MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere nec timide.

10

TOME DIXIÈME.

LIÉGE,

CHEZ H. DESSAIN, IMPRIMEUR.

BRUXELLES,
CHEZ C. MUQUARDT.
LEIPZIG, MÊME MAISON.

PARIS,
CHEZ RORET, LIB^re^.
RUE HAUTEFEUILLE, 10 *bis*.

1855.

I. — *Nouvelles démonstrations de la formule du binome de Newton*,

par **A. Pâque**,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES A L'ATHÉNÉE ROYAL DE LIÉGE.

FORMULE BINOMIALE.

L'élévation aux puissances n'est qu'une opération de multiplication; la formule du binôme donnant le développement d'une puissance quelconque d'un binôme et par extension d'un polynome, devrait donc occuper, en Algèbre, une toute autre place que celle qui lui est assignée.

Ce déplacement a pour cause la méthode suivie pour établir la formule binômiale, méthode longue et peu élégante qui fait dépendre la démonstration de la formule d'une théorie qui ne présente d'applications importantes et nécessaires, que dans les parties plus avancées des mathématiques.

En effet, on expose d'abord la théorie des permutations, arrangements et combinaisons, théorie dont les idées nouvelles se développent assez difficilement à l'esprit qui n'en aperçoit pas immédiatement l'utilité; on effectue ensuite le produit d'un certain nombre de facteurs binômes, ayant tous le même premier terme. On examine soigneusement la forme de ces produits, et bientôt on parvient à soupçonner les lois de leur formation. Mais comme ce n'est là qu'une induction on justifie la généralisation de ces lois par une démonstration. Enfin on suppose égaux les seconds termes des facteurs binômes; on observe et l'on formule les changements que cette nouvelle hypothèse introduit, et seulement alors on est en droit de reconnaitre le développement avancé par Newton.

Pour donner à la formule binômiale la place que lui assigne, en Analyse, la déduction logique des idées, il faudrait trouver une démonstration élémentaire indépendante de la théorie des permutations, arrangements et combinaisons : tel est le but que s'est proposé l'auteur de ce travail.

Comme préliminaires établissons trois propositions dont les deux premières appartiennent à la divisibilité des fonctions algébriques, et la troisième aux identités algébriques.

Théorème I.

a *et* b *étant deux fonctions quelconques, et* m *un nombre entier*

le quotient $\frac{a^m}{a-b}$ *ne peut être entier.*

Démonstration. Déterminant par les procédés connus, un nombre n de termes du quotient, on aura :

$$\frac{a^m}{a-b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots + a^{m-n}b^{n-1} + \frac{a^{m-n}b^n}{a-b}.$$

Donnant dans le reste $\frac{a^{m-n}b^n}{a-b}$, à n sa plus grande valeur m, c'est-à-dire ayant cherché le $m^{\text{ième}}$ terme b^{m-1} du quotient, on a pour reste

$$\frac{b^m}{a-b}.$$

Or, ce reste ne peut jamais être nul, puisqu'il faudrait que

$$b^m = 0.$$

Corollaire.

La différence des puissances semblables de deux fonctions algébriques est multiple de la différence de ces mêmes fonctions.

Soit donc à prouver que $a^m - b^m$ est divisible sans reste par $a-b$, a et b étant deux fonctions quelconques et m un nombre entier. Comparant la division $\frac{a^m - b^m}{a-b}$, à celle $\frac{a^m}{a-b}$, on conclut immédiatement que le quotient conserve la même forme et que le reste correspondant au $m^{\text{ième}}$ et dernier terme du quotient, est

$$\frac{b^m - b^m}{a-b}.$$

Et l'on voit que le reste est nul. — Le quotient a la forme

$$a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots a^{m-n}b^{n-1} + \ldots ab^{m-2} + b^{m-1}.$$

Théorème II.

Si une équation identique a ses deux membres de même forme par rapport aux puissances de la variable, les coëfficients des mêmes puissances de part et d'autre, sont égaux entre eux.

x étant une variable, soit l'identité

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots = A'+B'x+C'x^2+D'x^3\ldots$$

D'où

$$A-A'=(B'-B)x+(C'-C)x^2+(D'-D)x^3+\ldots.$$

ou $$A-A'=x[B'-B+(C'-C)x+(D'-D)x^2+\ldots] \qquad (1)$$

x étant quelconque le produit du second membre est une quantité essentiellement variable; cette relation (1) ne peut donc exister qu'autant que simultanément on aura

$$B'-B+(C'-C)x+(D'-D)x^2+\ldots.=0. \qquad (2)$$

et $$A-A'=0, \quad \text{d'où} \quad A=A'.$$

On prouverait de même que $B=B'$, en remarquant que la relation (2) a la même forme que (1); et ainsi de suite on aurait

$$C=C', D=D'\ldots.$$

Ce travail est divisé en deux parties : la 1re démontre la formule binômiale dans le cas d'un exposant entier et positif; la 2me établit la formule dans le cas d'un exposant quelconque.

PREMIÈRE PARTIE.

De la formule du binome de Newton, considérée dans le cas d'un exposant entier et positif.

Avant de nous occuper du développement binômial pour ce cas, nous étudierons un développement plus général et qui renferme celui-là comme cas particulier.

I. — p *étant entier, soit à rechercher le développement auquel donne lieu le produit*

$$(1+x)(1+ax)(1+a^2x)\ \ldots.\ (1+a^{p-1}x).$$

L'exposant de a dans chaque facteur indiquant combien de binômes précèdent celui que l'on considère, il y a nécessairement p facteurs dans le produit.

Il est clair que p sera le plus haut exposant de x dans le développement; d'autre part, en multipliant entre eux tous les premiers termes, indépendants de x, on aura un terme indépendant de x, ou en x^0. D'ailleurs tous les premiers termes des facteurs binômes étant égaux entre eux et à l'unité, le terme en x^0, dans le produit, est 1.

Ordonnant par puissances entières, positives et croissantes de la variable x, le développement aura la forme

$$D = 1 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_px^p.$$

Il est évident, en effet, d'après la composition des facteurs, qu'il ne pourra jamais se présenter dans D de puissances fractionnaires de x, et encore bien moins d'exposants négatifs.

Les quantités A_1, A_2, A_3, ... $A_{p-1}A_p$ sont des *coëfficients à déterminer*, fonctions seulement de a, et de ses diverses puissances; cherchons la composition de ces coëfficients.

Il était nécessaire de vérifier, comme nous venons de le faire, la forme du développement D; car ainsi cette forme n'est plus une hypothèse, mais bien un fait. Trop souvent il arrive dans l'emploi de la *méthode des coëfficients à déterminer*, de donner gratuitement à un développement la forme que cette méthode assigne; dans la seconde partie on verra avec quelle circonspection on doit faire application de cette méthode.

La forme de D étant indépendante de toute valeur particulière de x, nous pouvons y changer x en ax; désignant par D′ le résultat de ce changement, il viendra :

$$D' = (1+ax)(1+a^2x)\dots(1+a^px), \quad \text{ou}$$
$$D' = 1 + A_1ax + A_2a^2x^2 \dots + A_pa^px^p.$$

Remarquons que

$$D' = D\,\frac{1+a^px}{1+x},$$

d'où
$$D - D' = \frac{D}{1+x}(1-a^p)x; \qquad \text{or}$$

$$D - D' = A_1(1-a)x + A_2(1-a^2)x^2 + \dots + A_p(1-a^p)x^p.$$

Donc

$$\frac{D}{1+x}(1-a^p)x = A_1(1-a)x + A_2(1-a^2)x^2 + \dots + A_p(1-a^p)x^p.$$

Divisant par x les deux membres de cette égalité, et chassant le dénominateur, on a :

$$D(1-a^p) = \left[\begin{aligned} &A_1(1-a) + [A_2(1-a^2)+A_1(1-a)]x + [A_3(1-a^3)+A_2(1-a^2)]x^2 + \dots \\ &+ [A_p(1-a^p)+A_{p-1}(1-a^{p-1})]x^{p-1} + A_p(1-a^p)x^p. \end{aligned}\right]$$

Remplaçant D par sa valeur :

$$(1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\dots+A_px^p)(1-a^p) =$$
$$A_1(1-a) + [A_2(1-a^2)+A_1(1-a)]x + \dots + A_p(1-a^p)x^p.$$

Le second des théorèmes établis comme préliminaires de ce travail, fournit, par son application à cette relation, la succession des égalités :

$$A_1(1-a) = 1-a^p. \qquad (1)$$
$$A_2(1-a^2) + A_1(1-a) = A_1(1-a^p). \qquad (2)$$

. . . .

$$A_n(1-a^n) + A^{n-1}(1-a^{n-1}) = A_{n-1}(1-a^p). \qquad (n)$$

. . . .

$$A_p(1-a^p) + A_{p-1}(1-a^{p-1}) = A_{p-1}(1-a^p). \qquad (p)$$
$$A_p(1-a^p) = A_p(1-a^p). \qquad (p+1)$$

Ces $p+1$ équations du 1er degré chacun quant aux coëfficients qu'elles contiennent, et dont la dernière est une identité, déterminerent les valeurs des p coëfficients, et l'on aura ainsi, par suite du théorème II déjà rappelé :

$$A_1 = 1 + a + a^2 + \dots + a^{p-2} + a^{p-1},$$

$$A_2 = \frac{A_1 a}{1+a}[1 + a + a^2 + \dots + a^{p-2}],$$

$$A_3 = \frac{A_2 a^2}{1+a+a^2}[1 + a + a^2 + \dots + a^{p-3}].$$

. . . .

Le coëfficient général A_n sera

$$A_n = \frac{A_{n-1} a^{n-1}}{1+a+a^2+\dots+a^{n-1}}[1 + a + a^2 + \dots + a^{p-n}].$$

Multipliant membre à membre ces diverses et dernières égalités, ordonnant tous les polynomes entrant dans les calculs relativement aux puissances croissantes de a, et faisant

$$V = \frac{a}{1+a} \cdot \frac{a^2}{1+a+a^2} \cdot \frac{a^3}{1+a+a^2+a^3} \dots \frac{a^{n-1}}{1+a+a^2+\dots+a^{n-1}},$$

$$T = (1 + a + a^2 + \dots + a^{p-1})(1 + a + a^2 + \dots + a^{p-2})\dots$$
$$(1 + a + a^2 + \dots + a^{p-n}).$$

On aura $\qquad A_n = V \cdot T.$

La composition de T est simple et facile à définir : c'est un produit dont les différents facteurs sont les sommes des puissances successives de a, depuis la $0^{\text{ième}}$ jusqu'à celles $p-1, p-2, p-3\dots$ $(p-n)^{\text{ième}}$ respectivement, ces sommations étant arrêtées à celle, où pour un terme qui en a n avant lui, on réunit les $p-n$ premières puissances de a (celle de degré 0 comprise).

On peut écrire d'une manière générale

$$T = \times \sum\nolimits_{p-n}^{p-1}{}_{\!\!\!\!0}\; a^i.$$

Cette notation signifiant que T est le produit $(\times)$ de la suite des sommes $\sum$ des différentes (i) puissances de a, prises depuis la $0^{\text{ième}}$ et arrêtées successivement aux $p-1, p-2, p-3, \dots$ $(p-n)^{\text{ième}}$.

Quant à la composition de V, qui est une fraction, il est aisé d'apercevoir que son numérateur est égal à a élevé à une puissance d'un degré égal à la somme des $n-1$ premiers nombres naturels; cette somme étant $\frac{n(n-1)}{2}$, le numérateur de V est

$$a^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Le dénominateur de V est composé en a, dans ses différents facteurs d'une manière analogue à celle dont sont composés par rapport à la même lettre, les différents facteurs de T; et conformément à la notation qui vient d'être adoptée, on aura :

$$V = \frac{a^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\times\sum_{o}^{n-1}{}^{o}\, a^i}.$$

Donc enfin :

$$A_n x^n = \frac{\times\sum_{p-n}^{p-1}{}^{o}\, a^i}{\times\sum_{o}^{n-1}{}^{o}\, a^i}\, a^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n. \qquad \text{(G)}$$

Tel est le terme général en ayant n avant lui dans le développement D; n passant par toutes les valeurs entières comprises entre o et p, la relation G fournira tous les termes du développement.

II. Le développement D contient évidemment $p+1$ termes. Cherchons la relation des coëfficients de deux termes en ayant respectivement n avant et après eux.

Le coëfficient du terme qui en a n avant lui sera immédiatement donné par

$$A_n = \frac{\times\sum_{p-n}^{p-1}{}^{o}\, a^i}{\times\sum_{o}^{n-1}{}^{o}\, a^i}\, a^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Dans la formule (G), n étant le nombre de termes qui précèdent celui considéré, le terme qui en a n après lui en a

$$(p+1)-(n+1) \text{ ou } p-n$$

avant lui. Donc pour avoir A_{p-n}, on changera n en $p-n$ dans G, ce qui donnera :

$$A_{p-n} = \frac{\times\sum_{n}^{p-1}{}^{o}\, a^i}{\times\sum_{o}^{p-n-1}{}^{o}\, a^i}\, a^{\frac{(p-n)(p-n-1)}{2}}.$$

Et par suite :

$$\frac{A_n}{A_{p-n}} = \frac{\times\sum_{p-n}^{p-1} a^i \cdot \times\sum_{0}^{p-n-1} a^i}{\times\sum_{0}^{n-1} a^i \cdot \times\sum_{n}^{p-1} a^i} a^{\frac{(p-1)(2n-p)}{2}},$$

ou
$$\frac{A_n}{A_{p-n}} = a^{\frac{(p-1)(2n-p)}{2}}. \qquad \text{(H)}$$

Telle est la valeur du rapport des coëfficients de deux termes situés à égale distance des extrêmes.

Il est important d'observer que l'exposant de a dans (H) est toujours entier ; en effet, soit p pair, $2n-p$ le sera également, et étant ainsi divisible par 2, l'exposant $\frac{(p-1)(2n-p)}{2}$ sera entier; soit p impair, alors $p-1$ est pair, et l'exposant de a est encore entier.

Notons que cet exposant est positif pour $n > \frac{p}{2}$ et négatif pour $n < \frac{p}{2}$.

III. a étant quelconque, recherchons ce qui se passe dans D lorsque le rapport (H) est égal à l'unité. On a donc :

$$a^{\frac{(2n-p)(p-1)}{2}} = 1, \text{ d'où } (2n-p)(p-1=0).$$

Condition qui pour être satisfaite exige que

$$2n=p, \text{ d'où } n = \frac{p}{2}.$$

La conséquence immédiate qui ressort de cette valeur de n est que p est pair. Ainsi :

Le développement du produit d'un nombre impair de facteurs de la forme $(1+a^ix)$ *n'a point de coëfficients situés à égale distance des extrêmes, qui soit égaux.*

Si p est pair et égal à $2q$, on aura $n=q$, donc alors le développement à un *terme milieu*, donnant lieu au rapport H égal à 1.

Il est à remarquer que si au moyen de la formule G on calcule la première moitié du développement, on pourra immédiatement, au moyen de (H), décrire la seconde partie.

IV. Examinons maintenant ce que devient **D** et son terme général, dans le cas particulier de $a=1$.

Tous les facteurs, en nombre p, qui par leur produit donnent lieu à **D**, deviennent égaux, d'où

$$\mathrm{D}=(1+x)^p.$$

Les puissances entières et positives de a étant égales entre elles et à l'unité, le terme général (G) affecte la forme

$$\mathrm{A}_n x^n = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots\ldots(p-n+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots\ldots n}.$$

Le rapport H, lorsqu'on y fait $a=1$ devient :

$$\frac{\mathrm{A}_n}{\mathrm{A}_{p-n}}=1.$$

On conclut, *p étant pair ou impair*, que les coëfficients des termes à égale distance des extrêmes sont égaux pour le développement qui se présente alors sous la forme :

$$(1+x)^p=1+\frac{p}{1}x+\frac{p(p-1)}{1\cdot2}x^2+\ldots$$
$$\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1\cdot2\ldots n}x^n+\ldots+x^p.$$

A l'effet d'avoir pour les deux termes du binôme deux quantités quelconques, posons $x=\frac{y}{z}$ dans ce développement, il viendra :

$$(z+y)^p=\left\{\begin{array}{l} z^p+\frac{p}{1}yz^{p-1}+\frac{p(p-1)}{1\cdot2}y^2z^{p-2}+\ldots \\ +\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1\cdot2\ldots n}y^nz^{p-n}+\ldots+\frac{p}{1}y^{p-1}z+y^p. \end{array}\right.$$

Tel est, comme on sait, le développement d'une puissance entière et positive d'un binôme quelconque.

DEUXIÈME PARTIE.

De la formule du binôme de Newton, dans le cas d'un exposant quelconque.

V. Toutes les démonstrations élémentaires de la formule dans le cas d'un exposant quelconque se fondent sur la méthode des coëfficients à déterminer, méthode qui ne peut être rigoureusement employée que lorsqu'on a, au préalable, vérifié si le développement peut être tel qu'on l'a supposé.

Toutes les fois que cette vérification n'aura pu être faite *à priori*, il sera prudent de ne pas supposer un tel développement possible; car, pour avoir négligé de faire cette vérification, des erreurs de suppositions, relatives à la nature d'un développement, peuvent rester inaperçues, la détermination des coëfficients ne dénonçant souvent pas ces erreurs.

Cette vérification si nécessaire de la forme assignée d'abord à un développement se fait :

Soit par *induction*, et alors on a soin de considérer assez de cas particuliers pour que la forme générale soit bien mise en évidence;

Soit par une démonstration rigoureuse.

Cela est très-important, car il se pourrait qu'une série parût obéir à une certaine loi pour un certain nombre de valeurs particulières de ses éléments, et que cette loi fût démentie par les valeurs suivantes; c'est ainsi, qu'en arrêtant la valeur de e aux 9 premières décimales, on croirait que e est une fraction périodique mixte; et cependant le retour de quatre chiffres décimaux de e est un fait purement accidentel, puisque l'on peut démontrer que e ne peut s'exprimer au moyen d'une fraction périodique.

La démonstration qui va être donnée de la formule du binôme, ne reposant pas sur la méthode des coëfficients à déterminer, écarte un germe d'incertitude inhérent à cette méthode; elle indique quand et comment le développement est impossible.

Soient deux développements procédant suivant les puissances croissantes et entières de x, et dont les coëfficients des différentes puissances s'obtiennent les unes des autres par la relation

$$C_\mu = C_{\mu-1} \cdot \frac{k-\mu+1}{\mu},$$

où μ est le nombre de termes qui précèdent celui ayant C_μ pour coëfficient; où k est égal à m (ou C_1) pour le 1er développement et égal à n (ou C_1) pour le second.

Les différents coëfficients de ces développements sont donc des fonctions de m et n respectivement (m et n étant quelconques).

Représentons comme suit ces deux séries, limitées la première à la puissance $r^{\text{ième}}$ de x, la seconde à la puissance $r'^{\text{ième}}$ de la même variable.

$$f(m) = 1 + M_1x + M_2x^2 + \dots + M_ix^i + \dots + M_rx^r,$$

$$f(n) = 1 + N_1x + N_2x^2 + \dots + N_ix^i + \dots + N_{r'}x^{r'}.$$

Etudions le produit de ces développements, et à cet effet cherchons quel y sera le coëfficient du terme en x^i.

Représentons par $P_1, P_2, P_3, \dots P_i, \dots P_{r+r'}$, les divers coëfficients successifs de ce produit.

Il est aisé de voir que P_i a pour expression :

$$P_i = M_i + M_{i-1}N_1 + M_{i-2}N_2 + \dots + M_2N_{i-2} + M_1N_{r-1} + N_{r-1}. \quad (1)$$

Introduisant dans les deux membres de cette égalité le facteur $\frac{m+n-i}{i+1}$, il viendra :

$$P_i\frac{m+n-i}{i+1} = \Big[M_i\frac{m+n-i}{i+1} + M_{i-1}N_1\frac{m+n-i}{i+1} + \dots$$
$$+ M_1N_{i-1}\frac{m+n-i}{i+1} + N_i\frac{m+n-i}{i+1}\Big]. \quad (2)$$

Transformons comme suit chacun des termes du second membre

$$M_i\frac{m+n-i}{i+1} = M_i\frac{m-i}{i+1} + M_i\frac{n}{i+1} = M_i\frac{m-i}{i+1} + M_iN_1\frac{1}{i+1},$$

$$N_1M_{i-1}\frac{m+n-i}{i+1} = N_1M_{i-1}\frac{m-i+1}{i+1} + N_1M_{i-1}\frac{n-1}{i+1},$$

$$N_2 M_{i-2}\frac{m+n-i}{i+1}=N_2 M_{i-2}\frac{m-i+2}{i+1}+N_2 M_{i-2}\frac{n-2}{i+1},$$

$$N_3 M_{i-3}\frac{m+n-i}{i+1}=N_3 M_{i-3}\frac{m-i+3}{i+1}+N_3 M_{i-3}\frac{n-3}{i+1}.$$

. . . .

$$M_3 N_{i-3}\frac{m+n-i}{i+1}=N_{i-3}M_3\frac{m-3}{i+1}+N_{i-3}M_3\frac{n-i+3}{i+1},$$

$$M_2 N_{i-2}\frac{m+n-i}{i+1}=N_{i-2}M_2\frac{m-2}{i+1}+N_{i-2}M_2\frac{n-i+2}{i+1},$$

$$M_1 N_{i-1}\frac{m+n-i}{i+1}=N_{i-1}M_1\frac{m-1}{i+1}+N_{i-1}M_1\frac{n-i+1}{i+1},$$

$$N_i\frac{m+n-i}{i+1}=N_i M_1\frac{1}{i+1}+N_i\frac{n-i}{i+1}.$$

Substituant dans (2) pour les premiers membres de ces égalités, respectivement leurs seconds, et classant le résultat d'une manière convenable, il viendra :

$$P_i\frac{m+n-i}{i+1}=\sum_0^i N_k M_{i-k}\frac{m-i+k}{i+1}+\sum_0^i N_k M_{i-k}\frac{n-k}{i+1}. \quad (3)$$

La quantité k passant par toutes les valeurs entières comprises entre 0 et i, la relation (3) présente deux catégories de termes liés entr'eux comme suit :

$$M_\mu=M_{\mu-1}\frac{m-\mu+1}{\mu},\ \text{ou}\ \mu M_\mu=M_{\mu-1}(m-\mu+1). \quad (4)$$

$$N_\mu=N_{\mu-1}\frac{n-\mu+1}{\mu},\ \text{ou}\ \mu N_\mu=N_{\mu-1}(n-\mu+1). \quad (5)$$

On aura en faisant successivement $\mu=1, 2, 3, \ldots k, i-1, i, i+1$, dans les équations de génération :

$$\left.\begin{array}{r}
M_1=m\,,\\
2M_2=M_1(m-1)\,,\\
3M_3=M_2(m-2)\,,\\
4M_4=M_3(m-3).\\
\cdots\cdots\\
(i-1)M_{i-1}=M_{i-2}(m-i+2)\\
iM_i=M_{i-1}(m-i+1),\\
(i+1)M_{i+1}=M_i(m-i).
\end{array}\right\}(G)
\qquad
\left.\begin{array}{r}
N_1=n\,,\\
2N_2=N_1(n-1)\,,\\
3N_3=N_2(n-2),\\
4N_4=N_3(n-3).\\
\cdots\cdots\\
(i-1)N_{i-1}=N_{i-2}(n-i+2)\\
iN_i=N_{i-1}(n-i+1),\\
(i+1)N_{i+1}=N_i(n-i).
\end{array}\right\}(G')$$

Après avoir dégagé le facteur $\frac{1}{i+1}$ dans (3) et remplacé chaque terme par son égal que fournissent les groupes d'égalités G et G', on obtiendra :

$$P_i\frac{m+n-i}{i+1}=\frac{1}{i+1}\left[\sum_0^i(i-k+1)M_{i-k+1}N_k+\right.$$

$$\left.\sum_0^{i+1}kM_{i-k+1}N_k\right]. \qquad (6)$$

Des réductions évidentes étant effectuées on a :

$$P_i\frac{m+n-i}{i+1}=M_{i+1}+N_1M_i+N_2M_{i-1}+\ldots+$$

$$M_2N_{i-1}+M_1N_i+N_{i+1}. \qquad (7)$$

Or, de même que le coëfficient P_i est donné par (1), de même le coëfficient P_{i+1} serait :

$$P_{i+1}=M_{i+1}+N_1M_i+N_2M_{i-1}+\ldots+M_2N_{i-1}+M_1N_i+N_{i+1}.$$

Cette égalité et la précédente (7) donnent :

$$P_{i+1}=P_i\frac{m+n-i}{i+1}. \qquad (X)$$

Cette loi de formation des coëfficients du produit est la même que celle qui régit la formation des coëfficients dans f(m) et f(n).

D'ailleurs, observant que $P_0=1$, et donnant à i toutes les valeurs entières comprises entre 0 et $i-1$, on obtiendra les différents coëfficients du produit; il est aisé de voir que le coëfficient général serait :

$$P_i=\frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)\ldots(m+n-i+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\;i}.$$

VI. Toutefois, il faut se garder d'énoncer d'une manière générale que la loi de formation du produit est la même que celle des facteurs.

En effet, il est à remarquer que le développement (1) n'a précisément cette forme que tant que i est plus petit ou tout au plus égal à r', puisqu'il est toujours permis de supposer $r'<r$.

Les fonctions facteurs peuvent s'écrire comme suit :

$$fm=1+M_1x+M_2x^2+\ldots+M_\alpha x^\alpha+\ldots+M_{r'}x^{r'}+\ldots+M_rx^r,$$

$$fn=1+N_1x+N_2x^2+\ldots+N_\alpha x^\alpha+\ldots+N_{r'}x^{r'}.$$

Mettant ainsi en évidence 1° le terme en $x^{r'}$ dans fm, et 2° dans les deux facteurs deux termes $M_\alpha x^\alpha$, $N_\alpha x^\alpha$ en x^α, *α étant plus petit que* r'.

Le développement du coëfficient du terme en $x^{r'+\alpha}$ dans le produit n'a pas la même forme que celle assignée par (1); en effet, soit

$$r'+\alpha=s, \quad \text{d'où} \quad \alpha=s-r'.$$

Dans la recherche du coëfficient P_s il est nécessaire de prendre en considération :

1° La somme des termes obtenus par multiplication entre les quatre termes

$$M_\alpha x^\alpha,\ M_{r'}x^{r'} \quad \text{et} \quad N_\alpha x^\alpha,\ N_{r'}x^{r'};$$

2° Les termes en x^s provenant des multiplications des termes compris entre $M_{r'}x^{r'}$ et $M_r x^r$ avec ceux précédant $N_\alpha x^\alpha$.

Il sera facile d'obtenir :

$$P_s=\begin{bmatrix} N_\alpha M_{r'}+N_{\alpha+1}M_{r'-1}+\ldots+N_{r'-1}M_{\alpha+1}+N_{r'}M_\alpha \\ +M_{r'+1}N_{\alpha-1}+M_{r'+2}N_{\alpha-2}+\ldots+M_rN_{r'+\alpha-r}. \end{bmatrix}\ldots$$

que l'on peut encore écrire (θ étant un nombre entier variant entre 0 et $r'-\alpha$, ou entre 0 et $r-r'-1$).

$$P_s=\sum_0^{r'-\alpha}N_{\alpha+\theta}M_{r'-\theta}+\sum_0^{r-r'-1}N_{\alpha-\theta-1}M_{r'+\theta+1}.$$

Introduisant le facteur $\frac{m+n-s}{s+1}$ dans les deux membres de cette égalité, il vient :

$$P_s\frac{m+n-s}{s+1}=\frac{1}{s+1}\Big[\sum_0^{r'-\alpha}N_{\alpha+\theta}M_{r'-\theta}(m+n-\alpha-r')$$
$$+\sum_0^{r-r'-1}N_{\alpha-\theta-1}M_{r'+\theta+1}(m+n-\alpha-r'.\Big]$$

Désignant pour un instant par A et B les sommes entre crochets, on aura aisément :

$$A=\sum_0^{r'-\alpha}N_{\alpha+\theta}M_{r'-\theta}(m+n-\alpha-r'+\theta-\theta),$$

ou

$$A=\sum_0^{r'-\alpha}N_{\alpha+\theta}M_{r'-\theta}(m-r'+\theta)+\sum_0^{r'-\alpha}N_{\alpha+\theta}M_{r'-\theta}(n-\alpha-\theta).$$

Au moyen des relations générales

$$(t+1)M_{t+1}=M_t(m-t) \quad \text{et} \quad (t+1)N_{t+1}=N_t(n-t)$$

on obtiendra :

$$A=\sum_0^{r'-\alpha} N_{\alpha+\theta}M_{r'-\theta+1}(r'-\theta+1)+\sum_0^{r'-\alpha} N_{\alpha+\theta+1}M_{r'-\theta}(\alpha+\theta+1)$$

d'où

$$A=N_\alpha M_{r'+1}(r'+1)+\sum_1^{r'-\alpha} N_{\alpha+\theta}M_{r'-\theta+1}(r'-\theta+1)$$

$$+\sum_0^{r'-\alpha} N_{\alpha+\theta+1}M_{r'-\theta}(\alpha+\theta+1)$$

ou

$$A=N_\alpha M_{r'+1}(r'+1)+\sum_0^{r'-\alpha-1} N_{\alpha+\theta+1}M_{r'-\theta}(r'-\theta)$$

$$+\sum_0^{r'-\alpha !} N_{\alpha+\theta+1}M_{r'-\theta}(\alpha+\theta+1),$$

ou encore

$$A=N_\alpha M_{r'+1}(r'+1)+N_{r'+1}M_\alpha(r'+1)$$

$$+\sum_0^{r'-\alpha-1} N_{\alpha+\theta+1}M_{r'-\theta}(r'+\alpha+1).$$

De même on aura :

$$B=\sum_0^{r-r'-1} N_{\alpha-\theta-1}M_{r'+\theta+2}(r'+\theta+2)+\sum_0^{r-r'-1} N_{\alpha-\theta}M_{r'+\theta+1}(\alpha-\theta),$$

ou

$$B=N_\alpha M_{r'+1}\alpha+\sum_0^{r-r'-1} N_{\alpha-\theta-1}M_{r'+\theta+2}(r'+\theta+2)$$

$$+\sum_1^{r-r'-1} N_{\alpha-\theta}M_{r'+\theta+1}(\alpha-\theta),$$

$$B=N_\alpha M_{r'+1}\alpha+\sum_0^{r-r'-1} N_{\alpha-\theta-1}M_{r'+\theta+2}(r'+\theta+2)$$

$$+\sum_0^{r-r'-2} N_{\alpha-\theta-1}M_{r'+\theta+2}(\alpha-\theta-1),$$

ou

$$B=N_\alpha M_{r'+1}\alpha+N_{r'+\alpha-r}M_{r+1}(r+1)$$

$$+\sum_0^{r-r'-1} N_{\alpha-\theta-1}M_{r'+\theta+2}(r'+\alpha+1).$$

Enfin les valeurs de A et B deviennent, par l'emploi des formules de génération :

$$A = N_\alpha M_{r'+1}(r'+1) + N_{r'} M_\alpha (n-r')$$
$$+\sum_0^{r'-\alpha-1} N_{\alpha+\theta+1} M_{r'-\theta}(r'+\alpha+1)$$

et

$$B = N_\alpha M_{r'+1}(\alpha) + N_{r'+\alpha-r} M_r (m-r)$$
$$+\sum_0^{r-r'-2} N_{\alpha-\theta-1} M_{r'+\theta+2}(r'+\alpha+1).$$

D'où

$$A+B = (r'+\alpha+1)\left[N_\alpha M_{r'+1} + \sum_0^{r'-\alpha-1} N_{\alpha+\theta+1} M_{r'-\theta} + \right.$$
$$\left.\sum_0^{r-r'-2} N_{\alpha-\theta-1} M_{r'+\theta+2}\right] + (m-r) M_r N_{r'+\alpha-r} + (n-r') N_{r'} M_\alpha.$$

Or, de la même manière que l'on a composé P_s, on aurait :

$$P_{s+1} = \sum_0^{r'-\alpha-1} N_{\alpha+\theta+1} M_{r'-\theta} + \sum_0^{r-r'-1} N_{\alpha-\theta} M_{r'+\theta+1},$$

ou

$$P_{s+1} = \sum_0^{r'-\alpha-1} N_{\alpha+\theta+1} M_{r'-\theta} + \sum_1^{r-r'-1} N_{\alpha-\theta} M_{r'+\theta+1} + N_\alpha M_{r'+1},$$

ou

$$P_{s+1} = N_\alpha M_{r'+1} + \sum_0^{r'-\alpha-1} N_{\alpha+\theta+1} M_{r'-\theta} + \sum_0^{r-r'-2} N_{\alpha-\theta-1} M_{r'+\theta+2}.$$

On aura donc

$$A+B = (r'+\alpha+1) P_{r'+\alpha+1} + (m-r) M_r N_{r'+\alpha-r} + (n-r') N_{r'} M_\alpha.$$

D'où

$$P_s \frac{m+n-s}{s+1} = P_{s+1} + \frac{(m-r) M_r N_{r'+\alpha-r} + (n-r') N_{r'} M_\alpha}{s+1},$$

et

$$P_{s+1} = P_s \frac{m+n-s}{s+1} + \frac{(r-m) M_r N_{r'+\alpha-r} + (r'-n) N_{r'} M_\alpha}{s+1}. \qquad \text{(Y)}$$

Le développement (1) n'est donc vrai que pour $i < r'$, puisque les lois X et Y sont complètement différentes ; c'est-à-dire que :

Pour $i < r'$ le produit suit la loi commune des facteurs, et l'on pourrait ainsi l'obtenir en remplaçant dans fn la quantité n par $m+n$. Mais la partie du produit au-delà du terme en $x^{r'}$ n'obéit pas à la même loi, et la loi Y régit alors la portion du développement depuis $P_{r'} x^{r'}$ jusqu'à $P_{2r'} x^{2r'}$, puisque α compris entre 0 et r' peut tout au plus être égal à r'.

Soit donc K la somme des termes du produit compris entre $P_{r'} x^{r'}$ et $P_{2r'} x^{2r'}$.

VII. Considérons actuellement la partie du produit que l'on obtient en multipliant

$$M_{r'+1} x^{r'+1} + M_{r'+2} x^{r'+2} + \ldots + M_r x^r$$

par quelques-uns des termes précédant $N_{r'} x^{r'}$ et qui peuvent donner des puissances de x supérieures à $2r'$.

On aura facilement

$$P_{r+\alpha+1} = M_r N_{\alpha+1} + M_{r-1} N_{\alpha+2} + \ldots + M_{r'+1} N_{r+\alpha-r'},$$

ou $$P_{r+\alpha+1} = \sum_0^{r-r'-1} M_{r-\gamma} N_{\alpha+\gamma+1}.$$

Dans cette relation γ est un nombre entier qui prend successivement toutes les valeurs comprises entre 0 et $r - r' - 1$.

Multipliant les deux membres de cette égalité par le facteur

$$\frac{m+n-(r+\alpha+1)}{r+\alpha+2},$$

il viendra :

$$P_{r+\alpha+1} \frac{m+n-(r+\alpha+1)}{r+\alpha+2} = \frac{1}{r+\alpha+2} \times$$
$$\sum_0^{r-r'-1} M_{r-\gamma} N_{\alpha+\gamma+1} (m+n-r-\alpha-1-\gamma+\gamma),$$

ou

$$P_{r+\alpha+1} \frac{m+n-(r+\alpha+1)}{r+\alpha+2} = \frac{1}{r+\alpha+2} (A'+B') +$$

en fesant

$$A' = \sum_0^{r-r'-1} M_{r-\gamma} N_{\alpha+\gamma+1} (m-r+\gamma)$$

$$B' = \sum_0^{r-r'-1} M_{r-\gamma} N_{\alpha+\gamma+1} (n-\alpha-\gamma-1).$$

Or

$$A' = \sum_0^{r-r'-1} M_{r-\gamma+1} N_{\alpha+\gamma+1} (r-\gamma+1),$$

d'où

$$A' = M_{r+1} N_{\alpha+1} (r+1) + \sum_1^{r-r'-1} M_{r-\gamma+1} N_{\alpha+\gamma+1} (r-\gamma+1),$$

ou encore

$$A' = M_r N_{\alpha+1}(m-r) + \sum_0^{r-r'-2} M_{r-\gamma} N_{\alpha+\gamma+2}(r-\gamma).$$

On aurait de même :

$$B' = \sum_0^{r-r'-1} M_{r-\gamma} N_{\alpha+\gamma+2}(\alpha+\gamma+2),$$

d'où

$$B' = M_{r'+1} N_{r+\alpha-r'+1}(r+\alpha-r'+1) + \sum_0^{r-r'-2} M_{r-\gamma} N_{\alpha+\gamma+2}(\alpha+\gamma+2),$$

d'où encore :

$$B' = [n-(r+\alpha-r')] N_{r+\alpha-r'} M_{r'+1} + \sum_0^{r-r'-2} M_{r-\gamma} N_{\alpha+\gamma+2}(\alpha+\gamma+2),$$

et

$$A' + B' = \left\{ \begin{aligned} &(m-r) M_r N_{\alpha+1} + [n-(r+\alpha-r')] M_{r'+1} N_{r+\alpha-r'} + \\ &\qquad \sum_0^{-r'-2} M_{r-\gamma} N_{\alpha+\gamma+2}(r+\alpha+2). \end{aligned} \right.$$

Donc enfin

$$P_{r+\alpha+1} \frac{m+n-(r+\alpha+1)}{r+\alpha+2} = \frac{(m-r) M_r N_{\alpha+1} + [n-(r+\alpha-r')] M_{r'+1} N_{r+\alpha-r'}}{r+\alpha+2} + \sum_0^{r-r'-2} M_{r-\gamma} N_{\alpha+\gamma+2}.$$

Mais remarquant que

$$\sum_0^{r-r'-2} M_{r-\gamma} N_{\alpha+\gamma+2} = P_{r+\alpha+2}$$

il viendra :

$$P_{r+\alpha+2} = P_{r+\alpha+1} \frac{m+n-(r+\alpha+1)}{r+\alpha+2} + \frac{(r-m) M_r N_{\alpha+1} + (r+\alpha-r'-n) M_{r'+1} N_{r+\alpha-r'}}{r+\alpha+2}. \quad (Z)$$

Cette loi permet de calculer les coëfficients des termes de $fm \cdot fn$ ayant des puissances de x de degrés compris entre $2r'$ et

$r+r'$, en faisant passer α par toutes les valeurs comprises entre

$$2r'-r-1 \quad \text{limite inférieure de } \alpha,$$

$$\text{et} \quad r'-2 \quad \text{limite supérieure de } \alpha.$$

Si l'on représente par L la somme des termes du produit soumis à la loi Z, puis si l'on pose successivement dans Y :

$$\alpha=0,1,2,3, \ldots r'-1,$$

et dans Z :

$$\alpha=2r'-r-1,\ 2r'-r,\ 2r'-r+1,\ 2r'-r+2, \ldots r'-2.$$

On trouvera avec facilité :

$$\ldots = \left\{\begin{array}{l} P_{r'}\dfrac{m+n-r'}{r'+1}\left[x^{r'+1}+\sum_{0}^{r'-2}{}^{\cdot}\left(\dfrac{m+n-r'-\beta-1}{r'+\beta+2}\right)x^{r'+\beta+2}\right] \\ +\sum_{0}^{r'-1}\dfrac{(r-m)M_{r'}N_{r'-r+\beta}+(r'-n)M_{\beta}N_{r'}}{r'+\beta+1}x^{r'+\beta+1} \\ +\left[_{0}^{r'-1}\dfrac{(r-m)M_{r'}N_{r'-r+\beta}+(r'-n)M_{\beta}N_{r'}}{r'+\beta+1}\right]\sum_{0}^{r'-2}{}^{\cdot}\left(\dfrac{m+n-r'-\beta-1}{r'+\beta+2}\right)x^{r'+\beta+2}. \end{array}\right.$$

De même

$$\ldots = \left\{\begin{array}{l} P_{2r'}\dfrac{m+n-2r'}{2r'+1}\left[x^{2r'+1}+\sum_{0}^{r-r'-2}{}^{\cdot}\left(\dfrac{m+n-2r'-\beta-1}{2r'+\beta+2}\right)x^{2r'+\beta+2}\right] \\ +\sum_{0}^{r-r'-1}\dfrac{(r-m)M_{r}N_{2r'-r+\beta}+(r'-n+1)M_{r'+1}N_{r+\beta-1}}{2r'+\beta+1}x^{2r'+\beta+1} \\ +\left[_{0}^{r-r'-1}\dfrac{(r-m)M_{r}N_{2r'-r+\beta}+(r'-n+1)M_{r'+1}N_{r+\beta-1}}{2r'+\beta+1}\right]+ \\ \qquad\qquad \sum_{0}^{r-r'-2}{}^{\cdot}\left(\dfrac{m+n-2r'-\beta-1}{2r'+\beta+2}\right)x^{2r'+\beta+2} \end{array}\right.$$

Le signe $\left[_{0}^{r'-1}F(\beta)\right]$ signifiant qu'il faut considérer séparément chaque valeur de $F\beta$ comme facteur d'une somme $\sum_{0}^{r'-2}{}^{\cdot}$ dont le dernier terme est si l'on a $\beta=0$:

$$\frac{(m+n-r'-1)(m+n-r'-2)\ldots(m+n-2r'+1)}{(r'+2)(r'+3)\quad.\quad.\quad.\quad 2r'}x^{2r'}$$

et le premier

$$\frac{m+n-r'-1}{r'+2}\,x^{r'+2}.$$

On passe donc, on le voit, d'un terme de cette somme au suivant en le multipliant par

$$\frac{m+n-r'-k}{r'+k+1}\,x.$$

$r'+k+1$ étant le plus grand facteur du dénominateur du terme considéré.

On a donc :

$$Y_1 = \mathrm{f}m \cdot \mathrm{f}n = \mathrm{f}(m+n) + \mathrm{K} + \mathrm{L}.$$

VIII. Avant de rechercher ce que deviennent les expressions K et L pour le cas de fm et fn illimitées, il est indispensable de considérer la fraction suivante :

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ \ldots\ (p-n+1)}{1\cdot2\cdot3\quad\ldots\quad n}. \tag{A}$$

où p est *quelconque*, et n, nombre entier variable, le dernier facteur du dénominateur.

Déterminons la limite de cette fraction, le dénominateur ayant un nombre illimité de facteurs.

On peut écrire :

$$\frac{(1-n+p)(2-n+p)\ \ldots\ (p-1)p}{n\qquad(n-1)\quad\ldots\quad 2\cdot1}. \tag{B}$$

N'ayant pas imposé de limite à n, on peut toujours supposer que n sera plus grand que la somme des deux autres termes de chaque facteur du numérateur de (B); pour éviter les facteurs négatifs on changera le signe de chaque facteur, ayant soin toutefois de multiplier la fraction par $(-1)^n$, ce qui donne :

$$\frac{(n-1-p)(n-2-p)(n-3-p)\ \ldots\ (1-p)(-p)}{n\qquad(n-1)\qquad(n-2)\quad\ldots\quad 2\cdot1}(-1)^n. \tag{C}$$

p est quelconque : soit m la quantité entière qui la précède dans l'échelle des nombres, et r son complément à p, c'est-à-dire soit :

$$p=m+r.$$

Substituant dans (C) nous aurons :

$$\frac{(n-1-m-r)(n-2-m-r)\ldots(1-r)}{n\qquad(n-1)\quad\ldots(m+2)}\cdot$$

$$\frac{(-r)(-1-r)\ldots(1-m-r)(-m-r)}{(m+1)\quad m\quad\ldots\quad 2\quad 1}(-1)^{n}. \qquad \text{(D)}$$

Et sous cette forme il est clair que la limite l de la fraction (A) est :

$$l=\frac{r(r+1)(r+2)\ldots(r+m-1)(r+m)}{(m+1)\,m\,(m+1)\ldots\qquad 2\cdot1}(-1)^{m+1}.$$

En effet, si l'on divise par n^{n-m} les deux termes de la fraction fonction de n dans **D** (c'est-à-dire si l'on divise chaque facteur du numérateur et du dénominateur par n) il deviendra évident qu'à la limite les différents facteurs se réduisent chacun à l'unité.

IX. *Si* fm *et* fn, *et leur produit* Y_1 *sont illimités, si donc*

$$\mathrm{r}=\infty,\ \mathrm{r}'=\infty$$

déterminons ce que deviennent K *et* L.

Deux cas peuvent se présenter, savoir :

$$x<1 \text{ et } x>1.$$

1er *Cas.*

Si $x<1$ toutes les puissances de x à partir de x^r et $x^{r'}$ deviennent nulles ; donc les diverses sommes $\sum$ des expressions **K** et **L** deviennent nulles (puisqu'alors les coëfficients de leurs diverses puissances de x sont constants, comme il vient d'être prouvé § VIII. D'autre part $\mathrm{M}_{r'}$, $\mathrm{N}_{r'}$, $\mathrm{P}_{r'}$, sont constants, $\dfrac{m+n-r'}{r'+1}=1$ pour n infini. Donc $\mathrm{K}=0$.

On a aussi pour $n=\infty$

$$\frac{m+n-2r'}{2r'+1}=1.$$

D'ailleurs M_r, $M_{r'+1}$, $N_{r'}$, $P_{2r'}$ sont alors des constantes, donc aussi $L=0$, et Y_1 devient :

$$\mathrm{f}m\cdot\mathrm{f}n=\mathrm{f}(m+n).$$

2^me^ *Cas.*

Si $x>1$, à partir de $x^{r'}$ toutes les puissances de x deviennent infinies et les quantités complémentaires K et L sont elles-mêmes infinies. De sorte que l'on a :

$$\mathrm{f}(m)\cdot\mathrm{f}(n)=\mathrm{f}(m+n)+\infty.$$

De là on conclut :

m *et* n *étant des quantités quelconques, le développement du produit des séries* f(m) *et* f(n) *suivant leur loi commune n'est possible que pour* $\mathrm{x}<1$; *il est illusoire pour* $\mathrm{x}>1$.

Consacrons donc l'hypothèse $x<1$ pour laquelle on a :

$$\mathrm{f}m\cdot\mathrm{f}n=\mathrm{f}(m+n).$$

Soient $n=r+s$, $s=v+w$, $w=x+y$, et ainsi de suite; on obtiendra la série de relations suivantes :

$$\mathrm{f}(m)\cdot\mathrm{f}n=\mathrm{f}(m+n),$$
$$\mathrm{f}m\cdot\mathrm{f}r\cdot\mathrm{f}v=\mathrm{f}(m+r+s),$$
$$\mathrm{f}m\cdot\mathrm{f}r\cdot\mathrm{f}v\cdot\mathrm{f}w=\mathrm{f}(m+r+v+w),$$
$$\mathrm{f}m\cdot\mathrm{f}r\cdot\mathrm{f}v\cdot\mathrm{f}x\cdot\mathrm{f}y=\mathrm{f}(m+r+v+x+y).$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ces égalités existant pour m, v, r, x, y ... quelconques, sont encore vraies pour

$$m=r=v=x=y=\text{etc.}=a.$$

Donc en représentant par n le nombre de fonctions, on a :

$$[\varphi(a)]^{n}=\varphi(na) \qquad \text{(F)}$$

Dans cette relation a étant quelconque, on peut, en restant dans la plus grande généralité, poser

$$a = \frac{m}{n}$$

en supposant m *quelconque*, entier, fractionnaire, positif, négatif, irrationnel ou imaginaire, et n un nombre entier. La relation (F) devient alors :

$$[\varphi(\frac{m}{n})]^n = \varphi(n\frac{m}{n}) = \varphi(m)$$

D'où en extrayant la racine $n^{\text{ième}}$ des deux membres,

$$\varphi\frac{m}{n} = [\varphi(m)]^{\frac{1}{n}}.$$

D'ailleurs, comme tout ce qui vient d'être dit s'applique au cas de m quelconque, et en particulier à celui de *m entier*, pour avoir la forme du développement, nous n'aurons qu'à observer que si m est entier, on a :

$$\varphi(m) = (1+y)^m.$$

Substituant dans la relation précédente :

$$\varphi(\frac{m}{n}) = \left[(1+y)^m\right]^{\frac{1}{n}} = (1+y)^{\frac{m}{n}}.$$

Mais dans le cas de $x<1$, il a été démontré que $\varphi(\frac{m}{n})$ suit la loi du développement binômial, donc : τ étant entier :

$$(1+y)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}y + \frac{\frac{m}{n}(\frac{m}{n}-1)}{1\cdot 2}y^2 + \dots$$

$$+ \frac{\frac{m}{n}(\frac{m}{n}-1)\dots(\frac{m}{n}-\tau+1)}{1\ .\ 2\ .\ .\ \tau}y^\tau + \dots$$

Si maintenant on pose $y = \frac{a}{bx}$, on trouvera, toute simplification faite :

$$(bx+a)^{\frac{m}{n}} = (bx)^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} a (bx)^{\frac{m}{n}-1} + \ldots$$

$$+ \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\ldots\left(\frac{m}{n}-\tau+1\right)}{1 \ . \ 2 \ \ldots \ \tau} a^{\tau} (bx)^{\frac{m}{n}-\tau} + \ldots$$

Ainsi la formule du binôme de Newton est démontrée pour le cas d'un exposant quelconque.

II. — *Théorie infinitésimale appliquée*,

PAR

J.-N. Noël,

PROFESSEUR ÉMÉRITE DE L'UNIVERSITÉ.

INTRODUCTION.

Emploi des infinis. Le *Moniteur de l'enseignement* (1852 et 1853) renferme, sur l'emploi des infinis dans les Mathématiques élémentaires, une longue polémique entre plusieurs professeurs, les uns regardant cet emploi comme un grave et dangereux abus et les autres comme une amélioration essentielle dans les méthodes.

Les difficultés opposées à l'emploi explicite des infinis sont résolues. Mais les objections faites prouvent combien peu les notions élémentaires sont approfondies dans la plupart des traités d'Algèbre et de Géométrie, destinés à l'enseignement, et combien il est difficile, même aux professeurs, de se dégager de toute routine en ne consultant pour cela d'autre autorité que celle de la raison.

Il n'y aurait évidemment aucune difficulté si, au lieu d'écarter soigneusement les grandeurs infinitésimales, parce qu'on ne saurait en avoir des idées sensibles, on mettait les mêmes soins à en établir la théorie complète. C'est ce que j'ai essayé de faire depuis longtemps, et récemment encore, à l'occasion de la polémique ci-dessus. Mais comme les objections posées m'ont fourni les moyens d'éclaircir quelques notions élémentaires, il me paraît utile de revenir de nouveau sur l'emploi des infinis dans l'enseignement, afin d'avoir, avec plus de développement, une théorie infinitésimale plus claire, plus simple et mieux ordonnée. Ses applications d'ailleurs exigent la théorie des autres symboles numériques; et j'indiquerai très-succinctement cette dernière théorie, laquelle n'est pas toujours présentée bien clairement dans les traités élémentaires.

Non-seulement les grandeurs infinitésimales sont inévitables dans les sciences Physiques et Mathématiques, mais elles y sont nécessaires, soit pour rendre plus évidente la liaison des idées et l'analogie que celles-ci ont entre elles, soit pour résoudre clairement et simplement certaines questions et passer ainsi directement du connu à l'inconnu. Dans ces questions, vous aurez beau chercher à déguiser les infinis par d'autres dénominations ou par de longs et obscurs détours, ils se trouveront toujours au fond de vos calculs et de vos raisonnements : seulement ces raisonnements seront beaucoup plus compliqués, moins clairs, moins logiques, sinon absurdes.

S'il est vrai que l'on fait bien et avec facilité ce que l'on pratique souvent, il faut nécessairement établir et employer la méthode infinitésimale dès les parties élémentaires, ainsi que Laplace l'a conseillé; et cela afin de familiariser les élèves avec les moyens logiques de recherche que cette méthode générale fournit, de leur rendre moins pénibles les études scientifiques et d'y assurer ainsi leurs progrès.

D'après cela, les infinis étant inévitables en Algèbre et en Géométrie, on peut demander pourquoi ils n'y sont pas toujours employés explicitement? C'est parce que les notions des infinis sont *obscures*, répondra-t-on. Obscures sans doute, puisque les infinis nous seront toujours inconnus comme grandeurs. Mais leur existence est certaine et démontrée; leurs définitions sont claires, précises et entièrement à la portée des jeunes intelligences, aussi bien par suite que la théorie infinitésimale. Que faut-il donc de plus pour que cette théorie soit complètement élémentaire?

Si l'obscurité inhérente à toute chose inconnue était une cause suffisante d'exclusion, il faudrait renoncer à l'Algèbre et à toute science où l'on doit considérer des symboles numériques inconnus, représentés par des lettres, et où les symboles négatifs, imaginaires, etc. désignent des nombres impossibles, que l'on soumet cependant à toutes les opérations du calcul.

Comment d'ailleurs parvient-on à éviter l'obscurité ci-dessus? C'est en la remplaçant par une autre plus grande encore, entrainant à des détours, à de longs et obscurs raisonnements (cercles vicieux ou non-sens) et lesquels ne cachent même pas complètement les grandeurs infinitésimales qu'on voulait éviter.

Cela est prouvé plus bas; mais on voit déjà que pour être clair, simple et rigoureusement logique, en Algèbre et en Géométrie, il faut y employer *explicitement* les infinis toutes les fois qu'ils se présentent, soit pour discuter les formules, soit pour passer directement du connu à l'inconnu en généralisant les définitions.

Notions générales. Outre les divers corps matériels, nécessairement *finis* ou *limités* de toutes parts, il existe deux quantités continues immatérielles, de natures différentes, et à chacune desquelles l'intelligence humaine ne peut assigner aucune *limite*, ni commencement ni fin : ce sont l'*espace* et le *temps* (*éternité.*)

Si l'on fait abstraction de tous les corps existants ou qu'on les anéantisse par la pensée, il reste un *vide* immense et immuable : c'est l'*espace* ou l'*étendue abstraite*, dans laquelle se meuvent tous les corps de l'univers.

« Lorsque notre esprit essaie de parcourir les régions de l'espace, il rencontre d'abord la lune, ensuite le soleil et les planètes qui l'entourent, plus loin un grand nombre de comètes, plus loin encore des millions d'étoiles; partout il trouve l'espace et se fatigue en vain à en chercher la fin. »

Quelque grand que soit donc l'espace ou le temps que l'esprit embrasse, il conçoit encore un espace ou un temps plus grand, et ainsi *toujours;* de sorte qu'il nous est impossible d'assigner aucune *limite*, ni par conséquent aucune *forme*, à chacune de ces deux quantités continues.

L'espace et le temps sont donc *infinis* pour notre intelligence : ce sont deux *infinis absolus*, de natures différentes et chacun *homogène* ou le même dans toutes ses parties. Nous n'avons de ces deux infinis, considérés en eux-mêmes, que des idées fort obscures, fort imparfaites; mais nous sommes bien certains de leur existence, évidemment nécessaires à celle des *choses*. Car les phénomènes naturels, ainsi que les œuvres des hommes, ne s'accomplissent qu'avec le temps et dans l'espace.

Le *temps* ou la *durée* est donc la succession des choses. L'impression que laisse en nous la succession des évènements peut nous donner assez bien l'idée du temps, mais cette idée n'est pas toujours exacte; car la durée nous affecte d'une manière trop variable, suivant les sensations qui nous dominent. Aussi nous arrive-t-il parfois de trouver le temps trop *long* et trop *court*. Donc pour avoir l'idée exacte de la *grandeur* d'un temps écoulé ou à écouler, il faut mesurer ce temps par une unité constante et indépendante de sensations variables.

On ne peut concevoir nettement que des portions *finies* de temps et d'espace, appelées *temps* et *espaces relatifs*. Les temps relatifs se *mesurent* ou se réduisent en *nombres* par une suite d'évènements identiques ou égaux, qui se succèdent sans aucune interruption. Ainsi la *rotation* de la terre, autour de son *axe* fictif, est un évènement supposé constamment le même, qui se reproduit sans cesse et qu'on appelle *jour :* c'est la plus naturelle des *unités* de temps, du moins pour les habitants du globe terrestre.

Quant aux espaces relatifs, que l'on peut concevoir limités de plusieurs manières et qu'on appelle *volumes* ou *capacités*, leur *mesurage* ou leur réduction en *nombres* est l'objet de la géométrie, où l'on considère encore deux autres genres d'étendue abstraite, savoir les *surfaces* et les *lignes*, pouvant être *finies* ou *infinies*, c'est-à-dire *limitées* ou non.

Observons encore qu'une quantité peut être *infinie* en *grandeur* ou en *petitesse*, et que ces deux genres d'infinis se présentent inévitablement en Algèbre, comme *symboles* de nombres, et en Géométrie, comme étendues abstraites.

Arithmétique et Algèbre.

Des infinis. I. Un nombre est dit *infiniment grand* ou simplement *infini*, lorsqu'il surpasse le plus grand nombre imaginable. Un nombre infini ne peut donc jamais se former en comptant ses unités successives, ni par conséquent s'exprimer en chiffres : il reste toujours *inconnu* et *indéterminé*. C'est pourquoi on le désigne, dans le calcul, par une lettre et plus spécialement par un huit renversé, ∞, qu'on énonce *infini* ou *nombre infini*.

II. Un nombre est dit *infiniment petit* lorsqu'il est moindre que la plus petite partie *assignable* de l'unité. Un tel nombre est donc absolument inappréciable par sa petitesse et ne pourra jamais s'exprimer en chiffres. Il n'est pas rigoureusement nul, mais il est très-voisin de zéro, et sera toujours *inconnu* ou *indéterminé*. C'est pourquoi on le désigne, dans le calcul, par une lettre ou mieux par $\frac{1}{\infty}$; car si l'on suppose l'unité divisée en une infinité de parties égales, chaque partie est évidemment moindre que la plus petite partie imaginable de cette unité; vu que cette dernière partie aura toujours un dénominateur *fini*, $< \infty$.

Les deux genres d'infinis existent. Les nombres infiniment grands et les nombres infiniment petits ont une existence certaine, d'après des faits numériques évidents. — En effet, 1° Le nombre de toutes les fractions possibles entre 1 et 2 existe *nécessairement*, bien qu'absolument inconnu ; mais ce nombre est si grand qu'il surpasse le plus grand nombre imaginable : il est *infini*.

2° Tous les nombres possibles entre 1 et 2 croissent *insensiblement* depuis 1 jusqu'à 2; et il est certain que la différence d entre deux de ces nombres, *immédiatement consécutifs*, est si petite qu'elle échappe aux sens et à l'imagination. Or, bien qu'on ne puisse ni calculer, ni réaliser, ni exprimer, ni jamais connaître cette différence d, d'une petitesse excessive, on sait du moins qu'elle existe *nécessairement*, et on lui donne un nom pour la distinguer dans le discours : on l'appelle *infiniment petite*. De là on voit que $d\times\infty=1$ et $d=\frac{1}{\infty}$. Donc $\frac{1}{\infty}$ est le symbole d'un nombre infiniment petit, conformément à la définition.

3° La première de toutes les fractions possibles, entre 1 et 2, étant $1+d=1+\frac{1}{\infty}=\frac{\infty+1}{\infty}$, on voit que *les deux termes de chacune de ces fractions sont infinis*. De plus, l'une de ces fractions se réduit à $\frac{3}{2}$; il faut donc que ses deux termes aient un facteur infini commun, contenu 3 fois et 2 fois dans le numérateur et le dénominateur. Conclusion semblable pour les fractions, à termes infinis, comprises entre 1 et 2, se réduisant chacune à une fraction finie, comme 44 sur 29, par exemple. En général, *un nombre infini peut être le double, le triple, le quadruple, ... d'un autre ou en être une fraction finie assignée.*

4° Comme on ne change pas la valeur du nombre infiniment petit $\frac{1}{\infty}$ en multipliant ses deux termes par 2, 3, 4, ... et que le double, le triple, le quadruple, ... d'un nombre infini est infini lui-même et toujours désigné par ∞, on voit que $\frac{2}{\infty}$, $\frac{3}{\infty}$, $\frac{4}{\infty}$, etc. sont les symboles d'autant de nombres infiniment petits. — On conçoit bien, en effet, que si le dividende, *fini* et *donné*, 4 par exemple, reste constant; plus le diviseur est grand, plus le quotient est petit : si le diviseur est très-grand, le quotient est très-petit; donc si le diviseur est infiniment grand, le quotient est infiniment petit. — On voit qu'*un nombre infiniment petit peut être le double, le triple, le quadruple, ... d'un autre ou en être une fraction finie assignée.*

5° Soit x le quotient infiniment petit du nombre quelconque *fini* a divisé par un nombre infini; on a donc $x\times\infty=a$. Ainsi *le pro-*

duit d'un nombre infiniment petit par un nombre infini est toujours un nombre fini, mais indéterminé, aussi bien que ses deux facteurs.

On voit aussi, par 3° et 4°, que *le quotient de deux nombres infiniment grands ou de deux nombres infiniment petits est toujours un nombre fini, mais indéterminé et inconnu, aussi bien que ses deux termes.*

Enfin, l'égalité $x \times \infty = a$ fait voir que *si l'on divise le nombre* a, *fini et arbitraire, par un nombre infiniment petit* x, *le quotient est infini.*

Nombres inexprimables. *Si la racine carrée d'un nombre entier n'est pas elle-même un nombre entier, elle est absolument inexprimable en chiffres et reste toujours inconnue.*

Considérons par exemple la racine carrée de 12. A cause de $12 > 9$ et < 16, on voit que $\sqrt{12} > 3$ et < 4; la racine carrée de 12 est donc comprise entre 3 et 4, et n'est pas un nombre entier. Si cette racine peut s'exprimer exactement par la fraction irréductible a sur c, dont les deux termes a et c soient des nombres entiers *finis* ou aient un nombre *limité* de chiffres chacun, on aura successivement :

$$\sqrt{12} = \frac{a}{c},\ 12 = \frac{a}{c} \times \frac{a}{c} = \frac{a^2}{c^2} \text{ et } \frac{a^2}{c} = 12c.$$

Le produit a^2 n'a jamais d'autres facteurs premiers que ceux de ses propres facteurs; donc, puisque par hypothèse, c est premier avec a, on voit que c est aussi premier avec le produit a^2, et ne saurait le diviser, de telle sorte que le quotient soit le nombre entier $12c$. La dernière égalité ci-dessus étant donc impossible, il en est de même de la première; c'est-à-dire que la racine carrée de 12 n'est pas une fraction dont les deux termes aient un nombre limité de chiffres chacun; il en ont donc chacun une infinité et sont infinis tous les deux.

D'ailleurs, $\sqrt{12}$ est nécessairement l'une des fractions, à termes infinis, comprise entre 3 et 4; et puisque cette racine n'est pas une fraction finie, on a rigoureusement $\sqrt{12} = n$ sur p, n et p désignant deux nombres entiers infinis, premiers entre eux.

On voit donc que la racine carrée de 12 est absolument inexprimable en chiffres et restera toujours inconnue. Mais on peut, comme on sait, calculer cette racine aussi approchée qu'on le veut; ce qui en prouve d'ailleurs l'existence.

Il existe des théorèmes analogues au précédent pour les racines cubiques, les racines quatrièmes, les racines cinquièmes, etc.

Des rapports. On appelle en général *rapport* ou *raison* le résultat de la comparaison de deux quantités de même nature. Ces deux quantités sont les *termes* du rapport : la première en est l'*antécédent* et la seconde le *conséquent.*

La différence de deux quantités est déjà un rapport; mais ce qu'on nomme essentiellement *rapport* ou *raison* de deux quantités A et C de même nature, c'est le nombre abstrait r par lequel il faut multiplier le conséquent C pour avoir l'antécédent A, de telle sorte qu'on ait exactement $A = Cr$; d'où $A:C = r$. De sorte que la raison r est aussi le *quotient*, c'est-à-dire le résultat du *mesurage* de l'antécédent A par le conséquent C.

Nous ne connaissons réellement que des rapports; et il est de la plus haute importance, dans les sciences, d'exprimer toutes les grandeurs *continues*, de même nature, par une seule d'entre elles, bien connue et prise pour *unité* ou pour terme invariable de comparaison. La relation $A = Cr$ est donc fondamentale, et elle l'est tellement que sans cette relation les nombres n'existeraient pas. — En général, nous ne pouvons avoir une idée exacte de la *grandeur* d'une quantité A qu'en *mesurant* cette quantité, c'est-à-dire en déterminant le nombre r qui est le rapport de A à l'*unité* C de même espèce.

Le rapport existe toujours. *Le rapport de deux quantités continues* A *et* C, *de même nature, existe nécessairement et il est unique.*

Concevons que dans le produit Cr, C reste constant et que le multiplicateur r croisse *insensiblement* ou par *infiniment petits* et passe successivement par toutes les valeurs numériques, depuis zéro; le produit Cr croît donc aussi et passe successivement par tous les états de grandeur, à partir de zéro. Donc, parmi toutes les valeurs numériques de r, il y en a toujours une et une seule qui donne rigoureusement $A = Cr$; et cette valeur de r, quelle qu'elle soit, est le rapport unique de A à C.

On voit que ce rapport est toujours un nombre entier ou une fraction : seulement il peut arriver que cette fraction, plus grande ou plus petite que l'unité, ait ses deux termes infinis et soit *inexprimable* en chiffres, comme $r = \sqrt{3}$; et alors le rapport r reste absolument inconnu : on ne peut le calculer qu'aussi approché qu'on le veut; mais il n'en a pas moins une existence certaine.

Remarque. La raison r de A à C est dite nombre *rationnel* ou nombre *irrationnel*, suivant qu'on peut l'exprimer exactement ou non. Toutes les racines carrées, cubiques, quatrièmes, cinquièmes, etc., *inexprimables en chiffres*, sont donc des nombres *irrationnels.*

LA MESURE COMMUNE EXISTE TOUJOURS. *Deux quantités continues* A *et* C, *de même nature, ont toujours un commun diviseur, assignable ou inassignable.* Car ces deux quantités ont toujours un rapport exprimable ou inexprimable en chiffres.

1° Si $A = C \times \frac{31}{20}$, il est clair qu'en divisant C en 20 parties égales à x, A contiendra 31 de ces parties x; car on aura

$$C = 20x \text{ et } A = 20x \times \tfrac{31}{20} = 31x.$$

Donc x est commun diviseur de A et C, cette *mesure commune* étant *assignable* et *finie.* — Dans ce cas, les quantités A et C sont dites *commensurables entre elles.*

2° Si $A = C\sqrt{3}$, on sait que le rapport inexprimable $\sqrt{3}$ est une fraction n sur p, dont les termes n et p sont infinis. Or, si l'on suppose C divisée en un nombre infini p de parties égales à x et par conséquent *infiniment petites*, il est clair qu'on aura

$$C = px \text{ et } A = px \times \frac{n}{p} = nx.$$

Donc x est commun diviseur de A et C, cette *mesure commune* étant infiniment petite et *inassignable* par sa petitesse. De sorte qu'elle sera toujours inconnue. — Dans ce cas, on dit que les deux quantités A et C sont *incommensurables entre elles;* et cela signifie que C ne peut mesurer A, de telle sorte qu'il en résulte exactement le nombre $\sqrt{3}$ inexprimable.

TRANSFORMATION DU RAPPORT. *Le rapport de deux quantités continues reste absolument le même lorsqu'on divise ses deux termes par une troisième quantité, de même nature que ces deux termes.* — Soit toujours $A = Cr$; soient n et p les quotients de A et C, *divisés* ou *mesurés* par la troisième quantité m, les nombres abstraits n et p étant exprimables ou non. Il est clair qu'on a successivement

$$A = m \times n,\ C = m \times p;\ mn = mpr,\ n = pr \text{ et } n:p = r.$$

$$A:C = r,\ \frac{A}{m} = n \text{ et } \frac{C}{m} = p;\ \text{donc } \frac{A}{m} : \frac{C}{m} = r = A:C.$$

On peut donc ainsi passer du rapport de deux quantités continues au rapport égal de deux nombres abstraits, et réciproquement.

De plus, ayant $mn:mp = r = n:p$, on voit que *le rapport ne change pas de valeur lorsqu'on y supprime le facteur continu commun à ses deux termes.* — Cette transformation est identique avec la précédente et se présente fréquemment en Géométrie, pour ramener une *proportion* entre quatre quantités continues à la proportion identique entre quatre nombres abstraits, et réciproquement. —(On sait que le rapport ne change pas quand on multiplie ou divise ses deux termes par un même nombre abstrait quelconque).

Calcul infinitésimal. Le *calcul infinitésimal* a pour but de trouver des nombres *finis* à l'aide de nombres *auxiliaires* infiniment grands et infiniment petits; et ces derniers sont des nombres *irrationnels*, comme étant inexprimables en chiffres. D'ailleurs, le calcul des *radicaux irrationnels* n'est en réalité que le calcul des fractions à termes infinis, et permet conséquemment *l'inversion de l'ordre des facteurs;* etc.

Le calcul infinitésimal repose sur le principe essentiel que voici : *Tout nombre ne peut augmenter ni diminuer celui qui le contient une infinité de fois, et doit se négliger ou être regardé comme nul à l'égard de celui-ci : c'est un zéro relatif à ce dernier.* Tel est le *principe infinitésimal.*

1° Un nombre infini n'est ni plus ni moins infini quand on lui ajoute ou qu'on en retranche un nombre fini et donné. De sorte que $\infty + 2$ et $\infty - 4$ sont la même chose que ∞. Ainsi 2 et 4 sont comme nuls à l'égard de tout nombre infini, et celui-ci les contient chacun une infinité de fois.

2° Un nombre infiniment petit étant d'une petitesse inassignable ou qui échappe à toute appréciation, on ne peut aucunement en tenir compte pour augmenter ou diminuer un nombre fini. Car si, dans $9 + \frac{1}{\infty}$, l'infiniment petit devait être conservé, il faudrait, pour énoncer et connaître cette somme, dire ce que $\frac{1}{\infty}$ est à l'égard de l'unité employée; chose impossible, puisque par définition, cet infiniment petit est moindre que la plus petite partie assignable de l'unité. On doit donc forcément négliger $\frac{1}{\infty}$ et le regarder comme nul à l'égard de 9, celui-ci le contenant une infinité de fois. De sorte que $9 + \frac{1}{\infty} = 9$; d'où $9\infty + 1 = 9\infty$, comme on l'a vu (1°).

En négligeant les infiniment petits à l'égard des nombres finis, on commet des *erreurs*, sans doute; mais ces erreurs sont les plus petites possible et n'ont absolument aucune influence, puisque cherchant des nombres finis, les infiniment petits ne peuvent en faire partie et doivent en être exclus. (Dans les applications, il y a *compensation d'erreurs*).

Différents ordres d'infinis. L'emploi des *grandeurs infinitésimales* dans le calcul conduit à *différents ordres d'infinis*. D'abord les nombres infinis et infiniment petits, considérés jusqu'à présent, sont des infinis et des infiniment petits du *premier ordre*. Ensuite, les produits de 2, 3, 4, ... facteurs, tous infiniment grands ou tous infiniment petits, sont des nombres infinis ou infiniment petits du *second ordre*, du *troisième*, du *quatrième*, etc. Ainsi ∞^2 est un infini du second ordre, et 1 sur ∞^2 un infiniment petit aussi du second ordre.

Soient x, y, z trois nombres infiniment petits, chacun du premier ordre; le produit xyz est donc un infiniment petit du troisième ordre. Or, le produit de l'infiniment petit x par un nombre infini est toujours un nombre fini a, mais inconnu; on a donc

$$xyz \times \infty = x\infty yz = ayz.$$

On voit que *la somme d'une infinité d'infiniment petits du troisième ordre est un infiniment petit du second*. De même, la somme d'une infinité d'infiniment petits du second ordre est un infiniment petit du premier; et la somme d'une infinité d'infiniment petits est un nombre fini.

Le principe infinitésimal s'applique aux différents ordres d'infinis; c'est-à-dire que *chaque infini d'un certain ordre doit se négliger à l'égard d'un infini de l'ordre immédiatement supérieur*. Car $\infty^2 - \infty = (\infty - 1) \times \infty = \infty \cdot \infty = \infty^2$.

De même, *chaque nombre infiniment petit d'un ordre quelconque est nul à l'égard de l'infiniment petit de l'ordre immédiatement inférieur;* car il ne saurait augmenter ni diminuer ce dernier, comme y étant contenu une infinité de fois. Ainsi par exemple, x désignant un nombre infiniment petit, on a

$$x : x^2 = 1 : x = \infty,\ x^2 : x^3 = 1 : x = \infty,\ \text{etc.}$$

Des symboles numériques. Les différents symboles sont inévitables dans les mathématiques élémentaires. En Algèbre, ils proviennent de la *généralité* complète que l'on attribue volontairement soit aux *règles*, soit aux *formules* ou aux *théorèmes* numériques, afin de simplifier le plus possible les *théories*. De sorte que le calcul des symboles est nécessaire pour maintenir ou donner cette généralité, si importante.

Or, outre les symboles des nombres infiniment grands ou infiniment petits et les symboles *irrationnels*, tels que $\sqrt{7}$, on doit considérer en Algèbre le symbole de *l'idétermination*, comme $\frac{0}{0}$; celui de *l'impossibilité* : $\frac{2}{0}$, le zéro désignant le *néant*, le *rien*, dans ce cas, comme dans le précédent. Il faut distinguer surtout les symboles *négatifs* et *imaginaires*, tels que -4 et $\sqrt{-4}$, désignant des impossibilités *relatives* ou *absolues*.

Symboles négatifs. Un monôme est dit *positif* ou *négatif* suivant qu'il est précédé du signe $+$ ou du signe $-$; c'est alors un terme *additif* ou un terme *soustractif* dont le *signe* est $+$ ou $-$. Les symboles négatifs se présentent dès le commencement de l'Algèbre et sont fournis par *la réduction des termes semblables;* ils doivent donc être soumis à toutes les opérations du calcul. Mais pour cela, il faut *généraliser les définitions* de ces opérations.

On ne saurait éviter le *calcul des symboles négatifs isolés;* car opérer sur le binôme $a-b$, par exemple, c'est réellement opérer sur un monôme soustractif quand $a<b$ ou que $b=a+c$. Dans ce cas, en effet, il vient $a-b=a-(a+c)=a-a-c=o-c=-c$, monôme négatif. Il faudrait donc, pour éviter ce symbole négatif, supposer toujours $a>b$; ce qui détruit la généralité des règles et des formules. D'ailleurs, l'hypothèse de $a>b$ pourrait être absurde.

Observons encore que si à rien, on ajoute 9, on aura nécessairement 9 pour somme. Donc $0+9$ ou $+9=9$; et réciproquement $9=+9$. De même, $+a-b=a-b$. Mais -9 présentant une soustraction impossible, cette soustraction doit rester indiquée et donner ainsi un symbole négatif.

Addition. En Algèbre on *ajoute* des *additions* et des *soustractions*. Par exemple, si j'ai 40 francs dans ma bourse et que j'en dépense 18, le contenu de ma bourse éprouve une diminution de 18 francs; j'y *ajoute* donc une *soustraction* de 18 fr. De sorte que $40+(-18)=40-18$.

En général, l'*addition algébrique* est une opération par laquelle on réunit des nombres, précédés des signes $+$ et $-$, pour en faire un seul appelé *somme* ou *total*.

D'après cette définition, on trouve

$$a+(+b)=a+b \quad \text{et} \quad a+(-b)=a-b.$$

En effet, ajouter $+b$ à a, c'est trouver une quantité composée de a et de $+b$; elle est donc $a+b$. De même, ajouter $-b$ à a, c'est former une quantité composée de a et de $-b$; cette quantité est donc $a-b$. On voit donc que *pour ajouter un terme, il faut l'écrire avec son signe.*

Soustraction. La *soustraction algébrique* est une opération par laquelle, connaissant la somme de deux quantités et l'une d'elles, on trouve l'autre, appelée *reste, excès* ou *différence.*

D'après cette définition, on démontre que

$$a-(+b)=a-b \text{ et } a-(-b)=a+b.$$

D'abord a est la même chose que $a+b-b$, quant à la valeur. Donc si de a, ainsi écrit, on veut soustraire $+b$ ou $-b$, il faut faire en sorte que $+b$ ou $-b$ ne s'y trouve plus; il faut donc y effacer $+b$ ou $-b$, et alors il reste $a-b$ ou $a+b$. On voit que *pour soustraire un terme, il suffit de l'écrire avec son signe changé.*

Multiplication. En Algèbre comme en Arithmétique, *le produit se trouve en opérant sur le multiplicande comme le multiplicateur en opérant sur l'unité.* D'après cela, on démontre que

$$+a\times+b=+ab,\ -a\times+b=-ab,$$
$$+a\times-b=-ab,\ -a\times-b=+ab.$$

En effet, 1° le multiplicateur $+b$ se trouve en multipliant 1 par b et en donnant au résultat b le signe $+$ du multiplicande 1; donc le produit de $+a$ ou $-a$ par $+b$ se trouvera en multipliant a par b et en donnant au résultat ab le signe $+$ ou le signe $-$ du multiplicande; d'où il vient $+ab$ ou $-ab$, pour le produit cherché.

2° Le multiplicateur $-b$ se trouve en multipliant 1 par b et en changeant le signe du résultat b; donc le produit de $+a$ ou $-a$ par $-b$ se trouvera en multipliant $+a$ ou $-a$ par b, ce qui donne $+ab$ ou $-ab$, d'après (1°), puis en changeant le signe du résultat. Le produit cherché est donc $-ab$ ou $+ab$.

On voit que *le produit de deux monômes a le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que ses deux facteurs ont un même signe ou deux signes différents.*

De là résultent les conséquences que voici :

I. On change le signe d'un produit en changeant le signe de l'un de ses facteurs; et si l'on change à la fois les signes des deux facteurs, le signe du produit reste absolument le même.

II. Un produit de tant de facteurs qu'on voudra ne change ni de signe ni de valeur, quel que soit l'ordre des multiplications successives.

III. Le produit d'un nombre pair de facteurs négatifs est positif, tandis que si le nombre de facteurs négatifs est impair, le produit a le signe —.

Division. La *division algébrique* est une opération par laquelle, connaissant un produit, nommé *dividende*, et l'un de ses deux facteurs, appelé *diviseur*, on trouve l'autre facteur, nommé *quotient.* Le dividende et le diviseur sont aussi les *termes* du quotient.

Il suit de cette définition et de la *règle des signes*, dans la multiplication, que : 1° *Le quotient de deux monômes a le signe* + *ou le signe* —, *suivant que ces deux monômes ont un même signe ou des signes différents.*

2° Le quotient change ou ne change pas de signe, suivant qu'on change le signe de l'un de ses termes ou les signes de tous les deux.

Symboles imaginaires. Le carré d'un monôme, positif ou négatif, étant toujours positif, il s'ensuit que *la racine carrée d'un monôme négatif n'existe pas.* Ainsi $\sqrt{(-9)}$ exprime une *impossibilité;* et cette expression s'appelle *quantité* ou mieux *symbole imaginaire* : c'est un *radical imaginaire du second degré.* — Il existe des radicaux imaginaires du *quatrième degré*, du *sixième*, et en un mot de *degrés pairs.* Nous ne voulons ici nous occuper que des symboles imaginaires du *second degré.*

Soit d'abord à multiplier $\sqrt{a}$ par $\sqrt{-9}$, par exemple. On observe que -9 étant le carré de sa racine carrée, doit contenir le carré de l'unité de cette racine; de sorte que $-9=-1^2\times 9$, ce qui est d'ailleurs évident. Il s'agit donc de multiplier $\sqrt{a}$ par $\sqrt{(-1^2\times 9)}$. Or, ici le multiplicateur se trouve en multipliant le carré de l'unité par 9, en changeant le signe du produit 9 et en prenant la racine carrée du résultat -9; donc, en vertu de la définition générale, le produit cherché se trouvera en multipliant par 9 le carré a du multiplicande $\sqrt{a}$, en changeant le signe du produit $9a$ et en prenant la racine carrée du résultat $-9a$. On a donc
$$\sqrt{a}\times\sqrt{(-9)}=\sqrt{(-9a)}=\sqrt{(-9)}\times\sqrt{a}.$$

On voit, réciproquement, que *la racine carrée du produit* $a\times -9$ *se trouve en multipliant entre elles les racines carrées de chacun des facteurs de ce produit.* Ainsi on aura
$$\sqrt{(-9)}=\sqrt{(9\times -1)}=3\sqrt{-1}\text{, et }\sqrt{-7}=\sqrt{7}\sqrt{-1}.$$

Le produit est imaginaire en même temps que l'un quelconque de ses facteurs. Mais *si les deux facteurs sont imaginaires, leur produit est un nombre réel, de signe contraire à celui qu'il aurait si les deux facteurs étaient réels eux-mêmes.* On a, en effet,

$$\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{a\times-1}\sqrt{b\times-1}=\sqrt{(-1)^2ab}=-\sqrt{ab}.$$

Observons encore que les nombres entiers, fractionnaires, irrationnels, infinis et infiniment petits sont des grandeurs *réelles*, bien que les trois derniers genres de nombres restent toujours inconnus. Il y a donc des radicaux *réels* et des radicaux *imaginaires;* ceux-ci réprésentant des nombres *impossibles*, des grandeurs *fictives* ou *non-existantes*. Les radicaux imaginaires, inévitables en Algèbre, y sont d'ailleurs nécessaires pour indiquer certaines impossibilités.

Autres symboles. Considérons l'équation du premier degré, ramenée à la forme

$$ax=b; \text{ d'où } x=\frac{b}{a}.$$

Si a et b sont rigoureusement nuls, il vient $x=\frac{0}{0}=0^0$; et je dis qu'alors le nombre inconnu x est absolument *indéterminé* et peut recevoir une infinité de valeurs différentes. Car ayant $0\times x=0$, il est clair que pour toute valeur assignée au nombre x, le produit du zéro *absolu* par cette valeur est toujours zéro, et l'équation toujours satisfaite. Ainsi $\frac{0}{0}$ est le symbole de l'*indétermination*, toujours complète dans les équations du premier degré, et parfois apparente seulement dans celles du second.

On a vu plus haut que le nombre x est toujours *fini* et *indéterminé* lorsque a et b sont à la fois *infinis* ou tous les deux *infiniment petits*. Mais si b est un nombre *fini* et *donné*, il est clair que a est *infiniment petit* ou *infiniment grand*, suivant au contraire que a est *infini* ou *infiniment petit*.

Si $b=9$ et $a=0$, le zéro désignant le *rien*, le *néant*, on a $x=\frac{9}{0}$; et je dis alors que le nombre x est *impossible*, *n'existe pas*. Car ayant $0\times x=9$, il n'existe aucun nombre x, fût-il infini, qui multipliant zéro donne 9 au produit; vu que zéro répété autant de fois qu'on voudra, donne toujours zéro et jamais 9. Ainsi $\frac{9}{0}$ est le symbole de la *non-existence*. — Et observons que les symboles *négatifs* et les symboles *imaginaires* peuvent désigner la *non-existence*, aussi bien que $\frac{1}{0}$.

Les infiniment petits sont nécessaires. On a vu plus haut que la définition des nombres infiniment petits, est tout aussi claire et aussi précise que la définition des nombres infiniment grands. Je ne puis donc comprendre pourquoi différents auteurs d'Algèbre rejettent les nombres infiniment petits lorsqu'ils sont forcés d'employer des nombres infinis. Ils priveraient la science de l'un de ses éléments les plus utiles de recherche et de déduction logique, s'ils pouvaient en bannir le nombre infiniment petit. Mais en réalité ils ne proscrivent que le nom, puisqu'ils admettent qu'un nombre peut varier par *degrés insensibles;* ce qui est bien admettre que le nombre peut varier par *infiniment petits.* Or, pour éviter un nom, faut-il poser des égalités impossibles! Car les équations $\frac{1}{\infty}=0$ et $\frac{1}{0}=\infty$ sont absurdes, si le zéro est *absolu* ou le *néant :* elles ne sont vraies que quand le zéro est *relatif,* c'est-à-dire un nombre *infiniment petit*, qu'on voudrait éviter. — On conçoit d'ailleurs que l'égalité impossible $\frac{1}{0}=\infty$ ne peut fournir que des absurdités.

Signification du symbole négatif isolé. Tout symbole négatif isolé, tel que -10, indique une soustraction impossible, et impossible parce que le plus grand nombre de cette soustraction est *sous-entendu*, comme n'étant aucunement l'objet du calcul actuel. Il suffit donc de faire reparaître ce plus grand nombre, du moins comme *auxiliaire*, pour avoir la véritable signification du symbole négatif, parmi les grandeurs concrètes, et même pour démontrer les opérations auxquelles il peut être soumis. Mais, comme on l'a vu plus haut, il est plus simple et plus direct de démontrer le calcul des symboles en généralisant les définitions des opérations.

Comparaison des symboles. 1° Le plus grand nombre n étant commun aux deux soustractions $n-4$ et $n-9$, il est évident que $n-4>n-9$. Si donc n est sous-entendue, il vient $-4>-9$. De même, $0>-3$; et cela est fondé sur ce que : *plus on soustrait, moins il reste*, et réciproquement.

2° De là, si $x^2=-4$ et $y^2=-9$, il semble qu'on doive poser $x^2>y^2$ et $x>y$; tandis qn'ayant $x=2\sqrt{-1}$ et $y=3\sqrt{-1}$, on a, au contraire, $x<y$. Cela vient de ce qu'ici $\sqrt{-1}$ est l'*unité imaginaire;* car il est évident que *plus le nombre imaginaire a d'unités de cette espèce plus il est grand.*

Discussion et interprétation. On sait qu'une formule générale peut fournir d'utiles théorèmes numériques par sa *discussion*, et que la discussion complète consiste à faire varier, par degrés insensibles ou infiniment petits, l'un au moins des nombres arbitraires, puis à *interpréter* successivement les symboles qui en résultent.

Interpréter un symbole, ordinairement signe d'une impossibilité *relative*, c'est énoncer le théorème qu'il démontre ou le problème qu'il résout, *en conservant les nombres donnés qui ont fourni ce symbole.*

L'interprétation d'un symbole négatif, tel que $x = -6$, par exemple, a pour résultat de donner à l'inconnue x une *acception contraire*, et se fait en remplaçant la *soustraction impossible* par une *addition.*

Si l'inconnue x doit être un nombre *entier* et qu'on trouve $x = \frac{9}{4}$, x n'existe pas, et $\frac{9}{4}$ en est le symbole *fractionnaire*. L'interprétation de ce symbole consiste uniquement à changer la nature de l'inconnue x de telle sorte qu'elle puisse, sans absurdité, être la fraction $\frac{9}{4}$. — L'interprétation de tout symbole *irrationnel* se fait en calculant ce nombre avec un degré d'approximation *assigné.* — L'interprétation des symboles négatifs conduit à celle de certains symboles imaginaires, aussi bien qu'à l'interprétation, soit du symbole de l'indétermination $\frac{0}{0}$, soit du symbole de non-existence, tel que $\frac{2}{0}$. Il suffit chaque fois de remplacer, par une *addition*, la *soustraction* qui produit l'imaginarité ou le zéro absolu.

Des variables. On appelle *variable* tout nombre indéterminé qui peut recevoir successivement différentes valeurs dans un même calcul ou dans la même formule. Ainsi les nombres infiniment grands et les nombres infiniment petits étant toujours inconnus et indéterminés, sont nécessairement variables. — Au contraire, on nomme *constante* la quantité dont la valeur reste toujours la même; et si cette valeur n'est pas donnée, la constante est dite *arbitraire.*

On dit qu'une grandeur croissante varie *continuement* lorsqu'elle croît par degrés insensibles ou infiniment petits, qui se *touchent;* et tels sont les *fruits*, les *cheveux*, l'*herbe*, etc. On sait, en effet, que chacune de ces choses croît *continuement*, et que les accroissements successifs sont si petits qu'ils échappent à la vue, à l'imagination et à toute appréciation : ils sont infiniment petits et nous resteront toujours inconnus. On voit comment les infiniment petits sont nécessaires pour exprimer la *continuité* dans le calcul, et comment ils se présentent dans les phénomènes naturels, bien qu'ils y soient toujours invisibles.

La discussion des formules démontre que : 1° *Un nombre variable ne peut devenir négatif, de positif qu'il était, qu'en passant, soit* *par l'infiniment petit et le néant, soit par l'infiniment grand et la non-existence.* Tels sont x et y dans $x=a-b$ et $y=\frac{c}{x}$.

2° Si le nombre variable entre sous un radical du second degré avec des nombres constants, ce radical ne peut devenir imaginaire, de réel qu'il était, que quand le nombre variable passe soit par son *maximum*, soit par son *minimum*.

Règle des variables. *Si une équation finale exacte renferme des termes constants et des termes variables, pouvant diminuer ensemble indéfiniment, sans que l'égalité des deux membres cesse d'exister, cette égalité subsiste encore lorsqu'on y suppose nuls les termes variables proposés;* et telle est la *règle des variables* qu'il s'agit de démontrer.

Soit $a+x=b+y$ l'équation finale, toujours exacte, dans laquelle a et b sont deux nombres constants, x et y deux nombres variables, pouvant diminuer ensemble indéfiniment; je dis que nécessairement $a=b$.

D'abord l'équation proposée revient à celle-ci :

$$a=b+(y-x).$$

Si la différence $y-x$ n'est pas nulle, elle est du moins variable, comme étant toujours moindre que la variable y. Si donc cette différence variable devait être conservée dans l'équation précédente, toujours exacte, le nombre constant a serait toujours égal au nombre variable $b+(y-x)$, et ne serait pas constant, contrairement à l'hypothèse. Donc la différence variable $y-x$ doit disparaître de l'équation, absolument comme si elle était nulle ou comme si l'on avait $x=0$ et $y=0$; et l'on a rigoureusement $a=b$. Ce qu'il fallait démontrer.

Observons maintenant que puisque $a=b$, on a aussi $y-x=0$. Or, les deux variables x et y peuvent diminuer ensemble indéfiniment; on peut donc les supposer toutes les deux infiniment petites. Donc chacune doit se négliger à l'égard du nombre fini qui la contient une infinité de fois, en vertu du principe infinitésimal. On commet alors deux erreurs infiniment petites; mais ces deux erreurs se compensent, puisque $y-x=0$; et l'on a rigoureusement $a=b$. Le principe infinitésimal est donc ici rigoureusement exact par *compensation d'erreurs*, et se confond avec la règle des variables, comme on le voit; mais celle-ci est plus générale : on en déduit, comme on sait, la démonstration du principe fondamental de la *méthode des coëfficients indéterminés.*

Remarque sur le principe infinitésimal. Toutes les fois que l'équation finale a deux termes constants et deux termes variables infiniment petits, le principe infinitésimal est rigoureusement exact, *par compensation d'erreurs*; et cela est vrai encore quand l'équation finale, ayant deux termes constants, n'a qu'un seul terme variable, infiniment petit; car alors celui-ci peut être regardé comme exprimant la différence de deux termes variables. — Observons cependant que si, dans l'équation finale toujours exacte $a=b+x$, a et b sont deux nombres constants, et x un nombre variable, celui-ci disparait de l'équation, non parce qu'il est nul, non parce qu'il est infiniment petit, mais uniquement parce qu'il est variable; et l'on a rigoureusement $a=b$.

Mais si, dans l'équation finale $a=b+x$, le nombre a est seul constant, tandis que b et x varient en sens contraires, b augmentant lorsque l'infiniment petit x diminue, le principe infinitésimal n'est rigoureusement exact que relativement. Car, cherchant un nombre *fini* a, l'infiniment petit x ne peut en faire partie ni augmenter le nombre fini b pour avoir a, vu que la somme $b+x$, composée du nombre fini b et du nombre infiniment petit x, n'est pas un nombre fini que l'on puisse énoncer. Il faut donc négliger l'infiniment petit x et le regarder comme *zéro relatif* à l'égard du nombre fini b qu'il ne saurait augmenter. De sorte qu'en écrivant $a=b$, on commet une erreur x infiniment petite, absolument inappréciable et dont on ne saurait tenir compte. Cette erreur x n'influe pas plus sur la valeur finie de a que si l'on avait rigoureusement $x=0$.

Application. Pour appliquer ce dernier cas, supposons que a soit une pièce d'or : il est certain qu'en la déplaçant les doigts en enlèvent, par le frottement, une partie x tellement petite qu'elle échappe à la vue, mais augmente néanmoins avec la pression des doigts : elle est *infiniment petite.* Si donc b désigne le restant de la pièce, on aura l'équation, toujours exacte, $a=b+x$.

Mais ici, comme b et x varient en même temps et en sens contraires, la règle des variables n'est pas applicable. Néanmoins x étant infiniment petite, doit se négliger à l'égard de b, en vertu du principe infinitésimal. De sorte qu'en écrivant $a=b$, on commet une erreur x infiniment petite ou absolument *inappréciable* par sa petitesse; et il n'y a pas moyen d'éviter cette erreur.

Objection et réponse. — On a opposé, à l'application précédente, l'objection que voici : « La quantité x n'est pas un infiniment petit .... ; c'est une quantité si évidemment finie, qu'après un certain temps, relativement peu long, la pièce d'or a notablement diminué de poids. »

En posant cette objection, on n'a pas fait attention que la diminution de poids n'est pas due seulement au frottement des doigts sur la pièce d'or qu'ils déplacent; mais surtout aux chocs et aux frottements de cette pièce contre d'autres, contre les parois de la bourse, contre la table sur laquelle on la pose ou on la jette, etc. Il est certain que la quantité x est *infiniment petite*, comme invisible et absolument inappréciable par sa petitesse. Dans ce cas, le principe infinitésimal devient le principe de très-grande approximation et même de la plus grande de toutes les approximations possibles. De sorte qu'alors on doit encore regarder le principe infinitésimal comme rigoureusement exact, ainsi qu'il est établi plus haut; car l'infiniment petit n'a pas plus d'influence, sur la valeur finie cherchée, que s'il était rigoureusement nul.

Somme de puissances m ièmes. Désignons par $\int n^m$ (qu'on énonce S, n puissance m) la somme des puissances m ièmes des n premiers nombres entiers, m étant un nombre quelconque entier et positif, et cherchons l'expression de cette somme quand n est infini. — Soit d'abord posé

$$x = n^m + an^{m-1} + a^2n^{m-2} + \ldots + n^m. \ldots \quad (1)$$

Le nombre des termes du second membre est évidemment $m+1$; et si l'on multiplie de part et d'autre par $n-a$, on trouvera, réductions faites,

$$(n-a)x = n^{m+1} - a^{m+1}. \ldots \quad (2)$$

Comme $n > a$, il est clair que l'expression (1) de x devient plus grande ou plus petite, suivant qu'on y remplace a par n ou n par a; c'est-à-dire qu'on a $x < (m+1)n^m$ et $x > (m+1)a^m$; d'où résulte évidemment

$$x = (m+1)n^m - < (m+1)(n^m - a^m).$$

Posant $n-a=1$ ou $a=n-1$, la valeur qu'on vient de trouver pour x est identique avec la valeur (2) et l'on a

$$(m+1)n^m - < (m+1)[n^m - (n-1)^m] = n^{m+1} - (n-1)^{m+1}.$$

Prenant donc successivement $n = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, puis ajoutant membre à membre les n égalités résultantes, il est clair que les termes entre crochets et ceux des seconds membres se détruisent deux à deux et qu'en transposant, on a

$$(m+1)\int n^m = n^{m+1} + <(m+1)n^m.$$

Si donc n est infini, le second terme du second membre est nul à l'égard du premier qui le contient une infinité de fois : donc enfin

$$\int n^m = \frac{1}{m+1}\, n^{m+1}\ldots \qquad (3)$$

Cette formule n'est exacte que pour n infini, et il en résulte alors $\int n = \frac{1}{2}n^2$, $\int n^2 = \frac{1}{3}n^3$, $\int n^3 = \frac{1}{4}n^4$, etc.

La formule infinitésimale (3) reçoit un grand nombre d'applications utiles dans la théorie du mesurage en géométrie analytique. Cette formule est vraie encore lorsque n étant infini, l'exposant m est un nombre quelconque, rationnel ou irrationnel, positif ou négatif. C'est ce qu'on démontre à l'aide de la *série binomiale* la plus générale. Mais la formule (3), où m est entier positif, suffit aux applications élémentaires.

Séries numériques. On appelle *série* toute suite de nombres ou *termes* croissant ou décroissant d'après une certaine loi. Le *terme général* d'une série est celui qui fournit tous les autres par les valeurs entières successives de la lettre n désignant le *rang* de ce terme, lequel par suite est le *n ième terme* de la série ; et si le terme général n'a pas d'autre lettre que n, la série est dite *numérique*. — Pour abréger, nous désignerons par t_n et S_n (qu'on énonce t, n et S, n) le n ième terme de la série numérique et la somme de ses n premiers termes.

Cela posé, on peut aisément trouver quelle est la série numérique dont on se donne la somme S_n des n premiers termes en fonction entière et rationnelle de n. Car si, de la somme des n premiers termes de la série numérique cherchée, on soustrait la somme des $n-1$ premiers, il reste nécessairement le n ième terme t_n, réductions faites, et l'on aura toujours

$$t_n = S_n - S_{n-1}.$$

Prenant successivement $n = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$ dans cette identité, puis ajoutant membre à membre les n égalités résultantes et observant que, dans le nouveau second membre, les termes se détruisent deux à deux, à l'exception de S_n et de $-S_0$, on trouvera

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \ldots + t_n \text{ ou } \int t_n = S_n - S_0.\,.$$

De là on voit que les sommes des n premiers nombres entiers, de leurs carrés et de leurs cubes sont :

$$\tfrac{1}{2}n(n+1),\ \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \text{ et } \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

De sorte que la somme des cubes des n premiers nombres entiers est toujours le carré de la somme de ces n nombres. Et si n est infini, on trouve, comme plus haut :

$$\int n=\tfrac{1}{2}n^2,\ \int n^2=\tfrac{1}{3}n^3 \text{ et } \int n^3=\tfrac{1}{4}n^4.$$

De même, les sommes respectives des n premiers nombres impairs, de leurs carrés et de leurs cubes sont :

$$\int(2n-1)=n^2,\ \int(2n-1)^2=\tfrac{1}{3}n(4n^2-1)$$

et

$$\int(2n-1)^3=n^2(2n^2-1).$$

Pour n infini, les deux dernières se réduisent à $\frac{4}{3}n^3$ et à $2n^4$. — Dans ces applications, S_0 est nul; mais il a parfois une valeur dont il faut tenir compte. Par exemple, l'identité

$$2n-1=\tfrac{1}{4}(2n-1)(2n+1)-\tfrac{1}{4}(2n-3)(2n-1),$$

donne $\int(2n-1)=\frac{1}{4}(2n-1)(2n+1)+\frac{1}{4}=n^2$.

Par le procédé ci-dessus, on peut trouver et sommer une multitude de séries numériques, plus ou moins remarquables. Par exemple, ayant

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \text{ et } \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)},$$

il vient successivement les deux formules :

$$\int\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1},$$

$$\int\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

Pour n infini, la première de ces formules se réduit à l'unité et la seconde à $\frac{1}{2}$.

Séries littérales. La série est dite *littérale* lorsque le n ième terme renferme d'autres lettres que n ; mais le procédé ci-dessus peut encore faire connaître parfois la série littérale dont on s'est donné la somme des n premiers termes en fonction entière et rationnelle de n. Par exemple, il est clair qu'on a successivement :

$S_n=an+\frac{1}{2}n(n-1)r$; d'où $S_{n-1}=a(n-1)+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)r$, et $a+nr-r=S_n-S_{n-1}$. Donc $\int(a+nr-r)=S_n$ ou bien $a+(a+r)+(a+2r)+\ldots+(a+nr-r)=an+\frac{1}{2}n(n-1)r$.

Le second membre exprime donc la somme des n premiers termes de la *progression arithmétique*, ou *par différence*, dont les nombres *constants* a et r sont le *premier terme* et la *raison*. D'ailleurs, r quelconque peut être *négatif*; et si n est *infini*, il vient $\int(a+nr-r)=\frac{1}{2}n^2r$.

De même, il est clair qu'on a successivement :

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\,;\ S_{n-1}=\frac{a(r^{n-1}-1)}{r-1}\ \text{ et }\ ar^{n-1}=S_n-S_{n-1}.$$

Donc $\int ar^{n-1}=S_n$ ou $a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$.

Le second membre exprime la somme des n premiers termes de la *progression géométrique*, ou *par quotient*, dont a est le *premier terme* et r la *raison*, *positive* ou *négative* quelconque.

Termes alternativement positifs et négatifs. La méthode des *identités*, pour découvrir et sommer certaines séries numériques, s'applique aux séries dont les termes sont alternativement positifs et négatifs. Par exemple, considérons l'expression $\pm\frac{1}{4}(2n+1)$, le signe $+$ du double signe répondant à n impair et le signe $-$ à n pair. Cette expression change donc de signe quand on y remplace n par $n-1$, et cela donne $\mp\frac{1}{4}(2n-1)$. Soustrayant cette seconde expression de la première et réduisant, il vient

$$\pm n=\pm\tfrac{1}{4}(2n+1)\pm\tfrac{1}{4}(2n-1).$$

Posant donc successivement $n=1, 2, 3, 4, \ldots, n$, puis ajoutant membre à membre les n égalités résultantes et réduisant, on trouve

$$1-2+3-4+\ldots\pm n \text{ ou } \int\pm n=\pm\tfrac{1}{4}(2n+1)+\tfrac{1}{4}.$$

De même, $\pm(2n-1)=\pm n\pm(n-1)$ donne

$$1-3+5-7+\ldots\pm(2n-1) \text{ ou } \int\pm(2n-1)=\pm n.$$

Par la méthode des identités, on trouve aisément :

$$\int\pm n^2=\pm\tfrac{1}{2}n(n+1),\ \int\pm(2n-1)^2=\pm\tfrac{1}{2}(2n-1)(2n+1)-\tfrac{1}{2};$$

$$1-3\cdot2+5\cdot2^2-7\cdot2^3+\ldots\pm(2n-1)2^{n-1}=\pm\tfrac{1}{9}(6n-1)2^n-\tfrac{1}{9},$$

$$\int\pm n^2\cdot2^{n-1}=\pm\tfrac{1}{27}(9n^2+6n-1)2^n-\tfrac{1}{27}.$$

Il faut toujours bien se rappeler que dans chacune des formules précédentes, le signe $+$ du double signe répond à n impair et le signe $-$ à n pair; comme dans celle-ci :

$$1-3+6-10+15-21+\ldots\pm n(n+1)=\pm\tfrac{1}{4}n(n+2)+\tfrac{1}{8}(1\pm1).$$

Réciproquement, si le n ième terme de la série était donné, par exemple $\pm\frac{1}{2}n(n+1)$, il serait presqu'impossible, même en tâtonnant, de calculer la somme des n premiers termes. En général, quand le n ième terme est donné en fonction rationnelle de n, si la somme des n premiers termes de la série existe, on parvient fort rarement à la calculer par la voie directe, si ce n'est pour les progressions, etc.

Puissances a exposants infinis. I. *Si un nombre surpasse l'unité, ses puissances positives croissent avec leurs exposants et deviennent infiniment grandes avec eux.*

Soit $r>1$ et soit effectuée la multiplication par $r-1$: on a

$$(r^{n-1}+r^{n-2}+\ldots+r^2+r+1)(r-1)=r^n-1.$$

Posant $r-1=x$ et observant que chacun des n termes du multiplicande est >1, on verra que ce multiplicande $>n$. On a donc

$$nx<r^n-1\,;\ \text{d'où}\ r^n>nx+1.$$

Comme x est un nombre fini constant, il est clair que le produit nx croît avec n, aussi bien que r^n, et que si n devient infiniment grand, il en est de même du produit nx, aussi bien que de r^n. Ce qu'il fallait démontrer.

II. *Si un nombre est moindre que l'unité, ses puissances positives diminuent pendant que leurs exposants augmentent et deviennent infiniment petites quand ces exposants deviennent infiniment grands.*

Soit $r<1$ et soit posé $pr=1$; d'où $p^nr^n=1$ et $r^n=1:p^n$. Comme $r<1$, on a $p>1$. Donc p^n croit avec n et r^n décroît : si n est infini, il en sera de même de p^n, et r^n sera au contraire infiniment petit; c'est-à-dire qu'on aura $r^\infty=\frac{1}{\infty}$. Ce qu'il fallait démontrer.

Progressions géométriques. Si l'on divise a par $1-r$, en ordonnant par rapport aux puissances ascendantes de r, il est clair que le quotient admet un nombre illimité ou infini de termes, vu qu'il y aura toujours un *reste;* et si l'on s'arrête au n ième terme t de ce quotient, savoir $t=ar^{n-1}$, on trouve

$$\frac{a}{1-r}=a+ar+ar^2+ar^3+\ldots+ar^{n-1}+\frac{ar^n}{1-r}.$$

Soit S la somme des n premiers termes de la progression géométrique dont a est le premier terme, r la raison et t le n ième terme : l'identité précédente donne

$$S = \frac{a - ar^n}{1 - r} \text{ et } S = \frac{rt - a}{r - 1}.$$

Si nous supposons le nombre n de termes infiniment grand, nous ne pourrons jamais calculer tous ces termes ; mais S n'en sera pas moins la *génératrice constante de la somme des termes de la progression, supposée continuée à l'infini;* et il faut calculer cette génératrice. Or, la progression étant continuée à l'infini, *il n'y a pas de dernier terme;* c'est-à-dire que ar^∞ est indéterminable et doit disparaître de l'expression de S absolument comme s'il était rigoureusement nul, *bien qu'il ne puisse jamais le devenir.*

En effet, le terme ar^∞ est variable avec ∞ ; si donc il devait rester dans l'expression de S, la génératrice constante S serait toujours égale à une quantité variable; chose évidemment absurde. Le terme ar^∞ disparaît donc de l'expression de S, non parce qu'il est nul, non parce qu'il est infini ou infiniment petit, mais parce qu'il est variable; et il en résulte $S = a:(1-r)$.

