = 14,0569.

Ainsi les données de la physique et les déterminations du rapport proportionnel entre l'argent et le chlorure et le bromure d'ammonium, confirmées par la synthèse de l'azotate d'argent, et le résultat de la transformation du chlorure sodique en azotate, conduisent pour l'azote à une constante, comprise entre 14,054 et 14,0569.

En résumé, les recherches exposées dans ces deux mémoires fournissent les valeurs suivantes :

Le poids atomique de l'oxygène étant . . . . .	16,0000
» » du potassium est. . . . .	59,1425
» » du sodium. . . . .	23,0455
» » de l'azote . . . . .	14,0550
» » de l'argent . . . . .	107,9500

Le poids atomique de l'hydrogène étant 1 et le poids atomique de l'oxygène étant 15,96,

Le poids atomique du potassium est . . . . .	59,044
» » du sodium . . . . .	22,988
» » de l'azote . . . . .	14,019
» » de l'argent . . . . .	107,660

On le voit, en modifiant les moyens d'investigations de manière à se mettre à l'abri de causes d'erreurs constatées, on arrive ou absolument au

même résultat ou l'on est conduit à conclure que l'écart observé entre les données de l'expérience et les chiffres calculés en supposant des rapports simples entre les masses qui interviennent dans l'action chimique est plus considérable que celui indiqué par mes travaux antérieurs.

En terminant mes *Nouvelles recherches sur les lois des proportions chimiques*, je me suis permis de faire un appel aux chimistes pour les prier de soumettre à un contrôle l'une quelconque des données fondamentales de ces recherches, et notamment la synthèse de l'azotate d'argent, que je considère comme inconciliable avec l'hypothèse de la simplicité de rapports. On n'a pas répondu à mon appel. Je crois devoir le renouveler ici et signaler en même temps l'opportunité de soumettre à une vérification nouvelle la détermination du rapport proportionnel entre l'argent et le chlorure d'ammonium, par l'une ou l'autre des méthodes que je viens d'exposer. Ces déterminations sont aujourd'hui *faciles*, à l'aide de ces méthodes et par les moyens qui existent de se procurer, à l'état de pureté voulue, les matériaux nécessaires pour les exécuter. Ces déterminations permettent aussi de relier entre eux les poids atomiques de l'argent, de l'azote, du chlore et de l'hydrogène, et de décider si, *en fait*, la simplicité de rapport existe ou n'existe pas. Si ces recherches confirment mes persévérantes investigations, peut-être alors ceux qui admettent l'existence d'une matière première, unique, diront-ils comment ils conçoivent que les produits de l'agrégation de cette matière unique présentent des masses pondérables fixes en rapports incommensurables. Aussi longtemps que cette explication n'aura pas été donnée, l'hypothèse de l'existence d'une matière première unique ne pourra pas prendre rang dans la science, parce qu'elle ne pourra pas être considérée comme une vérité possible.

# NOTES.

---

## NOTE 1.

---

### DOSAGE DU CHLORE D'UN CHLORURE ET DE L'ARGENT D'UN SEL DE CE MÉTAL.

Après la publication de la première partie de mes *Recherches de statique chimique au sujet du chlorure et du bromure d'argent*, plusieurs chimistes m'ont demandé mon avis sur la voie à suivre pour opérer aussi exactement que possible le dosage du chlore d'un chlorure et l'argent d'un sel de ce métal. A cette époque j'ai rédigé une note que je reproduis textuellement. En effet, je n'ai aucun changement à y faire, les préceptes qu'elle renferme ayant reçu la sanction de l'expérience.

Voici cette note :

### DU DOSAGE DU CHLORE ET DE L'ARGENT.

« Le dosage, à l'état de chlorure d'argent, du chlore d'un chlorure et de l'argent d'un sel de ce métal, comprend trois séries d'opérations bien distinctes : la première concerne la précipitation, la deuxième le lavage et la troisième la récolte du chlorure d'argent produit. Je vais exposer successivement les dispositions à prendre pour exécuter ces opérations.

1° *De la précipitation.*—On doit précipiter à froid et à l'abri de la lumière blanche, avec un très-léger excès de solution d'argent, le chlorure dissous, et avec un très-léger excès d'acide chlorhydrique, le sel d'argent dissous. Au point de vue de l'élimination du chlorure d'argent produit, il n'y a aucun inconvénient à dépasser légèrement la quantité d'argent nécessaire à la précipitation du chlore. En effet quel que soit son état, le chlorure d'argent est complètement insoluble à froid dans une solution excessivement diluée d'un sel d'argent. L'eau mère est absolument privée de chlore, et elle s'éclaircit facilement par l'agitation suivie d'un repos convenable. Il n'en est pas de même de l'emploi d'un excès d'acide chlorhydrique ; quoiqu'il faille un certain excès de cet acide pour rendre le chlorure d'argent insoluble dans l'eau mère, cet excès ne peut pas dépasser une limite donnée,

au risque de dissoudre une partie du chlorure d'argent précipité et d'empêcher ensuite l'éclaircissement du liquide sous l'influence de l'agitation et de rendre très-difficile, si non impossible, le lavage du chlorure d'argent.

Il est indispensable d'effectuer à *froid* l'élimination du chlore d'un chlorure par l'argent, et l'élimination de l'argent par l'acide chlorhydrique. En opérant à *chaud*, on est exposé à devoir employer une quantité d'argent *supérieure* à celle qui correspond au chlore du chlorure dissous, et une quantité d'acide chlorhydrique *inférieure* à celle qui correspond à la transformation de l'argent en chlorure de ce métal représenté par AgCl.

En effet à une température comprise entre 55 et 100 degrés, sous l'influence de la lumière à laquelle on est obligé d'avoir recours, lors de la précipitation, le chlorure d'argent met du chlore en liberté qui précipite de l'argent dissous, même celui qui existe à l'état de chlorure de ce métal. Dans l'un ou l'autre cas, le poids du chlorure d'argent produit diffère de celui qui résulte de la composition normale de ce corps. La différence peut s'élever à  $\frac{1}{200}$  du poids, en opérant la précipitation à 100 degrés.

La précipitation de la solution de chlorure ou du sel d'argent <sup>1</sup> doit se faire dans un flacon bouché à l'émeri, et dont le bouchon, parfaitement poli dans toutes ses parties, est taillé en cône qui pénètre d'un centimètre environ dans l'intérieur. La capacité de celui-ci doit être au moins égale au double du volume du liquide à précipiter. Après chaque addition du précipitant, il est nécessaire de soumettre la liqueur à une vive agitation pour en obtenir l'éclaircissement et une division aussi grande que possible des flocons du chlorure d'argent. Pendant cette agitation le flacon doit être enveloppé d'un drap épais noir ou d'une double toile noire.

La dilution initiale de la solution du chlorure ou du sel d'argent à précipiter importe peu, pourvu que la précipitation totale étant effectuée, le rapport en poids de l'eau mère et du chlorure d'argent, soit à peu près comme 100 est à 1; mais il convient d'opérer la précipitation avec des solutions normales d'argent ou d'acide chlorhydrique; ces solutions renferment à 15° par litre, 10 grammes d'argent ou 15<sup>gr</sup>,750 d'azotate de ce métal et 5<sup>gr</sup>,285 de chlore à l'état d'acide chlorhydrique, soit 5<sup>gr</sup>,5796 de cet acide.

Pour effectuer la précipitation, on procède d'abord par *la voie de gouttes exploratrices*. D'après l'intensité du trouble produit, on ajoute le volume de liqueur normale jugé nécessaire. Lorsque par suite d'additions successives de liqueur normale, on arrive près de la fin, on achève l'opération à l'aide de liqueur décime d'argent ou d'acide chlorhydrique.

Si l'eau mère de la précipitation d'un sel d'argent ne s'éclaircit point sous l'influence de

<sup>1</sup> Lorsqu'il s'agit de la précipitation du sulfate d'argent, il est indispensable d'ajouter, au préalable, à la solution, un vingtième de son volume d'acide sulfurique normal; de cette manière on évite l'entraînement du sulfate par le chlorure d'argent produit. Cet entraînement s'effectue toujours, en opérant sur une solution de sulfate d'argent neutre, ou même fortement acidulée par l'acide azotique. Le même fait s'observe lors de la précipitation du sulfate d'argent par les bromures et les iodures. Pour transformer tout l'argent en bromure ou en iodure de ce métal, il est également nécessaire d'effectuer la précipitation avec une solution contenant environ *lix* pour cent de son poids d'acide sulfurique normal, ainsi du reste que j'ai été obligé de le faire, lorsque j'ai exécuté la synthèse du bromure et de l'iodure d'argent.

l'agitation, c'est un signe qu'on a employé un excès d'acide chlorhydrique, et dans ce cas on ajoute de la liqueur décime d'argent jusqu'à ce que par l'agitation on obtienne l'éclaircissement du liquide.

On annote le volume de liqueur décime d'argent employé et on finit ensuite l'opération par de la liqueur décime d'acide chlorhydrique.

2° *Du lavage du chlorure d'argent.* — Pour empêcher le chlorure d'argent d'entrer en solution, son lavage doit s'effectuer avec de l'eau additionnée de 0<sup>gr</sup>,033 d'azotate d'argent, ou de 0<sup>gr</sup>,01185 d'acide chlorhydrique par litre d'eau suivant qu'il s'agit du lavage du chlorure précipité par l'argent, ou du lavage du chlorure précipité par l'acide chlorhydrique.

Le lavage du chlorure d'argent doit se faire dans le flacon où s'est effectuée la précipitation. A cet effet, après avoir laissé déposer le précipité, on décante l'eau mère éclaircie, dans un vase de porcelaine qu'on couvre d'un plan opaque. On remplace l'eau mère par un volume de liquide de lavage double au moins du volume apparent du chlorure d'argent. Après une agitation de cinq minutes, et un repos suffisant, on décante l'eau de lavage qui doit être limpide, si l'opération de la précipitation a été bien faite. On répète dans ces conditions douze fois au *minimum* et quinze fois au *maximum*, le lavage du chlorure d'argent, ayant soin de réunir les eaux de décantations dans trois vases séparés.

L'expérience démontre que le précipité ainsi lavé est constitué exclusivement de chlorure d'argent pur, à moins qu'il ne s'agisse de chlorure de métaux qui se laissent entraîner par ce composé d'argent. Ces métaux sont assez connus pour que je puisse me dispenser de les énumérer.

5° *De la filtration de l'eau mère et de lavage et de l'introduction du chlorure d'argent lavé dans un appareil où il doit être séché et pesé.* — Les opérations que je viens indiquer sommairement ne présentent aucune difficulté sérieuse d'exécution. Il n'en est pas de même des moyens à employer pour filtrer l'eau mère et les eaux de lavage, et pour recueillir, sécher et peser le chlorure d'argent produit, dont la presque totalité reste dans le flacon; une très-minime partie a été entraînée par l'eau mère et les eaux de lavage. La meilleure méthode consiste à filtrer l'eau mère et les eaux de lavage au travers d'une couche suffisamment épaisse de chlorure d'argent qu'on a laissé se tasser au-dessus d'un support de fils fins de platine, couvert de cassons de verre dur de Bohême ou mieux de cassons de quartz, obtenu en faisant étonner ces corps, et contenus dans la partie effilée d'un appareil à boule figuré page 151 de mes *Nouvelles recherches sur les lois des proportions chimiques*, ou simplement dans la partie effilée de la queue d'un entonnoir et dont le poids est connu.

Ce moyen auquel M. de Marignac et moi nous avons eu recours autrefois pour les synthèses des chlorure, bromure et iodure d'argent, exige malheureusement un temps fort long. De plus, par suite des fissures qui se produisent parfois dans le chlorure d'argent, lors de la contraction qu'il éprouve spontanément, il expose à des pertes, si l'on n'a

pas soin de recueillir les liquides filtrés et de les abandonner à un repos prolongé pour laisser déposer le chlorure entraîné.

Le seul moyen que j'aie trouvé de réduire notablement l'épaisseur de la couche de chlorure d'argent destiné à faire fonction de filtre, et partant à diminuer considérablement la durée de la filtration, consiste à placer au-dessus des menus cassons de verre *dur* ou de quartz étouffés, une couche *épaisse* d'amiante feutrée qu'on surmonte ensuite d'un lit de chlorure d'argent *pulvérulent* de quelques millimètres seulement de hauteur. Ce système permet une filtration assez rapide ; mais il présente l'inconvénient de laisser entraîner parfois des fibrilles fines d'asbeste. On est donc forcé de faire passer les liquides écoulés du système à travers un petit filtre de papier lavé à l'acide azotique dilué qui retient l'amiantante entraînée. Après l'opération, on sèche et on incinère le filtre et on ajoute le résidu à la masse de chlorure d'argent contenue dans l'appareil à boule, ou dans l'entonnoir.

L'expérience prouve que l'amiante bien divisée par son agitation avec l'eau, et qui a subi successivement un traitement à l'eau régale et à l'acide sulfurique concentrés bouillants, et enfin à l'eau pure, calcinée ensuite au rouge sombre, ne cède absolument rien à l'eau froide pure, ou acidulée à l'acide azotique <sup>4</sup>. Quant à l'arrangement de l'appareil à filtration, on prend les dispositions suivantes : on introduit dans la partie effilée de l'appareil à boule ou de l'entonnoir une bourre en fils fins de platine, au-dessus de laquelle on dispose une couche de 5 centimètres de hauteur de cassons de quartz étouffé en prenant la précaution de commencer par des cassons relativement grossiers et de finir par des fragments, presque pulvérulents. On verse sur cette couche une bouillie d'amiante traitée comme il est dit ci-dessus. Après l'écoulement de l'eau, on comprime l'asbeste de manière à rapprocher les fibres autant que possible. On verse une nouvelle quantité de bouillie, on laisse écouler l'eau et on comprime l'amiante jusqu'à ce que l'eau la traverse assez lentement pour ne plus tomber que goutte à goutte par la partie effilée de l'appareil.

Dans cet état on place le système dans une étuve à dessiccation où il est porté lentement à 50, à 100 et à 200° pour le laisser refroidir lentement ensuite dans l'air sec, avant d'en déterminer le poids *constant*.

Pour recueillir dans cet appareil la masse de chlorure d'argent, on introduit dans un entonnoir en gutta-percha, couvert d'une plaque trouée à bord recourbés et également en gutta. Par cette disposition on soustrait le chlorure d'argent à l'action de la lumière. Au-dessous du tube effilée qui termine l'appareil, on dispose un petit entonnoir en verre contenant un filtre de papier lavé à l'acide azotique dilué ou mieux à l'acide fluorhydrique dilué, puis à l'eau pure et destiné à retenir l'amiante divisée qui peut être entraînée par les liquides. On commence par mouiller le tampon d'amiante par l'eau contenant la

<sup>4</sup> Dans ces dernières années on a proposé de se servir de verre filé fin pour retenir les corps solides divisés en suspension dans les liquides. Je me suis assuré que cette matière ne dispense pas d'une couche épaisse de chlorure d'argent pour la filtration de l'eau mère et de l'eau de lavage de chlorure d'argent pulvérulent. En tout cas l'usage de la laine de verre devra être préféré à tout autre corps, et notamment à l'amiante divisée et purifiée le jour où l'on sera parvenu à en fabriquer d'inaltérable à l'eau pure, et à l'eau acidulée à l'acide azotique, ce qui ne paraît pas être actuellement le cas.

quantité indiquée ci-dessus d'azotate d'argent ou d'acide chlorhydrique suivant qu'on a à recueillir du chlorure d'argent provenant de la précipitation d'un chlorure ou d'un sel d'argent. Après l'écoulement de cette eau, on agite le chlorure d'argent lavé, contenu dans le flacon, et on verse un dixième environ de la bouillie au-dessus du tampon d'amiante mouillée de manière à produire à sa surface une couche de 4 à 5 millimètres de hauteur de chlorure. Lorsque ce composé s'est tassé par l'écoulement de l'eau, on procède à la filtration de l'eau mère d'abord, et des eaux de lavage, en prenant la précaution de ne jamais verser ces liquides sur la couche de chlorure d'argent servant de filtre, mais sur l'un des côtés de l'entonnoir ou de l'appareil à boule. En soulevant le lit de chlorure on risque chaque fois de voir passer un liquide trouble par une petite quantité de chlorure en suspension.

Après la filtration de l'eau mère et des eaux de lavage, et d'un lavage soigné du chlorure déposé sur l'amiante, on introduit successivement la bouillie de chlorure conservée dans le flacon, ainsi que les eaux employées pour détacher les dernières traces de chlorure adhérent aux parois des vases employés.

Lorsque la précipitation a eu lieu à *froid*, comme il est, à mon avis, INDISPENSABLE de le faire, aucune trace de chlorure d'argent ne reste attaché aux vases. On peut, et on doit s'en assurer, en lavant les vases avec de l'eau ammoniacale pure, et en évaporant celle-ci au bain-marie dans une capsule de *platine* pesée. Il n'en serait pas de même si la précipitation avait été faite à *chaud*; dans ce cas, lors du refroidissement une partie du chlorure dissous s'attache à la paroi des vases.

Tout le chlorure d'argent étant réuni dans le tube à boule, ou dans l'entonnoir, il est nécessaire, pour en déterminer le poids, de se conduire différemment, suivant que ce corps provient de la précipitation d'un chlorure par le nitrate d'argent, ou de la précipitation d'un sel d'argent par l'acide chlorhydrique, et partant que le lavage a été effectué par de l'eau contenant la dose indiquée d'azotate d'argent ou d'acide chlorhydrique.

Dans le cas du dosage de l'argent, il suffit d'opérer la dessiccation du chlorure à basse température d'abord, puis entre 150 et 200 degrés, en enfermant l'appareil dans une étuve à parois métallique, par conséquent à l'abri de la lumière. L'augmentation du poids de l'appareil est due exclusivement au chlorure d'argent qui y est contenu et auquel il importe d'ajouter l'amiante laissée par l'incinération du filtre.

Mais lorsqu'il s'agit du dosage du chlore d'un chlorure, il est indispensable de peser une première fois l'appareil avec le chlorure humide, auquel on a ajouté l'amiante provenant de l'incinération du filtre de papier, et de le peser une seconde fois avec le chlorure parfaitement séché entre 150 et 200 degrés, dans une étuve à l'abri de la lumière.

La différence entre la première et la seconde pesée représente le poids de l'eau volatilisée. Mais cette eau renferme  $\frac{1}{18184}$  de son poids d'azotate d'argent représentant  $\frac{1}{28371}$  de métal qui pendant la dessiccation s'est transformé en chlorure aux dépens d'une partie du chlore contenu dans le chlorure d'argent. En effet, on ne saurait plus découvrir trace d'azotate d'argent dans du chlorure d'argent pulvérulent, mouillé d'une solution décime d'azotate de ce métal, et desséché ensuite à 200 degrés, à l'abri de la lumière.



Cette quantité d'argent, *tout à fait négligeable dans les analyses ordinaires*, doit donc être retranchée lorsqu'il s'agit d'une opération de précision, car elle constitue 0,<sup>es</sup>00053 par 10 grammes d'eau volatilisée.

Quoique le chlorure d'argent, chauffé à 200 degrés ne soit pas hygrométrique, il convient néanmoins de couvrir pendant la pesée l'entonnoir d'un plan de verre dépoli, afin de soustraire l'asbeste à l'influence de l'humidité de l'air. »

— — —

**NOTE 2.**

— —

DES LIQUEURS DÉCIMES ET DES MESUREURS.

**Des liqueurs décimes.**

J'ai eu besoin des liqueurs décimes suivantes :

1 <sup>o</sup>	Liquor	décime d'argent;
2 <sup>o</sup>	»	d'acide chlorhydrique;
3 <sup>o</sup>	»	de chlorure de potassium;
4 <sup>o</sup>	»	de chlorure de sodium;
5 <sup>o</sup>	»	de chlorure d'ammonium;
6 <sup>o</sup>	»	d'acide bromhydrique;
7 <sup>o</sup>	»	de bromure de potassium;
8 <sup>o</sup>	»	de bromure de sodium;
9 <sup>o</sup>	»	de bromure d'ammonium.

La liquor décime d'argent doit contenir et renfermait en effet *un gramme* d'argent pur par litre de liquide à 15 degrés.

Les liqueurs décimes d'acide chlorhydrique, des chlorures de potassium, de sodium, et d'ammonium, d'acide bromhydrique et des bromures de potassium, de sodium et d'ammonium doivent contenir par litre de liquide à 15 degrés, une quantité de chlore ou de brome telle que, prises sous l'unité de volume, elles transforment l'argent en chlorure ou en bromure de ce métal, sans laisser trace d'argent, ou de chlore ou de brome, en un état autre que celui de chlorure ou de bromure d'argent.

Pour préparer les liqueurs décimes, j'ai admis, d'après les données consignées dans mes *Nouvelles recherches sur les lois des proportions chimiques*, que :

1 <sup>o</sup>	100,000	d'argent produisent	157,496	d'azotate;
2 <sup>o</sup>	100,000	»	452,850	de chlorure;
3 <sup>o</sup>	100,000	»	équivalent à	69,104 de chlorure de potassium;
4 <sup>o</sup>	100,000	»	54,207	de chlorure de sodium;
5 <sup>o</sup>	100,000	»	49,600	de chlorure d'ammonium;
6 <sup>o</sup>	100,000	»	produisent	174,085 de bromure d'argent;
7 <sup>o</sup>	100,000	»	équivalent à	110,540 de bromure de potassium;
8 <sup>o</sup>	100,000	»	95,429	de bromure de sodium;
9 <sup>o</sup>	100,000	»	90,799	de bromure d'ammonium.

*Préparation de la liqueur décime d'argent.* — J'ai préparé la liqueur décime d'argent, en dissolvant, à froid en vase clos, directement de l'argent dans un volume suffisant d'acide azotique à 52 Baumé et presque toujours huit centimètres cubes par gramme de métal.

Lorsque l'excès d'acide employé ne pouvait pas nuire, j'ajoutais à la dissolution de l'eau pure de manière à remplir complètement le flacon bouché dans lequel la dissolution du métal avait été effectuée. A cet effet, j'avais déterminé au préalable la capacité du flacon fermé de son bouchon terminé au bas en cône, en le pesant successivement plein d'air sec et plein d'eau pure à 15 degrés centésimaux. Toutes les corrections faites, la capacité de ce flacon étant à cette température 5156,5 centimètres cubes, j'ai pesé dans l'air, avec des poids de platine, 5<sup>gr</sup>,15592 d'argent pur, représentant dans le vide 5<sup>gr</sup>,1565 de métal. Chaque centimètre cube contenait donc 0<sup>gr</sup>,001 d'argent. J'ai réalisé la répartition uniforme du métal dissous en faisant passer, à trois reprises différentes, la masse totale du liquide dans un autre flacon et en reportant chaque fois la liqueur, préalablement agitée, dans le premier flacon.

La liqueur décime d'argent, préparée dans cette condition, se conserve intacte, même à la lumière directe, lorsqu'on s'est servi d'eau dépouillée complètement de matières organiques par une distillation sur du permanganate alcalin de potassium. Si l'eau employée contient des matières organiques, la liqueur décime s'altère rapidement, malgré la présence de l'acide azotique, et lors même qu'on a soin de la conserver dans l'obscurité. On constate dans ce cas un léger dépôt noir formé d'argent pur.

Lorsqu'il m'a fallu de la liqueur décime d'argent tout à fait *neutre*, indispensable pour la production de troubles relativement *stables* de chlorure et de bromure d'argent, j'ai évaporé la solution azotique d'argent dans le flacon même de manière à chasser tout l'excès d'acide. A cet effet, après avoir placé horizontalement le flacon dans une étuve à gaz, j'ai fait pénétrer, à frottement, dans le goulot du flacon, le bout d'un tube en verre dur, légèrement courbé, de 45 à 50 centimètres de longueur et dont l'autre bout

plongeait dans un ballon. L'acide volatilisé a été condensé ainsi dans le ballon. Pour recueillir l'argent entraîné par les vapeurs, j'ai évaporé, dans une capsule de porcelaine, l'acide condensé, ainsi que les eaux de lavage du tube et du ballon, et j'ai repris par de l'eau pure le faible résidu d'azotate d'argent laissé. J'ai introduit dans le flacon la solution et les eaux de lavage de la capsule.

En prenant même les dispositions indiquées ci-dessus, l'évaporation de l'acide azotique dans lequel on a dissous à froid de l'argent et contenant à la fois de l'acide azoteux et de l'acide hypoazotique, est une opération des plus délicates à faire, lorsqu'on veut l'exécuter sans perdre une trace d'argent. De plus elle exige beaucoup de temps. Pour ce motif, il est préférable de recourir directement à la pesée de l'azotate d'argent desséché. Mais ici on se heurte à d'autres difficultés.

Ce sel, à moins d'avoir été chauffé près de son point de fusion, peut retenir de l'eau ou de l'acide azotique. En fondant le sel, on est exposé à en transformer une petite partie en azotite et à le rendre hygrométrique.

D'ailleurs, la pesée d'une quantité déterminée *à priori* d'azotate d'argent anhydre, est une opération plus délicate qu'on ne se le figure habituellement. Quoi qu'il en soit, c'est à l'azotate séché *à son point de fusion* que j'ai eu le plus souvent recours pour préparer de la liqueur décime d'argent neutre.

Je vais indiquer le moyen que j'ai employé pour être certain d'avoir le poids exact et voulu de sel anhydre.

Je commence par tarer exactement *un tube en verre dur*, muni d'un bouchon de verre usé à l'émeri, ayant soin de placer sur le plateau des poids en platine, représentant le poids dans l'air de l'azotate que je dois peser. Cela fait, j'enlève les poids et j'y substitue de l'azotate d'argent cristallisé, pulvérisé et séché à l'étuve. Lorsque l'équilibre est rétabli à quelques dixièmes de milligrammes près, j'introduis le tube, contenant le sel, dans une étuve dont la température est portée au degré voulu, et dont l'air est pur et maintenu sec par la présence d'un vase, largement ouvert, renfermant de l'hydrate de potassium fondu. Au bout de deux heures de dessiccation, je ferme le tube à l'aide de son bouchon et je le laisse refroidir sous une cloche dont l'air est conservé sec.

Après le refroidissement complet, je place le tube sur le plateau de la balance et je cherche le supplément de poids qu'il faut pour ramener exactement la balance dans la condition où elle était lorsque j'ai taré le tube avec les poids.

Pour m'assurer de la dessiccation parfaite de l'azotate, je replace le tube dans l'étuve encore pendant deux heures. Après son refroidissement je contrôle la première pesée. Ayant constaté ainsi le poids réel de l'azotate convenablement desséché et ce qui manque pour avoir le poids voulu, je pèse, à *une balance d'essai*, ce qui est nécessaire pour compléter le poids total.

En opérant avec de l'azotate d'argent cristallisé et séché à la température ordinaire, dans de l'air privé absolument d'humidité, le poids manquant s'élève entre 0<sup>sr</sup>,006 et 0<sup>sr</sup>,0075 pour 5 grammes de ce sel sec, soit  $\frac{12 \text{ à } 15}{10,000}$ . L'erreur que l'on peut commettre sur cette pesée est insignifiante. Aussi les pesées de l'azotate d'argent anhydre, faites dans

ces conditions conduisent à des résultats exacts à  $\pm 0^{\text{re}},00003$  soit à  $\frac{3}{100000}$  du poids total, en disposant de balances de *stabilité suffisante*, et en ayant soin de s'assurer par deux pesées successives que le sel qu'on pèse est convenablement séché.

À plusieurs reprises, j'ai eu l'occasion de m'assurer de la bonté de cette méthode, et je la recommande en toute sécurité pour la pesée de quantités, déterminées *à priori*, de matières susceptibles de retenir de l'eau ou d'en prendre à l'atmosphère.

*Préparations des liqueurs décimes de chlorures et de bromures de potassium, de sodium et d'ammonium.* — Le moyen que je viens d'indiquer pour la pesée d'une quantité déterminée *à priori* d'azotate d'argent anhydre, m'a également servi pour me procurer un poids donné de chlorures et de bromures de potassium, de sodium et d'ammonium nécessaires à la préparation des liqueurs décimes de ces composés. La pesée d'une quantité déterminée d'avance de ces corps présente à peu près les mêmes difficultés. J'ai employé les chlorures et bromures de potassium et de sodium à l'état de petits caçons, chauffés dans un creuset de platine près du rouge sombre. Après un refroidissement convenable, j'ai introduit de ces composés dans un tube bouché à l'émeri et taré, ainsi que je l'ai dit ci-dessus, jusqu'à ce qu'on en ait le poids voulu. Le tube a été chauffé ensuite jusqu'à 200 degrés pendant deux heures, puis abandonné au refroidissement dans de l'air sec. Le chlorure de potassium à l'état de caçons suffisamment chauffés est si peu hygrométrique qu'on trouve après plusieurs heures de chauffe à plus de 200 degrés, le même poids au tube refroidi. Il n'en est pas de même des chlorure et bromure de sodium.

Pendant le temps nécessaire pour parfaire le poids voulu, ces composés absorbent de l'eau à l'air. Il est donc nécessaire de peser, à une balance d'essai, les poids manquants après que ces composés sodiques ont été suffisamment longtemps chauffés à l'étuve dans le tube taré.

Le chlorure d'ammonium a été pris à l'état cristallisé et séché vers 150° à l'étuve.

Après la pesée de la quantité voulue dans le tube taré, le composé a été chauffé à l'étuve au point de lui faire émettre des vapeurs blanches. Le poids manquant a été pesé à la balance d'essai.

Le bromure d'ammonium a été employé également à l'état cristallisé et séché à 125°. Il a été introduit aussi dans un tube bouché à l'émeri et taré, puis pesé et chauffé de nouveau à la même température jusqu'à poids constant. Après le refroidissement, on a déterminé le poids manquant qui a été parfait par une pesée faite à la balance d'essai.

Pour calculer les poids de matières à employer, j'ai admis, en partant des densités déterminées par moi, que les corps suivants, pesés dans l'air, *avec des poids en platine*, perdent par *gramme* plus que ceux-ci :

1° L'argent . . . . .	0 <sup>gr</sup> ,0000370
2° L'azotate d'argent . . . . .	0 <sup>gr</sup> ,0002215
3° Le chlorure de potassium . . . . .	0 <sup>gr</sup> ,0005506
4° Le chlorure de sodium . . . . .	0 <sup>gr</sup> ,0005566
5° Le chlorure d'ammonium . . . . .	0 <sup>gr</sup> ,0007990
6° Le bromure de potassium . . . . .	0 <sup>gr</sup> ,0004286
7° Le bromure de sodium . . . . .	0 <sup>gr</sup> ,0005547
8° Le bromure d'ammonium . . . . .	0 <sup>gr</sup> ,0004590

J'ai obtenu les liqueurs décimes des acides chlorhydrique et bromhydrique, en ajoutant à *un volume de liqueur normale* de ces acides, neuf volumes d'eau à la même température. Et pour la préparation des liqueurs normales, j'ai dilué de dix fois son volume d'eau pure, les acides chlorhydrique et bromhydrique fumants et j'ai déterminé les quantités de chlorure, et de bromure d'argent produites par un volume donné de ces acides dilués.

Lorsqu'on dispose d'une solution alcaline complètement dépouillée d'acide carbonique, et parfaitement titrée, il est beaucoup plus expéditif d'y avoir recours pour déterminer le titre des acides chlorhydrique et bromhydrique convenablement dilués d'eau privée également d'acide carbonique; j'ai employé les deux moyens et j'ai constaté qu'ils conduisent identiquement aux mêmes résultats.

*De la vérification des liqueurs décimes.* — En se plaçant au point de vue de l'analyse ordinaire, les chimistes s'expliqueront difficilement les soins minutieux que j'ai pris pour me procurer des liqueurs décimes qui ne laissent rien à désirer. Je ferai remarquer que ces liquides étaient destinés à résoudre des questions de principes. J'ajouterai que lors de l'exécution de mes recherches de statique chimique sur les chlorure et bromure d'argent, j'ai appris à mes dépens la nécessité d'avoir des liqueurs décimes absolument correctes de composition. Je dirai même qu'il m'eût été impossible de reconnaître et d'établir avec certitude les faits consignés dans ces recherches sans disposer de liqueurs décimes parfaites. D'un autre côté, je n'aurais pu atteindre à l'exactitude des résultats que renferment les deux mémoires auxquels ces notes servent de complément, sans des liqueurs décimes irréprochables de composition, c'est-à-dire, renfermant sous l'unité de volume 0,001 d'argent et des quantités de chlorures et de bromures qui y sont exactement proportionnelles, de manière à ne laisser, après la double décomposition, de quantité pondérable de métal, de chlorure ou bromure alcalin libre.

J'ai considéré comme exacte la liqueur décime d'argent préparée en dissolvant directement dans l'acide azotique le métal en vase clos, condition dans laquelle aucune perte d'argent n'est possible et j'y ai comparé la liqueur décime obtenue par la solution de l'azotate d'argent cristallisé et séché à son point de fusion, en me servant pour cette comparaison de la liqueur décime d'acide bromhydrique exactement titré. *Les résultats*

ont été identiques. Or je l'ai dit suffisamment, la recherche de l'argent par un bromure, et la recherche d'un bromure par l'argent peuvent s'exécuter avec une exactitude presque mathématique.

A. De la vérification des liqueurs décimes de chlorures. — Cette vérification est très-difficile à faire, et pour conduire à des résultats exacts, il importe de s'entourer des plus grandes précautions. Après d'assez longs tâtonnements, voici comment je l'ai exécutée : j'ai commencé par me procurer une certaine quantité de chlorure d'argent *pulvérisé*, préparé à l'aide de la méthode que j'ai décrite dans mes *Recherches de statique chimique*, etc. Ce chlorure, après son lavage, avait été conservé pendant plusieurs jours sous l'eau pour amener sa solubilité au *minimum*, et le rapport du chlorure à l'eau était comme *un* est à *cinq*. Après avoir convenablement suspendu le chlorure dans l'eau, j'introduis dans un flacon bouché à l'émeri *cinq* centimètres cubes de la bouillie par *cent* centimètres cubes de capacité. Ce chlorure doit servir à effectuer l'éclaircissement du liquide fortement troublé par la production du chlorure d'argent qui prend naissance lors du mélange des liqueurs décimes.

A l'aide d'un *mesureur* qui est décrit plus bas et figuré planche I, n° I, je fais arriver successivement dans le flacon bouché, enfermé dans un cylindre métallique, *des volumes identiques*, mais compris entre 100 et 500 centimètres cubes de liqueur décime d'argent et de chlorure à vérifier. Après avoir bouché le flacon, et l'avoir entouré d'une double toile noire, on a agité le liquide, dans une chambre obscure, pendant plusieurs heures et on l'a abandonné ensuite vingt-quatre heures à lui-même. Au bout de ce temps on a décanté tout le liquide qu'on a filtré, dans l'obscurité, au travers de l'amiante purifiée et feutrée.

Ce liquide a été partagé ensuite en deux parties : une moitié a été introduite dans un flacon bouché à l'émeri; l'autre moitié a été divisée en deux portions égales dans des vases cylindriques de même diamètre, A et B. J'ai d'une part ajouté au liquide contenu dans le vase A 5 gouttes de liqueur décime d'argent et au liquide versé dans le vase B 5 gouttes de liqueur décime de chlorure alcalin que j'avais employée et que je voulais vérifier. Après cinq minutes d'attente, j'ai jugé du rapport de l'opalescence, présenté par les deux liquides, en me servant, à cet effet, des deux moyens exposés dans mes *Recherches de statique chimique*, et pratiqués pour l'exécution de la seconde méthode décrite dans le premier mémoire.

D'autre part, j'ai placé dans un cylindre en fer blanc, contenant une certaine quantité d'eau, et fermé d'un couvercle, le flacon, bouché à l'émeri, dans lequel j'avais introduit la moitié du liquide filtré. Après avoir enfermé ce cylindre dans une étuve, on a élevé lentement la température de celle-ci jusqu'à 100°, puis on a abandonné le tout à lui-même jusqu'au lendemain.

La faible quantité de chlorure d'argent, en solution dans le liquide filtré, étant passée à l'état de chlorure *grainé*, par l'élévation de la température, et s'étant précipitée par le refroidissement, le liquide éclairci par le repos a été décanté et partagé, à son tour, en

deux portions égales. On a ajouté à l'une d'elles cinq gouttes de liqueur décime d'argent et à l'autre, cinq gouttes de la liqueur décime du chlorure alcalin employé.

Ces deux moyens de contrôle, appliqués à des volumes de liqueurs décimes compris entre *cent* et *trois cents* centimètres cubes et de trois chlorures alcalins indiqués ci-dessus, ont permis de constater que les liqueurs décimes d'argent et des chlorures, se détruisent sans laisser dans l'eau mère, *une quantité appréciable* soit d'argent, soit de chlorure à un état autre que celui de chlorure d'argent. Cette conclusion se rapporte exclusivement à la liqueur décime d'argent faite avec l'argent métallique ou avec l'azotate cristallisé et séché à son point de fusion. J'excepte donc la liqueur décime d'argent obtenue en employant l'azotate d'argent fondu dans un creuset de porcelaine. Cette dernière liqueur décime a laissé après la double décomposition un *excès* d'argent. Du reste ces résultats concordent avec tout ce que j'ai constaté lors des synthèses de l'azotate d'argent, consignées dans mes *Recherches sur les rapports réciproques des poids atomiques*.

**B. De la vérification des liqueurs décimes de bromures.** — Cette vérification ne présente pas de difficulté sérieuse. En effet, le bromure d'argent, quel que soit son état, étant insoluble dans l'eau, jusqu'à la température de 50° au-dessus de zéro, se sépare complètement de l'eau mère, au sein de laquelle il a pris naissance, pourvu qu'on effectue sa production dans un liquide légèrement acidulé.

Je me suis suffisamment expliqué, dans le second mémoire, sur les conditions à remplir pour obtenir l'éclaircissement des liquides et sur la voie à suivre pour rechercher soit la présence de l'argent, soit celle de brome ; je puis donc me dispenser d'entrer ici dans d'autres détails.

J'ai exécuté les vérifications, en recevant successivement des volumes identiques de liqueurs décimes d'argent et de bromure dans un flacon bouché à l'émeri et contenant déjà, par cent centimètres cubes de capacité, cinq centimètres cubes d'une bouillie formée d'eau pure et de 1 gramme de bromure d'argent récemment précipité, et parfaitement lavé dans l'obscurité complète. Avant d'agiter l'essai, j'y ai ajouté, petit-à-petit, 0,005 de son volume d'acide azotique à 1,24 de poids spécifique. Après l'éclaircissement du liquide par l'agitation, suivie d'un repos convenable, j'ai filtré l'eau mère au travers de l'amiante purifiée et feutrée, et ayant partagé le liquide en trois portions, j'ai recherché à l'aide de gouttes exploratrices de liqueurs décimes dans un tiers la présence du brome, dans un autre tiers la présence de l'argent, et j'ai conservé le troisième tiers comme terme de comparaison du degré d'opalescence produit.

À l'aide des moyens consignés pages 47 et 48 du présent mémoire, j'ai jugé des résultats obtenus, et j'ai reconnu, sans doute possible, qu'en opérant sur des volumes de liqueurs décimes s'élevant jusqu'à deux cents centimètres cubes de chacune d'elles, la double décomposition s'effectue sans laisser trace, susceptible d'être évaluée en poids, soit d'argent, soit de brome libre. Ce volume étant *trente* fois plus considérable que celui que j'ai dû employer dans mes déterminations des rapports proportionnels, j'ai considéré comme correcte la composition des liqueurs décimes de bromures alcalins employées, eu

égard surtout à l'incertitude de  $\pm 0,0005$  qui existe sur le poids vrai des bromures dissous.

Pour terminer, j'ajouterai que l'emploi de la liqueur décime d'argent, préparé avec l'azotate d'argent fondu dans un vase où l'air a accès, m'a permis de constater, avec certitude, qu'après la double décomposition, il reste de l'argent dans l'eau mère, fait, du reste, que j'ai suffisamment signalé dans l'exposé de la vérification de la liqueur décime des chlorures alcalins, et qui est ainsi complètement confirmé.

#### Des mesureurs employés aux essais.

En 1866, j'ai soumis à un nouvel examen le système d'appareils, établi dans les Hôtels des monnaies et chez les essayeurs, d'après les prescriptions de Gay-Lussac pour l'*essai des matières d'argent par la voie humide*. A cette époque, j'ai reconnu que la pipette de cette installation, qui sert de mesureur, rend possible, des erreurs très-sensibles et rend difficile un jugement irréprochable du titre des matières d'argent. Ce n'est pas ici le lieu de m'expliquer longuement sur les causes de ces défauts; elles dépendent du reste autant de celui qui se sert de cette pipette que des dispositions qu'elle présente. Je me bornerai donc à dire qu'après une série d'expériences, j'ai fait construire et installer à l'Hôtel des monnaies de Bruxelles des mesureurs dont la capacité a varié de *cent à cinq cent centimètres cubes*. Ces mesureurs ont servi aux travaux consignés dans mes *Recherches de statique chimique* et ils ont fonctionné publiquement depuis 1866 sans interruption en donnant toujours promptement des volumes exacts des liquides mesurés. La raison en est simple : d'après leur construction, ils ne sauraient en fournir d'inexactes, à moins que l'opérateur ne veuille altérer intentionnellement la mesure. Ces appareils ont été installés dans d'autres laboratoires d'essai et même décrits; mais dans leur exécution on s'est écarté de certaines dispositions que je crois indispensables pour fournir, avec certitude à la vidange, toujours le même volume de liquide. Pour ce motif, je vais les décrire brièvement et essayer de justifier les dispositions auxquelles j'ai cru devoir m'arrêter.

Le mesureur se compose d'un gros tube en verre de diamètre et de hauteur en rapport avec la capacité que l'on veut avoir. Aux deux extrémités de ce gros tube sont soudés deux tubes A et B de quatre centimètres de circonférence et d'une longueur suffisante pour compléter la capacité requise.

L'extrémité du tube A, destinée à devenir la partie inférieure du mesureur, est effilée à la lampe en cône tronqué, en ayant soin de ramollir assez de verre pour obtenir un cône à parois aussi épaisses que possible de *quatre centimètres* de longueur et ayant au bout une ouverture de *deux et demi à trois* millimètres de diamètre intérieur. Au lieu d'effiler l'extrémité de ce tube en cône, j'y ai souvent soudé un tube *droit*, à parois épaisses de *quatre centimètres* de longueur et de *deux et demi à trois* millimètres de diamètre intérieur.

Le bout du cône tronqué ou le bout du tube droit, est légèrement fondu à la lampe de manière à l'arrondir et à rétrécir l'ouverture afin de pouvoir amener celle-ci par l'usure à



un diamètre qui permet la vidange de la pipette dans *un temps déterminé*, ainsi que je le dirai plus loin.

L'extrémité du tube B, celui qui doit devenir la partie supérieure de la pipette est terminée en cône tronqué, usé ensuite *plan* et muni d'une ouverture de *demi à deux tiers* de millimètre de diamètre.

Le mesureur est placé verticalement; le remplissage et la vidange s'effectuent par le bas. Pour l'emplir, on adapte, au cône tronqué ou au tube droit, un tube en caoutchouc désulfuré, en communication avec un réservoir, placé sur une tablette fixe, pour le cas de liqueurs normales acides ou salines, ou en communication avec un second appareil, ainsi que je le dirai plus loin, lorsqu'il s'agit de liquides susceptibles d'être altérés par leur contact avec le caoutchouc, comme c'est le cas pour les solutions d'azotate d'argent qui sont rapidement réduites avec dépôt de métal.

Les recherches entreprises par moi ayant eu spécialement pour but l'application de la voie humide aux essais d'argent, mes investigations se rapportent principalement à un mesureur de *cent centimètres* cubes environ de capacité. Sans oser l'affirmer, je pense toutefois que les conséquences qui dérivent de ces recherches sont applicables à des mesureurs de cent à cinq cents centimètres cubes.

On sait que l'eau pure et les solutions aqueuses acides, alcalines, salines, etc., mouillent le verre bien propre. La couche de liquide qui reste momentanément adhérente aux parois d'un cylindre en verre qui se vide par l'écoulement naturel de ce liquide est d'épaisseur variable; à la simple vue, il est facile de s'apercevoir de cette variation. On observe en effet, que par des écoulements lents la couche de liquide adhérente semble rester intacte jusqu'à la vidange complète du cylindre, tandis que, pour des écoulements plus ou moins rapides, il se produit une ou plusieurs solutions de continuité dans la nappe liquide adhérente. On constate, de plus, dans ce dernier cas, que la vidange étant effectuée, elle est suivie immédiatement d'un nouvel écoulement de liquide. Je me suis assuré de l'influence de ces conditions sur le *poids* du liquide qui reste dans le mesureur, après la cessation de son écoulement par *colonne continue*.

Dans ce but, j'ai cherché le changement qu'on constate dans le poids de l'eau qui reste dans un *même* mesureur à ouverture d'écoulement variable.

Pouvant difficilement déterminer le diamètre de l'ouverture à cause de l'irrégularité que présentent les ouvertures, je me suis guidé d'après le nombre des secondes qu'exige la vidange complète de la pipette.

Il est sans intérêt pour la science d'exposer les résultats numériques de toutes les expériences que j'ai fait exécuter pour élucider cette question. Il suffira de dire qu'avec une ouverture qui permet la vidange de cent centimètres cubes en *dix à douze secondes*, le poids du liquide resté dans le mesureur varie du simple au double et que, sur dix essais, il y en a *quatre à cinq* qui échouent, parce que *immédiatement* après l'écoulement du liquide en un seul jet, il tombe une nouvelle quantité de liquide.

Pour qu'il y ait un commencement de régularité dans les poids du liquide resté dans le mesureur, il faut que l'ouverture d'écoulement de celui-ci soit telle que la vidange

exige au *minimum vingt-cinq secondes* pour s'accomplir. Dans cette condition, après l'écoulement par un seul jet, il se passe *trois minutes* avant que le mesureur laisse échapper une partie du liquide descendu des parois. Les mesureurs confectionnés par des constructeurs qui ont voulu reproduire les appareils tels que je les ai établis, ont des ouvertures telles qu'ils débitent leur contenu dans l'espace de *quatorze à dix-sept secondes*. D'après mon expérience, ces instruments ne peuvent pas fournir des volumes toujours identiques.

Les mesureurs que j'ai construit et que j'ai fait construire, tant pour mes expériences personnelles que pour le service de l'Administration des Monnaies de Bruxelles, se vident dans l'espace de *vingt-neuf à trente et une secondes*.

On arrive très-promptement à ce résultat en donnant initialement à l'ouverture d'écoulement de la pipette un diamètre inférieur à celui qu'elle doit avoir et en usant ensuite, *avec de l'émeri et de l'eau*, sur une surface concave d'acier, les bords arrondis de l'ouverture. De cette manière le diamètre s'agrandit lentement. Avec un peu d'habitude, il est facile de se procurer des mesureurs qui, complètement remplis, se vident, dans le même temps *à une seconde près*, bien entendu lorsqu'ils ont été au préalable bien nettoyés, afin que leurs parois se mouillent et retiennent également les liquides.

Pour opérer ce nettoyage le meilleur moyen consiste à y chauffer jusqu'à près de l'ébullition un mélange à volumes égaux d'acides sulfurique et azotique concentrés.

Les parois ainsi traités conservent longtemps la faculté de se mouiller et de retenir la couche de liquide, pourvu qu'on n'introduise pas dans le mesureur un liquide qui a passé le long d'une surface graissée, comme c'est le cas de l'ouverture d'une clé de robinet de métal ou de verre graissée, ou qui a été en contact avec des tubes en caoutchouc brut. Les tubes en caoutchouc destinés à être mis en communication avec les liquides et le mesureur doivent, pour pouvoir servir convenablement, être maintenu longtemps dans une solution diluée et bouillante de soude caustique.

Les clés métalliques ou en verre, adaptées aux tubes conducteurs dans beaucoup de laboratoires d'essai des matières d'argent, entraînent rapidement des inégalités très-sensibles dans le poids du liquide retenu par le mesureur, après sa vidange. A plusieurs reprises, j'ai attiré sur ce fait l'attention des personnes qui sont venues examiner les appareils installés aux laboratoires des essais de la Monnaie de Bruxelles; mais l'esprit de routine, pour ne pas dire plus, est tel que mes recommandations n'ont pas été prises en considération. Si donc j'exprime ici des critiques au sujet des installations faites par certains constructeurs, tant au point de vue de l'ouverture d'écoulement donnée aux mesureurs qu'ils construisent, que sous le rapport de l'emploi de robinets, ils doivent s'en prendre à eux-mêmes. J'ajouterai qu'il n'est pas correct de donner le nom d'une personne à un appareil, lorsque cet appareil est construit dans les conditions autres que celles indiquées par elle.

Voici toutes les données obtenues par M. Nyst pour le mesureur, construit d'après mes indications par M. Remkes, d'Utrecht (Hollande). Ce mesureur, qui est terminé en bas par un tube droit, à bout parfaitement arrondi, a servi à la vérification de toutes les

liqueurs décimes employées pour les recherches consignées dans le présent travail. Il se vide entre trente et trente et une secondes.

- 1° Poids de la pipette pleine d'air saturé d'humidité à 20°5 Ho = 769.1 . . . . . 58<sup>gr</sup>,580.7
- 2° Poids d'une fermeture en caoutchouc destinée à la pesée de la pipette pleine d'eau <sup>1</sup>. . . . . 1<sup>gr</sup>,790.5
- 3° Poids de la pipette, munie de la fermeture en caoutchouc et pleine d'eau pure à 20°7 . . . . . 160<sup>gr</sup>,568.5
- 4° Poids de la pipette et de l'eau retenue après sa vidange *dans la position verticale et dans une immobilité complète* :

1° 58 <sup>gr</sup> ,579.0		6° 58 <sup>gr</sup> ,579.5
2° 58 <sup>gr</sup> ,580.0		7° 58 <sup>gr</sup> ,576.5
3° 58 <sup>gr</sup> ,579.0		8° 58 <sup>gr</sup> ,579.5
4° 58 <sup>gr</sup> ,579.0		9° 58 <sup>gr</sup> ,577.0
5° 58 <sup>gr</sup> ,580.5		10° 58 <sup>gr</sup> ,578.0

Poids moyen : **58<sup>gr</sup>,578.8.**

Il résulte de ces données que

- 1° Le poids de l'eau à 20°7 est égal à . . . . . 100<sup>gr</sup>,519.2
- 2° Le volume de cette eau à 20°7 . . . . . 100<sup>cc</sup>,510.0
- 3° Le poids moyen de l'eau restée dans le mesureur est . . . . . 0<sup>gr</sup>,198.1

Avec un écart de son contenu en eau de  $\pm 0,00002$ .

Les mesureurs qui ont été employés lors de mes recherches de statique chimique et qui servent actuellement encore aux laboratoires des essais de la Monnaie de Bruxelles, ont été vérifiés avec le même soin.

Voici du reste les résultats obtenus par M. Nyst pour la pipette employée par lui; elle est terminée en bas en cône tronqué de trois et demi centimètres de longueur. Sa vidange s'accomplit entre *vingt-neuf et trente secondes*.

Après l'écoulement de l'eau dans une position *immobile*, le poids du mesureur, avec l'eau retenue, a été trouvé

1° 48 <sup>gr</sup> ,566.5		6° 48 <sup>gr</sup> ,569.5
2° 48 <sup>gr</sup> ,565.5		7° 48 <sup>gr</sup> ,568.0
3° 48 <sup>gr</sup> ,568.0		8° 48 <sup>gr</sup> ,567.0
4° 48 <sup>gr</sup> ,567.0		9° 48 <sup>gr</sup> ,569.5
5° 48 <sup>gr</sup> ,567.0		10° 48 <sup>gr</sup> ,569.0

L'écart moyen est donc de  $\pm 0,00002$ .

<sup>1</sup> Cette fermeture se compose d'un petit tube en caoutchouc, muni à l'un de ses bouts d'un petit tube bouché en verre.

Le mesureur dont dispose M. Cabillaud est terminé en bas par un tube droit; il est identique à celui dont je me suis servi et se vide en *trente secondes*.

Après l'écoulement de l'eau, la pipette étant dans une position *immobile*, le poids du mesureur avec l'eau retenue, a été trouvé :

1°	50 <sup>gr</sup> ,918.5		6°	50 <sup>gr</sup> ,917.5
2°	50 <sup>gr</sup> ,916.4		7°	50 <sup>gr</sup> ,914.2
3°	50 <sup>gr</sup> ,914.6		8°	50 <sup>gr</sup> ,914.4
4°	50 <sup>gr</sup> ,917.2		9°	50 <sup>gr</sup> ,915.8
5°	50 <sup>gr</sup> ,918.4		10°	50 <sup>gr</sup> ,917.6

L'écart moyen est  $\pm 0,0000205$ .

On le voit, ces trois mesureurs construits par M. Remkes à des époques bien différentes, se vident dans le même temps, et après la vidange, chacun d'eux présente le même poids moyen à  $\pm 0,00002$ ; preuve que le poids de l'eau retenue est constant dans la même limite. Pour des mesureurs de la forme cylindrique et des dimensions indiquées dans la figure n° 1, ci-jointe, ce poids est égal à  $\frac{1}{500}$  du poids de l'eau qui remplit la pipette.

Au point de vue de l'emploi des mesureurs destinés aux essais des matières d'argent, qui a été le but que j'ai poursuivi en entreprenant ces recherches, il n'y a aucun avantage à réduire au-dessous de la limite de  $\frac{1}{500}$  le poids du liquide retenu après la vidange; il y a, au contraire, grand inconvénient à le faire, parce que cette réduction ne peut s'obtenir qu'en augmentant notablement le temps requis pour l'écoulement du liquide, et que cette réduction de poids n'a pas pour effet de produire une diminution proportionnelle dans l'écart moyen observé.

En se servant d'un mesureur, qui se vide en trente secondes, on peut emplir et vider la pipette en *une minute* de temps.

Pour réduire au *minimum* le poids du liquide retenu par une pipette de cent centimètres cubes de capacité, l'écoulement doit durer de quatre à cinq minutes, temps qui, dans la pratique des essais d'argent, ne peut pas être consacré à l'opération de la vidange. En effet, dans ce cas, il faut, ainsi que je l'ai constaté, au minimum *sept minutes* pour emplir et vider le mesureur.

Dans les recherches de laboratoire on n'y gagnerait rien en exactitude de mesure, à moins qu'il ne s'agisse de faire sortir du mesureur la plus grande quantité possible du liquide qu'on y a introduit.

*De la position à donner aux réservoirs des liquides par rapport aux mesureurs.* — Il ne suffit pas d'avoir des mesureurs qui, après leur vidange, retiennent des poids constants de liquide, il faut encore, pour rendre les résultats comparables, que le poids du liquide, qui y pénètre, reste le même pendant qu'on emplit et vide successivement un grand nombre de fois le mesureur.

Pour approcher autant que possible de ce résultat, il est nécessaire que :

1° Le réservoir du liquide et le mesureur soient aussi éloignés des murs que le permettent les dimensions de la place dans laquelle ils sont installés ;

2° La différence entre le niveau du liquide contenu dans le réservoir et le haut du mesureur ne dépasse pas dix centimètres.

L'observation prouve que la température de l'air d'une salle n'est pas la même partout ; elle augmente à mesure qu'on s'élève du sol et diminue du centre vers les murs. Près des murs, elle est plus variable que vers le milieu. Lorsqu'on installe les appareils au milieu d'une salle, ils se trouvent donc dans une zone d'air où la différence de température est la moins grande. Pour ce motif, je fais amener au milieu de la chambre la table qui supporte le réservoir et le mesureur, qui est fixé dans un anneau soudé à une tige mobile ou dans une pince, qu'on peut à volonté élever ou descendre.

La position du mesureur est réglée de manière que, au commencement d'une série d'essais, le niveau du liquide contenu dans le réservoir dépasse au maximum dix centimètres le haut de la pipette. La figure n° 2 représente cette installation. Ces dispositions ont été scrupuleusement observées dans tous les essais consignés dans mes recherches de statique chimique et de la vérification des liqueurs décimes.

J'ai reconnu, de plus, que pour assurer la constance de la température, il est nécessaire de soustraire les appareils au rayonnement du corps de l'opérateur ; on arrive à ce résultat en enveloppant d'un tissu de laine blanc et épais, le réservoir et le mesureur, comme cela se pratique pour les calorimètres ; on peut garantir ainsi le maintien de la température à  $\pm 0^{\circ},1$ .

Dans les laboratoires d'essai des matières d'argent, on place généralement le réservoir de la liqueur normale contre les murs et à la partie la plus élevée de la salle. J'ai constaté que dans ces positions, il peut y avoir pendant l'été entre la température d'un liquide au niveau du mesureur et celle de la liqueur normale, une différence de six et même de huit degrés. Ces installations conduisent fatalement à des grandes incertitudes sur le poids spécifique de la liqueur normale qu'on suppose constant pendant qu'on emplit et vide successivement un grand nombre de fois le mesureur.

Je remplace les robinets en métal ou en verre qui exigent l'intervention de corps gras, par une pince plate, s'ouvrant par la pression exercée à volonté à l'aide des doigts. La figure n° 3 représente la pince en grandeur naturelle. Les deux branches en métal qui la composent sont maintenues par des anneaux de caoutchouc ; elles se meuvent autour d'un petit cylindre en verre ou en acier.

Pour le remplissage du mesureur, on adapte à sa partie inférieure, le tube en caoutchouc qui est attaché au siphon plongé dans le mesureur et, afin d'éviter le jaillissement du liquide par la pointe qui termine le mesureur, on met cette pointe en communication avec un tube en caoutchouc qui conduit l'excédant de liquide dans un flacon.

En prenant ces dispositions il peut découler encore quelques gouttes de liquide le long du mesureur ; pour ce motif on engage à l'aide d'un bouchon en caoutchouc dans une soucoupe de verre trouée, le tube terminal de la pipette, ainsi que le montre la figure n° 2.

Pour procéder à la vidange du mesureur, on commence par enlever le tube en caoutchouc adapté au sommet de la pipette, ensuite on applique le doigt sur l'ouverture qu'elle présente et on détache le bout du tube en caoutchouc, adapté à sa partie inférieure, en exerçant à la fois une *pression* sur une portion du tube en caoutchouc rempli de liquide et une *traction* sur le bout de ce tube.

Si l'on se borne à exercer une traction seulement sur le tube en caoutchouc, on risque de faire pénétrer une petite bulle d'air dans le mesureur. Cet inconvénient ne se présente jamais, si l'on a soin de détacher le tube en caoutchouc avec pression et traction simultanées.

En enlevant ensuite le doigt appuyé sur le sommet du mesureur, celui-ci se vide naturellement.

*De la mesure des liquides altérables par leur passage au travers d'un tube en caoutchouc.* — Une liqueur normale ou décime d'azotate d'argent est réduite par son passage au travers d'un tube en caoutchouc.

La vérification de ces liqueurs exige donc un dispositif d'appareils différent. Pour être certain de l'unité de mesure, il est indispensable de se servir d'une seule et même pipette. Lors des vérifications que j'ai faites, j'ai eu recours à plusieurs moyens. Celui qui m'a fourni les résultats les plus constants et que je considère comme préférable, consiste dans la disposition que représente la figure n° 4, planche II.

L'appareil comprend :

- 1° Un mesureur;
- 2° Un tube courbé en U ;
- 3° Un siphon muni d'un robinet en verre et d'un tube terminal de quatre à cinq centimètres de longueur ;
- 4° Un réservoir contenant le liquide à faire pénétrer dans le mesureur.

On munit d'un bouchon de caoutchouc le gros tube inférieur du mesureur, ainsi que le tube terminal du siphon. Après avoir, au préalable, amorcé le siphon et fermé le robinet, on adapte à ces bouchons le tube en U.

En tournant la clé du robinet, le liquide débité, après avoir rempli la partie courbée du tube en U monte dans ses deux branches verticales. Comme les tubes qui terminent le mesureur et le siphon descendent de 5 à 4 centimètres dans les branches de l'U, le liquide, en remontant dans la pipette, ne saurait toucher le caoutchouc des bouchons. Il en reste, en effet, séparé par un coussin d'air de 2 à 3 centimètres de hauteur.

Dès que la pipette est remplie, on tourne la clé du robinet, et après avoir appliqué un doigt sur l'ouverture supérieure du mesureur, on détache le tube en U du système. En enlevant le doigt, le liquide contenu dans la pipette s'écoule dans le flacon placé au-dessous de l'appareil.

Lors des vérifications que j'ai faites des liqueurs décimes, j'ai exécuté pour chacune d'elles *trois* essais de contrôle. Pour les effectuer, j'ai adapté de nouveau le tube en U aux bouchons et après avoir rempli le mesureur, ainsi qu'il est dit, ci-dessus, j'ai fermé à l'aide

du doigt, son ouverture supérieure, j'ai séparé le tube en U et j'ai reçu dans un flacon le liquide qui s'est écoulé en enlevant le doigt.

En *cinq* minutes de temps, on peut prendre ainsi trois fois un volume identique de liquide à température constante à  $\pm 0^{\circ},1$  près, surtout si l'on prend soin d'entourer convenablement le mesureur, le réservoir et les tubes d'un tissu épais de laine blanche pour les soustraire au rayonnement du corps.

Lors de la vérification des liqueurs décimes, j'ai commencé toujours par prélever en premier lieu la liqueur décime d'argent, et pour être certain de l'identité de température de la liqueur décime de chlorure ou de bromure, ainsi que de l'eau nécessaire au lavage du mesureur, les flacons renfermant les liquides à employer, ont été placés la *veille* dans la chambre obscure et l'appareil monté de manière à pouvoir fonctionner immédiatement le *lendemain*. Pour exécuter les opérations, j'ai procédé ainsi qu'il suit :

Après avoir pris trois fois un volume identique de liqueur décime d'argent, j'ai rempli, à *trois* reprises différentes, le mesureur d'eau pure, pour enlever les dernières traces d'azotate d'argent, puis j'ai rempli également à *trois* reprises différentes le mesureur de la liqueur décime de chlorure ou de bromure que je voulais vérifier.

Enfin, j'ai prélevé successivement *trois fois* un volume identique de liqueur décime, que j'ai laissé couler ensuite dans les flacons d'essai contenant déjà la solution décime d'argent.

Lorsque tous les préparatifs sont faits, ainsi que je viens de le dire, on peut, en *vingt-sept à trente* minutes de temps, terminer les mesurages nécessaires pour faire trois essais. Si l'on prend la précaution de ne laisser pénétrer dans la salle qu'un aide, on constate que la température des liqueurs décimes mises en expériences ne varie point au delà de la limite de  $\pm 0^{\circ},1$  indiquée ci-dessus.

J'ai exposé plus haut comment j'ai procédé à la vérification des liqueurs décimes ; il est inutile de revenir encore sur ce sujet. Je dirai seulement que, n'était-ce l'incertitude qui existe sur la pureté absolue des substances mises en expérience, mes moyens de contrôle permettraient de résoudre la question des rapports proportionnels entre l'argent, les chlorures et les bromures en opérant sur des masses relativement *faibles*.

---

### NOTE 3.

---

#### DES PIPETTES GRADUÉES.

L'impossibilité dans laquelle je me suis trouvé de me procurer chez les constructeurs des pipettes graduées exactement, m'a forcé de confectionner moi-même celles qui ont servi à mes recherches. J'engage les chimistes qui seraient surpris de mon insuccès à

vérifier les pipettes construites pour l'usage des laboratoires ; cette vérification justifiera à leurs yeux le parti que j'ai pris, au risque d'y consacrer un temps que je pouvais mieux utiliser.

J'ai employé trois sortes de pipettes graduées.

1° Une pipette type donnant exactement un centimètre cube à 15 degrés ;

2° Des pipettes de trois centimètres cubes ;

3° Des pipettes de cinq centimètres cubes ;

La pipette *type* de un centimètre cube m'a servi à la confection des autres. Pour me procurer ce type, j'ai pris un tube de verre assez étroit, pour qu'un centimètre cube y représente une longueur de colonne de 150 à 160 millimètres.

J'ai effilé convenablement un des bouts du tube, et j'y ai fait bouillir ensuite un mélange à volumes égaux d'acides sulfurique et azotique concentrés, après avoir lavé à l'eau pure, j'ai pesé dans le tube, dont les parois étaient préalablement mouillées, d'abord 0<sup>gr</sup>,4989 représentant le poids d'un demi-centimètre cube d'eau pesé à l'aide de poids de platine, ayant placé le tube sur une machine à diviser dont la température était de 15 degrés, j'ai donné un trait au diamant, au point d'arrêt de la colonne. J'ai pesé ensuite dans la tube 0<sup>gr</sup>,9978 d'eau représentant le poids, déterminé par des poids en platine, d'un centimètre cube d'eau à 15 degrés <sup>1</sup>, ayant replacé le tube sur la machine à diviser dont la température était 15 degrés, j'ai donné un second trait, au diamant, au point d'arrêt de la colonne. Les vérifications auxquelles j'ai soumis des tubes, confectionnés dans ces conditions, m'ont permis de constater qu'on peut répondre de l'exactitude de la capacité à deux dixièmes de millimètre cube. Placé immobile dans une position verticale, la pointe effilée en bas, ce type laisse écouler spontanément 0<sup>gr</sup>,908 d'eau et en retient 0<sup>gr</sup>,090 à  $\pm$  0<sup>gr</sup>,0005. Pour déplacer cette eau retenue, il suffit d'adapter à l'autre bout un tube en caoutchouc ouvert et d'exercer sur celui-ci une pression, après en avoir fermé le bout libre. En pesant la pipette vidée ainsi, on retrouve le poids constaté primitivement avec ses parois mouillées à — 0<sup>gr</sup>,0002 représentant une différence deux fois plus forte seulement de l'erreur probable de la pesée.

Les pipettes de trois et de cinq centimètres cubes ont été confectionnées d'après la méthode suivante : on prend un tube de verre d'un diamètre intérieur tel qu'un centimètre cube est représenté par une longueur de colonne d'environ cinquante millimètres, c'est-à-dire une longueur de colonne du tiers de celle du type.

Après avoir convenablement effilé un des bouts du tube, on fonce légèrement les bords de l'ouverture capillaire de manière à rétrécir tant soit peu celle-ci, et on use ensuite, à l'aide de l'émeri, sur une surface plane de verre, le bout de sorte d'amener l'ouverture élargie aussi, à débiter à la convenance de l'opérateur vingt, ou vingt-cinq gouttes par

<sup>1</sup> Une pesée exacte d'un poids voulu d'eau dans un tube ouvert par ses deux extrémités, mais dont l'une est terminée en pointe effilée, ne présente aucune difficulté. Pour exécuter cette pesée, il suffit d'introduire dans le tube un poids d'eau supérieur à celui que l'on doit avoir, de poser ensuite le tube horizontalement sur le plateau de la balance. En touchant à l'aide de papier à filtre la pointe capillaire, on détermine très-rapidement la diminution voulue de poids.



centimètre cube d'eau, *la pipette étant fixée dans la position verticale*. Pour exécuter cette opération fastidieuse, on reçoit dans une *jauge* de la capacité d'un centimètre cube les vingt ou les vingt-cinq gouttes fournies par la pipette <sup>1</sup>. Lorsqu'en a réglé le débit de la pipette par goutte, on procède à la graduation par centimètre cube.

Cette opération ne présente de difficulté que pour le trait limitatif du centimètre qui comprend la capacité de la partie effilée de la pipette. Pour chercher le point où il doit être tracé, voici les dispositions que j'ai prises et qui ont été suivies pour la confection de toutes les pipettes : après avoir couvert d'une couche d'eau normale le tube à graduer, je fixe celui-ci latéralement contre une rainure triangulaire pratiquée dans une règle en laiton divisée en millimètres sur toute sa longueur et munie à l'un de ses bouts d'un ressort à boudin, qui se meut dans une coulisse et qui est terminée par un plan de métal couvert de cuir imprégné de corps gras.

Le système étant placé dans une position à peu près horizontale, on introduit, à l'aide de la pipette type, un centimètre cube d'eau dans le tube, et on soulève le tout de manière à faire arriver le liquide jusqu'à l'extrémité de la partie effilée du tube. On amène ensuite le cuir adapté au plan de métal poussé par le ressort à boudin contre le bout effilé de manière à boucher l'ouverture,

Lorsqu'on a rendu fixes le plan avec le cuir, ainsi que le tube, on donne, à l'aide d'un diamant, un trait à l'endroit même où l'on veut couper plus tard le tube. Ce trait sert de point de repère pour s'assurer de l'invariabilité de sa position par rapport aux divisions tracées sur la règle. Cela étant fait, on place la règle dans la position verticale, et après *trois minutes* d'attente, on cherche, à l'aide d'une lunette munie d'un micromètre, le niveau de la colonne liquide par rapport aux divisions de la règle.

En se servant de la pipette type, on introduit un deuxième centimètre cube d'eau dans le tube, et après une nouvelle attente de *trois minutes* on cherche encore le niveau de la colonne en fonction des divisions de la règle, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait le nombre de centimètres cubes qu'on veut tracer sur le tube.

On place ensuite le système sur la machine à diviser, et après avoir reconnu l'invariabilité de la position du tube, on trace, à l'aide d'un diamant qui raye sans couper, les traits limitatifs des différents centimètres.

On a subdivisé, en *vingt* ou en *vingt-cinq* parties égales, l'espace compris entre les deux premiers traits, suivant que les pipettes avaient été arrangées pour donner ou *vingt*, ou *vingt-cinq* gouttes par centimètre cube. On a agi ainsi pour avoir un moyen de con-

<sup>1</sup> Cette *jauge* se compose d'un tube fermé par une de ses extrémités, et d'un diamètre tel qu'un centimètre cube y représente une longueur de colonne d'au moins 100 millimètres. Au bout ouvert de la *jauge* on soude un tube de quinze millimètres de diamètre et de hauteur, on trace sur toute la longueur du tube étroit une division en *millimètres*. Après avoir couvert, au préalable, les parois internes du tube de la couche normale d'eau qu'il retient après sa vidange par aspiration à l'aide d'un tube capillaire, et sans dessiccation, on y introduit, au moyen de la pipette type un centimètre cube d'eau et l'on observe le point d'arrêt de la colonne liquide. En répétant cinq fois la vidange et le remplissage et se servant d'une lunette munie d'un micromètre, et en pesant successivement la *jauge* vide et avec l'eau, on constate aisément que la différence ne dépasse jamais deux dixièmes de millimètre de l'échelle ou deux dixièmes de millimètre cube.

trôle des *gouttes exploratrices* qu'on a toujours prélevées sur le premier centimètre cube.

Les pipettes de cinq centimètres cubes de capacité, débitent vingt-cinq gouttes par centimètre cube dans une *position verticale*, se vident par un jet continu en six ou sept secondes. Au bout de deux à trois minutes, elles laissent tomber de nouveau deux gouttes de liquide et en retiennent une quantité représentée par *environ* trois gouttes. Pour vider complètement ces pipettes, il est nécessaire, *après une attente préalable de trois minutes*, de chasser à l'aide d'une colonne d'air, le liquide retenu dans la partie effilée. On arrive à ce résultat, en adaptant à son extrémité supérieure, un tube en caoutchouc, muni à l'autre bout d'un tube de verre sur lequel le doigt indicateur peut ainsi se poser.

Le tube en caoutchouc est maintenu droit à l'aide d'une tringle mobile de laiton. Cette tringle s'engage d'une part dans un anneau de laiton serré sur le bout du tube en caoutchouc appliqué sur la pipette, et d'autre part dans un anneau de laiton serré sur le bout du tube en caoutchouc dans lequel on a fait pénétrer un tube de verre, ainsi que du reste le montre la figure n° 3, planche II. Pour vider entièrement la pipette, il suffit d'appuyer l'indicateur sur le bout de tube ouvert et de comprimer, à l'aide du pouce et du doigt du milieu, la partie libre du tube en caoutchouc.

J'insiste sur le fait qu'il est indispensable d'attendre TROIS MINUTES avant de chasser le liquide retenu dans la partie capillaire de la pipette.

En déplaçant ce liquide immédiatement après la vidange par un jet continu, on court le risque de commettre une erreur de deux gouttes par pipette vidée. Comme il arrive qu'il est nécessaire de renouveler un grand nombre de fois les additions de liqueurs décimes, on est exposé à se tromper en somme d'un demi-centimètre cube sur le volume employé en réalité, et à coup sûr d'une quantité au minimum *décuple* de celle dont on peut constater la présence dans une expérience bien faite.

---

#### NOTE 4.

---

##### DE LA PRÉPARATION DE L'ACIDE BROMHYDRIQUE TYPE.

J'ai dit dans le texte du mémoire que « l'acide bromhydrique type a été préparé par l'action de l'acide sulfhydrique sur le bromure d'argent pur, suspendu dans un volume suffisant d'eau. Le bromure d'argent employé à cet effet a été produit en précipitant à froid un excès de solution saturée de bromure de potassium, complètement dépouillé d'iode, par une solution diluée au centième d'azotate d'argent fondu. »

Voici comment on a opéré : on a commencé d'abord par éliminer l'iode que le bromure de potassium fourni par les fabriques de produits chimiques contient presque toujours. A cet effet, on a fait arriver petit à petit du brome au fond d'une solution bouillante et saturée de bromure de potassium, jusqu'à ce que l'iode devenu libre se fût complètement redissous et transformé en tribromure.

La solution, placée dans une bonne cheminée d'appel, fut évaporée jusqu'à siccité, et le résidu fut fondu dans un grand creuset de plombagine et coulé ensuite en plaques.

Quinze cents grammes de ce bromure furent repris par de l'eau froide et la solution saturée, après vingt-quatre heures d'exposition à l'air, pour la laisser se dépouiller du fer qu'elle avait emprunté au creuset de plombagine, fut filtrée et très-faiblement acidulée à l'acide azotique.

Cette solution a été divisée en deux parties égales; chacune d'elles a été introduite dans une bonbonne de soixante litres de capacité, et additionnée petit à petit sous l'influence d'une vive agitation, de quarante litres de solution d'azotate d'argent au  $\frac{1}{100}$  de métal. Il restait ainsi de libre près de la moitié du bromure employé.

Pour être certain de l'absence du chlorure d'argent dans le bromure produit, on a maintenu le précipité en suspension pendant une demi-heure dans l'eau mère; à cet effet, on a fait passer au travers de la masse un courant gazeux, à l'aide d'une pompe à air.

Après un repos de douze heures on a décanté l'eau mère, et on a réuni dans une seule bonbonne tout le précipité. On a procédé dans une chambre obscure au lavage complet de bromure, ce qui a été une opération longue et très-difficile à exécuter convenablement, parce que le bromure d'argent, une fois qu'il est arrivé à l'état pulvérulent, produit une bouillie dont l'eau se sépare très-lentement. Quoi qu'il en soit, on a ajouté au précipité, aussi bien dépouillé que possible de son eau mère, deux fois son volume d'eau distillée acidulée par un demi pour cent de son volume d'acide azotique à 52°, et on a soumis, par fractions de *deux litres* à la fois, le tout à une vive agitation pendant dix à quinze minutes. Après le dépôt du précipité et la décantation de l'eau surnageante, on a recommencé ces opérations à dix reprises différentes, en se servant toujours de l'eau acidulée pour empêcher autant que possible le délayement.

On a remplacé ensuite l'eau acidulée par de l'eau pure, et on a continué les lavages jusqu'à ce que l'eau décantée n'eût plus de réaction acide, et ne se troublât plus par l'addition de la liqueur décime d'argent. *Ce dernier résultat ne peut être atteint qu'en opérant les lavages dans l'obscurité.* L'opération, pour être terminée, a exigé près de six semaines de travail et de soins.

La bouillie de bromure lavée, additionnée de son volume d'eau, a été partagée en trois flacons de six litres de capacité, et soumise à un courant d'acide sulfhydrique jusqu'à refus, pendant qu'on maintenait le bromure en suspension à l'aide d'un mouvement imprimé au flacon.

On a atteint ce résultat, sans être incommodé par l'acide sulfhydrique, en adaptant au flacon librement suspendu un bouchon en caoutchouc, muni de deux tubes, engagés l'un et l'autre dans des tubes longs en caoutchouc; l'un de ces tubes amenait le gaz sulfhy-

drique dans le liquide, et l'autre conduisait le gaz non utilisé dans une bonne cheminée d'appel.

L'acide sulfhydrique a été produit par l'action de l'acide sulfurique dilué sur du sulfure ferreux *fondus*. Avant d'être conduit dans le flacon au bromure, il traversait un appareil rempli de pierre ponce concassée et pénétrée d'une solution concentrée de sulfhydrate de sodium.

Lorsque l'action de l'acide sulfhydrique était épuisée, le liquide acide a été décanté et remplacé par son volume d'eau, et on a fait passer encore de l'acide sulfhydrique jusqu'à refus dans le mélange de bromure et de sulfure d'argent.

L'acide bromhydrique dilué ainsi obtenu fut réuni et soumis par partie à la fois à la distillation, en ayant la précaution de recueillir chaque fois à part les premières portions formées d'eau à peine acide.

L'acide distillé était absolument incolore et s'est conservé en cet état, étant exposé, dans un flacon en vidange, à la radiation solaire directe.

Il se colore lorsqu'on débouche le flacon dans un air contenant des vapeurs nitreuses.

---

## N E 5.

---

### DE LA PRÉPARATION DE L'ACIDE BROMHYDRIQUE DESTINÉ AUX ESSAIS DES MATIÈRES D'ARGENT.

Pour me procurer cet acide bromhydrique, j'ai fait réagir du brome sur de l'eau tenant du phosphore rouge en suspension en recourant à la distillation pour séparer l'hydracide de l'acide phosphorique produit. J'ai employé à cet effet le brome du commerce, dont j'avais au préalable séparé le chlore et l'iode qui y existent presque toujours.

J'ai réalisé cette séparation en distillant le brome dissous dans une solution saturée de bromure de potassium tenant de l'oxyde de zinc en suspension.

Voici comment je m'y suis pris pour purifier le brome et pour le transformer ensuite en acide bromhydrique.

#### 1° *Purification du brome.*

A l'aide de la méthode décrite dans la note précédente, j'ai éliminé d'abord du bromure de potassium que je voulais employer l'iode qui y était contenu. Je me suis procuré d'autre part de l'oxyde de zinc grenu peu attaqué par le brome, afin de perdre le moins possible de ce corps, qui se fixe aisément sur l'oxyde de zinc très-divisé.

On a préparé l'oxyde de zinc grenu en chauffant au rouge vif de l'azotate basique de

zinc, qui se produit aisément en dissolvant une partie de blanc de zinc dans l'acide azotique à 1,20 de poids spécifique, et en ajoutant la solution à deux parties de blanc de zinc. Sous l'influence de l'agitation l'oxyde s'unit à l'azotate avec l'élévation de température, et le tout se prend en masse dure. Cette masse, chauffée au blanc, produit un oxyde sur lequel le brome dissous dans un bromure n'agit que lentement, mais qui ramène instantanément le bromure d'iode en iodate et bromoxyde de zinc insolubles.

J'ai procédé à la distillation du brome dissous dans la solution de bromure de potassium tenant l'oxyde de zinc en suspension, à l'aide de deux appareils différents.