La génératrice de toute progression géométrique, continuée à l'infini, est donc la *fraction dont le numérateur et le dénominateur sont le premier terme de la progression et l'unité moins la raison.* Et c'est ce qu'on a déjà vérifié en effectuant la division de a par $1-r$.

Évaluations numériques. I. Pour les *évaluations numériques*, la génératrice exprime exactement la somme de tous les termes de la progression, continuée à l'infini, chaque fois que la raison r, positive ou négative, est moindre que l'unité : c'est alors le résultat d'une *infinité d'additions partielles successives*, ainsi effectuées sans autres calculs que la division de a par $1-r$.

Dans le cas de $r<1$, la génératrice proposée est aussi la *limite* constante de la somme de tous les termes ; car plus on additionne entre eux de premiers termes de la progression, plus on approche de cette génératrice constante, à laquelle cependant on ne parviendra jamais, puisqu'il sera toujours impossible d'effectuer une infinité d'additions partielles successives. La progression alors, déjà *décroissante* par $r<1$, est appelée *série convergente.*

II. La progression serait une *série divergente* si r étant >1, on avait $r=2$, par exemple. Car alors, plus on prendrait de premiers termes de cette progresssion *croissante*, plus on s'éloignerait de la véritable somme cherchée, laquelle se réduit ici à $-a$.

Cela tient au *terme complémentaire* (sous-entendu) qui doit toujours accompagner chaque *développement en série* et qui n'en disparait réellement que pour calculer la génératrice *constante;* car, que n soit *fini* ou *infini*, le terme complémentaire est toujours variable. Ici par exemple, si l'on s'arrête aux cinq premiers termes du quotient, il est clair que le terme complémentaire se réduit à $-32a$, et qu'on a exactement

$$\frac{a}{1-2} \text{ ou } -a=a+2a+4a+8a+16a-32a.$$

Mais la fraction algébrique a sur $(1-2)$ n'en est pas moins la génératrice, par division, de la progression proposée, continuée à l'infini. — On voit que les séries divergentes ne peuvent servir aux évaluations que sous la condition de calculer le terme complémentaire; chose souvent impossible.

III. Enfin, si $r=1$ et qu'on ait égard au terme complémentaire de la progression, continuée à l'infini, on trouve

$$\frac{a}{1-1} \text{ ou } \frac{a}{0}=a\times\infty+\frac{a}{0};\ \text{d'où } \tfrac{0}{0}=a\times\infty.$$

Ce résultat est exact, puisque ∞ est *indéterminé.*

Procédé plus simple. Voici le procédé le plus simple pour calculer la génératrice x de toute progression géométrique, censée continuée à l'infini. On a d'abord

$$x=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\text{etc.};\ \text{d'où}$$
$$x=a+r(a+ar+ar^2+ar^3+\text{etc.}).$$

Comme un nombre infini ne cesse pas d'être infini lorsqu'on en retranche une ou plusieurs unités, on voit que la progression géométrique entre parenthèses est identique avec la proposée; elle a donc la même génératrice x, et l'on a

$$x=a+rx;\ \text{d'où } x=\frac{a}{1-r}.$$

La valeur de x pourrait aussi s'écrire comme il suit :

$$x=a+ar+r^2(a+ar+ar^2+\text{etc.});$$

d'où $x=a+ar+r^2x$, puis $x-r^2x=a(1+r)$ et $(1-r)x=a$, comme plus haut.

Par ce procédé très-simple, on trouve la fraction ordinaire génératrice de toute *fraction décimale périodique.* On trouve aussi la génératrice de toute *fraction continue périodique* et de toute *série* *périodique illimitée*, telle que

$$x = \frac{a}{c} + \frac{b}{c^2} + \frac{a}{c^3} + \frac{b}{c^4} + \frac{a}{c^5} + \frac{b}{c^6} + \text{etc.} = \frac{ac+b}{c^2-1}\ ;$$

les lettres a, b, c désignent des nombres entiers, a et b premiers avec c, et b pouvant être négatif.

De plus, le nombre n de termes étant infini, cherchons x dans

$$x = a - a + a - a + a - a + \text{etc.}$$

Suivant que n est *impair* ou *pair*, on a $x = a$ ou $x = 0$. Or, aucune de ces deux valeurs de x n'est la véritable, vu que le nombre infini n étant absolument indéterminé, n'est pas plutôt impair que pair; la valeur véritable de x doit donc dépendre également de ces deux-là ou être leur demi-somme, savoir $\frac{1}{2}(a+0)$ ou $\frac{1}{2}a$.

On a, en effet, $x = a - (a - a + a - a + a - \text{etc.})$; d'où

$$x = a - x \text{ et } x = \tfrac{1}{2}a = a : (1+1).$$

Appliquant le procédé ci-dessus lorsque chaque signe radical porte sur tout ce qui le suit, le nombre de ces signes étant infini, on trouve :

$$x = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2 \text{ etc.}}}}} = \sqrt{(2x)}\text{; d'où } x = 2;$$

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \text{etc.}}}} = \sqrt{(2+x)}\text{; d'où } x = 2 \text{ ou } -1.$$

Il serait impossible de calculer autrement x, dans le second exemple; et l'on peut interpréter la valeur -1 : elle vient de ce que les radicaux sont alternativement positifs et négatifs. On trouve, en effet,

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 - \text{etc.}}}} = \sqrt{(2-x)} \text{ et } x = 1 \text{ ou } -2.$$

Produits d'une infinité de facteurs finis. Si $r < 1$, soit p le produit du nombre infini de facteurs binômes $1+r$, $1+r^2$, $1+r^4$, $1+r^8$, $1+r^{16}$, etc. et soit q le produit de leurs *valeurs inverses;* d'où $pq = 1$. Effectuant les premières multiplications, dans p, on verra bientôt que p est la génératrice de la progression géométrique décroissante à l'infini, dont 1 est le premier terme et r la raison, moindre que l'unité : donc

$$p = \frac{1}{1-r} \text{ et } q = 1 - r.$$

Ces deux valeurs sont des nombres *finis;* ainsi il n'arrive pas toujours que le produit d'une infinité de facteurs, tous plus grands ou tous plus petits que l'unité, soit infiniment grand ou infiniment petit : *cela n'a lieu que quand tous les facteurs finis sont égaux*, comme on l'a déjà démontré. Ces démonstrations sont donc nécessaires.

Formule du binôme. L'examen des puissances seconde, troisième, quatrième, ... du binôme $1+x$ a conduit, par induction, au développement de $(1+x)^n$, n étant un nombre entier positif. La loi des exposants de x est évidente dans les développements de $(1+x)^2$, $(1+x)^3$, $(1+x)^4$, etc. Mais il n'en est pas de même de la loi des coëfficients, et la difficulté est de savoir comment chaque coëfficient se compose de l'exposant. Newton a *deviné* le premier cette composition, sans doute après plusieurs essais inutiles : il paraît même qu'il s'est borné à la seule *induction* pour écrire la formule développement de $(1+x)^n$. Or, la multiplication par $1+x$ donne successivement :

$$(1+x)^2=1+2x+x^2,\ (1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3,$$
$$(1+x)^4=1+4x+6x^2+4x^3+x^4.$$

Pour trouver la composition des coëfficients avec l'exposant, on observe que le coëfficient 1 du dernier terme dans le premier développement, et les coëfficients 3, 1 des deux derniers termes dans le second, sont :

$$1=\frac{2(2-1)}{1\cdot 2},\ 3=\frac{3(3-1)}{1\cdot 2},\ 1=\frac{3(3-1)(3-2)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

De même, dans le développement de $(1+x)^4$, les trois derniers coëfficients 6, 4, 1 sont exprimés au moyen de l'exposant 4 comme il suit :

$$6=\frac{4(4-1)}{1\cdot 2},\ 4=\frac{4(4-1)(4-2)}{1\cdot 2\cdot 3},\ 1=\frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

De là, l'exposant n étant un nombre entier quelconque, on est conduit à poser :

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots+$$
$$\frac{n(n-1)\ldots(n-v+2)}{1\cdot 2\ldots(v-1)}x^{v-1}+\frac{n(n-1)\ldots(n-v+1)}{1\cdot 2\ldots v}x^v+\ldots+x^n.$$

Dans cette formule, développement de $(1+x)^n$, le coëfficient de x^v a pour numérateur le produit des v facteurs décroissants $n, n-1, n-2, n-3, \ldots, n-v+1$, et pour dénominateur le produit des v facteurs croissants, $1, 2, 3, 4, \ldots v$. La loi de formation des termes successifs de la formule est bien mise en évidence, d'après cela; et il faut démontrer que cette formule s'applique pour toutes les valeurs entières et positives de l'exposant n.

A cet effet, si l'on multiplie les deux membres de l'identité précédente par le binôme $1+x$, les deux produits seront identiques et le premier sera $(1+x)^{n+1}$. Quant au second produit, il est clair que le coëfficient de x^v est

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-v+2)(n-v+1)}{1\cdot2\ldots(v-1)v}+\frac{n(n-1)\ldots(n-v+2)}{1\cdot2\ldots(v-1)}$$

$$=\left(\frac{n-v+1}{v}+1\right)\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-v+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(v-1)}$$

$$=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-v+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(v-1)v}.$$

C'est précisément ce que devient le coëfficient de x^v, dans le second membre proposé, quand on y change n en $n+1$. De sorte qu'en changeant n en $n+1$ dans les deux membres de l'identité proposée, on a leurs produits cherchés par $1+x$. On voit donc que si la formule, développement de $(1+x)^n$, est vérifiée pour une certaine valeur entière de l'exposant n, *elle est vraie encore pour une valeur plus grande d'une unité*. Or cette formule est vérifiée pour $n=2$, 3 et 4; donc elle est vraie aussi pour $n=5$, puis pour $n=6$, $n=7$, et en général pour toutes les valeurs entières et positives de l'exposant n.

Tel est le procédé le plus naturel et le plus simple pour découvrir et démontrer la *formule du binôme*, dans laquelle on peut changer x en $-x$. Et si l'on pose $x=b$ sur a, il vient, en multipliant de part et d'autre par a^n, le développement de $(a+b)^n$.

Série binomiale. Réciproquement, les variables n et x étant des nombres ou des symboles quelconques, cherchons l'expression *immédiate*, ou la plus simple, en n et x, de $y=f(n,x)$ dans l'équation identique :

$$y=1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\ldots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-v+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots v}x^v+\text{etc.}$$

Pour calculer l'expression immédiate de la fonction inconnue y, procédons par induction en descendant aux valeurs particulières de n, et posons d'abord $n=3$, par exemple : dans ce cas l'équation identique devient

$$y=1+3x+3x^2+x^3=(1+x)^n,$$

vu que $3=n$. De même, soit $n=-1$: on a

$$y=1-x+x^2-x^3+x^4-\text{etc.}=1:(1+x);$$

d'où $\quad y=(1+x)^{-1}=(1+x)^n$, car $-1=n$.

Pareillement, si $n=\frac{1}{2}$, l'équation proposée donne

$$y=1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{1}{16}x^3-\tfrac{5}{64}x^4+\tfrac{7}{256}x^5-\text{etc.}$$

Or, on trouve la série du second membre en prenant la racine carrée de $1+x$, les termes étant ordonnés par rapport aux puissances ascendantes de x; on a donc

$$y=\sqrt{(1+x)}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=(1+x)^n, \text{ vu qu'ici } \tfrac{1}{2}=n.$$

Cela posé, puisque n et x désignent des nombres ou des symboles quelconques, je dis que : *quelle que soit actuellement l'expression immédiate de* y *en* n *et* x, *la forme générale de cette expression reste absolument la même pour toute valeur particulière de* n : tel est l'*axiome de généralisation* en Algèbre.

D'abord la valeur particulière d'une lettre ne saurait évidemment modifier aucunement le rôle que cette lettre remplit dans la formule générale : en sorte que si n est d'abord un exposant, n reste encore exposant pour $n=4, -\frac{2}{7}, \sqrt{(-2)}$, etc. Ensuite, n étant indépendant de x, la valeur particulière de n ne peut amener aucune réduction entre n et x dans l'expression immédiate de y; la forme générale de cette expression reste donc absolument la même; ce qu'il fallait démontrer.

Maintenant, puisque la forme de l'expression de y ne change point par $n=3, -1, \frac{1}{2}$, et que chaque fois on a $y=(1+x)^n$, il s'ensuit qu'avant ces hypothèses on avait déjà $y=(1+x)^n$. Donc enfin pour toutes les valeurs de n, rationnelles ou irrationnelles, positives, négatives et même imaginaires, la série du second membre de l'équation identique proposée est toujours le développement de $(1+x)^n$: c'est la *série binomiale* la plus générale et en même temps la plus simple. — On voit que la *méthode fonctionnelle* est le procédé le plus simple et le plus direct pour découvrir la formule de Newton et en démontrer la généralité complète.

Somme générale des puissances m ièmes. Proposons-nous maintenant de calculer l'expression immédiate ou la plus simple, en

n et m, de la somme $\int n^m$ des puissances m ièmes des n premiers nombres entiers, n étant infini et m un exposant quelconque réel, positif ou négatif.

1° L'axiome de généralisation démontre que la forme actuelle de l'expression de $\int n^m$, en n et m, ne change aucunement lorsque l'exposant m, restant indéterminé, devient entier positif; mais alors on sait (p. 44) que $\int n^m = n^{m+1} : (m+1)$. Donc puisque la forme de l'expression de $\int n^m$ est restée la même, il s'ensuit que pour toutes les valeurs rationnelles, irrationnelles, positives ou négatives de l'exposant m, on aura toujours, n étant entier infini,

$$\int n^m = \frac{1}{m+1} n^{m+1}.$$

2° La somme $\int n^m$ se réduit à n^{m+1} ou à zéro suivant que tous ses n termes sont égaux au dernier n^m ou qu'ils sont tous nuls; donc $m+1$ est le plus grand des exposants de n, dont aucun n'est zéro, dans l'expression de $\int n^m$. Et comme tous ces exposants *finis* de n *infini* vont en diminuant, il s'ensuit que chaque terme de $\int n^m$ qui suit le premier an^{m+1} est contenu une infinité de fois dans celui-ci; donc on doit le négliger ou le regarder comme absolument nul à l'égard de ce premier, et l'on a

$$\int n^m = an^{m+1}; \text{ d'où } \int (n-1)^m = a(n-1)^{m+1},$$

car a étant indépendant de n, il reste absolument le même quand on change n en $n-1$. Développant donc, d'après la série binomiale, la puissance de $n-1$ dont l'exposant $m+1$ est quelconque, puis négligeant tous les termes de ce développement qui suivent les deux premiers, comme nuls à l'égard de ces deux premiers, en vertu du principe infinitésimal; réduisant et observant que

$$\int n^m - \int (n-1)^m = n^m, \text{ on verra que}$$

$$n^m = a(m+1)n^m; \text{ d'où } a = \frac{1}{1+m} \text{ et } \int n^m = \frac{1}{1+m} n^{m+1}.$$

Telle est la formule cherchée. Mais ici l'exposant m est quelconque réel; et si $m = -1$, $m = -2$ et $m = -\frac{1}{2}$, on trouve

$$\int n^{-1} = \tfrac{1}{0}, \int n^{-2} = -\frac{1}{n} \text{ et } \int n^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{n}.$$

Les deux premiers résultats étant absurdes, on voit que m négatif doit être moindre que l'unité.

Application. Soit a un nombre donné quelconque; supposons-le divisé en un nombre infini n de parties égales à x et infiniment petites, d'où $a=nx$: il s'agit de calculer la somme S de tous les termes, en nombre infini n, de la série dont le v ième terme a pour expression :

$$x-v^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+2a^{-2}vx^{2}-3v^{2}x^{4}.$$

A cet effet, on prend successivement $v=1, 2, 3, 4, \ldots, n$ dans cette expression, puis on ajoute entre elles les n expressions résultantes, en réduisant par $nx=a$: cela donne

$$S=a-x^{\frac{1}{2}}\int n^{-\frac{1}{2}}+2a^{-2}x^{2}\int n-3x^{4}\int n^{2};$$

d'où $$S=a-2\sqrt{a}+1-a^{3}x.$$

Le terme $-a^{3}x$ est infiniment petit avec x; il est donc nul à l'égard des nombres finis, et l'on a exactement

$$S=a-2\sqrt{a}+1=(\sqrt{a}-1)^{2}.$$

Les trois premiers termes de l'expression ci-dessus du terme général en v fournissent trois termes à la somme S cherchée de la série, parce que dans chacun l'exposant de v soustrait de celui de x donne 1 pour reste ; tandis que le quatrième terme $-3v^{2}x^{4}$ ne fournit rien à la somme S, parce que l'exposant 2 ôté de l'exposant 4 ne donne pas 1 pour reste. En général, on voit que *l'expression du* v *ième terme de la série étant donnée, il faut, pour la simplification, y supprimer d'abord chaque terme où l'exposant de* v *soustrait de celui de* x *ne laisse pas* 1 *pour reste;* car ce terme ne fournit rien au résultat final des calculs. Ainsi les trois derniers termes du développement de $(v^{2}+v)^{3}x^{7}$ doivent être supprimés, ce qui revient à supprimer d'abord v dans $(v^{2}+v)^{3}x^{7}$ et cela donne simplement $v^{6}x^{7}$.

Remarque. On sait que la *série binomiale*, à l'aide de la règle des variables ou du principe infinitésimal, conduit directement et avec facilité aux plus simples séries générales *exponentielles* et *logarithmiques*. Mais, ce qui est fort remarquable, c'est que la formule du binôme, démontrée seulement pour l'exposant entier positif, conduit directement, à l'aide des infinis, aux deux séries exponentielle et logarithmique ci-dessus.

Séries exponentielles. I. Soit d'abord posé $np=1$, n étant un nombre infini et par conséquent p un nombre infiniment petit. Si l'on développe $(1+p)^{n}$, d'après la formule du binôme, le terme général de ce développement est, à cause de $np=1$,

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-v+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots v}p^v=\frac{(1-p)(1-2p)\ldots(1-vp+p)}{1\cdot2\cdot3\ldots v}$$

$$=\frac{1}{v}(1-p)(\tfrac{1}{2}-p)(\tfrac{1}{3}-p)(\tfrac{1}{4}-p)\ldots(\frac{1}{v-1}-p).$$

En vertu du principe infinitésimal, ce terme général se réduit à 1 sur $2.3.4\ldots v$. Ainsi on aura toujours

$$(1+p)^n=2+\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots+\frac{1}{2.3.4\ldots v}+\text{etc.}$$

Soit e la valeur de la série convergente du second membre : on démontre que la somme de tous les termes, en nombre infini, qui suivent le v ième terme t, est moindre que le quotient de t par v. On démontre aussi que le nombre e n'est pas *rationnel* et que par suite on ne peut le calculer que par approximation. On a trouvé $e=2,718281828459045$ etc.

Le nombre e est donc compris entre 2 et 3, et l'on a $e=(1+p)^n$. De sorte que quand l'exposant n est infini, le second terme infiniment petit du binôme $1+p$ ne peut être négligé. On voit en outre que *le produit d'une infinité de facteurs égaux, tous plus grands que l'unité, est un nombre fini.* Il existe une proposition analogue démontrée (p. 50).

II. Comme le nombre p infiniment petit n'est pas rigoureusement nul, on pourrait craindre qu'en négligeant p dans chacun des termes, en nombre infini, du développement de $(1+p)^n$, il en résultât une erreur totale *finie* sur la valeur du nombre e. Or, l'erreur due au terme général plus haut est évidemment la plus grande possible quand tous les binômes se réduisent à $-p$; et alors l'erreur due au terme général est moindre que $\pm p^{v-1}$, expression où 2 est la plus petite valeur de v. De sorte que l'erreur totale est moindre que la génératrice de la progression géométrique décroissante à l'infini : $p-p^2+p^3-p^4+$ etc. D'ailleurs, comme cette génératrice p sur $(1+p)$ est moindre que p, on voit à plus forte raison que la plus grande erreur totale est moindre que l'infiniment petit p ; elle est donc rigoureusement nulle à l'égard des nombres finis. Ainsi l'on peut, sans erreur finale appréciable, négliger p dans chaque terme du développement de $(1+p)^n$.

III. On démontre de même que le développement de $(1-p^2)^n$ se réduit à 1 exactement ou plutôt sans erreur finale appréciable.

Ayant donc

$$1=(1-p^2)^n=(1+p)^n(1-p)^n=e(1-p)^n,$$

il en résulte $$(1-p)^n=1:e=e^{-1}.$$

Ainsi, même quand l'exposant est infini, le premier terme du binôme étant un nombre fini et le second un nombre infiniment petit du second ordre, on doit négliger celui-ci absolument comme s'il était rigoureusement nul; et à plus forte raison doit-on le négliger quand l'exposant est un nombre donné fini. Cela démontre le *principe infinitésimal*, dans tous les cas.

IV. Soit z un nombre rationnel ou irrationnel quelconque : il est évident que dans $np=1$, on peut toujours supposer le nombre entier infini n tel que le produit nz soit aussi un nombre entier infini. D'abord si z est une fraction finie, le nombre infini n peut être supposé un multiple infini du dénominateur. Ensuite, si z est irrationnel, il est une fraction dont les deux termes sont entiers infinis. Il suffit donc alors de supposer n égal au dénominateur, pour que le produit nz soit un nombre entier infini.

Cela posé, ayant $e=(1+p)^n$, on a aussi $e^z=(1+p)^{nz}$. Or l'exposant nz est un nombre entier infini positif; développant donc d'après la formule du binôme, réduisant par $np=1$ et appliquant le principe infinitésimal, comme pour la série expression de e, on trouvera

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{2.3}+\frac{z^4}{2.3.4}+\frac{z^5}{2\cdot3\cdot4.5}+\text{etc.}$$

Telle est la série exponentielle la plus simple et d'ailleurs très-générale; car opérant de même sur $e^{-z}=(1-p)^{nz}$, on trouve exactement ce que devient cette série quand on y change z en $-z$. La série précédente est donc vraie pour toutes les valeurs de z, rationnelles ou irrationnelles, positives ou négatives.

V. Par les procédés ci-dessus, on démontre que :

$$e^z=(1+p)^{nz}=(1+pz)^n \text{ et } e^{-z}=(1-p)^{nz}=(1-pz)^n.$$

Dans ces formules remarquables, z est un nombre fini quelconque, rationnel ou non, tandis que p est un nombre infiniment petit, n et nz deux nombres entiers infinis.

Application I. Un vase peut se remplir par un tuyau ne fournissant que de l'eau et se vider par un autre versant uniformément c litres de liquide par heure, comme le premier. Pendant quel nombre x d'heures doit-on faire couler les deux tuyaux à la fois, pour que le vase contenant d'abord a litres de vin pur, n'en renferme plus que b litres à la fin? On suppose que l'eau entrant dans le vase se mêle sur-le-champ et exactement avec le liquide que ce vase renferme.

Soit n le nombre infini d'*instants* égaux à p contenus dans une heure, d'où $np=1$, et soit posé $ad=c$: on trouvera

$$a(1-dp)^{nx}=b;\ \text{d'où}\ a\cdot e^{-dx}=b.$$

Cette équation est facile à résoudre par logarithmes en observant que le logarithme ordinaire de e est $le=0{,}4342945$.

Application II. Quelle somme x devrait-on rendre au bout de m années, pour une somme a empruntée pendant ce temps au taux de r pour 1 annuellement si, à chaque instant de la durée de l'année, l'intérêt échu se joignait au capital pour porter intérêt l'instant suivant? — On trouvera $x=e^{mr}$. Si donc $a=10000, m=1$ et $r=0{,}05$, il viendra $x=10512$ fr. 71. C'est seulement 12 fr. 71 de plus que si l'argent était placé à 5 p. 100 annuellement.

Série logarithmique. Le nombre e ayant la valeur calculée plus haut, soit posé $e^z=1+x$; d'où en prenant les logarithmes ordinaires de part et d'autre, il vient $l(1+x)=z\,le$. L'identité posée devient $e^{nz}=(1+x)^n$, n étant un nombre entier infini.

Développant les deux membres de l'identité précédente, d'après la série exponentielle et la formule du binôme, puis supprimant le terme 1 commun aux deux membres de l'identité résultante et divisant par n de part et d'autre, on trouve :

$$z+\frac{nz^2}{2}+\frac{n^2z^3}{2\cdot3}+\text{etc.}=x+\frac{n-1}{2}x^2+\frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot3}x^3+\ldots$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-v+2)(n-v+1)}{2\cdot3\cdot4\ldots(v-1)v}x^v+\text{etc.}$$

Dans cette identité, tous les termes du premier membre qui suivent z ont n pour facteur commun; ce premier membre est donc de la forme $z+hn$. Quant au second membre, on trouve tous les termes indépendants de n en y posant $n=0$; ce qui réduit le terme général à $\pm x^v$ sur v. Soit donc y la série ensemble des termes indépendants de n et soit kn l'ensemble des termes ayant n pour facteur commun : l'identité proposée prend la forme

$$z+hn=y+kn;\ \text{d'où}\ z=y+(k-h)n.$$

Dans cette équation identique ou toujours exacte, z et y sont constants avec e et x, tandis que n infini est variable, aussi bien que h et k; il faut donc que $k-h=0$: autrement le nombre constant z serait toujours égal au nombre variable $y+(k-h)n$; ce qui est absurde. On a donc nécessairement $z=y$ et par suite $l(1+x)=yle$. Substituant la série représentée par y, il vient

$$l(1+x)=le(x-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{6}x^6+\text{etc.}).$$

Telle est la plus simple série générale *logarithmique*, ayant nécessairement une infinité de termes alternativement positifs et négatifs et où chaque coëfficient est la *valeur inverse* de l'exposant. De sorte que pour $x=1$, la somme algébrique de tous les coëfficients est finie, comme égale à $l2$ sur le. Dans ce cas la série est lentement convergente : pour que la convergence soit rapide, il faut que x soit beaucoup moindre que l'unité.

Si $x=-1$, on trouve $-l0:le$ pour la valeur de la *série harmonique*, somme des *inverses* de tous les nombres entiers, à partir de $\frac{1}{1}=1$. Comme le logarithme de zéro ne saurait se calculer, il en est de même de la valeur de la série harmonique. On démontre en effet directement, par la décomposition en groupes, que cette valeur est infinie. C'est ce qu'on démontrerait d'ailleurs en changeant x en $-(1-i)$, i étant infiniment petit, d'où $li=-\infty$, et en appliquant le principe infinitésimal dans le second membre résultant.

Remarque. Je ne m'arrêterai pas à démontrer les autres séries logarithmiques, ni à indiquer leur emploi, soit pour la construction des tables de logarithmes, soit pour apprécier les erreurs dues à la proportion tabulaire. Je pense que les applications précédentes doivent suffire pour bien montrer toute l'importance de la théorie infinitésimale dans l'Algèbre élémentaire.

Géométrie.

Préliminaires. Les grandeurs *infinitésimales* se présentent inévitablement, dès le commencement de la Géométrie, pour donner à ses théories toute la clarté et la rigoureuse exactitude dont elles sont susceptibles. On y emploie toujours les infinis, du moins *implicitement*, même lorsqu'on veut les déguiser par d'autres dénominations, par des définitions inintelligibles, des égalités impossibles et des pétitions de principes ou des non-sens, dans de longues et obscures démonstrations. — Ce qui est singulier, c'est qu'en procédant ainsi, on pense être entièrement logique et plus à la portée des jeunes intelligences; sur lesquelles cependant on agit alors par voie d'autorité, ne pouvant les convaincre évidemment.

S'il est toujours plus clair, plus exact, de considérer les choses telles qu'elles sont en effet, ou du moins telles qu'on peut les concevoir, et de les définir en conséquence, il devient évident que l'emploi *explicite* des infinis dans l'enseignement de la géométrie élémentaire, bien loin d'*être un grave et dangereux abus* (ce qu'on n'a pu démontrer), est au contraire une amélioration essentielle dans les méthodes; *rendant plus claires, plus simples et plus complètement logiques les théories de cette science importante.* C'est ce que nous voulons établir ci-dessous.

Des définitions. Si les définitions de noms sont libres, elles doivent néanmoins faire connaître le plus complètement possible les choses définies; et cela, parce qu'il en résulte plus de clarté et plus de facilité dans les déductions logiques qui s'appuient sur ces définitions. En m'exprimant ainsi, je ne prétends pas évidemment qu'on puisse créer en Géométrie une vérité par une définition; mais je dis qu'une *bonne* définition, expression claire et complète soit d'une propriété *caractéristique,* soit d'un fait évident ou bien constaté, facilite la recherche de la vérité et y conduit le plus directement possible.

Ligne droite. On appelle *ligne droite*, ou simplement *droite*, le plus court chemin pour aller d'un point à un autre (lesquels points sont les *extrémités* de la droite et n'ont pas d'étendue).

Telle est la véritable définition de la droite, propriété caractéristique qui en donne l'idée complète, acquise par l'expérience de chacun. On en déduit aisément que : *Deux droites, ayant deux points communs, coïncident dans toute leur étendue et n'en font qu'une seule.* — Il en résulte que la droite peut se prolonger *toujours;* elle n'est donc *jamais* finie, dans son état le plus général : elle est *infinie* et sa longueur surpasse alors la plus grande longueur imaginable. — On dit qu'une droite est *infinie dans un sens* lorsque, non limitée dans ce sens, on la conçoit prolongée sans jamais pouvoir arriver à la seconde extrémité, dite *située à l'infini.* — De plus on voit que deux points suffisent pour déterminer la *position* d'une droite ou plutôt sa *direction* dans l'espace.

Ligne brisée et ligne courbe. On appelle *ligne brisée* toute ligne qui, sans être droite, n'est composée que de droites contiguës et *finies*, lesquelles en sont les *côtés.* — On nomme *ligne courbe*, ou simplement *courbe*, toute ligne qui n'est ni droite ni composée de droites *finies* et *appréciables*.

Cette définition est claire et précise; mais il n'en est pas de même de l'ancienne définition, savoir : on appelle *courbe* toute ligne qui n'est ni droite ni composée de droites. Par cette définition négative, on sait ce que la courbe n'est pas; mais il serait fort important, pour la facilité des déductions logiques, de savoir ce qu'elle est réellement. La définition négative est donc inintelligible et même absurde.

Plan. On appelle *plan*, ou *surface plane*, toute surface dans laquelle prenant deux points à volonté et les joignant par une ligne droite, cette droite est tout entière dans la surface, aussi bien que ses *prolongements* en sens opposés.

Par cette définition, le plan n'est limité dans aucun sens; il est donc *sans limite, sans fin*, dans son état le plus général : il est alors *infini;* c'est-à-dire qu'on peut toujours le supposer prolongé en tous sens de telle sorte que son étendue surpasse la plus grande étendue plane imaginable. — Le plan n'en est pas moins infini lorsqu'on en considère une portion non limitée et par conséquent *indéterminée;* mais alors on dit que le plan est *indéfini*. — De même, on dit que la droite est *indéfinie* quand on en considère une portion non limitée ou de *longueur arbitraire*.

Angle. On appelle *angle* la portion plane comprise entre deux droites illimitées, partant d'un même point. Ce point est le *sommet* de l'angle et les deux droites en sont les *côtés*. De sorte que l'angle est *déterminé* par le sommet et un point sur chaque côté.

Cette définition est claire, simple et précise; vu que deux droites qui se coupent sont toujours dans le même plan : elle est d'ailleurs l'abréviation de celle-ci : *L'angle est la portion plane dont deux droites illimitées, partant d'un même point, sont écartées l'une de l'autre, quant à leur position sur le plan.*

Pour bien définir l'angle, il suffit de le montrer, a dit Lacroix. Or, la portion qui en est tracée sur le plan, à partir du sommet, fait voir clairement la double propriété caractéristique dont cet angle jouit, savoir d'être *illimité* ou *sans fin* dans le sens de l'*ouverture* et d'être d'autant plus *grand* que cette ouverture est plus grande elle-même, c'est-à-dire que ses deux côtés sont plus *écartés* l'un de l'autre.

La première définition ci-dessus énonce implicitement cette double propriété; cette définition est donc parfaitement intelligible et elle n'est aucunement imposée aux élèves par voie d'autorité, puisqu'elle exprime un double fait évident pour tous.

Génération de l'angle. L'angle plan est *nul* lorsque ses deux côtés coïncident. Dans ce cas, supposons que le côté AB restant fixe, l'autre côté AC tourne sur le plan autour du sommet fixe A: il décrit donc des angles de plus en plus grands; lesquels croissent par angles égaux et *infiniment petits.* — Lorsque le côté AC, tournant autour du sommet fixe A, est revenu coïncider avec le côté fixe AB, ce côté mobile a fait une *révolution* autour du point A et a décrit l'*espace angulaire plan* autour de ce point. De plus, chaque quart de révolution de AC décrit un *angle droit.*

Il est d'ailleurs évident que l'espace angulaire autour de chaque point du plan est *invariable;* et comme l'angle droit est le quart de cet espace plan angulaire, on voit que *tous les angles droits sont égaux entre eux et au quart du plan, quelles que soient les positions de leurs sommets sur ce plan.*

On voit de plus que l'*espace angulaire plan est un tout constant dont chaque angle est une fraction, exprimable ou non.* La *grandeur* de l'angle n'est donc pas *indéterminée:* elle ne dépend aucunement de la longueur donnée à chacun des côtés de cet angle; vu que celui-ci reste absolument le même en les prolongeant à l'infini; mais cette grandeur dépend essentiellement de l'*ouverture* plane des deux côtés ou de leur *écart* plan. Enfin, *la grandeur d'un angle est déterminée par son rapport à la grandeur constante de l'angle droit;* et l'on démontre que ce rapport est toujours un nombre fini, exprimable ou inexprimable (mais infiniment petit, si l'angle est infiniment petit lui-même).

Remarque. L'angle est nécessairement une *figure plane* de deux côtés, dont la surface est *infinie* et sans détermination possible dans le sens de l'ouverture, comme n'ayant pour nous dans ce sens ni limite ni fin. Nous ne pouvons donc tracer de l'angle qu'une partie plane plus ou moins grande ou *indéfinie*, commençant au sommet. Or, cela suffit pour le désigner clairement dans les théories géométriques, où alors la surface de l'angle est plutôt actuellement *indéfinie* qu'actuellement *infinie;* et il en est de même de la longueur de chacun de ses côtés. Voilà pourquoi l'on peut supprimer les mots *indéfini* et *infini,* sans nuire à la clarté ni à l'exactitude logique des raisonnements où l'angle est employé. Il en résulte deux démonstrations, très-claires, très-simples et rigoureusement exactes, du *postulatum* d'Euclide, base de la théorie la plus simple des parallèles.

Théorème. *Dans le même plan, si deux droites* AB *et* CD *rencontrent en* A *et* B, *d'un même côté, la même troisième droite* EF, *de telle sorte que l'angle externe* EAB *soit plus grand ou plus ouvert que l'angle interne correspondant* ECD; *je dis que les deux droites* AB *et* CD *finissent toujours par se couper étant prolongées suffisamment :* tel est le postulatum d'Euclide, dont la démonstration est bien facile, d'après la double propriété caractéristique de l'angle plan.

1° Puisque l'angle EAB est plus grand que l'angle ECD, il ne peut rester contenu dans ce dernier et en sortira tôt ou tard; non par EF, limite commune, ni dans le sens de l'ouverture, puisque dans ce sens les deux angles peuvent se prolonger de la même manière à l'infini, et la surface de l'un ne peut dépasser celle de l'autre en ce sens. L'angle EAB ne peut donc sortir de ECD que par CD; et les deux droites AB et CD finiront toujours par se couper, étant suffisamment prolongées. On voit bien, en effet, que si cette intersection n'avait pas lieu, l'angle EAB serait toujours contenu dans l'angle ECD et ne serait pas plus grand ni plus ouvert; contrairement à l'hypothèse.

2° Faisant au point A, l'angle EAG = ECD, il est clair que la droite AG tombe dans l'angle EAB. On peut toujours faire glisser sur le plan l'angle EAG, et le côté EA sur EC jusqu'à ce que le point A tombe en C; d'où alors AG coïncide avec CD. Dans ce mouvement, le côté AG ne cesse pas un seul instant d'avoir un seul point sur AB, et ce point s'éloigne de plus en plus du point A jusqu'à ce que AG coïncide avec CD, où alors le point mobile est commun aux deux droites AB et CD; lesquelles se coupent en ce point, pouvant être *infiniment éloigné* (et ceci arrive quand l'angle EAB ne surpasse l'angle ECD que d'un angle infiniment petit ou moindre que le plus petit angle assignable).

Corollaire. Dans le même plan, si deux droites font avec une même sécante deux angles correspondants ou interne-externe inégaux entre eux, ces deux droites finissent toujours par se rencontrer d'un côté ou de l'autre de la sécante.

Cette dernière proposition rend, comme on sait, la théorie des parallèles la plus claire, la plus simple et la plus complète possible, en lui donnant une exactitude rigoureuse.

Autre définition de l'angle. Il existe plusieurs définitions de l'angle et l'une des plus usitées est celle de Legendre, savoir : « Lorsque deux droites se rencontrent, la quantité plus ou moins grande dont elles sont écartées l'une de l'autre, quant à leur position, s'appelle *angle;* etc. »

Cette définition est inintelligible et ne fait pas connaître l'angle. Qu'est-ce en effet que cette quantité *plus ou moins grande ?* Legendre admet implicitement que c'est une portion plane, puisqu'en différentes circonstances, il emploie la dénomination d'*angle plan.* Mais plusieurs professeurs nient que l'angle soit une surface : ils l'appellent *inclinaison* et ne savent réellement pas ce qu'il est. En outre, les mots *quantité plus ou moins grande* semblent d'abord indiquer que la *grandeur* de l'angle doit dépendre de la longueur donnée à chacun de ses côtés; en sorte qu'on ignore s'ils sont limités ou non.

Pourquoi si peu de précision dans la définition précédente? C'est pour éviter la notion *obscure* de l'infini, qu'on n'évite réellement pas, puisque la surface plane de l'angle est sans *limite* sans *fin* dans le sens de l'ouverture. On préfère donc remplacer une obscurité par une autre tellement grande que l'angle ainsi défini ne peut servir à établir rigoureusement la théorie des parallèles, et qu'il a fallu pour cela recourir à un *postulatum.*

On connaît ceux de Francœur, de Lacroix et d'Euclide : le premier est le plus facile à accorder, comme réciproque d'une proposition rigoureusement démontrée; et ce postulatum a réellement l'évidence d'un véritable axiome. Car deux droites, dans le même plan, étant *parallèles* parce qu'elles ont une perpendiculaire commune, il semble qu'on peut toujours supposer celle-ci menée par un point quelconque de l'une des deux droites proposées. — Quant au postulatum de Lacroix et à celui d'Euclide, bien qu'ils aient des caractères d'évidence, il y a cependant doute et incertitude lorsque le point de rencontre doit être fort éloigné.

D'ailleurs, quelle que soit la définition de l'angle plan, aucun postulatum ne saurait dispenser de faire bien remarquer la double propriété caractéristique de cet angle, si l'on veut être clair et logique; car cette double propriété étant de la plus grande évidence, sera toujours bien comprise. Mais alors le postulatum devient inutile, ou plutôt il n'y a plus de postulatum : c'est alors un théorème que l'on peut démontrer complètement et très-simplement, ainsi qu'on l'a vu plus haut pour celui d'Euclide.

Angle et inclinaison. Soit O un point quelconque de la droite AB et soit OC perpendiculaire à cette droite : il est clair que OC n'*incline* ou ne *penche* sur AB ni vers A ni vers B. Mais si l'on mène OD dans l'angle droit COB, la droite OD est *inclinée* sur AB, comme plus approchée de OB que de OA : elle est *inclinée vers* B. — *L'angle aigu* BOD *exprime l'inverse de l'inclinaison de* OD *sur* AB; car cette inclinaison est d'autant plus grande que l'angle aigu BOD est plus petit. De sorte que si l'angle aigu est nul, la droite OD coïncide avec OB : elle est alors rapprochée le plus possible de OB; l'inclinaison de OD sur AB est donc alors à son maximum vers B. — On démontre aisément que si du point C on mène à AB différentes obliques : 1° deux obliques égales sont également inclinées sur AB; 2° de deux obliques inégales la plus longue est la plus inclinée.

L'angle de deux droites n'est pas toujours leur *inclinaison*, d'après la signification vulgaire de ce dernier mot; et l'angle n'est même l'inverse de l'inclinaison que quand il est aigu. Car, si l'angle est droit, l'inclinaison est nulle; et si l'angle est obtus, l'inclinaison n'existe que par l'angle aigu supplémentaire. Mais la signification actuelle du mot *inclinaison* n'est plus celle que lui attribuait Euclide : il employait ce mot dans le sens que nous donnons au mot *écartement.*

Maintenant, nier que l'angle soit une portion plane *infinie* ou non *limitée* dans le sens de l'ouverture, c'est nier l'un des faits géométriques les plus évidents et les plus incontestables. On conçoit donc que pour établir cette négation, on doit commettre des erreurs, soit dans les hypothèses, soit dans les raisonnements employés; et c'est en effet ce qu'on découvre par les propositions que voici :

Bande et bi-angle. 1° Deux parallèles dans le même plan, ne pouvant se rencontrer, ne sont jamais *écartées* l'une de l'autre et ne sont *côtés* d'aucun angle ou plutôt elles comprennent un angle rigoureusement nul. Mais deux parallèles sont plus ou moins *éloignées* l'une de l'autre et sont *côtés* d'une *bande*, figure plane ouverte et infinie dans les deux sens opposés, et dont on ne peut tracer qu'une portion indéterminée ou indéfinie : c'est une figure *régulière* de deux côtés, dont la somme des deux angles intérieurs est nulle, vu que ces deux angles sont nuls eux-mêmes.

2° Toute bande est décrite par une droite qui se meut sur le plan parallèlement à elle-même ; de sorte qu'une droite quelconque coupant les deux côtés parallèles divise la bande en deux *bi-angles* égaux entre eux, vu que les angles correspondants ou interne-externe ne peuvent être inégaux, etc.

3° L'angle est formé par le mouvement d'une droite tournant sur le plan autour d'un point fixe et *s'écartant* ainsi de sa première position. L'angle et le bi-angle ont donc des générations différentes.

4° Le bi-angle et l'angle, bien qu'ayant leurs surfaces planes infinies toutes les deux, sont deux grandeurs de natures différentes ; et, en qualité d'angle ou d'*écart*, le premier ne peut mesurer le second ni en faire partie. Le bi-angle, en effet, n'est pas un angle : c'est un *trilatère* dont le troisième angle est nul.

5° Puisque deux parallèles sont côtés d'un angle rigoureusement nul, il est clair que *l'angle ne change point quand on en retranche un bi-angle par une parallèle à un côté ;* car alors on en retranche un angle nul. Voilà pourquoi les angles correspondants sont égaux entre eux lorsque deux *parallèles* sont rencontrées par une même droite *sécante*.

6° Enfin, la surface infinie du bi-angle est nulle à l'égard de la surface infinie de l'angle, comme y étant contenue une infinité de fois. Mais pour cela, il faut que le côté adjacent aux deux angles du bi-angle ait une longueur finie et donnée arbitrairement, comme on le suppose toujours.

De la superposition. Pour passer du simple au composé, la première partie de la Géométrie plane, où il faut établir les vérités qui résultent de la position des lignes, doit se borner aux *égalités* et aux *inégalités* principales, lesquelles conduisent le plus directement possible aux autres vérités géométriques. Or la *superposition* est le moyen le plus simple et le plus clair de savoir si deux grandeurs sont égales ou inégales entre elles ; ce mode direct de recherche et de démonstration doit donc s'employer de préférence pour étudier les égalités et les inégalités dans les angles, les perpendiculaires, les obliques et les parallèles ; dans le cercle, les triangles et les quadrilatères.

Tel est l'ordre le plus naturel des propositions successives ; car les égalités et les inégalités dans le cercle servent à vérifier, sur le papier, plusieurs propositions et à résoudre différents problèmes graphiques, par l'emploi de la règle et du compas ; ce qui a l'avantage de rapprocher le plus possible, les solutions des propositions sur lesquelles elles sont fondées. — On vérifie de cette manière que deux parallèles sont partout également distantes et que la perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre (postulatum de Francœur). On vérifie aussi que la somme des trois angles vaut deux angles droits dans tout triangle (sur le papier); etc. — Voici plusieurs usages de la superposition pour démontrer certaines égalités et inégalités dans le cercle :

D'abord *deux cercles de rayons égaux sont égaux entre eux, aussi bien que leurs circonférences entre elles;* car les deux cercles peuvent toujours coïncider et se confondre en un seul.

Ensuite, dans le même cercle ou dans deux cercles égaux, *il y a égalités simultanées entre les deux angles au centre, les deux secteurs, les deux arcs interceptés par leurs côtés, les deux cordes, les distances de celles-ci au centre et enfin entre les deux segments.* — L'une quelconque de ces égalités, en effet, entraîne, par la superposition, l'existence de toutes les autres.

Pareillement, dans le même cercle ou dans deux cercles égaux, *au plus grand des deux arcs répond la plus grande des deux cordes, et réciproquement*, pourvu que les deux arcs soient moindres chacun que la demi-circonférence. — Dans le premier cas, on porte le plus petit arc CND sur le plus grand AMB, savoir C en A et D en un point E de l'arc AMB, entre A et B : la corde AE n'est donc alors que la corde CD. Du centre A et du rayon AE décrivant un arc, il coupe évidemment AB en un point F, entre A et B. Donc la corde AB est plus grande que AF ou AE et que la corde CD.

Réciproquement, si la corde AB $>$ CD et qu'on porte CD sur AB, de A en F, etc., on verra que l'arc AMB $>$ CND.

Enfin, dans le même cercle ou dans deux cercles égaux, *deux cordes égales sont également éloignées du centre, et de deux cordes inégales, la plus grande est la moins éloignée.* — La première partie de cette proposition est déjà démontrée; et quant à la seconde, on porte la plus petite corde sur la plus grande de telle sorte qu'elles aient une extrémité commune; etc.

On voit bien comment la superposition démontre directement et le plus clairement possible les égalités et les inégalités dans la première partie de la Géométrie plane. — D'ailleurs, la seconde partie a pour objet les *lignes proportionnelles* et leurs *relations numéri-*

ques; voici donc le procédé le plus simple et le plus rigoureusement exact pour y démontrer les *proportions.*

Méthode des proportions. Deux quantités continues de même nature, ayant toujours un rapport, *exprimable* ou non, ont aussi toujours une mesure commune, *assignable* ou non, *finie* ou *infiniment petite,* comme on l'a démontré plus haut (p. 32).

Cela posé, considérons quatre quantités continues de même nature deux à deux, savoir A et B, C et D, et supposons ces quantités tellement liées entre elles que, si C et D sont divisées en n et p parties égales à leur commun diviseur x, les quantités A et B soient aussi divisées en n et p parties égales ou équivalentes à v. On a donc simultanément

$$A = nv,\ B = pv,\ C = nx \text{ et } D = px; \quad \text{d'où}$$
$$A:B = nv:pv = n:p \text{ et } C:D = nx:px = n:p.$$

De là on voit donc que $A:B::C:D.$

Telle est la méthode *des parties égales* pour démontrer directement et très-simplement toutes les *proportions* entre quantités continues, en Géométrie et en Mécanique. — Il en résulte, par une parallèle à la base d'un triangle, que *deux infiniment petits ont toujours un rapport fini.*

Autre méthode. Presque tous les auteurs cherchent à éviter la mesure commune infiniment petite et pensent y parvenir par la distinction des deux cas : *commensurable* et *incommensurable.* Ils pensent même être rigoureusement logiques en appliquant au second cas, soit la méthode *des variables*, soit le plus souvent la longue et obscure démonstration par l'*absurde;* tandis que chacune des deux démonstrations est ou une *pétition de principe* ou un *non-sens*, ne démontrant absolument rien, si ce n'est qu'on n'a pas la véritable notion du rapport.

En effet, si C et D sont *incommensurables entre elles,* il faut admettre : ou qu'elles ont un commun diviseur infiniment petit, et alors le second cas n'est que la répétition du premier; ou bien que C et D n'ont absolument aucun diviseur commun, pas même approché, et alors C et D n'ont absolument aucun rapport, pas même approximatif, et ce rapport n'existe pas; car dès qu'il y a rapport, il y a nécessairement commun diviseur. De sorte que la démonstration, pour un rapport sans commun diviseur à ses deux termes, est un véritable *non-sens*, aussi bien que la distinction des deux cas; et celle-ci, d'ailleurs, est longuement inutile.

Réduction a l'absurde. Il importe d'observer que quand *la réduction à l'absurde* est applicable, ce qui n'a pas lieu dans le passage du commensurable à l'incommensurable, elle possède l'avantage de convaincre l'esprit; mais elle n'a pas celui de l'éclairer. On ne doit donc en faire usage qu'avec réserve et lorsque la vérité à démontrer a déjà une certaine évidence, comme pour les propositions *réciproques* dont on abrège ainsi les démonstrations. Il existe d'ailleurs différentes circonstances où la réduction à l'absurde est nécessaire; mais alors la démonstration est fort simple et n'a rien de bien obscur.

La réduction à l'absurde plaît à l'imagination : tel est le prestige que produit cette forme de raisonnement, dans le passage du commensurable à l'incommensurable, que « par l'abus où l'on est entraîné, on arrive bientôt à se former une sorte de conviction illusoire et à se persuader que non-seulement on conçoit, mais en outre que l'on peut aisément faire concevoir à d'autres, la notion d'un rapport *sans commun diviseur à ses deux termes;* notion qui serait inintelligible alors même qu'elle ne serait point absurde et contradictoire. »

Sans doute que les élèves intelligents finissent toujours par rectifier la notion absurde précédente; mais, en attendant, quel doit être l'effet d'une démonstration appuyée sur cette notion? « C'est le plus souvent de former des élèves se payant de mots, ne voyant clair au fond de rien et devenant par suite incapables de trouver en eux-mêmes les éléments positifs d'une véritable conviction. » Si donc on n'a pas « pour but d'habituer les élèves à douter de leur propre raison, » rien ne peut justifier une telle méthode d'enseignement, où, pour que le raisonnement ait un sens, on commet une longue et obscure pétition de principe, afin de ne pas prononcer le nom de la chose qu'on est forcé d'employer implicitement!

Axiome de mesurage. La théorie du mesurage a pour objet essentiel de remplacer un rapport par un autre égal, simple ou composé, plus facile à déterminer exactement. Or, observons que la démonstration de l'égalité de deux rapports, par deux *fractions continues* identiques, suppose encore un commun diviseur infiniment petit lorsque ces deux fractions continues sont illimitées. Mais du moins le procédé, indiqué par Ampère, est naturel comme fondé sur la recherche directe de la plus grande mesure commune aux deux termes de chaque rapport : c'est le développement de l'*axiome de mesurage* dont voici l'énoncé :

Si quatre quantités continues de même nature deux à deux, A et B, C et D, sont telles qu'en mesurant C avec D, on mesure en même temps A avec B, il est évident que les deux rapports ou les deux nombres résultants sont absolument les mêmes et qu'ainsi on aura toujours A:B::C:D.

Tel est l'axiome par lequel on établit très-simplement les proportions pour *mesurer* tout angle au centre, tout rectangle, tout parallélipipède rectangle, tout angle dièdre, etc. Mais on pénètre plus avant dans la génération de chaque rapport par la méthode des parties égales; celle-ci est donc plus instructive, presqu'aussi simple et plus générale, comme servant à démontrer toutes les proportions entre grandeurs continues, en Mécanique aussi bien qu'en Géométrie.

Remarque. On voit déjà que les définitions plus haut du rapport et de l'angle plan, ainsi que la méthode des parties égales, sont les bases de l'enseignement le plus clair, le plus simple et le plus complètement exact de la Géométrie élémentaire : ce sont les premières applications de la théorie infinitésimale, laquelle d'ailleurs n'est pas moins nécessaire pour simplifier d'autres applications géométriques.

Définition. Si l'on considère une série de points, séparés par des intervalles quelconques, tous ces points sont *consécutifs;* et deux points qui n'en ont pas d'autre entre eux sont dits *immédiatement consécutifs* et le second *suit immédiatement* le premier. — Il est bon d'observer que, ordinairement, le mot *polygone* désigne une surface limitée en tous sens par des lignes, dont la somme en est le *périmètre* ou le *contour*. Il n'y a donc pas de *courbe polygone;* mais il y a des lignes *brisées.*

Le cercle est un polygone régulier. D'abord les longueurs de la circonférence et de son rayon ayant nécessairement un rapport, ont aussi nécessairement un commun diviseur; lequel devant s'appliquer exactement sur le rayon et sur la courbe, ne peut être qu'une droite infiniment petite, contenue un nombre infini de fois dans cette courbe. De sorte que la circonférence est composée d'une infinité de droites égales et infiniment petites.

Ensuite, ces droites sont les bases d'autant de triangles isocèles égaux et infiniment petits, composant l'aire du cercle dont le centre est leur sommet commun. La hauteur de chaque triangle est donc le rayon mené au milieu de sa base; car celle-ci, bien qu'infiniment petite, n'est pas rigoureusement nulle; elle a donc un milieu par lequel passe l'extrémité du rayon décrivant cette base.

Ici la hauteur du triangle isocèle est égale à chacun des côtés latéraux; mais cela vient de ce que la base étant excessivement voisine de zéro, n'est qu'un *embryon* de droite, une droite *naissante* et invisible, dont par suite les deux extrémités coïncident en quelque sorte avec le milieu.

De plus, le cercle est un polygone régulier, comme étant la somme d'une infinité de triangles isocèles égaux et infiniment petits, autour du centre. Chaque angle *intérieur* de ce polygone n'est surpassé par deux angles droits que d'un angle *extérieur* infiniment petit et égal à l'angle du sommet de l'un des triangles isocèles; car chaque angle intérieur du polygone est la somme des deux angles à la base du triangle isocèle, etc.

En résumé, on voit que : *Le cercle est un polygone régulier d'une infinité de côtés infiniment petits, dont le rayon et l'apothème sont égaux entre eux et dont chaque angle intérieur diffère infiniment peu de deux angles droits.*

Autre démonstration. Si l'on conçoit la circonférence divisée en une infinité d'*arcs* partiels, égaux et infiniment petits, il est évident que chaque arc partiel a est plus grand que sa corde c, elle-même infiniment petite. Or, soit r le rayon et h la hauteur du triangle isocèle dont c est la base et dont le sommet est au centre : il est clair que $h<r$ et que $2h<r+h$. Cela posé, d'après l'une des *relations numériques* dans le triangle rectangle, on a

$$r^2=h^2-\tfrac{1}{4}c^2;\ \text{d'où}\ (r+h)(r-h)=\tfrac{1}{4}c^2\ \text{et}\ r-h<c^2:8h.$$

Ainsi la différence $r-h$, *flèche* de l'arc a proposé, est moindre que l'infiniment petit du second ordre c^2 sur $8h$; et celui-ci répété un nombre infini de fois donne un produit infiniment petit du premier ordre, *nul* à l'égard des nombres finis r et h; donc à plus forte raison c^2 sur $8h$ doit être considéré comme étant zéro : cela donne $r-h=0$ ou $h=r$ et fait coïncider c avec a. — On peut donc toujours, *sans erreur finale appréciable*, regarder le cercle comme un polygone régulier dont le rayon et l'apothème sont égaux entre eux, etc.

Ce second énoncé est moins affirmatif que le premier; mais il lui est identique, quant à l'exactitude des conséquences.

Mesurage dans le cercle. Le précédent résumé énonce des vérités certaines; les propositions qui s'en déduisent directement pour la théorie du mesurage dans le cercle et les corps ronds, sont donc rigoureusement exactes et n'ont aucunement besoin d'être vérifiées; pas même à l'aide de la méthode des variables, laquelle conduirait cependant, avec facilité, à plusieurs de ces propositions. — Voici pour le mesurage dans le cercle, les principales conséquences du résumé ci-dessus :

I. *Tous les cercles sont semblables, aussi bien que leurs circonférences.* — Car deux cercles quelconques pouvant toujours être rendus concentriques, sont alors deux polygones réguliers du même nombre infini de côtés homologues parallèles et proportionnels, comprenant des angles homologues égaux. Ces deux cercles sont donc semblables; et l'un *représente* l'autre, comme étant exactement *en petit* ce que ce dernier est *en grand.* En un mot, les deux cercles ont absolument la même *forme* et ne diffèrent que par leurs *grandeurs.*

II. De là résulte que : *Les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs rayons ou comme leurs diamètres*; vu que les périmètres de deux polygones réguliers semblables sont entre eux comme leurs rayons. De sorte que le rapport des longueurs de la circonférence et de son diamètre est un nombre *constant,* toujours désigné par π.

III. *Si deux secteurs circulaires, de rayons différents, ont le même angle au centre commun, ces deux secteurs sont semblables, aussi bien que leurs arcs, et ces arcs sont entre eux comme leurs rayons.* — Les deux arcs, en effet, sont deux lignes brisées semblables, ayant les côtés homologues infiniment petits parallèles et proportionnels, comprenant des angles homologues égaux.

IV. *Le rapport constant π de toute circonférence à son diamètre est inexprimable en chiffres et sera toujours inconnu.* — On sait, en effet, que la circonférence C et son diamètre 2R ne peuvent avoir, comme longueurs, d'autre commun diviseur que la droite x infiniment petite. Cette droite est donc contenue, dans C et 2R, les nombres entiers infinis de fois n et p; de sorte qu'ayant $C=nx$ et $2R=px$, il vient $C:2R$ ou $\pi=n$ sur p.

Le rapport π étant donc la fraction n sur p, à termes infinis, est absolument inexprimable en chiffres et ne peut se calculer que par approximation; ce qu'on sait depuis longtemps.

V. On a trouvé $\pi=3,14159265358979$ etc. On sait que le procédé élémentaire le plus simple, pour obtenir cette valeur approchée, est de calculer les rayons et les apothèmes numériques d'une suite de polygones réguliers dont les nombres de côtés deviennent de deux en deux fois plus grands, tous ces polygones ayant les périmètres de même longuer donnée. Ces calculs vérifient d'ailleurs que le rapport π est un nombre constant.

VI. De là on voit que $C = 2R \times \pi$. Soit u l'unité linéaire, le mètre par exemple : comme le rapport ne change pas de valeur lorsqu'on divise ses deux termes C et 2R par l'unité u de même nature qu'eux, on a

$$C:u = (2R:u) \times \pi.$$

Or, le rapport est dit *la mesure* ou *la valeur numérique* de l'antécédent lorsque le conséquent est l'unité; donc $C:u$ et $2R:u$ sont les mesures respectives de C et 2R. Ainsi l'on voit que : *La circonférence a pour mesure le produit de la mesure de son diamètre par la valeur, suffisamment approchée, du rapport constant π de ces deux lignes.* De sorte que pour mesurer C avec u, opération directement impossible, il suffit de mesurer 2R avec u. On *rectifie* donc ainsi la circonférence C, c'est-à-dire qu'on la mesure et on l'exprime en unités rectilignes, absolument comme si elle était *redressée* ou étendue en ligne droite. — Ordinairement, pour simplifier les expressions numériques, chaque unité est *sous-entendue* comme diviseur ou conséquent; en sorte, par exemple, que la lettre R désigne à la fois le rayon et sa valeur numérique : on a alors $C = 2\pi R$.

VII. On sait mesurer l'arc a ou le *rectifier* quand il est exprimé en *degrés*, *minutes* et *secondes* de la circonférence C dont il fait partie; car alors on connaît le rapport v de a à C et l'on a $a = Cv$. D'ailleurs, si C et a sont tracés sur le papier, un bon compas suffit pour calculer le rapport v avec une approximation suffisante; et, l'unité linéaire u étant sous-entendue, il vient $a = 2\pi Rv$. (On sait que le rapport v se détermine en divisant d'abord C en 6 parties égales, etc. Voyez la Géométrie).

VIII. *L'aire du cercle a pour mesure le demi-produit des mesures de la circonférence et du rayon.* — Car le cercle est un polygone régulier ayant la circonférence pour périmètre et le rayon pour apothème.

Si donc A, C et R désignent l'aire de tout cercle, sa circonférence et son rayon; si de plus s désigne l'unité superficielle, carré fait sur l'unité linéaire u, on aura

$$A:s = \tfrac{1}{2}(C:u)(R:u);\ \text{d'où}\ A = \tfrac{1}{2}CR,$$

en sous-entendant chaque unité diviseur. D'ailleurs on sait que $C=2\pi R$; donc

$$A=\pi R^2,\ \text{ou encore}\ A=s\cdot\pi(R:u)^2.$$

IX. Enfin, *l'aire de tout secteur circulaire a pour mesure le demi-produit des mesures de son arc et de son rayon :* c'est le produit du cercle entier par le rapport de l'arc du secteur à la circonférence (choses faciles à démontrer).

Propositions diverses. 1° Tant que l'unité linéaire est *finie*, comme le mètre et le myriamètre, la mesure de toute droite *infinie dans un sens* est un nombre infini du premier ordre ; et il en est de même du nombre mesure de la surface de tout bi-angle dont la largeur est *finie.*

2° D'après sa génération, la surface de l'angle, moindre que deux angles droits, est un *secteur circulaire* dont le rayon R est infiniment grand. Et comme le rapport v de l'angle proposé à quatre angles droits est un nombre *fini*, exprimable ou inexprimable, on voit que la surface infinie de cet angle a pour mesure $\pi R^2 v$, c'est-à-dire un nombre infini du second ordre.

3° Si l'angle est infiniment petit, il en est de même du rapport v. Donc $\pi R^2 v$, mesure de la surface de l'angle infiniment petit, se réduit à un nombre infini du premier ordre, aussi bien que le nombre mesure de la surface de tout bi-angle de largeur finie. Ainsi on ne saura jamais laquelle des deux surfaces infinies est la plus grande. On ne pourra donc affirmer, avec certitude, que l'angle infiniment petit finira toujours par sortir du bi-angle de largeur finie, ayant avec l'angle un sommet et un côté communs. — C'est précisément en cela que pèche la démonstration de Bertrand de Genève, appliquée au postulatum d'Euclide ou à celui de Lacroix.

4° Si une droite décrit un angle infiniment petit en prenant un mouvement *initial* autour du sommet, chacun de ses points décrit une droite infiniment petite. Or cette droite, nulle d'abord, puis excessivement voisine de zéro, augmente de plus en plus sans cesser d'être infiniment petite, à mesure que le point s'éloigne du sommet : elle ne devient finie que quand le point décrivant est infiniment éloigné. D'abord c'est une longueur finie, vu qu'elle a pour mesure le produit d'un rapport v infiniment petit par un nombre infini $2\pi R$, et l'on sait que ce produit est toujours *fini*, mais inconnu. Ensuite la ligne décrite est droite, vu que le point décrivant s'avance vers un point fixe. — On sait d'ailleurs qu'une partie finie de la tangente se confond avec une partie finie de la circonférence dont le rayon est infiniment grand. Car on vérifie que plus le rayon est grand, plus la circonférence approche de la tangente.

Objection et réponse. La *méthode infinitésimale* que nous venons d'employer pour démontrer ou pour découvrir les propositions relatives au mesurage dans le cercle, est claire, simple, directe et rigoureusement exacte : elle est aussi très-générale, puisqu'elle s'applique au mesurage dans les corps ronds, ainsi qu'on le verra plus bas.

L'emploi ci-dessus de la méthode infinitésimale justifie complètement l'appréciation que nous venons de poser. Cependant on nous a dit : « Si la théorie infinitésimale est si évidente, si simple, si « rigoureuse, pourquoi donc ne pas l'adopter franchement et à « l'exclusion de toute autre? Or, est-ce là ce que vous faites? « Nullement : ni vous ni aucun auteur contemporain n'a osé em- « ployer sans réserve et exclusivement cette méthode tant préco- « nisée. »

Je pourrais citer différents auteurs employant exclusivement la théorie infinitésimale dans le mesurage, et d'autres faisant implicitement usage des infinis, mais cherchant à les *déguiser*, soit par *des réductions à l'absurde*, absolument incompréhensibles si l'on n'a pas les notions des grandeurs infinitésimales et parfaitement inutiles dans le cas contraire, soit par la *méthode des limites*, laquelle n'est que la méthode infinitésimale rendue moins claire et moins simple.

Pour ce qui me concerne, si je n'ai pas employé exclusivement la méthode infinitésimale dans la dernière édition du Traité de Géométrie; si j'ai cru utile de démontrer cette méthode par celle des variables et de faire voir comment l'*axiome de généralisation* supplée en certains cas, même avec avantage, au principe infinitésimal; c'est pour dissiper les doutes, les scrupules des professeurs qui, n'ayant pas suffisamment approfondi les notions des infinis, considèrent la méthode infinitésimale *comme une simple méthode d'approximation;* et l'on vient de voir au contraire que, par ces notions bien acquises, la méthode infinitésimale est complètement rigoureuse. On sait d'ailleurs que s'il y a des erreurs commises par l'emploi des grandeurs infinitésimales, ces erreurs se compensent et disparaissent, en vertu de la règle des variables; de sorte que le résultat final est rigoureusement exact.

Enfin, à la suite de mes Mélanges de Mathématiques (vol in-8° imprimé en 1822 à Luxembourg) j'ai publié, en 1825, une Note où tous les théorèmes de mesurage, dans le cercle et les corps ronds, sont rigoureusement démontrés à l'aide de la règle des variables, énoncée plus haut (p. 41); mais présentée alors comme Lemme nécessaire à la *méthode des Limites*, et d'où j'ai déduit que le cercle n'est qu'un polygone régulier, etc. J'ai d'ailleurs fait usage de la théorie infinitésimale à la première édition du Traité de Géométrie, imprimé en 1830.

Des limites. Lorsque les valeurs successives, croissantes ou décroissantes, d'une même *variable* approchent de plus en plus, et d'aussi près qu'on le veut supposer, d'une grandeur *constante*, sans pouvoir jamais l'atteindre, celle-ci est dite la *limite* de la variable proposée. Ainsi en rendant de deux en deux fois plus grand le nombre de côtés du polygone régulier, soit *inscrit*, soit *circonscrit* au cercle, le nombre des points communs du périmètre et de la circonférence devient de deux en deux fois plus grand lui-même; ce périmètre approche donc de plus en plus de la courbe, avec laquelle il ne coïncidera jamais (si ce n'est à l'infini). La circonférence est donc la limite des périmètres des polygones réguliers inscrits ou circonscrits au cercle, tandis que l'aire du cercle est la limite des aires de ces polygones.

La méthode des limites consiste à attribuer à la limite constante les propriétés générales de chaque variable limitée. C'est ce qu'on ne peut démontrer clairement et exactement que par la méthode des variables. Et puisque celle-ci démontre aussi le principe infinitésimal, on voit que la méthode des limites n'est réellement que la méthode infinitésimale. Mais cette dernière est plus simple et plus claire que l'autre, comme étant plus explicite dans l'expression des faits à étudier : la méthode infinitésimale est une méthode d'invention.

La *règle des variables* rentre dans les théorèmes d'Arbogast, de Lacroix, de Francœur, de Nicollet, etc.; mais elle en diffère par une forme plus générale, conduisant à la méthode *infinitésimale* ou à celle des *limites* et à la méthode *des coëfficients indéterminés*.

Toute courbe plane est une ligne brisée. La méthode infinitésimale pénétrant plus avant que toutes les autres méthodes dans la génération, soit descriptive, soit numérique, des lignes et des figures géométriques, doit être préférée toutes les fois qu'elle se présente naturellement pour généraliser les définitions et passer ainsi directement du connu à l'inconnu. Voyons donc comment la description de toute courbe plane, par un point mobile, en justifie la définition énoncée plus haut, et fait connaître la courbe plus complètement que cette définition.

I. Considérons une courbe plane quelconque terminée aux deux points A et B. Le point A, générateur de cette courbe, se rend de la position A à la position B et passe successivement par une infinité de positions intermédiaires. On peut supposer évidemment que ces positions du point A ont un intervalle *constant* entre chacune et celle qui la suit immédiatement. La courbe finie AB renferme donc une infinité de ces intervalles égaux; et chacun est si petit qu'il échappe à la vue et à toute appréciation : il est *infiniment petit*, c'est-à-dire très-voisin du néant, sans être rigoureusement nul. Car s'il était nul; comme le point géométrique n'a pas d'étendue, les deux positions de A coïncideraient et n'en feraient qu'une seule; le point A n'aurait donc aucun mouvement, contrairement à l'hypothèse.

De plus, il est clair que le point A ne peut avoir à la fois ou au même instant deux tendances différentes au mouvement, ni suivre à la fois deux chemins différents. Le point A ne pouvant donc avoir qu'une seule tendance, s'avance, en effet, infiniment peu vers un point fixe du plan et, avant de changer de direction pour en prendre une autre *infiniment voisine* et par conséquent *invisible*, il décrit nécessairement une *droite* infiniment petite, appelée *élément rectiligne* ou simplement *élément* de la courbe. Celle-ci n'est donc réellement qu'une *ligne brisée* dont les *côtés* sont invisibles et inappréciables.

II. Chaque élément fait, avec le prolongement de celui qui le précède immédiatement, un angle *extérieur* infiniment petit et invisible, pouvant être *positif* ou *négatif* et même être rigoureusement *nul*. Dans ce dernier cas, les deux éléments égaux sont en ligne droite, et celle-ci est encore infiniment petite et invisible. De plus, chaque angle extérieur, par ses valeurs particulières infiniment petites, fait que la ligne est plus ou moins *courbe* au sommet de cet angle : c'est donc l'*angle de courbure* ou simplement la *courbure* de la courbe en ce point sommet.

Dans la circonférence, tous les angles de courbure sont égaux entre eux et à l'angle au centre formé par les rayons joignant les milieux de deux éléments égaux contigus. Ainsi la circonférence est une courbe *uniforme*, comme ayant la même courbure en chaque point.

III. Tels sont les faits évidents et exactement appréciés de la description de toute courbe, plane ou non, par un point géométrique mobile. Il n'y a pas ici d'opinion ni d'hypothèse contestables; il y a la vérité et la réalité. — D'ailleurs, soit C la longueur de la courbe plane finie quelconque et D la droite qui joint ses extrémités : les longueurs C et D ayant nécessairement un rapport, ont aussi nécessairement un commun diviseur; lequel devant s'appliquer exactement sur la droite D et sur la courbe, ne peut être qu'une droite infiniment petite; etc.

IV. Dans la pratique, la *pointe* traçant la ligne a toujours une certaine étendue peu sensible, mais qui n'est pas infiniment petite. Dans son mouvement sur le papier, la surface de la pointe *couvre* de moins en moins la position qu'elle abandonne et finit par la *toucher*. Dans ce cas, par *positions immédiatement consécutives*, il faut entendre les deux positions du point, en quelque sorte le *centre* de cette surface, et extrémités de l'élément qu'il décrit.

V. Chaque *arc* infiniment petit de la courbe est composé d'au moins deux éléments rectilignes non en ligne droite. Or, les arcs et les éléments infiniment petits sont invisibles, et il en est de même des changements de direction par angles infiniment petits. Il y a donc *continuité* et dans la courbe et dans le mouvement du point qui la décrit. Pour qu'il y ait *discontinuité*, il faut que le changement de direction se fasse brusquement par un angle fini visible, et alors le sommet de cet angle est appelé *point de rebroussement*. La continuité subsiste encore lorsque l'angle infiniment petit de courbure passe du *positif* au *négatif*, et réciproquement. Mais alors le point inconnu où ce changement se fait est nommé *point d'inflexion* de la courbe : celle-ci d'ailleurs peut passer plusieurs fois par un même point, appelé *point multiple*, et où se ferme une *feuille* au moins, limitée par la courbe décrite. — On voit que les éléments rectilignes de la courbe sont nécessaires pour l'étudier et la bien connaître.

Figures planes. Une ligne est dite *mixte* lorsqu'elle est composée de parties *droites* et *courbes* contiguës : c'est toujours une ligne brisée ayant des côtés *finis* et *infiniment petits*. D'après cela, toute figure plane, *mixte* ou *curviligne*, est réellement un polygone *rectiligne* d'une infinité de côtés infiniment petits, sauf un ou plusieurs côtés finis, si la figure est mixte. On peut donc appliquer aux figures planes, mixtes ou curvilignes, certaines propriétés générales établies pour des polygones rectilignes. Voici plusieurs propositions, faciles à démontrer :

I. *De tous les trapèzes équivalents, c'est-à-dire ayant même hauteur et mêmes bases parallèles respectives, celui de moindre somme des côtés latéraux est le trapèze isocèle.* — Cela est vrai encore pour le trapèze mixtiligne, pourvu que la hauteur soit infiniment petite; car alors les deux côtés latéraux étant infiniment petits eux-mêmes, peuvent être considérés comme rectilignes, sans erreurs appréciables.

II. De là résulte que : *La circonférence est moindre que le contour de toute figure plane équivalente au cercle.*

III. Réciproquement, *le cercle est plus grand que toute figure plane isopérimètre.*

IV. *L'aire de la projection orthogonale de toute figure plane sur un plan est le produit de l'aire projetée par le rapport de projection, alors cosinus numérique de l'angle des deux plans.* — Ici on passe de la projection d'une figure rectiligne à celle d'une figure mixte ou curviligne, à l'aide *du principe infinitésimal*, et si l'on veut, à l'aide de la *règle des variables* qui le démontre.

Tétraèdres équivalents. *Deux tétraèdres de bases équivalentes et de hauteurs égales, sont équivalents entre eux.* Car en vertu du principe infinitésimal, ces deux tétraèdres sont composés du même nombre infini de tranches prismatiques équivalentes chacune à chacune.

Mais ici, pour dissiper tous les doutes que l'on pourrait concevoir, il faut démontrer, par d'autres considérations, la proposition précédente; non *indirectement* par la réduction à l'absurde, mais *directement* par la méthode des variables, plus claire et plus simple, comme n'étant au fond que la méthode infinitésimale ou celle des limites.

Soient donc T et T′ les deux tétraèdres proposés DABC et D′A′B′C′; soient a et a' leurs bases équivalentes ABC et A′B′C′, situées dans le même plan; soit enfin h les hauteurs égales DO et D′O′, situées d'un même côté de ce plan. Concevons les hauteurs h

divisées chacune en n parties égales à x par des plans parallèles à celui des bases : ces plans divisent donc aussi T et T′ en *n tranches* chacun, toutes de même épaisseur x. On sait d'ailleurs que les couples de sections faites par les plans successifs, savoir b et b', c et c', d et d', ..., sont des triangles équivalents.

Sur les sections triangulaires équivalentes b et b', c et c', d et d',..., prises pour bases *supérieures*, concevons les prismes triangulaires m et m', p et p', q et q', ..., tous de même hauteur x et dont les arètes latérales soient parallèles à DA et D′A′ dans T et T′ : tous ces prismes, *intérieurs* à T et à T′, ont chacun une arète sur les faces respectives DBC et D′B′C′. Or, les deux prismes m et m', ayant hauteurs égales à x et bases b, b' équivalentes, sont équivalents entre eux : il en est de même des deux prismes p et p', des deux q et q', etc. Donc la somme S des n prismes intérieurs à T équivaut à la somme S′ des n prismes intérieurs à T′; c'est-à-dire qu'on aura toujours $S = S'$, quelque grand que soit le nombre n et quelque petite que soit x, n ième partie de h.

Il est clair que T et T′ sont les *limites* respectives de S et S′. Car à cause de $T > S$ et de $T' > S'$, on peut poser $S = T - y$ et $S' = T' - y'$; d'où l'on aura toujours $T - y = T' - y'$ et $T = T' + y - y'$.

Or, plus le nombre n est grand, plus les sommes S et S′ ont de points communs avec T et T′; plus elles approchent de coïncider avec T et T′, sans pouvoir jamais y parvenir (si ce n'est à l'infini); donc plus les différences y et y' sont petites, aussi bien que la différence $y - y'$, toujours moindre que y; laquelle est variable avec n, sans que l'équation $T = T' + y - y'$ cesse d'être exacte. Et puisque T et T′ restent constants, il est clair que si la différence $y - y'$ (qui n'est pas nulle, mais variable) devait entrer dans cette équation, la grandeur *constante* T serait *toujours* égale à la quantité *variable* $T' + y - y'$; chose évidemment absurde. Donc la différence variable $y - y'$ ne saurait être conservée dans l'équation et doit en disparaître absolument comme si l'on avait rigoureusement $y - y' = 0$ ou $y = 0$ et $y' = 0$ (ce qui fait coïncider S et S′ avec T et T′). Or telle est *la règle des variables* qui donne $T = T'$ ou plutôt T équivalent à T′; ce qu'il fallait démontrer.

Compensation d'erreurs. Si n est infini, toutes les tranches de T et T′ ont la même épaisseur x infiniment petite. Et comme chaque couple de tranches qui se correspondent dans les deux tétraèdres ont même hauteur x et leurs bases parallèles respectivement équivalentes, il est clair qu'en regardant ces deux tranches comme deux *prismes équivalents*, on commet deux erreurs; mais, en vertu de la règle des variables, *ces deux erreurs se compensent* et disparaissent du résultat final des calculs et des raisonnements. Ce résultat est donc rigoureusement exact par la *compensation des erreurs finales y* et y'; laquelle s'établit toujours par la règle des variables et conséquemment par le principe infinitésimal.

En résumé, *la méthode des variables démontre la méthode infinitésimale, plus claire et plus simple, et où l'on néglige d'abord les termes infiniment petits fournissant ceux qui doivent disparaître à la fin, comme variables :* elle démontre aussi la méthode des limites et prouve ainsi que cette dernière n'est que la méthode infinitésimale, rendue moins claire.

Mesurage dans les corps ronds. La méthode infinitésimale fait passer directement du mesurage des aires *rectilignes* et des volumes *polyèdres* au mesurage des aires et des volumes dans *les corps ronds.* Il en résulte immédiatement les propositions que voici (les *unités* u, s et v de longueur, de surface et de volume étant *sous-entendues*) :

I. *La surface latérale de tout cylindre droit circulaire a pour mesure le produit des mesures de sa hauteur et de la circonférence, base de cette surface.* — Car la circonférence est la somme d'une infinité d'éléments rectilignes égaux; donc la surface latérale proposée est la somme d'une infinité de rectangles plans égaux.

II. *La surface latérale de tout cône droit circulaire a pour mesure le demi-produit des mesures de son côté et de la circonférence qui lui sert de base.* — Cette surface, en effet, est la somme d'une infinité de triangles isocèles égaux et plans, ayant pour bases les éléments rectilignes égaux de la circonférence et pour hauteur le côté ou apothème du cône.

III. *La surface latérale de tout tronc de cône droit, à bases circulaires parallèles, a pour mesure le produit des mesures de son côté et de la circonférence, menée par le milieu de ce côté et parallèlement aux deux bases.* — Car la surface latérale proposée est la différence entre celles des deux cônes droits circulaires; etc.

On voit aussi que : *La surface décrite par la révolution de toute droite donnée, tournant autour d'un axe extérieur et dans le même* *plan, a pour mesure le produit des mesures de la droite génératrice et de la circonférence que décrit son milieu.*

IV. *Le volume de tout cylindre droit ou oblique, ayant base plane quelconque, mixte ou curviligne, convexe ou concave, a pour mesure le produit des mesures de sa hauteur et de sa base.* — Cette base, en effet, étant un polygone plan rectiligne d'une infinité de côtés, le cylindre proposé est en réalité un *prisme* d'une infinité de faces planes latérales.

V. *Le volume de tout cône, ayant base plane quelconque, mixte ou curviligne, convexe ou concave, a pour mesure le tiers du produit des mesures de sa hauteur et de sa base.* — Car cette base n'étant au fond qu'un polygone plan rectiligne d'une infinité de côtés, le cône proposé n'est qu'une *pyramide* d'une infinité de faces planes latérales.

VI. Soit $ABC = T$ un triangle isocèle dont $AB = b$ est la base, C le sommet et h la hauteur. Soient *surf.* b et *vol.* T la surface et le volume de révolution engendrés par la base b et l'aire T du triangle isocèle tournant autour d'un *axe* extérieur et dans le même plan. Soit p la projection orthogonale de b sur l'axe et d la distance du sommet C au même axe : d'après l'aire latérale du tronc de cône droit circulaire, à bases parallèles, et d'après l'expression du volume de tout cône circulaire droit, on démontre aisément à l'aide d'une double figure, que les unités v, s et u étant sous-entendues comme conséquents des rapports, on a toujours

$$\textit{surf.}\ b = b \cdot 2\pi d \pm p \cdot 2\pi h,$$
$$\textit{vol.}\ T = T \cdot 2\pi d \pm \tfrac{2}{3} p \cdot \pi h^2;$$

le signe $+$ du double signe répondant à C entre l'axe et la base b, tandis que le signe $-$ répond à la base b entre l'axe et le sommet C.

VII. Soit S le secteur circulaire dont T fait partie; soit r son rayon et a son arc, dont p désigne la projection sur l'axe, d étant toujours la distance de celui-ci au centre C. Puisque le secteur S est la somme d'une infinité de triangles isocèles égaux et de même hauteur r, dont les bases sont les éléments rectilignes égaux de l'arc a, et puisque p est la somme des projections de ces bases sur l'axe, on voit qu'on aura toujours

$$\textit{surf.}\ a = a \cdot 2\pi d \pm p \cdot 2\pi r,$$
$$\textit{vol.}\ S = S \cdot 2\pi d \pm \tfrac{2}{3} p \cdot \pi r^2;$$

le signe $+$ du double signe ayant lieu lorsque l'arc a est *concave* et le signe — quand a est *convexe* vers l'axe de rotation.

De là résultent deux expressions pour la surface et pour le volume engendrés par la révolution du contour et de l'aire du segment circulaire, différence entre S et T.

VII. Lorsque l'axe passe par le centre C, d'où $d=0$, l'arc a est concave vers cet axe; et alors la surface et le volume engendrés par a et S sont la *zône* et le *secteur sphériques*. On démontre donc ainsi que : 1° *L'aire de toute zône sphérique a pour mesure le produit des mesures de sa hauteur et la circonférence d'un grand cercle;* 2° *Le volume de tout secteur sphérique a pour mesure le tiers du produit des mesures du rayon et de la zône, base du secteur.*

IX. La première de ces deux propositions fait voir que *la surface de la sphère équivaut à quatre grands cercles;* d'où résultent ensuite les expressions des aires de tout *fuseau* et de tout *polygone sphériques.*

X. La seconde proposition VIII se démontre *directement* en observant que le secteur sphérique proposé est la somme d'une infinité de tétraèdres, ayant chacun pour hauteur le rayon de la sphère et dont les bases sont les triangles infiniment petits et par suite *plans* qui composent la zône, base du secteur; d'où résulte que *le volume de la sphère a pour mesure le tiers du produit des mesures de sa surface et du rayon.*— On démontre de même les expressions des volumes de l'*onglet* et de la *pyramide sphériques.*

On sait d'ailleurs calculer la mesure du volume de tout *segment* de sphère, aussi bien que de toute *tranche* sphérique.

XI. Soit L l'aire de la *lunule* circulaire; soient a et a' les deux arcs qui la terminent et situés d'un même côté de la corde c commune; de sorte que $a' > a$ et que $a + a' = 2\pi r$. Soit d la distance du centre à la corde c : si la lunule fait une révolution autour de cette corde, on démontre que la surface et le volume engendrés par le périmètre $2\pi r$ et l'aire L de la lunule, ont pour mesures respectives :

$$surf.\ 2\pi r = 2c\cdot 2\pi r + (a' - a)\cdot 2\pi d \quad \text{et} \quad vol.\ \mathrm{L} = 2\pi^2 dr^2.$$

(Voyez d'ailleurs le Complément de Trigonométrie).

Observons encore que l'on peut aisément calculer la capacité et la surface intérieure de certains *vases ouverts* de révolution, la ligne plane génératrice étant composée d'au moins deux arcs circulaires égaux et raccordés, comme la *doucine* et le *talon*, etc.

XII. Soit O l'*onglet cylindrique* obtenu en menant un plan quelconque par le diamètre $2r$ de la base de tout cylindre circulaire droit; soit S la surface courbe interceptée par ce plan sur la surface latérale du cylindre et soit T la plus grande section triangulaire de l'onglet, formée en menant par le centre un plan perpendiculaire à $2r$. De plus, soit v l'unité de volume, cube fait sur l'unité linéaire u et dont chaque face est l'unité superficielle s: si l'on *sous-entend* chacune de ces trois unités comme *diviseur* ou comme *conséquent*, je dis qu'on aura toujours $S = 4T$ et $O = \frac{4}{3}Tr$.

C'est ce qu'on démontre en supposant l'onglet O divisé en une infinité de tranches par des plans triangulaires parallèles et semblables à T, ces plans divisant la surface courbe S en une infinité de trapèzes rectangles, tous *plans* comme ayant pour hauteurs les éléments rectilignes de la circonférence, et eux-mêmes étant les bases de pyramides quadrangulaires, toutes de hauteurs égales à r; etc.

XIII. Soit L la longueur donnée d'une ligne fixe quelconque, plane ou non, convexe ou concave; soit F l'aire et P le périmètre de toute figure plane donnée, mais *symétrique* par rapport à un *centre* O. Supposons que le centre O glisse sur la ligne fixe, d'une extrémité à l'autre, de telle sorte que le plan de F soit constamment perpendiculaire ou *normal* à cette ligne L en chaque point. Si *vol.* F et *surf.* P désignent le volume et la surface engendrés par F et P, je dis que les unités u, s et v étant sous-entendues, on aura toujours

$$vol.\,F = FL \quad \text{et} \quad surf.\,P = LP.$$

Soient $a, b, c, d, \ldots$ les côtés finis ou infiniment petits de la ligne fixe, *brisée*, *mixte* ou *courbe;* d'où $L = a + b + c + d +$ etc. Le centre O parcourant le côté a, il est clair que la figure F décrit le *prisme* ou le *cylindre droit* dont le volume et la surface latérale ont aF et aP pour mesures respectives. De plus, lorsque le centre O est arrivé au point de jonction A des côtés a et b, le plan de F, perpendiculaire au côté a, doit tourner autour du *diamètre* de F, qui passe par le point A, pour devenir perpendiculaire au côté b et engendrer ensuite le volume bF et la surface bP. Or, comme ce diamètre, devenu momentanément axe fixe de révolution, divise F et P en deux parties égales chacun, il est clair que les deux moitiés de F engendrent deux *onglets* opposés O_1 et O_2, parfaitement *symétriques* et *équivalents*, l'un O_1 *ajouté* et l'autre O_2 *ôté* à aF pour décrire bF ; de sorte que ces deux onglets se compensent ou se détruisent dans $aF + O_1 - O_2 + bF$, et le volume décrit suivant $a + b$ a pour mesure $aF + bF$. On verra de même que la surface décrite suivant $a + b$ est $aP + bP$. — D'après cela, il est évident qu'on aura toujours :

$$vol.\ F = aF + bF + cF + dF + \text{etc.} = LF\ ,$$

$$surf.\ P = aP + bP + cP + dP + \text{etc.} = LP.$$

Il importe d'observer que la figure symétrique F, dans son mouvement sur la ligne fixe, pourrait elle-même tourner en même temps sur son plan autour du centre O, et l'on aurait toujours les expressions ci-dessus de *vol.* F et *surf.* P. — Ces deux expressions, très-générales, fournissent plusieurs corollaires remarquables et s'appliquent à certaines *colonnes torses*, à différents genres d'*anneaux*, parmi lesquels il faut compter l'*anneau rond*, etc.

XIV. La méthode infinitésimale démontre très-simplement le théorème que voici : *De tous les volumes équivalents entre eux, celui de la sphère est terminé par la surface de moindre étendue;* d'où résulte, réciproquement, que : *Parmi tous les volumes terminés par des surfaces équivalentes, celui de la sphère est le plus grand.* (Voyez les *Méthodes géométriques* dans le Complément de Trigonométrie, pour les démonstrations de différents théorèmes sur les volumes *maximum* et sur les surfaces *minimum*).

Notion de similitude. Parmi les notions géométriques les plus utiles, il faut distinguer l'*égalité* et la *symétrie*, la *similitude directe* et la *similitude inverse*. Or, les grandeurs infinitésimales sont nécessaires pour passer des notions de symétrie et de similitude, tant de deux polygones plans rectilignes que de deux volumes polyèdres, aux notions de symétrie et de similitude de deux figures planes, mixtes ou curvilignes, et de deux volumes terminés par des surfaces mixtes ou courbes. — Pour le faire voir, développons seulement la notion de similitude que tout le monde possède ou croit posséder.

D'abord on sait que deux figures géométriques, ayant deux ou les trois dimensions, sont *semblables* et ont la même *forme* lorsqu'elles ne diffèrent que par leurs *grandeurs*, c'est-à-dire quand l'une est exactement *en petit* ce que l'autre est *en grand*. La première, ordinairement la *copie*, *représente* donc complètement la seconde ou le *modèle* et en tient absolument lieu, soit pour l'étude des propriétés qui leur sont communes, soit pour les opérations graphiques et numériques.

Aires planes. Pour qu'un polygone plan rectiligne P′ soit semblable à un autre P, il faut que chaque angle de P′ représente l'angle *homologue* de P et lui soit égal ; il faut de plus que chaque côté de P′ représente le côté homologue de P et lui soit égal *numériquement,* d'après les unités linéaires *relatives* à la copie P′ et au modèle P. Si toutes ces conditions *nécessaires* sont remplies, il est clair que P′ est exactement *en petit* ce que P est *en grand.* Ainsi deux polygones rectilignes sont *semblables*, et l'un représente l'autre, lorsqu'ayant un même nombre de sommets homologues ou qui se correspondent, ils ont aussi les angles homologues égaux et les côtés homologues proportionnels, les parties homologues étant disposées dans le même *ordre* en passant d'un polygone à l'autre.

Donc aussi deux figures planes, *mixtes* ou *curvilignes*, sont *semblables*, ont la même *forme* et l'une *représente* complètement l'autre, lorsqu'elles ont un même nombre infini de côtés et d'éléments rectilignes homologues proportionnels, comprenant des angles homologues égaux et disposés dans le même ordre en passant d'une figure à l'autre.

Volumes semblables. Deux polyèdres sont *semblables* (directement), ont la même *forme* et l'un *représente* complètement l'autre, dès qu'ils ont le même nombre de faces homologues semblables, comprenant des angles *dièdres* ou *coins* homologues égaux et disposés dans le même ordre en passant d'un polyèdre à l'autre.

Donc aussi deux volumes, terminés par deux surfaces mixtes ou courbes, sont semblables (directement) lorsqu'ils ont un même nombre infini de faces planes et d'*éléments plans* homologues semblables, comprenant des angles coins homologues égaux et disposés dans le même ordre en passant d'un volume à l'autre.

Similitude inverse. Deux figures géométriques sont *inversement semblables* lorsque la forme de l'une est *symétrique* de celle de l'autre, c'est-à-dire lorsque les parties homologues : égales, proportionnelles ou semblables, sont disposées dans l'*ordre inverse* en passant d'une figure à l'autre.

Conditions suffisantes. La similitude des figures géométriques n'existe évidemment que sous les conditions que nous venons de reconnaitre et lesquelles par suite sont toutes *nécessaires*. De sorte que les définitions précédentes expriment clairement et complètement l'idée de similitude, que nous avons naturellement ou que nous acquérons par l'étude et la comparaison des formes extérieures, dans les corps matériels. — Mais il y a toujours plusieurs des conditions ci-dessus qui sont déterminées par les autres; et la théorie des figures semblables a pour but spéciale de trouver les conditions et les données *suffisantes* pour que la similitude existe.

Cette théorie fournit plusieurs théorèmes qu'il faudrait considérer également en partant d'autres définitions. Or, parmi ces théorèmes, il faut distinguer les suivants, faciles à démontrer :

I. Dans deux figures planes semblables, les contours sont entre eux comme deux droites homologues quelconques, tandis que les aires sont entre elles comme les carrés numériques de ces deux droites. — Ainsi on trouve des nombres égaux d'*unités relatives*, tant pour les contours que pour les aires. De sorte que la copie représente le modèle, quant à la forme et quant à l'étendue. Donc pour mesurer le modèle avec l'unité réelle, il suffit de mesurer la copie avec l'unité choisie pour représenter cette unité réelle et qui est beaucoup plus petite.

II. Dans deux figures semblables, ayant les trois dimensions, les surfaces sont entre elles comme les carrés de deux droites homologues quelconques, tandis que les volumes sont entre eux comme les cubes numériques de ces deux droites; et ces proportions s'appliquent à deux corps géométriques inversement semblables. — D'après cela, on trouve des nombres égaux d'*unités relatives*, tant pour les surfaces que pour les volumes. De sorte que dans les volumes semblables, la copie représente le modèle, quant à la forme et quant à l'étendue. — Donc pour mesurer le modèle, il suffit de mesurer la copie, même lorsque les deux figures sont inversement semblables.

III. Enfin, deux figures directement ou inversement semblables deviennent *égales entre elles* ou *symétriques l'une de l'autre*, lorsqu'un côté de la première devient égal au côté homologue de la seconde. — De sorte que l'*égalité* et la *symétrie* des figures géométriques sont des particularités de leur *similitude directe* et de leur *similitude inverse*.

Sections semblables. *Si l'on coupe un cône quelconque ou son prolongement au-delà du sommet par un plan parallèle à la base : 1° la section est semblable ou inversement semblable à la base ; 2° le cône proposé et le cône retranché ou ajouté sont directement ou inversement semblables ; 3° enfin, la base et chacune des sections sont* *entre elles comme les carrés numériques de leurs distances au sommet du cône.*

Soit P un cône quelconque de hauteur h; soit b sa base plane, mixte ou curviligne, convexe ou concave; soient c et d les deux sections planes parallèles à la base b, faites de part et d'autre du sommet, mais à distances égales à k de ce sommet, et c entre ce dernier et b. Soient enfin Q et R les deux cônes, l'un Q retranché par c et l'autre R ajouté par d.

Cela posé, 1° puisque b n'est qu'un polygone plan rectiligne d'une infinité de côtés, il s'ensuit que le cône P n'est réellement qu'une pyramide d'une infinité de faces planes latérales. La base b et la section parallèle c ont donc le même nombre infini de côtés ou d'éléments rectilignes homologues, parallèles et proportionnels, comprenant des angles homologues égaux et disposés dans le même ordre en passant de b à c : donc ces deux figures sont semblables. On verra de même que b est inversement semblable à d, et que les deux sections sont égales *par symétrie.*

2° Il est clair que les deux cônes P et Q sont semblables, comme ayant le même nombre infini de faces planes homologues semblables chacune à chacune, comprenant des coins homologues égaux et disposés dans le même ordre en passant de P à Q. On verra de même que P est inversement semblable à R, et que Q et R sont égaux *par symétrie.*

3° Les distances égales de c et d au sommet de P étant désignées par k, soient m et n deux droites homologues de b et c : les triangles semblables donnent $m:n = h:k$. Si donc on rend cette proportion *numérique* en supposant ses quatre termes divisés par l'unité linéaire u sous-entendue; ce qui ne change pas la valeur de chaque rapport et ne détruit pas la proportion, alors entre quatre nombres abstraits; il est clair que cette dernière proportion donne $m^2:n^2 = h^2:k^2$. Or, les figures b et c étant semblables, on sait que $b:c = m^2:n^2$; donc $b:c = h^2:k^2$.

On verra de même que b et d sont entre elles comme les carrés numériques de leurs distances h et k au sommet du cône P.

Volume de tout cône. Le calcul infinitésimal fait passer directement de l'expression du volume de tout *prisme* ou *cylindre* à celle du volume de toute *pyramide* et de tout *cône.* — Soit en effet, P une pyramide ou un cône de hauteur h, et soit b sa base plane quelconque, rectiligne, mixte ou curviligne, convexe ou concave.

Concevons la hauteur h divisée en un nombre infini n de parties égales à x, par des plans parallèles à la base b : on a donc $h=nx$, et ces plans divisent P en n *tranches*, toutes de même épaisseur x infiniment petite. Soit T la m ième tranche, à partir du sommet de P, et soit y la plus grande de ses deux bases parallèles, laquelle est éloignée du même sommet de la distance mx. Cela posé, les grandeurs étant supposées mesurées et réduites en nombres abstraits, savoir P et T d'après l'unité v, b et y d'après l'unité s, h et mx d'après l'unité u, et chacune de ces unités étant *sous-entendue* comme diviseur; il est clair que les figures semblables b et y donnent, comme on l'a vu plus haut, $b:y::h^2:m^2x^2$; d'où en posant pour abréger, $c=b:h^2$ ou $b=ch^2$, il vient $y=cm^2x^2$.

La m ième tranche T, dont l'épaisseur x est infiniment petite, peut être considérée, sans erreur finale, comme un prisme ou un cylindre de base y et de hauteur x; de sorte que les unités diviseurs étant toujours sous-entendues, on a $T=yx$ et $T=cm^2x^3$.

Prenant successivement $m=1, 2, 3, 4, \ldots, n$, puis ajoutant membre à membre les n égalités résultantes et observant que P est la somme de toutes les T, on aura $P=cx^3 \int n^2$. Or, n étant infini, on sait que $\int n^2 = \frac{1}{3}n^3$ et $x^3 \int n^2 = \frac{1}{3}n^3x^3 = \frac{1}{3}h^3$, vu que $nx=h$. Et comme $b=ch^2$, d'où $ch^3=bh$, il vient enfin

$$P=\tfrac{1}{3}bh \quad \text{ou} \quad P=v\times\tfrac{1}{3}(b:s)(h:u).$$

Toute pyramide ou tout cône a donc pour mesure le tiers du produit des mesures de sa base et de sa hauteur. Et cette proposition est rigoureusement exacte, en vertu de la *compensation d'erreurs* qui s'établit toujours par le principe *infinitésimal* que démontre la *règle des variables.*

Comparaison des méthodes. Dans le mesurage des figures géométriques, la réduction à l'absurde, si elle est applicable, vérifie péniblement le théorème d'*abord énoncé;* car elle est souvent incapable de le faire découvrir, sans l'emploi préalable des grandeurs infinitésimales qu'on veut éviter. — La méthode infinitésimale, au contraire, conduit le plus directement possible à ce théorème, et devient indispensable pour étendre aux lignes et aux surfaces *courbes* les notions de similitude définies pour les lignes *brisées* et les surfaces *polyédrales.* — La méthode des limites ne peut faire connaître ces définitions sans rentrer dans la méthode infinitésimale, beaucoup plus explicite. Cette dernière méthode, comme abréviation et conséquence de celle des variables, est bien une méthode générale très-simple, très-claire et rigoureusement exacte.

L'existence des infinis est certaine, et les définitions de ces grandeurs réelles sont claires et précises, bien qu'elles ne puissent nous en donner des idées sensibles. D'ailleurs, la clarté des définitions entraîne celle des déductions logiques qui s'appuient sur ces définitions. Au lieu donc de compliquer et d'obscurcir les théories en cherchant à déguiser les infinis, il faut au contraire employer explicitement ceux-ci toutes les fois qu'ils se présentent naturellement; car il résulte de cet emploi : clarté, simplicité et rigoureuse exactitude, ainsi qu'il est bien établi dans ce qui précède.

On a dit, sans pouvoir le démontrer, que l'*emploi des infinis conduit à l'erreur tout aussi bien qu'à la vérité.* — On conçoit bien, en effet, que la méthode infinitésimale peut conduire à des absurdités, comme toute méthode mal appliquée. Mais d'où viennent ces absurdités? Est-ce de l'instrument ou de celui qui en fait usage? J'ai beau chercher, je ne trouve aucun exemple où l'emploi *logique* des infinis induise en erreur, et je m'assure que si cet emploi fournit des conséquences absurdes, c'est qu'il n'est pas logique; c'est toujours parce qu'il y a des erreurs commises dans les hypothèses ou dans les raisonnements employés : j'en pourrais citer plusieurs exemples.

Axiome de généralisation. Lorsque des figures géométriques sont déterminées complètement chacune par des *éléments générateurs* qui se correspondent et de telle sorte que ces figures aient toutes le même mode de *génération descriptive*, elles ont aussi toutes le même mode de *génération numérique.* Donc *chacune est exprimée numériquement en fonction de ses éléments générateurs numériques par une formule générale constante ou la même pour toutes.* — Il n'y a pas de raison, en effet, pour que l'expression numérique change en passant de la plus simple des figures proposées à chacune des autres, vu que toutes ces figures sont identiques, quant à leur construction unique.

Tel est l'*axiome de généralition* en Géométrie, ainsi nommé parce qu'il *généralise* la définition de la plus simple des figures proposées pour l'appliquer à chacune des autres et leur donner ainsi le même mode d'existence. — Cet axiome fait toujours partie de la *méthode fonctionnelle;* il généralise l'*axiome de mesurage*, indiqué plus haut (p. 70), et n'est lui-même qu'un *principe de mesurage;* moins clair à cet effet que la *méthode infinitésimale*, mais pouvant abréger beaucoup cette dernière et conduire plus directement aux théorèmes numériques. En voici plusieurs applications :

I. Il est évident que la circonférence C se décrit et se détermine avec son rayon R absolument comme la circonférence C′ avec son rayon R′; donc la longueur C est exprimée en R absolument comme C′ en R′. Et puisque le rapport indique comment l'antécédent se trouve avec le conséquent seul, on voit que si $C' = R'n$, n désignant un rapport inconnu, on a aussi nécessairement $C = Rn$. Ces deux égalités donnent évidemment :

$$C:2R = C':2R' = \tfrac{1}{2}n \text{ et } C:C'::R:R'::2R:2R'.$$

Ces deux théorèmes, comme on voit, résultent immédiatement des définitions du rapport et de la circonférence.

II. Soit S le secteur circulaire dont a est l'arc et r le rayon; soit T le triangle isocèle ayant pour sommet le centre de S, pour base la corde c de l'arc a et h pour hauteur. L'arc a et sa corde c étant tracés, il est clair que si par le milieu de c on lui mène une perpendiculaire, on aura le centre de S et le sommet de T en portant sur cette perpendiculaire la longueur r, à partir de a, et la longueur h, à partir de c. Ainsi S se construit et se détermine par a et r absolument comme T, par c et h; donc l'aire S est exprimée numériquement en a et r absolument comme l'aire T, en c et h. Or, les unités s et u étant sous-entendues, on sait que $T = \frac{1}{2}ch$; donc aussi $S = \frac{1}{2}ar$.

De là résulte l'expression de l'aire du cercle; mais ici la méthode infinitésimale est à la fois plus claire et plus directe.

III. Soit P un *prisme* ou un *cylindre* droit ou oblique; soit b sa base quelconque plane, convexe ou concave, et soit h sa hauteur menée d'un sommet de la base supérieure. Lorsque b et h sont données et tracées, le prisme ou le cylindre P est déterminé complètement. De plus, en vertu de la définition générale, tous les prismes et tous les cylindres possibles se construisent, absolument de la même manière, au moyen de la base b et de la hauteur h de chacun; donc le volume de chacun doit être exprimé numériquement en fonction des mesures de b et h par une formule constante ou la même pour tous. Or, les unités v, s et u étant toujours sous-entendues, on sait que quand P est un parallélipipède rectangle, on a $P = bh$; donc lorsque P est un prisme ou un cylindre quelconque, on a aussi $P = bh$. — On voit que l'axiome de généralisation abrège singulièrement la théorie du mesurage des prismes et des cylindres, sans diminuer aucunement la rigoureuse exactitude de cette théorie.

IV. Soit h la hauteur et b la base plane quelconque, rectiligne, mixte ou curviligne, convexe ou concave, de toute *pyramide* ou de tout *cône*. Si b et h sont données de grandeurs et de position fixe, la pyramide ou le cône est déterminé complètement en faisant glisser sur le contour de la base toute droite passant par le sommet fixe, laquelle alors décrit la surface latérale. Ainsi toutes les pyramides et tous les cônes possibles se déterminent absolument de la même manière chacun au moyen de sa base et de sa hauteur, données et tracées; donc le volume de chacun est exprimé numériquement en fonction des mesures b et h par la même formule générale. Or, les unités v, s et u étant sous-entendues, on sait que la pyramide, sixième d'un cube, a pour mesure $\frac{1}{3}bh$; donc aussi *le volume de toute pyramide et de tout cône a pour mesure* $\frac{1}{3}bh$. — On voit que l'axiome de généralisation abrège beaucoup la théorie du mesurage des pyramides et des cônes; et l'on a vu plus haut que la méthode infinitésimale, plus claire, donne à-peu-près le même degré d'abréviation.

V. L'axiome de généralisation fait aussi passer immédiatement des expressions du volume et de la surface qu'engendrent tout triangle isocèle et sa base, tournant autour d'un axe extérieur dans le même plan, aux expressions du volume et de la surface de révolution engendrés par le secteur circulaire et son arc. Mais comme la théorie infinitésimale, plus claire et tout aussi simple, conduit directement à ces deux dernières expressions, ainsi qu'à plusieurs autres dans les corps ronds, nous terminons ici les applications de l'axiome ci-dessus. (On peut consulter le Traité de Géométrie élémentaire et le Complément de Trigonométrie).

Trigonométrie et Géométrie analytique.

Position d'un point inconnu. Les applications de l'Algèbre à la Géométrie exigent aussi le calcul des différents symboles et plus spécialement celui des symboles négatifs et imaginaires; lesquels désignent des *impossibilités relatives* ou *absolues*, suivant qu'ils peuvent ou non s'interpréter. Or, dans la Trigonométrie, comme dans la Géométrie analytique, le premier problème général à résoudre est de *trouver la position d'un point inconnu sur une ligne tracée.*

Pour cela, on prend un point fixe O sur cette ligne, *droite* ou *circulaire*, et l'on calcule la longueur x, mesurant sur la ligne la distance du point fixe O au point cherché. Or, la généralité complète de la formule résultante dépend essentiellement du principe fondamental que voici :

Principe I. *Lorsque des longueurs sont mesurées sur une même ligne, droite ou circulaire, à partir d'un même point* O ; *les longueurs mesurées dans un sens étant positives, celles mesurées dans le sens opposé sont négatives ; et cela quand même la ligne tournerait autour du point fixe* O.

Bien que ce principe, très-important, se vérifie dans les problèmes de géométrie numérique, quelques auteurs pensent néanmoins qu'*on ne peut le démontrer*, et ils le regardent *comme étant un fait de pure convention*. Cependant, en posant cette convention ou en appréciant ce fait, ils ont dû procéder logiquement ; et s'ils avaient approfondi les motifs qui les ont guidés, il en serait résulté la démonstration du principe proposé.

En effet, lorsque la longueur x ou $+x$ est mesurée dans un sens de la ligne, pourquoi, lorsqu'elle est mesurée dans le sens opposé, devient-elle $-x$ ou négative? C'est évidemment parce qu'elle diminue alors ce qu'elle augmentait d'abord ; x augmentait donc une certaine longueur m (située du côté opposé du point O, et partant de ce point, aussi bien que x) pour avoir la longueur v. Ainsi, outre les équations du problème, celui-ci en admet toujours une autre, le plus souvent *implicite* ou *sous-entendue*, savoir : $v=m+x$; laquelle devient $v=m-x$ lorsque la longueur x est mesurée en sens opposé. Donc enfin *chaque longueur mesurée en sens contraire doit devenir négative.* Le principe est donc ainsi démontré clairement et complètement.

Il en résulte qu'en changeant x en $-x$ dans la formule proposée, on obtient la formule pour le cas où la longueur x est mesurée en sens contraire, sur la même ligne et à partir du même point. Cela généralise et simplifie singulièrement les théories, puisque pour avoir la nouvelle formule, on est ainsi dispensé de recommencer les calculs et les raisonnements qui ont fourni la formule proposée. — Par exemple, les formules trigonométriques, calculées pour des arcs moindres chacun que 90°, s'appliquent à des arcs plus grands, pourvu qu'on y donne le signe — à chacune des longueurs mesurées dans le sens contraire à celui considéré d'abord ;

et telles sont les formules, expressions de $\sin(a+b)$ et de $\cos(a+b)$ où l'on a d'abord $a+b<90°$.

Principe II. Réciproquement, *les longueurs négatives doivent être mesurées en sens contraire, sur la même ligne, droite ou circulaire, et à partir du même point fixe* O, *lors même que la ligne tournerait autour de ce point.*

Car la longueur x étant négative, elle diminue nécessairement ce qu'elle augmentait; c'est-à-dire que l'équation implicite $v=m+x$ devient $v=m-x$, où x est mesurée en sens opposé à celui considéré d'abord. Donc *chaque longueur négative doit se mesurer en sens contraire;* ce qu'il fallait démontrer.

Ce second principe répand un grand jour sur l'interprétation des longueurs négatives. Car supposons qu'en résolvant le problème où $v=m+x$, on trouve $x=-4$, par exemple. Dans ce cas, le problème proposé est impossible, puisque pour calculer la longueur x il faut soustraire 4 de rien, soustraction inexécutable. Mais cette impossibilité est seulement relative à l'hypothèse que la longueur x soit mesurée sur la ligne dans le sens proposé; car la valeur -4 de x étant négative, on doit la mesurer en sens contraire, comme on vient de le démontrer. De sorte que *pour énoncer le problème résolu par la valeur négative, abstraction faite du signe —, il suffit de mesurer cette valeur dans le sens opposé à celui que l'on a considéré d'abord.* Cela dispense de recommencer les raisonnements, les constructions et les calculs déjà effectués.

Il peut se faire néanmoins que la valeur négative n'indique pas un changement de sens pour l'inconnue; et cela arrive quand le signe — de x provient du changement de signes et de sens de quelques nombres donnés. Dans ce cas, *pour savoir quels sont ces derniers nombres, il suffit de changer* x *en* —x *dans les équations qui ont fourni la valeur négative et d'interpréter les nouvelles équations.* — Car changer x en $-x$ dans les équations proposées, c'est changer x en $-x$ dans toutes les équations qui s'en déduisent, et par conséquent dans la dernière $x=-4$; laquelle devient $-x=-4$ ou $x=4$; valeur possible. — Tel est le procédé le plus général pour interpréter les symboles négatifs.

Lignes trigonométriques. I. On connaît le *sens positif* et le *sens négatif* de chacune des lignes trigonométriques, savoir : *sinus, cosinus* (distance du centre au pied du sinus), *tangente, sécante, cotangente* et *cosécante*, sans compter l'*arc* circulaire et son *rayon* R.

Toutes ces lignes sont mesurées chacune sur une ligne fixe et à partir d'un point donné, à l'exception de la sécante et de la cosécante, pour lesquelles les droites qui les contiennent sont mobiles autour du centre fixe.

II. Comme les *relations* entre lignes trigonométriques proviennent de *proportions*, et qu'on peut toujours rendre *numérique* chaque proportion en divisant les deux termes de chaque rapport par l'unité de même espèce que ces deux termes, ou plutôt en supposant les divisions faites par le diviseur *sous-entendu*, ce qui ne change point les valeurs des deux rapports, et ne détruit pas leur égalité ou la proportion ; on voit pourquoi toutes les lignes trigonométriques sont toujours supposées évaluées en nombres abstraits, d'après la même unité linéaire u sous-entendue : c'est afin de pouvoir soumettre ces lignes au calcul.

III. Le rayon tabulaire R a pour mesure *dix billions* ou 10^{10} ; mais ordinairement, pour simplifier, on suppose le rayon du cercle égal à l'unité linéaire u. De sorte que la mesure ou la valeur numérique de ce rayon est $1 = u : u$. Dans ce cas, toutes les lignes trigonométriques sont évaluées numériquement en parties du rayon, et 2π exprime la longueur de la circonférence.

IV. Les applications de la trigonométrie sur le terrain exigent que les angles soient évalués en degrés, minutes et secondes, aussi bien que les arcs qui les mesurent. Or, un arc étant exprimé en degrés, minutes et secondes, on en calculera facilement la longueur en unités rectilignes à l'aide de l'équation $360° = 2\pi$ ou de $360° = 2\pi r$, si r est le rayon donné.

Discussions des valeurs. Maintenant, supposons que l'arc x, de rayon 1, croisse par *infiniment petits*, depuis 0 jusqu'à 180°. Dans ce cas, il est clair que $\sin x$ croîtra de la même manière, depuis zéro jusqu'à son maximum 1, répondant à $x = 90°$, puis décroîtra depuis 1 jusqu'à 0. D'ailleurs on démontre qu'on a toujours $\sin(180° - x) = \sin x$.

De même, $\cos x$ décroîtra par infiniment petits, depuis son *maximum* 1, en passant par l'infiniment petit positif, le néant et l'infiniment petit négatif, jusqu'à devenir -1, lorsque $x = 180°$. On a d'ailleurs toujours $\cos(180° - x) = -\cos x$.

Pour l'arc $x < 90°$, les triangles semblables donnent

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ et } \operatorname{séc} x = \frac{1}{\cos x}.$$

Ces formules sont générales, c'est-à-dire que les signes et les valeurs des tangentes et des sécantes sont déterminés par les signes et les valeurs tant des sinus que des cosinus.

En effet, l'arc x croissant par infiniment petits, depuis 0 jusqu'à 180°, la tangente et la sécante croissent de la même manière, depuis 0 et 1, en passant toutes les deux par l'infini positif, la non-existence et l'infini négatif, puis décroissent négativement jusqu'à $\operatorname{tang} 180° = -0$ et $\operatorname{séc} 180° = -1$. D'ailleurs on a toujours

$$\operatorname{tang}(180° - x) = -\operatorname{tg} x \text{ et } \operatorname{séc}(180° - x) = -\operatorname{séc} x.$$

Supposons $x = 90° - i$, l'arc i étant infiniment petit; on aura $\sin x = \cos i$ et $\cos x = \sin i$. Le sinus étant plus petit que l'arc, il est clair que $\sin i$ est infiniment petit avec i, tandis que $\cos i$ est un nombre fini, moindre que l'unité. Et comme le quotient d'un nombre fini par un nombre infiniment petit est un nombre infiniment grand, on voit que si $x = 90° - i$, les longueurs de $\operatorname{tang} x$ et de $\operatorname{séc} x$ sont infinies; leur point de rencontre est donc situé à l'infini : c'est le sommet de l'angle infiniment petit compris par ces deux droites, vu que cet angle est égal à celui mesuré par l'arc i infiniment petit.

Par définition, la tangente et la sécante sont terminées à leur point de rencontre. Mais pour $x = 90°$, ces deux lignes sont parallèles et ne se rencontrent jamais, pas même à l'infini; elles cessent donc alors d'exister; et voilà pourquoi alors leurs longueurs sont exprimées par le symbole de non-existence. Car ayant $\sin 90° = 1$ et $\cos 90° = 0$, il vient $\operatorname{tg} 90° = \operatorname{séc} 90° = \frac{1}{0}$.

On démontrerait de même la généralité complète des expressions de la cotangente et de la cosécante, aussi bien que de toutes les formules trigonométriques, calculées pour les arcs moindres chacun que 90°. — On sait d'ailleurs que le sinus, le cosinus, la tangente, etc. sont des *fonctions périodiques* de l'arc x.

Usage du symbole $\frac{1}{0}$. Dans la Géométrie analytique, le symbole de non-existence 1 sur 0 est nécessaire, soit pour trouver dans le plan la condition du *parallélisme* de deux droites, dont on a les équations, soit pour passer de l'équation de l'*ellipse* à celle de la *parabole*, ou de l'équation de l'*ellipsoïde* à celle du *paraboloïde elliptique*.

Dans le second cas, l'origine des coordonnées rectangulaires étant placée au sommet négatif, extrémité du grand axe $2a$, et l'axe des x dirigé suivant ce dernier; l'équation de l'ellipse, où $2b$ désigne le petit axe, devient

$$a^2y^2 = 2ab^2x - b^2x^2.$$

Regardons comme *constante* la distance $\frac{1}{2}p$ de l'origine au *foyer* voisin de l'ellipse : on aura donc

$$a - \sqrt{(a^2 - b^2)} = \tfrac{1}{2}p; \text{ d'où } b^2 = ap - \tfrac{1}{4}p^2.$$

Substituant cette valeur de b^2, l'équation de l'ellipse devient

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}[x^2 + \tfrac{1}{2}px - px^2 : 4a].$$

Or, si p et x restent constants, mais que a augmente de plus en plus, les termes divisés par a deviendront de plus en plus petits. On aura donc une suite d'ellipses dont les grands axes seront différents, mais qui auront toutes le même foyer et le même sommet voisin. Ces ellipses approchent de plus en plus de la parabole $y'^2 = 2px$, sans pouvoir jamais coïncider avec elle; car si a est *infini*, y'^2 surpasse y^2 d'un nombre *infiniment petit*, et l'on n'aura jamais $y' = y$. Cependant comme un nombre infiniment petit se néglige à l'égard des nombres finis, on peut dire, avec une grande approximation, que la *parabole est une ellipse dont le grand axe est infini.*

Pour avoir exactement $y' = y$, il faut que $a = \frac{1}{0}$; c'est-à-dire il faut que l'ellipse cesse d'exister. Ainsi dans la parabole, la distance a du centre au sommet n'existe pas, comme étant exprimée par $\frac{1}{0}$; *la parabole n'a donc pas de centre ni de second foyer.*

Usage du symbole $\sqrt{-1}$. Le calcul des symboles *imaginaires* fait passer immédiatement de l'équation de l'*ellipse* à celle de l'*hyperbole*, et conduit à plusieurs propriétés de cette dernière courbe. — Considérons d'abord l'équation de l'hyperbole rapportée à ses *axes principaux*, lesquels se coupent au *centre* et à angles droits, savoir :

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2.$$

Soit d un demi-diamètre réel et (x, y) son extrémité sur la courbe : on a donc

$$x^2 + y^2 = d^2.$$

Éliminant successivement x et y entre cette équation et la précédente, on trouve

$$b^2d^2 = a^2b^2 + (a^2 + b^2)y^2,$$
$$a^2d^2 = (a^2 + b^2)x^2 - a^2b^2.$$

Par la première de ces deux équations, il est évident que le *minimum* de d répond à $y=0$ et qu'il est $d=a$ ou $2d=2a$. Ainsi le *premier axe de l'hyperbole est le plus petit de tous ses diamètres réels.* (Le plus grand diamètre réel est infini).

Et comme le reste diminue avec le nombre dont on soustrait, lorsque le nombre à soustraire reste invariable, on voit, par la seconde équation précédente, que le *minimum* de d répond à $x=0$ et que ce minimum devient $d=b\sqrt{-1}$ ou $2d=2b\sqrt{-1}$. *Le second axe de l'hyperbole est donc le plus petit de tous ses diamètres imaginaires ou non-transverses.*

Pour vérifier ce dernier cas, on observe que l'extrémité (x, y) du demi-diamètre imaginaire d n'appartient pas à l'hyperbole et que c'est un point imaginaire pour cette courbe; lequel y est alors désigné par $(x\sqrt{-1}, y\sqrt{-1})$. L'équation de l'hyperbole devient donc, pour ce point,

$$a^2y^2-b^2x^2=a^2b^2.$$

Éliminant y entre cette équation et $x^2+y^2=d^2$, on a

$$a^2d^2=a^2b^2+(a^2+b^2)x^2.$$

On voit que le *minimum* du diamètre imaginaire $2d$ répond à $x=0$ et qu'il est le second axe $2b$: c'est l'axe réel de l'hyperbole dont $2a$ est l'axe imaginaire.

Observons d'ailleurs que $ay'=\pm bx$ sont *les équations de deux diamètres imaginaires infinis.* — En effet, ayant, pour ces deux diamètres, l'équation unique : $a^2y'^2-b^2x^2=0$; supposons que l'abscisse x soit la même dans cette équation et celle de l'hyperbole : on aura donc

$$y^2-y'^2=b^2 \text{ et } y'-y=\frac{b^2}{y'+y}.$$

L'abscisse x commune devenant de plus en plus grande, il en est de même des ordonnées y' et y, aussi bien que de leur somme $y'+y$; donc, au contraire, la différence $y'-y$ devient de plus en plus petite. Si donc x devient infiniment grande, il en sera de même de y' et y, d'où $y'+y=\infty$; donc alors la différence $y'-y$ sera *infiniment petite* et jamais rigoureusement *nulle*. Car si l'on avait $y'-y=0$, on aurait aussi $b=0$; chose absurde. Ainsi les deux diamètres $ay'=\pm bx$ s'approchent continuellement de l'hyperbole, sans jamais pouvoir la rencontrer, pas même à l'infini; ils en sont donc à la fois les deux seuls diamètres imaginaires infinis et les *asymptotes*.

Remarque. On sait que le calcul des imaginaires du second degré fait passer immédiatement de l'équation de l'*ellipsoïde*, rapportée à ses axes principaux, aux équations de l'*hyperboloïde à une nappe* et de l'*hyperboloïde à deux nappes*, et fait connaître, dans chacune des deux dernières surfaces, le plus grand et le plus petit diamètre, soit réel, soit imaginaire. Il en résulte ensuite les deux *cônes asymptotes;* puis le calcul des axes principaux dans les trois surfaces numériques du second ordre, ayant un centre; calcul qui devient le plus simple possible à l'aide de la théorie des *maximums* et des *minimums* du second degré.

Lignes infinitésimales. Pour calculer les lignes trigonométriques *infinitésimales*, soient d'abord $AB=a$ et $CD=b$ les côtés parallèles de deux polygones réguliers du même nombre n de sommets, l'un inscrit et l'autre circonscrit au cercle de rayon $OA=r$; soit $AMB=2x$ l'arc soutendu par AB et touché en M par CD, le point M étant le milieu commun aux deux lignes. Les tangentes aux extrémités A et B de $2x$ vont se couper au point N du rayon OM prolongé, ce rayon étant perpendiculaire au milieu I de AB, et l'on a $AN=BN$. Il est d'ailleurs évident que $2x<2AN$ et que la corde $AM<x$.

Cela posé, 1° toutes les lignes étant réduites en nombres abstraits, d'après la même unité linéaire u, *sous-entendue* comme conséquent de chaque rapport, et la corde AM étant moyenne proportionnelle entre la *flèche* IM et le diamètre $2r$, il est clair qu'on a $2r\times IM=(AM)^2$. Or, $AM<x$ et $OI=r-IM$; donc

$$IM<\frac{x^2}{2r} \text{ et } OI=r-<\frac{x^2}{2r}.$$

Les deux triangles équiangles OAN et OAI donnent

$$AN:\tfrac{1}{2}a::r:r-IM;\ \text{d'où}\ 2AN(r-IM)=ar.$$

Substituant à $2AN$ la valeur plus petite $2x$, et à IM la valeur plus grande x^2 sur $2r$, ce qui rend plus petit le facteur $r-IM$, il est clair qu'on aura

$$2x\left(r-\frac{x^2}{2r}\right)=ar-y;\ \text{d'où}\ a=2x-<\frac{x^3}{r^2}.$$

Soit p le périmètre du polygone régulier inscrit, c la longueur de la circonférence et p' le contour du polygone régulier circonscrit, d'où $p'>c$ et $p<c$; il est clair que $p=an$, $c=2nx$ et

$p'=bn$. On voit d'abord qu'ayant $bn>2nx$, on a aussi $b>2x$ et $\mathrm{CM}>x$. On voit ensuite qu'on aura toujours

$$p=c-<\tfrac{1}{2}c\left(\frac{x}{r}\right)^2,\ \text{ou}\ p=c-<\frac{1}{n^2}\times\tfrac{1}{2}c\pi^2.$$

Maintenant, si l'on suppose le nombre n de sommets infiniment grand, les arcs $2x$ et x sont alors infiniment petits; et, s'ils ne sont pas devenus *éléments rectilignes* par l'hypothèse de n infini, ils ne coïncident pas alors avec leurs cordes, elles-mêmes infiniment petites. Dans ce cas, la flèche IM est un infiniment petit du second ordre : elle est tellement petite que, répétée le nombre infini n de fois, le produit est moindre que l'infiniment petit cx sur $4r$, *nul* à l'égard des nombres finis, en vertu du principe infinitésimal; donc à plus forte raison doit-on regarder la flèche comme absolument nulle : cela donne $\mathrm{OI}=\mathrm{OM}$ et fait coïncider a et b avec $2x$, p et p' avec c. D'ailleurs, la longueur c ne surpasse p que d'un infiniment petit du second ordre, nul dans le résultat final des calculs. On voit donc que *l'on peut toujours, sans aucune erreur finale, regarder le cercle comme un polygone régulier.* — C'est déjà ce qu'on a démontré plus haut (p 71).

2° Les définitions des lignes trigonométriques font voir que $\mathrm{MC}=\tang x$, $\mathrm{OI}=\cos x$ et $\mathrm{AI}=\sin x=\frac{1}{2}a$. On aura donc toujours $\sin x<x$, $\cos x<r$ et $\tang x>x$. Mais, à cause de $\frac{1}{2}a=\sin x$,

on a $$\sin x=x-<\frac{x^3}{2r^2}\ \text{et}\ \cos x=r-<\frac{x^2}{2r}.$$

De là, si le nombre n de sommets est infini, les arcs $2x$ et x sont infiniment petits, aussi bien que les côtés a et b, tandis que x^2 et x^3 sont des infiniment petits du second ordre et du troisième. Or, on vient de voir que dans ce cas on peut supposer, sans aucune erreur finale appréciable, la flèche IM rigoureusement nulle : cela fait coïncider a et b avec $2x$, MC avec x, OI avec r et $\sin x$ avec x. On a donc alors

$$\cos x=r,\ \sin x=x\ \text{et}\ \tang x=x.$$

Ainsi *le cosinus d'un arc infiniment petit est égal au rayon, tandis que le sinus et la tangente sont égaux à l'arc lui-même :* ils coïncident avec lui.

Non-seulement l'erreur finale, due à chacune de ces propositions, est inappréciable par sa petitesse et doit se négliger; mais souvent elle se compense avec une autre erreur finale simultanée, et le résultat final est rigoureusement exact, d'après la règle des variables.

3° Enfin, l'arc x étant infiniment petit, on a

$$\text{séc}\,x=1,\ \cot x=\infty \quad \text{et} \quad \text{coséc}\,x=\infty\,.$$

Rectification de la circonférence. Soit d'abord x un arc circulaire moindre que le quadrant de rayon 1 numérique; soit s la mesure de son sinus, d'où $\sin x=s$: il s'agit d'exprimer la mesure de l'arc x en fonction de s.

Or, la figure étant tracée, concevons $\sin x$ divisé en un nombre infini n de parties égales à z par des perpendiculaires : on a donc $s=nz$ et ces perpendiculaires divisent l'arc x en n parties inégales, mais infiniment petites. Soit y la v ième de ces parties de x, à partir de l'origine de ce dernier : l'arc qui est la somme des v parties a donc vz pour sinus et $\sqrt{(1-v^2z^2)}$ pour cosinus. De plus, l'arc infiniment petit y, coïncidant avec sa corde, est l'hypoténuse du triangle rectangle dans lequel y et z sont respectivement perpendiculaires à l'hypoténuse 1 et au côté $\sqrt{(1-v^2z^2)}$ d'un second triangle, équiangle au premier; car le rayon 1 mené à l'extrémité de y, est perpendiculaire à la tangente en ce point et par suite à y, que l'on peut, sans erreur finale, regarder comme partie infiniment petite de cette tangente indéfinie. Comparant donc les côtés homologues des deux triangles, on a

$$\sqrt{(1-v^2z^2)}:z::1:y\,; \quad \text{d'où} \quad y=z(1-v^2z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Développant d'après la *série binomiale*, on trouve

$$y=z+\tfrac{1}{2}v^2z^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}v^4z^5+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}v^6z^7+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}v^8z^9+\text{etc.}$$

Prenant successivement $v=1, 2, 3, 4, \ldots, n$, puis ajoutant membre à membre les n égalités résultantes; observant d'ailleurs que l'arc x est la somme de tous les arcs partiels y, et que n infini donne $\int n^2=\frac{1}{3}n^3$, $\int n^4=\frac{1}{5}n^5$, $\int n^6=\frac{1}{7}n^7$, etc. Réduisant enfin par $nz=s$, on trouve

$$x=s+\tfrac{1}{2}\frac{s^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{s^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{s^7}{7}+\frac{1\cdot3\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\frac{s^9}{9}+\text{etc.}$$

D'après le principe infinitésimal, cette série remarquable exprime exactement la valeur numérique de l'arc x, de rayon 1 numérique, au moyen de la mesure s du sinus de cet arc.

Si $s=\frac{1}{2}$, d'où $x=30°=\frac{1}{6}\pi$, la série qui en résulte est assez convergente, puisque la somme de tous les termes qui suivent le

10^{me} est moindre que 1 sur $630 \cdot 2^{19}$, c'est-à-dire moindre que l'unité décimale du 8^{me} ordre. De sorte que les dix premiers termes donnent, avec huit décimales exactes,

$$x = 0{,}52359877\ ;\ \text{d'où}\ 6x\ \text{ou}\ \pi = 3{,}1415926.$$

On a donc ainsi, avec sept décimales exactes, le rapport π de toute circonférence c à son diamètre $2r$; d'où résulte, pour mesurer ou *rectifier* cette courbe, la formule $c = 2\pi r$. (La série ci-dessus, expression de x en s, se trouve aisément par la méthode des coëfficients indéterminés, comme on sait).

Observons d'ailleurs que l'erreur commise en prenant n^{m+1} sur $(m+1)$, pour la valeur de $\int n^m$, est moindre que n^m (p. 43). D'après cela, l'erreur totale commise sur la série qui exprime l'arc x est moindre que zs sur $(1-s^2)$, nombre infiniment petit avec z et *nul* à l'égard des nombres finis.

Autre mode de rectification. Soit t la tangente d'un arc circulaire quelconque x, moindre que le quadrant et dont le rayon ait 1 pour mesure : il s'agit d'abord d'exprimer la mesure de x en fonction de la valeur de t.

Imaginons que t soit divisée en un nombre infini n de parties égales à z et infiniment petites, d'où $nz = t$: les droites joignant les points de division au centre divisent l'arc x en n parties inégales, mais infiniment petites. Soit p la $(v+1)$ ième de ces parties et soit y la somme des v précédentes, à partir de l'origine de t : donc $\tang y = vz$ et $\tang(y+p) = (v+1)z$. Développant $\tang(y+p)$ en observant que l'arc p étant infiniment petit, on a $\tang p = p$; puis substituant cette valeur et celle de $\tang y$, on trouve

$$\frac{vz+p}{1-vpz} = (v+1)z\ ;\ \text{d'où}\ p = \frac{z}{1+v^2z^2+vz^2}.$$

Posant $h = v^2 + v$, la valeur de p est z sur $(1+hz^2)$, génératrice d'une progression géométrique illimitée, et l'on a

$$p = z - hz^3 + h^2z^5 - h^3z^7 + h^4z^9 - \text{etc.}$$

Or, dans ce v ième terme p de la série dont on cherche la somme x des n premiers termes, on a $h = v^2 + v$; et l'on sait (p. 55) que le premier terme de chacune des puissances croissantes 1, 2, 3, 4, ... de h fournit seul un terme au résultat final des calculs. On doit donc écrire simplement $h = v^2$; d'où il vient

$$p = z - v^2z^3 + v^4z^5 - v^6z^7 + v^8z^9 - \text{etc.}$$

Prenant donc successivement $v=1,2,3,4,\ldots,n$ dans cette dernière identité; ajoutant membre à membre les n égalités résultantes, puis observant que $\int p=x$ et que n étant infini, on a $\int n^2=\frac{1}{3}n^3$, $\int n^4=\frac{1}{5}n^5$, etc. Réduisant d'après $nz=t$, on trouve finalement

$$x=t-\tfrac{1}{3}t^3+\tfrac{1}{5}t^5-\tfrac{1}{7}t^7+\tfrac{1}{9}t^9-\tfrac{1}{11}t^{11}+\text{etc.}$$

La combinaison de la méthode infinitésimale avec la méthode des *coëfficients indéterminés*, aidée si l'on veut de la méthode des *dérivées*, conduit facilement à la formule précédente. Cette formule fournit, comme on sait, une double série très-convergente, servant à calculer avec autant de décimales exactes qu'on veut le rapport π de toute circonférence à son diamètre. (Voyez à ce sujet le Complément de Trigonométrie).

Principe de rectification. Pour démontrer le principe de la *rectification* des courbes planes, à l'aide du calcul infinitésimal, soit $AMB=a$ un arc convexe très-petit de la courbe proposée; soit c sa corde et b la ligne brisée ACB, formée par les tangentes AC et BC aux points A et B de la courbe : il est clair d'abord que $c<a$ et $a<b$. Soit d'ailleurs v l'arc circulaire, de rayon 1, qui mesure le plus grand des deux angles A et B, dans le triangle ABC. Il est facile de voir que toutes les lignes étant numériques, on a

$$c=AC\cdot\cos A+BC\cdot\cos B.$$

Si donc $A<B$, d'où $\cos B=\cos v$ et $\cos A>\cos v$, il vient

$$c>(AC+BC)\cos v,\ \text{ou}\ c>b\cos v\ \text{et}\ c>a\cos v.$$

Actuellement, supposons que l'arc a soit infiniment petit : si alors il n'est pas un élément rectiligne, il ne coïncide pas avec sa corde c plus petite. Mais dans ce cas les angles A et B étant infiniment petits chacun, nécessairement, la corde c, la longueur b et l'arc circulaire v sont des nombres infiniment petits. Or v étant infiniment petit, on a, sans erreur appréciable,

$$\sin v=v\ \text{et}\ \sin^2\tfrac{1}{2}v=\tfrac{1}{4}v^2.$$

D'ailleurs, puisque $\cos v=1-2\sin^2\frac{1}{2}v$, on a $\cos v=1-\frac{1}{2}v^2$; il vient donc

$$c>a-\tfrac{1}{2}av^2;\ \text{d'où}\ a=c+<\tfrac{1}{2}av^2.$$

Et comme a, c, v sont infiniment petits chacun, on voit que *l'arc infiniment petit de toute courbe plane ne surpasse point sa corde d'un infiniment petit du troisième ordre.*

Le triangle ABC étant lui-même infiniment petit, il est facile de voir que sa hauteur CMI est moindre que l'infiniment petit du second ordre $\frac{1}{2}av$, *nul* à l'égard de l'infiniment petit du premier a, c ou b. On peut donc, sans aucune erreur finale appréciable, regarder a et b comme coïncidant avec c. Ainsi quand on désigne par a une portion infiniment petite, et par conséquent invisible, de toute courbe plane, on ignore si a est un *arc* ou bien un *élément;* et l'on vient d'établir que *cette portion peut toujours, sans erreur finale appréciable, être supposée élément rectiligne, situé sur la tangente indefinie à l'un de ses points.* C'est ce qu'il importe de bien remarquer pour certaines déductions logiques.

Soit P une portion *finie* de toute courbe plane : P renferme donc une infinité d'arcs infiniment petits, tels que a, dont les cordes forment la ligne brisée Q, *inscrite* dans P. Si donc v désigne le plus grand de tous les arcs circulaires, en nombre infini, on aura

$$P = Q + < \tfrac{1}{2}Pv^2.$$

Ici la règle des variables n'est pas applicable, parce que v et Q varient avec le nombre infini d'arcs qui composent P. Mais comme P ne surpasse Q que d'un nombre infiniment petit du second ordre, moindre que $\frac{1}{2}Pv^2$ et toujours nul à l'égard du nombre fini P, on voit que l'on peut toujours, *sans erreur finale appréciable*, regarder la ligne brisée Q comme coïncidant rigoureusement avec la courbe P. Ainsi, comme on l'a déjà établi plus haut, par la description, *toute courbe plane finie n'est réellement qu'une ligne brisée d'une infinité de côtés infiniment petits.*

Tel est le principe de *rectification :* on en déduit facilement l'expression de la *courbure* en chaque point de la circonférence et de toute courbe plane. (Voyez la Géométrie analytique).

Définitions. On sait déjà que *rectifier* une courbe, c'est en mesurer la longueur et l'exprimer en unités rectilignes. De même, exprimer une aire en un nombre de carrés égaux à l'unité superficielle, c'est mesurer cette aire et en opérer la *quadrature.* Enfin, mesurer un volume et l'exprimer en un nombre de cubes égaux à l'unité, c'est opérer la *cubature* de ce volume.

Mesurage des Aires et des Volumes.

Méthode de mesurage. Le plus souvent on suppose que la figure F, dont on veut calculer l'expression de la mesure, soit divisée en une infinité n de *tranches*, toutes de même épaisseur infiniment petite, par des droites ou des plans parallèles; puis on regarde la

m ième de ces tranches comme un *parallélogramme*, un *prisme* ou un *cylindre*. Egalant alors la m ième tranche T à l'expression de sa mesure; puis ajoutant entre elles les n égalités qui résultent de l'expression de T en y faisant successivement $m = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$ et réduisant, d'après les données et la somme des puissances, à exposant constant, entier ou fractionnaire, des n premiers nombres entiers, n étant infini, on aura l'expression cherchée de la mesure de la figure F proposée.

De cette manière, on commet, sur la grandeur de T et sur sa mesure, deux erreurs au moins infiniment petites du second ordre; lesquelles deviennent infiniment petites du premier dans l'équation finale, et s'y compensent ou en disparaissent en vertu de la règle des variables. De sorte que le résultat final est rigoureusement exact.

Telle est la *méthode infinitésimale* dans le mesurage des aires planes *mixtes* ou *curvilignes*, et des volumes terminés par des surfaces *mixtes* ou *courbes*. On en déduit, par la comparaison de l'ellipse à la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre, que le segment elliptique est au segment circulaire qui lui répond, comme le petit axe est au grand. Et de là résulte l'expression de l'aire de l'ellipse en fonction de ses deux axes ou de ses deux diamètres conjugués. — Et remarquons que les deux segments sont les *limites* de deux polygones inscrits du même nombre de côtés.

Parabole. Soit $ax = y^2$ l'équation de la parabole ordinaire, rapportée à ses axes conjugués comprenant l'angle θ; soient h et k l'ordonnée et l'abscisse du point quelconque (k, h) de la courbe, d'où $ak = h^2$. Le parallélogramme $hk \sin\theta$ est donc divisé par la parabole en deux *secteurs* S et S', le premier *extérieur* et ayant le côté h sur l'axe des y.

Concevons ce côté divisé en un nombre infini n de parties égales à p par des parallèles à l'axe des x : il est clair que $h = np$ et que ces parallèles divisent S en n tranches, toutes de même épaisseur $p \sin\theta$ infiniment petite. Soit T la m ième de ces tranches, à partir de l'origine, et soit b la plus petite de ses deux bases parallèles. On peut toujours, sans aucune erreur finale, regarder T comme un parallélogramme de base b et de hauteur $p \sin\theta$; de sorte qu'en sous-entendant toujours les unités s et u, on aura, à cause de $ab = m^2p^2$,

$$T = bp \sin\theta \text{ et } aT = m^2p^3 \sin\theta.$$

Cette équation est *imparfaite*, a dit Carnot; mais elle est rigoureusement exacte, si l'on y suppose écrits les termes variables qui doivent en disparaître à la fin. Il en résulte successivement

$$aS = p^3 \sin\theta \int n^2 = \tfrac{1}{3} p^3 n^3 \sin\theta = \tfrac{1}{3} h^3 \sin\theta = \tfrac{1}{3} ahk \sin\theta,$$

et $\qquad S = \frac{1}{3} hk \sin\theta$; d'où $S' = \frac{2}{3} hk \sin\theta$.

Soit S_1 le *segment* parabolique dont $c = 2h$ est la corde, d'où $S_1 = 2S'$, et soit P l'aire du parallélogramme *circonscrit* à S_1 : il est clair que $P = ck \sin\theta$ et que par suite $S_1 = \frac{2}{3}P$. Et comme on peut toujours construire le carré équivalent à $\frac{2}{3}P$, on voit pourquoi la parabole est dite *courbe carrable*.

Paraboloïdes de révolution. Si les coordonnées sont rectangulaires, d'où $\sin\theta = 1$, la méthode précédente conduit aisément aux expressions des mesures des deux *paraboloïdes de révolution* engendrés : l'un par le secteur S autour de son côté h sur l'axe des y, et l'autre par le secteur S' autour de son côté k sur l'axe des x. Il en résulte que le premier, vol. S, *est le cinquième du cylindre circulaire droit circonscrit;* tandis que le second, vol. S', *vaut la moitié du cylindre circonscrit, droit et circulaire.*

Segment d'hyperbole. Soit $xy = h^2$ l'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes, axes des x et des y comprenant l'angle θ. Soit S l'aire du *segment* compris entre la courbe, l'axe des x et les deux ordonnées répondant à $x = h$ et à $x = h + k$.

D'abord les ordonnées, depuis $x = h$ jusqu'à $x = h + k$, divisent k en un nombre infini n de parties égales à p et infiniment petites, d'où $k = np$; elles divisent donc aussi S en n tranches dont la m ième T, à partir de $x = h$, peut être considérée, sans aucune erreur finale, comme un parallélogramme de hauteur $p \sin\theta$ infiniment petite et de base $y = h^2 : (h + mp)$; d'où en posant $ah = 1$, il vient $y = h : (1 + amp)$. La base y est donc la génératrice d'une progression géométrique décroissante à l'infini, et l'on a

$$T = h \sin\theta \,(p - amp^2 + a^2m^2p^3 - a^3m^3p^4 + \text{etc.})$$

Procédant comme plus haut et ayant égard à la plus simple des séries logarithmiques, on trouvera

$$S = \frac{h^2 \sin\theta}{le} \times l\left(\frac{h+k}{h}\right) = \frac{h^2 \sin\theta}{le} \times l\left(\frac{x}{h}\right).$$

Volume de révolution. Si l'hyperbole est équilatère, d'où $\sin\theta = 1$, le procédé conduit aisément à l'expression de la mesure du volume engendré par le segment S tournant autour de k : on trouve finalement

$$\text{vol. S} = \pi h^3 \left(1 - \frac{h}{x}\right).$$

Ce qui est remarquable ici, c'est que vol. S est *fini* lorsque x et S sont *infinis*. On peut expliquer ce fait singulier et le vérifier par la progression géométrique décroissante et illimitée, dont les termes sont les cylindres circulaires droits, extérieurs à vol. S, et ayant pour hauteurs respectives, sur l'axe des x, les termes de la suite illimitée : $h, 2h, 4h, 8h, 16h$, etc. Car vol. S est moindre que la somme finie $2\pi h^3$ de tous les cylindres extérieurs ; donc vol. S doit être fini lorsque S et x sont infiniment grands.

Volumes dans les surfaces du second ordre. La théorie infinitésimale conduit à calculer, avec facilité, les expressions des volumes de différents *segments* dans les cinq surfaces du second ordre, rapportées à leurs axes conjugués ; et c'est ce que nous avons établi dans le Traité de Géométrie analytique. Or, les coordonnées étant rectangulaires, on peut aisément calculer les volumes dans les *surfaces de révolution* que voici :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = \tfrac{1}{2}(y^2 + z^2),$$
$$y^2 + z^2 + 2ax - x^2 = \tfrac{1}{2}(y^2 + z^2),$$
$$(y^2 + z^2 - x^2)^2 = 4a^2x^2,$$
$$(y^2 + z^2 + ax - x^2)^4 = a^4x^4.$$

Toutes ces surfaces sont de révolution autour de l'axe des x : la première est un *ellipsoïde* dont le volume est double de celui de la sphère dont a est le rayon. — La seconde surface est un *hyperboloïde à deux nappes*, aussi bien que la troisième : seulement cette troisième équation se partage en deux autres, représentant le même hyperboloïde. — Enfin, la quatrième équation se partage en deux autres, l'une représentant un *cône droit circulaire* et l'autre un *hyperboloïde à deux nappes*.

Logarithmique. Soit $b = 10$ la base du système de logarithmes *ordinaires* : on appelle *logarithmique* la courbe plane, à coordonnées rectangulaires, représentée par l'équation

$$y = b^x;\ \text{d'où}\ x = ly.$$

Cette courbe n'a qu'une seule branche, infinie dans les deux sens, s'approchant sans cesse de l'axe des x négatifs, sans pouvoir jamais le rencontrer, pas même à l'infini. De sorte que l'axe des x négatifs est *asymptote* de la courbe.

Dans la logarithmique, la *soutangente* est constante et égale au logarithme ordinaire du nombre e. De plus, l'aire *asymptotique*, depuis $x=0$ jusqu'à $x=-\infty$, équivaut au rectangle construit sur l'unité linéaire et la soutangente le. Enfin, le volume engendré par l'aire asymptotique, tournant autour de l'axe des x négatifs, équivaut au demi-cylindre circulaire ayant la soutangente pour hauteur et l'unité linéaire pour rayon de la base.

Ce volume et l'aire S asymptotique ont des valeurs finies, bien qu'ils s'étendent à l'infini dans le sens des x négatifs. Ces résultats, quelque singuliers qu'ils paraissent, n'ont rien qui doivent faire douter de leur exactitude; car l'aire S, par exemple, est évidemment moindre que la somme d'une infinité de rectangles extérieurs, ayant chacun l'unité linéaire pour hauteur, sur l'asymptote, et dont les aires forment une progression géométrique décroissante à l'infini. Or, on sait que la génératrice de cette progression a toujours une valeur finie, ici $\frac{10}{9}$; donc à plus forte raison l'aire S doit avoir une valeur finie, ici 0,4342945.

Quadrature et cubature. Les coordonnées étant rectangulaires, considérons la surface du quatrième degré :

$$(x^2+y^2+z^2-2ax)^2=4x^2(y^2+z^2).$$

Posons d'abord $y^2+z^2=R^2$ et résolvons l'équation résultante par rapport à R : nous aurons

$$\pm R = x+\sqrt{2ax} \text{ et } \pm R=-x+\sqrt{2ax}.$$

Il est clair que x ne saurait être négative et que chaque valeur positive réelle de x, dans chacune des deux formules précédentes, donne à $\pm R$ une valeur réelle. On voit donc, à cause de $y^2+z^2=R^2$, que tout plan $x=k$, parallèle au plan des yz, donnant à R^2 deux valeurs positives réelles différentes, coupe la surface proposée suivant deux circonférences dont le centre commun est sur l'axe des x. Et parce que $z=0$ donne $y=R$, il devient évident que cette surface est composée de deux *nappes* distinctes, infinies dans le sens des x positifs, à partir de l'origine, et décrites par les révolutions, autour de l'axe des x, des deux demi-courbes *paraboliques*, sur le plan des xy, savoir :

$$\pm y=x+\sqrt{2ax} \text{ et } \pm y=-x+\sqrt{2ax}.$$

Ces deux courbes sont symétriques par rapport à l'axe des x; mais les deux branches de la seconde, partant de l'origine, où elles sont touchées par l'axe des y, se coupent au point $(2a, 0)$ de l'axe des x, et y terminent une sorte de *feuille* dont $2a$ est l'axe de symétrie. Dans cette feuille, le maximum de y est $\frac{1}{2}a$ et répond à $x = \frac{1}{2}a$.

Cela posé, soit S l'aire du *secteur* de la première courbe, depuis $x=0$ jusqu'à $x=2a$, et soit $\frac{1}{2}F$ l'aire de la demi-feuille de la seconde courbe : la théorie infinitésimale donne

$$S = \tfrac{14}{3}a^2 \text{ et } F = \tfrac{4}{3}a^2; \text{ d'où } S - \tfrac{1}{2}F = 4a^2.$$

Soit S_1 le volume de la sphère dont a est le rayon : on trouve de même que les volumes de révolution, engendrés par les aires S et $\frac{1}{2}F$ tournant autour de $2a$, sont :

$$vol.\, S = \tfrac{49}{5}S_1 \text{ et } vol.\, \tfrac{1}{2}F = \tfrac{1}{5}S_1.$$

Formules de mesurage. Soit a un arc circulaire donné, de rayon 1 numérique, et soit posé $a = np$, n étant un nombre entier infini et p un arc numérique infiniment petit; d'où $\sin p = p$ et $\cos p = 1$. Voyons comment on peut calculer les sommes, tant des sinus et des cosinus des arcs $p, 2p, 3p, 4p, \dots, np$, que des carrés, des cubes, etc. de ces sinus et de ces cosinus.

1° A cause de $\sin 2p = 2p$, on sait par la trigonométrie que :

$$2p \sin 2vp = \cos(2vp - p) - \cos(2vp + p),$$
$$2p \cos 2vp = \sin(2vp + p) - \sin(2vp - p).$$

Soient $\int \sin 2np$ et $\int \cos 2np$ les sommes respectives des sinus et des cosinus que donnent les deux identités précédentes en y posant successivement $v = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ et en ajoutant, etc. Il est clair qu'on aura

$$2p \int \sin 2np = 1 - \cos(2np + p),$$
$$2p \int \cos 2np = \sin(2np + p) - p.$$

Comme l'infiniment petit p est nul à l'égard des nombres finis, et que par suite $2np + p = 2np$, d'où $1 - \cos 2np = 2\sin^2 np$; il est clair, en changeant p en $\frac{1}{2}p$, qu'on a les deux formules où $a = np$, savoir :

$$p \int \sin np = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}a \text{ et } p \int \cos np = \sin a \dots \qquad \text{(A)}$$

2° Opérant de même sur les deux relations

$$2\sin^2 vp = 1 - \cos 2vp \text{ et } 2\cos^2 vp = 1 + \cos 2vp,$$

puis substituant $2a$ à $2np$ et la valeur de $\int \cos 2np$, on trouve, après toute réduction faite, les deux formules :

$$\left.\begin{aligned} 4p\int \sin^2 np &= 2a - \sin 2a, \\ 4p\int \cos^2 np &= 2a + \sin 2a. \end{aligned}\right\} \ldots \qquad (\mathrm{B})$$

3° Les deux formules (A) servent à calculer celles qui se déduisent, par le procédé ci-dessus, des deux relations :

$$4 \sin^3 np = 3 \sin np - \sin 3np,$$

$$4 \cos^3 np = 3 \cos np + \cos 3np.$$

Ces deux relations donnent, en effet, réductions faites :

$$\left.\begin{aligned} 6p\int \sin^3 np &= 9 \sin^2 \tfrac{1}{2} a - \sin^2 \tfrac{3}{2} a, \\ 12p\int \cos^3 np &= 9 \sin a + \sin 3a. \end{aligned}\right\} \ldots \qquad (\mathrm{C})$$

Il existe des couples de formules pour les puissances quatrièmes, cinquièmes, etc. Mais les précédentes suffisent pour opérer, avec facilité, les quadratures de certaines courbes planes représentées par des *équations polaires.*

Remarque. Nous avons établi en Géométrie (2^{me} édition) que la théorie infinitésimale et certaines formules trigonométriques suffisent pour démontrer complètement toutes les propriétés géométriques de la *cycloïde*, et entre autres que *la longueur de chaque branche de la courbe est quadruple du diamètre du cercle générateur.* Cependant le rapport de ces deux longueurs est une fraction n sur p dont les deux termes n et p sont entiers infinis ; il faut donc que le nombre infini p soit contenu 4 fois dans le nombre infini n. — La cycloïde est, comme on voit, une *courbe rectifiable ;* mais ce n'est pas une *courbe carrable*, puisque nous avons aussi démontré que *l'aire limitée par une branche et par la droite sur laquelle roule le cercle proposé, est triple de l'aire de ce cercle.*

Secteurs élémentaires. Pour calculer la mesure de tout *secteur* d'une courbe plane, rapportée à des *coordonnées polaires*, on regarde le secteur proposé comme la somme d'une infinité de *secteurs élémentaires*, généralement inégaux, mais ayant les angles égaux au pôle commun. On peut supposer, *sans aucune erreur finale*, comme on sait, que chaque secteur élémentaire est un triangle rectiligne isocèle infiniment petit. Soit donc T l'un de ces triangles, soit r l'un de ses côtés égaux et x l'arc circulaire, de rayon 1, qui mesure l'angle infiniment petit au sommet. On a, pour l'expression de l'aire T, l'équation $T = \frac{1}{2} r^2 \sin x$. Et comme l'arc x est infiniment petit, d'où $\sin x = x$, il vient

$$T = \tfrac{1}{2} r^2 x.$$

Répétons encore que cette équation conduit toujours à un résultat final rigoureusement exact. Car les deux membres sont censés renfermer chacun un infiniment petit du second ordre, qu'on se dispense d'écrire pour simplifier, sachant que chaque infiniment petit du second ordre en fournit un du premier dans l'équation finale, et que ces deux infiniment petits s'y compensent et en disparaissent nécessairement comme variables. — Appliquons maintenant l'équation qui exprime T à la quadrature de plusieurs *lemniscates*.

Lemniscate simple. Considérons la courbe polaire :

$$r^2 = a^2 \sin 2\omega.$$

Dans cette équation, a est une droite numérique constante, r le rayon vecteur numérique et ω l'arc circulaire numérique, de rayon 1, qui mesure l'angle décrit par le rayon r variable tournant autour du pôle, à partir de l'axe polaire fixe.

Faisant varier par infiniment petits l'arc ω, depuis $\omega = 0$, en passant par $\omega = 45°$ et s'arrêtant à $\omega = 90°$, le rayon vecteur r varie de même, positivement et négativement : ses valeurs partent de $r = \pm 0$, passent par le maximum $r = \pm a$ et s'arrêtent à $r = \pm 0$. De sorte que les extrémités des valeurs positives, puis des valeurs négatives de r, décrivent les deux *feuilles*, égales et opposées au pôle, d'une *Lemniscate* dont $2a$ est l'axe réel de symétrie, *incliné* de 45° sur l'axe polaire. De plus, le pôle est à la fois un point double et une double inflexion de la courbe plane résultante, dont la forme est celle du chiffre huit incliné.

Maintenant, soit F l'aire de chacune des feuilles égales de la lemniscate *simple* proposée, et cherchons l'expression de la mesure de $\frac{1}{2}$F, depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = 45° = nx$, n étant un nombre entier infini. D'abord les rayons vecteurs successifs divisent $\frac{1}{2}$F en n secteurs élémentaires dont l'angle au pôle de chacun est mesuré par l'arc circulaire x infiniment petit et de rayon 1. Ensuite, soit T le m ième de ces secteurs élémentaires, à partir de l'axe polaire, d'où alors $\omega = mx$. D'après ce qui précède et les formules (A), il est clair qu'on a successivement :

$$T = \tfrac{1}{2} r^2 x = \tfrac{1}{2} a^2 x \sin 2mx \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}F = \tfrac{1}{2} a^2 x \int \sin 2nx\,;$$

$$2x \int \sin 2nx = 2 \sin^2 nx = 1 \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}F = \tfrac{1}{4} a^2; \ \text{d'où} \ 2F = a^2.$$

Ainsi l'*aire de la lemniscate proposée a même mesure que le carré fait sur la droite* a *donnée :* c'est une courbe carrable, comme la courbe $r^2 = a^2 \sin^3 \omega$.

Remarque. On vérifie que l'aire de la lemniscate $r^2 = a^2 \sin \omega$ a pour mesure $2a^2$; tandis que la lemniscate $r^2 = a^2 \sin k\omega$, k valant $2, 3, 4, 5, \ldots$, limite une aire k fois plus petite que $2a^2$. Toutes ces lemniscates sont simples et l'on peut, comme on voit, décrire la lemniscate dont l'aire soit la moitié, le tiers, le quart,... de l'aire de la lemniscate $r^2 = a^2 \sin \omega$.

Lemniscate double. Considérons encore la courbe polaire :

$$r^2 = a^2 \sin^2 2\omega.$$

La discussion de cette équation polaire apprend qu'elle représente une *lemniscate double*, composée de quatre feuilles égales et opposées au pôle, cette courbe ayant deux axes réels de symétrie, égaux à $2a$ et inclinés chacun de $45°$, mais en sens opposés, sur l'axe polaire.

Pour calculer la mesure de l'aire A limitée par cette lemniscate double, soit $\frac{1}{2}$F l'aire de la demi-feuille, depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = 45° = \frac{1}{4}\pi = nx$, n étant infini. Les rayons vecteurs successifs divisent $\frac{1}{2}$F en n secteurs élémentaires dont l'angle au pôle est mesuré par l'arc circulaire x infiniment petit. Soit T le m ième de ces secteurs, à partir de l'axe polaire et répondant à $\omega = mx$. On a donc successivement :

$$T = \tfrac{1}{2} r^2 x = \tfrac{1}{2} a^2 x \sin^2 2mx \text{ et } \tfrac{1}{2}F = \tfrac{1}{2} a^2 x \int \sin^2 2nx\,;$$

$$8x \int \sin^2 2nx = 4nx - \sin 4nx = \pi - \sin 180° = \pi$$

et $$\tfrac{1}{2}F = \tfrac{1}{16}\pi a^2;\ \text{d'où } A = 4F = \tfrac{1}{2}\pi a^2.$$

On voit que *l'aire de la double lemniscate proposée équivaut à l'aire du demi-cercle dont* a *est le rayon.*

Remarque. Le procédé ci-dessus fait voir que $\frac{1}{2}\pi a^2$ est la mesure constante des aires limitées par les lemniscates *simple*, *double*, *triple*, etc. savoir :

$$r^2 = a^2 \sin^2 \omega,\quad r^2 = a^2 \sin^2 2\omega,\quad r^2 = a^2 \sin^2 3\omega,\ \text{etc.}$$

On sait donc partager la première de ces lemniscates en $2, 3, 4, \ldots$ lemniscates simples d'aires équivalentes entre elles; ce qui est remarquable.

Différentes applications. La méthode précédente pour calculer les aires que limitent des courbes planes représentées par des équations polaires, peut s'appliquer à un grand nombre de courbes de genres différents.

I. Il en résulte la quadrature : de la *spirale* d'Archiméde; de la *spirale* du second degré; de la *spirale* logarithmique; de la *trisectrice* et de différentes autres courbes. (Voyez à ce sujet le Traité de Géométrie analytique, 2^{me} édit.)

II. L'ellipse étant rapportée à ses axes $2a$ et $2b$, on démontre que le lieu géométrique des pieds de toutes les perpendiculaires, menées du centre sur toutes les tangentes à cette courbe, a pour équation :

$$(y^2+x^2)^2=b^2y^2+a^2x^2; \quad \text{d'où}$$
$$r^2=b^2\sin^2\omega+a^2\cos^2\omega.$$

Cette courbe, circonscrite à l'ellipse proposée, la touche aux quatre sommets, où ses quatre branches égales se terminent par quatre rebroussements de la courbe. Soit A l'aire limitée : $\frac{1}{4}$A est décrit par les rayons vecteurs r depuis $\omega=0$ jusqu'à $\omega=90°=\frac{1}{2}\pi=nz$, n étant un nombre entier infini et z un arc numérique infiniment petit, mesure de l'angle infiniment petit au pôle de chacun des secteurs dans lesquels $\frac{1}{4}$A est divisé. Soit t l'aire du v^{me} de ces secteurs, à partir de l'axe des x, axe polaire pour lequel $\omega=0$. Il est clair qu'on a successivement :

$$t=\tfrac{1}{2}b^2z\sin^2vz+\tfrac{1}{2}a^2z\cos^2vz;$$
$$\tfrac{1}{4}\mathrm{A}=\tfrac{1}{2}b^2z\textstyle\int\sin^2nz+\tfrac{1}{2}a^2z\int\cos^2nz;$$
$$\tfrac{1}{4}\mathrm{A}=\tfrac{1}{8}\pi b^2+\tfrac{1}{8}\pi a^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{A}=\tfrac{1}{2}\pi(a^2+b^2).$$

On voit que la différence des aires limitées par la courbe et par l'ellipse équivaut au demi-cercle dont $a-b$ est le rayon; et ce demi-cercle est nul, comme cela doit être, lorsque $b=a$.

III. Pour l'hyperbole, b^2 devient $-b^2$; ainsi le lieu des pieds de toutes les perpendiculaires, menées du centre sur toutes les tangentes à l'hyperbole, a pour équation :

$$(y^2+x^2)^2=a^2x^2-b^2y^2.$$

Dans ce cas, à cause de $c^2=a^2+b^2$, il vient l'équation polaire

$$r^2=a^2-c^2\sin^2\omega.$$

Le lieu des pieds est donc une *lemniscate* simple, dont le centre, point double, est le contact de chacune des deux asymptotes, pour lesquelles l'arc ω numérique, de rayon 1, est donné par $c\sin\omega=\pm a$: c'est le maximum ainsi connu de l'arc variable ω. Pour calculer l'aire A limitée par cette lemniscate, on observe que les rayons vecteurs, depuis $\omega=0$ jusqu'à son maximum $\omega'=nz$, divisent la demi-feuille $\frac{1}{4}$A en un nombre infini n de secteurs élémentaires dont l'angle au pôle de chacun est mesuré par l'arc numérique infiniment petit z, de rayon 1; le v ième de ces secteurs, à partir de l'axe polaire, a donc pour mesure $\frac{1}{2}a^2z-\frac{1}{2}c^2z\sin^2 vz$. De sorte qu'on a

$$A=2a^2nz-2c^2z\textstyle\int\sin^2 nz \quad \text{et} \quad A=(a^2-b^2)\omega'+ab.$$

Si l'hyperbole est *équilatère*, on a $\omega'=45^\circ=\frac{1}{4}\pi$, $b=a$ et $A=ab$, comme il est facile de le vérifier directement.

IV. Le pôle étant l'origine des coordonnées rectangulaires et l'axe des x, l'axe polaire, la courbe

$$r^2=a^2(1+\cos\omega),$$

est composée de deux branches, en forme de cœur, égales et opposées, se coupant sur l'axe des y en trois points doubles de la courbe, savoir le pôle et les deux autres à la distance a, de part et d'autre de ce pôle, *centre* de la courbe proposée.

Soit S l'aire du secteur, depuis $\omega=0$ jusqu'à $\omega=90^\circ$: on trouve

$$S=\tfrac{1}{2}a^2(\tfrac{1}{2}\pi+1).$$

Pour calculer le segment S′ dont a est la corde, soit posé $\omega=90^\circ+\omega'$; on aura $r^2=a^2(1-\sin\omega')$ et par suite

$$S'=\tfrac{1}{2}a^2(\tfrac{1}{2}\pi-1).$$

L'aire limitée par une branche équivaut donc à πa^2. Si l'on regarde la courbe comme terminée aux extrémités de son axe de symétrie $2a$, sur l'axe des y, elle forme avec la circonférence décrite sur cet axe $2a$, comme diamètre, deux *lunules* égales dont la somme des aires équivaut à celle du carré fait sur $2a$. — Enfin, si de πa^2 on soustrait 4S′, il reste $2a^2$. — Des considérations analogues s'appliquent à la double courbe : $r=a(1\pm\cos\omega)$.

V. Plus généralement, le pôle étant à l'origine des coordonnées rectangulaires, et l'axe polaire la partie positive de l'axe des x, considérons la courbe

$$r=2(a+b\cos\omega),$$

où l'on suppose $a>b$. Faisant varier l'arc ω par infiniment petits, depuis $\omega=0$ en passant par $\omega=90^\circ$, $\omega=180^\circ$, $\omega=270^\circ$ et s'arrêtant à $\omega=360^\circ$, on reconnait que la courbe, en forme de cœur, n'a que le seul axe de symétrie $4a$ sur l'axe des x et que le point de rebroussement, situé sur l'axe des x négatifs, est à la distance $2(a-b)$ du pôle.

Cela posé, soient S et S' les aires des *secteurs* depuis $\omega=0$ jusqu'à $\omega=90°$ et depuis $\omega=90°$ jusqu'à $\omega=180°$, c'est-à-dire en posant $\omega=90°+\omega'$, depuis $\omega'=0$ jusqu'à $\omega'=90°$: on trouvera

$$S=2(\tfrac{1}{2}\pi a^2+2ab+\tfrac{1}{4}\pi b^2),$$
$$S'=2(\tfrac{1}{2}\pi a^2-2ab+\tfrac{1}{4}\pi b^2).$$

Soit A l'aire limitée par la courbe proposée; d'où $A=2S+2S'$ et par conséquent

$$A=2(2\pi a^2+\pi b^2).$$

De même, soit $A'=2S-2S'$; on a $A'=16ab$. Ici la courbe a trois points de rebroussement, etc.

Si $b=a$, la courbe est le lieu géométrique du pied de chaque perpendiculaire abaissée de l'origine sur les tangentes à la circonférence $$y^2+x^2=4ax.$$

VI. Dans la circonférence $y^2+x^2=a^2$, si du pied de l'ordonnée y' d'un point quelconque (x', y') de la courbe, on abaisse une perpendiculaire sur le rayon a qui joint ce point, les pieds de toutes ces perpendiculaires décrivent la lemniscate simple :

$$(x^2+y^2)^3=a^2x^4 \text{ ou } r^2=a^2\cos^4\omega.$$

Non-seulement *l'aire limitée par cette dernière courbe est les trois huitièmes de l'aire du cercle proposé;* mais de plus, *le volume engendré par l'aire de la demi-lemniscate, tournant autour de son axe réel de symétrie* 2a, *est le septième de celui de la sphère dont* a *est le rayon* (à démontrer chaque fois).

VII. Dans la surface sphérique $x^2+y^2+z^2=a^2$, si (x', y', z') est un point quelconque de cette surface, et que du point $(0, 0, z')$ de l'axe des z, on abaisse une perpendiculaire sur le rayon aboutissant au premier point; le lieu géométrique du pied de cette perpendiculaire est la surface

$$(x^2+y^2+z^2)^3=a^2z^4.$$

C'est ce qu'on démontre aisément par les propriétés numériques et la similitude des triangles rectangles. — La surface proposée est décrite par la révolution de la demi-lemniscate simple $(x^2+z^2)^3=a^2z^4$, tournant autour de l'axe des z; il en résulte donc exactement les deux théorèmes numériques précédents (VI).

Emploi du Calcul intégral.

On sait que le *Calcul différentiel* et le *Calcul intégral* démontrent les formules nécessaires pour généraliser et simplifier en même temps les applications de la théorie infinitésimale. Or, bien que cette théorie soit générale, les équations qu'elle fournit, pour la quadrature et la cubature, changent néanmoins de formes quand on les approprie au Calcul intégral; et c'est ce que nous allons établir.

Equation de mesurage. Soit $y=f(x)$ l'équation d'une courbe plane, rapportée à des coordonnées rectangulaires, et cherchons l'expression de l'aire S de cette courbe, depuis $x=a$ et $y=b$ jusqu'à $x=a'$ et $y=b'$; d'où $a<a'$ et $b<b'$.

D'abord l'élément superficiel dS est compris entre les deux rectangles élémentaires mesurés par ydx et par $ydx+dydx$; de sorte qu'on a

$$dS=ydx+<dydx \ldots \quad (1)$$

Dans cette équation, rigoureusement exacte, dS, dx et dy sont des nombres infiniment petits et variables. Si donc on prend les intégrales des deux membres, depuis $x=a$ jusqu'à $x=a'$, il est clair d'abord que ydx ou plutôt $f(x)dx$ fournit un nombre constant N, tandis que $<dy\,dx$ donne $<(b'-b)dx$, nombre variable et infiniment petit avec dx. On a donc

$$S=N+<(b'-b)dx. \ldots \quad (2)$$

Dans cette équation, toujours exacte, les nombres S et N sont constants; si donc le terme variable devait y être conservé, le nombre constant S serait toujours variable, comme toujours égal à un nombre variable; de sorte que S serait à la fois constant et variable; chose évidemment absurde. Donc le terme $<(b'-b)dx$ doit disparaître de l'équation (2), non parce qu'il est nul, non parce qu'il est infiniment petit, mais parce qu'il est variable, et l'on a exactement $S=N$.

C'est toujours la règle des variables; car $(b'-b)dx$ est le premier nombre d'une soustraction dont les deux termes sont infiniment petits. De plus, $<(b'-b)dx$ est fourni par l'infiniment petit du second ordre $<dy\,dx$; celui-ci doit donc, pour la simplification, se négliger aussi à l'égard de l'infiniment petit du premier $y\,dx$, dans l'équation (1), laquelle devient simplement

$$dS=ydx \text{ et mieux } dS=f(x)dx. \ldots \quad (3)$$

Telle est l'équation *imparfaite*, en apparence, qu'il faut employer et qu'on emploie toujours, dans le Calcul intégral, pour simplifier la quadrature et même la cubature, *sans qu'il en résulte aucune erreur finale*, ainsi qu'on vient de le démontrer.

Remarque. L'équation (3) de mesurage est rigoureusement exacte, si l'on y sous-entend toujours les termes variables fournissant ceux qui doivent disparaître, comme variables, à la fin des calculs.

Courbe parabolique. Pour appliquer le Calcul intégral à l'équation (3) de mesurage, considérons l'équation d'une *courbe parabolique*, rapportée à des coordonnées rectangulaires, savoir :

$$a^2y = a^2x - x^3.$$

Ici l'équation (3) devient évidemment

$$a^2\mathrm{dS} = a^2x\,\mathrm{d}x - x^3\mathrm{d}x.$$

Cette dernière équation étant intégrée donne, comme on sait,

$$a^2\mathrm{S} = \tfrac{1}{2}a^2x^2 - \tfrac{1}{4}x^4 + \mathrm{C}.$$

Si l'intrégrale est prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$, d'où chaque fois $y = 0$, il est clair qu'alors la *constante arbitraire* C est nulle, et que pour calculer l'aire du *segment* S dont a est la corde, on a l'équation $a^2\mathrm{S} = \frac{1}{2}a^4 - \frac{1}{4}a^4 = \frac{1}{4}a^4$; d'où $\mathrm{S} = (\frac{1}{2}a)^2$.

Mais si l'intégrale est prise depuis $x = a$ jusqu'à $x = 2a$, d'où $y = 0$ et $y = -6a$, il est clair que pour $x = a$ et $y = 0$, l'aire S est nulle; d'où $\mathrm{C} = -\frac{1}{4}a^4$. On a donc finalement $\mathrm{S} = -(\frac{3}{2}a)^2$.

Cette valeur étant négative aussi bien que y, on voit que le *secteur* S tombe au-dessous de l'axe des x et vaut le carré construit sur la droite $\frac{3}{2}a$. — C'est ce qu'on vérifierait, avec beaucoup moins de facilité, par le simple calcul infinitésimal.

On peut *discuter* la courbe $(ay - x^2)^2 = a^2x^2$, puis calculer les aires du *segment* et du *secteur* qui répondent à $x = a$. La somme de ces aires est a^2.

Volume d'un segment d'ellipsoïde. Soient $2a$, $2b$, $2c$ les trois axes principaux de l'*ellipsoïde*, de telle sorte qu'on ait $2a > 2b > 2c$. Si l'origine des coordonnées rectangulaires est à une extrémité de $2a$, celui-ci sur l'axe des x, l'équation de la surface est

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{2ax - x^2}{a^2}.$$

Il s'agit de calculer le volume du *segment* S d'ellipsoïde, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = h$. D'abord les plans parallèles à celui des yz, depuis $x=0$ jusqu'à une longueur arbitraire, mais donnée, de x, divisent cette longueur en une infinité de parties égales à dx et divisent le segment S en une infinité de tranches, ayant chacune deux bases elliptiques parallèles, et toutes même épaisseur dx infiniment petite. Soit dS l'une de ces tranches *élémentaires* dont la plus petite base elliptique, répondant à l'une des valeurs croissantes de x, a pour mesure πyz. A cause de l'épaisseur $\mathrm{d}x$ infiniment petite, dS peut être considérée, sans aucune erreur finale, comme un cylindre elliptique droit; de sorte qu'en sous-entendant les unités v, s et u, on a $\mathrm{dS}=\pi yz\,\mathrm{d}x$.

Pour la valeur ci-dessus de x, les demi-axes y et z de la base elliptique de dS se déterminent par les hypothèses successives : $z=0$ et $y=0$, dans l'équation de l'ellipsoïde. Substituant donc les valeurs résultantes dans l'expression de dS, elle devient

$$\mathrm{dS}=\frac{\pi bc}{a^2}(2ax\,\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}x).$$

Prenant l'intégrale du second membre, depuis $x=0$ jusqu'à $x=h$, puis observant que $x=0$ donne $y=0$, $z=0$, $\mathrm{S}=0$ et $\mathrm{C}=0$,

on aura $$\mathrm{S}=\frac{\pi bch^2}{a^2}\left(a-\tfrac{1}{3}h\right).$$

Telle est l'expression cherchée du volume du segment S; et cette expression se trouve presqu'aussi aisément par le simple calcul infinitésimal. — Si $h=2a$, le segment S devient le volume E de l'ellipsoïde, et l'on a $\mathrm{E}=\frac{4}{3}\pi abc$. — Pour la sphère, où $b=c=a$, il en résulte les expressions du volume du secteur sphérique et de l'aire de la zône qui lui sert de base; etc.

Aire d'une Lemniscate. Les coordonnées étant rectangulaires, calculer l'aire limitée par la lemniscate simple :

$$a^2y^2=a^2x^2-x^4.$$

Soit **F** l'aire cherchée d'une demi-feuille : les ordonnées, depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$, divisent a en une infinité de parties égales à $\mathrm{d}x$ et divisent F en une infinité de tranches, toutes de même largeur $\mathrm{d}x$ infiniment petite. Soit dF l'une de ces tranches répondant à une valeur arbitraire de x; dF peut donc être considérée, sans aucune erreur finale, comme un rectangle ayant $\mathrm{d}x$ pour hauteur et pour base la valeur de y qui répond à celle de x. De sorte qu'on a

$$a\,\mathrm{dF}=x\,\mathrm{d}x\sqrt{a^2-x^2}.$$

Pour intégrer, posons $a^2-x^2=z$; d'où $x^2=a^2-z$, $x\,dx=-\frac{1}{2}dz$ et

$$aF=-\tfrac{1}{2}\int z^{\frac{1}{2}}dz=-\tfrac{1}{3}\sqrt{z^3}+C.$$

Cette intégrale doit être prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$; or, pour $x=0$, on a $y=0, F=0, z=a^2$ et $C=\frac{1}{3}a^3$; tandis que pour $x=a$, on a $z=0$ et $-\frac{1}{3}\sqrt{z^3}=0$. Il vient donc

$$F=\tfrac{1}{3}a^2 \text{ et } 4F=\tfrac{4}{3}a^2.$$

Telle est l'expression de l'aire cherchée de la lemniscate proposée, laquelle, comme on voit, est une courbe carrable. — La simple théorie infinitésimale développée précédemment ne saurait conduire à cette expression. — La discussion complète est facile.

Secteur hyperbolique. Les coordonnées étant rectangulaires, considérons d'abord la courbe hyperbolique

$$(a+x)y^2=ax^2.$$

Cette courbe n'a point de centre, n'a qu'un seul axe de symétrie, celui des x, et une seule asymptote rectiligne, savoir $x=-a$.

Cherchons l'expression de l'aire S du *secteur* de cette hyperbole, depuis $x=0$, d'où $y=0$, jusqu'à $x=a$, d'où $y=\pm\frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Les ordonnées, depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$, divisant a en une infinité de parties égales à dx, divisent aussi S en une infinité de tranches, toutes de même largeur infiniment petite dx. Soit dS l'une de ces tranches, répondant à une valeur arbitraire de x : on peut, sans aucune erreur finale, regarder dS comme un rectangle infiniment petit, et l'on a

$$dS=\sqrt{a}\cdot x\,dx\,(a+x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Pour intégrer cette *différentielle binôme*, posons $a+x=z$; nous aurons $x=z-a$, $x^2=(z-a)^2$, $x\,dx=(z-a)\,dz$ et par suite

$$dS=\sqrt{a}\,(z^{\frac{1}{2}}dz-az^{-\frac{1}{2}}dz).$$

De là, $$S=\sqrt{a}\,(\tfrac{2}{3}\sqrt{z^3}-2a\sqrt{z})+C.$$

Pour $x=0$, on a $y=0, S=0, z=a$ et $C=\frac{4}{3}a^2$; tandis que pour $x=a$, on a $z=2a$. Il vient donc, pour l'expression de l'aire cherchée : $$S=\tfrac{2}{3}a^2(2-\sqrt{2}).$$

Autre hyperbole. Considérons encore l'hyperbole, à coordonnées rectangulaires, savoir :

$$(a^2-x^2)y^2=a^2x^2.$$

Cette courbe a les deux asymptotes rectilignes $x=a$ et $x=-a$.

Soit S l'aire du secteur, depuis $x=0$ jusqu'à une valeur possible de x : des calculs analogues aux précédents donnent

$$a^2-x^2=z \text{ et } S=\tfrac{1}{4}a^2-\tfrac{1}{4}a\sqrt{z}.$$

Pour $x=a$ on a $z=0$ et $S=(\tfrac{1}{2}a)^2$. Ainsi, bien que S ait l'une de ses deux dimensions infiniment longue, ce secteur S a cependant une aire finie, équivalente au carré fait sur $\tfrac{1}{2}a$.

Folium. Considérons la courbe, à coordonnées rectangles :

$$ay^2=ax^2-x^3.$$

La discussion fait voir que cette courbe, symétrique par rapport à l'axe des x, se compose de deux *branches*, infinies du côté des x négatifs, se coupant à l'origine, point *double*, et limitant une *feuille* depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$, où la direction de l'ordonnée est *tangente*. Le *maximum* de l'ordonnée répond à $x=\tfrac{2}{3}a$; la courbe a donc deux *tangentes-sécantes* parallèles à l'axe des x : elle a aussi, au point double, deux *tangentes-sécantes*, formant avec l'axe des x, de part et d'autre, deux angles demi-droits chacun. De sorte que la feuille est *inscrite* dans le triangle rectangle isocèle dont l'aire est a^2 : aussi, d'après l'intégration d'une *différentielle binôme*, trouve-t-on que l'aire de la feuille a pour mesure $\tfrac{8}{15}a^2$. — On peut aisément calculer l'aire du *segment* depuis $x=0$ jusqu'à $x=-a$, ainsi que les volumes de révolution que le demi-segment et la demi-feuille décrivent autour de l'axe des x. — Les aires et les volumes ci-dessus peuvent aussi se calculer par la simple théorie infinitémale, parce que la folium proposée est identique avec celle-ci : $ay^2=x(a-x)^2$.

Volume d'un segment. Les coordonnées étant rectangulaires, considérons la surface du 4^{me} degré :

$$4x^2y^2+abz^2=4bx^3.$$

Les plans parallèles à celui des yz, depuis $x=0$ jusqu'à $x=h$, divisent le volume S du segment, limité par la surface et le dernier plan, en un nombre infini de tranches, à bases elliptiques parallèles, et toutes de même épaisseur dx infiniment petite. De sorte que si l'on pose $b=ac$, on trouvera finalement :

$$S=\tfrac{2}{5}\pi h^3\sqrt{c}; \text{ d'où } S=\tfrac{2}{5}\pi h^3, \text{ pour } b=a.$$

Différentes cubatures. Les coordonnées étant toujours rectangulaires, il est bien facile de calculer les expressions des volumes dans les surfaces que voici :

$$(abx-ay^2-bz^2)^3=a^2b^2x^5;$$
$$(ay^2+bz^2-b^2z)^2=ab^2x^3;$$

$$(x^2+y^2+z^2)^3 = a^4x^2;\ (y^2+z^2)^2 = ax^3 - a^2x^2;$$
$$(y^2+z^2)^2 = a^2x^2 - x^4;\ (y^2+z^2)^3 = a^3x^3 - ax^5.$$

Les quatre dernières surfaces sont de *révolution* autour de l'axe des x; et il en est de même des deux premières quand $b = a$.

Remarque. Les exemples précédents suffsent sans doute pour établir que le Calcul différentiel et le Calcul intégral appliquent la théorie infinitésimale à un plus grand nombre d'objets scientifiques que les simples éléments. Cette théorie d'ailleurs est nécessaire dans ces calculs, sinon pour l'exposition des principes, du moins pour les démonstrations des procédés pratiques, très-abréviatifs et très-exacts, qui rendent si éminemment utiles ces deux genres de calculs, ainsi que les extensions qu'ils reçoivent sous différentes dénominations.

Mécanique-Physique.

On sait que les Calculs supérieurs sont utiles pour résoudre complètement certaines questions de *Mécanique analytique* et de *Physique;* mais ces calculs, toujours basés sur la théorie infinitésimale, ne sont pas nécessaires et cette théorie suffit pour traiter clairement les éléments de la *Mécanique-Physique*, où l'on fait usage des infiniment petits *matériels*, qu'on ne saurait éviter parce que leurs agglomérations constituent les corps dont on cherche les propriétés physiques et mécaniques.

Des infiniment petits matériels. La notion des infiniment petits *matériels* se tire de la *divisibilité* en Physique. — D'abord tout corps ayant de l'étendue, on peut en concevoir la moitié, puis la moitié de cette moitié, et ainsi de suite à l'infini : c'est ce qu'on nomme la *divisibilité géométrique.* Mais on ignore si, par des moyens mécaniques, il est possible de diviser un corps matériel à l'infini : tout ce que l'expérience nous apprend à cet égard, c'est que plusieurs corps peuvent se diviser en parties si ténues qu'elles deviennent imperceptibles à nos sens. Et ce fait est prouvé par différents exemples, tels que celui-ci : Lorsque le sel est dissout par l'eau, les parties dans lesquelles il a été divisé sont si petites qu'elles échappent non-seulement à l'œil nu, mais encore à l'œil armé du plus fort instrument d'optique.

Ces parties matérielles qui, par leur ténuité, échappent aux sens et à toute appréciation rigoureuse, sont dites *infiniment petites*, et on ne saurait en tenir compte pour augmenter ou pour diminuer le corps que l'on considère.

Il ne faut pas conclure de là qu'il n'existe pas d'autres parties, beaucoup plus petites; car, outre ce que nous pouvons apprécier directement, il y a une multitude de corps qui ont entre eux d'énormes différences de grandeurs, et dont l'existence nous a été en partie révélée par le microscope.

Les dimensions possibles des corps forment une série immense qui commence au point géométrique et s'étend indéfiniment au-delà : nos organes ne peuvent saisir qu'une portion moyenne de cette série, et nous regardons comme infiniment petit ou nul et comme infiniment grand, tout ce qui est renfermé dans les deux portions extrêmes. Mais ces jugements, résultat nécessaire de l'imperfection de nos sens et de nos moyens d'appréciation, n'expriment que les limites extrêmes de la perception. Ces limites d'ailleurs sont aussi celles qui séparent le *fini* de l'*infiniment petit* et de l'*infiniment grand :* elles nous seront toujours inconnues, comme les deux portions extrêmes ci-dessus.

En général, il n'y a dans la nature ni grand ni petit absolu ; tout y est relatif à l'individu qui observe. Les mots *grand* et *petit* supposent toujours des comparaisons et n'expriment que des *rapports* (seules choses perceptibles à nos sens et à notre intelligence). Nous ne connaissons réellement que des rapports et ne pensons que par eux.

Bien que la matière soit divisible en parties tellement petites qu'elles échappent aux sens et à l'imagination, il est très-probable et l'on doit admettre que la division atteint toujours une certaine limite et ne la depasse jamais ; soit qu'une division plus petite soit réellement impossible, soit que les forces nécessaires pour l'effectuer ne se présentent pas. Car la Physique et la Chimie offrent à chaque pas de nouvelles preuves de la division limitée de la matière ; et un grand nombre de phénomènes de ces sciences seraient tout-à-fait inexplicables dans la supposition contraire.

On appelle *point matériel* tout corps infiniment petit dans toutes ses dimensions, placé à la limite de la division effective et par conséquent *indivisible :* c'est un *atôme* pour les corps simples, une *molécule* pour les corps composés, et une *particule* pour les agglomérations d'atômes et de molécules.

De plus, la Physique apprend que la seule diversité du mode d'aggrégation des points matériels fait que le système entier, ou le corps qu'ils composent, est accidentellement solide, liquide ou gazeux ; et de là résultent également les autres propriétés accidentelles, savoir : les divers degrés de *dureté*, de *mollesse*, d'*élasticité*, etc.

Enfin, « on ignorera peut-être toujours les dimensions absolues des atômes matériels indivisibles ; cependant on pourra dire, dans certaines circonstances, qu'il y a autant de ces particules dans un poids donné d'une certaine substance, que dans un autre poids d'une autre espèce de matière. On est obligé en Chimie d'admettre qu'il existe des rapports invariables entre les masses des atômes ou dernières particules des corps ; cette science fournit même les moyens de déterminer les valeurs numériques de ces rapports. » Or, c'est tout ce qu'il faut pour bien connaître la composition de ces corps.

Lois de mouvement. Pour donner une application de la théorie infinitésimale en Mécanique-Physique, cherchons les lois du mouvement rectiligne *uniformément varié*, ou produit par une force *accélératrice constante*, agissant sur un point matériel parfaitement libre, de telle sorte que cette force ne rencontre d'autre résistance que l'*inertie* de ce point.

D'abord la force étant accélératrice et constante, elle agit d'une manière continue sur le point matériel, c'est-à-dire par *impulsions* successives, égales et infiniment petites *qui se touchent;* la durée de chaque impulsion, pour que l'inertie du point matériel la reçoive complètement, étant infiniment petite elle-même.

Soit E l'espace rectiligne décrit pendant le temps t quelconque : si nous concevons ce temps t divisé en un nombre infini n d'*instants* égaux à x et infiniment petits, d'où $t=nx$, il est clair que x sera la durée nécessaire pour que le point matériel reçoive complètement, par son inertie, chacune des impulsions égales de la force accélératrice constante. Si donc le mobile a reçu la première impulsion (et l'a *enmagasinée* en quelque sorte) au commencement du premier instant, il recevra complètement les impulsions égales successives au commencement de chacun des instants égaux qui se succèdent sans interruption.

Cela posé, chaque impulsion égale de la force fera décrire au point matériel, pendant chaque instant, un espace égal à celui qu'il décrit déjà en vertu de l'impulsion de l'instant qui précède immédiatement; car il est évident que *des impulsions égales doivent faire décrire des espaces rectilignes égaux, pendant des temps égaux, au même corps, placé chaque fois dans des circonstances identiques.* — De plus, en vertu de son inertie, un corps ne peut se donner aucun mouvement, ni altérer celui qu'il a reçu : donc si la première impulsion fait parcourir au point matériel le chemin c infiniment petit pendant le premier instant x, elle lui fera décrire le même chemin pendant chacun des instants successifs égaux : il en sera de même de la seconde impulsion égale pendant le second instant et ceux qui suivent; de même de la troisième, de la 4^{me}, et ainsi jusqu'à la n ième.

On voit que le chemin décrit par le point matériel pendant le 1er instant x, étant c, le chemin pendant le second instant sera $c+c$ ou $2c$; pendant le 3^{e}, il sera $2c+c$ ou $3c$; pendant le 4^{e}, $3c+c$ ou $4c$; et enfin, pendant le n^{e} instant, le chemin décrit sera nc. Donc l'espace total E décrit pendant le temps t est :
$$E=c+2c+3c+4c+\ldots+nc=\tfrac{1}{2}nc(n+1).$$

Observant donc que 1 est nul à l'égard de n infini, il vient
$$E=\tfrac{1}{2}cn^2.$$

Soit v la *vitesse* du mobile à la fin du n^{e} instant; v est donc le chemin rectiligne que ce mobile décrirait uniformément pendant le temps 1, en vertu des n impulsions reçues pendant le temps t, si alors la force cessait d'agir sur lui. Or, puisque le corps décrit uniformément le chemin v pendant le temps 1, il est clair que pendant le $(n+1)$ ième instant, dont la durée est x, il décrira le chemin vx. Mais pendant ce $(n+1)^{e}$ instant x, le mobile, en vertu des n impulsions reçues pendant le temps t, décrit le chemin nc; il faut donc qu'on ait $vx=nc$.

D'ailleurs on a $t = nx$; éliminant donc n entre cette équation et les deux $vx = nc$ et $E = \frac{1}{2}cn^2$, celles-ci deviennent :

$$vx^2 = ct \text{ et } Ex^2 = \tfrac{1}{2}ct^2.$$

Si $t = 1$ dans la première de ces équations et que g désigne ce que v devient alors, d'où $gx^2 = c$; il est clair que g est la vitesse du mobile au bout du temps 1 (une *seconde*, par exemple) et que par suite les équations du mouvement rectiligne *uniformément varié* sont :

$$v = gt \text{ et } E = \tfrac{1}{2}gt^2\,;\ \text{d'où } vt = 2E.$$

On voit que dans le mouvement uniformément varié, 1° *la vitesse croît comme le temps ; 2° le chemin rectiligne décrit croît comme le carré du temps ;* 3° enfin, *le chemin* vt *que décrirait le point matériel s'il se mouvait avec la vitesse finale* v, *est double du chemin décrit pendant le même temps avec la vitesse* g, *acquise pendant la première unité de temps.*

Mouvement curviligne. Quant aux *lois du mouvement curviligne*, je me bornerai ici à observer que le mouvement curviligne du point matériel A est dû à deux forces qui agissent simultanément sur ce point, leurs directions comprenant un angle quelconque. L'une de ces forces est *accélératrice*, tandis que l'autre force est *constante*, c'est-à-dire qu'elle a imprimé au point A une vitesse *constante*, par une seule *impulsion*, que ce point conserve le long du chemin rectiligne qu'il décrirait en vertu de cette impulsion. Or, il est certain qu'à une époque quelconque la résultante des deux forces est, en intensité et en direction, différente de la résultante à l'époque plus grande d'un seul instant infiniment petit. Et comme le point matériel A se meut par les effets des résultantes successives, on voit que ce point décrit successivement des droites infiniment petites, *éléments* de la courbe résultante; ainsi qu'il est démontré plus haut (p. 77). — En général, le point géométrique, générateur d'une courbe, en décrit chaque élément rectiligne, et *celui-ci passe successivement par tous les états de longueur infiniment petite et invisible, à partir de zéro.*

Lois d'équilibre. Les notions des *forces* et des *vitesses* étant bien acquises, ainsi que les notions de la *masse* et du *poids* de tout corps matériel, on définit très-clairement le *Travail mécanique des forces* comme il suit : *Travailler, c'est vaincre des résistances continuement reproduites, et faire mouvoir leurs points d'application suivant un certain chemin rectiligne, direction de la force qui agit.*

D'après cette définition, il est facile de démontrer que : *Le travail mécanique a pour mesure le produit des mesures de la résistance constante vaincue et du chemin décrit par le point d'action de cette résistance.*

Ici le mètre est l'unité linéaire et le kilogramme l'unité de résistance ; tandis que l'unité de travail est le *kilogrammètre*, c'est-à-dire le travail pour élever un kilogramme à un mètre de hauteur verticale. Ces différentes unités sont toujours *sous-entendues* comme conséquents des rapports. Enfin, il arrive souvent que la résistance constante est une résistance *moyenne.*

I. Cela posé, soient P et Q deux forces quelconques, situées dans le plan de la ligne matérielle inflexible ACB, parfaitement mobile autour du point C, fixe et inébranlable, cette ligne solide étant droite ou brisée en C. Supposons que les forces P et Q agissent perpendiculairement à CA et à CB, l'une en A et l'autre en B, et que ces forces soient en *équilibre* autour du point C. Il est clair que si la force P, appliquée en A, agissait seule pendant un instant infiniment petit x, la ligne ACB tournerait autour du point C; ses extrémités A et B décriraient donc les arcs circulaires AA' et BB', infiniment petits et conséquemment rectilignes. Donc puisqu'il y a équilibre, il faut que la force Q, agissant seule au point B, pendant le même instant x, ramène la ligne solide A'CB' à sa position primitive ACB; il faut donc que cette force fasse décrire aux points A' et B', en sens contraires, les mêmes chemins rectilignes infiniment petits A'A et B'B.

Or, les deux forces P et Q n'ont à vaincre, le long des chemins rectilignes AA' et BB' infiniment petits, d'autre résistance constante que l'inertie de la verge solide; les *travaux mécaniques* des deux forces P et Q, pendant le même instant x, ont donc pour mesures respectives $P \times AA'$ et $Q \times BB'$. Et puisqu'il y a équilibre dans le système, il faut que ces deux travaux *élémentaires*, effets des deux forces P et Q, pendant le même instant x, se détruisent; il faut donc que ces deux travaux soient égaux, puisque déjà ils sont contraires. De sorte qu'on a

$$P \times AA' = Q \times BB'\text{ ; d'où } P:Q::BB':AA'.$$

Les deux triangles isocèles CAA' et CBB' ont l'angle $ACA' = BCB'$ évidemment; donc ces deux triangles sont semblables et donnent $BB':AA' = CB:CA$. Par conséquent on a

$$P:Q::CB:CA\text{ ; d'où } P \times CA = Q \times CB.$$

Les deux forces P et Q, situées dans le plan de la ligne solide ACB, se font équilibre autour du point C, fixe et inébranlable; et ainsi leur *résultante* passe nécessairement par ce point, où elle est détruite. Et comme on appelle *moment* d'une force par rapport à un point le produit de cette force par sa distance *numérique* à ce point, on voit que *si, dans le même plan, deux forces sont en équilibre autour d'un point de leur résultante, leurs moments, par rapport à ce point, sont égaux et contraires.* — Telle est la *loi générale d'équilibre dans les machines;* laquelle est ainsi démontrée complètement, avec clarté et facilité, par la seule mesure des *travaux mécaniques élémentaires.*

II. La loi générale d'équilibre précédente suffit pour démontrer, clairement et fort simplement, la théorie de la *composition* des forces et des vitesses *parallèles*, aussi bien que la théorie de la *composition* des forces et des vitesses *concourantes*; et ces théories font nécessairement partie des *Éléments de Mecanique.* (Voir ceux publiés en 1840, H. Dessain, Liége.)

III. Cherchons une autre loi d'équilibre. D'abord la force P agit directement sur la molécule A; celle-ci n'est donc maintenue en repos que par sa liaison invariable avec la seconde molécule m vers C; il faut donc que cette liaison transmette la force P au point matériel m, comme si elle lui était directement appliquée dans le même sens parallèle. Car si la seconde molécule m n'avait aucune liaison avec la troisième m', elle serait entraînée avec A par la force P, et ces deux molécules A et m décriraient deux droites parallèles absolument comme si la force P, appliquée en A, était appliquée en m, dans le même sens parallèle.

On voit que les deux forces P et Q de même sens, appliquées en A et B, se faisant équilibre autour de la molécule fixe C de la ligne inflexible ACB, *sont transmises, par les molécules intermédiaires, au point* C, *qui les détruit absolument comme si chacune lui était immédiatement appliquée, avec la même intensité et dans le même sens parallèle.*

IV. Tel est le *principe* de la transmission des forces et par conséquent des vitesses ; lequel est vrai encore lorsque les forces P et Q ne sont pas perpendiculaires à CA ni à CB. — Il en résulte d'abord que C est le point d'application de la résultante des deux forces P et Q. De plus, si la ligne plane matérielle ACB est droite, les deux forces P et Q sont parallèles ; et puisque chacune est transmise au point C, avec toute son intensité et dans le même sens parallèle, il est clair que les deux forces parallèles de même sens P et Q, alors appliquées au point C, sont dirigées suivant la même droite parallèle à leurs directions primitives. Donc *leur résultante, appliquée en* C, *leur est parallèle et égale à leur somme* $P+Q$.

En général, quel que soit le nombre des forces parallèles de même sens, qui agissent sur différents points d'une droite matérielle, rigide et inflexible, *leur résultante est égale à leur somme, leur est parallèle et est appliquée à un point de la droite proposée.*

V. Reprenons le système proposé. Soient a et b les nombres respectifs de molécules *égales* formant les deux côtés CA et CB de la ligne inflexible ACB, et soit x la *longueur* de chaque molécule : il est clair que les longueurs CA et CB sont $CA = ax$ et $CB = bx$.

Cela posé, en vertu de la transmission des forces, la droite CA est sollicitée à se mouvoir par a forces parallèles, de même sens, égales à P et appliquées aux a molécules de CA ; la résultante de ces a forces P est donc Pa, leur est parallèle, de même sens et appliquée perpendiculairement en un point Z de AC. De même, la résultante des b forces Q est Qb, leur est parallèle, de même sens et appliquée perpendiculairement en un point Z' de CB. Or, puisque le système est en équilibre, la résultante Qb détruit la résultante Pa, absolument comme si elle lui était égale et directement opposée en Z. On a donc successivement :

$$Pa = Qb,\ P \cdot ax = Q \cdot bx \text{ et } P \times CA = Q \times CB.$$

Telle est exactement la loi d'équilibre trouvée plus haut (I), à l'aide des travaux élémentaires des forces P et Q.

Remarque. Nous répétons ici une observation importante, déjà présentée ailleurs : c'est qu'à la rigueur une ligne droite ou une ligne brisée plane parfaitement *solide* n'existe point dans la nature, quoique la conception mathématique en soit évidente et indispensable pour l'étude des principes. Tous les points matériels qui composent les corps naturels n'y sont retenus, en vertu des forces physiques qui agisssent sur eux, que dans un état de proximité plus ou moins intime, à distances plus ou moins infiniment petites, plus ou moins embryonaires, et non dans un été immédiat de contact ou de contiguité. Ainsi en tirant ou poussant ces particules par des forces suffisamment énergiques, on doit généralement pouvoir les déplacer, les séparer ou les rapprocher davantage. C'est en effet ce qui a lieu ; car il n'y a aucun corps qui ne soit *compressible*, *extensible* ou *flexible*, même ceux qui comme le fer et la pierre la plus dure, résistent le plus énergiquement à tout changement d'état. De sorte qu'après avoir démontré les lois abstraites de l'équilibre et du mouvement, pour des corps parfaitement solides, il reste encore à y faire les modifications convenables, si l'on veut les appliquer à des corps physiques réels ; et tel est l'objet de la *Mécanique appliquée.*

Ces modifications ne sont pas toujours faciles à faire avec rigueur, et l'on n'y parvient d'ordinaire que par des approximations, de l'exactitude desquelles il faut souvent se défier. Mais les lois abstraites du mouvement et de l'équilibre n'en sont pas moins très-utiles en elles-mêmes, d'abord par les vérités qu'elles peuvent servir à établir et qui constituent réellement la science; ensuite parce qu'elles offrent la limite des lois qui doivent avoir lieu dans le cas des corps imparfaitement solides que la nature nous présente.

La théorie infinitésimale est nécessaire. Non-seulement la théorie infinitésimale est nécessaire pour rendre plus claires, plus simples et plus complètement logiques différentes recherches d'Algèbre et de Géométrie, ainsi qu'il est bien établi dans ce qui précède, mais en outre cette théorie fait descendre dans les simples éléments certaines questions réservées aux mathématiques supérieures : elle traite ces questions, sinon plus brièvement que ces dernières, du moins beaucoup plus clairement, comme pénétrant plus avant dans la génération numérique ou descriptive des grandeurs.

On a cité Laplace désirant le perfectionnement de la théorie infinitésimale « qu'il appelle *un puissant instrument de l'esprit humain.* » On a cité également Wronski prouvant « de la manière la plus rigoureuse que non-seulement l'*infini* est un instrument exact de recherches mathématiques, mais qu'il est en outre l'élément le plus important des vérités elles-mêmes, et que par conséquent *la science des mathématiques n'est possible que par l'infini.* » Pour nous l'emploi *explicite* des grandeurs infinitésimales, dans les mathématiques élémentaires, a de plus le grand avantage de permettre d'appliquer plus tôt ces dernières à d'importantes recherches de physique, de chimie et de mécanique.

Aussi, depuis longtemps déjà, les savants dont les travaux ont pour but de rendre accessibles aux simples éléments d'Arithmétique, d'Algèbre, de Géométrie et de Trigonométrie, les applications théoriques de la *Mécanique industrielle*, n'ont-ils rien trouvé de plus clair ni de plus satisfaisant, à cet effet, que la théorie infinitésimale combinée avec le principe du *travail mécanique des forces*, si heureusement introduit dans l'appréciation de l'*effet utile* des Machines. Il en résulte, avec facilité, plusieurs principes généraux de la *Mécanique analytique*, où d'ailleurs la méthode fonctionnelle et l'axiome de généralisation sont utiles, sinon nécessaires, pour établir clairement et simplement les principes fondamentaux de la composition des forces et des vitesses.

Conclusion. D'après les développements qui précèdent, on peut affirmer, avec entière certitude, que non-seulement la théorie infinitésimale est démontrée complètement, mais qu'elle est la base de l'enseignement le plus clair, le plus simple et le plus rigoureusement logique des sciences Physiques et Mathématiques, tant pour les théories que pour les applications.

FIN.

APPENDICE

à la théorie infinitésimale appliquée.

Quelques difficultés opposées à la théorie infinitésimale appliquée me paraissent exiger que les notions fondamentales y soient plus développées encore ; et tel est le but du présent *Appendice*.

Notions infinitésimales. C'est par le *fini* que nous acquérons les notions des nombres *infiniment grands* et des nombres *infiniment petits*. Ainsi quelque grand que soit un nombre *fini donné* ou simplement *imaginé*, on peut encore en concevoir un plus grand, et ainsi toujours et sans fin. On doit donc appeler *infiniment grand* ou simplement *infini* le nombre qui surpasse tout nombre fini imaginé, si grand que soit ce dernier. — D'après cela, un nombre infini sera toujours inconnu et inexprimable en chiffres : aussi le désigne-t-on dans le calcul, par une lettre et spécialement par un huit renversé, ∞, qui s'énonce *infini* ou *nombre infini*.

De même, quelque petit que soit un nombre *fini assigné*, on peut encore en concevoir un plus petit, et ainsi toujours et sans fin. On doit donc nommer *infiniment petit* le nombre moindre que tout nombre fini imaginable, si petit que soit ce dernier, sans être nul. — D'après cela, la fraction, ayant un numérateur *fini* et un dénominateur *infini*, est un nombre *infiniment petit* ; car cette fraction sera toujours moindre que toute fraction finie assignée, si petite qu'elle soit, vu que le dénominateur infini sera toujours plus grand que le dénominateur fini, et que la fraction est d'autant plus petite que son dénominateur est plus grand.

On voit que : 1° Le quotient d'un nombre fini par un nombre infini est un nombre infiniment petit, et non pas le zéro *absolu* ; 2° Si l'on conçoit tout nombre fini divisé en une infinité de parties égales, chaque partie est infiniment petite ; 3° Enfin, tout nombre infiniment petit est nécessairement inconnu et inexprimable en chiffres : c'est un nombre *irrationnel*, qu'il faut désigner dans le calcul par une lettre x ou par $a : \infty$, a désignant un nombre fini ; de sorte qu'on a $x = a : \infty$ et $x \times \infty = a$.

Observons encore que les nombres infiniment grands et les nombres infiniment petits, étant toujours inconnus et variables, peuvent être soumis aux conditions du *maximum* et du *minimum*, c'est-à-dire être les plus grands et les plus petits possible, d'après ces conditions ; ainsi qu'on va le voir en démontrant l'existence de ces deux genres de nombres inexprimables.

Calcul infinitésimal. Il existe évidemment beaucoup de fractions comprises entre 1 et 2, par exemple. De plus, on ne pourra jamais compter le nombre de toutes les fractions possibles, depuis 1 exclu jusqu'à 2 inclu ; car ce nombre entier est si grand qu'il surpasse tout nombre fini imaginable : il est *infini* et désigné par ∞. Mais ce nombre entier infini, bien que toujours inconnu, n'est pas variable ; car il est ici le plus grand possible ou un *maximum*, vu que ∞ désigne le nombre de toutes les fractions possibles ci-dessus.

De plus, toutes les fractions possibles, depuis 1 exclu jusqu'à 2 inclu, vont nécessairement en croissant par une même différence d tellement petite qu'on a $d \times \infty = 1$ et $d = \frac{1}{\infty}$. Or cette différence d, infiniment petite, sans être nulle, et toujours inconnue, n'est pas variable, d'après l'hypothèse : elle est ici la plus petite possible ou un *minimum*. Si en effet, la différence d pouvait être plus petite, elle serait au plus $d = \frac{1}{\infty + 1}$; d'où l'on aurait $d \times (\infty + 1) = 1$. Le nombre de toutes les fractions possibles ci-dessus serait donc $\infty + 1$ et non pas ∞ ; ce qui est absurde.

Il est évident que les nombres respectifs de toutes les fractions possibles, depuis 1 exclu jusqu'à 2, 3, 4, 5, 6,... inclus, sont : ∞, 2∞, 3∞, 4∞, 5∞, etc. On voit que *deux nombres infinis différents peuvent avoir un rapport fini quelconque* ; *et il en est de même de deux nombres infiniment petits*. Par exemple, le rapport de $\frac{11}{\infty}$ à $\frac{10}{\infty}$ est $\frac{11}{10}$.

La différence d est évidemment la même pour toutes les fractions possibles, depuis 1 exclu jusqu'à 2, 3, 4, 5, 6,... inclus. On a donc

$$d = \frac{1}{\infty} = \frac{2}{2\infty} = \frac{3}{3\infty} = \frac{4}{4\infty} = \frac{5}{5\infty} = \text{etc.}$$

On ne change donc pas la valeur d'une fraction infiniment petite lorsqu'on multiplie ou quand on divise ses deux termes par un même nombre, fût-il même infini.

La première de toutes les fractions possibles, entre 1 et 2, étant $1 + \frac{1}{\infty} = \frac{\infty + 1}{\infty}$, on voit qu'en général *les deux termes sont infinis pour chacune des fractions possibles, comprises entre deux nombres entiers quelconques, immédiatement consécutifs*. Or, l'une des fractions possibles entre 3 et 4, par exemple, se réduit à $\frac{10}{3}$; il faut donc que les deux termes infinis de cette fraction aient un facteur infini commun, désigné par a, et soient $10a$ et $3a$; car alors en supprimant ce facteur infini commun, on ne change pas la valeur de la fraction et on la réduit à $\frac{10}{3}$.

On démontre que la racine carrée de 12, comprise entre 3 et 4, est inexprimable en chiffres ; c'est donc une fraction dont les deux termes infinis n et p n'ont point de facteur infini commun, et l'on a rigoureusement $\sqrt{12} = n$ sur p.

De là résulte que dans $A = B\sqrt{12}$, les deux quantités continues A et B de même nature (deux droites ou une courbe et une droite finies) ont toujours un commun diviseur rectiligne infiniment petit. On le vérifie d'ailleurs, car pouvant approcher d'aussi près qu'on le veut du rapport $\sqrt{12}$, toujours inconnu, on approche en même temps du commun diviseur de A et B ; donc ce commun diviseur existe : il est infiniment petit et toujours inconnu.

Si n et p désignent deux nombres entiers infinis, on a

$$\frac{3}{n} \times p = \frac{3p}{n} \text{ et } \frac{3}{n} : \frac{4}{p} = \frac{3p}{4n} = 3p : 4n.$$

Et comme toute fraction, à termes infinis, est nécessairement comprise entre deux nombres entiers immédiatement consécutifs, on voit que : 1° Le produit d'un nombre infiniment petit par un nombre infini, ou réciproquement, est toujours un nombre fini indéterminé ; 2° Le quotient ou le rapport de deux nombres, soit infinis, soit infiniment petits, est toujours un nombre fini inconnu.

Les principes du *Calcul infinitésimal* étant ainsi rigoureusement démontrés, pour les nombres infiniment grands et infiniment petits *du premier ordre*, on voit que ce n'est pas *gratuitement* que l'on étend à ces deux genres de nombres, *inexprimables* ou *irrationnels*, les règles établies pour le calcul des nombres finis.

Quant au *principe infinitésimal*, où il faut trouver des nombres finis, il ne s'applique que quand l'expression du nombre fini x cherché est ramenée à la forme $x = a + y$, a désignant un nombre fini et y un nombre infiniment petit *variable*, pouvant être négatif.

Or, si a et x ne sont pas tous les deux *constants* et qu'on néglige y, on commet une erreur infiniment petite, absolument inappréciable et dont on ne saurait tenir compte pour augmenter ou diminuer a. D'ailleurs, puisqu'on cherche un nombre fini x, l'infiniment petit y, toujours inconnu, ne saurait en faire partie, et y n'a pas plus d'influence sur x que si l'on avait rigoureusement $y = o$; d'où $x = a$. Ainsi a exprime exactement la valeur finie x cherchée.

On voit que pour calculer les nombres finis, le principe infinitésimal est rigoureusement exact; mais que dans le calcul général des nombres, ce principe est celui de *très-grande approximation*. Ici l'infiniment petit y se néglige forcément, mais cependant au même titre que quand cherchant un nombre x de centièmes, a exprimant un nombre de centièmes donné, on néglige y moindre qu'un demi-centième : il en résulte alors $x = a$, à moins d'un demi-centième près.

Maintenant, si les deux nombres finis a et x sont constants dans l'équation $x = a + y$ toujours exacte, le nombre infiniment petit variable y ne saurait entrer dans cette équation : autrement le nombre constant x serait toujours variable; chose absurde. Le nombre y disparaît donc de cette équation, non parce qu'il est nul ou infiniment petit, mais uniquement parce qu'il est variable; et l'on a $x = a$, sans aucune erreur, pas même infiniment petite.

On sait que a sur $(1 - r)$ est la génératrice par division d'une progression géométrique, et que cette génératrice *constante* ne dépend aucunement du nombre *variable* de termes calculés dans son développement. Si donc pour calculer la génératrice, on désigne par S la somme de tous les termes de la progression, continuée à l'infini, la somme S est constante comme la génératrice qu'elle représente. Or, on trouve

$$S = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^{\infty}}{1-r}.$$

Le dernier terme du second membre étant seul variable avec ∞, ne saurait entrer dans cette équation toujours exacte, et en le supprimant on a exactement la génératrice, *sans avoir rien négligé sur la valeur de* S, vu que ce dernier terme n'entre point dans cette valeur. Cela est vrai pour r quelconque, possitif ou négatif, mais différent de l'unité. — Si $r < 1$, la génératrice est la *limite* de la somme de tous les termes de la progression géométrique *décroissante*, continuée à l'infini; et cette somme atteint sa *limite* à l'infini, puisqu'il ne faut rien négliger pour y parvenir en divisant a par $1 - r$.