Le premier se compose : 1° d'un ballon de six litres, placé dans une position de 45 degrés dans une étuve à air chaud que j'ai décrite et figurée dans mes *Nouvelles recherches sur les lois des proportions chimiques*. Ce ballon est muni d'un bouchon de verre usé à l'émeri dans le col. Le bouchon est percé de deux trous ; par l'un des trous passe un tube droit effilé fermé à l'extérieur, ouvert à l'intérieur, et plongeant dans le liquide contenu dans le ballon ; l'autre trou est traversé par un tube courbé à 45 degrés, usé à l'émeri dans le bouchon. La branche verticale du tube courbé s'engage dans un tronçon de cylindre large de 2 centimètres et long de 15 centimètres, ouvert par les deux bouts, mais dont le diamètre du bout inférieur est rétréci à peu près à la dimension du tube qui y est engagé. Ce cylindre est rodé à l'émeri par sa partie inférieure dans la tubulure d'une cornue contenant de l'eau pure. Le tube, qui traverse le tronçon de cylindre, plonge de quelques millimètres dans cette eau.

La cornue est placée dans un vase métallique rempli d'eau, et celui-ci est supporté par un fourneau à gaz.

Le col de la cornue est usé à l'émeri dans le col d'un grand récipient tubulé, maintenu froid et contenant une certaine quantité d'eau pure, destinée à couvrir le brome distillé.

La tubulure du récipient est muni d'un bouchon en verre usé et percé. Dans l'ouverture du bouchon passe un tube en verre rodé, doublement recourbé, ouvert par les deux bouts et muni dans la branche descendante d'une grande boule. Ce tube pénètre dans un flacon et plonge de 2 à 5 millimètres dans de l'eau contenant du phosphore rouge, qu'on y maintient en suspension à l'aide de l'air qu'on y a fait continuellement passer bulle à bulle. Le brome qui échappe à la condensation se transforme ainsi en acide bromhydrique, au fur et à mesure qu'il se dissout dans l'eau ou y descend à l'état liquide.

Dans le ballon de l'appareil décrit ci-dessus, on a introduit un kilogramme de bromure de potassium dépouillé d'iode, et cent grammes d'oxyde de zinc grenu, et on a ajouté de l'eau jusqu'à ce que à peu près tout le bromure fût dissous. On a fait arriver ensuite au fond du ballon *seize cents grammes de brome lavé préalablement à quatre reprises différentes à l'eau*, pour le priver autant que possible de chlore et d'iode.

La branche descendante du tube recourbé à 45 degrés décrit ci-dessus, ayant été introduite dans la cornue en passant par le tronçon de cylindre, on a rempli l'espace vide de pierre-ponce concassée, et afin d'empêcher la vapeur de brome de s'échapper dans l'air, on a collé du plâtre gâché d'eau de manière à remplir complètement tous les interstices.

On a porté ensuite lentement à l'ébullition le brome dissous dans le bromure de potassium et en même temps on a élevé vers 65° l'eau contenue dans la cornue servant de flacon

de lavage. On a refroidi soigneusement le récipient. Le brome s'est dégagé avec la plus grande facilité et sa vapeur s'est lavée comme un gaz en passant par l'eau. Lorsqu'on a maintenu le récipient à une température suffisamment basse, il est arrivé à peine de la vapeur de brome dans l'eau contenant du phosphore en suspension.

Pour m'assurer du degré de sécurité que présente l'appareil, j'ai laissé intentionnellement s'élever la température du récipient. Dans ce cas le brome est arrivé dans l'eau, tenant du phosphore en suspension, à l'état de vapeur et à l'état liquide, et il s'y est transformé complètement en acide bromhydrique, en produisant une combustion vive sous l'eau, mais sans donner naissance au moindre dégagement de vapeur d'acide ou de brome.

J'ai exécuté trois fois la purification du brome du commerce dans l'appareil que je viens de décrire, et chaque fois j'ai obtenu, avec la facilité la plus grande, ce corps entièrement dépouillé de chlore et d'iode.

Ayant fait répéter l'opération par une personne ayant peu l'habitude du maniement des appareils en verre, elle a constaté que les dispositions présentent un inconvénient à cause de la solidarité de toutes ses parties. Pour obvier à cette difficulté, j'ai modifié ces dispositions de la manière suivante :

J'ai remplacé la cornue servant de flacon laveur et le récipient tubulé par un tube unique, à trois boules spacieuses, recourbé, servant à la fois de flacon laveur et de tube de sûreté. Ce tube s'engage d'une part dans un bouchon de verre usé à l'émeri dans le col du ballon générateur de la vapeur de brome, et se rend d'autre part dans un ballon à long col, placé dans une position inclinée et rempli d'eau maintenue froide.

L'appareil se compose donc d'un grand ballon à long col générateur du brome et placé sur un fourneau étuve à gaz dans une position inclinée à 45 degrés. Ce ballon est muni d'un bouchon de verre, usé à l'émeri; dans une ouverture percée dans ce bouchon s'engage hermétiquement un tube à trois boules. La partie antérieure de ce tube, longue de 40 centimètres, pénètre dans le col du générateur du brome. Au-dessous de sa courbure est soudée une boule solide qui communique à une deuxième boule, remplie d'eau. De la partie supérieure de cette boule part un second tube long de 90 centimètres et recourbé à 45 degrés.

Vers les deux tiers supérieurs de ce tube est soudée une troisième boule solide et spacieuse.

Au commencement de la distillation, l'extrémité inférieure de ce tube plonge de *deux centimètres* au plus dans l'eau contenue dans le col du ballon, et lorsque tout l'air du générateur a été déplacé par la vapeur de brome, on avance le ballon, de manière à faire pénétrer l'extrémité du tube dans l'eau de la sphère même.

Afin de maintenir l'eau dans le col du ballon à un niveau constant, un tube recourbé à 45 degrés, servant de siphon, descend jusque dans la sphère, et la branche verticale descend dans de l'eau, tenant du phosphore rouge en suspension. Cette eau est contenue dans un matras dont le col est muni d'un tube latéral ouvert, destiné à l'écoulement du liquide à mesure qu'il est amené du grand ballon en échange du brome condensé.

Ce matras est placé à une hauteur telle que le tube latéral, soudé à son col, se trouve au niveau qu'on veut maintenir à l'eau dans le col du ballon récipient.

L'eau contenue dans la deuxième boule du grand tube sert à laver la vapeur de brome émanée du générateur. A cet effet on élève, à l'aide d'une lampe à gaz, la température de cette eau au-dessus du point d'ébullition du brome, et on maintient cette température de manière à conserver pendant l'opération à peu près constant le volume de l'eau. C'est là une condition importante, car à mesure que la solution de brome s'appauvrit, la vapeur de brome entraîne beaucoup de vapeur d'eau qui, en se condensant, remplirait la boule, si on n'avait pas soin d'élever la température de manière à maintenir le mélange de brome et d'eau à l'état de vapeur.

Pendant tout le temps de la distillation, on laisse couler de l'eau froide, tant sur le col que sur le corps du ballon. Lorsque tout l'air a été éliminé de l'appareil par le brome, et que l'extrémité du tube qui amène sa vapeur plonge d'une dizaine de centimètres dans l'eau, la vapeur se condense, avant d'arriver à l'extrémité, et le brome tombe goutte à goutte au fond de l'eau.

Quand la distillation est sur le point de se terminer, on recule le ballon de manière que l'extrémité du long tube ne plonge que de deux centimètres au plus dans l'eau. Si, dans ce cas, il se fait une absorption, l'eau remontée reste en entier dans la boule soudée à la partie supérieure du tube, et l'air peut rentrer librement dans le grand ballon, sans entraîner avec lui l'eau du récipient ou de la deuxième boule, servant de flacon laveur.

A l'aide de l'appareil décrit ci-dessus, j'ai procédé trois fois à la purification du brome, en faisant servir la deuxième et la troisième fois, la solution de bromure de potassium et l'oxyde de zinc contenus dans le grand ballon.

Pour m'assurer jusqu'à quel point on peut compter sur le fonctionnement de la grosse boule qui remplace le flacon laveur, j'ai soumis à l'évaporation dans une capsule de porcelaine couverte, une grande quantité d'eau dans laquelle le brome avait été condensé. A l'aide de l'analyse spectrale, il m'a été impossible de constater la présence du potassium dans le faible résidu brunâtre, provenant de cette évaporation. J'ai constaté, au contraire, avec certitude, la présence du potassium dans le résidu de l'évaporation d'une faible partie de l'eau de lavage de la vapeur de brome, contenue dans la deuxième boule.

A l'aide de ce moyen, j'ai fait exécuter en ma présence par une personne *très-inexpérimentée* la purification du brome du commerce *non lavé*, et elle a obtenu du brome complètement dépouillé de chlore et d'iode. Aussi, ai-je la conviction que rien ne sera plus facile aux fabricants de produits chimiques que de préparer, à l'aide de ces méthodes, du brome privé de chlore et d'iode, en état d'être transformé directement en acide bromhydrique destiné soit aux essais de matières d'argent, soit à l'usage des chimistes.

## 2° Transformation du brome purifié en acide bromhydrique dissous.

Cette transformation s'accomplit avec la plus grande facilité à l'aide du phosphore rouge suspendu dans de l'eau maintenue à basse température.

Le phosphore rouge du commerce contient toujours des traces de chlorures, qu'il est indispensable de lui enlever au préalable.

A cet effet, on le broie finement sous l'eau pure dans un mortier de porcelaine. Lorsqu'il est bien divisé, on introduit la bouillie dans un flacon bouché à l'émeri, et l'on ajoute un volume d'eau pure égal au volume de la bouillie de phosphore rouge divisé. Après quelques instants d'agitation, on abandonne au repos. On décante le liquide surnageant et on le remplace par un volume égal d'eau pure. On répète ce lavage jusqu'à ce que 50 centimètres du liquide décanté, acidulé par cinq pour cent de son volume d'acide azotique *pur*, et porté ensuite jusqu'à l'ébullition, ne se trouble plus *après le refroidissement complet*, par une solution décime d'azotate d'argent.

J'ai procédé ainsi à plusieurs reprises à la purification du phosphore, et j'ai constaté chaque fois combien il est difficile d'éliminer de ce corps les chlorures qu'amène l'alcali employé pour lui enlever le phosphore ordinaire.

Pour transformer le brome en acide bromhydrique dissous, j'ai pris les mesures suivantes :

De la bouillie de phosphore rouge bien lavé a été suspendue dans un volume d'eau pure quadruple du volume de brome que je voulais transformer en acide bromhydrique. J'ai versé d'une part une portion de ce mélange dans un grand vase en verre, placé jusqu'au deux tiers dans un bain d'eau froide, dont muellement renouvelée; d'autre part, j'ai introduit le brome dans une sphère en verre, munie en haut d'un bouchon de verre à robinet et en bas d'un tube de 55 centimètres de longueur, effilé et muni également d'un robinet. Après avoir fait pénétrer de 5 centimètres le tube effilé dans l'eau contenant le phosphore rouge en suspension, j'ai fixé à demeure la sphère, et j'ai ouvert d'abord le robinet supérieur et ensuite petit à petit le robinet inférieur de manière à produire un filet très-mince, mais continu de brome.

En maintenant le phosphore en suspension, le brome passe à l'état d'acide bromhydrique à mesure qu'il pénètre dans le liquide; cette transformation est accompagnée d'une combustion vive, si du brome liquide vient en contact du phosphore; il y a seulement développement de chaleur, si le brome a eu le temps de se dissoudre avant de rencontrer le phosphore. Dans l'un et l'autre cas, la conversion se passe sans le moindre danger et sans perte, si on a soin de maintenir suffisamment froide l'eau du bain dans lequel plonge le vase contenant l'eau et le phosphore.

A mesure que le phosphore disparaît, on ajoute au liquide une nouvelle partie de bouillie de phosphore rouge. Toutefois, lorsqu'on est près d'avoir épuisé tout le brome dont on veut opérer la transformation en acide bromhydrique, on fait arriver du brome de manière à en avoir assez en solution dans le liquide pour le colorer en jaune orange et en répandre sensiblement l'odeur. A la fin de l'opération, l'excès de brome est nécessaire pour ramener à l'état d'acide phosphorique normal, l'acide phosphoreux qui peut avoir pris naissance. Si l'on s'abstient de détruire l'acide phosphoreux formé, on constate une odeur très-prononcée d'ail lors de la distillation du liquide acide pour obtenir l'acide bromhydrique.

On peut du reste, sans le moindre inconvénient, éliminer l'excès de brome dissous, en ajoutant petit à petit au liquide parfaitement *refroidi* du phosphore rouge jusqu'à décoloration complète.



*5<sup>e</sup> Distillation de l'acide bromhydrique.*

La liqueur acide obtenue se compose d'une solution d'acides bromhydrique et phosphorique, contenant une quantité variable de *bromoforme* que j'ai rencontré constamment dans le brome fourni par le commerce. J'ai eu recours à la distillation pour séparer l'acide bromhydrique.

A cet effet, le liquide brut a été introduit dans une grande cornue bouchée à l'émeri, à très-long col que j'ai fait pénétrer aussi avant que possible dans un récipient. J'ai soumis le liquide à une douce ébullition, en ayant la précaution de soustraire, à l'aide d'écrans, le liquide et les vapeurs d'acide à l'action directe de la chaleur d'un fourneau étuve à gaz.

Avant même qu'il le liquide entre en ébullition, il laisse échapper le bromoforme, qu'on peut aisément recueillir. On constate facilement que tout le bromoforme est éliminé, car dans ce cas, les vapeurs émanées du liquide répandent l'odeur caractéristique de l'acide bromhydrique liquide et chaud qui est, d'après, moi, celle de l'eau de mer acidulée en ébullition.

Pour obtenir tout l'acide bromhydrique contenu dans le liquide, à l'état le plus concentré possible, j'ai procédé ainsi qu'il suit :

Après l'élimination du bromoforme et du lavage du récipient à l'eau pure, j'ai distillé la liqueur de manière à recueillir d'abord le quart de son volume. J'ai changé ensuite le récipient et j'ai continué la distillation pour obtenir la moitié du volume primitif; arrivé à ce terme, j'ai remis dans la cornue le liquide distillé en premier lieu, qui n'était que faiblement acide, et j'ai procédé à la distillation du mélange pour obtenir un volume du liquide égal à celui que j'avais introduit. Le produit s'est ainsi notablement enrichi.

Pour m'assurer si la solution d'acide phosphorique restée dans la cornue retenait encore notablement de l'acide bromhydrique, j'ai ajouté au contenu de la cornue un volume égal d'eau pure et j'ai soumis encore le tout à la distillation pour retirer le liquide ajouté.

Le produit recueilli était très-faiblement acide.

L'acide bromhydrique distillé était absolument incolore et s'est conservé indéfiniment dans cet état. La moitié du liquide obtenu était fumaant à l'air à la température ordinaire.

*Il a servi directement à la préparation de la liqueur normale pour l'essai des matières d'argent, après en avoir déterminé le titre.*

J'ai déterminé ce titre en précipitant, à l'aide de l'azotate d'argent, un volume donné d'acide préalablement dilué de dix fois son volume d'eau, et en recueillant, séchant et pesant le bromure d'argent produit.

J'ai eu recours également à l'emploi de liqueurs alcalines titrées avec soin, à l'aide de l'acide bromhydrique lui-même, dont le titre avait été préalablement, déterminé comme je viens de le dire.

Ce moyen conduit très-rapidement au but, et c'est l'acidimétrie que je conseille pour la préparation de la liqueur normale. Je n'entrerai pas dans d'autres détails à ce sujet; la préparation de la liqueur normale appartient à l'essai proprement dit des matières d'argent.

---

## NOTE 6.

—

## DE LA PRÉPARATION DES CARBONATES MONOSODIQUE ET BISODIQUE PURS.

Ayant eu besoin de carbonate bisodique absolument dépouillé de chlore pour le transformer en bromure, j'ai eu recours au moyen suivant pour me le procurer : du carbonate bisodique dit pur, fourni par les fabriques de produits chimiques, privé de sulfate, mais contenant des traces de chlore, de fer, de manganèse et d'argent, a été chauffé, par partie à la fois, jusqu'au rouge sombre, dans un grand vase en platine. Après le refroidissement, le résidu réuni dans le vase de platine a été repris par une quantité d'eau pure et tiède insuffisante pour le dissoudre. La solution, qui était sensiblement trouble, a été abandonnée à l'éclaircissement ; elle a été ensuite décantée dans une chaudière de platine et évaporée jusqu'à pellicule. Par un refroidissement rapide, on a provoqué la cristallisation du carbonate bisodique à l'état de poussière cristalline. Après la séparation de l'eau mère, opérée par aspiration, et après deux lavages à l'eau pure, glacée, le sel a été déshydraté, calciné, repris par l'eau, et soumis à une nouvelle cristallisation. Ce traitement a été renouvelé une troisième fois.

L'eau mère saline provenant du premier traitement, ainsi que la première eau de lavage du sel, a *verdi* très-notablement une solution d'acide sulfhydrique.

La présence d'un métal étranger n'a pas pu être constatée avec certitude dans l'eau mère du deuxième traitement ; mais après le troisième traitement, l'absence était certaine. En effet, l'eau mère a pu rester vingt-quatre heures en présence de l'acide sulfhydrique, sans prendre la moindre coloration.

Le carbonate sodique ainsi obtenu renferme encore du chlore, que des cristallisations successives ne sauraient en éliminer ; du moins je dois avouer mon impuissance à atteindre ce résultat par ce moyen. En effet, une solution de ce carbonate au dixième, sursaturée par de l'acide acétique distillé sur de l'acétate d'argent, devient opalescente à la surface, par l'addition de quelques gouttes de liqueur décime d'argent, parfois instantanément, et certainement au bout de *trois à dix minutes*.

Je ne suis parvenu à obtenir le carbonate sodique dépouillé des traces de chlore, qu'il retient avec tant de persistance, qu'en précipitant, à l'aide de l'anhydride carbonique pur, le sodium d'une solution de carbonate bisodique, préparé comme je viens de l'indiquer, à l'état de carbonate monosodique ; j'ai atteint ce résultat de la manière suivante :

A la cucurbite d'un appareil distillatoire en platine, de quatre litres et demi de capacité, et à moitié remplie de solution saturée à 50°, j'ai adapté solidement une plaque épaisse de caoutchouc, percée de deux ouvertures par lesquelles passaient d'une part un large tube, évasé par le bas, destiné à amener l'anhydride carbonique dans la solution

sodique, et d'autre part un tube doublement recourbé et destiné à laissé échapper l'excédant de gaz carbonique.

Le générateur à anhydride carbonique consistait en un grand ballon, rempli jusqu'au col de carbonate monosodique du commerce, en communication par un tube recourbé avec un flacon à deux tubulures, vide et maintenu froid, dans lequel venait se condenser la vapeur d'eau entraînée avec le courant d'anhydride carbonique.

A la seconde tubulure du flacon était adapté le tube amenant l'anhydride carbonique dans la solution sodique. Ce tube ne plongeait dans le liquide que d'un et demi à deux centimètres.

Le ballon contenant le carbonate monosodique était placé dans une étuve à air chaud et réglée de manière à avoir un dégagement modéré et constant de gaz.

Une solution de carbonate bisodique, saturée à 50°, absorbe assez rapidement l'anhydride carbonique qu'on y amène, avec précipitation de carbonate monosodique, si l'on a soin de faire osciller de temps à autre le vase contenant la solution, de manière à ramener du fond du liquide saturé à mesure que celui de la surface se dépouille, et surtout si on prend la précaution d'exercer une pression sur le gaz en faisant plonger le tube à dégagement dans le mercure.

Lorsque la solution avait absorbé tout l'anhydride carbonique qu'elle pouvait prendre, on a abaissé sa température en entourant la chaudière d'eau froide et enfin de glace.

En opérant, comme je viens de le dire, on parvient à précipiter à l'état d'une poussière cristalline de carbonate monosodique, les deux tiers du sodium contenu dans la solution de carbonate bisodique employé.

Après que la précipitation s'était effectuée, on a procédé à la décantation de l'eau mère, et au lavage du carbonate monosodique.

Ce lavage a eu lieu en arrosant le sel d'eau glacée et pure, et en aspirant du fond le liquide au fur et à mesure qu'il arrive.

On a transformé ensuite le carbonate monosodique en carbonate bisodique, en plaçant la chaudière de platine dans un bain d'eau à 100°, et la transformation étant accomplie, on a dissous le résidu dans une quantité suffisante d'eau tiède, de manière à produire une solution saturée à 50°.

Cette solution a été soumise de nouveau à un courant d'anhydride carbonique pour précipiter encore à l'état de carbonate monosodique tout le sodium susceptible d'être ainsi éliminé.

On a répété toute la série des opérations décrites ci-dessus tant qu'il a été possible de déceler, à l'aide de la liqueur décime d'argent, la présence du chlore dans une partie des eaux mères de la précipitation du carbonate bisodique, saturée par l'acide acétique distillé sur l'acétate d'argent.

Pour atteindre ce résultat, cinq traitements complets ont été indispensables.

D'après ce que je viens d'exposer, on voit que l'élimination complète du chlore du carbonate sodique est une opération des plus laborieuses et des plus délicates à exécuter. Les chimistes qui ont tenté de préparer du carbonate de lithium pur, savent la difficulté qui

existe à éliminer de ce composé le sodium qui y est presque toujours associé. Je dois le dire, j'ai rencontré plus de difficultés à éliminer complètement le chlore du carbonate sodique qu'à séparer celui-ci du carbonate de lithium.

J'ajouterais même : j'ai pensé un instant que le milieu ambiant amène dans le sel autant de chlore qu'on parvient à en séparer. Mais en travaillant sur du carbonate bisodique, privé déjà de toute matière étrangère, sauf les traces de silice et d'alumine qu'il n'a pas été en mon pouvoir de séparer, ni du carbonate bisodique ni du carbonate monosodique, je suis parvenu à me procurer *cent trente-cinq* grammes de carbonate sec, dépouillé complètement de chlore, en partant d'un kilogramme de carbonate bisodique préalablement purifié, comme je l'ai dit en commençant.

Le carbonate sodique que j'ai préparé avec tant de soins était destiné à faire du brome de sodium pur. Devant connaître son contenu en silice et en alumine, j'en ai décomposé 51<sup>er</sup>,455 à l'aide d'une solution concentrée d'acide chlorhydrique préparée dans le platine.

Le sel marin produit a été évaporé à siccité, et le résidu chauffé jusqu'à son point de fusion. Après le refroidissement, le chlorure a été repris par une quantité suffisante d'eau froide et la solution a été abandonnée à l'éclaircissement spontanée. On a décanté avec précaution le liquide limpide et on a repris par de l'eau pure la silice et l'alumine devenues insolubles. Le liquide et les eaux de lavages du vase de platine ont été filtrés au travers d'un double filtre de papier Berzelius, lavé d'abord à l'eau acidulée à l'acide fluorhydrique et ensuite à l'eau pure.

Le filtre lavé avec soin, séché et incinéré, a laissé (déduction faite du poids des cendres d'un double filtre traité préalablement de même) 0<sup>sr</sup>,00741 de résidu blanc formé de silice et d'alumine, soit 0,00024 du poids du carbonate employé.

La solution de chlorure sodique décantée après avoir été additionnée d'un dixième environ de son volume de solution saturée de chlorure d'ammonium, a été évaporée jusqu'à siccité, et le résultat a été fondu dans le platine. Le sel marin a été repris par de l'eau froide, et la solution qui n'était pas encore d'une limpidité absolue, après avoir reposé, a été filtrée au travers de la mousse de platine. Le liquide filtré, additionné préalablement de chlorure d'ammonium, a été évaporé, et le résidu chauffé jusqu'à la fusion du chlorure et l'élimination complète du chlorure d'ammonium.

Le sel marin a été repris une troisième fois par de l'eau, et la solution, quoique parfaitement limpide cette fois, a été abandonnée au repos. Après vingt-quatre heures, elle a été décantée et évaporée jusqu'à siccité. Le résidu a été fondu et chauffé au blanc dans un creuset de platine.

Une partie de ce chlorure a servi à la détermination n° 1 de son rapport proportionnel avec l'argent par la seconde méthode ; il a donné le rapport de

$$100,000 : 54,2091.$$

Une autre partie a été employée à la recherche du contenu en matières fixes. J'ai eu

recours dans ce but à la méthode de la volatilisation du chlorure dans un courant d'azote, méthode que j'ai décrite dans mes *Nouvelles recherches sur les lois des proportions chimiques*. 9<sup>gr</sup>,928 de chlorure ont laissé 0<sup>gr</sup>,00051 de résidu blanc, absolument fixe, de silice, et des traces de silicate de sodium, soit à 0,0000515 de son poids, ou  $\frac{1}{20000}$ .

En ajoutant le poids de ce résidu à celui qui se produit par la calcination du chlorure formé par la saturation du carbonate bisodique, on arrive à une somme de 0,000295 de poids du carbonate, soit à  $\frac{1}{3400}$ .



# TABLE ANALYTIQUE.

---

	Pages.
INTRODUCTION . . . . .	5
<b>PREMIER MÉMOIRE.</b>	
De la détermination du rapport proportionnel entre l'argent et les chlorures . . . . .	7
PREMIÈRE MÉTHODE . . . . .	9
Chlorure de potassium . . . . .	14
— de sodium . . . . .	19
— d'ammonium . . . . .	20
SECONDE MÉTHODE . . . . .	22
Chlorure de potassium . . . . .	26
— de sodium . . . . .	28
— d'ammonium. . . . .	50
<b>SECOND MÉMOIRE.</b>	
De la détermination du rapport proportionnel entre l'argent et les bromures de sodium et d'ammonium . . . . .	55
INTRODUCTION . . . . .	55
De la préparation de l'acide bromhydrique type . . . . .	57
De la préparation de l'acide bromhydrique destiné aux essais des matières d'argent. . . . .	58
Préparation du bromure de sodium . . . . .	59
— — d'ammonium . . . . .	40
Du mode de détermination du rapport proportionnel entre l'argent et les bromures de sodium et d'ammonium . . . . .	42
<b>BROMURE DE SODIUM.</b>	
A. Bromure de sodium préparé à l'aide de l'acide bromhydrique type. . . . .	46
B. Bromure de sodium obtenu à l'aide de l'acide bromhydrique préparé pour les essais des matières d'argent. . . . .	49

BROMURE D'AMMONIUM.		Pages.
A. Bromure d'ammonium préparé à l'aide de l'acide bromhydrique type. . . . .		51
B. Bromure d'ammonium obtenu à l'aide de l'acide bromhydrique préparé pour les essais des matières d'argent . . . . .		55
Rapport proportionnel entre l'argent et le bromure d'ammonium . . . . .		55

#### CONCLUSIONS.

Chlorure de potassium . . . . .	57
— de sodium . . . . .	59
— d'ammonium . . . . .	60
Bromure de sodium . . . . .	61
— d'ammonium. . . . .	62
Poids atomique de l'azote. . . . .	62

#### NOTES.

##### NOTE 1.

Dosage du chlore d'un chlorure et de l'argent d'un sel de ce métal . . . . .	66
De la précipitation . . . . .	66
Du lavage du chlorure d'argent . . . . .	68
De la filtration de l'eau mère et de lavage et de l'introduction du chlorure d'argent lavé dans un appareil où il doit être pesé . . . . .	68

##### NOTE 2.

Des liqueurs décimes et des mesureurs . . . . .	70
Des liqueurs décimes . . . . .	71
Préparation de la liqueur décime d'argent . . . . .	72
Préparation des liqueurs décimes de chlorures et de bromures de potassium, de sodium et d'ammonium . . . . .	74
Préparation des liqueurs décimes des acides chlorhydrique et bromhydrique. — De la vérification des liqueurs décimes . . . . .	75
A. De la vérification des liqueurs décimes de chlorures. . . . .	76
B. De la vérification des liqueurs décimes des bromures . . . . .	77
Des mesureurs employés aux essais . . . . .	78
De la position à donner aux réservoirs des liquides par rapport aux mesureurs . . . . .	82
De la mesure des liquides altérables par leur passage au travers d'un tube en caoutchouc. . . . .	84

##### NOTE 5.

Des pipettes graduées . . . . .	85
---------------------------------	----



# TABLE ANALYTIQUE.

105

## NOTE 4.

Pages.

De la préparation de l'acide bromhydrique type . . . . . 88

## NOTE 5.

De la préparation de l'acide bromhydrique destiné aux essais des matières d'argent. . . . . 90

1° Purification de brome . . . . . 90

2° Transformation du brome purifié en acide bromhydrique dissous . . . . . 95

5° Distillation de l'acide bromhydrique. . . . . 95

## NOTE 6.

De la préparation des carbonates monosodique et bisodique purs. . . . . 96

TABLE ANALYTIQUE. . . . . 101







Fig. 1

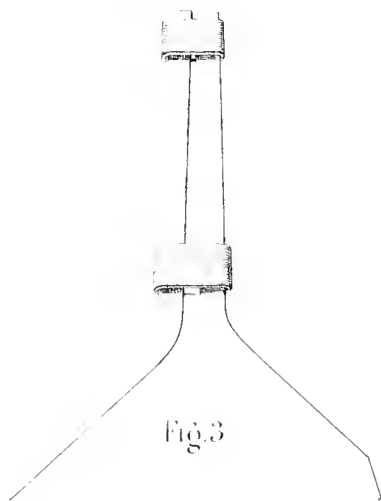


Fig. 3

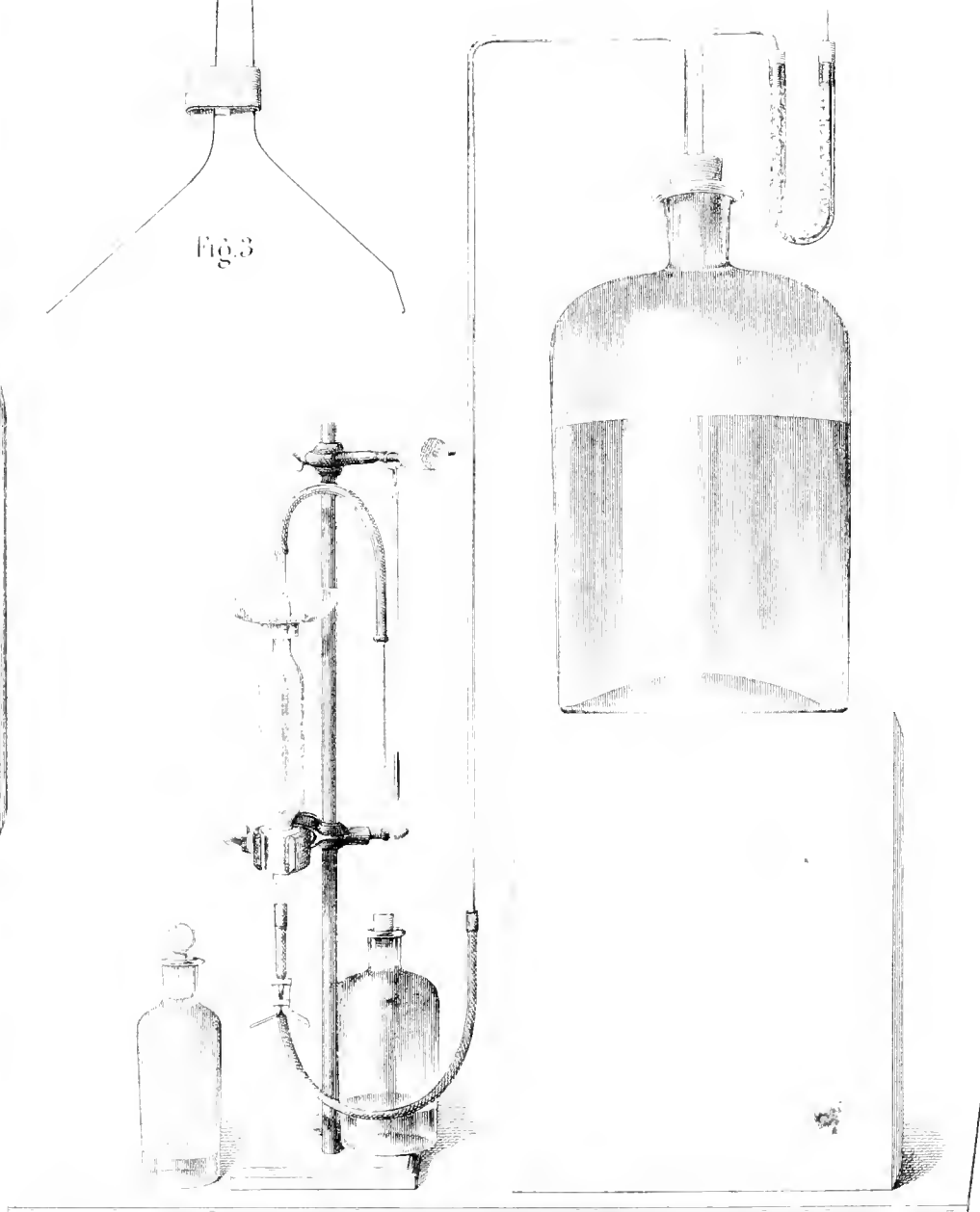


Fig. 2.

Mesureurs.





Fig. 5

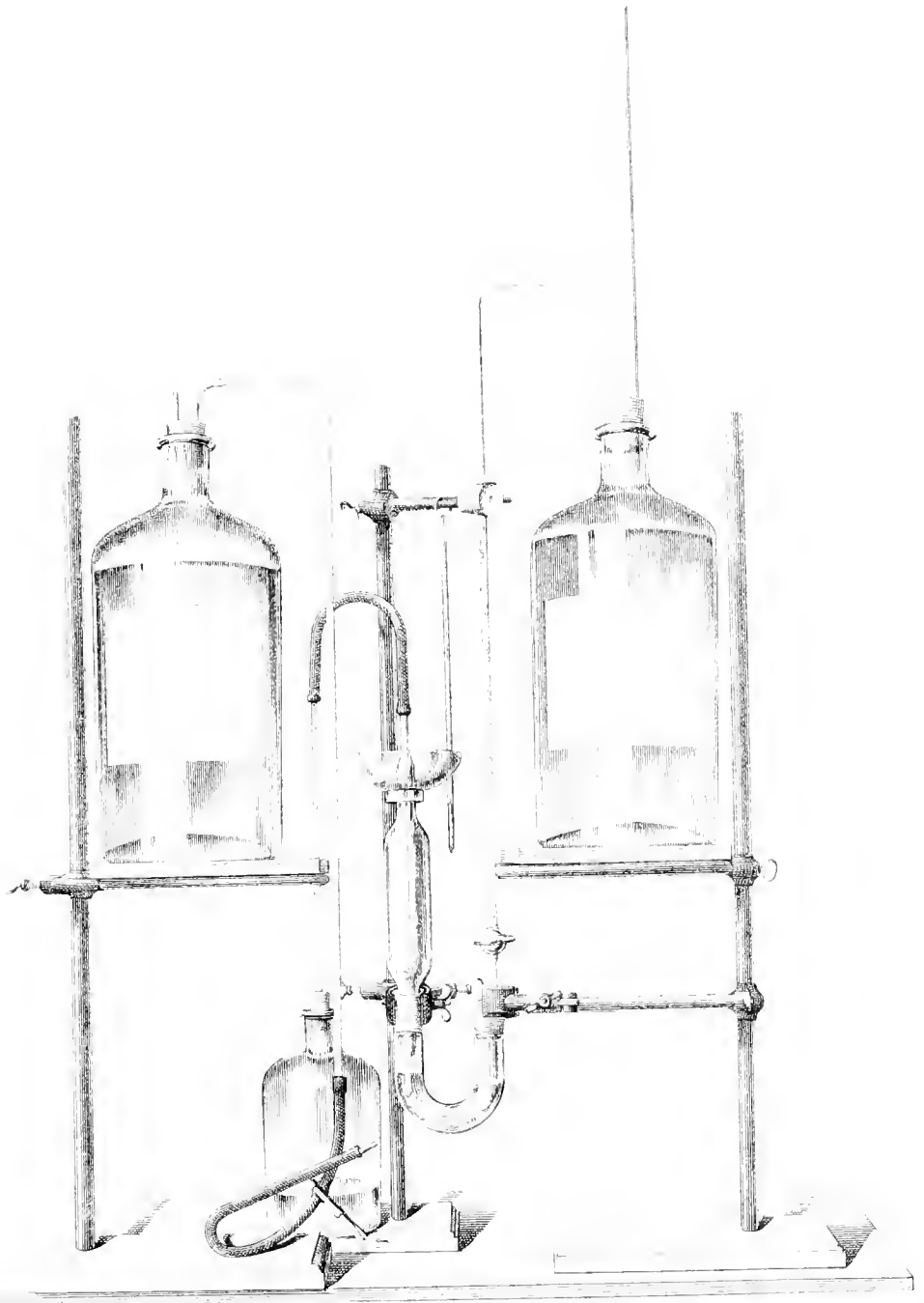


Fig. 4.

*Journal de Chimie Médicale et de Pharmacie*

Mesureur de liquides altérables par leur passage au  
travers d'un tube de Caoutchouc



# MÉMOIRE

SUR

# LES COURBES DU TROISIÈME ORDRE

PAR

M. F. FOLIE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

ET

M. C. LE PAIGE,

CHARGÉ DE COURS A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.

---

(PREMIÈRE PARTIE.)

---

(Présenté à la Classe des sciences de l'Académie le 3 janvier 1880.)

---





# MÉMOIRE

SUR

## LES COURBES DU TROISIÈME ORDRE.

---

### CHAPITRE PREMIER.

---

#### HOMOGRAPHIE.

1. La théorie des sections coniques repose, tout entière, sur les propriétés des ponctuelles ou des faisceaux homographiques. Aussi a-t-on étudié, dans les moindres détails, la forme bilinéaire

$$f = \sum_{i=1}^{i=2} \sum_{k=1}^{k=2} a_{ik} x_i y_k.$$

La construction des courbes d'ordres supérieurs, conçue par STEINER et appliquée spécialement par M. CHASLES et M. DE JONQUIÈRES, conduit à d'autres formes à deux séries de variables.

On s'en est moins occupé au point de vue analytique qu'au point de vue géométrique.

Enfin, les travaux de M. AUGUST et de M. CREMONA, sur les surfaces du troisième ordre, conduisent à la forme trilinéaire

$$f = \sum \sum \sum a_{ijk} x_i y_j z_k, \dots \dots \dots (1)$$

appelée par le premier de ces géomètres, *duploprojective*.

. Cette dernière forme, pensons-nous, n'a pas encore fait, néanmoins, l'objet de recherches analytiques, du moins dans sa forme complètement générale. Nous aurons l'occasion de mentionner, dans le cours de ce travail, les résultats que nous avons rencontrés dans les écrits de quelques géomètres, et qui se rattachent à cette question.

Nous commencerons par déterminer les covariants et les invariants de  $f$ , en ramenant d'abord cette forme à une somme de polaires d'expressions ne contenant qu'une seule série de variables, en nous servant des méthodes de M. GORDAN.

Pour plus d'uniformité dans les notations, nous représenterons, en général, par

$$D_{xy},$$

l'opération

$$\frac{1}{m} \left( x_1 \frac{d}{dy_1} + x_2 \frac{d}{dy_2} \right),$$

$m$  désignant le degré, par rapport aux variables  $y$ , de la fonction à laquelle on applique l'opération.

Nous trouvons ainsi

$$\begin{aligned} f &= a_{111}x_1y_1z_1 + a_{112}x_1y_1z_2 + a_{121}x_1y_2z_1 + a_{211}x_2y_1z_1 + a_{122}x_1y_2z_2 + a_{212}x_2y_1z_2 + a_{221}x_2y_2z_1 + a_{222}x_2y_2z_2 \\ &= D_{xy}D_{z_1} \left[ a_{111}x_1^3 + (a_{112} + a_{121} + a_{211})x_1^2x_2 + (a_{122} + a_{212} + a_{221})x_1x_2^2 + a_{222}x_2^3 \right] \\ &\quad + \frac{2}{5}(xz)D_{xy} \left[ \left( a_{112} - \frac{a_{121} + a_{211}}{2} \right) x_1 - \left( a_{212} - \frac{a_{212} + a_{122}}{2} \right) x_2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{2}(xy)D_{z_1} \left[ (a_{121} - a_{211})x_1 - (a_{212} - a_{122})x_2 \right]. \end{aligned}$$

Les trois expressions, entre crochets, sont des covariants de  $f$ .

Il suffira, pour trouver tous les covariants de  $f$ , de former le système complet de ces trois covariants (\*).

Posons

$$z_1^2 = a_{111}x_1^3 + (a_{112} + a_{121} + a_{211})x_1^2x_2 + (a_{122} + a_{212} + a_{221})x_1x_2^2 + a_{222}x_2^3, \quad \dots \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= (a_{121} - a_{112})x_1 - (a_{212} - a_{221})x_2, \\ z_2 &= (a_{112} - a_{211})x_1 - (a_{221} - a_{122})x_2, \\ z_3 &= (a_{211} - a_{121})x_1 - (a_{122} - a_{212})x_2. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

(\*) CLEBSCH, *Theorie der binären Formen*, p. 26.

Puis

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \varkappa_2 - \varkappa_3 = (a_{112} + a_{121} - 2a_{211})x_1 - (a_{221} + a_{212} - 2a_{122})x_2, \\ \psi_2 &= \varkappa_5 - \varkappa_4 = (a_{211} + a_{112} - 2a_{121})x_1 - (a_{122} + a_{221} - 2a_{212})x_2, \\ \psi_3 &= \varkappa_1 - \varkappa_2 = (a_{121} + a_{211} - 2a_{112})x_1 - (a_{212} + a_{122} - 2a_{221})x_2. \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

De cette manière, nous aurons

$$f = D_y D_{zx} \varphi - \frac{1}{5}(xz) D_y \psi_3 - \frac{1}{2}(xy) D_{zx} \varkappa_5.$$

A cause des relations évidentes

$$\begin{aligned} \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 &\equiv 0, \\ \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 &\equiv 0, \end{aligned}$$

et des formules (4), nous pouvons prendre, comme covariants de  $f$ , les formes

$$\varphi_x^3, \varkappa_1, \varkappa_2.$$

Nous obtenons le système suivant :

	0	1	2	3
1		$\varkappa_1, \varkappa_2$		$\varphi_x^3$
2	$(\varkappa_1, \varkappa_2)$		$\mathbf{H} = (\varphi \varphi')^2 \varphi_x \varphi_x'$ $\Gamma_1 = (\varphi, \varkappa_1), \Gamma_2 = (\varphi, \varkappa_2)$	
3		$\varpi_1 = (\mathbf{H}, \varkappa_1)$ $\varpi_2 = (\mathbf{H}, \varkappa_2)$		$\mathbf{Q} = (\varphi \varphi')^2 (\varphi' \varphi'') \varphi_x \varphi_x'^2$
4	$(\mathbf{H}, \mathbf{H}')^2$ $(\varpi_1, \varkappa_2)$		$\varrho_1 = (\mathbf{Q}, \varkappa_1)$ $\varrho_2 = (\mathbf{Q}, \varkappa_2)$	
5		$\sigma_1 = (\varrho_1, \varkappa_2)$		

Il est inutile d'écrire les autres formes que l'on pourrait introduire pour la symétrie.

2. Supposons maintenant que,

$$f = 0,$$

définisse un ensemble de points situés sur une droite ou sur trois droites.

Nous remarquerons tout d'abord que si l'on se donne deux points, l'un de la série des  $y$ , l'autre de celle des  $z$ , par exemple, le troisième point correspondant,  $x$ , est complètement déterminé.

Cependant, comme l'on a,

$$x_1 \frac{df}{dx_1} + x_2 \frac{df}{dx_2} = 0,$$

le rapport  $\frac{x_1}{x_2}$  est indéterminé si l'on a, en même temps,

$$\frac{df}{dx_1} = 0, \quad \frac{df}{dx_2} = 0,$$

ou

$$a_{111}y_1z_1 + a_{112}y_1z_2 + a_{121}y_2z_1 + a_{122}y_2z_2 = 0,$$

$$a_{211}y_1z_1 + a_{212}y_1z_2 + a_{221}y_2z_1 + a_{222}y_2z_2 = 0.$$

Le rapport  $\frac{y_1}{y_2}$  est alors racine de l'équation

$$\begin{vmatrix} a_{111}y_1 + a_{121}y_2 & a_{112}y_1 + a_{122}y_2 \\ a_{211}y_1 + a_{221}y_2 & a_{212}y_1 + a_{222}y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant, nous trouvons,

$$\Sigma_2 \equiv (a_{111}a_{212} - a_{112}a_{211})y_1^2 + (a_{111}a_{222} + a_{121}a_{212} - a_{112}a_{221} - a_{122}a_{211})y_1y_2 + (a_{121}a_{222} - a_{122}a_{221})y_2^2 = 0.$$

Le premier membre de cette équation est, comme l'on voit, égal à

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2f}{dx_1dz_1} & \frac{d^2f}{dx_1dz_2} \\ \frac{d^2f}{dx_2dz_1} & \frac{d^2f}{dx_2dz_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Nous pouvons former les expressions analogues  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_5$ .

$$\Sigma_1 \equiv (a_{111}a_{122} - a_{112}a_{121})x_1^2 + (a_{111}a_{222} + a_{211}a_{122} - a_{121}a_{212} - a_{221}a_{112})x_1x_2 + (a_{211}a_{222} - a_{212}a_{221})x_2^2 = 0,$$

$$\Sigma_5 \equiv (a_{111}a_{221} - a_{121}a_{211})z_1^2 + (a_{111}a_{222} + a_{112}a_{221} - a_{211}a_{122} - a_{121}a_{212})z_1z_2 + (a_{112}a_{222} - a_{122}a_{212})z_2^2.$$

On s'aperçoit sans peine que, le point  $x$  étant indéterminé, les points  $z$ , correspondant aux points  $y$ , racines de l'équation  $\Sigma_2 = 0$ , sont eux-mêmes racines de l'équation  $\Sigma_3 = 0$ .

Nous pourrions aisément prouver, en nous fondant sur la forme même des  $\Sigma$ , que ces fonctions sont des covariants de  $f$ . Mais les relations suivantes, en nous permettant de rattacher  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ , au système de  $f$ , démontrent ce théorème.

Nous trouvons

$$H_1 - 5(\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3) + \frac{1}{2}(\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2) \equiv 0, \quad \dots \dots \dots (5)$$

$$5(\Sigma_1 - \Sigma_2) = \Gamma_3 - \chi_3(\chi_1 - \chi_2), \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$5(\Sigma_2 - \Sigma_3) = \Gamma_1 - \chi_1(\chi_2 - \chi_3), \quad \dots \dots \dots (7)$$

$$5(\Sigma_3 - \Sigma_1) = \Gamma_2 - \chi_2(\chi_3 - \chi_1) \quad \dots \dots \dots (8)$$

De ces équations se déduisent les suivantes :

$$9\Sigma_1 = H_1 + \Gamma_3 - \Gamma_2 - 2\chi_2^2 - 2\chi_3^2 - 5\chi_2\chi_3, \quad \dots \dots \dots (9)$$

$$9\Sigma_2 = H_1 + \Gamma_1 - \Gamma_3 - 2\chi_1^2 - 2\chi_3^2 - 5\chi_1\chi_3, \quad \dots \dots \dots (10)$$

$$9\Sigma_3 = H_1 + \Gamma_2 - \Gamma_1 - 2\chi_3^2 - 2\chi_1^2 - 5\chi_1\chi_2 \quad \dots \dots \dots (11)$$

Nous mentionnerons encore les covariants

$$\Pi_1 = \Sigma_2 - \Sigma_3, \quad \Pi_2 = \Sigma_3 - \Sigma_1, \quad \Pi_3 = \Sigma_1 - \Sigma_2,$$

et

$$P_1 = \Sigma_2 + \Sigma_3, \quad P_2 = \Sigma_3 + \Sigma_1, \quad P_3 = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Des trois premières égalités résulte l'identité

$$\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 \equiv 0 \quad \dots \dots \dots (12)$$

Il est aisé de se rendre compte de la signification géométrique de la plupart des covariants que nous avons rencontrés.

Supposons que

$$f = 0,$$

définisse trois séries homographiques sur une droite.

L'équation

$$z_x^3 = 0,$$

représentera les points triples de cette homographie.

Si

$$z_1 \equiv 0,$$

on a

$$a_{121} = a_{122}, \quad a_{212} = a_{221}.$$

La forme  $f$  devient

$$y_1 z_1 (a_{111} x_1 + a_{211} x_2) + (y_1 z_2 + y_2 z_1) (a_{112} x_1 + a_{212} x_2) + y_2 z_2 (a_{122} x_1 + a_{222} x_2) = 0.$$

Donc :

*Si le covariant  $z_1 \equiv 0$ , à chaque point de la série des  $x$ , correspondent deux séries de points  $y$  et  $z$  en involution.*

Si de plus

$$z_2 \equiv 0,$$

$$a_{112} = a_{211}, \quad a_{221} = a_{122}.$$

La forme  $f$  devient

$$f = a_{111} y_1 x_1 z_1 + a_{112} (y_1 z_1 x_2 + y_1 z_2 x_1 + y_2 z_1 x_1) + a_{122} (y_1 z_2 x_2 + x_1 y_2 z_2 + z_1 x_2 y_2) + a_{222} x_2 y_2 z_2 = 0.$$

Par conséquent, l'égalité

$$f = 0,$$

définit trois séries de points telles que, quelles que soient les séries où l'on choisit deux points, le troisième point qui leur correspond est toujours le même.

Nous dirons que les trois séries sont en involution et nous étudierons plus loin, d'une manière spéciale, les propriétés de ces séries.

En outre, le point donné par

$$z_1 = 0,$$

jouit d'une propriété particulière.

Si nous posons

$$x_1 = a_{212} - a_{221}, \quad x_2 = a_{121} - a_{112},$$

$f$  devient

$$y_1 z_1 [a_{111}(a_{212} - a_{221}) + a_{211}(a_{121} - a_{112})] + (y_1 z_2 + y_2 z_1) [a_{212} a_{121} - a_{112} a_{221}] + y_2 z_2 [a_{122}(a_{212} - a_{221}) + a_{222}(a_{121} - a_{112})] = 0.$$

Les deux séries de points qui correspondent au point particulier donné par

$$x_1 = 0,$$

sont en involution du second ordre.

Les points doubles de cette involution correspondent aux racines de l'équation

$$y_1^2 [a_{111}(a_{212} - a_{221}) + a_{211}(a_{121} - a_{112})] + 2y_1 y_2 [a_{212} a_{121} - a_{112} a_{221}] + y_2^2 [(a_{212} - a_{221}) a_{122} + a_{222}(a_{121} - a_{112})] = 0,$$

c'est-à-dire aux racines de

$$\Pi_1 = 0.$$

La même chose a lieu pour les points définis par

$$x_2 = 0, \quad x_3 = 0,$$

et, en vertu de l'identité

$$\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 \equiv 0,$$

ces six points sont eux-mêmes en involution.

Soit

$$f = z_1(a_{111}x_1y + a_{121}x_1y_2 + a_{211}x_2y_1 + a_{221}y_2x_2) + z_2(a_{112}x_1y_1 + a_{122}x_1y_2 + a_{212}x_2y_1 + a_{222}x_2y_2) = z_1u + z_2v.$$

Posons

$$u_1 = \frac{du}{dx_1}, \quad u_2 = \frac{du}{dx_2}.$$

Nous aurons

$$u - \frac{u_1 u_2}{a_{111}} = u - \frac{(a_{111}y_1 + a_{121}y_2)(a_{111}x_1 + a_{211}x_2)}{a_{111}} = \left( \frac{a_{111}a_{221} - a_{121}a_{211}}{a_{111}} \right) y_2 z_2 (*).$$

(\*) BALTZER, *Theorie und Anwendungen der Determinanten*, p. 187.

D'où

$$u = \frac{(a_{111}y_1 + a_{121}y_2)(a_{111}x_1 + a_{211}x_2)}{a_{111}} + \frac{a_{112}a_{222} - a_{122}a_{212}}{a_{111}}x_2y_2.$$

De même

$$v = \frac{(a_{112}y_1 + a_{122}y_2)(a_{112}x_1 + a_{212}x_2)}{a_{112}} + \frac{a_{112}a_{222} - a_{122}a_{212}}{a_{112}}x_2y_2.$$

Lorsque

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_1 &\equiv 0, \\ a_{111}a_{122} - a_{112}a_{121} &= 0, \\ a_{111}a_{222} + a_{211}a_{122} - a_{121}a_{212} - a_{221}a_{112} &= 0, \\ a_{211}a_{222} &= a_{221}a_{212} = 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

En combinant ces trois équations, on met la seconde sous la forme

$$(a_{112}a_{221} - a_{122}a_{211})(a_{121}a_{212} - a_{122}a_{211}) = 0. \dots \dots \dots (14)$$

$$\Sigma_1 \equiv 0,$$

équivalent donc à l'un des deux systèmes suivants :

$$\left. \begin{aligned} a_{111}a_{122} - a_{112}a_{121} &= 0, \\ a_{112}a_{221} - a_{122}a_{211} &= 0, \\ a_{211}a_{222} - a_{221}a_{212} &= 0; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

ou

$$\left. \begin{aligned} a_{111}a_{122} - a_{112}a_{121} &= 0, \\ a_{121}a_{212} - a_{122}a_{211} &= 0, \\ a_{211}a_{222} - a_{221}a_{212} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

De (16), on déduit

$$\frac{a_{111}}{a_{112}} = \frac{a_{121}}{a_{122}} = \frac{a_{211}}{a_{212}} = \frac{a_{221}}{a_{222}} = \lambda.$$

/ prend la forme

$$(\lambda_1 + \lambda_2)(a_{112}x_1y_1 + a_{122}x_1y_2 + a_{212}x_2y_1 + a_{222}x_2y_2).$$

Le système (15) conduit, de son côté, aux égalités suivantes :

$$\frac{a_{111}}{a_{211}} = \frac{a_{121}}{a_{221}}; \quad \frac{a_{122}}{a_{222}} = \frac{a_{112}}{a_{212}};$$

ou

$$a_{111}a_{221} - a_{121}a_{211} = 0; \quad a_{122}a_{212} - a_{112}a_{222} = 0$$



D'où

$$f = \frac{(a_{111}y_1 + a_{121}y_2)(a_{111}x_1 + a_{211}x_2)}{a_{111}} \zeta_1 + \frac{(a_{112}y_1 + a_{122}y_2)(a_{112}x_1 + a_{212}x_2)}{a_{112}} \zeta_2.$$

Mais

$$\frac{a_{111}}{a_{112}} = \frac{a_{121}}{a_{122}}.$$

En conséquence

$$f = \frac{a_{112}y_1 + a_{122}y_2}{a_{112}} (a_{111}x_1\zeta_1 + a_{211}x_2\zeta_1 + a_{112}x_1\zeta_2 + a_{212}x_2\zeta_2).$$

Lorsque les systèmes (15) et (16) sont vérifiés en même temps, on a, en outre,

$$\frac{a_{111}}{a_{112}} = \frac{a_{211}}{a_{212}}.$$

Dans ce cas

$$f = \frac{(a_{112}y_1 + a_{122}y_2)(a_{112}x_1 + a_{212}x_2)(a_{111}\zeta_1 + a_{112}\zeta_2)}{a_{112}^2}.$$

Par suite :

*Lorsque  $\Sigma_1 \equiv 0$ , la forme f se décompose en deux ou en trois facteurs.*

Il n'existe plus, alors, d'homographie du troisième ordre. La même chose a lieu, naturellement, lorsque  $\Sigma_2 \equiv 0$ , ou  $\Sigma_3 \equiv 0$ .

Voyons ce que deviennent, dans cette hypothèse particulière, les trois covariants linéaires

$$\chi_1, \chi_2, \chi_3.$$

Lorsque les deux systèmes (15) et (16) sont vérifiés en même temps, on trouve

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{a_{221} - a_{212}}{a_{212}} (a_{112}x_1 + a_{212}x_2), \\ \chi_2 &= \frac{(a_{122} - a_{221})a_{211}}{a_{221}a_{112}} (a_{112}x_1 + a_{122}x_2), \\ \chi_3 &= \frac{(a_{212} - a_{122})a_{121}}{a_{122}a_{111}} (a_{111}x_1 + a_{112}x_2). \end{aligned}$$

On en déduit

$$f = \mathbf{M} \cdot \chi_1 \chi_2 \chi_3.$$

Mais il est assez facile de voir que, dans ce cas,

$$\Sigma_1 \equiv 0, \quad \Sigma_2 \equiv 0, \quad \Sigma_3 \equiv 0.$$

D'où

$$H_1 = -\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2).$$

C'est le résultat que nous devons obtenir, d'après la théorie des formes algébriques (\*).

Car on a, dans le cas actuel,

$$\frac{z^5}{x^5} = \Lambda \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3.$$

Or, on sait que si

$$f = (\zeta - \gamma)(\zeta - \omega\gamma)(\zeta - \omega^2\gamma) = [\omega^2(\zeta - \gamma) \cdot \omega(\zeta - \omega\gamma) \cdot (\zeta - \omega^2\gamma)] = XYZ,$$

$$H = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Nous avons encore mentionné les trois covariants

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3.$$

On peut se rendre aisément compte de leur signification géométrique

$$f = z_1(a_{111}x_1y_1 + a_{121}x_1y_2 + a_{211}x_2y_1 + a_{221}x_2y_2) + z_2(a_{112}x_1y_1 + a_{122}x_1y_2 + a_{212}x_2y_1 + a_{222}x_2y_2).$$

Si nous supposons que les points de la série des  $y$  et deux de la série des  $x$ , coïncident, à chaque point  $z$ , correspond une série de points doubles en involution.

Or, un léger calcul fait voir que les points doubles de cette involution sont donnés par l'équation

$$P_3 = 0.$$

3. Puisque trois points appartenant aux trois séries homographiques satisfont à la condition

$$f = \Sigma\Sigma\Sigma a_{ijk}x_jy_kz_i = 0,$$

(\*) V., par exemple: CLEBSCH, *Op. cit.*, p. 128.

il existe, entre huit groupes de trois points, la relation :

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)}y_1^{(1)}z_1^{(1)} & x_1^{(1)}y_1^{(1)}z_2^{(1)} & x_1^{(1)}y_2^{(1)}z_1^{(1)} & x_2^{(1)}y_1^{(1)}z_1^{(1)} & \dots & x_2^{(1)}y_2^{(1)}z_2^{(1)} \\ x_1^{(2)}y_1^{(2)}z_1^{(2)} & x_1^{(2)}y_1^{(2)}z_2^{(2)} & x_1^{(2)}y_2^{(2)}z_1^{(2)} & x_2^{(2)}y_1^{(2)}z_1^{(2)} & \dots & x_2^{(2)}y_2^{(2)}z_2^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(8)}y_1^{(8)}z_1^{(8)} & x_1^{(8)}y_1^{(8)}z_2^{(8)} & x_1^{(8)}y_2^{(8)}z_1^{(8)} & x_2^{(8)}y_1^{(8)}z_1^{(8)} & \dots & x_2^{(8)}y_2^{(8)}z_2^{(8)} \end{vmatrix} = 0,$$

condition qui peut se mettre sous la forme

$$\sum_{i=1}^{i=8} p_i (X_1x_2^{(i)} - X_2x_1^{(i)})(Y_1y_2^{(i)} - Y_2y_1^{(i)})(Z_1z_2^{(i)} - Z_2z_1^{(i)}) \equiv 0 (*).$$

Nous pouvons concevoir d'un autre côté, des séries homographiques formées par les termes communs aux deux homographies

$$f = \sum \sum a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta z_\gamma,$$

$$f_1 = \sum \sum b_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta z_\gamma.$$

Il en résulte que sept termes de points satisfont à la condition

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)}y_1^{(1)}z_1^{(1)} & x_1^{(1)}y_1^{(1)}z_2^{(1)} & \dots & x_2^{(1)}y_2^{(1)}z_2^{(1)} \\ x_1^{(2)}y_1^{(2)}z_1^{(2)} & x_1^{(2)}y_1^{(2)}z_2^{(2)} & \dots & x_2^{(2)}y_2^{(2)}z_2^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(7)}y_1^{(7)}z_1^{(7)} & x_1^{(7)}y_1^{(7)}z_2^{(7)} & \dots & x_2^{(7)}y_2^{(7)}z_2^{(7)} \end{vmatrix} = 0,$$

et, par suite, à l'identité

$$\sum_{i=1}^{i=7} p_i (X_1x_2^{(i)} - X_2x_1^{(i)})(Y_1y_2^{(i)} - Y_2y_1^{(i)})(Z_1z_2^{(i)} - Z_2z_1^{(i)}) \equiv 0.$$

Nous dirons qu'une telle identité définit une homographie du troisième ordre et du premier rang. On démontre aisément la propriété suivante de cette homographie :

**THÉORÈME.** — *Trois séries homographiques, du troisième ordre et du premier rang, possèdent quatre points doubles (\*\*).*

(\*) C. LE PAIGE, *A. F. A.*, pp. 17 et suiv.

(\*\*) La même chose a lieu si l'on combine la série des  $y$  avec celle des  $z$  ou celle des  $z$  avec celle des  $x$ .

En effet, en éliminant  $x_1, x_2$ , entre les deux équations  $f = 0, f_1 = 0$ , nous trouvons

$$\frac{\frac{df}{dx_1}}{\frac{df}{dx_2}} = \frac{\frac{df_1}{dx_1}}{\frac{df_1}{dx_2}},$$

ou

$$\begin{vmatrix} \frac{df}{dx_1} & \frac{df}{dx_2} \\ \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} \end{vmatrix} = 0. \quad \dots \dots \dots (A')$$

Si, dans cette relation, nous faisons  $\frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ , nous obtenons une équation du quatrième degré.

Le déterminant (A') peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} a_{111}y_1z_1 + a_{112}y_1z_2 + a_{121}y_2z_1 + a_{122}y_2z_2 & a_{211}y_1z_1 + a_{212}y_1z_2 + a_{221}y_2z_1 + a_{222}y_2z_2 \\ b_{111}y_1z_1 + b_{112}y_1z_2 + b_{121}y_2z_1 + b_{122}y_2z_2 & b_{211}y_1z_1 + b_{212}y_1z_2 + b_{221}y_2z_1 + b_{222}y_2z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

et en développant

$$\begin{aligned} & y_1^2 [(a_{111}b_{211} - a_{211}b_{111})z_1^2 + (a_{111}b_{212} - a_{212}b_{111} + a_{112}b_{211} - a_{211}b_{112})z_1z_2 + (a_{112}b_{212} - a_{212}b_{112})z_2^2] \\ & + y_1y_2 [(a_{111}b_{221} - a_{221}b_{111} + a_{121}b_{211} - a_{211}b_{121})z_1^2 + (a_{111}b_{222} - a_{222}b_{111} + a_{112}b_{221} - a_{221}b_{112})z_1z_2 \\ & \quad + (a_{112}b_{221} - a_{221}b_{112} + a_{121}b_{212} - b_{121}a_{212})z_1^2] \\ & + y_2^2 [(a_{121}b_{221} - a_{221}b_{121})z_1^2 + (a_{121}b_{222} - a_{221}b_{122} + a_{122}b_{221} - a_{222}b_{121})z_1z_2 + (a_{122}b_{222} - a_{222}b_{122})z_2^2] = 0. \quad (x) \end{aligned}$$

On sait aussi qu'il existe quatre points correspondant aux quatre groupes de quatre points doubles.

Ces points sont représentés par l'équation que l'on obtient en égalant à zéro le discriminant de la forme précédente, regardée comme forme quadratique de  $y$ .

On pourrait appeler ces points, en se servant d'une expression employée par M. EM. WEYR, *points de ramification* (\*).

(\*) EM. WEYR, *Sitzb. der k. Akad. der Wissenschaften zu Wien*, vol. LXXIII, mai, 1876.

Voir aussi : *Grundzüge einer Theorie der cubischen Involutionen*, p. 7, t. VII, 6<sup>e</sup> série, 1874, des MÉM. DE LA SOC. ROY. DES SCIENCES, de Prague.

## CHAPITRE II.

### INVOLUTIONS DU TROISIÈME ORDRE.

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, que la relation d'homographie prend une forme particulière lorsque

$$\chi_1 \equiv 0, \quad \chi_2 \equiv 0.$$

Dans ce cas, nous avons

$$f = a_{11}x_1y_1z_1 + a_{12}(x_1y_1z_2 + x_1y_2z_1 + x_2y_1z_1) + a_{122}(x_1y_2z_2 + x_2y_1z_2 + x_2y_2z_1) + a_{222}x_2y_2z_2 = 0.$$

Il est nécessaire que nous rappelions brièvement quelques résultats que nous avons déjà eu l'occasion de faire connaître.

On voit, tout d'abord, qu'il existe entre quatre termes de points en involution la relation

$$D = \begin{vmatrix} x_1y_1z_1 & x_1y_1z_2 + x_1y_2z_1 + x_2y_1z_1 & x_1y_2z_2 + x_2y_1z_2 + x_2y_2z_1 & x_2y_2z_2 \\ x_1'y_1'z_1 & x_1'y_1'z_2 + x_1'y_2'z_1 + x_2'y_1'z_1 & x_1'y_2'z_2 + x_2'y_1'z_2 + x_2'y_2'z_1 & x_2'y_2'z_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1''y_1''z_1 & x_1''y_1''z_2 + x_1''y_2''z_1 + x_2''y_1''z_1 & x_1''y_2''z_2 + x_2''y_1''z_2 + x_2''y_2''z_1 & x_2''y_2''z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Si nous regardons les quatre termes de points comme définis par les quatre formes

$$a_x^2 = 0, \quad b_x^2 = 0, \quad c_x^2 = 0, \quad d_x^2 = 0,$$

cette condition peut s'écrire

$$D' = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_5 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_5 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_5 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_5 \end{vmatrix} = 0.$$

ou, en employant les notations symboliques,

$$(ab)(ac)(ad)(bc)(bd)(cd) = 0.$$

A cause de l'identité :

$$5(ab)(ac)(ad)(bc)(bd)(cd) \equiv (ab)^5(cd)^5 + (ac)^5(db)^5 + (ad)^5(bc)^5 \quad (*) \quad \dots \quad (A)$$

cette condition devient

$$(ab)^5(cd)^5 + (ac)^5(db)^5 + (ad)^5(bc)^5 = 0. \quad \dots \quad (B)$$

On conclut également de

$$D' = 0.$$

qu'il existe une relation

$$k_1 a_x^5 + k_2 b_x^5 + k_3 c_x^5 + k_4 d_x^5 \equiv 0. \quad \dots \quad (17)$$

THÉORÈME I. — *L'involution de douze points, ou du troisième ordre et de la quatrième classe, possède trois points triples (\*\*).*

A cause de la relation (17), une telle involution peut être définie par trois formes

$$a_x^5, \quad b_x^5, \quad c_x^5.$$

Les points triples sont donnés par l'équation

$$A_x^5 \equiv (ab)(bc)(ca)a_x b_x c_x = 0.$$

THÉORÈME II. — *L'invariant linéo-linéaire de la forme  $A_x^5$  et d'une autre forme  $\lambda_1 a_x^5 + \lambda_2 b_x^5 + \lambda_3 c_x^5$ , est nul.*

THÉORÈME III. — *Les points triples d'une involution du troisième ordre et du premier rang font partie de l'involution.*

(\*) C. LE PAIGE, *Sur certains combinants des formes algébriques binaires*, BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELG., t. XLVIII, p. 555.

(\*\*) Voir à ce sujet le Mémoire de M. ROSANES, inséré au tome LXXVI du JOURNAL DE CRELLE, et le Mémoire de M. STURM, inséré au tome LXXXVI du même recueil.

*Sur les involutions des différentes classes*, voir un travail important de M. EM. WEYR, *Sitzb. der k. Akad. der Wissensch.*, t. LXXIX, avril 1879.

Si dans l'identité (A), nous faisons  $d_2 = x_1$ ,  $d_1 = -x_2$ , nous obtenons l'identité

$$5(ab)(bc)(ca)a_x b_x c_x \equiv (ab)^5 c_x^5 + (bc)^5 a_x^5 + (ca)^5 b_x^5, \dots \dots \dots (C)$$

ce qui démontre le théorème.

Si l'on désigne par  $J_x^1$  le covariant  $(ab)a_x^2 b_x^2$  et par  $J_x^2$  le covariant  $(cd)c_x^2 d_x^2$ , la condition  $D' = 0$  peut aussi s'écrire

$$6(JJ')^4 - (ab)^5 (cd)^5 = 0.$$

Il résulte de l'équation qui définit les points en involution

$$\lambda_1 a_x^5 + \lambda_2 b_x^5 + \lambda_3 c_x^5 = 0,$$

qu'il suffit, en général, de deux points d'un terne pour déterminer le terne.

Nous avons vu, dans la théorie de l'homographie, qu'il existe des couples de points tels que le troisième point est indéterminé.

La même chose a lieu pour l'involution.

Lorsque

$$\varkappa_1 \equiv 0, \quad \varkappa_2 \equiv 0, \quad \varkappa_3 \equiv 0,$$

on a

$$\Sigma_1 \equiv \Sigma_2 \equiv \Sigma_3 \equiv \mu H_1 \text{ (*)}.$$

On a donc ce théorème :

**THÉORÈME IV.** — *Les points définis par l'équation*

$$(AA')^2 A_x A'_x = 0,$$

*sont tels que le troisième point de l'involution, qui lui correspond, est entièrement indéterminé.*

Nous verrons plus loin l'interprétation géométrique de ce fait.

*Réciproquement, si deux points sont tels qu'il soit possible de déterminer*

(\*) On retrouve ainsi un théorème dû à M. APPELL, *Ann. de l'École norm. sup.*, t. V, p. 548, 1876. Voir aussi GARBIERI, *Nuovo teorema algebrico, etc.* p. 53, t. XVI du JOURNAL DE BATTAGLINI, 1878.

deux points distincts qui leur correspondent, ces deux points sont donnés par les racines de l'équation

$$(AA')^2 A_x A'_x = 0,$$

et il existe une infinité de points qui correspondent aux deux points donnés.

Il est inutile de s'arrêter à la démonstration de ce théorème.

Si nous désignons par  $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$ , les racines des deux équations

$$a^2 = 0, \quad b^2 = 0,$$

il est visible que l'invariant

$$(ab)^2,$$

est égal à

$$a_0 b_0 (x_1 x_2 x_3 - \frac{1}{3} \sum x_1 x_2 \sum y_i + \frac{1}{3} \sum x_1 \sum y_1 y_2 - y_1 y_2 y_3).$$

Mais on a l'identité

$$\begin{aligned} & x_1 x_2 x_3 - \frac{1}{3} \sum x_1 x_2 \sum y_i + \frac{1}{3} \sum x_1 \sum y_1 y_2 - y_1 y_2 y_3 \\ = & \frac{1}{3} [(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)(x_3 - y_3) + (x_1 - y_2)(x_2 - y_3)(x_3 - y_1) + (x_1 - y_3)(x_2 - y_1)(x_3 - y_2)]. \end{aligned}$$

Nous avons, dans d'autres travaux, désigné ces fonctions de six lettres, qui figurent dans le second membre, par  $I_{q_1 q_2 q_3}$ .

Si nous les introduisons dans l'identité (B), nous en pouvons conclure la proposition suivante :

**THÉORÈME V.** — *L'involution du troisième ordre et du second rang s'exprime, par la réduction à zéro, d'une somme de produits deux à deux d'invariants  $I_{q_1 q_2 q_3}$ .*

Le quotient de deux de ces fonctions  $I_{q_1 q_2 q_3}$  est un invariant absolu : nous l'avons appelé *rapport anharmonique* du troisième ordre (\*).

Nous avons désigné par

$$\mathfrak{J}_{q_1 q_2 q_3},$$

(\*) F. FOLIE, *Note sur l'extension de la notion du rapport anharmonique*, BULL. DE L'ACAD., t. XLIV, p. 469.

C. LE PAIGE, *Sur l'extension des théories de l'involution et de l'homographie*, IBID., p. 546.



le rapport

$$\frac{I_{q_1 q_2 q_3}}{I_{123}}.$$

Nous ferons dans le chapitre suivant une étude détaillée de ces fonctions, auxquelles on est amené naturellement, comme on vient de le voir, par la théorie de l'involution.

En désignant par  $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3; z_1, z_2, z_3; u_1, u_2, u_3$ , les racines de quatre équations

$$a_x^3 = 0, \quad b_x^3 = 0, \quad c_x^3 = 0, \quad d_x^3 = 0,$$

la condition d'involution, D, devient

$$\begin{vmatrix} 1 & -\sum x_i & \sum x_1 x_2 & -x_1 x_2 x_3 \\ 1 & -\sum y_i & \sum y_1 y_2 & -y_1 y_2 y_3 \\ 1 & -\sum z_i & \sum z_1 z_2 & -z_1 z_2 z_3 \\ 1 & -\sum u_i & \sum u_1 u_2 & -u_1 u_2 u_3 \end{vmatrix} = 0.$$

On en déduit sans peine la condition d'involution sous la forme suivante

$$\sum_{i=1}^4 p_i (\mathbf{X} - x_i)(\mathbf{X} - x_2)(\mathbf{X} - x_3) \equiv 0. \dots \dots \dots (18)$$

On en peut conclure les diverses formes de l'involution de douze points.

Nous rappellerons seulement la suivante :

THÉORÈME VI. — *Lorsque douze points sont en involution, on a la relation*

$$\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}'_3 - \mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}'_2 + \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}'_3 - \mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}'_1 + \mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}'_1 - \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}'_3 = 0 \quad (*).$$

$\mathfrak{A}_1$  désigne la fonction

$$\frac{(x_1 - z_3)(x_2 - y_1)(x_3 - u_2)}{(x_1 - u_2)(x_2 - z_3)(x_3 - y_1)},$$

et  $\mathfrak{A}'_1$ , la fonction

$$\frac{(x_1 - z_3)(x_2 - y_1)(x_3 - u_2)}{(x_1 - y_1)(x_2 - u_2)(x_3 - z_3)}.$$

(\*) C. LE PAIGE, A. F. A., p. 59.

Les autres fonctions  $\mathfrak{z}$  se rapportent aux combinaisons de  $x_1, x_2, x_3$  avec  $z_1, u_2, y_3; u_1, y_2, z_3; u_1, z_2, y_3; z_1, y_2, u_3; y_1, u_2, z_3$ .

Nous avons vu que l'on peut considérer une homographie particulière, du troisième ordre et du premier rang, définie par les deux relations

$$\begin{aligned} f &= \Sigma \Sigma \Sigma a_{ikt} x_i y_k z_t = 0, \\ f_1 &= \Sigma \Sigma \Sigma b_{ikt} x_i y_k z_t = 0. \end{aligned}$$

Cette homographie peut se particulariser comme l'homographie la plus générale et donne alors lieu à l'involution, caractérisée par deux relations simultanées, que nous appellerons *involution du troisième ordre et du premier rang*.

Soient

$$\begin{aligned} f &= a_1 x_1 y_1 z_1 + a_2 (x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1) + a_3 (x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1) + a_5 x_2 y_2 z_2 = 0, \\ f_1 &= b_1 x_1 y_1 z_1 + b_2 (x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1) + b_3 (x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1) + b_5 x_2 y_2 z_2 = 0. \end{aligned}$$

On voit, d'abord, qu'il existe entre trois ternes de points la relation

$$D_1 = \begin{vmatrix} x_1 y_1 z_1 & x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1 & x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1 & x_2 y_2 z_2 \\ x_1' y_1' z_1' & x_1' y_1' z_2' + x_1' y_2' z_1' + x_2' y_1' z_1' & x_1' y_2' z_2' + x_2' y_1' z_2' + x_2' y_2' z_1' & x_2' y_2' z_2' \\ x_1'' y_1'' z_1'' & x_1'' y_1'' z_2'' + y_1'' x_2'' z_1'' + x_2'' y_1'' z_1'' & x_1'' y_2'' z_2'' + x_2'' y_1'' z_2'' + x_2'' y_2'' z_1'' & x_2'' y_2'' z_2'' \end{vmatrix} = 0.$$

Si nous regardons les trois ternes de points comme définis par les équations

$$a_x^3 = 0, \quad b_x^3 = 0, \quad c_x^3 = 0,$$

cette condition peut s'écrire

$$D_1' = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en employant les notations symboliques

$$(ab)(bc)(ca)a_x b_x c_x \equiv 0.$$

On peut conclure d'une propriété des déterminants rectangulaires, ou de l'identité (C), qu'il existe entre les trois formes  $a_x^5, b_x^5, c_x^5$ , une relation linéaire

$$k_1 a_x^5 + k_2 b_x^5 + k_3 c_x^5 \equiv 0. \quad \dots \quad (19)$$

THÉORÈME VII. — *L'involution du troisième ordre et du premier rang, définie par les conditions  $f = 0, f_1 = 0$ , possède quatre points doubles (\*)*.

Nous obtenons l'équation dont les racines représentent des points doubles, en faisant

$$\begin{aligned} a_{111} &= a_1; & a_{112} &= a_{121} = a_{211} = a_2; & a_{122} &= a_{212} = a_{221} = a_3; & a_{222} &= a_4; \\ b_{111} &= b_1; & b_{112} &= b_{121} = b_{211} = b_2; & b_{122} &= b_{212} = b_{221} = b_3; & b_{222} &= b_4, \end{aligned}$$

dans l'équation (z), p. 14, où l'on pose  $y_1 = z_1, y_2 = z_2$ .

On trouve ainsi

$$\begin{aligned} y_1^4(a_1 b_2 - a_2 b_1) + 2y_1^3 y_2(a_1 b_3 - a_3 b_1) + y_1^2 y_2^2[(a_1 b_4 - a_4 b_1) + 5(a_2 b_3 - a_3 b_2)] \\ + 2y_1 y_2^3(a_2 b_4 - a_4 b_2) + y_2^4(a_3 b_4 - a_4 b_3) = 0. \end{aligned}$$

C'est, comme l'on voit, le Jacobien des deux formes,

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3, a_4 \{ x_1, x_2 \}^3, \\ (b_1, b_2, b_3, b_4 \{ x_1, x_2 \}^3. \end{aligned}$$

THÉORÈME VIII. — *L'involution du troisième ordre et du premier rang, définie par les conditions  $f = 0, f_1 = 0$ , possède quatre points de ramification.*

Ces points sont donnés par les racines de l'équation que l'on obtient en posant, dans le discriminant de l'équation (z), les conditions précédentes.

On trouve ainsi l'équation

$$y_1^4[(a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 - 4(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_2 b_3 - a_3 b_2)] + \dots = 0. \quad \dots \quad (20)$$

(\*) Nous avons publié le théorème général dans notre *Mémoire sur quelques applications de la théorie des formes algébriques*, p. 52, et aussi, dans le BULL. DE L'ACAD., t. XLVI, août 1878. Voir, à ce sujet, le travail de M. WEYR.

**THÉORÈME IX.** — *Les ternes de points appartenant à une involution du troisième ordre et du premier rang sont conjugués harmoniques de deux ternes de points (\*)*.

Pour une raison que nous développerons dans le chapitre suivant, nous avons appelés conjugués harmoniques deux ternes de points définis par les équations

$$a_x^5 = 0, \quad b_x^5 = 0,$$

telles que l'invariant

$$(ab)^5 = 0.$$

La démonstration de ce théorème résulte immédiatement des conditions  $f = 0, f_1 = 0$ .

En effet, soit

$$(c_1, c_2, c_3, c_4 \mid x_1, x_2)^5 = c_x^5 = 0,$$

l'équation qui représente un terna de points de l'involution.