Des infinis et infiniment petits géométriques. On sait qu'une droite peut se prolonger toujours et sans fin, dans le même sens; elle est donc *infinie* dans son état le plus général avec une extrémité donnée : l'autre extrémité, toujours inconnue, est dite *située à l'infini.* — La mesure ou la valeur numérique de cette droite infinie est infinie elle-même et désignée par ∞. Or, tandis que la droite infinie reste *constante*, le nombre ∞ *varie en sens inverse de l'unité linéaire finie.* De sorte que si l'unité finie employée est un *minimum* ou un *maximum*, le nombre infini, désigné par ∞, sera au contraire un *maximum* ou un *minimum.*

On démontre aisément que le rapport des surfaces infinies de deux *bi-angles* équiangles est toujours un nombre fini, égal au rapport des côtés finis de ces deux bi-angles.

Si l'on conçoit qu'une grandeur géométrique *finie* A soit divisée en un nombre *infini* de parties égales à x, d'où $x \times \infty = A$, chaque partie est *infiniment petite*, car x est moindre que toute partie *finie* et *assignée* de A, si petite que soit cette dernière, sans être nulle. De plus, la partie infiniment petite x est toujours inconnue, comme echappant, par sa petitesse à l'imagination et à toute appréciation rigoureuse; de sorte que la *mesure* de x est un nombre *infiniment petit* absolument inexprimable en chiffres. Enfin, la quantité x infiniment petite *varie en sens inverse* du nombre infini proposé, désigné par ∞; et si ce dernier nombre est un *maximum* ou un *minimum*, x est au contraire un *minimum* ou un *maximum.*

La définition serait moins précise, bien qu'exprimant encore une *propriété caractéristique* évidente, si l'on appelait *infiniment petite* la quantité continue ayant le néant pour *limite.*

Une quantité infiniment petite est nécessairement *variable;* car par exemple, le point géométrique générateur d'une droite finie, décrit successivement toutes les longueurs infiniment petites possibles, croissantes à partir du néant, jusqu'à la longueur finie proposée.

L'impossibilité évidente, certaine, qu'un point géométrique suive *à la fois* deux directions différentes, démontre que *toute courbe plane finie n'est réellement qu'une ligne brisée d'une infinité de côtés ou éléments infiniment petits.* Le commun diviseur, nécessairement *rectiligne* infiniment petit, entre la courbe et une droite finie, démontre aussi directement cette proposition importante.

Soient C et c les circonférences de deux cercles tracés, dont R et r désignent les rayons. Soient P et p les périmètres de deux polygones réguliers, d'un même nombre infini n de côtés, *inscrits* dans les deux cercles : ces deux polygones réguliers sont donc *semblables* et l'on a $P : p = R : r$. Soit m le rapport *constant*, exprimable ou inexprimable, de R à r : on a donc $R = rm$ et $P = pm$.

Si les deux polygones réguliers ne coïncident pas avec les deux cercles, c'est-à-dire si les périmètres P et p ne coïncident pas avec les circonférences C et c, les différences x et y sont du moins fort petites. Et comme chaque arc infiniment petit surpasse sa corde, on a $C > P$ et $c > p$; d'où $P = C - x$ et $p = c - y$. Substituant ces valeurs dans $P = pm$, il vient $C - x = cm - ym$ et

$$C = cm + x - ym.... (1)$$

Cela posé, si $x - ym = 0$, on a $C = cm$. Or déjà $P = pm$; il n'y a donc aucune erreur finale à supposer que P et p coïncident entièrement avec C et c. D'ailleurs l'égalité $x - ym = 0$ est vraie pour $x = 0$ et $y = 0$.

Mais si la différence $x - ym$ n'est pas nulle, elle est nécessairement *variable*. En effet, les deux polygones réguliers ne cessent pas d'être *semblables*, et par conséquent l'égalité (1) subsiste toujours, lorsque le nombre infini n de côtés devient de deux en deux fois plus grand. Mais alors les périmètres P et p, ayant de deux en deux fois plus de points communs avec les circonférences C et c, approchent de plus en plus de coïncider avec ces deux courbes, et les différences x et y diminuent de plus en plus. Ces deux différences sont donc variables, aussi bien que la différence $x - ym$, toujours moindre que l'un de ses termes. Et puisque l'égalité (1) est toujours exacte, les quantités C, c, m restant constantes, il résulte de cette égalité que la quantité constante C sera toujours variable ; chose absurde. Or, d'où vient cette absurdité ? C'est évidemment de l'hypothèse que la différence $x - ym$ n'est pas nulle et par conséquent de l'hypothèse que P et p ne coïncident pas avec C et c ; donc chacune de ces hypothèses est absurde elle-même et l'on a toujours $C = cm$.

On voit que : 1° On ne commet aucune erreur finale en affirmant que le cercle est un polygone régulier d'une infinité de côtés infiniment petits, dont le rayon et l'apothème sont égaux entre eux et dont chaque angle *extérieur* est égal à l'angle infiniment petit *au centre*.

2° Tous les cercles sont *semblables*, comme polygones réguliers d'un même nombre infini de côtés ; d'où résulte aussi que toutes les circonférences sont des courbes semblables, ayant la même forme et ne différant que par leurs longueurs.

Observons d'ailleurs que pour calculer le rapport π des longueurs de la circonférence et de son diamètre, le procédé le plus élémentaire exige l'emploi d'une série de radicaux du second degré, tous irréductibles et inexprimables en chiffres ; le rapport π est donc lui-même inexprimable : c'est une fraction, toujours inconnue, dont les deux termes infinis n'ont point de facteur infini commun. Delà résulte que la circonférence et son diamètre n'ont d'autre commun diviseur qu'un *droite infiniment petite*, contenue une infinité de fois dans la circonférence ; laquelle est une ligne brisée, etc.

On démontre, comme pour le cercle, et à l'aide du procédé des *projections* orthogonales, *que toute figure plane, mixte ou curviligne, peut toujours, sans aucune erreur finale, être regardée comme un polygone rectiligne d'une infinité de côtés infiniment petits.*

Des infiniment petits matériels. Comme il existe des quantités *matérielles* finies très-petites, toujours *visibles*, la dénomination de *très-petite* ne suffit pas pour désigner clairement, ni pour distinguer des quantités finies, la quantité x dont un cheveu croît par *seconde* de durée. Car cette quantité x est invisible, inconnue et variable, vu que le cheveu croît plus vite en été qu'en hiver ; enfin, x échappe, par sa petitesse, à tous nos moyens rigoureux de mesurage et d'appréciation, absolument comme l'infiniment petit *géométrique*.

C'est pourquoi l'on doit encore appeler *infiniment petite* la quantité x ci-dessus : c'est un infiniment petit *physique* ou *matériel*, qu'on ne doit pas confondre avec l'infiniment petit géométrique ; car pour avoir un produit *fini*, il suffit de multiplier le premier par un nombre fini très-grand, tandis qu'il faut multiplier le second par un nombre infini.

On objecte qu'en un an le cheveu croît d'une longueur finie, que l'on peut très-bien mesurer et apprécier ; que par suite, pour avoir la longueur x, il suffit de diviser le nombre résultant par le nombre de secondes de l'année. — Je réponds que les instruments les plus exacts et nos moyens d'appréciation ne permettront jamais de mesurer la longueur finie ci-dessus, à une erreur près, moindre que x invisible ; cette dernière longueur x sera donc toujours inconnue et absolument inappréciable par sa petitesse.

On objecte encore que les infiniment petits matériels ne peuvent se négliger, sans erreur appréciable, qu'à la fin des calculs ; ce qui est vrai. Mais le principe infinitésimal, *par compensation d'erreurs*, ne porte que sur les infiniment petits géométriques : il démontre qu'*il n'y a aucune erreur finale à supprimer, au commencement du calcul, certains infiniment petits qui doivent en disparaître à la fin comme variables*. Non-seulement ce principe simplifie merveilleusement les calculs, mais rend apparente l'exactitude logique complète que la theorie infinitésimale possède réellement. Bien entendu que les infiniment petits géométriques, dans les calculs, y sont censés d'abord réduits en nombres infiniment petits.

Dans la Mécanique appliquée, où l'on suppose ordinairement *homogènes* les corps que l'on considère, les *masses* de ces corps sont représentées par leurs *volumes*. Quelle que soit donc la forme de chaque *point matériel*, dont les trois dimensions sont infiniment petites chacune, comme on sait, son volume est un infiniment petit du *troisième ordre*, et la mesure de ce volume peut toujours être exprimée par x^3, x désignant une droite numérique infiniment petite.

D'après cela, connaissant le poids spécifique d'un liquide homogène en équilibre dans un vase conique circulaire, dont la base est horizontale, la simple théorie infinitésimale suffit pour calculer : 1° La *pression* sur chaque point du contour d'une section horizontale et la *tension* sur ce contour ; 2° La tension totale sur chaque génératrice de la paroi et par conséquent la *pression* sur la paroi elle-même ; 3° Enfin, le *centre* de pression, qu'il importe de bien connaître, afin d'y appliquer une résistance suffisante. (Voyez à ce sujet les Éléments de Mécanique, p. 264 et suivantes).

Quadrature et Cubature. On a vu comment le calcul différentiel et le calcul intégral simplifient la *discussion* des lignes et des surfaces courbes, aussi bien que la quadrature et la cubature de ces lignes et de ces surfaces. Pour avoir de nouvelles applications, considérons les équations à coordonnées rectangulaires :

$$a^2 y^3 = a^2 x^3 - 2 a x^4 + x^5 ;$$
$$(y^2 + 4 z^2 - 2 a x)^2 = a^2 x^2 - x^4 ;$$
$$(x^2 y^2 + a^2 z^2)^2 = a^4 x^4 - a^2 x^6 ;$$
$$x^2 y^2 + a^2 z^2 = a^2 x^2 - x^4 .$$

La première de ces équations représente une courbe parabolique carrable, ayant à $x = a$ un point de rebroussement. — La seconde exprime la surface composée de deux nappes finies depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$, limitant deux volumes l'un double de l'autre. — La troisième équation désigne la surface formée de deux nappes finies, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pm a$, limitant deux volumes égaux, chacun équivalent au quart de la sphère dont a est le rayon. Cette surface a deux sections elliptiques *maximum*, parallèles au plan de *symétrie* des yz. Le plan des xz coupe la surface suivant la *lemniscate* dont l'aire est mesurée par $\frac{8}{5} a^2$, etc. — Enfin la dernière surface se discute absolument comme la précédente.

Remarques. Les Géomètres qui rejettent encore l'emploi explicite des infinis, sous prétexte que ces grandeurs n'existent pas ou du moins que les notions en sont obscures, conviennent cependant que cet emploi conduit, avec une merveilleuse rapidité, à des résultats reconnus exacts par des procédés beaucoup plus compliqués, mais qu'ils regardent comme plus rigoureux (bien que ces procédés, dits plus rigoureux, soient parfois des non-sens). Au lieu donc de recourir à des détours obscurs, à des procédés fort compliqués, il est bien plus naturel de chercher, dans la méthode infinitésimale même, la cause de l'exactitude logique des résultats que cette méthode donne avec tant de facilité. Or, cette cause n'est autre que le *principe par compensation d'erreurs finales*. Il est singulier que ce principe, déjà signalé par Carnot, avant 1813 (Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitisémal), ne soit pas démontré, ni même mentionné, dans les traités élémentaires où la théorie des variables, qui fournit le principe infinitésimal ci-dessus, est cependant nécessaire pour donner à ces ouvrages toute la simplicité et toute la rigueur logique dont ils sont susceptibles.

Par exemple, si dans l'expression de la somme S des n premiers termes d'une progression géométrique, on suppose que S désigne la *génératrice* de cette progression, il est clair que cette génératrice étant constante, ne saurait dépendre du nombre variable n de termes calculés dans son développement. Donc le terme fonction de n doit disparaître de l'expression de S : autrement la quantité constante S serait toujours variable; chose absurde.

De même, si dans l'expression de la somme S des n premiers termes d'une *série récurrente* du second ordre, on suppose que S désigne la *génératrice* constante de cette série, les deux termes, fonctions de n et variables avec n, doivent disparaître de l'expression de S pour avoir la génératrice cherchée.

On trouvera de même la fraction algébrique, *génératrice* par division de toute *série récurrente* du troisième ordre.

On sait d'ailleurs que la méthode des *coefficients indéterminés* est nécessaire pour développer, avec facilité, les fractions algébriques en séries récurrentes et surtout pour bien mettre en évidence la loi de formation de ces séries. On sait de plus que la théorie des variables démontre très-simplement le principe fondamental de la méthode des coefficients indéterminés et le principe infinitésimal. Celui-ci d'ailleurs justifie l'appréciation ci-dessous de Carnot, dans l'ouvrage cité (édition de 1813, p. 215) :

« Le mérite essentiel, le sublime, on peut le dire, de la méthode infinitésimale, est de réunir la facilité des procédés d'un simple calcul d'approximation, à l'exactitude des résultats de l'analyse ordinaire. Cet avantage immense serait perdu, ou du moins fort diminué, si à cette méthode pure et simple, telle que nous l'a donnée Leibnitz, on voulait, sous l'apparence d'une plus grande rigueur soutenue dans tout le cours du calcul, en substituer d'autres moins naturelles, moins commodes, moins conformes à la marche probable des inventeurs. »

De plus, comparant la méthode infinitésimale à celle des limites, Carnot dit plus haut (p. 213) : « Il faut remarquer que dans les recherches mathématiques, c'est naturellement sur les quantités appelées infiniment petites elles-mêmes, que se fixe l'imagination, et non sur les limites de leurs rapports. Si l'on me demande le volume d'un corps terminé par une surface courbe, j'imagine réellement ce volume partagé en un grand nombre de tranches ou même de particules. Ce sont bien ces tranches ou ces particules elles-mêmes que je considère, et non les divers rapports qu'elles peuvent avoir entre elles, et encore moins les limites de ces rapports. Mon imagination cherche un objet sensible; des formes purement algébriques ne lui offriraient rien que de vague. La division en tranches ou particules m'offre un tableau, éclaire mon esprit, le guide, et facilite la solution. Je regarde l'une de ces particules comme l'élément de la quantité totale, etc. »

ERRATA

de la théorie infinitésimale appliquée.

P. 38, ligne 13 en remontant : que a est *lisez* que x est
P. 46, ligne dernière $\pm n(n+1)$, *lisez* $\pm \frac{1}{2} n(n+1)$
P. 71, ligne 14 en rem. : $h^2 - \frac{1}{4} c^2$, *lisez* $h^2 + \frac{1}{4} c^2$
P. 90, ligne 7 en rem. : *généralition*, *lisez généralisation*
P. 101, ligne 7 en rem. : 1.3.7.9, *lisez* 1.3.5.7
P. 120, ligne dernière : $-b^2 z$, *lisez* $-b^2 x$.

III. — *Énumération des Mollusques terrestres et fluviatiles vivants de la France continentale*,

PAR

Henri DROUET.

I. AVERTISSEMENT.

1. Je destine cet opuscule aux malacologistes voyageurs, à ceux qui ont des collections et qui font des échanges. Il ne faudrait pas chercher des vues neuves, des idées originales, des remarques intéressantes, dans cette compilation aride, faite originairement pour mes amis et sur leur demande. J'ai voulu qu'on pût embrasser d'un coup-d'œil, rapidement et sous un faible espace, les richesses malacologiques de la faune française : tel a été mon but en entreprenant cette Énumération, simple memento du conchyliologue français.

2. « S'il s'agit d'un pays connu, dit M. De Candolle (et j'applique à nos mollusques indigènes ses idées sur les plantes), une simple énumération des espèces, sans phrases ni descriptions, mais avec quelques synonymes, et surtout avec l'indication soignée des localités, est ce qui vaut le mieux..... De simples catalogues des noms de genres et d'espèces, arrangés, soit dans l'ordre alphabétique, soit dans un ordre scientifique, sont utiles pour la recherche des synonymes, et pour faire trouver les descriptions, éparses dans un grand nombre d'ouvrages. » (A. De Candolle, *Introduction à l'étude de la botanique;* Paris, 1835).

3. Je ne rappellerai pas ici les règles bien connues de l'antério-

rité, en ce qui touche les dénominations scientifiques. Le droit d'antériorité étant, à mes yeux (sauf quelques rares exceptions), un droit sacré, je l'ai scrupuleusement respecté, toutes les fois qu'il a été en mon pouvoir de le faire. Si, d'un côté, l'adoption générale, universelle, est la récompense qui doit couronner les conceptions primordiales, les innovations ingénieuses et rationnelles, les idées saines et philosophiques, d'un autre côté, l'abandon est la pénalité qui doit impitoyablement frapper les dénominations tardives ou inutiles, les idées fausses, les définitions inexactes ou mal conçues. C'est ainsi, pour ne citer qu'un exemple, que j'ai remis en vigueur différentes appellations spécifiques appartenant à Olivi, et consignées par lui dans sa *Zoologia Adriatica* (1792). L'érudition infatigable et toujours croissante de nos auteurs modernes amènera sans doute encore de nouveaux changements dans la nomenclature.

4. La méthode naturelle (c'est le beau, dans l'histoire de la nature) étant l'idéal vers lequel doivent tendre tous nos efforts, il est évident que le meilleur classement, pour les espèces, est celui qui les présente dans l'ordre exprimant le plus exactement leurs rapports, en prenant tout à la fois pour guide, la nature (j'entends la manière dont elle les groupe elle-même sur le sol), la similitude de mœurs et d'organisation, et les analogies de l'enveloppe testacée. Mais ici, pour faciliter les recherches et l'usage, j'ai dû suivre l'arbitraire de l'arrangement alphabétique.

Quant aux genres, j'ai tâché de les coordonner le plus naturellement possible, en consultant leurs affinités : c'est, notamment, ce qui m'a fait placer le genre *Ancylus* parmi les *Limnacea*, près des genres *Planorbis* et *Limnæa*, ainsi que le veulent les recherches anatomiques les plus récentes.

Avec M. Moquin-Tandon, j'ai adopté l'ordre nouveau des *Pulmobranchia*, pour tous les mollusques aquatiques jouissant de la double faculté de respirer l'air contenu dans l'eau et l'air libre. La famille des *Limnacea*, seule, est dans ce cas.

5. Après un examen sévère, j'ai dû éliminer quelques-unes des espèces établies dans ces derniers temps; d'un autre côté, j'en ai proposé quelques autres, nouvelles pour la faune française : dans l'un et l'autre cas, je me suis mis en garde contre les extrêmes, et j'ai tâché d'agir avec réserve et circonspection. Mais je prévois qu'un remaniement ultérieur pourra modifier encore cette

partie de mon travail, surtout en ce qui regarde la restriction du nombre des espèces (*).

6. Il y a deux sortes de synonymes : ceux qui se réfèrent au type même de l'espèce; ceux qui ont pour objet des variétés plus ou moins tranchées (ce fléau de la science, comme les appelle Fabricius). J'ai pris soin, autant qu'il m'a été possible, d'établir ces distinctions.

7. Cet opuscule étant, avant tout, destiné à mes compatriotes, je me suis particulièrement attaché à donner la synonymie de nos principaux auteurs. J'ai remonté, pour cela, au Prodrome de Poiret sur les coquilles de l'Aisne et des environs de Paris (1801) (**), antérieur, comme on sait, de quelques mois au Tableau des Mollusques de la France, par Draparnaud (***), lequel a lui-même précédé de quelques semaines une Liste des Testacés de la Côte-d'Or, publiée par M. le D[r] Vallot (****). Parmi ces trois auteurs, dont l'ordre de succession doit être réglé comme je viens de le faire, Draparnaud, par l'ouvrage précité, s'est assuré un droit in-

---

(*) Faire des espèces, c'est la manie du jour; nous appauvrissons la science tout en ayant l'air de l'enrichir. Pourquoi tant s'écarter de la voie tracée par les Linné, les Müller, les Cuvier, les Lamarck, les Draparnaud?.... Laissons une nation voisine s'égarer dans ce labyrinthe sans issue, et revenons, il en est temps encore, aux doctrines des maîtres que je viens de citer.

Pour ma part, je serais heureux si mon Énumération pouvait contribuer à faire prendre en aversion les abus, véritablement excessifs et intolérables, de nomenclature : car c'est bien là ce qui diminue chaque jour le nombre des naturalistes, au lieu de l'augmenter.

(**) *Coquilles fluviatiles et terrestres observées dans le département de l'Aisne et aux environs de Paris. Prodrôme.* Par J. L. M. Poiret. — Paris et Soissons, an IX. — 1 vol. in-12 de 119 pages. = Paru en avril 1801. Petit volume qui commence à devenir assez rare dans le commerce.

(***) *Tableau des Mollusques terrestres et fluviatiles de la France.* Par J. Draparnaud. — Montpellier et Paris, an IX. — 1 vol. in-8° de 116 pages. = Paru en juillet 1801! Volume rare et peu connu des étrangers. Il n'est plus dans le commerce.

(****) *Ecole centrale du département de la Côte-d'Or. Exercice sur l'histoire naturelle.* — Dijon, imprimerie de L. N. Frantin, 2 et 3 fructidor an IX. — 8 pages in-4°. = L'article 14[e] de cet Exercice est une liste descriptive des testacés terrestres et fluviatiles du département, rédigée par M. le D[r] Vallot, alors professeur d'histoire naturelle à l'Ecole centrale. Paru en août 1801! Ce catalogue est extrêmement rare. Je n'en connais qu'un exemplaire, conservé à la bibliothèque publique de Dijon.

contestable de priorité sur Montagu, dont le *Testacea Britannica* ne parut qu'en 1803. J'ai ensuite successivement passé en revue tous nos auteurs de faunes malacologiques, françaises et départementales, depuis Draparnaud jusqu'à Michaud, et depuis ce dernier jusqu'à M. l'abbé Dupuy. Je cite également, en tant que de besoin, les noms des Bruguière, Lamarck, Férussac, de Blainville et Deshayes, tous cinq princes de la science, et dont les écrits se placent, au premier rang, dans nos bibliothèques (*).

Néanmoins, comme il pourrait se faire que cette énumération vînt à tomber entre les mains de naturalistes étrangers, j'y ai joint, au besoin, la nomenclature adoptée dans les ouvrages partout connus de Rossmässler (*Iconographie*) et de Gray (*Turton's Manual*).

Dans tous les cas, je crois pouvoir garantir l'exactitude de mes citations synonymiques, que je n'ai maintenues qu'après une minutieuse vérification, faite sur des échantillons authentiques, ou, tout au moins, sur les diagnoses originales.

8. J'ai marqué d'une astérique * les espèces et les variétés principales faisant partie de ma collection. Je les offre, pour la plupart, en échange, aux naturalistes qui voudront bien se dessaisir en ma faveur de quelques-unes de celles, malheureusement trop nombreuses, que je n'ai pas encore pu me procurer.

9. Certaines régions de la France ont été, depuis trente ans, explorées avec un soin tout particulier. Dans ces localités, peut-on dire, pas une colline, pas un ruisseau, pas une roche, n'a échappé aux investigations du conchyliologue. Mais il n'en a pas été de même partout. Je crois que les plaines rocheuses de la Bretagne, les forêts des Vosges et du Jura, certains vallons des Alpes même, sont loin d'être parfaitement connus. D'un autre côté, a-t-on dit le dernier mot sur les cratères éteints de l'Auvergne? les sauvages retraites des Cévennes n'ont-elles plus rien à révéler? avons-nous clos irrévocablement la faune des côtes de la Normandie, des landes de l'Aquitaine, et même aussi, de certains pics des Pyrénées? Je ne le pense pas. J'appelle donc, en passant, l'attention des voyageurs, sur ces régions, que je regarde comme imparfaitement connues.

(*) J'ai passé sous silence la synonymie de Geoffroy, désormais positivement arrêtée, et celle de ceux de nos auteurs qui ont suivi sa méthode. Leur nomenclature, parce qu'elle n'est point écrite en langue scientifique, ne se prêtait pas facilement à figurer dans le genre de compilation que j'ai entrepris.

10. Je profite, en outre, de l'occasion, pour annoncer aux malacologistes que je réunis, en ce moment, les matériaux d'une *Monographie des Naïades de l'Europe.* Je recevrai donc avec empressement et reconnaissance, les documents de toute nature que l'on voudra bien m'envoyer, en communication ou autrement; et j'aurai soin, en en faisant usage, d'indiquer la source d'où ils me sont venus.

11. Depuis une dizaine d'années, plusieurs naturalistes français et étrangers me sont venus en aide, en m'adressant bénévolement, les uns des échantillons authentiques, les autres de précieux renseignements, ceux-ci des mémoires rares ou difficiles à obtenir, ceux-là des notes manuscrites, tous de bienveillants conseils. Je remplis un devoir bien doux de reconnaissance en citant, parmi les étrangers, M. *de Charpentier*, à Bex; M. le Dr *Graells*, à Madrid; M. le rév. *L. Jenyns*, à Cambridge; M. le prof. *Kickx*, à Gand; M. le Dr *L. De Koninck*, à Liége; M. le Dr *Küster*, à Ansbach; M. *Mortillet*, à Annecy; M. *Nyst*, à Anvers; M. *Parreyss*, à Vienne; M. *T. Prime*, à La Haye; M. le prof. *Rossmässler*, à Leipzig; M. le prof. *Shuttleworth*, à Berne; MM. *Villa frères*, à Milan; — et parmi mes compatriotes, MM. *G. d'Aumont*, à Bastia; *Baillon*, à Abbeville; *Barbié*, à Dijon; le Dr *Baudon*, à Mouy-de-l'Oise; *Bouchard-Chantereaux*, à Boulogne-s.-Mer; *Bourguignat*, à Paris; *Buvignier*, à Verdun; *P. de Cessac*, à Guéret; le Dr *Chenu*, à Paris; *Collard des Cherres*, à Brest; *Cotteau*, à Coulommiers; *Deschiens*, à Vincennes; *Deshayes*, à Paris; l'abbé *Dupuy*, à Auch; *Farines*, à Perpignan; *P. Fischer*, à Bordeaux; *Gassies*, id.; le Dr *de Grateloup*, id.; l'abbé *Jacquel*, à Liézey; *Jacquemin*, à Arles; *Joba*, à Metz; *Lecoq*, à Clermont-Ferrand; *Millet*, à Angers; *Moquin-Tandon*, à Paris; *Morelet*, à Dijon; *Ch. Des Moulins*, à Bordeaux; *Normand*, à Valenciennes; *Petit de La Saussaye*, à Paris; *Puton*, à Remiremont; *J. Ray*, à Troyes; *E. de Saulcy*, à Metz; *de Saint-Simon*, à Toulouse; l'abbé *Simonel*, à Langres (enlevé aux sciences, par la mort, il y a quelques années!) *Terver*, à Lyon, et M. le Dr *Vallot*, à Dijon. J'offre ici, publiquement, à tous mes chers correspondants, mes remerciements les plus sincères pour leurs obligeantes communications, et je les prie de me continuer, longtemps encore, leur savant et honorable concours.

12. Deux abréviations principales ont été employées dans le cours de cette Énumération : R. signifie : espèce rare. ! indique

une localité certaine, dont je possède, ou dont j'ai vu, pour le moins, les échantillons. J'ai recueilli moi-même la plupart des espèces de l'Aube, de l'Oise et des Vosges.

Troyes, *septembre* 1854.

II. ÉNUMÉRATION

DES MOLLUSQUES TERRESTRES ET FLUVIATILES VIVANTS

DE LA FRANCE CONTINENTALE.

Class. I. Gasteropoda.

Ord. I. Pulmonata.

† INOPERCULATA.

Fam. 1. Limacea.

Gen. 1. ARION Férussac. 1819. (1).

1. **albus** *Müll.* (Limax) . . . . . Hab. les Alpes du Dauphiné. R.

* 2. **cinctus** *Müll.* (Limax) (2) . . . Hab. le Sorézois (Drap.); les Alpes! Dijon (Barb.); Troyes! Grasse (Panesc.).
subfuscus *Drap.* (Limax).

3. **flavus** *Müll.* (Limax) . . . . . Hab. les falaises du Pas-de-Calais (Bouch.); Valenciennes (Norm.).
aureus *Gmel.* (Limax).
intermedius *Norm.*

* 4. **fuscatus** *Fér.* . . . . Hab. les environs de Paris (Fér.).

* 5. **fuscus** *Müll.* (Limax) (3). . . . Hab. la France septentrionale. Très-variable.
concava (Limacella) *Brard?*
fasciatus *Nilss.* (Limax).
hortensis *Fér.?*
leucophæus *Norm.?*

6. **melanocephalus** *Faur.-Big.* (4) . Hab. les Alpes du Dauphiné (Fér.).

* 7. **rufus** *Lin.* (Limax) . . . . Hab. toute la France. Varie du jaune-orange au brun-noir, par toutes les teintes.
empiricorum *Fér.*

Var.

* ater *Lin.* (Limax) . . . . . . Hab. la France entière, dans les bois.
* subrufus *List.* (Limax). . . . . Hab. partout.
* succineus *Müll.* (Limax) . . . Hab. une grande partie de la France.
luteus *Razoum.* (Limax).
virescens *Mill.* . . . . Hab. Segré (Maine-et-Loire).

8. **succineus** *Bouill.* (non Müll.) . . Hab. les bois de l'Auvergne (Bouill.).

* 9. **tenellus** *Müll.* (Limax) (5) . . . Hab. la France septentr., dans les bois.

Gen. 2. LIMAX Linné. 1758.

* 10. **agrestis** *Lin.* . . . . Hab. la France entière. Sa coloration est plus variable que sa taille.
filans *Hoy.*
obliqua (Limacella) *Brard.*
reticulatus *Drap.* Tabl.

Limax.

	11.	**alpinus** *Fér.*	Hab. les Alpes, à la Grande-Chartreuse. R.
	12.	**arborum** *Bouch.*	Hab. Boulogne-sur-Mer (Bouch.).
	13.	**bilobatus** *Fér.*	Hab. les environs de Paris (Fér.).
*	14.	**brunneus** *Drap.* (6)	Hab. Montpellier (Drap.); Boulogne-sur-Mer (Bouch.); Arcis-s.-Aube? — Bonneville, en Savoie! R.
*	15.	**cinereo-niger** *Sturm.* (7). . . . . . antiquorum var. a *Fér.* ater var. *B. Müll.* ater *Razoum.* bilobatus *Ray* et *Drouet* (olim). claravallensis *Drouet* (olim). fasciatus *Razoum.* lineatus *Dum.*	Hab. une grande partie de la France septentrionale et centrale, sur les hauteurs et dans les bois : Bar-sur-Seine! Valenciennes! Remiremont! Clermont-Ferrand (Lecoq)... — Bonneville, en Savoie!
	16.	**collinus** *Norm.*	Hab. Valenciennes (Norm.).
	17.	**fulvus** *Norm.*	Hab. id. id.
*	18.	**gagates** *Drap.*	Hab. une grande partie de la France.
*	19.	**marginatus** *Drap.* (Müll.?)	Hab. toute la France montagneuse.
*	20.	**maximus** *Lin.* . . . . antiquorum *Fér.* cellarius *d'Arg.* cinereus *Drap.* parma (Limacella) *Brard.*	Hab. toute la France; très-variable dans sa taille et sa coloration suivant l'habitat.
	21.	**parvulus** *Norm.*	Hab. Valenciennes (Norm.)
	22.	**salicium** *Bouill.*	Hab. Clermont-Ferrand (Bouill.).
*	23.	**sylvaticus** *Drap.* (8) . . . . . . rusticus *Mill.* affinis *Mill.* scandens *Norm.*	Hab. toute la France, dans les bois.
*	24.	**variegatus** *Drap.* . . . . reticulatus *Müll.*? unguiculus (Limacella) *Brard.*	Hab. toute la France, dans les caves.

Gen. 3. PARMACELLA Cuvier. 1804.

25.	**Gervaisii** *Moq.*	Hab. la plaine de la *Crau*, près d'Arles (Faïsse).
26.	**Valenciennii** *Webb* et *V. Ben.* . .	Hab. Arles (Moq.).

Gen. 4. TESTACELLA. Draparnaud. 1801 (9).

*	27.	**bisulcata** *Risso.*	Hab. Grasse.
	28.	**Companyonii** *Dup.* . . . . haliotidea var. *Aler.*	Hab. St.-Martin-du-Canigou (Pyrén.-Orient.).

* 29.	**haliotidea** *Drap.* . . . . Europæa *Roissy.* Galliæ *Ocken.*	Hab. la France méridion. et moyenne. Elle ne dépasse guère, librement, le 48ᵉ degré de latitude. On la trouve cependant, mais introduite, dans certains jardins botaniques de la région Nord : à Paris, en Normandie, en Bretagne.

Fam. II. Helicea.

Gen. 5. **VITRINA** Draparn. 1801.

* 30.	**annularis** *Stud.* (Hyalina) (10) . . . subglobosa *Mich.*	Hab. le Nord et l'Est, surtout dans les montagnes : Valenciennes ! Lyon ! Briançon (Terv.).
* 31.	**diaphana** *Drap.* . . . . vitrea *Fér.* (Helicolimax).	Hab. Bordeaux, Poitiers. R.
* 32.	**Draparnaldi** *Cuv.* (Helix). . . . . Audebardi *Fér.* (Helicolim.). major *Fér.* (Helicolimax). pellucida *Drap.* (non Müll.)	Hab. toute la France, particulièrement les régions méridionales. Il est certain que l'espèce décrite par Draparnaud, sous le nom de *V. pellucida*, est distincte de la *V. pellucida* de Müller.
* 33.	**elongata** *Drap.*	Hab. les montagnes : les Monts-d'Or, les Cévennes, les Pyrénées, les Vosges (le *Honeck* !).
* 34.	**pellucida** *Müll.* (Helix) . . . . . . diaphana *Poir.* (Helix). beryllina *C. Pfeiff.*	Hab. le Nord : Beauvais ! Remiremont ! Metz ! Langres ! Arcis-sur-Aube !
35.	**Pyrenaica** *Fér.* (Helicolim.). . . .	Hab. la vallée d'Ossau, près le pic du Midi [Haut.-Pyrén.] (Fér.).

Gen. 6. **SUCCINEA** Draparn. 1801.

* 36.	**arenaria** *Bouch.*	Hab. les dunes de Camier (Bouch.) ; Remiremont (Put.) ; Barèges (Saulc.); la Gascogne et la Provence (Dup.).
* 37.	**Baudonii** *Drouët* (11)	Hab. Mouy-de-l'Oise. R.
* 38.	**Corsica** *Shuttl.* (12). . . . . longiscata *Dup.*	Hab. Grasse, les environs de Nice ! la Provence (Dup.).
* 39.	**humilis** *Drouët* (13). . . . . abbreviata *Ray* et *Drouët* (olim).	Hab. Troyes, Arcis-sur-Aube, Remiremont.
* 40.	**oblonga** *Drap.* . . . . elongata *Fér.* (Helix).	Hab. toute la France.
* 41.	**ochracea** *Betta* (14).	Hab. Troyes ! Bar-sur-Aube ! Bar-sur-Seine ! R.
* 42.	**Pfeifferi** *Rossm.* . . . . amphibia var. γ. δ. *Drap.*	Hab. toute la France.

Succinea.

* 43.	**putris** *Lin.* (Helix) . . . . amphibia *Drap.* succinea *Brug.* (Bulimus).	Hab. toute la France.

Gen. 7. **HELIX** Linné (emend.). 1758.

Sect. 1. Zonites Montf. [15].

* 44.	**algira** *Lin.* . . . . algirea *Montf.* (Zonites).	Hab. la France méditerranéenne, de Perpignan à Antibes.
45.	**alliaria** *Miller* [16] . . . . alliacea *Jeffr.*	Hab. le mont Pilat, près de Lyon (Terv.). R.
* 46.	**cellaria** *Müll.*	Hab. la France septentr. dans les bois et sur les hauteurs : Mouy-de-l'Oise ! Troyes ! Remiremont ! Lyon ! Metz !
* 47.	**crystallina** *Müll.*	Hab. toute la France.
* 48.	**fulva** *Müll.* . . . . trochiformis *Mont.*	Hab. toute la France. On trouve à Lyon, une jolie var. (peut-être une espèce distincte) à péristôme bordé et à stries très-marquées.
* 49.	**glabra** *Stud.* . . . . splendens *Faure-Big.*?	Hab. les Alpes; le Bugey, au Colombier (Terv.). R.
50.	**hyalina** *Fér.* . . . . crystallina var. *β. Drap.*	Hab. les contrées montagneuses du centre et du sud : le mont d'Or; les Alpes; les Pyrénées; Lyon !
* 51.	**hydatina** *Rossm.* [17]	Hab. Montpellier (Terv.); Lyon ! R.
* 52.	**lucida** *Drap.* Tabl. . . . . Draparnaldi *Beck.* nitens *Poir.* nitida *Drap.* Hist.	Hab. toute la France, surtout le Midi, dans les localités cultivées et autour des habitations.
* 53.	**nitens** *Mich.* (Müll.?) . . . . tenera *Faure-Big.*	Hab. toute la France, mais surtout le Nord : Valenciennes, Verdun, Auxerre, Troyes, Lyon, Grenoble, Auch, etc.
* 54.	**nitida** *Müll.* . . . . lucida *Drap.* Hist.	Hab. toute la France.
* 55.	**nitidosa** *Fér.* [18] . . . . pura *Alder.* vitrina *Fér.*	Hab. le Nord de la France : Valenciennes! Mouy-de-l'Oise! Troyes! Remiremont! Lyon! la Normandie! la Bretagne (Dup.); l'Auvergne (Terv.).
56.	**nitidula** *Drap.*	Hab. les Pyrénées (Dup.); Lyon (Terv.). R.
* 57.	**olivetorum** *Gmel.* . . . . incerta *Drap.*	Hab. le Midi, surtout la région pyrénéenne. Elle ne dépasse pas le 45° de latitude.
* 58.	**pygmæa** *Drap.*	Hab. une grande partie de la France.

* 59. **radiatula** *Alder.* . . . . Hab. toute la France, principalement les contrées montagneuses : Remiremont! Troyes! Lyon! Mouy-de-l'Oise! Auch, etc.
nitidula var. *β. Drap.*

Var.

viridula *Menke.* . . . . Hab. *passim.*

Sect. 2. Helix Auct. quorumd.

* 60. **aculeata** *Müll.* [19] . . . . Hab. toute la France, sur les hauteurs et dans les bois.
spinulosa *Auct. brit.*

* 61. **Alpina** *Faure-Big* . . . . Hab. les haut[rs] de la chaîne des Alpes.

* 62. **aperta** *Born.*. . . . . Hab. la Provence.
naticoïdes *Drap.*

* 63. **apicina** *Lam.* . . . . Hab. la France méditerranéenne.
Cenisia *Charp.*
Narbonensis *Req.*

* 64. **arbustorum** *Lin.* . . . . Hab. une grande partie de la France, surtout le Nord, le centre et l'Est. On ne l'a pas encore vue dans le Languedoc. Très-variable.

Var.

* Alpicola *Fér.* . . . . Hab. les Alpes.
Baylei *Ducr.* . . . . Hab. les montagnes de l'Auvergne.
* Canigonensis *Boub.* . . . . Hab. les Pyrénées-Orientales.
Xatartii *Far.*
* picea *Ziegl.* . . . . Hab. les escarpements du Honeck [Vosges]!
Wittmanni *Zaw.*
Repellini *Charp.* . . . . Hab. la route du Lantaret, au pied des rochers, dans les Alpes (A. Gras)
planospira *A. Gras.*

65. **arenosa** *Rossm.* . . . . Hab. Biarritz [Basses-Pyrénées]. R.

* 66. **aspersa** *Müll.* . . . . Hab. à-peu-près toute la France. Elle est rare à Metz.

67. **bidentata** *Gmel.* . . . . Hab. les Alpes (Dup.). R.
bidens *Chemn.* (Trochus).

* 68. **candidissima** *Drap.* . . . . Hab. la Provence.

* 69. **Cantiana** *Mont.* . . . . Hab. la France océanienne et méditerranéenne : Valenciennes! Calais! Boulogne, Toulon (Terv.); Montpellier (Dup.).
carthusiana *Drap.*

Var.

* Galloprovincialis *Dup.* . . . . Hab. la Provence.

* 70. **Carascalensis** *Fér.* . . . . Hab. les haut[rs] de la chaîne des Pyrén.

* 71. **carthusiana** *Müll.* . . . . Hab. toute la France.
carthusianella *Drap.*

Var.

* rufilabris *Jeffr.* . . . . Hab. une grande partie de la France, mais surtout la France maritime.
carthusianella *var. β. Drap.*
Olivieri *Mich.*

Helix.

* 72.	**cespitum** *Drap.*	Hab. la France méditerr. ; ne s'éloigne guère du littoral.
* 73.	**ciliata** *Venetz.*	Hab. Grasse, la Sainte-Beaume.
* 74.	**cinctella** *Drap.*	Hab. la Provence ; Lyon, Valence.
* 75.	**Cobresiana** *v. Alt.* . . . . monodon *Fér.* unidentata *Drap.*	Hab. le Dauphiné, la Bresse, le Bugey ! R.
76.	**Companyonii** *Aler.* . . . . Hispanica v. pyren. *Rossm.*	Hab. Banyuls-sur-Mer [Pyrén.-Orientales]. R.
* 77.	**concinna** *Jeffr.*	Hab. le Jura, la Provence ; Lyon, Grenoble (Terv.). R.
* 78.	**conoidea** *Drap.* . . . . solitaria *Poir.* ?	Hab. les côtes de la Méditerranée ; peut-être aussi celles de la Manche ?
* 79.	**conspurcata** *Drap.*	Hab. le Midi.
* 80.	**constricta** *Boub.* . . . . Pitorrii *Dup.* (olim).	Hab. Saint-Martin-d'Albérou [Basses-Pyrén.]. R.
* 81.	**cornea** *Drap.*	Hab. le centre et le Midi. Ne remonte pas plus haut que le 47e de latit.
	Var.	
*	squamatina *Fér.*	Hab. Montpellier.
* 82.	**costata** *Müll.* . . . . pulchella var. β. *Drap.*	Hab. toute la France.
* 83.	**costulata** *Ziegl.* (20). . . . . . . rugosiuscula *Auct. quor.*	Hab. le Nord-est : Metz ! Langres ! Bar-sur-Seine ! Auxerre ! Remiremont (Put) ; Lyon (Terv.).
* 84.	**depilata** *Drap.* Tabl. (21) . . . . . edentula *Drap.* Hist.	Hab. les escarpements du Honeck [Vosges] à 1300 m. avec l'*H. sericea* ! les Alpes Dauphinoises, le Bugey (Terv.).
* 85.	**Desmolinsii** *Fér.* . . . . cornea var. cyclostom. *Rossm.* Moulinsii *Pot.* et *Mich.*	Hab. la chaîne des Albères [Pyrén.-Orientales].
* 86.	**elegans** *Gmel.* . . . . terrestris *Chemn.* (Trochus).	Hab. le midi de la France. Tout le Languedoc. On la trouve aussi à Boul.-sur-Mer et à Beauvais ! Espèce du littoral.
* 87.	**ericetorum** *Müll.*	Hab. toute la France.
* 88.	**explanata** *Müll.* . . . . albella *Drap.*	Hab. la France méditerr. Ne s'écarte guère du littoral.
* 89.	**fasciolata** *Poir.* . . . . caperata *Mont.* striata *Drap.*	Hab. toute la France.
	Var.	
	Gigaxii *Charp.*	Hab. Arles.
* 90.	**Fontenillii** *Mich.*	Hab. la Grande-Chartreuse.

Helix.

* 91.	**fruticum** *Müll.* . . . . lucana *Vall.* cinerea *Poir.*	Hab. le Nord, le centre et l'Est.
* 92.	**fusca** *Mont.* . . . . revelata *Bouch.*	Hab. Boulogne-sur-Mer; Dax, Mont-de-Marsan... Paraît propre au littoral océanien.
* 93.	**glabella** *Drap.* (22).	Hab. Lyon, Dijon (Barb.).
* 94.	**glacialis** *Thom.* (23)	Hab. le versant français du Mont-Thabor, dans le Haut-Oisans (Mort.).
* 95.	**hispida** *Lin.*	Hab. toute la France. Les plus beaux types que j'aie vus, venaient de Bordeaux (Fisch.).
* 96.	**holosericea** *Gmel.*	Hab. les Alpes, le Jura. R.
* 97.	**hortensis** *Müll.* . . . . fusca *Poir.* hybrida *Poir.* *Var.*	Hab. la France entière. Toutefois elle est assez rare dans le Midi.
*	Ludoviciana *d'Aum* (24).	Hab. les montagnes de l'Auvergne!
* 98.	**incarnata** *Müll.*	Hab. le Nord, l'Est et le centre, dans les bois.
* 99.	**intersecta** *Poir.* . . . . cælata *Vall.?* striata var. γ. δ. *Drap.*	Hab. la France occidentale et méridionale : Agen! Bordeaux! le Morbihan, la Vendée (Terv.). On ne la voit pas, là où manque toute influence maritime.
* 100.	**isognomostomos** *Herm.* . . . . . . personata *Lam.*	Hab. les Vosges, le Jura, les Alpes.
* 101.	**lactea** *Müll.* . . . . punctata *Fér.* (olim).	Hab. les Pyrénées-Orientales.
* 102.	**lapicida** *Lin.* . . . . *Var.*	Hab. toute la France.
	Lecoqii *Put.* (25)	Hab. Wildenstein [Vosges]! Remiremont!
* 103.	**lenticula** *Fér.* . . . . striatula *Coll.*	Hab. le Var, les Pyrénées-Orientales, le Finistère.
* 104.	**limbata** *Drap.*	Hab. la France mérid. et centrale : le Languedoc, l'Auvergne, etc. Rouen (Terv.).
* 105.	**lineata** *Olivi* . . . . subalbida *Poir.* variabilis *Drap.* virgata *Mont.* *Var.*	Hab. toute la France maritime. Elle s'avance beaucoup dans l'intérieur des terres, puisqu'on la voit à Agen (Gass.), à Meaux (Cott.), etc. Néanmoins elle disparaît là où cesse absolument toute influence maritime.
*	submaritima *Des Moul.*	Hab. la Gironde, la Charente, les Landes.

Helix.

* 106.	**maritima** *Drap.*	Hab. les plages de l'Océan et de la Méditerranée.
* 107.	**melanostoma** *Drap.*	Hab. la France méditerranéenne.
* 108.	**montana** *Stud.* (26).	Hab. le Jura (Mort.).
109.	**Moutonii** *Dup.*	Hab. Grasse.
* 110.	**muralis** *Müll.*	
	Var.	
*	undulata *Mich.*	Hab. Orgon [Bouch.-du-Rhône].
* 111.	**neglecta** *Drap.*	Hab. la France méridionale.
* 112.	**nemoralis** *Lin.* . . . . semilunaris *d'Arg.* (Cochlea).	Hab. la France entière. Assez rare dans le midi.
* 113.	**Niciensis** *Fér.*	Hab. Grasse!
* 114.	**nubigena** *Saulc.* (27)	Hab. les Pyrénées, à Barèges, à Eaux-Bonnes.
* 115.	**obvoluta** *Müll.* . . . . trigonophora *Lam.*	Hab. toute la France, dans les bois.
* 116.	**Pisana** *Müll.* . . . . rhodostoma *Drap.*	Hab. la France méridionale; plus rarement le centre-ouest.
* 117.	**plebeia** *Drap.*	Hab. les contrées montagneuses de l'Est: les Alpes, les Vosges; Lyon! Arbois! Crassy!
* 118.	**pomatia** *Lin.*	Hab. le Nord, l'Est et le centre. Manque dans le Midi.
* 119.	**pulchella** *Müll.*	Hab. toute la France.
* 120.	**pyramidata** *Drap.*	Hab. la France méditerran.: Orange, Arles, Toulon, Grasse, etc.
* 121.	**Pyrenaica** *Drap.*	Hab. les Pyrénées-Orientales.
* 122.	**Quimperiana** *Fér.* Corisopitensis *Desh.* Kermorvani *Coll.*	Hab. Quimper et Brest. — Se retrouve sur les côtes de l'Espagne (Conf. Danthon in: Rev. zool. 1840. p. 121).
* 123.	**Rangiana** *Desh.*	Hab. Port-Vendres; Ollioules, près Toulon. R.
* 124.	**retirugis** *Menke.* . . . . Mazzullii *Jan.* Quinciacensis *Maud.*	Hab. Quinçay, près Poitiers. R. Probablement introduite; mais elle se reproduit, et tous les ans on en recueille quelques individus.
* 125.	**revelata** *Fér. Mich.* (28). . . . . Lisbonensis *L. Pfeiff.* occidentalis *Recl.* ponentina *Mor.*	Hab. Paris, Angers (Fér.)? les vallons des Alpes (A. Gras)? Mont-de-Marsan! Niort!
* 126.	**rotundata** *Müll.*	Hab. toute la France.
* 127.	**ruderata** *Stud.* . . . . rotundata var. β. *Nilss.*	Hab. les Alpes, le Jura; Digne (Terv.)

Helix.

* 128.	**rufescens** *Penn.* ([9])	Hab. le Nord et l'Est : Boulogne ! Douai ! Bar sur-Seine ! Langres !
	Altenana *Kickx.*	
	circinnata *Stud.*	
	clandestina *Hartm.*	
* 129.	**rugosiuscula** *Mich.*	Hab. la France méridionale.
* 130.	**rupestris** *Drap.*	Hab. toute la France. Les var. conique et globuleuse habitent Montpellier, Perpignan.
	pusilla *Vall.*	
	umbilicata *Mont.*	
* 131.	**sericea** *Müll.*	Hab. le Nord et l'Est : Troyes ! Lyon ! le Honeck [Vosges] !
	granulata *Alder.*	
* 132.	**serpentina** *Fér.*	Hab. Draguignan !
* 133.	**splendida** *Drap.*	Hab. la France méditerranéenne.
* 134.	**strigella** *Drap.*	Hab. les mont. de l'Est, du centre et du Sud : Perpignan, Clermont, Montbrison, Lyon, Grenoble, etc., le Val-Suzon (Barb.).
* 135.	**sylvatica** *Drap.*	Hab. les vallées des Alpes et du Jura.
	Var.	
*	Alpicola *Fér.*	Hab. la Grande-Chartreuse.
	Vindobonensis *Dup.* (non *Pfeiff.*)	
* 136.	**Telonensis** *Mittre*	Hab. Toulon.
* 137.	**Terverii** *Mich.*	Hab. le littoral provençal ; les îles d'Hyères.
* 138.	**trochilus** *Poir.*	Hab. la France méditerranéenne, surtout la Provence.
	scitula *Auct. Ital.*	
* 139.	**trochoides** *Poir.*	Hab. la France méditerr., non loin des bords de la mer.
	conica *Drap.*	
* 140.	**unifasciata** *Poir.*	Hab. une grande partie de la France. Très-variable dans sa taille et sa coloration. Les plus beaux types vivent dans le Nord-est.
	bidentata *Drap.* Tabl.	
	candidula *Stud.*	
	striata var. 7. ι. *Drap* Hist.	
	thymorum, *v. Alt.*	
	unifaciata *Maud.*	
	Var. monstr.	
	solitaria *Poir.?*	
* 141.	**vermiculata** *Müll.*	Hab. la France méridionale.
* 142.	**villosa** *Drap.*	Hab. les Vosges, le Jura, le Bugey (Terv.), l'Alsace (Put.).
* 143.	**zonata** *Stud.*	Hab. les Alpes : Grasse, Digne ; Briançon (Terv.).
	planospira *Mich.*	

Gen. 8. **BULIMUS** Scopoli. 1777.

* 144.	**acutus** *Müll.* (Helix).	Hab. la France maritime.
* 145.	**decollatus** *Lin.* (Helix)	Hab. la France méridionale.

Bulimus.

* 146.	**detritus** *Müll.* (Helix).	Hab. toute la France montagneuse. Variable dans sa taille et sa consistance. Jolie var. cornée à Clermont-Ferrand!
	radiatus *Drap.*	
* 147.	**montanus** *Drap.*	Hab. le Nord et l'Est, dans les bois et les montagnes : les Alpes; les Vosges! le Bugey, Grenoble (Terv.); la Lorraine, l'Alsace.
	Lackhamensis *Mont.* (Helix).	
	Monstr.	
	Collini *Mich.*	
* 148.	**obscurus** *Müll.* (Helix)	Hab. toute la France.
	hordeaceus *Brug.*	
	Var.	
	Astierianus *Dup.*	Hab. l'île Ste-Marguerite [Var], sur des affuts de canons (Dup.).
* 149.	**ventrosus** *Fér.* (Helix).	Hab. la France méditerran., le long des côtes; Toulouse!
	ventricosus *Drap.*	

Gen. 9. **ACHATINA** Lamarck. 1799 [30].

* 150.	**acicula** *Müll.* (Buccinum)	Hab. toute la France.
* 151.	**collina** *Drouët* [31]	Hab. Mouy-de-l'Oise! Lyon! Liézey [Vosges]! R.
* 152.	**folliculus** *Gron.* (Helix)	Hab. la France méditerranéenne.
	Gronoviana *Risso* (Ferussacia).	
	Risso *Desh.*	
	Jun.	
	scaturiginum *Drap.* (Physa).	
* 153.	**subcylindrica** *Lin.* (Helix). . . .	Hab. la France entière. On trouve près de Lyon une espèce voisine, mais distincte, surtout par l'animal (Terver). Je ne la connais pas.
	lubrica *Drap.*	
	Var.	
	Boissii *Dup.* (Zua).	Hab. les Pyrénées (Dup.). R.

Gen. **10**. **AZECA** Leach (in Turt.). 1831.

* 154.	**tridens** *Pult.* (Turbo).	Hab. le Nord-est, le centre et le Sud-ouest: Verdun, Metz, Auch, Agen, Clermont-Ferrand.
	Goodallii *Fér.* (Helix).	
	Menkeana *C. Pfeiff.* (Pupa).	
	Var.	
*	Nouletiana *Dup.*	Hab. la France pyrénéenn.: Auch, Agen.

Gen. 11. **PUPA.** Draparn. 1801.

Sect. 1. CHONDRUS. Cuv.

* 155.	**quadridens** *Müll.* (Helix).	Hab. la France montagneuse, surtout le Midi.
	Var.	
	seductilis *Ziegl.*	Hab. Cette (L. Pfeiff.)?
	lunatica. *Jan.*	
	Niso *Risso* (Jaminia).	
* 156.	**tridens** *Müll.* (Helix)	Hab. une grande partie de la France. Énorme à Lyon!
	tridentata *Brard.*	

Sect. 2. TORQUILLA. Stud.

* 157.	**avenacea** *Brug.* (Bulimus).	Hab. une grande partie de la France, surtout les contrées montagneuses.
	avena *Drap.*	
	Var.	
	hordeum *Stud.*	Hab. le Jura (Dup.)?
* 158.	**Boileausiana** *Charp.*	Hab. les Hautes-Pyrénées.
159.	**Braunii** *Rossm.*	Hab. Gavarnie (de Saulcy).
* 160.	**clausilioïdes** *Boub.*	Hab. Pratz-de-Mollo; Grasse.
	affinis *Rossm.*	
* 161.	**Dufourii** *Fér.* (Helix).	Hab. Ville-Franche [Pyr.-Orient.].
	cylindrica *Mich.*	
* 162.	**Farinesii** *Des Moul.*	Hab. les Pyrén.-Orient.; Grenoble (Terv.).
* 163.	**frumentum** *Drap.*	Hab. Metz, Strasbourg, Langres, Lyon.
* 164.	**granum** *Drap.*	Hab. la France méridion.; Lyon (Terv.)
* 165.	**megacheilos** *Crist.* et *Jan.*	Hab. la chaîne des Pyrénées et la Provence. Prodigieusement variable.
	Pyrenaica *Farin.* (olim).	
	Var.	
	Bigoriensis *Charp.*	Hab. les Hautes-Pyrénées.
	cereana *Mühlf.*	Hab. les Pyrénées de l'Arriège.
	goniostoma *Küst.*	Hab. Villefranche [Pyrén.-Orient.].
* 166.	**Michelii** *Terv.*	Hab. Toulon. R.
167.	**Moquiniana** *Küst.* (32)	Hab. le mont Bendat, près de Pau. R.
* 168.	**multidentata** *Olivi* (Turbo)	Hab. la France méditerran.; les Pyrénées, les Alpes, le Jura; Lyon! Grenoble! à Gap, il devient énorme (Terv.).
	mutabilis *Fér.* (Helix).	
	variabilis *Drap.*	
* 169.	**Partioti** *Moq.*	Hab. Luz, Saint-Sauveur, Gavarnie.
* 170.	**polyodon** *Drap.*	Hab. toute la France méditerran., de Port-Vendre à Grasse. Très-variable.
	Var.	
	ringicula *Mich.* (olim)	Hab. Villefranche.

Pupa.

* 171.	**Pyrenæaria** *Mich.*	Hab. la chaîne des Pyrénées; Haudainville [Meuse], Châtel-Censoir [Yonne] (Dup.). Ces deux dernières localités me semblent douteuses.
	saxicola *Moq.* (olim).	
	transitus *Boub.*	
	Var.	
*	Vergnesiana *Charp.*	Hab. l'Arriège.
* 172.	**ringens** *Mich.*	Hab. les Hautes-Pyrénées.
	pyrenaica *Boub.*	
	bigoriensis *Rossm.*	
* 173.	**secale** *Drap.*	Hab. toute la France.
	Juniperi *Mont.* (Turbo).	
* 174.	**similis** *Brug.* (Bulimus).	Hab. la France méditerr. et austro-orientale. Il remonte jusqu'à Haguenau [Bas-Rhin].
	cinerea *Drap.*	
	quinquedentata *Born.* (Turbo).	

Sect. 3. Gibbulina Beck.

175.	**biplicata** *Mich.*	Hab. les Alpes; alluvions du Rhône, à Lyon. R.
* 176.	**doliolum** *Brug.* (Bulimus). . . .	Hab. une grande partie de la France, surtout le Nord.
* 177.	**dolium** *Drap.*	Hab. la France orientale : Lyon ! les Alpes ! le Jura.
* 178.	**pagodula** *Des Moul.*	Hab. la Dordogne, l'Auvergne, le Var.

Sect. 4. Pupilla Leach.

* 179.	**muscorum** *Linn.* (Turbo).	Hab. toute la France.
	marginata *Drap.*	
	Var.	
*	bidentata *C. Pfeiff.*	Hab. *passim.*
	bigranata *Rossm.*	
	unidentata *C. Pfeiff.*	Hab. *passim.*
* 180.	**triplicata** *Stud.*	Hab. les montag. du centre, de l'Est, et du Midi, le Puy; la Grande-Chartreuse; Lyon; les Pyrénées.
	tridentalis *Mich.*	
* 181.	**umbilicata** *Drap.*	Hab. toute la France.
	unidentata *Vall.* (Bulimus).	
	Var.	
*	Sempronii *Charp.*	Hab. les Hautes-Alpes, les Pyrénées.

Gen. 12. **VERTIGO** Müller. 1774.

* 182.	**antivertigo** *Drap.* (Pupa)	Hab. toute la France, mais rare par tout.
	palustris *Leach.*	
	septemdentata *Fér.*	
	sexdentata *Mont.* (Turbo).	
* 183.	**edentula** *Drap.* (Pupa).	Hab. la plus grande partie de la France septentrionale et centrale.
	nitida *Fér.*	
184.	**inornata** *Mich.* (Pupa).	Hab. le Jura; alluvions du Rhône, à Lyon.
	columella *Benz.* (Pupa)?	
* 185.	**minutissima** *Hartm.* (Pupa). . . .	Hab. toute la France. On trouve à Lyon une espèce voisine, plus courte, plus ramassée, plus exactement cylindrique (Terver). Je n'ai pu me la procurer.
	cylindrica *Fér.*	
	muscorum *Drap.* (Pupa).	
* 186.	**Moulinsiana** *Dup.* (Pupa)	Hab. Lyon, Bordeaux, Toulouse, Mouy-de-l'Oise.
	anglica *Moq.* (olim).	
* 187.	**pusilla** *Müll.*	Hab. une grande partie de la France; rare partout.
	vertigo *Drap.* (Pupa).	
* 188.	**pygmæa** *Drap.* (Pupa).	Hab. toute la France.
* 189.	**Venetzii** *Charp.*	Hab. le Nord, l'Est, et le Sud : Lyon, Troyes, Mouy-de-l'Oise, Montpellier, Grasse, etc.
	hamata *Held.*	
	nana *Mich.*	

Gen. 13. **BALEA** Prideaux (in Gray). 1824.

* 190.	perversa *Lin.* (Turbo)?? (non. L. Pfeiff.).	Hab. toute la France.
	fragilis *Drap.* (Pupa).	

Gen. 14. **CLAUSILIA** Draparn. 1805.

* 191.	**bidens** *Lin.* (Turbo)	Hab. la France méditerranéenne; le Bas-Rhin (Put.)?
	papillaris *Drap.*	
* 192.	**biplicata** *Mont.* (Turbo)	Hab. Valenciennes! — Tournay [Hainaut]!
	similis (Charp.) *Fér.*	
* 193.	**dubia** *Drap.* [53]	Hab. la France montagneuse : les Vosges (le Honeck! belle var. pupoïde), le Jura, les Alpes, les Cévennes, les Pyrénées.
	Var.	
*	abietina *Dup.*	Hab. la vallée de Cauterets (Dup.).
* 194.	**laminata** *Mont.* (Turbo)	Hab. toute la France. Rare dans quelques départements méridionaux.
	bidens *Drap.*	
	derugata *Fér.* (Hélix).	
	Var.	
	phalerata *Dup.* (non Ziegl.). [54]. . .	Hab. la Grande-Chartreuse.

Clausilia.

* 195.	**lineolata** *Held*	Hab. Metz! Langres!
	Basileensis *Fitz.*	
	ventricosa var. *Rossm.*	
* 196.	**nigricans** *Pult.* (Turbo)	Hab. la France entière, mais surtout le Nord et le centre. Très-variable. — *An Turbo perversus Lin.?...*
	perversa *Poir.* (Bulimus).	
	rugosa var. β. *Drap.*	
	Var.	
	cruciata *Stud.*	Hab. le Jura.
*	gracilis *C. Pfeiff.*	Hab. les Vosges.
*	obtusa *C. Pfeiff*	Hab. le Nord-Est.
* 197.	**parvula** *Stud.*	Hab. toute la France, principalement le Nord, l'Est et le centre. Variable.
	minima *C. Pfeiff.*	
	rugosa var. γ. *Drap.*	
* 198.	**plicata** *Drap.*	Hab. les Vosges, le Jura.
	plicosa *Fér.* (Helix).	
* 199.	**plicatula** *Drap.*	Hab. le Nord et l'Ouest.
* 200.	**punctata** *Mich.*	Hab. la Provence; le Dauphiné; Apt!
	alboguttulata *Wagn.?*	
	Braunii var. β. *Charp.*	
* 201.	**Reboudii** *Dup.*	Hab. St.-Marcelin [Isère], (Dup.); la Ville-aux-Bois [Aube]. R.
* 202.	**Rolphii** *Leach.*	Hab. une grande partie de la France, notamment le Nord et le centre.
	dubia var. inflata *Goup.*	
	Mortilletii *Dum.*	
* 203.	**rugosa** *Drap.*	Hab. la France méditerr. : Montpellier! Espèce propre au littoral méridional.
* 204.	**solida.** *Drap.*	Hab. la Provence; le Dauphiné; le Pas-de-Calais (Bouch.).
	labiata *Mont.* (Turbo).	
* 205.	**ventricosa** *Drap.*	Hab. toute la France, notamment le Nord et l'Est, dans les bois: Valenciennes! Troyes! Lyon!
	ventriculosa *Fér.* (Helix)	
206.	**virgata** *Crist.* et *Jan.*	Hab. la Provence, le long des côtes.
	affinis *Phil.*	

Fam. III. Auriculacea.

Gen. 15. **CARYCHIUM** Müller. 1774.

* 207.	**minimum** *Müll.*	Hab. toute la France.
208.	**myosotis** *Drap.* (Auricula)	Hab. les côtes de la Méditerranée.

†† OPERCULATA.

Fam. IV. Cyclostomacea.

Gen. 16. CYCLOSTOMA Lamarck. 1801.

* 209. **elegans** *Müll.* (Nerita). . . . . . Hab. toute la France.
Jun.
saputus *Maud.*

* 210. **sulcatum** *Drap.* . . . . Hab. la Provence.

Gen. 17. POMATIAS Studer. 1789.

* 211. **apricum** *Mouss.* . . . . Hab. les Alpes, à la G^{de}-Chartreuse, à Sassenage, à Grenoble, etc.
carthusianum *Dup.*
obscurum v. apric. *Part.*

* 212. **crassilabrum** *Dup.* . . . . Hab. la chaîne des Pyrénées.

* 213. **Nouleti** *Dup.* . . . . Hab. Axat [Arriège].

* 214. **obscurum**[1] *Drap.* (Cyclost.). . . . Hab. une grande partie de la France : les Pyrénées, Agen, Dijon, Troyes, etc. Manque totalement dans le Lyonnais, le Dauphiné, la Provence, le Jura (Terv.); peut-être même dans les Vosges et l'Alsace.
conicum *Vall.* (Turbo).

215. **Partioti** *Moq.* (Cyclost.). . . . . Hab. les vallées de Gavarnie et de Héas.

* 216. **patulum** *Drap.* (Cyclost.). . . . . Hab. la France méditerranéenne.

* 217. **septemspirale** *Razoum.* (Helix). . . Hab. une grande partie de la France.
maculatum *Drap.* (Cyclost.).
striatum *Vall.* (Turbo).

Gen. 18. ACME Hartmann. 1821.

218. **fusca** *Boys* et *Walck.* (Turbo) . . . Hab. plusieurs départements de l'Ouest et du Nord. Rare partout.
lineata *Rossm.*

219. **lineata** *Drap.* (Auricula). . . . . Hab. la Provence et le Dauphiné : Grasse, Lyon, Grenoble, la G^{de}.-Chartreuse. R.
fusca *Gray.*
acicularis *Fér.* (Carychium).

220. **Moutonii** *Dup.* . . . . Hab. Grasse. R.

Ordo 2. Pulmobranchia.

Fam. V. Limnacea.

Gen. 19. AMPHIPEPLEA Nilsson. 1822.

* 221. **glutinosa** *Müll.* (Buccinum). . . . . Hab. la France septentrionale et moyenne : Troyes! Verdun!

Gen. **20. LIMNÆA** Lamarck. 1799.

* 222.	**auricularia** *Lin.* (Helix).	Hab. la France septentrionale.
	auriculata *Montf.* (Radix).	
	Var.	
*	canalis *Villa.*	Hab. le Midi.
* 223.	**corvus** *Gmel.* (Helix).	Hab. les contrées montagneuses du Sud-Ouest : Grenoble, Gap, Arles, etc.
	palustris var. *a. Drap.*	
* 224.	**glabra** *Müll.* (Buccinum).	Hab. une grande partie de la France, principalement le Sud, l'Ouest, et le Nord. Elle manque dans certaines régions, notamment dans le Nord-Est. Très-variable dans sa taille et le nombre de ses tours de spire.
	elongata *Drap.*	
	leucostoma *Poir.* (Bulimus).	
	Var.	
*	gingivata *Goup.*	Hab. le Mans.
*	subulata *Kickx*	Hab. Valenciennes.
* 225.	**glacialis** *Dup.*	Hab. les eaux glacées des lacs des Pyrénées, à 2 et 3,000 mètres.
* 226.	**intermedia** *Lam.*	Hab. Lyon, Remiremont, Troyes.
* 227.	**limosa** *Lin.* (Helix)	Hab. la France entière. Extrêmement variable quant à la taille et quant à la forme.
	ovata *Drap.*	
	Var.	
	Boissii *Dup.*	Hab. le Gers!
*	diaphana *Fitz.*	Hab. Remiremont!
*	Nouletiana *Gass.*	Hab. Agen! Troyes! Mouy-de-l'Oise!
*	Trencaleonis *Gass.*	Hab. Agen.
*	vulgaris *C. Pfeiff.*	Hab. Auch (Dup.).
* 228.	**marginata** *Mich.*	Hab. les montagnes de l'Isère et des Hautes-Alpes.
* 229.	**palustris** *Müll.* (Buccinum). . . .	Hab. toute la France. Très-variable.
	crassa *Razoum* (Helix) ?	
	Var.	
*	disjuncta *Put.*	Hab. Remiremont.
*	fusca *Nilss.*	Hab. le Nord.
	lacunosa *Ziégl.*	Hab. Guéret.
	truncata *Buvign.*	Hab. Verdun.
*	Vosgesiaca *Put.*	Hab. Remiremont.

Limnœa.

* 230.	**peregra** *Müll.* (Buccinum)	Hab. une grande partie de la France. Très-variable dans sa taille, sa forme, sa consistance.
	Var.	
	bilabiata *Hartm.*	Hab. les Hautes-Alpes (Dup.). . .
	Blauneri *Shuttl.*	Hab. les environs d'Auxerre (Dup.)??
	callosa *Ziegl.*	Hab. la France méridion. (Dup.).
	fuliginosa *Ziegl.*	Hab. le Périgord (Dup.).
	variabilis *Mill.*	Hab. la Chapelle-Hulin [Maine-et-Loire].
* 231.	**stagnalis** *Lin.* (Helix).	Hab. toute la France.
	fragilis *Stud.*	
* 232.	**thermalis** *Boub.* (35)	Hab. les Pyrénées, les Vosges !
* 233.	**truncatula** *Müll.* (Buccinum) . . .	Hab. la France entière. De même que les *L. peregra*, *palustris*, *ovata*, *glabra*, très-variable dans sa forme, sa taille, sa consistance.
	minuta *Drap.*	
	obscura *Poir.* (Bulimus).	
	truncata *Brug.* (Bulimus).	
	Var.	
*	microstoma *Drouët* (36)	Hab. Bar-sur-Seine [Aube].
*	oblonga *Put.*	Hab. Remiremont.

Gen. 21. PHYSA Draparn. 1801.

* 234.	**acuta** *Drap.*	Hab. la France méridionale et centrale. Auxerre! Je ne la trouve pas plus haut que le 48° de latitude.
	fluviatilis *Fér.*	
	Var.	
*	castanea *Lam.*	Hab. la Garonne (Lam.); Lyon (Terv.).
	cornea *Massot.*	Hab. les Pyrénées-Orientales.
* 235.	**contorta** *Mich.*	Hab. les Pyrénées-Orientales, entre Collioure et Port-Vendre. R.
	rivularis *Phil.*	
	thiarella *Fér.*	
* 236.	**fontinalis** *Lin.* (Bulla)	Hab. toute la France. Rare dans le Midi.
	pellucida *Razoum.* (Helix).	
* 237.	**hypnorum** *Lin.* (Bulla).	Hab. toute la France.
* 238.	**subopaca** *Lam.*	Hab. l'Ouest et le Sud-Ouest.
	Perrisiana *Dup.* (olim).	
	rivularia *Dup.* (olim).	

Gen. 22. PLANORBIS Müller. 1774.

* 239.	**albus** *Müll.*	Hab. la majeure partie de la France.
	hispidus *Drap.*	
	villosus *Poir.*	

Planorbis.

* 240. **carinatus** *Müll.* . . . . Hab. toute la France.
acutus *Poir.*

Var.

submarginatus *Crist.* et *Jan.* . . . Hab. la Provence (Dup.).

* 241. **complanatus** *Lin.* (Helix). . . . . Hab. la France entière.
marginatus *Drap.*
rotundatus *Poir.*
umbilicatus *Fér.*

Var.

* subangulatus *Phil.* . . . . Hab. Fernex [Ain].

Monstr. scal.

spiralis *Poir* (Turbo).

* 242. **contortus** *Lin.* (Helix). . . . . . Hab. toute la France.

* 243. **corneus** *Lin.* (Helix) . . . . . . Hab. presque toute la France. Le canal de Bourgogne, à Dijon, nourrit une belle var. scalaire (Barbié).

* 244. **cristatus** *Drap.* . . . . Hab. une g^de^. partie de la France.

* 245. **fontanus** *Lightf.* (Helix) . . . . . Hab. la France entière.
complanatus *Drap. Poir.*
nitidus *Gray.*

246. **lœvis** *Alder.* . . . . Hab. les îles Chaussey. R.
Moquini *Req.*

* 247. **leucostoma** *Mill.* . . . . Hab. la France entière. Variable dans sa taille et le nombre de ses tours de spire.
vortex var. *β. Drap.*

Var.

* Perezii *Graëlls.* . . . . Hab. *passim* : Valenciennes! Troyes, Arles.
fragilis *Mill.*

* 248. **nautileus** *Lin.* (Turbo). . . . . . Hab. presque toute la France.
imbricatus *Drap.*

* 249. **nitidus** *Müll.* . . . . Hab. une grande partie de la France, surtout le Nord. Devient superbe aux environs de Troyes.
clausulatus *Fér.*
lineatus *Gray* (Segmentina).

250. **septemgyratus** *Ziegl.*? (57) . . . . Hab. Châtel-Censoir [Yonne] (Dup.)?

* 251. **spirorbis** *Lin.* (Helix). . . . . . Hab. la France méridionale.
deformis *Fér.*?
acronicus *Fér.*?

* 252. **vortex** *Lin.* (Helix). . . . . Hab. toute la France, surtout le Nord.
compressus *Mich.*

Gen. 23. **ANCYLUS** Geoffroy. 1767.

Sect. 1. ANCYLASTRUM Moq.

Ancylus.

* 253. **capuloides** *Jan.* . . . . Hab. la France pyrénéenne : le lac de Gaube, Bagnères, Bastan, Agen!
Janii *Bourg.*

254. **cyclostoma** *Bourg.* [38] . . . . . Hab. la riv. *l'Aube*, à Dieuville [Aube]. (Bourg.). R.

* 255. **fluviatilis** *Müll.* . . . . Hab. les fleuves et les rivières de toute la France. Très-variable dans sa taille et dans la consistance de son test.
corneus *Poir.* (Patella).
rostratus *d'Arg.* (Lepas).
simplex *Buch'oz.*

Var.

* costatus *Fér.* . . . . Hab. les sources : Bar-s.-Seine! Bar-sur-Aube!... Auxerre (Dup.).
striatus *Dup.* (non Quoy).

* Fabrei *Dup.* . . . . Hab. la *Couze*, à ;.... [Dordogne]; la *Seine*, à Troyes.

Frayssianus *Dup.* . . . . Hab. Grasse.

* rupicola *Boub.* . . . . Hab. les eaux froides des Pyrénées, des Vosges!

* thermalis *Boub.* . . . . Hab. les sources chaudes des Pyrén.

Monstr.

sinuosus *Brard.*

* 256. **gibbosus** *Bourg.* . . . . Hab. la France pyrénéenne et septention. Vendeuvre [Aube]! Mouy-de-l'Oise! Verdun (Bourg.).
deperditus *Ziegl.*

* 257. **riparius** *Desm.* [39]. . . . . Hab. Remiremont! Lyon (Bourg.). R.

Sect. 2. VILLETIA Gray.

258. **strictus** *Mor.* [40] . . . . Hab. Brest (coll. B. Delessert). R.

* 259. **lacustris** *Lin.* (Patella) . . . . . Hab. les eaux dormantes de toute la France.
oblongus *Auct.* (Britt.).

260. **Moquinianus** *Bourg.* [41]. . . . . Hab. Dijon (Bourg.); Toulon (Mittre). R.

ORDO 3. **Pectinibranchia.**

Fam. VI. PERISTOMACEA.

Gen. 24. **PALUDINA** Lamarck. 1812.

* 261. **fasciata** *Müll.* (Nerita). . . . . . Hab. une grande partie de la France, principalement le Nord.
achatina *Drap.* (Cyclost.).
fluviorum *Montf.* (Vivipara).

Paludina.

* 262. **vivipara** *Lin.* (Helix) . . . . Hab. la majeure partie de la France : plus commune dans le Midi que dans le Nord.—Naturalisée dans le lac de Genève (Mort.).
contecta *Mill.* (Cyclost.).
vulgaris *Dup.* (Vivipara).

Gen. 25. BYTHINIA Gray. 1821. (42).

* 263. **similis** *Drap.* (Cyclost.). . . . . . . Hab. la France méditerranéenne : Grasse ! Toulon, Montpellier.
Moutonii *Dup.* (olim).

* 264. **tentaculata** *Lin.* (Helix). . . . . . Hab. la France toute entière.
impura *Drap.* (Cyclost.)
janitor *Vall.* (Turbo).
jaculator *Fér.* (Cyclost.).

* 265. **ventricosa** *Leach.* (Palud.). . . . Hab. une grande partie de la France septentrionale et centrale : Valenciennes ! Laval ! Rennes ! Angers (Mill.).
decipiens *Mill.* (Palud.).
humilis *Boub.* (Palud.).
Kickxii *West.* (Palud.).
Michaudii *Duv.* (Palud.).

Gen. 26. HYDROBIA Hartmann. 1821.

* 266. **abbreviata** *Mich.* (Paludina) . . . Hab. Remiremont ! le Jura (Dup.) Lyon (Terv.).

267. **Astierii** *Dup.* . . . . Hab. Grasse.

* 268. **bicarinata** *Des Moul.* (Palud.). . . Hab. Couse [Dordogne].

* 269. **brevis** *Drap.* (Cyclostoma) . . . . Hab. Ganges [Hérault]; le Jura.

* 270. **Cebennensis** *Dup.* . . . . Hab. Ganges [Hérault].

271. **conoidea** *Reyn.* (Paludina) . . . . Hab. Ardus [Tarn-et-Garonne].

* 272. **Ferussina** *Des Moul.* (Palud.). . . Hab. la plus g^de^ partie de la France.

* 273. **gibba** *Drap.* (Cyclostoma). . . . . Hab. Montpellier, Clermont-Ferrand.

274. **marginata** *Mich.* (Palud.). . . . . Hab. le Var : Orange, Draguignan.

275. **Moulinsii** *Dup.* . . . . Hab. le Périgord.

276. **Perrisii** *Dup.* . . . . Hab. Mont-de-Marsan.

277. **pygmæa** *Mich.* (Cyclostoma) . . . Hab. les alluvions du Rhône, à Avignon (Terv.). Espèce douteuse.

278. **Reyniesii** *Dup.* . . . . Hab. les Hautes-Pyrénées.

279. **rubiginosa** *Boub.* (Palud.). . . . . Hab. les eaux minérales de l'Ariège.

280. **saxatilis** *Reyn.* (Palud.). . . . . Hab. Montauban.

* 281. **Simoniana** *Charp.* (Palud.). . . . Hab. les alluvions de la Garonne, à Toulouse ! de l'Ariège, à Foin; du canal du Midi et de l'Hérault. R.
vitrea *Moq.* (Palud.). (olim).

* 282. **viridis** *Poir.* (Bulimus). . . . . . Hab. le Nord et le centre : environs de Troyes ! Metz !....
grisea *Vall.* (Turbo).

Hydrobia.

* 283. **vitrea** *Drap.* (Cyclostoma) . . . . Hab. Lyon, Agen, Troyes! R. Je ne l'ai vue que dans les alluvions. Arbois (Fér.)

Var.

bulimoidea *Mich.* (Palud.). . . . . Hab. les alluvions du Rhône, à Lyon.
diaphana *Mich.* (Palud.). . . . . . Id. id. id.

Gen. **27. VALVATA.** Müller. 1774 ([43]).

* 284. **cristata** *Müll.* . . . . Hab. toute la France.
planorbis *Drap.*
* 285. **minuta** *Drap.* . . . . Hab. Agen, Lectoure, Boulogne, Grasse! R.
286. **Moquiniana** *Reyn.* . . . . Hab. les alluvions du Lot, à Mende.
* 287. **piscinalis** *Müll.* (Nerita) . . . . . Hab. toute la France. Variable.
cristata *Poir.* (Turbo).
obtusa *Drap.* (Cyclostoma).

Var.

* depressa *C. Pfeiff.* ([44]). . . . . . Hab. Bar-sur-Seine [Aube]!
* 288. **spirorbis** *Drap.* ([45]) . . . . . . Hab. Grasse! Nogent-s.-Seine! Mouy-de-l'Oise! Chartres (Bourg.); Boulogne-sur-Mer. (Bouch.). R.

Fam. VII. NERITACEA.

Gen. **28. NERITINA.** Lamarck. 1822.

* 289. **Bætica** *Lam.* . . . . Hab. Montpellier (Recluz).
* 290. **Bourguignati** *Recl.* (Nerita). . . . Hab. *la Vaige*, à Chéméré [Mayenne]!
* 291. **fluviatilis** *Lin.* (Nerita) . . . . . Hab. la France entière. M. Recluz en compte 8 var. principales.
Lutetiana *Montf.* (Theodoxus).

Var.

* fontinalis *Brard.* (Nerita). . . . . Hab. Paris, Auch! les fossés du Var, près de Nice!
292. **Mittreana** *Recl.* (Nerita) . . . . . Hab. Grasse, Toulon (Recl.).
293. **Prevostiana** *C. Pfeiff.* . . . . . Hab. *la Touque*, à Pont-l'Évêque [Seine-Infér.] (Recl.).
* 294. **thermalis** *Boub.* . . . . Hab. Bagnères-de-Bigorre.
Boubei *Recl.* (Nerita).
295. **zebrina** *Recl.* (Nerita). . . . . . Hab. Montpellier (Recl.).

Class. II. Acephala.

Ord. unic. LAMELLIBRANCHIA.

Fam. I. Cycladea. (46)

Gen. 29. CYCLAS Bruguière. 1789.

Sect. 1. Cyrenastrum Bourg.

* 296. **solida** *Norm.* (Sphœrium). . . . . Hab. l'*Escaut*, à Valenciennes; Lyon (Terv.).

Sect. 2. Sphoeriastrum Bourg.

* 297. **cornea** *Linn.* (Tellina). . . . . . Hab. toute la France.
rivalis *Drap.*
stagnicola *Leach.*

Var.

* nucleus *Stud.* . . . . Hab. une grande partie de la France, surtout le Nord et l'Est : Valenciennes! Mouy-de-l'Oise! Troyes!
flavescens *Macq.*
isocardioides *Norm.* (olim).
tumida *Ziegl.*

* rivalis *Müll.* (Tellina). . . . . . Hab. une grande partie de la France.
cornea var. *β. Drap.*
cornea *Lam.* (part.)

* 298. **ovalis** *Fér.* . . . . Hab. *passim :* Lyon (Terv.); La Rochelle, Poitiers, Angers, Paris, Troyes?... (Bourg.). R.
consobrima *Fér.* (olim).
Deshayesiana *Bourg.* (Sphœrium).
lacustris *Drap.*

* 299. **rivicola** *Leach.* . . . . Hab. la France septentr. et moyenne : Valenciennes, Angers, Auxerre, Nogent-sur-Seine, etc.
albida *d'Arg.* (Chama).
cornea *Drap.*

* 300. **Scaldiana** *Norm.* (Sphœrium). . . . Hab. l'*Escaut*, à Valenciennes.

Sect. 3. Securilla Drouet.

* 301. **Brochoniana** *Bourg.* (Sphœrium) . . Hab. Troyes (Bourg.). R.

* 302. **Creplini** *Dunk.* . . . . Hab. les mares, à Auch; Vendeuvre (Aube).
Terveriana *Dup.*

303. **Jeannotii** *Norm.* (Sphœrium) . . . Hab. Avesnes (Nord; Norm.).

* 304. **lacustris** *Müll.* (Tellina) . . . . . Hab. toute la France.
caliculata *Drap.*
intermedia *Dum* et *Mort.*
tuberculata *Alt.*

* 305. **Ryckholtii** *Norm.* (Sphœrium) . . . Hab. la forêt de Raismes (Nord).

Gen. **30. PISIDIUM.** C. Pfeiffer 1821.

* 306.	**amnicum** *Müll.* (Tellina) . . . . inflatum *Meg.* et *Auct. Ital.* obliquum *Lam.* (Cyclas). palustre *Drap.* (Cyclas.)	Hab. toute la France. Variable. Il existe à Mouy-de-l'Oise, une var. de petite taille, à stries élégamment distancées, et très-apparentes. Le test est comme côtelé. Cette var. est rare.
* 307.	**Casertanum** *Poli* (Cardium.) cinereum *Ald.* fontinale *Drap.* (Cyclas)? Iratianum *Dup.* (olim). pulchellum *Jen.*	Hab. toute la France. Très-variable dans sa forme et sa taille.
	Var.	
	caliculatum *Dup.*	Hab. Bivès [Gers].
*	Gassiesianum *Dup.* . . . . Jenynsii *Macg.* Joannis *Macg.*	Hab. Pécau, près Agers, le Gers (Dup.).
*	lenticulare *Norm.* . . . . australe *Phil.*	Hab. Valenciennes, Troyes, etc.
*	limosum *Gass.*	Hab. Agen.
*	Normandianum *Dup.* . . . . . . tetragonum *Norm.*	Hab. Valenciennes.
*	thermale *Dup.*	Hab. Bagnères-de-Bigorre.
	Monstr.	
	sinuatum *Bourg.*	
* 308.	**Henslowianum** *Shepp.* (Tellin). . . appendiculatum (Turt.). (Cyclas). acutum *C. Pfeiff.*	Hab. une grande partie de la France septentr.: Valenciennes! Auxerre! Troyes! Mouy-de-l'Oise!....
	Var.	
	Dupuyanum *Norm.*	Hab. Valenciennes.
* 309.	**nitidum** *Jen.* . . . . incertum *Norm.*	Hab. une grande partie de la France.
* 310.	**obtusale** *Lam.* (Cyclas.). . . . . . . gibbum *Ald.* (Cyclas.).	Hab. Valenciennes! R.
* 311.	**pusillum** *Gmel.* (Tellina) . . . . . . fontinale *Drap.* (Cyclas)? roseum *Scholtz.*	Hab. les prés d'Arènes, près Montpellier (Drap.); Valenciennes, Avesnes, Bavay (Norm.).
* 312.	**Reclusianum** *Bourg.*	Hab. Boulogne-sur-Mer (Bourg.). R.

Fam. 2. Naiadea.

Gen. 31. ANODONTA. Lamarck. 1799.

* 313.	**anatina** *Lin.* (Mytilus)	Hab. toute la France, et principalement le Nord, où vit le type linnéen : Metz ! Laval ! Angers ! Troyes ! Valenciennes !...
	fluviatilis *Gmel.* (Mytilus ?)	
	variabilis *Drap.* var. α, *Tabl.*	
	Var.	
*	Arelatensis *Jacq.*	Hab. Arles, Avignon.
	ovalis *Requien.*	
*	exulcerata *Villa*	Hab. Arles (Dup.).
*	minima *Mill.*	Hab. Segré [Maine-et-Loire].
*	Moulinsiana *Dup.*	Hab. les étangs de Cazeaux [Landes].
*	palustris *Fér.*	Hab. l'Auvergne.
*	parvula *Drou.*	Hab. l'*Aube*, à Bar-sur-Aube ; la *Laignes*, aux Riceys [Aube] ; le bras de la *Seine*, à Troyes. R.
	coarctata *Pot.* et *Mich.*	
*	Rayii *Dup.*	Hab. la *Bonde-Gendret*, à Troyes.
*	tumida *Küst.*	Hab. le Nord et l'Est, *passim.*
* 314.	**complanata** *Ziegl.*	Hab. les grands fleuves : la *Loire*, à Nantes !
	compressa *Menke.*	
	rhombea *Schlütt.*	
	Var.	
*	elongata *Hol.*	Hab. la *Moselle*, à Metz ; l'*Oise*, à Beauvais.
	Jobæ *Dup.* (olim).	
	minima *Joba* (olim).	
*	Gratelupeana *Gass.*	Hab. la *Garonne*, à Agen.
*	Normandi *Dup.*	Hab. l'*Escaut*, à Valenciennes ; la *Somme*, à Abbeville.
* 315.	**cygnea** *Lin.* (Mytilus)	Hab. les étangs, à Lusigny, près Troyes (type linnéen) ! Paris ! Valenciennes ! Niort (Mort.).
	Var.	
*	Zellensis *Gmel.* (Mytilus)	Hab. la France entière. Les échantillons le mieux caractérisés viennent du Nord : Valenciennes ! Laval ! Troyes ! Paris ! Metz ! Abbeville !....
	arenaria *Schröt.* (Mya).	
	stagnalis *Gmel.* (Mytilus).	
	variabilis, var. β. *Drap.* *Tabl.*	
*	oblonga *Mill.*	Hab. Angers ! Troyes ! Laval !
	intermedia *Lin.* ?	
*	ventricosa *Dup.*	Hab. Toulouse ! Troyes ! Metz !....
	sinuosa *Maud.*	

Anodonta.

* 316.	**piscinalis** *Nilss.*	Hab. toute la France. On ne peut plus variable.
	radiata *Müll.* (Mytilus)?	
	cygnea *Schröt.* (Mytilus).	
	Var.	
*	Milletii *Ray.* et *Drouet*	Hab. Montabert [Aube]; Lyon, Dijon. R.
*	Rossmässleriana *Dup.*	Hab. une grde partie de la France, surtout le Sud-Ouest, dans les rivières.
	anatina *Drap.*	
*	Scaldiana *Dup.*	Hab. l'*Escaut*, à Valenciennes.
*	ventricosa *C. Pfeiff.*	Hab. le Nord et l'Est, *passim.*
* 317.	**ponderosa** *C. Pfeiff.*	Hab. Metz! Paris! Abbeville!
	Avonensis *Auct. Britt.*	
	crassa *Marks.*	
	grisea *Schröt.* (Mytilus)?	
	incrassata *Shepp.* (Mytilus).	
	Var.	
*	Dupuyi *Ray* et *Drouet*	Hab. Troyes, Metz, Abbeville.
	subponderosa *Dup.*	
* 318.	**rostrata** *Kokeil*	Hab. Troyes! Arles! Riom! Fernex! Villeneuve [Lot-et-Garonne]! R.

Gen. 32. UNIO. Retzius. 1788. (47)

Sect. 1. Unio. Auct. quor.

* 319.	**Astierianus** *Dup.*	Hab. les étangs à Arles; la *Saône*, le canal de Bourgogne (Barb.).
	cuneatus *Jacq.*	
* 320.	**ater** *Nilss.* (48)	Hab. les environs de Remiremont! R.
	consentaneus *Ziegl.*	
* 321.	**Batavus** *Lam.*	Hab. la France entière, surtout le Nord, où vit le type. Extrêmement variable.
	pictorum var. β. *Drap.*	
	Var.	
	corrugatus *Maud.*?	Hab. la Vienne.
*	Drouetii *Dup.*	Hab. le *Triffoire*, à St.-Julien [Aube].
*	Moulinsianus *Dup.*	Hab. le *Cher.*
	ovatus *Bouill.*	Hab. le *Bédat* [Puy-de-Dôme].
	rotundatus *Maud.*?	Hab.
* 322.	**Bigerrensis** *Mill.*	Hab. l'*Echez*, à la Vie-de-Bigorre.
* 323.	**Capigliolo** *Payr.*	Hab. l'*Arros*, à .... (Dup.). [Gers]?
* 324.	**crassus** *Retz.* (49)	Hab. la *Vaige* [Mayenne]. R.
* 325.	**Jacqueminii** *Dup.*	Hab. les étangs, à Arles.
	arcuatus *Jacq.*	

Unio.

* 326.	**littoralis** *Cuv.*	Hab. toute la France. Très-variable.
	crassus *Vall.* (Mya)	
	Var.	
	Barrandii *Bonh.*	Hab. l'*Aveyron*, à Rodez; le Jura!
	Draparnaldii *Desh.*	Hab. la *Seine*, à Paris.
	Pianensis. *Far.*	Hab. le *Pia*, près de Perpignan.
* 327.	subtetragonus *Mich.*	Hab. la *Garonne*, à Agen! la Loire, à Nantes; la *Seine*, à Troyes! etc.
* 328.	**mancus** *Lam.*	Hab. la *Drée*, en Bourgogne.
* 329.	**Moquinianus** *Dup.*	Hab. les ruisseaux des Pyrénées.
* 330.	**nanus** *Lam.*	Hab. les pays de montagnes : les Vosges ! le Dauphiné ! la Franche-Comté! se trouve aussi en Champagne!
	annicus *Ziegl.*	
* 331.	**ovalis** *Mont.* (Mya)	Hab. la *Loire*, à Nantes; la *Moselle*, à Metz!
* 332.	**Philippi** *Dup.*	Hab. le *Gave-de-Pau* [Bass.-Pyrén.].
* 333.	**pictorum** *Lin.* (Mya)	Hab. les étangs et les rivières du Nord: Valenciennes! Metz! Troyes! Mulhouse! Remiremont!....
	rostratus *Lam.* (pars).	
	Lemovicincœ *Fér.*	
	Var.	
*	arcuatus *Bouch.*	Hab. Saint-Omer.
	curvirostris *Norm.* (olim).	
*	Deshayesii *Mich.*	Hab. Quimper.
* 334.	**platyrhynchoideus** *Dup.*	Hab. les étangs de Cazeaux [Landes].
* 335.	**Requienii** *Mich.*	Hab. toute la France, principalement le centre et le Midi. Très-variable.
	pictorum *Drap.* (pars).	
	Var.	
*	Aleroni *Mass.*	Hab. Perpignan. — Barcelonne [Espagne].
	Ardusianus *Reyn.*	Hab. l'*Aveyron*, à Ardus, près Montauban.
	Limaniœ *Bouill.*	Hab. le Bédat, à St.-Bauzire [Puy-de-Dôme].
	Rousii *Dup.*	Hab. l'*Auroue*, dans le Gers.
* 336.	**sinuatus** *Lam.*	Hab. les grands fleuves d'une grande partie de la France. Rare toutefois. Les plus beaux types proviennent de la *Garonne*, à Agen, et de *Seine*, à Nogent [Aube].
	crassissimus *Fér.*	
	margaritifer *Drap.*	
	rugosus *Poir.*!	
* 337.	**tumidus** *Retz.*	Hab. les fleuves et les rivières du Nord. Variable. Les plus beaux types vivent dans l'*Escaut*, à Valenciennes [Nord]. ?
	rostratus *Lam.* (pars).	
	Monstr.	
	Michaudianus *Des Moul.*	

* 338. **Eurtonii** *Payr.* . . . . Hab. Grasse (Dup.); Troyes?...

Sect. 2. MARGARITANA Schum.

* 339. **margaritifer** *Lin.* (Mya) . . . . . Hab. les cours d'eau des pays de montagnes : les Vosges, les Cévennes, le Jura, les Pyrénées.....
elongatus *Lam.*

Var.

arcuatus *Barn.* (Alasmod.).
brunneus *Bonh.* . . . . Hab. Rodez.
Roissyi *Mich.* . . . . Hab. Tour-la-Ville [Manche].

Fam. III. DREISSENADEA. Van Beneden.

Gen. 53. **DREISSENA** Van Beneden. 1835.

* 340. **polymorpha** *Pall.* (Mytilus). . . . Hab. les fleuves de la France septentrionale : la *Somme*, à Abbeville ! l'*Escaut*, à Valenciennes ! la *Seine*, à Paris !.....
Chemnitzii *Rossm.* (Tichogonia).
lineata *Waard.* (Mytilus).
Volgœ *Chemn.* (Mytilus).

III. NOTES ET DIAGNOSES

DES ESPÈCES PEU CONNUES.

(1) **Arion** *Fér.*

Les genres *Arion* et *Limax* demandent une révision fort attentive et sévère. Je ne suis point en mesure, pour ce qui me concerne, de donner ce travail. Espérons qu'un naturaliste, habile et laborieux, affrontant les difficultés de cette entreprise, nous dotera quelque jour de cette intéressante monographie.

(2) **Arion cinctus** *Müll.* (Limax). Verm. Hist. 2, p. 9, n° 205 (1774).

A l'exemple des auteurs de l'*Histoire naturelle des Mollusques de la Savoie*, MM. Dumont et Mortillet, je restitue à ce Limacien la dénomination qui lui a été primitivement imposée par Müller. Draparnaud, n'ayant pas reconnu dans cette limace, celle du naturaliste danois, la crut nouvelle, et il l'appela *Limax subfuscus.*

Je la recueille, au mois de mai, dans les feuilles mortes, au pied des chênes de la forêt d'Orient (Aube). Elle y paraît assez rare.

(3) **Arion fuscus** *Müll.* (Limax) Verm. Hist. 2, p. 11, n° 209 (1774).

A. petit, roussâtre ou gris-bleuâtre; dos noirâtre; une bande latérale plus foncée que le fond de la robe; plan locomoteur blanchâtre, grisâtre ou jaunâtre. Long. 40, diam. 4-5 mill.

Hab. les bois, les forêts, les jardins, les hauteurs, et généralement toutes les localités ombragées de la France septentrionale, dans les feuilles mortes et sous les pierres. Très-abondant et très-variable. Dans les bois, on le trouve souvent en compagnie du *Lim. sylvaticus.*

Obs. 1. Cette espèce semble avoir échappé, jusqu'ici, aux investigations de bien des naturalistes, et pourtant elle est très-répandue dans le nord de la France. Peut-être la connaît-on sous une autre dénomination. C'est ainsi que je lui donne pour synonymes, le *Lim. fasciatus* de Nilsson, certainement identique, l'*Ar. hortensis* Fér. (et conséquemment la *Limacella concava* Brard.), et enfin l'*Ar. leucophæus* Norm. Toutefois, c'est encore avec doute pour ces deux derniers.

Obs. 2. Je considère les *A. rufus* et *fuscus*, et les *L. agrestis*, *maximus* et *variegatus*, comme très-nuisibles à l'agricultnre et à l'économie domestique. Je prépare un Mémoire sur ce sujet.

([4]) **Arion melanocephalus** *Faure-Big.* in : Fér. Tabl. syst. p. 18, n° 4 (1821).

Il est probable qu'il faudra réunir cette espèce à l'*A. tenellus* Müll.

([5]) **Arion tenellus** *Müll.* (Limax) Verm. Hist. 2, p. 11, n° 210, (1774).

A. très-petit, verdâtre ou jaune-verdâtre pâle; tête et tentacules noirs; plan locomoteur jaune très-pâle. Long. 30-40, diam. 5-7 mill.

Hab. les bois humides du nord de la France, dans les feuilles mortes. Commun, même au cœur de l'hiver.

Obs. Tous les caractères de ce mollusque étant ceux d'un *Arion*, j'ai dû le reporter dans son véritable genre. Je lui adjoindrais volontiers l'*A. melanocephalus.*

([6]) **Limax brunneus** *Drap.* Tabl. moll. p. 104, n° 10 (1801).

Je crois avoir rencontré cette espèce rare et peu connue aux environs d'Arcis-sur-Aube (Aube). Malheureusement mes sujets sont morts avant que j'aie pu les examiner à tête reposée. Je ne puis reproduire ici que la note succincte prise à la hâte au retour de l'excursion. La voici telle qu'elle est sur mon carnet :

« L. très-petite, effilée, vive dans ses mouvements, d'un brun un peu rou-
» geâtre ; mucus incolore. Long. 20 mill.
» Limacelle très-petite, mince et fragile, ovalaire, légèrement voûtée. Long.
» 1 $\frac{1}{2}$, diam. 1 mill.
» Sous les bois morts, au bord des ruisseaux, au Chêne, près Arcis-sur-
» Aube. Août 1854. »

M. Mortillet, de Genève, m'a envoyé plusieurs individus capturés aux environs de Bonneville, en Savoie. Sur les os et les plantes humides, autour des marais.

([7]) **Limax cinereo-niger** *Sturm.* Deutschl. Faun. VI, 1, cum fig. (ex Nilss.)

L. très-grande, noire, à carène blanche; mufle blanchâtre; plan locomoteur blanc au milieu, noir de chaque côté. Long. 180, diam. 20 mill.

Limacelle grande, oblongue, largement tronquée en avant, subaiguë en arrière, lisse et légèrement convexe en-dessus, rugueuse et comme cristallisée en dessous. Long. 12, diam. 7 mill.

Hab. les forêts, les bois, les montagnes. Vorace et carnassière.

Obs. Quelquefois, au lieu d'être entièrement noirs, les flancs de cette espèce sont grisâtres et mouchetés ou pointillés, quelque peu fasciés. Tels sont des individus provenant de Bonneville, en Savoie, que m'a procurés M. Mortillet. C'est la variété A signalée par Nilsson (*Moll. succ.*, p. 8), et le *Limax fasciatus* de Razoumowsky (*Hist. nat. du Jorat*, I, p. 267, n° 12).

([8]) **Limax sylvaticus** *Drap.* Hist. Moll. p. 126, n° 8, pl. 9, fig. 9 (1805).

L. petite, effilée, roussâtre, avec une bande brunâtre de chaque côté, sur le bouclier et sur le dos; tête et tentacules grisâtres; plan locomoteur d'un blanc jaunâtre. Long. 50, diam. 6 mill.

Limacelle petite, oblongue, subtétragonale, épaisse pour sa taille, luisante et nacrée en dessus, mate et rugueuse en dessous; bords membraneux. Long. 5, diam. 3-4 mill.

Hab. les bois. En octobre et en novembre, elle est très-abondante sous la mousse qui recouvre les chênes. C'est une espèce grimpante. Elle se plaît dans les fissures de l'écorce des arbres. On la trouve aussi au milieu des feuilles mortes.

Obs. 1. J'ai remarqué, à Bar-sur-Seine (Aube), une variété frappante de cette espèce, d'un jaune-orange très-vif, bifasciée comme le type, et à tête et tentacules brunissants.

Obs. 2. Est-ce bien là le *L. sylvaticus* Drap.? Je suis encore à me le demander. Mais il est certain que c'est le *L. rusticus* Mill. et, sans doute aussi, le *L. scandens* Norm.

(9) **Testacella** *Drap.*

L'on m'a signalé la *Test. Maugei.* Fér. comme vivant à Dieppe. Si elle s'y trouve, ce n'est qu'accidentellement, dans quelque jardin où elle aura été apportée avec une plante exotique. C'est ainsi, suivant Férussac, qu'elle a été acclimatée dans le Jardin botanique de Bristol.

(10) **Vitrina annularis** *Stud.*

Des échantillons authentiques de *V. annularis* Stud., que je dois à l'obligeance de M. de Charpentier, ne me laissent aucun doute sur l'identité de cette espèce avec la *V. subglobosa* Mich.

(11) **Succinea Baudonii** *Drouët in : Baud.* Descript. des Moll. de l'Oise (Mém. Soc. Acad. Ois. tom. 2, 1852, p. 144), n° 5 (1852).

Coquille petite, ventrue, obtuse, à peine striée, assez solide, d'un jaune-d'ambre clair; ouverture ovale, large; 3 tours de spire convexes, à suture bien marquée; sommet obtus. Haut. 5, diam. 3 mill. Haut. de l'ouverture : 3 mill.

Hab. les prairies des environs de Mouy-de-l'Oise, sur les plantes. Découverte, il y a quelques années, par mon collaborateur et ami, M. le Dr Baudon, à qui je me suis fait un véritable plaisir de la dédier.

(12) **Succinea Corsica** *Schüttl.* Moll. Cors, p. 5 (Mittheil. d. Bern. nat. Ges. 1843, p. 13) (1843).

Coq. très-allongée, finement striée, très-fragile (notamment vers le bord supérieur du péristôme), d'un fauve un peu rougeâtre, ou, rarement, d'un blond-pâle; ouverture très-allongée, aiguë inférieurement; 3 ½ tours de spire, à suture peu profonde. Haut. 13, diam. 6 mill. Haut de l'ouv. 9 mill.

Hab. Grasse; les environs de Nice. Elle vit sur les plantes qui bordent les fossés. Communiquée par M. Martillet, dont les échantillons ont été déterminés par M. Shüttleworth lui-même.

Obs. 1. Par sa forme générale, cette coquille rappelle un peu la *S. virescens* Mor.; mais elle est beaucoup plus allongée, et moins évasée, supérieurement.

Obs. 2. C'est cette espèce que M. l'abbé Dupuy a dû déterminer *S. longiscata* Mor. Mais je ne vois pas que cette ambrette portugaise se rencontre en France.

([13]) **Succinea humilis** *Drouët* ined.

Coq. petite, ovale-oblongue, fragile, un peu striée, à peine luisante, jaune-verdâtre; ouverture ovale-arrondie; 4 tours de spire tordus, suture profonde. Haut. 4, diam. 2 ½ mill. Haut. de l'ouv. 2 ½ mill.

Hab. Troyes, sur le tronc des saules; Arcis-sur-Aube, au pied des peupliers qui bordent les prairies; Remiremont, sous les bois morts, dans les prés. Presque toujours elle est revêtue de limon.

Obs. Voisine, j'en conviens, de la *S. oblonga* Drouët, cette Ambrette en diffère par sa taille beaucoup moins grande, sa forme et sa spire bien moins allongées et par son ouverture plus arrondie.

([14]) **Succinea ochracea** *Betta* Malac. Valle di Non. p. 31, pl. 1, fig. 1 (1852). (ex emend. cl. Terver).

Coq. assez petite, ovale-obtuse, striée finement, fragile, brillante, d'un succin jaunâtre ou rougeâtre; ouverture subpyriforme; 3 tours de spire à suture peu profonde; sommet obtus. Haut. 7, diam. 4 mill. Haut. de l'ouvert. 5 mill.

Hab. Troyes, Bar-sur-Aube, sur les plantes qui bordent les fontaines; Bar-sur-Seine, sur les orties, au pied des vieux murs. — Bords du lac de Genève. — Les types authentiques m'ont été communiqués par M. de Charpentier et par M. Mortillet.