Les conditions  $f = 0, f_1 = 0$ , peuvent s'écrire

$$a_1c_4 - 5a_2c_3 + 5a_3c_2 - a_4c_1 = 0,$$

$$b_2c_4 - 5b_3c_3 + 5b_4c_2 - b_1c_1 = 0.$$

*Réciproquement, lorsque trois ternes de points sont conjugués harmoniques de deux mêmes ternes, ils appartiennent à une involution du troisième ordre et du premier rang.*

On peut définir l'involution de douze points de la manière suivante :

**THÉORÈME X.** — *Lorsque quatre formes  $a_x^5, b_x^5, c_x^5, d_x^5$ , sont telles que les invariants  $(ag)^5, (bg)^5, (cg)^5, (dg)^5$ , sont nuls,  $g_x^5$  étant une autre forme du troisième ordre, il existe une relation.*

$$k_1a_x^5 + k_2b_x^5 + k_3c_x^5 + k_4d_x^5 = 0.$$

Nous avons vu plus haut (théor. II) que pour une involution caractérisée

(\*) Ce théorème, sous sa forme purement analytique, appartient à M. ROSANES.

par l'équation

$$\lambda_1 a_x^3 + \lambda_2 b_x^3 + \lambda c_x^3 = 0,$$

la forme  $g_x^3$ , n'est autre chose que le covariant

$$A_x^3 = (ab)(bc)(ca)a_x b_x c_x.$$

On a un théorème analogue pour l'involution de neuf points.

THÉORÈME XI. — *Lorsque trois formes  $a_x^3, b_x^3, c_x^3$  sont telles que les covariants  $(a\rho)^5 \rho_x, (b\rho)^5 \rho_x, (c\rho)^5 \rho_x, \rho_x^4$  étant une forme du quatrième ordre, sont identiquement nuls, il existe une relation*

$$k_1 a_x^3 + k_2 b_x^3 + k_3 c_x^3 = 0.$$

Pour une involution caractérisée par l'équation

$$\lambda_1 a_x^3 + \lambda_2 b_x^3 = 0, \dots \dots \dots (21)$$

la forme  $\rho_x^4$  est égale au covariant

$$-2\mathbf{J} + 6\Theta^2 - 24\Delta\nabla.$$

Dans cette expression

$$\mathbf{I} = (ab)^3, \quad \mathbf{J} = (ab)a_x^2 b_x^2, \quad \Theta = (ab)^2 a_x b_x, \quad \Delta = \frac{1}{2}(aa')^2 a_x a'_x, \quad \nabla = \frac{1}{2}(bb')^2 b_x b'_x.$$

Lorsque l'involution est définie par l'équation

$$\lambda_1 a_x^3 + \lambda_2 b_x^3 = 0,$$

les points doubles sont donnés, comme l'on sait, par l'équation

$$(ab)a_x^2 b_x^2 = 0.$$

Ce sont les mêmes que ceux de l'involution définie par les deux conditions.

$$\left. \begin{aligned} f &= a_0 x_1 y_1 z_1 + a_1 (x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1) + a_2 (x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1) + a_3 x_2 y_2 z_2 = 0, \\ f_1 &= b_0 x_1 y_1 z_1 + b_1 (x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1) + b_2 (x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1) + b_3 x_2 y_2 z_2 = 0. \end{aligned} \right\} (22)$$

Les points de ramification de l'involution (21) sont donnés par l'équation

$$\psi_x^4 = -5(\mathbf{I}\mathbf{J} + 5\mathbf{L}_1 a_x^3 + 5\mathbf{L}_2 b_x^3) = 0. \dots \dots \dots (23)$$

Ceux de l'involution (22) sont donnés, au contraire, par l'équation

$$\varphi_x^4 = \Theta^2 - 4\Delta\nabla = 0. \dots \dots \dots (24)$$

On peut vérifier sans peine que les covariants  $\psi_x^4, \varphi_x^4, \mathbf{J}$ , sont liés par la relation

$$\psi_x^4 - 9\varphi_x^4 + 12\mathbf{J} \equiv 0 \dots \dots \dots (25)$$

En conséquence, on a le théorème suivant :

**THÉORÈME XII.** — *Les points doubles, communs aux involutions (21) et (22), et leurs points de ramification, sont douze points en involution du quatrième ordre et de la troisième classe.*

M. EM. WEYR a signalé d'autres propriétés de ces groupes de quatre points (\*).

De l'identité (25), on peut conclure cette relation

$$\mathbf{J} - \mathbf{L}_1 a_x^3 - \mathbf{L}_2 b_x^3 - \Theta^3 + 4\Delta\nabla \equiv 0. \dots \dots \dots (26)$$

Des expressions précédentes de  $\rho_x^4, \psi_x^4, \varphi_x^4$ , on peut aussi déduire les identités

$$\rho_x^4 - \psi_x^4 + 5\varphi_x^4 - 10\mathbf{J} \equiv 0, \dots \dots \dots (27)$$

$$6\rho_x^4 - \psi_x^4 - 27\varphi_x^4 \equiv 0. \dots \dots \dots (28)$$

La théorie de l'involution du troisième ordre et de la troisième classe conduit, comme l'on voit, à l'étude d'un certain nombre de combinants de deux cubiques, de la forme (2, 2; 4), qui s'expriment tous en fonction de deux d'entre eux.

On peut encore exprimer d'une autre façon que trois formes  $a_x^5, b_x^5, c_x^5$  sont en involution.

Soit

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_x^4 &= (ab)a_x^2 b_x^2, \\ w_x^2 &= (cc')^2 c_x c_x', \end{aligned}$$

(\*) Voir aussi : C. LE PAIGE, *Ueber eine Relation zwischen den singulären Elementen cubischer Involutionen et Bemerkungen ueber cubische Involutionen.* SITZB. DER K. AKAD. DER WISS. ZU WIEN. Bd. LXXXI, pp. 459 et 845.

cette condition peut s'écrire

$$(Jc)^2 J_x \cdot c_x^2 - 3(Jw)J_x^2 w_x \equiv 0 \quad (*).$$

On peut aussi exprimer l'involution de neuf points par l'égalité de rapports anharmoniques du troisième ordre.

Soient

$$x_1, x_2, x_3; \quad y_1, y_2, y_3; \quad z_1, z_2, z_3,$$

trois ternes de points en involution.

On a, entre eux, l'égalité suivante :

$$\frac{(x_1 - y_2)(y_1 - z_2)(z_1 - x_2)}{(x_1 - z_2)(y_1 - x_2)(z_1 - y_2)} = \frac{(x_1 - z_3)(y_1 - x_3)(z_1 - y_3)}{(x_1 - y_3)(y_1 - z_3)(z_1 - x_3)},$$

et d'autres analogues.

Ce n'est pas, d'ailleurs, la seule façon d'exprimer que des séries de points sont en involution, au moyen du rapport anharmonique de troisième ordre.

On a, par exemple,

$$\prod_{i=1}^{i=3} \frac{(x_1 - y_i)(x_2 - z_i)(x_3 - u_i)}{(u_i - x_1)(y_i - x_2)(z_i - x_3)} = -1 \quad (**).$$

Cette relation a lieu entre quatre ternes de points appartenant à l'involution du troisième ordre et du premier rang et s'étend aux ordres supérieurs.

Nous mentionnerons encore les propriétés suivantes, dont nous aurons l'occasion de tirer parti dans la suite de notre travail.

**THÉOREME XIII.** — *Lorsque deux involutions du troisième ordre et du premier rang ont un groupe commun, deux groupes non communs, pris dans chaque série, sont en involution du troisième ordre et du second rang.*

(\*) C. LE PAIGE, *Sur certains covariants d'un système cubo-biquadratique*, BULL. DE L'ACAD., t. XLVI, p. 769.

(\*\*) F. FOLIE, *Éléments d'une théorie des faisceaux*, p. 66.

THÉORÈME XIV. — *Si quatre ternes de points sont en involution, du troisième ordre et du second rang, on peut toujours trouver un terna de points en involution du premier rang, avec chaque couple de ternes de points fixes pris dans cette involution (\*)*.

Nous avons

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0;$$

d'où

$$ka_i + k'b_i + k''c_i + k'''d_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Par suite, si nous posons

$$lA_i + ka_i + k'b_i = 0,$$

nous avons

$$lA_i - k''c_i - k'''d_i = 0.$$

(\*) Le théorème géométrique équivalent est dû à M. CREMONA, *Einführung in eine Theorie der ebenen Curven*, p. 131.

---



### CHAPITRE III.

#### RAPPORT ANHARMONIQUE DU TROISIÈME ORDRE.

Nous avons, dans quelques travaux antérieurs, étudié spécialement pour le troisième ordre, la notion du rapport anharmonique et sa liaison avec la théorie de l'homographie et de l'involution.

Cependant, nous n'avions pu, jusqu'ici, faire du rapport anharmonique du troisième ordre, une étude analogue à celle que M. CAYLEY et, après lui, CLEBSCH ont fait du rapport anharmonique du second ordre (\*).

Nous nous proposons aujourd'hui d'entreprendre ce travail (\*\*).

On sait que si l'on représente par

$$x_1, x_2, x_3, x_4,$$

les racines de l'équation

$$a_i^2 = 0, \dots \dots \dots (29)$$

le rapport anharmonique  $\sigma$ , des quatre points représentés par les racines, est donné par l'équation réciproque du sixième ordre

$$\frac{(1 - \sigma + \sigma^2)^3}{(1 + \sigma)^2(2 - \sigma)^2(1 - 2\sigma)^2} = \frac{i^3}{24j^2}, \dots \dots \dots (30)$$

(\*) CAYLEY. V. *Mem. upon Quantics*, PHILOS. TRANS. t. CXLVIII.

CLEBSCH, *Theor. der binären algebraischen Formen*, p. 169, et *Journal de Crelle*, t. LIX.

La théorie purement analytique de cette fonction de quatre lettres avait déjà été donnée par M. HERMITE, dans son beau travail *Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées*, J. DE CRELLE, t. LII, pp. 1 et suiv.

(\*\*) La plupart des résultats contenus dans ce chapitre sont consignés dans un pli cacheté, déposé par M. C. Le Paige dans la séance du 1<sup>er</sup> février 1879.

où  $i$  et  $j$  représentent les invariants

$$(ab)^4, \quad (ab)^2(bc)^2(ca)^2$$

de la quartique

$$a_1^4 = b_1^4 = c_1^4 = \dots$$

L'équation (30) donne, en même temps, l'interprétation géométrique des deux relations

$$i = 0, \quad j = 0;$$

elle permet, en outre, de trouver l'expression de ces deux invariants au moyen des fonctions

$$u = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4), \quad v = (x_1 - x_4)(x_2 - x_3),$$

et de l'invariant absolu  $\frac{i^2}{j^2}$  au moyen du rapport  $\sigma$ , comme l'exige la théorie des formes algébriques.

Sans avoir résolu toutes les questions analogues, pour le troisième ordre, nous avons néanmoins abordé la plupart d'entre elles et nous en avons poursuivi assez loin l'étude.

Bien que le degré élevé des équations auxquelles on arrive ne permette pas de tirer, des résultats obtenus, toute l'utilité qu'on aurait pu s'en promettre, nous avons cru nécessaire de compléter, autant que possible, le travail que nous avons entrepris.

Tout d'abord, nous désirions présenter, dans tous leurs détails, les notions qui pourraient trouver leur emploi dans la théorie des cubiques planes.

De plus, outre l'intérêt analytique que nous semblent offrir ces questions, les surfaces du troisième ordre, dont le mode de génération est complètement analogue à celui des coniques, pourront donner lieu à quelques études, même après les travaux si complets d'illustres géomètres, parmi lesquels nous citerons surtout STEINER et M. CREMONA, où les recherches actuelles trouvent d'utiles applications.

Soit

$$a_1^6 = 0,$$

une équation du sixième ordre, dont nous représenterons les racines par

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6.$$

Nous conviendrons de représenter, par le symbole  $(ik)$ , la différence

$$(x_i - x_k).$$

Nous avons précédemment appelé  $I_{q_1 q_2 \dots q_n}$  des expressions telles que

$$(12)(54)(56).$$

Cette notation, utile, nous semble-t-il, dans le cas général, offrirait, ici, le désavantage d'être assez compliquée : nous n'en ferons pas usage dans le présent travail.

Il est visible que l'on peut former quinze de ces quantités (\*).

Ce sont

$$\begin{array}{lll} (12) (55) (46), & (12) (54) (65), & (12) (56) (54), \\ (15) (24) (56), & (15) (25) (64), & (15) (26) (45), \\ (14) (25) (56), & (14) (25) (65), & (14) (26) (55), \\ (15) (26) (54), & (15) (25) (46), & (15) (24) (65), \\ (16) (25) (54), & (16) (25) (45), & (16) (24) (55). \end{array}$$

Nous les désignons par

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5; \quad \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \quad \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5.$$

Le quotient de deux d'entre elles est, on le voit, un des invariants que nous avons représentés par  $\mathfrak{I}_{q_1 q_2 \dots q_n}$ .

On peut former deux cent dix de ces fonctions, inverses deux à deux. Nous retrouverons plus loin, d'une autre manière, ce résultat, évident par la théorie des combinaisons.

Cependant, parmi ces cent cinq rapports distincts, il n'en est que soixante qui contiennent les six lettres  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_6$ .

Comme il est facile d'écrire, à l'aide des quinze quantités données plus haut, ces soixante rapports anharmoniques, nous nous dispenserons de les reproduire ici.

(\*) TERQUEM avait déjà donné ce résultat, *Nouv. Ann. de math.*, 1<sup>re</sup> série, t. VI, p. 68, et t. XIII, pp. 24 et 90. Cependant le savant rédacteur des *Nouvelles Annales* ne semble pas avoir aperçu la corrélation intime qui existe entre ces fonctions et le rapport anharmonique, au double point de vue de l'Analyse et de la Géométrie.

Nous allons maintenant nous occuper, d'une façon plus spéciale, des fonctions  $\alpha, \beta, \gamma$ , et chercher les relations qui existent entre elles.

On connaît, depuis longtemps, les relations qui existent entre les rapports anharmoniques du second ordre,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$ , relations qui peuvent se déduire de l'équation (30).

Elles résultent, d'ailleurs, de l'identité

$$\begin{vmatrix} \alpha - \delta & \beta - \delta & \gamma - \delta \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Pour le troisième ordre, on peut également écrire le déterminant, identiquement nul,

$$\begin{vmatrix} \alpha - \varpi & \beta - \varpi & \gamma - \varpi & \delta - \varpi \\ \alpha - \varepsilon & \beta - \varepsilon & \gamma - \varepsilon & \delta - \varepsilon \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} \equiv 0.$$

En le développant, par le théorème de LAPLACE, on trouve :

$$\begin{aligned} & (\alpha - \varpi)(\beta - \varepsilon)(\delta - \gamma) - (\beta - \varpi)(\alpha - \varepsilon)(\delta - \gamma) + (\alpha - \varpi)(\gamma - \varepsilon)(\beta - \delta) - (\gamma - \varpi)(\alpha - \varepsilon)(\beta - \delta) \\ & + (\alpha - \varpi)(\delta - \varepsilon)(\gamma - \beta) - (\delta - \varpi)(\alpha - \varepsilon)(\gamma - \beta) + (\beta - \varpi)(\gamma - \varepsilon)(\alpha - \delta) - (\gamma - \varpi)(\beta - \varepsilon)(\alpha - \delta) \\ & + (\beta - \varpi)(\delta - \varepsilon)(\gamma - \alpha) - (\delta - \varpi)(\beta - \varepsilon)(\gamma - \alpha) + (\gamma - \varpi)(\delta - \varepsilon)(\beta - \alpha) - (\delta - \varpi)(\gamma - \varepsilon)(\beta - \alpha) \equiv 0; \end{aligned}$$

ou, en remplaçant  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho, \omega$ , par les symboles 1, 2, 3, 4, 5, 6,

$$\begin{aligned} & (16)(25)(54) - (15)(26)(43) + (16)(24)(53) - (15)(24)(56) \\ & + (16)(43)(52) - (15)(52)(46) + (14)(26)(55) - (14)(25)(56) \\ & + (15)(26)(54) - (14)(46)(55) + (12)(56)(54) - (12)(55)(64) \equiv 0. \end{aligned}$$

Cependant, il existe d'autres relations, plus simples, que nous avons eu déjà l'occasion de publier.

On trouve, par exemple,

$$\begin{aligned} & (12)(34)(56) + (14)(56)(52) + (16)(52)(54) = (14)(52)(56) + (12)(56)(54) + (16)(54)(52), \\ & [(12)(54)(56)][(14)(56)(52)][(16)(52)(54)] = [(14)(52)(56)][(12)(56)(54)][(16)(54)(52)]. \end{aligned}$$

Au reste, ces identités dérivent des relations, au nombre de quinze, qui lient les quantités  $\alpha, \beta, \gamma$ , et qui ont la forme

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0, \quad \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 0, \quad \text{etc.}$$

Il est facile d'écrire les autres.

Nous ne nous arrêterons pas à faire voir qu'elles se réduisent, en réalité, à dix relations linéaires.

Par une méthode dont nous ferons encore usage plus bas, on en peut déduire les valeurs  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_5; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_5$ , en fonction de  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ .

On trouve ainsi :

$$\left. \begin{aligned} 2\beta_1 &= -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5, \\ 2\beta_2 &= -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \\ 2\beta_3 &= \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5, \\ 2\beta_4 &= -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5, \\ 2\beta_5 &= \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5, \\ 2\gamma_1 &= -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5, \\ 2\gamma_2 &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5, \\ 2\gamma_3 &= -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5, \\ 2\gamma_4 &= \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5, \\ 2\gamma_5 &= -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (51)$$

Il nous reste à chercher la liaison qui existe entre les  $\alpha$ ; pour cela, transformons les variables de la sextique, par une substitution unimodulaire, et telles qu'aux valeurs  $x_1, x_2$ , correspondent les valeurs  $\infty, 0$ .

Les quantités  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ , n'auront pas varié par la substitution et nous sommes conduits aux équations :

$$\left. \begin{aligned} a) \dots \dots \dots x_3x_4 - x_3x_6 - x_4x_5 + x_5x_6 &= \alpha_1, \\ b) \dots \dots \dots -x_4x_5 + x_4x_6 &= \alpha_2, \\ c) \dots \dots \dots -x_4x_5 + x_4x_6 &= \alpha_3, \\ d) \dots \dots \dots -x_5x_6 + x_4x_6 &= \alpha_4, \\ e) \dots \dots \dots -x_5x_6 + x_5x_4 &= \alpha_5 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (52)$$

La combinaison de *b*) et *d*), donne

$$(x_4x_6)^2 - (\alpha_2 + \alpha_4)x_4x_6 + \alpha_2\alpha_4 = x_5x_5 \cdot x_4x_6 \dots \dots \dots (53)$$

On a de même

$$(x_3x_6)^2 + (\alpha_3 + \alpha_5)x_3x_5 + \alpha_3\alpha_5 = x_3x_5 \cdot x_4x_6. \quad (34)$$

Enfin, la combinaison des cinq équations (32) conduit à

$$2x_4x_6 - 2x_3x_5 = \Sigma\alpha - 2\alpha_1. \quad (35)$$

Posons

$$\begin{aligned} x_4x_6 = y, \quad x_3x_5 = x, \quad \alpha_2\alpha_4 = A', \quad \alpha_2 + \alpha_4 = B', \\ \alpha_3\alpha_5 = A, \quad \alpha_3 + \alpha_5 = B, \quad \frac{\Sigma\alpha - 2\alpha_1}{2} = S. \end{aligned}$$

Nous aurons

$$\left. \begin{aligned} x^2 + Bx + A - xy &= 0, \\ y^2 - B'y + A' - xy &= 0, \\ y - x &= S; \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

ou

$$\begin{aligned} (B - S)x + A &= 0, \\ (S - B')x - (B'S - S^2 - A') &= 0. \end{aligned}$$

Le résultant de ces deux équations est donc nul, et l'on a

$$(B - S)(B'S - S^2 - A') + A(S - B') = 0. \quad (37)$$

Soient, par exemple,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 5, \quad x_4 = 4, \quad x_5 = 5, \quad x_6 = 6.$$

On en conclut

$$\begin{aligned} \alpha_1 = 4, \quad \alpha_2 = 4, \quad \alpha_3 = 27, \quad \alpha_4 = 16, \quad \alpha_5 = -5. \\ A = -155, \quad B = 22, \quad A' = 64, \quad B' = 20, \quad S = 19. \end{aligned}$$

En substituant dans (37), on obtient

$$3(20 \cdot 19 - 19^2 - 64) + 155 = -5 \cdot 45 + 155 = 0.$$

En remplaçant, dans (37), A, B, A', B', S par leurs valeurs et dévelop-

pant, on voit que cette identité devient :

$$\begin{aligned} & \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \alpha_4^3 + \alpha_5^3 - \alpha_1^2(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) - \alpha_2^2(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \\ & - \alpha_3^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5) - \alpha_4^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5) - \alpha_5^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \\ & + 2(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2\alpha_5 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_5 + \alpha_1\alpha_4\alpha_5 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_5 + \alpha_2\alpha_4\alpha_5 + \alpha_3\alpha_4\alpha_5) \equiv 0, \end{aligned}$$

ou encore

$$2\Sigma\alpha^3 - \Sigma\alpha^2\Sigma\alpha + 2\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \equiv 0. \quad \dots \dots \dots (58)$$

Les relations (31) et (38) permettent, comme l'on voit, de ramener les quinze fonctions  $\alpha, \beta, \gamma$ , à quatre d'entre elles, et les deux cent dix rapports anharmoniques aux trois rapports

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_4}, \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_4}.$$

Il est visible que toute fonction symétrique,  $\Theta$ , de ces quantités  $\alpha, \beta, \gamma$ , reste invariable par les substitutions, opérées sur les racines de la sextique, qui laissent invariable la racine carrée du discriminant de cette forme.

Nous savons donc, par un théorème de LAGRANGE, que ces fonctions pourront s'exprimer rationnellement au moyen des coefficients de la sextique, en s'adjoignant la racine carrée du discriminant (\*).

En conséquence; si  $\Delta$  représente le discriminant de  $a_x^6$ , les quantités  $\alpha, \beta, \gamma$  seront racines d'une équation qui peut s'écrire :

$$z^{15} + a_2z^{13} + a_4z^{11} + a_6\sqrt{\Delta}z^{10} + a_8z^9 + \dots + a_{15}\sqrt{\Delta} = 0. \quad \dots \dots (59)$$

Nous pourrions, en nous fondant sur les propriétés des racines de cette équation, en calculer les coefficients.

En effet, si l'on remplace les variables  $x, y$ , de la sextique, par des variables nouvelles  $X, Y$ , liées aux premières par les relations

$$\begin{aligned} x &= mX + nY, \\ y &= m'X + n'Y, \end{aligned}$$

(\*) LAGRANGE, Œuvres, t. III, p. 574. V. aussi C. JORDAN, *Traité des substitutions*, p. 265.

et si l'on représente par  $\delta$ , le déterminant

$$\begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix},$$

les racines de l'équation (39) deviennent

$$\delta^5 z_1, \quad \delta^5 z_2, \quad \text{etc.}$$

Par suite, l'équation transformée

$$Z^{15} + a_2' Z^{15} + a_4' Z^{11} + a_6' \sqrt{\Delta'} Z^{10} + \dots + a_{15}' \sqrt{\Delta'} = 0,$$

a pour racines

$$\delta^5 z_1, \quad \delta^5 z_2, \quad \dots$$

on en déduit

$$a_2' = \delta^6 a_2, \quad a_4' = \delta^{12} a_4, \quad a_6' = a_6, \quad \text{etc.}$$

En conséquence, les coefficients  $a_2, a_4, a_6$ , sont des invariants de la sextique, respectivement du second, du quatrième, du sixième ordre.

Cependant, il nous a semblé plus rapide de nous servir des résultats obtenus par le P. JOUBERT, dans son beau travail *Sur l'équation du sixième degré* (\*).

Dans ce Mémoire, l'auteur représente par

$$u_0, u_1, u_2, u_3, u_4; \quad v_0, v_1, \dots, v_4; \quad w_0, w_1, \dots, w_4,$$

des fonctions telles que

$$a_0 [(12)(34)(56) - (14)(56)(32)],$$

et forme, à l'aide de ces quantités, des fonctions nouvelles,

$$U, U_0, U_1, U_2, U_3, U_4,$$

racines de l'équation

$$U^6 + 2.5.5AU^4 + 2^2.5^2.5(5A^2 - 25B)U^2 + \sqrt{\Delta}U + 2^3.5^3.5(250C + 25AB - A^3) = 0. \quad (40)$$

(\*) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 1867.



Dans cette équation

$$A = (ab)^6, \quad B = (i'i')^4, \quad C = (i'i')^2(i''i'')^2(i''i'')^2,$$

$i$  étant égal à

$$(ab)^4 a^2 b^2.$$

Or, il résulte du travail de ce savant géomètre que les sommes des racines prises deux à deux, de l'équation en  $U$ , sont précisément les fonctions que nous avons eu à considérer.

En employant la méthode de LAGRANGE, on calcule aisément les coefficients de l'équation (39).

Nous posons, pour abrégé :

$$\begin{aligned} 2.5.5A &= A', \\ 2^2.5^2.5(5A^2 - 25B) &= B', \\ 2^3.5^3.5(250C + 25AB - A^3) &= C'. \end{aligned}$$

En désignant par  $S_p$  les sommes des puissances  $p^{\text{ièmes}}$  des racines de l'équation (40), par  $\Sigma_p$ , les sommes des puissances  $p^{\text{ièmes}}$  des racines de l'équation (39), et conservant à  $a_2, a_4, a_5$ , etc., la même signification que tantôt, nous trouvons :

$$\begin{aligned} S_1 &= 0, \\ S_2 &= -2A', \\ S_3 &= 0, \\ S_4 &= 2A'^2 - 4B', \\ S_5 &= 5\sqrt{\Delta}, \\ S_6 &= -2A'^3 + 6A'B' - 6C', \\ S_7 &= -7A'\sqrt{\Delta}, \\ S_8 &= 2A'^4 - 8A'^2B' + 4B'^2 + 8A'C', \\ S_9 &= 9A'^2\sqrt{\Delta} - 9B'\sqrt{\Delta}, \\ S_{10} &= -2A'^5 + 10A'^3B' - 10A'B'^2 - 10A'^2C' + 10B'C' + 5\Delta, \\ S_{11} &= -11A'^3\sqrt{\Delta} + 22A'B'\sqrt{\Delta} - 11C'\sqrt{\Delta}, \\ S_{12} &= 2A'^6 - 12A'^4B' + 18A'^2B'^2 + 12A'^2C' - 24A'B'C' - 12A'\Delta - 4B'^3 + 6C'^2, \\ S_{13} &= (15A'^4 - 59A'^2B' + 26A'C' + 15B'^2)\sqrt{\Delta}, \\ S_{14} &= -2A'^7 + 14A'^5B' - 28A'^3B'^2 - 14A'^4C' + 42A'^2B'^2C' + 21A'^2\Delta + 14A'B'^3 \\ &\quad - 14A'C'^2 - 14B'^2C' - 14B'\Delta. \\ S_{15} &= (-15A'^5 + 60A'^3B' - 45A'^2C' - 45A'B'^2 + 50B'C' + 5\Delta)\sqrt{\Delta}. \end{aligned}$$

On en déduit les valeurs suivantes de  $\Sigma_p$ ; nous les avons calculées jusqu'à  $p = 14$ , ces valeurs étant les seules qui doivent servir à la détermination des  $a$ .

$$\Sigma_1 = 0, \quad \Sigma_2 = -8A', \quad \Sigma_3 = 0, \quad \Sigma_4 = 8A'^2 + 8B'.$$

$$\Sigma_5 = -50A'\sqrt{\Delta}, \quad \Sigma_6 = -8A'^3 - 56A'B' + 156C'.$$

$$\Sigma_7 = 196A'\sqrt{\Delta}, \quad \Sigma_8 = 8A'^4 + 80A'^2B' - 640A'C' + 72B'^2,$$

$$\Sigma_9 = -(486A'^2 + 270B')\sqrt{\Delta},$$

$$\Sigma_{10} = -8A'^5 - 140A'^3B' - 540A'B'^2 + 1820A'^2C' - 20B'C' + 620\Delta.$$

$$\Sigma_{11} = (968A'^3 + 1694A'B' + 25058C')\sqrt{\Delta},$$

$$\Sigma_{12} = 8A'^6 - 5744A'^4B' + 996A'^3B'^2 - 4476A'^2C' + 4416A'B'C' - 5876A'\Delta \\ + 248B'^3 + 4580C'^2.$$

$$\Sigma_{13} = (-15^2 \cdot 109A'^3 + 15 \cdot 1908A'^2B' + 15 \cdot 17916A'C' - 15 \cdot 1219B'^2)\sqrt{\Delta}.$$

$$\Sigma_{14} = -8A'^7 - 1400A'^5B' - 14 \cdot 47A'^3B'^2 + 14 \cdot 594A'^4C' + 14 \cdot 656A'^2B'C' \\ + 14 \cdot 1055A'^2\Delta - 14 \cdot 126A'B'^3 - 14 \cdot 2188A'C'^2 + 14 \cdot 178B'^2C' + 14 \cdot 1056B'\Delta.$$

Nous avons cru utile de reproduire ces deux séries de valeurs, qui seront peut-être de nature à être employées dans d'autres recherches.

A l'aide de ces quantités, on forme les coefficients  $a_2, a_4$ , etc.

On trouve ainsi :

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 4A', \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 6A'^2 - 2B', \quad a_5 = 10,$$

$$a_6 = 4A'^3 - 2A'B' - 26C', \quad a_7 = -12A', \quad a_8 = A'^4 + 2A'^2B' - 24A'C' - 7B'^2,$$

$$a_9 = -2A'^3 - 10B', \quad a_{10} = 2A'^3B' - 6A'B'^2 - 18A'^2C' + 54B'C' - 12\Delta.$$

$$a_{11} = -2A'B' + 2558C'.$$

$$a_{12} = -294A'^4B' + A'^2B'^2 + 48A'^2C' - 218A'B'C' - 5A'\Delta - 4B'^3 - 27C'^2,$$

$$a_{13} = -15 \cdot 99A'^4 + 2576A'^2B' + 26540A'C' - 1089B'^2,$$

$$a_{14} = -A'^2\Delta - 712B'\Delta,$$

$$a_{15} = -411\Delta.$$

Il resterait à former l'équation qui a pour racines les rapports anharmoniques du troisième ordre que l'on peut former en combinant les six racines de la sextique de toutes les manières possibles.

Soit, pour un instant,

$$F(z) = 0,$$

l'équation (39), et représentons par  $z_1, z_2, \dots, z_{15}$ , les racines de cette équation.

Il est visible que l'équation

$$F(z_1x) = 0$$

aura pour racines les rapports  $\frac{z_1}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}, \dots, \frac{z_{15}}{z_1}$ , parmi lesquels le rapport 1.

Par suite

$$\frac{F(z_1x)F(z_2x) \dots F(z_{15}x)}{(x-1)^{15}} = 0$$

sera l'équation qui aura pour racines les rapports anharmoniques des six points.

On voit que cette équation est du deux cent dixième ordre; on s'aperçoit aussi, par le mode de formation, qu'elle est réciproque.

Symboliquement, elle peut s'écrire

$$\frac{R \{F(z_1), F(z_{15})\}}{(x-1)^{15}} = 0. \quad \dots \quad (41)$$

L'équation (41) a des racines telles que

$$\frac{(12)(54)}{(15)(24)}, \quad \frac{(15)(24)}{(14)(25)}, \quad \frac{(14)(25)}{(12)(54)} \text{ et leurs inverses.}$$

Elle est donc divisible par le facteur

$$24(1-x+x^2)^2 - i^3(1-x)^2(2-x)^2(1-2x)^2,$$

où  $i$  et  $j$  représentent le quadrinvariant et le cubinvariant de

$$\frac{(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 | x, y)^6}{(xy_3 - x_3y)(xy_6 - x_6y)}, \quad \dots \quad (D)$$

et par tous les autres facteurs analogues répondant aux combinaisons 1, 2; 3, 4, etc., au nombre de quinze.

Le produit de ces quinze facteurs est évidemment un polynôme du quatre-

vingt-dixième ordre, dont tous les coefficients sont des fonctions symétriques des racines de l'équation

$$\alpha_i^6 = 0,$$

et par conséquent exprimables en fonction des coefficients de la sextique.

Il en résulte que le premier membre de l'équation (41) est décomposable en deux facteurs, respectivement du cent vingtième ordre et du quatre-vingt-dixième, dont le premier, égal à zéro, a pour racines les cent vingt rapports anharmoniques du troisième ordre.

Revenons à l'équation (39), que nous écrirons

$$V_1(z) = f(z) + V\sqrt{\Delta} \varphi(z) = 0, \dots \dots \dots (42)$$

et voyons quelle pourrait être la signification géométrique du discriminant de la forme  $V_1(z)$ .

Les différences des racines de l'équation (42) sont de la forme suivante :

$$(\alpha_1 - \alpha_2), (\alpha_1 - \alpha_3), \text{ etc.}$$

Parmi ces différences, il en existe quinze qui sont les facteurs de l'invariant gauche E de la sextique.

Ces facteurs, d'après une remarque du P. JOUBERT, ne sont autre chose que les différences des racines de l'équation en U.

Or, ces racines peuvent s'écrire, en changeant un peu la notation,

$$\begin{aligned} 8U_1 &= 2\Sigma\alpha, \\ 8U_2 &= 8\alpha_1 - 2\Sigma\alpha, \\ 8U_3 &= 8\alpha_2 - 2\Sigma\alpha, \\ 8U_4 &= 8\alpha_3 - 2\Sigma\alpha, \\ 8U_5 &= 8\alpha_4 - 2\Sigma\alpha, \\ 8U_6 &= 8\alpha_5 - 2\Sigma\alpha. \end{aligned}$$

Les différences sont donc

$$8\alpha_1 - 4\Sigma\alpha, \quad 8\alpha_2 - 4\Sigma\alpha, \quad \dots \dots \quad 8\alpha_5 - 4\Sigma\alpha,$$

et les différences des  $\alpha$ .

Les premières sont

$$4(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5), \quad 4(\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5), \quad 4(\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_5), \\ 4(\alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_5), \quad 4(\alpha_5 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4),$$

ou

$$2(\beta_2 - \alpha_4), \quad 2(\gamma_3 - \alpha_5), \quad 2(\gamma_2 - \alpha_1), \quad 2(\gamma_1 - \alpha_2), \quad 2(\beta_1 - \alpha_3).$$

Mais on a

$$\gamma_4 - \alpha_5 = \beta_3 - \alpha_2 = \gamma_2 - \alpha_3 = \beta_5 - \alpha_4, \\ \gamma_2 - \beta_4 = \alpha_1 - \alpha_2 = \beta_3 - \gamma_4 = \gamma_4 - \gamma_3,$$

et ainsi de suite.

Par conséquent, chaque facteur de l'invariant gauche entre quatre fois dans le produit des différences des racines de (42), et huit fois dans le discriminant.

On a donc

$$\Delta(V_1) = E^8 P.$$

P contient le produit des carrés des quarante-cinq autres différences.

Parmi celles-ci figure

$$\alpha_1 - \beta_1, \quad \alpha_1 - \gamma_1, \quad \beta_1 - \gamma_1, \quad \alpha_2 - \beta_2, \quad \alpha_2 - \gamma_2, \quad \text{etc.},$$

au nombre de quinze.

Puis

$$\alpha_1 - \beta_2, \quad \alpha_1 - \beta_4, \quad \beta_1 - \beta_4, \quad \text{etc.}$$

Le produit des quinze premiers contient donc

$$(12)^3 (15)^3 (14)^3 (13)^3 (16)^3 \dots,$$

puis

$$(25)^3 (24)^3 (23)^3 (26)^3, \quad \text{etc.}$$

Par suite

$$\Delta(V_1) = E^8 \Delta^3 P'.$$

Il reste encore à chercher la signification géométrique de P'.

Or, par exemple,

$$\alpha_1 - \beta_3 = (46) \{ (12)(35) + (15)(25) \}.$$

La partie entre crochets s'annule lorsque quatre des points représentés par la sextique sont conjugués harmoniques du second ordre.

Par conséquent  $P' = 0$  indique que quatre des six points représentés par la sextique sont conjugués harmoniques.

Dans ce cas, l'un des facteurs  $j$  des équations (D) s'annule.

D'où

$$P' = (j_1 j_2 \dots j_{15})^2.$$

D'après le mode de formation, il est visible que le produit des  $j$  est une fonction symétrique des racines de  $a_x^6$  et un invariant de cette forme.

L'équation

$$V_2(z) = f(z) - \sqrt{\Delta} \gamma(z) \dots \dots \dots (45)$$

a les mêmes racines que l'équation (42), prises en signe contraire.

Formons encore l'équation

$$V = f^2(z) - \Delta \gamma^2(z) \dots \dots \dots (44)$$

D'après un théorème connu

$$\Delta(V) = \Delta(V_1) \Delta(V_2) R^2(V_1, V_2).$$

Il est visible que

$$\Delta(V_1) = \Delta(V_2).$$

Il reste encore à examiner la forme des facteurs de

$$R(V_1, V_2).$$

Les racines de (42) étant

$$\alpha_1, \alpha_2 \dots \gamma_5,$$

celles de (43) seront

$$-\alpha_1, -\alpha_2, \dots -\gamma_5.$$

Par conséquent

$$R(V_1, V_2) = 2^{15} \alpha_1 \alpha_2 \dots \gamma_5 [(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_1 + \beta_2) \dots (\gamma_4 + \gamma_5)]^2.$$

Or, parmi ces facteurs,

$$\alpha_1 + \beta_1 = -\gamma_1, \quad \alpha_3 + \gamma_4 = -\gamma_1, \quad \alpha_5 + \gamma_2 = -\gamma_1.$$

En conséquence, R est divisible par  $\gamma_1^7$ , et de même par  $\alpha_1^7, \beta_1^7$ , etc.

Des cent cinq facteurs de la quantité entre crochets, il en reste soixante correspondants aux facteurs de E.

Nous avons, par exemple,

$$\alpha_1 + \alpha_2, \quad \gamma_2 + \beta_3, \quad \beta_3 + \gamma_4, \quad \gamma_4 + \gamma_5.$$

Lorsque  $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ , les six points sont en *évolution*.

De même, lorsque

$$\gamma_2 + \beta_3 = (15)(25)(46) + (15)(26)(45) = 0.$$

Donc

$$R(V_1, V_2) = 2^{15} (\alpha_1 \alpha_2 \dots \gamma_5)^7 \Pi^2.$$

Or

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \gamma_5 = 411 \sqrt{\Delta}.$$

Par suite

$$\Delta(V) = \Delta^2(V_1) 2^{50} \cdot 411^{14} \Delta^{21} \Pi^4.$$

Or

$$\Delta(V_1) = E^{16} \Delta^6 P'^2.$$

On a enfin

$$\Delta(V) = m \cdot E^{16} \Delta^{27} P'^2 \Pi^4. \quad (15)$$

Nous avons désigné, dans un autre travail, par fonction anharmonique, la somme que l'on obtient en multipliant chacun des invariants tels que  $\alpha, \beta, \gamma$ , par une constante et ajoutant entre eux ces différents produits, en ayant soin de choisir ces constantes de telle sorte que la somme soit nulle.

Reprenons cette notion.

Séparons, pour cela, les variables  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ , en deux groupes, par exemple de la manière suivante :

$$(x_1, x_3, x_5), \quad (x_2, x_4, x_6),$$

et formons les fonctions

$$(12)(54)(56) = 1_{246},$$

$$(14)(56)(52) = 1_{62},$$

et ainsi de suite.

La fonction anharmonique est

$$m_{216}I_{216} + m_{462}I_{462} + \dots = 0.$$

Nous pouvons observer que, pour le second ordre, les quatre points représentés par une quartique

$$a_x^4 = 0,$$

seront conjugués harmoniques, si

$$m_{24} = m_{42}.$$

Nous avons étendu cette définition aux ordres supérieurs.

Nous dirons donc, dans le cas actuel, que six points sont conjugués harmoniques lorsque

$$m_{46} = m_{62} = \dots$$

Mais alors la fonction anharmonique ne diffère que par un facteur numérique de

$$x_1x_2x_3 - \frac{1}{5}(x_1x_5 + x_5x_3 + x_3x_1)(x_2 + x_4 + x_6) + \frac{1}{5}(x_1 + x_5 + x_3)(x_2x_4 + x_4x_6 + x_6x_2) - x_2x_4x_6.$$

On peut encore considérer la fonction anharmonique particulière

$$M_{246}I_{246} + M_{462}I_{462} + M_{624}I_{624} = 0,$$

que nous appellerons *cyclique*, parce qu'elle ne contient que les invariants  $I_{q_1q_2q_3}$  à permutations cycliques des éléments  $q_1, q_2, q_3$ .

Lorsque

$$M_{246} = M_{462} = M_{624},$$

les six points sont conjugués harmoniques.

Nous rappellerons encore la condition nécessaire et suffisante pour que six points représentés par la sextique

$$a_x^6,$$

soient conjugués harmoniques du troisième ordre.



Comme nous l'avons fait voir, cette condition s'exprime par la réduction à zéro, d'un invariant du dixième ordre de la sextique.

Les facteurs de cet invariant, au nombre de dix, sont de la forme

$$(12)(54)(36) + (14)(56)(32) + (16)(52)(34).$$

Or, il est bien facile de faire voir que ces facteurs ne sont autre chose que les sommes des racines de l'équation (40), prises trois à trois.

En nous appuyant sur cette remarque, nous avons calculé l'invariant  $\mathfrak{D}$ , lié aux invariants A, B, C,  $\Delta$ , par l'équation

$$\mathfrak{D} = \Delta + (250C + 25AB - A^3) \{ 5^5 \cdot 6^5 \cdot A^2 - 4 \cdot 5^2 \cdot 6^5 \cdot (5A^2 - 25B) \} \quad (*) \quad (46)$$

(\*) Voir C. LE PAIGE, *Sur un invariant du dixième ordre d'une sextique binaire*, MÉM. DE LA SOC. ROY. DES SCIENCES DE LIÈGE, 2<sup>m</sup>e série, t. IX.



NOTE

SUR

LA QUADRATURE DES COURBES PARABOLIQUES

PAR

EUGÈNE CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.

---

Présenté à la Classe des sciences le 7 octobre 1881.

---



# NOTE

SUR

## LA QUADRATURE DES COURBES PARABOLIQUES (\*).

1. Soit la parabole représentée par

$$y = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots + a_{2n-1}x^{2n-1}, \dots \dots \dots (1)$$

$n$  étant *impair* (\*\*).

Si l'on suppose que les ordonnées extrêmes répondent à  $x = x_0$ ,  $x = x_n$ , l'aire de la courbe sera

$$A = \int_{x_0}^{x_n} y dx. \dots \dots \dots (2)$$

Il s'agit de mettre cette expression sous la forme

$$A = \sum_0^n y_k; \dots \dots \dots (5)$$

(\*) Ce petit travail, dont un extrait a été communiqué au Congrès de Reims, a pour origine : 1° une Note du général Parmentier; 2° une correspondance avec M. Lucien Lévy, professeur au Lycée de Rennes. En cherchant à simplifier une formule trouvée par M. Lévy, j'ai rencontré un théorème de Gauss, et quelques propositions que je crois nouvelles.

(\*\*) Cette hypothèse simplifie un peu la formule finale.

$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  étant des *constantes inconnues*, et  $y_0, y_1, \dots, y_n$  des ordonnées *arbitraires*, répondant à des abscisses *convenablement choisies* (\*).

2. Si l'on fait

$$a_{n+1}x^{n+1} + \dots + a_{2n-1}x^{2n-1} = X, \quad \dots \dots \dots (4)$$

de manière que

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = y - X, \quad \dots \dots \dots (5)$$

on a, par la formule d'interpolation de Lagrange :

$$y - X = \sum_0^n (y_k - X_k) \frac{F(x)}{(x - x_k)F'(x_k)}, \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$X = \int_{x_0}^{x_n} \left[ X + \sum_0^n (y_k - X_k) \frac{F(x)}{(x - x_k)F'(x_k)} \right] dx, \quad \dots \dots \dots (7)$$

en posant

$$F(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n), \quad \dots \dots \dots (8)$$

3. D'après les égalités (3), (7), les valeurs des *constantes* sont données par la formule

$$\lambda_k = \int_{x_0}^{x_n} \frac{F(x)}{(x - x_k)F'(x_k)} dx. \quad \dots \dots \dots (9)$$

En outre, la fonction  $F(x)$  doit satisfaire à la condition

$$\int_{x_0}^{x_n} \left[ X - \sum_0^n \frac{X_k F(x)}{(x - x_k)F'(x_k)} \right] dx = 0. \quad \dots \dots \dots (10)$$

4. Soit  $\varphi(x)$  le polynôme entre parenthèses. Il est visible que si l'on fait  $x = x_0, x = x_1, \dots, x = x_n$ , ce polynôme s'annule. Ainsi, 1° :

$$\varphi(x) = F(x)\psi(x), \quad \dots \dots \dots (11)$$

(\*) Problème résolu par GAUSS (BERTRAND, *Calcul intégral*, p. 540).

$\psi(x)$  désignant un polynôme entier. Divisant par  $F(x)$ , on trouve

$$\psi(x) = \frac{X}{F(x)} - \sum_0^n \frac{X_k}{(x - x_k)F'(x_k)} \dots \dots \dots (12)$$

$Q$  étant le quotient entier de  $X$  par  $F(x)$ , et  $R$  le reste de la division, on peut supposer la fraction  $\frac{R}{F(x)}$  décomposée en fractions simples, de la forme  $\frac{\Lambda_k}{x - x_k}$ . On doit avoir, *identiquement*,

$$\psi(x) = Q + \sum_0^n \frac{1}{x - x_k} \left[ \Lambda_k - \frac{X_k}{F'(x_k)} \right] \dots \dots \dots (15)$$

Donc, 2° : le polynôme  $\psi(x)$  est le quotient entier de  $X$  par  $F(x)$ .

De plus,

$$\Lambda_k = \frac{X_k}{F'(x_k)} \dots \dots \dots (14)$$

3. REMARQUES. — I. D'après la dernière formule, si  $X$  est divisible par  $x - k$ , on aura  $\Lambda_k = X_k = 0$ ; ce qui doit être.

II. D'après les hypothèses faites sur  $X$  et  $F(x)$ , le degré de  $\psi(x)$  est  $(2n - 1) - (n + 1)$ , c'est-à-dire  $n - 2$ .

III. Au moyen des simplifications précédentes, l'équation de condition (10) devient

$$\int_0^{x_n} F(x)\psi(x)dx = 0. \dots \dots \dots (15)$$

6. Jusqu'à présent, nous n'avons fait aucune hypothèse sur les limites  $x_0, x_n$ . Afin d'obtenir des résultats et des règles simples, nous supposons, désormais,

$$x_0 = -1, \quad x_n = +1 (*).$$

(\* Ceci n'altère en rien la généralité des résultats; car on peut toujours prendre, pour unité, la moitié de la distance comprise entre les ordonnées extrêmes.

Les formules (8), (9), (15) sont remplacées par

$$\lambda_k = \int_{-1}^{+1} \frac{F(x)}{(x - x_k)F'(x_k)} dx, \dots \dots \dots (16)$$

$$F(x) = (x^2 - 1)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}), \dots \dots \dots (17)$$

$$\int_{-1}^{+1} F(x) \psi(x) dx = 0. \dots \dots \dots (18)$$

Les conditions (17) et (18) seront remplies si l'on prend

$$F(x) = \theta \frac{d^{n-1}(x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}}, \dots \dots \dots (19)$$

$\theta$  étant un coefficient numérique ; ou, ce qui est équivalent,

$$F(x) = \theta_1 \int_{-1}^x X_n dx (*), \dots \dots \dots (20)$$

$X_n$  désignant, cette fois, la *fonction de Legendre*.

En effet, toutes les dérivées de  $(x^2 - 1)^n$ , jusqu'à l'ordre  $n - 1$ , inclusivement, contiennent  $x^2 - 1$  en facteur ; donc, si l'on intègre par parties, on aura

$$\int_{-1}^{+1} F(x) \psi(x) dx = -\theta \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-2}(x^2 - 1)^n}{dx^{n-2}} \psi'(x) dx;$$

et ainsi de suite (\*\*).

(\*)  $\theta = \frac{1}{2^n(2n-1)\dots(n+2)}$ . Quant au second coefficient, à cause de

$$X_n = \frac{1}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \dots n} \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n} = \frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \dots n} (x^n - \dots),$$

il a pour valeur

$$\theta_1 = 2^{n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \dots (n-1)}{(n+2)(n+5)\dots(2n-1)}.$$

(\*\*) C'est de cette manière que Jacobi a démontré quelques-unes des propriétés de la fonction  $X_n$  (*Journal de Liouville*, t. II, p. 406).



7. REMARQUE. D'après la formule (20), la fonction  $F(x)$ , ou plutôt *le* polynôme  $F_{n+1}$  est, à un facteur près, le coefficient de  $z^{n+1}$  dans le développement de  $\sqrt{1 - 2zx + z^2}$  (\*).

8. DÉVELOPPEMENT DE  $F(x)$ . Si l'on fait  $u = (x + 1)^n$ ,  $v = (x - 1)^n$ , la formule de Leibniz :

$$\frac{d^{n-1}(uv)}{dx^{n-1}} = u \frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \frac{n-1}{1} \frac{du}{dx} \frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + \dots + \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} v,$$

donne

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} &= (x+1)^n n(n-1)\dots 2(x-1) + \frac{n-1}{1} n(x+1)^{n-1} \cdot n(n-1)\dots 5(x-1)^2 \\ &+ \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} n(n-1)(x+1)^{n-2} \cdot n(n-1)\dots 4(x-1)^3 + \dots + n(n-1)\dots 2(x+1)(x-1)^n. \end{aligned}$$

Le terme général est

$$\frac{(n-1)\dots(n-p)}{1 \cdot 2 \dots p} n(n-1)\dots(n-p+1) \times n(n-1)\dots(p+2)(x+1)^{n-p}(x-1)^{p+1}.$$

Si on le divise par  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ , il devient

$$\frac{(n-1)\dots(n-p)}{1 \cdot 2 \dots p} \cdot \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \dots (p+1)} (x+1)^{n-p}(x-1)^{p+1},$$

ou

$$\frac{1}{n} C_{n,p} \cdot C_{n,p+1} (x^2-1)(x+1)^{n-p-1}(x-1)^p.$$

Par conséquent,

$$\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)(x^2-1) \sum_{p=0}^{p=n-1} C_{n,p} \cdot C_{n,p+1} (x+1)^{n-p-1}(x-1)^p;$$

puis

$$F(x) = \frac{x^2-1}{C_{2n,n-1}} \sum_{p=0}^{p=n-1} C_{n,p} \cdot C_{n,p+1} (x+1)^{n-p-1}(x-1)^p. \quad (21)$$

(\*) Note sur les fonctions  $X_n$ .

9. REMARQUE. Dans le premier membre, le coefficient de  $x^{n+1}$  est 1. Dans le second membre, ce coefficient égale

$$\frac{1}{C_{2n, n-1}} \sum_{p=0}^{p=n-1} C_{n, p} \cdot C_{n, p+1}.$$

Conséquemment,

$$\sum_{p=0}^{p=n-1} C_{n, p} \cdot C_{n, p+1} = C_{2n, n-1};$$

formule connue.

10. Les limites  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  sont les racines de l'équation  $F(x) = 0$ , abstraction faite de  $\mp 1$ ; savoir :

$$\left. \begin{aligned} \frac{n}{1}(x+1)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{n}{1}(x+1)^{n-2}(x-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 5} \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(x+1)^{n-3}(x-1)^2 + \dots \\ + \frac{n}{1} \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (x+1)(x-1)^{n-2} + \frac{n}{1}(x-1)^{n-1} = 0. \end{aligned} \right\} (22)$$

$n$  étant *impair*, le premier membre ne change pas quand on y remplace  $x$  par  $-x$ . Cette équation, comme l'équation  $X_n = 0$ , a donc ses racines égales et de signes contraires deux à deux (\*).

11. REMARQUE. Si l'on fait  $\frac{x+1}{x-1} = z$ , on a l'équation *réciproque*

$$\frac{n}{1} z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{n}{1} z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 5} \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} z^{n-3} + \dots + \frac{n}{1} \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} z + \frac{n}{1} = 0 (**). (25)$$

12. FORMULE DE QUADRATURE. NOUS AVONS TROUVÉ

$$\lambda_k = \int_{-1}^{+1} \frac{F(x)}{(x-x_k)F'(x_k)} dx. \dots \dots \dots (16)$$

D'après la discussion précédente : 1°  $F(x)$  est une fonction *paire*; 2°  $F'(x)$

(\*) Propriété évidente par la *définition* (19).  
 (\*\*) Nouveau rapprochement entre les fonctions  $F(x)$  et  $X_n$ .

est une fonction *impair*; 3°  $x_{n-k} = -x_k$ . Par conséquent,  $\lambda_{n-k} = \lambda_k$ : la formule (3) devient

$$A = \lambda_0(y_0 + y_n) + \lambda_1(y_1 + y_{n-1}) + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{2}(y_{\frac{n-1}{2}} + y_{\frac{n+1}{2}}). \quad (24)$$

Dans celle-ci, les coefficients  $\lambda$  sont donnés par la formule (16); et les ordonnées  $y_0, y_1, \dots, y_n$  sont, comme nous l'avons dit, celles qui répondent aux racines  $x_0, x_1, \dots, x_n$  de l'équation

$$F(x) = 0, \quad \frac{d^{n-1}(x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}} = 0. \quad (25)$$

13. REMARQUE. Soit

$$Y = \sum_0^n y_k \frac{F(x)}{(x - x_k)F'(x_k)} = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n;$$

cette équation représente la parabole *déterminée* par les  $n + 1$  points  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . L'aire de cette parabole est

$$A' = \int_{-1}^{+1} Y dx = \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n = A.$$

On a donc ce théorème curieux, dont j'ai donné, en 1857, un cas particulier (\*):

*Toutes les paraboles du degré  $2n - 1$ , qui passent par  $n + 1$  points convenablement choisis, sont équivalentes à la parabole du degré  $n$ , déterminée par ces  $n + 1$  points (\*\*).*

(\*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XVI, p. 512; *Manuel des Candidats à l'École polytechnique*, t. II, p. 295.

(\*\*) Lors de sa communication au Congrès de Montpellier, M. le général Parmentier croyait le théorème *nouveau* et vrai, seulement, pour la parabole cubique.



NOTE

sur

LES FONCTIONS  $X_n$  DE LEGENDRE

PAR

EUGÈNE CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.

---

(Présenté à la Classe des sciences le 7 octobre 1880.)

---



# NOTE

SUR

## LES FONCTIONS $X_n$ DE LEGENDRE (\*).

1. RELATION ENTRE LES FONCTIONS  $X_0, X_1, \dots, X_{n+1}$ . De

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = \sum_0^\infty X_n z^n (**), \dots \dots \dots (1)$$

on déduit

$$\int u dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = -\frac{1}{z} \sqrt{1-2zx+z^2} + \text{const.},$$

$$\int_{-1}^x u dx = \frac{1+z-\sqrt{1-2zx+z^2}}{z};$$

puis

$$1+z-\sqrt{1-2zx+z^2} = \sum_0^\infty z^{n+1} \int_{-1}^x X_n dx; \dots \dots \dots (2)$$

puis encore, en divisant par le radical :

$$(1+z)u - 1 = u \sum_0^\infty z^{n+1} \int_{-1}^x X_n dx. \dots \dots \dots (5)$$

(\*) Cette Note peut être considérée comme un supplément au Mémoire sur le même sujet, récemment publié par l'Académie. Les renvois à ce premier travail sont accompagnés de la lettre *M*.

(\*\*) *M*, 1.

Cette égalité est la même chose que

$$(1 + z)(1 + X_1z + X_2z^2 + \dots + X_nz^n + \dots) - 1 = \\ [1 + X_1z + X_2z^2 + \dots + X_nz^n + \dots] \left[ z \int_{-1}^x X_0 dx + z^2 \int_{-1}^x X_1 dx + \dots + z^{n+1} \int_{-1}^x X_n dx + \dots \right].$$

Dans le premier membre, le coefficient de  $z^{n+1}$  est  $X_n + X_{n+1}$ ; dans le second, ce coefficient égale

$$X_0 \int_{-1}^x X_n dx + X_1 \int_{-1}^x X_{n-1} dx + \dots + X_n \int_{-1}^x X_0 dx.$$

Par conséquent,

$$X_n + X_{n+1} = X_0 \int_{-1}^x X_n dx + X_1 \int_{-1}^x X_{n-1} dx + \dots + X_n \int_{-1}^x X_0 dx. \quad \dots \quad (A)$$

Cette relation, qui n'est peut-être pas nouvelle, me paraît assez curieuse.

**2. DÉVELOPPEMENT DU RADICAL.** L'équation (2) peut être écrite ainsi :

$$\sqrt{1 - 2zx + z^2} = 1 + z - z \int_{-1}^x dx - \sum_0^{\infty} z^{n+1} \int_{-1}^x X_n dx;$$

ou sous cette forme un peu plus simple :

$$\sqrt{1 - 2zx + z^2} = 1 - zx - \sum_1^{\infty} z^{n+1} \int_{-1}^x X_n dx. \quad \dots \quad (B)$$

Ainsi, la série

$$z^2 \int_{-1}^x X_1 dx + z^3 \int_{-1}^x X_2 dx + \dots + z^{n+1} \int_{-1}^x X_n dx + \dots \quad \dots \quad (4)$$

est convergente, et a pour limite  $1 - zx - \sqrt{1 - 2zx + z^2}$ .

**3. EXAMEN D'UNE DIFFICULTÉ.** On a

$$\int_{-1}^x X_n dx = \frac{2^{n+1}}{(n+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} \varphi (x \cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)^{n+1} d\varphi, \quad \dots \quad (5)$$

pourvu que l'on néglige la partie imaginaire de l'intégrale (\*).

(\*) *M*, 86.



Afin de rendre plus commode cette formule, je pose

$$x \cos \varphi = \rho \cos \theta, \quad \sin \varphi = \rho \sin \theta.$$

Elle devient

$$\int_1^x X_n dx = \frac{2^{n+1}}{(n+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^{n+1} \cos^{n-1} \varphi \cdot \cos(n+1)\theta \cdot d\varphi. \quad \dots \quad (6)$$

Il résulte, de cette égalité,

$$\sum_1^{\infty} z^{n+1} \int_1^x X_n dx = \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{(2z)^{n+1}}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^{n+1} \cos^{n-1} \varphi \cdot \cos(n+1)\theta \cdot d\varphi. \quad \dots \quad (7)$$

Ordinairement, quand il s'agit de sommer une série convergente dont le terme général est  $a_n \int_{\alpha}^{\beta} V_n dx$ , on emploie la formule

$$\sum_1^{\infty} a_n \int_{\alpha}^{\beta} V_n dx = \int_{\alpha}^{\beta} dx \sum_1^{\infty} a_n V_n;$$

c'est-à-dire que l'on intervertit l'ordre des signes  $\Sigma$ ,  $\int$ . Dans le cas actuel, on ne peut procéder ainsi. En effet, si l'on écrit, au lieu de l'égalité (7) :

$$\sum_1^{\infty} z^{n+1} \int_1^x X_n dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \sum_1^{\infty} \frac{(2z)^{n+1}}{n+1} \cos^{n+1} \varphi \cos(n+1)\theta,$$

la série placée sous le signe  $\Sigma$  peut être divergente (\*). Il est donc essentiel d'employer une expression de  $\int_1^x X_n dx$ , autre que la précédente (\*\*).

4. NOUVELLE EXPRESSION DE  $\int_1^x X_n dx$ . Pour la trouver, j'emploie les relations

$$X_n = \frac{1}{2n+1} \left[ \frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx} \right], \quad \dots \quad (8)$$

$$X_{n+1} - X_{n-1} = \frac{2n+1}{n(n+1)} (x^2 - 1) \frac{dX_n}{dx} (**).$$

(\*) Elle l'est si  $2\varphi z$  surpasse l'unité, c'est-à-dire si  $\rho$  et  $z$  diffèrent peu de cette limite.

(\*\*) Après avoir été arrêté par cette petite difficulté, j'ai supposé que le facteur  $2^{n+1}$ , cause de la divergence, provenait d'une faute de calcul. Mais il n'en est rien : les formules (6) et (5) sont exactes.

(\*\*\*) M, 9.

Il en résulte, puisque  $n + 1$  et  $n - 1$  sont de même parité :

$$\int_1^x X_n dx = \frac{x^2 - 1}{n(n+1)} \frac{dX_n}{dx} \dots \dots \dots (10)$$

Par conséquent,

$$\sum_1^x z^{n+1} \int_1^z X_n dx = (x^2 - 1) \sum_1^x \frac{z^{n+1}}{n(n+1)} \frac{dX_n}{dz} \dots \dots \dots (C)$$

3. SUITE. Prenons maintenant la *formule de Jacobi* :

$$X_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-\cos \omega})^n d\omega \dots \dots \dots (11)$$

Elle donne

$$\frac{dX_n}{dx} = \frac{n}{\pi} \int_0^\pi (x - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-\cos \omega})^{n-1} \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-\cos \omega} \right) d\omega \dots (12)$$

Par analogie avec ce que l'on a vu dans le paragraphe 3, je pose

$$x = \rho \cos \theta, \quad \sqrt{1-x^2} \cos \omega = \rho \sin \theta, \quad \dots \dots \dots (13)$$

égalités d'où l'on déduit :

$$\rho^2 = \cos^2 \omega + x^2 \sin^2 \omega, \quad \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cos \omega.$$

Le multiplicateur de  $d\omega$  devient

$$\frac{\rho^{n-1}}{\sin \theta} [\cos(n-1)\theta - \sqrt{1-x^2} \sin(n-1)\theta] (\sin \theta + \sqrt{1-x^2} \cos \theta \cos^2 \omega).$$

La partie réelle de cette expression est

$$\frac{\rho^{n-1}}{\sin \theta} [\sin \theta \cos(n-1)\theta + \cos \theta \sin(n-1)\theta \cos^2 \omega],$$

ou

$$\frac{\rho^{n-1}}{\sin \theta} [\sin n\theta - \sin(n-1)\theta \cos \theta \sin^2 \omega].$$

Nous avons donc, au lieu de la formule (12),

$$\frac{dX_n}{dx} = \frac{n}{\pi} \int_0^\tau \frac{\rho^{n-1}}{\sin \theta} [\sin n\theta - \sin(n-1)\theta \cos \theta \sin^2 \omega] d\omega. \quad (D)$$

Au moyen de cette valeur, la formule (C) devient

$$\sum_1^\infty z^{n+1} \int_1^x X_n dx = \frac{x^2 - 1}{\pi} \sum_1^\infty \frac{z^{n+1}}{n+1} \int_0^\tau \frac{\rho^{n-1}}{\sin \theta} [\sin n\theta - \sin(n-1)\theta \cos \theta \sin^2 \omega] d\omega;$$

ou, parce que l'on peut, cette fois, intervertir l'ordre des opérations :

$$\sum_1^\infty z^{n+1} \int_{-1}^x X_n dx = \frac{x^2 - 1}{\pi} \int_0^\tau \frac{d\omega}{\sin \theta} \sum_1^\infty \frac{z^{n+1}}{n+1} \rho^{n-1} [\sin n\theta - \sin(n-1)\theta \cos \theta \sin^2 \omega]. \quad (E)$$

### 6. SOMMATION D'UNE SÉRIE. Soit

$$Z = \sum_1^\infty \frac{z^{n+1}}{n+1} \rho^{n-1} [\sin n\theta - \sin(n-1)\theta \cos \theta \sin^2 \omega]; \quad (14)$$

et, par conséquent,

$$\frac{dZ}{dz} = \sum_1^\infty z^n \rho^{n-1} [\sin n\theta - \sin(n-1)\theta \cos \theta \sin^2 \omega]. \quad (15)$$

Le second membre est décomposable en

$$z \sum_1^\infty (\rho z)^{n-1} \sin n\theta - z \cos \theta \sin^2 \omega \sum_1^\infty (\rho z)^{n-1} \sin(n-1)\theta.$$

Le premier terme de la seconde somme étant nul, celle-ci équivaut à

$$\rho z \sum_1^\infty (\rho z)^{n-1} \sin n\theta.$$

Donc

$$\frac{dZ}{dz} = z(1 - \rho z \cos \theta \sin^2 \omega) \sum_1^\infty (\rho z)^{n-1} \sin n\theta.$$

ou (13)

$$\frac{dZ}{dz} = z(1 - zx \sin^2 \omega) \sum_1^\infty (\rho z)^{n-1} \sin n\theta.$$

D'ailleurs (\*)

$$\sum_1^\infty (\rho z)^{n-1} \sin n\theta = \frac{\sin \theta}{1 - 2\rho z \cos \theta + \rho^2 z^2} = \frac{\sin \theta}{1 - 2zx + z^2(\cos^2 \omega + x^2 \sin^2 \omega)};$$

par conséquent,

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{z(1 - zx \sin^2 \omega) \sin \theta}{1 - 2zx + z^2(\cos^2 \omega + x^2 \sin^2 \omega)} \dots \dots \dots (16)$$

Il résulte, de cette valeur,

$$Z = \sin \theta \int_0^z \frac{z(1 - zx \sin^2 \omega) dz}{1 - 2zx + z^2(\cos^2 \omega + x^2 \sin^2 \omega)}; \dots \dots \dots (F)$$

puis, au lieu de la relation (E) :

$$\sum_1^\infty z^{n+1} \int_{-1}^1 X_n dx = 2 \frac{x^2 - 1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^z \frac{z(1 - zx \sin^2 \omega) dz}{1 - 2zx + z^2(\cos^2 \omega + x^2 \sin^2 \omega)} \dots \dots (G)$$

D'après l'égalité (B), le premier membre égale  $1 - zx - \sqrt{1 - 2zx + z^2}$ ; ainsi

$$1 - zx - \sqrt{1 - 2zx + z^2} = 2 \frac{x^2 - 1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - zx \sin^2 \omega) d\omega}{1 - 2zx + z^2(\cos^2 \omega + x^2 \sin^2 \omega)}. \dots (H)$$

Comme vérification, calculons les intégrales contenues dans le second membre.

7. SUITE. L'intégrale définie, relative à  $\omega$ , peut être représentée par  $A - zxB$ , si l'on pose :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{(1 - 2zx + z^2)\cos^2 \omega + (1 - zx)^2 \sin^2 \omega},$$

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2 \omega d\omega}{(1 - 2zx + z^2) + (1 - zx)^2 \operatorname{tg}^2 \omega}.$$

(\*) Voir, par exemple, le *Traité élémentaire des séries*, p. 108.

Or (\*) :

$$A = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(1-zx)\sqrt{1-2zx+z^2}}, \quad B = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(1-zx)[1-zx+\sqrt{1-2zx+z^2}]};$$

donc

$$A - zxB = \frac{\pi}{2} \frac{1 + \sqrt{1-2zx+z^2}}{(1-zx + \sqrt{1-2zx+z^2})\sqrt{1-2zx+z^2}};$$

puis, au lieu de l'égalité (H) :

$$1 - zx - \sqrt{1-2zx+z^2} = (x^2-1) \int_0^x z \frac{1 + \sqrt{1-2zx+z^2}}{(1-zx + \sqrt{1-2zx+z^2})\sqrt{1-2zx+z^2}} dz;$$

ou

$$1 - zx - \sqrt{1-2zx+z^2} = \int_0^x \frac{x-z - \sqrt{1-2zx+z^2}}{\sqrt{1-2zx+z^2}} dz;$$

ce qui est identique.

### 8. RELATION NOUVELLE. Reprenons les égalités

$$X_n + X_{n+1} = X_0 \int_1^x X_n dx + \dots + X_{n-1} \int_{-1}^x X_1 dx + X_n \int_1^x X_0 dx, \quad (A)$$

$$\int_{-1}^x X_n dx = \frac{x^2-1}{n(n+1)} \frac{dX_n}{dx}, \quad (C)$$

Au moyen de la seconde (inapplicable lorsque  $n = 0$ ), la première devient

$$X_n + X_{n+1} = (x^2-1) \left[ \frac{1}{n(n+1)} X_0 \frac{dX_n}{dx} + \frac{1}{(n-1)n} X_1 \frac{dX_{n-1}}{dx} + \dots + \frac{1}{1.2} X_{n-1} \frac{dX_1}{dx} \right] + X_n(1+x);$$

ou

$$\frac{X_{n+1} - xX_n}{x^2-1} = \frac{1}{n(n+1)} X_0 \frac{dX_n}{dx} + \frac{1}{(n-1)n} X_1 \frac{dX_{n-1}}{dx} + \dots + \frac{1}{1.2} X_{n-1} \frac{dX_1}{dx}.$$

(\*) BIERENS DE HAAN. (T. 66.)

Le premier membre égale  $\frac{1}{n+1} \frac{dX_n}{dx}$  (\*); donc, à cause de  $X_0 = 1$  :

$$\frac{n-1}{n(n+1)} \frac{dX_n}{dx} = \frac{1}{(n-1)n} X_1 \frac{dX_{n-1}}{dx} + \frac{1}{(n-2)(n-1)} X_2 \frac{dX_{n-2}}{dx} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2} X_{n-1} \frac{dX_1}{dx}. \quad (\text{K})$$

9. VÉRIFICATION. Soit  $n = 4$ . On doit avoir

$$\frac{5}{20} \frac{dX_4}{dx} = \frac{1}{12} X_1 \frac{dX_3}{dx} + \frac{1}{6} X_2 \frac{dX_2}{dx} + \frac{1}{2} X_3 \frac{dX_1}{dx};$$

ou

$$\frac{5}{20} \cdot \frac{1}{8} (140x^3 - 60x) = \frac{1}{12} x \cdot \frac{1}{2} (15x^2 - 5) + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} (5x^2 - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot 6x + \frac{1}{4} (5x^3 - 5x),$$

ou

$$\frac{5}{8} (7x^3 - 5x) = \frac{1}{8} (5x^3 - x) + \frac{1}{4} (5x^2 - 1) \cdot x + \frac{1}{4} (5x^3 - 5x);$$

ce qui est exact.

10. REMARQUE. Si l'on identifie les coefficients de  $x^{n-1}$ , dans les deux membres de l'égalité (K), on trouve

$$\frac{n-1}{n+1} C_{2n,n} = \frac{1}{n} C_{2,1} \cdot C_{2n-2,n-1} + \frac{1}{n-1} C_{4,2} \cdot C_{4n-4,n-2} + \dots + \frac{1}{2} C_{2n-2,n-1} \cdot C_{2,1}; \quad (\text{L})$$

relation dans laquelle tous les termes sont des *nombre entiers*.

(\*) M, 9



MÉMOIRE

SUR

UNE SUITE DE POLYNÔMES ENTIERS

ET SUR

QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES;

PAR

EUGÈNE CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.

---

Présenté à la Classe des sciences, le 15 décembre 1880.

---





# MÉMOIRE

SUR

## UNE SUITE DE POLYNÔMES ENTIERS

ET SUR

### QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES (\*).

Dans les *Exercices de Schlömilch* (\*\*), on trouve cette formule curieuse :

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \dots$$

Il est facile de la généraliser. Soit, par exemple,

$$y = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + 5^2x^4 + \dots$$

Si l'on multiplie les deux membres par  $(1-x)^3$ , l'égalité devient

$$y(1-x)^3 = 1 + 11x + 11x^2 + x^3.$$

(\*) Un extrait de ce petit Mémoire a été communiqué au Congrès de Reims.

(\*\*) 1868, p. 201.

En effet, le coefficient de  $x^k$ , dans le produit, est

$$5^k - 5 \cdot 4^k + 10 \cdot 5^k - 10 \cdot 2^k + 5 \cdot 1^k = \Delta^5(0^k) = 0.$$

De même, tous les coefficients suivants sont nuls. On est donc conduit au problème suivant, que j'ai proposé, il y a déjà longtemps, aux élèves de l'École des Mines de Liège :

*Déterminer A, B, C, . . . , G, de manière que*

$$\frac{1 + Ax + Bx^2 + \dots + Gx^{p-1}}{(1-x)^{p+1}} = 1 + 2^p x + 5^p x^2 + 4^p x^3 + \dots (*)$$

M. BOMBLED, l'un d'eux, en a donné une solution (\*\*) qui ne laisse rien à désirer, sous le rapport de la simplicité. Le travail actuel a pour objet, surtout, l'étude des polynômes analogues à

$$1 + Ax + Bx^2 + \dots + Gx^{p-1}.$$

Ces polynômes, qui rappellent les célèbres fonctions  $X_n$ , jouissent, comme celles-ci, d'un grand nombre de propriétés remarquables.

Luzarches, 20 juillet 1880.

(\*) *Cours d'Analyse de l'Université de Liège*, seconde édition, p. 78. — *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. V, p. 96. — Tout récemment, j'ai reconnu que le problème général a été traité par ABEL (*Œuvres d'Abel*, t. II, p. 41).

(\*\*) *N. C. M.*, t. V, p. 95.

**I**

PRÉLIMINAIRES.

I. SOMMATION D'UNE SÉRIE. Soit, en général,

$$y_p = 1^p + 2^p x + 3^p x^2 + \dots + n^p x^{n-1} + \dots \quad (1)$$

Multipliant les deux membres par  $(1 - x)^{p+1}$ , on trouve, comme il vient d'être indiqué,

$$y_p(1 - x)^{p+1} = 1 + a_p x + b_p x^2 + \dots + l_p x^{p-2} + x^{p-1}; \quad (2)$$

$a_p, b_p, \dots, l_p$  étant des *nombres entiers*. Ainsi

$$y_p = \frac{P_p}{(1 - x)^{p+1}}, \quad (5)$$

$P_p$  désignant un polynôme à coefficients *entiers et positifs*, dont le degré est  $p - 1$ . Les premières valeurs sont :

$$\begin{aligned} P_1 &= 1, & P_2 &= 1 + x, & P_3 &= 1 + 4x + x^2, & P_4 &= 1 + 11x + 11x^2 + x^3, \\ P_5 &= 1 + 26x + 66x^2 + 26x^3 + x^4, \\ P_6 &= 1 + 57x + 502x^2 + 502x^3 + 57x^4 + x^5, \\ P_7 &= 1 + 120x + 1191x^2 + 2416x^3 + 1191x^4 + 120x^5 + x^6, \\ &\dots \end{aligned}$$

On voit que, dans chacun de ces polynômes, *les coefficients des termes également éloignés des extrêmes sont égaux entre eux*. En outre, pour  $x=1$  :

$$P_1 = 1, \quad P_2 = 1.2, \quad P_3 = 1.2.3, \quad P_4 = 1.2.3.4, \quad \dots (*)$$

(\*) Ces propriétés, nous le montrerons bientôt, sont générales. Il résulte, de la première (ou de la théorie des *équations réciproques*), que  $P_p$  est divisible par  $1 + x$  quand  $p$  est pair.



4. REMARQUES. — I. De la formule (6), on conclut :

$$x = \frac{t}{1+t}, \quad 1-x = \frac{1}{1+t}; \dots \dots \dots (10)$$

puis, au lieu des relations (1), (3) :

$$y_p = 1^p + 2^p \frac{t}{1+t} + 3^p \frac{t^2}{(1+t)^2} + \dots, \dots \dots (11)$$

$$y_p = P_p(1+t)^{p+1};$$

ou, par l'égalité (9) :

$$y_p = T_p(1+t)^2. \dots \dots \dots (12)$$

II. La série (11), à termes fractionnaires, a pour somme un polynôme entier.

III. Si  $t = 1$ ,  $x$  égale  $\frac{1}{2}$ . Donc, en vertu des formules (1), (12) :

$$1^p + \frac{1}{2} \cdot 2^p + \frac{1}{4} \cdot 3^p + \frac{1}{8} \cdot 4^p + \dots = \mathfrak{N} \cdot 4.$$

IV. De même,  $t = 2, 3, 4, \dots$  donne  $x = \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ ; puis

$$1^p + \frac{2}{5} \cdot 2^p + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot 3^p + \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot 4^p + \dots = \mathfrak{N} \cdot 9,$$

$$1^p + \frac{3}{4} \cdot 2^p + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 3^p + \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot 4^p + \dots = \mathfrak{N} \cdot 16,$$

$$1^p + \frac{4}{5} \cdot 2^p + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot 3^p + \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot 4^p + \dots = \mathfrak{N} \cdot 25,$$

..... (\*)

5. RELATION ENTRE  $P_p$  ET  $P_{p+1}$ . De l'égalité (1), on tire, en multipliant

(\*) Ces propriétés me semblent assez curieuses : ont-elles été remarquées ?

par  $x$ , et en prenant les dérivées,

$$(xy_p)' = 1^{p+1} + 2^{p+1}x + 3^{p+1}x^2 + \dots,$$

ou

$$y_{p+1} = (xy_p)' \quad (*) \quad \dots \quad (15)$$

Par suite, à cause de la formule (3) :

$$\frac{P_{p+1}}{(1-x)^{p+2}} = \left[ \frac{xP_p}{(1-x)^{p+1}} \right]'; \quad \dots \quad (14)$$

ou, après quelques simplifications,

$$P_{p+1} = (p+1)P_p + (x-x^2) \frac{dP_p}{dx} \quad \dots \quad (15)$$

6. REMARQUE. Si  $x = 1$ , cette égalité se réduit à

$$P_{p+1} = (p+1)P_p;$$

et celle-ci démontre l'une des propriétés énoncées (4).

7. Pour vérifier l'autre, supposons

$$P_p = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \dots + dx^{p-3} + cx^{p-4} + bx^{p-5} + ax^{p-2} + x^{p-1};$$

puis appliquons la formule (15). Il en résulte :

$$\begin{aligned} P_{p+1} = & 1 + 2a \left| \begin{array}{c} x + 5b \\ + (p-1)a \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} x^2 + 4c \\ + (p-2)b \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} x^3 + 5d \\ + (p-5)c \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} x^4 + \dots \\ \dots \end{array} \right| \\ & + (p-5)c \left| \begin{array}{c} x^{p-4} + (p-2)b \\ + 4c \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} x^{p-3} + (p-1)a \\ + 5b \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} x^{p-2} + p \\ + 2a \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} x^{p-1} + x^p \\ \dots \end{array} \right|. \end{aligned}$$

Donc, la propriété dont il s'agit, admise pour  $P_p$ , subsiste pour  $P_{p+1}$ .

(\*) Équation aux différences mêlées.

8. RELATION ENTRE  $T_p$  ET  $T_{p+1}$ . En vertu de la formule (12), on peut écrire ainsi l'égalité (13) :

$$T_{p+1}(1+t)^2 = \frac{d[(t+t^2)T_p]}{dx}.$$

Mais (4)

$$dx = \frac{dt}{(1+t)^2}; \dots \dots \dots (16)$$

donc

$$T_{p+1} = [(t+t^2)T_p]'. \dots \dots \dots (17)$$

Cette relation remarquable, beaucoup plus simple que la formule (13), donne, comme on le verra, la plupart des propriétés dont jouissent les polynômes  $P_p$  et  $T_p$ .