([15]) **Helix** *Lin.* sect. 1. *Zonites* Montf.

Les données anatomiques justifient surabondamment cette coupe sous-générique. Voir, à ce sujet, les travaux de MM. Van Beneden, Dumas, Moquin-Tandon, etc. Suivant M. Terver, ce groupe, surtout dans les *Crystallines*, n'est pas encore entièrement connu.

([16]) **Helix alliaria** *Mill.* Ann. Phil. VII, p. 379 (1822).

Coq. moyenne, convexe-sub-déprimée, étroitement ombiliquée, lisse, brillante, diaphane, fauve en dessus, blanchâtre en dessous; 5 tours de spire; ouverture sub-déprimée; péristôme simple, tranchant. Diam. 7-10, haut. 4-5 mill.

Hab. le mont Pilat, près de Lyon. Communiquée par M. Terver.

Obs. Il ne faut pas confondre cette espèce, ainsi que l'ont fait M. Gray (Turt. Man., p. 169), et M. L. Pfeiffer (Mon. Hel. I, p. 91), avec l'*H. glabra* Stud., qui est plus grande, plus déprimée, moins étroitement ombiliquée, et qui compte 6 à 7 tours de spire. Il suffit de jeter un coup-d'œil sur la fig. 39, pl. IV, du *Turton's Manual* de M. Gray (*H. alliaria*), pour ne pas reconnaître dans cette coquille l'espèce nommée par Studer. Toutes deux se trouvent aux environs de Lyon, mais elles sont rares.

([17]) **Helix hydatina** *Rossm.* Icon. VIII, p. 36, fig. 529 (1838).

Coq. petite, convexe-déprimée, très-étroitement ombiliquée, blanchâtre, hyaline, très-finement striée, brillante; 5-6 tours de spire, à peine convexes, à accroissement lent et régulier, et à suture bien marquée; ouverture déprimée, largement échancrée par l'avant-dernier tour; péristôme droit, simple, tranchant. Diam. 5-6, haut. 2-3 mill.

Hab. les environs de Lyon, où elle est assez rare. Communiquée par M. Terver.

Obs. 1. Quoique plusieurs naturalistes se refusent à admettre l'existence de l'*H. hydatina* en France, il m'est impossible de ne pas voir dans la coquille recueillie à Lyon, l'Hélice décrite par l'auteur de l'*Iconographie.* Figures et description, tout est identique.

Obs. 2. Primitivement indiquée, par Ziégler, comme originaire de Corfou, l'*H. hydatina* a été successivement observée à Naples (Philippi), à Smyrne (Roth), en Grèce (de Saulcy), puis dans les alluvions de la Garonne, à Toulouse (L. Partiot), à Montpellier, à Fernex (Dum. et Martill.), et enfin, aux environs de Lyon (Terver).

([18]) **Helix nitidosa** *Fér.* Tabl. syst. p. 41, n° 214 (1821).

Coq. petite, convexe-déprimée, largement et profondément ombiliquée, finement striée, à peine luisante, fauve, translucide; 5 tours de spire convexes; suture bien marquée; ouverture ovalaire, très-oblique, légèrement échancrée par l'avant-dernier tour; péristôme droit, simple, tranchant. Diam. 4, haut. 2 mill.

Hab. le parc de la ferme d'Ansacq, près de Mouy (Oise), au pied des arbres moussus; le bois de Fouchy, à Troyes, dans la mousse et dans les feuilles mortes; les environs de Remiremont (Vosges), dans la mousse, au pied des sapins. Espèce assez rare.

([19]) **Helix aculeata** *Müll.*

Je ne puis résister au désir de signaler aux naturalistes une localité du département de l'Aube, où cette espèce est extrêmement répandue. C'est une petite plantation de sapins, sur une colline connue sous le nom de *montagne Ste.-Germaine*, à Bar-sur-Aube. On la trouve sous les pierres, dans la mousse, dans les branches et les feuilles sèches. J'en ai même vu sur le pied de gros champignons. M. Cotteau, aujourd'hui juge à Couloumiers, et moi, l'avons recueillie par centaines, par un temps sec du mois de septembre, et je suis persuadé qu'après une pluie légère, nous en aurions vu encore davantage. Malgré sa taille exiguë, cette Hélice paraît moins délicate que plusieurs de ses congénères. J'en ai envoyé dans le midi de la France, dans un tube attaché à une lettre, et elle est arrivée saine et sauve. Ses mouvements, ainsi que j'ai pu l'observer, ne manquent pas de vivacité : en rampant sur la mousse, ou dans le bois mort, elle balance son test à droite et à gauche, comme pour écarter les obstacles, et elle le porte de façon qu'on ne voit guère que ses tentacules supérieurs, qui sont fort allongés. Par instant, elle élève tellement sa coquille au-dessus d'elle, qu'on la croirait séparée du corps. Müller, Draparnaud, Nilsson et Rossmässler, ont fait à-peu-près les mêmes remarques.

Je ne vois guère que M. Morelet et M. Bouillet qui aient indiqué l'*H. aculeata* comme un mollusque plutôt commun que rare, l'un dans les bois de la chaîne des montagnes du Puy-de-Dôme, l'autre dans la province de Tras-os-Montes, en Portugal.

([20]) **Helix costulata** *Ziégl.* in : C. Pfeiff. Naturg. Deutschl. III, p. 32, pl. 6, fig. 21-22 (1828).

Coq. assez petite, globuleuse-sub-déprimée, étroitement ombiliquée, striée-côtelée, d'un gris blanchâtre uniforme, ou fasciée d'une bande fauve, ou encore mouchetée de taches roussâtres, sub-opaque, mince; 5 tours de spire convexes, ouverture bien arrondie, légèrement échancrée par l'avant-dernier tour, péristôme droit, simple. Diam. 6-7, haut. 4-5 mill.

Hab. les côtes des environs de Bar-sur-Seine (Aube). Elle y est rare. Pour trouver cette Hélice, il faut quitter la région des vignes, et gagner la partie inculte des côtes, connue sous le nom de friches. Là, on trouve simultanément et l'*H. candidula* et l'*H. costulata* : mais cette dernière est bien moins répandue que l'autre. Le matin, par la rosée, elle grimpe sur les petites plantes basses qui composent la flore de cette partie des côtes, et qui lui servent probablement de nourriture. Quand la fraîcheur est passée, elle redescend s'abriter sous les feuilles radicales de ces petites plantes : plus rarement elle se fixe sur la tige, en prenant soin de se clore au moyen d'un épiphragme, très-mince et vitreux. J'ai souvent mis des heures entières pour en récolter une douzaine.

Obs. Je soutiens la validité de cette espèce, qui me paraît aussi distincte que possible. Je ne puis donc pas me ranger à l'avis de Rossmässler, qui n'en fait qu'une simple variété de l'*H. candidula*, pas plus qu'à celui de L. Pfeiffer, qui la donne, en synonyme, à l'*H. intersecta*, et je me vois forcé de penser que ces deux célèbres conchyliologistes n'ont eu à leur disposition que des échantillons, ou imparfaits, ou apocryphes de cette espèce.

([21]) **Helix depilata** *Drap.* Tabl. p. 72, n° 5 (1801).

Je puis me dispenser de décrire une coquille aussi bien connue que l'*H. depilata*. Mais je ne veux pas passer sous silence un point de la chaîne des Vosges, où je l'ai recueillie, sinon en grande abondance, du moins en quantité suffisante pour la distribuer à plusieurs de mes correspondants. L'*H. depilata* se trouve dans les escarpements du Hohneck, l'un des points les plus élevés de la chaîne des Vosges. Elle se plaît sur les plantes touffues et vigoureuses qui croissent dans ces régions, notamment sur le *Cacalia albifrons* ? dont les larges feuilles tomenteuses lui offrent un abri contre un soleil trop ardent. Par un temps sec et venteux, elle reste cachée à la racine des plantes, où il est assez difficile de la découvrir; mais aussitôt qu'une pluie légère calme et rafraîchit l'air, on la voit sortir de sa retraite. C'est ainsi que l'année dernière (1853) par une matinée humide du mois de septembre, mon honorable ami, M. Puton, et moi, en avons récolté une trentaine d'individus, à 1200 mèt. environ d'élévation. Dans cette localité pittoresque et digne de tout l'intérêt des naturalistes, l'*H. depilata* vit en compagnie de l'*H. sericea*, qui, pour le dire en passant, me paraît plus belle et plus développée, dans ces régions alpestres, que partout ailleurs.

([22]) **Helix glabella** *Drap.* Tabl. p. 87, n° 30 (1801).

Coq. assez petite, subdéprimée, plus ou moins étroitement ombiliquée, très-confusément sous-carénée, très-finement striée, lisse, peu luisante, sous-transparente, roussâtre ou brunâtre, avec une très-légère bande plus pâle, marquant la carène; 5-6 tours de spire à peine convexes; ouverture sub-arrondie, fortement échancrée par l'avant-dernier tour; péristôme droit et tranchant, très-légèrement évasé vers l'ombilic, quelquefois simple, quelquefois muni intérieurement, et à une faible distance du bord, d'un petit bourrelet blanchâtre. Diam. 9-10, haut. 5-6 mill.

Hab. les environs de Grenoble! Échantillons authentiques adressés par M. Terver.

Obs. Pour la discussion de l'espèce, voir à l'article *H. rufescens.*

([23]) **Helix glacialis** *Thom.* in : Fér. Tabl. syst. p. 38, n° 159 (1821).

Coq. moyenne, convexe-sub-déprimée, ombiliquée, légèrement sous-carénée, à stries fortes et espacées, sub-opaque, d'un gris jaunâtre, avec petites taches fauves, et une bande brunâtre; 5-6 tours de spire à peine convexes; ouverture sub-arrondie, légèrement échancrée; péristôme sous-réfléchi, légèrement épaissi et bordé de blanc. Diam. 13-14, haut. 6-7 mill.

Hab. le versant français du Mont-Thabor, dans le Haut-Oisans (Isère). Communiquée par M. Martillet, qui l'a, plusieurs fois, recueillie lui-même dans cette localité, à mètres d'élévation, c'est-à-dire, dans la zône des gazons, et à la limite inférieure de celle des neiges perpétuelles.

([24]) **Helix hortensis** *Müll.* var. *H. Ludoviciana* d'Aum. in sched.

Cette jolie variété de l'*H. hortensis* est beaucoup plus petite que le type, et en outre, elle est transparente et luisante. Sa coloration la plus ordinaire est le rougeâtre, le gris café-au-lait, et le jaune, avec une ou sans bande. Diam. 15-17, haut. 10 mill. Qu'il y a loin de cette variation aux individus monstrueux des Pyrénées, qui mesurent 30-35 mill. de diamètre, sur 20-23 mill. de hauteur! Elle habite la chaîne des monts Dômes (Lecoq). Recueillie autour de Clermont-Ferrand, par M. G. d'Aumont, aujourd'hui sous-Intendant militaire à Bastia, qui m'en a envoyé de nombreux échantillons.

([25]) **Helix lapicida** *L.* var. *H. Lecoquii*, Put. in sched.

Cette Hélice est un peu plus petite que l'*H. lapicida*, dont elle n'est qu'une variété. Sa couleur est le blond-fauve, maculé de brun-rougeâtre çà et là. Au lieu d'être convexe-déprimée, la spire est entièrement déprimée et aplatie. Les tours, au nombre de 5, sont à peine convexes et séparés par une forte suture. Enfin, au lieu d'être carénée comme le type, notre variété a le dernier tour très-légèrement sous-caréné, ou presque arrondi. Vue en dessus, elle a presque la physionomie de l'*H. holosericea.* Diam. 13, haut. 5 mill. Découverte en 1850, à Wildenstein, au pied du Rotabac (Vosges), par M. Lecoq, de Clermont-Ferrand, à qui M. Puton l'a dédiée. Depuis, M. Puton l'a retrouvée à Remiremont même.

Je ne connais de variétés, chez l'*H. lapicida*, que celle ci-dessus, et la variété *albinos* qui se trouve à Luz, dans les Pyrénées, et aux environs de Lyon. Toutes deux sont fort remarquables.

([26]) **Helix montana** *Stud.* Syst. Verz., p. 86, n° 11 (1820).

Coq. assez petite, sous-globuleuse, convexe, ombiliquée assez étroitement, mais profondément, légèrement striée, sous-transparente, couleur de corne claire, avec une légère bande grisâtre; 6 tours de spire convexes, dont les premiers sont comme érodés; ouverture sub-arrondie, fortement échancrée; péristôme droit, tranchant, muni, à quelque distance du bord, d'un bourrelet blanchâtre. Diam. 9-10, haut. 6 mill.

Hab. le Jura français. Communiquée par M. Mortillet, qui m'assure que c'est bien la véritable *H. montana* de Studer.

Obs. Voir à l'article *H. rufescens*, pour la discussion de l'espèce.

([27]) **Helix nubegina** *F. Saulcy* in : Journ. Conch. 1852, p. 438, et 1853, p. 77, pl. 3, fig. 7 (1852).

Coq. moyenne, convexe-sub-déprimée, à ombilic large et profond, à peine striée, solide, opaque, d'un blanc-jaunâtre ou rosâtre; 6 tours de spire convexes, à accroissement régulier; ouverture arrondie, légèrement échancrée : péristôme droit, tranchant, bordé intérieurement d'un bourrelet blanc, presque continu. Diam. 12, haut. 7 mill.

Hab. avec l'*H. carascalensis* les sommets neigeux et glacés des Pyrénées, à Eaux-Bonnes, Barèges, etc. Communiquée par M. Bourguignat, mon compatriote, qui en a rapporté de nombreux échantillons d'un voyage dans les Pyrénées.

([28]) **Helix revelata** *Fér.* Tabl. syst. p. 44, n° 273 (1821).

Coq. petite, perforée (sub-ombiliquée), globuleuse-déprimée, finement striée, un peu rugueuse, ornée de poils courts et raides, mince, transparente, d'un vert pâle, tirant sur le blond; 4-5 tours de spire convexes, à accroissement accéléré, séparés par une suture bien marquée; le dernier tour plus gros que les autres, à proportion; ouverture arrondie, un peu échancrée par l'avant-dernier tour; péristôme simple, tranchant, légèrement refléchi; bord columellaire blanchâtre, évasé et empiétant sur l'ombilic. Diam. 7, haut. 4 $\frac{1}{2}$ mill.

Hab. Niort, où elle a été recueillie par M. le capitaine Decret! (Mortillet). Les landes d'Aquitaine, aux environs de Mont-de-Marsan! (Dupuy).

Obs. La description et la figure de ce dernier auteur cadrent d'ailleurs parfaitement avec l'*H. ponentina* Dup. Je crois être dans le vrai en réunissant à l'*H. revelata* de Férussac, comme synonyme, l'*H. ponentina* Mor., ou tout au moins l'espèce décrite, sous ce nom, par M. l'Abbé Dupuy. D'un autre côté, il est certain que c'est bien là l'*H. revelata* Mich.; car M. Michaud, dans des échantillons recueillis à Mont-de-Marsan, qui lui étaient soumis, a, sur-le-champ, reconnu son *H. revelata* (De Charpentier, in litt.). Quant aux localités indiquées par Férussac, et même par M. Michaud, je les crois erronées. Cette Hélice me paraît propre au littoral occidental, et je ne pense pas qu'on doive la rencontrer en dehors de toute influence sub-maritime. Elle habite assez communément l'île de Guernesey, où elle ne diffère en rien des individus de Niort et de Mont-de-Marsan.

([29]) **Helix rufescens** *Penn.* Brit. Zool. IV, p. 134, pl. 85, fig. 127 (1777).

Coq. moyenne, sub-déprimée, assez largement ombiliquée, obtusément sous-carénée, très-finement striée, sous-transparente, d'un gris-blond, ou d'un roussâtre pâle, avec une légère bande blanchâtre; 6-7 tours de spire à peine convexes; ouverture ovalaire ou arrondie, fortement échancrée par l'avant-dernier tour; péristôme droit et tranchant, quelquefois très-légèrement évasé, muni intérieurement, et à une faible distance du bord, d'un petit bourrelet blanchâtre. Diam. 10-12, haut. 6-7 mill.

Hab. Bar-sur-Seine, Bar-sur-Aube (Aube), sur les orties qui croissent au pied des vieux murs; sur les fraisiers, les violettes et les bois, dans les jardins; au pied des haies, dans les champs. Cette Hélice ne sort que par la pluie, surtout le matin et le soir. Pendant les journées sèches, elle demeure cachée, soit au pied des orties, soit sous les feuilles des violettes et des fraisiers, soit encore sous les pierres.

Obs. 1. A l'état frais et jeune, cette coquille est revêtue de poils noirs, très-courts et très-caduques. Mais à mesure qu'elle grandit, ces vestiges de villosité disparaissent, et chez les adultes, il n'en reste pas même la trace.

Obs. 2. Dans l'impossibilité presqu'absolue où j'ai été de me créer une opinion bien arrêtée au sujet des véritables rapports qui lient les *H. rufescens glabella* et *montana*, j'ai préféré leur laisser, à chacune séparément, le rang provisoire d'espèce distincte. Je ne sais si les diagnoses que j'ai données, de ces trois Hélices, lèveront, pour quelques lecteurs, les doutes qui me tiennent encore en suspens. Quant à moi, je le répète, malgré tous mes efforts, je ne saurais dire si ce sont trois espèces différentes ou seulement trois variations d'un type unique. J'ai de magnifiques échantillons d'*H. rufescens*, provenant de Boulogne-sur-Mer, et d'autres de Heidelberg, en Bade, qui ne mesurent pas moins de 14 mill. de diamètre sur 8 de hauteur. Ceux que je recueille dans le département de l'Aube, n'en diffèrent que par une taille un peu moins forte. D'un autre côté, M. Mortillet et M. Terver, ont bien voulu me communiquer des échantillons authentiques d'*H. glabella*, recueillis aux environs de Grenoble. Enfin, le même M. Mortillet m'a également envoyé des individus soi-disant authentiques de l'*H. montana*, mesurant 9 mill. seulement de diamètre sur 6 de hauteur et provenant du Jura français. Si l'on prend les deux formes extrêmes, l'*H. rufescens*, de Heidelberg, et l'*H. montana* du Jura, infailliblement on sera tenté de les séparer spécifiquement. D'autre part, si l'on intercale, entre elles, comme formes intermédiaires, ou l'*H. glabella* ou l'*H. clandestina* (laquelle, pour le dire en passant, n'est certainement qu'une variété *minor* de l'*H. rufescens*, ainsi que des individus authentiques provenant de Zurich me le démontrent péremptoirement), l'on se demande si ce ne sont pas là plusieurs variations de taille et de forme, d'une seule et même espèce!... Mais comme je me méfie singulièrement de ce système des séries et des passages insensibles (comme conduisant à l'absurde!) je reste, jusqu'à nouvel ordre, dans le doute. Peut-être l'observation de l'animal, chez ces Hélices, tranchera-t-elle la difficulté. M. l'abbé Dupuy réunit ces différentes formes, comme simples variétés de l'*H. rufescens*. M. Moquin-Tandon paraît de cet avis. L. Pfeiffer réunit l'*H. montana*, à l'*H. rufescens*, mais il distingue l'*H. glabella*. M. Terver voit trois espèces, conformément à mes distinctions. M. Mortillet va encore plus loin, et veut que les *H. rufescens, clandestina, glabella* et *montana*, soient quatre espèces distinctes!

(50) **Achatina** *Lam.*

M. Moquin-Tandon pense (Journ. Conch. 1851) que notre genre *Achatina* ne vaut rien, et qu'il devra former une section du genre *Bulimus* (*Cochlicopa* Fér.). Il ne m'appartient pas, à moi simple nomenclateur, de trancher cette question. Je soumets cette idée aux anatomistes.

(51) **Achatina collina** *Drouët* ined.

Coq. petite, ovale-oblongue, lisse, brillante, d'un fauve-verdâtre ou rougeâtre, 5-6 tours de spire à peine convexes; ouverture pyriforme; péristôme un peu épaissi, à bourrelet blanchâtre; bord columellaire à peine épaissi. Haut. 3-4, diam. 1 ½-2 mill.

Hab. le sommet des collines arides et sablonneuses, sous les pierres, à Fontaines, près de Lyon (Terver); à Mouy-de-l'Oise (Baudon); à Liézey, dans les Vosges (abbé Jacquel). Assez rare.

([32]) **Pupa Moquiniana** *Küst.* Monogr., p. 52, pl. 7, fig. 1-3 (184).

Coq. perforée, cylindrico-conique, fortement et abondamment striée, brunâtre; spire un peu obtuse; 8 tours convexes; ouverture grande, oblongue, colorée, ornée de 9 plis; péristôme simple, réfléchi, presque continu. Haut. 8, diam. 2 $\frac{1}{2}$ mill.

Hab. le mont Bendat, près de Pau. Rare.

([33]) **Clausilia dubia** *Drap.* var.

Cette variété de la *Cl. dubia* est moins grande que le type : elle n'a que 11-12 mill. de haut sur 3 $\frac{1}{2}$ mill. de large. L'ouverture est aussi moins grande et moins allongée. Mais ce qui la rend particulièrement remarquable, c'est sa forme pupoïde. Elle est courte, ramassée, et ventrue dès le quatrième ou le cinquième tour de spire. Cependant le sommet n'est point obtus. Son ensemble est plutôt celui d'un *Pupa* (du *P. cinerea* ou du *P. variabilis*, par exemple), que d'une *Clausilia*. Je l'ai recueillie au sommet du Honeck (Hautes-Vosges), à 1250 mèt. environ d'élévation, sur le tronc moussu des vieux sapins.

([3]) **Clausilia laminata** *Mont.* var. *Cl. phalerata* Dup.

Je considère la *C. phalerata* de Dupuy comme une variété alpine de la *l. laminata*. Si j'en crois M. Mortillet, le *Cl. phalerata* Ziégl. (*Cl. fimbriata* Mühlf.) serait différente, et ne se rencontrerait pas en France. (Conf. L. Pfeiffer, Mon. Hel. II, p. 399, n° 5).

([35]) **Limnœa thermalis** *Boub.* Bull. d'hist. natur., p. 20, n° 48 (1833).

Coq. petite, ovale-oblongue, sub-perforée, finement striée, peu brillante, couleur de corne-fauve, fragile; 5 tours de spire convexes, suture assez profonde, dernier tour très grand; ouverture ovale, aiguë inférieurement; péristôme sub-continu, simple, tranchant; bord columellaire torse, réfléchi. Haut. 8-12, diam. 4-6 mill., haut. de l'ouvert. 5-6 mill.

Hab. les sources chaudes des Pyrénées (Boubée). Je l'ai abondamment recueillie, avec M. Puton, à *Chaude-Fontaine*, près Remiremont (Vosges). Peut-être cette jolie petite Limnée n'habite-t-elle pas exclusivement les eaux thermales?... J'ai vu aux environs de Mouy (Oise), dans une fontaine froide, une forme absolument identique!

([39]) **Limnœa truncatula** *Müll.* var. *L. microstoma* Drouët.

J'ai longtemps cru pouvoir ériger en espèce ma *L. microstoma :* c'est dans cette idée que je l'ai adressée, sous ce nom, à la plupart de mes correspondants. Après une étude attentive de l'animal et du test, j'ai reconnu que ce n'est qu'une variété de forte taille, allongée, avec dernier tour de spire ventru, ouverture rétrécie et péristôme épaissi et continu, de la *L. truncatula*. Des conditions extraordinaires de tranquillité et d'alimentation sont probablement causes de cette variété remarquable. Haut. 10, diam. 5 mill.; haut. de l'ouv. 7 mill.

Hab. les puits de plusieurs jardins, à Bar-sur-Seine (Aube). On la rencontre aussi dans les pierres à eau de ces puits, souvent presque à sec. Mais il faut si peu d'eau à cette Limnée, qu'un peu de terre humide lui suffit.

([37]) **Planorbis septemgyratus** *Ziégl.*

C'est sur la foi de M. l'abbé Dupuy, et sous toutes réserves, que je cite cette espèce. Jamais je ne l'ai vue en France. M. Cotteau, juge à Coulommiers, m'a adressé tous les Planorbes recueillis par lui à Châtel-Censoir (Yonne) : il m'a été impossible, dans ses envois, de trouver autre chose que le *Pl. leucostoma.*

([38]) **Ancylus cyclostoma** *Bourg.* in : Journ. Conch., p. 193, n° 14 (1853).

Coq. petite, à peine convexe en avant, concave en arrière, déprimée, diaphane, légèrement striée; sommet obtus, médian, un peu en arrière; dépression apicale arrondie, médiane, placée à l'extrême sommet; ouverture ronde ou arrondie. Long. 5, diam. 4, haut. 2 mill. (Bourg.).

Hab. les eaux limpides de *l'Aube*, sur les pierres, à Unienville, à Dieuville (Aube) (Bourguignat).

([39]) **Ancylus riparius** *Desm.* in : Bull. soc. Phil. de Paris, p. 19, pl. 1, fig. 12 (1814).

Coq. assez grande, peu élevée, finiment mais sensiblement striée, diaphane, fragile; sommet légèrement acuminé, à peine recourbé, médian, de beaucoup dépassé par le bord postérieur de l'ouverture; ouverture régulièrement ovale; concavité très-légèrement blanchâtre, peu luisante. Long. 8-9, diam, 6, haut. 3-4 mill.

Hab. les rivières et les ruisseaux des environs de Remiremont (Vosges). Je crois cette espèce particulière aux petites rivières des pays de montagnes. Depuis que Desmarest l'a décrite, dans une *Note sur les Ancyles*, insérée au Bulletin des sciences de la Société Philomatique de Paris, pour 1814, elle paraissait oubliée. M. Bourguignat l'a justement tirée de cet abandon immérité, dans son *Catalogue des espèces du genre Ancylus* (Journ. Conch. 1853).

([40]) **Ancylus strictus** *Mor.* Moll. Portug., p. 88, n° 4, pl. 8, fig. 4 (1845).

Coq. moyenne, de forme longitudinale, allongée, comprimée sur les côtés, finement striée, à peine diaphane, assez solide, jaune-verdâtre; sommet assez recourbé, postérieur, acuminé; ouverture elliptique, rétrécie, un peu plus large antérieurement. Long. 8, diam. 4, haut. 3 mill. (Mor.)

Hab. les environs de Brest (collect. de M. Benj. Delessert).

Obs. Il est assez curieux de retrouver au fond du Finistère une coq. primitivement découverte en Portugal et en Espagne. Au reste, ce n'est pas la première fois que des rapports de ce genre ont été signalés, entre la Bretagne et la Péninsule hispanique. S'il faut en croire M. Danthon, l'*Helix quimperiana* Fér. se retrouverait également sur le littoral du nord de l'Espagne (Conf. Danthon in : Revue zool. 1840, p. 121).

([41]) **Ancylus Moquinianus** *Bourg.* in : Journ. Conch., p. 197, n° 52, pl. 6, fig. 9 (1853).

Coq. moyenne, longitudinale, très-allongée, comprimée sur les côtés, lisse, jaunâtre ou grisâtre; sommet aigu, recourbé vers la gauche; dépression apicale très-petite, à peine visible, située à l'extrême sommet; ouverture oblongue, très-allongée. Long. 8, diam. 3, haut. 3 mill. (Bourg.).

Hab. certains ruisseaux des environs de Dijon; les courants rapides autour de Toulon (Bourguignat).

([42]) **Bythinia** *Gray.*

La séparation des genres *Paludina* et *Bythinia* est confirmée par les recherches anatomiques de M. Moquin-Tandon (Conf. Journ. Conch. 1851, p. 237 et seq.).

([43]) **Valvata** *Müll.*

De Férussac connaissait dix espèces françaises de ce genre (Conf. Férussac, Ess. méth. conch., p. 103; 1807). Peut-être des recherches minutieuses, et une étude approfondie du genre, feront-elles retrouver ce nombre?.... (Voir mon *Appendice*).

([44]) **Valvata piscinalis** *Müll.* var. *V. depressa*, C. Pfeiff. (ex emend. cl. de Charpentier).

Est-ce une variété de la *V. piscinalis*, est-ce une espèce distincte? Je ne puis me prononcer. Avec M. l'abbé Dupuy, j'adopte, provisoirement, la première hypothèse. M. de Charpentier la distingue spécifiquement. Voici la diagnose que j'avais préparée :

Coq. petite, sub-déprimée, profondément ombiliquée, à peine striée, un peu luisante, blanchâtre ou verdâtre; 4 $\frac{1}{2}$ tours de spire convexes, séparés par une suture profonde; ouverture arrondie; péristôme un peu épaissi; opercule spiralé, 8 à 9 fois étagé. Haut. 3-4, diam. 3-5 mill.

Hab. la *Sainte-Fontaine* et la *Barbacane*, source et ruisseau, à Bar-sur-Seine (Aube).

([45]) **Valvata spirorbis.** *Drap.* Hist. Moll., p. 41, n° 1, pl. 1, fig. 32-33 (1805).

Coq. petite, déprimée, largement et profondément ombiliquée, un peu striée, luisante, couleur de corne-fauve; 3 $\frac{1}{2}$ tours de spire convexes; ouverture grande, arrondie; péristôme un peu évasé; opercule spiralé, mince, corné. Haut. 2, diam. 3 $\frac{3}{4}$ mill.

Hab. les fossés, au milieu des plantes aquatiques, à Nogent-sur-Seine (Aube)! à Mouy-de-l'Oise! les environs de Grasse (Mort.)., de Chartres (Bourg.). Peu abondante.

Obs. Je crois qu'il y a lieu de soutenir la validité de cette espèce. Les échantillons que j'ai recueillis moi-même, à Nogent et à Mouy, cadrent parfaitement avec les figures et description de Draparnaud!

([46]) **Cycladea.**

Objet, en ce moment, des recherches et des études de plusieurs naturalistes, dont les noms sont familiers au public conchyliologue, cette famille litigieuse fournira probablement à quelqu'un d'entre eux l'occasion de doter la France d'une monographie, dans le genre de celle dont s'honore, à bon droit, l'Angleterre. Déjà l'on peut consulter avec fruit ce qu'ont écrit sur ce sujet MM. Dupuy, Gassies, Baudon, Bourguignat et Normand. (Voir notamment la *Monographie* *des espèces françaises du genre Sphærium* (*Mém. Soc. des Sc. phys. et nat. de Bord.* 1854), travail récent de M. Bourguignat).

([47]) **Unio** *Retz.*

Ce genre, dont je vais m'occuper spécialement, demande une révision sévère. Je le laisse tel quel, en attendant un remaniement complet, pour ne rien précipiter. Mais je ne sais si je trouverai le fil d'Ariane, qui me guidera dans ce dédale un peu ténébreux....

([49]) **Unio ater** *Nilss.* Moll. Suec., p. 107, n° 3 (1822).

Coq. assez grande, ovale-allongée, ventrue, épaisse; bord postérieur élevé, largement tronqué; bords supérieur et inférieur un peu arqués, parallèles; sommets distancés, fortement excoriés, lisses; épiderme noirâtre, cortex d'un beau blanc-d'argent; nacre d'un blanc-bleuâtre, parsemée de taches livides; impressions musculaires antérieures très-profondes; dents cardinales épaisses, coniques, cunéiformes, obtuses, crénelées; dents latérales lamelliformes. Long. 80, haut. 40, diam. 30 mill.

Hab. le *Maudrezey*, petite rivière des Vosges, à Saulcy-sur-Meurthe. Découverte et communiquée par M. Puton, à qui cette espèce, nouvelle pour la faune française, a fourni le sujet d'une note intéressante.

Obs. L'*U. consentaneus*, de Ziégler, ne diffère pas, spécifiquement, de *l'U. ater.* Les échantillons authentiques de l'une et l'autre forme, que m'ont adressés MM. Rossmässler et Parreyss, ne me laissent aucun doute à cet égard.

([49]) **Unio crassus** *Retz.* Nov. test. gen., p. 17, n° 2, 1788), (ex emend. cl. Rossmässler).

Coq. moyenne, ovale-oblongue, assez ventrue, épaisse; bord postérieur un peu aigu; bord supérieur plus arqué que le bord inférieur; sommets déprimés, lisses, écartés; épiderme brun-verdâtre ou marron; cortex blanchâtre; nacre d'un blanc-rosâtre, tachetée; dents cardinales, allongées, comprimées, étroites, crénelées; dents latérales lamelliformes. Long. 70, haut. 35, diam. 25 mill.

Hab. la *Vaige*, petite rivière de la Mayenne, près Chéméré. Découverte par M. Bourguignat.

IV. APPENDICE.

Liste des espèces marines, sous-marines, exotiques, nominales ou inconnues, citées par différents auteurs comme faisant partie de la présente faune et omises a dessein dans l'Énumération ci-dessus.

Ancylus Hermanni Fér. Dict. hist. natur. I, p. 346, n° 8. L'Alsace. — Inconnue.

Ancylus stagnalis Fér. Dict. hist. natur. I, p. 346, n° 7. Nice. — Inconnue.

Ancylus spina-rosæ Drap. Hist. moll., p. 16, n° 3; pl. 13, fig. 11-13. — Crustacé du genre *Cypris*.

Bulimus anatinus Poir. Coq. fluv., p. 47, n° 15 (*Cyclostoma anatinum* Drap. — *Paludina muriatica* Lam.). — Marine, ou des eaux saumâtres. M. Faujas de Saint-Fonds, de qui Poiret tenait cette coquille, l'avait trouvée, ainsi que le *Cyclostoma acutum* Drap., dans l'estomac d'un canard marin (Fér.). M. Terver ne partage pas cette opinion; il m'assure qu'on trouve ce mollusque en Vendée fort avant dans les terres.

Bulimus antediluvianus Poir. Coq. fluv., p. 37, n° 5. — C'est la *Melanopsis præmorsa* Linn. fossile.

Bulimus glaber Poir. Coq. fluv., p. 50, n° 18. — Forme fortuite.

Bulimus subcylindricus Poir. Coq. fluv., p. 45, n° 13. — Jeune âge de .....?

Carychium minutissimum Fér. Ess. méth. conch., p. 124. — Inconnue.

Carichium personatum Mich. Compl. p. 73, n° 2; pl. 2, fig. 42-43. — Sous-marine.

Clausilia Braunii (Charp.). Put. moll. Vosg., p. 44, n° 9. L'Alsace. — Indication douteuse.

Clausilia corrugata Drap. Hist. moll., p. 70, n° 4; pl. 4, fig. 11-12. (*Bulimus corrugatus* Brug.). — Exotique.

Clausilia Dozolis Duv. Jouv. Coq. du Var., n°   , (mon. Mortillet). — Inconnue.

Clausilia foliacea (Faure-Big.). Fér. Tabl. syst., p. 63, n° 534. — Inconnue.

Cyclas pusilla (Schröt.). Fér. Essai méth., p. 128. — Inconnue.

Cyclostoma acutum (Drap.). Hist. moll., p. 40, n° 15; pl. 1, fig. 23. — Marine, ou des eaux saumâtres.

Cyclostoma truncatulum Drap. Tabl. moll., p. 115 (*Truncatella truncata* Dup.). — Marine, ou des eaux saumâtres.

Helix brevipes Drap. Hist. moll., p. 119, n° 58; pl. 8, fig. 28-29. — Hab. la Suisse et l'Italie.

Helix cincta (Müll.). Mich. Compl., p. 17, n° 22; pl. 1, fig. 2. — Hab. l'Italie. Je ne puis considérer cette espèce comme française, malgré l'indication fournie par Michaud, indication qui ne s'est pas confirmée. La planche du *Complément* représente un individu provenant de Rome. Dupuy, qui n'a fait que suivre Michaud, figure une variété milanaise (Terver in litt.).

Helix diaphana Villa, Disp. syst., p. 19. La France méridionale. — Inconnue.

Helix fasciola Drap. Tabl. moll., p. 87, n° 32 (*H. striatula* Müll.?). — Inconnue.

Helix lucorum (Müll.). Fér. Ess. méth., p. 128, n° 24. — Sans doute une variation de l'*H. pomatia* Linn.? Ou peut être l'*H. sylvatica* Drap.?....

Helix Nicigaudensis Duv. Jouv. Coq. du Var; p. , n° , (mon. Mortillet). — Inconnue.

Helix nitens (Mat. et Rack.). Fér. Tabl. syst., p. 41, n° 216. Les Pyrénées. Peut-être bien *l'H. cellaria* Müll.?

Helix polita (Müll.). Drap. Tabl. moll., p. 91, n° 38. — Inconnue.

Helix radiata Müll. Verm. Hist. II, p. 23, n° 224. La France méridionale. — Inconnue.

Helix rufa Drap. Hist. moll., p. 118, n° 57; pl. 8, fig. 26-27. — Hab. Ueberlingen, en Souabe.

Helix splendidula Gmel. Syst. nat., p. 3655, n° 201. — Inconnue.

Helix striatula Müll. Verm. Hist. II, p. 24, n° 225, (*H. strigosula* Gmel.). — Inconnue. L. Pfeiffer demande si ce ne serait pas l'*H. costulata* Ziégl.?....

Limnæa Geoffrasti Fér. Ess. méth., p. 124, n° 127. — Inconnue.

Limnæa naticoïdea (Schröt.). Fér. Ess. méth., p. 124, n° 129. — Inconnue.

Limnæa rivalis Fér. Ess. méth., p. 124, n° 123. — Inconnue.

Melanopsis præmorsa Dup. Hist. moll. V, p. 580 (*Buccinum præmorsum* Linn. — *Melanopsis buccinoidea* Fér. — *M. lævigata* Lam.). — M. l'abbé Dupuy, d'après M. Recluz, cite cette espèce comme pouvant se rencontrer près du cap d'Agde. Je considère cette indication comme plus que douteuse.

Physa turrita Fér. (*Bulla*) Ess. méth., p. 134, n° 75. Arbois. — Peut-être la *Physa hypnorum*?.....

Plonarbis lacustris Fér. Ess. méth., p. 134, n° 73. Arbois. — Inconnue. Il y a aussi un *Plan. lacustris* (*Helix*) dans Razoumowsky, *Hist. natur. du Jorat*, tom. 1[er], p. 273, n° 23, (1789). Je ne sais si c'est le même.

Planorbis lutescens Lam. Anim., s. vert. VI, p. 153. — Inconnu.

Pupa anglica (Fér.) Dup. Hist. moll. IV, p. 414, n° 29; pl. 20, fig. 7'. — Hab. l'Angleterre, le Portugal et l'Algérie.

Pupa obtusa Drap. Hist. moll., p. 63, n° 10; pl. 3, fig. 44 (*Pupa germanica* Lam.). — Hab. les hautes montagnes de l'Allemagne : Lintz (Fér.).

Tellina minima (Stud.). Fér. Ess. méth., p. 134, n° 94. Arbois. — Probablement un *Pisidium*?

Valvata cristatella (Faure-Big.). Fér. Ess. méth., p. 128, n° 170. — Inconnue.

Valvata globulina Fér. Ess. méth., p. 128, n° 165. Arbois. — Inconnue.

Valvata media Fér. Ess. méth., p. 128, n° 167. Arbois. — Inconnue.

Valvata persimilis Fér. Ess. méth., p. 128, n° 166. Arbois. — Inconnue.

Vertigo quinquedentata (*dextra*) Fér. Ess. méth., p. 134, n° 53. Arbois. — Peut-être une variété du *Vert. antivertigo*? ou du *V. pygmæa*?

Vertigo quadridentata (*dextra*) Fér. Ess. méth., p. 134, n° 52. Arbois. — Espèce douteuse.

Vertigo sexdentata (*dextra*) Fér. Ess. méth., p. 124, n° 111. — Inconnue.

Vertigo sexdentata (*sinistrorsa*) Fér. Ess. méth., p. 124, n° 112. Arbois. — Inconnue. Peut-être variété du *V. pusilla*?

Vertigo similis (*quadridentata*) Fér. Tabl. syst., p. 64, n° 4. — Sans doute le même que le *V. quadridentata* ci-dessus cité. Inconnu.

V. — *Mémoire sur une nouvelle espèce de* Belostoma (B. algeriense) *et réflexions sur ce genre d'Hémiptères aquatiques;*

PAR

M. Léon DUFOUR,

CORRESPONDANT DES ACADÉMIES DES SCIENCES DE PARIS, STOCKHOLM, MADRID, LIÉGE, LILLE, TOULOUSE, ETC.

— —

Un insecte nouveau de nos possessions africaines, de quatre centimètres et demi de longueur, est une acquisition de quelque valeur tant pour la faune de l'Algérie que pour la science. Donnons d'abord son signalement spécifique; nous nous livrerons ensuite à son étude comparative avec les autres Bélostomes exotiques et avec quelques genres européens qui l'avoisinent dans le cadre entomologique.

BELOSTOMA ALGERIENSE. Pl. I.

In vivo supra fusco-olivaceum cum vittis sordide lutescentibus in capite prothorace et scutello, subtus cum pedibus livido-lutescens; tarsis anticis inæqui biungulatis; ventris vitta laterali lata griseo-holosericea stigmata vera obtegente. Long. 4 ½ centim.

Hab. in aquis substagnantibus Algeriæ prope Bone.

C'est aux bords de la Seybouse, près du village colonial de Mondovi, dans le cercle de Bone, que mon fils, Gustave Dufour, médecin militaire, découvrit un seul individu de ce gigantesque Naucoride qu'il m'apporta en 1852.

Depuis lors j'ai éveillé l'attention et provoqué les recherches de mon ami et collègue de la Société entomologique M. Leprieur, pharmacien à l'hôpital militaire de Bone, entomologiste aussi instruit que zélé et obligeant. Il ne tarda pas à pêcher dans les flaques de la Seybouse un autre individu de ce rare Bélostome qu'il conserva assez longtemps vivant dans un bocal plein d'eau. Cette heureuse conquête me fournit l'occasion de lui soumettre une série de questions dans l'intérêt de la science et de mon instruction. J'acquitterai une partie de ma reconnaissance en exposant bientôt les résultats de ma consultation.

Le signalement de notre espèce algérienne renverse de fond en comble les généralités du genre *Belostoma* consignées dans les ouvrages publiés. Au train dont marchent les impatients généromanes du jour ils n'auraient pas manqué de proclamer bien haut par un nom ronflant et plus ou moins dissonant la création d'un nouveau genre. Nous sommes moins empressés. La science marche, il faut accepter sans hésitation, sans murmure, les exigences, les révolutions de ses progrès; mais qui sait si demain un nouveau Bélostome ne viendra point encore modifier notre signalement de l'*algeriense !*

Celui-ci a la forme générale du corps, la constitution squelétique et presque la couleur des Bélostomes étrangers que j'ai eus à ma disposition. Afin d'abréger mon texte, je comprendrai ces derniers sous le seul type *indicum* de Lepelletier S[t].-Fargeau.

Par l'analyse anatomique des détails je vais mettre successivement en relief des traits caractéristiques inaperçus ou mal appréciés jusqu'à ce jour. Le sacrifice de mon exemplaire unique de l'*algeriense* ne m'a point coûté.

La *tête* des Bélostomes a la physionomie et la largeur qui s'observent dans les *Naucoris* européens. Celle de l'*algeriense*, quoique formée sur le plan de la tête de l'*indicum*, est néanmoins plus large en arrière et plus déprimée, en sorte que lorsqu'on la décolle elle a une configuration triangulaire fort remarquable (voir la fig. 6). Cela tient à ce que ses yeux s'atténuent et se prolongent en arrière en divergeant. La réticulation de sa cornée vitrée est superficielle, mais bien constatable à contre jour. Cette cornée ne se continue point en dessous de la tête; elle est toute supérieure, en sorte que l'animal ne peut pas voir en bas ou au dessous de lui. Au bord interne de la cornée existe un petit avancement triangulaire projeté sur le front et non réticulé que je ne trouve pas dans l'*indicum*.

Le scalpel va nous révéler dans les yeux des Bélostomes un fait anatomique des plus curieux, des plus nouveaux, commun aux espèces de l'Algérie et de l'Inde. Comme il est plus prononcé dans l'*indicum* nous allons l'étudier d'abord dans ce type.

Si vous enlevez, en la rompant par éclats, la cornée réticulée de l'œil de l'*indicum*, quelle est votre surprise en apercevant dans la cavité de celui-ci un corps globuleux assez gros, corné, résistant, blanchâtre, sessile sur le plancher orbitaire inférieur, terminé par un petit bouton arrondi que précède un col court. Brisez ce globe intra-oculaire et vous marchez de prodige en prodige en constatant que c'est une capsule logeant une importante partie de l'antenne de l'insecte. Vit-on jamais un fait aussi insolite, aussi merveilleux? Quoi! une antenne, organe qui cumule tant de fonctions, abritée dans ses parties les plus délicates non pas sous l'œil, comme on en voit tant, mais dans l'œil même sans gêner en rien la vision! c'est le cas de dire avec Galien lorsqu'il vit pour la première fois l'*uterus*: je remercie les Dieux de m'avoir rendu témoin d'une si belle chose... Comment en face de semblables faits ne pas se passionner pour l'étude bien comprise de notre aimable science!

Ces *antennes* sont, ainsi que dans tout le groupe des Naucorides, composées de quatre articles fondamentaux; mais ceux-ci se présentent dans les Bélostomes sous un aspect différent suivant le côté sous lequel on les envisage. Éminemment rétractiles, elles sont reçues, au repos, dans une excavation allongée, à fin rebord marginal, creusée à la face inférieure du crâne. Leurs quatre articles affleurent le niveau du tégument et apparaissent alors parfaitement simples. Si par une macération préalable dans l'alcool, (je parle toujours de l'*indicum* desséché), vous leur avez fait reprendre quelque souplesse, si par beaucoup de patience vous parvenez à les dégager du réceptacle intra-oculaire pour les redresser, c'est comme un coup de théatre qui vient vous étonner par l'évolution sous vos yeux de prolongements ou de rameaux à ces mêmes articles.

Cette structure antennaire justifie très-bien l'expression de *sémipectinées* donnée par les auteurs. On dirait l'antenne du mâle de l'*Eulophe* de Geoffroi décrite et figurée avant lui par De Géer (I. p. 589, pl. 35). Nous verrons bientôt que cette configuration varie suivant les espèces.

Je ne comprends pas comment MM. Amyot et Audinet-Serville, dans les Hémiptères de Roret ont avancé que Latreille, le fondateur du genre *Belostoma*, ne donnait à ces antennes que quatre articles filiformes. Ils ont eu le tort grave de morceler la diagnose de Latreille, car après le premier membre de la phrase, celui-ci dit, dans son immortel *Genera*, en parlant de ces articles : *secundo et sequentibus in ramum elongatum linearem externe productis.* Quoi de plus explicite! Burmeister ne donne à ces mêmes antennes qu'un rameau ou un crochet au 2^{e} et au 4^{e} article. Je pense qu'il a eu sous les yeux une antenne mutilée. L'épithète de *linearem*, par laquelle Latreille désigne ces rameaux me porte à croire que l'espèce étudiée par lui est peut-être différente de celle de Burmeister et de mon *indicum* qui a effectivement deux de ces rameaux courbés en hameçon ainsi que le fait voir la figure accompagnant mon texte.

Le premier rameau de mon *indicum* naît du 2e article antennaire; il est allongé et régulièrement arqué. Le second, qui est un prolongement du 3e article, est fléchi en hameçon et un peu bulbeux après son origine. Le 3e, pareillement courbé en hameçon, naît du 4e article. De plus, il y a près de la pointe de ce dernier un prolongement rudimentaire. Ce qui me fait supposer que ces hameçons ne sont point accidentels et le résultat d'une déformation par vétusté, c'est que le premier de ces rameaux, quoique soumis aux mêmes conditions, n'a point cette courbure en hameçon.

Soumettons maintenant à une analyse comparative ces antennes dans l'*algeriense*. Situées comme celles de l'*indicum* dans une fossette du dessous de la tête elles se réfugient aussi par leurs rameaux dans une capsule intra-oculaire. Mais celle-ci, loin d'être globuleuse, est une sorte de pyramide triangulaire comprimée à sommet pareillement terminé par un petit bouton arrondi. Admirez avec moi ces curieuses différences spécifiques que la patience vient dénicher jusque dans les parties les plus profondes du squelette dermique!

Les antennes de l'*algeriense* n'ont positivement que deux rameaux. Ceux-ci simples et régulièrement arqués partent l'un du 2e, l'autre du 3e article. Non-seulement j'ai moi-même constaté cette configuration dans mon unique exemplaire desséché depuis deux ans, mais M. Leprieur qui a étudié cet organe sur l'insecte vivant l'a, sur ma demande, représenté dans une figure que je suis heureux de produire comme pièce authentique. Cet habile entomologue y a observé un fin duvet qu'une bonne loupe m'a permis de constater aussi après une préparation à l'alcool. Ce velouté imperméable se retrouve dans une multitude d'insectes aquatiques. Je ne doute pas qu'il existe aussi dans l'*indicum*.

Le *rostre* des Bélostomes est court vu la taille de ces animaux, mais il est robuste. Il rappelle celui des *Reduvius*. Il se tient habituellement courbé sous la tête et ne dépasse pas, dans le repos, l'origine de la première paire de pattes. Il est logé à sa naissance dans une profonde échancrure du prolongement du front.

Les auteurs sont peu d'accord sur la composition de ce bec. Latreille lui donne deux articles seulement ; MM. Amyot et Serville en signalent trois, les autres auteurs se taisent sur ce point. Je compte très-positivement à sa face supérieure *quatre* articles. Le 1er est fort court, mais distinct, et il a en-dessous un bien plus grand développement ; le 2me, le plus long de tous, est cylindroïde ; le 3me est court, en forme de rotule, comme enchatonné, arrondi à son bord antérieur ; il ne se continue pas en-dessous ; le 4me, conoïde et moins long que le second, donne issue à sa pointe au suçoir. Celui-ci bien apparent, bien exserte dans l'*algeriense* que j'ai sous les yeux, est un filet corné d'une grande finesse, brun, glabre, luisant, évidemment formé de deux lames sétiformes conniventes dont les pointes divergentes sont très-acérées. Le bout du 4me article laisse voir à l'ouverture, qui donne issue au suçoir, deux paires de poils ou de soies. La région dorsale du *rostre* offre une rainure médiane prononcée à tous les articles ; cette rainure n'existe pas en-dessous.

Le *prothorax* de l'*algeriense* a la forme trapézoïdale du genre. D'après M. Leprieur, il aurait pendant la vie, cinq raies dorsales longitudinales d'un jaune sale qui s'affaiblit ou s'efface par la dessication de l'insecte. Son tiers postérieur, distinct par une empreinte linéaire transversale, offre un pointillé fin, serré, presque confluent.

L'*écusson* de notre espèce algérienne, plus large proportionnellement que celui de l'*indicum*, a, durant la vie, trois raies longitudinales plus claires dont la médiane fort étroite. Ses côtés sont lisses, imponctués ; le reste a un pointillé analogue à celui de la partie postérieure du prothorax. Une faible carène médiane se continue du milieu de l'écusson à sa pointe.

Les *hémélytres* ont une teinte brune-olivâtre uniforme. Leur portion membraneuse terminale est plus largement arrondie que dans l'*indicum*. Ses diverses nervures, suffisamment indiquées dans la figure que j'en donne, sont peu différentes de celles de ce dernier type.

Les *ailes* sont amples, sans atteindre le bout de l'abdomen, blanches avec les nervures roussâtres. Simplement un peu ployées à leur base elles ressemblent pour ce trait et pour leur nervation à celles des *Naucoris*.

L'*abdomen* se compose tant en dessus qu'en dessous de six segments. Sa région dorsale est revêtue d'un feutre roussâtre bien fourni. Ses côtés ont une lisière moins velue bordée de poils ou cils natatoires. Le dernier de ses segments est profondément bifide et abrite les lames caudales. Je parlerai plus tard et de celles-ci, et de la région ventrale.

Les *pattes*, de moyenne longueur, sont dans l'*algeriense* vivant d'un jaune livide qui s'obscurcit après la mort. Dans les deux types tous les *tarses* ont deux articles, mais beaucoup plus courts aux antérieurs. Ils sont, ainsi que les tibias, garnis en dessous d'un duvet roussâtre dense, serré, spongieux, imperméable, également propre et à l'acte du toucher, et à celui de la préhension dans des animaux destinés à saisir, à retenir et à sucer une proie vivante. Les *ongles* qui terminent les tarses antérieurs vont nous fournir un trait différentiel d'une grande valeur entre l'*indicum* et l'*algeriense*. Dans le premier il n'existe qu'un ongle unique, et il est devenu un caractère générique; dans le second, il y a incontestablement deux ongles dont l'interne est du double plus court que l'externe. C'est là un de ces traits de transition qui prouve encore une fois la marche graduelle des créations en même temps qu'il devient l'indice de l'existence, jusqu'ici inconnue, d'autres types de fusion. On sait que dans les *Naucoris* le tarse des pattes antérieures ou ravisseuses manque totalement; il est suppléé par un *tibia* en forme d'ergot arqué faisant les fonctions d'un crochet préhensif. Les ongles des autres tarses sont dans nos deux Bélostomes doubles, égaux entre eux, assez longs et médiocrement arqués. Les *tibias* antérieurs de l'*algeriense* sont sub-cylindriques, plus courts proportionnellement que dans l'*indicum*. Dans l'un comme dans l'autre de ces types ils se ploient sur une rainure du bord correspondant de la cuisse pour exercer la préhension. Les autres *tibias* dans l'espèce d'Alger sont plus longs, à peine comprimés et marqués en dehors d'une rainure médiane. Les pattes postérieures de l'*indicum* sont remarquablement applaties en rames, en sorte que ce type doit être plus essentiellement nageur que l'*algeriense*.

Appareil respiratoire et respiration.

La science est demeurée jusqu'à ce jour dans la plus profonde incertitude sur le mode de la fonction respiratoire dans les Bélostomes. Malgré leur taille gigantesque personne n'a eu occasion de les étudier vivants ou frais, personne surtout n'a jamais porté le scalpel dans leurs entrailles.

Un trait éminemment organique distingue l'*algeriense* de l'*indicum*; c'est l'existence dans le premier de ces types de véritables *stigmates* dont on ne trouve dans le second aucun vestige.

J'aurai donc à examiner dans ce chapitre d'abord les stigmates de l'*algeriense*, puis les *lames caudales* des deux types, enfin les attributions physiologiques de ces organes.

Article I.

*Stigmates de l'*algeriense.

La face ventrale de l'abdomen composée, comme je l'ai dejà insinué, de six segments a sur chacun de ses côtés un ruban longitudinal de trois lignes de largeur formé d'un duvet couché, gris perlé, satiné, abondant, imperméable, abritant les stigmates. Ce ruban, séparé du reste des segments par une rainure linéaire, n'est point constitué par des poils ordinaires, mais bien par de longues et fines paillettes sub-écailleuses, étroitement couchées les unes sur les autres. Vues au microscope, ces paillettes sont, les unes simples et uniformes, les autres, en plus grand nombre, dilatées vers leur milieu en aviron attenué aux deux bouts. Cette configuration fait rationnellement présumer une fonction natatoire.

Sans déranger la disposition naturelle des paillettes de ce ruban une loupe pratique saisit vers le milieu du bord interne de chaque segment, le premier excepté, la trace d'un stigmate sousjacent indiquée par un trait oblong, obscur.

Il s'agit de racler soigneusement avec la fine pointe d'un scalpel ces paillettes et de mettre à nu le tégument pour produire au grand jour les stigmates. Ces bouches respiratoires, au nombre de cinq de chaque côté, apparaissent alors sous la forme de boutons ovalaires un peu saillants et nettement circonscrits. C'est là une configuration que l'on rencontre dans beaucoup d'insectes. Mais ce qui est dans notre Bélostome algérien une exception, c'est que ces stigmates, au lieu d'avoir, comme c'est l'ordinaire, leur ouverture ou leur grand diamètre perpendiculaire à l'axe fictif du corps ont cette ouverture parallèle à ce même axe. Je ne crois pas avoir rencontré une semblable disposition dans les milliers d'insectes soumis à mes études anatomiques.

Examinons maintenant la structure particulière de ces stigmates.

Rappelons que je ne les ai étudiés que dans l'état de mort et de dessication. Ils étaient alors béans ou entre ouverts. Un fin cerceau corné brunâtre en limite la circonscription extérieure. Un autre cerceau de même nature, de même couleur, mais discoïdal, forme les deux lèvres d'une scissure étroite. Entre ces deux cerceaux est une membrane d'un blanc sale, souple, brièvement velue ou veloutée. Il ne faut pas confondre cette villosité spéciale avec les paillettes du ruban satiné. Lorsque la scissure inter-labiale a été convenablement préparée, en raclant avec ménagement sa face interne ou splanchnique, le microscope y décèle une membrane blanche, glabre, fine, pellucide, un diaphragme avec une fente médiane linéaire des plus subtiles.

Ce stigmate présente quelque analogie de figure et de composition avec celui du *Geotrupes nasicornis* représenté dans le remarquable mémoire de Curtius Sprengel sur les organes respiratoires des insectes (tab. 3, fig. 32-33); mais il en diffère et par le velouté de la membrane située entre les deux cerceaux cornés, velouté qui trouve sa raison d'être dans l'existence aquatique du Bélostome, et par l'absence de cils à la scissure inter-labiale.

Qu'on n'imagine point que les stigmates de notre Bélostome algérien soient des stigmates *postiches* ou des *pseudotrèmes* analogues à ceux que j'ai décrits, il y a fort longtemps, dans les *Nepa*, Hémiptères aquatiques, voisins des *Belostoma* (Anat. d. Hémipt., p. 345, pl. 18, 1833), et à ceux que tout récemment (1854) j'ai signalé dans un beau groupe d'Hyménoptères, les *Sirex*. A l'époque de la publication de mon anatomie des Hémiptères j'avais pressenti que les progrès de la science pourraient plus tard fournir une de ces appréciables transitions d'un organe vestigiaire infonctionnel à un organe jouissant de toutes ses prérogatives physiologiques. Le fait actuel qui place l'*algeriense* entre les Nèpes qui ont des stigmates postiches et l'*indicum* qui est dépourvu de toute sorte de stigmates à l'extérieur de l'abdomen, justifie mes prévisions.

Toute espèce de doute sur les fonctions respiratoires des stigmates de l'*algeriense* est levée et par l'étude scrupuleuse de leur structure intime comparée à celle de ces mêmes organes dans les insectes en général, et par la constatation, à la face interne ou splanchnique de ces orifices respiratoires, de la souche multiple des canaux trachéens fixés à leur pourtour. L'existence de cinq paires de véritables stigmates abdominaux dans l'*algeriense* est donc un fait irréfragablement établi.

Mais ici se présente une double question dont la solution n'est pas peu embarrassante. Notre Bélostome respire-t-il et par les stigmates abdominaux et par ses lames caudales rétractiles, lames formant un trait générique partagé par l'*indicum* où il est présumable qu'elles font l'office d'un siphon respiratoire analogue à celui des *Nepa?*

J'avais signalé à la sagacité de mon ami, M. Leprieur, lorsqu'il conservait ce Bélostome vivant dans un bocal, et l'existence des stigmates sous le ruban satiné du ventre et celle des lames caudales. Il me répondit avoir constaté : 1° que cet animal se tenait souvent horizontalement à la surface du liquide de manière à émerger la région dorsale du corps; 2° que d'autres fois il avait la tête en bas, son derrière s'approchant de la surface de l'eau, et qu'alors les deux lames caudales s'écartaient, se redressaient même en s'inclinant un peu en avant. M. Leprieur croyait que ces lames servaient à un acte respiratoire, à humer l'air atmosphérique.

Sous cette impression je dus croire, après l'étude anatomique des stigmates, à un double appareil respiratoire dans notre belle Naucoride d'Alger. La nature, même dans ce qu'on pourrait appeler un luxe d'organisation, n'a rien créé qui n'ait un but d'utilité physiologique. A défaut d'observations directes, quant aux actes de l'organisme, il faut tâcher d'y suppléer par l'analyse rationnelle des conditions anatomiques. Or, voici comment, d'après la communication de M. Leprieur, je m'expliquais la coexistence de ces deux appareils respiratoires.

Puisque notre Bélostome a des ailes bien développées, soigneusement abritées sous des hémélytres vernissées, imperméables, il doit s'en servir pour voler à la façon de beaucoup d'insectes aquatiques. Sans nul doute, ce grand Hydrocorise est exposé à quitter le sein des eaux, soit à cause du dessèchement des mares qu'il affectionne, soit volontairement, pendant la nuit je pense, pour vaquer aux soins de sa subsistance, à son amour, à son industrie, que savons-nous! Dans ces cas, les stigmates ventraux doivent fonctionner activement, tandis qu'ils demeurent peut-être passifs pendant le domicile aquatique. Ici je ne saurais pourtant m'empêcher d'accorder quelque valeur à cette attitude où le dos de l'insecte vient s'émerger à la surface de l'eau. Des mouvements d'inclinaison du corps, difficiles sans doute à être saisis et appréciés, ne pourraient-ils pas servir à l'inhalation de l'air par les stigmates? Toutefois la position de ceux-ci au côté interne du large ruban satiné serait une condition peu favorable à cette inhalation. Et l'*indicum*, qui est aussi pourvu d'ailes propres à l'exercice de la locomotion aérienne, comment lui, privé de stigmates abdominaux, peut-il respirer hors de l'eau par le seul siphon caudal? Nous allons voir bientôt combien les apparences sont parfois trompeuses et ce qu'il faut penser des lames caudales.

Article II.

Des lames caudales.

§ I. *Lames caudales de l'*algeriense.

C'est ici que je déplore amèrement que mon scalpel n'ait pas pu s'exercer sur cet animal vivant ou frais. Il faut donc se condamner à exposer ces appendices du squelette dermique dans le seul individu que je possède mort et sec depuis deux ans.

Au premier coup-d'œil, et préoccupé que j'étais de l'idée d'un siphon respiratoire, je m'étais persuadé que ces lames étaient les deux *valves* disjointes d'un tube résultant de leur union ou coaptation. L'observation précitée de M. Leprieur semblait accréditer mon opinion. Mais lorsque la dissection m'a permis de mettre à nu ces deux lames, depuis leur racine jusqu'à leur pointe, j'ai été bien cruellement frustré dans mes espérances.

Ces lames, de six lignes de longueur, sont, au moins dans le cadavre desséché, à moitié cachées sous le dernier segment bifide de l'abdomen et à moitié exsertes ou à découvert.

La portion exserte, au lieu de valves canaliculées ne m'a offert que deux lames plates, parallèles, rapprochées, sans être précisément contiguës, revêtues en-dessus d'un duvet grisâtre, court, couché, imperméable. Pour peu que la loupe soit scrupuleuse elle constate, au bout libre qui est obtus, un fort petit espace glabre comme calleux. On voit au bord externe inférieur de longs poils fauves couchés qui parfois débordent.

Les lames de la portion cachée sous le dernier segment dorsal bifide de l'abdomen, deviennent divergentes par l'interposition d'un corps pyramidal assez grand dont je parlerai tout-à-l'heure. Elles sont revêtues tant en dessus qu'en dessous d'une longue *villosité* fauve mordoré dont les poils sont dirigés en arrière. En approchant de la base externe du corps pyramidal elles s'atténuent et forment, par leurs bords relevés en bourrelet glabre, une goutière qui semble se continuer un peu entre les poils du plat de la lame.

Une patience dès longtemps éprouvée, l'espoir, je dirai même le désir de voir aboutir cette goutière à un stigmate ont été complètement déçus. J'ai, au contraire, constaté que ces lames à l'endroit où naturellement je leur supposais une insertion articulaire se fondaient, par continuité de substance, avec la base du corps pyramidal. Cette découverte fut pour moi une désillusion d'autant plus vivement sentie que je m'attendais à trouver là, comme à la base du siphon caudal de la *Nepa*, une paire de stigmates. Pour comble de ma contrariété, les lambeaux membraneux qui suivirent l'évulsion du corps pyramidal ne découvrirent à l'exigence de mes verres amplifiants aucune trace de texture trachéenne.

Si, dans l'absence de toute observation directe sur le Bélostome vivant, si, malgré l'assertion de M. Leprieur sur les mouvements d'émersion de ces appendices caudaux, j'étais appelé à me prononcer sur les fonctions de ces lames, ma foi anatomique me porterait à déclarer qu'elles ne sont pas des instruments de respiration. Je fais acte de prudence en ajournant cette conclusion définitive jusqu'à mieux informé. Je la lègue au scalpel plus heureux de mes collègues.

Le *corps pyramidal* intermédiaire qui sépare à leur base les deux lames caudales m'a semblé logé, enchatonné dans la concavité du dernier segment ventral de l'abdomen, et, quand on l'arrache avec précaution, il entraîne avec lui ces lames. Il a à peine le quart de la longueur de celles-ci. Étudié par sa région dorsale il est d'une texture coriaceo-parcheminée, blanchâtre, glabre dans ses deux tiers antérieurs. En arrière il se termine par une sorte de lobe ovalaire légèrement échancré sur les côtés de son origine et hérissé de poils roussâtres assez raides, ce qui, à mes yeux, indique que dans certains actes, indéfinissables pour moi, de la vie de l'animal, il peut, malgré sa situation profonde, faire saillie hors du corps.

A la base de sa face inférieure il y a sur un même plan un ensemble de trois pièces pressées entre elles de texture tégumentaire, brunâtres et hérissées de poils. Les latérales sont allongées et enchassent l'intermédiaire qui, un peu plus courte, est ovale sub-triangulaire.

Certainement ces pièces sont étrangères à l'acte respiratoire. Je serais bien trompé si elles ne dépendaient pas d'un appareil génital copulateur. Je crois qu'elles appartiennent au sexe féminin.

§ II. *Un mot sur l'appareil respiratoire de l'*indicum.

Ce mot sera bien peu de chose, vu que je n'ai eu à examiner que deux vieux individus ayant peut-être un demi-siècle de séjour dans les collections et que j'ai tenus en macération alcoolique durant vingt-quatre heures.

La composition segmentaire de l'abdomen est identique à celle de l'*algeriense*, mais le dernier segment ventral d'un de mes types indiens, au lieu d'être entier comme dans l'algérien est profondément bifide et d'une figure différente. Ce sera encore là pour l'avenir un trait spécifique d'une exploration facile.

On retrouve ici le ruban satiné ventral avec ses paillettes en aviron; mais ce ruban est bien moins large et moins fourni. Quant aux stigmates, je le répète, on n'en trouve pas la moindre trace. Ce fait négatif avait déjà été exprimé par Burmeister, mais il acquiert de la valeur par l'existence de ces stigmates dans l'*algeriense*.

Les *lames caudales* de l'*indicum* ont une complication de structure intérieure qui me fait supposer des fonctions bien différentes de celles de l'*algeriense*, et qui se rattachent évidemment à l'acte respiratoire. Je n'ose pas en entreprendre la description, parce que je ne doute pas que certaines pièces ne soient dépendantes de l'appareil de la génération.

EXPLICATION DES FIGURES.

1. *Belostoma algeriense* de grandeur naturelle.
2. Paroi *ventrale* de l'abdomen. a. a. *ruban satiné* marginal avec les cinq paires de *stigmates* abdominaux.
3. Une des *paillettes en aviron* du ruban satiné isolée et fort grossie.
4. Un *stigmate* isolé et très-grossi. Le *cerceau extérieur* et le *cerceau discoïdal* séparés l'un de l'autre par une *membrane veloutée*. La *membrane inter-labiale* glabre, avec son ouverture *médiane*.
5. Paroi *dorsale* de l'abdomen grossie, avec ses segments *feutrés* dont le dernier *bifide;* avec son bord à *franges natatoires*, avec ses lames caudales dans leur portion exserte.
6. Tête du même insecte grossie et vue par sa face inférieure pour faire voir sa forme triangulaire.
   - *a. Rostre* dans une position un peu forcée pour être vu par sa face *dorsale*.
   - *b.* Une *antenne* sortie de sa capsule intra-oculaire et *étalée*.

c. Cette même antenne couchée dans son *excavation tégumentaire* et paraissant de quatre articles *simples*.

7. Une antenne détachée fort grossie, velue, dessinée sur l'animal vivant par M. Leprieur.

8. *Capsule intra-oculaire* isolée et grossie de l'*algeriense*.

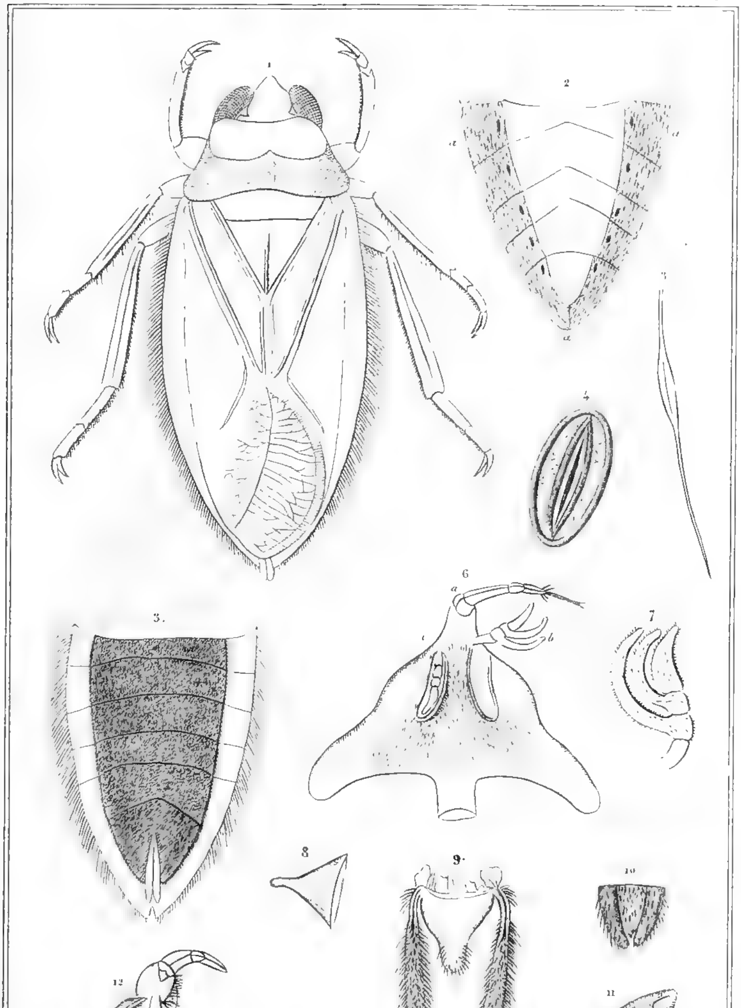
9. *Lames caudales* grossies et isolées de l'*algeriense*, avec le corps *pyramidal* intermédiaire.

10. La série des *trois pièces* contiguës, insérées à la base inférieure du corps pyramidal et grossies.

11. OEil très-grossi et isolé du *Belostoma indicum*. Sa cornée *vitrée* ou *réticulaire* brisée pour mettre en évidence la *capsule intra-oculaire* globuleuse où se loge l'antenne.

12. Portion de la tête de ce même *indicum* vue par sa face inférieure et grossie pour faire voir et son *rostre* et l'excavation tégumentaire où est couchée l'antenne.

13. Une antenne isolée grossie et étalée de cet *indicum* pour faire connaitre sa composition.



L. Duf. del.

V. — *Quelques questions de Géométrie et d'Analyse algébrique.*

PAR

A. PAQUE.

Ce travail renferme deux problèmes et quatre théorèmes de Géométrie et trois notes d'analyse algébrique.

Quant au premier de ces problèmes (Fig. 1, Pl. I), sans difficulté du reste, il n'est, *à ma connaissance*, aucun auteur qui l'ait bien résolu. Voici en quoi consiste la solution connue :

Construire un angle double de l'angle donné; sur l'un des côtés de cet angle, à partir du sommet, porter la différence connue; de l'extrémité de cette ligne, avec le côté donné pour rayon, décrire un arc de cercle qui détermine, par sa rencontre avec l'autre côté de l'angle ainsi construit, une longueur, dont l'axe donne le troisième sommet du triangle demandé, par son intersection avec le prolongement de la différence.

L'erreur commise, consiste à dire que, *l'angle à construire est double de l'angle donné.*

Le deuxième problème offre un exemple remarquable du grand nombre de solutions dont une simple question de géométrie est quelquefois susceptible; la solution complète, qui en est présentée, montre combien il est indispensable de considérer dans une question toutes les solutions, dans *leurs diverses positions possibles*, des problèmes dont elle pourrait dépendre.

Ce problème est intéressant au point de vue de son importance graphique en géométrie descriptive.

Les propriétés, dont les théorèmes qui suivent, donnent l'énoncé, sont assez belles pour que leur démonstration, qui en est donnée pour la première fois, présente de l'intérêt.

PROBLÈME I.

Etant donnés un côté d'un triangle, l'angle opposé et la différence des deux autres côtés, construire le triangle.

Analyse. Supposons le problème résolu et soit ABC (fig. 1, Pl.I) le triangle demandé, dans lequel AB et l'angle C sont donnés, ainsi que la différence

$$AD = AC - BC$$

des autres côtés.

Tirons BD; le triangle BCD étant isocèle,

$$\widehat{CBD} = \widehat{CDB}$$

on a évidemment

$$\widehat{ADB} + \widehat{CDB} = 2^{\delta}$$

$$\widehat{ADB} = C + \widehat{CBD}.$$

Additionnant membre à membre ces égalités il vient :

$$2\widehat{ADB} = 2^{\delta} + C.$$

D'où

$$\widehat{ADB} = 1^{\delta} + \frac{C}{2}.$$

Le triangle ABD pourra donc être construit puisque l'on en connait deux côtés *AB* et *AD*, ainsi que l'angle ADB opposé à l'un d'eux. Toutefois, il est extrêmement important de remarquer que l'angle à la base d'un triangle isocèle ne pouvant être qu'aigu, *l'angle ADB est obtus;* or l'on sait qu'alors il n'y a qu'un seul triangle qui satisfasse aux données de ABD.

Le problème proposé n'est donc susceptible que d'une solution.

Construction. Prendre sur une droite indéfinie AD égale à la différence donnée; tirer DF de telle sorte que

$$\widehat{ADF} = \frac{C}{2}.$$

Au point D élever BD perpendiculaire à DF; du point A comme centre avec un rayon égal à la base donnée, décrire une circonférence qui coupe BD en B; déterminer la rencontre C de la droite

AD avec l'axe de BD; on obtient ainsi le dernier sommet du triangle demandé.

Observation. Nous venons de dire que ce problème n'admet qu'une solution; cela n'est exact qu'au point de vue de la forme du triangle; eu égard à la position de ce triangle par rapport à AB, il est évident que le point C' symétrique de C par rapport à AB, donnerait lieu à un triangle égal à ABC, tout aussi bien que les points C_1 et C'_1, symétriques respectifs de C et C' par rapport à XY, axe de AB.

En réalité donc, il y a quatre solutions qui ne diffèrent que dar leur position.

Cette observation est simple; elle a, croyons-nous, de l'importance, et elle peut être faite dans un grand nombre de questions.

Trop souvent dans les problèmes de géométrie, pour ne pas avoir tenu compte de solutions multiples du genre de celles dont nous avons ici un exemple, on ne traite que d'une manière incomplète d'autres questions qui en ressortent.

Le problème suivant démontre cette vérité.

PROBLÈME II.

Étant données deux circonférences, trouver sur leur plan un point tel, que les tangentes menées de ce point aux deux circonférences soient égales et fassent entr'elles un angle donné α.

Analyse. On conçoit qu'en général quatre espèces de solution sont possibles. (Fig. 2, Pl. I).

Il pourra se faire :

1° Que les deux circonférences soient intérieures à l'angle APB de la solution.

2° Que ces circonférences soient extérieures à cet angle *apb*.

3° et 4° Que de ces circonférences l'une et l'autre soient intérieure ou extérieure à l'angle α, comme pour $a_1\ p_1\ b_1$, $A_1\ P_1\ B_1$.

De plus les points symétriques de P, p, P_1, p_1 par rapport à la ligne des centres OO', seront évidemment autant de deuxième so-

26

lution appartenant à chacune de ces espèces ; dans ce qui va suivre, nous ne parlerons plus de ces deuxièmes solutions que l'on pourrait appeler *solutions doubles.*

Supposons le problème résolu et occupons-nous de la solution P; l'analyse étant analogue pour les autres P_1, p, p_1, nous nous dispenserons de la produire en détail et n'en donnerons que le résultat.

Menons les diamètres des contacts A et B, leur intersection est Q; et tirons PQ. De l'égalité évidente des triangles rectangles APQ et BPQ on déduit :

$$AQ = BQ.$$

Ou, en représentant par R et R' les rayons des circonférences données : (on peut toujours supposer que R représente le plus grand rayon)

$$R' + O'Q = R + OQ.$$

D'où

$$O'Q - OQ = R - R'.$$

Le quadrilatère inscriptible ABPQ apprend que

$$Q = 2^{\delta} - \alpha.$$

Donc on connaît dans le triangle QOO' un côté OO', l'angle opposé Q et la différence des deux autres côtés ; on pourra donc construire ce triangle.

Le point q étant symétrique de Q par rapport à l'axe de OO' on parviendra encore pour $\widehat{apb}$ à

$$Oq - O'q = R - R'.$$

Le triangle OO'q renferme donc les mêmes éléments connus que OO'Q.

Pour $A_1\widehat{P_1}B_1$ en tirant $P_1\,Q_1$ on aurait encore

$$A_1\,Q_1 = B_1\,Q_1.$$

D'où

$$OQ_1 - O'Q_1 = R + R'.$$

On a encore

$$Q_1 = 2^{\delta} - \alpha.$$

Donc le triangle OO' Q_1 est complètement déterminé.

Il en sera de même quand à $a_1\widehat{p_1}b_1$ puisque :

$$q_1 = 2^{\delta} - \alpha$$

$$O'q_1 - O\,q_1 = R + R'.$$

Construction. Construire comme il a été dit dans le problème précédent, les triangles

$$\begin{array}{l} OQO' \\ OqO' \\ OQ_1O' \\ Oq_1O'. \end{array}$$

Mener aux points de rencontre de OQ, Oq, OQ_1, Oq_1, $O'Q$, $O'q$, $O'Q_1$ $O'q_1$ ou de leurs prolongements, des tangentes respectives aux circonférences O et O' ; les points P, p, P_1, p_1 résoudront la question, ainsi que leurs symétriques par rapport à OO'.

Le problème proposé est donc en général susceptible de huit solutions. —

Discussion. Cinq cas peuvent se présenter.

1^er^ *Cas. Les circonférences* O *et* O *sont extérieures et* $OO' > R + R'$. —

C'est celui d'après lequel l'analyse du problème a été fait.

Il a donc été suffisamment étudié.

2^e^ *Cas. Les circonférences* O *et* O' *sont tangentes extérieurement, c'est-à-dire que* (Fig. 3, Pl. I)

$$OO' = R + R'.$$

Les solutions P et p n'offrent aucune particularité remarquable ; il n'en est pas de même de P_1 et p_1 qui ont alors pour côté commun la tangente aux circonférences données en leur contact O''.

La construction de P_1 et p_1 se simplifie beaucoup, puisque l'on n'a qu'à mener par O et O' des droites Op_1 et $O'P_1$, qui fassent avec OO' des angles égaux à

$$\frac{2^\delta - \alpha}{2} \text{ ou } 1^\delta - \frac{\alpha}{2}$$

et à prendre pour points P_1 et p_1 les intersections de ces droites avec la tangente en O''.

Il est à remarquer que ce qui vient d'être dit est vrai pour $\alpha \gtrless 1^\delta$.

3^e^ *Cas. Les circonférences* O *et* O' *sont sécantes, c'est-à-dire que* (Fig. 4, Pl. I)

$$OO' < R + R'.$$

La solution P existe encore comme dans le cas général, que α soit aigu ou obtus.

Il en est de même de (p) à la condition cependant que

$$\alpha \geqq YXZ,$$

ou

$$\alpha \geqq 2^{\delta} - OXO'.$$

L'angle YXZ est formé par les tangentes menées par X respectivement aux circonférences données, dont ce point est une intersection. Toutes les fois que l'on aura

$$\alpha < 2^{\delta} - OXO'$$

la solution p est impossible. —

Quant aux espèces P_1 et p_1, il est clair qu'elles ne peuvent exister, le triangle qui doit les fournir étant impossible à cause de $OO' < R + R'$.

4e *Cas. Les circonférences sont tangentes intérieurement, c'est-à-dire que* (Fig. 5, Pl. I)

$$OO' = R - R'.$$

Pour la construction du triangle fournissant la solution P, on a :

Différence des deux côtés inconnus $= R - R'$.

Donc cette différence est égale à OO' et le triangle se réduit à la droite OO' qui fournit par son prolongement le contact O'' de l'une des tangentes avec la circonférence O'; le point P se détermine en cherchant l'intersection de la droite OP, menée par O de telle manière que $\widehat{POO''} = 1^{\delta} - \frac{\alpha}{2}$, avec la tangente en O''. — Cette solution est donc toujours possible quelque soit α.

L'espèce p est toujours impossible.

Il en est de même de celles P_1 et p_1 puisque leur construction dépend de celle d'un triangle dont l'existence est impossible. En effet ce triangle a pour base OO', et l'on doit avoir

OO' > différence des deux autres côtés

or la différence des deux autres côtés $= R + R'$.

5e *Cas. Les circonférences* O *et* O' *sont intérieures. Ainsi :*

$$OO' < R - R'.$$

Les solutions P, p sont toujours impossibles, car dans le triangle qui les fournit, on a :

OO' > différence des deux autres côtés.

Cette différence étant égale à $R - R'$, il vient :

$$OO' > R - R',$$

relation dont l'existence est défendue par la position des circonférences O et O'. —

Il en est de même des solutions P_1 et p_1, puisqu'alors on aurait

$$OO' > R + R'.$$

Enfin considérons le même problème (Fig. 6, Pl. I) *quand* $R = R'$.

Les quantités $R - R'$ et $R + R'$ sont ici respectivement :

$$O \text{ et } 2R.$$

C'est-à-dire que pour P et p, le triangle dont $R - R'$ est la différence des côtés est isocèle, ou que son sommet est situé sur l'axe de OO'.

Pour déterminer les contacts de l'angle P avec O et O', par les centres tirez des rayons faisant avec OO' des angles égaux à $\frac{\alpha}{2}$; les extrémités de ces rayons, ainsi que les points diamétralement opposés, résolvent la question. On a ainsi les solutions P et p.

Quant à P_1, on aura OQO' pour triangle fournissant les contacts A et B.

Je dis que P_1 appartient à l'axe de OO', c'est-à-dire que

$$OP_1 = O'P_1.$$

C'est ce qui résulte de l'égalité évidente des triangles OAP_1 et $O'BP_1$. On dirait la même chose du point p_1.

Si les circonférences sont tangentes extérieurement, la construction des points P et p ne change pas ; les points P_1 et p_1 du second cas (Fig. 3, Pl. I) du problème où $R > R'$, se réunissent, mais leur construction reste la même que celle qui a été alors indiquée.

Si les circonférences sont sécantes, ce qui a été dit du cas correspondant lorsque R et R' étaient inégaux, subsiste encore.

Théorème.

Démontrer que si par un point du contour d'un parallélogramme on fait passer les bases supérieures de deux parallélogrammes dont les bases inférieures respectives sont les diagonales, la somme des parallélogrammes ainsi construits, est équivalente au parallélogramme proposé.

Soient donnés (Fig. 1, Pl. II) les parallélogrammes ABCD, ACHK, BDFG, dont les bases supérieures se coupent en P, point considéré du contour de la figure ABCD.

Prolongeons AB et FG, AB et HG jusqu'à leurs rencontres respectives R et Q; par le point D, menons DS parallèle à HQ, et l'on aura les équivalences

$$\begin{aligned} ACHK &= ACPQ \\ BDFG &= BDPR \\ BDPR &= DPQS. \end{aligned}$$

Car ces parallélogrammes ont deux à deux même base et même hauteur. Additionnant ces égalités membre à membre, il viendra

$$ACHK + BDFG = ACPQ + DPQS.$$

D'ailleurs

$$ACPQ + DPQS = ACDS = ABCD.$$

Donc :

$$ACHK + BDFG = ABCD.$$

Théorème.

Si l'on joint par des droites le sommet de l'angle de deux côtés consécutifs d'un quadrilatère circonscriptible avec les centres des cercles tangents à ces côtés en leurs extrémités non communes et à leurs côtés opposés respectifs, les droites ainsi tirées sont également inclinées sur les côtés de l'angle considéré.

Démonstration. Le centre O, (Fig. 2, Pl. II) du cercle inscrit dans le quadrilatère proposé appartient à la fois aux bissectrices es angles du quadrilatère, ainsi qu'à celles des angles des côtés opposés.

Soient donc OS, et OS' les bissectrices des angles formés par (AB, CD) et (AD, BC).

Il est évident que le point O' centre de cercle tangent en B au côté AB et à son opposé CD, étant équidistant de ces lignes, appartient à la droite OS; de même, que O'' centre du cercle tangent en D au côté AD et à son opposé BC, est situé sur OS'. Tirons O''A, O'A : il faut prouver que

$$O''\widehat{AD} = O'\widehat{AB}.$$

Cherchons pour cela à établir que les triangles rectangles O''AD et O'AB ont les côtés respectivement proportionnels.

Les points G, H, K et F sont les contacts du cercle inscrit avec les différents côtés du quadrilatère, dont nous posons comme éléments donnés

$$\begin{aligned} AS &= s \\ AF &= p \\ BG &= \delta \\ OG &= R. \end{aligned}$$

Et comme éléments inconnus

$$\begin{aligned} DF &= q \\ CH &= y. \end{aligned}$$

La circonférence de rayon R est *exinscrite* au triangle SAD ; la distance de son contact G au sommet S de l'angle aux prolongements des côtés duquel elle est tangente est égale, comme on sait, à la moitié du périmètre triangulaire ; donc :

$$2GS = AS + AD + DS$$

ou

$$2(p+s) = s + p + q + DS,$$

d'où

$$DS = s + p - q. \qquad (1)$$

On sait aussi que 2P représentant le périmètre d'un triangle dont les côtés sont a, b, c, le rayon ρ du cercle inscrit est donné par la formule

$$\rho = \frac{1}{P}\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}.$$

Appliquant cette formule au triangle SBC, dont les côtés sont :

$$\left.\begin{aligned} BS &= s + p + \delta \\ BC &= \delta + y \\ CS &= s + p + y \end{aligned}\right\} \text{ d'où } BS + BC + CS = 2(s + p + \delta + y),$$

il vient :

$$R = \sqrt{\frac{\delta y (p+s)}{s+p+\delta+y}}, \text{ d'où } y = \frac{R^2(s+p+\delta)}{\delta(p+s) - R^2}. \qquad (2)$$

En second lieu on a évidemment :

$$\text{Surf. SAD} = \text{surf. SBC} - \text{surf. ABCD}. \qquad (\alpha)$$

Évaluons en particulier chacune de ces surfaces. On a

$$\text{surf. ABCD} = \text{surf. AGOF} + \text{surf. GOHB} + \text{surf. HOKC} + \text{surf. KOFD},$$

ou

$$\text{Surf. ABCD} = Rp + R\delta + Rq + Ry$$

et

$$\text{Surf. ABCD} = R(p + \delta + y + q). \qquad (\beta)$$

L'aire T d'un triangle en fonction de ses côtés a, b, c est donnée par

$$T = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)},$$

où

$$P = \frac{a+b+c}{2}.$$

On aura donc

$$\text{Surf. SAD} = \sqrt{GS(GS-AS)(GS-AD)(GS-DS)},$$

et

$$\text{Surf. SAD} = \sqrt{pq(p+s)(s-q)}. \qquad (\gamma)$$

On a aussi

$$\text{Surf. SBC} = \text{surf. SGOK} + \text{surf. GOHB} + \text{surf. KOHC}$$

ou

$$\text{Surf. SBC} = R(s + p + \delta + y). \qquad (\varepsilon)$$

L'égalité (α) deviendra, à l'aide de celles (β), (γ), (ε) :

$$\sqrt{pq(p+s)(s-q)} = R(s-q).$$

D'où

$$q = \frac{R^2 s}{p(p+s)+R^2}. \qquad (\delta)$$

Actuellement nous nous proposons de déterminer DS' ; à cet effet rappelons que :

Toute transversale détermine sur les côtés d'un triangle, six segments tels que le produit de trois segments qui n'ont pas d'extrémités communes, est égal au produit des trois autres.

Cette propriété de l'*involution*, appliquée aux triangles S'AB et SBC coupés respectivement par les transversales CS et AS' fournit :

$$DS' \cdot AS \cdot BC = CS' \cdot BS \cdot AD.$$

D'où

$$DS' = CS' \cdot \frac{BS \cdot AD}{AS' \cdot BC} \tag{4}$$

et

$$AS' \cdot BS' \cdot CD = DS \cdot AB \cdot CS'.$$

D'où

$$AS \cdot CD\,(BC + CS') = DS \cdot AB \cdot CS'.$$

D'où encore

$$CS' = \frac{AS \cdot CD \cdot BC}{AB \cdot DS - AS \cdot CD}. \tag{5}$$

La combinaison de (4) et (5) fournit :

$$DS' = \frac{BS \cdot AD \cdot CD}{AB \cdot DS - AS \cdot CD} = \frac{(s+p+\delta)(p+q)(q+y)}{(p+\delta)(s+p-q) - s(q+y)}. \tag{6}$$

Remplaçant dans (6), les quantités y et q par leurs valeurs (2) et (3) en fonction de R, s, p, δ, il vient :

$$DS' = \frac{(s+p+\delta)\left(p + \frac{R^2 s}{p(p+s)+R^2}\right)\left(\frac{R^2 s}{p(p+s)+R^2} + \frac{R^2(s+p+\delta)}{\delta(p+s)-R^2}\right)}{(p+\delta)\left(s+p-\frac{R^2 s}{p(p+s)+R^2}\right) - \left(\frac{R^2 s}{p(p+s)+R^2} + \frac{R^2(s+p+\delta)}{\delta(p+s)-R^2}\right)s}$$

d'où successivement :

$$DS' = \frac{\dfrac{R^2(s+p+\delta)(p+s)(R^2+p^2)}{[p(p+s)+R^2][\delta(p+s)-R^2]}}{\dfrac{p}{p(p+s)+R^2} - \dfrac{R^2 s}{[p(p+s)+R^2][\delta(p+s)-R^2]}}$$

$$DS' = \frac{R^2(s+p+\delta)(p+s)(R^2+p^2)}{p\,[p(p+s)+R^2]\,[\delta(p+s)-R^2] - R^2 s\,[p(p+s)+R^2]}$$

et, toutes réductions faites,

$$DS' = \frac{R^2(s+p+\delta)(R^2+p^2)}{[\delta p - R^2]\,[p(p+s)+R^2]}. \tag{7}$$

De plus, comme

$$S'F = DS' + q,$$

on aura :

$$FS' = R^2 \cdot \frac{(s+p+\delta)(R^2+p^2) + s(\delta p - R^2)}{[\delta p - R^2]\,[p(p+s)+R^2]}. \tag{8}$$

Les triangles semblables S′ DO″ et SFO donnent :

$$O''D = R \cdot \frac{DS'}{FS'}.$$

Après substitution des valeurs de DS′ et FS′ qui viennent d'être trouvées, on obtient :

$$O''D = \frac{R\,(R^2+p^2)\,(s+p+\delta)}{(s+p+\delta)(R^2+p^2)+s\,(\delta p-R^2)}. \qquad (9)$$

D'ailleurs

$$AD = p+q,$$

d'où

$$AD = \frac{(R^2+p^2)\,(p+s)}{p(p+s)+R^2}. \qquad (10)$$

Donc

$$\frac{O''D}{AD} = \frac{R\,(s+p+\delta)}{p+s} \cdot \frac{p\,(p+s)+R^2}{(s+p+\delta)\,(R^2+p^2)+s\,(\delta p-R^2)}. \qquad (11)$$

La similitude des triangles SOG et SO′B conduit à

$$BO' = R \cdot \frac{BS}{GS}$$

ou

$$BO' = R\,\frac{s+p+\delta}{s+p}.$$

D'où

$$\frac{BO'}{AB} = \frac{R\,(s+p+\delta)}{p+s} \cdot \frac{1}{p+\delta}. \qquad (12)$$

On s'assurera sans peine que

$$\frac{p(p+s)}{s+p+\delta)(R^2+p^2)+s\,(\delta p-R^2)} = \frac{1}{p+\delta}.$$

Et en vertu des relations (11) et (12), on aura alors :

$$\frac{O''D}{AD} = \frac{BO'}{AB}.$$

Cette égalité établit la similitude des triangles AO″D et AO′B, et par suite l'égalité des angles O″AD, et O′AB.

Théorème.

Soit (Pl. III) *le quadrilatère* ABCD ; E *l'intersection des côtés* BC, AD ; F l'intersection de AB, CD. *Prenons un point quelconque* T *sur la diagonale* AC ; *par les deux points* A *et* T *faisons passer un* 1er *cercle ; par* C *et* T *un* deuxième *cercle : le* premier *cercle coupe* AD *en* P *et* AB *en* Q ; *le* deuxième *cercle coupe* BC *en* R *et* CD *en* S. *Par les points* Q, B, R *faisons passer un* troisième *cercle, et par les points* P, D, S *un* quatrième *cercle : Ces deux derniers (troisième et quatrième) couperont la diagonale* BD *au même point* U. *Menons un* cinquième *cercle par les points* P, E, R *et un* sixième *cercle par les points* Q, F, S : *ces deux derniers cercles coupent la troisième diagonale* EF *au même point* V.

Les six cercles se coupent au même point Z, *et les six arcs* ZA, ZB, ZC, ZD, ZE, ZF, *pris d'un même côté sont semblables.*

Soit G *l'intersection des deux diagonales* AC, BD ; *les quatre points* G, U, T, Z *sont sur une même circonférence.*

Soit H *l'intersection des diagonales* AC, EF ; *les quatre points* H, V, T, Z *sont sur une même circonférence.*

Soit enfin I *l'intersection des diagonales* BD, EF ; *les quatre points* U, I, V, Z *sont sur une même circonférence.*

Démonstration. Rappelons les deux propriétés suivantes très-connues et faciles à établir.

Théorème (α). *Si par les sommets d'un triangle on fait passer trois circonférences se coupant deux à deux sur les côtés du triangle, ces trois lignes concourent en un même point.*

Théorème (α'). *Si trois circonférences passant par les sommets d'un triangle se coupent, la première et la deuxième, la deuxième et la troisième sur les côtés du triangle, si la troisième circonférence en passant par le point d'intersection des deux premières, coupe l'une de celles-ci sur l'un des côtés du triangle, elle passe par le point d'intersection de l'autre circonférence avec le second côté de l'angle par le sommet duquel la troisième circonférenee est tracée.*

L'application du premier de ces théorèmes montre immédiatement que

1°	Pour le triang.	ABE	les trois circ.	1, 3, 5	se coupent	en un même point.
2°	»	BCF	»	2, 3, 6	»	»
3°	»	BDE	»	3, 4, 5	»	»
4°	»	ADF	»	1, 4, 6	»	»
5°	»	CEF	»	2, 5, 6	»	»

Et conséquemment les circonférences 1, 2, 3, 4, 5, 6 *se coupent en un même point.*

Les circonférences 3, 5, 6. passent par les sommets du triangle BEF ; 3 et 5 se coupent en R sur le côté BE, 3 et 6, en Q sur AB ; de plus la circonférence 6 passe par Z, point d'intersection de 3 et 5, donc *elle passe aussi* (Théorème α') *par* V, *point de rencontre de* 5 *avec* EF.

Les circonférences (3) *et* (4) *ont* U *pour* 2^de^ *intersection ; je dis que les points* B, D, U *sont en ligne droite.*

Tirons les droites ZU, ZR, ZD, ZP, ZT, ZV, ZS, ZQ ; soient O^1, O^2, O^3, O^4, O^5, O^6 les centres respectifs de ces circonférences 1, 2, 3, 4, 5, 6 ; les points O^6, O^4, O^2 sont lignes droites comme centres de circonférences ayant une corde commune ZS ; il en est de même des centres O^3, O^2, O^5 par rapport à ZR, ainsi que de O^6, O^1, O^3, par rapport à ZQ ; on sait que O^3O^6, O^3O^5, O^1O^5, O^6O^5, sont respectivement perpendiculaires à ZQ, ZR, ZP et ZV.

Posons pour abréger :

$\widehat{DAB} = A$	$\widehat{ACF} = c$
$\widehat{DAC} = a$	$\widehat{CFE} = s$
$\widehat{CBA} = B$	$\widehat{PZR} = \gamma$
$\widehat{CBD} = b$	$\widehat{UZR} = \beta$.

Les angles DAC, TZP considérés dans le cercle (1) ont même mesure, donc

$$\widehat{TZP} = a.$$

Il en est de même des angles SZV et CFE dans le cercle (6); donc

$$\widehat{SZV} = s.$$

Les quadrilatères BQRZ, ZA'O³B' donnent

$$B = 2^{\delta} - RZQ$$

$$O^6\widehat{O^3}O^5 = 2^{\delta} - RZQ.$$

D'où

$$O^6\widehat{O^3}O^5 = B. \qquad (1)$$

Le quadrilatère inscrit AQPZ fournit :

$$\widehat{PZQ} = A.$$

Mais comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires :

$$O^5\widehat{O^1}O^3 = \widehat{PZQ},$$

Donc

$$O^5\widehat{O^1}O^3 = A. \qquad (2)$$

On a d'ailleurs par suite de la perpendicularité des côtés :

$$\beta = O^4\widehat{O^3}O^5$$

$$\gamma = O^1\widehat{O^5}O^3. \qquad (3)$$

Mais :

$$O^1\widehat{O^5}O^3 = 2^{\delta} - O^5\widehat{O^1}O^3 - O^1\widehat{O^3}O^5.$$

D'où en vertu de (1), (2) et (3) :

$$\gamma = 2^{\delta} - A - B. \qquad (4)$$

Dans les triangles rectangles O⁴KL, ZK'L, on a :

$$O^6\widehat{O^4}O^1 = 1^{\delta} - ZLO^4$$

$$\widehat{SZP} = 1^{\delta} - ZLO^4.$$

D'où

$$O^6\widehat{O^4}O^1 = \widehat{SZP}.$$

Mais les angles SZP et SDP sont égaux comme inscrits dans un même segment du cercle (4), donc

$$\widehat{O^6O^4O^1} = \widehat{ADF} \tag{5}$$

et

$$\widehat{O^1O^4O^2} = \widehat{ADC}. \tag{6}$$

On a encore comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires :

$$\widehat{O^2O^6O^3} = \widehat{SZQ}$$

mais comme inscrits dans un même segment du cercle (6) :

$$\widehat{SZQ} = \widehat{CFB},$$

d'où

$$\widehat{O^2O^6O^3} = \widehat{CFB}. \tag{7}$$

Par suite

$$\widehat{O^6O^2O^3} = \widehat{FCB}. \tag{8}$$

On a aussi :

$$\widehat{O^5O^6O^2} = \widehat{SZV}$$

or

$$\widehat{SZV} = s$$

donc

$$\widehat{O^5O^6O^2} = s. \tag{9}$$

Évidemment

$$\widehat{O^1O^4O^3} = \widehat{O^1O^5O^3} + \widehat{O^4O^3O^5}$$

ou

$$\widehat{O^1O^4O^3} = \gamma + \beta,$$

relation qui devient à l'aide de celle (4) :

$$\widehat{O^1O^4O^3} = 2^{\delta} - A - B + \beta. \tag{10}$$

De ce qui précède on déduit immédiatement la similitude des triangles

$O^4O^2O^5$ et CDE
$O^4O^6O^1$ » DAF
$O^6O^2O^3$ » FCB
$O^1O^3O^5$ » ABE
$O^6O^4O^5$ » EDF
$O^6O^3O^5$ » FBE.

La comparaison des côtés homologues conduit aux égalités suivantes

$$\frac{AB}{O^1O^3} = \frac{BE}{O^3O^5}$$

$$\frac{BE}{O^3O^5} = \frac{EF}{O^5O^6}$$

$$\frac{EF}{O^5O^6} = \frac{DF}{O^6O^4}$$

$$\frac{DF}{O^6O^4} = \frac{AD}{O^1O^4}$$

dont l'addition membre à membre donne

$$\frac{AB}{O^1O^3} = \frac{AD}{O^1O^4}, \text{ ou } \frac{AB}{AD} = \frac{O^1O^3}{O^1O^4}. \tag{11}$$

Les triangles ABD et $O^1O^4O^3$ ayant ainsi un angle égal compris entre côtés respectivement proportionnels sont équiangles et semblables ; donc

$$O^1\widehat{O^4}O^3 = A\widehat{D}B. \tag{12}$$

Mais on a vu (10), que :

$$2^\delta - A - B + \beta = O^1\widehat{O^4}O^3.$$

De plus il est clair que

$$A\widehat{D}B = 2^\delta - A - B + b.$$

Additionnant ces trois dernières relations, on obtient :

$$\beta = b.$$

Ce qui démontre que les trois points B, D et U sont en ligne droite.

Les quatres points G, U, T, Z *appartiennent à une même circonférence.*

L'angle DGC, comme extérieur au triangle ADG, donne

$$\widehat{DGC} = \widehat{DAC} + \widehat{ADG}$$

d'où

$$\widehat{DGC} = \widehat{TZP} + \widehat{PZU}$$

ou

$$\widehat{DGC} = \widehat{TZU}$$

ce qui prouve que le quadrilatère Z, U, G, T est inscriptible.

Les arcs ZA, ZB, ZC, ZD, ZE, ZF *pris d'un même côté, sont semblables.*

On a

$$\widehat{ZTA} = \widehat{ZPA}$$

or

$$\widehat{ZPA} = U.$$

D'où

$$\widehat{ZTA} = U$$

et par suite similitude des arcs ZQA et ZSD, et conséquemment aussi des arcs ZPA et ZUD.

L'angle U est inscrit dans les cercles (4) et (5); donc les arcs ZSD et ZQB sont semblables ; ainsi que $\overset{\frown}{ZUD}$ et $\overset{\frown}{ZUB}$.

L'angle ZTA considéré dans les cercles (2) et (1) y a pour mesures respectives $\dfrac{\overset{\frown}{ZTC}}{2}$ et $\dfrac{\overset{\frown}{ZQA}}{2}$; les arcs $\overset{\frown}{ZTC}$ et $\overset{\frown}{ZQA}$ sont donc semblables ainsi que $\overset{\frown}{ZRC}$ et $\overset{\frown}{ZPA}$.

L'angle ZPA $= u$ considéré dans les circonférences (5) et (1) y a pour mesures respectives $\dfrac{\overset{\frown}{ZPE}}{2}$ et $\dfrac{\overset{\frown}{ZQA}}{2}$ donc les arcs ZPE et ZQA sont semblables de même que $\overset{\frown}{ZWE}$ et $\overset{\frown}{ZPA}$.

On a aussi ZSF $=$ U à cause du quadrilatère inscrit DSZU; d'où l'on conclut la similitude des arcs ZXF et ZSD dont les moitiés sont les mesures de ces angles dans les circonférences (6) et (4), la similitude des arcs ZQF et ZUD est donc évidente.

Les quatre points I, V, U, Z *sont sur une même circonférence.* — *En effet le quadrilatère inscrit* UZSD *donne*

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{ZSF} = \widehat{ZUD} \\ \text{or} \quad \widehat{ZVF} = \widehat{ZSF} \end{array}\right\} \text{d'où } \widehat{ZVF} = \widehat{ZUD}.$$

D'où encore

$$ZUI + IVZ = 2^{\delta}.$$

Donc le quadrilatère UIZV est inscriptible.

Les quatre points Z, V, T, H *appartiennent à une même circonférence.*

Soit θ l'intersection de ZT et VH. On a évidemment :

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{ZV\theta} = 2^{\delta} - \widehat{ZUI} \\ \widehat{ZTG} = 2^{\delta} - \widehat{ZUG} \end{array}\right\} \text{d'où } \widehat{ZV\theta} = \widehat{ZTG}.$$

Les triangles $ZV\theta$ et $H\theta T$ sont donc semblables, et donnent

$$Z\theta \cdot \theta T = V\theta \cdot \theta H$$

relation qui démontre que le quadrilatère ZVTH est inscriptible, puisque

Lorsque deux droites VH *et* ZT *se coupent de telle façon que les rectangles faits sur les deux parties de chacune soient équivalents, leurs extrémités sont sur une même circonférence.*

Théorème

Si (Fig. 3, Pl. II) *dans un triangle rectiligne* ABC, *l'on a*

$$A < B,$$

1° *Si l'on mène aux côtés opposés les transversales* AD *et* BE *telles que*

$$CAD \gtreqless CBE,$$

alors

$$AD > BE.$$

2° *Si* AD = BE

et

$$\frac{DAB}{DAC} = \frac{ABE}{CBE},$$

alors

$$A = B.$$

Démonstration.