9. VALEURS DE  $T_p$ . D'après la formule (8),  $T_1 = 1$  ; donc :

$$\begin{aligned} T_2 &= (t+t^2)' = 1+2t, \\ T_3 &= [(t+t^2)(1+2t)]' = 1+6t+6t^2, \\ T_4 &= [(t+t^2)(1+6t+6t^2)]' = 1+14t+56t^2+24t^3, \\ T_5 &= [(t+t^2)(1+14t+56t^2+24t^3)]' = 1+50t+150t^2+240t^3+120t^4, \\ T_6 &= 1+62t+540t^2+1560t^3+1800t^4+720t^5, \\ T_7 &= 1+126t+1806t^2+8400t^3+16800t^4+15120t^5+5040t^6, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

10. VÉRIFICATIONS. Le calcul direct donne

$$\begin{aligned} \Delta(0^2) &= 1, & \Delta^2(0^2) &= 2; \\ \Delta(0^3) &= 1, & \Delta^2(0^3) &= 6, & \Delta^3(0^3) &= 6; \\ \Delta(0^4) &= 1, & \Delta^2(0^4) &= 14, & \Delta^3(0^4) &= 56, & \Delta^4(0^4) &= 24; \\ &\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned}$$

Par conséquent (8) :

$$T_2 = 1 + 2t, \quad T_3 = 1 + 6t + 6t^2, \quad T_4 = 1 + 14t + 56t^2 + 24t^3, \quad \text{etc.}$$

## II

## QUELQUES FORMULES RELATIVES AUX DIFFÉRENCES.

11. DIFFÉRENCES DE  $0^p$ . Dans le premier membre de l'égalité

$$T_{p+1} = [(t + t^2)T_p], \dots \dots \dots (17)$$

le coefficient de  $t^k$  est, par la formule (8),  $\Delta^{k+1}(0^{p+1})$ . Dans le second membre, ce coefficient égale

$$(k + 1)\Delta^{k+1}(0^p) + (k + 1)\Delta^k(0^p).$$

Donc, si l'on change  $k$  en  $k - 1$ ,  $p$  en  $p - 1$  :

$$\Delta^k(0^p) = k[\Delta^{k-1}(0^{p-1}) + \Delta^k(0^{p-1})]. \dots \dots \dots (18)$$

Cette formule, probablement connue, donne un moyen simple de construire la *table des différences successives de  $0^p$* .

12. DIFFÉRENCES DE  $1^p$ . Si l'on fait attention que *l'identité*

$$\Delta(0^{p-1}) = 1^{p-1} - 0^{p-1},$$

donne

$$\Delta^k(0^{p-1}) = \Delta^{k-1}(1^{p-1}) - \Delta^{k-1}(0^{p-1}),$$

ou

$$\Delta^{k-1}(0^{p-1}) + \Delta^k(0^{p-1}) = \Delta^{k-1}(1^{p-1}), \dots \dots \dots (19)$$

on trouve

$$\Delta^{k-1}(1^{p-1}) = \frac{1}{k} \Delta^k(0^p). \dots \dots \dots (20)$$

Ainsi, la *table des différences successives de  $1^{p-1}$  se déduit, très aisément, de la table des différences successives de  $0^p$  (\*)*.

(\*) Ce procédé indirect est plus simple que celui dont j'ai fait usage autrefois (*Sur les différences de  $1^p$ , et sur le calcul des Nombres de Bernoulli.* — ANNALI DI MATEMATICA. 1859).



13. AUTRES IDENTITÉS. Dans le Mémoire cité en note, nous avons donné la relation générale

$$u_1 - \Delta u_1 + \Delta^2 u_1 - \dots \pm \Delta^k u_1 = u_0 \pm \Delta^{k+1} u_0, \dots \dots \dots (21)$$

dont la démonstration est aussi simple que celle de la formule (19). Il en résulte, en particulier,

$$1^p = \Delta(1^p) - \Delta^2(1^p) + \Delta^3(1^p) - \dots \pm \Delta^p(1^p) (*). \dots \dots \dots (22)$$

**III**

FONCTIONS GÉNÉRATRICES.

14. FONCTION GÉNÉRATRICE DE  $y_p$ . Soit

$$u = \frac{1}{1 - e^{\alpha}x} = 1 + e^{\alpha}x + e^{2\alpha}x^2 + e^{5\alpha}x^3 + \dots \dots \dots (**). \dots \dots \dots (25)$$

Ordonnons le second membre suivant les puissances de  $\alpha$  (\*\*\*) .

- 1° Le coefficient de  $\alpha^0$  est  $1 + x + x^2 + \dots \dots \dots = y_0$ ;
- 2° » » »  $\alpha^1$  »  $x + 2x^2 + 5x^3 + \dots \dots \dots = xy_1$ ;
- 3° » » »  $\alpha^2$  »  $\frac{1}{1.2} [x + 2^2x^2 + 5^2x^3 + \dots] = \frac{xy_2}{1.2}$ ;
- .....

En général, le coefficient de  $\alpha^p$  est  $\frac{xy_p}{1.2 \dots p}$ .

(\*) Le dernier terme est *négatif* quand  $p$  est *pair*.

(\*\*) On suppose, bien entendu, le module de  $e^{\alpha}x$  inférieur à 1.

(\*\*\*) *Question* proposée dans la *N. C. M.* (t. VI, p. 192). Si l'exposant  $\alpha$  est positif, ainsi que  $x$ , le second membre, développé, a tous ses termes positifs. Donc, d'après un théorème de DIRICHLET, on peut les grouper arbitrairement. Dans les autres cas, la même conclusion subsiste, à plus forte raison.

Par conséquent,

$$\frac{1}{1 - e^x x} = y_0 + xy_1 \frac{\alpha}{1} + xy_2 \frac{\alpha^2}{1.2} + \dots + xy_p \frac{\alpha^p}{1.2\dots p} + \dots, \dots \quad (24)$$

ou

$$\frac{1}{1 - e^x x} = \frac{1}{1 - x} + \frac{P_1 x}{(1 - x)^2} \frac{\alpha}{1} + \frac{P_2 x}{(1 - x)^3} \frac{\alpha^2}{1.2} + \dots + \frac{P_p x}{(1 - x)^{p+1}} \frac{\alpha^p}{1.2\dots p} + \dots, \quad (25)$$

ou encore, après multiplication par  $1 - x$ ,

$$\frac{e^x - 1}{1 - e^x x} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{P_p}{(1 - x)^p} \frac{\alpha^p}{\Gamma(p + 1)} \dots \dots \dots \quad (26)$$

15. CAS PARTICULIER REMARQUABLE. Si, dans l'équation (25), on suppose  $x = -1$ , elle devient

$$\frac{1}{1 + e^x} = \frac{1}{2} - \frac{P_1}{2^2} \cdot \frac{\alpha}{1} - \frac{P_2}{2^3} \cdot \frac{\alpha^2}{1.2} - \frac{P_3}{2^4} \cdot \frac{\alpha^3}{1.2.5} - \dots,$$

pourvu que l'on remplace  $P_1, P_2, P_3, \dots$  par leurs valeurs.

En premier lieu,  $P_p = 0$ , si  $p$  est pair (1, note).

D'autre part, afin d'éviter toute ambiguïté, représentons par  $g_1, -g_3, +g_5, \dots$  les résultats de la substitution de  $-1$  à  $x$ , dans  $P_1, P_3, P_5, \dots$ ; savoir (1):

$$g_1 = 1, \quad -g_3 = -2, \quad g_5 = 16, \quad -g_7 = -272, \dots$$

Nous aurons, au lieu de la précédente formule, en multipliant par  $\alpha$ :

$$\frac{\alpha}{1 + e^x} = \frac{\alpha}{2} - \frac{g_1}{2^2} \frac{\alpha^2}{1} + \frac{g_3}{2^4} \frac{\alpha^4}{1.2.5} - \frac{g_5}{2^6} \frac{\alpha^6}{1.2.5.4.5} + \dots \dots \dots \quad (27)$$

Mais, par une formule connue,

$$\frac{\alpha}{1 + e^x} = \frac{\alpha}{2} - (2^2 - 1)B_1 \frac{\alpha^2}{1.2} - (2^4 - 1)B_3 \frac{\alpha^4}{1.2.5.4} - (2^6 - 1)B_5 \frac{\alpha^6}{1.2\dots 6} - \dots;$$

$B_1, B_3, B_5, \dots$  étant les Nombres de Bernoulli. Donc, en général,

$$g_{2q-1} = \pm \frac{4^q(4^q - 1)}{2q} B_{2q-1} \dots \dots \dots (28)$$

D'après cette formule, les *nombres entiers*  $g_1, g_3, g_5, \dots$  ne diffèrent pas des nombres  $y_1, y_3, y_5, \dots$  que j'ai considérés en diverses occasions (\*).

16. REMARQUE. Lorsque  $x = \pm 1$ , la série (1) devient *divergente*, et, en conséquence, l'égalité

$$\frac{P_p}{(1-x)^{p+1}} = 1^p + 2^p x + 3^p x^2 + 4^p x^3 + \dots$$

n'a plus de sens. Si l'on prétendait l'appliquer encore, on trouverait ces résultats *absurdes*, admis par quelques Géomètres :

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots = \frac{1}{4},$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \dots = 0;$$

etc. (\*\*).

17. FONCTION GÉNÉRATRICE DE  $T_p$ . D'après les formules (9) et (10) :

$$P_p = \frac{T_p}{(1+t)^{p+1}}, \quad 1-x = \frac{1}{1+t}, \quad x = \frac{t}{1+t},$$

l'égalité (26) peut être écrite ainsi :

$$\frac{e^x - 1}{1 - t(e^x - 1)} = \sum_i T_p \frac{x^p}{\Gamma(p+1)} : \dots \dots \dots (29)$$

et, lorsque  $t = 1$  :

$$\frac{e^x - 1}{2 - e^x} = \sum_i T_p \frac{x^p}{\Gamma(p+1)};$$

(\*) *Mélanges mathématiques*, p. 127; *Notes d'Algèbre et d'Analyse*, p. 127; etc.

(\*\*) *Cours d'Analyse de l'Université de Liège*, p. 5.

ou, plus simplement,

$$\frac{1}{2 - e^\alpha} = 1 + \sum_1^{\infty} T_p \frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)} \dots \dots \dots (50)$$

18. REMARQUE. Lorsque  $t = 1$ , les valeurs trouvées ci-dessus (9) se réduisent à  $T_1 = 1$ ,  $T_2 = 3$ ,  $T_3 = 13$ ,  $T_4 = 75$ ,  $T_5 = 541$ ,  $T_6 = 4\ 683$ ,  $T_7 = 47\ 293$ , ... Donc la dernière formule, développée, devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 - e^\alpha} = & 1 + \frac{\alpha}{1} + 3 \frac{\alpha^2}{1.2} + 13 \frac{\alpha^3}{1.2.5} + 75 \frac{\alpha^4}{1.2.5.4} + 541 \frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5} \\ & + 4\ 683 \frac{\alpha^6}{1.2\dots 6} + 47\ 293 \frac{\alpha^7}{1.2\dots 7} + \dots \dots \dots (51) \end{aligned}$$

Comme les coefficients entiers augmentent fort rapidement, la série n'est pas toujours convergente. En effet, d'après le Théorème de CAUCHY, la fonction  $\frac{1}{2 - e^\alpha}$  est développable, suivant les puissances de  $\alpha$ , seulement pour les valeurs, de cette variable, dont le module est inférieur à 1.2. Ainsi l'on doit prendre  $\alpha < 1.2$ , en valeur absolue.

19. ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES. Si l'on écrit ainsi l'équation (29) :

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{1.2} + \dots + \frac{\alpha^p}{1.2\dots p} + \dots = \\ \left\{ 1 - t \left[ \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{1.2} + \dots + \frac{\alpha^p}{1.2\dots p} + \dots \right] \right\} & \left\{ T_1 \frac{\alpha}{1} + T_2 \frac{\alpha^2}{1.2} + \dots + T_p \frac{\alpha^p}{1.2\dots p} + \dots \right\}, \end{aligned}$$

et que l'on identifie les deux membres, on trouve

$$\frac{1}{1.2\dots p} = T_p \frac{1}{1.2\dots p} - t \left\{ \frac{T_{p-1}}{1.1.2\dots p-1} + \frac{T_{p-2}}{1.2.1.2\dots p-2} + \dots + \frac{T_1}{1.2\dots p-1.1} \right\},$$

ou

$$T_p = t \left[ \frac{p}{1} T_{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} T_{p-2} + \dots + \frac{p}{1} T_1 \right] + 1. \dots \dots (52)$$

Cette formule peut tenir lieu de la relation (17); néanmoins, elle est moins simple que celle-ci.

20. CAS PARTICULIER. Lorsque  $t = 1$  :

$$T_p = \frac{p}{1} T_{p-1} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} T_{p-2} + \dots + \frac{p}{1} T_1 + 1. \quad (55)$$

Au moyen de cette nouvelle formule, on peut calculer les *nombre*s  $T_p$ , sans déterminer, préalablement, les *polynômes*  $T_p$ .

21. RELATION ENTRE LES DIFFÉRENCES DE  $0^p, 0^{p-1}, 0^{p-2}, \dots$ . Dans l'égalité (32), remplaçons  $T_p, T_{p-1}, \dots$  par leurs valeurs, déduites de la formule (8), puis égalons les coefficients de  $t^k$ . Nous obtenons ainsi :

$$\Delta^{k+1}(0^p) = C_{p,1} \Delta^k(0^{p-1}) + C_{p,2} \Delta^k(0^{p-2}) + \dots + C_{p,k} \Delta^k(0^k); \quad (54)$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\Delta^{k+1}(0^p) = \Delta^k [C_{p,1}(0^{p-1}) + C_{p,2}(0^{p-2}) + \dots + C_{p,k}(0^k)],$$

ou enfin

$$\Delta^k(1^p) = \Delta^k [(0^p) + C_{p,1}(0^{p-1}) + C_{p,2}(0^{p-2}) + \dots + C_{p,k}(0^k)]. \quad (55)$$

Cette formule est un cas particulier de la relation

$$\Delta^k [(x+1)^p] = \Delta^k [x^p + C_{p,1}x^{p-1} + C_{p,2}x^{p-2} + \dots + C_{p,k}x^k],$$

laquelle est à peu près évidente.

#### IV

#### INTÉGRALES DÉFINIES.

22. TRANSFORMATION DE LA FORMULE (26). Posons

$$\alpha = \cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi. \quad (56)$$

Le second membre de la formule

$$\frac{e^{\alpha x} - 1}{1 - e^{\alpha x}} = \sum_1^{\infty} \frac{P_p}{(1-x)^p} \frac{x^p}{\Gamma(p+1)} \dots \dots \dots (26)$$

devient

$$\sum_1^{\infty} \frac{P_p}{(1-x)^p} \frac{\cos p\varphi + \sqrt{-1} \sin p\varphi}{\Gamma(p+1)}$$

Le premier membre égale

$$\frac{e^{\cos\varphi + \sqrt{-1} \sin\varphi} - 1}{1 - x e^{\cos\varphi + \sqrt{-1} \sin\varphi}} = \frac{(e^{\cos\varphi + \sqrt{-1} \sin\varphi} - 1)(1 - x e^{\cos\varphi - \sqrt{-1} \sin\varphi})}{(1 - x e^{\cos\varphi + \sqrt{-1} \sin\varphi})(1 - x e^{\cos\varphi - \sqrt{-1} \sin\varphi})}$$

Soit  $\frac{N}{D}$  la seconde fraction. On a :

$$\begin{aligned} N &= e^{\cos\varphi + \sqrt{-1} \sin\varphi} - 1 - x e^{2i\varphi} + x e^{\cos\varphi - \sqrt{-1} \sin\varphi} \\ &= e^{\cos\varphi} [(1+x) \cos(\sin\varphi) + \sqrt{-1} (1-x) \sin(\sin\varphi)] - 1 - x e^{2i\cos\varphi} \\ &= -1 + (1+x) e^{\cos\varphi} \cos(\sin\varphi) - x e^{2i\cos\varphi} + \sqrt{-1} (1-x) e^{\cos\varphi} \sin(\sin\varphi); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 1 - x (e^{\cos\varphi + \sqrt{-1} \sin\varphi} + e^{\cos\varphi - \sqrt{-1} \sin\varphi}) + x^2 e^{2\cos\varphi} \\ &= 1 - 2x e^{\cos\varphi} \cos(\sin\varphi) + x^2 e^{2\cos\varphi}. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'égalité (26) se partage en

$$\begin{aligned} \frac{-1 + (1+x) e^{\cos\varphi} \cos(\sin\varphi) - x e^{2\cos\varphi}}{1 - 2x e^{\cos\varphi} \cos(\sin\varphi) + x^2 e^{2\cos\varphi}} &= \sum_1^{\infty} \frac{P_p}{(1-x)^p} \frac{\cos p\varphi}{\Gamma(p+1)}, \\ \frac{e^{\cos\varphi} \sin(\sin\varphi)}{1 - 2x e^{\cos\varphi} \cos(\sin\varphi) + x^2 e^{2\cos\varphi}} &= \sum_1^{\infty} \frac{P_p}{(1-x)^{p+1}} \frac{\sin p\varphi}{\Gamma(p+1)}; \end{aligned}$$

équations que l'on peut écrire ainsi :

$$\frac{-e^{-\cos\varphi} + (1+x) \cos(\sin\varphi) - x e^{\cos\varphi}}{e^{-\cos\varphi} - 2x \cos(\sin\varphi) + x^2 e^{\cos\varphi}} = \sum_1^{\infty} \frac{P_p}{(1-x)^p} \frac{\cos p\varphi}{\Gamma(p+1)}, \dots \dots (57)$$

$$\frac{\sin(\sin\varphi)}{e^{-\cos\varphi} - 2x \cos(\sin\varphi) + x^2 e^{\cos\varphi}} = \sum_1^{\infty} \frac{P_p}{(1-x)^{p+1}} \frac{\sin p\varphi}{\Gamma(p+1)} \dots \dots (58)$$

23. EXPRESSIONS DE  $P_p$ . Des deux dernières relations, on déduit, par la méthode connue :

$$\frac{P_p}{(1-x)^p} = \frac{2}{\pi} \Gamma(p+1) \int_0^\pi \frac{e^{-\cos\varphi} + (1+x)\cos(\sin\varphi) - xe^{\cos\varphi}}{e^{-\cos\varphi} - 2x\cos(\sin\varphi) + x^2e^{\cos\varphi}} \cos p\varphi d\varphi, \quad (59)$$

$$\frac{P_p}{(1-x)^{p+1}} = y_p = \frac{2}{\pi} \Gamma(p+1) \int_0^\pi \frac{\sin(\sin\varphi)}{e^{-\cos\varphi} - 2x\cos(\sin\varphi) + x^2e^{\cos\varphi}} \sin p\varphi d\varphi. \quad (40)$$

Ainsi, en particulier, la série

$$1^p + 2^p x + 3^p x^2 + \dots + n^p x^{n-1} + \dots$$

est exprimée par une intégrale définie. Ce résultat nous servira plus loin.

24. REMARQUES. — I. La comparaison des deux expressions de  $P_p$  donne

$$\int_0^\pi \frac{e^{-\cos\varphi} + (1+x)\cos(\sin\varphi) - xe^{\cos\varphi}}{e^{-\cos\varphi} - 2x\cos(\sin\varphi) + x^2e^{\cos\varphi}} \cos p\varphi d\varphi = (1-x) \int_0^\pi \frac{\sin(\sin\varphi) \sin p\varphi d\varphi}{e^{-\cos\varphi} - 2x\cos(\sin\varphi) + x^2e^{\cos\varphi}}. \quad (41)$$

II. Quand  $x$  égale zéro,  $y_p$  se réduit à 1; donc

$$\int_0^\pi e^{\cos\varphi} \sin(\sin\varphi) \sin p\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2\Gamma(p+1)}. \quad (42)$$

III. Par suite, la formule (39) devient

$$\int_0^\pi [-1 + e^{\cos\varphi} \cos(\sin\varphi)] \cos p\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2\Gamma(p+1)};$$

ou, plus simplement,

$$\int_0^\pi e^{\cos\varphi} \cos(\sin\varphi) \cos p\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2\Gamma(p+1)}. \quad (45)$$

IV. Si l'on remplace  $\varphi$  par  $\pi - \varphi$ , on déduit, des deux dernières égalités :

$$\int_0^\pi (e^{\cos\varphi} + e^{-\cos\varphi}) \sin(\sin\varphi) \sin p\varphi d\varphi = \frac{\pi}{\Gamma(p+1)}, \quad (p \text{ impair}). \quad (44)$$

$$\int_0^\pi (e^{\cos\varphi} + e^{-\cos\varphi}) \cos(\sin\varphi) \cos p\varphi d\varphi = \frac{\pi}{\Gamma(p+1)}, \quad (p \text{ pair}). \quad (45)$$

V. Si, dans la formule (40), on substitue  $\frac{t}{1+t}$  à  $x$ , elle se transforme en

$$y_p = \frac{2}{\pi} (1+t)^2 \Gamma(p+1) \int_0^\tau \frac{\sin(\sin \varphi) \sin p \varphi d\varphi}{(1+t)^2 e^{-\cos \varphi} - 2t(1+t) \cos(\sin \varphi) + t^2 e^{\cos \varphi}}.$$

Et comme

$$y_p = T_p (1+t)^2, \dots \dots \dots (12)$$

on a

$$T_p = \frac{2}{\pi} \Gamma(p+1) \int_0^\tau \frac{\sin(\sin \varphi) \sin p \varphi d\varphi}{(1+t)^2 e^{-\cos \varphi} - 2t(1+t) \cos(\sin \varphi) + t^2 e^{\cos \varphi}} (*). \dots \dots (46)$$

VI. Cette relation se simplifie dans deux cas particuliers :

1° Lorsque  $t = 1$ ,

$$T_p = \frac{2}{\pi} \Gamma(p+1) \int_0^\tau \frac{\sin(\sin \varphi) \sin p \varphi d\varphi}{4e^{-\cos \varphi} - 4 \cos(\sin \varphi) + e^{\cos \varphi}}: \dots \dots (47)$$

le premier membre est alors un *nombre entier* :

2° Si  $t = -1$ ,  $T_p = (-1)^{p-1}$  (\*\*). Donc

$$\int_0^\tau e^{-\cos \varphi} \sin(\sin \varphi) \sin p \varphi d\varphi = \pm \frac{\pi}{2\Gamma(p+1)} (***) \dots \dots (48)$$

VII. Enfin, si  $p$  est *pair*, il résulte, des formules (42) et (48) :

$$\int_0^\tau (e^{\cos \varphi} + e^{-\cos \varphi}) \sin(\sin \varphi) \sin p \varphi d\varphi = 0; \dots \dots (49)$$

résultat visible.

25. AUTRE INTÉGRALE DÉFINIE. On a, par une formule connue,

$$\frac{\sin(\sin \varphi)}{1 - 2x e^{\cos \varphi} \cos(\sin \varphi) + x^2 e^{2\cos \varphi}} = \sum_0^\infty x^n e^{n \cos \varphi} \sin(\overline{n+1} \sin \varphi).$$

(\*) Il est remarquable que cette intégrale se réduise à un *polynôme entier*.

(\*\*) Cette propriété, presque évidente, sera démontrée plus loin.

(\*\*\*) + si  $p$  est *impair*.



Donc, si l'on développe, suivant les puissances de  $x$ , le second membre de l'équation

$$y_p = \frac{2}{\pi} \Gamma(p+1) \int_0^\pi \frac{e^{\cos \varphi} \sin(\sin \varphi)}{1 - 2xe^{\cos \varphi} \cos(\sin \varphi) + x^2 e^{2\cos \varphi}} \sin p\varphi d\varphi, \quad \dots \quad (40)$$

le coefficient de  $x^{n-1}$  sera

$$\frac{2}{\pi} \Gamma(p+1) \int_0^\pi e^{n \cos \varphi} \sin(n \sin \varphi) \sin p\varphi d\varphi.$$

Dans le premier membre, ce coefficient est  $n^p$ . Conséquemment,

$$n^p = \frac{2}{\pi} \Gamma(p+1) \int_0^\pi e^{n \cos \varphi} \sin(n \sin \varphi) \sin p\varphi d\varphi (*). \quad \dots \quad (50)$$

**V**

SOMMES DES PUISSANCES SEMBLABLES DES NOMBRES NATURELS.

**26. PREMIÈRE EXPRESSION DE  $S_p$ .** D'après les relations (1), (2) et la propriété démontrée (7) :

$$1^p + 2^p x + 3^p x^2 + 4^p x^3 + \dots = [1 + a_p x + b_p x^2 + c_p x^3 + \dots + c_p x^{p-4} + b_p x^{p-3} + a_p x^{p-2} + x^{p-1}] \times [1 + C_{p+1,1} x + C_{p+2,2} x^2 + \dots + C_{p+n-1,n-1} x^{n-1} + \dots].$$

Si l'on effectue le produit, et que l'on identifie avec le premier membre, on trouve

$$n^p = C_{p+n-1,p} + a_p C_{p+n-2,p} + b_p C_{p+n-3,p} + \dots + C_{n,p} (**). \quad \dots \quad (51)$$

(\*) Après avoir trouvé cette formule, j'ai reconnu qu'elle a été donnée par Poisson, dans son célèbre *Mémoire sur les intégrales définies* (JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, XIX<sup>e</sup> Cahier, p. 495).

(\*\*) Cette égalité suppose  $n \geq p$ . Dans le cas contraire, le dernier terme est celui qui contient  $C_{p,p} = 1$ .

Changeant  $n$  en  $n - 1, n - 2, \dots, 1$ , et ajoutant, on obtient

$$S_p = C_{p+n,p+1} + a_p C_{p+n-1,p+1} + b_p C_{p+n-2,p+1} + \dots + C_{n+1,p+1} (*) \dots \dots (52)$$

**27. REMARQUE. De**

$$P_p = 1 + a_p x + b_p x^2 + c_p x^3 + \dots + a_p x^{p-2} + x^{p-1},$$

ou

$$x^{n+1} P_p = x^{n+1} + a_p x^{n+2} + b_p x^{n+3} + \dots + a_p x^{n+p-1} + x^{n+p},$$

on conclut

$$\frac{d^{p+1}[x^{n+1} P_p]}{dx^{p+1}} = (n+1)n \dots (n-p+1)x^{n-p} + (n+2)(n+1) \dots (n-p+2)a_p x^{n-p+1} + \dots ;$$

puis, au lieu de la formule (52) :

$$S_p = \frac{1}{\Gamma(p+2)} \frac{d^{p+1}[x^{n+1} P_p]}{dx^{p+1}} (x=1) \dots \dots \dots (55)$$

Si, par exemple,  $n = 5, p = 3$  :

$$1^5 + 2^5 + 5^5 + 4^5 + 5^5 = \frac{1}{24} [6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5] \\ = 15 + 440 + 70 = 225 ;$$

ce qui est exact.

**28. VALEURS DES COEFFICIENTS  $a_p, b_p, c_p, \dots$ . Dans l'égalité**

$$y_p(1-x)^{p+1} = 1 + a_p x + b_p x^2 + \dots + b_p x^{p-2} + x^{p-1}, \dots \dots \dots (2)$$

remplaçons  $y_p$  par sa valeur, puis effectuons la multiplication indiquée. En identifiant, nous trouvons :

$$\left. \begin{aligned} a_p &= 2^p - C_{p+1,1} \cdot 1^p, \\ b_p &= 5^p - C_{p+1,1} \cdot 2^p + C_{p+1,2} \cdot 1^p, \\ c_p &= 4^p - C_{p+1,1} \cdot 5^p + C_{p+1,2} \cdot 2^p - C_{p+1,5} \cdot 1^p, \\ d_p &= 5^p - C_{p+1,1} \cdot 4^p + C_{p+1,2} \cdot 5^p - C_{p+1,5} \cdot 2^p + C_{p+1,4} \cdot 1^p, \\ &\dots \dots \dots ; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (54)$$

(\*) Formule analogue à celle que j'ai donnée dans les *Nouvelles Annales* (t. XV), mais peut-être un peu plus simple.

mais ces formules sont peu commodes. Il vaut mieux employer celles-ci :

$$a_p = 2a_{p-1} + (p - 1), \quad b_p = 5b_{p-1} + (p - 2)a_{p-1}, \quad c_p = 4c_{p-1} + (p - 3)b_{p-1}, \quad \dots, \quad (55)$$

démontrées précédemment (7). Il en résulte le tableau suivant :

$p$		$a_p$	$b_p$	$c_p$	$d_p$	$e_p$	$f_p$	$g_p$
2	1	1						
5	1	4	1					
4	1	11	11	1				
5	1	26	66	26	1			
6	1	57	502	502	57	1		
7	1	120	1 191	2 416	1 191	120	1	
8	1	247	4 295	16 619	16 619	4 295	247	1

29. REMARQUE. Soit, pour fixer les idées,  $p = 6$ . Alors, par les formules (54) :

$$a_6 = 2^6 - 7 = 57, \quad b_6 = 5^6 - 7 \cdot 2^6 + 21 = 502,$$

$$c_6 = 4^6 - 7 \cdot 5^6 + 21 \cdot 2^6 - 55 = 502 = b_6,$$

$$d_6 = 5^6 - 7 \cdot 4^6 + 21 \cdot 5^6 - 55 \cdot 2^6 + 55 = 57 = a_6$$

En général,

$$\left. \begin{aligned} n^p - C_{p+1,1}(n-1)^p + C_{p+1,2}(n-2)^p - C_{p+1,3}(n-3)^p + \dots = \\ (p-n+1)^p - C_{p+1,1}(p-n)^p + C_{p+1,2}(p-n-1)^p - C_{p+1,3}(p-n-2)^p + \dots \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Par exemple,

$$4^9 - 10 \cdot 5^9 + 45 \cdot 2^9 - 120 = 6^9 - 10 \cdot 5^9 + 45 \cdot 4^9 - 120 \cdot 5^9 + 210 \cdot 2^9 - 252,$$

ou

$$\begin{aligned} 262\,144 - 10 \cdot 19\,685 + 45 \cdot 512 - 120 = \\ 10\,077\,696 - 10 \cdot 1\,955\,125 + 45 \cdot 262\,144 - 120 \cdot 19\,685 + 210 \cdot 512 - 252, \end{aligned}$$

ou

$$40\ 077\ 696 - 19\ 551\ 250 + 11\ 554\ 556 - 2\ 465\ 150 + 84\ 480 - 152 = 0,$$

ou enfin

$$21\ 696\ 512 - 21\ 696\ 512 = 0.$$

**30. AUTRES EXPRESSIONS DE  $a_p, b_p, c_p, \dots$ . Nous avons trouvé**

$$P_p = (1-x)^{p-1}\Delta(0^p) + (1-x)^{p-2}x\Delta^2(0^p) + \dots + x^{p-1}\Delta^p(0^p). \dots \dots (5)$$

Par conséquent :

$$\left. \begin{aligned} a_p &= -\frac{p-1}{1} \Delta(0^p) + \Delta^2(0^p), \\ b_p &= \frac{(p-1)(p-2)}{1.2} \Delta(0^p) - \frac{p-2}{1} \Delta^2(0^p) + \Delta^3(0^p), \\ c_p &= -\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3} \Delta(0^p) + \frac{(p-2)(p-3)}{1.2} \Delta^2(0^p) - \frac{p-3}{1} \Delta^3(0^p) + \Delta^4(0^p), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (57)$$

**31. SECONDE EXPRESSION DE  $S_p$ . D'après la formule**

$$n^p = \frac{2}{\pi} \Gamma(p+1) \int_0^\pi e^{n \cos \varphi} \sin(n \sin \varphi) \sin p \varphi d\varphi, \dots \dots (59)$$

on a

$$n^p = -\frac{2}{\pi} \sqrt{-1} \Gamma(p+1) \int_0^\pi e^{n \cos \varphi + \sqrt{-1} n \sin \varphi} \sin p \varphi d\varphi, \dots \dots (58)$$

*pourvu que l'on néglige la partie réelle de l'intégrale.* Avec la même restriction, on peut donc écrire

$$S_p = -\frac{2}{\pi} \sqrt{-1} \Gamma(p+1) \int_0^\pi \frac{e^{n+1)(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)} - 1}{e^{\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi} - 1} \sin p \varphi d\varphi.$$

La fraction égale

$$\frac{[e^{(n+1)(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)} - 1][e^{n \cos \varphi - \sqrt{-1} \sin \varphi} - 1]}{(e^{\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi} - 1)(e^{\cos \varphi - \sqrt{-1} \sin \varphi} - 1)} = \frac{e^{(n+2)\cos \varphi + n\sqrt{-1} \sin \varphi} - e^{(n+1)(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)} - e^{n \cos \varphi - \sqrt{-1} \sin \varphi} + 1}{e^{2\cos \varphi} - e^{\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi} - e^{\cos \varphi - \sqrt{-1} \sin \varphi} + 1}.$$

La partie *imaginaire* de celle-ci est

$$\sqrt{-1} \frac{e^{(n+1)\cos\varphi} \sin(n \sin \varphi) - e^{n\cos\varphi} \sin(\overline{n+1} \sin \varphi) + \sin(\sin \varphi)}{e^{\cos\varphi} - 2 \cos(\sin \varphi) + e^{-\cos\varphi}}.$$

La formule ci-dessus devient donc

$$S_p = \frac{2}{\pi} \Gamma(p+1) \int_0^\pi \frac{e^{(n+1)\cos\varphi} \sin(n \sin \varphi) - e^{n\cos\varphi} \sin(\overline{n+1} \sin \varphi) + \sin(\sin \varphi)}{e^{\cos\varphi} - 2 \cos(\sin \varphi) + e^{-\cos\varphi}} \sin p\varphi d\varphi (*). \quad (59)$$

**32. CAS PARTICULIER.** Pour  $n = 1$ , la fraction se réduit à

$$\frac{e^{2\cos\varphi} \sin(\sin \varphi) - e^{\cos\varphi} \sin(2 \sin \varphi) + \sin(\sin \varphi)}{e^{\cos\varphi} - 2 \cos(\sin \varphi) + e^{-\cos\varphi}} = e^{\cos\varphi} \sin(\sin \varphi).$$

Et comme  $S_p = 1$ , on a ce résultat remarquable, signalé ci-dessus :

$$\int_0^\pi e^{\cos\varphi} \sin(\sin \varphi) \sin p\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2\Gamma(p+1)}. \quad (42)$$

**33. REMARQUE.** Les formules (50), (58), (59) sont en défaut pour  $p = 0$ . C'est à quoi l'on devait s'attendre : les équations (37), (38), d'où elles sont tirées, supposent  $p \geq 1$ .

**34. EXPRESSIONS DE  $\Delta^n(0^p)$ , EN INTÉGRALE DÉFINIE.** On a, comme l'on sait,

$$\Delta^n(0^p) = n^p - \frac{n}{1} (n-1)^p + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (n-2)^p - \dots \pm \frac{n}{1} \cdot 1^p.$$

Donc, par la formule

$$n^p = -\frac{2}{\pi} \sqrt{-1} \Gamma(p+1) \int_0^\pi e^{n(\cos\varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)} \sin p\varphi d\varphi : \quad (58)$$

(\*) Poisson, *Journal de l'École polytechnique*, XIX<sup>e</sup> Cahier, p. 495. L'illustre Géomètre a cherché la valeur de l'intégrale définie, tandis que je me suis proposé de transformer  $S_p$  en intégrale définie. La concordance des résultats permet de supposer qu'ils sont exacts

$$\Delta^n(0^p) = -\frac{2}{\pi} \sqrt{-1} \Gamma(p+1) \int_0^\tau \left[ e^{n\alpha} - \frac{n}{1} e^{(n-1)\alpha} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} e^{(n-2)\alpha} - \dots \pm \frac{n}{1} e^\alpha \right] \sin p\varphi d\varphi;$$

$\alpha$  représentant  $\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi$ .

La fonction entre parenthèses égale  $(e^\alpha - 1)^n \pm 1$ . Ainsi

$$\Delta^n(0^p) = -\frac{2}{\pi} \sqrt{-1} \Gamma(p+1) \int_0^\tau \left\{ [e^{\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi} - 1]^n \pm 1 \right\} \sin p\varphi d\varphi; \quad \dots \quad (60)$$

pourvu que l'on néglige, toujours, la partie *réelle* de l'intégrale (\*).

Posons

$$\rho(\cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta) = e^{\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi} - 1 = e^{\cos \varphi} [\cos(\sin \varphi) + \sqrt{-1} \sin(\sin \varphi)] - 1,$$

ou

$$\rho \cos \theta = e^{\cos \varphi} \cos(\sin \varphi) - 1, \quad \rho \sin \theta = e^{\cos \varphi} \sin(\sin \varphi); \quad \dots \quad (61)$$

ou encore :

$$\rho^2 = e^{\cos \varphi} - 2e^{\cos \varphi} \cos(\sin \varphi) + 1, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\sin(\sin \varphi)}{\cos(\sin \varphi) - e^{\cos \varphi}} \dots \quad (62)$$

L'intégrale ci-dessus est transformée en

$$\int_0^\tau \rho^n (\cos n\theta + \sqrt{-1} \sin n\theta) \pm 1 \sin p\varphi d\varphi.$$

Par conséquent,

$$\Delta^n(0^p) = \frac{2}{\pi} \Gamma(p+1) \int_0^\tau \rho^n \sin n\theta \sin p\varphi d\varphi (**). \quad \dots \quad (65)$$

(\*) On peut donc, si l'on veut, faire abstraction du terme  $\pm \sin p\varphi$ .

(\*\*) Dans son *Mémoire sur diverses formules relatives à la théorie des intégrales définies* (JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, XXVIII<sup>e</sup> Cahier), CAUCHY donne des expressions de  $\Delta^n(0^p)$ , lesquelles, en général, me paraissent inexactes. Par exemple, à la page 216, on lit :

$$\begin{aligned} \Delta^n s^a &= \frac{2^{m+1} \Gamma(a+1) \cos \frac{a+1}{2} \pi}{x^{a+1}} \int \frac{\sin^m \frac{1}{2} x \cos \left( \frac{2s+m}{2} x + \frac{m}{2} \pi \right)}{\pi} dx, \\ \Delta^m s^a &= \frac{2^{m+1} \Gamma(a+1) \sin \frac{a+1}{2} \pi}{x^{a+1}} \int \frac{\sin^m \frac{1}{2} x \sin \left( \frac{2s+m}{2} x + \frac{m}{2} \pi \right)}{\pi} dx. \end{aligned}$$

Si, après avoir corrigé l'étonnante faute typographique contenue dans ces formules, on sup-

35. AUTRE EXPRESSION DE  $T_p$ , EN INTÉGRALE DÉFINIE. Des formules (8) et (63), on conclut

$$T_p = \frac{2}{\pi} \Gamma(p+1) \int_0^\pi \rho^p \sin p\varphi \cdot A_p \cdot d\varphi,$$

en supposant

$$A_p = \sin \theta + t\rho \sin 2\theta + t^2\rho^2 \sin 3\theta + \dots + t^{p-1}\rho^{p-1} \sin p\theta.$$

Mais, par une formule connue (que l'on pourrait déduire du calcul précédent) :

$$A_p = \frac{\sin \theta - t^p \rho^p \sin(p+1)\theta + t^{p+1} \rho^{p+1} \sin p\theta}{1 - 2t\rho \cos \theta + t^2 \rho^2} \quad (*).$$

Conséquemment,

$$T_p = \frac{2}{\pi} \Gamma(p+1) \int_0^\pi \rho^p \frac{\sin \theta - t^p \rho^p \sin(p+1)\theta + t^{p+1} \rho^{p+1} \sin p\theta}{1 - 2t\rho \cos \theta + t^2 \rho^2} \sin p\varphi d\varphi. \quad (64)$$

36. REMARQUES. — I. En appliquant les formules (63), (64), on ne doit pas oublier que

$$\rho \cos \theta = e^{\cos \varphi} \cos(\sin \varphi) - 1, \quad \rho \sin \theta = e^{\cos \varphi} \sin(\sin \varphi), \quad \dots \quad (61)$$

etc.

pose  $s = 0$ , elles deviennent

$$\Delta^m(0^a) = \frac{1}{\pi} 2^{m+1} \Gamma(a+1) \cos \frac{a+1}{2} \pi \int_0^\infty \frac{\sin^m \frac{x}{2} \cos \frac{m}{2} (\pi + x)}{x^{a+1}} dx,$$

$$\Delta^m(0^a) = \frac{1}{\pi} 2^{m+1} \Gamma(a+1) \sin \frac{a+1}{2} \pi \int_0^\infty \frac{\sin^m \frac{x}{2} \sin \frac{m}{2} (\pi + x)}{x^{a+1}} dx.$$

Or,  $\cos \frac{a+1}{2} \pi$  est nul lorsque  $a$  est pair;  $\sin \frac{a+1}{2} \pi$  est nul lorsque  $a$  est impair; donc ces égalités sont inadmissibles.

(\*) Pour vérifier cette formule, évidente lorsque  $p = 1$ , il suffit d'employer l'identité :

$$\sin(p+1)\theta = \frac{t^2 \rho^2 \sin(p+1)\theta - t\rho [\sin(p+2)\theta + \sin p\theta] + \sin(p+1)\theta}{1 - 2t\rho \cos \theta + t^2 \rho^2}.$$

II. Nous avons trouvé, précédemment,

$$T_p = \frac{2}{\pi} \Gamma(p+1) \int_0^\tau \frac{\sin(\sin \varphi)}{(1+t)^2 e^{-\cos \varphi} - 2t(1+t) \cos(\sin \varphi) + t^2 e^{\cos \varphi}} \sin p \varphi d\varphi. \quad (46)$$

Dans la première expression, le coefficient de  $\sin p \varphi d\varphi$  est

$$\frac{e^{\cos \varphi} \sin(\sin \varphi) - t^p e^{p+1} \sin(p+1)\theta + t^{p+1} e^{p+2} \sin p \theta}{1 - 2t[e^{\cos \varphi} \cos(\sin \varphi) - 1] + t^2[e^{2\cos \varphi} - 2e^{\cos \varphi} \cos(\sin \varphi) + 1]}$$

$$= \frac{\sin(\sin \varphi) - t^p e^{p+1} e^{-\cos \varphi} \sin(p+1)\theta + t^{p+1} e^{p+2} e^{-\cos \varphi} \sin p \theta}{(1+t)^2 e^{-\cos \varphi} - 2t(1+t) \cos(\sin \varphi) + t^2 e^{\cos \varphi}}.$$

Ainsi, au lieu de la formule (64), on peut adopter celle-ci :

$$T_p = \frac{2}{\pi} \Gamma(p+1) \int_0^\tau \frac{\sin(\sin \varphi) - t^p e^{p+1} e^{-\cos \varphi} \sin(p+1)\theta + t^{p+1} e^{p+2} e^{-\cos \varphi} \sin p \theta}{(1+t)^2 e^{-\cos \varphi} - 2t(1+t) \cos(\sin \varphi) + t^2 e^{\cos \varphi}} \sin p \varphi d\varphi. \quad (65)$$

Il en résulte, par la comparaison avec la valeur (46) :

$$\int_0^\tau e^{p+1} \frac{t \sin p \theta - \sin(p+1)\theta}{(1+t)^2 - 2t(1+t) e^{\cos \varphi} \cos(\sin \varphi) + t^2 e^{2\cos \varphi}} \sin p \varphi d\varphi = 0 (*). \quad (66)$$

**VI**

APPLICATION AUX NOMBRES DE BERNOULLI.

**37. PREMIÈRE EXPRESSION DE  $B_{p-1}$ .** Suivant la définition de LACROIX (\*\*), le  $(p-1)^{i\text{ème}}$  nombre de Bernoulli,  $B_{p-1}$ , est le coefficient de  $n$ , dans le

(\*) Le calcul précédent a été effectué de diverses manières : il y a donc lieu de croire que la dernière formule est exacte. Néanmoins, il me paraît difficile de la démontrer *a priori*, même si l'on suppose  $p = 1, t = 0$ .

(\*\*) Il y a, aujourd'hui, au moins quatre définitions différentes des Nombres de Bernoulli ; c'est pourquoi, afin d'éviter toute équivoque, j'enonce celle dont je continue à faire usage.



développement de  $S_p$ ; savoir (52) :

$$B_{p-1} = \frac{1}{1.2 \dots p(p+1)} [p(p-1) \dots 1 - (p-1)(p-2) \dots 1.1.a_p + (p-2)(p-3) \dots 1.1.2.b_p - \dots \pm 1.2.5 \dots (p-1)] \quad (*),$$

ou

$$B_{p-1} = \frac{1}{p+1} \left[ 1 - \frac{1}{p} a_p + \frac{1.2}{p(p-1)} b_p - \frac{1.2.5}{p(p-1)(p-2)} c_p + \dots - \frac{1}{p} \right]. \quad (67)$$

Cette formule donne, successivement,

$$B_1 = \frac{1}{5} \left[ 1 - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{6}, \quad B_3 = \frac{1}{5} \left[ 1 - \frac{11}{4} + \frac{11}{6} - \frac{1}{4} \right] = -\frac{1}{50},$$

$$B_5 = \frac{1}{7} \left[ 1 - \frac{57}{6} + \frac{502}{15} - \frac{502}{20} + \frac{57}{15} - \frac{1}{6} \right] = \frac{1}{42},$$

etc.

**38. EXPRESSION DE  $B_{p-1}$ , EN INTÉGRALE DÉFINIE.** Le second membre de l'avant-dernière formule peut être écrit ainsi :

$$\frac{1}{\Gamma(p+2)} [\Gamma(p+1)\Gamma(1) - \Gamma(p)\Gamma(2)a_p + \Gamma(p-1)\Gamma(5)b_p - \dots - \Gamma(2)\Gamma(p)].$$

En général,

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(\beta)}{\Gamma(x+\beta)} = \int_0^x \frac{x^{\alpha-1} dx}{(1+x)^{\alpha+\beta}} (**);$$

donc

$$\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(1)}{\Gamma(p+2)} = \int_0^x \frac{x^p dx}{(1+x)^{p+2}}, \quad \frac{\Gamma(p)\Gamma(2)}{\Gamma(p+2)} = \int_0^x \frac{x^{p-1} dx}{(1+x)^{p+2}}, \dots$$

$$\frac{\Gamma(2)\Gamma(p)}{\Gamma(p+2)} = \int_0^x \frac{x dx}{(1+x)^{p+2}}.$$

(\*) Si  $p$  est impair,  $B_{p-1} = 0$ . Nous supposons donc que  $p$  soit pair. Dans ce cas, le dernier terme est négatif.

(\*\*) BIERENS DE HAAN, t. XVIII.

La quantité précédente devient

$$\int_0^\infty \frac{x dx}{(1+x)^{p+2}} [x^{p-1} - a_p x^{p-2} + b_p x^{p-3} - \dots - 1];$$

ou, par le changement de  $x$  en  $-x$  :

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{(1-x)^{p+2}} [x^{p-1} + a_p x^{p-2} + b_p x^{p-3} + \dots + 1].$$

Le polynôme entre parenthèses est  $P_p$ . Ainsi déjà

$$B_{p-1} = \int_{-\infty}^0 \frac{P_p x dx}{(1-x)^{p+2}} (*) \dots \dots \dots (68)$$

39. SUITE. Pour simplifier cette expression, j'emploie les relations

$$P_p = \frac{T_p}{(1+t)^{p-1}}, \quad x = \frac{t}{1+t}, \quad 1-x = \frac{1}{1+t}, \quad dx = \frac{dt}{(1+t)^2}.$$

Il en résulte

$$B_{p-1} = \int_{-1}^0 T_p t dt. \dots \dots \dots (69)$$

Mais

$$T_p = 1 + t\Delta^2(0^p) + t^2\Delta^3(0^p) + \dots + t^{p-1}\Delta^p(0^p); \dots \dots \dots (8)$$

donc

$$B_{p-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\Delta^2(0^p) - \frac{1}{4}\Delta^3(0^p) + \frac{1}{5}\Delta^4(0^p) - \dots + \frac{1}{p+1}\Delta^p(0^p). \dots \dots (70)$$

Cette formule, *peut-être* nouvelle, ne diffère pas, au fond, de celle-ci :

$$B_{p-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}\Delta(1^{p-1}) + \frac{1}{4}\Delta^2(1^{p-1}) - \dots - \frac{1}{p+1}\Delta^{p-1}(1^{p-1}) (**). \dots \dots (71)$$

(\*) Si je ne me trompe, cette formule est la première qui donne les Nombres de Bernoulli sous la forme d'une intégrale de *différentielle algébrique*.

(\*\*) Sur les différences de  $1^p$ , et sur le calcul des Nombres de Bernoulli.

En effet, à cause de

$$\Delta^k(0^p) = k\Delta^{k-1}(1^{p-1}), \dots \dots \dots (20)$$

la première équivaut à

$$B_{p-1} = -\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{5}\right)\Delta(1^{p-1}) - \left(1 - \frac{1}{4}\right)\Delta^2(1^{p-1}) + \dots + \left(1 - \frac{1}{p+1}\right)\Delta^{p-1}(1^{p-1}),$$

égalité que l'on peut écrire ainsi :

$$B_{p-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}\Delta(1^{p-1}) + \frac{1}{4}\Delta^2(1^{p-1}) - \dots - \frac{1}{p+1}\Delta^{p-1}(1^{p-1}) \\ - 1 + \Delta(1^{p-1}) - \Delta^2(1^{p-1}) + \dots + \Delta^{p-1}(1^{p-1}).$$

Or, la seconde ligne est nulle (21).

**40. COMBINAISONS DES VALEURS PRÉCÉDENTES.** Des formules (70), (71), on conclut, par l'application de l'égalité (20) :

$$\left. \begin{aligned} 2B_{p-1} &= \frac{1}{5}\Delta(1^{p-1}) - \frac{2}{4}\Delta^2(1^{p-1}) + \frac{3}{5}\Delta^3(1^{p-1}) - \dots + \frac{p-1}{p+1}\Delta^{p-1}(1^{p-1}), \\ 5B_{p-1} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\Delta^2(1^{p-1}) + \frac{2}{5}\Delta^3(1^{p-1}) - \frac{5}{6}\Delta^4(1^{p-1}) + \dots + \frac{p-2}{p+1}\Delta^{p-1}(1^{p-1}), \\ 4B_{p-1} &= 1 - \frac{1}{5}\Delta(1^{p-1}) + \frac{1}{5}\Delta^3(1^{p-1}) - \frac{2}{6}\Delta^4(1^{p-1}) + \dots + \frac{p-3}{p+1}\Delta^{p-1}(1^{p-1}), \\ 5B_{p-1} &= \frac{5}{2} - \frac{2}{5}\Delta(1^{p-1}) + \frac{1}{4}\Delta^2(1^{p-1}) - \frac{1}{6}\Delta^4(1^{p-1}) + \dots + \frac{p-4}{p+1}\Delta^{p-1}(1^{p-1}), \\ \dots \dots \dots \\ (p+1)B_{p-1} &= \frac{p-1}{2} - \frac{p-2}{5}\Delta(1^{p-1}) + \frac{p-5}{4}\Delta^2(1^{p-1}) - \dots + \frac{1}{p}\Delta^{p-2}(1^{p-1}). \end{aligned} \right\} (72)$$

**41. AUTRE EXPRESSION DE  $B_{p-1}$ , EN INTÉGRALE DÉFINIE.** Reprenons les formules

$$B_{p-1} = \int_{-\infty}^0 \frac{P_p x dx}{(1-x)^{p+2}}, \dots \dots \dots (68)$$

$$\frac{P_p}{(1-x)^{p+1}} = \frac{2}{\pi} \Gamma(p+1) \int_0^\pi \frac{\sin(\sin \varphi) \sin p \varphi d\varphi}{e^{-\cos \varphi} - 2x \cos(\sin \varphi) + x^2 e^{\cos \varphi}} \dots \dots (40)$$

Il en résulte

$$-B_{p-1} = \frac{2}{\pi} \Gamma(p+1) \int_0^\pi e^{-\cos^2 \varphi} \sin(\sin \varphi) \sin p\varphi d\varphi \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{(x-1)[x^2 - 2xe^{-\cos^2 \varphi} \cos(\sin \varphi) + e^{-2\cos^2 \varphi}]}$$

L'intégrale indéfinie, relative à  $x$ , a la forme

$$A(x-1) + B[x^2 - 2xe^{-\cos^2 \varphi} \cos(\sin \varphi) + e^{-2\cos^2 \varphi}] + C \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x - e^{-\cos^2 \varphi} \cos(\sin \varphi)}{e^{-\cos^2 \varphi} \sin(\sin \varphi)}.$$

On trouve

$$A = \frac{1}{1 - 2e^{-\cos^2 \varphi} \cos(\sin \varphi) + e^{-2\cos^2 \varphi}}, \quad A + 2B = 0, \quad C = A \frac{e^{-\cos^2 \varphi} - \cos(\sin \varphi)}{\sin(\sin \varphi)};$$

puis, tous calculs faits :

$$-B_{p-1} = \frac{2}{\pi} \Gamma(p+1) \int_0^\pi \frac{e^{-\cos^2 \varphi} \sin \varphi + \sin(\sin \varphi - \varphi)}{e^{\cos^2 \varphi} - 2\cos(\sin \varphi) + e^{-\cos^2 \varphi}} \sin p\varphi d\varphi. \quad \dots \quad (75)$$

**42. REMARQUE.** En partant de la formule

$$S_p = -\frac{2}{\pi} \sqrt{-1} \Gamma(p+1) \int_0^\pi \frac{e^{(n+1)(\cos^2 \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)} - 1}{e^{\cos^2 \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi} - 1} \sin p\varphi d\varphi \quad (\mathbf{31}),$$

développant suivant les puissances de  $n$ , et prenant le coefficient de la première puissance, j'obtiens

$$B_{p-1} = \frac{2}{\pi} \Gamma(p+1) \int_0^\pi \frac{e^{\cos^2 \varphi} \sin \varphi - \sin(\sin \varphi + \varphi)}{e^{\cos^2 \varphi} - 2\cos(\sin \varphi) + e^{-\cos^2 \varphi}} \sin p\varphi d\varphi, \quad \dots \quad (74)$$

expression qui s'accorde avec la première. En effet, la combinaison des deux conduit à l'égalité

$$0 = \int_0^\pi \frac{(e^{\cos^2 \varphi} + e^{-\cos^2 \varphi}) \sin \varphi - 2 \sin \varphi \cos(\sin \varphi)}{e^{\cos^2 \varphi} - 2 \cos(\sin \varphi) + e^{-\cos^2 \varphi}} \sin p\varphi d\varphi,$$

ou

$$0 = \int_0^\pi \sin \varphi \sin p\varphi d\varphi.$$

Or,  $p$  étant pair,

$$\sin(\pi - \alpha)\sin(p\pi - p\alpha) = -\sin \alpha \sin p\alpha;$$

etc.

## VII

### PROPRIÉTÉS DES POLYNOMES $T_p$ .

43. PREMIÈRE PROPRIÉTÉ. 1° L'équation  $T_p = 0$  a toutes ses racines réelles ; 2° ces racines, comprises entre  $-1$  et  $0$ , sont séparées par les racines de  $T_{p-1} = 0$  (\*).

Considérons l'équation  $T_3 = 0$ , ou

$$6t^2 + 6t + 1 = 0.$$

Les deux racines,  $-a$  et  $-b$ , sont : 1° réelles ; 2° comprises entre  $-1$  et  $0$ . Conséquemment, les quatre racines de l'équation

$$(t^2 + t)(6t^2 + 6t + 1) = 0$$

jouissent des mêmes propriétés.

Cela posé, on a

$$T_4 = [(t^2 + t)(6t^2 + 6t + 1)]'; \quad \dots \dots \dots (17)$$

done, par le théorème de ROLLE, les quantités  $-1$ ,  $-a$ ,  $-b$ ,  $0$  séparent les racines de  $T_4 = 0$  : ces trois racines sont réelles. Le raisonnement est général ; ainsi la proposition peut être regardée comme démontrée.

44. DEUXIÈME PROPRIÉTÉ. Si  $p$  est pair,  $T_p, T_p'', T_p^{iv}, \dots$  sont divisibles par  $2t + 1$  ; et, si  $p$  est impair,  $T_p, T_p''', T_p^v, \dots$  sont divisibles par ce binôme.

(\*) Cette théorie est toute semblable à celle de l'équation  $X_n = 0$ . (Mémoire sur les fonctions  $X_n$ , de Legendre, p. 51.)

De la formule

$$T_p = [(t^2 + t)T_{p-1}', \dots \dots \dots] \quad (17)$$

ou

$$T_p = (t^2 + t)T_{p-1}' + (2t + 1)T_{p-1}, \dots \dots \dots \quad (17^{bis})$$

on tire :

$$T_p = (t^2 + t)T_{p-1}'' + 2(2t + 1)T_{p-1}' + 2T_{p-1},$$

$$T_p'' = (t^2 + t)T_{p-1}''' + 5(2t + 1)T_{p-1}'' + 6T_{p-1}',$$

$$\dots \dots \dots ;$$

et, pour  $t = -\frac{1}{2}$  :

$$T_p = -\frac{1}{4}T_{p-1}',$$

$$T_p' = -\frac{1}{4}T_{p-1}'' + 2T_{p-1},$$

$$T_p'' = -\frac{1}{4}T_{p-1}''' + 6T_{p-1}',$$

$$\dots \dots \dots$$

Il y a, maintenant, deux cas à distinguer :

1° Si l'on a :

$$T_{p-1} = 0, \quad T_{p-1}'' = 0, \quad T_{p-1}' = 0, \quad \dots \dots,$$

on aura, aussi :

$$T_p = 0, \quad T_p' = 0, \quad T_p'' = 0, \quad \dots ;$$

2° Si l'on a :

$$T_{p-1} = 0, \quad T_{p-1}' = 0, \quad T_{p-1}'' = 0, \quad \dots \dots,$$

on aura, aussi :

$$T_p = 0, \quad T_p'' = 0, \quad T_p' = 0, \quad \dots$$

Or,

$$T_3 = 0, \quad T_3'' = 0, \quad T_3' = 0, \quad \dots ;$$

done

$$T_4 = 0, \quad T_4' = 0, \quad T_4'' = 0, \quad \dots \dots,$$

puis

$$T_5 = 0, \quad T_5'' = 0, \quad T_5' = 0, \quad \dots \dots,$$

etc.

43. TROISIÈME PROPRIÉTÉ (\*). Pour  $t = -1$ ,  $T_p = \mp 1$ , selon que  $p$  est pair ou impair.

De l'équation

$$T_p = (t^2 + t)T_{p-1} + (2t + 1)T_{p-2},$$

on conclut encore, en faisant  $t = -1$  :

$$T_p = -T_{p-1}.$$

Or, pour cette valeur de  $t$ ,  $T_2 = -1$  ; donc

$$T = +1, \quad T_1 = -1, \quad \text{etc.}$$

46. REMARQUE. Cette propriété peut être ainsi énoncée :

Le reste de la division de  $T_p$ , par  $t + 1$ , est  $\pm 1$ .

47. QUATRIÈME PROPRIÉTÉ. Si  $-k, -l$  sont deux racines quelconques de  $T_{p-1} = 0$ , on a

$$\int_{-l}^{-k} T_p dt = 0 (**). \quad \dots \dots \dots (75)$$

Cette formule résulte, immédiatement, de l'égalité

$$T_p = [(t + t^2)T_{p-1}]. \quad \dots \dots \dots (17)$$

48. REMARQUE. On a aussi, à cause du facteur  $t + t^2$  :

$$\int_{-1}^0 T_p dt = 0, \quad \dots \dots \dots (76)$$

pourvu que  $p$  surpasse l'unité.

49. CINQUIÈME PROPRIÉTÉ. Les racines de l'équation  $T_p = 0$  sont conjuguées deux à deux, de manière que leur somme égale  $-1$ .

Soit  $Z_p$  ce que devient  $T_p$  quand on fait  $t = -\frac{1}{2} + z$ .

L'égalité (17) se transforme en

$$Z_p = [(z^2 - \frac{1}{4})Z_{p-1}].$$

(\*) Indiquée ci-dessus (p. 48).

(\*\*) Nouvelle analogie entre les polynômes  $T_p$  et les fonctions  $X_n$  (*Mémoire sur les fonctions  $X_n$  de Legendre*, p. 44.)

En partant de  $Z_2 = 2z$ , on trouve

$$Z_3 = 6z^3 - \frac{1}{2}, \quad Z_4 = 24z^5 - 4z, \quad \dots$$

Sans qu'il soit nécessaire d'aller plus loin, on reconnaît que :

1° Les racines de  $Z_p = 0$  sont, deux à deux, égales et de signes contraires ;

2° Si  $p$  est pair, cette équation a une racine nulle.

Cette remarque démontre la propriété énoncée.

### VIII

#### RELATIONS SIMPLES ENTRE DEUX SÉRIES.

50. D'après un théorème de M. HOLMBOE (\*), si l'on fait

$$u = \frac{1}{1 - e^x}, \quad \dots \dots \dots (25)$$

on a, *identiquement*,

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 5 \frac{du}{dx} + 2u = 2u^5. \quad \dots \dots \dots (77)$$

Nous avons trouvé

$$u = \frac{1}{1-x} + \frac{P_1 x}{(1-x)^2} \frac{x}{1} + \frac{P_2 x}{(1-x)^3} \frac{x^2}{1.2} + \frac{P_3 x}{(1-x)^4} \frac{x^3}{1.2.5} + \dots; \quad \dots (25)$$

ou, ce qui est équivalent,

$$u = 1 + t + (t + t^2) \left[ T_1 \frac{x}{1} + T_2 \frac{x^2}{1.2} + T_3 \frac{x^3}{1.2.5} + \dots \right] (**). \quad \dots \dots \dots (78)$$

(\*) *Oeuvres d'Abel*, t. II, p. 274. — *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. VI, p. 581.

(\*\*) Cette formule ne diffère pas, au fond, de la relation (29); mais, pour la solution du problème actuel, elle est plus commode que celle-ci.



Par conséquent :

$$\frac{du}{dz} = (t + t^2) \left[ T_1 + T_2 \frac{\alpha}{1} + T_3 \frac{\alpha^2}{1.2} + \dots \right],$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = (t + t^2) \left[ T_2 + T_3 \frac{\alpha}{1} + T_4 \frac{\alpha^2}{1.2} + \dots \right];$$

puis

$$2u + 5 \frac{du}{d\alpha} + \frac{d^2u}{d\alpha^2} = 2(t + t) + 2(t + t^2) \left[ T_1 \frac{\alpha}{1} + T_2 \frac{\alpha^2}{1.2} + T_3 \frac{\alpha^3}{1.2.5} + \dots \right]$$

$$+ 5(t + t^2) \left[ T_1 + T_2 \frac{\alpha}{1} + T_3 \frac{\alpha^2}{1.2} + \dots \right]$$

$$+ (t + t^2) \left[ T_2 + T_3 \frac{\alpha}{1} + T_4 \frac{\alpha^2}{1.2} + \dots \right].$$

A cause de  $T_1 = 1$ ,  $T_2 = 1 + 2t$ , le terme indépendant de  $\alpha$  égale

$$2(1 + t) + 5(t + t^2) + (t + t^2)(1 + 2t) = 2(1 + t)^2.$$

Donc si l'on pose, pour abréger,

$$\pm T_p + 5T_{p+1} + T_{p+2} = G_p, \dots \dots \dots (79)$$

on aura

$$2u + 5 \frac{du}{d\alpha} + \frac{d^2u}{d\alpha^2} = 2(1 + t)^2 + (t + t^2) \sum_1^\infty G_p \frac{\alpha^p}{\Gamma(\rho + 1)} \dots \dots \dots (80)$$

D'un autre côté,

$$2u^2 = 2(1 + t)^2 \left[ 1 + t \sum_1^\infty T_p \frac{\alpha^p}{\Gamma(\rho + 1)} \right]^2.$$

Ainsi, après la suppression du facteur  $1 + t$ , l'équation (77) devient

$$2(1 + t)^2 + t \sum_1^\infty G_p \frac{\alpha^p}{\Gamma(\rho + 1)} = 2(1 + t)^2 \left[ 1 + t \sum_1^\infty T_p \frac{\alpha^p}{\Gamma(\rho + 1)} \right]^2. \dots \dots (81)$$

31. SUITE. Il est facile de voir que  $G_p$  est divisible par  $(1 + t)^2$ . En effet :

1° Pour  $t = -1$ , l'égalité (79) se réduit (45) à

$$\pm (2 - 5 + 1) = 0 (*).$$

(\* En général,

$$aT_p + (a + b)T_{p+1} + bT_{p+2}$$

est divisible par  $1 + t$ .

2° Si, dans cette même égalité, on prend les dérivées des deux membres, et que l'on suppose encore  $t = -1$ , on a

$$2T'_p + 5T'_{p+1} + T'_{p+2} = G'_p.$$

Prenons, maintenant, la relation

$$T'_p = (t^2 + t)T'_{p-1} + 2(2t + 1)T'_{p-1} + 2T'_{p-1}.$$

Lorsque  $t = -1$ , elle se réduit à

$$T'_p = -2T'_{p-1} \pm 2.$$

Il résulte, de celle-ci :

$$T'_{p+1} = -2T'_p \mp 2, \quad T'_{p+2} = -2T'_{p+1} \pm 2;$$

puis

$$G'_p = -4T'_{p-1} - 6T'_p - 2T'_{p+1} = -G'_{p-1}.$$

Or,

$$G_1 = 2T_1 + 5T_2 + T_3 = 6(1 + t)^2;$$

donc, pour  $t = -1$  :

$$G'_1 = 0, \quad G'_2 = 0, \quad G'_3 = 0, \quad \dots$$

Cela posé, si l'on fait

$$G_p = 2(1 + t)^2 H_p, \quad \dots \dots \dots (82)$$

la relation (81) prend la forme

$$1 + t \sum_1^{\infty} H_p \frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)} = \left[ 1 + t \sum_1^{\infty} T_p \frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)} \right]^5 \dots \dots \dots (85)$$

Ainsi, le cube de la série

$$1 + t \frac{\alpha}{1} + t(1 + 2t) \frac{\alpha^2}{1.2} + t(1 + 6t + 6t^2) \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \dots$$

est une série aussi simple que la première. Ce résultat nous semble remarquable (\*).

§2. VALEURS DES COEFFICIENTS  $H_1, H_2, H_3, \dots$ . Le calcul direct donne

$$G_1 = 6(1+t)^2, \quad G_2 = 6(1+t)^2(1+4t), \quad G_3 = 6(1+t)^2(1+12t+20t^2), \quad \dots$$

donc

$$H_1 = 5, \quad H_2 = 5(1+4t), \quad H_3 = 5(1+12t+20t^2), \quad \dots$$

Il se complique bientôt; mais la loi des polynômes  $G_p$  est la même que celle des polynômes  $G_p$ .

En effet, la formule

$$G_p = 2T_p + 5T_{p+1} + T_{p+2} \dots \dots \dots (79)$$

équivalent à

$$G_p = 2[(t+t^2)T_{p-1}]' + 5[(t+t^2)T_p]' + [(t+t^2)T_{p+1}]',$$

ou à

$$G_p = [(t+t^2)(2T_{p-1} + 5T_p + T_{p+1})]'$$

ou enfin, à

$$G_p = [(t+t^2)G_{p-1}]'. \dots \dots \dots (84)$$

§3. REMARQUES. — I. De cette relation, on déduit celle-ci :

$$H_p = (1+4t)H_{p-1} + (t+t^2)H_{p-2}, \dots \dots \dots (85)$$

laquelle peut servir au calcul des polynômes  $H_p$ ; mais il est plus simple d'appliquer les formules (84) et (82).

II. Si  $t = 1$ , l'équation (83) se réduit à

$$1 + \sum_1^{\infty} H_p \frac{z^p}{\Gamma(p+1)} = \left[ 1 + \sum_1^{\infty} T_p \frac{z^p}{\Gamma(p+1)} \right]^5.$$

Pour cette valeur de  $t$ , le second membre devient  $\frac{1}{(2-e^{2z})^5}$  (17).

(\*) Il a quelque analogie avec la célèbre formule de JACOBI :

$$(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \dots)^2 = 1 - 5q^2 + 5q^6 - 7q^{12} + \dots$$

(Recherches sur quelques produits indéfinis.)

En outre :

$$H_1 = 5, \quad H_2 = 15, \quad H_3 = 99, \quad H_4 = 807, \quad \dots$$

Donc, à cause de la formule

$$\frac{1}{2 - \rho^2} = 1 + \frac{\alpha}{1} + 5 \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} + 15 \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 75 \frac{\alpha^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + 541 \frac{\alpha^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots, \quad (50)$$

on a

$$\left[ 1 + \frac{\alpha}{1} + 5 \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} + 15 \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 75 \frac{\alpha^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + 541 \frac{\alpha^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \right]^5 = \left. \begin{aligned} & 1 + 5 \frac{\alpha}{1} + 15 \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} + 99 \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 807 \frac{\alpha^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \end{aligned} \right\} \dots \quad (86)$$

**IX**

REMARQUES DIVERSES.

54. Soit à vérifier la formule

$$T_p = \frac{2}{\pi} \Gamma(p + 1) \int_0^{\pi} \frac{\sin(\sin \varphi) \sin p \varphi d\varphi}{(1 + t)^2 e^{-\cos \varphi} - 2t(1 + t) \cos(\sin \varphi) + t^2 e^{\cos \varphi}}, \quad \dots \quad (46)$$

que l'on peut écrire sous la forme abrégée :

$$T_p = \frac{2}{\pi} \Gamma(p + 1) \int_0^{\pi} \frac{e^{\cos \varphi} \sin(\sin \varphi) \sin p \varphi d\varphi}{at^2 + 2bt + 1}; \quad \dots \quad (87)$$

en posant

$$a = 1 - 2e^{\cos \varphi} \cos(\sin \varphi) + e^{2\cos \varphi}, \quad b = 1 - e^{\cos \varphi} \cos(\sin \varphi). \quad \dots \quad (88)$$

D'après l'équation

$$\int_{-1}^0 T_p dt = 0, \quad \dots \quad (76)$$

on doit trouver, en intervertissant l'ordre des intégrations :

$$\int_0^{\pi} e^{\cos \varphi} \sin(\sin \varphi) \sin p \varphi d\varphi \int_{-1}^0 \frac{dt}{at^2 + 2bt + 1} = 0. \quad \dots \quad (89)$$

En général,

$$\int \frac{dt}{at^2 + 2bt + 1} = \frac{1}{\sqrt{a-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{at+b}{\sqrt{a-b^2}} \quad (*);$$

donc

$$\int_{-1}^0 \frac{dt}{at^2 + 2bt + 1} = \frac{1}{\sqrt{a-b^2}} \left[ \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{a-b^2}} + \operatorname{arctg} \frac{a-b}{\sqrt{a-b^2}} \right].$$

La quantité entre parenthèses équivaut à

$$\operatorname{arctg} \frac{\frac{a}{\sqrt{a-b^2}}}{1 - \frac{b(a-b)}{a-b^2}} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a-b^2}}{1-b}.$$

Ainsi

$$\int_{-1}^0 \frac{dt}{at^2 + 2bt + 1} = \frac{1}{\sqrt{a-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a-b^2}}{1-b} \dots \dots \dots (90)$$

Dans le cas actuel :

$$a - b^2 = e^{2\cos^2\varphi} \sin^2(\sin\varphi), \quad 1 - b = e^{\cos^2\varphi} \cos(\sin\varphi);$$

et le second membre de la dernière égalité devient

$$\frac{1}{e^{\cos^2\varphi} \sin(\sin\varphi)} \operatorname{arctg} \frac{e^{\cos^2\varphi} \sin(\sin\varphi)}{e^{\cos^2\varphi} \cos(\sin\varphi)} = \frac{\sin\varphi}{e^{\cos^2\varphi} \sin(\sin\varphi)}.$$

Substituant dans la relation (79), on trouve

$$\int_0^{\pi} \sin p\varphi \sin \varphi d\varphi = 0;$$

valeur exacte, dès que  $p$  surpasse l'unité.

33. Le calcul des *nombres T*, indiqué ci-dessus (20), peut aussi (10) être effectué au moyen des différences successives de  $\Theta^n$ , comme le montre le tableau ci-après.

(\*) En effet, la dérivée du second membre est

$$\frac{1}{\sqrt{a-b^2}} \frac{\frac{a}{\sqrt{a-b^2}}}{1 + \frac{(at+b)^2}{a-b^2}} = \frac{a}{a-b^2 + (at+b)^2} = \frac{1}{at^2 + 2bt + 1}.$$

	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\Delta_4$	$\Delta_5$	$\Delta_6$	$\Delta_7$	$\Delta_8$	$\Delta_9$	$\Delta_{10}$	T
01	1										1
02	1	2									3
05	1	6	6								13
04	1	14	36	24							73
05	1	30	150	240	120						541
06	1	62	340	1 560	4 800	720					4 683
07	1	126	1 806	8 400	16 800	15 120	5 040				17 293
08	1	254	5 796	40 824	126 000	191 520	141 420	40 320			543 835
09	1	510	18 450	186 480	834 420	1 993 420	2 328 480	1 451 520	362 880		7 087 261
010	1	1 022	55 980	818 520	5 103 600	16 435 440	29 635 200	30 240 600	16 320 600	3 628 800	102 248 073

*P.-S.* (mars 1881). — A la fin du paragraphe 16, on lit :

« Ces résultats *absurdes*, admis par quelques Géomètres :

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots = 1,$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \dots = 0,$$

etc. »

En écrivant ces lignes, je songeais aux *anciens* Géomètres, ne croyant pas qu'il pût exister, aujourd'hui, de *partisans des séries divergentes*. J'étais dans l'erreur : un honorable *Disciple* de Wronski, dans une lettre qu'il m'adresse, formule ainsi son opinion :

« Une série divergente, telle que

$$1 - 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} - \frac{1}{5} - \frac{1.5}{1.2} - \frac{1}{4} - \frac{1.5.5}{1.2.5} - \dots$$

peut avoir pour valeur une quantité imaginaire, qui est ici  $\sqrt{-1}$ . »

Évidemment, toute réfutation serait inutile !

#### ERRATA.

Page 24, avant-dernière formule. Au lieu de : «  $\Delta^m s^n =$ , lisez : «  $\Delta^m s^n =$ .

(\*) Dans la dernière colonne, les chiffres des unités forment la suite périodique :

$$1 \ 5 \ 5 \ 3 \ 1 \ 5 \ 5 \ 3 \ 1 \ 5 \ 5 \ 3 \ \dots$$

# BIBLIOGRAPHIE ANALYTIQUE

DES

## PRINCIPAUX PHÉNOMÈNES SUBJECTIFS DE LA VISION;

PAR

J. PLATEAU,

MEMBRE DE L'ACADEMIE ROYALE DE BELGIQUE,  
CORRESPONDANT DE L'INSTITUT DE FRANCE, DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DE LONDRES,  
DE L'ACADEMIE DE BERLIN, ETC.

---

DEUXIÈME SUPPLEMENT <sup>1</sup>,

COMPRENANT LES ANNÉES 1878 ET 1879.

---

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 6 novembre 1880.)

---

<sup>1</sup> Voir, pour l'ouvrage et le premier supplément, le t. XLII des *Mem. de l'Acad. royale de Belgique*.





# BIBLIOGRAPHIE ANALYTIQUE

DES

## PRINCIPAUX PHÉNOMÈNES SUBJECTIFS DE LA VISION.

### PREMIÈRE SECTION.

#### **Persistence des impressions sur la rétine.**

1859. SERRE. *Note sur la persistence des impressions sur la rétine.* (Ann. d'Oculistique, t. I, 1858-59, p. 291.)

Rien qui ne fût connu auparavant.

1845. DE MAIZIÈRE. *Peinture d'une roue en mouvement.* (Séances et travaux de l'Académie de Reims, t. I, p. 555.)

L'auteur pense qu'en partant de la durée de la sensation, et en suivant certaines règles qu'il indique, on peut représenter la roue d'un char dans ses deux mouvements simultanés de rotation et de translation.

*Essai d'une théorie sur la peinture du mouvement du fuseau d'une filense.* (Ibid., ibid., p. 560.)

Considerations analogues à celles de l'article précédent.

1858. ROGERS. *Some experiments on sonorous flames, with remarks on the primary source of their vibration.* (Journ. de Silliman, 2<sup>me</sup> série, t. XXVI, p. 1; voir pp. 8 et 10.)

Les intermittences de la flamme chantante sont rendues visibles par un mouvement de va-et-vient ou de révolution de celle-ci, ou bien par un objet en mouvement rapide qu'elle éclaire.

1867. CROVA. *Description d'un appareil pour la projection mécanique des mouvements*

1867. *vibratoires*. (Ann. de Chim. et de Phys. de Paris, 4<sup>me</sup> série, t. XII, p. 288; voir p. 507.)  
Intersection de deux courbes lumineuses tournantes.
- LOVERING. *On the optical method of studying sound*. (Proceedings of the Americ. Assoc., réunion du mois d'août, vol. publié en 1868, p. 25.)  
Emploi du miroir tournant
- CLAUDET. *A new fact relating to binocular vision*. (Philos. Magaz., 4<sup>me</sup> série, t. XXXIII, p. 549.)  
Un Thaumatrope dont l'axe de rotation coïncide avec l'une des faces du carton, montre les parties du dessin figurées sur cette face sensiblement en arrière de celles que porte l'autre face.
1868. CARPENTER. *On the Zootrope and its antecedents*. (The student and intellectual observer of science, literature and art, t. II, p. 24; voir pp. 25 et 26.)  
Description d'une espèce ingénieuse de Phénakisticope imaginée par Wheatstone.
- The Anorthoscope*. (Ibid., ibid., p. 110.)  
Description et théorie des divers Anorthoscopes de J. Plateau.
- JEFFRIES. *Remarks upon the principles of the Thaumatrope*. (Transact. of the American Ophthalmol. Soc., 1869, p. 98.)  
Remarques sur l'expérience de Claudet citée plus haut
- SMITH (F.-H.). *On convenient forms of experiment with fluid jets*. (Journ. de Siliman, 2<sup>me</sup> série, t. XLV, p. 419.)  
Veine liquide s'écoulant dans un cône de lumière solaire émane du foyer d'une lentille, et projetant son ombre sur un écran blanc, tandis qu'un disque percé tourne entre la veine et l'écran. — Emploi d'une sorte de Kalcidophone pour l'observation des flammes chantantes.
1869. PICKERING. *On the experiment of Lissajous*. (Journ. of the Franklin Institute, 5<sup>me</sup> série, t. LVII, p. 53.)  
Modification du procédé.
- BUDGE. *Ueber die Sternformen des Leidenfrost'schen Tropfens*. (Sitzungsberichte der Niederrh. Gesellsch. für Natur und Heilk. zu Bonn, t. XXVI, p. 50.)  
Etude de ces formes.
1871. PICTET. (Raoul). *Mémoire sur la vision binoculaire*. (Biblioth. Univ., Arch. des Sc., nouvelle période, t. XL, p. 105; voir p. 114.)  
Sensation du relief, expérience curieuse fondée sur la persistance des impressions

PHÉNOMÈNES SUBJECTIFS DE LA VISION, 2<sup>me</sup> SUPPLÉMENT. 5

1871. TAIT. *On a method of illustrating to a large audience the composition of simple harmonic motions under various conditions.* (Proceedings de la Soc. Roy. d'Édimbourg, t. VII, 1869-72, p. 412.)

Emploi de miroirs tournants fixés presque normalement à leurs axes de rotation.

1875. RAEHLMANN. *Ueber Verhältnisse der Farbenempfindung bei indirectem und directem Sehen.* (Archiv für Ophthalmol., t. XX, 1874, 1<sup>re</sup> partie, p. 15.)

Expériences en employant les couleurs spectrales; théorie.

KRÜKOW. *Objective Farbenempfindungen auf den peripherischen Theilen der Netzhaut.* (Ibid., ibid., p. 255.)

Expériences; considérations sur les difficultés de ce genre de recherches.

VOLPICELLI. *Effetti della persistenza dei colori sulla retina.* (Atti della Reale Accad. dei Lincei, t. XXVI, p. 625.)

Rien d'important.

1874. SCHÖN. *Einfluss der Ermüdung auf die Farbenempfindung.* (Archiv für Ophthalmol., t. XX, 2<sup>me</sup> partie, p. 272.)

Emploi des couleurs spectrales rouge, verte et bleue : la fatigue est la moindre pour le rouge, et la plus forte pour le bleu.

1876. GUERARDI. *Notizia di un fenomeno d'ottica fisiologica di qualche novità.* (Rendiconto delle sessioni dell' Accad. delle Scienze dell' Istituto di Bologna, 1875-76, p. 154.)

Apparences qui résultent des mouvements de rotation simultanés de deux disques placés l'un devant l'autre, le postérieur portant des secteurs peints des couleurs du spectre, et l'antérieur étant percé de lentes radiales.

1877. ROSENSTIEHL. Communication de l'auteur. (Bullet. de la Soc. industrielle de Mulhouse, séance du 27 juin.)

Emploi des disques tournants à secteurs colorés pour obtenir les vraies dégradations d'une couleur franche, etc.

SPOTTISWOODE. *Experiments with a great induction coil.* (Proceed. of the Royal Institution, t. VIII, part. IV, p. 559.)

Observation de la décharge électrique dans un tube vide, en imprimant à ce tube un mouvement rapide.

THOMPSON (Silvanus). *Some new optical illusions.* (Rapp. de l'Assoc. Britann., Communications, p. 52.)

Phénomène du genre de celui de la spirale tournaute [voir, dans la première Section de l'ouvrage, l'article 1849 J. Plateau]; idem analogue à celui des coeurs dansants

1877. KRIES. *Ueber Ermüdung des Sehnerven.* (Archiv für Ophthalmol., t. XXIII, 2<sup>me</sup> partie, p. I.)

Détermination de l'éclat d'un disque blanc après une contemplation plus ou moins longue, au moyen d'un disque tournant à secteurs blancs et noirs, lequel observé instantanément présente le même éclat.

CHODIN. *Ueber die Empfindlichkeit für Farben in der Peripherie der Netzhaut.* (Ibid., ibid., 5<sup>me</sup> partie, p. 177.)

Le bleu est la couleur qui se distingue le plus loin du centre de la rétine; difficultés de ce genre d'expériences.

1878. DELBOEUF. *La loi psychophysique et le nouveau livre de Fechner.* (La Revue philosophique, t. V, n<sup>os</sup> de janvier et février, p. 54; voir p. 151.)

Objections contre l'opinion d'après laquelle le noir serait une sensation de même nature que le blanc.

MONTIGNY. *Recherches sur les changements de couleur qui caractérisent la scintillation des étoiles de teintes rouge et orangée, ou du troisième type.* (Bullet. de l'Acad. de Belgique, 2<sup>me</sup> série, t. XLV, p. 591.)

Fréquence relative des différentes couleurs dans la scintillation des étoiles dont il s'agit; scintillomètre de l'auteur.

*De l'influence des aurores boréales sur la scintillation des étoiles, particulièrement pendant les soirées du 5 avril 1870 et du 1<sup>er</sup> juin 1878.* (Ibid., ibid., t. XLVI, p. 17.)

Emploi ultérieur du même scintillomètre.

*Disposition expérimentale appliquée à l'étude des étoiles colorées.* (Ibid., ibid., p. 528.)

Nouvelle application du même scintillomètre.

*Recherches sur les variations de la scintillation des étoiles selon l'état de l'atmosphère, 2<sup>me</sup> partie.* (Ibid., ibid., p. 598.)

Voir, pour l'indication de la 1<sup>re</sup> partie, l'article 1876 Montigny à la fin de la première Section.

*Description d'un nouveau scintillomètre, et recherches sur la scintillation des étoiles.* Bruxelles.

Résumé des recherches de l'auteur.

J. PLATEAU. *Sur une loi de la persistance des impressions dans l'œil.* (Bullet. de l'Acad. de Belgique, 2<sup>me</sup> série, t. XLVI, p. 554.)

Étude relative au temps pendant lequel une impression qui s'efface conserve une intensité sensiblement constante.

PHÉNOMÈNES SUBJECTIFS DE LA VISION, 2<sup>me</sup> SUPPLÉMENT. 7

1878. FAVÉ. *Les vibrations de la matière et les ondes de l'éther dans la vision.* (Comptes rendus, t. LXXXVI, p. 441.)

Les ondes de l'éther mettent en vibration toutes les humeurs de l'œil, et les éléments de la rétine savent choisir les vibrations qu'ils sont capables de rendre pour produire la sensation.

ROSENSTIEHL. *De l'emploi des disques rotatifs pour l'étude des sensations lumineuses colorées.* (Journ. de Phys. de D'Almeida, t. VII, p. 5.)

Mélange, au moyen des disques tournants, d'une couleur avec le noir absolu ou avec le blanc. — Recherche relative à la teinte complémentaire d'une couleur donnée.

*Analyse optique des noirs du commerce.* (Ibid., ibid., p. 55.)

Eclats des différents noirs déterminés au moyen de disques tournants.

Lettre de l'auteur. (Bullet. de la Société industrielle de Mulhouse, séance du 51 juillet.)

Reclamation de priorité.

*Sur la définition et la classification des couleurs.* (Bullet. de l'Association française pour l'avancement des sciences, congrès de Paris, séance du 29 août.)

Emploi des disques tournants à secteurs colorés.

LANDOLT et CHARPENTIER. *Des sensations de lumière et de couleur dans la vision directe et dans la vision indirecte.* (Comptes rendus, t. LXXXVI, p. 495.)

Le minimum de lumière nécessaire pour produire une sensation, est le même sur toutes les parties de la rétine.

CHARPENTIER. *Sur la distinction entre les sensations lumineuses et les sensations chromatiques.* (Ibid., ibid., p. 1272.)

Le minimum de lumière nécessaire pour produire une sensation varie avec l'état de repos ou d'excitation de l'œil.

*Sur la production de la sensation lumineuse.* (Ibid., ibid., p. 1541.)

La sensibilité pour la lumière est, en réalité, un peu plus faible au centre de la rétine que dans le reste de cette membrane, etc.

GIRAUD-TEULON. *Sur la persistance des images sur la rétine. — Rapport concernant les expériences relatives au pourpre de la rétine.* (Journ. Les Mondes, 2<sup>me</sup> série, t. XLVI, p. 707.)

La persistance des impressions est due à ce que l'action photo-chimique exercée sur la substance pourpre, exige un certain temps avant d'être réparée.

1878. MAREY. *La méthode graphique dans les sciences expérimentales et particulièrement en physiologie et en médecine.* Paris, pp. 419 et 469.

Exposé de la méthode stroboscopique pour l'observation des mouvements périodiques rapides; autre application de la persistance des impressions pour le même but.

REYNAUD. *Le Praxinoscope.* (Journal français La Nature, n° du 1<sup>er</sup> février 1879; l'instrument a figuré à l'Exposition universelle de 1878.)

Modification ingénieuse du Phénakistoscope.

RICHEL. *Excitabilité de la rétine.* (Le Progrès médical, 6<sup>me</sup> année, p. 859.)

Appareil pour mesurer le degré d'excitabilité de la rétine. — L'œil ne perçoit pas une lumière de très-faible intensité et de très-courte durée.

WORDSWORTH DONISTHORPE. *Talking photographs.* (Journ. Nature, t. XVII, p. 242.)

Sorte de Phénakistoscope éclairé par une succession d'étincelles électriques.

GARNETT. *Leidenfrost's phenomenon.* (Ibid., ibid., p. 466.)

Observation, à l'aide d'étincelles électriques, des figures que semble affecter une goutte d'eau sur un métal chauffé.

ADAMS et FURZE. Procédé particulier pour la projection des figures de Lissajous, montré à la Société de Physique de Londres. (Ibid., ibid., p. 519.)

DIXON MANN. *An improved method of projecting Lissajous's figures on the screen.* (Ibid., t. XVIII, p. 24.)

Emploi de tuyaux à anche au lieu de diapasons; chacune des anches est munie d'un petit miroir très-leger.

EDMUNDS. *Méthode pour montrer à un auditoire les vibrations d'une plaque de Téléphone.* (Ibid., ibid., p. 111.)

Tube de Gassiot tournant rapidement et éclairé par une étincelle d'induction, les vibrations de la plaque téléphonique ouvrent et ferment alternativement le circuit.

*Electrical phonoscope.* (Rapp. de l'Assoc. britann., communications, p. 448.)

Méthode analogue employée à rendre visibles les vibrations d'un son quelconque.

LORD RAYLEIGH. *Moyen d'assurer l'uniformité absolue de la rotation d'un axe.* (Journ. Nature, t. XVIII, p. 111.)

Diapason en communication électro-magnétique avec l'axe, et vu à travers un disque percé tournant.

AYRTON et PERRY. *The music of colour and motion.* (Ibid., t. XIX, p. 101.)

1878. SPOTTISWOODE. *On stratified discharges. — Discharge from a condensor of large capacity.* (Proceed. of the Roy. Soc. of London, t. XXVII, p. 60.)

Emploi du miroir tournant.

WARREN DE LA RUE et HUGO MULLER. *Experimental researches on the electric discharge with the chloride of silver battery.* (Philos. Transact. Part. I, t. CLXIX, p. 55.)

Emploi d'un microscope renfermant un miroir tournant.

MICHELSON. *Experimental determination of the velocity of light.* (Proceed. of the American Assoc. for the advance. of science, session de St-Louis, p. 71.)

Modification de l'appareil de Foucault, permettant de se passer du miroir concave.

S. EXNER. *Zur Kenntniss von der Regeneration in der Netzhaut.* (Archives de Pflüger, t. XVI, p. 407.)

Un disque à secteurs blancs et noirs tournant avec une vitesse qui permet encore le papillotage, est vu d'un gris uniforme quand on exerce une pression sur les yeux.

FICK. *Eine Notiz über Farbenempfindung.* (Ibid., t. XVII, p. 152.)

Les images de très-petits espaces lumineux égaux séparées entre elles s'entraident quant à la perception de la couleur.

KLEINER. *Physiologisch-optische Beobachtungen.* (Ibid., t. XVIII, p. 542.)

Nouvelle vérification expérimentale du principe photométrique de Talbot.

MACH, TUMLIRZ et KÖGLER. *Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Funkenwellen.* (Bullet. de l'Acad. de Vienne, t. LXXVII, 2<sup>me</sup> partie, p. 7.)

Procédé fondé sur la persistance des impressions pour la mesure de la vitesse de rotation d'un disque.

ROSICKY. *Ueber die optischen Eigenschaften des Russes.* (Ibid., t. LXXVIII, 2<sup>me</sup> part., p. 417.)

Emploi du principe photométrique de Talbot.

1879. MONTIGNY. *Prédominance de la couleur bleue dans les observations de scintillation aux approches et sous l'influence de la pluie.* (Bullet. de l'Acad. de Belgique, 2<sup>me</sup> série, t. XLVII, p. 755.)

Emploi encore de son scintillomètre.

*Notice sur la scintillation de l'étoile principale de  $\gamma$  d'Andromède dans ses rapports avec la couleur de cette étoile.* (Ibid., ibid., t. XLVIII, p. 22.)

Idem.

1879. CHARPENTIER. *Sur la quantité de lumière perdue pour la mise en activité de l'appareil visuel, et ses variations dans différentes conditions.* Comptes rendus, t. LXXXVIII, p. 189.)

Quand la lumière frappe la rétine, elle agit pendant un certain temps avant que la sensation commence à naître.

- RICIET et BREGUET. *De l'influence de la durée et de l'intensité sur la perception lumineuse.* (Ibid., ibid., p. 259.)

Au-dessous d'une certaine intensité, la lumière exige un temps appréciable pour être perçue.

- MERCADIER. *Sur la détermination des éléments d'un mouvement vibratoire; mesure des amplitudes.* (Ibid., t. LXXXIX, p. 756.)

Micromètre fondé sur la persistance des impressions.

- Sur la détermination des éléments d'un mouvement vibratoire; mesure des périodes.* (Ibid., ibid., p. 1071.)

Deux corps très-rapprochés, dont chacun est muni d'un style léger, vibrent l'un devant l'autre, et l'ombre de l'ensemble est projetée sur un écran; raies obscures dans l'ombre commune des espaces parcourus par les styles.

- DUBOSCQ. *Support universel ou électro-diapason permettant d'inscrire et de montrer en projection les mouvements vibratoires.* (Journ. de Phys. de D'Almeida, t. VIII, p. 60.)

- DECHARME. *Formes vibratoires des bulles de liquide glycérique.* (Ann. de Chim. et de Phys. de Paris, 5<sup>me</sup> série, t. XVIII, p. 598.)

Bulle déposée à l'extrémité d'une tige horizontale qu'on fait vibrer dans le sens vertical; à cause de la persistance des impressions, apparence de lignes nodales horizontales; lois du phénomène.

- AITKEN. *Experiments with rotating discs.* (Proceed. of the Roy. Soc. of Edinburgh, t. X, 1878-79, p. 102.)

Le recueil ne donne que le titre de l'article.

- M<sup>e</sup> LEOD et CLARKE. *On the determination of the rate of vibration of tuning forks.* (Proceed. of the Roy. Soc. of London, t. XXVIII, p. 291.)

- SPOTTISWOODE et FLETCHER MOULTON. *On the sensitive state of electrical discharges through rarefied gases.* (Philos. Transact., part. I, p. 165.)

Emploi du miroir tournant.

- GUTHRIE. *A new photometer.* (Journ. Nature, t. XXI, p. 147.)

Modification du photomètre de Ritchie : disque à ouvertures radiales variables tournant rapidement entre la source de lumière la plus intense et le miroir correspondant.



## PHÉNOMÈNES SUBJECTIFS DE LA VISION, 2<sup>me</sup> SUPPLÉMENT. 41

1879. TOBIN. *A new illustration of persistence of vision.* (Journ. of the Franklin Institute, t. LXXVIII, 5<sup>me</sup> série, p. 550.)

Explication ingénieuse de l'illusion signalée par S. Thompson [voir plus haut à 1877].

ROOD. *Our memory for colour and luminosity.* (U. S. National Academy of sciences, réunion d'octobre; voir le Journ. Nature, t. XXI, p. 144.)

On ne conserve le souvenir exact d'une teinte ou d'un gris donné, que pendant moins d'une minute.

SCHADOW. *Die Lichtempfindlichkeit der peripheren Netzhauttheile im Verhältniss zu deren Raum- und Farbensinn.* (Archives de Pflüger, t. XIX, p. 459.)

BRÜCKE. *Ueber einige Consequenzen der Young-Helmholtz-schen Theorie.* (Bull. de l'Acad. de Vienne, t. LXXX, 5<sup>me</sup> partie, n° de juillet.)

Expériences concernant l'aspect des couleurs sur des portions de la rétine de plus en plus éloignées du centre; considérations sur le mode d'action des lumières colorées.

---

### DEUXIÈME SECTION.

#### **Couleurs accidentelles ordinaires de succession.**

1865. VOLKMANN. *Physiologische Untersuchungen in Gebiete der Optik.* Leipzig, p. 145.

Déformation des images accidentelles quand on les projette sur un plan oblique à l'axe visuel.

1868. JEFFRIES. *A point in the Physiology of vision.* (Transact. of the American Ophthalmological Society, p. 66.)

Remarques sur l'expérience ci-dessus de Volkmann; l'auteur voit à volonté l'image accidentelle déformée ou non déformée.

1872. AITKEN. *On colour and colour sensation.* (Proceed. of the Royal Scottish Society of Arts, 1871-72.)

Emploi des couleurs accidentelles pour contrôler la théorie de Young. Théorie nouvelle de l'apparition des couleurs accidentelles dans une obscurité complète.

1875. KLEINER. *Physiologisch-optische Beobachtungen.* (Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 20<sup>me</sup> année, p. 488.)

Si l'on projette sur un objet qui se meut le mouvement apparent résultant de la contemplation prolongée d'un objet animé d'un autre mouvement, les deux sensations se combinent. — Si, après avoir contempler d'un œil un objet clair, on ferme cet œil et on ouvre l'autre, on perçoit dans celui-ci l'image accidentelle.

1876. NUEL. *Du sens de lumière par E. Hering, revue critique.* (Ann. d'Oculistique, t. LXXV, p. 54.)

1878. CHEVREUL. *Sur les phénomènes qui se rattachent à la vision d'objets colorés en mouvement.* (Comptes rendus, t. LXXXVI, p. 621.)

Annnonce d'une publication prochaine.

*Très-court extrait d'un opuscule intitulé : De la vision des couleurs, et particulièrement de l'influence exercée sur la vision d'objets colorés qui se meuvent circulairement, quand on les observe comparativement avec des objets en repos identiques aux premiers.* (Ibid., *ibid.*, p. 854.)

Disque partagé en une moitié colorée et l'autre blanche, et tournant avec une vitesse modérée; vision de la couleur complémentaire sur la moitié blanche.

*Deuxième Note sur la vision des couleurs.* (Ibid., *ibid.*, p. 985.)

Substitution du noir à la couleur dans les expériences de l'article précédent : la moitié blanche du disque prend une teinte jaune tirant plus ou moins sur l'orangé.

*Sur la vision des couleurs, et particulièrement de l'influence exercée sur la vision d'objets colorés qui se meuvent circulairement, quand on les observe comparativement avec des corps en repos identiques aux premiers.* (Ibid., t. LXXXVII, pp. 576 et 707.)

Premier et deuxième extrait de l'opuscule de M. Chevreul.

CROS. *Note sur une observation de couleurs complémentaires* (extrait). (Ibid., t. LXXXVI, p. 985.)

Des fleurs de geranium rouge éclairées par le soleil et observées de l'intérieur d'une chambre à travers les interstices des persiennes fermées, paraissaient d'un vert émeraude quand l'auteur les regardait en marchant vers la fenêtre, ce qui faisait passer assez rapidement devant ses yeux les interstices et les barres; celles-ci étaient d'un gris-clair.

GIRAUD-TEFLON. *Sur la persistance des images sur la rétine. — Rapport concernant les expériences relatives au pourpre de la rétine.* (Journ. Les Mondes, 2<sup>me</sup> série, t. XLVI, p. 707.)

Après l'action de la lumière, à mesure que le pourpre rétinien se régénère, les bâtonnets qui y plongent par leurs pieds transmettent au sensorium des sensations différentes; de là la persistance des impressions suivie des images accidentelles.

AITKEN. *On a new variety of ocular spectrum.* (Journal of anatomy and Physiology, t. XIII.)

Apparences qui succèdent à la contemplation d'objets en mouvements.

HARTSHORNE. *A commonly accepted theory in ophthalmic physiology disproved by*

PHÉNOMÈNES SUBJECTIFS DE LA VISION, 2<sup>me</sup> SUPPLÈMENT. 15

1878. *a crucial experiment.* (Americ. Journ. of the med. Sc., N. S., t. CL, p. 447.)

Argument contre la théorie de la fatigue, tiré du fait que l'image accidentelle du soleil couchant passe alternativement du positif au négatif, et vice versa, selon qu'on tient les yeux fermés, ou qu'on les ouvre en les dirigeant sur une surface blanche.

WEINHOLD. *Ueber die Farbenwahrnehmung.* (Ann. de Wiedemann, t. II, p. 651.)

Théorie de Hering modifiée [voir l'art. 1874 Hering dans la 2<sup>me</sup> section de l'ouvrage].

KLEINER. *Physiologisch-optische Beobachtungen.* (Archives de Pflüger, t. XVIII, p. 542; voir p. 572 : *Ueber Scheinbewegungen.*)

L'image accidentelle d'un objet en mouvement paraît se mouvoir en sens contraire.

VON KRIES. *Beitrag zur Physiologie der Gesichtsempfindung.* (Archiv für Anatomie und Physiologie, partie physiologique, p. 505.)

Emploi des couleurs accidentelles pour la recherche des trois teintes fondamentales; argument contre la théorie de Hering.

KITAO. *Zur Farbenlehre.* Dissertation inaugurale, Berlin.

Même emploi des couleurs accidentelles.

CINTOLESI. *Notice relative à quelques phénomènes subjectifs observés dans l'illumination intermittente de la rétine.* (Biblioth. Univ., Archives des Sc. phys. et math., nouvelle période, t. LXIII, p. 248; voir p. 277.)

Les couleurs accidentelles interviennent dans les phénomènes qui se montrent lorsqu'on regarde une surface blanche à travers un disque percé tournant avec une vitesse graduellement croissante.

1879. CHEVREUL. *Sur les pirouettes complémentaires.* (Comptes rendus, t. LXXXVIII, p. 727.)

Voir plus haut le premier article de 1878 Chevreul

*De la vision des couleurs, et particulièrement de l'influence exercée sur la vision d'objets colorés qui se meuvent circulairement quand on les observe comparativement avec des corps en repos identiques aux premiers.* (Ibid., ibid., p. 929.)

*Complément d'études sur la vision des couleurs.* (Mém. de l'Acad. des Sc. de Paris, t. XLI.)

Développement des articles précédents du même auteur [1878 et 1879].

COURSSERANT. *Sur l'emploi méthodique des verres de couleur dans l'achromatopsie.* (Comptes rendus, t. LXXXVIII, p. 801.)

Expériences et considérations sur l'accroissement de la saturation d'une couleur observée après que l'œil a contemplé pendant longtemps la couleur complémentaire.

1879. S. EXNER. *Weitere Untersuchungen über die Regeneration in der Netzhaut und über Druckblindheit.* (Archives de Pflüger, t. XX, p. 614.)

La pression sur l'œil diminue la durée des images accidentelles, ou même empêche complètement leur production.

CINTOLESI. *Intorno alle immagini accidentali o soggettive.* (Ann. di Ottalmologia diretti dal prof. A. Quaglino, Anno VIII, fase. 2 e 5.)

Expériences remarquables; réunion des théories de la fatigue et de la réaction.

---

### TROISIÈME SECTION.

#### **Images qui succèdent à la contemplation d'objets d'un grand éclat ou même d'objets blancs bien éclairés.**

1865. LADAME. *Sur les couleurs accidentelles.* (Bulet. de la Soc. des Sc. natur. de Neuchâtel, t. VII, 1864-67, p. 84.)

Effet singulier que l'auteur observe dans ses yeux fermés et couverts après avoir regardé pendant longtemps la neige étendue sur la campagne.

1876. RICCÒ. *Esperienze cromostroboscopiche.* (Annuario della Soc. dei Naturalisti in Modena, anno X, fascicolo primo.)

Effets de couleurs subjectives obtenus au moyen d'un disque percé tournant.

1878. CINTOLESI. *Notice relative à quelques phénomènes subjectifs observés dans l'illumination intermittente de la rétine.* (Biblioth. univ., Arch. des Sciences phys. et natur., nouvelle période, t. LXIII, p. 248.)

Étude des figures colorées qui se montrent quand on observe une surface blanche à travers un disque percé de fentes radiales et tournant avec une vitesse graduellement croissante.

---

### QUATRIÈME SECTION.

#### **Irradiation.**

1865. BREWSTER. *On hemiopsy or half-vision.* (Transact. of the Roy. Soc. of Edinburgh, t. XXIV, p. 45.)

1866. BREWSTER. *On a new property of the retina.* (Ibid., ibid., p. 527.)

Dans l'hémioptie [voir l'article précédent], les portions de la rétine insensibles à l'action directe de la lumière sont impressionnées par une irradiation latérale. L'insensibilité de ces mêmes portions est due à une compression exercée par les vaisseaux sanguins de l'organe.

1868. LAURENCE. Cité par Giraud-Teulon (voir ci-après) comme ayant employé les couleurs accidentelles à la détermination du contour du champ de la vision dans certaines maladies.

GIRAUD-TEULON. Lettre au rédacteur. (Ann. d'Oculistique, t. LIX, p. 95.)

Même sujet.

1871. WYLD. *Certain phenomena applied in solution of difficulties connected with the theory of vision.* (Proceed. of the Roy. Soc. of Edinburgh, t. VII, 1869-72, p. 533; voir p. 561.)

L'auteur explique par l'extension latérale des impressions pourquoi un objet vu des deux yeux paraît plus clair que lorsqu'il est vu d'un seul œil.

1872. AITKEN. *On colour and colour sensation.* (Proceed. of the Roy. Scottish Soc. of Arts, 1871-72.)

L'irradiation est due en partie aux petits mouvements de l'œil, en partie à ce que la vision n'est parfaitement nette que dans un très-petit espace.

1878. ANDRÉ. *Résultats des observations du passage de Mercure.* (Comptes rendus, t. LXXXVI, p. 1580.)

Disparition du ligament noir par l'emploi d'un verre noir.

*Etude du ligament noir dans les passages des planètes devant le soleil.* (Association française, session de Paris; voir la Revue scientifique, 2<sup>me</sup> série, 8<sup>me</sup> année.)

Le ligament noir est un phénomène de diffraction.

1879. J. PLATEAU. *Un mot sur l'irradiation.* (Bulet. de l'Acad. de Belgique, 2<sup>me</sup> série, t. XLVIII, p. 57.)

Les observations de Brewster [voir ci-dessus à 1865 et 1866], fournissent de nouvelles preuves à l'appui de la théorie de la propagation latérale des impressions.

---

## CINQUIÈME SECTION.

### Phénomènes ordinaires de contraste.

1872. AITKEN. *On colour and colour sensation.* (Proceed. of the roy. Scottish Soc. of arts, 1871-72.)

Le contraste des couleurs est dû en partie à une cause mentale, mais surtout à un effet de contraste successif, quand l'œil se porte sur l'une des couleurs après avoir regardé l'autre.

1875. AITKEN. *On harmony of colour.* (Ibid., 1872-75.)

Les assemblages de couleurs ne produisent tout leur effet que lorsque l'œil les parcourt.

1876. NUEL. *Du sens de lumière, par E. Hering : revue critique.* (Ann. d'Oculistique, t. LXXV, p. 54.)

1878. CHEVREUL. *Très-court extrait d'un opuscule de M. Chevreul intitulé : De la vision des couleurs, et particulièrement de l'influence exercée sur la vision d'objets colorés qui se meuvent circulairement quand on les observe comparativement avec des objets en repos identiques aux premiers.* (Comptes rendus, t. LXXXVI, p. 854.)

La teinte de contraste n'apparaît pas sur du noir absolu contigu à une surface colorée.

GRAHAM. *On complementary colours.* (Journ. Nature, t. XVIII, p. 525.)

Si l'on fait tourner rapidement un disque coloré d'une teinte uniforme portant un anneau concentrique dont une moitié est blanche et l'autre noire, cet anneau, au lieu de paraître gris, montre une teinte complémentaire de celle du disque. Si l'on découpe dans un papier coloré un anneau qu'on remplace par un anneau de papier blanc d'une épaisseur convenable, et si l'on regarde le tout par transmission, l'anneau blanc se montre d'une teinte complémentaire de celle du papier coloré.

ROSENSTIEHL. *Assortiment de couleurs. — Emploi des couleurs complémentaires dans la décoration.* (Bulet. de la Soc. d'encouragement pour l'industrie nationale, séance du 24 mai.)

Règles pour l'harmonie des couleurs dans la décoration.

FICK. *Eine Notiz über Farbenempfindung.* (Archives de Pflüger, t. XVII, p. 152.)

Action mutuelle des différents points de la rétine.

CINTOLESI. *Notice relative à quelques phénomènes subjectifs observés dans l'illumination intermittente de la rétine.* (Biblioth. univ., Archives des sciences phys. et natur., nouvelle période, t. LXIII, p. 248 ; voir p. 278.)

Les effets de contraste interviennent dans les phénomènes qui se montrent lorsqu'on regarde une surface blanche à travers un disque percé tournant avec une vitesse graduellement croissante.

1879. CHEVREUL. *Complément d'études sur la vision des couleurs.* (Mém. de l'Acad. des Sc. de Paris, t. XLI.)

Développement des articles du même auteur, 1878, deuxième section et section actuelle.

SIXIÈME SECTION.

**Ombres colorées.**

1872. AITKEN. *On colour and colour sensation.* (Proceed. of the roy. Scottish Soc. of arts, 1871-72.)

L'auteur ayant produit deux ombres à l'aide de deux bougies devant l'une desquelles il avait placé un verre rouge, n'a vu la teinte vert-bleuâtre sur l'ombre qui ne recevait pas la lumière rouge, qu'après avoir promené l'œil de l'une à l'autre.

1878. SILLING. *Farbige Schatten bei Tageslicht.* (Centralblatt für praktische Augenheilkunde, t. II, p. 124.)

Production d'une ombre colorée dans le jour, au moyen d'un verre coloré.

1879. CHEVRELL. *Complément d'études sur la vision des couleurs.* (Mém. de l'Acad. des Sc. de Paris, t. XLI; voir p. 251 du Mémoire.)

Les parties ombrees des objets incolores opaques éclairés par une lumière colorée ne présentent la teinte complémentaire de celle-ci que lorsque ces mêmes parties reçoivent une certaine quantité de lumière blanche.







**DEUX PLÉSIOSAURES**

DU

**LIAS INFÉRIEUR DU LUXEMBOURG**

PAR

**P.-J. VAN BENEDEN**

MEMBRE DE L'ACADEMIE ROYALE DE BELGIQUE.

---

Présenté à la Classe des sciences de l'Académie royale, le 4 décembre 1880.)



# DEUX PLÉSIOSAURES

DU

## LIAS INFÉRIEUR DU LUXEMBOURG

---

### INTRODUCTION.

Parmi les formes bizarres perdues pendant la période secondaire, les plus extraordinaires, sans contredit, sont ces Reptiles à cou de cygne, ces serpents à deux paires de nageoires, que Conybeare a découverts il y a environ un demi-siècle à Lyme-Regis, et qui sont connus aujourd'hui sous le nom de Plésiosaures. — On en distingue aujourd'hui un certain nombre d'espèces qui ont vécu, non-seulement dans diverses parties de l'Europe, mais également en Amérique et en Australie.

Les terrains de l'époque secondaire étant peu représentés en Belgique, il n'était pas à supposer qu'ils auraient recélé des débris de ces rares et monstrueux Reptiles; aussi notre étonnement a été grand, lorsqu'on nous a annoncé la découverte, dans les environs d'Arlon, d'un de ces serpents à nageoires, qui n'avait pas moins de 25 pieds de longueur. — Les os de ce squelette ont été abandonnés pendant des années sur la grande route, et une partie de la colonne vertébrale, connue de tous ceux qui fréquentaient la route d'Arlon, était attribuée à une vache pétrifiée.

Cette découverte avait été faite par un habitant de Dampicourt, près de Virton, qui n'y avait attaché aucune importance. Pendant qu'il extrayait des pierres pour la bâtisse le long de la route, il s'aperçut un jour qu'un des blocs renfermait des pétrifications et les passants lui persuadèrent que cette trouvaille pouvait faire sa fortune. — De crainte qu'on ne lui enlevât son trésor, il s'empressa de détacher tout l'animal à coup de houe et les débris restèrent exposés sur la voie publique.

Cette nouvelle fit une certaine sensation dans les environs, et le supérieur du séminaire de Bastogne, feu M. Quebels, ayant eu connaissance de cette découverte quelques années après, se rendit sur les lieux et acheta la pièce principale, qui fut déposée dans une des salles de son établissement.

M. le curé de Torgny, dont les parents exploitaient la carrière, appréciant de son côté tout l'intérêt que pouvaient avoir ces ossements fossiles pour la science, envoya à l'établissement de Van der Maelen, à Bruxelles, un des blocs qui était resté avec bien d'autres sur les bords du chemin.

De temps en temps, des fragments furent emportés par les passants comme souvenir de la vache qui avait été enveloppée dans la roche.

Une des vertèbres était tombée ensuite entre les mains de M. Albert L'Hoir.

Une grande partie de ces ossements étaient encore sur place, lorsque M. Gustave Du Jardin et M. l'abbé Collignon, professeur au séminaire de Floreffe, se firent envoyer tout ce qui restait sur la voie publique. Dans un tombereau de pierres on a mis à nu des vertèbres isolées, des côtes brisées, des os du bras, de l'avant-bras et des phalanges, des os du bassin et des membres postérieurs, mais pas un os de la tête.

C'est en 1852 qu'il est fait mention pour la première fois de ces ossements. *L'Ami de l'Ordre* et *l'Émancipation* publient un article sur ce sujet, et, à la séance du 8 mai 1853, M. G. Du Jardin communiqua à l'Académie une notice avec planches sur ce fossile.

Le rapporteur, M. le professeur de Koninck, proposa de remercier l'auteur de la communication, et la notice fut déposée dans les archives de l'Académie. M. G. Du Jardin crut devoir rapporter ces ossements au *Plesiosaurus dolichodeirus*, une des espèces les plus anciennement décrites.

En faisant cette communication à l'Académie, le but principal de M. G. Du Jardin était d'attirer l'attention des savants sur ce fossile, mais il n'avait pas moins parfaitement reconnu, avec les faibles ressources dont il disposait, que l'animal de Dampicourt est un Reptile gigantesque appartenant au genre Plésiosaure.

M. l'abbé Docq, professeur à l'Université de Louvain, pendant qu'il était chargé du cours de géologie, se souvint de la découverte de Dampicourt et me fit part des belles pièces qui étaient encore conservées au séminaire de Bastogne. Sur la demande qui lui en fut faite, M. l'abbé Alexandre, supérieur au séminaire de Bastogne, s'empressa de nous envoyer à Louvain tout ce qu'il possédait de Dampicourt et tout ce qui avait été recueilli nous fut gracieusement communiqué. M. l'abbé Collignon, professeur à Floreffe, M. G. Du Jardin, M. Albert Lenoir, fils, M. Van der Maelen, M. Fastie, doyen à Virton, ainsi que M. Gauthier, curé à Dampicourt, voulurent bien à leur tour m'aider dans ces recherches, et je prie tous ces messieurs d'agréer l'expression de mes sentiments de la plus vive reconnaissance.

Pendant des mois, j'ai travaillé pour mettre tous ces os à nu, et, ne trouvant aucun débris de la région céphalique, j'ai dû supposer que la tête de l'animal était restée en place. Dans l'espoir de la découvrir, j'ai prié notre savant confrère, M. Dupont, de se rendre sur les lieux, mais malgré les efforts intelligents qu'il a déployés pendant plusieurs semaines, notre tentative n'a point été couronnée de succès. Nous avons tout lieu de croire que la tête est restée dans un des blocs qui ont servi à la construction de quelque pan de mur du village. L'animal était sans doute complet, mais en pleine décomposition, au moment où il a été enfoui.

Ce squelette était enfermé dans la partie inférieure du Lias moyen. Parmi les fossiles qui l'entouraient se trouvait entre autres une *Terebratula subpunctata*.

Les ossements du second Plésiosaure m'ont été communiqués par notre savant confrère M. Gust. Dewalque.

Nous donnerons d'abord la description du premier.

---

## DESCRIPTION.

Comme nous sommes en possession de tout le squelette du Plésiosaure de Dampicourt, à l'exception de la tête, la description que nous allons donner des os complétera la connaissance de l'espèce que nous ne connaissons que par les renseignements fournis par le professeur Owen; les descriptions de l'illustre naturaliste anglais sont faites d'après les pièces originales qui sont déposées aujourd'hui au *British Museum*. Les pièces que nous décrivons ici se trouvent toutes réunies au Musée de Louvain, même celles qui autrefois faisaient partie des collections de Van der Maelen.

## COLONNE VERTÉBRALE.

Les vertèbres des Plésiosaures se reconnaissent aisément, dit Cuvier, par deux petites fossettes ovales qu'elles ont toutes à leur face inférieure et par les faces de leur corps, à peine légèrement concaves, et dont le milieu redevient un peu convexe. Cela est parfaitement exact pour les vertèbres que nous avons sous les yeux. Une seule vertèbre qui provient probablement de la région cervicale a une de ses surfaces vraiment concave. L'autre surface malheureusement manque. Il n'en est plus de même de ce que Cuvier dit du diamètre transverse, qui, d'après lui, est plus grand que leur axe, en exceptant toutefois une partie des cervicales. Les vertèbres dorsales de notre animal ont le diamètre transverse plus petit que leur axe. Nous trouvons le diamètre transverse égal au diamètre vertical dans la région dorsale, et dans la région cervicale le diamètre transverse l'emporte sur l'autre.

Au milieu de chaque corps de vertèbre on voit deux trous nourriciers qui se confondent en un sillon unique.

La suture de l'arc neural qui protège la moelle est complète dans notre Plésiosaure, contrairement à ce qui se voit en général dans ce genre de Reptiles; l'arc et le corps de la vertèbre ne forment qu'une seule pièce.

Nous devons donc considérer notre Plésiosaure de Dampicourt comme un animal tout à fait adulte.

On accorde à certains Plésiosaures jusqu'à quarante vertèbres à cette région, quoique les limites qui la séparent de la région dorsale soient difficiles à établir. A d'autres comme le *Plesiosaurus rostratus* on n'en accorde pas plus de vingt-six à vingt-sept.

Nous sommes en possession d'une grande partie de la région cervicale. Nous ne saurions dire toutefois combien nous en avons recueilli de vertèbres; les limites entre la région cervicale et la région dorsale sont, comme nous venons de le dire, plus ou moins arbitraires, à moins de prendre pour base la division de M. Seeley, qui ne considère comme thoraciques, que les vertèbres qui portent les côtes au bout de l'apophyse transverse.

Ces vertèbres grandissent dans toutes les parties qui les constituent; depuis la première que nous possédons, les côtes cervicales s'étendent successivement, les apophyses épineuses et articulaires s'allongent à leur tour et deviennent plus solides; le corps gagne en longueur aussi bien qu'en hauteur et en largeur.

Nous voyons dans le *Plesiosaurus dolichodeirus*, figuré par Owen, que la première cervicale porte déjà des os avec leur forme caractéristique.

Nous avons tout lieu de croire que les premières cervicales sont restées dans le même bloc que la tête, et nous n'avons par conséquent rien à dire ni de l'atlas ni de l'axis.

La première vertèbre cervicale que nous possédons, mesure quant au corps :

En largeur (diamètre antéro-postérieur) . . .	58 <sup>mm</sup>
En hauteur ( — vertical). . . . .	45
En largeur ( — transversal) . . . . .	54

quant aux appendices, ils ont

En longueur . . . . .	8 <sup>mm</sup>
-----------------------	-----------------

quant à l'apophyse épineuse, nous trouvons

En hauteur (diam. vertical). . . . .	75 <sup>mm</sup>
En largeur à la base (diam. antéro-postérieur). . . . .	40

Toutes ces vertèbres de la région cervicale étaient séparées les unes des autres, et plusieurs même se trouvaient dans des mains différentes quand nous avons commencé à réunir ces matériaux.

Nous avons dû les placer d'après leur dimension et le développement des apophyses. Toutefois nous avons trouvé quelque facilité dans des blocs qui contenaient l'empreinte, l'un de cinq vertèbres, l'autre de quatre, un autre encore de sept, et à côté des empreintes nous avons découvert plusieurs fragments qui nous ont permis de compléter la description des os auxquels ils se rapportent.

Nous ne voyons guère de différence entre la surface articulaire du corps des vertèbres. Cette surface est partout fort légèrement concave des deux côtés, montrant une petite élévation irrégulière, puis de chaque côté au milieu un fort sinus tantôt plus, tantôt moins développé.

Les deux trous nourriciers de la face inférieure du corps sont distincts dans chaque vertèbre et montrent quelque différence selon la place qu'elle occupe.

Indépendamment de ces deux trous nourriciers, il y en a encore toujours un autre de chaque côté.

Le professeur Owen a fait figurer une vertèbre cervicale du milieu du cou, vue de côté, de face et en dessous, et, tout en appartenant à une espèce différente, elle présente exactement les mêmes caractères que ceux de l'espèce que nous décrivons.

Les côtes cervicales ont un aspect d'abord de simples tubérosités, qui, successivement, s'aplatissent et s'allongent, puis se replient en s'étendant, prenant la forme d'une hachette; ils se recourbent ensuite plus régulièrement, s'allongent de plus en plus, s'arrondissent dans toute leur longueur, enfin s'étendent jusqu'au delà de la vertèbre suivante et prennent insensiblement la forme de côtes.

Les côtes proprement dites ont toutefois une autre signification que celles de la région cervicale, quoique ces os semblent passer insensiblement de l'une forme à l'autre.

Le professeur Owen a décrit et figuré les côtes cervicales du *Plesiosaurus homalospondylus*; il a représenté le squelette de la colonne verté-



brale presque au complet, et il est bien difficile de dire où chaque région commence et où elle finit. Les appendices costaux du cou deviennent de véritables côtes au thorax, et celles-ci diminuent de nouveau en épaisseur et en longueur jusqu'à la vertèbre sacrée. Dans la planche qui accompagne le mémoire d'Owen, on voit même une côte entre la vertèbre sacrée et l'iléon, au lieu d'une simple apophyse transverse.

On a fait remarquer aussi que l'arc neural des Plésiosaures reste généralement séparé du corps et que la suture par conséquent persiste plus ou moins complètement pendant toute la vie de l'animal; ce n'est pas ce que nous voyons dans le Plésiosaure de Dampicourt: l'arc neural est bien complètement soudé au corps et on ne découvre plus même de traces de la suture.

La surface articulaire de la première vertèbre est située en dessous et sur le côté il n'existe pas de pédicule; il y a entre la surface de droite et celle de gauche toute la largeur de la vertèbre, de manière que l'on trouve entre eux une distance de 25 millimètres. Cette première côte cervicale, si tant est qu'on puisse lui donner ce nom, mesure 8 millimètres.

Ces surfaces articulaires s'écartent ensuite l'une de l'autre, puis remontent insensiblement sur les flancs des vertèbres, apparaissent au bout d'un pédicule qui s'élève de plus en plus, à mesure que l'on approche de la région suivante. Puis à une certaine distance du thorax, ce pédicule devient double et se partage en une surface articulaire supérieure et une autre inférieure; la supérieure va porter la côte véritable et devient plus loin l'apophyse transverse de la région dorsale.

Il est remarquable que dans certains Plésiosaures, où l'on voit l'atlas et l'axis en place derrière l'occipital, il n'y ait pour ainsi dire pas de différences, ni pour la forme ni pour la dimension avec les autres vertèbres de la région cervicale.

Les vertèbres qui portent les côtes cervicales sous forme de hachettes mesurent :

Corps : diamètre antéro-postérieur . . . . .	65 millim.
— — vertical (au milieu). . . . .	55 —
— — — (de côté) . . . . .	60 —
— — transversal . . . . .	70 —
Apophyse épineuse : diamètre vertical . . . . .	100 —
— — — antéro-postérieur . . . . .	60 —

Les apophyses articulaires antérieures et postérieures sont peu développées. La deuxième et la troisième vertèbre surtout sont assez bien conservées pour apprécier leurs caractères propres.

Les côtes de la région de la colonne vertébrale qui suit sont ensuite plus étendues en largeur et en hauteur, puis prennent naissance un peu plus haut sur le flanc de la vertèbre; les apophyses articulaires deviennent parfaitement distinctes et l'apophyse épineuse devient fort large relativement à sa hauteur. Nous entendons par largeur le diamètre antéro-postérieur. Ces vertèbres mesurent :

Corps : diamètre antéro-postérieur. . . . .	65 millim.
— — vertical. . . . .	55 —
— — transversal. . . . .	65 —
Apophyse épineuse : diamètre vertical. . . . .	80 —
— — antéro-postérieur. . . . .	50 —

Les côtes cervicales ont-elles une si forte ressemblance avec celles des crocodiles, comme on l'a écrit? ce n'est évidemment pas pour le Plésiosaure qui nous occupe; la double facette articulaire des côtes est loin de se trouver partout dans notre Saurien fossile.

C'est vers la troisième ou quatrième vertèbre que l'on aperçoit un canal particulier à la base de l'apophyse épineuse supérieure, au-dessus du canal vertébral.

Les dernières vertèbres cervicales, si tant est que l'on puisse encore leur donner ce nom, sont très-fortes dans toutes leurs parties. Ce qui les distingue surtout, c'est que l'apophyse transverse se rapproche de plus en plus vers l'apophyse épineuse et élargit considérablement l'aire de la vertèbre vue de face. On peut aisément juger de leur place relative d'après la direction de l'apophyse qui porte la côte. Plus on recule d'avant en arrière, plus l'apophyse s'élève quant à son insertion aussi bien que quant à sa direction.

Ces vertèbres mesurent :

Corps : diamètre antéro-postérieur . . . . .	60 millim.
— — vertical . . . . .	65 —
— — transversal . . . . .	76 —
Apophyse épineuse : diamètre vertical . . . . .	150 —
— — antéro-postérieur . . . . .	55 —

Les deux fossettes ou les deux trous nourriciers de la face inférieure des vertèbres, que l'on a parfois considérés comme caractéristiques du genre, présentent un très-haut intérêt pour distinguer la place que chacune d'elles doit occuper. A la première et à la seconde cervicale que nous possédons, les deux fossettes ne sont pas à 10 millimètres de distance l'une de l'autre ; la quinzième vertèbre qui la suit présente entre les deux fossettes un espace de 27 à 28 millimètres. Cet écartement des fossettes marche avec l'augmentation du diamètre transverse de la vertèbre qui continue jusqu'aux dernières cervicales. Puis, insensiblement, le corps de la vertèbre diminue surtout en largeur et légèrement en longueur, pendant que les deux fossettes continuent à s'éloigner l'une de l'autre. On peut donc reconnaître aisément une vertèbre cervicale et dorsale d'après ses fossettes. En effet, dans cette dernière région du corps ce n'est plus à la face inférieure que ces dépressions se trouvent, c'est sur les flancs mêmes, où elles sont séparées l'une de l'autre par une largeur de 35 millimètres.

Nous avons été heureux de trouver deux cervicales assez complètes et enveloppées encore dans la roche. Nous avons mis le plus grand soin à les mettre à nu, et nos efforts ont été largement compensés. Nous les connaissons aussi complètement que si nous avions des vertèbres d'un animal frais. Le corps de la première est un peu plus long que celui des suivantes et aussi un peu moins déprimé. Les apophyses transverses sont assez rapprochées et elles portent chacune une côte rudimentaire encore en place.

On regarde généralement ces côtes comme toutes semblables et en forme de hache dans les différents Plésiosaures connus. Nous avons ici deux vertèbres qui se suivent, et la forme de leurs côtes est assez dissemblable. La première a véritablement la forme d'une aile ou d'une nageoire. On voit d'abord une tige fort courte, puis un véritable talon, presque comme dans les crocodiles. Il n'y a qu'une seule côte et elle est dirigée d'avant en arrière. Vers l'extrémité libre elle est assez mince, mais solide à la base.

Une vertèbre isolée nous a été communiquée par le professeur Collignon. Elle appartient probablement aussi à la région cervicale. Le diamètre du corps est plus petit dans tous les sens et la surface unique qui est conservée est *légèrement concave*. C'est la seule vertèbre qui nous offre cette parti-

cularité. Nous regrettons de ne pas posséder les deux faces pour voir si le côté opposé est convexe ou si la vertèbre est biconcave; nous croyons à cette dernière supposition.

C'est à peine si on voit l'indication de l'apophyse transverse qui est placée assez bas et loin en arrière.

Une grande pièce isolée renferme l'impression et une partie des dernières vertèbres cervicales et des deux premières dorsales, si nous ne nous trompons. Ces deux dernières portent une apophyse transverse très-forte à laquelle les apophyses précédentes n'ont pas préparé. On y compte sept vertèbres dans ce bloc; les trois antérieures conservent encore, en partie au moins, leurs côtes qui sont fort simples et semblables à celles qui précèdent les deux vertèbres antisacrées.

Au-dessus de la première dorsale on voit logé dans le bloc un os long, malheureusement cassé, et qui a la grosseur d'un poignet; il n'a point de surface articulaire et à l'extérieur il est assez rugueux. Puis à côté un bout inférieur d'une côte ordinaire dont la portion principale est restée dans la pièce voisine. Enfin entre l'apophyse transverse de la dernière cervicale et de la première dorsale on voit un fragment de côte très-aplatie, fortement courbée, à rainure sur son côté concave et que nous n'avons pas mis à nu, du moins complètement.

La côte qui précède immédiatement a une forme entièrement différente, et on ne croirait jamais qu'elle appartient à une vertèbre qui suit la précédente.

Nous sommes également en possession d'un moule de cinq vertèbres, mais dont la face inférieure du corps est seule conservée. Heureusement que nous avons trouvé à côté les côtes libres. Ces vertèbres appartiennent à la région cervicale, nous pouvons même ajouter la partie postérieure de cette région, celle qui précède la région thoracique. Le corps présente d'abord à sa face inférieure les deux trous nourriciers caractéristiques; on ne les voit cependant pas avec la même évidence dans toutes les vertèbres.

Les apophyses transverses sont assez rapprochées dans les premières, c'est-à-dire les antérieures, et s'éloignent insensiblement les unes des autres d'avant en arrière. Ces apophyses sont toutes doubles.

A en juger par le moule, on voit très-distinctement que le corps de toutes ces vertèbres est un peu plus large que haut, et que la hauteur augmente légèrement d'avant en arrière, de manière que les thoraciques proprement dites ont leur hauteur égale à leur largeur. La vertèbre que nous conservons en entier, et qui appartient par ses apophyses à une des dernières cervicales, mesure 8 centimètres en largeur et un peu moins de 6 centimètres en hauteur; sa longueur est à peu près égale à sa hauteur.

Comme nous le verrons plus loin, le corps des vertèbres thoraciques conserve la même hauteur, mais il diminue en largeur, de manière que nous trouvons fort peu de différence entre les trois dimensions.

Une vertèbre isolée que nous considérons comme une des dernières de cette région, est remarquable par le corps qui diminue dans tous les sens; une des dernières cervicales mesure :

Le corps en hauteur (mesure prise à la face inférieure) . . .	65 millim.
— en largeur (mesure prise à la surface du disque). . .	72 —
Diamètre antéro-postérieur . . . . .	62 —
Hauteur totale avec l'apophyse épineuse . . . . .	20 —
Largeur de l'apophyse épineuse. . . . .	32 —
Épaisseur. . . . .	7 —

Les vertèbres ne se suivent pas assez régulièrement pour dire quelle est la première qui fournit la face articulaire des côtes exclusivement par l'arc neural. Ce serait la première véritable dorsale.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, non-seulement les diverses régions de la colonne vertébrale sont difficiles à distinguer les unes des autres, mais nous avons de plus ici les vertèbres pour la plupart mutilées et complètement mêlées.

Les vertèbres de la région que nous regardons comme dorsale se reconnaissent surtout au disque du corps qui est à peu près aussi large que haut, et ensuite à l'apophyse transverse qui s'élève d'autant plus haut qu'on approche davantage du milieu de cette région. Ces apophyses naissent à la hauteur des apophyses articulaires. Ce que nous trouvons de remarquable aussi dans les vertèbres de cette région, c'est que les apophyses épineuses, au lieu d'avoir un bord simplement arrondi, présentent, au contraire, dans

le tiers de leur largeur et jusqu'à la base, une rainure assez profonde et dont nous n'avons vu de traces que dans un petit nombre d'animaux.

Les apophyses épineuses sont plus développées, en hauteur surtout, que dans aucun des Plésiosaures connus ; on dirait des vertèbres d'*Hyperoodon*.

Le corps de chaque vertèbre devient plus étroit au milieu de sa longueur, de manière que les vertèbres, vues de profil, forment comme celles de plusieurs autres vertébrés une ligne sinueuse.

Les dernières vertèbres du dos se modifient absolument comme les dernières cervicales quant aux apophyses transverses, à tel point, que nous avons placé d'abord à la région cervicale une vertèbre de la région du dos. Cette vertèbre nous avait paru étrange par la petitesse du corps.

Nous sommes en possession de vingt-deux vertèbres que nous regardons comme dorsales. On en compte en général de vingt à vingt-cinq. M. Seeley n'en accorde que onze au *Plesiosaurus Eleutheraxon*.

Nous en avons ensuite six qui se suivent et qui précèdent immédiatement la vertèbre sacrée. Elles forment une région lombaire distincte, comme nous verrons tout à l'heure.

Nous connaissons les premières vertèbres par l'impression que quatre d'entre elles qui se suivent ont laissée dans un bloc, et dont les deux du milieu seules sont représentées par une partie du corps de la vertèbre. On voit très-bien leur place au trou inférieur qui est conservé sur une d'elles.

Vient ensuite une série de sept vertèbres encore en place ; elles sont enfermées dans un seul bloc. C'est le fragment qui avait été emporté par le directeur du séminaire de Bastogne comme la plus belle pièce.

Les apophyses transverses s'élèvent encore de plus en plus jusque vers le milieu de la longueur. Les apophyses épineuses sont droites et ont acquis leur plus grand développement. C'est dans ces vertèbres aussi que l'on voit les apophyses articulaires les plus fortes.

Le canal vertébral a la même forme et la même grandeur que dans la région cervicale ; c'est dans ce canal surtout que l'on trouve une grande différence si on le compare à celui des mammifères.

Une apophyse épineuse transverse de la région dorsale s'est complètement détachée ; le corps de la vertèbre avait été séparée pendant l'extrac-

tion et l'apophyse était restée dans le bloc en place ; en mettant les objets à nu elle s'est dégagée. Elle est fort curieuse par sa surface articulaire. Cuvier a parlé de tête articulaire convexe dans quelques vertèbres, concave dans d'autres, sans savoir lesquelles présentent l'un et lesquelles présentent l'autre caractère.

En regardant cette pièce de face, le contour en est circulaire, mais nous ne pouvons dire si elle est convexe ou concave ; elle est plane dans le milieu et le bord se relève légèrement d'un côté, tandis que du côté opposé il est obliquement coupé.

D'après l'estimation que nous avons faite, cette apophyse correspond à la quinzième vertèbre dorsale.

Les apophyses épineuses des vertèbres dorsales sont, comme nous venons de le dire, extraordinairement longues et larges. Elles ne laissent entre elles que l'espace de 1 centimètre, tandis que chacune d'elles mesure au moins 0<sup>m</sup>,04. Elles ont en hauteur 0<sup>m</sup>,14 à partir de la surface articulaire et en largeur 0<sup>m</sup>,22, en y comprenant le corps de la vertèbre. Cette apophyse est fortement aplatie comme dans les vertèbres de cétacés ; elle s'amincit en avant et en arrière et a l'épaisseur de 1 centimètre au milieu.

Chaque apophyse épineuse présente vers sa base en avant et en arrière une disposition très-curieuse, du moins dans la région qui nous occupe. Vers le tiers inférieur ou le quart plutôt, le bord tranchant se bifurque et on voit une rainure profonde de haut en bas en avant et en arrière. Ces bords sont échancrés sur cette étendue.

Dans la figure de Conybeare les vertèbres lombaires portent toutes des apophyses transverses placées horizontalement et semblables à celles de la vertèbre sacrée. Ces apophyses sont, au contraire, très-courtes dans notre Plésiosaure, mais elles portent toutes une côte comme les dernières vertèbres cervicales.

Un autre bloc de trois vertèbres se place après cette dernière ; celle du milieu est à peu près complète. Les apophyses articulaires antérieures et postérieures s'allongent en s'affaiblissant, l'apophyse transverse baisse notablement et la grande apophyse épineuse supérieure se courbe sensiblement en arrière.

Une vertèbre toute isolée, mais assez complète, nous présente un haut intérêt; nous avons cru d'abord la rapporter à la région caudale, puis à la région vertébrale et enfin nous lui avons reconnu des caractères d'une des dernières dorsales. Le corps de la vertèbre est plus petit, le diamètre transverse un peu plus grand que le diamètre vertical, le diamètre longitudinal un tant soit peu plus grand que le diamètre vertical. La surface articulaire du corps de la vertèbre est très-légèrement biconcave. La face inférieure est légèrement échancrée, et les deux trous nourriciers sont assez éloignés l'un de l'autre. L'apophyse épineuse supérieure est petite, et si nous jugeons de sa hauteur par la partie qui reste (elle est faiblement mutilée), cette apophyse ne dépasse guère en hauteur deux fois le diamètre vertical du corps. L'apophyse articulaire est faiblement développée.

Une vertèbre de cette région nous donne les mesures suivantes :

Corps de la vertèbre (hauteur) . . . . .	70 millim.
Diamètre transverse . . . . .	63 —
— antéro-postérieur . . . . .	63 —
Hauteur totale . . . . .	21 —
D'un bout de l'apophyse transversale à l'autre . . . . .	8 —
Largeur du trou vertébral . . . . .	17 —
Hauteur . . . . .	20 —
Apophyse hexagonale . . . . .	73 —

Un bloc comprenant une suite de huit vertèbres, parmi lesquelles se trouve la vertèbre sacrée, n'est pas sans présenter un haut intérêt. Ces vertèbres nous montrent que les apophyses transverses n'ont plus la même signification que dans la région précédente. En effet, les apophyses qui s'articulent avec les petites côtes de cette région, ne sont pas des apophyses transverses modifiées insensiblement. Elles surgissent dans la première vertèbre. C'est une toute légère éminence dont on ne trouverait pas facilement la signification, si nous n'avions l'appendice costal à côté.

La vertèbre suivante porte au milieu des flancs une éminence un peu plus forte de forme triangulaire.

La quatrième vertèbre de ce bloc est remarquable par une double éminence qui sert sans doute à une double surface articulaire comme on en voit ailleurs dans les côtes.



Dans la vertèbre suivante, les deux éminences sont fendues, mais à voir l'échanerure au milieu, on dirait qu'il y a encore une double surface articulaire.

La sixième vertèbre de ce bloc que nous avons prise longtemps pour la vertèbre sacrée, porte une apophyse transverse très-forte et l'appendice costal lui est encore attaché.

La vertèbre qui suit a une apophyse transverse encore plus forte, qui s'articule avec l'iléon; c'est la vertèbre sacrée. Cette apophyse est dirigée comme les précédentes de haut en bas et de dedans en dehors.

Il n'y a dans le Plésiosaure qui nous occupe, qu'une seule vertèbre sacrée; il est vrai que certains paléontologistes accordent à ces Reptiles jusqu'à deux et même trois vertèbres sacrées, mais nous voyons distinctement ici l'iléon s'attacher à l'apophyse transverse d'une vertèbre unique, comme la dernière côte s'unit à l'apophyse transverse de la dernière lombaire<sup>1</sup>.

La vertèbre suivante appartient à la région caudale et son apophyse transverse a changé assez brusquement de direction. Cette apophyse est placée horizontalement comme aux vertèbres suivantes.

#### RÉGION SACRÉE ET CAUDALE.

Nous sommes ainsi en possession des cinq dernières vertèbres qui précèdent la vertèbre sacrée et qui correspondent donc aux vertèbres lombaires. Ces vertèbres sont encore toutes en place, de manière que nous avons pu les reproduire aussi fidèlement que si nous les avions sous les yeux. Les côtes véritables existent encore toutes elles-mêmes à côté de leurs vertèbres respectives et l'on ne peut dire qu'il existe une région lombaire distincte chez ces Reptiles. On a admis à tort l'existence de vertèbres antisacrées sans côtes, au moins pour l'animal que nous avons sous les yeux; il est

<sup>1</sup> Le *Plesiosaurus Eleutheraxon* possède, d'après M. Seeley, trois vertèbres sacrées. — H. Seeley, *On two new Plesiosaurus from the Lias*, ANN. MAG. NAT. HIST. NOV. 1865.

Le professeur Sollas ne cite qu'une seule espèce de Plésiosaure avec une seule vertèbre sacrée, c'est le *Plesiosaurus macropterus*, et encore la cite-t-il avec un signe de doute. Toutes les autres espèces, au nombre de onze, en ont deux. *On a new species of Plesiosaurus*, QUART. JOURNAL OF THE GEOLOGICAL SOCIETY, 1881.

même digne de remarque que la puissance de ces côtes augmente d'avant en arrière au lieu de diminuer, de sorte que les deux dernières sont sensiblement plus fortes que les précédentes, surtout vers le bout libre. La transition de la côte à l'os iléon se fait d'une manière plus insensible que partout ailleurs.

Le corps de ces cinq vertèbres est à peu près également développé dans tous les sens et il ne diffère guère de celui de la vertèbre sacrée, si ce n'est par un développement plus grand de l'apophyse transverse qui s'articule avec l'os du bassin.

L'apophyse transverse de la vertèbre qui précède la sacrée, est un peu plus longue que celle des autres os du même nom qui diminuent toutes en grosseur comme en longueur. Cette apophyse est surtout remarquable par sa largeur.

L'apophyse épineuse de la vertèbre précédente est tout aussi large, mais elle est divisée au milieu de manière que l'on peut supposer l'existence d'une double tête articulaire à la côte qui lui correspond.

A la troisième vertèbre qui précède le sacrum, l'apophyse épineuse a une surface articulaire de forme triangulaire, tandis que la précédente, c'est-à-dire la quatrième avant la sacrée, n'est représentée que par une crête qui semble soutenue par trois contre-forts; la surface articulaire est peu développée.

La première vertèbre de ce bloc ou la cinquième, en comptant d'arrière en avant, montre à peine les traces d'une apophyse et d'une surface articulaire, à tel point, que si nous n'avions pas la côte sous les yeux, nous douterions de son existence.

Les apophyses épineuses sont à peu près toutes également développées en hauteur comme en largeur; elles mesurent 13 millimètres de hauteur et 5 millimètres de largeur. La vertèbre sacrée ne diffère pas des autres sous ce rapport.

Le corps de chaque vertèbre mesure en longueur 55 millimètres. La vertèbre sacrée est un peu plus courte.

Comme nous l'avons vu plus haut, on accorde généralement deux vertèbres sacrées aux Plésiosaures, tandis qu'ici nous n'en trouvons qu'une

seule. L'iléon se comporte à l'égard de cet os, comme dans les Siréniens. Nous en jugeons d'après un squelette de Dugong adulte, préparé avec soin aux Iles Philippines et dans lequel l'os unique du bassin est encore attaché par ses ligaments.

Nous avons eu d'abord quelque doute au sujet des premières vertèbres de la région caudale. Heureusement nous avons reçu à la fin de nos recherches un morceau détaché d'un bloc contenant la région lombaire et sacrée et dans lequel la première caudale est encore en place.

L'apophyse épineuse supérieure est encore fort longue et large, n'y a ni rainure longitudinale ni canal ligamentaire. L'apophyse transverse est fort grande et placée horizontalement. Le corps de la vertèbre n'est pas conservé, mais le moule reproduit parfaitement tous les caractères.

Ce qui distingue surtout les vertèbres caudales des autres, ce sont les surfaces articulaires des os en V ou en chevrons ; contrairement à ce qui se voit dans la région cervicale, ces os sont toujours situés sur le bord ou disque, mais sans être en rapport avec plus d'une vertèbre à la fois.

Dans la région cervicale, ces os que l'on pourrait confondre avec ceux-ci sont toujours placés vers le milieu de la longueur de la vertèbre.

Nous avons deux des premières caudales assez complètes qui se suivent et un bloc, contenant en grande partie l'apophyse épineuse de huit vertèbres dont l'empreinte du corps est parfaitement conservée. Un autre bloc comprend deux vertèbres avec leurs os en V, à peu près entièrement développés, et les apophyses transverses complètes.

Puis une série de trois vertèbres, également en place, avec les os en V qui leur correspondent.

Les autres vertèbres étaient toutes isolées et jetées pêle-mêle.

Nous en avons en tout une vingtaine, qui forment ensemble une longueur de 1 mètre 5 centimètres.

A voir le tissu plus délicat et beaucoup plus spongieux de quelques-unes des dernières vertèbres caudales, isolées et en morceaux, il y a tout lieu de supposer que la queue ne se terminait pas, comme dans les Cétacés, par des vertèbres, conformées comme dans les autres régions de la colonne

vertébrale. Il n'est même pas impossible que les dernières vertèbres des Plésiosaures ne soient pas complètement ossifiées.

Les vertèbres diminuent insensiblement en volume d'avant en arrière, et les fossettes à la face inférieure, qui s'étaient éloignées l'une de l'autre dans la région dorsale, se rapprochent de nouveau comme dans la région cervicale.

Les apophyses épineuses supérieures n'ont plus, dans les dernières vertèbres, la hauteur même du corps. C'est encore un arc protecteur, mais qui affecte la forme d'un bonnet phrygien, plutôt que d'une apophyse, du moins dans les dernières.

La première vertèbre caudale que nous possédons est, comme nous venons de le dire, assez complète; son apophyse épineuse supérieure est encore grande et large; les apophyses transverses sont situées horizontalement, et leur longueur ne dépasse pas le diamètre transverse du corps de la vertèbre. Les deux fossettes ne sont pas distinctes pour juger de la distance qui les sépare.

Les apophyses articulaires antérieures et postérieures sont encore très-développées.

Voici les mesures de cette vertèbre :

*Corps de la vertèbre.*

Diamètre antéro-postérieur . . . . .	60 millim.
Diamètre vertical . . . . .	55 —
Diamètre transversal . . . . .	55 —

*Apophyse épineuse supérieure.*

En hauteur . . . . .	70 millim.
D'avant en arrière, au milieu de sa hauteur . . .	55 —
Au sommet . . . . .	50 —

Dans la plupart des os de cette région, on voit l'apophyse transverse se détacher de sa base, ou, si elle ne se détache pas, on aperçoit les traces de suture. Cette réunion a lieu par synchondrose comme les os en V, et les surfaces articulaires sont les mêmes.

Une de ces vertèbres est fendue en travers au milieu du corps de l'os et la forme en est fort remarquable. Elle est pentangulaire, et les angles sont situés à peu près à égale distance les uns des autres. Les angles médians sont formés par les apophyses transverses, les inférieurs par les surfaces articulaires et le supérieur par la base de l'apophyse épineuse. Cette forme pourrait faire supposer une autre origine.

Il ne faut donc pas faire un très-grand cas de ce caractère pour la détermination des espèces. Cuvier y a, sans doute, attaché trop d'importance en nommant un Plésiosaure, originaire de l'Auxois, d'après une vertèbre de la queue, *Plesiosaurus pentagonus*, et un autre venant de la côte du Calvados, *Plesiosaurus trigonus*.

Cuvier comprend du reste parfaitement lui-même combien il faut être prudent dans ces recherches, puisqu'il ajoute : il est bien convenu que ces dénominations pourront être changées, si l'on vient à reconnaître des caractères plus apparents, ou même, s'il se trouve en définitive que ces vertèbres diffèrent seulement en raison de la place qu'elles occupent dans l'épine <sup>1</sup>.

On accorde généralement de trente à quarante vertèbres à la région caudale des Plésiosaures.

Existe-t-il des côtes au bout des apophyses transverses dans cette région? Nous n'en trouvons aucune trace dans les os que nous possédons; il est vrai, à en juger par le corps des vertèbres, les premiers de ces os nous manquent.

La dernière vertèbre n'est représentée que par un fragment qui montre l'apophyse transverse et le commencement de l'arc. La portion du canal vertébral, qui est conservée, ainsi que le court diamètre antéro-postérieur du corps, qui est de 43 millimètres, indiquent suffisamment la place qu'elle occupait. Cette vertèbre indique la présence d'un disque intervertébral dont il n'existe aucune trace dans les autres régions. Quelques-unes de ces vertèbres sont distantes l'une de l'autre de 10 millimètres.

Elles sont également échancrées au milieu du corps. Les surfaces articulaires sont toutes régulièrement conformées et ne diffèrent pas entre elles,

<sup>1</sup> *Ossem. foss.*, t. V, II<sup>e</sup> partie, p. 486.

pas même celles de la vertèbre sacrée. L'apophyse qui fournit cette surface a la forme d'un bec d'oiseau, arrondi au bout, et la surface plane est disposée obliquement de dehors en dedans et de haut en bas.

Nous l'avons déjà dit, les vertèbres, en général, ont les deux fossettes, en dessous du corps, très-rapprochées dans la région du cou; elles s'éloignent ensuite l'une de l'autre à mesure qu'on approche de la région dorsale, occupent les flancs de ces os dans cette dernière région, puis se rapprochent de nouveau pour occuper en dessous la même distance qu'elles avaient dans la région cervicale.

A mesure qu'on se porte à des vertèbres situées plus en arrière, disait Cuvier, on voit ces fossettes se rapprocher, se confondre; la portion de la vertèbre, où elles sont creusées, devenir un peu saillante, prendre une figure plus verticalement oblongue, et remonter, par degré, de manière à appartenir en partie à la portion annulaire de la vertèbre et non pas seulement au corps.

Une disposition fort remarquable et que nous n'avons trouvée signalée que dans un petit nombre d'animaux, c'est un canal particulier, situé dans quelques vertèbres cervicales, à la base de l'apophyse épineuse supérieure, immédiatement au-dessus du canal qui loge la moelle épinière. En avant, on le voit commencer dans une des premières vertèbres; en arrière, il s'éteint dans une des dernières. C'est sans doute un cordon qui est logé dans cette cavité et qui se termine en pointe en avant et en arrière; il est à supposer que ce cordon est un ligament élastique, en rapport avec la longueur démesurée du cou.

Quant au nombre total de vertèbres, nous n'en avons trouvé que quelques-unes réunies et en place, et il serait difficile de dire à combien il s'élève. Après avoir représenté toutes les vertèbres que nous avons pu retrouver et après avoir assigné à chacune sa place, nous avons cru devoir admettre vingt-huit cervicales, vingt-cinq dorsales, une sacrée et vingt-quatre caudales, en tout soixante-dix-huit. Mais nous sommes persuadé qu'il y en a plusieurs, dans la région caudale surtout, qui manquent.

A en juger par les squelettes plus ou moins complets connus et qui montrent les divers os en place, les vertèbres doivent se répartir à peu près en

quarante cervicales, vingt dorsales et une trentaine de caudales, ce qui élève en général leur nombre à quatre-vingt-dix.

En comparant les vertèbres caudales de *Plesiosaurus dolichodeirus*, figurées par Owen, pl. IV, fig. 3 à 5<sup>1</sup>, nous trouvons des différences assez grandes avec le *Plesiosaurus latispinus*.

#### CÔTES.

Nous avons représenté planche I un bloc renfermant les vertèbres de la région dorsale; la surface articulaire des apophyses indique l'épaisseur des côtes qui s'y attachent.

Nous avons trouvé des os de trois sortes que nous rapportons à des côtes. Nous en voyons quatorze engagées très-irrégulièrement dans le bloc principal : douze d'entre elles ont à peu près la même grosseur. Nous avons pu en mettre une entièrement à nu par ses deux extrémités. Les deux autres sont seules, et une quatrième nous semble être une *côte médiane*, si nous nous rapportons à sa forme et à ses terminaisons symétriques.

La grosse côte est longue de 47 centimètres. Le diamètre est de 3 centimètres, près de la surface articulaire, de 25 millimètres vers le milieu, de 18 millimètres au bout. Elle est recourbée en haut et presque en forme de crosse; elle est très-forte et presque arrondie de ce côté. La surface articulaire est plus ou moins aplatie et sa largeur correspond à la surface articulaire des apophyses transverses. Il n'y a qu'une surface articulaire. Nous trouvons douze côtes semblables et à peu près de la même grosseur.

A en juger par une empreinte de la partie supérieure d'une de ces côtes, cet os est tronqué au bout, sans tête à facette, sans angle, sans gouttière et sans tubercule; il se termine par une facette circulaire comme l'apophyse à laquelle il correspond. Il est inutile de faire remarquer que cette articulation est loin d'avoir la solidité de ces mêmes os chez les autres Vertébrés terrestres.

La seconde sorte est longue de 36 centimètres; les deux extrémités sont

<sup>1</sup> *Monograph of the fossil Reptilia of the Liasic formation.*

effilées, mais à l'un des bouts elle se termine insensiblement en pointe, tandis que de l'autre côté elle s'élargit et s'amincit brusquement; on dirait une côte de Cétacé qui porte encore les traces de la surface articulaire des côtes précédentes à double surface articulaire.

La troisième sorte est plus courte et s'élargit brusquement près de la pointe articulaire pour s'amincir ensuite lentement jusqu'au bout opposé. Cette troisième côte est longue de 28 centimètres.

La côte que nous regardons comme symétrique est longue de 20 centimètres.

On n'a pas parlé jusqu'à présent de côtes sternales chez les Plésiosaures. A en juger d'après la conformation de la ceinture de l'épaule, on peut dire qu'il n'y en a pas.

Une dernière sorte de côte se distingue surtout par sa délicatesse et sa forme aplatie. Elle a 1 centimètre de large sur un  $\frac{1}{2}$  centimètre de diamètre. Nous n'en avons pas vu en entier, et nous ne connaissons point la partie terminale. Nous en trouvons quatre encore en place. Elles sont de même nature et présentent le même aspect que les autres.

Nous voyons ainsi des côtes à la région cervicale, à la région dorsale, à la région lombaire et dans quelques espèces, paraît-il, il en existe même à la région caudale.

Ces côtes n'ont pas toutes la même signification. Ce ne sont pas des appendices de même nature à en juger par les apophyses qui les portent.

A la région du cou, les apophyses qui portent les appendices en hache, s'amoindrissent à mesure que d'autres apparaissent sous eux, pour porter les côtes véritables. On voit la même chose se reproduire à la fin de la région dorsale.

Aucune des côtes ne présente une double surface articulaire et elles sont toutes tronquées au bout même du côté des apophyses transverses.

La même troncation existe généralement dans ces Reptiles fossiles avec les mêmes caractères, et, dans le *Plesiosaurus rostratus*, on en voit qui portent un prolongement en arrière complètement libre. Ce prolongement semble, au premier abord, correspondre à la tubérosité des côtes des mammifères. C'est une disposition toute différente de celle des animaux de cette classe.



La grosseur des côtes est très-variable et elle correspond, comme c'est généralement le cas, à la grosseur des apophyses avec lesquelles elles s'articulent.

Une partie de ces os se rapporte, sans doute, aux pièces osseuses imbriquées qui garnissent l'abdomen, mais comme il n'y en a pas une en place, nous ne pouvons rien dire de leur arrangement. On les distingue des autres par les bouts qui se terminent de même et par leur courbure. Ces os qui occupent la ligne médiane, entre les coracoïdes et les os pubiens, constituent une ossature à part propre aux Plésiosaures.

#### CEINTURES ET MEMBRES.

Il est assez remarquable que les naturalistes sont loin d'être d'accord sur la composition de la ceinture de l'épaule des Plésiosaures.

Il y a des auteurs, comme Thomas Hawkins, qui leur accordent un sternum, mais, à la vérité, en désignant sous ce nom un os grêle et légèrement courbé, placé au-devant de la ceinture et que l'on considère généralement comme clavicule.

Le grand sternum que Thomas Hawkins figure planche XXVI, est le même os que le professeur Harry Seeley a figuré sous le nom d'épisternum<sup>1</sup>.

Le professeur Huxley, celui de tous qui a le mieux approfondi l'étude de l'organisation des Reptiles fossiles, reproduit la figure du sternum à-peu près comme Thomas Hawkins, mais en le désignant sous le nom de clavicule. Le savant professeur de l'École des mines ne parle pas d'épisternum, mais fait mention d'un os interclaviculaire.

À voir l'interclaviculaire de l'Ichtyosaure, il est évident que Huxley désigne sous ce nom l'os que le professeur Harry Seeley<sup>2</sup> a nommé épisternum. Harry Seeley accorde aux Plésiosaures une clavicule qui s'étend sur le bord antérieur de l'omoplate, un épisternum très-développé, une

<sup>1</sup> THOMAS HAWKINS, *Memoirs of Ichtyosauri and Plesiosauri*, in-folio. London, 1854, avec vingt-huit planches.

<sup>2</sup> HARRY SEELEY, *On two new Plesiosaurs from the Lias*. ANN. AND MAG. NAT. HIST., novembre 1865, vol. 16, pl. XIV et XV.

omoplate et un coracoïde, dans leurs véritables rapports avec la cavité glénoïde.

La forme de l'épisternum figuré par Thomas Hawkins est bien différente de l'épisternum de Harry Seeley, tout en reconnaissant parfaitement que c'est le même os médian.

A propos du *Plesiosaurus eliduchus*, H. Seeley assure que la clavicule de ce Reptile ressemble à l'épine de l'omoplate et qu'elle a la même position que dans les Ichtyosaures. Dans cette espèce la clavicule est bien différente.

M. Harry Seeley a décrit et figuré également l'épisternum de ce même Plésiosaure et l'on voit clairement, d'après ces descriptions, que les Plésiosaures présentent de grandes différences dans la structure de leur ceinture scapulaire.

Le professeur J. Sollas constate la présence des clavicules dans le *Plesiosaurus Conybeari* du Lias inférieur de Charmouth, qui forment dans ce Reptile une sorte de plastron au-devant des coracoïdes, et il ne reconnaît pas un élément interclaviculaire.

« Very possibly the furcula of different Plesiosaurs may differ in composition, as they do in Birds, an interclavicle being sometimes present and sometimes absent, » dit le professeur Sollas, après avoir étudié les Plésiosaures du British Museum <sup>1</sup>.

La ceinture de l'épaule des Plésiosaures, en prenant pour exemple l'espèce qui nous occupe, se compose : 1° de deux énormes coracoïdes qui forment un véritable plastron et se joignent dans une grande partie de leur longueur ; 2° d'une omoplate curieuse par sa forme qui s'articule avec l'os précédent et forme avec lui la cavité glénoïde ; 3° d'un os de forme et de grandeur variable, placé en travers au-devant de la ceinture qui correspond à la clavicule.

Il existe en outre dans quelques Plésiosaures, entre la clavicule et le coracoïde, un os qui correspond à l'épisternum, mais qui, selon toute probabilité, n'est pas toujours à l'état osseux.

<sup>1</sup> *The Quarterly Review*, Aug. 1881. p. 456.

On conserve au British Museum une ceinture de l'épaulé du *Plesiosaurus dolichodeirus*, des falaises de Lyme regis qui montre parfaitement les rapports du coracoïde, de l'omoplate et de l'humérus, mais on ne découvre dans cette pièce ni clavicule ni épisternum.

Les coracoïdes sont extraordinairement développés dans le Plésiosaure qui nous occupe et se touchent sur une grande étendue, formant un véritable bouclier; s'ils n'étaient séparés l'un de l'autre, on pourrait trouver de la ressemblance avec le sternum d'Autruche. R. Owen a très-bien figuré ces coracoïdes dans sa *Monographie des Reptiles fossiles de la formation liasique*<sup>1</sup>.

La forme des omoplastes est fort remarquable; nous avons été assez longtemps sans les reconnaître, par la raison que dans toutes les deux il existe une lésion de continuité vers le milieu de leur longueur. Nous avons réussi toutefois à les restaurer complètement.