I. Avant tout remarquons que de la condition

$$A < B, \text{ on déduit } BC < AC.$$

Posons :

$$\left.\begin{aligned} \widehat{CAD} &= a \\ \widehat{CBA} &= b \\ \widehat{DAB} &= y \\ \widehat{EBA} &= x \end{aligned}\right\} \text{ et soit O l'intersection de AD, BE.}$$

Supposons en premier lieu que l'on ait

$$a = b.$$

La similitude évidente des triangles CAD et CBE fournit

$$\frac{AD}{BE} = \frac{AC}{BC}.$$

Mais $\frac{AC}{BC} > 1$, donc

$$AD > BE.$$

II. En second lieu, soit $a < b$.

Le point A est donc extérieur à la circonférence passant par les trois points B, D, E. Soit A' l'intersection de OA avec cette courbe ; on sait que

$$A'O \cdot OD = EO \cdot BO.$$

D'où

$$AO \cdot OD > EO \cdot BO \tag{1}$$

Je dis que cette inégalité permet de conclure immédiatement que

$$AO + OD < BO + OE$$

c'est-à-dire que

$$AD > BE.$$

C'est ce que nous allons prouver en examinant les différentes circonstances que peuvent présenter les valeurs relatives des quatre droites AO, BO, OD, OE.

Supposons que l'on puisse avoir

$$AD < BE. \tag{2}$$

Par le point E menons ER parallèle à BC ; les triangles semblables EOR et BOD donnent

$$\frac{EO}{BO} = \frac{OR}{OD},$$

ou

$$OE \cdot OD = OB \cdot OR.$$

D'où à fortiori :

$$AO \cdot OB > OD \cdot OE \tag{3}$$

du produit des inégalités (1) et (3) on tire :

$$AO > OE. \tag{4}$$

De

$$\frac{EO}{BO} = \frac{OR}{OD},$$

on déduit encore

$$\frac{EO + BO}{OR + OD} = \frac{BO}{OD},$$

ou

$$\frac{BE}{DR} = \frac{BO}{OD}$$

et à fortiori

$$\frac{BE}{AD} < \frac{BO}{OD}$$

D'où en vertu de l'hypothèse (2) :

$$BO > OD. \tag{5}$$

Les relations (4) et (5) sont donc les conditions explicites de l'hypothèse $AD < BE$.

Actuellement soient les deux triangles AOE, BOD placés de manière à avoir les sommets A et B communs et les côtés AO et BO en ligne droite.

Si l'on suppose en outre que l'on ait :

1°

$$\begin{gathered} BO < AO \\ OE < OD \end{gathered}$$

il est évident alors que

$$BO + OE < AO + OD$$

ou

$$BE < AD$$

résultat qui détruit l'hypothèse (2)

2°

$$\begin{gathered} BO < AO \\ OD < OE \end{gathered}$$

c'est-à-dire si l'on a (Fig. 4, Pl. II),

$$\left.\begin{aligned} XY &= AO \\ XV &= BO \\ YZ &= OE \\ VT &= OD \end{aligned}\right\} \text{ et } \widehat{XYZ} = \widehat{XVT}.$$

Menons TS parallèle à XY ; son point S de rencontre avec YZ sera situé entre Y et Z.

On admettrait donc ici que :

$$XY + VT < XV + YZ$$

ou

$$XY - XV < YZ - VT$$

ou

$$VY < SZ.$$

Inégalité impossible puisque la ligne TS étant parallèle à XY, on a :

$$\frac{XY}{YZ} = \frac{US}{ZS}$$

Et comme en vertu de la condition (4), $XY > YZ$, il s'en suit aussi

$$US > SZ$$

et à fortiori

$$VY > SZ.$$

L'hypothèse (2) est donc encore impossible dans ce cas.

Il est bon de remarquer que ce qui vient d'être dit est vrai que AOE *soit aigu ou obtus.*

3°

$$BO > AO$$

$$OD > OE.$$

Remarquons qu'alors $y > x$

Pour l'examen plus facile de ce cas, plaçons les triangles ABE et ABD de manière qu'ils aient de commun les sommets A de l'un, et B de l'autre, ainsi que le côté AB.

Deux cas sont à examiner, selon que l'angle B est aigu ou obtus. (Fig. 6, Pl. II.)

Si B est obtus, quelle que soit la position de E′ dans l'intérieur du triangle A′B′D′, on aura toujours, en menant E′E″ perpendiculaire à A′B′ :

$$A'E' < A'E''$$

et à plus forte raison

$$A'E' < A'D'$$

ce qui signifie que dans le triangle primitif ABC, on a

$$BE < AD,$$

conclusion qui rend encore inadmissible l'hypothèse (2).

Si B est aigu (Fig. 5, Pl. II), tant que A′ et E′ seront situés du même côté de la hauteur D′P du triangle A′B′D′, on aura encore et pareillement

$$A'E' < A'D'.$$

D'où (Fig. 3, Pl. II).

$$AD > BE.$$

Mais dès que les points A' et E' seront de côtés différents de $D'P$ l'on ne peut dire généralement

$$A'D' > A'E$$

puisqu'il se peut très bien alors que l'on ait :

$$AD < A'E'.$$

C'est ce qu'il est aisé de reconnaître dans le triangle opposé (Fig. 3, Pl. II).

En effet si $B < 1^{\partial}$ et que l'on considère le minimum de AD, c'est-à-dire la hauteur Ad du triangle, on a

$$AB > Ad.$$

Or, il est clair que la circonférence de rayon Ad que l'on décrirait du point B comme centre couperait le côté AC en deux points dont un seul e, le plus voisin de A, peut donner lieu à une transversale issue de B et satisfaisant aux conditions imposées par l'énoncé du théorème. On a ainsi

$$Ad = Be.$$

Et pour tout point ε compris entre A et e, on aura

$$Ad < B\varepsilon.$$

Désignons les angles DAB et eBA respectivement par y' et x' et prouvons que pour $Ad < Be$, on a

$$y' > x'.$$

La demie circonférence décrite sur AB comme diamètre sera rencontrée par l'arc de cercle qui a déterminé e, en d' ; tirons Bd' qui coupe AC en ρ ; le point e sera évidemment situé entre A et ρ, ce qui donne :

$$eBA < d'BA$$

ou

$$eBA < dAB$$

$$x' < y'.$$

Le théorème énoncé est donc EN DÉFAUT *dans ce cas* ; c'est ce qu'il était important de reconnaître.

Soient (Fig. 3, Pl. II).

$$\mathrm{AD} = \mathrm{BE}$$

et

$$\frac{\mathrm{BAD}}{\mathrm{CAD}} = \frac{\mathrm{ABE}}{\mathrm{CBE}}.$$

D'où l'on tire

$$\frac{\mathrm{CAB}}{\mathrm{ABC}} = \frac{\mathrm{DAC}}{\mathrm{EBC}}$$

ou

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{a}{b}.$$

Je dis que $a = b$; en effet s'il en était autrement, on aurait d'après ce qui vient d'être vu :

$$\mathrm{AD} \gtrless \mathrm{BE}$$

Ce qui est contraire aux données. Donc

$$\mathrm{A} = \mathrm{B}.$$

Toutefois il est indispensable de faire voir que *dans le cas où le théorème est en défaut on ne peut avoir*

$$\frac{\mathrm{BA}d}{\mathrm{CA}d} = \frac{\mathrm{AB}e}{e\mathrm{BC}}.$$

En effet si cette égalité pouvait exister, comme on a alors :

$$\mathrm{BA}d > \mathrm{AB}e$$

il s'en suivrait :

$$\mathrm{CA}d > e\mathrm{BC}$$

ce qui est impossible et contraire aux conditions d'existence des transversales Ad et Be.

NOTE SUR LE NOMBRE e.

—

Adoptant les notations

$$[a] = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots n$$

$$[a, b] = a\,(a+1)(a+2)(a+3)\ldots\ldots b$$

où

a et b sont deux nombres entiers quelconques, prouver que l'on a

$$e^n > \frac{(n+1)^n}{[n]}.$$

> e étant la base des logarithmes népériens, et n un nombre entier et positif.

Démonstration. La formule de Maclaurin donne

$$e^n = 1 + n + \frac{n^2}{1 \cdot 2} + \frac{n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{n^k}{[k]} + \ldots + \frac{n^{n-1}}{[n-1]} + \frac{e^{\theta n}\, n^n}{[n]}$$

$\dfrac{e^{\theta n}\, n^n}{[n]}$ est le terme complémentaire de ce développement connu, et θ est compris entre 0 et 1.

Considérant θ comme nul, on a donc :

$$e^n > 1 + n + \frac{n^2}{1 \cdot 2} + \frac{n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{n^k}{[k]} + \ldots + \frac{n^{n-1}}{[n-1]} + \frac{n^n}{[n]}$$

Multipliant de part et d'autre par $[n]$, il vient :

$$(1) \quad [n]\, e^n > [n] + n\,[n] + 3 \cdot 4 \ldots n \cdot n^2 + 4 \cdot 5 \ldots n \cdot n^3 + \ldots + (k+1)(k+2) \ldots n \cdot n^k + \ldots + n \cdot n^{n-1} + n^n.$$

Or

$$(2) \quad (1+n)^n = 1 + n \cdot n + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} n^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2 3} n^3 +$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k} n^k + \ldots + n^n$$

Comparant les coefficients des mêmes puissances de n dans les développements qui, ayant chacun $n+1$ termes, forment les seconds membres des relations (1) et (2), on posera :

$$[k+1, n] \gtrless \frac{[n-k+1, n]}{[k]}.$$

Multipliant par $[k]$, on aura :

$$[k] \gtrless [n-k+1, n].$$

D'où, en divisant par $[n-k+1, n]$, il vient évidemment :

$$[n-k] > 1$$

ce qui prouve que les divers termes du développement (1) sont plus grands que ceux correspondants de $(1+n)^n$, d'où à fortiori :

$$[n]e^n > (n+1)^n,$$

et

$$e^n > \frac{(n+1)^n}{[n]}.$$

OBSERVATION SUR LES FORMULES.

$$\sin\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{R^2 . R\cos a}{2}}$$

$$\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{R^2 + R\cos 2}{2}}$$

Si, pour déterminer ces formules, l'on considère les équations :

$$2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = R\sin a$$

$$\cos^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{a}{2} = R^2$$

et qu'entr'elles on élimine successivement $\sin\frac{a}{2}$ et $\cos\frac{a}{2}$ on obtiendra :

$$2\cos\frac{a}{2}\sqrt{R^2 - \cos^2\frac{a}{2}} = R\sin a$$

et

$$2\sin\frac{a}{2}\sqrt{R^2 - \sin^2\frac{a}{2}} = R\sin a$$

Elevant au carré les deux membres de chacune de ces équations on aura :

$$\cos^4\frac{a}{2} - R^2\cos^2\frac{a}{2} = -\frac{R^2}{4}\sin^2 a$$

$$\sin^4\frac{a}{2} - R^2\sin^2\frac{a}{2} = -\frac{R^2}{4}\sin^2 a.$$

Ces équations étant résolues, donnent :

$$\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{R^2 + R\cos a}{2}} \qquad (1)$$

$$\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{R - R\cos a}{2}} \qquad (2)$$

$$\sin\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{R^2 + R\cos a}{2}} \qquad (3)$$

$$\sin\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{R^2 - R\cos a}{2^2}} \qquad (4)$$

Les couples 1, 2 et 3, 4 étant identiques, il est indispensable de rechercher quelles en sont les valeurs simultanées de $\sin\frac{a}{2}$ et $\cos\frac{a}{2}$, et peut être alors l'impossibilité de l'une ou l'autre de ces formules, sera-t-elle mise en évidence.

Les formules 1, 2, 3, 4 étant générales doivent convenir au cas où $a = o$; alors les formules 2 et 3 fournissent :

$$R = \pm\sqrt{\frac{R^2 - R\cdot R}{2}} \quad \text{et} \quad O = \pm\sqrt{\frac{R + R\cdot R}{2}}$$

Ces résultats évidemment absurdes démontrent que les formules (2) et (3) sont impossibles.

Il ne reste donc que les relations connues (1) et (4).

LIMITE SUPÉRIEURE DES RACINES RÉELLES POSITIVES,

d'après La Grange.

—

Soit l'équation

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} - \ldots\ldots - \ldots\ldots p_n\, x^n - \ldots + \ldots\ldots - - \ldots\ldots -$$

$$p_{n'}\, x^{n'} \ldots\ldots + p_n = 0.$$

Supposons que l'on extraye de chaque coefficient négatif la racine ayant pour indice le nombre de termes qui le précèdent, et représentons par

$$q = \sqrt[n]{p_n}$$

$$q' = \sqrt[n']{p_{n'}}$$

les deux plus grands nombres ainsi obtenus. Je dis que l'on aura pour limite supérieure L *des racines réelles positives.*

$$\mathrm{L} = \sqrt[n]{p_n} + \sqrt[n']{p_{n'}}$$

Démonstration. Désignons par p_k un coefficient négatif quelconque. On a :

$$\sqrt[k]{p_k} < q\,,$$

ou

$$p_k < q^k$$

et

$$\sqrt[k]{p_k} < q',$$

ou

$$p_k < q'^k.$$

D'où additionnant ces 2 inégalités :

$$p_k < \frac{q^k + q'^k}{2}$$

Proposons nous de trouver pour x un nombre qui rende

$$x^m > p_1 x^{m-1} + \ldots\ldots\ldots + p_m \tag{1}$$

Il est évident que tout nombre x qui satisfera à la relation suivante vérifiera (1) :

$$x^m > \frac{q+q'}{2}x^{m-1} + \frac{q^2+q'^2}{2}x^{m-2} + \frac{q^3+q'^3}{2}x^{m-3} + \ldots\ldots + \frac{q^{m-1}+q'^{m-1}}{2}x + \frac{q^m+q'^m}{2}$$

Inégalité qui elle-même sera satisfaite si l'on a :

$$x^m > (q+q')x^{m-1} + (q^2+q'^2)x^{m-2} + (q^3+q'^3)x^{m-3} + \ldots\ldots + (q^m + q'^{m-1})x + q^m + q'^m$$

ou

$$x^m > q\,[q^{m-1} + q^{m-2}x + q^{m-3}x^2 + \ldots + x^{m-1}] + q'\,[q'^{m-1} + q'^{m-2}x + q'^{m-3}x^2 + \ldots + x^{m-1}]$$

Les séries entre parenthèses étant des progressions par quotient, on obtient :

$$x^m > q\,\frac{x^{m-1}\dfrac{x}{q} - q^{m-1}}{\dfrac{x}{q} - 1} + q'\,\frac{x^{m-1}\dfrac{x}{q'} - q'^{m-1}}{\dfrac{x}{q'} - 1}$$

ou

$$x^m > q\,\frac{x^m - q^m}{x-q} + q'\,\frac{x^m - q'^m}{x-q'} \tag{2}$$

Des deux quantités q et q' l'une est plus grande que l'autre; soit

$$q > q'$$

Il s'en suit

$$x - q < x - q'$$

satisfaisant donc successivement aux égalités suivantes, on satisfera en même temps à (2) :

$$x^m > \frac{q(x^m - q^m) + q'(x^m - q'^m)}{x - q}$$

$$x^m > \frac{q(x^m - q'^m) + q'(x^m - q'^m)}{x - q}$$

d'où

$$\frac{x^m(x - q)}{x^m - q'^m} > q + q' \qquad (3)$$

Je dis que

$$x > \frac{x^m(x - q)}{x^m - q'^m}$$

En effet si cela se peut cette égalité existerait dès que :

$$x > \frac{x^m(x - q')}{x^m - q'^m}$$

il viendrait en divisant les deux termes du second membre par $x - q'$:

$$x > \frac{x^m}{x^{m-1} + q'x^{m-2} + \ldots\ldots + q'^{m-1}}$$

D'où en divisant par x^{m-1} les deux termes de la fraction du second membre

$$x > \frac{x}{1 + \text{etc.}\ldots\ldots}$$

conséquence qui justifie l'hypothèse.

Au contraire si l'on supposait

$$x < \frac{x^m(x - q)}{x^m - q'^m}$$

Comme cette inégalité existerait dès que

$$x < \frac{x^m(x - q)}{x^m - q^m}$$

ou

$$x < \frac{x^m}{x^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots\ldots + q^{m-1}}$$

On aurait :

$$x < \frac{x}{1 + q_x + \text{etc.}\ldots}$$

conséquence absurbe qui rend impossible l'hypothèse.

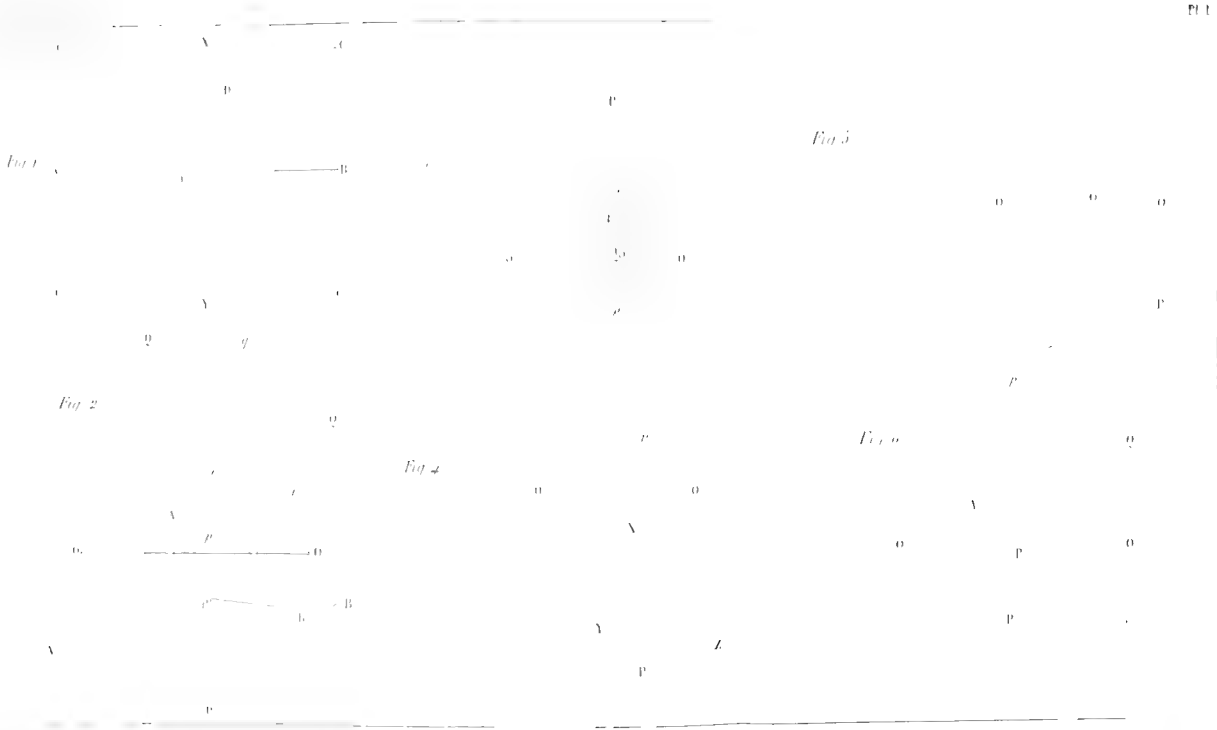
Donc

$$x > \frac{x^{m'}(x - q)}{x^m - q'^m}$$

Et enfin (3), à fortiori :

$$x > q + q'.$$

Pl. I



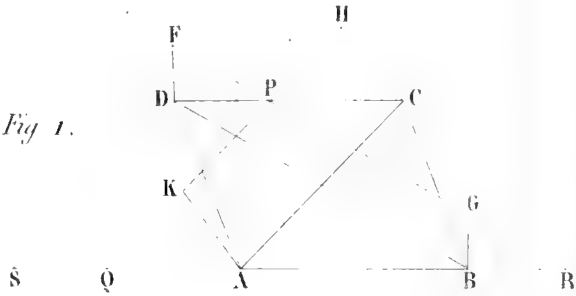


Fig. 1.

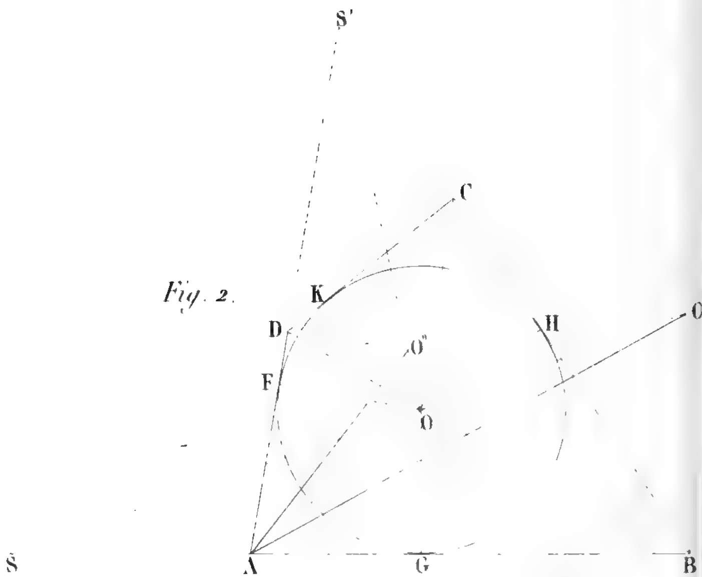


Fig. 2.

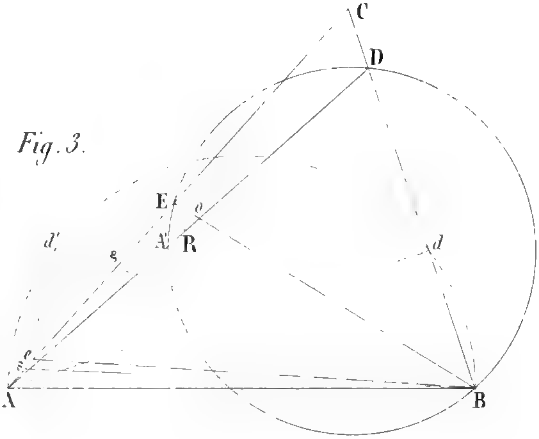


Fig. 3.

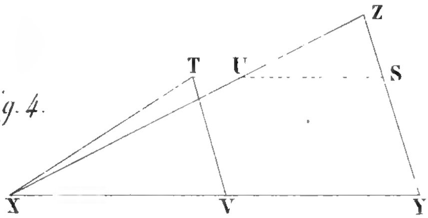


Fig. 4.

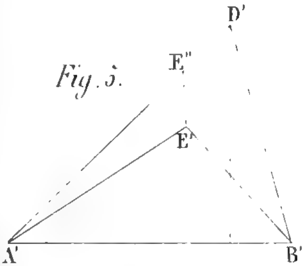


Fig. 5.

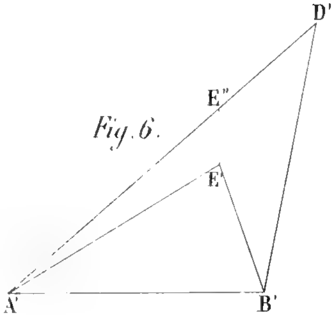
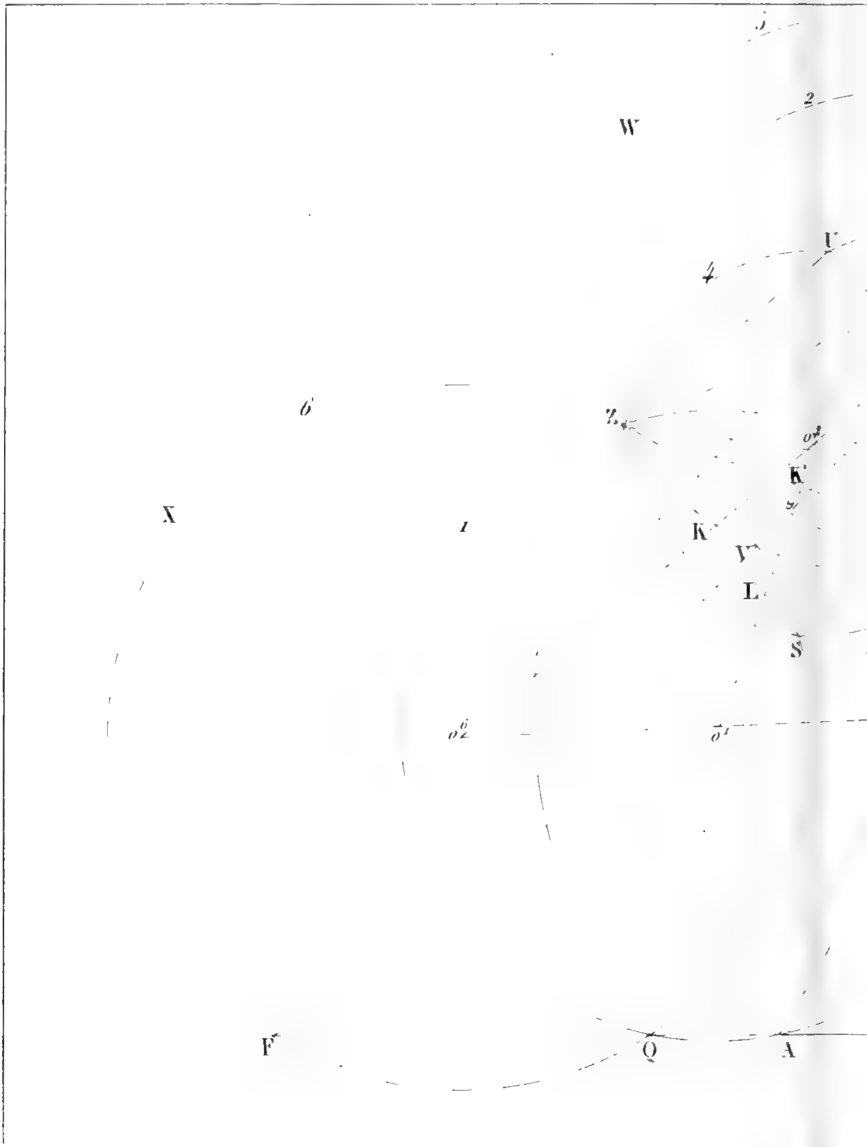
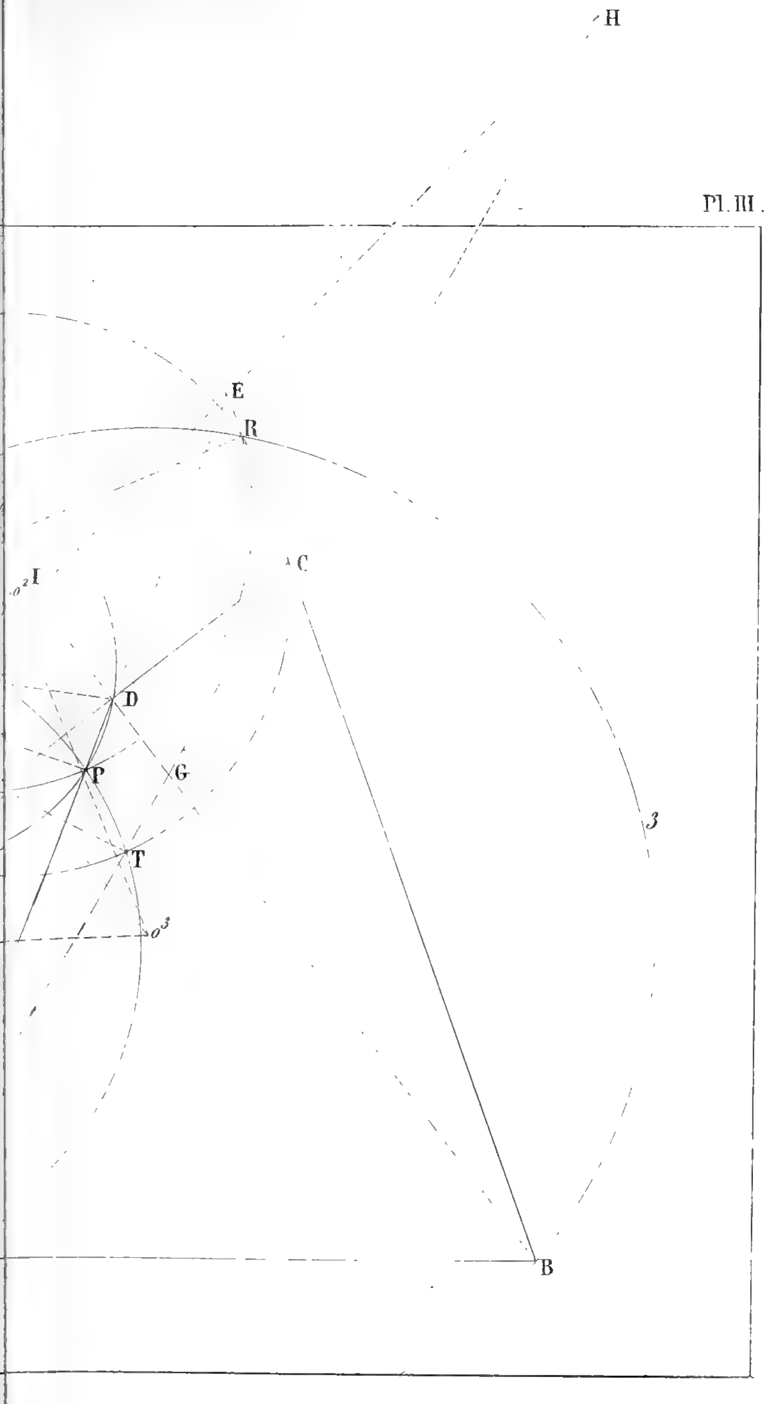


Fig. 6.


W
X
F
Q
A
K
K'
L
S
Z
U
1
2
3
4
6

Pl. III.



VI. — *Histoire des métamorphoses de divers Insectes*,

SAVOIR :

Liodes castanea Herbst. — *Cryptohypnus riparius* Fabr. — *Tarsostenus univittatus* Rossi. — *Ebæus albifrons* Fabr. — *Agapanthia suturalis* Fabr. — *Dircœa lævigata* Hellenius. — *Sphindus Gyllenhalii* Chevr. — *Lagria hirta* L. — *Lagria lata* Fabr. — *Hispa testacea* L. — *Gryphinus piceus* Comolli. — *Cecidomya entomophila* Perris. — *Platystoma umbrarum.*

PAR

M. Édouard PERRIS,

Chevalier de la Légion d'honneur, membre de plusieurs sociétés savantes, à Mont de Marsan (Landes).

LIODES (TETRATOMA) CASTANEA, Herbst.

Pl. V, Fig. 1-8.

LARVE.

Longueur 6 millim. Larve un peu luisante, de forme ovoïde très-allongée, assez convexe en dessus, un peu aplatie en dessous, surtout à la région sternale ; de consistance peu coriace, presque charnue.

Tête arrondie sur les côtés, déprimée, d'un noirâtre livide ; munie en dessus de deux traits blanchâtres partant de la base des antennes et se réunissant au vertex ; celui-ci marqué de quatre petites fossettes en série transversale. Epistome court ; labre en segment de cercle et très-finement cilié. Mandibules assez étroites, un peu gibbeuses extérieurement, ferrugineuses à la base, puis noirâtres jusqu'à l'extrémité qui est bidentée. Lobe des mâchoires long, assez grêle, cilié intérieurement de petites soies raides, et surmonté d'autres soies plus longues et spinuliformes. Palpes maxillaires assez longs, peu arqués, dépassant sensiblement le lobe des mâchoires et formés de trois articles : le premier de médiocre longueur, le second deux fois plus long et un peu ventru, surtout en dehors, le troisième de la longueur du premier et subconique. Lèvre inférieure arrondie antérieurement ; palpes labiaux courts et de deux articles égaux. Antennes de quatre articles : le premier court et gros ; le second plus de deux fois aussi long, plus étroit et cylindrique ; le troisième aussi long au moins que les deux autres ensemble, très-ventru en dedans où il porte une soie, et surmonté, près de son extrémité interne, d'un petit article subconique; quatrième article presque de la longueur du second, un peu ventru avant l'extrémité qui est pointue, et muni de trois longues soies sur le renflement et de deux courtes, apicales. Tous ces organes sont d'un brunâtre livide. Au-dessous de chaque antenne, du côté des joues, deux ocelles noirs, saillants, tuberculiformes et un peu écartés, disposés en ligne transversale.

Prothorax beaucoup plus large que la tête, plus grand que chacun des autres segments, arrondi sur les côtés, sensiblement plus étroit antérieurement qu'à la base, d'une forme à peu près semi-discoïdale. Mésothorax et métathorax aussi larges que lui, mais plus courts. Chacun des segments thoraciques muni d'une paire de pattes de médiocre longueur, assez robustes, de quatre articles, parsemées de soies raides et terminées par un ongle roussâtre.

Abdomen de neuf segments égaux, ou à peu près, en longueur, mais diminuant insensiblement de longueur jusqu'au dernier, et pourvus d'un petit bourrelet latéral. Les trois segments thoraciques et les huit premiers abdominaux, d'un blanchâtre livide en dessous et sur le tiers postérieur en dessus, sont ornés, sur les deux tiers antérieurs, d'une bande noirâtre livide, de sorte que le corps est fascié de noirâtre et de blanchâtre. Dernier segment d'un noirâtre uniforme, tronqué à l'extrémité, muni en dessous d'un mamelon charnu et pseudopode, au centre duquel est l'anus, et à chacun de ses angles d'un long appendice formé de deux articles dont le premier, cylindrique, porte deux poils en dehors et deux en dedans, et le second, effilé, est marqué de stries transversales et obliques, dessinant une spirale comme celle d'une trachée, quoique ces appendices n'aient aucun rapport avec l'organe respiratoire.

Des poils roussâtres bien apparents existent sur la tête et sur les côtés des segments. On en voit aussi quatre séries sur le dos et quatre sous le ventre; mais ces derniers sont un peu plus courts.

Stigmates bien apparents à cause de leur couleur brune, et au nombre de neuf paires : la première, plus grande que les autres et plus inférieure, située près du bord postérieur du prothorax; les autres près du bord antérieur des huit premiers segments abdominaux.

Cette larve ressemble tellement à celle de l'*Agathidium seminulum* dont j'ai publié les métamorphoses dans les Annales de la Société entomologique (1851, page 44), qu'on pourrait presque les prendre l'une pour l'autre. C'est la même structure, ce sont les mêmes couleurs, les mêmes organes. A part la taille qui est un peu plus grande, celle du *Liodes* se distingue pourtant par un caractère très-facile à saisir ; c'est la longueur des deux appendices du dernier segment. Dans la larve de l'*Agathidium* ils n'ont guère qu'une longueur égale à celle du segment qui les porte, et le second article est plus court que le premier ; dans celle du *Liodes*, au contraire, ils sont de quatre à cinq fois aussi longs que le segment, et le second article a une longueur plus que double de celle du premier ; il est de plus orné, ainsi que je l'ai dit, de stries transversales que je n'ai pas observées dans la larve de l'*Agathidium*.

La larve qui nous occupe vit dans la *Reticularia hortensis* Bull., champignon de la famille des Vesceloups, à substance d'abord comme spumeuse, puis pulvérulente, et qui se développe en août et septembre sur la tannée des orangeries et sur la vermoulure des vieilles souches. On l'y trouve ordinairement en compagnie de l'insecte parfait. Il est à remarquer que la larve de l'*Agathidium seminulum* se développe dans un champignon de la même famille et pulvérulent aussi, la *Trichia cinnabarina*. L'une et l'autre, dans l'impossibilité d'accomplir leurs métamorphoses dans ces productions peu consistantes et de courte durée, s'enfoncent dans la terre à la fin de septembre ou au commencement d'octobre pour passer à l'état de nymphe.

NYMPHE.

Elle n'offre rien de particulier ; elle est blanche et présente de fines soies de même couleur autour du prothorax, sur les côtés et sur le dos de l'abdomen. Celui-ci se termine par deux papilles coniques et assez longues.

INSECTE PARFAIT.

Longueur 2 $^1/_2$ à 3 millim. Ovalaire, assez convexe, d'un beau noir luisant, et quelquefois d'un brun ferrugineux. Antennes d'un brun rougeâtre ; massue noirâtre, sauf le 2e article. Tête ayant deux fossettes entre les yeux ; bouche et une tache frontale mal limitée rougeâtres. Prothorax bordé tout autour de brun rougeâtre. Elytres étroitement rougeâtres au bord marginal ; à stries obsolètes ponctuées, géminées, un peu irrégulières ; intervalles étroits, nullement saillants et lisses. Dessous et pattes d'un brun rougeâtre ; tarses assez fortement dilatés dans les mâles ; tous de 4 articles dans les femelles.

CRYPTOHYPNUS (ELATER) RIPARIUS Fabr.

Pl. V, Fig. 9-19.

LARVE.

Longueur 8 millim., largeur un peu plus d'un millim. Couleur marron clair ; lisse, luisante, cornée, cylindrique, sauf l'aplatissement ordinaire du sternum.

Tête orbiculaire, mais engagée en partie dans le prothorax, convexe en dessus, médiocrement arrondie sur les côtés, presque aussi large que le corps ; lisse, avec deux petites fossettes très-peu visibles sur le front ; bord antérieur entier et un peu concave, s'échancrant seulement autour de la cavité antennaire. Epistome largement transversal ; labre assez grand, semi-discoïdal et muni de quatre soies d'inégale longueur. Mandibules assez fortes, ferrugineuses avec l'extrémité noire. Vues en dessus elles paraissent simples, acérées et arquées ; vues de côté elles sont triangulaires, et leur extrémité est découpée en trois dents dont la médiane plus longue que les autres. Mâchoires et menton soudés ensemble comme dans les autres larves d'Élatérides, et couvrant toute la face inférieure de la tête sous la forme d'une plaque lisse divisée en trois parties par deux sillons longitudinaux qui marquent la séparation de ces organes. Lobe des mâchoires peu développé, cylindrico-conique, surmonté d'une petite épine. Palpes maxillaires dépassant un peu le lobe, coniques et de quatre articles égaux. Lèvre inférieure en parallélogramme transversal ; palpes labiaux courts, de deux articles égaux, insérés non sur le bord antérieur de la lèvre, selon l'usage, mais à la base de celle-ci, comme dans les larves de Buprestides, avec cette différence que, dans celles-ci, les palpes labiaux sont rudimentaires. Antennes un peu enchassées dans une cavité qui existe près de la base des mandibules, courtes, coniques et de quatre articles égaux ou à peu près, plus un petit article supplémentaire qui surmonte en dessous le troisième article. Au-dessous des antennes, du côté des joues, on constate l'existence de six points noirs, dont cinq supérieurs sur une ligne un peu oblique, droite ou légèrement arquée, et un au-dessous, vis-à-vis l'avant dernier de la ligne supérieure dont il est très-voisin. (Voir la figure.) Ces points ou ocelles sont plus marqués et plus gros sur certaines larves, et quelquefois aussi les deux de la seconde paire de la ligne supérieure sont réunis en un seul un peu transversal.

Prothorax un peu plus large que la tête et deux fois aussi long qu'elle; mésothorax et métathorax de la même largeur que le précédent, mais de moitié au moins plus courts.

Pattes courtes, robustes, de cinq pièces à peu près égales en longueur; hanches parsemées de petites spinules, trochanter, cuisse et tibia creusés en dessous d'une rainure dont les bords sont armés de spinules; tarse représenté par un ongle dilaté en dessous près de la base.

Abdomen de neuf segments: les huit premiers à peine plus longs que le métathorax; le dernier un peu plus grand, à contour semi-elliptique, le bord postérieur étant régulièrement arrondi, sans aucune trace de dent, de pointe ou d'échancrure. Quand on observe ce segment de côté, on aperçoit, près du bord inférieur, une toute petite crête longitudinale et arquée. C'est un des côtés d'une ellipse très-régulière, tracée sous le segment, et au pôle postérieur de laquelle se trouve le mamelon anal, faiblement extractile.

Tout le corps est parsemé de rides sinueuses, écartées et très-superficielles, et l'on remarque en outre, comme cela est d'ordinaire dans les larves de cette famille, de fines stries longitudinales aux bords antérieur et postérieur du prothorax et au bord postérieur de tous les autres segments sauf le dernier. On observe aussi quelques poils roussâtres sur la tête et sur le dernier segment; chacun des autres segments en a deux dorsaux, quatre latéraux et au moins deux ventraux.

Stigmates au nombre de neuf paires; la première très-près du bord antérieur du mésothorax, et un peu plus inférieure que les autres qui sont situées près du bord antérieur des huit premiers segments abdominaux.

En septembre 1853, j'ai trouvé assez abondamment cette larve, avec des nymphes et des insectes parfaits, dans les Hautes-Pyrénées, sous les pierres, de là le lac de Gaube, près Cauterets. J'ignore de quoi elle vit, et si elle est carnassière comme la plupart de celles de la famille, ou phytophage comme d'autres.

Sa forme, sa contexture, ses caractères sont bien, en général, ceux des larves d'Élatérides; mais elle donne lieu pourtant de ma part aux remarques suivantes : l'épistome et le labre sont libres, tandis qu'ils sont soudés dans toutes les autres larves de la même famille que j'ai été en position d'observer; le bord antérieur de la tête est à peine sinué, et ne présente pas ces saillies, ces apophyses qu'offrent celles des *Melanotus*, *Athous*, *Elater*, *Agriotes*, etc.

Les palpes labiaux sont insérés à la base de la lèvre, ce qui serait, ainsi que je l'ai fait remarquer, un acheminement vers les larves de Buprestides. Enfin, le dernier segment est régulier, très-obtusément arrondi, ce qui l'éloigne des larves de *Melanotus*, d'*Athous*, de *Lacon*, d'*Agrypnus*, etc., qui l'ont échancré et lobé, et de celles d'*Elater* et d'*Agriotes* où il est terminé par une épine droite. Je vois là un commencement de dégénérescence qui me porte à penser que les *Cryptohypnus* devraient être placés, ainsi que l'ont fait quelques auteurs, aux derniers rangs de la famille.

NYMPHE.

La nymphe, logée dans une cellule sous les pierres, ou à une faible profondeur dans la terre, ressemble à celle des Élatérides. Elle est blanche et molle, avec des tubercules spiniformes aux articles des antennes, deux soies coniques, roussâtres au bord antérieur du prothorax, deux autres au bord postérieur près de l'écusson, une à chaque angle postérieur et deux divergentes à l'extrémité de l'abdomen.

INSECTE PARFAIT.

Longueur 5 à 6 millim. Assez large, d'un noir luisant, un peu bronzé, avec les cuisses brunes ou noirâtres, les tibias et les tarses testacés. Corps revêtu en dessus d'un duvet couché et fauve. Tête presque droite antérieurement, à ponctuation fine et éparse. Prothorax pointillé comme la tête, avec un sillon peu profond à la face postérieure. Elytres marquées de stries lisses ; intervalles plans, avec des points épars et presque imperceptibles.

TARSOSTENUS (CLERUS) UNIVITTATUS, Rossi.

Pl. V, Fig. 20-28.

LARVE.

Longueur 8 à 10 millim. Charnue, grêle, linéaire, presque cylindrique, avec le sternum un peu déprimé.

Tête subcornée, plus étroite antérieurement qu'à sa base, arrondie latéralement, rousse avec le bord antérieur ferrugineux ; marquée d'un sillon sur le vertex, et sur le front d'une fossette transversale bien visible. Epistome et labre roussâtres ; le premier trapézoïdal, le second rectangulaire et transversal. Bord antérieur de la tête largement et très-peu profondément échancré au milieu, avec une petite saillie de chaque côté de la base de l'épistome. Mandibules ferrugineuses, noires à l'extrémité, se joignant sans se croiser, arquées, pointues, ayant une petite dent obtuse et peu saillante vers le tiers antérieur. Mâchoires et menton libres dans la moitié de leur longueur, puis soudés en une sorte de plaque subcornée sur laquelle la continuation des organes soudés est marquée par deux traits roux extérieurs et deux internes convergents, entre lesquels se trouve une autre ligne moins marquée. Lobe des mâchoires très-court, peu apparent et cilié; palpes maxillaires un peu arqués en dedans, assez longs, de trois articles : les deux premiers égaux, le troisième aussi long que les deux autres ensemble. Lèvre inférieure légèrement échancrée, à angles arrondis; palpes labiaux de deux articles dont le second double du premier. Antennes assez longues, peu épaisses, de quatre articles : le premier long et en cône tronqué, en partie rétractile; le second susceptible de rentrer un peu dans le précédent, de moitié plus court, un peu plus large à l'extrémité qu'à la base; le troisième de la longueur du précédent, mais un peu plus étroit, et bordé supérieurement de deux à quatre cils; le quatrième de la même longueur, mais grêle, terminé par un long poil et deux ou trois autres très-petits, et accompagné d'un petit article supplémentaire, placé en dessous. Tous ces organes d'un roussâtre pâle avec la base des articles plus foncée. Sur chaque joue quatre ocelles égaux, elliptiques et blanchâtres, formant à peu près un losange.

Thorax blanc, un peu plus large que la tête; ses trois segments égaux; prothorax un peu plus étroit antérieurement qu'à la base, marqué en dessus d'une grande tache rousse n'atteignant ni le bord antérieur ni le bord postérieur; parfaitement limitée et plus foncée antérieurement, à bornes un peu indécises en arrière.

Chacun des trois segments thoraciques porte une paire de pattes médiocrement longues, à cuisses un peu plus courtes que les tibias, terminées par un ongle long, roussâtre, un peu arqué, et hérissées de quelques longues soies.

Abdomen du même diamètre que le thorax, ou se dilatant un petit peu vers l'extrémité; composé de neuf segments à peu près égaux; blanchâtre avec le milieu des segments marbré de rougeâtre pâle et livide; dernier segment sensiblement plus large à la base qu'à l'extrémité, qui se termine par deux crochets cornés parallèles, bien relevés, ferrugineux avec la pointe noire. La partie postérieure de ce segment est occupée en dessus par une tache roussâtre arrondie, où se montrent quelques fossettes peu sensibles; en dessous il existe un mamelon anal rétractile.

La tête et le thorax sont parsemés de poils très-fins, visibles à une forte loupe. Le long des flancs, sur le dos de l'abdomen et à la région ventrale on aperçoit des poils semblables, disposés en séries, savoir : six séries dorsales, deux ou quatre latérales et quatre ventrales. Sur les côtés règne un bourrelet qui n'est bien apparent que lorsque la larve n'a pas l'embonpoint qu'on lui voit ordinairement.

Les stigmates sont au nombre de neuf paires : la première se trouve près du bord antérieur du mésothorax, les autres au tiers antérieur des huit premiers segments abdominaux.

Le *Tarsostenus univittatus* est assez voisin des *Clerus*, des *Thanasimus*, des *Opilo* et des *Tillus* pour qu'on s'attende à trouver de grandes analogies entre sa larve et celles de ces derniers insectes. Ces larves, en effet, ont un air de famille très-facile à saisir, et lorsqu'on étudie de près leurs organes, surtout ceux de la tête, on se rend parfaitement compte de leurs affinités. Il est aisé pourtant de trouver quelques caractères distinctifs. La larve du *Tarsostenus* diffère, en effet, des autres par son labre tronqué antérieurement et non échancré ou semidiscoïdal, par le troisième article des palpes maxillaires aussi long que les deux premiers réunis; par le nombre des ocelles qui est de huit, au lieu de dix; par l'absence de toute tache sur les deux derniers segments thoraciques, et surtout par la forme du corps qui est linéaire et non ventrue. Ces deux derniers caractères la rapprochent singulièrement de la larve du *Tillus unifasciatus*, et il faut convenir aussi que les insectes parfaits ont entre eux plus de rapports qu'avec tout autre genre de la famille. Tant il est vrai, comme j'ai déjà eu bien des occasions de le faire remarquer, que les larves ont, en général, d'autant plus de ressemblance, que les insectes parfaits ont des relations plus nombreuses. La larve du *Tillus* diffère néanmoins de celle du *Tarsostenus* principalement par les ocelles qui sont uniques sur chaque joue; par le lobe des mâchoires qui est plus long, et par les palpes maxillaires dont les articles sont égaux.

Le *Tarsostenus univittatus* est commun au mois de juin sur les tas de buches de chêne exposées au soleil. Comme j'avais déjà trouvé les larves de plusieurs Clérites sous les écorces, je m'acharnais à chercher celles du *Tarsostenus* dans les mêmes conditions, et pendant trois ans mes recherches étaient demeurées stériles, ce qui me surprenait beaucoup, vu l'abondance de l'insecte parfait. En dernier lieu je m'avisai d'explorer l'intérieur du bois, et, étant tombé sur des buches dont l'aubier était miné par les larves du *Lyctus ca-*

naliculatus, je recueillis les fruits de ma longue persévérance.

C'est en effet dans les galeries creusées par les larves de *Lyctus*, dont elle fait sa proie, qu'il faut chercher celle du *Tarsostenus;* j'y en ai pris autant que j'en ai voulu, avec des nymphes et des insectes parfaits, car elle se transforme aux lieux mêmes où elle a vécu, au milieu de la vermoulure, dans laquelle elle se pratique une loge dont elle vernit les parois avec une substance incolore. Lorsque le moment de la métamorphose est proche, elle est sensiblement raccourcie et de forme un peu elliptique.

NYMPHE.

La nymphe présente, emmaillotées comme à l'ordinaire, toutes les parties de l'insecte parfait; des poils blancs se dressent en rayonnant près du bord antérieur du prothorax; on en voit aussi aux genoux, sur les côtés des segments abdominaux et sur le dos; chacun de ces poils est inséré sur un tout petit mamelon glanduliforme. Le dernier segment de l'abdomen est terminé par deux petites papilles divergentes.

INSECTE PARFAIT.

Longueur 4 $^1/_2$ millim. Etroit, presque linéaire, revêtu d'une villosité cendrée. Antennes noirâtres, avec les premiers articles rougeâtres; labre jaunâtre; tête convexe, à ponctuation assez forte et peu serrée. Prothorax subconvexe, de la couleur de la tête, ponctué comme elle sur les côtés; dos un peu inégal, ayant un grand espace lisse, avec quelques points et un sillon qui ne dépasse guère le milieu, et au fond duquel on voit deux séries de points. Elytres brunes, marquées de stries rapprochées, fortement ponctuées, s'arrêtant avant l'extrémité qui est finement et vaguement ponctuée; ayant au delà du milieu une bande jaunâtre. Cuisses noirâtres; tibias bruns ou d'un brun rougeâtre; tarses rougeâtres.

EBŒUS (MALACHIUS) ALBIFRONS, Fabr.

Pl. V, Fig. 29-36.

LARVE.

Longueur 3 millim., largeur $^3/_4$ de millim. Charnue, déprimée, linéaire, tomenteuse, blanche, à l'exception de la tête.

Tête parsemée de poils de différentes longueurs, presque carrée, à peine plus longue que large, subcornée, lisse, d'un noir livide, avec le devant roussâtre. Epistome transversalement linéaire, de couleur roussâtre ainsi que le labre qui est en demi-ellipse, transversal et velu. Mandibules fortes, roussâtres à la base, ferrugineuses au milieu, noires à l'extrémité qui est acérée, et au-dessous de laquelle on observe deux apophyses à peu près en forme de dents de scie. Mâchoires assez fortes ; lobe court, obtus, ne dépassant guère le premier article des palpes maxillaires ; ceux-ci un peu arqués en dedans, assez longs et de trois articles dont le premier est le plus petit et le second le plus grand. Lèvre inférieure à peine échancrée antérieurement ; surmontée de deux palpes labiaux de deux articles égaux, et n'atteignant pas l'extrémité du deuxième article des palpes maxillaires ; tous ces organes de couleur roussâtre. Antennes de quatre articles : le premier plus étroit à l'extrémité qu'à la base ; le second plus long que le précédent et cylindrique ; le troisième de la longueur du premier ; le quatrième aussi long que le troisième, très-grêle et accompagné à la base d'un article supplémentaire court, assez épais et conique. Au-dessous de chaque antenne on voit un groupe de quatre ocelles blanchâtres, dont trois sur une ligne transversale un peu oblique et un, un peu plus gros que les autres, vis-à-vis l'intervalle qui sépare les deux premiers de la série supérieure.

Prothorax plus grand que les deux autres segments thoraciques, qui sont égaux entre eux. Ces trois segments sont un peu plus étroits antérieurement qu'à la base, et légèrement arrondis sur les côtés. Chacun de ces segments porte une paire de pattes longues, hérissées de petits poils roussâtres et terminées par un ongle droit et acéré.

Abdomen de neuf segments ; les huit premiers ne présentant rien de particulier, si ce n'est, près de chaque côté, un petit sillon longitudinal limitant un bourrelet qui règne le long des flancs. Dernier segment plus petit que les autres, un peu rétréci postérieurement et creusé en arrière d'une profonde échancrure, de sorte qu'il paraît terminé par deux papilles charnues. En dessous se trouve un mamelon pseudopode au centre duquel est l'anus.

Tout le corps est couvert d'une pubescence très-fine, mais plus longue sur le dernier segment. Les poils du duvet sont arqués en arrière, sauf sur le prothorax où ceux de la moitié antérieure sont arqués en avant.

Stigmates au nombre de neuf paires : la première près du bord antérieur du mésothorax, les autres au tiers antérieur des huit premiers segments abdominaux.

Cette larve a les plus grands rapports avec celles du *Malachius* *œneus* et de l'*Anthocomus lateralis* que j'ai publiées dans les Annales de la Société entomologique de France (1852 et 1854). Elle en diffère néanmoins par les caractères suivants : la tête est lisse, sans points ou fossettes ; la lèvre inférieure est un peu échancrée et non subarrondie ; le corps, au lieu d'être coloré de rose terne ou vineux, est entièrement d'un blanc mat, ou parfois un peu translucide, sans aucune tache sur les segments thoraciques ; le dernier segment est blanc et charnu comme les autres et non ferrugineux et corné, et, au lieu de pointes coniques, crochues et cornées, il est terminé par deux lobes papilliformes, obtus, droits et charnus ; enfin le corps est tomenteux plutôt que velu.

Ayant trouvé abondamment l'*Ebœus albifrons* au mois de mai, près de Mont de Marsan (Landes), sur un lierre qui tapissait un mur, je me persuadai que je rencontrerais sa larve dans la même localité, et pour m'en assurer, quelques mois après, je fis tomber dans mon filet une certaine quantité de détritus et du terreau accumulés entre les mailles du réseau formé par les tiges du lierre cramponnées au mur. J'explorai ensuite avec le plus grand soin ces débris, et j'y découvris plusieurs individus d'une larve et d'une nymphe que, par analogie, je rapportai sans hésitation à l'*Ebœus*. Cette opinion se trouva ensuite justifiée par les métamorphoses qui s'accomplirent dans mon cabinet. J'ai constaté aussi que cette larve, comme celles des autres *Malachius* que j'ai observées, est carnassière, car je l'ai vue manger de petites podures, de très-jeunes cloportes, des pucerons qui existaient dans les détritus. La métamorphose en nymphe s'est opérée quelquefois à la surface même du terreau, plus souvent dans une petite cellule pratiquée à une très-petite profondeur.

NYMPHE.

Blanche, molle, très-délicate, hérissée de quelques poils sur le vertex, les bords du prothorax et les flancs ; abdomen terminé par deux papilles sétacées.

INSECTE PARFAIT.

Longueur 1 $^1/_2$ à 2 millim. D'un noir assez luisant ; antennes d'un testacé jaunâtre ; tête noire, un peu concave ; prothorax presque imperceptiblement pointillé, largement testacé aux angles antérieurs ; élytres lisses, un peu dilatées d'avant en arrière, arrondies postérieurement ; dessous du corps noir ; pattes d'un testacé jaunâtre. *Femelle.*

Le *mâle* diffère par les caractères suivants : tête plus concave, d'un blanc jaunâtre ; prothorax de la même couleur antérieurement et sur les côtés; élytres d'un blanc jaunâtre postérieurement, avec une apophyse terminale large, relevée et tronquée.

AGAPANTHIA (SAPERDA) SUTURALIS Fabr.

Pl. V, Fig. 37-46.

LARVE.

Longueur 17 millim. Charnue sans être molle et d'un blanc un peu jaunâtre.

Tête ovale, luisante, roussâtre, parsemée de poils fins et roussâtres; marquée sur le front d'une impression en V très-ouvert, et à partir du sommet de l'angle formé par cette impression, d'un sillon très-fin prolongé jusqu'au vertex et parcouru par une ligne rousse. Labre plus foncé que la tête, en ellipse transversale, susceptible d'un léger mouvement de porrection et d'inflexion, hérissé de poils roux. Epistome de la couleur du labre, presque en parallélogramme transversal, avec les angles antérieurs un peu obtus. Bord antérieur de la tête droit, avec une petite apophyse noire et subcornée de chaque côté de l'épistome. Aux angles existe une petite cavité dans laquelle est logée une antenne très-courte, presque invisible, conique, et où j'ai compté trois articles. Mandibules fortes et peu crochues, luisantes, noires presque dans leur moitié supérieure, le reste ferrugineux. Vues en dessus elles se terminent en pointe acérée, et au-dessous de cette pointe le bord interne est muni de deux dents dont la supérieure triangulaire et l'autre très-fine. Vues de côté elles sont plus étroites, autrement conformées et taillées en biseau à l'extrémité, avec l'angle apical bifide. Mâchoires roussâtres, assez fortes et courtes; leur lobe subconique, ne dépassant guère le premier article des palpes et hérissé de soies rousses; palpes maxillaires presque roux, droits ou peu s'en faut, peu allongés et ne dépassant pas les mandibules ; formés de trois articles dont le second un peu plus long que les deux autres qui sont égaux. Lèvre inférieure roussâtre, grande, un peu étranglée vers le milieu de sa longueur et prolongée antérieurement en une languette assez large et subtriangulaire. Palpes labiaux de la couleur des palpes maxillaires, dépassant à peine les lobes des mâchoires, et de deux articles égaux. Mâchoires et menton circonscrits inférieurement par un trait arqué, subcorné, très-légèrement interrompu au milieu. Sur chaque joue un ocelle noir, en ellipse longitudinale.

Prothorax moins long que la tête, mais un peu plus large qu'elle, avec le bord antérieur faiblement arrondi, une légère teinte roussâtre près de ce bord, et de chaque côté un pli longitudinal. Ce segment est plan et déclive en dessous, de sorte que, vu de profil, il a beaucoup plus de diamètre à la base qu'à son extrémité antérieure. Mésothorax et métathorax de moitié moins longs que le prothorax; l'un et l'autre très-ventrus en dessous, et munis sur ce renflement singulier d'une touffe tranversale de poils longs, assez raides, serrés et roussâtres. A l'œil nu ces poils pourraient être pris pour des pattes dont la larve est du reste entièrement dépourvue. Sur le dos du métathorax on voit un mamelon transversal tout à fait semblable à ceux que l'on remarque chez beaucoup de larves de Muscides, et dont la crête est, comme chez ces dernières, entourée d'un rang de petits tubercules.

Abdomen s'atténuant un peu de la base à l'extrémité, et formé de neuf segments dont les quatre premiers un peu plus longs que les suivants; tous munis d'un bourrelet latéral occupant toute leur longueur; les sept premiers segments pourvus sur le dos, assez près du bord antérieur, d'un mamelon transversal semblable à celui du métathorax. Dernier segment s'élargissant un peu de la base à l'extrémité, qui est tronquée, et hérissé postérieurement de poils roussâtres et touffus, surtout au bord supérieur; milieu de la face postérieure occupé par un petit mamelon trilobé, médiocrement saillant et un peu rétractile, an centre duquel est l'anus. Le reste du corps revêtu de poils fins et d'un blanc à peine roussâtre.

Stigmates légèrement ovales, au nombre de neuf paires : la première assez près du bord antérieur du mésothorax, à peine plus bas que les autres qui sont situées au tiers antérieur des huit premiers segments abdominaux.

Cette larve vit dans les tiges du *Melilotus macrorhiza* Pers., qui croît dans les terrains argileux et un peu humides d'une partie du département. Sa forme bizarre piquait vivement ma curiosité; ce renflement pectoral, ces pseudopodes dorsaux l'éloignaient dans mon esprit des nombreuses formes de larves que j'avais observées, et pendant deux années j'avais, avec une impatiente sollicitude, poursuivi ses métamorphoses, ou recherché avec avidité, sur la plante même, un insecte auquel je pusse raisonnablement la rapporter. Mes efforts et mes soins ont été couronnés de succès en

1854. J'obtins d'abord la nymphe et ce ne fut pas sans surprise que j'y trouvai les caractères d'une nymphe de Longicorne. Plus tard cette nymphe me donna l'*Agapanthia suturalis* que je n'avais jamais rencontrée dans ce pays.

Je me rappelai alors que deux de mes amis, MM. Guérin-Méneville et Graells avaient publié un mémoire, le premier sur les mœurs du *Calamobius* (*Agapanthia*) *marginellus*, dont la larve vit dans les chaumes du seigle, auquel il cause parfois de grands dommages dans certaines parties de la France; le second sur les métamorphoses de l'*Agaphantia irrorata*, qui s'accomplissent dans les tiges de l'*Onopordon illyricum*. Je possédais déjà la notice de M. Guérin-Méneville; lors du voyage que j'ai fait en Espagne en juin 1854, M. Graells me donna la sienne, ainsi qu'un individu de la larve et de la nymphe. Leur ressemblance avec celles de l'*A. suturalis* est telle, qu'à part la taille il y a identité complète. Je dois dire pourtant que M. Graells a commis une erreur en donnant quatre articles aux palpes maxillaires de la larve et trois aux palpes labiaux, ceux-là n'étant positivement que de trois articles, et ceux-ci de deux.

A l'identité de formes se joint la parfaite conformité de mœurs, et j'étais émerveillé de voir, en lisant le résultat des observations consciencieusement faites et habilement décrites par mes savants amis, que les faits énoncés par eux étaient la reproduction exacte de ceux que j'avais constatés moi-même. Je n'ai rien à y ajouter, rien à en retrancher. Je pourrais me borner à cette simple déclaration; mais comme les notices précitées pourraient ne pas se trouver aux mains des entomologistes qui liront celle-ci, je vais donner un résumé de mes observations.

L'*A. suturalis* naît en juin; la femelle pond un œuf sur la tige tendre encore du *Melilotus macrorhiza*. Elle n'en pond jamais plus d'un, et, chose étrange, aucune ponte rivale n'est faite par une autre femelle, car jamais on ne trouve deux larves dans la même tige. Ainsi, avant de pondre, la femelle explore avec soin la tige qu'elle a d'abord jugée propice à son dessein; elle constate infailliblement si elle a été devancée, et alors elle se retire, comme si elle savait que toute la longueur de la tige est nécessaire au développement d'une seule larve et qu'elle condamnerait sa progéniture à une mort certaine si elle empiétait sur les droits du premier occupant. Cette réserve, dont bien d'autres insectes donnent l'exemple, est une nouvelle preuve de l'admirable sollicitude de la nature pour la conservation de ses œuvres.

Dès sa naissance, la jeune larve pénètre dans le canal médullaire et le ronge en remontant vers le sommet. Arrivée là, elle se retourne dans sa galerie, et se met à creuser en descendant. Les parties qu'elle détache sont presque entièrement utilisées pour son alimentation, car la galerie est complètement libre sur une grande étendue, et l'on n'y trouve de petits tas de détritus ou d'excréments qu'à de notables intervalles. A l'automne, la galerie se prolonge déjà jusqu'au collet de la racine. La larve la parcourt, soit en avant, soit à reculons, avec une facilité et une rapidité vraiment surprenantes, ce qu'il est aisé de voir lorsqu'on fend la tige de manière à n'ouvrir la galerie que sur le tiers de son pourtour. Il faut convenir aussi qu'elle est merveilleusement organisée pour ces sortes de manœuvres. Lorsqu'elle veut avancer, elle appuye sa tête et ses pseudopodes pectoraux contre les parois inférieures de la galerie, contracte son corps, ramène autant qu'elle le peut le dernier segment qui s'applique contre ces mêmes parois par sa face postérieure; puis, à l'aide de ce point d'appui et des pseudopodes dorsaux, elle se pousse en avant pour recommencer le même exercice. Quand elle veut reculer, elle allonge son corps autant que possible, relève la tête contre les parois supérieures, se sert de celle-ci et de tous ses pseudopodes pour contracter son corps en arrière, et ainsi de suite.

Cette larve si agile dans sa galerie, parce qu'elle est spécialement constituée pour vivre dans ces conditions, est incapable, lorsqu'elle en est dehors, de tout mouvement de progression; elle ne peut que s'agiter sans résultat aucun, et elle prend habituellement l'attitude que je lui ai donnée dans mon dessin.

Lorsqu'un accident a rompu la tige où elle vit, la larve se hâte de boucher l'orifice par un fort tampon de petits copeaux qu'elle détache des parois de sa galerie. Elle établit aussi, ordinairement assez près du collet de la racine, deux tampons analogues, à une distance un peu supérieure à la longueur de son corps, et c'est dans cet intervalle qu'elle passe tout l'hiver et une partie du printemps, après s'être préalablement retournée, de manière à se trouver la tête en haut. Le mois d'avril ou de mai venu, elle subit sa métamorphose en nymphe.

NYMPHE.

Elle est blanche, et présente, emmaillotées comme à l'ordinaire, toutes les parties de l'insecte parfait. Les segments abdominaux, sauf le dernier, ont sur le dos un mamelon bien saillant et surmonté d'une série transversale de quatre spinules cornées et ferrugineuses, un peu arquées en arrière; en avant du mamelon on remarque deux spinules semblables. Les côtés sont revêtus de poils courts et très-fins. Le dernier segment, vu de profil, est subtriangulaire. Son extrémité est armée de deux petits crochets relevés, et sur la déclivité inférieure on remarque trois séries de spinules relevées : la première de deux, la seconde de six, la troisième de quatre; au-dessous existe une touffe de poils. Cette nymphe, grâce aux mamelons et aux spinules dont j'ai parlé, peut comme la larve, monter et descendre avec facilité dans sa galerie.

La nymphe de l'*A. irrorata* montre plus de spinules, et je ne lui vois pas les deux petits crochets terminaux.

J'ai obtenu l'insecte parfait en juin. Pour sortir, il perfore la tige d'un trou rond, en regard de la cellule où se sont accomplies les dernières métamorphoses.

INSECTE PARFAIT.

Longueur de 9 à 12 ½ millim. D'un bronzé verdâtre, à duvet brunâtre, cendré et roussâtre. Premier article des antennes de la couleur du corps, les autres annelés de brun et de cendré; tête peu densément ponctuée; prothorax finement chagriné, ayant trois lignes longitudinales d'un duvet jaunâtre, une sur le disque et une de chaque côté; écusson satiné, de même couleur; élytres ruguleusement ponctuées, moins fortement à l'extrémité, ayant le long de la suture et du bord marginal une bordure d'un duvet cendré-jaunâtre.

DIRCŒA LŒVIGATA Hellenius. (DISCOLOR Fabr.)

Pl. V, Fig. 47-55.

LARVE.

Longueur 14 millim. Blanche, charnue, un peu dilatée inférieurement, à cela près, cylindrique.

Tête d'un blanc roussâtre, lisse; un peu plus large que longue, s'élargissant un peu d'avant en arrière, pour se rétrécir à la base; côtés et angles postérieurs régulièrement arrondis; deux fossettes sur le front, puis un sillon médian atteignant le vertex. Bord antérieur droit au milieu, avec deux taches noirâtres, puis s'arrondissant autour de la cavité antennaire et se continuant ensuite vers les côtés en ligne droite. Epistome transversal et d'assez faible dimension; largement et peu profondément échancré en avant; labre semi-discoïdal et cilié. Mandibules noires à l'extrémité et sur les bords, ferrugineuses au centre, où l'on aperçoit une petite fossette; assez robustes, subtriangulaires, échancrées, presque bifides à l'extrémité, avec une courte et large rainure extérieure sous l'échancrure. Mâchoires fortes, coudées et mobiles comme dans les larves d'Hétéromères; lobe sub-cylindrique, armé de cils spinuliformes roussâtres, allongé, atteignant ou dépassant un peu l'extrémité du second article des palpes maxillaires qui sont très-peu arqués et formés de trois articles égaux. Menton de moyenne dimension et à côtés à peu près parallèles; lèvre inférieure peu développée, prolongée au milieu en une petite languette, et surmontée des palpes labiaux de deux articles égaux. Ces divers organes sont renfermés entre les mâchoires, et les palpes labiaux ne dépassent guère la moitié du lobe de celles-ci. Antennes insérées contre la base des mandibules, coniques et de quatre articles égaux, plus le petit article supplémentaire qui, comme dans beaucoup de larves, surmonte en dessous le troisième article. Un peu au-dessous des antennes, du côté des joues, on voit cinq petits ocelles noirs, dont trois supérieurs, équidistants et disposés en ligne oblique, et deux inférieurs vis-à-vis les deux extrêmes de la série supérieure.

Prothorax de moitié plus large que la tête et aussi long qu'elle, un peu ridé sur son tiers antérieur; mésothorax et métathorax sensiblement plus étroits et plus courts que le précédent et égaux entre eux; munis, près du bord antérieur, d'une fine crête transversale, subcornée, rousse, denticulée, et un peu en arc renversé.

Pattes courtes, robustes et de cinq pièces; hanche épaisse et parsemée de spinules roussâtres; trochanter assez développé; femur et tibia hérissés en dessous de quelques soies; tarse représenté par un ongle crochu, corné et ferrugineux à l'extrémité.

Abdomen de neuf segments : le premier égal au métathorax; les six suivants plus longs; le huitième à peu près comme le premier; le neuvième un peu plus long, un peu plus étroit et muni de deux crochets relevés un peu crochus, dont la moitié supérieure est cornée et d'un brun ferrugineux. Entre les deux crochets le bord postérieur du segment est échancré et les deux angles de l'échancrure sont cornés et d'un brun ferrugineux. Au-dessus de l'échancrure on aperçoit cette cavité qui existe dans plusieurs larves et dont l'usage est inconnu. Le bord supérieur de cette cavité est comme tranchant, ferrugineux et corné. Sous ce dernier segment existe un mamelon pseudopode et rétractile, au centre duquel est l'anus. Le long des flancs règne un bourrelet peu développé.

La tête et tout le corps sont parsemés de poils très-fins et roussâtres.

Stigmates au nombre de neuf paires : la première, plus inférieure que les autres, sur un petit bourrelet qui surgit entre le prothorax et le mésothorax, et qui semble dépendre de celui-ci; les autres au tiers antérieur des huit premiers segments abdominaux, immédiatement au-dessus du bourrelet latéral.

Cette larve était connue d'Erichson, mais il ne l'a point décrite et il se borne à dire (Archiv. de Wiegm. 1842) qu'elle porte sur son dernier segment deux crochets recourbés en haut.

Je l'ai trouvée, en septembre 1853, dans les Pyrénées, près du lac de Gaube, dans une vieille souche de *Pinus uncinata* Ram. J'en recueillis quelques individus, avec l'insecte parfait récemment transformé, à une profondeur de un à quatre centimètres dans l'intérieur du bois. C'est de ce bois en voie de décomposition qu'elle se nourrit, ainsi que l'attestent les galeries sinueuses qu'elle y creuse et qui sont encombrées de détritus et d'excréments.

Elle a des rapports bien manifestes : 1° avec les larves connues des Mélandryades qui vivent les unes dans le bois, les autres dans les champignons subéreux, parasites des bois morts; 2° avec les larves des OEdémerides, qui sont xylophages et affectionnent généralement, comme elle, le bois à demi décomposé. Celles-ci n'ont pas, à la vérité, de crochets au dernier segment; mais ce caractère ne paraît pas avoir une grande importance, car, dans la famille même à laquelle appartient la *Dircœa*, on trouve des larves dépourvues de crochets. Je citerai notamment les *Melandrya* et l'*Orchesia micans*. Bien plus, la larve de l'*Hallomenus undatus* n'a pas de crochets, et on en voit de très-apparents dans celle de l'*H. humeralis*.

NYMPHE.

Elle ne m'est pas connue.

INSECTE PARFAIT.

Longueur 8 à 10 millim. Brun avec les élytres quelquefois un peutestacées, et entièrement revêtu d'un duvet couché et roussâtre. Tête subconvexe, finement chagrinée, avec une rainure transversale et arquée, très-peu visible, d'un œil à l'autre; bord de l'épistome et labre testacés; troisième article des palpes maxillaires brun; antennes brunes, plus ou moins testacées à la base; prothorax densément ponctué-chagriné, avec deux dépressions écartées et peu profondes à la base; élytres ponctuées comme le prothorax, ainsi que le dessous du corps; cuisses brunes, tibias et tarses testacés.

SPHINDUS GYLLENHALII Chevr. (NITIDULA DUBIA Gyll.)

Pl. V, Fig. 56-63.

LARVE.

Longueur 2 $^1/_2$ millim. Elliptique-oblongue, peu convexe en dessus, et moins encore en dessous, de consistance plutôt charnue que coriace.

Tête un peu déprimée, noire, luisante, presque en forme de disque; sutures du crane bien visibles et d'un blanchâtre livide. Epistome très-court, labre semi-discoïdal et cilié. Mandibules assez courtes, larges, arquées, et se joignant à peine; ferrugineuses à la base, puis noires jusqu'à l'extrémité qui est bidentée. Mâchoires assez fortes; lobe court, un peu large, arrondi, muni à son extrémité et à son bord interne de cils rapprochés et spinuliformes. Plapes maxillaires à peine arqués en dedans, de trois articles dont le second plus grand que chacun des deux autres. Menton brunâtre, subcorné; lèvre inférieure un peu échancrée; palpes labiaux de deux articles égaux, dépassant les lobes des mâchoires. Antennes de quatre articles: le premier court, large et un peu rétractile; le second sensiblement plus étroit et un peu plus long; le troisième légèrement ventru vers l'extrémité, deux fois aussi long que le précédent, et surmonté de deux ou trois poils fort courts; le quatrième court, subconique, terminé par un long poil. Tous ces organes sont d'un blanc un peu sale et livide. Au-dessous de chaque antenne se montrent six ocelles noirs en deux séries transversales dont la supérieure formée de trois ocelles également distants, et l'inférieure de trois aussi dont deux rapprochés et un écarté.

Prothorax sensiblement plus grand que les autres segments et plus large que la tête, plus étroit antérieurement qu'à la base; d'un noir luisant en dessus, avec une ligne médiane d'un blanchâtre livide, correspondant au vaisseau dorsal. Mésothorax et métathorax d'un blanchâtre livide, et marqués de deux taches transversales, presque contiguës, noires et éclairées de blanchâtre.

Chacun des segments thoraciques porte une paire de pattes livides, de médiocre longueur, ne faisant guère saillie au-delà du corps, formées de cinq pièces, l'ongle compris, et hérissées de quelques soies.

Abdomen de neuf segments : les huit premiers d'un blanchâtre livide, munis latéralement d'un petit bourrelet, et ornés de deux taches noires transversales, situées près du bord postérieur; le neuvième, le plus étroit de tous, faiblement échancré postérieurement, entièrement noir en dessus, et muni en dessous d'un court mamelon pseudopode, blanchâtre, charnu et rétractile, au centre duquel est l'anus.

Toute la face sternale et ventrale est d'un blanchâtre un peu sale et livide.

Sur la tête, le long des flancs et autour du dernier segment on voit à la loupe d'assez longs poils, d'un blanc roussâtre; on en aperçoit aussi au moins quatre séries longitudinales sur le dos et en dessous; mais ils sont un peu plus courts que les autres.

Stigmates au nombre de neuf paires, placées, la première près du bord postérieur du prothorax, les autres au quart antérieur des huit premiers segments abdominaux.

J'ai rencontré en septembre la larve du *Sphindus* en compagnie de celle du *Liodes castanea*, dans la *Reticularia hortensis* Bull. Elle est assez difficile à découvrir, à cause de sa petite taille et de la lenteur extrême de sa démarche, et parce que, recouverte par la poussière du champignon, elle se confond avec lui. On a quelque chance de la trouver en grattant le champignon sur une feuille de papier, que l'on retourne ensuite avec précaution; la poussière tombe et la larve demeure le plus souvent accrochée au papier. Lorsqu'on la tourmente elle se jette sur le flanc et se courbe un peu sur elle-même. Comme celle du *Liodes* elle s'enfonce dans la terre pour se transformer.

M. Chevrolat a publié dans la *Revue entomologique* de Silbermann (1833) la description du *Sphindus Gyllenhalii* qui n'est autre, ainsi que je l'ai mentionné plus haut, que la *Nitidula dubia* Gyll., et qui ne pouvait demeurer dans les Nitidulaires. M. Chevrolat a également connu la larve, et il en a donné, à la suite de l'insecte parfait, une figure incorrecte, parce qu'elle a été prise sur un individu desséché. Aussi se borne-t-il à la signaler ainsi qu'il suit : « La larve est composée de douze anneaux. Elle est grosse, blanche, » avec quelques points noirâtres, couverte de longs poils blancs, » très-minces et espacés. » Cette description est trop incomplète pour qu'on puisse considérer comme un double emploi celle que je viens de donner.

M. Chevrolat dit avoir trouvé, deux années de suite, le *Sphindus* et sa larve dans un champignon de la famille des Lycoperdiacées, la *Lycogala miniata* Pers. Je les ai rencontré, ainsi que je l'ai dit, dans une production de la même famille, la *Reticularia hortensis* dont les dimensions sont, à la vérité, beaucoup plus grandes que celles de la *Lycogala*, mais qui, comme elle, se développe sur le bois ou la sciure en décomposition, et, comme elle aussi, a une enveloppe extrêmement mince et une chair d'abord pulpeuse qui se transforme en une poussière brune très-fine. On doit voir là une preuve de plus de l'instinct merveilleux des insectes pour discerner les affinités et les analogies organiques des végétaux, et assurer ainsi leur reproduction en multipliant ou remplaçant au besoin les moyens d'alimentation de leurs larves.

M. Chevrolat a classé le genre *Sphindus* immédiatement après le genre *Tetratoma*, et peut-être uniquement à cause de la confiance qu'inspire et que mérite ce savant, presque tous les auteurs se sont conformés à sa manière de voir. M. Schaum pourtant s'en est écarté, et dans son *Catalogus Coleopterorum Europæ* (1852), il se déclare dans l'impossibilité d'assigner une place quelconque au *Sphindus*, et il l'introduit, en compagnie de quelques autres genres, dans la catégorie des *Incertæ sedis*.

J'avoue franchement que je serais tenté d'en faire autant pour la larve, et la prétention que je nourris toujours, de rencontrer généralement dans les larves des caractères comparatifs analogues à ceux des insectes parfaits, me fait trouver quelque charme à mon embarras, quisque M. Schaum s'est trouvé embarrassé aussi pour l'insecte parfait.

M. Dejean, M. de Castelnau et autres ont placé le genre *Tetratoma* dans les Taxicornes, avec les *Diaperis*, les *Uloma*, les *Phaleria*, et M. Schaum dans les Ténébrionites, avec les insectes cidessus et tous les Mélasomes ; or, je ne vois pas au *Sphindus* les caractères propres à ces familles, et sa larve diffère certainement beaucoup des leurs. Malheureusement, je ne connais pas celle du *Tetratoma;* mais j'ose affirmer que si ce genre doit demeurer parmi les Ténébrionites, sa larve ne ressemble pas à celle du *Sphindus*, ce qui justifierait, à mes yeux du moins, la répugnance que j'éprouve à colloquer ce dernier dans les Taxicornes ou les Ténébrionites.

A l'exemple de M. Redtenbacher, M. Gaubil, dans son Catalogue, a inscrit le *Sphindus* à la fin de la famille des Cryptophagiens, et à la suite des *Tetratoma* qu'il y introduit aussi. Je ne veux pas entrer ici dans une longue discussion qui ne serait guère à sa place; j'en laisse le soin aux savants qui s'occupent spécialement des questions de classification méthodique; mais je veux dire, ne fut-ce que pour appeler leur attention, que cette famille des Cryptophagiens me paraît formée d'éléments trop disparates, et qu'on a consulté, pour l'établir, plutôt l'ensemble trompeur des formes que les véritables caractères organiques. Il me semble aussi que le genre *Tetratoma* n'aurait pas dû y trouver place, et le *Sphindus* ne m'y plait pas infiniment non plus. Concluez donc me dira-t-on. Eh! bien, je n'ose pas conclure, parce que je ne sais pas assez ce que je dois faire de la larve. Je lui trouve des rapports avec celles des Lathridiens, des Dermestins, des Mycétophagides, de ces derniers surtout, et j'en dirai autant de l'insecte parfait.... Mais je m'arrête, car je me rappelle que M. Lacordaire s'occupe en ce moment d'un *Genera*. A qui puis-je mieux me fier pour résoudre une question qui est si bien de sa compétence, et qui ne sera qu'un jeu pour sa haute science?

NYMPHE.

J'ai élevé les larves du *Sphindus*; mais la crainte de les déranger lorsqu'elles étaient sous terre m'a fait perdre l'occasion de voir la nymphe. Je ne la connais donc pas, et M. Chevrolat parait avoir été dans le même cas.

INSECTE PARFAIT.

Longueur 2 millim. Tête noirâtre, à peine pointillée; antennes et bouche d'un testacé ferrugineux; prothorax de la couleur de la tête, un peu plus large que long, rebordé finement à la base, plus largement sur les côtés; finement et densément ponctué. Elytres de la largeur du prothorax; brunes, ordinairement avec une nuance ferrugineuse; à calus huméral saillant et ferrugineux; marquées de stries peu profondément crénelées, dont les intervalles sont presque imperceptiblement ridés en travers et couvertes d'un duvet couché et roussâtre. Dessous du corps noirâtre; pieds d'un testacé ferrugineux.

LAGRIA HIRTA L. ♀ — PUBESCENS L. ♂

Pl. V, Fig. 64-72.

LARVE.

Longueur de 9 à 11 millim., largeur un peu plus de 2. Subcoriace, convexe en dessus, presque plane en dessous, à côtés presque parallèles, avec le dernier segment se retrécissant d'avant en arrière; maculée de noirâtre sur un fond uniformément d'un fauve livide en dessus, blanchâtre en dessous.

Tête un peu plus large que longue, légèrement déprimée en dessus. Epistome trapézoïdal et d'un ferrugineux livide; labre de la même couleur, un peu échancré, et revêtu de longs poils fauves. Mandibules se joignant sans se croiser; noires à l'extrémité qui est peu profondément bidentée, ferrugineuses au milieu, d'un fauve clair et livide à la base; au tiers supérieur elles se dilatent en dedans en une grosse dent qui se prolonge jusque près de la base où a lieu une autre dilatation. Lobe des mâchoires de médiocre longueur, velu, et muni intérieurement de petites spinules coniques qui forment comme une dentelure en scie. Palpes maxillaires à peine saillants en avant de la tête, arqués en dedans et de trois articles : le premier très-court, les deux autres égaux entre eux et plus de deux fois aussi longs que le premier. Lèvre inférieure échancrée; palpes labiaux ne dépassant pas le lobe des mâchoires, de deux articles dont le premier un peu plus court que le second. Antennes assez longues, de quatre articles : le premier gros et à peu près cylindrique; le second de la même longueur, cylindrique aussi, mais sensiblement plus étroit; le troisième près de deux fois aussi long que les deux autres ensemble, légèrement arqué en dedans, et un peu en massue; le quatrième très-court, hémisphérique. Les deux articles intermédiaires sont hérissés de longs poils roussâtres. La couleur de tous ces organes est la même que celle du corps, sauf le premier article qui, étant rétractile, est d'un blanchâtre livide. Près de la base des antennes, du côté des joues, on voit quatre ocelles disposés en arc de cercle. Celui qui est le plus voisin des antennes est noir, ou simplement papillé de noir et un peu écarté des trois autres qui sont contigus, et dont les deux premiers sont noirs et le dernier d'un blanchâtre livide. Quelquefois tous ces ocelles sont uniformément noirs ou noirâtres.

Prothorax un peu plus étroit antérieurement qu'à la base, près de deux fois aussi grand que chacun des deux autres segments thoraciques, qui sont de la même dimension que les segments abdominaux. Dessus du prothorax marqué au milieu d'une tache longitudinale noirâtre, coupée en deux par une ligne blanchâtre formée par le vaisseau dorsal, que l'on voit par transparence; la tache noirâtre descend jusqu'au bord postérieur du segment, qui est liseré de brunâtre; on voit, de chaque côté, un gros point de la même couleur. Les deux autres segments thoraciques et les huit premiers segments abdominaux ont une tache dorsale noirâtre, qui va d'un bord à l'autre, et se dilate aux deux extrémités, surtout antérieurement. Le bord postérieur de ces segments est liseré de noirâtre, et sur chaque côté on voit une tache de même couleur qui va, en décrivant un arc, du bord antérieur à la base. Le dernier segment n'a qu'une tache basilaire en forme de triangle; il est conique, très-légèrement sillonné au milieu, et terminé par deux petites pointes rapprochées, droites, parallèles et acérées.

En dessous, le corps est d'un blanchâtre livide, avec quelques petites taches d'un brunâtre livide sur la poitrine, et une grande tache de même couleur de chaque côté des huit premiers segments abdominaux.

La tête, le prothorax et le dernier segment abdominal sont couverts de longs poils fauves; sur tous les autres segments ces poils n'existent qu'au milieu transversal, et ils apparaissent sur les côtés en forme de houppes. Ceux de la région ventrale sont beaucoup plus courts que ceux du dos.

Le long des flancs règne un bourrelet sur lequel sont placés les stigmates au nombre de neuf paires : la première se trouve près du bord antérieur du mésothorax, les autres au tiers antérieur des huit premiers segments abdominaux.

Les organes de locomotion consiste en un mamelon anal, fort peu extratile, et qui se trouve ordinairement caché dans un pli transversal sous le dernier segment, et en trois paires de pattes peu allongées, très-velues, les tibias surtout, et insérées sous les trois segments thoraciques. Elles sont variées de brunâtre et de blanchâtre livides et formées de cinq pièces, y compris un ongle peu crochu.

Lyonet (OEuvres posth. p. 112, pl. 11, fig. 17-31) a donné la description et la figure de la larve de la *Lagria hirta;* mais sa notice me paraît laisser quelque chose à désirer. Lyonet, en effet, ne fait mention, ni des stigmates, ni des ocelles, ni des deux pointes du dernier segment. D'après lui, les antennes ne seraient que de trois articles, car il considère l'article terminal comme un mamelon, et il affirme, bien à tort, que l'existence de ces organes dans les larves à métamorphoses complètes est chose très-rare, lorsqu'il est avéré, au contraire, que les larves des Coléoptères ont toutes des antennes. Je ne connais pas du moins, quant à moi, une seule exception.

Selon Lyonet, la larve de la *Lagria* se trouve tout l'hiver au pied des chênes, sous leurs feuilles mortes, et il en a obtenu la métamorphose en nymphe au commencement de juillet. Je l'ai rencontrée dans les mêmes conditions, mais c'est sur les copeaux d'un vieux chêne abattu en pleine sève que je l'ai recueillie pour la première fois, et c'est vers la fin de juin qu'eut lieu la transformation en nymphe.

La larve de la *Lagria hirta* se nourrit, suivant Lyonet, des feuilles mortes de chêne. Je ne suis pas précisément en mesure de contredire cette assertion par des faits positifs; mais je la considère comme contestable, sachant, d'après le témoignage très-digne de foi de M. Foudras, que la larve de l'*Agnathus decoratus*, insecte très-voisin des *Lagria*, vit, sous les écorces, de Bostriches et autres insectes. Je suis donc porté à penser que la larve dont il s'agit ici se repaît de matières animales, et que, si elle n'attaque pas des proies vivantes, elle recherche du moins les débris d'insectes et d'autres animaux, à l'exemple des larves de *Silpha* et de *Dermestes* avec lesquelles elle a d'assez grands rapports d'organisation. On serait tenté, en effet, de croire qu'elle appartient du moins à ce dernier genre. La forme de son corps, sa couleur, la disposition de ses poils, ses deux pointes terminales, la faculté qu'elle a de se rouler sur elle-même quand on l'inquiète, tout concourt à provoquer une méprise.

Les larves adultes, ou à peu près, que j'ai recueillies à la fin de mai, et que j'ai installées dans mon cabinet au milieu de feuilles sèches et de petits copeaux, se sont transformées, sans aucun préparatif, parmi ces débris.

NYMPHE.

Elle est blanche, hérissée de poils fins et roussâtres, et présente, emmaillotées comme à l'ordinaire, toutes les parties de l'insecte parfait. Ce qu'elle offre seulement de particulier ce sont des papilles charnues et tronquées, terminées par des poils, et au nombre de douze, une de chaque côté des six premiers segments abdominaux. D'après Lyonet, ces papilles seraient au nombre de seize; mais je n'ai pu en compter que douze. Le dernier segment est étroit, allongé et presque bifide à l'extrémité. L'état de nymphe dure de huit à douze jours.

INSECTE PARFAIT.

Longueur 8 à 10 millim. Tête d'un noir bronzé, hérissée, comme tout le corps, de longs poils roussâtres; marquée d'un sillon transversal entre les antennes, et sur le front d'une fossette quelquefois obsolète. Prothorax de la couleur de la tête; à peine aussi large qu'elle, ruguleusement ponctué; marqué au milieu d'un sillon large et irrégulier, tantôt peu profond, tantôt se réduisant à une simple fossette bien marquée. Elytres testacées, deux fois aussi larges à leur base que le prothorax, s'élargissant d'avant en arrière pour se rétrécir près de l'extrémité; densément et ruguleusement ponctuées, avec des apparences de stries dont certains intervalles, surtout celui qui part des épaules, sont souvent relevés en forme de côtes. Dessous du corps presque lisse, luisant et d'une couleur plus ou moins foncée, ainsi que les pattes. *Femelle.*

Le *mâle*, qui est la *L. pubescens* de Linné, diffère par les caractères suivants : corps visiblement plus étroit; tête concave entre les yeux qui sont plus grands, plus saillants et presque contigus; prothorax sensiblement plus étroit que la tête, un peu étranglé en dessous du milieu et sans sillon; élytres régulièrement striées; intervalles uniformément convexes.

LAGRIA LATA Fabr.

Pl. V, Fig. 73-78.

LARVE.

Un voyage que j'ai fait en Espagne avec mon illustre ami Léon Dufour m'a fourni l'occasion de connaître la larve de la plus belle espèce de ce genre, la *L. lata*, propre à la Péninsule. Nous étions à l'Escurial le 13 juin 1854, et vers le soir j'allai, avec mon ami M. Graells, à la recherche de cet insecte, au seul endroit où on le rencontre, c'est-à-dire contre les murs du jardin du fameux et magnifique couvent bâti par Philippe II. Nous le trouvâmes en si grand nombre, que si nous n'eussions été surpris par la nuit, nous en aurions pris probablement plusieurs milliers d'individus. Parmi ces insectes, blottis dans les petites anfractuosités du granit, et qui attendaient sans doute la nuit clôse pour prendre leurs ébats, nous trouvâmes plusieurs de leurs larves que la chûte du jour avait déterminées à quitter leur retraite. Je n'eus pas de peine à les reconnaître à leur ressemblance avec la larve de la *L. hirta* qui était bien présente à mon esprit. Quoique je n'aie pas poursuivi leurs métamorphoses, je n'hésite pas à maintenir mes premières appréciations qui sont basées sur les nombreux caractères communs aux deux espèces dont il s'agit, et sur cette circonstance que les larves que j'attribue à la *L. lata* erraient parmi les innombrables individus de l'insecte parfait.

Cette larve est longue de 14 millim., convexe en dessus, presque plane en dessous. Elle diffère de la précédente par les caractères suivants : la tête est d'un noir livide ; le troisième article des antennes est cylindrique et non renflé au milieu ; le premier article des palpes maxillaires est relativement plus grand ; il a les deux tiers de la longueur du suivant ; celui-ci est subglobuleux et non cylindrique. Les quatre ocelles sont de la couleur de la tête et décrivent une courbe plus arquée. Le corps ressemble plus à celui d'une larve de Dermeste, c'est-à-dire qu'il va en se rétrécissant régulièrement d'avant en arrière ; il est en dessous, comme dans la larve de la *L. hirta*, d'un blanchâtre livide, mais en dessus il est tantôt d'un noirâtre terne uniforme, tantôt varié de noirâtre et de fauve livide. Dans ce dernier cas, la couleur noirâtre forme une large tache longitudinale et médiane sur les trois segments thoraciques, et une sur chaque côté ; elle occupe toute la surface dorsale des huit premiers segments abdominaux, sauf deux portions latérales dont l'étendue diminue à mesure qu'on s'approche du neuvième segment. Celui-ci est généralement d'un fauve livide, avec une tache triangulaire noirâtre à la base ; il porte à son bord postérieur un tubercule noirâtre, corné et bifide qui remplace les deux pointes de la larve de la *L. hirta*. Les poils sont semblablement disposés, mais près de la base de chaque segment, sauf le premier, existe une très-fine crête transversale, en forme d'accolade. On n'aperçoit ces crêtes que quand la larve s'allonge, car dans l'état de repos et de contraction, elles sont cachées, sur chaque segment, par le bord postérieur du segment précédent qui vient s'y appuyer.

La larve de la *L. lata* doit être très-commune aux lieux où je l'ai trouvée, puisque l'insecte y est si abondant. Pour maintenir l'hypothèse que j'ai faite au sujet de la larve précédente, je dois penser qu'elle se nourrit des débris d'animaux, cloportes, escargots, chenilles, etc., dispersés ou accumulés entre les assises des pierres, à moins pourtant qu'elle ne vive des lichens dont ces pierres sont parsemées. Mon savant et perspicace ami M. Graells donnera avant longtemps, je l'espère, la solution de cette intéressante question que je n'aurais peut-être pas laissée indécise si j'avais pu faire quelques autres visites à l'Escurial.

NYMPHE.

Je ne l'ai pas observée.

INSECTE PARFAIT.

Longueur 9 à 12 millim. Beaucoup plus large que la *L. hirta*, et à élytres presque parallèles et non sensiblement élargies d'avant en arrière. Tête, prothorax, écusson, dessous du corps et pattes d'un noir très-luisant et lisses; un sillon entre les antennes qui sont d'un noir opaque. Prothorax à peine étranglé au-dessous du milieu. Elytres près de quatre fois aussi larges que le prothorax, sans apparence de stries, fortement et transversalement rugueuses. *Mâle* et *femelle*.

On a créé une famille exprès pour les *Lagria*, et la forme toute particulière de leurs larves me fait applaudir à cette mesure; mais je reste tout ébahi des différences énormes qui existent entre ces larves et celles des *Pyrochroa* dont la famille est contigüe. Il y a là une anomalie qui semble supposer une lacune, ou qui s'expliquera sans doute lorsqu'on connaîtra quelques larves d'Anthicites et de Méloïdes.

HISPA TESTACEA L.

Pl. V, Fig. 79-92.

LARVE.

Longueur 5 $^1/_2$ millim., largeur au thorax 2 millim., au milieu de l'abdomen 2 $^1/_2$. Corps très-aplati, presque spatulé d'avant en arrière, coriace et d'un blanc sale.

Tête luisante, petite, de moitié moins large que le bord antérieur du prothorax, à moitié enchassée dans ce dernier; plus large que longue; régulièrement arrondie sur les côtés, où se montrent trois ou quatre poils, aplatie, plane en dessus où elle est marquée d'un sillon médian bien sensible, de deux fossettes oblongues, et en outre de deux petits traits obliques qui, partant de la base des antennes, se réunissent au vertex. En dessous elle est un peu convexe. Sa consistance générale est cornée et sa couleur rousse avec les côtés plus foncés.

Epistome soudé au front, ce qui fait que le bord antérieur est un peu saillant au milieu; labre transversal, submenbraneux; mandibules rapprochées, courtes, un peu arquées, à peu près triangulaires, médiocrement acérées et nullement dentées. Les autres organes de la bouche d'une simplicité extrême : mâchoires d'une seule pièce, soudées dans toute leur longueur au menton qui est d'une seule pièce aussi. Ces organes sont représentés par trois plaques lisses, luisantes, cornées, qui revêtent la face inférieure de la tête et sont limitées par de profonds sillons. A la place des palpes maxillaires on aperçoit, surmontant chaque mâchoire, un organe corné, conique, marqué vers le milieu d'un petit étranglement annulaire qui semble le partager en deux articles, et muni d'un poil au côté externe. Le menton est surmonté d'une plaque en demi-ellipse longitudinale, cornée, avec la partie antérieure membraneuse, et qui représente la lèvre inférieure. Les palpes labiaux sont nuls; cependant il m'a semblé voir, à une très-forte loupe, un tout petit tubercule aux deux angles basilaires de la lèvre.

Les antennes, insérées près de la base des mandibules, sont bien visibles, quoique courtes, et de quatre articles : le premier assez épais, enchassé presque entièrement dans la cavité antennaire; le second et le troisième d'égale longueur, mais celui-ci un peu globuleux, et muni d'un poil extérieurement; le quatrième plus court que les précédents et très-grêle. Sur chaque joue on voit un groupe de quatre ocelles tantôt noirs, tantôt gris, dont deux sur une ligne très-oblique, et deux au-dessous, presque contigus. Un autre point semblable complète un triangle avec les deux ocelles supérieurs, et il est facile de le prendre pour un cinquième ocelle; mais avec un peu d'attention, on constate qu'il est toujours surmonté d'un poil, et qu'il n'est dès lors qu'un de ces tubercules piligères qu'on rencontre si fréquemment dans les larves.

Le prothorax est plus étroit antérieurement qu'à la base, près de deux fois et demi aussi large que long; marqué transversalement, un peu au-dessous du milieu, d'un sillon formé de trois arcs renversés. Dans l'enceinte de ce sillon la peau est finement chagrinée, légèrement cornée et marquée de deux larges taches triangulaires et adjacentes. Sur la face inférieure existe une tache noirâtre aussi large à la base que la tête, et triangulaire. Le mésothorax et le métathorax, égaux entre eux, sont visiblement plus courts que le prothorax, mais un peu plus larges que lui. Les côtés sont sinués et pourvus, comme le prothorax, de très-petits poils grisâtres. La face dorsale est marquée transversalement d'une rainure qui n'atteint pas, bien s'en faut, les côtés, et dont les bords s'élèvent en forme de petit bourrelet muni de tubercules peu saillants et contigus. Ces bourrelets, qui servent évidemment à favoriser la progression de la larve, ont la plus grande analogie avec ceux que présentent la plupart des larves de Muscides. En dessous, ces mêmes segments portent deux bourrelets circulaires, plus visiblement tuberculeux, et ayant la même destination que ceux du dos. Près du bord postérieur, sur la ligne médiane, on aperçoit un petit point noirâtre et calleux.

Chacun des trois segments thoraciques est muni d'une paire de pattes courtes, très-écartées à leur insertion, d'un noirâtre livide et de cinq pièces, savoir : la hanche, assez épaisse ; le trochanter, à peine visible; le fémur; le tibia, de moitié plus court que le précédent, cylindrique comme lui, avec deux poils de chaque côté, et à l'extrémité, deux longs poils roussâtres et un peu épais; le tarse, représenté par un ongle noir, corné, un peu arqué. A droite et à gauche de l'ongle on voit une papille membraneuse et arquée, semblable aux pelotes des tarses des Diptères.

L'abdomen est de huit segments, dont les quatre premiers vont en s'élargissant et les suivants en se rétrécissant, ce qui donne à la larve la forme un peu spatulée que j'ai signalée en commençant. Les six premiers segments ont en dessus un bourrelet analogue à ceux du thorax, mais de moitié plus court, et le septième, exempt de bourrelet, est marqué seulement d'un pli transversal. En dessous, le bourrelet pseudopode existe sur les sept premiers segments, mais il est un peu plus marqué qu'en dessus, un peu arqué et non interrompu aux extrémités. Chacun de ces segments est dilaté sur les côtés de manière à faire paraître les bords latéraux comme profondément dentés, et sur chaque lobe on observe un ou deux poils roussâtres très-courts et à la suite une papille cylindrique, dont l'extrémité brunâtre et un peu calleuse, est surmontée d'un petit poil. Le huitième segment, plus grand que les autres, a aussi des papilles latérales, mais elles sont coniques et un peu échancrées en dessus. La moitié postérieure et supérieure de ce segment est recouverte d'une plaque en parallélogramme transversal, cornée, rousse, sauf les bords antérieurs et latéraux qui sont noirs; marquée au milieu de deux petites fossettes écartées; bordée postérieurement de dix dentelures dont les deux plus externes fortes, triangulaires, pointues, un peu arquées en dehors et noires; les huit intermédiaires de la couleur de la plaque, obtuses, grêles, en dents de peigne et séparées en deux lots de quatre par un intervalle assez marqué. Toutes sont terminées par un petit poil roussâtre.

Tout le corps, tant en dessus qu'en dessous, est couvert de très-petites granulations brunâtres.

Les stigmates sont à péritrème noir, et au nombre de huit paires : la première fait saillie, sur une sorte de pédicule, entre le prothorax et le mésothorax; les sept autres, un peu plus petits, sont placés sur le milieu des sept premiers segments abdominaux, du côté du dos, assez près des bords latéraux.

J'ai découvert la larve de la ***Hispa testacea*** durant une excursion que j'ai faite, au commencement de juin 1853, dans les dunes du littoral du département des Landes, avec mes amis MM. Léon Dufour, Aubé et Laboulbène. Je ne savais rien sur les mœurs de ce genre d'insectes, car j'ignorais alors le mémoire publié par M. Harris et dont je parlerai tout à l'heure; mais j'avais appris que la ***H. testacea*** se trouvait abondamment, en juillet, sur le *Cistus salvifolius*, très-commun dans les dunes, et je supposais que cette plante servait de berceau à sa larve. A notre première chasse je me mis en devoir de vérifier le fait, et m'étant assis au pied d'une touffe de ciste, j'explorai inutilement d'abord ses racines, puis l'intérieur de ses tiges, après quoi je m'adressai aux feuilles. Aucune n'était rongée, et en les secouant je ne faisais pas tomber de larve. Je commençais à désespérer, lorsque regardant avec attention l'ensemble de l'arbrisseau, j'aperçus des feuilles dont le disque, plus ou moins largement desséché, et légèrement boursoufflé, annonçait la présence d'une de ces larves que Réaumur a nommées mineuses des feuilles, et qui se nourrissent de leur parenchyme sans attaquer l'épiderme. Je me hâtai de visiter l'intérieur de ces feuilles, et je trouvai dans les unes, des larves que, sans les connaître, j'attribuai à la ***Hispa***, et dans les autres des nymphes qui justifiaient complètement ma supposition. Ma joie fut à son comble, et mes compagnons, que je me hâtai d'appeler, s'y associèrent cordialement. J'ajoute, pour qu'il n'y ait pas le moindre doute, que les larves et les nymphes que j'apportai chez moi, m'ont donné de nombreux individus de la *H. testacea*.

Voici maintenant le résultat des observations que j'ai faites sur les lieux mêmes et complétées dans mon cabinet.

Les *H. testacea* s'accouplant au mois de juillet, les femelles pondent incontestablement leurs œufs bientôt après, et ces œufs, que je ne connais pas, hivernent très-certainement, collés sur diverses parties de la plante. Il est, en effet, évident pour moi qu'ils n'éclosent qu'au printemps, car les feuilles attaquées sont toujours, et sans exception, de celles qui poussent après l'hiver. Ainsi la larve, dès qu'elle est née, c'est-à-dire probablement dans le mois d'avril, se met en quête d'une feuille récente et assez tendre pour qu'elle puisse facilement pénétrer dans son intérieur. Une fois logée dans le parenchyme, elle le ronge en tout sens, sans blesser l'épiderme, et sans nuire à la forme et au développement de la feuille, et elle s'y pratique petit à petit une cellule qui occupe quelquefois les trois quarts de l'aire de la feuille, et dont les contours sont très-irréguliers. L'étendue de cette cellule est indiquée par une couleur feuille morte, tandis que le reste de la feuille conserve sa teinte normale.

Lorsque la larve a rongé à sa guise la feuille dans laquelle elle a trouvé à la fois le vivre et le couvert, elle l'abandonne en déchirant irrégulièrement l'épiderme supérieur, descend le long du pétiole et gagne celui de la feuille opposée. Elle s'installe sur cette feuille, la tête dirigée vers sa base, et se met à la miner en dessus, invariablement sur la nervure médiane. Peu à peu elle pénètre, comme la première fois, dans l'épaisseur du parenchyme, et finit par s'y loger, en suivant toujours la nervure médiane. Cette nouvelle cellule n'est pas, bien s'en faut, développée et irrégulière comme la première ; elle constitue au contraire une sorte de tube ou de fourreau dont la partie inférieure, celle qui avoisine le pétiole, se dilate souvent un peu et d'une manière peu régulière à droite et à gauche. Quant à l'extrémité supérieure du fourreau, elle demeure toujours béante. Je vis d'abord là une ingénieuse précaution de la larve pour faciliter la sortie de l'insecte parfait, mais ayant constaté que cet orifice correspond toujours à la partie postérieure de la larve et de la nymphe, car la larve ne se retourne pas dans sa cellule, et ayant observé plus tard que l'insecte parfait sort toujours en rongeant ou forçant l'extrémité opposée, je dus renoncer à ma première idée.

J'explique, du reste, d'une manière aussi simple qu'exacte, je crois, la particularité intéressante dont je viens de parler. Lorsque la larve naissante a pénétré dans la première feuille, la blessure qu'elle a faite à l'épiderme est si petite qu'elle se cicatrise sans peine; mais quand elle s'enfonce dans la seconde feuille, il ne peut en être ainsi. D'une part, la végétation de la feuille est terminée et son développement est complet ; d'autre part, la blessure est beaucoup plus large, et enfin, comme la larve met un certain temps à s'enfoncer, l'épiderme que son corps soulève a le temps de se dessécher avant qu'elle soit entièrement logée. Il se forme ainsi un tube déprimé et ouvert, correspondant au diamètre et à la convexité du corps.