On peut dire que l'omoplate des Plésiosaures est autant, si pas plus, un os long qu'un os plat; au premier aspect cette omoplate paraît même tenir plus des premiers que des derniers. Elle a une forte apophyse vers le milieu de sa longueur qui fait songer à un fémur avec son trochanter, mais on s'aperçoit bien vite qu'il n'a pas les caractères de l'os de la cuisse. Il présente une crête sur une des faces et les deux bouts, celui du bord libre comme celui de la surface articulaire, sont arrondis.

En somme l'omoplate a une forme particulière comme on le voit dans un dessin de H. Seeley qui figure cet os en place, à côté du coracoïde<sup>2</sup>.

L'omoplate a été représentée parfois sous la forme d'un os en V, ce qui évidemment est une erreur.

Cet os mesure dans sa plus grande longueur 24 centimètres.

Dans sa plus grande largeur 12 centimètres, au milieu 6 centimètres.

Son épaisseur moyenne est de 3 centimètres.

Nous ferons d'abord remarquer que les os des membres étant complé-

<sup>1</sup> Pl. IX, fig. 2.

<sup>2</sup> H. Seeley, *On two new Plesiosaurs from the Lias* (ANN. AND MAG. OF NATURAL HISTORY FOR NOVEMBER, 1865). Pl. XV.

ment dispersés, nous n'avons pu les observer dans leur situation respective et il est connu que les femurs diffèrent fort peu des humérus. Il n'y a qu'une légère différence dans leur dimension.

L'humérus est plus fort que le fémur, et le membre postérieur est un peu plus allongé.

L'humérus a une ressemblance si grande avec le fémur que nous ne connaissons guère que la dimension pour les distinguer l'un de l'autre. Il mesure :

En longueur . . . . .	51 centim.
En largeur à son extrémité tibiale . . . . .	15 —
En épaisseur au milieu . . . . .	7 —
En hauteur . . . . .	9 —

Nous avons pu mettre à nu une grande partie d'un des membres ; mais les os sont pour la plupart complètement déplacés.

Nous trouvons à côté d'une grande et forte côte presque complète, un os aplati presque carré, échanuré sur un de ces bords ; c'est sans doute le radius.

À côté de lui on voit un os déprimé, arrondi et excavé comme un corps de vertèbre de poisson ; c'est un os carpien. Nous en voyons de semblables dans le *Plesiosaurus* figuré par Conybeare et reproduit par Cuvier, pl. XXXI, fig. 1.

Nous trouvons des fragments de radius et de cubitus en place, ainsi que des os du carpe, mais ils ne sont pas assez complets pour que nous en donnions ni la description ni la grandeur.

Les autres os sont des phalanges. Il y en a trois qui sont dans leur situation respective et forment évidemment l'extrémité du doigt. La dernière phalange est reconnaissable à son bout terminal arrondi.

Ces phalanges sont toutes parfaitement semblables à celles des Cétacés ; elles sont minces et rétrécies au milieu, fortement élargies aux deux bouts et très-déprimées, du moins quelques-unes d'entre elles, dans toute leur longueur. Nous possédons une phalange isolée mince et écrasée comme une feuille, que nous n'avons pas reconnue d'abord pour un os de la main.

Il ne nous semble pas, à en juger par ces phalanges, que la nageoire de l'espèce qui nous occupe avait la longueur de la nageoire des autres Plésiosaures.

Le bassin de ces Reptiles est assez bien connu pour qu'il n'y ait aucune incertitude au sujet des os qui le constituent ; on connaît plus d'un Plésiosaure bien conservé, couché sur le dos et montrant exactement le rapport et la forme que les pubis, les ischium et les iléon ont entre eux. Déjà Th. Hawkins a très-bien figuré ces os dans son *Plesiosaurus tessarestarsostinus*<sup>1</sup>, et plus récemment R. Owen a publié un dessin du *Plesiosaurus rugosus* qui reproduit ce bassin comme si le premier avait servi de modèle<sup>2</sup>. Nous trouvons encore une bonne figure de ces os dans le *Plesiosaurus rostratus*, représenté dans le même mémoire<sup>3</sup>. Nous en dirons autant du bassin figuré dans le mémoire de M. Sollas<sup>4</sup>.

Nous avons facilement trouvé les trois os du bassin : l'os des îles est encore en place et attaché à l'apophyse transverse d'une vertèbre sacrée unique. Il n'y a en effet, comme nous l'avons dit, qu'une seule vertèbre dans cette région avec une apophyse transverse un peu plus forte que celle des vertèbres précédentes.

L'iléon est un os long, légèrement courbé, que l'on pourrait prendre pour une côte si on ne lui trouvait pas une surface articulaire aux deux bouts. Il a été fort bien représenté par Owen dans sa monographie des Reptiles fossiles du Lias.

A la manière dont le bassin adhère aux apophyses transverses d'une vertèbre unique, nous trouvons une grande analogie entre les Plésiosaures et les Dugongs ; seulement dans ces derniers il n'existe qu'un seul os de chaque côté pour représenter la ceinture pelvienne.

Le pubis est aplati et nous ne le connaissons que par l'impression qu'il

<sup>1</sup> *Memoirs of Ichtyosauri and Plesiosauri*. London, 1854, pl. XXIV.

<sup>2</sup> *Monograph of the fossil Reptilia of the Liasic formation*. London, 1865, pl. XIV.

<sup>3</sup> *Ibidem*, pl. IX.

<sup>4</sup> *On a new species of Plesiosaurus*.

<sup>5</sup> Pl. IX, fig. 1.

a laissée dans la pierre. Nous pouvons toutefois très-bien nous le représenter ; il est à peu près aussi large que long et sur la ligne médiane il s'unit à celui du côté opposé comme le coracoïde ; à son bord interne il est légèrement convexe comme à son bord postérieur ; mais le bord externe est découpé en avant et le bord antérieur est fort irrégulier, rappelant plus au moins le plastron de certains Chéloniens ; il se prolonge légèrement en dedans en une sorte d'apophyse et en dehors il forme plusieurs lobes qui lui donnent une apparence de feuille.

Si nous comparons le pubis du Plesiosaure de Dampicourt à celui des espèces connues, nous trouvons qu'il est comparativement à l'ischion beaucoup moins développé, mais il se termine en avant à peu près de la même manière.

L'ischion consiste également en un os aplati de la même étendue à peu près que le précédent avec lequel il forme un vaste bouclier fendu sur la ligne médiane. La séparation longitudinale et transversale de ces quatre os forme une croix au milieu de ce bouclier. L'ischion a son bord interne convexe de manière qu'en s'écartant de la ligne médiane, il se forme, en arrière surtout, une échancrure au milieu ; le bord postérieur est plutôt concave et l'os se rétrécit du côté externe ; le bord externe est fort étroit, tandis que le bord antérieur s'étend comme le bord postérieur du pubis. Il en résulte que l'ischion diffère complètement de forme avec le pubis sans différer beaucoup en surface.

Ces os ne sont pas assez bien conservés pour que nous puissions apprécier la part qu'ils prennent dans la formation de la cavité cotyloïde.

Dans les espèces dont le bassin est bien connu, l'ischion est comparativement moins développé que dans celle que nous décrivons.

Les os des membres postérieurs sont également dispersés comme ceux des membres antérieurs et si nous reconnaissons le fémur, le tibia et le péroné, ainsi que quelques os du tarse et des phalanges, nous ne reconnaissons à aucun d'eux des caractères propres qui méritent d'être mentionnés. Comme les os de l'avant-bras, les deux os de la jambe sont également courts et si on ne les avait pas trouvés en place, on ne songerait pas plus à prendre les premiers pour radius et cubitus que les seconds pour tibia et péroné.

Le fémur mesure :

En longueur. . . . .	55 centim.
En largeur du côté de l'avant-bras . . . . .	18 —
En épaisseur au milieu et en haut de . . . . .	9 —
Le tibia et le peroné ont une longueur. . . . .	11 —
Le tibia a en largeur. . . . .	8 —

Jusqu'à présent on ne peut dire si la peau de ces Reptiles était couverte d'écailles ou incrustée de plaques calcaires. Notre Plésiosaure ne nous a rien fait connaître à ce sujet, et nous partageons l'avis des paléontologistes qui pensent que ces animaux n'avaient ni plaques osseuses ni écailles.

Il serait difficile de dire dans quelle condition s'est trouvé le cadavre au moment où il a été enveloppé, puisque nous avons reçu tout l'animal par fragments ; mais comme toutes les parties du corps étaient encore réunies et que les os des membres et les côtes sont entremêlés, il est permis d'en conclure que l'animal a subi pendant quelques jours l'action des vagues. C'est un animal en pleine putréfaction qui a essuyé l'action du remous ou des vagues au fond de l'eau ou qui est tombé en décomposition à la surface du sol ; les os ont été ensevelis peu après la décomposition complète des chairs et des ligaments.

Ce qui nous frappe c'est que l'on trouve si rarement les os des nageoires en place, et nous ne croyons pas nous tromper en disant que ces organes étaient moins solidement construits que les nageoires actuelles des Cétacés ou des Squales ; un Dauphin ou un Squale abandonné sur la plage aurait encore ses nageoires intactes que tous les os du squelette seraient complètement disjoints et dispersés.

Il nous serait difficile de dire si le Plésiosaure était dans une position de supination ou dans une position contraire.

A en juger par la soudure complète des arcs nerveux avec le corps des vertèbres ainsi que par la taille et tous les caractères des os, l'animal que nous décrivons est entièrement adulte.



## DÉTERMINATION DE L'ESPÈCE.

Comme il y a plusieurs espèces de Plésiosaures connues, à laquelle appartient celle dont nous venons de faire connaître les os ?

Nous avons d'abord observé les Plésiosaures conservés à Paris. Dans les galeries du Muséum d'histoire naturelle (galerie de Paléontologie) nous avons trouvé un Plésiosaure assez complet (colonne vertébrale, ceinture de l'épaule et du bassin) découvert à 1/2 mètre de la surface du sol, entre Stenay et Mauzay, département de la Meuse, dans l'Oxford-Clay. Les os étaient presque tous séparés lors de leur entrée au Muséum, mais ils ont été placés dans leur situation respective par les soins de M. Merlieux. Nous ferons remarquer que tous ne se trouvent pas à leur place et qu'il y a entre autres des vertèbres cervicales qui occupent la région dorsale. L'étiquette porte : espèce nouvelle.

Un autre Plésiosaure a été trouvé dans le même terrain, dans les environs de Château-Vilain, département de la Meuse également; il est représenté par un humérus de 30 centimètres de longueur.

On voit dans les mêmes galeries un fémur de Plésiosaure trouvé en 1857, au Havre; il a 45 centimètres de long sur 19 centimètres de large, et une vertèbre dorsale de grande dimension avec une partie de ses apophyses. Un groupe de vertèbres et des côtes des Vaches-Noires de Houffleur, trouvé dans l'argile d'Oxford, et une vertèbre de Boulogne-sur-Mer.

Un Plésiosaure (*Ples. pentagonal.*) a été trouvé en France dans les carrières d'Auxon, département de l'Aube, et non département de la Côte-d'Or, comme on l'a dit par erreur <sup>1</sup>.

Notre Plésiosaure de Dampicourt ne peut se rapporter à aucun de ces Plésiosaures.

Les Plésiosaures les plus remarquables et les plus complètes se trouvent à Londres au British Museum.

En 1853, M. W. H. Bensted découvrit en Angleterre dans le *Lower green*

<sup>1</sup> *Dict. Sc. nat.*, t. XLI, p. 564, t. LIV, tabl. XII.



*Sand*, à Maidstone (duché de Kent) deux vertèbres cervicales, faisant partie d'une colonne vertébrale, un coracoïde et un iléon et envoya un moule en plâtre des deux vertèbres au British Museum. M. R. Owen fonda sur ces pièces une espèce sous le nom de *Plesiosaurus latispinus* et la fit connaître dans sa Monographie des Reptiles fossiles de la formation crétacée (1864); il a figuré dans les planches VII, VIII et IX des vertèbres cervicales et dorsales, l'iléon et l'os coracoïde.

C'est évidemment à cette espèce que notre Plésiosaure de Dampicourt appartient, quoique le *Plesiosaurus latispinus* soit sorti des terrains crétacés en Angleterre.

C'est dans le même terrain que M. W. H. Bensted a trouvé les débris d'Iguanodon.

Il ne me restait plus aucun doute au sujet de cette détermination, lorsque j'ai reçu le précieux travail de M. Owen sur les Reptiles fossiles des formations crétacées et liasiques qui ont complètement confirmé cette détermination.

Ce que l'illustre directeur du British Museum avait entrevu, en jetant les yeux sur les croquis de notre Plésiosaure que je lui exhibais à Londres, s'est parfaitement confirmé.

Les ossements que nous venons de faire connaître se rapportent donc à une espèce connue et décrite sous le nom de

#### PLESIOSAURUS LATISPINUS.

Depuis que ce travail est rédigé, M. Ch. Barrois a fait connaître dans le *Bulletin scientifique, historique et littéraire du département du Nord et des pays voisins* <sup>1</sup> la découverte de deux espèces de Plésiosaures, le *Plesiosaurus puchyomus* et le *Plesiosaurus latispinus* dans les sables verts du Gault à *Ammonites nummillaris* de Grandpré, département des Ardennes. M. Ch. Barrois a trouvé trois vertèbres de la première espèce, une vertèbre cervicale à Grandpré et une vertèbre dorsale dans le minerai de fer à *Ammonites milletianus*, de la seconde espèce.

Ces pièces sont déposées au Musée de Lille.

<sup>1</sup> Tome VII. Lille, 1875.

Nous avons déjà fait mention de ce Reptile dans un rapport que nous avons fait sur les collections paléontologiques de l'Université de Louvain <sup>1</sup>, dans une notice sur les Reptiles fossiles de la Belgique <sup>2</sup>, et dans la *Patria belgica* <sup>3</sup>.

<sup>1</sup> *Annuaire de l'Université catholique de Louvain*. 1868, p. 560.

<sup>2</sup> *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 2<sup>e</sup> série, t. XXI, 1871.

<sup>3</sup> page 576.



## UN AUTRE PLESIOSAURUS

DU

LIAS INFÉRIEUR DU LUXEMBOURG.

Il y a quelque temps notre savant confrère M. le professeur Dewalque nous confia un certain nombre de vertèbres de Reptiles provenant du Lias inférieur du Luxembourg, avec prière de vouloir bien les examiner <sup>1</sup>. Il nous informa, en même temps, que si ces pièces offraient quelque intérêt il nous engageait à en faire l'objet d'une notice.

Nous avons examiné ces ossements avec le soin qu'ils comportent et l'on verra qu'ils se rapportent à un autre Plésiosaure fort intéressant pour la faune fossile du pays.

Nous avons reconnu des vertèbres cervicales, dorsales et caudales, des des membres et des côtes, mais comme dans l'espèce précédente, aucun os de la tête n'a été mis au jour.

Nous avons pu distinguer facilement des vertèbres cervicales de la partie antérieure du cou et du voisinage du thorax, plusieurs vertèbres dorsales et quelques premières caudales. Nous partageons l'avis de M. le professeur Seeley de déterminer les vertèbres thoraciques par l'insertion des côtes; pour être vertèbre dorsale, la côte doit s'insérer sur l'apophyse transversale fournie par l'arc neural. Il est inutile de faire remarquer que l'on distingue toujours facilement la région caudale par les surfaces articulaires des os en V.

<sup>1</sup> Il y a quelques mois, M. Dewalque nous a montré une belle vertèbre d'Ichtyosaure, mesurant 8 centimètres en largeur et 5 en hauteur, provenant du Masigno d'Aubange Halanzy. Une autre vertèbre d'Ichtyosaure, beaucoup plus petite, a été trouvée dans la marne de Grand-Cour (Lias supérieur), par M. Clément, ingénieur des mines.

Le Musée de Luxembourg renferme une tête de Plésiosaure assez bien conservée, provenant du calcaire infraliasique d'Ersange, canton de Remich <sup>1</sup>. Nous sommes au regret de n'avoir pu recevoir cette pièce en communication, pour nous assurer si elle n'appartient quelquefois pas à l'animal dont nous décrivons les débris.

L'animal que nous faisons connaître ici doit avoir été complètement décomposé au fond des eaux sans que les vagues aient dispersé au loin ses débris. En effet tous les os sont déplacés et si quelques-uns d'entre eux sont brisés, ces cassures ont eu lieu plutôt à l'époque de leur extraction qu'au moment de leur enfouissement.

La présence d'un grand nombre de coquilles dénote que les os, après la décomposition du cadavre, ont dû rester assez longtemps immobiles au fond de l'eau hors de l'influence des vagues.

Cette mer infraliasique paraît avoir été déjà peuplée de différents autres Reptiles.

L'animal, selon toute apparence, était adulte, mais n'avait pas atteint un âge avancé, à en juger par la séparation encore évidente de l'arc neural avec le corps des vertèbres.

#### DESCRIPTION DES OS.

Parmi les vertèbres nous trouvons une des premières cervicales; nous disons une des premières à cause de sa forme allongée et de la disposition de ses facettes articulaires.

Cette vertèbre mesure :

En longueur (diam. antéro-postérieur) . . . . .	2 centim.
En largeur (diam. transversale . . . . .)	19 millim.
En hauteur (diam. verticale . . . . .)	15 —

La facette articulaire a la forme d'un losange et s'étend dans toute la longueur du corps de la vertèbre.

<sup>1</sup> Ce calcaire suit immédiatement le grès de Martinsart (grès de Vic, grès Supra-Keuprique) qui est suivi lui-même du grès de Luxembourg.

Ces renseignements m'ont été fournis par le professeur N. Wies, de Luxembourg.

Il n'y a pas d'autre partie visible. L'arc neural manque.

Le corps de la vertèbre est des deux côtés à surface plane, à peine un peu concave vers le milieu. Cette concavité paraît un peu plus prononcée en arrière.

A côté de cette vertèbre nous trouvons un os appendiculaire qui lui appartient peut-être; il est un peu étranglé au milieu et s'étend un peu plus d'un côté que de l'autre.

Une seconde cervicale assez bien conservée montre l'arc neural incomplètement soudé au corps. Il est implanté comme un coin dans le corps de la vertèbre, et occupe à peu près toute sa largeur.

On voit sur le côté en dessous la double impression des appendices cervicaux. Ces surfaces articulaires sont toutes les deux creusées.

Cette vertèbre est cylindrique et à peine plus étroite au milieu de la longueur.

Une autre cervicale assez complète nous montre l'arc neural avec une partie de ses zygapophysys en place. On aperçoit au-dessous de la soudure de l'arc une double surface articulaire qui la fait reconnaître facilement pour une cervicale.

Cette vertèbre mesure :

En largeur . . . . .	28 millim.
En hauteur . . . . .	21 —
En longueur . . . . .	24 —

Une cervicale voisine des dorsales se fait remarquer par le grand développement du corps, et par l'arc neural qui n'est pas soudé. L'appendice latéral est articulé, par une fossette profonde, directement au corps de la vertèbre, sans quoi on la prendrait pour une dorsale.

On voit en avant, dans un état de conservation parfaite, une des zygapophysys encore intacte.

Cette vertèbre mesure :

En largeur . . . . .	57 millim.
En hauteur . . . . .	50 —
En épaisseur . . . . .	50 —

Une dernière cervicale plus proche encore des dorsales se distingue par la surface articulaire de l'appendice qui est presque confondu avec la surface articulaire de l'arc neural.

Elle mesure :

En largeur . . . . .	55 millim.
En hauteur . . . . .	27 —
En épaisseur. . . . .	21 —

Nous avons une vertèbre de la région dorsale assez bien conservée. Le corps présente des deux côtés une surface presque plane.

L'arc neural porte une apophyse transverse peu aplati au bout donnant insertion à la côte.

On voit distinctement les deux apophyses articulaires, et le canal spinal présente à peu près le même diamètre vertical et transversal.

Le corps mesure :

En épaisseur. . . . .	27 millim.
En hauteur . . . . .	55 —
En largeur . . . . .	57 —

Une apophyse épineuse mesure depuis le canal neural 40 millimètres, et le canal neural lui-même n'a que 6 millimètres de largeur. Cette apophyse mesure d'avant en arrière 12 millimètres. C'est l'apophyse d'une des dernières dorsales, à en juger par l'apophyse transverse.

Une autre vertèbre dorsale appartient, à en juger par la forme du corps, au milieu de cette région.

Elle mesure :

En largeur . . . . .	50 millim.
En hauteur . . . . .	22 —
En épaisseur. . . . .	50 —

Les apophyses de cette vertèbre sont restées engagées dans la roche.

Une troisième dorsale se distingue par le diamètre antéro-postérieur, qui est moins grand que dans les autres. Il ne mesure que 25 millimètres, tandis qu'en largeur elle en mesure 35.

Une quatrième dorsale paraît avoir été comprimée accidentellement. Une partie de l'arc neural est brisée.

Le corps mesure :

En largeur . . . . .	56 millim.
En hauteur . . . . .	50 —
En épaisseur . . . . .	50 —

Une vertèbre caudale se distingue par l'absence de l'arc neural et les impressions qu'il laisse, ainsi que par les traces des os en V. Les surfaces sont plus concaves que dans les vertèbres des autres régions.

Cette vertèbre mesure :

En largeur . . . . .	29 millim.
En hauteur . . . . .	22 —
En longueur . . . . .	21 —

A côté de cette vertèbre se trouve un os en V, qui lui appartient probablement.

Une autre vertèbre caudale ne diffère de la précédente que par des traces plus évidentes de la présence des os en V. Les dimensions sont les mêmes.

Nous avons une côte presque complète, placée à une courte distance d'une vertèbre dorsale avec laquelle elle était probablement articulée.

Cette côte, comme dans tous ces animaux, est articulée seulement par une surface aplatie, même un peu concave et uniquement avec l'apophyse transverse provenant de l'arc neural. Il n'y a aucune apparence d'articulation avec le corps des vertèbres. Cette extrémité supérieure de la côte présente une facette un peu déprimée au centre.

Cette côte mesure :

En longueur . . . . .	15 centim.
En épaisseur au milieu . . . . .	5 millim.
En largeur à la surface articulaire . . . . .	12 —

Elle est légèrement courbée et s'aplatit à mesure qu'on s'éloigne de son disque articulaire.

Nous trouvons un humérus brisé au milieu de sa longueur : à en juger par la portion conservée, il doit avoir à peu près

En largeur . . . . .	7 centim.
Sa surface articulaire inférieure . . . . .	5 —
Son épaisseur au milieu . . . . .	12 —

La surface articulaire inférieure est disposée comme dans les Cétacés, c'est-à-dire qu'une partie correspond au radius et une autre au cubitus.

Nous trouvons ensuite plusieurs phalanges qui sont, relativement à l'humérus dont nous venons de parler, extrêmement larges et longues. Elles ont à peu près toutes la même forme et la même grandeur, mais il y en a deux qui se distinguent par leur épaisseur.

Le premier de ces os mesure

En longueur. . . . .	32 millim.
En largeur au milieu . . . . .	26 —
En épaisseur . . . . .	21 —
En hauteur (à l'autre) . . . . .	18 —

La surface articulaire des deux côtés présente des porosités, c'est-à-dire des trous comme on en trouve dans les os carpiens des Cétacés en général, d'où il est permis de conclure que ces os étaient complètement immobiles les uns sur les autres et logés au fond d'une gangue cartilagineuse.

Nous sommes en possession d'une phalange à peu près complète.

Le second de ces os, également une phalange, est comparativement délicat, et comme le précédent, il est allongé et comprimé affectant complètement la forme d'une phalange ordinaire de Cétacé.

Il mesure

En longueur. . . . .	32 millim.
En largeur au milieu . . . . .	23 —
En épaisseur. . . . .	10 —

C'est sous le rapport de l'épaisseur qu'il diffère le plus du précédent. On ne voit pas à ses surfaces articulaires ces dispositions poreuses que nous avons signalées à l'autre.



Nous trouvons quelques phalanges isolées, mais qui ne nous présentent rien de particulier à signaler. Quelques-unes d'entre elles sont brisées.

Une de ces phalanges a

En longueur. . . . .	52 millim.
En largeur à ses surfaces articulaires . . . . .	12 —
Au milieu . . . . .	3 —

Une autre phalange brisée présente à peu de différence près les mêmes dimensions.

Nous en trouvons une troisième à peu près de la même forme et de la même dimension et une quatrième plus courte et plus large vers le milieu et tronquée obliquement à une de ses extrémités.

A côté de ces ossements on trouve des Mollusques acéphales se rapportant aux genres *Corbula*, *Avicula*, *Placuna*; ne pouvant rapporter ces ossements à une espèce connue, nous lui avons donné le nom de

### PLESIOSAURUS DEWALQUII.

Nous l'avons du reste déjà signalé sous ce nom dans une notice sur les Reptiles fossiles de la Belgique et dans la Paléontologie des Vertèbres de la *Patria belgica*.

Nous trouvons ainsi, dans le Lias inférieur du Luxembourg, le *Plesiosaurus Dewalquii*, dans le Lias moyen à Dampicourt, le *Plesiosaurus latispinus* et, d'après les observations de M. Barrois, il se retrouve à côté du *Plesiosaurus pachycomus* dans les sables verts des Ardennes.

Nous trouvons également des restes d'Ichtyosaurus dans le Lias inférieur (macigno d'Aubange) et supérieur (marne de Grand Cour).

Et entre les Mosasaures marins qui ont laissé leurs dépouilles dans la Craie de la montagne St-Pierre de Maestricht, nous voyons apparaître les monstrueux Iguanodons terrestres, qui ont vécu pendant une courte période d'émersion et dont plusieurs squelettes, admirablement conservés, ont été récemment retirés du fond d'une faille du charbonnage de Bernissart.

Enfin à côté des Mosasaures nous voyons apparaître les Ptérodactyles à en juger par quelques phalanges unguéales que M. Houzeau a découvertes dans la craie phosphatée de Cibly.

Nous ne parlerons pas de la place que les Plésiosaures doivent occuper parmi les Reptiles ; le professeur Sollas leur reconnaît des affinités avec les Lézards, tandis que le professeur Seeley les rapproche plutôt des Ichtyosaures, des Dinosaurés et des Crocodiles. Les éléments de comparaison ne sont pas suffisants pour que nous nous occupions avec avantage de cette question.

Nous dirons, en terminant, que M. W.-J. Sollas, professeur de géologie à Bristol, a parfaitement coordonné dans son mémoire *Sur une nouvelle espèce de Plésiosaure*, tout ce que l'on sait sur ces intéressants Reptiles, et que ce travail d'un haut intérêt est accompagné d'un tableau synoptique sur la distribution géographique des espèces connues.



## LITTÉRATURE.

—

**PLESIOSAURUS LATISPINUS.**

- HUXLEY. Quart. Journ. géol. Soc., 1838, p. 281.
- OWEN. Monograph of the fossil Reptilia of the cretaceous formations. *Paleontographical Society*, in-4°, 1851.
- Id. Supplement, n<sup>os</sup> II et III, 1864.
- Descriptive catalogue of the fossil Remains of Reptilia and Pisces in the Museum of the Royal college of Surgeons, in-4°, 1854, p. 65.
- Monograph of the fossil Reptilia of the liasic formation, 1863.
- HARRY SEELEY. On Plesiosaurus macropterus, a new spec. from the Lias of Whitby. *Ann. nat. hist.* Janv. 1865, p. 49.
- Note. Id. Mars 1865, p. 252.
- On the new Plesiosaurus from the Lias. *Ann. nat. hist.* Nov. 1865.
- COY. Prof. of nat. Sc. in the University of Melbourne, and Direct. of the nation. Museum of Victoria. — On the occurrence of Ichtyosaurus and Plesiosaurus in Australia. *Ann. nat. hist.* Mai 1867.
- PICTET et D<sup>r</sup> CAMPICHE. Description des fossiles du terrain crétacé des environs de Sainte-Croix, in-4°, 1838-1860.
- HULKE. Note on some Plesiosaurian Remains, obtained by J.-C. Mansel. *The Quarterly Journal of the geological Society*. London, 1 fev. 1871.

VAN BENEDEEN, P.-J. Sur les Reptiles fossiles de la Belgique. *Bullet. de l'Acad. roy. de Belgique*, 2<sup>e</sup> sér., t. XXI, 1871.

VAN BENEDEEN, P.-J. *Patria belgica*, vol. 1, 1875, p. 576.

SAUVAGE, H.-É. Note sur quelques Plésiosauriens, des formations jurassiques supérieures de Boulogne. *Ann. sc. nat.*, 6<sup>e</sup> sér., t. VIII, n<sup>o</sup> 5 et 6.

CH. BARROIS. Bulletin scientifique, historique et littéraire du Département du Nord et des pays voisins. Lille, 1875, t. VII.

PROF. SOLLAS. On a new Species of Plesiosaurus (*Pl. conybeari*) from the lower Lias of Charmouth. *Quarterly Journal of the geological Society*, vol. XXXVII, 1881.

---

## EXPLICATION DES PLANCHES.

## PLANCHE I.

Toutes les figures sont de grandeur naturelle.

- Fig. 1. *Plesiosaurus latispinus*. Les phalanges, un os du carpe, le radius et des côtes.  
 2. — — — Vertèbre caudale isolée, vue par sa face postérieure.  
 3. — — — Une vertèbre cervicale antérieure, vue de profil, montrant sur les flancs un appendice costal.  
 4. — — — Une des dernières vertèbres cervicales, vue de face.

## PLANCHE II.

*Plesiosaurus latispinus*. Région dorsale de grandeur naturelle. Au volume et à la direction des apophyses transverses, comme aux zygapophyses, on distingue facilement les premières vertèbres à droite.

## PLANCHE III.

*Plesiosaurus latispinus*, montrant les divers os à leur place respective, et dans leur état complet ou incomplet. La tête a été ajoutée. A la région cervicale et caudale quelques vertèbres sont représentées, vues de face.

## PLANCHE IV.

*Plesiosaurus Dewalquii*, de grandeur naturelle.

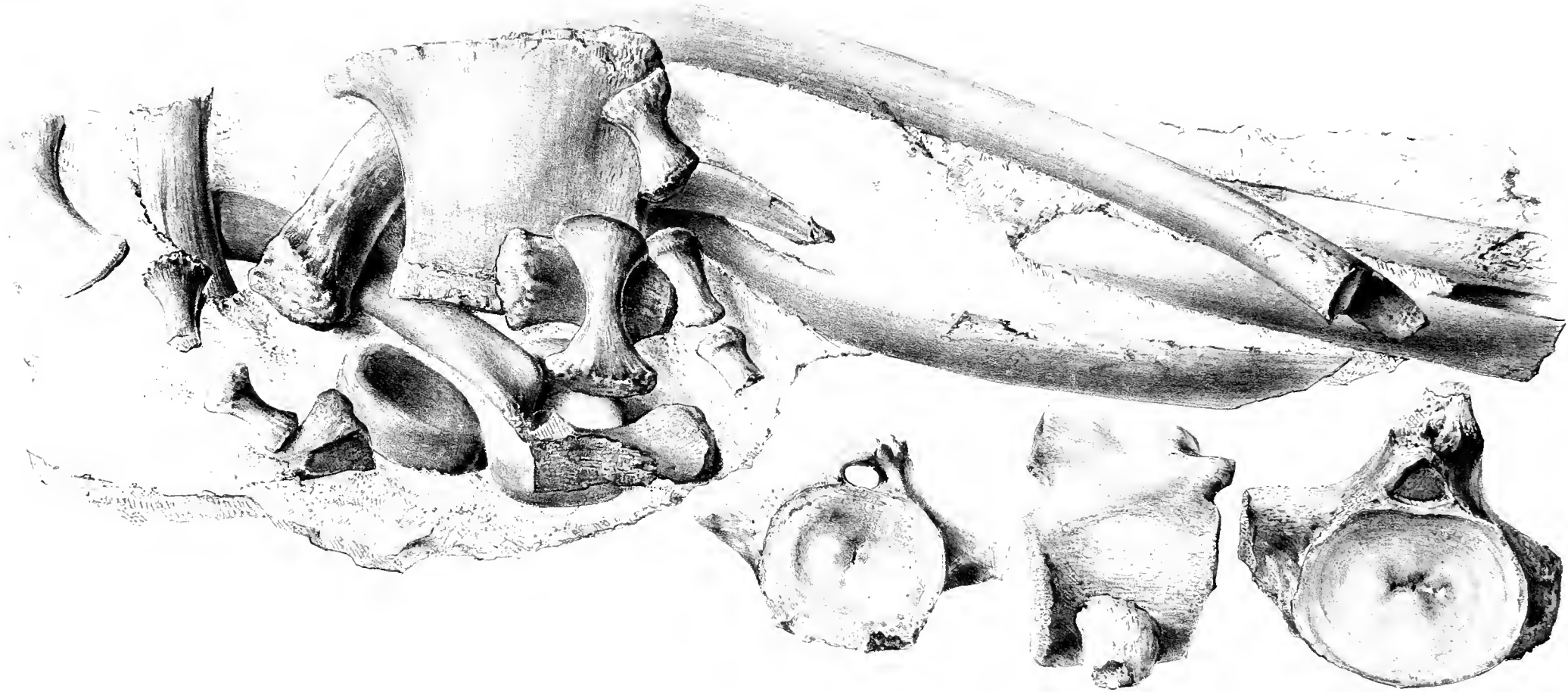
- Fig. 1. Vertèbre cervicale, vue de face.  
 2. La même, vue de côté.  
 3. Vertèbre dorsale, vue de face et montrant une côte complète sur le côté.  
 4. La même, vue de côté.  
 5. Un os en V isolé.  
 6. Humérus.  
 7. Os de l'avant-bras ?  
 8. Os de la jambe ?  
 9. Diverses phalanges.











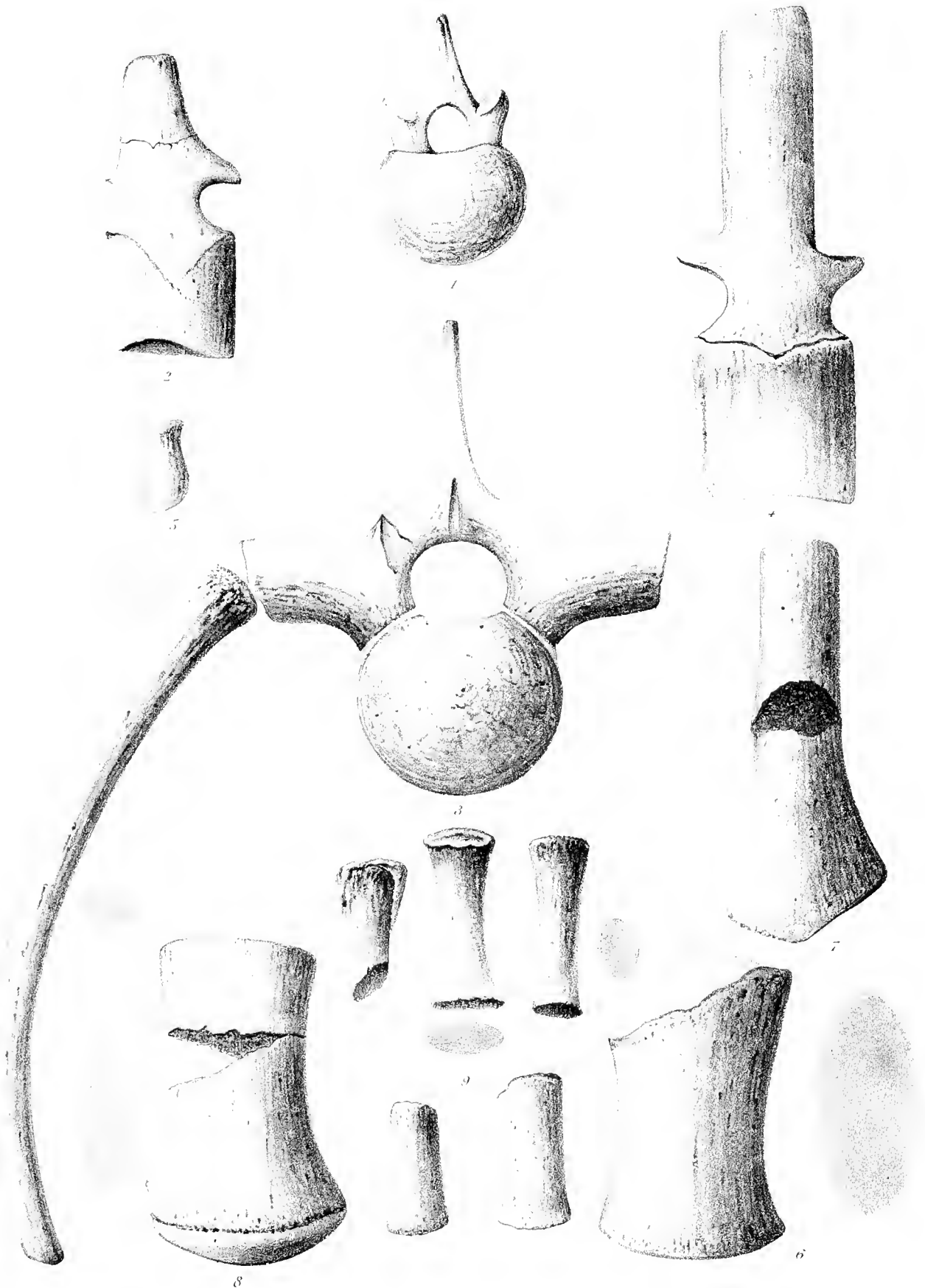
*PLESIOSAURUS LATISPINUS*





PLESIOSAURUS LATISPINUS, 25.





Pl. C. dessin. Encre

PLESIOSAURUS DEWALQUII.



RECHERCHES EXPÉRIMENTALES

SUR LA RELATION QUI EXISTE ENTRE

# LA RÉSISTANCE DE L'AIR

ET

SA TEMPÉRATURE.

---

CONSÉQUENCES PHYSIQUES ET PHILOSOPHIQUES  
QUI DÉCOULENT DE CES EXPÉRIENCES;

PAR

**G.-A. HIRN,**

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

---

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 2 juillet 1881.)

---





*H*

L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

HOMMAGE DE RECONNAISSANCE

DE SON ASSOCIÉ

**G.-A. HIRN.**



# RECHERCHES EXPÉRIMENTALES

SUR LA RELATION QUI EXISTE ENTRE

## LA RÉSISTANCE DE L'AIR ET SA TEMPÉRATURE.

---

### INTRODUCTION.

La résistance qu'exerce l'air (ou un gaz quelconque) en repos au mouvement des corps, la pression qu'exerce ce gaz en mouvement sur les corps en repos qui y sont plongés, ont été, tant au point de vue de l'analyse qu'à celui de l'expérience, l'objet des investigations d'un grand nombre de savants. Outre l'intérêt qu'elle offre comme problème de dynamique, cette étude a une importance considérable, quant à la détermination de la trajectoire des projectiles et quant à celle du travail fourni par les moteurs si anciennement connus sous le nom de *moulins à vent*. La question a été traitée ou exposée dans plusieurs ouvrages recommandables et répandus, et malgré les lacunes, théoriques et expérimentales, qu'elle présente, il semble difficile d'y apporter quelque chose de neuf et d'utile. J'éprouverais donc presque le besoin de me justifier d'avoir osé reprendre la question, tant au point de vue de la théorie qu'à celui de l'expérience, si le point de vue tout particulier, tout spécial, où je me suis placé dans les recherches dont j'ai l'honneur de présenter les résultats à l'Académie de Belgique, ne suffisait pour séparer ce travail de ce qui a été écrit jusqu'ici sur la résistance des fluides élastiques.

Cette séparation, on le verra de suite, sera même telle que loin de me reprocher de tomber dans les redites, on m'accusera peut-être d'avoir visé au bizarre, à l'original, plutôt qu'à une réalité.

Mon but a été de constater :

Si la résistance d'un gaz au mouvement des corps qui s'y meuvent, est une fonction immédiate, ou seulement une fonction médiata de la température.

Quelques explications sont nécessaires pour mieux faire saisir cet énoncé. La résistance  $R$  qu'éprouve un corps de surface  $S$ , qui se meut avec une vitesse  $V$  dans une masse  $A$  indéfinie de gaz (disons, pour préciser, d'air atmosphérique) dont la densité est  $D$ , a été exprimée jusqu'ici par une équation de la forme

$$R = FA \cdot F'S \cdot F''V \cdot F'''D$$

dans laquelle  $F$ ,  $F'$ ,  $F''$ ,  $F'''$  désignent des fonctions convenables de la forme et de la surface du corps, de sa vitesse, et du poids de l'unité de volume du gaz (de l'air). Pour les vitesses faibles ou modérées (entre  $0^m$  et  $20^m$  par seconde), on admet généralement, d'après Hutton et Borda,

$$R = AS^{1,4}DV^2$$

$A$  étant désormais un coefficient qui dépend de la forme du corps en mouvement dans l'air. Comme dans les limites de pressions auxquelles ces vitesses modérées donnent lieu en amont du corps, l'air suit très sensiblement la loi de Mariotte et Gay-Lussac, cette équation devient de fait

$$R = \frac{ABS^{1,4}V^2 1,2952}{(1 + 0,005665 t) 0^m,76}$$

ou, plus simplement encore, pour une plaque plane et mince, qui demande  $A = 1$

$$R = \frac{BS^{1,4}V^2 1,2952}{(1 + 0,005665 t) 0^m,76} = 1,7016 \frac{BS^{1,4}V^2}{(1 + 0,005665 t)}$$

$B$  désignant la pression barométrique et  $t$  la température au moment de l'expérience.

D'après cette équation, supposée correcte dans sa nature, la résistance ne

serait, comme on voit, qu'une fonction médiate de la température, c'est-à-dire qu'elle ne varierait que par suite des variations qu'éprouve la densité *par suite de celles* de la température. Cela posé, et quoique convaincu moi-même que l'équation précédente exprime, du moins très approximativement, la réalité des phénomènes, j'ai voulu constater d'une façon positive, s'il ne faut pas peut-être y ajouter un nouveau terme  $F''''t$ , qui rend  $R$  *immédiatement* fonction de  $t$ ; ou pour me servir du langage ordinaire, j'ai voulu constater si  $R$  ne varie pas avec  $t$ , lorsqu'on maintient la densité parfaitement constante.

Ainsi que je l'ai dit plus haut, l'idée même d'une semblable recherche paraîtra de prime abord bizarre, peut-être absurde, au lecteur. Il me suffira pour en effacer ce caractère, pour en montrer, au contraire, la haute importance, de démontrer que l'existence et l'emploi de cette nouvelle fonction de température seraient une conséquence forcée de l'exactitude de l'hypothèse par laquelle on prétend aujourd'hui à peu près généralement expliquer la constitution des gaz et la nature de la chaleur; de démontrer que cette hypothèse tombe, s'il est expérimentalement prouvé que  $R$  n'est qu'une fonction *indirecte* de la température et ne varie qu'avec la densité! En un mot, s'il est prouvé que la fonction  $F''''t$  *n'existe pas*. Toutefois, je me borne ici à annoncer cette liaison de la fonction  $F''''t$  avec l'hypothèse en question; j'en donnerai la démonstration seulement à la fin de ce mémoire. Expérimentateur et observateur avant toute autre chose, convaincu que nos sciences spéculatives ne peuvent aboutir à quelque chose de certain et s'égarent nécessairement, si elles n'ont pour base les faits bien démontrés et bien discutés, je crois devoir donner d'abord les résultats détaillés des expériences que j'ai entreprises, résultats qui resteront, j'espère, utiles, quand bien même je devrais m'exagérer leur importance ou même me tromper quant à leur portée philosophique. Ai-je besoin de dire que, dans le cercle même si restreint où je me suis tenu au point de vue expérimental, le problème que j'avais cru très simple et très facile d'abord, s'est promptement compliqué et m'a présenté des difficultés telles que je ne puis me flatter de les avoir vaincues complètement? Ai-je à ajouter aussi que, comme il arrive si souvent, outre ce que je cherchais et ce que je n'ai pas toujours trouvé, j'ai trouvé un peu ce que je ne cherchais pas?

Mes expériences se subdivisent en quatre séries, différant entre elles, soit par les instruments avec lesquels je les ai exécutées, soit par le principe sur lequel elles reposent. Je vais les décrire successivement avec les détails nécessaires et je n'en indique ici que le principe.

La résistance d'un gaz peut se déterminer de deux façons différentes, au point de vue de l'influence des températures.

1<sup>o</sup> Nous pouvons laisser le gaz soumis à une même pression et admettre (avec une approximation plus que suffisante) que la densité varie suivant la loi de Gay-Lussac, ou

$$\delta = \Delta_0 \left( \frac{1 + 0,005665 t_0}{1 + 0,005665 t} \right) = \Delta_0 \frac{T_0}{T}.$$

La résistance a alors pour expression

$$\rho = \Delta_0 \frac{T_0}{T} \varphi V \gamma T \quad \text{ou} \quad \rho = \Delta_0 \frac{T_0}{T} \varphi V,$$

selon qu'elle est ou non fonction immédiate de température. Nous verrons que, dans une hypothèse particulière sur la nature de la chaleur (celle précisément que nous aurons à discuter), cette fonction est telle, qu'il vient, pour le cas des pressions constantes

$$\rho = A' \varphi V \sqrt{T}.$$

2<sup>o</sup> Nous pouvons, au contraire, maintenir la constance des volumes et, par suite, des densités, en faisant varier convenablement la pression pendant que la température change. La résistance alors a pour expression

$$\rho = \text{const.} \quad \text{ou} \quad \rho = \varphi T.$$

Les trois premières séries d'expériences reposent sur le premier principe. Quelque soin que j'aie apporté à leur conduite, je ne les présente pourtant que comme des approximations, quant aux résultats généraux et comme question d'exactitude absolue. La dernière série repose sur le second principe; j'espère qu'elle méritera en tous points l'attention de mes lecteurs.

## PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

PRESSION CONSTANTE ET DENSITÉ VARIABLE (*premier appareil*).

L'instrument dont je me suis servi dans cette série d'essais est, sauf une modification importante, le même que celui auquel a eu recours Borda dans ses recherches sur la résistance de l'air. La figure (1) va le faire comprendre aisément par mes lecteurs.

Le cylindre CC, en bois dur, porte à l'une de ses extrémités le moulinet ACA et à l'autre extrémité la poulie à gorge P. Ce cylindre est traversé, à frottement très-doux, par l'arbre SS, en acier bien poli. Sur cet axe se trouve calée une poulie P' exactement pareille à P. Une ficelle mince et forte passe, comme l'indique la figure, sur les deux poulies P, P' et sur les deux poulies  $v$  et  $v'$ . Les petits axes de ces dernières traversent des fourches, auxquelles sont attachés des plateaux de balance.

Il résulte de cette disposition très-simple que si l'on fait tourner l'axe SS dans le sens de la flèche LL, après avoir chargé de poids inégaux  $P' > P$  les plateaux de  $v$  et de  $v'$ , la ficelle continue passant sur les quatre poulies fera tourner le moulinet ACA dans le sens de la flèche FF, en sens contraire de LL. Il est clair aussi que si l'on tourne uniformément, et avec une vitesse *convenable*, la manivelle de l'axe SS, la résistance de l'air au mouvement des ailettes A,A et les frottements du cylindre CC, des deux poulies  $v$ ,  $v'$ , feront équilibre à la moitié de la différence  $P' - P$ . Le plateau de la poulie  $v'$ , après s'être élevé de terre, restera suspendu à une même hauteur, tant que la vitesse restera constante.

Cette disposition de poulies constitue un dynamomètre des plus simples et, le lecteur le verra bientôt, des plus exacts. C'est là qu'est la différence existant entre l'appareil dont s'est servi Borda et celui-ci. Borda donnait le mouvement et la vitesse voulue à son moulinet, à l'aide d'un poids plus ou moins grand suspendu à une ficelle qui s'enroulait autour de l'axe; le temps

que mettait ce poids à descendre d'une certaine hauteur, à partir du moment où le mouvement était devenu uniforme, donnait la valeur de la vitesse. Le temps ici était donc *limité*, tandis qu'avec le dynamomètre que j'indique, une expérience pouvait être prolongée autant qu'on le jugeait nécessaire, ou si l'on aime mieux, l'appareil pouvait être tenu pendant un temps *indéfini* à une même vitesse, avant qu'on commençât à enregistrer les charges des plateaux, le nombre de tours des ailettes, la température de l'air, etc. Je n'ai pas besoin, je pense, de faire ressortir les avantages et la garantie d'exactitude qui découlent de cette différence entre les deux manières d'observer.

Nous allons voir que les frottements du cylindre sur l'axe, ceux des tourillons des deux poulies  $v$ ,  $v'$ , la raideur de la ficelle continue, ne donnaient lieu qu'à des résistances très-petites comparativement à celle de l'air contre les ailettes. Ces résistances d'ailleurs étaient des plus faciles à déterminer. En effet, faisons deux expériences consécutives avec une même différence  $P' - P = \Delta$ , entre les poids des deux plateaux, mais en faisant  $P'_0 > P_0$ ,  $P'_1 > P_1$ . La somme des charges  $P'_1 + P_1$  étant plus grande que la somme  $P'_0 + P_0$ , l'ensemble des frottements sera un peu plus grand aussi dans la seconde expérience que dans la première, et la vitesse des ailettes sera un peu moindre, puisque c'est une même force motrice  $0,5 \Delta$  qui surmonte ces frottements et la résistance de l'air. Dans ces conditions, ajoutons peu à peu au plateau des  $P'$  un excès de poids  $p$ , de façon à rétablir exactement la vitesse que nous avions avec la différence  $P'_0 - P_0$ . Il est évident que la résistance de l'air sera redevenue aussi ce qu'elle était dans cette première expérience. Désignons par  $F_0$ ,  $F_1$ ,  $R$ , les valeurs des frottements et de la résistance de l'air (en grammes) rapportées à l'extrémité du rayon de la poulie  $P$ . On a visiblement :

$$F_0 + R = \frac{1}{2} \Delta$$

$$F_1 + R = \frac{1}{2} \Delta'$$

d'où

$$F_1 - F_0 = \frac{1}{2} (\Delta' - \Delta) = p;$$



mais les frottements des diverses pièces de l'appareil sont une fonction des charges totales et l'on a, en toute hypothèse,

$$F_{0?} \left( \frac{P'_1 + P_1 + p}{P'_0 + P_0} \right) - F_0 = p.$$

D'après tout un ensemble d'expériences, dont j'ai publié les résultats dans les *Bulletins de la Société industrielle de Mulhouse* (1834) et que depuis cette époque, j'ai pu vérifier sous toutes les formes, il existe une différence très-grande entre les lois qui régissent le frottement, selon que les surfaces solides, qui glissent les unes sur les autres, sont en regard *direct* ou sont séparées par une couche de matière lubrifiante (huiles de toutes espèces, eau, *air*....). Dans les frottements *immédiats* (surfaces directement en regard), la résistance est indépendante des vitesses et des surfaces, et proportionnelle aux charges; dans les frottements *médiats* (matière lubrifiante *en excès* interposée), la résistance, au contraire, est fonction des vitesses et des surfaces. Nous n'avons toutefois pas à nous occuper ici de cette fonction. Avant de monter mon appareil, j'ai imbibé le bois du cylindre CC *intérieurement*, ainsi que les fourches en bois des poulies *v*, *v'*, d'une huile *inaltérable* et essentiellement lubrifiante, celle du cachalot à grosse tête (*Physeter macrocephalus*). Par suite de la porosité du bois, les surfaces frottantes étaient simplement onctueuses, mais non *mouillées* d'huile et séparées entre elles: les frottements étaient donc *immédiats*; leur valeur devait être indépendante des vitesses et seulement proportionnelle aux charges; c'est aussi ce que l'expérience a pleinement confirmé.

Nous avons donc ici simplement

$$\frac{1}{2} F \left( \frac{P'_1 + P_1 + p}{P'_0 + P_0} \right) - \frac{1}{2} F = \frac{1}{2} p,$$

$P'_0 + P_0$ ,  $P'_1 + P_1 + p$ , étant toujours la totalité des charges des plateaux, laquelle doit être divisée par deux, puisqu'une moitié de cette charge est supportée par la poulie.

Je cite une, entre autres, des expériences répétées qui ont servi à

déterminer la valeur du frottement. Je dis l'une entre autres, parce que ce genre de vérification était répété au commencement de chaque série d'essais, afin de constater si les frottements restaient invariables. La charge motrice du plateau de  $v$  étant  $\frac{1000}{2}$  grammes = 500 grammes et la charge totale étant  $\frac{1}{2}$  1456 = 728 grammes, il faut faire faire aux ailettes 0<sup>tour</sup>, 60241 par seconde pour tenir le plateau de  $v'$  en équilibre. Le poids moteur étant porté à 590 grammes et le poids total à 3818 grammes, la vitesse des ailettes est la même que précédemment. Nous avons donc :

$$F\left(\frac{5818}{728} - 1\right) = \frac{1}{2} 180.$$

La valeur du frottement était par suite 21<sup>gr</sup>, 2, pour la charge 728 grammes, et par suite de  $\frac{21,2}{728}$ , pour 1 kilogramme.

Il résulte de là, pour la valeur de la résistance de l'air, rapportée toujours à la circonférence de la poulie

$$R = 500 - 21,2 = 478^{\text{gr}}, 8.$$

On voit que les frottements forment, comme je l'ai dit, une faible partie de cette résistance. Les titres des colonnes du tableau ci-joint indiquent clairement la nature des nombres qu'elles renferment; je n'ai à m'arrêter un instant que sur la détermination du rayon moyen et de la vitesse moyenne des ailettes.

Désignons par  $\rho_0$  la pression exercée sur l'unité de surface par une veine d'air de section indéfinie, dont la vitesse relative est 1 mètre par seconde et la densité  $\delta$ , par  $l$  la largeur des ailes, par  $\Omega$  la vitesse angulaire. Pour les très-petites vitesses dont il s'agit ici (\*), on a très-sensiblement

$$\rho = \alpha \rho_0 \delta l \int_{r_0}^{r_1} (\Omega r)^2 dr = \alpha \rho_0 \delta l \Omega^2 \frac{1}{3} (r_1^3 - r_0^3).$$

---

(\*) Il semble que je commette ici à la fois une erreur de principe et de nombres en posant  $\rho = \alpha r^2$ , alors que ces expériences mêmes démontrent qu'on a pour cet appareil  $\rho = \alpha r^{1,954}$ . Le lecteur pourra s'assurer que l'erreur numérique qui résulte de la substitution de  $\gamma = 2$  à  $\gamma = 1,954$  est si petite que j'ai pu me la permettre sans scrupule pour la facilité du calcul.

En divisant par  $(r_1 - r_0)$  et en remarquant que  $2l(r_1 - r_0) = S$ ,  $S$  étant la surface totale des deux ailes, il vient

$$\rho = \alpha \rho_0 S \gamma \frac{1}{5} (r_1^2 + r_1 r_0 + r_0^2) \Omega^2.$$

Dans cette équation, il est visible que  $\left(\frac{r_1^2 + r_1 r_0 + r_0^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$  est le vrai rayon moyen par rapport à la résistance totale éprouvée par les ailes. Par conséquent en multipliant la valeur de  $R$  ou

$$R = \frac{1}{2} (P_1 - P_0) - \frac{1}{2} E_0 (P_1 + P_0)$$

par le rapport de ce rayon moyen  $r_m$  au rayon de la poulie et en divisant le produit par  $S$ , on a la résistance par mètre carré. Pour déterminer rigoureusement et pratiquement la circonférence (et le diamètre) de la poulie  $P$ , j'ai mesuré exactement la longueur de la ficelle continue du dynamomètre, après avoir convenablement chargé les plateaux, puis j'ai compté le nombre de tours que faisait la poulie  $P$  lorsque la ficelle continue faisait un nombre donné de révolutions totales autour des diverses poulies. Par cette méthode, le petit accroissement de rayon de la poulie dû à l'addition de la ficelle se trouve déterminé implicitement.

J'ai trouvé ainsi  $0^m,05342$  pour le rayon de la poulie et  $0^m,441$  pour le rayon moyen réel des ailettes. La surface de celles-ci était  $0^m^2,104035$ . Il venait donc pour la valeur de  $\rho$

$$\rho = \frac{R}{0,104035} \cdot \frac{0,05542}{0,441} = 1,164 R.$$

Je discuterai à la fin du paragraphe troisième les résultats des expériences, en même temps que ceux qu'ont donnés les appareils que je décrirai. Je crois cependant, avant de terminer, devoir montrer quel était le degré remarquable de sensibilité de l'instrument dont je viens de parler.

1° Lorsque l'excès de charge  $(P_1 - P_0)$  s'élevait à 4 kilogrammes et que la somme des charges était portée jusqu'à 10 kilogrammes, une addition de

5 grammes sur le plateau moteur se manifestait par un accroissement sensible de la vitesse des ailettes. Je pense que rien ne saurait mettre mieux en relief l'avantage que présentait ici la faculté de pouvoir prolonger en quelque sorte indéfiniment une même expérience. On voit, en effet, qu'au cas particulier l'addition d'un poids de 5 grammes n'augmentait la charge motrice que de  $\frac{5}{4000} = \frac{1}{800}$ , et que par conséquent l'effet d'un aussi faible accroissement eût échappé à l'observation, si l'on n'avait pas pu faire durer l'opération un nombre de secondes suffisant.

2° Pour étudier l'influence des températures sur la résistance de l'air, j'avais d'abord essayé de placer alternativement l'appareil dans deux chambres contiguës, tenues, l'une à la plus basse température possible, l'autre, au contraire, chauffée autant que possible. Je remarquai bientôt, à mon grand étonnement, qu'alors même que j'opérais à une température rigoureusement semblable dans les deux chambres, les résultats n'étaient pas les mêmes dans l'une que dans l'autre, quoique parfaitement réguliers dans chacune. La raison de cette singularité apparente reposait sur la structure particulière de l'une des chambres, structure en vertu de laquelle se trouvait, paraît-il, modifiée la direction des courants d'air excités par le mouvement des ailes.

TABLEAU I. — Première série d'expériences.

CHARGES					BAROMÈTRE.	TEMPÉRATURE.	DENSITÉ.	VITESSES	
TOTALE	MOTRICE	EMPLOYÉE PAR LA RESISTANCE						EXPE- RIMENTALE.	CALCULÉE
P.	<i>p</i>	des axes <i>f</i>	des ailes R	par mètre carré <i>ρ</i>					
7656	1180	222	958	558	0 <sup>m</sup> ,7524	7,5	1,215	1,669	»
7656	1180	222	958	558	0,7519	27,5	1,151	1,745	»
5576	1120	162	958	558	0,7524	7,5	1,215	1,659	»
5576	1120	162	958	558	0,7519	27,5	1,151	1,754	»
1456	1000	42	958	558	0,7524	7,5	1,215	1,674	»
956	500	28	472	275	0,7558	8,	1,216	1,155	1,1546
956	500	28	472	275	0,7519	27,5	1,151	1,205	1,1985
1456	1000	42	958	558	0,7558	8,	1,216	1,669	1,6580
1456	1000	42	958	558	0,7519	27,5	1,151	1,754	1,7206
2456	2000	72	1929	1125	0,7524	8,	1,211	2,568	2,5725
2456	2000	72	1929	1125	0,7519	27,5	1,151	2,508	2,4620
5456	5000	101	2899	1688	0,7558	8,	1,216	2,917	2,9228
5456	5000	101	2899	1688	0,7519	27,5	1,151	3,055	3,0555
4456	4000	150	5870	2255	0,7558	8,5	1,214	3,379	3,3884
4456	4000	150	5870	2255	0,7519	26,5	1,155	3,507	3,5072

## DEUXIÈME SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

PRESSION CONSTANTE ET DENSITÉ VARIABLE (*deuxième appareil*).

Cet appareil différait du précédent : 1° en ce que la roue à ailettes était horizontale et que ses rayons étaient presque doubles en longueur; 2° par la construction du dynamomètre. Quelques explications sont nécessaires, quant à ce dernier.

Figure 2. La partie centrale des rayons du moulinet est fixée solidement à l'extrémité supérieure d'un cylindre en bois creux CC, que traverse à frottement très-doux l'arbre vertical en fer poli AA; à l'extrémité inférieure du cylindre CC est fixé un levier SS, terminé par un arc de cercle en bois, concentrique avec l'axe; un anneau de fer, fixé à l'arbre, empêche le cylindre du moulinet de glisser le long de l'axe vertical. Dans ces conditions, il est évident que si, à l'aide de la manivelle M, on faisait tourner l'axe AA, le moulinet ne serait entraîné que par le très-faible frottement du cylindre CC contre l'axe, auquel ferait bientôt équilibre la résistance de l'air aux ailettes; le mouvement du moulinet, très-lent d'ailleurs, deviendrait régulier, quel que soit celui qu'on donnerait à l'axe. Une disposition très-simple permettait de faire communiquer la vitesse angulaire de l'axe aux ailettes et de mesurer l'effort nécessaire pour cela. Un levier LL en bois, formé de deux pièces assemblées par de forts boulons et serrant l'arbre de façon à être entraînés par lui, porte à son extrémité une petite poulie dont la circonférence externe se trouve précisément à la même distance de l'axe AA que le secteur de cercle S'. Une ficelle, attachée au secteur, passe par-dessus cette poulie, se dédouble pour passer par-dessus les deux poulies verticales 2, 2, descend pour passer par-dessus deux autres poulies, 3, 3, et enfin par-dessus une troisième 4. Les axes des trois poulies 3, 3, 4 sont solidement fixés à un manchon de bois qui porte à sa partie inférieure le plateau à poids P, et qui est traversé à frottement très-doux (presque nul) par l'axe AA. Il résulte visiblement de

cette disposition : 1° que les tensions des deux brins dédoublés de la ficelle sont égales; 2° que quand on fait tourner l'axe vertical AA, la ficelle attachée au secteur S' se tend, entraîne le moulinet et *soulève* le plateau P, si la vitesse et, par suite, la résistance de l'air deviennent suffisantes. Il suit de là que le poids du plateau et de la charge qu'on y pose fait alors juste équilibre à cette résistance de l'air, rapportée au rayon de l'arc de cercle SS'.

Avec cet appareil, supposé bien construit, la résistance de l'air est donc donnée directement et sans aucune correction de frottement accessoire, par le produit :  $P \frac{L}{r_m}$ , P étant la charge totale du plateau, L la longueur du levier, et  $r_m$  le rayon moyen réel des ailettes. Le rayon maximum était 1<sup>m</sup>,1375; le rayon minimum était 0<sup>m</sup>,9325. En appliquant la méthode de calcul, ici tout à fait correcte, du paragraphe précédent, et posant  $\rho = \alpha v^2$ , on a pour le rayon moyen 1<sup>m</sup>,0567. La surface des ailettes était comme précédemment 0<sup>m</sup>²,104035. On avait L=0<sup>m</sup>,18 et par suite  $p = P \frac{0,18}{1,0567}$  pour la résistance opposée à l'extrémité du rayon moyen.

TABLEAU II. — Deuxième série d'expériences.

CHARGES		RÉSISTANCE de l'air par mètre carré.	BAROMÈTRE.	TEMPÉRATURE.	DENSITÉ.	VITESSES	
sur le plateau P.	a l'extrémité du rayon p.					EXPÉ- RIMENTALE.	CALCULÉE.
660	112	1081	0,7565	7,5	1,255	5,161	5,161
660	112	1081	0,7545	54,5	1,140	5,581	5,297
1000	170	1657	0,7565	6,9	1,255	5,864	5,8756
1000	170	1657	0,7545	55,4	1,144	4,126	4,045
2000	541	5275	0,7565	6,9	1,255	5,450	5,4574
2000	541	5275	0,7545	51,2	1,152	5,705	5,671
5000	511	4912	0,7565	6,5	1,258	6,650	6,6504
5000	511	4912	0,7545	29,8	1,157	6,980	6,906
4000	681	6550	0,7565	6,7	1,256	7,667	7,6524
4000	681	6550	0,7545	29,0	1,160	8,914	7,9545

## TROISIÈME SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

PRESSION CONSTANTE, DENSITÉ VARIABLE (*troisième appareil*).

Une même critique générale s'applique aux deux appareils dont nous venons d'indiquer les résultats, et frappe tous ceux de ce genre, dont divers observateurs se sont servis pour déterminer les lois de la résistance de l'air, et se servent encore journellement pour graduer ou titrer les moulinets employés à mesurer la vitesse du vent.

Par la construction même de ces sortes d'instruments, il est évident que ce n'est pas la résistance seule et proprement dite de l'air qu'ils mesurent. Ils constituent de fait des ventilateurs à force centrifuge ; leur mouvement détermine un courant d'air dans la direction des rayons, et le travail mécanique dépensé pour maintenir ce mouvement ne dérive qu'en partie, plus ou moins grande, du choc de l'air. Je dis en partie : supposons en effet que les ailes, au lieu d'être limitées en longueur, aillent jusqu'au centre ; la couche d'air qui les recouvre prendra vers le centre, et pour ainsi dire *sans choc*, une vitesse très faible ; en vertu de la force centrifuge, cette couche avancera vers l'extrémité de l'aile, en prenant *graduellement* une vitesse de plus en plus grande, ayant pour expression, en chaque point,  $\omega r$ . Dans la réalité, puisque les ailes ne commencent qu'assez loin du centre, l'air prend, *par choc subit*, la vitesse interne  $\omega r_i$  et en s'avancant vers l'extrémité, prend graduellement la vitesse maxima  $\omega r_c$ . Sans entrer dans aucune autre considération mathématique, il résulte pour nous de cette discussion que ces instruments, pour de mêmes vitesses absolues, doivent donner des coefficients de résistance d'air qui varient en apparence avec la distance des ailes à l'axe de rotation et qui approchent d'autant plus de la valeur correcte que le rayon interne, où commence l'ailette, est plus grand par rapport à la longueur de celle-ci. Si nous comparons les résultats donnés par les appareils (1) et (2), dont les ailettes étaient les *mêmes* et qui ne différaient que par la grandeur des rayons, nous voyons que pour de mêmes vitesses, ils indiquent des résistances très différentes. — La réflexion critique que je présente



n'atteint pas, il est vrai, les conclusions que nous pouvons tirer des expériences quant à l'influence de la température et de la densité de l'air ; j'ai cru néanmoins devoir chercher à construire un appareil qui fût à l'abri des inconvénients dont je viens de parler, un appareil où la résistance de l'air fût bien due à un choc simple, normal aux surfaces. Celui que je vais décrire atteint entièrement ce but.

(Figure 3.) CC cylindre creux en bois, traversé à frottement très doux par l'axe AA, portant les deux bras ou rayons parallèles R, R et, à son extrémité, la poulie P.

$a, a$ , ailettes en bois léger et très mince, solidement attachées, au milieu, à de petits axes en acier très poli dont les extrémités traversent à frottement doux les rayons.

$P'$  poulie égale à P, calée sur l'arbre AA. Une ficelle continue passe sur les deux poulies supérieures et sur les deux poulies inférieures  $p, p'$ , aux fourches desquelles sont suspendus des plateaux de balance.

Il résulte visiblement de la disposition précédente, que si l'on fait tourner l'axe AA dans le sens de la flèche  $ff$ , en retenant de force le plateau de  $p'$ , la poulie P et les bras tourneront en sens inverse ; mais les ailettes, parfaitement libres de tourner sur leurs axes, ne prendront aucune position stable et déterminée. Voici comment elles se trouvaient maintenues dans une position voulue et forcée de rester parallèles à elles-mêmes, pendant que les bras tournaient autour de l'axe AA.

S, S' et T, T' poulies à gorges égales fixées aux extrémités de deux cylindres en bois, concentriques, ayant assez de jeu pour tourner aisément l'un sur l'autre. L'axe AA traverse librement le cylindre interne. A l'extrémité des axes des ailettes sont fixées des poulies à gorges U, U, aussi égales que possible à S et T. Une ficelle continue passe sur U et T, sur U et S. De même des ficelles passent sur les poulies T' et S' et sur deux petits axes à gorges Z, Z. Il est visible qu'en faisant tourner ces axes Z, Z, on peut donner aux ailettes telle direction voulue ; il est clair de plus que comme les poulies S', T' sont tenues immobiles par les ficelles passant sur Z, Z, les poulies U, U et par suite les ailettes seront maintenues aussi par leurs ficelles respectives. Si U, S et U, T étaient parfaitement égales, il est clair que les ailettes garderaient indéfiniment leurs positions. Une telle égalité est de fait irréalisable ; mais à l'aide

des clefs qui terminent les axes  $Z, Z$ , on parvient facilement, avec un peu d'exercice, à corriger les petits dérangements qu'éprouvent les ailettes pendant qu'elles sont entraînées autour de l'axe  $AA$  par suite du mouvement de la manivelle  $M$ , et à les maintenir parallèles à elles-mêmes, et parallèles entre elles, quelque rapide que soit le mouvement du moulinet.

De ce parallélisme des ailettes pendant leur mouvement autour de l'axe  $AA$ , il résulte que leur mouvement peut être considéré comme formé de deux autres, dont les directions sont à angle droit, l'une normale, l'autre parallèle aux ailes. La résistance de l'air dans ce dernier sens est presque nulle, en raison du très peu de surface du tranchant; et la principale, sinon unique, résistance est normale aux ailettes. Pendant que l'appareil fonctionnait, il se produisait effectivement deux courants d'air, parallèles entre eux, l'un au-dessus, l'autre au-dessous de l'axe  $AA$ , l'un allant de gauche à droite, l'autre de droite à gauche, lorsque les ailettes étaient tenues verticalement. — On voit aussi que la vitesse des ailettes dans les deux directions indiquées ne pouvait être constante; les ailes étant toujours supposées verticales, la vitesse en direction horizontale était nulle au moment où les rayons  $R, R$ , étaient horizontaux; elle était à son maximum, lorsque ces rayons étaient verticaux. En désignant par  $\Omega$  la vitesse angulaire, par  $\theta$  l'angle que fait le rayon avec l'horizon, cette vitesse était à chaque instant:  $V = R\Omega \sin \theta$ .

Il est toutefois facile de déterminer la vitesse moyenne effective pour un quart de révolution, et par suite pour la révolution entière. Pour les vitesses dont il s'agit, nous pouvons en effet représenter la résistance par une équation de la forme

$$\rho = \alpha V^\gamma = \alpha (\Omega R \sin \theta)^\gamma;$$

et nous voyons de plus, d'après l'ensemble des expériences précédentes, qu'on a très sensiblement:  $\gamma = 2$ .

Il vient par suite

$$\rho = \alpha (\Omega R \sin \theta)^2,$$

et par conséquent, pour l'expression du travail mécanique exécuté par les ailettes dans le sens normal à leur surface

$$df = \rho dx = \alpha (\Omega R \sin \theta)^2 dx.$$

Mais d'une part, en désignant le temps par  $t$ , on a:  $\theta = \Omega t$ , et, d'autre

part, la valeur de  $x$ , ou de l'espace parcouru en sens horizontal, est visiblement :  $R \cos \theta$ , d'où :  $dx = - R \Omega \sin \Omega t dt$ .

On a donc

$$f = \int \frac{1}{2} dx = \int - \frac{1}{2} R \Omega^2 \sin^2 \Omega t dt.$$

L'intégrale, prise entre  $\theta = 0$  et  $\theta = \frac{1}{2} \pi$  est

$$f = \frac{2}{5} \alpha R^2 \Omega^2.$$

Si nous divisons ce travail  $f$  par  $R$ , ou par l'espace parcouru, nous avons la valeur de la résistance : elle s'élève donc aux deux tiers de celle qu'éprouveraient les ailettes si la vitesse gardait la même valeur  $\Omega R$ .

Les résistances autres que celle de l'air ont été déterminées comme pour l'appareil (1). Le poids de tout l'ensemble des pièces mobiles portant les ailettes était de 2499 grammes ; avec 2000 grammes de charge motrice, et par suite avec une charge totale de 4499 grammes les ailettes faisaient 200 tours en 162 secondes. En plaçant 5000 grammes sur chaque plateau, il fallait ajouter 2240 grammes sur le plateau moteur, pour rétablir la vitesse de 200 tours en 162 secondes. On a donc ici, en désignant par  $R$  la résistance constante de l'air et par  $F_0, F_1$ , celle des tourillons, etc., avec les charges successives 4499 et  $2 \times 5000 + 2240 + 2499 = 14739$ ,

$$\begin{aligned} R + F_0 &= 2000, \\ R + F_1 &= 2240, \end{aligned}$$

d'où

$$F_1 - F_0 = 2240 - 2000 = 240 \text{ gr. ;}$$

et comme on a encore très approximativement :  $F_1 = F_0 \frac{14739}{4499}$ , il vient

$$F_0 \left( \frac{14739}{4499} - 1 \right) = 240 \text{ gr.,}$$

d'où

$$F_0 = \frac{1}{2} 105^{\text{gr}},44 = 52^{\text{gr}},7.$$

Je divise par 2, parce que, comme avec l'appareil (1), la moitié des charges, passives et motrices, agit sur l'axe des ailettes et que l'autre moitié agit sur l'axe mu par la manivelle. On voit que tout l'ensemble des résistances autres que celle de l'air ne s'élève qu'à

$$\frac{52,7}{\frac{1}{2} 2000} = 0,0527,$$

c'est-à-dire à un peu plus du cinquantième de la charge totale qui donne lieu aux frottements.

TABLEAU III. — *Troisième série d'expériences.*

CHARGES					BAROMÈTRE.	TEMPÉRATURE.	DENSITÉ.	VITESSES	
TOTALE	MOTRICE	EMPLOYÉE PAR LA RÉSISTANCE						EXPÉ- RIMENTALE.	CALCULÉE.
P.	p.	des axes <i>f.</i>	des ailes <i>R.</i>	par mètre carré <i>p.</i>					
2999	500	70	450	212	0,7529	7,8	1,215	1,628	1,6277
2999	500	70	450	212	0,752	52,8	1,112	1,715	1,7114
5499	1000	82	918	452	0,7529	7,8	1,215	2,604	2,5255
5499	1000	82	918	452	0,752	52,8	1,112	?	2,6552
15499	1000	516	684	557	0,7529	7,8	1,215	2,244	2,1295
15499	1000	516	684	557	0,752	51,8	1,116	?	2,2548
4499	2000	105	1895	955	0,7529	7,8	1,215	5,879	5,8407
4499	2000	105	1895	955	0,752	29,7	1,125	4,145	4,0145
14759	2240	545	1895	955	0,7529	7,8	1,215	5,891	5,8409
14759	2240	545	1895	955	0,752	27,7	1,151	4,228	5,9987
15499	2000	516	1684	829	0,7529	7,8	1,215	5,696	5,5875
15499	2000	516	1684	829	0,752	50,9	1,119	5,977	5,7582
5499	5000	129	2871	1414	0,7529	7,5	1,214	4,855	4,8854
5499	5000	129	2871	1414	0,752	28,1	1,129	5,150	5,0944
15499	5000	516	2684	1522	0,7529	7,8	1,215	4,686	4,6981
15499	5000	516	2684	1522	0,752	29,8	1,119	4,987	4,9209
6499	4000	152	5848	1715	0,7529	7,5	1,214	5,458	5,4581
6499	4000	152	5848	1715	0,752	27,7	1,151	?	5,6859
15499	4000	516	5684	1815	0,7529	7,8	1,215	5,576	5,6452
15499	4000	516	5684	1815	0,752	29,1	1,126	5,786	5,8917
16759	4240	592	5848	1715	0,7529	7,8	1,215	5,498	5,4587
16759	4240	592	5848	1715	0,752	51,0	1,119	5,917	5,7196

Discussion des résultats donnés par les expériences précédentes.

Les titres des trois tableaux numériques relatifs aux expériences que je viens de décrire, indiquent clairement la nature des nombres inscrits à chaque colonne. Une de celles-ci seulement exige des éclaircissements : c'est celle des *vitesse calculées*.

1°. Les vitesses répondant aux expériences sur l'air froid ont été calculées comme il suit. Soient  $\rho_0, \rho_1, V_0, V_1$ , les résistances et les vitesses correspondantes dans deux expériences consécutives. Posons

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\right) = \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^\gamma \quad \text{d'où} \quad \gamma = \frac{\log \rho_0 - \log \rho_1}{\log V_1 - \log V_0}.$$

En calculant ainsi les valeurs de  $\gamma$  pour toutes les paires de nombres successifs et en prenant la moyenne, on trouve

première série . . . . .	$\gamma = 1,954$
deuxième série . . . . .	$\gamma = 2,044$
troisième série . . . . .	$\gamma = 1,728$ .

Les trois équations

première série . . . . .	$v = 1,155 \left(\frac{\rho_1}{472}\right)^{\frac{1}{1,954}}$
deuxième série . . . . .	$v = 5,161 \left(\frac{\rho_1}{112}\right)^{\frac{1}{2,044}}$
troisième série . . . . .	$v = 1,628 \left(\frac{\rho_1}{450}\right)^{\frac{1}{1,728}}$

ont donné alors les vitesses calculées.

2°. Les vitesses répondant aux expériences sur l'air chaud ont été établies de la manière suivante. Soient  $\varphi_0, \varphi_1$ , les densités pour deux expériences faites à froid et à chaud, avec une même charge dynamométrique et par suite avec

une même résistance de l'air. J'ai posé

$$\begin{aligned} \text{première série} & \dots \dots \dots v = V_0 \left( \frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^{\frac{1}{1,954}} \\ \text{deuxième série} & \dots \dots \dots v = V_0 \left( \frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^{\frac{1}{2,044}} \\ \text{troisième série} & \dots \dots \dots v = V_0 \left( \frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^{\frac{1}{1,723}} \end{aligned}$$

Dans l'Introduction même de ce travail, j'ai dit que je ne donne que comme approximatifs les résultats fournis par les trois séries d'expériences que je viens de décrire. Lorsqu'on suit de l'œil les nombres qui expriment les vitesses expérimentales et les vitesses calculées répondant aux mêmes charges dynamométriques, on a en effet lieu d'être frappé de l'*irrégularité* des différences qui existent entre eux. Je crois devoir expliquer avec soin cette irrégularité, parce que le lecteur n'en trouverait pas la clef dans la seule description des expériences et des instruments. Les causes de l'inexactitude sont de deux genres très distincts et presque opposés : 1° défaut de sensibilité des appareils d'observation et irrégularité dans leur fonctionnement ; 2° variation des conditions où sont placés les appareils et dans les phénomènes à observer eux-mêmes.

Il m'est facile, d'après le long usage que j'en ai fait, d'évaluer l'exactitude relative de mes instruments. Le premier était d'une sensibilité excessive : avec une charge motrice de 4000 grammes, une addition de 5 grammes produisait une variation très appréciable dans la vitesse des ailettes. Le troisième appareil se place immédiatement après ; toutefois, son maniement exposait à plus de chances d'erreur, en raison de l'attention excessive qu'il fallait pour maintenir le parallélisme des ailettes. Le second appareil laissait plus à désirer quant à l'exactitude, parce qu'il n'était pas facile à la personne qui faisait mouvoir l'axe des ailes de maintenir le poids dynamométrique ou moteur entre ses limites de course.