Comme je l'ai dit, la larve de la *Hispa* envahit toujours deux feuilles, jamais plus, jamais moins, et ce qu'il y a de remarquable, c'est qu'elle attaque toujours aussi deux feuilles opposées. Pourquoi agit-elle ainsi, lorsque la première feuille, quelquefois rongée à moitié seulement, semble pouvoir lui offrir jusqu'à la fin une alimentation suffisante? A-t-elle besoin, pour compléter sa croissance et son organisation, de la substance mieux élaborée et plus nourrissante peut-être que lui offre la nervure médiane? Craint-elle d'être plus ballotée et plus exposée dans une cellule qui, occupant presque toute l'étendue de la feuille, ne présenterait aucune garantie de repos et de sécurité? Toutes ces hypothèses sont peut-être vraies à la fois. En tout cas, on ne peut s'empêcher de reconnaitre que ses manœuvres sont aussi intelligentes que dignes d'intérêt.

Je ferai remarquer aussi combien l'organisation et la structure de cette larve sont favorables au rôle qu'elle joue. Ses mandibules fines et acérées et sa tête aplatie et à bords presque tranchants lui facilitent admirablement les moyens d'entamer et de soulever l'épiderme et de ronger le parenchyme; la dépression de son corps lui permet de ramper entre les deux épidermes; les bourrelets, les mamelons, les papilles, les granulations, les dentelures dont elle est munie la font se mouvoir avec aisance dans sa cellule, tant en avant qu'en arrière. Elle est assez mal constituée, il est vrai, pour marcher à l'air libre, et elle y est obligée cependant pour passer d'une feuille à une autre sur des pétioles flexibles d'où le moindre zéphir semble devoir la précipiter ; mais elle a reçu dans ce but un pseudopode anal charnu, et ses tibias ont été pourvus de deux pelottes ou ampoules membraneuses, auxillaires puissants des soies et de l'ongle qui terminent ses pattes. Avec ces appareils, notre acrobate improvisée se livre hardiment aux hazards d'un déplacement qui semble devoir lui être fatal; elle sort de sa cellule, accroche ses pattes au tissu de la feuille, puis courbant un peu en voûte son abdomen, elle se cramponne à l'aide d'un mamelon anal, s'allonge pour se cramponner de nouveau, et poursuit ainsi sa marche lente mais sûre, jusqu'à ce qu'elle ait atteint son but. Que de sujets d'admiration dans ce petit animal, alternativement errant et cloîtré! Mais aussi, qui mieux que la sage et toute puissante nature sait appliquer ce principe : qui veut la fin veut les moyens!

Mr T. W. Harris a publié dans le Journal d'Histoire naturelle de Boston, 1, 1835, p. 141-151, une notice détaillée et intéressante sur les métamorphoses de plusieurs *Hispa* : *H. rosea* Weber, *H. suturalis* Fab. et *H. vittata* Fab. Leurs larves sont toutes aussi des mineuses de feuilles, et elles vivent, les premières sur une espèce de chêne, les secondes sur le *Robinia pseudo-acacia*, les dernières sur la *Solidago lævigata*. Une autre larve, dont M. Harris a perdu l'insecte parfait, se nourrit des feuilles d'un pommier.

M. Harris ne donne malheureusement ni la description ni la figure des principaux organes de ces larves; il dit seulement que leur corps est aplati, leurs mandibules entières, et que les segments abdominaux, dilatés sur les côtés de manière à former des dentelures plus ou moins profondes, ont, en dessus et en dessous, des bourrelets tuberculeux qui servent à la progression. Il leur donne onze segments, et il compte neuf paires de stigmates, dont la dernière se trouverait près de l'extrémité du dernier segment.

Les larves de Coléoptères ont généralement douze segments, sans parler de la tête, et je ne connais de différence en moins que pour les larves aquatiques d'un très-petit nombre de genres : *Dytiscus*, *Hydrophilus*, *Helochares*, *Donacia*, et pour les larves terrestres des *Cassida*. C'est ce qui m'a fait hésiter quelque temps à admettre le chiffre de onze, et je me sentais d'autant plus porté à considérer, comme le douzième segment, la plaque cornée terminale, qu'elle est, en dessus du moins, séparée du onzième par une suture transversale; mais j'ai vainement cherché sur les côtés et en dessous des traces d'une séparation quelconque, et j'ai été forcément conduit à admettre que la portion revêtue de la plaque fait partie intégrante de ce segment. C'est là un fait d'organisation très-peu commun; mais d'accord avec les indications données par M. Harris, et les dessins, imparfaits il est vrai, qui accompagnent sa notice, il permet d'affirmer que les larves qu'il a étudiées ont les plus grands rapports avec celle de la *H. testacea*. C'est précisément parce que je crois à l'unité de conformation de ces larves que je reprocherai à M. Harris une erreur grave qui me fait supposer qu'il n'avait pas une longue habitude d'observer des larves de Coléoptères.

M. Harris signale, ainsi que je l'ai dit, neuf paires de stigmates, et il place la dernière, qui serait la plus apparente de toutes, près de l'extrémité de la plaque cornée dont je viens de parler. Je n'ai vu, quant à moi, que huit paires de stigmates, et ces orifices respiratoires sont assez apparents, par suite de leur saillie et de leur couleur, pour qu'il soit facile de les compter. Je le déclare, d'ailleurs, je n'ai accepté ce nombre de huit paires qu'après un minutieux examen; je m'y livrai avec d'autant plus de soin et d'opiniatreté, que ces sortes d'anomalies sont extrêmement rares, car de toutes les larves de Coléoptères que je connais, il n'en est pas une, à part celles des *Cassida,* qui ne possède neuf paires d'ostioles respiratoires. Je m'étais donc irrévocablement arrêté au nombre huit, lorsque j'eus connaissance, grâce à l'obligeance de M. Candèze, du Mémoire de M. Harris. Cet auteur remplaça ma première surprise par une autre, en substituant une anomalie à celle dont je me croyais sûr, car il place une paire de stigmates sur le dernier segment. Or il avait toujours été pour moi de principe que, dans les larves terrestres de Coléoptères, le dernier segment n'a jamais de stigmates. Je ne pouvais donc, quelque confiance que m'inspirât M. Harris, accepter sans contrôle son assertion. J'eus recours à mes verres les plus amplifiants, j'explorai le dernier segment sous toutes ses faces, à tous les jours: je soumis à ce scrupuleux examen un grand nombre de larves, et je demeurai convaincu que M. Harris a dû prendre pour des stigmates les deux fossettes que l'on remarque sur la plaque cornée du segment terminal, et qui sont sans doute plus marquées et plus profondes dans les larves de plus grande taille qu'il a observées. Ainsi, le dernier segment n'a pas de stigmates, ce qui confirme de plus fort le principe que j'ai rappelé tout à l'heure, car le fait anormal de la réduction du nombre des stigmates à huit paires est la conséquence de cet autre fait, anormal aussi, de la réduction du nómbre des segments à onze.

MM. Kirby et Spence ont cherché à ramener à un certain nombre de types les larves connues des Coléoptères, mais, arrivés aux larves des *Cassida* dont l'organisation présente des caractères si insolites, ils se sont trouvés embarrassés. Ils ont donc laissé cette forme spéciale de larves sans dénomination précise, et ils expriment l'opinion que les larves de *Hispa*, lorsqu'elles seront connues, pourront jeter quelque lumière sur cette question (*Intr. to Entom.* III, p. 166). M. Harris est loin de penser que cette prévision se soit trouvée justifiée, et il affirme que les larves des *Hispa* n'ont pas la moindre analogie avec celles des *Cassida*, et qu'on devrait plutôt les assimiler, par leur forme, à celles du genre *Callidium*. M. Harris est, sur ces deux points, dans la plus profonde erreur, car les larves des *Hispa* n'ont aucun rapport avec celles d'un Longicorne quelconque et elles en ont, au contraire, beaucoup avec celles des *Cassida*. Voici, en effet, les traits de ressemblance de ces dernières : épistome soudé au front; mandibules très-petites et simples; pattes très-courtes; corps de onze segments, à côtés profondément dentelés; stigmates à péritrème noir, au nombre de huit paires, les thoraciques un peu pédicellés, les abdominaux placés sur la face dorsale, près des côtés; dernier segment divisé, en apparence, en deux parties. Ces derniers caractères surtout sont très-remarquables, et je ne comprends pas que M. Harris en ait si peu tenu compte. Loin de les méconnaître comme lui, je les mets, au contraire, en relief, parce que j'y trouve une nouvelle confirmation de ce principe général, mais non absolu, que je cherche toujours à prouver, que les larves ont entre elles des affinités analogues à celles des insectes parfaits correspondants; principe fécond au point de vue philosophique, et destiné, j'en ai la conviction intime, à répandre de vives lumières sur les questions de classification méthodique.

De Géer (tome 5 de ses Mémoires, p. 404, pl. 12, fig 13-20) donne la figure et la description de deux larves mineuses de l'aulne et de l'orme dont il n'a pu obtenir la métamorphose, et M. Harris est disposé à penser qu'elles appartiennent au genre *Hispa*. Je ne partage pas, bien s'en faut, cette manière de voir. Les larves de De Géer ont la tête semblable à celle des chenilles; elles sont cylindriques, divisées en douze segments bien marqués, avec des plis et des rides le long des flancs; elles ont des palpes maxillaires et labiaux articulés, et de plus, une pièce intermédiaire qui a paru à De Géer être une filière. Les six pattes rappellent les pattes écailleuses des chenilles, et les segments abdominaux sont munis en dessous de pseudopodes charnus. Enfin, ces larves quittent les feuilles et s'enfoncent dans la terre pour se transformer.

Elles diffèrent donc, sous tous les rapports, de celles des *Hispa*, et n'ont de commun avec elles que leur caractère de mineuses de feuilles, qui est propre à tant d'autres. Elles ne peuvent, dès lors, être rapportées à ce genre.

Ainsi que je l'ai fait pressentir plus haut, c'est dans sa seconde cellule que la larve se transforme en nymphe.

NYMPHE.

Longueur 5 $^1/_2$ millim. Elle est nue, d'abord blanche et bientôt un peu roussâtre et subcoriace. Vue en dessous, elle présente une physionomie assez originale, et que la figure rend beaucoup mieux que ne pourrait le faire une description. Ses organes sont emmaillotés comme à l'ordinaire, et elle offre les particularités suivantes : l'abdomen est à l'extrémité un peu plié en dessous; il est de huit segments ; le second et les trois suivants portent de chaque côté une papille piligère comme celles de la larve; les trois derniers ont aussi cette papille, puis une semblable et plus longue, et enfin, tout à fait à l'angle postérieur, une troisième pliée en équerre. Le dernier segment, qui est plus foncé que les autres et subcorné, est en outre terminé par deux plaques cornées, rousses et quadridentées; les deux dents externes de chaque plaque sont surmontées de deux petits poils, les autres d'un seul. Près du bord postérieur de l'arceau ventral des quatre antépénultièmes segments on remarque une série de petits plis transversaux, et sur la face dorsale le second segment et les trois suivants, c'est-à-dire ceux qui n'ont qu'une petite papille de chaque côté, ont un double rang transversal de tubercules, représentant, d'une manière un peu exagérée, les bourrelets pseudopodes de la larve. Les trois derniers segments ont aussi des tubercules, mais beaucoup plus petits, et le dernier est en outre parsemé de quelques rides. On voit, du côté du dos, une paire de stigmates noirs sur chacun des cinq premiers segments; ceux du cinquième sont placés aux angles et portés sur un pédicelle conique dirigé en arrière.

Cette nymphe est susceptible de se déplacer, et elle rampe, soit de ventre, soit de dos, même sur un corps lisse.

L'insecte parfait sort par l'ouverture qui se fait, comme à l'ordinaire, sur la ligne médiane du prothorax, et la peau sèche et coriace de la nymphe demeure ballonnée comme si l'insecte y était toujours. La *Hispa* perce ensuite sa cellule à l'extrémité opposée à l'orifice béant, et prend son essor.

INSECTE PARFAIT.

Longueur 4 $^1/_2$ millim. Entièrement d'un testacé rougeâtre, avec les yeux noirs et la moitié basilaire des antennes un peu brunâtre. Prothorax rugueusement chagriné, ayant de chaque côté un tubercule surmonté de cinq longues épines divergentes, subulées, noires, à base rougeâtre. Elytres striées, à granulations carminées, hérissées d'épines noires; un peu de noir sur les côtés du sternum.

Quand la *H. testacea* vient d'éclore, elle est d'un jaune très-clair, avec les antennes et les yeux noirs et une tache rousse sur le vertex. On voit sur le prothorax une grande tache trapézoïdale, d'abord ferrugineuse, bientôt après noire, antérieurement envahie par du ferrugineux. Les pattes sont roussâtres, avec les tarses bruns.

GRYPHINUS PICEUS Comolli.

Pl. V, Fig. 93-100.

LARVE.

Longueur près de 2 millim. Elliptique, déprimée, charnue; d'un blanc un peu grisâtre en dessus, plus pâle et livide en dessous.

Tête plus étroite que le prothorax, deux fois et demie plus étroite que celui-ci à sa base; suborbiculaire, presque plane en dessus, très-peu convexe en dessous, en partie enchassée dans le prothorax; d'un roussâtre livide; marquée de deux petits sillons longitudinaux, et munie antérieurement et sur les côtés de quelques poils très-fins. Epistome transversal, linéaire; labre très-petit, en demi-ellipse transversale; mandibules de médiocre longueur, étroites, arquées, acérées et nullement dentées. Mâchoires et menton grands, d'une seule pièce, soudés ensemble, séparés seulement par un sillon profond et occupant plus de la moitié de la face inférieure de la tête. Mâchoires ovoïdes et sans lobe visible; palpes maxillaires bien apparents, un peu saillants au delà de la tête et de trois articles: le premier très-court, le second un peu plus long, le troisième aussi long que les deux autres ensemble et grêle. Lèvre inférieure courte, transversale, imperceptiblement échancrée; palpes labiaux petits, de deux articles et dépassant un peu le second article des palpes maxillaires. Tous ces organes roussâtres. Antennes insérées non au bord antérieur de la tête, mais sur les côtés, au-dessous du tiers antérieur; assez longues et de quatre articles: le basilaire court et épais ; le second un petit peu plus long ; le troisième de la longueur des deux premiers, ou peu s'en faut, et muni de trois ou quatre petits poils près de l'extrémité ; le quatrième grêle et le plus long de tous, surmonté d'un poil assez long et de deux ou trois autres plus petits. Au-dessous de chaque antenne, et contre sa base, un ocelle rond.

Prothorax près de deux fois aussi long que la tête, beaucoup plus étroit antérieurement qu'à sa base, profondément bisinué sur les côtés, marqué sur le dos d'une grande tache brune triangulaire, qui atteint presque le bord postérieur, et qui est coupée en deux, sur la ligne médiane, par une ligne blanchâtre; ayant en outre, près du bord postérieur, un pli transversal peu apparent. Mésothorax et métathorax sensiblement plus courts que le précédent, égaux entre eux en longueur; ce dernier un peu plus large; l'un et l'autre marqués sur le milieu d'un pli transversal presque obsolète.

Chacun de ces segments portant une paire de pattes courtes, écartées à leur insertion, subconiques, livides et de cinq pièces : la hanche, assez épaisse; le trochanter très-petit ; la cuisse forte, cylindrique; le tibia aussi long que les précédents ensemble, conique et muni de quelques poils; tarse représenté par un ongle long, subulé, et dont la base, dilatée en dessous, porte une soie roussâtre, horizontale, dépassant l'ongle et terminée en spatule.

Abdomen de neuf segments égaux en longueur, ou à peu près : les quatre premiers de plus en plus larges, les cinq derniers de plus en plus étroits; tous, sauf le dernier, très-convexes sur les côtés, comme ceux du thorax, à intersections profondes et marqués en dessus d'un pli transversal destiné à faciliter le jeu péristaltique de ces segments. Le long des flancs règne un bourrelet très-sensible, propre aussi à seconder la progression. Dernier segment semidiscoïdal, plane en dessus où il est recouvert d'une plaque subcornée et rousse ; pourvu en dessous d'un mamelon un peu extractile, au centre duquel est l'anus.

Tout le corps, en dessus et sur les côtés, est couvert de petites soies roussâtres, épaisses, papilliformes, tronquées, la plupart cylindriques, les autres légèrement en cone renversé. Ces soies sont moins longues sur le dos que sur les côtés, où l'on voit en outre un long poil. Le nombre de ces poils est de quatre sur le prothorax, de deux sur chacun des dix segments suivants, et de huit autour du dernier. Tout le dessous du corps est revêtu, à la place de soies, de poils très-fins, serrés et d'inégales longueurs.

Stigmates au nombre de neuf paires : la première au tiers antérieur du mésothorax, les autres au milieu des huit premiers segments abdominaux. Tous ces stigmates sont un peu dorsaux, mais la première paire moins que les autres.

Cette larve a des rapports avec celle de l'*Orthoperus piceus* Steph. que j'ai publiée dans les Annales de la Société entomologique de France (1852, p. 587.) Elle en diffère, sans doute, par plusieurs caractères importants, et notamment par les mâchoires, les palpes maxillaires et les antennes ; mais l'insertion presque anormale de celles-ci sur les côtés de la tête, les mandibules étroites, acérées et non dentées, la forme du corps, la tache brune du prothorax et les soies papilliformes établissent des rapprochements qui me satisfont d'autant plus que je crois les deux insectes parfaits très-voisins l'un de l'autre. C'est l'opinion que j'ai exprimée dans ma notice précitée, contrairement à la manière de voir de M. Blanchard, qui a, mal à propos, selon moi, placé les *Orthoperus* dans la famille des Agathidiides. Cette opinion, je le constate avec une sorte de vanité, se trouve aujourd'hui fortifiée et justifiée par les caractères relatifs des larves de ces deux genres. Elle l'est aussi par celle d'Erichson, formulée dans sa Faune des insectes de l'Allemagne, et que M. Schaum a suivie dans son catalogue.

M. Heeger a publié dans l'Isis (1848, p. 325), sur les métamorphoses du *Gryphinus lateralis* Marsh., une notice dont mon ami Lucas a eu l'obligeance de m'envoyer une copie, avec le calque des figures. Les larves s'étant un peu déformées dans l'alcool, l'auteur n'a pu décrire les parties de la bouche et les antennes ; il a omis en outre de mentionner des organes importants, tels que les pattes et les stigmates, et n'a pas donné à son dessin toute la perfection désirable. Il est facile néanmoins de voir que la larve signalée et figurée par M. Heeger se rapproche beaucoup de celle dont je viens de parler. Elle lui ressemble, en effet, par sa forme ; elle a comme elle le corps couvert de petites soies papilliformes ; mais je ne puis établir la comparaison entre les caractères les plus essentiels, parce que M. Heeger a été empêché de les voir et de les décrire. Je remarque seulement que, dans sa larve, le prothorax a quatre taches noirâtres au lieu de deux que présente la mienne, et je ne vois pas dans celle-ci les plaques cornées, triangulaires, se fondant graduellement dans la peau, qu'il a observées dans la larve du *G. lateralis*.

M. Heeger dit que, dans son jardin, ces insectes aiment à se tenir, en nombre considérable, sous les feuilles de choux pourries, pendant les mois d'été, et dans tous les états de leur vie. Il ajoute que l'insecte parfait et la larve passent l'hiver dans des terreaux humides et des fumiers froids, et se nourrissent de matières végétales en décomposition.

Je ne suis pas en position de contredire ou de confirmer cette dernière assertion. Je dois dire seulement que j'ai rencontré, en septembre 1853, les larves du *G. piceus*, avec des nymphes et des insectes parfaits, sous l'écorce d'une buche d'aulne où se trouvaient des détritus et des matières excrémentitielles laissés par des larves xylophages, et où vivaient aussi de petites Podurelles. J'ai en outre très-souvent recueilli l'insecte parfait en secouant des lierres qui tapissaient des murs et y avaient formé une petite couche de terreau. Je ne doute pas que ce terreau ne renfermât des larves; mais ces larves se nourrissent-elles de cette substance? Celles de la buche d'aulne vivaient-elles des substances accumulées sous l'écorce? Recherchent-elles exclusivement ce genre de nourriture? Ne sont-elles pas plutôt, ou du moins simultanément carnivores, ainsi que l'indiqueraient, jusqu'à un certain point, leurs mandibules étroites et acérées? Mes observations ne me permettent pas de résoudre ces questions; je les recommande donc à ceux qui s'occupent d'études de ce genre.

Lorsque la larve du *G. piceus* veut se transformer en nymphe, elle se fixe, à l'exemple de tant d'autres, sur le plan de position, à l'aide du mamelon anal, après quoi sa peau se fend et laisse voir la nymphe dont l'extrémité postérieure demeure engagée dans cette dépouille, chiffonnée et refoulée en arrière.

NYMPHE.

D'abord blanche, puis roussâtre. Ses diverses parties sont très-étroitement emmaillotées et peu saillantes. Le bord du prothorax, les côtés et la face dorsale sont couverts de poils fins et très-serrés, d'inégales longueurs. L'extrémité de l'abdomen est entière et presque glabre.

M. Heeger ne signale et ne figure, dans la nymphe du *G. lateralis*, que les poils des bords du prothorax, et d'après lui, ces poils sont terminés par un petit bouton. Il mentionne aussi deux petits appendices courts et arrondis à l'extrémité de l'abdomen. Je ne les ai pas plus aperçus dans la mienne que dans celle de l'*Orthoperus*.

INSECTE PARFAIT.

Longueur 1 millim. Elliptique, subconvexe. Tête d'un brun testacé, ou même testacée. Prothorax noir ou noirâtre, arrondi, à bords un peu relevés; assez largement jaunâtre sur le devant, très-finement sur les côtés; revêtu d'un duvet très-fin, roussâtre et couché. Elytres de la couleur du prothorax et à duvet roussâtre comme lui; aussi larges que ce dernier; très-faiblement arrondies sur les côtés; presque droites à l'extrémité. Dessous du corps brun; pieds bruns et quelquefois testacés.

CECIDOMYIA ENTOMOPHILA Mihi.

Pl. V, Fig. 101-106.

En ouvrant mes boites d'insectes il m'était arrivé fort souvent de voir voler avec agilité, à travers la forêt d'épingles fixées sur le liège, un Diptère presque microscopique dont la présence en ces lieux m'avait surpris plus d'une fois, ainsi que mon ami M. L. Dufour chez qui nous avons observé ensemble le même fait. Rien n'indiquait dans les allures de ce petit insecte qu'il eût été enfermé malgré lui, car quoique sa prison fût grande ouverte, il ne manifestait aucun empressement à la quitter; il continuait, au contraire, à voler, ainsi que je l'ai dit, au milieu des épingles, ou voltigeait au-dessus, pour s'abaisser ensuite et se poser sur le fond de la boite, ou sur quelqu'un des insectes piqués. M'étant emparé, quoique avec peine, de plusieurs de ces petits Diptères, j'avais reconnu en eux les deux sexes d'une espèce de Cécidomyie qu'après étude je considérais comme nouvelle; mais j'avoue que si ma découverte se fût bornée là, je l'aurais gardée pour moi seul, ne jugeant pas fort utile de doter la science d'une Cécidomyie de plus, sans pouvoir rien dire de ses mœurs. Le hasard m'ayant mis à même de connaître son histoire, qui n'est pas bien longue, je me décide à la publier.

Tous les entomologistes savent qu'un maudit *Acarus* s'introduit et pullule souvent dans les collections, où il ronge les poils, le duvet des insectes et même leurs tendons. Comme j'observais, un jour de novembre, à la loupe, un *Onthophagus* sur lequel ce détestable Aptère avait déposé des excréments et laissé des dépouilles, je vis ramper au milieu de ces impuretés trois larves blanches qui, soumises au microscope, offrirent à mes yeux tous les caractères des larves de Cécidomyie. Il ne m'en fallut pas d'avantage pour expliquer la présence dans mes boîtes du Diptère dont j'ai parlé plus haut.

Je savais depuis longtemps que les larves des Cécidomyies (Mouches des galles), en dépit du nom que la science leur a donné, ne se développent pas toujours dans des galles, car j'en ai trouvé bien souvent sous les écorces des arbres et dans les tiges creuses de plusieurs plantes mortes ou sur le déclin : mais pourtant je fus très-surpris d'en rencontrer dans les conditions que je viens d'indiquer, et l'on conviendra que je ne devais guère m'y attendre. Je me mis aussitôt à explorer mes boîtes et à chercher d'autres insectes sur lesquels les *Acarus* eussent laissé des traces, et j'observai sur quelques-uns des larves semblables. Je plaçai ces insectes, ainsi que l'*Onthophagus*, dans une petite boîte, et aux mois de mai et de juin, j'obtins plusieurs Cécidomyies. Les relations de la larve et du Diptère ainsi démontrées, je passe aux descriptions.

LARVE.

Longueur 1 $^1/_2$ millim., largeur $^1/_3$ millim. Très-atténuée antérieurement, molle, d'un blanc un peu translucide et légèrement rosé.

Tête petite, subtriangulaire, munie de chaque côté d'une antenne grêle, de deux articles, dont le second beaucoup plus long que le premier. Corps de douze segments ; le premier glabre, de la largeur de la tête antérieurement, près de deux fois aussi large à la base, à côtés droits ; les dix segments suivants à côtés arrondis, ou bisinueux, ayant en dessus une série transversale de douze longs poils blanchâtres, dont huit dorsaux et quatre latéraux (deux de chaque côté), ces derniers un peu plus longs que les autres ; tous ces poils portés sur un petit mamelon. Ces mêmes segments sont armés, sur le milieu de la face ventrale, de trois pointes assez longues, rapprochées, fines, acérées et subcornées, qui servent évidemment à la larve pour marcher et pour s'accrocher aux corps sur lesquels elle vit. Dernier segment arrondi postérieurement, avec la série de poils et les pointes des segments précédents, plus deux poils au milieu de la face postérieure. Les poils latéraux, au lieu d'être étalés, sont inclinés en arrière.

Stigmates au nombre de neuf paires : la première sur le premier segment ; les sept autres sur le quatrième et les six suivants, assez près du bord antérieur ; la dernière près du bord postérieur du onzième segment.

Cette larve vit sans doute des excréments laissés sur les insectes par l'*Acarus*, car je ne l'ai trouvée que sur ceux qui offrent ces sortes de déjections. Ce goût de leur part n'a précisément rien qui m'étonne, car je connais des larves de Cécidomyies qui se développent, ainsi que je l'ai déjà dit, sous les écorces, parmi les excréments de larves xylophages qui les ont précédées, et d'autres qui vivent dans les ulcères, dans les écoulements sanieux ou séveux des arbres.

Lorsqu'elle veut se transformer, elle se retire dans un angle de la boîte, et y file une coque elliptique de soie très-blanche dans laquelle elle se métamorphose en nymphe.

NYMPHE.

Comme celles des Tipulaires en général, elle constitue une véritable nymphe et non une pupe. Elle présente, très-étroitement emmaillotées, comme à l'ordinaire, les diverses parties qui constituent l'insecte parfait. Du reste, elle n'offre rien de particulier : elle est sans poils et sans épines. Le vertex est un peu élevé, et c'est avec cette partie qu'elle perfore la coque un peu avant la dernière métamorphose. L'insecte parfait sort par cette ouverture, y laissant ordinairement engagée la dépouille de la nymphe.

INSECTE PARFAIT.

Longueur 1 $^1/_4$ millim. Yeux noirs ; thorax d'un cendré clair, avec les côtés mêlés de blanchâtre ; écusson blanc ; métathorax noir ; abdomen couleur de chair, à poils blancs ; antennes, balanciers et pattes d'un gris blanchâtre ; tarses plus clairs, à poils blancs ; seconde nervure des ailes arrondie au coude ; antennes de la femelle de quatorze articles, le premier demi-elliptique, le dernier très-grêle, les autres formés d'un pédicelle et d'une partie plus épaisse, étranglée au milieu et munie de deux verticelles de poils ; le pédicelle manque au premier ; antennes du mâle de vingt-quatre articles, dont les trois premiers globuleux et contigus, les autres globuleux, longuement pédicellés et entourés d'un verticille de longs poils.

PLATYSTOMA UMBRARUM.

Pl. V, Fig. 107-111.

LARVE.

Longueur 16 millim., largeur 2 millim. Corps blanc, glabre; assez ferme, atténué antérieurement, augmentant progressivement de diamètre jusque vers la moitié de sa longueur, puis exactement cylindrique jusqu'à l'extrémité.

Tête rétractile, assez profondément échancrée en avant, de manière à former deux lobes terminés chacun par un palpe court et de deux articles égaux. Mandibules en crochet, ne dépassant pas les lobes.

Corps de onze segments parfaitement lisses en dessus; les neuf derniers ayant en dessous, et antérieurement, un bourrelet transversal qui empiète un peu sur le segment précédent et qui est muni de petites aspérités roussâtres disposées en séries transversales un peu arquées. (Voir la figure). Dernier segment légèrement arrondi sur les côtés, un peu plus étroit à l'extrémité qu'à la base; sa face postérieure tronquée carrément, un peu concave, et montrant dans cette concavité deux petits disques un peu saillants, noirs et rapprochés. Ce sont les stigmates postérieurs qui, vus à une forte loupe, se montrent percés de trois ostioles respiratoires en forme de boutonnière. Les deux stigmates antérieurs font saillie de chaque côté, près du bord antérieur du premier segment, sous la forme d'une raquette divisée en douze lobes papilliformes.

La description qui précède et les figures à l'appui attestent que cette larve présente la configuration et les caractères de celles de la grande famille des Muscides, qui semblent presque toutes avoir été taillées sur le même patron.

M. Macquart a placé le genre *Platystoma* dans la famille des Ortalidées dont les larves vivent, en général, dans les fruits et les graines des arbres et des plantes. La *Platystoma umbrarum* constitue, à cet égard, une exception bien tranchée, car c'est en creusant un peu la terre sous une pièce de bois qui gisait depuis longtemps sur le sol, que j'ai trouvé abondamment sa larve en avril 1853. Elle vit sans doute de l'humus, comme les larves des *Asilus*, des *Thereva*, de quelques *Tabanus* et de bien d'autres Diptères. Cette particularité, jointe aux caractères organiques propres aux *Platystoma*, me porte à penser que ce genre ne sera pas maintenu dans les Ortalidées, et qu'il servira plutôt à former une famille spéciale.

La métamorphose s'effectue dans la terre à une faible profondeur.

PUPE.

Ce n'est, comme on le sait, que la larve elle-même, contractée, et dont la peau s'est durcie, est devenue cornée et de couleur marron. Elle ne peut donc rien offrir de particulier. Quelques jours après la transformation, on trouve dans l'intérieur de la coque formée par la peau, une nymphe blanche et très-molle, présentant toutes les parties de l'insecte parfait, et pourvue sur le vertex de cette sorte de vessie dilatable, qui sert à faire éclater la coque pour livrer passage à l'insecte.

INSECTE PARFAIT.

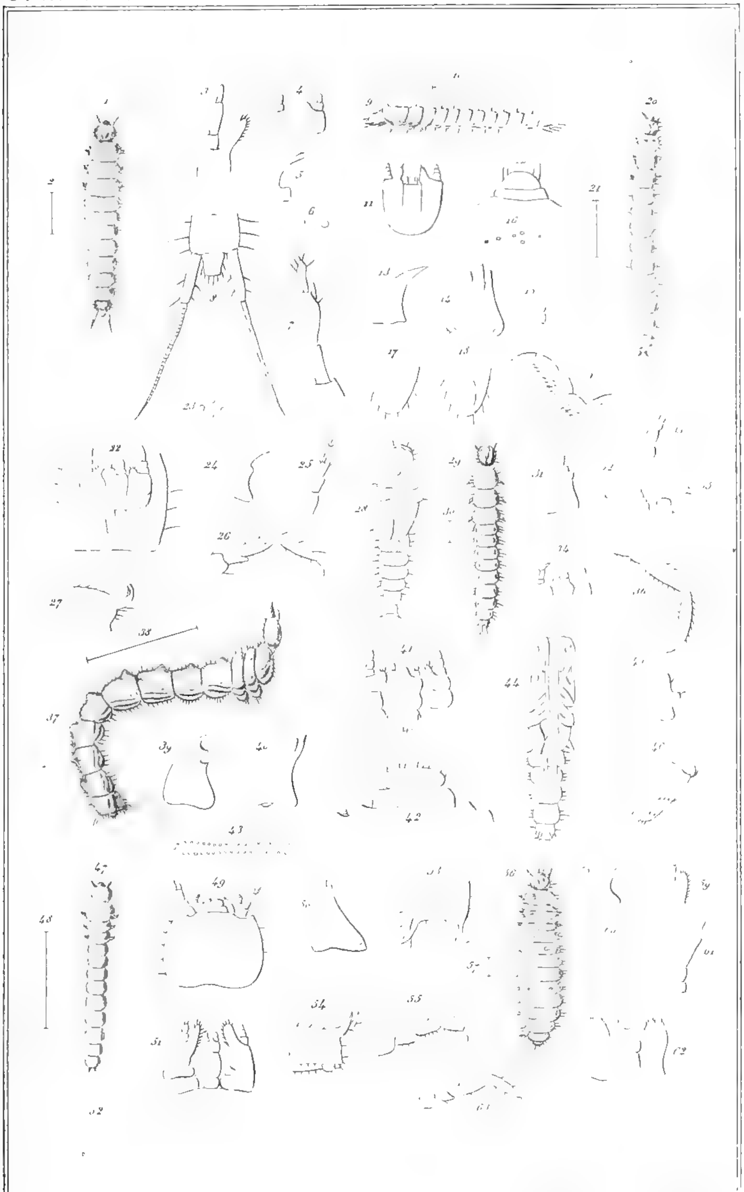
Longueur 6 à 10 millim. Face testacée; antennes de la même couleur, avec le troisième article en partie brunâtre; une tache noirâtre au bas de chaque fossette antennaire; derrière de la tête d'un jaunâtre satiné; vertex jaunâtre, taché et moucheté de brun ferrugineux. Prothorax et abdomen cendrés, tout couverts de taches et de points noirs en dessus et même en dessous, sauf l'abdomen qui est jaune à la région ventrale. Ailes brunes, à mouchetures diaphanes moins nombreuses le long du bord externe, où elles laissent subsister le fond sous forme de petites taches irrégulières. Pattes noirâtres; tibias revêtus en dessous d'un duvet fauve; premier article des tarses fauve.

EXPLICATION DES FIGURES.

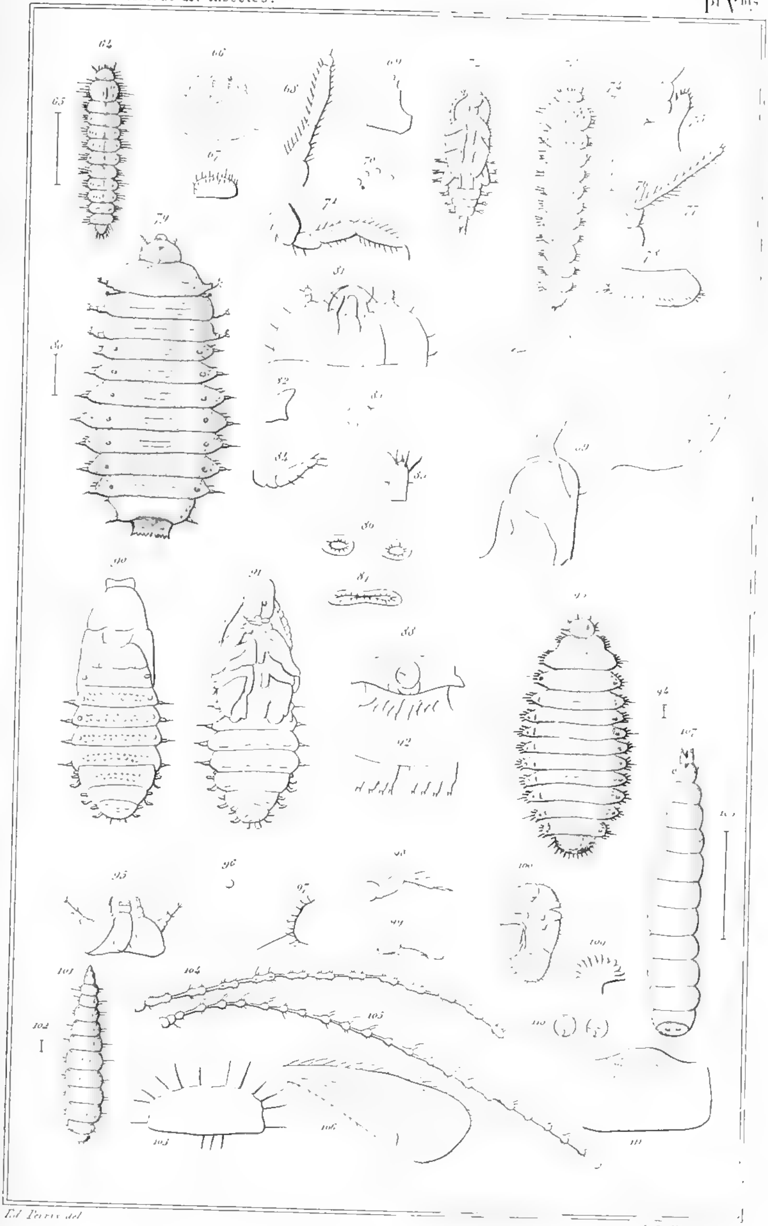
1. *Liodes castanea.* — Larve grossie.
2. Mesure de sa grandeur naturelle.
3. Mâchoire et palpes maxillaires.
4. Lèvre et palpes labiaux.
5. Mandibule.
6. Ocelles.
7. Antenne.
8. Dernier segment avec ses appendices et le mamelon anal.
9. *Cryptohypnus riparius.* — Larve grossie.
10. Mesure de sa longueur naturelle.
11. Mâchoires et palpes maxillaires; lèvre et palpes labiaux.

12. Epistome et labre.
13. Mandibule vue en dessus.
14. Mandibule vue de côté.
15. Antenne.
16. Ocelles du côté droit.
17. Dernier segment vu en dessus.
18. Le même vu en dessous.
19. Patte.
20. *Tarsostenus univittatus.* — Larve grossie.
21. Mesure de sa grandeur naturelle.
22. Mâchoires et palpes maxillaires ; lèvre et palpes labiaux.
23. Ocelles du côté droit.
24. Mandibule.
25. Antenne.
26. Patte.
27. Dernier segment vu de profil.
28. Nymphe.
29. *Ebœus albifrons.* — Larve grossie.
30. Mesure de sa grandeur naturelle.
31. Mandibule.
32. Ocelles du côté droit.
33. Antenne.
34. Mâchoires et palpes maxillaires ; lèvre et palpes labiaux.
35. Dernier segment.
36. Patte.
37. *Agapanthia suturalis.* — Larve grossie.
38. Mesure de sa grandeur naturelle.
39. Mandibule vue en dessus.
40. Mandibule vue de côté.
41. Mâchoires et palpes maxillaires ; lèvre et palpes labiaux.
42. Bord antérieur de la tête avec les antennes ; épistome et labre.
43. Tubercules des bourrelets ambulatoires dorsaux.
44. Nymphe.
45. Un segment abdominal de la nymphe, vu de profil.
46. Dernier segment de la même, vu de profil.
47. *Dircœa lævigata.* — Larve grossie.
48. Mesure de sa grandeur naturelle.
49. Tête vue en dessus.
50. Mandibule.
51. Mâchoires et palpes maxillaires ; lèvre et palpes labiaux.
52. Ocelles du côté droit.
53. Dernier segment vu en dessus.
54. Le même vu de profil.
55. Patte.
56. *Sphindus Gyllenhalii.* — Larve grossie.
57. Mesure de sa grandeur naturelle.
58. Mandibule.
59. Mâchoire et palpe maxillaire.
60. Ocelles du côté droit.
61. Antenne.
62. Mâchoires et palpes maxillaires ; lèvre et palpes labiaux.
63. Patte.
64. *Lagria hirta.* — Larve grossie.
65. Mesure de sa grandeur naturelle.
66. Mâchoires et palpes maxillaires ; lèvre et palpes labiaux.
67. Labre.

68. Antenne.
69. Mandibule.
70. Ocelles du côté droit.
71. Patte.
72. Nymphe.
73. *Lagria lata.* — Larve grossie.
74. Mesure de sa grandeur naturelle.
75. Mâchoire et palpe maxillaire.
76. Antennes.
77. Ocelles du côté droit.
78. Un des segments de l'abdomen grossi pour montrer la disposition des poils et la fine crête transversale près du bord antérieur.
79. *Hispa testacea.* — Larve grossie.
80. Mesure de sa grandeur naturelle.
81. Tête vue en dessous, pour montrer à la fois les mandibules, les antennes et les plaques qui tiennent lieu des mâchoires et des palpes maxillaires, de la lèvre et des palpes labiaux.
82. Mandibule.
83. Ocelles du côté droit; à droite est représenté le petit tubercule piligère qui simule un ocelle.
84. Patte vue de profil.
85. Tibia vu en dessus pour montrer les soies et les pelottes.
86. Bourrelets ambulatoires sous le mésothorax et le métathorax.
87. Bourrelet ambulatoire de la face ventrale de chacun des sept premiers segments abdominaux.
88. Dernier segment vu en dessous.
89. Extrémité d'un rameau du *Cistus salvifolius.* La feuille de droite est celle qui a été habitée la première par la larve; on y voit, exempte de nervures, la partie dont le parenchyme a été rongé; la feuille de gauche est celle qui est envahie en dernier lieu et où se forme le tube dans lequel la larve accomplit ses métamorphoses.
90. Nymphe vue en dessus.
91. La même vue en dessous.
92. Plaques subcornées et dentées qui terminent l'abdomen de la nymphe.
93. *Gryphinus piceus.* — Larve grossie.
94. Mesure de sa grandeur naturelle.
95. Tête vue en dessous. La figure montre les antennes, les mâchoires et les palpes maxillaires, la lèvre et les palpes labiaux.
96. Ocelle.
97. Portion d'un segment pour montrer les papilles dont le corps est frangé.
98. Patte.
99. Ongle très-grossi pour montrer la dilatation inférieure et la soie spatulée.
100. Nymphe.
101. *Cecidomyia entomophila.* — Larve grossie.
102. Mesure de sa grandeur naturelle.
103. Coupe d'un segment abdominal.
104. Antenne de la femelle.
105. Antenne du mâle.
106. Aile.
107. *Platystoma umbrarum.* — Larve grossie.
108. Mesure de sa grandeur naturelle.
109. Un des stigmates antérieurs.
110. Les deux stigmates postérieurs.
111. Un segment vu en dessous.



Ed. Perris del.



Ed. Perris del.

Lith. H. Pousson

VII. — *Notice sur une nouvelle espèce de Davidsonia*,

PAR

L. DE KONINCK, M. D.

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

Lorsqu'en 1852, j'insérai dans le huitième volume des Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liége (1) une notice sur le genre *Davidsonia*, je ne connaissais encore que deux espèces de ce genre remarquable. Depuis cette époque, des nouvelles recherches faites dans la localité qui m'avait déjà fourni ces espèces, m'en ont fait découvrir une troisième parfaitement distincte des deux premières.

Mais avant d'entreprendre sa description, qu'il me soit permis de revenir sur quelques-uns des principaux caractères qui distinguent les *Davidsonia* des autres Brachiopodes et sur la place qui leur a été assignée dans la méthode.

Les *Davidsonia*, comme la plupart des Mollusques appartenant au même ordre, sont parasites, mais au lieu d'être attachés aux corps sous-marins au moyen d'un pédoncule flexible, c'est à l'aide de leur coquille même qu'ils y adhèrent. Les genres *Crania, Thecidea* (2) et *Strophalosia* sont jusqu'ici les seuls qui possèdent ce même caractère. Aussi n'y a-t-il rien d'étonnant à ce que M. Bouchard les ait rapprochés du premier de ces genres, surtout si l'on fait attention que le savant naturaliste Boulonnais, n'a eu à sa disposition

(1) Pag. 129 et suiv.

(2) Plusieurs auteurs préfèrent écrire aujourd'hui *Thecidium*, parce que, disent-ils, c'est *plus correct*. Je ne puis m'associer à cette manière de voir et je préfère, pour ma part, conserver le nom tel qu'il a été primitivement établi par son auteur, M. Defrance.

qu'une seule valve, même assez imparfaite, pour établir la coupe générique dont on lui est redevable.

Frappé de l'analogie, qui, à première vue, semble exister entre certaines espèces de *Thecidea* jurassiques et les *Davidsonia*, j'ai émis l'opinion que ceux-ci étaient les analogues des premières, et pouvaient être considérés comme étant leurs représentants dans les roches paléozoïques (1). Cette idée a été combattue par M. Davidson, qui a rapproché des *Strophomena* et des *Leptæna* les coquilles qui lui ont été dédiées et en a formé provisoirement, avec M. King, une sous-famille, à laquelle il a donné le nom de Davidsonidées, *en attendant*, dit-il, *que de nouvelles découvertes vinssent leur assigner d'une manière définitive, la famille à laquelle ils appartiennent réellement* (2).

Si je suis d'accord aujourd'hui avec mon savant ami M. Davidson, pour abandonner ma première opinion relativement à l'analogie que j'avais cru exister entre les *Davidsonia* et les *Thecidea*, il m'est impossible de me ranger à son avis, quant au rapprochement qu'il a cherché à établir lui-même et d'admettre la sous-famille dont je viens de parler.

Si l'on ne devait s'en tenir qu'aux caractères actuellement connus, il est certain qu'il serait bien difficile de combattre le rapprochement fait par M. Davidson.

L'extrême analogie existant entre la structure interne des *Davidsonia* et celle de certaines espèces de *Strophomena* ne peut pas être niée. Il suffit, pour s'en convaincre, de jeter les yeux sur la pl. VIII de l'ouvrage de M. Davidson que j'ai déjà cité, et de comparer les fig. 170, 171 et 173 des *Strophomena* avec celles des *Davidsonia*. On remarquera facilement que la disposition des impressions vasculaires est à peu près la même pour les deux genres et que les reliefs de la fig. 173 ont beaucoup de ressemblance avec ceux de la fig. 188. Mais cela ne suffit pas, surtout, lorsque des caractères plus importants se remarquent chez les uns et font défaut chez les autres. C'est ce qui a lieu ici.

Ainsi les *Strophomena*, lorsqu'ils ne sont pas entièrement libres, comme les *Leptæna*, ont leur grande valve percée d'une ouverture, destinée à donner issue à leur pédoncule d'attache, tandis que les

---

(1) Mém. de la Soc. Royale des Sciences de Liége, vol. VIII, p. 132.

(2) *Davidson*. Brit. fossil Brachiop. *Introduction*, p. 110.

Davidsonia sont adhérents par une assez grande partie de la surface externe de cette même valve.

D'un autre côté, je démontrerai par la description de la nouvelle espèce de *Davidsonia* que je viens de découvrir, et par les figures dont cette description est accompagnée, que sa valve adhérente est quelquefois garnie de petits tubes, semblables à ceux qui hérissent la surface de la valve correspondante de la plupart des espèces de *Productus* et de *Strophalosia.* Je puis ajouter encore que les *Davidsonia* n'ont jamais leur surface externe ornée des stries fines et rayonnantes qui embellissent presque toujours celle des espèces des deux genres auxquels je viens de les comparer, et que leur coquille n'en a point non plus la forme régulière.

Si l'on veut bien tenir compte de ces derniers caractères et se rappeler que les *Strophalosia* sont des Brachiopodes dont la coquille est garnie de tubes, et dont la grande valve, souvent irrégulière, adhère par une partie de son crochet aux corps sous-marins, il me semble que l'on ne peut pas hésiter à rapprocher les *Davidsonia* de ce genre plutôt que des *Strophomena* ou des *Leptæna.* Ce rapprochement est encore corroboré par la présence d'une area bien prononcée sur les coquilles de l'un comme de l'autre genre et par la forme et la disposition des impressions des muscles adducteurs des petites valves; ces impressions sont au nombre de quatre, et ne présentent pas la moindre différence.

De tout ce qui précède, il résulte que les *Davidsonia* ne diffèrent essentiellement des *Stropholosia* que par les concrétions coniques dont l'intérieur des grandes valves de ceux-ci est garnie, et que les deux genres doivent être rangés dans la même famille, l'un à côté de l'autre, c'est-à-dire dans celle des Productidées, immédiatement après le genre *Chonetes.* Ce dernier servirait ainsi de transition entre cette famille et celle des Strophoménidées qui la précède, bien plus naturellement que ne le fait le genre *Davidsonia.*

J'arrive à la description de l'espèce nouvelle qui forme le principal objet de cette notice. Je dédie cette espèce à l'un des principaux fonctionnaires du Museum britanique, au savant et modeste naturaliste, à qui ce magnifique établissement est en grande partie redevable de l'arrangement de ses richesses paléontologiques.

DAVIDSONIA WOODWARDIANA. de Kon.

Fig. 1-6.

Coquille à peu près aussi longue que large, fortement déprimée en dessus, et souvent irrégulière. La grande valve est assez régulièrement bombée et de forme subhémisphérique; elle n'adhère ordinairement que par une petite partie de sa surface; cette partie, qui est très-voisine du crochet, occupe rarement le milieu; elle s'étend le plus souvent sur l'un ou l'autre côté de la valve et est l'unique source de son irrégularité. Sa surface est garnie de dix à douze plis assez épais, disposés en éventail et ayant pour origine commune le crochet ; quelques-uns de ces plis sont bifurqués à une petite distance des bords de la coquille ; la régularité de leur direction dépend de celle de la coquille même ; ils sont traversés, surtout vers leur extrémité marginale, de stries d'accroissement assez irrégulières et assez profondes pour les faire paraître imbriqués ; quelquefois ils donnent naissance à des petits tubes irrégulièrement distribués sur la surface et tout-à-fait semblables à ceux que portent certaines espèces de *Productus* (Fig. 2 et 2*a*). Le crochet est très-petit et à peine recourbé. L'area est courte et n'occupe guère que les deux tiers de la largeur totale de la coquille ; elle est très-surbaissée et semblable à celle des autres espèces. Son pseudodeltidium est très-étroit et n'offre rien de particulier.

Je ne connais pas l'intérieur de cette valve, ni celui de la valve opposée, mais il est probable qu'il ressemble à celui des valves correspondantes des deux autres espèces.

La petite valve, d'une forme subsemicirculaire, est assez concave, et garnie de plis parfaitement semblables à ceux de la valve opposée, dont ils ne diffèrent que par l'absence complète des tubes, même lorsque ceux de cette dernière en sont hérissés. Ces plis disparaissent entièrement sur la partie correspondante à celle par laquelle la grande valve adhère aux corps étrangers. Souvent cette partie, qui est parfaitement lisse, se relève et forme en quelque sorte une boursoufflure plus ou moins étendue aux environs du crochet (Fig. 4 et

4 *a*). Les bords de cette valve m'ont paru être très-minces et tranchants. Je n'en connais pas la conformation interne.

Rapports et différences. Cette espèce de *Davidsonia* se distingue facilement de ses deux autres congénères, par sa forme arrondie et surtout par les plis rayonnants dont sa surface est garnie, ainsi que par l'exiguïté de la partie de sa surface, au moyen de laquelle elle s'attache aux corps étrangers.

Localité. J'ai recueilli cette espèce avec ses congénères, dans le schiste dévonien moyen des environs de Chimay. Elle y est très-rare. Je n'en connais encore qu'un seul échantillon dont la surface soit garnie de tubes. Tous mes échantillons sont détachés, en sorte qu'il m'est impossible d'indiquer les corps sur lesquels ils ont vécu en parasite. Il est probable que ce sont les mêmes que ceux qui ont servi de point d'appui aux deux autres espèces déjà connues.

Note. Depuis la publication de ma Notice sur le genre *Davidsonia*, deux auteurs, MM. Davidson et Schnur se sont occupés de ce genre et ont donné des figures des deux espèces que j'ai décrites. Comme celles de M. Davidson sont d'une grande exactitude, et qu'elles ont été dessinées par lui-même, d'après les échantillons qui ont servi à mon travail, j'ai cru être utile aux personnes qui ne possèdent pas l'ouvrage du savant paléontologiste anglais, en saisissant cette occasion pour les faire reproduire. J'en profiterai en même temps, pour compléter la synonymie des espèces déjà connues et pour rectifier une erreur qui s'est glissée dans l'explication des figures qu'en a données mon excellent ami. En effet les figures 186 et 187 de sa pl. VIII, n'appartiennent pas, comme l'indique leur explication, au *D. Verneuillii*, Bouch., mais au *D. Bouchardiana*, de Kon. L'inspection des figures et leur comparaison avec celles que j'ai publiées moi-même, suffisent pour prouver ce que j'avance.

Je passe à la synonymie qui devra être établie comme suit :

1. DAVIDSONIA VERNEUILLII. Bouchard (1).

Thecidea prisca. Goldf. Mss. Museum de l'Univ. de Bonn.
Davidsonia Verneuillii. Bouch., 1849. Ann. des sc. nat., 3me série, vol. xii, p. 92, pl. 1, fi. 2 et 2*a* (syn. exclusâ).
— — De Kon. 1852. Mém. de la Soc. Royale des Sc. de Liége, vol. viii, p. 135, pl. i, fig. 1 *a-g* et pl. ii, fig. 1*a*, *b*.
— — Schnur. 1853. Palæontographica von W. Dunker et H. v. Meyer, vol. iii, p. 210, pl. 39, fig. 4, *a*, *b*.
— — Davidson. 1853. Brit. foss. brachiopoda, vol. I, pl. viii, fig. 188-191 (fig. 186 et 187 exclusis).

2. DAVIDSONIA BOUCHARDIANA. de Kon. (2).

Leptæna . . . . de Vern. 1845. Russia and the Ural mount., by Murch. de Vern. and de Keyserl., vol. ii, p. 237, pl. 15, fig. 9.
Davidsonia Bouchardiana. de Kon. 1852. Mém. de la Soc. Roy. des Sc. de Liége, vol. viii, p. 137, pl. i, fig. 2 *a g* et pl. ii, fig. 2, *a*, *b*.
— — Schnur. 1853. Palæontographica von W. Dunker u. H. v. Meyer, vol. iii, p. 220, pl. 39, fig. 2, *a*, *b*.
— — Davidson. 1853. Brit. foss. brachiopoda, vol. i, pl. viii, fig. 192 et 193.
— *Verneuilli.* Id. Ibid. pl. viii, fig. 186 et 187, non Bouch.

---

(1) Fig. 7, 8 et 9 de cette notice.
(2) Fig 10, 11, 12 de cette notice.

EXPLICATION DE LA PLANCHE.

DAVIDSONIA WOODWARDIANA. de Kon.

Fig. 1. Echantillon de grandeur naturelle, vu du côté de la petite valve.
— 1, *a*. Le même, grossi, vu du même côté.
— 2. Le même, de grandeur naturelle, vu du côté opposé.
— 2, *b*. Le même, grossi, vu du même côté. *α*. Origine des tubes.
— 3. Le même, de grandeur naturelle, vu de profil.
— 4. Autre échantillon plus régulier, de grandeur naturelle, vu du côté de la petite valve.
— 4, *a*. Le même, grossi, vu du même côté. *β*. Partie correspondant à la surface adhérente de la grande valve.
— 5 Le même, de grandeur naturelle, vu du côté opposé.
— 5, *a*. Le même, grossi, vu du même côté.
— 6. Le même, de grandeur naturelle, vu de profil.
— 6, *a*. Coupe longitudinale du même, grossie.

DAVIDSONIA VERNENEUILLII. Bouch.

Fig. 7. Grande valve, vue à l'intérieur et grossie, montrant en V l'impression des vaisseaux circulatoires; en A, celles des muscles adducteurs et en C, celles des muscles cardinaux.
— 8. Petite valve vue à l'intérieur et également grossie, montrant les impressions correspondantes, à l'exception de celle des muscles cardinaux.
— 9. Coupe longitudinale et grossie d'un échantillon bivalve afin de montrer l'espace rétréci occupé par l'animal.

DAVIDSONIA BOUCHARDIANA. de Kon.

Fig. 10. Grande valve vue à l'intérieur et faiblement grossie, montrant les mêmes impressions que celle de l'espèce précédente.
— 11. Petite valve vue de même et un peu plus grossie, montrant également les impressions correspondantes. (Les mêmes impressions ont été désignées par les mêmes lettres dans les quatre valves)
— 12. Coupe longitudinale grossie d'un échantillon bivalve. La partie blanche figure l'espace occupé par l'animal.

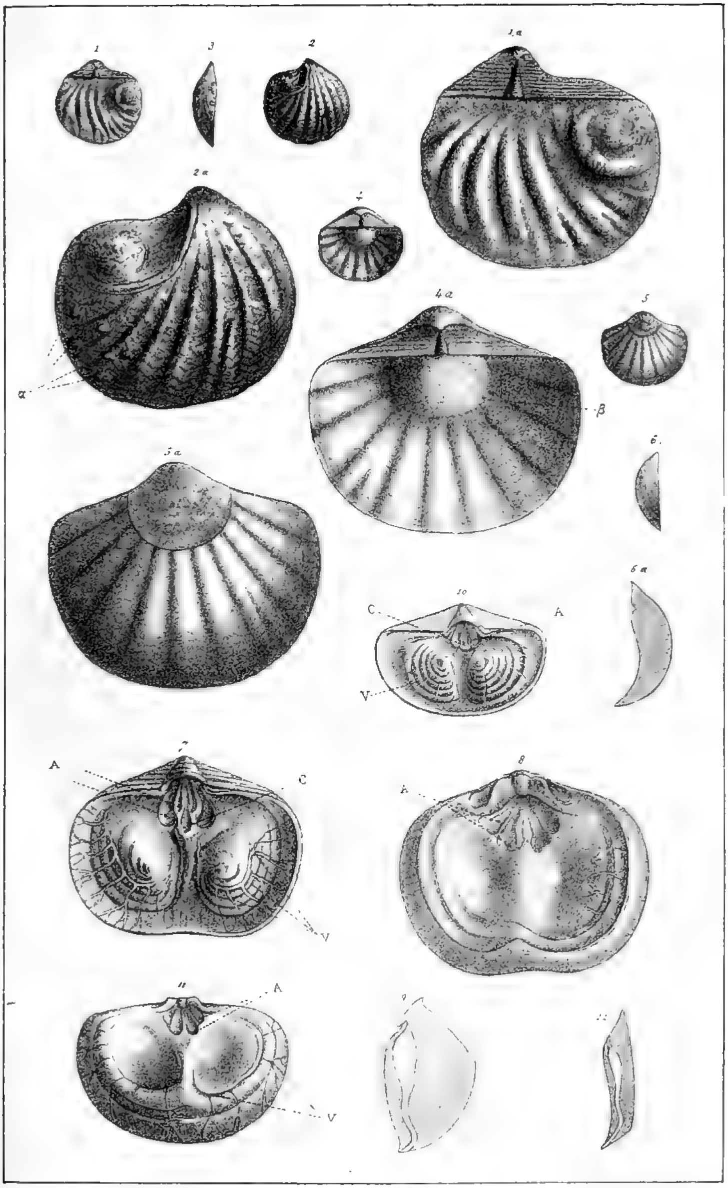


Fig. 1-6. Davidsonia Woodwardiana de Kon.
- 7-9. - Verneuilli Bouch.
- 10-12 - Bouchardiana de Kon.

VIII. — *Procédé pour analyser par voie sèche les minérais de zinc*,

PAR

Is. KUPFFERSCHLAEGER.

Les procédés connus jusqu'à présent pour analyser les minérais de zinc par la voie sèche sont loin d'être exacts parce qu'ils présentent des chances d'erreur dans leur exécution. Ainsi, le procédé par distillation ne peut fournir tout le zinc que contient un minérai si on ne le complète par quelques opérations de la voie humide; le mode d'essai par différence effectué à une température moyenne, peut faire qu'il reste de l'oxide zincique non réduit dans le résidu, et que, en outre, l'on soit dans l'incertitude après le grillage de ce dernier sur le degré d'oxidation du fer qui se trouve dans le minérai essayé. Cependant ce point est très-important à connaître, autrement on risquerait fort de faire erronément les calamines rouges plus riches que les blanches.

Quant au procédé par différence exécuté à une haute température et avec fondants fixes, comme pour les essais de fer, il n'est pas irréprochable non plus, en ce sens que, d'après les expériences faites en 1846 par M. Chandelon, les fondants employés retiennent dans ce cas une certaine quantité d'oxide zincique indécomposé à l'état de silicate double, et que, par conséquent, tout le zinc ne peut être dosé par différence au moyen de ce procédé. D'autre part, il y a, comme nous allons l'indiquer plus loin, possibilité de simplifier les opérations.

Le procédé ancien, qui consiste à mêler le minérai zincifère avec du cuivre et à en opérer la réduction par du charbon, dans un creuset afin d'obtenir du laiton, est des plus inexacts et a toujours été jugé tel, parce qu'on n'est pas sûr que tout le cuivre s'alliera au zinc et qu'il ne s'en volatilisera pas une certaine portion, en même temps que de ce dernier, pendant la chauffe. On ne retrouve donc plus, lors du dosage, la quantité de cuivre employée ni tout le zinc contenu dans la prise d'essai.

Or, les causes d'inexactitude et la complexité des opérations nous ont déterminé à rechercher un procédé plus convenable sous tous les rapports, et nous croyons être parvenu à un bon résultat; du moins deux années d'expérimentation ont sanctionné la bonté du procédé que nous allons avoir l'honneur d'exposer.

Avant d'en aborder la description, disons d'abord que nous nous sommes appuyé sur les résultats obtenus en 1846 par M. Chandelon, à savoir :

1° Que les fondants fixes employés à la réduction des minérais de zinc ne permettent pas d'en retirer tout le métal, et cela d'après ce que nous avons rapporté tantôt; et 2° que les silicates zinciques peuvent être complètement réduits, dans les laboratoires, sans l'emploi de fondants fixes, rien qu'en les chauffant suffisamment avec du charbon.

D'où M. Chandelon, qui s'était proposé de rechercher la quantité du zinc non réduit qui reste dans le minérai traité en grand, a imaginé, pour analyser par voie sèche les minérais, de chauffer au fourneau à vent la prise d'essai, préalablement grillée, mêlée avec du charbon pùr, dans un petit creuset de porcelaine couvert et introduit dans un creuset en terre réfractaire et brasqué. Après la réduction, il grille le résidu comme au procédé par différence exécuté à une haute température.

De ces faits bien constatés, nous n'admettons pour l'analyse, à l'exemple de M. Chandelon, que deux classes de minérais de zinc au lieu de trois, savoir : 1° les minérais oxidés, carbonatés et silicatés ; et 2° les minérais sulfurés. Et même ces derniers lorsqu'ils ont été suffisamment grillés, peuvent être rangés dans la première classe.

En résumé, tous les minérais de zinc sont essayés par le même procédé.

Ce qui précède étant admis, voici en quoi consiste notre procédé.

On prend deux grammes du minérai parfaitement pulvérisé et sec, on les met dans un têt taré en terre réfractaire, de trois centimètres de largeur sur deux de hauteur, que l'on recouvre d'un couvercle et que l'on introduit dans la moufle d'un fourneau de coupelle pour faire la calcination.

Après une demi-heure de chauffe on retire le têt, on le pèse pour déterminer par différence le poids des matières volatiles, ensuite on le replace sans son couvercle dans la moufle, pour opérer le grillage et porter au maximum d'oxidation les corps qui n'y sont point; particulièrement l'oxide de fer qui se trouve presque toujours dans les minérais de zinc (1).

Au bout d'une demi-heure, environ, on retire le têt, on le pèse pour connaître le poids des matières fixes du minérai grillé, puis on mêle celui-ci avec une quantité à volonté de noir de fumée pûr (ne laissant pas de cendre par l'incinération, ou dont le poids en est connu) sur un morceau de papier glacé; le mélange est introduit dans un trou fait au centre du noir de fumée dont on a rempli le têt sans le tasser, puis recouvert d'un peu de noir, après quoi l'on ferme au moyen d'un couvercle percé d'un trou, s'adaptant bien avec un bord intérieur, et qu'on lute avec de la terre à pipe. Cela fait, on reporte dans la moufle le têt ainsi préparé, et on pose quelques morceaux de coke sur le couvercle afin que le zinc volatilisé pendant la réduction ne se condense pas à sa face intérieure; l'on met aussi en avant du têt, du côté de la porte du fourneau, quelques morceaux de coke pour que l'air froid ne frappe pas l'appareil, ce qui pourrait former de l'oxide zincique, et afin que la chaleur soit à peu près aussi forte sur le devant de la moufle qu'au fond, puis on ferme cette dernière au moyen de sa porte.

Pour éviter qu'une partie du noir de fumée ne brûle avant de réagir sur le minérai, on peut boucher imparfaitement le trou du couvercle par un petit morceau de coke, qu'on enlèvera dès que le têt sera chauffé au rouge sombre.

Au bout de cinq quarts d'heure d'un bon feu, entretenu avec du charbon de bois et du coke, la réduction est terminée : on retire le têt pour enlever le couvercle et l'on grille de nouveau pour brûler tout le noir de fumée restant, ainsi que pour réoxider le fer qui est également réduit. Mais comme le fer ne peut, par ce grillage, qu'être

(1) Pour plus de certitude et de rapidité, on peut y aider par l'addition d'un peu d'acide azotique, comme nous l'indiquons au second grillage.

amené à l'état d'oxide ferroso-ferrique (ce que l'on peut constater par les barreaux aimantés), et que le manque d'oxigène pour faire de l'oxide ferrique est compté comme étant de l'oxide zincique, dont les constituants ont été volatilisés, il faut mettre le résidu de ce grillage dans une petite capsule de porcelaine contenant un peu d'acide azotique, et rechauffer afin de porter le fer à son maximum d'oxidation, après quoi on pèse. Ce poids étant soustrait de celui du minérai grillé, auquel on a ajouté le poids des cendres du noir de fumée s'il en laissait, la différence indique l'oxide zincique absent et duquel on calcule le poids du zinc métallique.

On pourrait, au besoin, faire le grillage avec l'acide azotique dans le têt même, mais comme sa pâte est poreuse, le nitrate formé et encore liquide, pénétrerait dans les pores, le têt serait mis hors d'usage, et on ne pourrait en détacher complètement le résidu pour le peser séparément.

Si l'on avait à sa disposition une capsule réfractaire non vernissée intérieurement, on pourrait y exécuter toutes les opérations de cet essai.

Il ne convient pas non plus d'ajouter l'acide azotique au résidu immédiatement après la réduction et avant d'avoir brûlé le charbon, parce qu'alors on aurait des déflagrations et par conséquent des pertes; le mieux est d'opérer comme il vient d'être indiqué.

Par ce procédé on peut faire un essai complet en moins de trois heures, avec peu de combustible comparativement à la quantité qu'il en faut lorsqu'on emploie le fourneau à vent qui, en outre, exige chaque fois un autre creuset.

Les essais des minérais les plus silicatés doivent être placés au fond de la moufle parce qu'ils exigent une plus forte température que les autres.

Il est bien entendu que si le noir de fumée, que l'on se propose d'employer, laissait des cendres après sa combustion, on devrait dessécher et peser tout ce que l'on en emploierait dans cette opération.

Pour donner une idée de l'exactitude de ce procédé, nous allons rapporter des exemples d'analyses exécutées au laboratoire de l'Université de Liége.

1° Un mélange fait de 3 gr. 50 d'oxide zincique et de 1 gr. 50 d'oxide ferrique, tous deux purs, ayant été traités comme il a été exposé plus haut, et jusqu'à ce que les barreaux aimantés n'aient plus eu d'action sur le dernier résidu, a reprocuré par le calcul les quantités exactes des deux oxides mêlés.

2° Essai d'un minérai de fer et de zinc provenant de Forceilles commune de Héron. Deux gram. soumis au grillage ont fourni 1 gr. 58 de minérai fixe qui, réduit par le noir de fumée, a donné pour résultat des opérations : 0 gr. 61 d'oxide zincique, ou 30,5 °/₀ d'oxide zincique; soit 24,47 °/₀ de zinc métallique.

Comme contrôle on a analysé ce minérai par la voie humide, et on a trouvé sur deux grammes : 0 gr. 62 d'oxide zincique ou 31 °/₀ d'oxide; ce qui donne 24,87 °/₀ de zinc.

Il nous paraît inutile de multiplier ici les exemples; nous ajouterons seulement que, depuis deux ans que ce procédé est mis en pratique à l'Université de Liége et dans plusieurs usines à zinc du pays, on ne lui a pas encore adressé le moindre reproche.

Ceux qui l'exécuteront pour une première fois, feront bien de s'assurer que tout l'oxide zincique a été réduit avant de procéder à la dernière pesée et de passer aux calculs.

Nous avons tenté vainement d'appliquer ce mode d'essai aux minérais de zinc plombifères, nous n'avons pu parvenir à rien de fixe sur la quantité de plomb qui se volatilise en même temps que le zinc. Il faut un dosage spécial pour déterminer le plomb.

Liége, le 20 août 1855.

Is. Kupfferschlaeger.

IX. — *Note sur un nouveau genre de la Famille des Mélanosomes* (Micipsa rufitarsis), *qui habite le sud des possessions françaises dans le nord de l'Afrique ;*

PAR

M. H. LUCAS,

Aide-naturaliste au Museum d'Histoire naturelle de Paris.

Dans les sentiers arénacés qui sillonnent çà et là la forêt de Pins dont le plateau de Boghar est en grande partie couvert et qui sont très-affectionnés par les *Pimelia*, les *Erodius* et surtout les *Tentyria*, je trouvai, à la fin de mai 1850, un Coléoptère peu agile et qui, par sa forme courte, ramassée et sensiblement convexe, rappelait assez, mais en petit, les Mélanosomes du genre des *Blaps*. Désirant déterminer ce Coléoptère, je consultai le consciencieux travail sur cette famille de feu Solier, et, après l'avoir parcouru, je ne tardai pas à m'apercevoir que cet insecte n'avait pas été connu par ce zélé et laborieux entomologiste. En effet, en étudiant ce Collaptèride et en le comparant aux genres avec lesquels sa forme lui donne le plus d'analogie, il me fut impossible de le ranger parmi les nombreuses coupes établies par Solier ; je fus donc obligé de créer un nouveau genre que je consignai dans le Bulletin de la société entomologique, 3e série, tom. 3, p. 34 (1855).

Lorsqu'on cherche à apprécier les caractères présentés par cette nouvelle coupe générique, on ne tarde pas à remarquer qu'ils rappellent un peu ceux des *Tentyria ;* mais sa forme plus courte, plus ramassée et surtout plus gibbeuse, m'engage à la rapprocher du genre des *Tagona*. Comme dans cette coupe générique, le troisième article des antennes est allongé, mais il ne dépasse pas, comme chez les *Tagona*, les deux suivants réunis. Les yeux, au lieu d'être ovales, sont arrondis. Le prothorax est plus large que long, tandis que dans les *Tagona*, il est plus long que large. L'écusson dans ce genre forme une saillie triangulaire entre les élytres, tandis que chez les *Micipsa*, ce même organe est bien triangulaire, mais il est très-petit et ne forme pas de saillie. Les élytres sont plus courtes, plus ramassées et plus larges que dans les *Tagona*, et, par leur forme légèrement prolongée à leur partie postérieure, ces organes rappellent un peu, mais en petit, ceux de certaines espèces du genre des *Blaps*. Les pattes sont plus grèles et plus allongées que dans les *Tagona* et les fémurs, au lieu d'être épaissis en massue comme dans ce genre, sont, au contraire, dans les *Micipsa*, minces et arrondis. Si maintenant on compare les organes buccaux de ce nouveau genre avec ceux des *Tagona*, on remarquera que ces organes offrent des caractères différents bien tranchés. La lèvre inférieure est plus large que longue et, au lieu de présenter antérieurement deux lobes arrondis comme chez les *Tagona*, elle est profondément creusée dans son milieu comme dans ce genre, mais ses angles latéro-antérieurs sont seuls arrondis. Les palpes labiaux sont plus allongés et leur dernier article, au lieu d'être renflé, ovalaire, rétréci au bout et légèrement tronqué comme dans les *Tagona*, est allongé, comprimé et légèrement en forme de hache. Les palpes maxillaires sont plus grèles et leur article terminal, au lieu d'être notablement sécuriforme, est au contraire étroit, allongé et légèrement comprimé. Le lobe externe est beaucoup plus allongé que dans les *Tagona*, surtout le premier article; quant à la mâchoire, proprement dite, elle est submembraneuse et terminée par une dent spiniforme simple et allongée; un peu au-dessous, on aperçoit une autre dent spiniforme, mais beaucoup plus petite.

Tels sont les caractères différentiels que m'ont présentés ces deux genres examinés comparativement et entre lesquels j'ai trouvé beaucoup plus d'affinité que chez tous les autres qui composent la tribu des Blapsites.

Genus MICIPSA (1), Lucas, Ann. de la Société entomolog. de France, 3[e] série, tome 3; Bulletin p. 34 (1855).

Caput longius quam latius, antice angustatum rotundatumque.

Oculi convexi, rotundati.

Labrum superius brevissimum, multo latius quam longius, antice rotundatum.

Antennæ elongatæ, exiles, 11 articulatæ; 3° articulo elongato, exili, nec duos subsequentes collectos superante, ultimis brevibus,

(1) Nom d'un roi de Numidie.

antice crassis, articulo terminali attamen elongato, sub-oviformi.

Mandibulæ validæ, antice intus bidentatæ.

Maxillæ intus bidentato-spinosæ, spina terminali magna.

Palpi maxillares elongati, 1° 2° articulis brevibus, 3° 4° elongatis, 5° magno, compresso. subsecuriformi.

Labrum inferius latius quam longius, in medio profunde excavatum, angulis tantum anticis utrinque rotundatis.

Palpi labiales elongati, 1° articulo brevi, exili, 2° elongato, compresso, securiformi.

Prothorax latior quam longior, convexus, ad latera rotundatus.

Scutellum trianguliforme, minimum.

Elytra abbreviata, convexa, ad latera rotundata, cordiformia, ad basim subproducta.

Pedes elongati, exiles, femoribus rotundatis, subarcuatis, tibiis rectis, ad basim bispinosis tarsisque elongatis, infra spinosulis.

Abdomen breve, 5-segmentatum, segmento ultimo angusto, elongato.

La tête est plus longue que large, peu prolongée en arrière, rétrécie en avant où elle est arrondie. Les yeux sont convexes et arrondis. La lèvre supérieure très-courte, beaucoup plus large que longue, est arrondie. Les antennes, allongées et grèles, présentent onze articles : le premier est court et renflé à son extrémité ; le second est de même longueur, mais beaucoup plus grèle ; le troisième est allongé, grèle, mais ne dépasse pas en longueur les deux suivants réunis : ceux-ci sont de même grosseur, avec le quatrième un peu plus allongé que le suivant ; le sixième est de même longueur et de même grosseur que le cinquième ; quant au septième, il est sensiblement plus court ; les huitième, neuvième et dixième augmentent de grosseur à leur extrémité, surtout le dixième ; enfin le onzième article ou terminal est sensiblement plus allongé que les précédents ; il est suboviforme avec son extrémité rétrécie et légèrement recourbée. Les mandibules, assez robustes, sont élargies à leur extrémité qui est armée de deux dents dont l'externe est plus allongée que l'interne. Les palpes maxillaires sont allongés ; les premier et second articles sont courts ; les troisième et quatrième sont plus allongés et de même grosseur ; quant au cinquième, il est beaucoup plus grand, comprimé et coupé en biseau, ce qui lui donne un aspect légèrement sécuriforme. Le lobe externe présente deux articles dont le premier est très-allongé avec le second, au contraire, très-court ; le lobe interne est submembraneux et présente deux dents spiniformes dont la terminale courbée est la plus allongée. La lèvre inférieure, plus large que longue, se retrécit graduellement jusqu'à son bord antérieur et présente dans son milieu une échancrure profonde, avec les angles formés de chaque côté par cette échancrure, seulement arrondis ; les palpes labiaux sont allongés avec leur premier article court et grèle à sa base ; quant au second, il est allongé, aplati et sécuriforme. Le prothorax, plus large que long, arrondi sur ses parties latérales, est assez renflé avec les angles antérieurs plus sensiblement accusés que ceux situés de chaque côté de la base. L'écusson est très-petit et trianguliforme. Les élytres courtes, bombées, arrondies sur les parties latérales, en forme de cœur allongé, se retrécissent graduellement à leur partie postérieure où elles sont un peu prolongées et terminées en pointe arrondie. Les pattes sont allongées, grèles, avec les fémurs arrondis et très-légèrement arqués ; les tibias, un peu plus courts que les fémurs, sont grèles et offrent seulement deux épines à leur extrémité ; quant aux tarses, ils sont allongés avec la partie inférieure des divers articles qui les composent spinuleux au-dessous. L'abdomen est court, composé de cinq segments dont le dernier le plus allongé est étroit et arrondi à sa partie postérieure.

Je ne connais qu'une seule espèce de ce genre singulier et qui, jusqu'à présent, n'a encore été signalée que comme habitant les hauts plateaux de la province d'Alger.

MICIPSA RUFITARSIS, Lucas, Ann. de la Société entom. de France, 3e série, tome 3 ; Bullet. p. 34 (1855).

Long. 9 millim. Larg. 5 millim. 1/4.

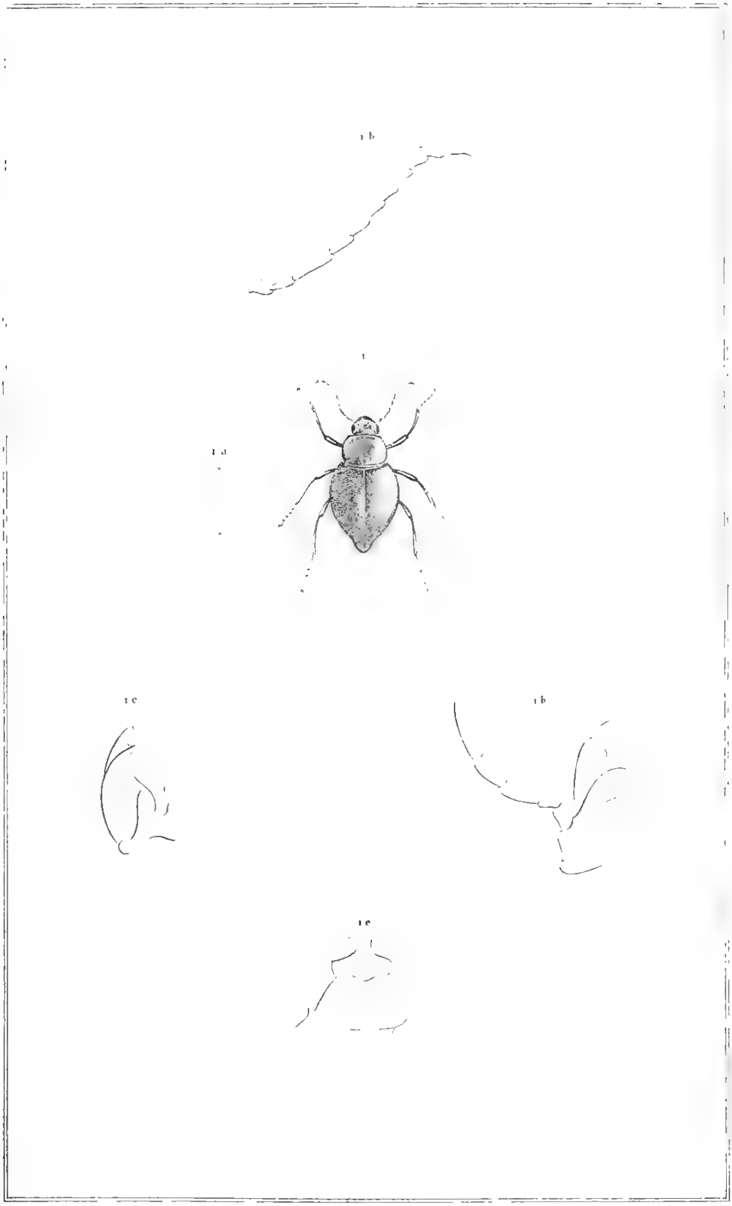
M. niger, nitidus ; capite sensiter punctato, antice bi-impresso ; thorace convexo, ad latera subtiliter marginato obscureque punctato ; elytris convexis, lævigatis, ad suturam longitudinaliter depressis ; sterno abdomineque nigro-nitidis, hoc ad latera impresso, subtilissime laxeque punctulato ; antennis, palpis, tarsis rufescentibus, femoribus tibiisque rufis.

D'un noir brillant ; la tête assez convexe en dessus à partir de la base, présente de chaque côté des antennes une impression assez fortement prononcée : celle-ci est séparée longitudinalement par une saillie ou convexité qui se continue jusqu'à la partie antérieure ; de plus, elle présente une ponctuation sensiblement marquée, mais peu serrée. Les antennes, les palpes maxillaires et labiaux ainsi que le bord de la lèvre supérieure sont entièrement roussâtres. Les mandibules sont noires ainsi que la lèvre inférieure. Le prothorax arrondi, convexe en dessus et sur les côtés, présente sur les parties latérales une saillie finement accentuée; il est obscurément ponctué et présente vers le milieu de sa base deux impressions assez fortement marquées; sur les parties latérales et en dessous, il est finement ridé. L'écusson, quoique très-petit, m'a paru entièrement lisse. Les élytres courtes, larges, convexes en dessus et sur leurs parties latérales sont entièrement lisses; elles sont déprimées longitudinalement de chaque côté de la suture avec leur base arrondie, terminée en pointe et finement marquée. Tout le sternum et l'abdomen sont d'un noir plus brillant que le reste du corps; ils sont obscurément ponctués et les segments abdominaux offrent une dépression de chaque côté. Les fémurs et les tibias sont d'un brun roussâtre avec les tarses entièrement de cette dernière couleur.

Cette espèce habite le plateau de Boghar où je l'ai rencontrée une seule fois à la fin de mai dans les sentiers sablonneux; les versants du Djibel Amour ainsi que les environs de Bouçada nourrissent aussi cette espèce; elle y a été trouvée par le général Levaillant et le docteur Allaire.

EXPLICATION DE LA PLANCHE.

1. *Micipsa rufitarsis* grossi, 1*a* la grandeur naturelle, 1*b* une antenne, 1*c* une mandibule, 1*d* une mâchoire, 1*e* la lèvre inférieure.



Lith. E. Dowan

Micipsa rufitarsis, *Lucas*

X. — *Cours élémentaire sur la fabrication des bouches à feu en fonte et en bronze, et des projectiles, d'après les procédés suivis à la Fonderie de Liége*,

PAR

COQUILHAT, major d'artillerie,

Sous-Directeur de la fonderie de Liége,
Chevalier des ordres de Léopold et du Lion Néerlandais,
Membre de la Société Royale des Sciences de Liége.

PREMIÈRE PARTIE.

FONTE DES CANONS.

LIVRE I.

APERÇU HISTORIQUE. — MÉTAUX EMPLOYÉS A LA FABRICATION DES BOUCHES A FEU.

ARTICLE I.

APERÇU HISTORIQUE.

Les progrès de l'art militaire dépendent essentiellement des sciences et de l'industrie. On s'en rend facilement compte en considérant que la manière de combattre doit être appropriée aux armes dont on dispose. Ces armes seront plus ou moins meurtrières, atteindront de plus près ou de plus loin, suivant que les procédés de fabrication seront plus parfaits et que les moteurs que l'industrie emploie seront plus puissants et permettront de donner aux engins de guerre des proportions plus fortes. Cette vérité est surtout évidente pour l'artillerie. Pour s'en convaincre, il suffit de rappeler que l'artillerie par la violence de ses effets et par sa grande portée, a fait disparaître successivement les anciennes armures défensives des chevaliers: qu'elle a changé les procédés pour l'attaque et la défense des places, et qu'elle a été la cause des principaux changements survenus dans la tactique des armées.

La guerre actuelle dans la Baltique, dans la Mer Noire et en Crimée a fait ressortir l'importance des plus puissants canons et l'utilité des canons à bombes d'un grand diamètre.

On pourrait s'étonner de ce retour aux gros calibres, dont nous ne rappelions l'emploi par nos ancêtres que pour faire remarquer l'état de barbarie dans lequel l'artillerie se trouvait autrefois. Mais nous ferons observer que cet état, dont la qualification de barbare est prise comme indication d'enfance de l'art, tenait bien plus à l'insuffisance des moyens de fabrication, qu'à l'idée de l'emploi des gros calibres : idée éminemment féconde, mais dont l'application doit être en harmonie avec les progrès de l'industrie.

L'usage des gros calibres n'est possible actuellement qu'avec des pièces de fonte; celles de fer forgé ou de bronze ayant été reconnues ne pouvoir résister qu'à un petit nombre de coups. Si le général Paixhans fut arrivé un siècle plutôt, son invention avortait, par l'impossibilité où se serait trouvée l'industrie métallurgique de fabriquer d'énormes pièces de fonte dans des conditions convenables.

La possibilité de lancer d'énormes bombes avec la plus grande vitesse initiale, procurera d'immenses avantages à l'attaque et à la défense : le but pourra être frappé par des projectiles creux d'un très-grand diamètre, renfermant une charge explosive considérable et constituant une mine volante; la force vive d'arrivée sera véritablement effrayante, parce que le projectile possédant une masse énorme frappera le but avec la majeure partie de sa vitesse initiale : la justesse du tir sera augmentée, parce que les gros projectiles, animés de grandes vitesses, décriront des trajectoires rasantes.

Au point de vue militaire, la seule objection qu'on puisse élever contre le projet d'une artillerie aussi puissante, ne peut consister que dans l'impossibilité où l'on se trouverait, soit de créer cette artillerie, soit de s'en servir. Mais les perfectionnements apportés dans l'art de fabriquer la fonte et les bouches à feu de ce métal, et les progrès qui ont été réalisés dans les moyens de transport, permettent de revenir, avec les plus grandes chances de succès, à l'artillerie de gros calibre.

L'emploi simultané de plusieurs fourneaux à réverbère permet de couler les pièces les plus pesantes. Le transport des plus lourds fardeaux, se fait maintenant avec une facilité qui tient du prodige : il n'est pas rare de voir des machines, ou seulement des parties de machines, pesant jusqu'à 20,000 kilogrammes, être transportées à des distances très-grandes, sur terre ou sur eau, sans occasionner d'autre embarras que celui de construire un fort chariot ou de bien étançonner le navire.

Rien n'empêche de faciliter la mise en batterie ou hors de batterie par l'emploi d'un moteur abrité contre les coups de l'ennemi, et dont une partie seulement des organes de transmission du mouvement seraient exposés à être atteints. Ces organes pouvant consister en chaînes ou en cordages, il serait facile de les remplacer s'ils étaient touchés par un projectile et endommagés ou détruits.

Nous rappellerons en peu de mots les époques qui ont été signalées par un progrès ou une nouveauté dans l'art de fabriquer les bouches à feu.

Les premières bouches à feu furent faites en fer forgé. Elles étaient composées de barres de fer soudées et assemblées en forme de douves et reliées par des cercles de même métal. On conçoit les difficultés qu'on devait rencontrer dans l'exécution de semblables pièces ; aussi n'en fabrique-t-on plus depuis longtemps.

On prétend qu'à la bataille de Crécy, en 1346, les Anglais se servirent de bouches à feu en fer forgé.

Les avantages que présente la fonte des métaux, firent adopter le cuivre d'abord et le bronze ensuite pour la confection des bouches à feu. En 1354, il y avait déjà des pièces en cuivre. En 1372, on coulait des pièces de bronze à Augsbourg. Vers la fin du 14^{me} siècle, ces pièces étaient très-nombreuses en Italie. Du reste, il ne paraît pas que les procédés de fabrication se répandirent uniformément en Europe, car on employa le fer forgé concurremment avec le bronze, pendant environ deux siècles et demi.

La fabrication des pièces de bronze ou de cuivre fait supposer la connaissance des fourneaux à réverbère.

L'ancien bronze, outre l'étain et le cuivre, contenait un peu de zinc et même du plomb : mais on ne tarda guère à adopter la composition actuelle formée de cuivre et d'étain, seulement la proportion de ce dernier métal a varié de 8 à 14 p. °/$_o$ de cuivre.

D'après M^r Piobert, on coulait déjà en 1377 des pièces de fer à

Erfurt. Il faut donc admettre qu'à cette époque, il existait des haut-fourneaux au bois.

Cependant d'après d'autres auteurs, ce ne fut qu'en 1547 que les Anglais furent les premiers à couler des bouches à feu en fonte de fer. La coulée des pièces de gros calibres exigeait le concours de plusieurs hauts-fourneaux.

Dans le principe les pièces étaient coulées à noyau ; on ne les alésait même pas, du moins, d'après ce qu'en dit l'ouvrage de Diego Ufano, qui parut en 1628. En consultant St.-Remy, on voit qu'en 1671, les pièces étaient encore coulées à noyau, mais avec masselottes et qu'elles étaient alésées.

L'alésage se fesait autrefois verticalement. Il est bien vrai que St.-Remy parle d'un alésage horizontal dans lequel l'alésoir tournait et avançait, tandis que la pièce restait immobile, mais ce procédé défectueux ne fut qu'essayé.

En 1744, Maritz, inspecteur-général de la fonderie de la marine en France, imagina de couler les bouches à feu pleines et de les forer horizontalement, en les fesant tourner autour de leur axe. En 1748, ces procédés devinrent réglémentaires, en France.

En Angleterre, dès 1712, Simon Surlevant substitua le charbon minéral au charbon de bois dans la fabrication de la fonte. Les premiers essais ne furent pas heureux et, comme il n'arrive que trop souvent en pareil cas, il se manifesta une opposition formidable qui fit abandonner l'entreprise.

Cependant on revint au procédé, et en 1740, on produisit de la fonte au coke. Les machines à vapeur qui furent inventées peu de temps après, mirent de grandes forces motrices à la disposition de l'industrie, et permirent l'établissement de hauts-fourneaux à grandes dimensions.

De 1760 à 1766, l'emploi de coke dans la réduction des minérais de fer, devint général en Angleterre. C'est aussi vers la même époque que l'on commença dans ce pays à fabriquer les pièces avec de la fonte au coke, mais toujours par le coulage direct au haut-fourneau. Les canons en fer furent coulés en seconde fusion par le fourneau à réverbère, chauffé à la houille, à partir de 1770 à 1775 en Angleterre et de 1780 à 1790 en France et en Belgique.

Le moulage en terre a été exclusivement employé jusqu'au moment où la première république française, pressée par d'impérieux besoins, décréta des moyens rapides de fabrication pour les pièces de fer. On moula d'abord en terre sur un modèle en métal, le moule étant formé de deux parties suivant un plan passant par l'axe de la pièce, ce qui s'appelait *mouler en coquille*, puis enfin, on adopta le moulage en sable tel qu'il existe aujourd'hui.

Le moulage des pièces de bronze s'est toujours exécuté en terre. Cependant, depuis un certain nombre d'années, on a essayé le moulage en sable, et ce procédé a été introduit à la fonderie de Liége en 1836.

Les pièces de bronze ont des grains de lumière depuis longtemps. Le général Huguenin, rapporte d'après l'ouvrage de Henri Hondius (courte description et dessins des règles générales de la fortification, de l'artillerie, des munitions, etc.), qu'au siége d'Ostende on avait remarqué que les lumières des pièces de bronze s'évasaient rapidement et qu'on y remédia en coulant du cuivre dans la lumière évasée, et en ayant eu soin d'échauffer fortement la pièce pour le moment de l'opération et de remplir l'ame de sable. Ce procédé n'ayant pas été trouvé entièrement satisfaisant, fut remplacé par la pose à froid d'un grain en fer, ayant des filets de l'épaisseur d'un doigt : il est inutile d'ajouter que le logement du grain était taraudé en conséquence. Quoi qu'il en soit de l'expérience faite au siége d'Ostende, ce procédé fut abandonné et les pièces de bronze n'eurent pas de grain jusqu'en 1748.

En France, on déposait un grain de cuivre dans le moule de la pièce, de manière qu'il fut enveloppé par le métal liquide lors de la coulée. Cela avait l'inconvénient que parfois des soufflures ou des défauts d'adhérence se manifestaient.

Ainsi, en France, le premier grain était toujours mis au moment de la coulée. Mais, lorsque la lumière était évasée, il fallait renouveler le grain. Cette opération s'est affectuée à chaud (par la fusion) pendant bien longtemps. St.-Remy raconte qu'on alésait la lumière évasée; qu'on remplissait l'ame de sable comprimé; qu'on chauffait fortement la pièce (mais pas au point de la fondre) et qu'on laissait ensuite couler dans le logement du grain 600 à 800 livres de cuivre fondu dans un fourneau à réverbère. On conçoit que le métal de la pièce étant baigné aux parois du logement du grain et lavé en quelque sorte par cette masse de métal liquide, devait se ramollir, arriver à l'état de fusion pateuse et se souder avec le grain. Cette opération ne se fesait pas sans que la pièce n'en souffrit, la forte chaleur qu'elle occasionnait en certaines parties provoquant la fusion de l'étain.

Leblong, qui a écrit après S[t] Remy, trouva probablement qu'il y avait une erreur dans ce chiffre de 600 à 800 livres, puisqu'il n'indique que 5 à 6 livres pour la même opération. Cette opinion fait supposer que Leblong ne connaissait pas les fonderies pratiquement, et qu'il écrivait sur cette matière d'après d'autres livres.

A la fonderie de Liége, on a exécuté en 1852, avec un plein succès, le soudage de nouvelles anses à une pièce de bronze.

C'est par des courants de bronze liquide que les surfaces de soudure ont été amenée à l'état de fusion pateuse : c'est en arrêtant les courants au moment opportun, et laissant le refroidissement se faire graduellement, que le nouveau métal s'est soudé intimement à celui de la pièce.

La pose à froid est antérieure à 1706 en France. Elle consistait à mettre un grain fileté. Mais probablement qu'on ne trouva pas d'abord les dimensions nécessaires ou les moyens de fileter convenablement. Les essais furent nombreux. On imagina des masses d'acier ou de bronze qu'on appelait clefs. On prétendait même pouvoir ôter la clef sans difficulté quand on abandonnait la batterie pour empêcher l'enclouage des pièces, et pouvoir la remettre ensuite facilement au moment du tir. Enfin en 1736, M[r] Gor, inventa une machine à fileter le grain et son logement dans la pièce : l'opération ne demandait que 4 heures. L'épreuve du tir constata ensuite l'excellence du travail.

Quoi qu'il en soit de ces essais, ce n'est que quelques années après qu'il devint réglémentaire en France, de mettre un grain de cuivre fileté en remplacement d'une lumière évasée.

La fonderie de Malines était déjà célèbre au 16[me] siècle pour ses pièces de bronze. Dans le pays d'entre Sambre-et-Meuse on fabriquait des pièces de fer il y a déjà 150 ans. La fonderie de Liége date de 1803, sous le consulat. M[r] Perier fut son fondateur.

On coula à cette fonderie exclusivement des pièces de fer jusqu'en 1836, époque à laquelle la fabrication des pièces de bronze y fut ajoutée par M. le colonel Fréderix, alors major directeur de cet établissement.

ARTICLE II.

MÉTAUX QUI CONVIENNENT A LA FABRICATION DES BOUCHES A FEU.

Les métaux sont les seules matières propres à la fabrication des bouches à feu. Le métal à canon doit posséder les propriétés suivantes :

La dureté.

La ténacité.

L'élasticité.

La résistance à l'action corrosive des produits de la combustion de la poudre.

Enfin il doit présenter certains avantages industriels : il ne doit pas coûter trop cher, il doit se laisser façonner sans trop de difficulté, et il doit être assez abondant pour suffire aux besoins d'une forte consommation.

La dureté empêche l'ame de se déformer par la pression des gaz ou par les chocs du projectile contre ses parois.

La ténacité prévient l'éclatement de la bouche à feu par l'explosion de la charge.

L'élasticité permet aux molécules de reprendre leur position primitive, après qu'elles en ont été écartées d'une certaine quantité dont la limite dépend du degré d'élasticité de la matière. En vertu de cette propriété les efforts successifs exercés sur la bouche à feu ne s'ajoutent pas du moment que l'élasticité n'a pas été détruite par un trop grand écartement des molécules. Il en résulte une plus grande durée des bouches à feu.

La résistance à l'action corrosive des produits de la combustion de la poudre prévient l'évasement de la lumière, les affouillements et les égrènements.

Les seuls métaux qui puissent réellement convenir à la fabrication des bouches à feu sont le fer forgé, le cuivre, le bronze et la fonte de fer. Ainsi que nous l'avons déjà dit, les difficultés de fabrication ont fait abandonner le fer forgé. Peut-être l'industrie parviendra-t-elle un jour à produire avec ce métal de bons canons et peu coûteux. C'est un problème que le temps se chargera de résoudre. L'invention du marteau pilon donne déjà de grandes chances de réussite. Le reste du problème paraît résider dans les dimensions des fours à pudler comme aussi dans la possibilité de mouler et de souder en temps opportun par la compression un nombre suffisant de loupes.

Le cuivre n'est pas assez dur. Mais allié avec une certaine quantité d'étain, il forme le bronze, métal plus dur que le cuivre et presque aussi ténace. Les pièces d'artillerie sont donc composées de bronze ou de fonte de fer.

Depuis quelque temps on fabrique les canons de certaines armes à feu portatives en acier fondu. Un industriel allemand s'est chargé de couler les bouches à feu de l'artillerie avec la même matière. Mais cette nouvelle fabrication n'est encore qu'à l'état d'essai, bien que les chances de réussite soient nombreuses. On est donc fondé à dire que le bronze et la fonte de fer sont les métaux dont les bouches à feu sont actuellement composées.

Le bronze a beaucoup plus de ténacité et d'élasticité que la fonte, mais il est moins dur et plus décomposable par la chaleur et par les produits de la combustion de la poudre. Il en résulte que les pièces de bronze offrent plus de garanties contre les dangers d'éclatement prématuré, mais qu'elles sont plus vite dégradées dans l'ame. Ces dégradations font diminuer la justesse du tir et font perdre une partie de la force motrice due à la combustion de la charge. Les bouches à feu de campagne sont de bronze en Belgique et chez la plupart des autres puissances. On a remarqué, en effet que ce métal possédait une dureté suffisante quand les pièces étaient de petit calibre ou lorsque les charges de tir étaient faibles. Les pièces de siége sont également en bronze : on a sans doute pensé que ces pièces devant tirer à fortes charges pour l'exécution des brèches, il convenait avant tout de se garantir contre les dangers d'une rupture inopinée.

Le traitement de la fonte de fer a été grandement perfectionné, principalement depuis un demi-siècle. Ce métal présente une dureté satisfesante ; il possède assez de ténacité pour qu'on ne soit pas obligé de donner des épaisseurs démesurées aux bouches à feu ; sa résistance à l'action corrosive du gaz est telle, qu'en moyenne une pièce de fer a accompli le service qu'on peut raisonnablement en attendre, lorsque l'évasement de la lumière est devenu trop considérable.

Les pièces de fonte coûtent 6 à 7 fois moins que celles de bronze : elles possèdent donc un avantage qui, sous le rapport financier, n'est pas à dédaigner pour un état comme la Belgique qui compte plus de 4000 bouches à feu (ce nombre exigeant un renouvellement moyen de 60 à 80 pièces par an).

Enfin les pièces de fonte conservent l'ame intacte pendant toute la durée de leur service.

On fabrique en fonte de fer :

Les bouches à feu de place.

Les canons de côte.

Les canons à bombes.

Les pièces de marine.

ARTICLE III.

DU BRONZE A CANON.

Le bronze est un alliage en proportion variable de cuivre et d'étain. Mais on donne particulièrement le nom de *bronze à canon* ou de *métal à canon*, au composé de cuivre et d'étain dans la proportion qui convient aux bouches à feu.

Titre du bronze.

En Belgique, en France et chez la plupart des puissances le bronze à canon est formé en poids de 100 parties de cuivre et 11 parties d'étain, aussi purs que possible.

Caractères extérieurs du bronze.

Le bronze est d'une couleur matte, jaunâtre, plus ou moins nuancée par le rouge selon le degré de pureté de ses composants. On découvre peu de nerf à la cassure mais plutôt un grain irrégulier, à facettes, et d'une grosseur qui augmente avec les dimensions de l'objet. Le métal est peu homogène et montre des taches d'étain plus ou moins fortes, plus ou moins nombreuses. Sa densité est plus grande que la densité moyenne des métaux dont il est composé : elle varie entre 8.76 et 8.87.

Le bronze est plus dur et plus fusible que le cuivre. Lorsqu'il est en fusion et qu'on l'expose au contact de l'air, l'étain s'oxide beaucoup plus rapidement que l'autre composant ; et si la fusion se prolongeait on obtiendrait du cuivre pur.

Le bronze est susceptible de prendre un poli très-brillant : sa ténacité est très-grande quoiqu'elle soit inférieure à celle du cuivre. Le bronze est moins ductile que ses composants, mais il est plus dur, plus sonore et moins oxidable. Le bronze a peu de malléabilité : mais il acquiert cette propriété à un degré beaucoup plus marqué lorsqu'on le plonge dans l'eau froide après l'avoir chauffé. Il est remarquable que le cuivre et le bronze, loin d'être durcis comme l'acier par la trempe, deviennent au contraire plus mous et plus malléables. L'effet de la trempe est d'autant plus sensible qu'on opère sur des échantillons de moindre épaisseur.

Le bronze fond à environ 1800 degrés centigrades : selon quelques auteurs, c'est même à 2100 degrés que la fusion a lieu.

Effets de la liquation.

Les alliages de cuivre et d'étain ne sont point stables : ils ont une grande tendance à se décomposer par *liquation*. Pendant la fusion même ils se séparent en plusieurs autres alliages : ceux avec excès d'étain sont plus légers et se trouvent vers la surface du bain, les autres contenant plus de cuivre gagnent le fond en vertu de leur plus grande pesanteur spécifique. Pendant le refroidissement, la liquation qui se produit empêche d'obtenir un métal homogène. L'altération dans le titre des diverses parties du mélange est d'autant plus grande, que la masse du métal en fusion est plus considérable : car le refroidissement plus lent qui en résulte augmente le temps pendant lequel le cuivre et l'étain continuent à se séparer.

Il est donc impossible d'obtenir des pièces de bronze parfaitement homogènes, et l'hétérogénéité est d'autant plus marquée que le calibre des bouches à feu est plus fort.

L'altération dans la composition de l'alliage, donne lieu à des inconvénients très-graves. Elle occasionne des inégalités dans la dureté et dans la ténacité. Le coefficient de dilatabilité par la chaleur n'étant pas le même pour les divers alliages de cuivre et d'étain, il se produit des tiraillements dans les alternatives d'échauffement et de refroidissement qui accompagnent le tir d'une bouche à feu ; ces tiraillements provoquent la formation des *logements* ou des *sifflets* préjudiciables à la solidité de la pièce ou à la justesse du tir.

Changements que produit dans la dureté de l'alliage la variation dans la proportion d'étain et de cuivre. Inconvénients qu'offrent les parties riches en étain.

Le cuivre pur est moins fusible et moins oxidable que le bronze, et résiste d'une manière très-satisfaisante aux causes de détérioration qui naissent de la chaleur développée dans le tir. Mais ce métal n'a pas assez de dureté, les chocs des projectiles dans l'ame y font des empreintes qui croissent rapidement, et la tension des gaz produit des accroissements de calibre dans le lieu occupé par la charge. On remédie à une partie de ces inconvénients, en alliant l'étain au cuivre. Pris dans la proportion indiquée par l'expérience, l'étain procure de la dureté au métal ; cette dureté augmente avec la quantité d'étain jusqu'à une certaine limite, passée laquelle l'alliage devient de plus en plus mou. On se rend compte de ce dernier effet, en considérant que l'étain par lui-même a peu de dureté. Mais l'excès d'étain produit encore un autre grave inconvénient, à cause de sa grande fusibilité : il rend le bronze d'autant plus ramollissable par la chaleur, qu'il y entre en plus grande quantité.

Aussi il arrive fréquemment à la suite d'un tir prolongé, que le bronze se décompose dans les parties riches en étain qui se trouvent sur la paroi de l'ame; que l'étain est fondu par la chaleur ou oxidé par l'action des gaz, et que des égrènements ou des affouillements plus ou moins nombreux ou profonds en sont les suites.

Nécessité d'une tolérance sur le titre du bronze.

Lorsque le bronze est soumis à l'action de la chaleur et d'un courant d'air, ainsi que cela arrive quand on le fond dans un fourneau à réverbère, l'étain s'oxide en plus forte proportion que le cuivre ; ajoutons que le temps pendant lequel il faut chauffer le fourneau à réverbère, pour arriver au degré de chaleur voulue, est très-variable, et nous concevrons qu'on ne peut répondre qu'approximativement de la dose d'étain que renfermera le bronze de la pièce. Ce qui augmente encore l'incertitude, c'est l'effet de la liquation pendant le refroidissement après la coulée. Enfin, la masselotte fournit au restant de la pièce, pendant que le métal est encore à l'état pâteux, une certaine quantité de bronze riche en étain, qui contribue à compenser les pertes occasionnées par l'oxidation ou par les infiltrations du métal dans la matière du moule.