Les raisons précédentes ne suffisent pas toutefois, et même à beaucoup près, pour rendre compte des irrégularités dont je parle. D'autres sont intervenues, qui dépassaient mes prévisions et dont je n'avais pas même soupçonné

l'importance. J'ai déjà dit que dans une expérience faite sur l'air froid, le seul fait du déplacement du premier appareil d'un appartement dans un autre avait suffi pour produire des différences notables dans les résultats. Quoique l'appartement dans lequel je travaillais fût assez grand et fût maintenu autant que possible dans le même état, il se peut pourtant que quoique mes aides et moi nous nous tinssions toujours aussi loin que possible des pièces en mouvement, il se peut, dis-je, et il est même très probable que les courants d'air en toutes directions que le mouvement des ailes faisait naître dans l'air de la chambre fussent souvent modifiés à mon insu, et qu'ainsi la résistance du fluide au mouvement du moulinet fût modifiée elle-même, dans une certaine mesure. L'exposant  $\gamma$  qui dans la première série d'essais avait pour valeur moyenne 1,954, s'élevait à 2,044 avec le second appareil. Ce n'est guère qu'à des raisons comme celles dont je parle, qu'il m'est possible d'attribuer cette différence. J'ai expliqué au commencement du troisième paragraphe les motifs pour lesquels j'ai construit un appareil dont les ailes étaient douées d'un mouvement rectiligne ; mais cette substitution, heureuse en un sens, a donné lieu à une autre source d'erreur. J'ai dit que deux courants d'air énergiques en sens contraire se produisaient ici en dessus et en dessous de l'axe du moulinet. Il résultait de là que les ailettes ne frappaient plus de l'air en repos, mais au contraire de l'air ayant déjà une vitesse dans le même sens. C'est là, je pense, ce qui explique la différence assez notable de l'exposant 1,728 et de 1,954, 2,044 obtenus avec les deux autres. Les plus fortes irrégularités, et les plus fortes divergences entre les nombres expérimentaux et les nombres calculés, sont relatives aux expériences faites, avec de mêmes charges, sur de l'air froid et de l'air chaud. Les raisons des irrégularités reposent ici sur un fait que j'aurais pu annuler complètement, si j'avais soupçonné la grandeur de son influence. Je veux parler de l'inégalité des températures dans les parties supérieures et inférieures de l'appartement, chauffé par un calorifère. Le mouvement des ailettes, en produisant le mélange plus ou moins parfait des couches, donnait ici évidemment lieu à un travail mécanique accessoire, positif ou négatif, selon les cas, et la résistance de l'air au mouvement des ailettes devenait une fonction de ce travail, essentiellement variable en grandeur. Pour éviter un pareil défaut, j'eus dû renfermer

mes appareils dans une enceinte fermée de toutes parts et isolées au milieu de l'appartement où j'expérimentais.

En somme et en prenant les trois séries d'expériences précédentes pour ce qu'elles sont, nous voyons pourtant un résultat dominant qui en ressort. L'accroissement de vitesse qui résulte, avec une même charge motrice, de la diminution de densité de l'air par suite de son échauffement, cet accroissement, dis-je, est toujours un peu plus fort en réalité que celui qu'indique le calcul partant de la variation des densités : ce qui nous prouve que la résistance de l'air *ne s'accroît nullement* par le seul fait de l'élévation de température, indépendamment du changement des densités. Des expériences beaucoup plus précises étaient nécessaires pourtant, je n'hésite pas à le dire, pour mettre cette conclusion à l'abri de toute critique. Celles que je vais citer satisferont, je l'espère, complètement le lecteur en ce sens.

#### QUATRIÈME SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

##### DENSITÉS CONSTANTES. — TEMPÉRATURES VARIÉES.

Pour constater si la résistance des gaz est une fonction immédiate de température, le procédé à la fois le plus simple et le plus naturel semble être d'opérer sur une même masse de gaz, tenue à volume et par suite à densité invariables, et de mesurer la résistance, en faisant dans ces conditions varier la température sur la plus grande échelle possible du thermomètre. Telle est aussi la première idée qui me soit venue à l'esprit, lorsque j'ai entrepris les expériences relatées dans ce travail; le lecteur peut-être sera même étonné que je ne me sois pas borné à cette méthode. Je n'ai pas tardé toutefois à reconnaître que l'application, sous forme correcte, de cette méthode présente des difficultés très grandes, des difficultés telles que j'avais fini par la croire impossible. Ce n'est qu'après de longues réflexions et après de nouveaux efforts, que je suis parvenu à vaincre les obstacles, et à éliminer des erreurs qui, par leur apparence de régularité et de constance, étaient de nature à



fausser les conclusions d'un physicien moins sceptique que je ne le suis devenu à l'égard de mes propres travaux.

Je vais décrire minutieusement et, je l'espère, clairement, quoique sans figure, l'appareil auquel j'ai eu recours, et la manière de le faire fonctionner. Ce dernier point est capital et ne saurait trop fixer l'attention du lecteur.

Dans une bombonne de verre, fermée hermétiquement par un bouchon de caoutchouc vulcanisé, se trouve suspendue à un fil d'acier trempé au bleu, une lame de verre de  $0^m,4015$  de longueur sur  $0^m,0266$  de largeur, pesant  $101^sr,85$ . Le point d'attache du fil à la lame est placé de telle sorte que ce *pendule* ou *balancier* de grande surface (relative) se tient horizontalement, un peu plus bas que l'*équateur* de la bombonne. L'extrémité supérieure du fil est fixée au centre d'un tube de cristal presque capillaire, traversant à frottement doux le bouchon de caoutchouc et coudé à angle droit à sa sortie. Par une seconde ouverture percée dans le bouchon pénètre un tube de verre doublement recourbé en siphon, dont l'une des doubles branches est à moitié remplie de mercure. Ce manomètre, à air libre, fait ainsi connaître à chaque instant les variations de pression et par suite de température du gaz renfermé dans la bombonne. La bombonne est placée sur trois piliers de bois élevés, dans l'intérieur d'une cage de verre très spacieuse, d'où son col seul sort à l'air libre. L'air de cette cage peut être chauffé à l'aide de deux becs à gaz et peut être agité vivement à l'aide d'une plaque de carton attachée à une tige de verre sortant par le plancher de la cage. Cette disposition permet d'obtenir une égalité parfaite de température dans toutes les parties de la bombonne, qui, avec son manomètre à mercure, fonctionne ainsi comme un immense thermomètre à air. Cette égalité est une condition *sine qua non* de l'exactitude des expériences; les courants d'air qui autrement s'établissent dans la bombonne altèrent profondément le mode d'oscillation du pendule. J'insiste formellement sur cette remarque.

Le lecteur l'aura compris dès l'abord, c'est par l'observation rigoureuse du *mode* d'oscillation du pendule que j'ai déterminé les variations et la grandeur de la résistance du gaz contenu dans la bombonne. Pour faire osciller le pendule, il suffit, on l'aura compris aussi, de faire aller alternativement dans un sens et dans l'autre le coude du tube de cristal à la branche verticale

duquel est attaché le fil de suspension ; mais la question était d'arriver ici à un mode d'expérimentation régulier, donnant des résultats rapides et précis, et n'exigeant que dans la moindre proportion possible l'emploi de l'analyse mathématique qui, au cas particulier, est des plus compliquées, quoiqu'aussi des plus intéressantes et des plus rigoureuses. La méthode à laquelle je me suis arrêté est, je puis le dire, une véritable *trouvaille*, au point de vue expérimental.

Loin d'être variable et arbitraire, la course de la tige horizontale de cristal est constante et limitée. Dans ce but, à cette tige qui, autrement, serait lourde et fragile si elle était trop longue, se trouve liée solidement une baguette de bois, légère et résistante, d'environ 0<sup>m</sup>,85 de longueur, dont l'extrémité libre repose sur une glissière horizontale munie à ses deux bouts d'arrêts verticaux contre lesquels vient butter la baguette. Par cette disposition, cette baguette, ou *levier moteur*, décrit, en allant d'un arrêt à l'autre un certain angle constant et connu, que, par abréviation, j'appellerai *angle moteur* : on va voir à l'instant la convenance de cette dénomination. Supposons le levier appuyé à l'un des arrêts, et le balancier ou pendule en repos ; pour faciliter ma description, je suppose (ce qui est d'ailleurs fort inutile) que le levier et le pendule, *en repos*, se trouvent dans un même plan vertical. Poussons vivement le levier moteur contre l'arrêt opposé. Par suite de la torsion du fil de suspension qui résulte de là, le pendule va se mettre en mouvement, décrire avec une vitesse croissante un angle égal à l'angle moteur, franchir cette limite en vertu de l'impulsion acquise, perdre graduellement sa vitesse et s'arrêter, pour revenir sur ses pas, par suite de la torsion en sens inverse qu'a reçue le fil de suspension. A ce moment précis, ramenons vivement le levier moteur à son arrêt initial. La torsion du fil d'acier va être plus grande cette fois que la première ; elle aura pour mesure angulaire la somme de l'angle moteur et de l'angle qu'avait décrit le pendule en vertu de l'impulsion acquise. La vitesse maxima qu'acquerra le pendule par la détorsion du fil sera donc plus grande que précédemment et l'angle décrit par suite de l'impulsion acquise sera par conséquent plus grand aussi. En répétant ce mouvement rapide de va-et-vient du levier moteur à chaque fois que le pendule arrive à l'extrémité de sa course, on fera ainsi croître de plus

en plus l'angle total décrit, ou l'amplitude des oscillations. Il est visible que cet accroissement continuerait indéfiniment : 1° si l'élasticité du fil d'acier était parfaite ; 2° et si la résistance du gaz n'existait pas. Je montrerai de suite que le défaut d'élasticité parfaite de l'acier n'entre que pour peu de chose dans la question. C'est donc la résistance du gaz exclusivement qui s'oppose à l'accroissement indéfini de l'amplitude des oscillations ; grâce à cette résistance, en effet, l'amplitude arrive très rapidement à une valeur parfaitement constante ; d'où il suit que l'amplitude des oscillations peut servir à trouver la valeur de la résistance. En alignant l'œil avec la direction du pendule arrivé à l'extrémité de ses courses, on lisait facilement et exactement l'amplitude de l'oscillation sur une bande de papier sous-divisée fixée à l'équateur de la bombonne. Avant de donner l'analyse mathématique du phénomène dans son développement complet, je présente quelques remarques faciles à saisir, et essentielles.

Il est clair en tout premier lieu que pour que l'amplitude maxima des oscillations restât rigoureusement invariable, il faudrait, absolument parlant, que pendant l'instant infiniment petit où le pendule s'arrête à l'extrémité de sa course, le levier moteur fût amené *instantanément* aussi d'un de ses arrêts à l'autre. Il va de soi que cette condition ne peut être remplie telle quelle. Il est, d'une part, impossible de saisir de l'œil l'instant où le pendule s'arrête pour rebrousser chemin ; et d'autre part, il est impossible aussi de faire passer instantanément le levier moteur d'un arrêt à l'autre. Toutefois cela est fort heureusement inutile. Je me suis assuré dès l'abord, en altérant et exagérant à dessein les fautes commises contre ces deux conditions, que l'altération de l'amplitude des oscillations est renfermée dans des limites très rapprochées. L'amplitude des oscillations étant, par exemple, de 360 degrés, j'étais arrivé, par l'exercice, à faire passer le levier moteur d'un arrêt à l'autre pendant que le pendule décrivait tout au plus les cinq premiers ou les cinq derniers degrés de sa course totale. Telle était l'exactitude moyenne de l'expérience ; mais avec beaucoup d'attention, j'ai pu la pousser bien plus loin, à faire aller le levier moteur d'une extrémité à l'autre de sa course avant que le pendule arrivé au repos ait bougé d'une façon appréciable à l'œil le plus exercé. Ce surcroît de précision ne modifiait pas d'une façon visible l'amplitude maxima.

La difficulté principale était bien plutôt de lire correctement l'amplitude réelle sur les divisions de l'équateur de la bombonne que de remplir les deux conditions théoriques indiquées.

Je passe à une autre remarque des plus intéressantes et dont la vérité saute aux yeux. Il est clair que, pour tordre périodiquement le fil de suspension du pendule en amenant le levier moteur d'un de ses arrêts à l'autre, nous sommes obligés de dépenser une certaine somme de travail mécanique des plus faciles à évaluer comme nous verrons de suite. D'un autre côté, la résistance du gaz, qui s'oppose au mouvement du pendule et qui limite sa course, donne aussi lieu à un travail mécanique. Cela posé, il est évident par soi-même : que quand l'amplitude des oscillations est devenue constante, il y a égalité parfaite entre le travail dépensé par le levier moteur et le travail engendré par la résistance du gaz; ou pour parler d'une façon plus précise encore : que l'amplitude des oscillations ne peut être constante que quand l'égalité de ces deux travaux mécaniques est atteinte.

Cette proposition si claire relie, comme on voit, notre manière d'expérimenter au grand et si fécond principe de l'équivalence des forces. Elle va jeter une clarté remarquable sur l'analyse mathématique de l'ensemble des phénomènes en jeu dans notre expérience.

Pour donner à cette analyse la forme la plus facilement saisissable, je vais du simple au complexe; je commence par supposer nulle la résistance du gaz, ou pour mieux dire, je suppose la bombonne absolument vide. La seule force motrice en action ici c'est celle qui résulte de la torsion du fil d'acier.

Désignons par  $E$  l'effort exercé à l'extrémité du pendule, lorsque nous avons fait faire un angle  $\Theta_0$  mesuré à partir de sa position initiale de repos; supposons cet effort en général proportionnel à l'angle de torsion (nous verrons tout à l'heure que cette supposition est correcte). Il vient ainsi pour un angle quelconque  $\Theta$

$$e = E \left( \frac{\Theta}{\Theta_0} \right).$$

L'expression de la force accélératrice qui fera mouvoir le pendule, aban-

donné à lui-même après qu'on lui a fait décrire un angle  $\Theta$ , sera ( $R$  étant le rayon et  $\theta$  l'angle décrit à chaque instant)

$$R \left( \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) = \frac{E}{\mu \varrho_a} (\Theta - \theta).$$

Le poids du pendule étant  $P$ , il est facile de démontrer que pour la forme rectangulaire on a :  $\mu = \frac{P}{5g}$ , d'où

$$R \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{5gE}{P \varrho_a} (\Theta - \theta),$$

c'est-à-dire que l'accélération a lieu comme si le tiers de la masse totale du pendule se trouvait rapportée à l'extrémité du rayon. En multipliant par  $2Rd\theta$  et en intégrant de  $\theta = 0$  à  $\theta = \Theta$ , il vient

$$\frac{Rd\theta^2}{dt^2} = \frac{5gE}{P \varrho_a} (2\Theta\theta - \theta^2).$$

La vitesse maxima du pendule répond naturellement à  $\theta = \Theta$ . Si nous intégrons encore une fois, pour avoir la relation des angles décrits avec le temps, il vient :

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{2\Theta\theta - \theta^2}} = \arcsin \left( \sin \frac{\Theta - \theta}{\Theta} \right) = t \sqrt{\frac{5gE}{PR\varrho_a}}.$$

En prenant l'intégrale de  $\theta = 0$  à  $\theta = \Theta$ , on a

$$\frac{1}{2} \pi = t \sqrt{\frac{5gE}{PR\varrho_a}}.$$

C'est la durée d'une demi-oscillation. La durée d'une oscillation entière est donc

$$T = \pi \sqrt{\frac{PR\varrho_a}{5gE}}.$$

On voit qu'elle est indépendante de l'amplitude. Ce fait se vérifie, en effet

presque rigoureusement, et, chose remarquable, aussi bien dans les gaz les plus denses que dans le vide. Je reviendrai plus loin sur cette question, qui est très importante. Il résulte de là que la loi

$$e = E \frac{\Theta}{\Theta_a}$$

est correcte, car c'est la seule qui donne l'isochronisme parfait, indépendant de l'amplitude.

On sait que c'est Coulomb qui, le premier, a montré l'exactitude de cette loi d'élasticité, ainsi que l'isochronisme qui en est la conséquence, notamment en ce qui concerne les fils métalliques très fins employés par lui dans la construction de son admirable balance de torsion. Plusieurs observateurs, après Coulomb, ont vérifié cette loi. Je l'ai étendue à la flexion et à la torsion des immenses pièces de fonte et d'acier, employées en industrie dans la construction des machines à vapeur et des arbres de transmission, et c'est par ces recherches que je suis arrivé à la construction des pandynamomètres de flexion et de torsion.

Abordons maintenant le problème dans sa généralité; au lieu de faire l'expérience dans le vide, faisons-la dans un gaz dont la résistance est  $\rho_0$  pour l'unité de vitesse et pour l'unité de surface. Supposons, comme cela est du moins très approximativement vrai, que la résistance soit proportionnelle au carré des vitesses, et que l'on ait par conséquent

$$\rho = \rho_0 v^2$$

pour une vitesse quelconque  $v$ . Au lieu de faire entrer dans nos équations des vitesses angulaires et des angles parcourus, j'y introduis, pour plus de commodité, des vitesses absolues et des espaces linéaires parcourus par l'extrémité du pendule. Il suffit visiblement pour cela d'écrire

$$R\omega = R \frac{d\theta}{dt} = v \quad \text{et} \quad R\theta = x.$$

Il est facile de voir qu'avec la loi de résistance admise et avec un pendule

rectangulaire, la résistance du gaz, rapportée à l'extrémité du rayon  $R$ , est le tiers de celle qu'éprouverait le pendule, si sa surface entière était frappée avec la vitesse  $v$ . Supposons qu'on ait écarté le pendule d'une longueur  $X_0$  de sa position de repos, du *plan neutre*. Désignons par  $x$  l'espace parcouru mesuré à partir de ce point.

L'expression de la force accélératrice totale qui est ici en action est

$$\varphi = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{5gE}{P}(X_0 - x) - \left(\frac{5g}{P}\right) \frac{\rho_0 S}{3} v^2;$$

en se rappelant que  $\frac{dx}{dt} = v$ , et  $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$  et que par suite  $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{v dv}{dx}$ , il vient

$$v dv = \left( \frac{5gE}{P}(X_0 - x) - \frac{g\rho_0 S}{P} v^2 \right) dx.$$

Pour séparer les variables dans cette équation, je pose

$$\frac{5gE}{P}(X_0 - x) - \frac{g\rho_0 S}{P} v^2 = a(X_0 - x) - bv^2 = z.$$

Il vient ainsi

$$av dv = -z(dz + 2bvdv);$$

équation dont l'intégrale est

$$-bv^2 = \left( \frac{a}{2b} + z \right) - \frac{a}{2b} \log \left( \frac{a}{2b} + z \right) + c.$$

Remettant à la place de  $z$  sa valeur ci-dessus et simplifiant, on a

$$0 = 1 + 2b(X_0 - x) - \log \left( \frac{a}{2b} + a(X_0 - x) - bv^2 \right) + c.$$

Pour déterminer la constante, remarquons qu'on a  $v = 0$ , quand  $x = 0$ , d'où :

$$c = 1 + 2bX_0 - \log \left( \frac{a}{2b} + aX_0 \right).$$

D'où l'on tire, en résolvant par rapport à  $v$ , en réduisant et désignant par  $e$  la base des logarithmes népériens :

$$v^2 = \frac{a}{2b^2} \left( (1 + 2bX_0) \left( 1 - \frac{1}{e^{2bx}} \right) - 2bx \right).$$

En remettant à la place de  $a$  et de  $b$  leurs valeurs  $\frac{5gE}{P}$  et  $\frac{gS\rho_0}{P}$ , il vient enfin

$$v^2 = \frac{5PE}{2gS^2\rho_0^2} \left( \left( 1 + \frac{2gS\rho_0}{P} X_0 \right) \left( 1 - \frac{1}{e^{\frac{2gS\rho_0}{P} x}} \right) - \frac{2gS\rho_0}{P} x \right).$$

Avant de discuter cette équation et de la mettre en relation avec une autre très importante, je fais de suite remarquer qu'elle ne renferme d'inconnues que  $E$  et  $\rho_0$ . D'après les nombres que j'ai indiqués dans la description même de l'expérience, on a en effet

$$P = 0^s,10185, \quad S = 0^{m^2},0107.$$

Admettant  $g = 9^{m^2},8088$ , il vient toute réduction faite

$$v^2 = 156,0407 \frac{E}{\rho_0^2} \left( (1 + 2,06095 \rho_0 X_0) \left( 1 - \frac{1}{e^{2,06095 \rho_0 x}} \right) - 2,06095 \rho_0 x \right),$$

ou

$$v = \sqrt{156,0407 \frac{E}{\rho_0^2}} \sqrt{\left( (1 + 2,06095 \rho_0 X_0) \left( 1 - \frac{1}{e^{2,06095 \rho_0 x}} \right) - 2,06095 \rho_0 x \right)}.$$

De plus, la valeur de  $E$  est, dans chaque cas, très facile à déterminer. Puisqu'on a, dans les gaz, comme dans le vide, des oscillations de même durée totale, et que cette durée a pour valeur

$$T = \pi \sqrt{\frac{PR\Theta_a}{5gE}},$$

il vient :

$$E = \left( \frac{\pi}{T} \right)^2 \frac{PR\Theta_a}{5g},$$

ou plus simplement encore, pour  $R\Theta_a = 1$  :

$$E = \left( \frac{\pi}{T} \right)^2 \frac{P}{5g},$$



La valeur particulière de l'élasticité du fil est donc facile à connaître. Toutefois, je montrerai bientôt comment on peut l'éliminer elle-même des équations.

L'équation ( $v^2$ ) donne naturellement et par sa construction même :  $v = 0$ , pour  $x = 0$ . La valeur maxima de  $v$  ne répond pas, comme on pourrait le croire et comme il en arrive réellement dans le vide, à  $x = X_0$ , c'est-à-dire au moment où le pendule passe par le *plan neutre*, où le fil est complètement détordu. En différentiant l'équation et posant  $\frac{dv}{dx} = 0$ , on trouve pour la valeur de  $x$  qui répond au maximum de vitesse

$$x = \frac{1}{2b} \log(1 + 2bX_0),$$

valeur nécessairement plus petite que  $X_0$ . Il n'est pas inutile de montrer en passant, que le simple raisonnement conduit à ce résultat général, sans aucune analyse. Il est clair en effet que la vitesse angulaire du pendule ne peut croître que jusqu'au moment précis où la résistance du gaz est devenue égale à l'effort de *détorsion* exercé par le fil de suspension, et ce moment précède nécessairement très notablement celui où le pendule traverse le plan neutre. Après ce moment, la vitesse ne peut plus que diminuer. La vitesse, disons-nous, est nulle quand  $x = 0$ ; mais elle l'est aussi quand le pendule arrive au bout de son oscillation, quand il a décrit un arc dont la valeur est la somme de celui qui précède et de celui qui suit le passage au plan neutre. Désignons cet *arc-somme* par  $X_s$ . La manière même de conduire l'expérience nous donne, et sous une forme très intéressante au point de vue mécanique, la grandeur relative de ces deux arcs. Désignons par  $X_1$  l'arc décrit par impulsion, après que le pendule a franchi le plan neutre; au moment où le balancier arrive au bout de son excursion, le levier moteur est poussé vivement d'un de ses arrêts à l'autre : il décrit l'angle moteur  $X_m$  avant que le pendule ait commencé sa nouvelle excursion. Le résultat mécanique et géométrique est donc absolument le même que si au moment où le pendule s'arrête, nous le faisons encore reculer d'un arc  $X_m$ , pour l'abandonner ensuite à lui-même. L'arc  $X_s$  est donc formé de deux parties inégales, dont l'une a pour valeur  $X_1$  et l'autre  $X_m + X_1$ ; il est en un mot  $X_s = X_m + 2X_1$ .

La détermination de la durée des oscillations, comme celle de la raison pour laquelle les oscillations complètes ont presque la même durée dans les gaz que dans le vide, présente le plus grand intérêt; mais je n'ai pas à m'y arrêter ici, parce que par notre manière de conduire les expériences, elles sont rendues inutiles toutes les deux. Ceux de mes lecteurs, que cette question intéresse, la trouveront, ou pour mieux dire, l'ont déjà trouvée admirablement traitée dans la *Mécanique de Poisson* (2<sup>e</sup> édit., t. I, p. 349 et suiv.). En étudiant la loi des oscillations du pendule ordinaire dans l'air, le grand géomètre donne *la forme* du phénomène, pour le cas d'oscillations supposées très petites; et par une circonstance heureuse, il se trouve que son analyse convient aussi au cas des oscillations, *très grandes*, de notre pendule commandé par un fil élastique au lieu de l'être par la gravité.

Poisson montre fort bien que, quand le pendule est abandonné à lui-même, la course descendante est plus étendue, et plus longue en durée, que la course ascendante, et que c'est là ce qui explique l'isochronisme des oscillations entières. En ce qui concerne notre pendule à très grandes oscillations horizontales, cette inégalité entre ce qu'on peut appeler la course positive et la course négative, est en quelque sorte rendue palpable par la relation

$$X_i = X_p + X_n, \quad X_p = X_n + X_m$$

et nous fait comprendre comment ici aussi les oscillations peuvent rester *sensiblement* égales entre elles, malgré la résistance des gaz. Je dis *sensiblement*: l'isochronisme en effet n'est qu'approximatif, quand la différence entre les amplitudes est très grande. Ainsi dans une expérience que je citerai, l'amplitude étant de 10° environ, la durée s'élevait à 2<sup>sec</sup>,25; quand l'amplitude était portée à 540°, la durée devenait 2<sup>sec</sup>,36.

J'en arrive à la partie, je puis le dire sans vanité, la plus originale de mon analyse. Les résultats tout particuliers que je vais signaler, confirment à la fois et l'exactitude des équations et celle de la méthode expérimentale.

J'ai dit que les oscillations de notre pendule ne peuvent devenir d'amplitude constante que quand il y a égalité entre le travail mécanique représenté par le mouvement du levier moteur et celui qu'engendre la résistance des

gaz au mouvement du pendule. Déterminons l'expression mathématique de ces deux genres de travaux :

1° Nous disons que quand le pendule est arrivé à l'extrémité d'une oscillation, le levier moteur est poussé vivement d'un arrêt à l'autre et décrit l'arc moteur  $X_m$ . Le travail élémentaire ainsi dépensé est

$$df = E x dx.$$

E étant toujours l'effort exercé à l'extrémité du pendule pour un arc  $X = 1$ . L'intégrale

$$f = \int E x dx = \frac{1}{2} E x^2 + C$$

doit être prise entre  $X_1$  et  $X_1 + X_m$ . Mais d'après ce qui a été dit,  $X_1 = X_0 - X_m$  et  $X_s = X_0 + X_1$ . Il vient donc

$$f = \frac{1}{2} E (X_0^2 - X_1^2) = \frac{1}{2} E (X_0 - X_1)(X_0 + X_1) = \frac{1}{2} E X_m X_s.$$

2° Occupons-nous maintenant du travail dû à la résistance qu'exerce le gaz sur le pendule.

L'effort exercé pour une vitesse  $v$  étant  $\frac{\rho_0 S}{5} v^2$ , si nous le rapportons à l'extrémité du rayon R, il en résulte pour le travail élémentaire

$$df = \left(\frac{\rho_0 S}{5}\right) \frac{5PE}{2gS^2 \rho_0^2} \left( \left(1 + \frac{2gS \rho_0}{P} X_0\right) \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{2g \rho_0}{P} x}}\right) - \frac{2gS \rho_0}{P} x \right) dx,$$

d'où

$$f' = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} \cdot \frac{E}{S \rho_0} \left( \left(1 + \frac{2gS \rho_0}{P} X_0\right) \left(x + \frac{1}{\frac{2g \rho_0}{P} e^{\frac{2g \rho_0}{P} x}}\right) - \frac{gS \rho_0}{P} x^2 \right).$$

Cette intégrale devant être prise pour une oscillation entière, c'est-à-dire entre les deux points où  $v = 0$ , nous devons poser  $x = 0$  et  $x = X_s$ . D'où

$$f' = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} \cdot \frac{E}{S \rho_0} \left( \left(1 + \frac{2gS \rho_0}{P} X_0\right) \left(X_s - \frac{P}{2gS \rho_0} \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{2g \rho_0}{P} X_s}}\right)\right) - \frac{gS \rho_0}{P} X_s^2 \right).$$

Nous avons dit que les deux travaux mécaniques  $f$  et  $f'$  doivent être égaux pour la constance de l'amplitude des oscillations. Il en résulte, en réduisant,

$$X_m X_s = \frac{P}{gS\rho} \left( \left( 1 + \frac{2gS\rho_0}{P} X_0 \right) \left( X_s - \frac{P}{2gS\rho_0} \left( 1 - \frac{1}{e^{-\frac{2gS\rho_0}{P} X_s}} \right) \right) - \frac{gS\rho_0}{P} X_s^2 \right),$$

ou en remarquant que  $X_0 = \frac{X_s}{2} + X_m$  et simplifiant encore davantage

$$X_s (X_s + X_m) = \left( \frac{P}{gS\rho_0} + X_s + 2X_m \right) \left( X_s - \frac{P}{2gS\rho_0} \left( 1 - e^{-\frac{2gS\rho_0}{P} X_s} \right) \right).$$

On voit que la valeur  $E$  a disparu de cette égalité; ce qui nous apprend que l'amplitude est *absolument indépendante de la force du fil de suspension du pendule*. Ce résultat de l'analyse m'a, je l'avoue, semblé tellement étrange au premier abord, que j'ai mis en doute l'exactitude de la marche suivie par moi pour la mise en équation du problème et que je me suis hâté de vérifier le fait expérimentalement. Or, bien loin de recevoir un démenti de cette épreuve, l'exactitude des équations en a reçu la plus pleine confirmation. A un fil d'acier qui faisait faire au pendule des oscillations dont la durée s'élevait à 4<sup>sec</sup>,38, j'en ai substitué un beaucoup plus faible, donnant des oscillations de 12 secondes. La condition expresse  $X_m = \text{const.}$  étant remplie, l'amplitude totale des oscillations *n'a pas varié d'une façon appréciable*; elle s'est maintenue à 1<sup>m</sup>,662, le baromètre étant resté constant pendant l'expérience. Ainsi, pour un même pendule, l'amplitude des oscillations ne dépend que de la valeur de la résistance du gaz de la bombonne et de la grandeur de  $X_m$ . — J'ai dit : *le baromètre étant resté constant....* La bombonne étant en rapport avec l'air externe et pleine d'air elle-même, il est visible que la densité et par suite la résistance de l'air au mouvement du pendule dépendent, entre autres, de la hauteur barométrique. Ceci m'amène à donner la mesure de la sensibilité extrême de notre appareil : à température constante, des variations barométriques de 0<sup>m</sup>,005 modifiaient très nettement l'amplitude de l'oscillation ou la valeur de  $X_s$ .

Je cite maintenant les expériences les plus caractéristiques, que j'ai faites avec l'appareil qui vient d'être décrit et analysé.



**BALLON REMPLI D'ACIDE CARBONIQUE SEC.**7<sup>e</sup> EXPÉRIENCE.8<sup>e</sup> EXPÉRIENCE.

$$\delta = \text{const}$$

$$\begin{aligned} P &= 0^m,748 + 0^m,078 = 0^m,826 \\ \tau &= 50^s,5 \\ \delta &= 1^k,815 \\ \Theta_m &= 25^s,57',10'' \\ X_m &= 0^m,09 \\ \Theta_s &= 578^s,52',24'' \\ X_s &= 1^m,527 \\ T &= 4^{\text{sec}},56 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= 0^m,725 \\ \tau &= 41^s \\ \delta &= 1^k,815 \\ \Theta_m &= 25^s,57',10'' \\ X_m &= 0^m,09 \\ \Theta_s &= 578^s,52',24'' \\ X_s &= 1^m,527 \\ T &= 4^{\text{sec}},56 \end{aligned}$$

**BALLON REMPLI D'HYDROGÈNE SEC.**

$$\begin{aligned} P &= 0^m,7565 \\ \tau &= 14^s,4 \\ \delta &= 0^k,0825 \\ \Theta_m &= 25^s,57',10'' \\ X_m &= 0^m,09 \\ \Theta_s &= 752^s,42' \\ X_s &= 2^m,569 \\ T &= 4^{\text{sec}},44 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= 0^m,8255 \\ \tau &= 49^s \\ \delta &= 0^k,0825 \\ \Theta_m &= 25^s,57',10'' \\ X_m &= 0^m,09 \\ \Theta_s &= 752^s,42' \\ X_s &= 2^m,569 \\ T &= 4^{\text{sec}},44 \end{aligned}$$

Les conséquences qui découlent des expériences précédentes sont nettes et caractéristiques; les unes sautent en quelque sorte aux yeux; d'autres nécessitent une discussion attentive.

**I. — La seule inspection de l'équation**

$$X_s (X_s + X_m) = \left( \frac{P}{gS\rho_0} + 2X_m + X_s \right) \left( X_s - \frac{P}{2gS\rho_0} \left( 1 - e^{-\frac{2gS\rho_0}{P} X_s} \right) \right)$$

nous montre que, toutes choses restant les mêmes, l'amplitude des oscillations du pendule est exclusivement fonction de la résistance du gaz contenu dans le ballon; mais indépendamment de toute équation, de toute analyse

mathématique, ce fait devient d'ailleurs évident par la manière même dont l'expérience est conduite.

II. — Nous voyons qu'à densité constante les variations de la température n'ont absolument aucune influence sur l'amplitude des oscillations; elles n'en ont donc aucune non plus sur la résistance des gaz. D'où il suit :

QUE LA RÉSISTANCE DES GAZ N'EST POINT UNE FONCTION IMMÉDIATE DE TEMPÉRATURE.

C'est là le fait capital qu'il s'agissait de constater. Il ressort déjà approximativement des trois premières espèces d'expériences que j'ai relatées; mais les dernières expériences effacent jusqu'au moindre doute qui pourrait nous rester.

III. — Deux questions se présentent d'elles-mêmes à l'esprit. La résistance des gaz est une fonction de leur densité : mais quelle est la forme de cette fonction? La résistance est-elle, pour un même gaz, *proportionnelle* à la densité? Est-elle surtout *proportionnelle* aux seules densités, lorsqu'on passe d'un gaz à un autre? Nos expériences nous permettent de trouver une réponse des plus satisfaisantes à ces questions.

En remplaçant dans notre équation ci-dessus,  $g$ ,  $P$ ,  $X_m$ ,  $S$ , par leurs valeurs respectives  $9^{mll}$ ,  $8088$ ,  $0^{kil}$ ,  $10185$ ,  $0^m$ ,  $09$ ,  $0^{m2}$ ,  $0107$ , et en exécutant tous les calculs numériques et les réductions possibles, nous avons

$$X_s(X_s + 0,09) = \left( \frac{0,970424}{\rho_0} + 0,18 + X_s \right) \left( X_s - \frac{0,485212}{\rho_0} (1 - e^{-2,66095 \rho_0 X_s}) \right).$$

Par rapport à  $X_s$  comme par rapport à  $\rho_0$ , cette équation ne peut être résolue que par tâtonnements; mais avec l'arithmomètre Thomas et les tables de logarithmes, on arrive beaucoup plus vite qu'on ne le penserait à l'une ou à l'autre de ces deux variables.  $X_s$  étant donné expérimentalement avec une exactitude plus que suffisante, c'est tout naturellement  $\rho_0$  que j'ai d'abord cherché à déterminer. En prenant pour point de départ la première expérience, et en posant  $X_s = 1^m,662$ , on a

$$2,911824 = \left( \frac{0,970424}{\rho_0} + 1,842 \right) \left( 1,662 - \frac{0,485212}{\rho_0} (1 - e^{-3,42551 \rho_0}) \right).$$

Il est visible que si l'on donne à  $\rho_0$  la valeur convenable, on doit trouver l'égalité entre le premier et le second membre de cette équation; et c'est en effet à quoi l'on arrive (à fort peu près) en prenant  $\rho_0 = 0^{\text{kil}},0815$ . Cette valeur est un peu plus faible que celle ( $0^{\text{kil}},1$ ) qu'on admet pour la pression exercée par l'air animé d'une vitesse de  $1^{\text{m}}/$  sur une surface d'un mètre carré.

Prenons maintenant la cinquième expérience, où la densité de l'air a été portée à  $1^{\text{kil}},463$  et dans laquelle l'amplitude totale était  $X_s = 1^{\text{m}},515$ . L'équation devient par là

$$2,431575 = \left( \frac{0,970424}{\rho_0} + 1,695 \right) \left( 1,515 - \frac{0,485212}{\rho_0} (1 - e^{-3,422595\rho_0}) \right).$$

Supposons  $\rho_0$  proportionnel à la densité de l'air; il vient ainsi  $\rho_0 = 0,0815 \frac{1,463}{1,197} = 0,0996$ . En introduisant cette valeur dans le second membre de l'équation, on trouve  $2,43633$  au lieu de  $2,431575$ . La différence  $0,0047$  est minime si l'on a égard aux difficultés et aux erreurs possibles des expériences. La résistance d'un même gaz est donc bien réellement proportionnelle à la densité.

Si nous procédons de même avec les éléments fournis par la septième expérience, celle où le ballon était plein d'acide carbonique; en d'autres termes, si nous supposons, pour l'acide carbonique  $\rho_0 = 0,0815 \cdot \frac{1,815}{1,197} = 0,12344$ , et si nous introduisons dans notre équation ces valeurs  $X_s = 1,327$  et  $\rho_0 = 0,12344$ , nous trouvons encore une presque-égalité entre le premier membre et le second, ce qui prouve que cette valeur de  $\rho_0$  est convenable. D'où il suit :

*Que même pour deux gaz différents, la résistance est à fort peu près proportionnelle à la seule densité.*

Je n'ai pas jugé utile d'étendre cette méthode de calcul aux résultats donnés par l'hydrogène. La substitution de ce gaz à l'air du ballon revenait de fait à raréfier l'air à un quatorzième de sa densité primitive, en réduisant sa pression de  $0,74$  à  $0,053$ . L'amplitude des oscillations s'est ainsi trouvée portée à plus de deux circonférences complètes, et j'ai lieu de soupçonner



que le fil de suspension a été de la sorte poussé au delà des limites de son élasticité. C'est je pense ce qui explique l'accroissement assez notable de la durée des oscillations. ( $4^{\text{sec}},44$  au lieu de  $4^{\text{sec}},36$  à  $4^{\text{sec}},38$ .)

Pour ne rien négliger de ce qui peut jeter de la lumière sur la question si importante qui nous occupe, j'ai modifié profondément l'appareil qui vient de nous servir et la manière de l'employer. C'est ce que je vais montrer sous la forme la plus concise et la plus claire :

1° A la bombonne sphérique, j'ai substitué une cage de verre *cubique* de  $0^{\text{m}},43$  de côté. La masse d'air heurtée par le pendule était ainsi beaucoup plus contrariée dans ses mouvements, plus *tourmentée*, qu'elle ne l'était dans un ballon sphérique.

2° Au pendule en verre, j'en ai substitué un de cuivre, de  $0^{\text{m}},36$  de longueur et de  $0^{\text{m}},1995$  de largeur; la surface était  $0^{\text{m}^2},07182$  au lieu de  $0^{\text{m}^2},0107$ ; le poids de  $0^{\text{kil}},6047$  au lieu de  $0^{\text{kil}},10185$ .

5° Au fil d'acier très fin, donnant des oscillations de  $4^{\text{sec}},36$  de durée, j'en ai substitué un, d'acier aussi, mais beaucoup plus fort, donnant des oscillations de  $2^{\text{sec}},36$  seulement.

4° Enfin, au lieu d'opérer à densités constantes, j'en suis revenu à opérer à pressions constantes, et par suite, à densités variables avec la température, parce que les parois planes de la cage n'eussent pas supporté des excès de pression (interne ou externe) de  $0^{\text{m}},05$  de mercure, comme ceux auxquels donne lieu une variation de plus de  $60^{\circ}$ , à volume constant.

Je n'ai pas besoin d'insister pour faire voir que les modifications précédentes constituent un changement radical. Je ne citerai que trois des expériences nombreuses que j'ai faites avec ce nouvel appareil : elles sont caractéristiques.

Si, dans notre équation générale ci-dessus, nous substituons les éléments numériques fournis par le nouvel appareil, elle devient

$$X_s (X_m + X_s) = \left( \frac{0,8585782}{\rho} + 2X_m + X_s \right) \left( X_s - \frac{0,4291891}{\rho} (1 - e^{-2,529975 X_s \rho}) \right),$$

$X_s$  étant toujours l'espace total parcouru par l'extrémité du pendule,  $X_m$  l'espace répondant à l'angle moteur et  $\rho$  la résistance de l'air par mètre carré pour l'unité de vitesse ou 1<sup>m</sup> par seconde. Cela posé :

1<sup>re</sup> EXPÉRIENCE :

Pression barométrique 0<sup>m</sup>,744, température de l'air 14°,8, densité déduite 1<sup>kil.</sup>,2008.

L'angle moteur étant de 45° et par suite  $X_m = 0^m,1414$ , l'amplitude totale devient  $\Theta_s = 546^\circ$ , d'où  $X_s = 1^m,7161$ . En introduisant ces valeurs dans l'équation, on en tire, pour la valeur de  $\rho$ , 0<sup>kil.</sup>,098.

2<sup>me</sup> EXPÉRIENCE :

Pression atmosphérique 0<sup>m</sup>,744, température de l'air 60°, densité déduite 1<sup>kil.</sup>,0377.

Si la résistance de l'air au mouvement du pendule est exclusivement proportionnelle à la densité, il vient ici :  $\rho = 0^{\text{kil.}},08469$ . Introduisant cette valeur et la précédente  $X_s = 1^m,7161$  dans l'équation, on en tire  $X_m = 0^m,1178$ . Ayant réduit effectivement l'angle moteur de 45° à 37°,5, ou la valeur linéaire de 0<sup>m</sup>,1414 à 0<sup>m</sup>,1178, j'ai trouvé  $\Theta_s = 545^\circ$  ou  $X_s = 1,7122$ , valeur très approchée, comme on voit, de celle que donne le calcul.

3<sup>me</sup> EXPÉRIENCE :

Pression atmosphérique 0<sup>m</sup>,744, température de l'air 14°,8, densité déduite 1<sup>kil.</sup>,2008.

Angle moteur 37°,5,  $X_m = 0,1178$ , amplitude totale 492°,5,  $X_s = 1,5472$ .

La densité de l'air, dans cette expérience, étant la même que dans la première, la résistance l'était aussi. Introduisant cette valeur 0<sup>kil.</sup>,098 dans l'équation avec  $X_s = 1,5472$  et résolvant par rapport à  $X_m$  pris comme inconnue, on trouve 0<sup>m</sup>,112, c'est-à-dire à bien peu près la valeur adoptée en effet dans l'expérience.

Les résultats de cette nouvelle série d'expériences que je ne donne que sous la forme de l'abrégé le plus restreint, confirment pleinement, comme on voit, ceux de la série précédente. La dernière expérience, faite à la même

température, mais avec un angle moteur différent, confirme l'exactitude de l'équation générale. La seconde expérience, faite à la température de 60°, nous montre que la résistance des gaz est purement proportionnelle à la densité, et n'est nullement une fonction immédiate de température.

Une question pourtant encore se présentait naturellement à mon esprit. Les expériences si concluantes sur le pendule, qui viennent d'être relatées, ont été faites dans des enceintes de formes très différentes sans doute, mais ayant cependant ce caractère commun c'est qu'elles étaient assez limitées comme grandeur. On pouvait donc se demander avec raison si cette circonstance ne modifiait pas notablement les résultats numériques obtenus dans les mêmes conditions de densité et de température, et si les choses ne se passeraient pas tout autrement à l'air libre. Cette question était d'autant plus légitime qu'ainsi qu'on a vu (Première série d'expériences), le seul fait du déplacement d'un appareil d'une chambre dans une autre de forme un peu différente avait suffi pour modifier les facteurs numériques de la résistance de l'air. La loi de la résistance, ses relations avec la densité, avec la température, avec la pression, ne pouvaient certes être altérées, car celles-ci dérivent de la constitution même des gaz, et non de telle ou telle circonstance particulière dans laquelle se fait une expérience ; mais il me semblait que les facteurs qui pour chaque cas entrent dans les équations devaient varier considérablement avec l'espèce d'enceinte, avec son étendue, etc. — Pour reconnaître ce qui en est réellement, je suspendis à l'air libre de mon laboratoire, et *sans aucun obstacle voisin apparent*, le pendule de cuivre à grande surface que j'ai décrit en dernier lieu ; mais en même temps je disposai une cage de verre à parois verticales, *articulées de telle sorte que je pouvais, d'un instant à l'autre et sans rien déranger, y enclorre le pendule*. Cette cage mise en place avait la forme d'un polygone elliptique, et était close, du moins dans la mesure possible, par le haut et par le bas. En faisant osciller le pendule dans des conditions en tous points identiques d'ailleurs, tantôt à l'air libre, tantôt dans cette enceinte fermée, je reconnus, à ma grande surprise, je l'avoue, que ni la durée, ni l'amplitude des oscillations n'étaient changées au delà des limites des erreurs, ou plutôt des *doutes* possibles d'observation. La seule action que je constatai, et encore avec peine,

dérivait de la mise en place ou de la suppression du couvercle supérieur de la cage de verre. Bien que ce couvercle fût relativement très éloigné du pendule, l'amplitude des oscillations s'accroissait, *très légèrement*, quand ce couvercle était en place. — En somme, je dus conclure que dans les expériences sur le pendule, la forme et la grandeur du vase où l'on opérait, n'avait pu avoir qu'une influence perturbatrice très minime.

Il me sera permis encore de montrer que l'ensemble de mes expériences est conforme, quant aux conséquences, avec celles de Borda. — Par la manière dont j'ai introduit  $\rho$  dans les équations, j'ai admis implicitement que cette résistance est proportionnelle aux surfaces  $S$ , ce qui n'avait ici aucun inconvénient. En réalité il n'en est pas rigoureusement ainsi, et l'on a de fait  $\rho = AS^\alpha$ ,  $\alpha$  étant un exposant expérimental. Il nous est facile, avec nos nombres, de trouver la valeur de cet exposant. Remarquons en effet que la résistance opposée par l'air à nos deux pendules était :

$$\begin{array}{l} \text{pour le premier. . . . .} \quad 0,0815. 0,0107 = 0^k,00087205, \\ \text{pour le second . . . . .} \quad 0,098. 0,07182 = 0^k,00705856. \end{array}$$

A l'époque des expériences, nous avons  $B = 0^m,737$ ,  $B = 0^m,744$ , et  $t = 12^o,9$ , et  $t = 14^o,8$ .

A  $0^m,76$  et à  $0^o$ , la résistance eût donc été :

$$\text{pour le premier. . . . .} \quad \rho = 0,00087205 \frac{0,76 (1 + 0,005665.12^o,9)}{0,757} = 0,00094178,$$

$$\text{pour le second. . . . .} \quad \rho = 0,00705856 \frac{0,76 (1 + 0,005665.14^o,8)}{0,744} = 0,0075797.$$

Posons :

$$0,00094178 = A.0,0107^\alpha,$$

$$0,0075797 = A.0,07182^\alpha.$$

L'exposant tiré de ces deux équations est  $\alpha = 1,0954$ ; Borda avait trouvé  $\alpha = 1,4$ . Ces deux nombres, comme on voit, diffèrent très peu.

Il résulte de ce qui précède que la pression exercée par l'air à  $0^m,76$  et à  $0^o$ , sur une surface d'un mètre carré, est, pour une vitesse d'un mètre à la seconde :

$$\frac{0,00094178}{0,0107^{1,0954}} = 0^k,1557.$$

**Conséquences qu'a, pour la théorie moderne des gaz, l'indépendance absolue de la température et de la résistance de ces corps.**

Dès l'origine de la thermodynamique, dès que la généralité du grand principe de l'équivalence des forces eut été mis hors de doute, ou pour mieux préciser, dès qu'il fut définitivement démontré par les faits qu'une force peut se substituer à une autre, qui alors semble disparaître, la tendance à peu près générale des physiciens a été d'expliquer les phénomènes des impondérables par des mouvements variés de l'atome matériel lui-même. Le résultat, à peu près universellement acclamé comme vrai de ces tentatives, a été la substitution du mouvement de la matière à la notion primitive de la force, considérée comme cause du mouvement. Dans un ouvrage spécial, j'ai déjà mis en lumière l'inanité de pareilles tentatives; j'y reviendrai encore une fois, sous une forme nouvelle à la fin de ce travail; ici je vais droit à mon but particulier : je me borne à l'examen d'une interprétation spéciale, limitée aux seuls phénomènes de la chaleur. De toutes celles qui ont été proposées, c'est non-seulement la plus séduisante et la plus spécieuse, mais c'est aussi la plus rationnelle; et si l'étude des faits, dans leur ensemble, nous montre qu'elle est insoutenable, aucune de ses congénères ne pourra désormais rester debout. Bien que cette théorie soit aujourd'hui connue de la plupart des personnes qui s'occupent de physique générale, je crois pourtant devoir l'exposer avec soin, d'une part à titre d'hommage rendu à l'un de ses fondateurs, à celui qui a su lui donner son caractère réellement scientifique et solide, d'autre part pour mieux faire ressortir le point où elle est contredite directement par les faits observés. On me pardonnera si je reproduis, dans ce but, l'exposé consciencieux et, je crois, clair, que j'en ai donné dans mon ANALYSE ÉLÉMENTAIRE DE L'UNIVERS.

« Les phénomènes de chaleur n'étant dus qu'à des oscillations d'une » certaine espèce exécutées par les atomes ou les molécules (groupes » d'atomes), l'état des corps gazeux pourra s'expliquer comme il suit :

» Concevons deux plans parallèles, parfaitement rigides, séparés par un  
 » intervalle entièrement vide de matière, entre lesquels se meut perpendicu-  
 » lairement une molécule  $m$  *parfaitement élastique* animée d'une certaine  
 » vitesse. A chaque fois que la molécule frappe l'un des plans, elle rebondit  
 » en sens contraire et sans changement de vitesse, et va frapper l'autre plan,  
 » et ainsi de suite. Au moment du choc, chaque plan éprouve donc alterna-  
 » tivement une certaine pression, et il tend par suite à reculer par intermit-  
 » tence.

» Si l'intervalle qui s'écoule entre deux chocs consécutifs sur le même  
 » plan est très petit, et si d'ailleurs, au lieu d'une seule molécule  $m$ , nous en  
 » supposons un très grand nombre se mouvant sur des lignes parallèles  
 » entre elles et toutes normales aux plans, il est évident qu'au lieu d'une  
 » tendance intermittente au recul, nos deux plans éprouveront une tendance  
 » continue, qui constituera une pression réelle et continue aussi.

» A des molécules marchant toutes parallèlement les unes aux autres, nous  
 » pouvons en substituer qui marchent chacune dans une direction différente,  
 » pourvu qu'à nos deux plans nous en ajoutions quatre autres parallèles  
 » deux à deux, et perpendiculaires aux premiers; nos molécules détermine-  
 » ront, sur les six parois de ce vase fermé, une pression partout égale sur  
 » l'unité de surface. Nous aurons ainsi constitué un gaz.

» Voyons maintenant ce qui va se passer lorsque nous diminuerons le  
 » volume de ce gaz en exerçant sur l'une des parois, supposée mobile, une  
 » pression plus forte que celle de ce gaz. Occupons-nous de nouveau de notre  
 » molécule unique et des deux plans entre lesquels elle va et vient normale-  
 » ment. Rapprochons lentement ces plans, de telle sorte que leur distance  
 » soit réduite de moitié, par exemple.

» Il est évident, en tout premier lieu, que si la vitesse de la molécule ne  
 » variait pas, les plans recevraient dans le même temps un nombre de chocs  
 » double : toutes choses égales, leur tendance au recul serait donc aussi  
 » double.

» Mais tel ne sera pas le cas que nous discutons. Nous supposons ces plans  
 » rigides : la vitesse de  $m$  n'a, dès ce moment, rien qui dépende de l'état  
 » moléculaire des plans eux-mêmes. A mesure donc que ceux-ci vont se

» rapprocher, leur vitesse s'ajoutera *en doublant* à celle de la molécule *m*.  
 » C'est là, en effet, la loi de réflexion des corps élastiques, loi que chacun  
 » peut vérifier journellement par à peu près : au jeu de billard, par exemple,  
 » il est aisé de voir que la bille frappée par la queue part avec une vitesse  
 » plus grande que celle de ce marteau élastique. Il est, de plus, visible que  
 » l'accroissement de vitesse, qui aura lieu ainsi lorsque l'un des plans se sera  
 » rapproché de l'autre, sera le même, quelle que soit la vitesse de ce plan ;  
 » car si ce plan marche, par exemple, très lentement, il communiquera, à  
 » chaque choc, un surcroît de vitesse plus faible à *m* que s'il allait vite, mais  
 » il y aura aussi plus de chocs donnés ; tandis que s'il marche très vite,  
 » l'impulsion donnée à chaque choc sera plus grande, mais il y aura moins  
 » de chocs donnés par le même trajet.

» L'accroissement absolu de vitesse de la molécule *m* est donc indépen-  
 » dant du temps que met l'un des plans à se rapprocher de l'autre, et ne  
 » dépend que de la valeur même de ce rapprochement. Il est facile de s'as-  
 » surer que l'excès de *force vive* que reçoit la molécule est directement pro-  
 » portionnelle au produit de cette longueur par la pression exercée sur le  
 » plan. On voit avec quelle extrême simplicité s'explique dans cette hypo-  
 » thèse l'accroissement de température d'un corps par la compression. La  
 » température absolue d'un corps n'étant autre chose que la vitesse absolue  
 » des molécules, l'accroissement lui-même de la température n'est autre  
 » chose que l'accroissement de cette vitesse, et l'on voit que le carré de  
 » cette vitesse est nécessairement proportionnel au produit de la pression et  
 » du chemin parcouru par notre plan : en d'autres termes, à la quantité  
 » d'action dépensée.

» Dans ce qui précède : 1<sup>o</sup> nous avons implicitement supposé les espaces  
 » parcourus par les molécules très grands par rapport au rayon d'activité où  
 » leurs attractions réciproques ne peuvent plus être considérées que comme  
 » procédant suivant la loi de Newton. Nous n'avons donc à nous occuper  
 » que de la vitesse uniforme que nous leur avons donnée dès le principe :  
 » nous avons ainsi constitué un gaz, dont les molécules sont temporairement  
 » indépendantes les unes des autres ; 2<sup>o</sup> nous avons supposé *rigides* les plans  
 » recevant les chocs de chaque molécule, en sorte que la vitesse de celles-ci

» ne pouvait, en aucune façon, se communiquer à la matière même des  
 » plans; nous avons, en un mot, supposé des parois *imperméables* au calo-  
 » rique.

» Modifions cette dernière condition, et admettons que par une raison ou  
 » une autre (nous verrons de suite laquelle) la vitesse des molécules (la tem-  
 » pérature) reste constante, pendant que nous diminuons sans cesse le volume  
 » du récipient renfermant le gaz. Les molécules se rapprochant de plus en  
 » plus, il arrivera un moment où leur attraction réciproque ne pourra plus  
 » être négligée, où, par suite, la vitesse de l'une d'elles ne pourra plus être  
 » un seul instant uniforme. Dès lors, une partie des molécules cesseront  
 » d'être indépendantes, et se rapprocheront tout autrement que dans le rap-  
 » port de la diminution du vase, quoique continuant à osciller les unes par  
 » rapport aux autres. Le gaz, pour nous, deviendra partiellement un *corps*  
 » *liquide* : celui-ci peut donc être considéré comme une réunion de molé-  
 » cules dont les longueurs linéaires d'oscillation atteignent exactement la  
 » limite de leur sphère d'attraction réciproque; le gaz excédant n'est modifié  
 » en aucun sens par son contact avec le liquide, puisque la vitesse moyenne  
 » des molécules n'a pas varié.

» Au lieu de continuer à diminuer le volume du gaz restant, permettons  
 » désormais à la vitesse des molécules du liquide et du gaz de se disperser  
 » davantage à travers les parois du vase. Les molécules du liquide, par suite  
 » de ce *refroidissement*, se rapprochant de plus en plus, une nouvelle partie  
 » de molécules de gaz s'y réuniront en perdant ainsi de leur vitesse; il arri-  
 » vera un moment où l'étendue des oscillations sera de beaucoup inférieure  
 » au rayon de la sphère d'attraction sensible : le liquide alors se solidifiera,  
 » prendra de la cohésion et formera lui-même *paroi*. Un solide ne serait  
 » donc autre chose qu'une réunion de molécules retenues par l'attraction  
 » dans une position moyenne déterminée, mais oscillant autour de cette posi-  
 » tion avec des vitesses variables, qui en fixent précisément la limite.

» La vitesse des molécules d'un gaz, à une pression et à une température  
 » données, n'est pas du tout une arbitraire choisie au hasard pour le besoin  
 » de la cause. Les molécules de l'air atmosphérique étant supposées assez  
 » écartées les unes des autres pour être complètement indépendantes et pour



» n'obéir qu'à leur pesanteur vers la terre, il est évident que leur vitesse est  
» directement liée à la hauteur absolue de l'atmosphère au-dessus du lieu  
» où l'on observe, et qu'elle est précisément égale à celle que prendrait un  
» corps tombant librement dans le vide de cette hauteur.

» Il est clair, en effet, qu'une molécule qui vient de frapper, par exemple,  
» un plan horizontal solide, remonte jusqu'à ce que sa vitesse soit détruite  
» par l'action de la pesanteur, puis recommence à tomber, et ainsi de suite.  
» Il n'y a rien de changé si, au lieu d'une molécule, il en existe un très grand  
» nombre, qui se heurtent réciproquement dans leur trajet rectiligne.

» Il est facile de prouver qu'en raison de l'élasticité des molécules, toutes  
» celles d'une même couche horizontale ont la même vitesse, et que celle-ci  
» est due à la hauteur de chute ci-dessus. Cette hauteur elle-même ne dépend  
» que de la température (de la vitesse d'oscillation) des molécules de la sur-  
» face terrestre : car la vitesse *maxima* que garde une molécule, après avoir  
» frappé la surface, dépend du rapport de la vitesse, avant le choc, avec la  
» vitesse propre aux molécules de la surface.

» Tout l'ensemble des phénomènes que je viens de décrire est aisé à tra-  
» duire mathématiquement jusque dans les plus minimes détails. Mais cette  
» traduction est inutile pour l'objet qui nous occupe.

» Telle est l'hypothèse proposée par M. Clausius pour l'interprétation des  
» phénomènes de la chaleur. Si j'ai su l'énoncer clairement, le lecteur aura  
» été frappé sans doute de son étonnante simplicité et de son caractère  
» rationnel. Qu'elle rende compte, dans les derniers détails, des phénomènes  
» soumis aujourd'hui si victorieusement à l'analyse par la théorie mécanique  
» de la chaleur, cela ne peut manquer d'avoir lieu, par ce fait même qu'elle  
» convertit la physique de la chaleur en une simple branche de la mécanique.  
» Mais ce n'est pas là son seul côté séduisant.

» On voit effectivement, en outre, avec quelle facilité elle rend compte  
» d'une foule de circonstances spéciales qu'on a regardées comme des faits  
» purs et simples, non susceptibles d'explication. Tels sont, par exemple, tous  
» les faits concernant la capacité calorifique, le coefficient de dilatation des  
» corps en général, la tendance des gaz en particulier à se mêler intime-

» ment, etc., etc. Elle a été l'objet de diverses objections, que son auteur a  
 » su réfuter parfaitement, et qui ainsi l'ont plutôt consolidée qu'affaiblie.

» En choisissant cette hypothèse comme point de départ d'une réfutation  
 » générale de toutes celles qui, dans ces derniers temps, ont été proposées  
 » pour expliquer par de simples mouvements de la MATIÈRE les phénomènes  
 » de chaleur, de lumière, d'électricité, je n'encourrai certes pas le reproche  
 » d'avoir fait à la critique la part trop facile, et cette critique elle-même  
 » aura, plutôt que toute autre chose, le caractère d'un hommage rendu à une  
 » grande conception de l'un des fondateurs de la théorie mécanique de la  
 » chaleur. »

Si nous disposions d'une collection de billes, non infiniment petites, parfaitement élastiques, renfermées dans un réservoir suffisamment spacieux, absolument vide d'ailleurs et à parois rigides, et si à l'ensemble de ces sphères nous communiquons une certaine impulsion en toutes directions possibles, nous aurions constitué un mécanisme *qui simulerait les principales propriétés* que nous connaissons aux gaz : voilà ce que nous sommes à même d'affirmer, et c'est là, comme je le montrerai bientôt, une supériorité immense de l'hypothèse que je viens d'exposer, sur toutes les autres de même ordre. Je dis : les *principales propriétés*..... Voyons cependant si un gaz ainsi fabriqué de toutes pièces n'aurait pas une propriété particulière qui ferait défaut complètement à un gaz formé de molécules en repos (relatif) rendues solidaires par une force répulsive immatérielle, remplissant les intervalles de séparation de ces molécules.

Dans l'hypothèse que nous discutons, la température n'est pas seulement une fonction de la vitesse des atomes : elle est en réalité *constituée*, en nature et en grandeur, par ce mouvement et par la vitesse absolue moyenne. Entre la température absolue  $T$  d'un gaz et la vitesse  $U$  des atomes, existe, comme le montre avec toute la clarté possible M. Clausius, la relation

$$U = 485^m \sqrt{\frac{T}{275\delta}},$$

$\delta$  étant le poids spécifique du gaz par rapport à l'air pris pour unité. —

Voyons quelle serait la loi de la résistance pour un corps solide se mouvant dans une masse indéfinie d'un gaz ainsi constitué.

Prenons pour exemple un disque plan, de surface  $S$ , se mouvant avec une vitesse constante  $V$ , dans une direction perpendiculaire à sa surface, et cherchons la valeur de la force motrice qu'il faudrait dépenser à chaque instant pour conserver au disque cette vitesse constante. — Soient  $m$  la masse de chacun des atomes ou des molécules (groupes d'atomes),  $U$  leur vitesse rectiligne,  $D$  la distance moyenne qui les sépare. Pour plus de simplicité, ne nous occupons d'abord que des billes qui, en *amont* et en *aval*, frappent le disque perpendiculairement.

Soient  $u_0$  la vitesse de réflexion en amont et  $u_1$  la vitesse de réflexion en aval. La force vive de chaque atome étant  $mw^2$  avant le choc, elle sera, après le choc

$$\begin{aligned} \text{en amont.} & \dots \dots \dots mu_0^2, \\ \text{en aval} & \dots \dots \dots mu_1^2. \end{aligned}$$

L'augmentation sera en amont  $m(u_0^2 - U^2)$ ; la diminution sera en aval  $m(U^2 - u_1^2)$ . Mais d'après un principe bien connu du choc des corps parfaitement élastiques, nous avons

$$\begin{aligned} u_0 &= (U + 2V), \\ u_1 &= (U - 2V), \end{aligned}$$

il vient donc

$$\begin{aligned} \text{pour l'augmentation en amont.} & \dots \dots \dots m(U + 2V)^2 - U^2 = 4m(U + V)V. \\ \text{pour la diminution en aval.} & \dots \dots \dots m(U^2 - (U - 2V)^2) = 4m(U - V)V. \end{aligned}$$

Pour avoir l'action totale des percussions, nous devons maintenant multiplier cette augmentation et cette diminution de force vive de chaque *bille* par le nombre total aussi des chocs par unité de temps. — Il est visible que pour les molécules placées sur une *même file* dans la direction du mouvement, le nombre de chocs sera

$$\begin{aligned} \text{en amont} & \dots \dots \dots \frac{U + V}{D}, \\ \text{en aval} & \dots \dots \dots \frac{U - V}{D}. \end{aligned}$$

Comme nous pouvons ici supposer le rayon du disque ou  $R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$  très grand par rapport à  $D$ , le nombre total de files de billes arrivant perpendiculairement sur le plan sera rigoureusement  $\frac{S}{D^2}$  et, par conséquent, la masse matérielle frappant le disque par unité de temps, mais sous forme successive et continue de façon à produire une résistance continue aussi, sera

$$\begin{aligned} \text{en amont} \dots\dots\dots & m \frac{(U + V)S}{D^2}, \\ \text{en aval} \dots\dots\dots & m \frac{(U - V)S}{D^2}. \end{aligned}$$

En écrivant ces valeurs dans les équations ci-dessus, il vient pour l'augmentation de force vive en amont et pour sa diminution en aval

$$\begin{aligned} \text{augmentation} \dots\dots\dots & = m \frac{4S}{D^2} V (U + V)^2, \\ \text{diminution} \dots\dots\dots & = m \frac{4S}{D^2} V (U - V)^2. \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que c'est notre disque qui, en vertu de sa vitesse constante,

$$\begin{aligned} \text{produit en amont un travail} \dots\dots & F_0 = \frac{1}{2} \left( m \frac{4S}{D^2} V (U + V)^2 \right) \\ \text{et reçoit en aval un travail} \dots\dots & F_1 = \frac{1}{2} \left( m \frac{4S}{D^2} V (U - V)^2 \right). \end{aligned}$$

Le travail mécanique dépensé pour maintenir le mouvement du disque est donc égal à la différence de ces deux valeurs, soit :

$$F_0 - F_1 = \frac{1}{2} m \frac{4S}{D^2} UV^2 = \frac{8mS}{D^2} UV^2.$$

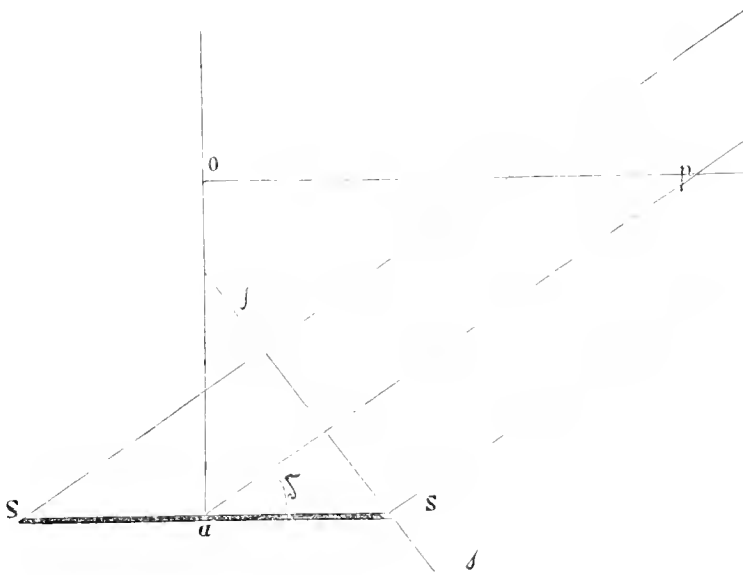
Mais ce travail lui-même peut être représenté par le produit d'une résistance  $\rho$  surmontée avec la vitesse uniforme  $V$ . Nous avons, en un mot,

$$F_0 - F_1 = V\rho = \frac{8mS}{D^2} UV^2.$$

D'où il résulte pour la valeur de la résistance :

$$p = \frac{8mS}{D^2} UV.$$

Toute l'analyse précédente se rapporte exclusivement à l'action des atomes frappant notre plan normalement, en amont et en aval. Pour ne rien laisser dans l'ombre, en ce qui concerne cette grande et belle question, il convient maintenant de chercher quelle modification apporte dans les résultats la considération des chocs ayant lieu dans toutes les directions possibles.



Analysons l'effet produit par la percussion des atomes arrivant en amont et en aval, en faisant un angle  $\delta$  avec le plan. — Il est visible tout d'abord que la vitesse dans la direction normale au plan n'est plus que  $U \sin \delta$ . Après la percussion, cette vitesse devient donc en sens contraire

$$\begin{aligned} \text{en amont.} & \dots \dots \dots U \sin \delta + 2V, \\ \text{en aval} & \dots \dots \dots U \sin \delta - 2V, \end{aligned}$$

et comme la force vive initiale, dans la direction normale au plan, est

$mU^2 \sin^2 \delta$ , le bénéfice et la perte deviennent

$$\begin{aligned} \text{en amont. . . . } 2F_0 &= m((U \sin \delta + 2V)^2 - U^2 \sin^2 \delta) = 4mV(U \sin \delta + V), \\ \text{en aval . . . . } 2F_1 &= m(U^2 \sin^2 \delta - (U \sin \delta - 2V)^2) = 4mV(U \sin \delta - V). \end{aligned}$$

Remarquons de plus que la surface frappée par les atomes arrivant suivant l'angle  $\delta$  n'est plus  $S$ , mais seulement  $S \sin \delta$ ; en d'autres termes, elle a pour valeur la projection de  $S$  sur un plan  $ss$  normal à la direction des atomes. Remarquons de plus que le *nombre* des atomes et par conséquent la masse totale frappant le plan en amont et en aval sont désormais

$$\begin{aligned} \text{en amont . . . . } n &= \frac{U \sin \delta + V}{D} & M &= m \frac{(U \sin \delta + V) S \sin \delta}{D^3}, \\ \text{en aval . . . . } n_1 &= \frac{U \sin \delta - V}{D} & M &= m \frac{(U \sin \delta - V) S \sin \delta}{D^3}. \end{aligned}$$

Remarquons enfin que les atomes arrivent sous un même angle sur toute une nappe de cône dont la génératrice est  $ap$ . Leur nombre est donc proportionnel à une circonférence dont le rayon est  $op = ap \cos \delta$  ou à  $2\pi \cos \delta$ , en faisant pour simplifier  $ap = 1$ , et le nombre qui passe par un arc infiniment petit  $d\delta$  est proportionnel au rapport  $\frac{d\delta}{2\pi}$ . Comme nous n'avons fait aucune spécification quant à la valeur de  $D$ , et que nous pouvons la considérer, à volonté, *comme extrêmement petite*, il vient en somme pour l'action totale de la percussion, en amont

$$\frac{2SmV}{D^3} \int (U \sin \delta + V)^2 \cos \delta \sin \delta d\delta = \frac{2SmV}{D^3} \left( \frac{1}{4} U^2 \sin^4 \delta + \frac{2}{5} UV \sin^3 \delta + \frac{1}{2} V^2 \sin^2 \delta \right),$$

en aval

$$\frac{2SmV}{D^3} \int (U \sin \delta - V)^2 \cos \delta \sin \delta d\delta = \frac{2SmV}{D^3} \left( \frac{1}{4} U^2 \sin^4 \delta - \frac{2}{5} UV \sin^3 \delta + \frac{1}{2} V^2 \sin^2 \delta \right).$$

Pour les chocs en amont, il est visible que l'intégrale doit être prise entre  $\delta = 0$  et  $\delta = \frac{1}{2}\pi$ , d'où il résulte

$$F_0 = \frac{2SmV}{D^3} \left( \frac{1}{4} U^2 + \frac{2}{5} UV + \frac{1}{2} V^2 \right).$$

Il n'en est pas de même pour les percussions en aval. Il est clair en effet que du moment que  $\delta$  est tel qu'on a

$$U \sin \delta = V,$$

les atomes cessent d'atteindre le plan et les percussions deviennent nulles; nous devons donc intégrer ici entre  $\sin \delta = \sin \frac{1}{2} \pi$  et  $\sin \delta = \sin \frac{v}{u}$  ce qui nous donne

$$F_1 = \frac{2SmV}{D^2} \left( \left( \frac{1}{4} U^3 - \frac{2}{3} UV + \frac{1}{2} V^2 \right) - \left( \frac{1}{4} U^2 \sin^4 \frac{V}{U} - \frac{2}{3} UV \sin^3 \frac{V}{U} + \frac{1}{2} V^2 \sin^2 \frac{V}{U} \right) \right).$$

Pour des vitesses allant même à  $V = 20$  (la plus forte valeur des vitesses expérimentales) les termes de la seconde parenthèse peuvent être négligés, sans erreur, et il vient simplement

$$F_0 - F_1 = \frac{8Sm}{D^2} \frac{1}{3} UV^2, \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{8mS}{5D^2} UV, \quad \dots \dots \dots (A)$$

c'est-à-dire que les choses se passeraient comme si le tiers des atomes frappaient le plan normalement (\*).

(\*) Dans sa belle analyse, M. Clausius a parfaitement tenu compte de l'effet dû au choc des atomes arrivant sous tous les angles possibles. J'ai dû modifier légèrement la marche de l'analyse pour le cas dont il s'agit dans le texte, celui d'une surface en mouvement elle-même.

La démonstration que je donne dans le texte demande, je crois, quelques explications ou éclaircissements. Les équations (A) se rapportent exclusivement au cas où le plan rigide (ou n'importe d'ailleurs quelle surface solide) se meut avec une vitesse uniforme dans le gaz. Pour  $V = 0$ , elles donnent non-seulement  $\rho = 0$ , ce qui est tout naturel, puisqu'il ne peut y avoir de résistance sans mouvement de la surface immergée, mais elles donnent même 0 sur chaque face à part, et ceci pourrait à première vue sembler fautif. Il ne s'agit pourtant que d'une apparence. Dans l'hypothèse cinétique de la constitution des gaz, la pression, parfaitement égale, qui s'établit sur les deux faces d'un plan, est due à l'effort nécessaire pour faire rebrousser chemin aux atomes, pour faire *changer le signe de U*; cette pression n'a absolument rien de commun avec celle en excès qui s'établit dès que la surface solide entre en mouvement; et si, bien inutilement, elle se trouvait introduite dans les équations, elle disparaîtrait par la soustraction qui nous fait connaître l'excédant de pression sur la face en amont. — Une autre remarque plus essentielle est à faire encore. Nos équations, sans que je l'aie même mentionné, supposent implicitement la *continuité* dans les chocs des particules; elles supposent qu'au moment où une particule quitte le plan, en amont ou en aval, une autre commence déjà à le toucher. Pour bien faire saisir ce point, admettons, ce qui est ici d'ailleurs légitime, que

Avant d'aller plus loin, il convient de discuter les résultats auxquels nous venons d'arriver. — Plusieurs remarques de la plus haute importance se présentent à nous.

1. En tout premier lieu, si, dans l'analyse précédente, nous ne nous étions arrêtés qu'à l'action de *deux* molécules isolées et opposées en direction, nous aurions pu être portés à croire que la vitesse propre de ces molécules n'entre pour rien dans la question. Une molécule seule, frappant en amont, gagne en force vive

$$m((U + 2V)^2 - U^2) = 4m(UV + V^2),$$

une molécule seule, frappant notre plan en aval, perd en force vive

$$m(U^2 - (U - 2V)^2) = 4m(UV - V^2).$$

l'effort de répulsion exercé par le plan contre une bille soit *proportionnel* à l'espace parcouru par le centre de gravité vers le plan pendant le contact, qu'on ait en un mot

$$p = \rho_0 x,$$

d'où il résulte

$$f = \int_0^X \rho_0 x dx = \frac{1}{2} \rho_0 (X^2 - 0) = \frac{1}{2} \rho_0 X^2.$$

La pression moyenne pendant la durée du choc pourra être très correctement représentée par

$$p_m = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{X^2}{X} = \frac{1}{2} \rho_0 X;$$

mais si nous désignons par  $t$  la *durée* du choc et par  $T$  l'intervalle total entre deux chocs consécutifs des molécules ou billes d'une même file, il serait absolument inexact d'écrire, pour la pression moyenne d'un choc à l'autre,

$$P_m = p_m \frac{t}{T}.$$

Si l'on donne à  $T$  une valeur sensible par rapport à  $t$ , et si l'on considère l'effet d'une seule file de billes, il est clair que le plan éprouvera des alternatives de pression considérable et de non-pression complète, d'où résultera, non une pression plus ou moins faible, mais un état de *vibration*. Pour arriver à la continuité de pression, dans l'ordre expérimental, il n'est pas nécessaire de supposer  $\frac{S(U+V)}{D^3}$  infiniment grand et  $m$  infiniment petit, mais seulement d'admettre des limites suffisamment élevées en grandeur et en petitesse. — Je dois faire remarquer maintenant que cette condition, sans laquelle l'équation (A) serait fautive, s'applique aussi à la théorie cinétique entière et sans qu'il s'agisse d'un plan *en mouvement* dans un gaz.



Si nous retranchons ces deux quantités l'une de l'autre, il reste pour la dépense opérée par le plan mouvant

$$8mV^2,$$

résultat où ne figure plus la vitesse  $U$ . On arriverait absolument au même résultat, en substituant à notre plan, doué d'une vitesse constante, une sphère (par exemple) de masse  $M$ , très grande, possédant une vitesse initiale  $V$ , qu'on supposerait frappée en même temps par les billes  $m$  à l'extrémité d'un même diamètre et en appliquant au calcul les formules ordinaires du choc des corps élastiques. On pourrait donc être induit à conclure que la résistance au mouvement du plan est indépendante de cette vitesse  $U$  et par conséquent que toute notre analyse est fautive. On tomberait pourtant ainsi dans une erreur très grave. Remarquons, en effet, que la résistance éprouvée par notre plan ne dépend pas seulement de l'intensité de chaque choc en particulier, mais du nombre de chocs, de la quantité de matière qui frappe en amont et en aval dans l'unité de temps. Les deux termes

$$m \left( \frac{U + V}{D} \right), \quad m \left( \frac{U - V}{D} \right),$$

exprimant la quantité de matière, en amont et en aval, ne peuvent donc être omis, lorsque nous cherchons la somme des forces vives gagnées en aval et perdues en amont par le plan.

La considération si simple, qui précède, assimile les phénomènes que nous analysons à ceux du choc de deux veines fluides opposées contre un obstacle fixe ou en mouvement. — La pression qu'exerce une veine d'eau, par exemple, sur un plan qu'elle frappe normalement a pour expression

$$P = AU^2,$$

$A$  étant un facteur qu'il est facile de déterminer et  $U$  étant la vitesse des particules du fluide. Supposons maintenant que deux veines semblables en section et en vitesse, ayant la même ligne pour axe, mais allant en sens opposé l'une de l'autre, frappent normalement les deux faces d'une surface solide interposée. Tant que ce plan sera en repos, les pressions seront égales des deux côtés, et se feront équilibre; mais si nous donnons au plan une vitesse

constante  $V$ , la vitesse relative en amont deviendra  $(U + V)$  et la vitesse relative en aval deviendra  $(U - V)$ . La différence des pressions sur les deux faces sera par conséquent

$$P_0 - P_1 = A(U + V)^2 - A(U - V)^2 = 4AUV.$$

La résistance au mouvement du plan est donc bien réellement fonction de  $U$ . A cette assimilation des chocs des molécules d'un gaz à ceux d'une veine fluide, on peut objecter : 1° qu'il y a ici destruction d'une partie au moins de la force vive des particules; 2° que l'équation :  $P = AU^2$ , ne représente les faits qu'à peu près. — Je vais immédiatement donner à l'expérience une forme telle que toute objection sera réfutée. Concevons deux tubes cylindriques recourbés en demi-circonférences et normalement fixés sur notre plan, comme la figure 4 l'indique. Normalement au plan et dans les extrémités  $O, O$ , dirigeons deux veines fluides de même section que les tubes, et animées de la vitesse  $U$ . Nous admettons que le frottement du fluide dans ces tubes est absolument nul et que d'ailleurs aucune cause externe ne modifie soit la vitesse, soit la direction des veines. Désignons par  $D$  la densité du fluide ( $D = 1000$  kilogrammes, s'il s'agit d'eau, par exemple), par  $S$  la section du tube, par  $R$  le rayon de courbure, par  $\theta$  l'angle embrassé ( $180^\circ$  ou  $\pi$  au cas particulier), par  $g$  la gravité. Si le rayon du tube est très petit par rapport au rayon de courbure  $R$ , la pression exercée sur la concavité en vertu de la force centrifuge aura très sensiblement pour valeur

$$P = \frac{(SDR\theta) U^2}{gR} = \frac{(SD\theta) U^2}{g}.$$

Si nous décomposons les pressions élémentaires dans le sens normal au plan, il vient

$$dP = \frac{SDU^2}{g} \cos \theta d\theta,$$

d'où en intégrant entre  $\theta = 0$  et  $\theta = 90^\circ$ , et doublant le produit, puisque les angles sont mesurés du milieu de l'arc,

$$P = 2SD \frac{U^2}{g},$$

pour l'expression de la pression exercée normalement au plan par nos deux tubes. Lorsque le plan est en repos, la vitesse est la même dans les deux tubes et la pression sur le plan l'est aussi sur les deux faces. Si, au contraire, le plan marche avec une vitesse constante  $V$  dans le sens  $\parallel$ , par exemple, la vitesse de l'eau dans le tube en amont devient  $U + V$  et la vitesse dans le tube en aval devient  $U - V$ ; la pression en amont s'élève donc à

$$p_0 = \frac{2SD}{g} (U + V)^2,$$

et la pression en aval tombe à

$$p_1 = \frac{2SD}{g} (U - V)^2;$$

la différence

$$p_0 - p_1 = \frac{8SD}{g} UV$$

exprime donc la résistance opposée au mouvement du plan. Cette expérience, ai-je besoin de le dire? est *pratiquement irréalisable*, mais théoriquement elle est rigoureusement correcte dans sa forme et dans ses conséquences. Il n'y a ici, comme on voit, aucune destruction de force vive; tout se passe absolument comme dans le choc des corps parfaitement élastiques.

A notre fluide quelconque, que j'ai supposé être de l'eau, nous pouvons substituer un gaz, sans rien changer à la démonstration. Que dis-je! Si les gaz sont réellement constitués par des billes en mouvement, il est évident qu'il se passe continuellement, à notre *insu*, dans nos deux tubes ce qu'y provoque notre jet artificiel: il y entre sans cesse par un bout des billes qui, sans perdre de vitesse, sortent par l'autre bout, à cette seule différence près, c'est que le mouvement de ces billes a lieu simultanément et en même nombre dans les *deux directions* opposées, ce qui n'altère en rien l'effet de la force centrifuge, mais ce qui rend simplement le mouvement invisible pour nous. En d'autres termes, parfaitement équivalents au fond, nous pouvons, avec un gaz constitué de la sorte, *enlever nos tubes*, sans rien changer du tout au phénomène. Les billes arrivant en toutes directions se réfléchissent

sur le plan en mouvement sans destruction de force vive, et la pression qu'elles produisent ainsi est d'autant plus grande que leur nombre ou leur vitesse l'est plus.

Notre analyse de l'effet du choc des molécules gazeuses répond rigoureusement, quoique sous une forme bien différente quant à l'apparence des phénomènes, à l'analyse précédente; elle est donc parfaitement correcte dans les conclusions, à savoir que si les gaz sont constitués par des molécules élastiques en mouvement *nécessaire*, la résistance qu'ils offrent au mouvement des corps qui y sont plongés est une fonction de la vitesse des atomes.

2. Analysons de plus près nos équations :

1° Si nous supposons  $U = 0$ , il vient, non pas du tout  $\rho = 0$ , comme on pourrait le croire au premier abord, mais au contraire

$$\rho = \frac{4mS}{D^3} V^2,$$

car notre disque (ou plan quelconque) n'étant plus frappé en aval, mais seulement en amont, le nombre de percussions devient ici  $\frac{V}{D}$  et la vitesse de réflexion est  $2V$ .

2° Si nous supposons  $V = U$ , il vient, non, comme on pourrait le croire aussi d'abord,

$$\rho = \frac{8mS}{5D^3} V^2,$$

mais

$$\rho = \frac{17mS}{6D^3} V^2,$$

car pour  $V=U$ , les percussions cessent aussi en aval, et le terme précédent subsiste seul.

3° Enfin, si nous donnons à  $V$  une valeur notable par rapport à  $U$ , mais non  $V = U$ , nous avons, en reprenant les équations ci-dessus

$$F_0 - F_1 = V\rho = \frac{2mSV}{D^3} \left( \frac{4}{5} UV + \left( \frac{1}{4} U^2 \sin^4 \frac{V}{U} - \frac{2}{5} UV \sin^2 \frac{V}{U} + \frac{1}{2} V^2 \sin^2 \frac{V}{U} \right) \right),$$

ce qui nous montre que la résistance suivrait une loi très différente de

$$\rho = \frac{8mS}{5D^3} UV,$$

et très compliquée.

Dans la réalité des choses, nous reconnaissons :

1° Que la loi de résistance d'un gaz est tout autre selon qu'on suppose ce corps constitué par des atomes en repos rendus solidaires par une force répulsive immatérielle, ou par des atomes en mouvement et indépendants les uns des autres ;

2° Nous voyons que dans cette dernière hypothèse la résistance devient une fonction de la vitesse propre aux atomes.

Cette dernière conséquence est CAPITALE. Dans la même hypothèse, en effet, nous savons que la température des gaz est non-seulement une fonction de cette vitesse des atomes, mais qu'elle est *constituée* par cette vitesse même. De l'équation

$$U = 485^m \sqrt{\frac{T}{275 \delta}},$$

propre à cette hypothèse, il résulte donc

$$\rho = \frac{8mS}{5D^3} UV = 485 \frac{8mS}{5D^3} V \sqrt{\frac{T}{275 \delta}} = \alpha V \sqrt{T}, \quad (B)$$

c'est-à-dire que la résistance d'un gaz devient une fonction de la température, *pour une même densité*.

Nous disposons donc maintenant d'un moyen de vérification, sans aucune objection possible, pour constater la vérité de cette hypothèse. Le lecteur a vu déjà dans quel sens se prononce l'expérience. Celles que j'ai faites présentent, je crois, toutes les garanties possibles d'exactitude ; il me reste toutefois en ce sens à donner une dernière mesure de cette exactitude. Je l'ai à dessein réservée, parce qu'avant de la présenter, j'avais à faire connaître

analytiquement les conséquences de notre hypothèse. Nous avons, disons-nous,

$$\rho = \rho_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}} \dots \dots \dots (B)$$

On peut se demander si dans les limites relativement restreintes de variations de température où j'ai dû opérer, l'effet produit sur la résistance à densité constante ne m'eût pas échappé. L'une de mes expériences faites à dessein pour répondre à cette question est tout à fait catégorique.

La température étant portée de 42°,9 à 47°,25, *sans variation de densité de l'air*, l'amplitude des oscillations est restée invariable. D'après l'équation ci-dessus, cette variation de température répond à une variation de résistance

$$\rho = \rho_0 \sqrt{\frac{520,1}{283,75}} = 1,0584 \rho_0.$$

Afin de constater si mon appareil était assez sensible pour reconnaître une aussi faible variation de  $\rho$ , j'ai laissé la température de l'air constante et égale à 42°,9; mais j'ai fait, en donnant plus de pression, croître la densité dans le rapport de 1,0584; en d'autres termes, je l'ai portée de 4,197 à 4,267. Or, dans ces nouvelles conditions, l'amplitude des oscillations, mesurée à l'extrémité du pendule, s'est abaissée de 4<sup>m</sup>,662 à 4<sup>m</sup>,640. Cette différence de 0<sup>m</sup>,022 dépasse de beaucoup la limite des erreurs possibles d'observation. Nous sommes donc certains que la résistance des gaz au mouvement des corps solides ou liquides qui y sont plongés *n'est point une fonction immédiate de température*; et, d'après ce que nous a démontré la discussion ci-dessus, nous sommes certains aussi désormais :

QUE LA PRESSION ET LA TEMPÉRATURE DES GAZ NE SONT POINT CONSTITUÉES PAR LES MOUVEMENTS, DE QUELQUE GENRE QU'ON VEUILLE, DES ATOMES MATÉRIELS.

Je dis : les mouvements *de quelque genre qu'on veuille*.... Aux mouvements rectilignes et translatatoires, admis dans l'hypothèse particulière que nous avons discutée, on pourra, en effet, substituer tous les mouvements qu'on voudra imaginer : mouvements vibratoires, gyrotoires (tourbillons moléculaires)....; du moment que ces mouvements simuleront une puissance répulsive, ils modifieront d'une même manière la loi de résistance des gaz et des vapeurs.

Le caractère tranchant et l'importance des équations (A) et (B) et des expériences qui réfutent la relation physique (B) ne peuvent échapper à personne. Les conclusions forcées qui en découlent mettent fin une fois pour toutes et définitivement à toutes les hypothèses explicatives qui prétendent rendre compte des phénomènes de chaleur par les seuls mouvements des atomes pondérables ; car s'il faut autre chose que ces mouvements pour expliquer les phénomènes thermiques dans les gaz, il le faut aussi pour les corps liquides et solides. — Mais la condamnation prononcée par ces conclusions s'étend bien plus loin. Quelques réflexions générales et d'un ordre plus élevé encore, non-seulement me seront permises, mais sont indispensables ici.

### Réflexions critiques sur la doctrine moderne qui rapporte l'universalité des phénomènes à des mouvements de l'atome matériel.

C'est le sort de certaines découvertes scientifiques, et précisément des plus grandes, des plus fécondes en conséquences, de faire, à côté des vérités neuves et imprévues qu'elles apportent, naître des hypothèses douteuses et gratuites, qui n'ont absolument rien de commun avec elles, et qui pourtant sont réputées faire corps avec elles, et sont acceptées comme vérités hors de conteste. En établissant inopinément des rapports et une dépendance intime entre des phénomènes qui jusque-là semblaient étrangers les uns aux autres, elles réveillent et excitent une des tendances les plus élevées de l'homme, celle que nous avons de remonter aux causes et de chercher à les comprendre. Cette noble tendance, que quelques écoles positivistes voudraient en vain abolir, ne peut conduire qu'à des résultats utiles, lorsque, dans son exercice, elle est contrôlée sans cesse par le bon sens et appuyée sur la comparaison d'un nombre suffisant de faits contradictoires ; mais abandonnée à elle-même, ou dirigée par l'esprit de système, elle devient incontestablement une entrave au progrès réel.

Ce sort a été au plus haut degré celui de la Thermodynamique. Cette

magnifique doctrine est venue relier, sous une forme imprévue et désormais indissoluble, un nombre incalculable de phénomènes entre lesquels on n'avait aperçu aucun point de soudure ; elle est venue grouper en un faisceau toutes les manifestations possibles des forces, sous quelque forme qu'elles apparaissent ; nous révéler une équivalence que personne n'avait soupçonnée, nous montrer qu'une force peut se substituer à une autre qui alors semble s'anéantir ; elle est venue surtout nous faire juger comme *fugace*, comme dénué d'existence réelle, ce que jusque-là nous avions cru inaltérable en quantité et en qualité. Fortement sollicités à chercher des explications nouvelles à ce qui échappait désormais à toutes les interprétations du passé, les penseurs et les *non-penseurs* de toutes les catégories se sont mis à l'œuvre, chacun selon la mesure de ses forces. A côté d'interprétations qui, quoique destinées à périr aussi, resteront cependant dans l'histoire de la science comme des témoignages remarquables du bon sens et des efforts consciencieux de leurs auteurs, se sont produites une foule de créations informes, où l'absurde dispute le terrain à l'arbitraire, et qui ne font foi, chez leurs créateurs, que d'une ignorance profonde des faits les plus élémentaires, et les plus essentiels à la discussion.

Une direction générale, il y a lieu d'en être frappé, prédomine dans toutes les hypothèses mises au jour. Si ce n'est certes pas la plus naturelle, c'est du moins la plus facile à saisir en apparence. Au point de vue philosophique et métaphysique, on ramène toutes les existences possibles à l'unité, à l'existence du seul atome matériel. Au point de vue de la mécanique et de la physique, ce sont les mouvements de cet atome qu'on charge d'expliquer la diversité des phénomènes, et ces explications ont conduit directement à l'abolition de la FORCE, considérée comme cause de mouvement. Il ne paraît aujourd'hui pour ainsi dire plus un seul traité de physique, petit ou grand, où l'on ne présente, comme des vérités démontrées, que la lumière, la chaleur, l'électricité, statique ou dynamique, le magnétisme . . . . sont dus à de simples mouvements de l'atome matériel. Il semble qu'il n'y ait plus en ce sens aucun doute à élever. Et si des traités de physique, nous passons aux ouvrages plus généraux, élémentaires ou supérieurs, où l'on s'occupe de l'ensemble des phénomènes naturels, de l'origine des choses, de la vie, de la pensée, on



rencontre encore à chaque page cette affirmation : que la cause de l'attraction, de la répulsion, considérée comme quelque chose de spécifique, distinct de la matière, n'est qu'un *mythe*, que l'atome matériel, avec ses mouvements, suffit à l'explication correcte de tous les phénomènes, physiques, physiologiques, psychologiques ; que la force, la vie, l'âme pensante . . . sont des *reliquats* des temps passés, dont il faut balayer le domaine de la science ; que la matière seule *a prise sur la matière* ; « que celui qui admet encore que » la force est quelque chose de spécifiquement distinct de la matière ne voit » pas plus loin que son nez » (j'extrait textuellement de l'un des plus célèbres de ces ouvrages). Si l'on jugeait de la solidité de ces assertions d'après l'aplomb, d'après le ton d'urbanité, d'après le fanatisme d'un genre nouveau, avec lesquels elles sont posées, on se hâterait en vérité de se tenir pour convaincu !

Dans mon ANALYSE ÉLÉMENTAIRE DE L'UNIVERS (\*), j'ai examiné avec soin l'ensemble de ces hypothèses explicatives ; j'ai fait ressortir l'insuffisance de celles mêmes qui affectent un caractère sérieux, insuffisance portant non-seulement sur les détails de la forme, mais encore et surtout sur le fond. Je me hâte de le dire : on peut ne pas admettre dans leur entier les vues synthétiques qu'avec la plus extrême sobriété, j'ai opposées à ces hypothèses, et j'ajoute que d'ailleurs quiconque voudra rester juste reconnaîtra que fort loin d'avoir eu la prétention de dire ce que *sont* la chaleur, l'électricité, l'attraction . . . , je me suis bien plutôt astreint à démontrer ce qu'*elles ne sont pas* : c'était déjà faire un grand pas en avant. On peut, je le répète, ne pas admettre la partie synthétique, mais la partie critique de mon livre reste debout, intacte, sans réfutation, sans réponse. Je n'ai pas un mot à en retrancher.

Les conséquences tranchées qui découlent du présent mémoire, non-

---

(\*) Un volume in-8°, chez Gauthier-Villars, 55, quai des Augustins, à Paris. — Dans plusieurs travaux antérieurs, et dès la première édition de Thermodynamique, j'avais fait ressortir l'insuffisance de la doctrine, entre autres, qu'aujourd'hui j'examine exclusivement dans cette critique. Dans le volume auquel je renvoie, j'ai donné le développement nécessaire, et sous forme générale, à l'examen de ces grandes questions.

seulement autorisent, mais rendent indispensable un retour vers cette partie critique. Je le ferai bref et accentué.

Lorsqu'on voit l'assurance avec laquelle s'affirment aujourd'hui les doctrines qui rapportent aux seuls mouvements de l'atome matériel l'ensemble, l'universalité des phénomènes, on est en droit de s'attendre à ce qu'il y ait unanimité aussi sur les qualités qu'on assigne à cet être unique, fondement de toute existence. Or dès le premier examen des systèmes particuliers proposés, on éprouve la plus étrange déception ; on s'aperçoit que l'atome du chimiste, celui du physicien, celui du métaphysicien, celui du mathématicien . . . . n'ont absolument de commun que le nom ! Résultat inévitable du morcellement actuel de nos sciences, chacun, dans son casier, se fabrique un atome qui satisfait aux exigences des phénomènes particuliers qu'il étudie, sans s'inquiéter le moins du monde des exigences propres aux phénomènes du casier voisin. Le métaphysicien bannit les principes de l'attraction, de la répulsion, comme des rêves : le mathématicien, qui analyse les lois de l'élasticité, celles de la propagation de la lumière, les admet implicitement, sans même les nommer (jamais on n'expliquera la propagation longitudinale des vibrations transversales admises en optique, sans rendre les atomes vibrants solidaires par quelque chose d'autre que les atomes eux-mêmes). Le chimiste ne peut expliquer le groupement des atomes dans ses molécules souvent si compliquées, sans attribuer à ses atomes des qualités spécifiques qui les distinguent : pour le physicien et le métaphysicien, partisans des doctrines modernes, l'atome est, au contraire, toujours et partout le même. Que dis-je ! on n'est pas plus d'accord dans une seule et même science sur les qualités de l'atome. Chacun le construit à sa guise pour l'explication de tel phénomène restreint dont il s'occupe en particulier. Dussé-je passer pour sévère, je ne puis m'empêcher de faire une réflexion critique générale, dont il me sera facile de montrer la justesse.

Dès qu'il est question d'atomes, de forces . . . ., bien des personnes, et parmi elles se trouvent des esprits très puissants et élevés, semblent perdre toute boussole, et sautent à pieds joints par-dessus les règles les plus élémentaires dictées par le raisonnement et par le bon sens. Il est très permis, par exemple, de poser cette question : la matière est-elle divisible à l'infini ou

existe-t-il une limite à cette divisibilité? Et la discussion de cette question est de la plus haute importance; mais ce qui est bien évident, c'est que si cette divisibilité existe réellement, *il n'y a plus d'atomes*, que tout l'espace est alors rempli de matière plus ou moins dense, plus ou moins rare, et qu'il n'est désormais plus possible d'attribuer les phénomènes dynamiques en général à des chocs de parties matérielles en état permanent de mouvement . . . . Il est tout aussi évident que si, au contraire, cette divisibilité a une limite, l'atome existe réellement, qu'il a un certain volume *fini*, si petit que ce soit d'ailleurs, et qu'il est séparé des autres atomes : ou par un espace *absolument vide*, ou par un espace *rempli de quelque chose d'autre que la matière*. C'est sur ce dernier dilemme seul que peut alors désormais porter la discussion. Est-il concevable pourtant qu'il se trouve des métaphysiciens qui ne semblent pas même se douter de ces évidences? Une idée incontestablement grande a été émise dans les derniers temps. « L'atome n'est, dit-on, qu'un centre de force. » Cela est à la rigueur soutenable. Mais n'est-il pas évident alors qu'il n'existe plus, dans le monde physique, que la force? Ne tombe-t-on pas dans une absurdité flagrante quand on nie en même temps la réalité de la force? Ne justifie-t-on pas ainsi les ridicules discussions sur la réalité du monde externe, dont on aurait pu croire la science débarrassée une fois pour toutes. N'entendons-nous pas en ce moment même parler de la *viscosité* des gaz poussés à la dernière limite de la raréfaction? Mais puisque ces gaz, disons, cette *matière raréfiée* n'est constituée que par des atomes en mouvement, ce sont donc les atomes eux-mêmes qui sont visqueux?

Mais quittons le domaine de la fantaisie.

Acceptons l'atome, tel qu'il est *nécessairement*, dès qu'on n'admet que lui et ses mouvements : Nous allons voir de suite ce qu'est ce *nécessairement*. Tenons pour certain que l'attraction Newtonienne est un vain mot, que quand deux masses matérielles tendent l'une vers l'autre, ce n'est nullement par suite de l'action d'un principe spécifique, d'une Force interposée, mais uniquement parce que des atomes invisibles en mouvement les frappent dans leurs parties les plus intimes et les poussent les unes vers les autres. — Tenons pour certain que l'affinité chimique est un vain mot, et que quand des atomes restent combinés dans la molécule la plus compliquée, c'est encore

parce qu'ils sont sans cesse poussés les uns vers les autres par des atomes en mouvement... etc. — Quittons le domaine des seuls phénomènes physiques, et tenons pour tout aussi certain qu'un élément vivant, pensant, ayant la conscience de son être, qu'on loge dans un cerveau humain, n'est qu'un songe creux, et qu'ici encore ce sont les chocs des atomes en mouvement qui expliquent ce mythe. Nous reconnaitrons bientôt ce que valent toutes ces certitudes. Mais quelle est, voyons-le d'abord, la supériorité de cette doctrine, préconisée aujourd'hui comme étant la seule sensée, la seule que puisse admettre le penseur *qui prétend voir plus loin que son nez* ?

C'est, dit-on, la seule claire qui ait été proposée. Voyons quelle est cette clarté.

Entre un corps en repos relatif et un corps en mouvement, il existe bien certainement une différence de *constitution* (je me sers avec intention d'un mot aussi caractéristique); l'un renferme, ou du moins représente quelque chose de plus que l'autre, puisque pour modifier ce quelque chose, autrement éternel en existence, il faut une dépense d'action. Or, de ce quelque chose, nul d'entre nous n'a la moindre notion, la moindre idée claire, rien même qui de loin ressemble à une notion correcte. Est-ce dès lors faire un bénéfice en clarté que d'expliquer toutes choses par un état dont on ne soupçonne ni la nature ni l'origine? L'hypothèse qui fait de cette *inconnue* le DIEU CRÉATEUR des phénomènes, et même des existences, est-elle plus claire que n'importe quelle autre qu'on voudra y substituer? A-t-elle le droit de se dire rationnelle?

Le mouvement, dit-on, ne peut jamais disparaître, il ne peut que passer d'un atome, ou d'une masse matérielle (peu importe), à l'autre, *immédiatement*. Il y a longtemps que j'ai réfuté et réduit à l'absurde, cette assertion fondamentale, et *sine qua non*, de la doctrine que nous discutons. J'y reviens ici sous la forme la plus concise possible. — Lorsque deux billes, élastiques, sphériques, de masses égales, se mouvant sur une même ligne droite avec des vitesses égales, mais opposées en direction, se rencontrent, elles commencent à se déformer dès qu'elles se trouvent en contact. De cette déformation naît une *tension interne* dont l'effet est la diminution rapide de la vitesse des deux billes, son extinction complète, puis sa reproduction intégrale, mais en sens

opposé, dans les deux masses. Si courte que soit la durée de tout l'ensemble du phénomène, cette durée est *finie* et même mesurable. C'est un des plus grands progrès de la mécanique moderne, on ne saurait assez le signaler, d'avoir établi que la notion de temps ne peut être disjointe de toute explication du choc des corps. Pendant un instant infiniment petit, nos deux billes sont en repos et ce n'est que graduellement et non instantanément que la vitesse se rétablit : elles renferment donc *quelque chose* qui est *capable de créer* le mouvement détruit. La doctrine matérialiste répond ici avec aplomb que la vitesse n'est éteinte qu'en apparence dans nos billes ; qu'il y a eu simplement substitution d'un mouvement vibratoire à un mouvement de translation. Bien que personne ne puisse nous apprendre comment un mouvement de vibration interne peut donner au corps leur cohésion, leur élasticité, leur tendance énergique à revenir à une même forme, acceptons pourtant cette assertion toute gratuite. Ce qui est évident, c'est que ce qui a lieu pour deux billes élastiques, formées d'un nombre considérable, mais fini, d'atomes, a nécessairement lieu pour l'atome lui-même, à une seule différence capitale près : c'est que nous ne pouvons plus, sans tourner au risible, attribuer à un mouvement interne de l'atome lui-même la conservation intégrale du mouvement après le choc de deux atomes supposés doués de masses et de vitesses égales. Si l'atome a une *existence réelle*, il a un volume *fini*, quelque petit qu'il puisse être d'ailleurs ; et puisque ses mouvements, éternels en existence comme lui-même, ne peuvent être que déplacés, il faut qu'il soit, comme nos deux billes, parfaitement *élastique*, afin que les vitesses annulées au moment de la rencontre de deux atomes doués de vitesses égales et opposées en direction puissent être rétablies intégralement. Une durée finie et une déformation temporaire sont aussi nécessaires dans le choc de deux atomes que dans celui de deux billes. Soutenir le contraire, soutenir que deux atomes, supposés immuables en forme et en volume, puissent, *sans perte de force vive*, échanger intégralement leurs vitesses pendant le choc, c'est arguer sur l'inconnu, c'est passer du domaine de la mécanique rationnelle sur celui de l'arbitraire et des rêves. Il faut, disons-nous, que l'atome, pour que ses seuls mouvements puissent tout expliquer, soit *parfaitement élastique* ; il faut qu'il renferme *quelque chose* qui soit

capable, en lui rendant sa forme, de *créer* le mouvement détruit (mouvement de translation, ou de vibration, ou de rotation, peu importe maintenant), de *créer* le mouvement *devenu zéro* pendant un temps infiniment petit.

Et maintenant :

Ce *quelque chose*, qu'en toute hypothèse, nous devons appeler désormais FORCE, est-il plus facile à comprendre, quant à sa nature, dans l'atome que dans l'espace qui entoure l'atome, fût-ce à l'infini ?

Chacun ici répondra dans un sens ou dans l'autre selon l'éducation de son esprit, selon sa manière habituelle de penser, selon les systèmes auxquels il se sera acclimaté à son insu même ; mais indépendamment de ce qui nous semble facile ou difficile à comprendre une question préalable se pose, et impérieuse : L'atome, s'il existe, est-il *effectivement élastique* ?

Un des faits premiers que je crois avoir le mieux démontré dans plusieurs de mes travaux de thermodynamique, c'est que le volume apparent des corps est constitué par deux parties absolument distinctes : un volume immuable en grandeur, qui appartient à la partie matérielle du corps ; un volume variable, qui n'a rien de commun avec cette partie. Je puis me permettre de renvoyer, sur ce sujet, à mes travaux ; il serait trop long, et je pense d'ailleurs, fort inutile, de donner même seulement le résumé des démonstrations expérimentales et analytiques auxquelles je suis arrivé.

Nous pourrions clore dès à présent la discussion et dire que la doctrine discutée repose sur une erreur fondamentale de fait ; mais cette doctrine a pris des racines profondes, elle a séduit tant d'esprits, que nous devons continuer notre examen sous d'autres faces.

Cette doctrine, entendons-nous dire de tous côtés, rend admirablement compte des faits nouveaux concernant l'équivalence des phénomènes dynamiques, la *transmutabilité* des FORCES, la conservation de l'énergie, de la force vive . . . . Il est en vérité difficile de garder son sérieux devant une semblable assertion ; elle ressemble par trop aux naïvetés attribuées à M. de La Palisse. En expliquant un phénomène par les mouvements d'un atome doué de masse et d'élasticité parfaite, on introduit implicitement dans les raisonnements, comme dans les équations algébriques qu'on peut édifier sur eux, le *principe de la conservation de la force vive, du travail mécanique*.

Est-il bien étrange alors qu'on retrouve les résultats de ce principe au bout des raisonnements, au bout des équations? N'est-ce pas précisément l'opposé qui serait étrange, impossible?

La doctrine dont nous parlons a la prétention d'expliquer clairement l'origine et la formation des mondes, la *sécrétion* de la pensée, la vie organique . . . . . L'explication de l'attraction gravifique, des attractions et répulsions électriques, magnétiques, n'est qu'un jeu au dire des adeptes.

Il serait hors lieu ici de nous occuper des grands problèmes d'origine, de développement, dans le règne inorganique comme dans le règne organique. Je ne poserai qu'une seule question préalable; elle n'est point hors lieu. La matière, avec les mouvements de ses atomes, existant de toute éternité, elle a dû agir de toute éternité aussi, dans le même sens et pour produire les mêmes effets. Comment se fait-il donc alors que les mondes, qui ne sont que les résultats de ces mouvements, ne soient pas éternels eux-mêmes, et soient, au contraire, essentiellement finis en durée, si loin qu'on place d'ailleurs leur commencement et si gradué qu'on le fasse? Pour toute personne ayant le sens droit et possédant seulement les éléments de philosophie mathématique, cette question équivaut à une réfutation radicale de la doctrine à laquelle elle s'adresse. On dira peut-être que les mondes que nous avons sous les yeux et dont nous faisons partie intégrante, ont été détruits et reproduits une infinité de fois de la même manière, et qu'ainsi notre question perd sa valeur. Je renverrai simplement les personnes qui font cette objection aux magnifiques travaux de M. Clausius. Elles reconnaîtront promptement que la possibilité de telles répétitions des mondes est réfutée par les principes mêmes de la thermodynamique.

Une remarque se présente d'elle-même à l'esprit. Elle est digressive, en ce sens qu'elle me force à quitter pour un moment la forme exclusivement critique de ces pages, mais elle est tellement caractéristique que je ne saurais l'omettre sans laisser une lacune. L'école matérialiste, et d'autres aussi d'ailleurs, ont maintes et maintes fois posé l'objection suivante :

« Les mondes, ayant eu un commencement et étant par conséquent finis » dans le temps, la puissance créatrice se serait donc tenue inactive pendant

» toute une éternité ! N'est-ce point là une réfutation sans réplique de  
 » l'existence même d'une telle puissance ? »

Cette objection, comme on voit, est la contre-partie de celle que nous faisons à l'existence éternelle de la matière, à cette différence près qu'elle se tourne directement contre ceux qui la font. Étant données ou l'éternité d'une puissance créatrice, ou celle de la matière, nous sommes en effet forcés d'opter entre une *non-activité, infinie en durée*, ou de cette puissance, ou de la matière. Or tandis que nous pouvons concevoir l'une, nous pouvons déclarer l'autre absolument impossible. Je dis : nous pouvons concevoir l'une . . . . L'homme ne peut absolument rien créer ni rien détruire ; il ne peut, n'en déplaise à son orgueil, qu'arranger et déranger l'équilibre de ce qui a reçu l'être. De toutes les attributions dont il a plu aux philosophes et aux théologiens de doter le Créateur, la puissance créatrice est la seule dont il nous soit impossible d'avoir la moindre idée (et c'est, soit dit en passant, cette impossibilité qui pousse certains hommes à douter de l'existence même d'une puissance créatrice). Ce que nous concevons, au contraire, très clairement, pour peu que nous y songions sérieusement, c'est qu'une puissance, douée de volonté et placée par le fait même de son existence en dehors des conditions finies du temps et de l'espace, puisse agir ou ne pas agir, tandis qu'il nous est rigoureusement impossible d'admettre qu'une puissance aveugle, agissant fatalement et sans la conscience de l'action, comme la matière et ses mouvements, ait jamais pu ne pas agir. Je le répète, ce qui se comprend de la part d'une puissance douée de volonté, est inadmissible de la part d'une puissance aveugle. Que nous comprenions ou que nous ne comprenions pas la nature de l'une ou de l'autre de ces deux puissances, nous sommes forcés d'opter entre elles, et le sens de l'option ne peut laisser place à l'hésitation, quand nous rentrons en nous-mêmes. Au point de vue purement subjectif de notre manière de concevoir les choses, il est permis de douter que qui que ce soit comprenne mieux le DIEU-MOUVEMENT, aveugle, fatal, agissant de fait comme créateur des formes dans l'univers, que le DIEU-VIVANT, conscient de lui-même, agissant par sa seule volonté propre.

L'ensemble de l'argumentation précédente, qui repose tout entière sur les données fondamentales de la science moderne, me paraît constituer la



preuve la plus solide, sinon même la seule, de la création de la MATIÈRE, et j'ajoute maintenant formellement, de tous les autres ÉLÉMENTS DE L'UNIVERS.

Si je m'arrête un peu plus longtemps aux problèmes de psychologie, de physiologie, de biologie en général, prétendus si victorieusement résolus par notre doctrine, c'est précisément parce qu'elle a ramené ces problèmes à des questions de physique pure. Quand on lit l'un, pris au hasard, des nombreux ouvrages publiés dans ces dernières années sur ces sujets, il semble qu'une lumière nouvelle se soit faite. Pour ne faire qu'une citation, le livre de Buchner (FORCE et MATIÈRE), est catégorique en ce sens, et bannit tous les doutes. La pensée, dans toute sa pureté, n'est qu'une sécrétion du cerveau, c'est-à-dire un résultat des mouvements des atomes composant la masse cérébrale, mouvements excités par d'autres venus du dehors. — Je l'avoue (dussé-je aussi passer pour ne pas *voir plus loin que mon nez*), je ne comprends pas bien clairement comment le choc de deux billes élastiques peut se constituer en un moi, ayant la conscience de lui-même ? « Que parlez-vous, » dira-t-on, de deux billes ? Ce sont des milliards de billes, rangées en bon ordre, qui s'entre-choquent dans votre cerveau ! L'avouerai-je encore humblement, je ne comprends pas clairement non plus comment une qualité qui fait radicalement défaut à deux quelconques de ces milliards de billes prises isolément, puisse devenir une propriété de leur ensemble ? Ceci ne rappelle-t-il pas un peu le raisonnement de cet épicier dont parle quelque part Arago : « Je perds à la vérité sur le détail, disait ce brave homme, » mais je me rattrape sur la quantité » ?

Qu'avec les panthéistes, on adjuge à la matière, supposée divisible à l'infini et partout répandue, des qualités autres encore que celles que nous lui trouvons en physique, en chimie, en mécanique, qu'on admette, par exemple, que dans de certaines conditions déterminées, elle peut s'élever en titre, devenir FORCE, PRINCIPE VIVANT et PENSANT, et se maintenir indéfiniment à ces degrés, ce sera soutenir une opinion qu'ont partagée de très-grands esprits, une opinion qui, soumise à l'épreuve de l'ensemble des faits connus aujourd'hui, est destinée à tomber aussi sans doute, mais qui du moins ne heurte ni le sens commun, ni les affirmations les plus légitimes de notre conscience.

Pareille opinion pourtant n'est à son tour que mysticisme et obscurité au dire de la doctrine que nous discutons. Une question cependant est à poser. La traduction française du livre de Buchner s'est vendue, paraît-il, à plus de cinquante mille exemplaires ; on ne se trompera qu'en trop peu en comptant un pareil nombre d'exemplaires pour l'ouvrage en sa langue ; et ces cent mille exemplaires supposent tout au moins cinq cent mille lecteurs. Les lecteurs de tels livres ne sont pas, comme on dirait trivialement, *les premiers venus* : par ce fait même qu'ils s'intéressent à ces grands problèmes de cosmogonie et qu'ils se croient appelés à les comprendre, ils doivent posséder au moins les premiers éléments de nos sciences physiques et naturelles. Eh ! bien, je me permets de demander si sur cet immense nombre de lecteurs, il en est un seul qui comprenne clairement comment les oscillations des milliards d'atomes de notre cerveau peuvent constituer un être ayant la conscience de lui-même, capable d'aimer, de sentir le beau, de s'élever jusqu'à l'infini, d'aller jusqu'à en faire dans le calcul infinitésimal un instrument d'investigation des phénomènes de la nature ? Que dis-je ! En est-il un seul qui comprenne comment les vibrations des atomes peuvent donner lieu à la formation de la moindre cellule organique ? Combien y en a-t-il, sur ce grand nombre, qui aient pu dire sincèrement et sérieusement, en fermant le livre : « Hier je croyais, aujourd'hui JE SAIS ? » Ne s'aperçoivent-ils pas tous qu'ils en sont encore réduits à croire l'auteur sur parole, et que pour croire à ce qu'ils ont lu, il leur faut une foi tout aussi robuste que celle du plus aveugle des croyants passés, présents et futurs ?

On pourrait s'attendre à ce qu'en passant du domaine de la vie sur celui des phénomènes purement physiques, notre doctrine reprenne triomphalement le caractère de clarté auquel elle prétend. On tomberait ainsi pourtant dans une erreur étrange. Mais une remarque de haute justice est à sa place ici avant tout. Dès qu'on arrive à l'interprétation du monde physique, il y a aujourd'hui presque unanimité dans les opinions de tous les camps : L'atome matériel et ses mouvements sont les seules existences nécessaires et réelles de ce monde. Ceux-là mêmes qui croient sans sourciller aux choses les moins démontrables se refusent absolument à croire à l'existence d'un élément autre que la matière ; pas un ne semble même se douter qu'en bannissant la Force du monde phy-

sique, il n'a plus aucun motif plausible pour loger une âme dans un cerveau humain ! En ce sens du moins, il est juste de le dire, l'école matérialiste est plus logique et plus conséquente avec elle-même. Mais laissons les contradictions humaines ce qu'elles sont, et allons à notre but.

Entre deux masses matérielles qui tendent l'une vers l'autre, à des distances infinies, qu'il y ait ou non entre elles d'autres masses matérielles :

« Il se trouve certainement *quelque chose*, de matériel ou d'immatériel, » qui détermine le rapport de ces masses » (Newton) (\*).

A cette assertion, évidente de vérité, de l'un des plus grands génies qu'ait vus ce monde, nous pouvons et nous devons ajouter deux questions, l'une secondaire toute subjective, l'autre dominante et objective.

Est-il plus facile de comprendre le rapport que nous appelons attraction, comme établi par des atomes matériels en mouvement que comme établi par un principe spécifique que nous nommerons FORCE ?

Ce rapport est-il établi réellement par des atomes en mouvement ou l'est-il par une force ?

Pour rester conforme à l'esprit de cette partie exclusivement critique de ce travail, je ne répondrai qu'aux premiers termes de chacune de ces deux questions.

Prenons la matière dans ses deux états extrêmes : disséminée dans l'espace, comme elle l'était à l'origine des mondes ; concentrée en sphéroïdes distincts gravitant les uns autour des autres.

En ce qui concerne le premier état, je me hâte de le dire, je n'exprime plus aucune opinion personnelle ; je ne pose que ce qui est aujourd'hui considéré généralement comme l'expression des faits historiques.

Depuis l'EXPOSITION DU SYSTÈME DU MONDE, de Laplace, un nouveau jalon a été posé dans la chronologie des mondes. Allant immensément en arrière de

(\*) Je cite avec une intention formelle le grand nom de Newton.

Dans un ouvrage que j'espère mener à bonne fin, SUR LA CONSTITUTION DE L'ESPACE CÉLESTE, je montrerai comment plusieurs écrivains ont systématiquement et étrangement défigurés le sens très clair d'une lettre de Newton à Bentley. Cette lettre, lue *comme elle est écrite*, ne laisse aucun doute sur l'opinion de Newton quant à la cause de la gravitation.

la nébuleuse cosmique du grand analyste, on a admis que la matière se trouvait primitivement diffuse dans un espace prodigieusement plus étendu que celui des nébuleuses, et que ses atomes, *obéissant à la gravitation*, s'étaient peu à peu dirigés vers des centres communs. De la force vive acquise par les atomes dans cette chute les uns vers les autres, et des chocs réciproques se produisant une fois que la concentration est arrivée à un certain terme, seraient nées la chaleur colossale et la lumière des diverses nébuleuses, et par suite celles qui subsistent encore dans les soleils éparpillés dans l'espace.

Nous disons : les atomes, obéissant à la gravitation . . . . . Mais puisque cette force n'est qu'une fiction, il fallait donc qu'il existât *deux catégories d'atomes bien distincts*. Les uns en un état de repos relatif et se servant réciproquement d'écrans ; les autres animés, au contraire, d'une vitesse colossale, plus de cent mille fois supérieure à celle de la lumière (Laplace le démontre implicitement, en examinant si la gravitation a un mouvement de propagation), sillonnant l'espace dans toutes les directions possibles et frappant en tous sens les atomes en repos. Deux remarques essentielles se présentent de suite à l'esprit : 1° Je dis qu'il fallait qu'il existât des atomes à l'état de repos tout au moins relatif. Il est facile de reconnaître en effet que si tous eussent été en mouvement, et en toutes directions imaginables, leur concentration graduée en des espaces limités et définis fût devenue absolument impossible, mécaniquement parlant. 2° Je dis : se servant réciproquement d'écrans. Ceci en effet est la condition *sine qua non* pour que les atomes animés de vitesse indéfinie puissent pousser les atomes en repos relatif dans une direction plutôt que dans une autre et simuler ainsi la cause de ce qui nous semble être une attraction. Mais une condition de plus est nécessaire : Si les atomes en repos relatif eussent été éparpillés uniformément dans l'espace, ils n'eussent pu être poussés dans un sens plutôt que dans un autre par les atomes moteurs, car ceux-ci les eussent frappés de la même façon en tous sens. Il fallait donc qu'ils *fussent groupés déjà d'une certaine façon régulière*.

En résumé, et pour expliquer les phénomènes avec la matière seule, nous sommes obligés d'admettre deux classes d'atomes :

1° Les uns, *atomes moteurs*, animés d'une vitesse colossale, doués de masse, parfaitement élastiques, destinés à simuler ce que nous appelons l'attraction Newtonienne, la gravitation.

2° Les autres, atomes mus, *destinés seuls à former un jour la partie tangible, visible, sensible, des mondes*; atomes *groupés déjà* d'une certaine façon régulière qui seule rend possible leur concentration en espaces déterminés, sous l'action des atomes moteurs.

Je viens de présenter sous sa seule forme scientifiquement acceptable et plausible l'interprétation que notre doctrine est condamnée à donner de la formation des mondes; je lui ai donné avec l'attention la plus scrupuleuse la forme la plus précise, la plus logique; et, dussé-je être accusé d'une vanité excessive, je crois l'avoir fait avec plus de clarté qu'on n'en trouve dans aucun des nombreux ouvrages modernes écrits sous l'inspiration de la doctrine. Je me le demande pourtant: la seule lecture des lignes précédentes ne sera-t-elle pas la réfutation radicale de l'interprétation? Est-il un seul de mes lecteurs qui dira: « Cela est parfaitement compréhensible, et cela est » vrai? » — Mais faisons un saut immense, acceptons ce qui précède; allons à la matière constituée à l'état de masses distinctes dans l'espace, et au lieu de nous occuper de la raison qui fait graviter les sphéroïdes célestes les uns vers les autres, occupons-nous d'un problème bien plus ordinaire, que nous avons continuellement sous les yeux, que nous appelons naturel à force de le voir et d'y être *impliqués corporellement*. Le poids de plomb, de fer, de liège, que je soutiens de la main me paraît pesant; il tombe dès que je l'abandonne à lui-même, se dirige partout suivant la verticale du lieu, et ne s'arrête que quand il a rencontré la surface de la terre. Il a fallu des siècles de navigation pour reconnaître que les choses se passent de même aux antipodes, que c'est par suite vers le centre de la terre que paraissent se diriger les corps qui tombent; il a fallu le génie de Newton pour démontrer que la pesanteur s'étend jusqu'à la lune, qu'elle fait tendre vers la terre; que la terre et les planètes tendent vers le soleil par la même raison et de la même manière qu'un poids quelconque tend vers la terre. — Entre la sphère de plomb (par exemple), que je soutiens de la main, et la terre, il se trouve de toute nécessité *quelque chose* qui établit le *phénomène pesant*. Le mythe

FORCE GRAVIFIQUE étant banni de la science, c'est aux chocs d'atomes invisibles, c'est aux atomes moteurs que nous sommes obligés de recourir pour expliquer ce phénomène en vertu duquel nous sommes si fatalement retenus *corporellement* à la surface de notre terre. La sphère que je soutiens tend vers le centre de la terre ; elle reçoit donc *plus* de chocs en *dessus* qu'en *dessous*, et c'est le globe terrestre qui sert de *bouclier* contre les chocs des atomes arrivant par le bas. Mais le poids d'un corps dépend exclusivement de la quantité de matière que renferme son volume, et nullement de ce volume ni de sa surface externe. La terre elle-même est exactement dans le même cas que le poids que je soutiens. Si ma petite sphère était de platine au lieu d'être de plomb, elle pèserait à peu près le double ; et de même, si la masse terrestre avait une densité double de 5,5, soit 11, ma petite sphère aurait aussi une tendance double à tomber. Cherchons à nous rendre compte bien clairement de ce mécanisme. Nous en reconnaitrons bientôt tout aussi clairement les imperfections.

Concevons un seul atome matériel en repos placé à une distance quelconque de la surface terrestre. Si cet atome était unique dans l'espace, il serait, par hypothèse, continuellement frappé en toutes les directions possibles par les *atomes moteurs* ; également sollicité en toutes directions, il ne tendrait pas plus vers un point que vers un autre ; *il ne pèserait pas*. Mais il se trouve en face de la terre : Chaque atome de ce sphéroïde est lui-même frappé en toutes directions par les atomes moteurs ; toutefois, chacun, sur sa face opposée à notre atome unique, est *protégé* contre les chocs des *atomes moteurs* dirigés exactement selon la ligne de jonction, et réciproquement, chacun d'eux protège l'atome unique contre les chocs qu'il recevrait sur sa face antérieure. Il résulte de là que notre atome unique *tend* vers chacun des atomes terrestres, et que réciproquement chaque atome terrestre tend vers lui. En décomposant toutes ces tendances suivant une direction unique, celle du centre de la terre à notre atome unique, et en faisant la somme, nous aurons visiblement le *poids total* de l'atome vers la terre et de la terre vers l'atome. — Avant de signaler la contradiction physique étrange, insurmontable, que renferme l'énoncé précédent, complétons notre interprétation. Au lieu d'un atome unique placé en face de la terre, supposons un corps proprement dit, formé

lui-même de myriades d'atomes ; une sphère de plomb , par exemple. En admettant que chaque atome de ce corps se trouve exactement dans les mêmes conditions que s'il était isolé, il est clair qu'il sera sollicité vers le centre de la terre de la même manière que l'atome d'abord unique ; et si nous faisons la somme de toutes ces tendances isolées, il est évident que nous trouverons le poids de la sphère de plomb vers la terre et de la terre vers la sphère de plomb ; il est de plus évident que ce poids sera proportionnel au produit des sommes des atomes de la terre et de la sphère de plomb.

Je viens de présenter, avec toute la clarté que j'ai pu y mettre, la seule hypothèse explicative que notre doctrine puisse donner du phénomène de la pesanteur, de l'attraction Newtonienne. Nul ne pourra sans injustice me reprocher de l'avoir à dessein rendue vulnérable. J'ai pourtant dû à toute force y introduire un Si mortel. J'ai dit : « Il faut que chaque atome de la terre et chaque atome de la sphère de plomb se comportent l'un vis-à-vis de l'autre, comme s'ils étaient seuls. » Voyons à quelle conséquence nous mène cette condition formelle. Faisons passer une ligne droite suivant une direction quelconque, suivant celle des centres, par exemple, par nos deux sphères. Quelque hypothèse qu'on veuille faire sur le volume et sur les intervalles de séparation des atomes d'un corps solide, on ne saurait admettre qu'il ne se trouve dans chaque sphère *qu'un* atome sur la ligne droite, qu'il ne s'y en trouve pas, au contraire, un très grand nombre. Pour que chacun, dans la sphère où il se trouve, puisse se comporter comme s'il était seul, il faut donc de toute nécessité qu'il n'arrête que les atomes moteurs destinés à le pousser vers son opposé de l'autre sphère, et qu'il se laisse, au contraire, librement traverser par ceux qui sont destinés à rendre pesants ses voisins :

*Il faut admettre, en un mot, que les atomes sont à la fois perméables et imperméables aux atomes moteurs.*

Cette condition est à la fois si évidente comme nécessité et si contradictoire comme possibilité, qu'aucun esprit sain ne pourra jamais l'admettre. Avec elle pourtant tombe la seule explication possible que notre doctrine puisse donner du phénomène de l'attraction de la matière par la matière, explication que personne assurément n'a jamais pu se flatter de trouver claire.

Si maintenant de l'attraction Newtonienne nous passons à celle qu'on est

convenu d'appeler moléculaire, à celle qui donne aux corps solides leur cohésion, leur résistance à la rupture, leur élasticité, et puis si nous passons à celle qui constitue l'affinité chimique, et qui réunit d'une façon plus ou moins définie et stable les atomes différents, nous nous heurtons contre des difficultés tout aussi grandes, tant au point de vue purement subjectif, qu'au point de vue de la réalité objective.

Dans le phénomène de la gravitation, la tendance des corps les uns vers les autres est proportionnelle aux masses ; dans le phénomène de la cohésion, la masse n'a plus aucune part. La condition contradictoire que nous venons de reconnaître dans l'explication du premier phénomène frappe au centuple l'explication du second.

Prenons comme exemple de discussion, les phénomènes que nous présente une corde de piano. Cette corde, de bon acier, supporte, pour 4 millimètre carré de section, une traction de plus de 40 kilogrammes ; elle s'allonge sous cette charge, mais reprend sa longueur primitive dès qu'on la rend libre : elle est élastique ; au piano, elle rend le même son pendant des mois, malgré l'effort considérable auquel elle est soumise : elle ne se déforme donc pas définitivement. De quelle façon les atomes de l'acier sont-ils retenus si énergiquement dans leurs positions respectives ? Des vibrations internes, longitudinales ou transversales, qu'on voudrait invoquer en ce but, bien loin de retenir les parties en regard, les disjoindraient et les disperseraient. Le MYTNE-FORCE étant banni même de l'intérieur des corps, c'est encore dans les atomes moteurs invisibles, sillonnant l'espace en toutes directions possibles avec des vitesses presque infinies, que nous sommes obligés de chercher notre explication. Les chocs des atomes moteurs arrivant transversalement contre les atomes de l'acier ne peuvent visiblement pas créer la résistance longitudinale. Cette résistance, comme de raison, est absolument indépendante de la longueur et rigoureusement proportionnelle à la section de la corde : ce sont donc les atomes moteurs traversant longitudinalement la masse de l'acier qui peuvent seuls par leurs chocs créer la résistance à la rupture. Je n'ai pas besoin de répéter les raisonnements que j'ai présentés ci-dessus pour démontrer que la condition de perméabilité et d'imperméabilité simultanées des atomes est ici encore, s'il est possible, plus impérieusement nécessaire que pour l'explication de l'attraction Newtonienne. Il faut en effet que non seule-



ment les atomes de chaque paire que nous pouvons concevoir sur la longueur soient poussés énergiquement l'un contre l'autre, absolument comme si tous les autres n'existaient pas, mais encore que l'atome d'une paire soit poussé tout aussi énergiquement contre le plus voisin de l'autre paire, sans que pour cela il se produise une somme de tendance au rapprochement, une somme qui aille en croissant d'un bout à l'autre de la corde. On peut poser le défi à l'esprit le plus inventif de donner une solution mécaniquement correcte d'une telle condition.

Arrivons-nous à une clarté plus grande, et surtout à une solution plus vraie, quant à l'explication de l'affinité chimique ?

Pour rendre compte de la formation et de la stabilité d'une combinaison chimique, nous sommes obligés d'admettre que les *atomes moteurs* poussent *électivement* les uns vers les autres les atomes appelés à s'unir et à se grouper et qu'ils les maintiennent ensuite dans des positions stables, quel que soit d'ailleurs l'état de dispersion des molécules une fois formées. Je m'explique à l'aide d'un exemple très clair. Comment se forme la molécule octuple si compliquée du chloroforme ? Nous avons rejeté l'existence d'un élément dynamique spécial, capable de mettre en rapport les atomes d'espèces différentes ; nous n'avons même admis qu'une seule espèce d'atomes matériels. Aucune vibration interne imaginable ne peut logiquement expliquer la constitution définitive de notre molécule, considérée isolément. C'est dès lors à une cause externe que nous sommes contraints de recourir ; or, en fait de cause externe, il n'existe par hypothèse que des atomes en mouvement. Ce sont donc, comme nous disons, les atomes moteurs sillonnant en tous sens l'espace qui pénètrent dans la masse du mélange de chlorite de chaux, d'eau et d'alcool, servant à produire le chloroforme, et qui *poussent électivement* (je ne puis employer d'autre expression) les atomes de carbone, de chlore, et d'hydrogène les uns vers les autres, pour les grouper sous la forme  $C^2HCl^5$ . Un pareil phénomène n'est déjà, je pense, pas facile à comprendre ; mais la réalité est encore plus compliquée. Considérons en effet le chloroforme à l'état de vapeur. La pression qu'exerce cette vapeur contre les parois du récipient qui la contient est due, par hypothèse, aux chocs des molécules. Cette hypothèse, qui se trouve réfutée par les faits relatés dans ce mémoire, est du moins rationnelle et soutenable. Acceptons-la une dernière fois. Puisque

la molécule de chloroforme *rebondit* en frappant les parois, elle est élastique, comme doit l'être l'atome lui-même d'un gaz supposé simple. Il faut donc admettre de toute nécessité maintenant que les atomes moteurs *poursuivent électivement* les atomes de la molécule  $C^2HCl^3$ , dans ses trajets d'une paroi à l'autre, et que quelle que soit la position relative de chaque molécule, ils en frappent les atomes de façon à maintenir leurs positions respectives dans le groupe et à la leur rendre après la déformation produite nécessairement pendant le choc. Il est permis de douter qu'un seul des cinq cent mille lecteurs du livre FORCE ET MATIÈRE puisse trouver bien claire une telle interprétation, et c'est pourtant la seule qu'on puisse donner, en restant conséquent avec les principes de la doctrine et avec soi-même.

Il est dit, il est vrai, maintes et maintes fois dans le cours des ouvrages où se trouve exposée cette doctrine, que tous les phénomènes naturels ont lieu en vertu des propriétés, partout identiques à elles-mêmes, de la matière. Cela est évident, en un sens du moins. Mais une propriété s'exerce d'une certaine manière, et c'est précisément cette manière que nous cherchons à découvrir dans nos sciences. Dire que la matière tend vers la matière, à distance, ou infinie ou seulement atomique, en vertu de ses propriétés, c'est se contenter d'une solution d'un risible en comparaison duquel l'explication donnée des effets de l'opium par les médecins de Molière, devient presque chose sérieuse.

Passons à des phénomènes admirablement étudiés aujourd'hui, et d'un genre très différent des précédents. Au moment où nous électrisons deux sphères isolées, placées en regard, à *n'importe quelle distance l'une de l'autre*, elles tendent à se rapprocher ou à s'éloigner l'une de l'autre. Au moment où nous faisons passer un courant électrique par deux conducteurs rectilignes et parallèles, ils tendent, selon le sens du courant, à se rapprocher ou à s'éloigner l'un de l'autre, *quelle que soit aussi l'intervalle de séparation*. Tout l'espace, en tous sens, qui entoure ces sphères, ces conducteurs, et j'ajoute, qui entoure les pôles de deux aimants permanents placés en regard, tout cet espace, dis-je, est bien certainement rempli par *quelque chose* qui établit les rapports. Quoi qu'en aient pu dire quelques physiciens, ce quelque chose n'a rien de commun avec la matière interposée, avec l'air atmosphérique, par exemple, car les phénomènes d'attraction et de répulsion ont lieu tout aussi

bien dans le vide le plus parfait que nous puissions produire. C'est donc encore à des atomes invisibles éparpillés dans l'espace, et à leurs mouvements que nous sommes obligés de recourir pour expliquer les phénomènes, dans la doctrine de l'unité de matière. Mais comment ces atomes, en apparence du moins, inactifs tant qu'un corps n'est pas électrisé, tant qu'un courant ne traverse pas notre conducteur, se mettent-ils tout d'un coup en mouvement jusqu'à l'infini, dès que le phénomène électrique, statique ou dynamique, est établi ? Et quelle est la nature de ce mouvement, qui simule l'attraction et la répulsion ? Quelle est la différence d'espèces de mouvements surtout, quand on passe de l'état statique à l'état dynamique ? Une sphère électrisée n'a nulle action sur un courant électrique ou sur le pôle d'un aimant. Il faut donc admettre autant d'espèces de mouvements qu'il y a d'espèces de phénomènes électriques. Bien des explications, certes, ont été proposées, et l'on n'aurait que l'embarras du choix. Je ne serai toutefois ni injuste ni sévère, en disant qu'elles revêtent toutes un tel caractère d'arbitraire et de haute fantaisie, qu'elles sont si fort en contradiction les unes avec les autres, qu'elles s'excluent réciproquement à ce point que ce serait en vérité peine perdue de s'y arrêter un seul instant : pas une d'entre elles ne revêt seulement une apparence de forme scientifique et rationnelle.

Une impression pénible saisit parfois le penseur le plus ferme, le plus calme, tandis qu'il approfondit cette doctrine qui prétend rapporter l'universalité des phénomènes à l'atome matériel et à ses mouvements. A force d'entendre affirmer avec aplomb les hypothèses les plus impossibles, les interprétations les plus opposées aux faits, même sur le terrain de la physique pure, on se laisse entraîner par la fiction, on est tenté de la tenir pour vraie. Mais le bon sens reprenant bientôt ses droits, on en arrive à douter soi-même de ce que l'on tenait pour le mieux démontré ; on craint pour la stabilité des choses ; on se sent presque en péril au milieu d'un univers bâti d'une façon aussi arbitraire et systématique. Les étranges récits que nous fait Gulliver au sujet des inquiétudes qui tourmentaient les habitants de l'île de Laputa, cessent de sembler si risibles : on est soi-même tenté, le soir, de jeter un coup d'œil sur la voûte étoilée pour voir si tout y est en ordre, et le matin, de demander à son voisin si le soleil s'est levé à l'heure voulue !

Une question se présente spontanément à notre esprit. Comment une

doctrine qui, regardée de près, repose sur une assise scientifique aussi peu solide, a-t-elle pu gagner tant d'adeptes et devenir le CREDO des esprits les plus cultivés des diverses classes de nos sociétés modernes? Je dis: tant d'adeptes . . . . C'est en effet en vain que certaines personnes essaieraient de se faire la moindre illusion sur le nombre des partisans avoués, et surtout tacites, de cette doctrine. Les raisons de cette diffusion sont multiples. Les unes sont réellement du domaine de la science; les autres reposent sur des considérations absolument étrangères à la science. Jetons d'abord un regard sommaire sur les premières.

L'une d'elles repose visiblement sur une méprise que commettent beaucoup de personnes quant à la vraie portée des mathématiques, considérées comme instrument d'investigation dans le monde des phénomènes naturels, méprise qui semble exagérer la puissance de cette belle science, et qui en réalité la diminue. Dans ces derniers temps plusieurs mathématiciens, pour traduire en équation les phénomènes de ce que l'ancienne physique appelait les impondérables, ont accepté l'hypothèse qui attribue ces phénomènes aux mouvements des atomes matériels, et comme les équations obtenues conduisent *nécessairement* à des résultats corrects parce que l'hypothèse, fautive ou juste, repose elle-même sur un principe supérieur correct, on en a aussitôt conclu que l'hypothèse répond à la vérité. Pour qu'une telle conclusion pût devenir légitime, il faudrait: 1° qu'il fût réellement nécessaire, pour la traduction mathématique des phénomènes, d'introduire une hypothèse quelconque dans les équations; 2° et que cette hypothèse fût en outre la seule disponible. Il me serait facile, de trouver de nombreux exemples à l'appui de ce que j'avance; je m'en tiens à un seul pris au cœur même de mon sujet. Dès l'apparition de la thermodynamique, et pour expliquer comment la chaleur peut sembler apparaître et disparaître par le fait seul d'un travail mécanique, positif ou négatif, opéré dans des conditions convenables, on s'est hâté de toutes parts d'assimiler cette force à un mouvement matériel et on a fini par admettre sérieusement que la thermodynamique repose sur la réalité de cette hypothèse auxiliaire. M. Clausius, en ce sens, a fait une exception mémorable, qui, je ne crains pas de le dire, ne trouve sa pareille que dans la manière de procéder de Newton quant à la découverte de la gravitation universelle. Tout en admettant que la chaleur est en effet

un mouvement des atomes pondérables, tout en donnant à cette interprétation la forme la plus acceptable, M. Clausius a néanmoins eu la sagesse de construire les équations fondamentales de la nouvelle science sans recourir à autre chose qu'à l'énoncé de deux faits, servant d'assises inébranlables, l'un à la première proposition de la thermodynamique, l'autre à la seconde. Et c'est là, il faut bien le dire, ce qui donne au travail du grand analyste un caractère monumental et impérissable. En m'exprimant ainsi, je ne fais qu'obéir à un sentiment de légitime admiration, indépendant de toute considération personnelle.

Pour qu'une hypothèse subsidiaire invoquée pût être mise réellement hors de doute par ce seul fait que les résultats fournis par les équations répondent correctement aux faits, il faudrait qu'elle fût unique, ou tout au moins qu'en partant d'autres considérations, on parvint à éliminer toutes les autres. Tant qu'il en resterait seulement deux debout, on ne serait pas en droit de dire que l'une est plutôt vraie que l'autre. — La thermodynamique nous fournit encore une preuve frappante de la justesse de cette assertion. — Tandis que M. Clausius rapporte les phénomènes de la chaleur à des mouvements de l'atome, vibratoires dans les liquides et les solides, translatoires dans les gaz, un autre analyste éminent, trop tôt enlevé à la science, Rankine, expliquait les phénomènes thermiques par des mouvements tourbillonnaires des atomes et atteignait les mêmes résultats finaux, quant aux équations.

En résumé, les mathématiques ne peuvent nous conduire à la connaissance approximative de la nature des choses que par voie d'élimination et d'exclusion, en nous montrant que telle ou telle relation qu'elles nous font trouver entre deux phénomènes est inconciliable avec telle ou telle hypothèse subsidiaire. C'est précisément le plus beau côté de cette grande science de pouvoir, la plupart du temps, se passer d'hypothèse explicative et d'établir les rapports mathématiques des phénomènes indépendamment de toute explication sur la nature intime des choses.

La raison de l'extension si grande du matérialisme, que je viens de citer, ne concerne que les personnes, assez nombreuses, il est vrai, qui ne se font pas une idée bien nette du rôle des mathématiques dans nos sciences physiques. Je passe à une autre, bien plus générale, qui a eu prise sur beaucoup d'hommes de science très indifférents d'ailleurs aux hautes ques-

tions de philosophie naturelle. Elle repose sur la tendance que nous avons à généraliser outre mesure, et à tenir pour vrai et pour démontré dans tous les cas imaginables, ce qui ne l'est pas même encore en tel cas particulier.

Parmi les interprétations proposées pour rendre compte de l'universalité des phénomènes à l'aide des seuls mouvements des atomes matériels, deux, uniquement, répondent sous une certaine face aux faits et permettent d'en rendre compte. Ce sont : 1° Celle qui explique la constitution des gaz parfaits par des mouvements de translation des atomes supposés élastiques ; 2° celle qui explique les phénomènes de lumière par des vibrations d'un milieu matériel partout répandu.

Ces deux interprétations commandent dès l'abord deux restrictions capitales, qui en changent d'un coup la nature.

En ce qui touche à la première, je dis : *la constitution des gaz parfaits*. Il ne s'agit plus en effet, comme on voit, de la théorie rationnelle de M. Clausius, qui, non-seulement dans les solides et les liquides, mais encore dans les vapeurs et les gaz eux-mêmes, admet l'attraction moléculaire et l'attraction chimique, phénomènes que personne n'a expliqués et n'expliquera jamais par des mouvements d'atomes. Ai-je besoin de faire remarquer en passant, mais sous forme expresse, qu'en général les idées émises par cet éminent analyste se trouvent complètement hors de cause dans toute cette discussion ? Rien dans les écrits de M. Clausius, rien absolument n'autorise personne à le ranger parmi les partisans de la doctrine que je discute dans ces pages.

En ce qui concerne l'interprétation des phénomènes lumineux, elle suppose implicitement *l'élasticité* du milieu qu'on fait vibrer *luminiquement*; et c'est, soit dit en passant, ce que tous les mathématiciens qui se sont occupés de haute optique ont admis sans même le mentionner. Mais qu'est-ce qu'un milieu élastique ? Ce n'est nullement un espace rempli seulement d'atomes élastiques, séparés par des intervalles vides. Avec un tel milieu jamais on n'expliquera la propagation longitudinale des vibrations transversales admises de fondation en optique mathématique. C'est un milieu où les atomes, sans se toucher, sans se heurter, sont solidaires les uns des autres, jusque dans les subdivisions infinitésimales de l'espace, de telle sorte que quand l'un change de position, les autres successivement sortent aussi de leur position d'équilibre. Jamais, aucun esprit sérieux *n'essaiera* même

d'expliquer les phénomènes de l'optique sans recourir immédiatement à la notion d'une FORCE, rendant ainsi les particules solidaires les unes des autres.

L'une de ces interprétations, nous le voyons, ne rend compte absolument que de la constitution des gaz, et ne s'applique nullement à l'ensemble des phénomènes thermiques. L'autre renferme en elle-même une réfutation de la doctrine des mouvements matériels considérés comme causalité générale. C'est pourtant visiblement de ces deux interprétations, *tenuës pour vraies*, qu'on est parti pour dire que toutes les autres manifestations dites impondérables s'expliquent de la même manière, que dis-je, pour aller jusqu'à avancer que l'attraction gravifique elle-même relève de mouvements de l'atome ! On s'est dit : « La chaleur est maintenant parfaitement expliquée » par des mouvements de l'atome, la lumière l'est aussi ». Et sans s'apercevoir que ces deux explications exigent déjà, pour rester logiques, l'invocation de quelque chose d'autre que l'atome matériel, sans remarquer que jamais personne n'a proposé, quant à la nature des attractions et répulsions, magnétiques, électriques, gravifique, une explication qui ait le sens commun, on a néanmoins conclu, et ajouté : « Donc tous les autres phénomènes, impondérables ou dynamiques, ne relèvent eux-mêmes que de mouvements » de l'atome. » Il me semble impossible de trouver un exemple plus frappant des excès où conduit l'esprit outré de généralisation, joint à l'esprit de système.

Les conséquences d'une telle manière de généraliser sont de nature à frapper l'esprit le moins attentif. On édifie toute une doctrine de philosophie naturelle sur l'interprétation, tenue pour correcte, d'une seule classe de phénomènes. Cette interprétation vient-elle à être réfutée, toute la doctrine croule d'une pièce, sans qu'il soit nécessaire de s'en prendre à ses diverses parties isolément. C'est ce qui a lieu de la façon la plus frappante au cas particulier où nous nous trouvons. L'explication donnée de la constitution des gaz à l'aide des mouvements des atomes tombe devant mes récentes recherches analytiques et expérimentales développés dans le présent mémoire. Avec elle s'écroule définitivement, et une fois pour toutes, une doctrine complète dont les prétentions ambitieuses sont même imparfaitement résumées sous le titre

pompeux de THÉORIE VIBRATOIRE DE LA NATURE, donné par l'un des adeptes à un exposé du système.

Je dis : « l'esprit de système ». Ceci est visiblement le côté tout à fait subjectif de la question, impliquant un défaut grave de jugement. Mais quelle est précisément la raison qui peut pousser tant de personnes, très diverses d'intelligence, de caractère, d'éducation, d'habitudes d'esprit, à se jeter tête baissée dans une doctrine systématique et arbitraire ? — La réponse, je le pense, peut se résumer en une seule phrase : un excès en engendre toujours un autre contraire, et, lorsqu'il ne le légitime ou ne le justifie, l'explique tout au moins.

En face du matérialisme radical, se pose en effet un prétendu spiritualisme, exclusif, intolérant, dont les défenseurs, par les excès des affirmations gratuites auxquels ils se livrent, semblent avoir pris à cœur de justifier les excès les plus outrés de la négation. Sur le terrain des phénomènes physiques, étrangement à tort tenu par eux pour neutre, ceux-là mêmes rejettent la notion de FORCE, comme incompréhensible, comme fausse en principe, qui sur un autre terrain sont toujours prêts à accepter les assertions les plus incroyables. « Le mouvement, disent-ils avec l'école matérialiste, ne peut » naître que du mouvement, et ne peut se transmettre que directement de » matière à matière; l'attraction gravifique, considérée comme dérivant » d'autre chose que d'un mouvement invisible, est une impossibilité. » Au lieu d'admettre avec la thermodynamique : « Que l'ÉNERGIE de l'Univers est » une constante (Clausius) », ce qui est indéniable en toute hypothèse, on affirme que la somme des *forces vives*, en d'autres termes, que la somme des produits de toutes les masses par les carrés des vitesses respectives, est une constante, ce qui est, au contraire, faux en toute hypothèse. Et puis, paradoxe et non sens inouïs ! on affirme que dans notre corps, l'ÂME a prise *directement* sur la partie matérielle de notre organisme ; d'où il résulterait évidemment que dans le centre cérébral, d'où part l'impulsion, ici désormais purement vibratoire, de la matière des nerfs, l'ÂME pourrait créer un travail mécanique sans nulle dépense assignable ! Si du domaine du monde physique nous passons sur celui de la vie, nous nous heurtons contre plus de contre-sens encore. — On concède, par exemple, une âme à l'animal : mais cette



âme est périssable et destinée à s'éteindre comme une flamme : comme si un élément qui a reçu une existence réelle pouvait s'éteindre, comme si d'autre part on ne soutenait pas que le mouvement, qui n'est pourtant qu'un état de la matière, ne peut jamais cesser. Je dis : on concède. A moins que reculant de quelques milliers d'années, et prenant à la lettre le texte mosaïque, on n'aille jusqu'à dire que l'âme de l'animal, c'est le sang. De là à soutenir qu'une âme est de trop dans un cerveau humain, il n'y a qu'un pas. Hélas ! ce pas n'a-t-il pas été franchi par une moitié au moins, lorsque nous trouvons une grave assemblée de docteurs agitant la question de savoir si la femme est douée d'une âme ?

Mais arrêtons-nous sur cette voie. De pareils égarements ne supportent plus même l'examen du critique le plus conciliant. Il est une notion sans laquelle, quoi qu'on en puisse dire dans toutes les écoles de négation, aucune société civilisée n'est possible : c'est celle d'une responsabilité future chez tous les membres de cette société. En présence des incroyables affirmations que nous rencontrons sur notre route, on peut à bon droit se demander qui a le plus contribué à ébranler cette notion élémentaire, de ceux qui se posent comme ses défenseurs ou de ses agresseurs ?

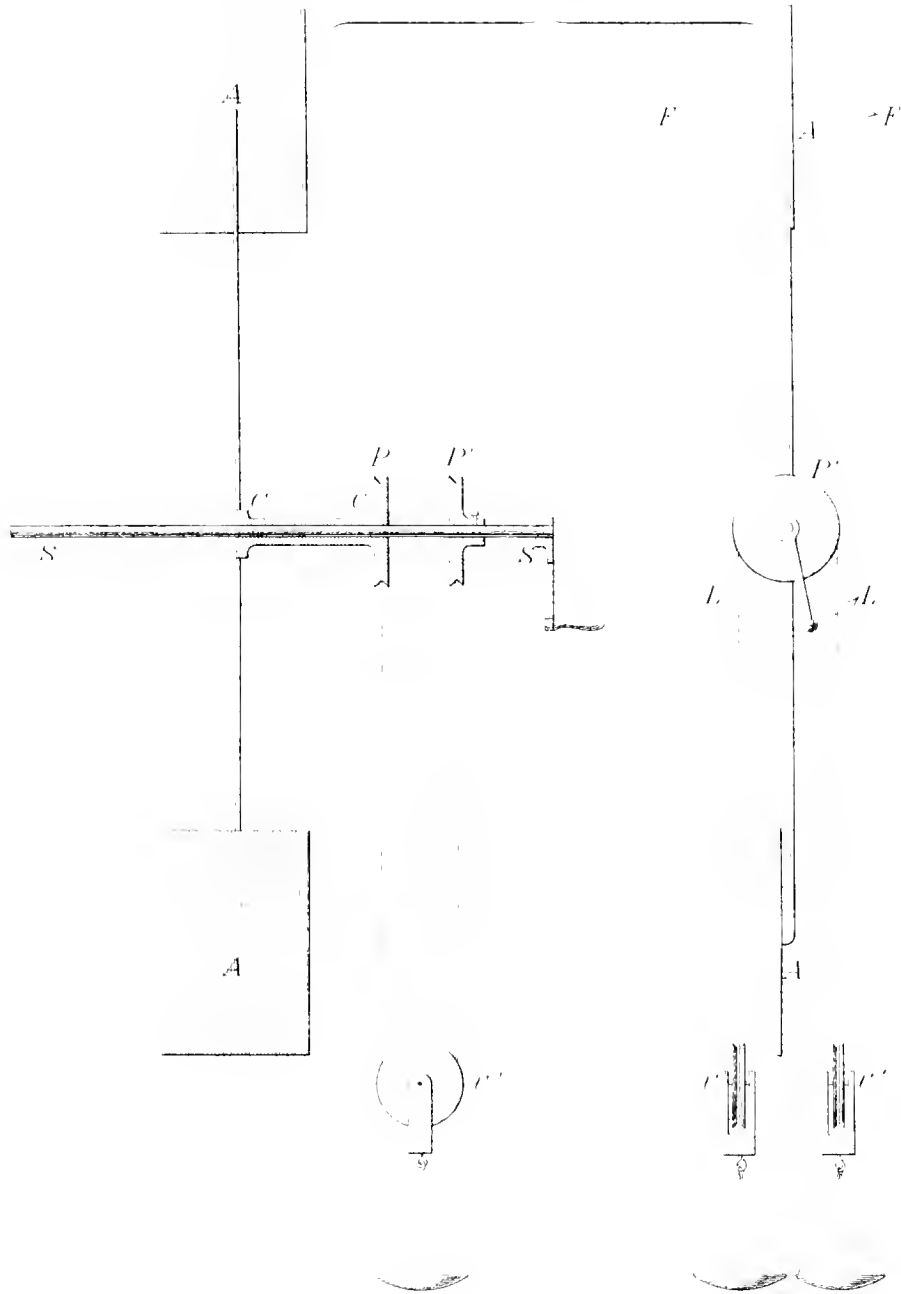
Répétons-le bien haut : un excès en engendre un autre et l'explique. J'ajoute cette fois formellement : *sans le justifier*. J'ajoute aussi, pour rester dans l'esprit qui a dicté ces pages : erreur pour erreur, il serait à la rigueur permis de préférer celle qui, à l'être souffrant, montre dans le lointain une lumière consolatrice, à celle qui le condamne à une sombre et stoïque résignation. Mais le savant, le philosophe . . . . et l'honnête homme, ont sans doute le droit de dire : *in medio veritas*, de rejeter les extrêmes et de tenir pour vraie une doctrine plus tolérante qui grandit l'homme en élevant et en grandissant en même temps tous les êtres.

Ici s'arrête naturellement mon œuvre de critique scientifique. J'y suis resté physicien pur, sans oublier cependant qu'après tout le physicien est homme et n'a pas le droit de se croire supérieur à ce qui est humain.





Fig 1





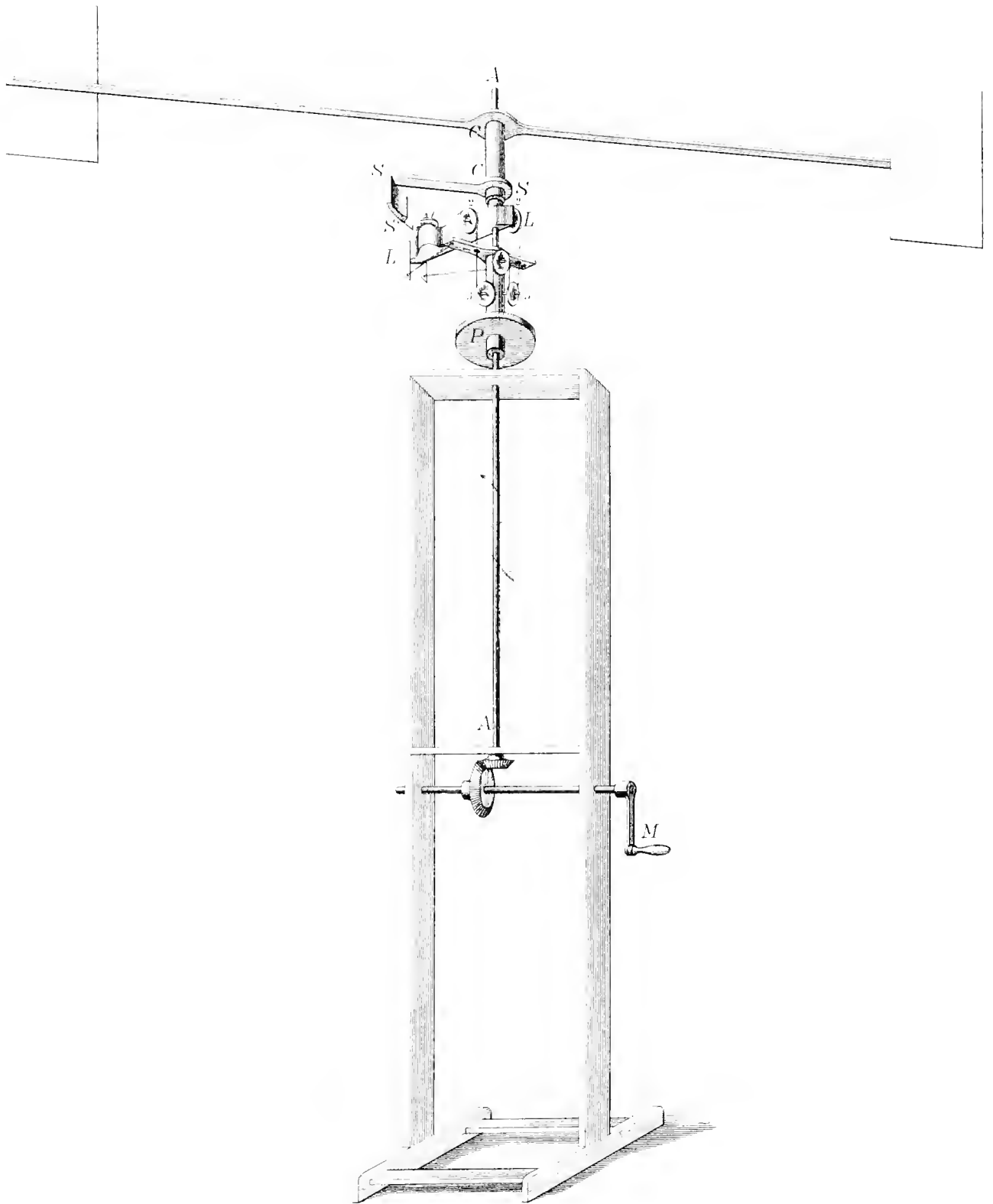


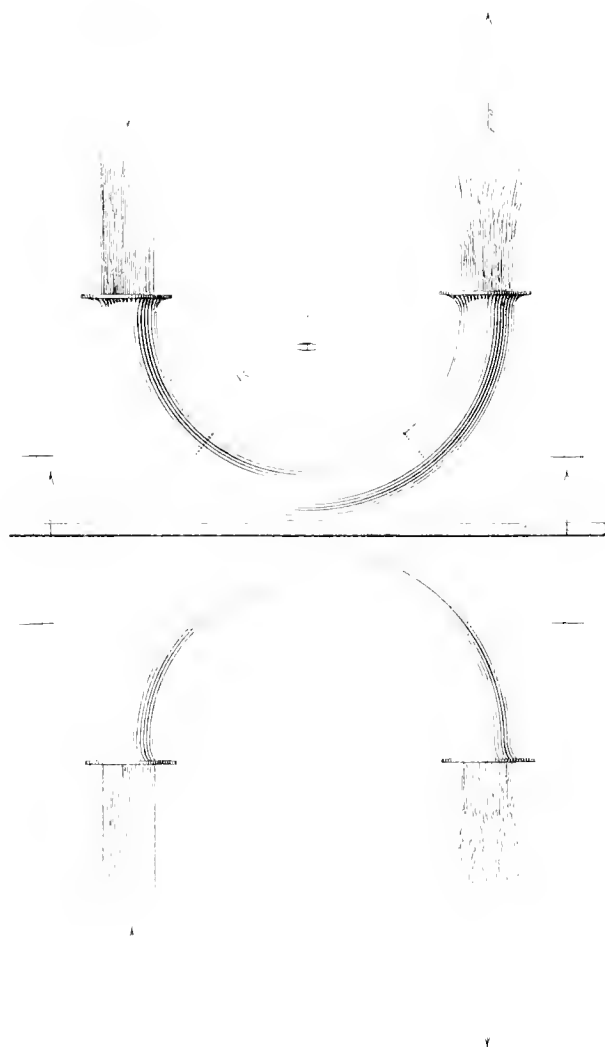








Fig. 4











3 2044 093 293 264