Pour ces motifs, on a reconnu la nécessité d'accorder une tolérance en plus ou en moins sur le titre de bronze. Cette tolérance a été fixée à 1 p. °/₀ d'étain en plus ou en moins; de sorte que le titre du bronze à canon varie entre 10 et 12 parties d'étain pour 100 parties de cuivre.

Raisons pour lesquelles on a adopté le titre actuel du bronze à canon.

De nombreuses expériences ont prouvé que le titre actuel du bronze à canon, était celui qui donnait les meilleurs résultats. Si l'on augmentait la proportion d'étain, la dureté de l'alliage augmenterait en même temps, mais sa ductilité et sa ténacité diminuerait : l'alliage aurait moins de stabilité, il abandonnerait plus facilement l'étain par la chaleur développée dans le tir ; une partie plus considérable d'étain se fonderait et s'oxiderait, ce qui augmenterait les égrènements et les affouillements et accélèrerait la mise hors de service de la pièce. En diminuant au contraire la dose d'étain, on rend l'alliage plus intime et plus homogène, parce que la liquation tend moins à le décomposer. Mais le métal en devient moins dur et plus ductile, ce qui fait que les battements deviennent plus considérables lors du tir ainsi que le refoulement à l'emplacement de la charge.

On voit donc qu'on ne peut éviter un inconvénient sans en rencontrer un autre en variant la dose d'étain. Aussi a-t-on adopté le titre actuel qui n'a guère varié depuis longtemps et avec lequel on est certain d'avoir un alliage qui renferme de 10 à 12 d'étain pour 100 de cuivre.

Répartition de l'étain dans les diverses parties d'une pièce.

Les effets de la liquation joints à ceux provenant de la compression due à la masselotte amènent dans le titre des différentes parties des bouches à feu des résultats qu'il est important de connaître.

On a généralement remarqué :

1° Que pour une même section perpendiculaire à l'axe le titre en étain était le plus considérable au centre de la pièce.

2° Que le titre en étain allait en augmentant depuis la bouche jusqu'à une petite distance du cul de lampe.

3° Que le métal était toujours poreux vers l'axe de la pièce et que cette porosité diminuait rapidement à mesure qu'on s'en écartait, de sorte qu'à une petite distance de cet axe, (distance un peu plus grande pour les forts calibres) il n'était guère possible de reconnaître de différence dans la texture du métal.

4° Que la densité du métal allait en croissant depuis la tranche jusqu'à la culasse.

5° Que la dose d'étain après avoir diminué à partir de l'axe augmentait ensuite à mesure qu'on approchait de la surface.

6° Que le titre des parties minces, dans lesquelles le refroidissement, après la coulée, est assez prompt pour que les effets de la liquation ne soient pas sensibles, telles que les boutons de culasse, les tourillons, les anses, représentait assez exactement le titre moyen de la pièce.

Influence des substances étrangères sur les qualités du bronze.

Il est important que le cuivre et l'étain soient parfaitement purs pour composer le bronze : car certaines substances altèrent d'une manière très-sensible les qualités de l'alliage, et leur présence empêche de prendre les composants du bronze dans la proportion voulue.

Une très-petite quantité de plomb diminue la ténacité du bronze et augmente considérablement les effets de la liquation. Malheureusement on le rencontre fréquemment dans l'étain, dans le vieux bronze et quelquefois dans le cuivre : il est presque impossible de l'éviter entièrement. Aussi est-on forcé de le tolérer dans les métaux qui doivent servir à la coulée des pièces, pourvu que son poids ne dépasse pas le $^1/_{100}$ du chargement.

L'arsenic rend le cuivre et l'alliage cassants : il ne faut pas que le bronze en renferme la plus minime proportion. Cependant certains objets, tels que les boites de roue, n'ont pas besoin d'une très-grande résistance, et peuvent être coulés avec un métal qui contiendrait quelques traces d'arsenic.

L'antimoine procure de la dureté au bronze, mais comme il en diminue la ductilité sa présence est préjudiciable.

Quelques millièmes de fer et de zinc ne nuisent pas aux qualités du bronze : ils lui donnent même plus d'homogénéité et de dureté et rendent l'alliage plus stable en s'opposant aux effets de la liquation. Mais le fer dans la proportion de deux centièmes occasionne des tiraillements et un retrait irrégulier à la suite de la chaleur produite dans le tir : il en résulte des sifflets profonds et nombreux.

La présence du zinc favorise la formation des affouillements et des égrènements, tandis que sa propriété de se volatiliser est une cause de soufflure.

Défauts occasionnés par le tir dans les pièces de bronze.

Le bronze ne possède pas au degré désirable les qualités d'un bon métal à canon. L'alliage n'étant point stable est sujet aux égrènements et aux affouillements par l'action corrosive des produits de la combustion de la poudre. Le défaut de dureté est encore augmenté par le ramollissement du métal sous l'influence de la chaleur développée dans un tir prolongé. Le bronze n'étant pas suffisamment dur, la force expansive des gaz refoule les parois de l'ame à l'emplacement de la charge, en augmente le calibre et produit ce qu'on appelle un *refoulement*. Le métal n'étant pas assez dur cède à la pression qu'exerce le projectile à sa partie inférieure, avant son déplacement, lorsque les gaz s'échappent par le vent entre ce projectile et la paroi supérieure de l'ame. L'empreinte ou le *logement* qui se forme au contact du projectile s'agrandit de plus en plus : les chocs du projectile contre la paroi de l'ame déterminent des battements de plus en plus profonds et nombreux ; la justesse du tir en est diminuée et la pièce ne tarde pas à être hors de service.

Opinion de quelques fondeurs sur le titre que devraient avoir les pièces de bronze.

Ce sont ces faits et ces considérations qui ont fait naitre parmi les fondeurs l'opinion qu'il convenait d'augmenter la proportion d'étain pour les bouches à feu les plus puissantes, afin qu'elles fussent à même de résister aux causes de refoulement et de logement qui sont plus prononcées, et que cette proportion devait être réduite pour les petits calibres, qui ont été reconnus avoir suffisamment de dureté. Ils ont généralement pensé qu'il était préférable que le bronze renfermât sur 100 de cuivre, 10 d'étain pour les petits calibres et 12 d'étain pour les grosses pièces. Du reste des opinions très-divergentes ont été émises sans avoir été convenablement appuyées par l'expérience.

Insuccès des recherches pour améliorer les pièces de bronze.

Des essais ont été faits pour améliorer le bronze à canon. On a cherché par des combinaisons ternaires, quaternaires, multiples, etc., à augmenter la dureté du métal, sans rien lui faire perdre de sa ténacité et de la stabilité de l'alliage. Ce que nous avons dit de l'influence du fer et du zinc dans l'alliage suffit à expliquer l'insuccès de ces tentatives. L'inégale conductibilité de la chaleur des divers composants, les différences de température de leur point de fusion, etc., etc, doivent nécessairement produire des tiraillements et un retrait irrégulier dans le refroidissement qui a lieu après la fusion et dans les alternatives de chaud et de froid qui accompagnent le tir des bouches à feu. Le défaut d'homogénéité et de stabilité de l'alliage doit être une cause de piqûres et d'égrènements. Enfin le peu de ténacité de certains composants et surtout le peu d'affinité de ces composants l'un pour l'autre, ont dû influer d'une manière fâcheuse sur les propriétés de l'alliage et ont dû augmenter les difficultés de la fabrication.

Des recherches ont aussi été dirigées dans un autre sens : on a essayé des ames en fonte ou en fer forgé dans des tubes de bronze, etc.

Si les inconvénients, qui résultent de la différence de la dilatabilité par la chaleur sont graves pour les divers alliages ternaires, quaternaires, etc., où il entre du fer, du cuivre de l'étain et d'autres substances, à plus forte raison doivent-ils se faire remarquer dans ces sortes de pièces. Aussi ces tentatives n'ont-elles été suivies d'aucun succès.

Avantage du bronze comme métal à canon.

Il resulte de ce qui précède, que si le bronze à canon n'a pas toutes les qualités désirables, il est impossible de trouver un autre métal aussi tenace et qui possède en même temps la même dureté, la même résistance un ramollissement par la chaleur produite dans le tir et la même stabilité ou résistance à l'action corrosive des gaz.

ARTICLE IV.

DU CUIVRE.

Le cuivre est connu de toute antiquité. Il est d'un rouge brique très-vif : il acquiert une odeur désagréable en le frottant entre les doigts : il est très-malléable et très-ductile. Le cuivre occupe le huitième rang parmi les métaux pour la malléabilité et le cinquième pour la ductilité. Il est plus dur que l'or et l'argent. Après le fer c'est le plus tenace de tous les métaux. La densité du cuivre fondu est de 8.78 : celle du cuivre étiré en fils de 8.96. Le cuivre entre en fusion à 27° du pyromètre de Weyword, ce qui correspond à peu près à 2800 degrés centigrades. Il cristallise par le refroidissement en rhomboëdre.

Le cuivre parvenu à une température élevée se volatilise sensiblement et produit des vapeurs qui donnent à la flamme une belle couleur verte. Ces vapeurs sont fort remarquables lors de la coulée du bronze et produisent de mauvais effets sur la santé. Cependant le cuivre n'est pas très-volatil.

Le cuivre a peu d'affinité pour l'oxigène : il se conserve indéfiniment sans altération dans l'air et l'oxigène secs. Mais lorsqu'on le maintient dans l'air humide, il se couvre d'une couche verte qu'on nomme *vert de gris*, qui est un hydro-carbonate de cuivre.

Quand on chauffe le cuivre à l'air à une température peu élevée, il se forme à la surface du métal une couche rougeâtre de protoxide de cuivre : si on prolonge l'action de l'oxigène le protoxide de cuivre se change en bioxide qui est noir.

Le soufre, le phosphore, l'arsenic, le chlore, le brôme et la plupart des métaux s'unissent directement au cuivre. Une très-petite quantité de phosphore ou d'arsenic, suffit pour blanchir le cuivre et le rendre dur et cassant.

Le carbone ne s'unit pas en proportions définies avec le cuivre. Ce métal tenu longtemps en fusion dans un creuset brasqué n'augmente pas sensiblement de poids.

Le cuivre fondu en plaques a une cassure grenue à grains d'autant plus fins que les plaques sont coulées plus minces.

La cassure du cuivre forgé présente un nerf court et soyeux.

Autrefois le cuivre le plus renommé provenait de la Suède, de la Norwège et de la Hongrie. On le fournissait en plaques rondes nommées *rosettes*. Mais l'industrie du raffinage du cuivre a fait de notables progrès, en Angleterre. Ainsi dans ce pays on purifie toute espèce de cuivre et on le vend dans le commerce en plaques rectangulaires et sous la dénomination de *cuivre affiné*. L'exploitation des minérais de cuivre de l'Australie a pris un grand développement depuis un certain nombre d'années et a fait une redoutable concurrence aux produits des autres pays et notamment au cuivre du Chili et de la Russie.

L'examen du cuivre se fait par les analyses chimiques, et par des essais mécaniques, de forge et de fusion.

Les procédés d'analyse sont suffisamment détaillés dans les ouvrages de chimie; nous nous dispenserons d'en parler : au besoin nous recommanderions le cours de chimie générale par Pelouze et Fremy. Nous nous bornerons donc à indiquer les autres procédés pour l'examen du cuivre, qui, sans avoir la rigueur scientifique de l'analyse, n'en conduisent pas moins à un jugement qui n'est, pour ainsi dire, jamais en défaut sur la bonne ou la mauvaise qualité du métal présenté.

On brise les plaques de cuivre : elles doivent montrer une texture grenue d'une couleur rouge brique assez vive : une teinte uniforme, une cassure arrachée. La rupture ne doit avoir lieu qu'après de grands efforts proportionnés d'ailleurs aux dimensions de l'échantillon.

Le cuivre doit se laisser forger sans présenter de crevasses ni de doublures : il doit se laisser étirer au marteau en fils très-minces; rompu après avoir été forgé il doit montrer du nerf, un aspect soyeux et un éclat très-vif.

On éprouve la résistance du cuivre par des efforts de traction. On fait l'essai du cuivre comme composant du bronze en le fondant et le mélangeant avec 11 p. °/o d'étain pur. Les objets coulés avec le bronze, doivent montrer à la cassure une couleur uniforme, indice de la pureté du cuivre par la facilité qu'il a de s'allier à l'étain. La couleur de la cassure doit être franchement jaunâtre; le grain doit en être arraché. Le bronze d'essai doit posséder une grande ténacité.

En général, il convient de procéder par voie de comparaison avec un échantillon type dont la pureté et la bonté ont été reconnues par des fabrications antérieures.

La fonderie de Liége a obtenu les meilleurs résultats par l'emploi du cuivre livré en fortes plaques et affiné en Angleterre.

ARTICLE V.

DE L'ÉTAIN.

L'étain est brillant et d'un blanc argentin. Il manifeste une odeur désagréable quand on le frotte entre les doigts. Il est très-malléable: il est ductile au laminoir, mais peu à la filière. L'étain est peu tenace : rompu à coups de marteau, il offre une texture grenue ou fibreuse. Plié en différents sens, il fait entendre un son particulier, connu sous le nom de *cri de l'étain*. L'étain est un des métaux les plus mous et les moins élastiques; aussi n'a-t-il pas de sonorité. Sa densité est de 7,285 et n'augmente pas par le martelage. L'étain entre en fusion à 228° centigrades.

L'étain ne se volatilise pas aux températures les plus élevées de nos usines. Les vapeurs blanchâtres qu'on remarque lors de la coulée des pièces de bronze, sont simplement de l'oxide d'étain entraîné par les courants d'air.

L'étain n'agit pas sensiblement sur l'air sec ou humide, aussi peut-on le conserver longtemps à l'air sans altération; mais lorsqu'on élève sa température, il s'oxide rapidement.

L'étain du commerce contient souvent une petite quantité de plomb, de fer, de cuivre et d'arsenic.

L'étain le plus estimé est celui de Malacca et de Banca. On juge de la pureté de l'étain en le fondant à une douce chaleur et en examinant l'aspect de sa surface au moment où il se solidifie : l'étain le plus pur est le plus blanc, le plus brillant et celui qui présente le moins d'indices de cristallisation à sa surface.

Lorsque l'étain se couvre de ramifications cristallines après le refroidissement et surtout lorsqu'il montre une surface d'un blanc mat, on peut être à peu près assuré qu'il est allié à des métaux étrangers.

Indépendamment des analyses chimiques et des essais que nous venons de décrire, il convient, lorsqu'on veut faire une réception d'étain, de le comparer avec des échantillons types dont la bonté a été reconnue dans de précédentes fabrications.

ARTICLE VI.

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONTES.

Production de la fonte : sa composition.

Dans le travail des hauts-fourneaux le fer s'unit à une certaine quantité de carbone, acquiert la propriété d'être fusible et constitue un métal qu'on nomme *fonte*. Les diverses matières dont les minérais de fer sont composés, ne peuvent être entièrement éliminées : il en résulte que la fonte n'est pas exclusivement formée de fer et de carbone, mais qu'elle contient en outre quelques substances étrangères : de là, les différences qu'on remarque dans ses propriétés.

Les matières étrangères que renferme la fonte peuvent aussi provenir en partie du combustible, surtout lorsque celui-ci est pyriteux. On trouve du silicium dans toutes les fontes et souvent du manganèse, du phosphore, du soufre, etc. Ce qui distingue principalement la fonte du fer pur et de l'acier, c'est qu'elle ne se laisse ni forger, ni souder, qu'elle a moins de ténacité et qu'elle est plus fusible.

La quantité de carbone contenue dans la fonte est plus considérable que dans le fer et l'acier : elle varie de 2 à 5 pour 100 de fer.

Il y a deux manières d'être du carbone dans la fonte.

La fonte présente des aspects et des propriétés bien différents, selon que le carbone s'y trouve à l'état de combinaison chimique ou en partie à l'*état libre* sous forme de paillettes noires graphiteuses disséminées dans la masse.

Produits qui résultent des deux manières d'être du carbone dans la fonte.

La *fonte blanche* est celle dont le carbone est à l'état de combinaison chimique. Dans la *fonte grise* une partie seulement du carbone est combinée tandis que l'autre partie reste à l'état de *carbone libre.*

Le mélange de la fonte blanche avec la fonte grise constitue une espèce intermédiaire, la *fonte truitée.*

Caractères généraux de la fonte blanche.

La fonte blanche est d'une couleur blanchâtre, quelquefois argentine : elle a un éclat métallique : elle est élastique, sonore, cassante et extrêmement dure. Sa densité est plus grande que celle de la fonte grise et moindre que celle du fer forgé et de l'acier. On conçoit cependant que la fonte blanche obtenue par la trempe de la fonte grise ait moins de densité que cette dernière.

Caractères généraux de la fonte grise.

La fonte grise est d'une couleur gris de fer, plus ou moins claire ou foncée : elle est douce, facile à tailler, à limer et à forer; sa cassure est grenue à grains plus ou moins fins et cristallins. En général, plus la fonte grise contient de carbone libre et plus sa couleur est foncée, plus les grains en sont gros et miroitans.

Les gros grains affectent une forme qui se rapproche plus ou moins parfaitement de la forme cubique; à dose égale de carbone, la fonte grise renfermant moins de carbone combiné que la fonte blanche, elle se rapproche davantage du fer pur. Les proportions relatives de graphite et de carbone combiné sont plus importantes à considérer que la quantité absolue de carbone. La fonte grise contient environ $^1/_2$ à 1 p. $^0/_0$ de carbone combiné et 2 à 3 p. $^0/_0$ de carbone libre.

La fonte grise est moins dure, moins élastique et moins sonore que la fonte blanche : elle en diffère d'autant plus que sa couleur est plus foncée. En général, quand la fonte n'est pas grise à l'excès, elle est plus tenace que la fonte blanche.

Caractères des fontes truitées.

La fonte truitée présente à sa cassure un mélange de particules de fonte grise et de fonte blanche. Lorsque la couleur blanche domine, on dit que la fonte est truitée sur fond blanc; quand c'est au contraire la couleur grise qui l'emporte, la fonte est truitée sur fond gris. Les propriétés de la fonte truitée sont intermédiaires entre celles des deux sortes de fonte dont elle est composée. Cependant la fonte truitée est généralement plus tenace que la fonte grise. Les fontes passent par des nuances insensibles d'une espèce à l'autre.

Espèces de fonte blanche.

Il y a quatre espèces de fonte blanche :

La fonte blanche lamelleuse, la fonte blanche par surcharge, la fonte blanche par décarburation et enfin la fonte blanchie par la trempe.

Espèces de fonte grise.

La fonte grise comprend deux espèces : la fonte noire et la fonte grise proprement dite. La fonte grise elle-même se sous-divise en fontes grises nos 1, 2 et 3 selon la quantité de carbone libre qu'elle renferme. La fonte n° 1 étant la plus carburée ou graphiteuse et celle n° 3 étant la moins carburée.

Nous allons examiner succinctement ces diverses espèces.

Fonte blanche lamelleuse.

On obtient la fonte blanche lamelleuse dans le haut-fourneau lorsque l'oxide de fer se réduit complètement, que le carbone carbure le fer en se combinant avec lui, et qu'il ne se produit pas d'autre réaction. Cette fonte a un aspect métallique très-prononcé, une couleur argentine, un éclat très-vif; sa cassure est lamelleuse et rayonnée ou esquilleuse tout en même temps. La fonte blanche lamelleuse contient autant de carbone que la fonte grise, mais diverses causes contribuent à la combinaison de tout le carbone : l'allure et la température du haut-fourneau; les proportions, la quantité et les qualités des matières qui entrent dans les charges, la quantité d'air introduite, etc. Certaines substances ont la propriété de dissoudre le carbone et de le retenir à l'état de combinaison avec le fer : le manganèse possède cette propriété à un très-haut degré.

La fonte blanche lamelleuse est plus fusible que la fonte grise, mais elle reste toujours à l'état de fusion pâteuse : elle se fige extrêmement vite, elle montre en coulant une couleur blanche et lance des étincelles.

La fonte blanche remplit difficilement les petites cavités des moules parce qu'elle est peu coulante et qu'elle se fige vite. Les parois des objets coulés avec cette fonte, étant promptement congelées, leurs arêtes sont toujours arrondies et le retrait du métal a lieu du centre vers la surface; de là naissent des cavités au milieu de l'épaisseur de ces objets.

La fonte blanche lamelleuse est d'autant plus dure qu'elle contient plus de carbone : certaines variétés fondues à une température très-élevée à l'abri du contact de l'air puis refroidies très-lentement, peuvent devenir graphiteuses et grises.

Le fer a donc la propriété de dissoudre le charbon, lorsqu'il est parvenu à un haut degré de chaleur, et de l'abandonner ensuite sous forme de graphite, par un refroidissement lent.

Toutes les fontes portées à un certain degré de chaleur et refroidies lentement deviennent moins dures et plus foncées en couleur.

Les fontes blanches s'oxident moins vite que les fontes grises.

Fonte blanche par surcharge.

Quand il y a excès de minérai dans le haut fourneau, la température s'abaisse, l'affinité du fer pour le carbone diminue, la réduction se fait incomplètement et la fonte est pauvre en carbone. La fonte blanche par surcharge est généralement grenue : mais on conçoit que la proportion de minérai relativement au combustible peut varier, ainsi que la teneur en certaines substances étrangères, et que les produits du haut-fourneau peuvent présenter toutes les variétés intermédiaires depuis l'acier le plus carburé jusqu'à la fonte blanche lamelleuse. La fonte blanche par surcharge ou grenue, a un grain fin et serré : sa couleur est d'un blanc grisâtre; elle est dure, élastique et cassante.

La fonte blanche grenue fond plus vite que la fonte grise : elle acquiert un état de fusion pâteuse comme la fonte blanche lamelleuse, mais elle se fige moins vite. Elle est d'une grande blancheur en coulant et très-étincelante.

La fonte blanche grenue présente les mêmes défauts que la fonte blanche lamelleuse pour la coulée des objets. Elle est peu fluide, elle remplit difficilement les parties minces des moules, elle ne peut donner des arêtes vives, enfin elle occasionne des cavités par le retrait qu'elle prend à la suite de sa prompte solidification à la surface.

La fonte blanche par décarburation.

Lorsque les fontes grises ou truitées sont fondues et exposées longtemps à l'action des courants d'air, une partie de leur carbone est brulé, et la partie restante de carbone est unie plus intimement avec le fer. Lorsque la décarburation est poussée jusqu'à un certain degré, on obtient de la fonte blanche. Si on continue de soumettre la fonte en fusion à l'action de l'air, et qu'on la remue pour en renouveler les surfaces exposées aux courants, la fonte perd de plus en plus de son carbone, se rapproche davantage de l'acier d'abord, et du fer pur ensuite et produit enfin du fer affiné.

La fonte blanche par décarburation est d'autant moins fusible qu'elle contient moins de carbone. Elle a une couleur métallique; sa cassure est tantôt lamelleuse et tantôt grenue. Lorsque la décarburation est très-avancée, la cassure de la fonte est uniquement grenue, irrégulière, parsemée de trous ou petites cavités et d'une couleur d'un blanc mat et plus ou moins gris. Cette espèce de fonte est moins dure que les 2 autres sortes de fonte blanche; elle est très-cassante.

La fonte blanchie par la trempe.

Lorsqu'on refroidit subitement certaines fontes quand elles sont encore à l'état de fusion ignée, elles se blanchissent et présentent tous les caractères de la fonte blanche lamelleuse. L'effet de la trempe est plus ou moins prononcé selon les dimensions de l'objet coulé et refroidi.

Plus ces dimensions sont faibles, plus la trempe agit avec énergie pour modifier la texture moléculaire de la fonte.

Toutes les fontes durcissent par la trempe, mais elles ne peuvent toutes blanchir. En général ce sont les fontes fortes, celles qui contiennent du manganèse, qui blanchissent le plus facilement. Les fontes grises de moulage de notre pays, surtout celles au coke, refondues au cubilot sans mélange avec des fontes de 2e fusion, deviennent plus dures par un refroidissement subit mais ne blanchissent pas en général. Les fontes fortes à canon, au contraire, blanchissent très-facilement.

Un moule humide produit l'effet de la trempe à la surface de l'objet coulé.

Aussi est-il très-important de sécher complètement les moules des canons pour empêcher les tourillons de se convertir en fonte blanche. La fonte de Suède blanchit très-facilement.

Les fontes blanchies par la trempe, reprennent leurs qualités primitives, lorsqu'après les avoir fondues de nouveau à l'abri du contact de l'air on les laisse se refroidir lentement.

Lorsque l'allure du haut fourneau est régulière, que le combustible est en excès et que la température y est très-élevée la réduction du minérai se fait plus complètement, l'affinité du fer pour le carbone devient plus grande; d'ailleurs l'abondance du carbone fait qu'une partie en est entraînée à l'état libre; il y a production de fonte grise.

Fonte noire — ses caractères.

Au commencement du travail au haut-fourneau, il s'y produit d'abord une chaleur des plus élevée, qu'il serait impossible de conserver à moins de consommer une quantité énorme de combustible : les premiers produits sont de la *fonte noire*.

La fonte noire est assez tendre pour conserver l'empreinte du marteau : sa cassure est à très-gros grains miroitans d'une couleur grise très-foncée ou noirâtre, provenant des grains graphiteux visibles à l'œil. La fonte noire n'a presque point de sonorité ni d'élasticité : elle est très-peu tenace : elle est plus graphiteuse plus poreuse, plus fusible et plus coulante que toutes les autres fontes. Elle prend à la coulée une couleur rouge et ne lance pas des étincelles.

Fonte grise — ses caractères.

La fonte grise a une cassure grenue, tantôt à gros grains, tantôt à grains fins et serrés. Plus la fonte est graphiteuse, plus ses grains sont gros et plus la couleur en est foncée. Toutes les fontes grises renferment une certaine quantité de silicium qui en diminue la ténacité. Lorsque le silicium est en quantité notable la fonte grise a une couleur claire, des grains fins et serrés : elle est très-cassante et on dit que la fonte est sèche.

La fonte grise entre en fusion à une température très-élevée, plus forte que pour les autres fontes : elle est très-fluide, coulante et se fige lentement : elle remplit bien les cavités des moules, et elle conserve après le refroidissement ses arêtes vives. La fonte grise a plus de retrait que les fontes blanches ou truitées. Les fontes exposées à l'air s'oxident d'autant plus facilement qu'elles sont plus grises.

Influence des corps étrangers sur les propriétés de la fonte.

Nous avons déjà dit que la fonte ne se composait pas exclusivement de fer et de carbone, mais qu'elle contenait en outre une petite quantité d'autres substances, et que certaines d'entre-elles pouvaient altérer considérablement les propriétés de ce métal.

Le silicium nuit à la ténacité des fontes. Les fontes grises au coke en renferment une quantité très-notable.

Le phosphore est contenu dans presque toutes les fontes : il les rend fusibles, très-coulantes et lentes à se figer : mais il nuit énormément à leur ténacité. Les fontes phosphoreuses conviennent pour couler des objets à parois minces, à formes délicates, tels que des médailles, des statues, des ornements qui n'ont pas besoin d'une grande résistance.

Lorsqu'on expose à des courants d'air la fonte phosphoreuse à l'état de fusion, une partie du phosphore s'acidifie et entre dans les laitiers. On a ainsi l'explication partielle de l'augmentation de ténacité qu'on remarque dans les fontes refondues au fourneau à réverbère, lorsque la fusion n'est pas trop prolongée. Le phosphore a une tendance à blanchir la fonte.

Le soufre augmente la fusibilité de la fonte : il tend à la blanchir, il nuit à sa ténacité. Les objets coulés avec des fontes sulfureuses sont exposés à des soufflures : la surface de ces objets est souvent inégale, raboteuse, parsemée de petites piqûres. Ces défauts sont dus au bouillonnement qu'on remarque dans les fontes sulfureuses lorsqu'elles sont à l'état de fusion.

On améliore beaucoup les fontes sulfureuses en les mélangeant pour la coulée des objets avec de la fonte phosphoreuse. Il paraît que lors de la fusion le phosphore annihile une portion du soufre dans les fontes en se substituant au carbone et en facilitant par suite la formation du sulfure de carbone.

Le manganèse rend la combinaison du fer avec le carbone plus stable : il durcit la fonte, et il paraît essentiel à la formation de la fonte blanche lamelleuse.

En général les fontes fortes sont manganésifères et blanchissent par la trempe. Les fontes manganésifères sont très-recherchées pour la fabrication des canons, de l'acier et du fer fort.

L'antimoine durcit la fonte, la rend cassante et plus fusible.

Le zinc rend la fonte fusible et cassante : il répand, quand il est à l'état de fusion, des vapeurs qui nuisent à la netteté des surfaces des objets coulés.

L'étain s'allie très-bien avec la fonte, lui communique une texture à grains fins et serrés ; la rend fusible, sonore et dure, mais nuit à sa ténacité et à son homogénéité.

Le cuivre forme un alliage ou plutôt un mélange peu stable avec la fonte. La dilatabilité inégale de la fonte et du cuivre fait que ce mélange ne convient nullement pour la fabrication des bouches à feu.

L'arsenic durcit la fonte et la rend cassante.

La surface des objets coulés avec de la fonte arsénieuse est souvent rugueuse, inégale et remplie de petites cavités.

En général, la présence des corps étrangers dans la fonte ne peut que la rendre aigre et nuire à sa ténacité.

ARTICLE VII.

RÉCEPTION DES FONTES FORTES A CANON.

La fontes employées au coulage des canons proviennent de minérais destinés à la fabrication du fer fort, et sont connues dans le commerce sous le nom de *fontes fortes*. Leur aspect varie suivant qu'elles proviennent de hauts-fourneaux au bois ou de ceux au coke : leur cassure diffère suivant les dimensions des échantillons : en général le grain est d'autant plus gros, plus miroitant, plus foncé en couleur que les barreaux de fonte essayés sont plus volumineux. Dans un même échantillon l'aspect de la cassure varie également suivant la place où la rupture a été opérée.

Caractères des fontes fortes au bois.

Les fontes fortes au bois sont généralement livrées en *gueuses* pesant 1000 à 1200 kilogrammes, elles ont un grain assez gros, miroitant, une cassure plus ou moins arrachée d'une couleur grise claire : le graphite s'y montre fort souvent affectant plus ou moins parfaitement la forme cubique et ayant un aspect cristallin. Les fontes très-graphiteuses ne sont pas fortes, mais elles peuvent le devenir par une seconde fusion suffisamment prolongée pour bruler l'excès de carbone ou par un mélange en proportion convenable avec des fontes de 2[de] fusion. On constate facilement la présence du graphite dans la fonte, en répandant un peu de vinaigre sur une cassure récente : 24 heures après, la fonte est entièrement oxidée à l'exception des grains de graphite qui sont inattaquables par l'acide et qui restent brillants.

Caractères des fontes fortes au coke.

Les fontes fortes au coke sont ordinairement livrées en gueusets pesant de 50 à 100 kilogrammes ; elles ont en général un grain plus fin que les fontes au bois, une couleur plus foncée, une cassure également arrachée : elles présentent souvent une disposition étoilée formée par un assemblage de rayons qui convergent : le pourtour du gueuset montre parfois à la cassure une pellicule blanchâtre.

On reconnait la présence du graphite dans les fontes au coke par l'essai du vinaigre.

Effet de la fusion au fourneau à réverbère.

Ce que nous venons de dire relativement à l'influence du graphite sur la résistance des fontes grises au bois s'applique également aux fontes au coke. La fusion au fourneau à réverbère améliore la ténacité des fontes ;

1° En enlevant un excès de carbone et rapprochant ainsi la fonte de l'état du fer pur ;

2° En produisant une température plus élevée que dans le haut-fourneau ce qui achève la réduction des parties impures mêlées à la fonte ;

3° Comme cas particulier du second paragraphe, en acidifiant une partie du phosphore qui entre ainsi dans les laitiers.

Le mélange de plusieurs espèces de fontes en améliore la qualité par l'influence des corps étrangers apportés par ces diverses fontes. Comme exemple nous citerons l'effet des fontes phosphoreuses sur les fontes sulfureuses lorsqu'elles sont fondues ensemble dans des proportions convenables.

Il est très-important d'éviter que la fonte refondue au fourneau à réverbère devienne blanche, car elle serait cassante, les forets ne mordraient pas, et la pièce serait difficile à couler par le peu de fluidité que la fonte blanche est susceptible d'acquérir.

Emploi des masselottes.

La fabrication des canons donne lieu à un résidu considérable la *masselotte*, composée d'excellente fonte qu'il importe d'utiliser. C'est dans ce but qu'on achète des fontes suffisamment grises, afin que mélangées dans une certaine proportion avec les masselottes qui sont des fontes peu carburées, il en résulte au fourneau à réverbère des produits formés de fonte truitée, conservant encore assez de carbone libre pour être suffisamment fluides et pour ne pas être rebelles aux burins après le refroidissement.

Ainsi on achète des fontes grises, qu'on mêle en certaines proportions avec des masselottes pour les refondre aux fourneaux à réverbère afin de couler des canons qui soient de *fonte truitée.*

Epreuve par le tir à outrance.

Les caractères physiques ainsi que la composition chimique ne fournissent pas de données suffisantes pour déterminer le choix des fontes qui conviennent à la fabrication des bouches à feu. On est donc réduit à un mode d'essai, très-coûteux, il est vrai, mais qui fournit un renseignement *certain* sur la bonne qualité de la fonte reçue.

Cet essai consiste à fabriquer un canon de 8 long, modèle français, avec les fontes présentées et à lui faire subir les épreuves suivantes :

		kilog.							
20	coups à	1.333	de poudre	1	valet,	1	boulet,	1	valet,
20	id.	1.333	id.	1	id.	2	id.	1	id.
10	id.	1.958	id.	1	id.	3	id.	1	id.
5	id.	3.916	id.	1	id.	6	id.	1	id.

TOTAL 55 coups.

Lorsque le canon a supporté ces charges sans éclater, la fonte présentée est déclarée recevable : si la rupture a lieu avant ou au 55^{me} coup, la fonte est rebutée.

Il est d'usage, lorsque le canon a résisté aux 55 premiers coups de continuer le tir jusqu'à l'éclatement. Les nouvelles charges qu'on emploie alors sont constamment 7^{k}.832 de poudre 1 valet, 13 boulets, 1 valet.

En faisant toujours *l'épreuve à outrance*, on peut comparer la fonte essayée à celle employée précédemment, et on dit de la fonte qu'elle est à 56 ou à 58 coups, selon que la rupture de la pièce a eu lieu au 56^{me} ou au 58^{me} coup.

Par l'épreuve du tir on n'est jamais exposé à recevoir de mauvaises fontes.

Une cause fortuite, telle qu'un dérangement dans le fourneau à réverbère, un calement de boulet, etc., peut déterminer la rupture prématurée d'un canon sans que la fonte en soit mauvaise. Dans ce cas on est exposé à rebuter de la bonne fonte : mais le mode d'épreuve offre cependant cette garantie que la *fonte reçue* est *toujours de bonne qualité.*

Nécessité de prolonger la fusion au fourneau à réverbère, pour la coulée d'essai d'un canon de 8 long, quand la fonte présentée est trop grise.

La fonte présentée peut être d'une bonne qualité mais trop grise pour donner un métal à canon suffisamment tenace, quand elle est refondue seule dans le fourneau à réverbère. On a soin, dans ce cas, de prolonger assez la fusion pour que la fonte soit convenablement décarburée.

Insuffisance des essais mécaniques pour reconnaître les qualités des fontes de 1re fusion comme métal à canon.

Ce serait un moyen commode pour reconnaître les qualités des fontes de 1re fusion présentées pour la fabrication des canons, s'il suffisait d'en choisir des barreaux d'une dimension déterminée, ou de découper dans ces barreaux des échantillons d'une certaine grandeur, et de les soumettre à certains efforts de choc ou de traction, jusqu'à ce que la rupture s'en suivit. La grandeur de l'effort exercé pour produire la rupture servirait à évaluer la résistance dont les fontes sont capables, les essais sur la résistance mécanique étant faciles, il serait possible d'estimer sainement le mérite d'une fourniture de fonte comme métal à canon. Mais ce mode d'examen n'est admissible que pour autant que tous les barreaux de fonte offrent le même aspect à la cassure et la même résistance par unité de surface.

Il faudrait en outre que les échantillons pris sur toutes les fontes de 1re fusion quelle que soit leur l'origine et qui conviennent à la coulée des pièces, offrissent la même résistance à la rupture, ou du moins que leurs résistances fussent proportionnées au nombre de coups que les pièces sont capables de supporter.

Enfin la mauvaise fonte ne devrait jamais être aussi résistante aux efforts de choc ou de pression en 1re fusion que la bonne fonte également en 1re fusion. Les considérations qui vont suivre, démontreront qu'un genre d'essai aussi simple, que celui de la résistance au choc ou à la pression, ne peut malheureusement servir à reconnaître la qualité d'une fonte à canon, tant qu'elle n'a pas été refondue.

Les fontes de 1re fusion sont obtenues directement par la coulée au haut-fourneau. Le métal liquide est reçu dans des rigoles creusées dans le sable qui forme le sol de l'établissement. Les lingots de fonte prennent le nom de *gueusets*, quand ils ne pèsent que de 30 à 100 kilog. et celui de gueuses quand leur poids est de 1000 à 1200 kilogrammes. La fonte provenant d'une même coulée est généralement considérée comme composée de la même manière. Cependant on remarque certaines différences entre la fonte coulée la première et qui provient du fond du creuset avec celle sortie la dernière du haut-fourneau et qui surnageait le bain du métal dans le creuset. La première est ordinairement un peu moins carburée et moins chaude. Cependant à part le plus ou moins de graphite qui peut se trouver dans les lingots extrêmes, on estime dans la pratique que la coulée entière forme une fonte jouissant des mêmes qualités, après qu'elle a été refondue, et qu'elle est composée de la même manière relativement aux autres substances que le fer et le carbone.

Malgré cette identité de composition, les lingots sont loin de présenter le même aspect à la cassure et la même ténacité par unité de surface. On y remarque tantôt un grain fin et serré, tantôt de gros grains, cristallins et graphiteux. La résistance à la rupture des divers lingots coulés en même temps avec les mêmes dimensions, est très-variable. Certains lingots sont très-difficiles à rompre, d'autres, au contraire, se brisent au premier coup de masse.

Quand le sable des rigoles est humide, la fonte se trempe plus ou moins; elle acquiert un grain fin et serré. On appelle gueuses-mères, celles qui proviennent d'une rigole communiquant avec plusieurs autres, et par laquelle doit passer le métal liquide pour remplir ces dernières. Les gueuses-mères ayant été échauffées par le courant de fonte liquide, se refroidissent bien plus lentement que les autres, aussi montrent-elles à la cassure de plus gros grains et l'aspect d'une fonte plus grise. Dans un même lingot, il se produit sur une plus petite échelle le même phénomène que pour les gueuses-mères : c'est-à-dire, que l'extrémité du lingot par où arrive le métal est plus échauffée que l'extrémité opposée, et que si on la brise après le refroidissement sa texture est à grains plus gros et plus graphiteux. La texture des divers lingots varie suivant leurs dimensions, suivant l'époque de la coulée, les circonstances du refroidissement, etc., etc.

Les différences qu'on remarque dans la texture se retrouvent dans la ténacité des lingots provenant d'une même coulée au haut-fourneau. Il y a même des irrégularités très-notables dans la ténacité des divers échantillons provenant d'un *même lingot.*

Il faut donc reconnaître que les essais mécaniques sur la résistance des gueuses ou gueusets de première fusion ne peuvent servir à déterminer la ténacité des mêmes fontes lorsqu'elles seront refondues dans des circonstances favorables.

Cette opinion est corroborée par le fait que la fusion au fourneau à réverbère améliore en général les fontes, et qu'il faut pouvoir tenir compte de cette amélioration dans l'examen d'une fourniture.

Monge indique dans son traité sur la fabrication des bouches à feu, un moyen d'essayer les fontes destinées au coulage des canons. Il consiste à couler avec les fontes présentées un barreau d'une certaine dimension, à sceller ce barreau dans un mur par une extrémité, à suspendre des poids à l'autre bout jusqu'à ce que la rupture s'en suive, et à juger de la bonté du métal par la grandeur du poids sous lequel la rupture a eu lieu.

Mais ce barreau d'épreuve est une fonte de 2de fusion et non de 1re fusion.

Il est fort souvent arrivé que des fontes excellentes pour la fabrication des canons par une refonte au fourneau à réverbère, se sont trouvées en 1re fusion moins résistantes que de mauvaises fontes.

Comparaison des résultats des essais mécaniques sur la résistance des fontes de 2de fusion avec les résultats que fournit l'épreuve du tir d'un canon de 8, coulé avec les mêmes fontes.

Les épreuves sur la résistance à la rupture des fontes de 2de fusion présentent moins d'irrégularités que lorsque les échantillons essayés sont de 1re fusion, mais ces épreuves sont loin d'être exemptes d'anomalies.

C'est une chose digne de remarque en effet, que la texture de la fonte et sa ténacité sont énormément influencées par les circonstances qui ont accompagné la congélation du métal et son refroidissement.

La fonte refroidie subitement a toujours le grain plus fin et est moins tenace. Il en serait de même après le refroidissement, si le métal était prêt à se figer au moment du remplissage du moule.

Les causes d'irrégularité sont d'autant plus influentes que les échantillons coulés sont plus petits. Le seul moyen d'avoir des résultats toujours comparables entre eux et d'atténuer les causes d'irrégularités, consisterait donc à découper des barreaux d'essai dans de grandes masses de fonte, telles qu'en offrent les canons de 8.

Mais ici il se présente une question : dans quelle partie de la masse prendra-t-on l'échantillon ? On sait, en effet, que dans une forte masse de fonte, le métal est toujours poreux au centre, tandis qu'il est plus dur à la surface, et que fort souvent les fontes sont blanchies vers l'extérieur. Il faudra donc choisir l'échantillon dans une position intermédiaire. Mais on rencontre une nouvelle difficulté. La masselotte produit sur les parties inférieures de la pièce une pression qui en augmente la densité et la tenacité. Si on veut pouvoir comparer les épreuves sur les échantillons avec celles du tir des canons de 8, il faut absolument que la masse de fonte d'où provient l'échantillon, soit d'une hauteur suffisante, pour que, lors de la coulée, les parties supérieures aient produit l'effet de compression de la masselotte vers le bas où doit être découpé l'échantillon. Au lieu d'une masse cubique ou cylindrique de fonte ayant à peu près autant de base que de hauteur, on est donc forcé de couler un canon ou peu s'en faut : afin que les parties où l'on prendra l'échantillon d'essai aient subi les effets de compression d'une masselotte.

Par ce procédé auquel on est logiquement amené, on est déjà bien près des fortes dépenses que nécessite l'épreuve du tir d'un canon de 8, dépenses qu'on voulait éviter. Mais de nouvelles causes d'anomalies sont à signaler.

1° Les échantillons peuvent avoir leurs dimensions plus ou moins exactes.

2° Les points d'appui des couteaux, des poinçons, etc., avec lesquels fonctionnent les appareils à essais mécaniques, peuvent varier dans les limites nécessitées par le jeu du mécanisme, etc., etc.

3° Les échantillons essayés peuvent avoir certains défauts invisibles à l'œil.

Les expériences sur la résistance des divers échantillons, ont fait découvrir des différences dans la ténacité, non-seulement pour des échantillons pris à des hauteurs inégales d'une même pièce, mais encore pour des échantillons découpés aussi identiquement que possible dans le même tronçon ou rondelle de la pièce. Ces différences, loin d'être négligeables, se sont élevées fort souvent à des fractions importantes du chiffre représentant la ténacité moyenne des échantillons.

La ténacité de la fonte des canons de 8, dépasse en général celle strictement nécessaire pour résister à l'épreuve règlementaire. La résistance de la pièce, dans un même tronçon compris entre deux sections droites, est peu influencée par un défaut ou une texture irrégulière qui n'existerait qu'en une petite partie du tronçon : tandis que la solidité d'un simple échantillon en serait fortement compromise.

Les objections que nous venons de soulever sont sérieuses, et l'on est heureux de posséder, dans l'épreuve à outrance, un moyen certain de ne recevoir que de bonnes fontes, un moyen de comparer les fontes présentées avec celles consommées depuis plus d'un demi-siècle, enfin un moyen d'essayer le métal par la poudre même, ce redoutable agent auquel les pièces doivent résister.

Caractères de la fonte des canons de 8 *long pour épreuves.*

Les fontes des canons de 8 sont généralement truitées d'une manière uniforme : elles présentent des grains moyens et serrés, autant de gris foncé que de gris clair. Leur cassure est arrachée.

Caractères de la fonte des canons de service.

La fonte des bouches à feu, obtenue par le mélange ordinaire de fontes de 1re fusion avec celles de 2de fusion, est ordinairement truitée sur fonds blanc, à gros grains, bien arrachés.

Cet aspect varie suivant le calibre des pièces.

Plus le calibre est fort, plus les grains sont gros ; plus aussi la fonte est tendre à égalité de mélange dans la charge du fourneau à réverbère.

Les caractères peuvent aussi varier d'après la température de la fonte au moment de la coulée, la durée de la fusion, l'épaisseur du moule, etc., etc.

LIVRE II.

MATÉRIAUX DE MOULAGE.

PRÉLIMINAIRES.

ARTICLE I.

DIVISIONS A ÉTABLIR DANS LA FABRICATION DES BOUCHES A FEU.

La fabrication des bouches à feu comprend deux séries d'opérations bien distinctes : les unes relatives au *fondage*, les autres concernant le *forage* et le *façonnage extérieur*. A ces travaux il faut ajouter ceux de réception, les visites et les épreuves à faire subir aux bouches à feu.

Pour arriver à fondre une pièce, il faut en faire le *modèle*, puis le *moule* : il faut disposer le moule pour la coulée : il faut mettre dans un *fourneau* approprié aux métaux que l'on veut fondre, les *quantités de matières nécessaires pour remplir le moule ;* il faut en *opérer la fusion* et enfin *verser* le *métal liquide dans le moule.*

Les autres opérations de la fabrication d'une bouche à feu comprennent le dépouillement de la pièce des matériaux de moulage qui l'enveloppaient, le burinage dans lequel on enlève toutes les petites aspérités ou infiltrations de métal ; *la coupe de la masselotte* ou excédant de métal avec lequel les pièces sont coulées, le *centrage de la pièce*, le *forage* et *l'alésage de l'ame*, ainsi que *la mise de l'ame à la longueur voulue*, *le tournage* en entier ou en partie de la *surface du corps de la pièce*, le *tournage des tourillons*, enfin le *ciselage du métal entre les embases* ou *aux parties qui n'ont pu être modelées au tour*, telles que les anses aux pièces de bronze, les champs de lumière, les masses de mire, etc.

Il faut *mettre un grain de lumière* aux pièces de bronze, il faut *percer la lumière*, *couper l'excédant du bouton de culasse* et le *façonner*. Tous ces travaux sont entremêlés de visites partielles, enfin une visite générale décide de la réception ou du rejet de la bouche à feu.

ARTICLE II.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LE MOULAGE — DIVISION DU MOULAGE.

Le moule est le vide ménagé dans une substance solide, capable de recevoir le métal en fusion, lequel après le refroidissement, doit représenter la bouche à feu.

Le vide du moule doit donc être de même forme que l'objet à couler. Quant aux dimensions du moule, il faut avoir égard au *retrait* que prend le métal après le refroidissement, à la *déformation* que subit le moule par la pression qu'exerce le métal liquide qu'il doit contenir, enfin à l'*excédant* de métal nécessaire pour soumettre la pièce aux opérations du tournage et du ciselage.

Le moule doit se faire sur un modèle.

L'expérience a indiqué que, pour les pièces de fonte ou de bronze, le retrait du métal varie entre $^1/_{144}$ et $^1/_{192}$, et qu'en conséquence il faut augmenter les dimensions du modèle dans la même proportion.

Les pièces sont coulées verticalement, la volée en haut, avec un excédant de métal vers le haut, la *masselotte*. La masselotte a pour but de *ralentir le refroidissement* de la pièce vers le bourrelet, de *fournir le métal* nécessaire pour remplir le vide occasionné par la déformation du moule ou par les infiltrations dans la matière du moule, enfin d'*exercer une forte pression* sur le corps de la pièce au moment de la congélation, de manière à en *augmenter la densité*.

La solidification de la bouche à feu commence toujours par la surface, et continue progressivement jusque vers le centre. A mesure que cette solidification a lieu, le *métal prend en même temps du retrait;* et comme il y a un moment où l'intérieur est encore à l'état liquide ou pâteux lorsque l'extérieur est déjà solide, il en résulte qu'à cette époque du refroidissement, le retrait se manifeste principalement au centre de la pièce où il produirait des tiraillements, des fissures et des solutions de continuité si la masselotte n'était pas là pour y remédier. La masselotte fournit du métal liquide qui s'insinue dans les fissures : elle comprime l'intérieur tant qu'il est à l'état pâteux, refoule la matière et produit une augmentation dans la densité de la pièce. Malgré son effet utile, la masselotte ne peut que remédier imparfaitement aux inconvénients que nous venons d'indiquer, et le métal des pièces de fonte ou de bronze est toujours poreux dans le voisinage de l'axe. Cela tient à l'étranglement de la pièce au collet de la volée ; cette partie ayant moins de masse se refroidit et se fige plus vite. Il faut aussi considérer que quoi qu'on fasse, on ne saurait empêcher le refroidissement de se faire par la urf ace.

La bouche à feu doit être coulée avec un excédant au bouton de culasse, nommé *faux bouton* et *carré du faux bouton*. Cet excédant a pour but de donner prise sur la pièce, afin qu'elle puisse participer au mouvement de rotation de la roue motrice lors du forage.

On emploie trois sortes de moulage pour les bouches à feu :

1° Le moulage en sable, qui s'exécute sur un modèle en fonte ou en bronze.

2° Le moulage mixte dans lequel le modèle est en terre, tandis que le moule est en sable.

3° Le moulage en terre, dans lequel le modèle et le moule sont en terre.

Dans le moulage en sable, le modèle est en métal ainsi que le châssis, enveloppe extérieure du moule. Le modèle et le châssis ont une grande durée; une partie des opérations du moulage est abrégée; et l'opération du moulage, qui consiste à fouler du sable entre le modèle et le châssis, est facilitée par la résistance de ces deux objets. Il en résulte que le moulage en sable est plus expéditif et moins coûteux que celui en terre. Ces avantages ne sont pas les seuls, car le sable étant moins compressible que la terre, on conçoit que les pièces moulées en sable dépouillent beaucoup mieux que les autres. Cette supériorité du moulage en sable est balancée par les premiers frais qui sont plus considérables, à cause des modèles et des châssis qui coûtent cher et demandent d'ailleurs beaucoup de temps pour leur confection. Ce n'est que sur une fabrication assez importante qu'on parvient à regagner ces premiers frais par des économies répétées à chaque moulage.

Dans une fonderie, on possède un matériel plus ou moins considérable : on a des châssis qui permettent d'y mouler des pièces dont les tracés sont peu différents parce que l'épaisseur du sable peut varier dans certaines limites. D'un autre côté, dans le moulage en terre, la confection du modèle est peu coûteuse, les modèles se font rapidement, deux ouvriers peuvant en faire plusieurs à la fois ; on a donc imaginé le *moulage mixte*, dans lequel on fait un moule en sable sur un modèle en terre. Ce genre de moulage est employé à la fonderie de Liége, lorsqu'il s'agit d'une pièce d'un nouveau tracé, et que la commande n'est pas assez forte pour qu'il y ait lieu de fabriquer un modèle en métal et des châssis appropriés à ce modèle.

A la fonderie de Liége, *le moulage en sable est de règle*, même pour une seule bouche à feu nouvelle, puisque alors le moule en sable se fait sur un modèle en terre.

Toutes les pièces de bronze se moulaient autrefois en terre, mais nous avons déjà dit, que depuis 1836, le moulage en sable pour les pièces de ce métal avait été introduit à la fonderie de Liége : il en résulte que deux circonstances seules pourraient donner lieu au moulage en terre dans cet établissement.

1° Si, n'ayant qu'à couler un petit nombre de pièces d'un nouveau modèle, on ne pouvait trouver un châssis qui convînt. Il faudrait, dans ce cas, que la pièce eût des dimensions tout-à-fait disproportionnées ; car ordinairement on approprie un châssis en coulant une ou deux parties supplémentaires, ce qui n'occasionne pas une grande dépense.

2° Si l'on avait à couler une pièce de bronze d'un très-grand calibre. La fonderie de Liége n'ayant encore fabriqué que des bouches à feu de campagne en bronze, il reste à vérifier si le système actuel de moulage conviendrait aux gros calibres. Dans notre opinion, il n'y a aucune raison pour ne pas réussir aussi bien avec le moulage en sable, qu'avec celui en terre.

Le bronze devient beaucoup plus fluide par la fusion que la fonte. Il doit donc y avoir des différences dans la préparation des matériaux de moulage et dans les procédés de moulage eux-mêmes. Nous aurons soin de les signaler.

CHAPITRE PREMIER.

MATÉRIAUX POUR LE MOULAGE EN SABLE DES PIÈCES DE FONTE.

ARTICLE I.

CHOIX ET QUALITÉS DU SABLE POUR LE MOULAGE EN SABLE DES PIÈCES EN FONTE.

Le sable employé au moulage des pièces en fonte doit être anguleux, à gros grains, très-argileux, suffisamment réfractaire.

Nous allons faire un examen de ces diverses conditions.

Le sable doit être anguleux et à gros grains afin d'augmenter la résistance du moule par la rugosité de ses particules comme aussi par leur grosseur. Un sable fin et à grains arrondis se désagrègerait, soit lors de l'enlèvement du modèle, soit lors de la coulée.

La grosseur des grains contribue à rendre le moule moins compact et à faciliter l'évaporation complète de l'humidité, en lui livrant passage lors de la dessiccation dans l'étuve. La porosité, qui résulte de la grosseur des grains, n'est pas moins nécessaire pour permettre la sortie des gaz qui se forment dans la matière du moule sous l'influence de l'énorme température du métal en fusion.

Le sable doit être argileux, afin d'avoir du *liant*. Car l'argile a la propriété de se durcir par la dessiccation, de conserver les formes qu'on lui a données à cause de sa plasticité, et de posséder la consistance nécessaire pour résister au choc du métal liquide, tombant dans le moule. Cependant, l'argile se contractant par la chaleur et le sable ne le fesant pas, on comprend qu'elle ne puisse dépasser certaines proportions dans le sable destiné au moulage. On reconnait que le sable est trop argileux si le moule se fendille par la dessiccation.

Le sable doit être suffisamment réfractaire afin de ne pas entrer en fusion ni même de se ramollir lors de la coulée. Le sable pur ou la silice est éminemment réfractaire, mais il perd ces qualités quand il contient des sels calcaires et des oxides métalliques en proportions sensibles. Les sels calcaires se décomposent à une température beaucoup plus basse que celle de la fonte en fusion, et donnent lieu à un dégagement de gaz carbonique qui pourrait occasionner des soufflures ou des dégradations dans le moule. D'ailleurs ces sels formeraient des laitiers en se combinant, sous l'influence de la température du métal liquide, avec la silice et l'alumine que contient le sable. La surface du moule se vitrifierait : une partie de la fonte pourrait même entrer dans cette combinaison : la pièce ne dépouillerait plus et ses dimensions subiraient des altérations sensibles.

L'oxide de fer, que le sable contiendrait, se liquéfierait au contact du métal en fusion et reproduirait tous les inconvénients qui résultent de la vitrification de la surface du moule.

Le sable de moulage dont on se sert à la fonderie de Liége, a une couleur jaune-rougeâtre. Les opérations qu'on lui fait subir, ont pour but de le débarrasser des corps étrangers, de le rendre suffisamment liant et homogène et de diminuer sa faculté conductrice de la chaleur en le mélangeant avec du charbon de bois ou du coke pulvérisés.

ARTICLE II.

PRÉPARATION DU SABLE POUR LE MOULAGE DES PIÈCES DE FONTE.

Transport du sable à la fonderie.

Le sable employé à la fabrication des bouches à feu, est extrait d'une sablière à Rocour, à une lieue de Liége. Il forme une couche de 0,50 à $1^{m},30$ d'épaisseur, en-dessous de la terre végétale.

Le propriétaire de la fosse livre le sable chargé sur le tombereau, à un prix convenu et le transport jusqu'à la fonderie se fait par entreprise.

A mesure que le sable arrive dans l'établissement, on l'amoncelle dans un lieu convenable à ciel ouvert. L'approvisionnement varie entre 300 et 600 stères. Il est bon d'en avoir une grande quantité disponible, car l'hiver et dans les mauvais temps le charriage est difficile.

Pour préparer le sable on le charge sur des brouettes et on le transporte à l'étuve. On a soin d'enlever les petits cailloux de silex à mesure qu'on les rencontre, soit en chargeant les brouettes, soit en les déchargeant.

Description de l'étuve à sécher le sable.

L'étuve est une chambre rectangulaire voutée, fig. 1. 2. 3 et 4 planche 1.

E, F. (fig. 1. 3 et 4) foyers communiquant de l'intérieur avec l'extérieur. Ils sont placés du côté opposé à la cheminée de tirage et d'évaporation.

GH (fig. 1) Section droite de la cheminée.

LM (fig. 1 et 2) Tirans en fer servant à consolider la voûte.

PQ (fig. 1, 2 et 4) Etagères en fonte placées sur les deux côtés de l'étuve, destinées à augmenter les surfaces de chauffe.

RS (fig. 2) Porte en fer à deux vantaux.

TU (fig. 1 et 2) Chariot de fonte qui, ne devant servir que pour porter les moules des canons, est retiré de l'étuve quand on dessèche le sable.

XY (fig. 1) Chemin de fer pour guider le chariot TU. Ce chemin devient inutile si l'étuve est uniquement réservée à la dessiccation du sable.

Le sol de l'étuve est tapissé de dalles en fonte.

Séchage du sable.

Le sable est déposé sur le sol et sur les étagères de l'étuve, en couches de $0^{m},08$ à 0,10 d'épaisseur. On fait un feu assez ardent, allumé et entretenu par l'extérieur. Une nuit, ou 8 heures de séchage suffisent si la couche de sable est mince; mais quand la couche est épaisse, on remue le sable au bout de 8 heures de feu pour ramener vers le haut les parties inférieures et renouveler les surfaces d'évaporation. Profitant de la chaleur acquise, on fait des feux moins ardents et on laisse le séchage durer une 2[de] nuit.

Le séchage a pour but de faciliter la division de la matière, de détruire les parties organiques qu'elle pourait contenir, d'augmenter sa faculté absorbante de l'eau en vue du corroyage ultérieur, et enfin de rendre l'argile contenue dans le sable moins susceptible de retrait.

Pilage du sable.

Au sortir de l'étuve, le sable est transporté dans un hangar et étendu en couches de $0^{m},02$ à $0^{m},03$ d'épaisseur sur un parquet en dalles de pierres bleues ou de fonte. Le hangar est fermé par des cloisons percées à jour afin de permettre l'arrivée de l'air extérieur nécessaire aux manœuvres chargés du pilage et travaillant dans une atmosphère de poussière.

Le pilage se fait avec des pilons en fonte du poids de $3^{kil.},5$ et emmanchés, fig. 5 planche I. On rejette les cailloux à mesure qu'on les découvre. Quand le sable a été broyé une première fois, on sillonne la couche avec un râteau de fer dont les dents sont distantes de 0,02 à 0,03, afin de ramener à la surface les gros morceaux, qui gagnent ordinairement le dessous et qui échappent ainsi au pilon.

On procède à un 2ᵈ pilage, puis on relève le sable en tas avec un râble de bois.

Le broyage d'un stère de sable est le travail ordinaire et journalier de 6 manœuvres.

Tamisage du sable.

Le tamisage du sable se fait de deux manières : à l'aide d'un chariot à tamis auquel on imprime un mouvement de va et vient ou à l'aide d'un blutoir.

Tamisage du sable par le chariot à tamis. (fig. 1. 2. 3. 4 et 5 planche II.)

Le chariot à tamis se compose d'un cadre rectangulaire en bois AA ; fig. 1. 2 et 3, porté sur 4 roulettes EE, fig. 1. 2. 4 et 5. Le fond du cadre est rempli par un tamis en fils métalliques distants de $0^m,0015$.

Les longs côtés du cadre porteurs des roulettes ont inférieurement la courbure BCD (fig. 1), du châssis sur lequel se fait le mouvement du chariot.

MM (fig. 1. 2 et 3). Châssis surmonté d'un chemin de fer avec rebords extérieurs. Le mouvement du chariot a lieu sur le chemin de fer et sa direction est assurée par les rebords.

La courbure BCD (fig. 1) est destinée à procurer au chariot un mouvement ascensionnel et de descente pendant qu'on lui imprime un mouvement de va et vient. Il en résulte de petites secousses qui facilitent le passage du sable au travers du tamis.

FG (fig. 1 et 2) chevalet sur lequel le châssis est assemblé.

On procède au tamisage du sable pilé de la manière suivante.

On dépose sur le chariot à tamis une certaine quantité de sable. Un ou deux hommes saisissent les poignées HH, (fig. 3) du chariot et lui impriment un mouvement rapide de va et vient, en changeant brusquement le sens du mouvement à la fin de chaque course. Le sable fin tombe au travers du tamis; tandis que les parties trop grosses et les corps étrangers sont retenus et rejetés ensuite.

Ce procédé est simple et rapide. Mais les ouvriers chargés de la manœuvre du chariot sont très-incommodés par la grande quantité de poussière produite dans ce travail.

Tamisage à l'aide d'un blutoir. (fig. 6. 7 et 8, planche II.)

Le blutoir pour tamiser le sable est simplement celui des boulangers dont l'enveloppe du tambour est en fils métalliques distants de $0^m,0015$.

AB (fig. 6 et 7). Axe du tambour incliné de A vers B (inclinaison de $1/_{20}$ à $1/_{25}$.)

FG (fig. 6. 7 et 8). Tambour en fils métalliques distants de 0,0015. Le tambour est consolidé par une carcasse formée de 4 tringles en bois parallèles à l'axe, et maintenues par un nombre suffisant de rayons.

DC (fig. 6. 7 et 8). Trémie servant à l'introduction du sable dans le tambour.

MN (fig. 6). Déversoir pour l'expulsion des parties grossières du sable ainsi que des corps étrangers.

E (fig. 6). Manivelle servant à faire tourner le tambour.

HIKL (fig. 6 et 8). Caisse en bois enveloppant le tambour : percée de deux ouvertures correspondantes à la trémie DC et au déversoir MN. Une porte pratiquée sur l'un des côtés de la caisse établit la communication avec l'intérieur et permet d'enlever le sable tamisé.

Pour tamiser le sable pilé, un ouvrier agissant sur la manivelle fait tourner le tambour : un autre jette le sable avec la pelle dans la trémie. Le sable entraîné par son propre poids et par la force centrifuge due à la rotation du tambour passe au travers du tissu métallique et se dépose dans le fond de la caisse, tandis que les parties grossières sont rejetées au-dehors par le déversoir.

Le sable, qu'il soit tamisé par le chariot à tamis ou par le blutoir, est amoncelé en un tas sous le hangar et réservé pour les opérations ultérieures que nous allons décrire.

Le blutoir peut servir au mélange du sable et du coke pulvérisé. On verse dans la trémie ces matières sèches dans la proportion voulue et elles traversent la toile du tambour mélangées et tamisées.

Mélange de sable desséché, pulvérisé et tamisé avec le coke pulvérisé et tamisé.

Un moyen de ralentir le refroidissement des pièces de fonte après la coulée, est d'interposer entre les grains du sable dont les moules sont composés, un corps peu conducteur du calorique.

Ce corps est le charbon. On emploie, comme charbon, le coke, substance qui se produit naturellement dans une fonderie, qu'il faut utiliser et qui est assez facile à broyer. Le coke ajouté au sable du moule, a en outre la propriété de faciliter le dépouillement de la pièce, parce qu'il est sans action chimique sur la fonte en fusion. Mais le charbon diminue le liant et l'adhérence du sable; on ne peut le mélanger que dans la proportion indiquée par l'expérience. Les moules des grosses bouches à feu sont plus exposés que les autres à être dégradés par la chute d'une plus grande quantité de métal en fusion, par les tiraillements produits par la quantité de chaleur contenue dans ce métal et par une plus grande et plus rapide émission de gaz provoquée par cette chaleur. Il est donc important de diminuer la quantité de coke dans le sable destiné au moulage des grosses pièces.

Ordinairement on mélange une partie de coke sur 9 parties de sable. Cette proportion de coke varie suivant les calibres; elle est de $^1/_6$ pour les petites pièces et de $^1/_{12}$ pour les plus gros canons.

Pour procéder au mélange on répand le sable sur le parquet de la sablerie par séries de 9 pelletées de sable (plus ou moins selon le calibre des pièces qu'il s'agit de mouler), en ajoutant une pelletée de coke à chacune de ces séries. On continue à superposer ces matières dans le même ordre et dans la proportion adoptée jusqu'à ce qu'on en ait la quantité voulue.

L'ouvrier remue le sable mélangé de coke avec la pelle, et le déplace plusieurs fois, afin de répartir le charbon aussi uniformément que possible.

Il forme ensuite une première couche de ce sable de 0,08 à 0,10 d'épaisseur qu'il sillonne avec la pelle et sur laquelle il verse un peu d'eau avec un arrosoir. Sur cette 1re couche il en étend une seconde semblable à la 1re, sillonnée et arrosée de même, puis vient le tour d'une 3^{me} couche, d'une 4^{me}, et ainsi de suite jusqu'à ce que tout le sable soit amoncelé.

Il arrive quelquefois que le sable est trop maigre ou pas assez argileux, ce qui lui ôte du liant; pour y remédier on délaie un peu de terre de pipe dans l'eau avec laquelle on arrose.

1re période de repos du sable après son mélange avec le coke.

Le sable mélangé avec le coke, doit rester amoncelé au moins pendant 48 heures. Les petits grumeaux d'argile absorbant l'humidité pendant ce temps, se gonflent et se divisent en particules plus petites.

Déplacement et nouveau corroyage du sable.

Après 48 heures, on déplace le monceau de sable, en le découpant à la pelle par tranchées verticales, mélangeant de nouveau les diverses parties qui le composent et disposant ce sable mélangé en séries de couches horizontales superposées comme les premières.

Arrivé à ce point, on laisse le sable amoncelé jusqu'au moment de s'en servir : mais on ne peut l'employer avant que 15 jours au moins se soient écoulés. Ce laps de temps est nécessaire pour que l'humidité pénètre bien dans toute la masse de sable et qu'elle amollisse l'argile qu'il contient, ce qui en favorise la division.

Les diverses manipulations que nous venons de décrire, rendent la matière plus liante et plus homogène.

Le sable préparé doit être conservé à l'abri de la pluie et garanti du soleil autant que possible. Il arrive quelquefois, par suite des fortes chaleurs de l'été, que le sable devient trop sec vers la surface du tas. Dans ce cas, on fait subir à la couche extérieure du sable un nouveau corroyage semblable au précédent, en arrosant convenablement chaque couche.

Dernières manipulations du sable avant son emploi pour le moulage.

Lorsque le moment du moulage est arrivé, il faut encore procéder à quelques opérations.

On prend du magasin au sable la quantité nécessaire pour le moulage de la journée, en découpant le tas à la pelle par tranchées verticales. On mélange ce sable enlevé au tas en le remuant à la pelle et le déplaçant plusieurs fois. Il ne reste plus qu'à passer le sable au laminoir, pour qu'il soit propre au moulage.

Le laminoir au sable est représenté par les (figures 1, 2 et 3; planche III).

LM, NO, fig. 2, sont deux cylindres en fonte, distants de 0,0025 à 0,003, placés parallèlement l'un à l'autre, leurs axes dans un même plan horizontal. Dans le travail, on communique à ces cylindres un mouvement de rotation en sens contraire, les points de leurs surfaces supérieures se rapprochant.

AB, fig. 1 et 3 : trémie en tôle placée au-dessus des laminoirs, dans laquelle on verse le sable qu'il s'agit de tamiser.

CD, fig. 2 et 3, axe horizontal pourvu d'une manivelle I, fig. 1 et 3, et d'un pignon denté KK.

Les diverses figures indiquent suffisamment la combinaison des engrenages par lesquels en agissant sur la manivelle I, on procure aux cylindres du laminoir un mouvement de rotation en sens contraire.

EF, fig. 3, axe horizontal traversant la trémie, muni extérieurement d'une roue dentée et intérieurement d'un certain nombre de bras ou rayons GH, G'H'.

PQRS, fig. 1 et 3, caisse en bois, ouverte aux deux bouts, dans laquelle tombe le sable à mesure qu'il traverse le laminoir.

Quand l'ouvrier a déposé dans la trémie une certaine quantité de sable, il agit sur la manivelle pour faire tourner les cylindres de manière que les points des surfaces supérieures se rapprochent. Pendant ce mouvement, les bras GH et ceux G'H', qui sont perpendiculaires aux premiers, traversent constamment la masse de sable en brisant les grumeaux, et empêchent le sable de former voûte au-dessus du laminoir.

Le sable tamisé est recueilli dans la caisse PQRS fig. 1 et 3.

On reconnaît que le sable a le degré voulu de finesse, d'homogénéité, de liant et d'humidité, lorsque, comprimé dans la main, il s'y moule, conserve sa forme après que la compression a cessé et que les grains de sable n'adhèrent pas à la peau.

Opérations par lesquelles on remplaçait autrefois le tamisage du sable au laminoir.

Avant que la fonderie de Liége possédât le laminoir dont nous venons de parler, le tamisage était remplacé par les opérations suivantes :

On tamisait le sable sur le chariot à tamis, planche II ; mais les fils du tamis étaient distants de 0,003.

Le sable tamisé était ensuite écrasé sur une table à l'aide d'un rouleau de bois, semblable à celui qui sert à préparer la pâtisserie.

Cette opération était fort lente, parce qu'on ne pouvait écraser que peu de sable à la fois.

Récapitulation des opérations nécessitées par la préparation du sable.

Extraction du sable de la sablière de Rocour et transport à la fonderie. Formation d'un approvisionnement de sable.

Transport du sable à l'étuve : extraction des petites pierres et corps étrangers qu'il pourrait contenir.

Séchage du sable dans l'étuve : durée du séchage une nuit de 8 heures ou deux nuits, selon l'épaisseur de la couche.

Pilage du sable.

Tamisage du sable, soit à l'aide du chariot à tamis, soit par le moyen du blutoir.

Mélange du sable avec le coke pulvérisé et tamisé.

Dépôt du sable mélangé en un monceau formé de couches, sillonnées avec la pelle et arrosées.

Repos du sable amoncelé pendant au moins 48 heures.

Déplacement du monceau de sable : on le découpe à la pelle par tranchées verticales et on amoncelle de nouveau par couches horizontales.

Repos du sable amoncelé (pendant au moins 15 jours) jusqu'au moment de s'en servir.

Enlèvement de la quantité de sable nécessaire au moulage de la journée : on découpe le tas à la pelle par tranchées verticales. Mélange à la pelle de cette quantité de sable.

Tamisage du sable au laminoir.

ARTICLE III.

BROYAGE ET TAMISAGE DU COKE.

Le broyage du coke se fait sous l'action des meules.

Description du moulin (fig. 1 et 2, planche IV).

AB, arbre vertical portant les essieux des meules et la grande roue dentée.

CD, C'D', meules en fonte, du poids de 800 à 900 kilogrammes, de forme tronconique; inégalement distantes de l'arbre, afin de parcourir des zônes différentes sur la plate-forme.

LM, plate-forme circulaire en fonte, reposant sur une fondation en maçonnerie. Un rebord entoure la plate-forme et retient les matières qu'on y broie. Une porte à coulisse sert à l'enlèvement des matières quand elles sont suffisamment broyées.

IK, montant fixé à une certaine distance de l'arbre, pourvu d'une charrue qui ramène les matières sur le chemin des meules. Il y a deux de ces charrues, placées l'une vers le grand cercle extérieur de la plate-forme, l'autre vers le cercle intérieur.

EF, grande roue dentée montée sur l'arbre du moulin.

GH, lanterne, mise en mouvement par une machine, et engrenant avec la roue dentée EF.

Espèce de coke pulvérisé.

On utilise les escarbilles ou petits charbons carbonisés qui tombent sous les grilles des fourneaux à réverbère.

Ces charbons sont trop menus pour pouvoir être employés au cubilot, mais ils sont excellents pour être broyés.

Conduite du travail.

Le moulin est mis en mouvement. L'ouvrier chargé du travail, dépose sur le chemin des meules une couche d'escarbilles; il ramène sur ce chemin les charbons rejetés en dehors; il veille à ce que la couche reste aussi régulière que possible: enfin, il prolonge le travail jusqu'à ce que le charbon ou la majeure partie du charbon ait le degré de finesse voulu. Il procède alors au tamisage du coke.

Tamisage du coke.

Il y a deux degrés de finesse pour le coke pulvérisé selon l'usage auquel on le destine. Quand le coke doit entrer dans la préparation du sable, il convient qu'il ait une certaine grosseur afin que le moule soit plus consistant.

Le coke pour le sable à canon est passé au travers d'un tamis en toile métallique dont les fils sont distants de 0,0015.

Mais lorsque le coke doit entrer dans la préparation de l'enduit noir, il ne saurait avoir trop de finesse: plus il sera fin, plus il sera facilement absorbé par le moule lors de l'application de l'enduit. Pour avoir du charbon en particules suffisamment tenues, on le crible dans un tamis à tambour, semblable à celui employé par les artificiers pour obtenir du pulvérin.

ARTICLE IV.

JUS DE CROTTIN.

Objet du jus de crottin.

Le jus de crottin est un enduit qu'on applique sur la surface intérieure du moule, afin d'augmenter la liaison des particules du sable qui le compose.

L'enduit donne du liant au sable et l'empêche de se désagréger, soit dans le maniement du moule, soit lors du séchage, soit lors de la coulée sous le choc du métal en fusion.

Le jus de crottin est exprimé du crottin de cheval à l'aide d'un pressoir.

Description de la presse pour faire le jus de crottin (fig. 3, planche IV).

AB, A'B', montants verticaux du pressoir.

CD, vis verticale, se mouvant dans un écrou fixé à la traverse horizontale supérieure IK.

EF, tonneau en bois percé de petits trous pour le passage du jus exprimé du crottin par l'action du pressoir.

GH, bras de levier pour faire tourner la vis.

LM, plateau circulaire en bois, pouvant entrer dans le tonneau EF et servant d'intermédiaire entre la tête de la vis CD et le crottin qu'il s'agit de comprimer.

Composition du jus de crottin; sa fabrication.

Pour faire le jus de crottin, on mélange 16 parties de crottin de cheval avec une partie d'eau de pluie : on laisse le crottin s'imbiber pendant environ 12 heures, afin que l'absorption de l'eau soit aussi complète que possible. On porte ensuite ce mélange dans la cuve EF, et on le soumet à l'action du pressoir. Le jus qui est exprimé du crottin sort par les petits trous percés dans le tonneau EF et est reçu dans un bac placé en dessous : on en recueille une quantité à peu près égale à celle de l'eau absorbée.

ARTICLE V.

ENDUIT NOIR.

But de l'enduit.

Lorsque le moule est terminé, il est non-seulement important d'augmenter la cohésion des grains de sable vers la paroi intérieure par l'effet du jus de crottin, mais il faut en outre en faciliter le dépouillement en bouchant par un corps léger les pores ou petites cavités qu'il présente à sa surface. On parvient à ce résultat, en appliquant sur la surface intérieure un enduit formé de jus de crottin et de coke pulvérisé.

Le jus absorbé par le moule, entraîne les parties de charbon qui sont fort tenues, et qui, venant se loger dans les petits vides entre les grains de sable, les remplissent, rendent la surface du moule plus serrée et plus lisse, et s'opposent aux petites infiltrations de la fonte liquide.

La couche de charbon ainsi appliquée sur la surface du moule, est assez mince pour que les dimensions ne puissent en être altérées d'une manière sensible.

Préparation de l'enduit.

L'enduit noir est formé d'un mélange intime de 6 parties de jus de crottin.

1 partie de coke ou de charbon de bois pulvérisé et passé au tamis de soie.

Lorsqu'on veut encore augmenter la consistance du moule (quand il s'agit de gros calibres, par exemple) on dissout dans le noir un peu de terre de pipe. Avant de mêler la terre de pipe, il faut la délayer le mieux possible dans un peu de jus de crottin.

CHAPITRE II.

MATÉRIAUX POUR LE MOULAGE EN TERRE DES PIÈCES DE FONTE.

ARTICLE I.

CONSIDERATIONS GÉNÉRALES SUR LE MOULAGE EN TERRE = PROPRIÉTÉS DE L'ARGILE.

Différence essentielle entre le moulage en terre et celui en sable.

Dans le moulage en sable, le modèle et le châssis forment deux enveloppes excessivement solides qui permettent de donner au sable du moule la cohésion qui lui manquait, en le tassant fortement. Dans le moulage en terre, le moule n'est plus consolidé par le châssis, enveloppe extérieure : il s'ensuit qu'il doit être formé de couches successives d'une substance humide, capables de s'appliquer exactement sur le modèle; que ces couches doivent pouvoir adhérer entr'elles et conserver l'empreinte du modèle, en acquérant de la dureté et de la consistance en même temps qu'elles perdent leur humidité sous l'influence de la chaleur.

Le moulage en terre tire son nom de l'argile (vulgairement appelée terre-glaise) qui entre pour la plus grande partie dans la matière du moule et de ce que l'argile est l'élément principal des terres ou sols qui recouvrent la surface du globe.

Propriétés de la matière à mouler.

La matière à mouler doit jouir des propriétés suivantes :

1° Elle doit être *réfractaire* : c'est-à-dire infusible et indécomposable à la température du métal en fusion.

2° Elle doit être *plastique* : c'est-à-dire qu'elle doit se laisser travailler et façonner de telle sorte qu'on puisse donner au moule la forme voulue.

3° La matière du moule doit pouvoir acquérir la consistance nécessaire pour ne pas se déformer et pour résister au choc du métal en fusion quand il arrive dans le moule. A cet effet, la matière à mouler doit être liante et elle doit pouvoir se durcir tout en conservant du liant et en gardant intacte la forme qu'on lui a donnée.

L'argile est la substance qui, convenablement préparée, jouit des propriétés de la matière à mouler.

Propriétés de l'argile.

L'argile pure est un silicate d'alumine : chacun de ses composants est infusible et indécomposable aux feux de nos forges.

La silice est blanche, rude au toucher, insipide, inodore : elle a une très-faible affinité pour l'eau.

L'alumine est blanche, onctueuse, happante à la langue : elle peut condenser une quantité considérable d'humidité, 15 °/ₒ de son poids.

L'argile pure est un composé à proportion variable de silice et d'alumine : elle renferme

de 18 à 39 p. °/₀ d'alumine
46 à 67 p. °/₀ de silice
6 à 19 p. °/₀ d'eau.

Dans son état de pureté l'argile est infusible et indécomposable aux plus hautes températures que nous pouvons produire dans les usines.

Mais elle contient ordinairement des matières étrangères, telles que des débris de rocher feld-spathiques, du quartz, des pyrites, du carbonate de chaux, de la potasse, des traces de substances organiques, de la silice libre, des oxides métalliques, etc. Une partie de ces substances, principalement les sels calcaires, la potasse, les oxides métalliques rendent l'argile fusible.

L'argile pure est éminemment plastique : elle se délaie dans l'eau et forme pâte avec elle. Lorsque la pâte est suffisamment épaisse elle est très-liante. L'argile se durcit par la dessication : la chaleur lui fait perdre de plus en plus l'humidité qu'elle contient et lui fait gagner une dureté de plus en plus grande. L'argile calcinée fait feu sous le briquet : elle prend un retrait qui devient considérable à mesure que la température augmente : elle résiste à une température de 129° du pyromètre de Wedgwood.

Tant que le degré de chaleur communiqué à l'argile n'est pas très-grand, elle continue de jouir de la propriété de se délayer dans l'eau et de faire pâte avec elle : mais elle perd entièrement cette faculté lorsqu'elle a été échauffée à un haut degré de température.

D'après ce qui précède, on voit que, sauf quelques inconvénients, l'argile possède les qualités désirables de la matière à mouler. Les préparations qu'on lui fait subir ont pour but de remédier au retrait, d'augmenter le liant et de faire évaporer l'humidité.

Il y a de plus certaines précautions à prendre pour procurer aux moules la résistance nécessaire. Nous indiquerons en leur lieu les diverses manipulations à faire subir à l'argile.

Choix de l'argile.

L'argile doit être réfractaire, pour cela elle ne doit contenir que peu d'oxides métalliques, et point de sels calcaires ou de pyrites. L'argile employée à la fonderie de Liége contient une certaine quantité de sable, ce qui en diminue le retrait et dispense d'en ajouter. Lorsque l'argile est presque pure, telle que la terre de pipe, il est important de la mélanger avec du sable à grains fins et arrondis ; le gros sable aurait l'inconvénient de rendre la matière trop poreuse.

Préparation de l'argile.

Après son extraction de la terre, l'argile est simplement déposée sous un hangar où elle reste un temps plus ou moins long et se dessèche. Plus l'argile est vieille, moins elle contient d'humidité et plus cette humidité est répartie uniformément dans toute la masse. On prend la précaution lorsqu'on l'amène de la débarrasser des pierres et des corps étrangers qu'elle pourrait contenir.

ARTICLE II.

TERRE FORTE OU GROSSE TERRE POUR LE MOULAGE EN TERRE DES PIÈCES DE FONTE.

Objet de la terre forte ou grosse terre.

Ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, l'argile se contracte en se desséchant : il est donc important qu'elle soit mélangée avec une substance qui en diminue le retrait sans la rendre moins réfractaire, et qui ne lui fasse perdre que peu de cohésion. Cette substance est le crottin de cheval. Le crottin de cheval favorise aussi la dessiccation du moule en rendant la matière plus poreuse. On conçoit cependant que la proportion de cette substance puisse varier suivant la destination de la terre à mouler.

Les couches éloignées de la surface du modèle et de l'intérieur du moule, peuvent sans inconvénient prendre plus de retrait que les autres ; elles pourront contenir moins de crottin.

La *grosse terre* est employée dans la confection du modèle et du moule : elle sert à recouvrir les nattes de foin dont le trousseau du modèle est enveloppé ; elle compose les couches extérieures du moule. La terre forte n'est employée qu'à une certaine distance de l'intérieur du moule et de la surface du modèle : de toutes les terres à mouler, elle contient le moins de crottin ; elle se gerce le plus fortement par la dessiccation, mais aussi elle acquiert en même temps le plus de dureté et de consistance.

La grosse terre adhère fortement aux nattes de foin, elle les relie aux dernières couches du modèle et les empêche de se détacher les unes des autres, soit dans le séchage, soit dans le maniement du modèle.

La terre forte durcit le moule à l'extérieur, elle rend la chape plus résistante et moins compressible.

Composition de la terre forte.

L'expérience a indiqué la proportion suivante :

2 Volumes d'argile.

1 Volume de crottin de cheval.

Lorsque l'argile est trop plastique, ce qui a lieu lorsqu'elle est presque pure, on y ajoute un peu de sable. Mais comme le sable diminue la cohésion de la matière, il ne faut l'introduire qu'avec prudence.

Corroyage préparatoire de l'argile.

Le mouleur prépare sa terre sur un plancher, la *battière*, élevé de 0,30 à 0,60 au-dessus du sol, adossé au mur et incliné vers lui, pour retenir les eaux servant au travail.

La battière est garnie de rebords excepté sur le côté opposé au mur. Un cordage, attaché au plafond ou à la charpente du toit de l'atelier, s'arrête à mi-hauteur d'homme au milieu de ce plancher : il est destiné à soutenir le pétrisseur et à l'empêcher de glisser lorsqu'il broie la matière sous ses pieds.

Indépendamment de pelles, brouettes, pioches, arrosoir, etc., qui n'ont pas besoin de description, le préparateur de la terre à mouler se sert d'un instrument particulier que nous nommerons le découpoir, fig. 4 planche 4. Le découpoir pesant environ 5 kilogrammes est formé d'une sorte de lame en fer large de 0,08, épaisse sur le dos, recourbée vers la pointe, d'une longueur de 0,70, fesant corps avec un manche de même métal et à peu près de même longueur. Ce découpoir qui se manie à deux mains, est l'instrument essentiel pour la préparation des terres.

L ouvrier va chercher une certaine quantité d'argile sous le hangar où elle est déposée. Il en fait tomber des morceaux du tas avec la pioche, il en écrase les mottes et les grumeaux, de manière à réduire l'argile en menus morceaux. Il la transporte ensuite sur la battière, où il en forme une couche de 0,10 à 0,12 d'épaisseur. Il trace des sillons dans cette couche avec la pelle, et se sert ensuite de l'arrosoir pour humecter légèrement sa terre avec de l'eau de pluie (chauffée en hiver).

Il est très-important de ne verser que fort peu d'eau à la fois : si l'on arrosait trop fortement, il serait impossible de pétrir convenablement ; les parties trop dures seraient glissantes sous les pieds et échapperaient au travail du pétrisseur absolument comme si elles étaient enduites de savon.

On laisse l'argile absorber l'humidité pendant une heure au moins, quelquefois pendant 2 ou 3 heures ; en général plus ce temps se prolonge, mieux la matière est préparée pour le travail ultérieur.

Au bout de ce temps, l'ouvrier retourne la matière avec la pelle ; découpe et divise les parties non encore humectées, puis relève le tout en un tas ou monceau fort élevé au milieu de la battière. Il se sert alors du découpoir, pour hacher verticalement dans le tas, pour le diviser en tranches les plus minces possibles, qui retombent sur le plancher et qui finissent par former une couche d'une épaisseur à peu près uniforme. L'ouvrier enlève avec la pelle la terre qui se trouve au centre de la couche ; il relève le reste dont il forme un nouveau tas sur lequel il rejette la terre qu'il avait primitivement enlevée. Le but de cette manœuvre est d'obtenir que le centre de la couche soit aussi bien corroyé que le reste.

Ce tas est haché avec le découpoir comme la première fois, formé en une couche d'égale épaisseur, puis relevé en un nouveau tas, mais moins haut.

Mélange de l'argile avec la première moitié de crottin de cheval.

On répand sur l'argile la moitié de la quantité nécessaire de crottin. On hache verticalement avec le découpoir pour forcer le crottin à pénétrer dans la terre. Lorsque la matière est formée en une couche uniformément épaisse, on la sillonne avec la pelle, on enlève la partie du centre, on relève le reste en un tas sur lequel on rejette la partie du centre qui avait été mise à part.

Introduction de la seconde moitié du crottin de cheval.

Le préparateur de la terre à mouler répand le reste du crottin qu'il fait pénétrer dans la matière et qu'il mélange de la même manière que ci-dessus.

Pétrissage de la terre forte.

L'ouvrier monte sur la battière, les jambes et les pieds nus ; il se soutient à la corde dont nous avons parlé : il parcourt une largeur de battière en écrasant tous les grumeaux avec le même pied.

Il parcourt ensuite une seconde largeur, mais en travaillant de l'autre pied. Il arrose légèrement quand la matière est trop résistante. L'opération se continue en piétinant par lignes parallèles et changeant de pied à chaque nouvelle course jusqu'à ce que le crottin soit suffisamment mélangé; ce qu'on reconnait à la couleur uniforme de la terre qui ne permet plus de distinguer les substances qui la composent.

La terre ayant été pétrie, est relevée en tas, et est propre au moulage.

Le travail que nous venons de décrire est très-fatigant, aussi les ouvriers, quand ils ne sont pas surveillés, cherchent-ils à s'y soustraire, en se bornant à sautiller dans la pâte alternativement sur chaque pied : mais cette méthode ne vaut rien.

ARTICLE III.

TERRE A CHAPER POUR LE MOULAGE EN TERRE DES PIÈCES DE FONTE.

Lorsqu'on approche de la surface du modèle ou de l'intérieur du moule, il importe d'employer une matière qui soit moins exposée que la terre forte à se fendiller par le séchage. Il y a donc nécessité de préparer une autre terre qui, renfermant plus de crottin, soit plus liante. Elle se nomme terre à chaper et est composée de :

1 Volume d'argile.

1 Volume de crottin de cheval.

Cette terre contenant plus de crottin est moins susceptible de retrait et de gerçures, que la terre forte ; elle forme une pâte plus liante, plus onctueuse, plus grasse, et propre aux détails des moulures.

La terre à chaper se prépare par les mêmes procédés que la terre forte.

C'est avec la terre à chaper qu'on donne au modèle la forme qu'il doit avoir et qu'on fait la plus grande partie du moule : elle est la matière du mouleur la plus importante. Elle tire son nom du mot *chape* qui désigne plus particulièrement l'enveloppe du moule dont elle compose la majeure partie.

ARTICLE IV.

TERRE SABLÉE.

On obtient une matière qui se fendille ou se gerce moins par le séchage que toutes les autres terres à mouler en fesant par les procédés déjà indiqués un mélange de

1 Volume d'argile.

1 Volume de sable.

Cette terre est plus compacte ou moins poreuse que la terre à chaper, mais elle a moins de cohésion, on ne l'emploie que pour une première couche très-mince de la chape sur le modèle. Il en résulte un moule plus uni, plus dur vers l'intérieur, dépouillant mieux et assez consistant pour la fonte. Nous exposerons plus loin les raisons qui ne permettent pas d'employer cette matière dans le moulage des pièces de bronze.

ARTICLE V.

TERRE FINE POUR LE MOULAGE EN TERRE DES PIÈCES DE FONTE.

Composition de la terre fine.

La terre fine est formée de débris de modèles pulvérisés, passés au tamis en crins et ensuite délayés dans de l'eau de pluie au point de former une bouillie. On laisse la matière s'imbiber d'eau pendant plusieurs jours, en ayant la précaution de la remuer de temps en temps.

La terre fine ne doit contenir ni gros grains, ni particules pourvues d'aspérités : il faut éviter de la mélanger avec du sable.

Emploi de la terre fine.

La terre fine sert à former les dernières couches du modèle et à parer l'intérieur du moule. Etant très-délayée elle est appliquée en couches très-minces, qui ne peuvent éprouver de retrait sensible : elle convient pour procurer une surface unie au modèle et pour boucher les petites fissures du moule.

On concevra l'utilité de la terre fine en considérant que lorsque le modèle est bien lisse, l'intérieur du moule qui se fait dessus l'est également, le modèle se détache plus facilement du moule, et les objets coulés ont leurs surfaces plus nettes.

ARTICLE VI.

LESSIVE DE CENDRES POUR ENDUIRE LE MODÈLE DANS LE MOULAGE EN TERRE DES PIÈCES DE FONTE.

Composition de la lessive de cendres.

La lessive de cendres est formée de

2 Volumes de cendres de bois 3 Volumes d'eau de pluie	Le mélange est convenablement agité puis passé au tamis fin.

Les cendres de bois doivent être au préalable lessivées, pour être débarrassées des sels alcalins.

Objet de la lessive de cendres.

Lorsque le modèle est terminé, on l'enduit de lessive de cendres pour empêcher qu'il n'adhère au moule.

Propriétés que doit posséder la base de la lessive.

Les couches du moule étant appliquées humides sur le modèle, la base de la lessive doit jouir des propriétés suivantes :

1° Elle doit être dépourvue de plasticité et de liant, afin que le modèle ne puisse faire corps avec le moule.

2° Elle doit être dans un très-grand état de division, afin de pouvoir en former une couche très-mince sur le modèle.

3° Elle doit être réfractaire à la haute température du métal en fusion. Une partie de la lessive pouvant rester adhérente au moule après l'enlèvement du modèle, si elle se décomposait ou se liquéfiait au contact du métal en fusion, la pièce ne dépouillerait plus et ses dimensions pourraient même en être altérées.

Les cendres de bois jouissent de toutes les propriétés comme base de la lessive.

Les particules de cendres sont dépourvues de toute cohésion, la combustion les a rendues très-ténues, et le lavage les a débarrassées des substances vitrifiables.

Article 7. Jus de crottin Article 8. Enduit noir	Même préparation et destination que pour le moulage en sable des pièces de fonte.

CHAPITRE III.

MATÉRIAUX POUR LE MOULAGE MIXTE DES PIÈCES DE FONTE.

Article 1. Sable de moulage. Article 2. Jus de crottin. Article 3. Enduit noir.	Même préparation et destination que pour le moulage en sable des pièces de fonte.

ARTICLE IV.

TERRE FORTE OU GROSSE TERRE POUR LE MOULAGE MIXTE DES PIÈCES DE FONTE.

Préparation de la terre forte.

Cette terre est employée à la confection du modèle et se prépare de la même manière que pour le moulage en terre des pièces de fonte.

Objet particulier de la terre forte dans le moulage mixte.

Dans le moulage mixte il est essentiel que le modèle ne puisse se déformer par le tassement du sable qui compose le moule. Le modèle doit donc être plus dur que pour le moulage en terre. Dans ce but on rend plus épaisse la couche de *terre forte* qui est la plus compacte de toutes les terres de moulage.

Ainsi dans le moulage mixte, la terre forte sert à relier les couches extérieures du modèle aux nattes de foin et à empêcher sa déformation dans la confection du moule en sable en le rendant moins compressible.

Défauts auxquels sont exposées les pièces obtenues par le moulage mixte.

Dans le moulage mixte, les pièces sont exposées à des *serres* et à des *ondulations*. Les serres sont des parties rentrantes circulaires et perpendiculaires à l'axe de la pièce produites par une diminution dans le diamètre du moule : diminution occasionnée par le trop peu de dureté du modèle qui s'est laissé comprimer dans le tassement du sable lors de la confection du moule. Les ondulations sont au contraire des parties circulaires, saillantes sur la pièce, qui proviennent de ce que le sable du moule n'a pas été assez foulé. On conçoit en effet la difficulté de tasser uniformément le sable autour, d'un modèle qui est plus ou moins compressible.

Article 5. Terre à chaper. Article 6. Terre fine.	Servent à la confection du modèle : même préparation que pour le moulage en terre des pièces de fonte.

Article 7. Lessive de mine de plomb pour le moulage mixte des pièces de fonte.

La lessive de mine de plomb est formée de mine de plomb delayée dans de l'eau. On l'applique sur le modèle terminé et séché à l'aide d'un large pinceau, le *blaireau.*

Dans le moulage mixte, le moule en sable est fait sur un modèle en terre. Cette opération ne dure qu'un jour ou deux ; le sable du moule est très-peu humide : on n'a donc pas à craindre l'oxidation de la base de la lessive avec laquelle il faut enduire la surface du modèle pour en faciliter le dépouillement ; de plus, la base de la lessive ne peut être entraînée dans le moule à cause du peu d'humidité du sable lors de son emploi.

Il est donc permis dans le moulage mixte des pièces de fonte d'employer une lessive de mine de plomb au lieu d'une lessive de cendres.

La lessive de mine de plomb présente les avantages suivants :

Elle bouche plus promptement et plus complètement les pores à la surface du modèle, rend cette surface plus lisse et plus facile à dépouiller, coûte beaucoup moins que la lessive de cendres et exige moins de préparation.

CHAPITRE IV.

MATÉRIAUX POUR LE MOULAGE DES PIÈCES DE BRONZE.

ARTICLE I.

SABLE POUR LE MOULAGE DES PIÈCES DE BRONZE.

Les qualités et la préparation du sable sont les mêmes que pour le sable servant au moulage des pièces de fonte, mais il n'y entre pas de coke.

Il n'existe aucun motif pour ralentir le refroidissement des pièces de bronze après leur coulée.

Il n'y a aucun intérêt à ralentir par des mesures particulières le refroidissement du bronze après le remplissage du moule. Si un refroidissement très-lent est de la plus haute importance quand il s'agit de la fonte de fer, afin de permettre la séparation du carbone avec le fer; il n'en est pas de même pour le bronze, les effets de la liquation tendant à détruire l'homogénéité du métal.

Quelques auteurs passant, trop légèrement peut-être à la limite extrême d'un raisonnement dans lequel on n'a pas tenu compte de toutes les circonstances, ont été jusqu'à prétendre qu'il fallait hâter le refroidissement autant que possible, et l'accélérer pour les parties de la pièce où la masse était la plus forte, afin d'obtenir la congélation de la bouche à feu entière au même instant.

On peut objecter à ce raisonnement que le bronze est plus dense près de la culasse, ce qui n'aurait pas lieu si, par un refroidissement instantané, la masselotte ne pouvait produire son effet comprimant. On peut aussi observer que, toutes choses égales d'ailleurs, les soufflures sont en plus grand nombre à la volée et au bourrelet, qui sont les parties les plus minces, les plus promptement refroidies et sur lesquelles la masselotte pèse le moins.

Motifs qui s'opposent impérieusement à la présence du coke dans le sable.

Indépendamment de ce qui précède, il y a une autre raison, d'une force majeure, pour ne pas mêler du coke avec le sable destiné au moulage des pièces de bronze. Nous allons l'exposer.

Le bronze liquide est beaucoup plus fluide que la fonte de fer. Lors de la coulée, ce premier métal pénètre dans l'épaisseur du moule: la haute température du bronze en fusion pourrait occasionner des explosions dangereuses, si le moule renfermait la moindre humidité : cette infiltration compromet également la solidité du moule vers sa paroi intérieure, par les tiraillements qu'elle produit.

Il est donc essentiel que les moules soient plus consistants pour les bouches à feu en bronze : on obtient une augmentation de résistance en supprimant le coke dont l'interposition entre les particules de sable ne peut qu'en détruire la cohésion.

Le moule devant être parfaitement sec, on le flambe à l'intérieur pour en extraire toute l'humidité. Cette opération exige impérieusement que la matière du moule soit exempte de charbon pulvérisé qui brûlerait en détruisant la liaison entre les particules du sable.

ARTICLE II.

JUS DE CROTTIN POUR LE MOULAGE EN SABLE DES PIÈCES DE BRONZE.

Même préparation que pour le moulage en sable des pièces de fonte : même raison d'être.

ARTICLE III.

POTÉE DE CENDRES POUR LE MOULAGE EN SABLE DES PIÈCES DE BRONZE.

Préparation de la potée de cendres.

La potée de cendres est formée de :

2 parties de cendres de bois } mélangées et passées au tamis de
3 parties de lait } soie.

Les cendres doivent être lessivées à l'eau de pluie avant d'être mélangées avec le lait.

Emploi de la potée de cendres.

La potée de cendres sert au cendrage du moule après la cuite. Le cendrage a pour but de boucher toutes les petites gerçures que le feu a occasionnées et à faciliter le dépouillement de la pièce.

La lessive de cendres, telle qu'on l'emploie pour le cendrage du modèle, n'adhèrerait pas au moule après la dessication. Il faut que les cendres soient mêlées avec un liquide qui, après l'évaporation, les relie entre elles et au moule sur lequel elles sont appliquées. Le liquide doit être tel qu'il ne puisse déposer de substance nuisible. C'est dans de la bière ou dans du lait qu'on dissout ordinairement les cendres de bois pour en faire une potée. A la fonderie de Liége, on a obtenu de bons résultats par l'emploi du lait frais.

Les cendres de bois, par leur ténuité, sont plus propres à boucher les fissures du moule que le coke le mieux pulvérisé. Il faut donc l'employer de préférence dans le dernier enduit lorsqu'il s'agit du bronze, pour s'opposer plus efficacement aux infiltrations de ce métal qui, étant fondu, est extrêmement fluide.

CHAPITRE V.

MATÉRIAUX POUR LE MOULAGE EN TERRE DES PIÈCES DE BRONZE.

ARTICLE I.

TERRE FORTE OU GROSSE TERRE.

Composition de la terre forte.

La terre forte se prépare de la même manière que pour le moulage en terre des pièces de fonte.

Les ferrures qui renforcent les moules des pièces de bronze, sont un motif de plus pour employer la terre forte aux couches extérieures de la chape.

Les ferrures sont appliquées à l'extérieur de la chape pour s'opposer à l'expansion du moule par la pression du métal liquide. Pour qu'elles remplissent leur but, il faut que leur résistance soit transmise à la chape par de larges surfaces. La terre forte devient très-dure et consistante par le séchage, elle convient donc pour remplir les vides entre le moule et les ferrures, et pour augmenter les surfaces de résistance de ces dernières.

Article 2. Terre à chaper Article 3. Terre fine Article 4. Lessive de cendres	les mêmes que pour le moulage en terre des pièces de fonte.
Article 5. Potée de cendres	la même que pour le moulage en sable des pièces de bronze.

CHAPITRE VI.

MATÉRIAUX POUR LE MOULAGE MIXTE DES PIÈCES DE BRONZE.

Article 1. Terre forte Article 2. Terre à chaper Article 3. Terre fine. Article 4. Lessive de cendres	servant à la confection du modèle en terre : sont les mêmes que pour le moulage en terre des pièces de bronze.
Article 5. Sable de moulage Article 6. Jus de crottin Article 7. Potée de cendres	servant à faire le moule en sable : sont les mêmes que pour le moulage en sable des pièces de bronze.

CHAPITRE VII.

RÉCAPITULATION DES DIVERS MATÉRIAUX EMPLOYÉS AU MOULAGE : CONSIDÉRATION SUR CES MATÉRIAUX.

ARTICLE I.

TABLEAU RÉCAPITULATIF DES DIVERS MATÉRIAUX EMPLOYÉS AU MOULAGE.

Désignation des matériaux.	COMPOSITION.	PRÉPARATION.	EMPLOI.
Sable pour le moulage des pièces de fonte.	1 partie sable argileux 1/6 à 1/12 coke pulvérisé. Proportion ordinaire de coke 1/9.	Le sable se prépare séparément en le desséchant, pilant et tamisant. Le coke est broyé et tamisé séparément. Ces deux substances sont mélangées à sec, puis arrosées : formées en tas par couches horizontales : puis découpées verticalement et remises en tas par nouvelles couches horizontales. Après un corroyage plusieurs fois répété, le sable est passé au laminoir dans la journée du moulage.	Moulage en sable et moulage mixte des pièces de fonte.
Sable pour le moulage des pièces de bronze.	Sable argileux.	Même préparation que la précédente, à l'exception qu'il n'y entre pas de coke.	Moulage en sable et moulage mixte des pièces de bronze.
Terre forte ou grosse terre.	2 parties d'argile. 1 partie crottin de cheval.	L'argile préparée et corroyée séparément en s'aidant du découpoir. Le crottin introduit en deux fois: le mélange bien corroyé à chaque fois avec le découpoir: le tout terminé par le pétrissage avec les pieds.	Premières couches du modèle en terre : dernières couches du moule en terre.
Terre à chaper.	1 partie argile. 1 partie crottin de cheval.	Argile préparée séparément, puis mélangée en 2 fois avec le crottin, corroyée et pétrie comme la grosse terre.	Modèle en terre : moule en terre.
Terre fine.	Débris de modèles en terre. Eau de pluie.	Les débris broyés, tamisés, puis délayés dans de l'eau de pluie, de manière à donner une bouillie claire.	Dernières couches du modèle en terre. Parer l'intérieur du moule en terre.

Désignation DES MATÉRIAUX.	COMPOSITION.	PRÉPARATION.	EMPLOI.
Terre sablée.	1 partie argile. 1 partie sable argileux.	Les matières préparées séparément, puis mêlangées, corroyées et pétries.	Première couche de la chape sur le modèle, dans le moulage en terre des pièces de fonte.
Lessive de cendres de bois.	2 parties de cendres. 3 parties d'eau de pluie.	Les cendres lavées à l'eau de pluie, pour les débarrasser des sels alcalins, puis tamisées, et enfin mélangées à l'eau de pluie dans la proportion indiquée. Le mélange est lui-même tamisé.	Enduire le modèle dans le moulage en terre.
Jus de crottin.	16 parties crottin de cheval. 1 partie d'eau de pluie.	Les matières mélangées restent 12 heures en repos, puis sont soumises à l'action de la presse.	Enduire tous les moules donne du liant au sable, augmente celui de la terre du mouleur, sert de liquide pour la préparation de l'enduit noir.
Enduit noir.	6 parties jus de crottin. 1 partie coke pulvérisé et tamisé.	Le mélange est passé au tamis de soie.	Enduire les moules en sable ou en terre des pièces de fonte. Faciliter le dépouillement.
Lessive de mine de plomb.	Mine de plomb. Eau de pluie.	On fait ce mélange en ajoutant assez d'eau pour que la couche s'étende facilement.	Enduire le modèle dans le moulage mixte des pièces de fonte.
Potée de cendres.	2 parties cendres de bois. 3 parties lait.	Les cendres lessivées et tamisées séparément : puis mélangées au lait et tamisées de nouveau.	Cendrage des moules des pièces de bronze après la cuite.

ARTICLE II.

OBSERVATION SUR LES MATÉRIAUX DE MOULAGE.

Les matériaux de moulage ne sont pas les mêmes dans toutes les fonderies. Le choix des matières dépend des ressources qu'offrent les localités : leur préparation peut varier entre certaines limites d'après des opinions plus ou moins plausibles ou suivant une routine transmise par tradition.

Le sable et l'argile, qui sont les éléments principaux des matériaux de moulage, doivent être dans les conditions que nous avons examinées. Mais la proportion de silice et d'alumine pouvant changer, il doit en être de même des substances mêlées au sable ou à l'argile pour les rendre moins susceptibles de retrait ou pour en augmenter le liant.

Le charbon de bois est souvent substitué au coke. La lessive ou la potée de cendres remplace parfois l'enduit noir, formé de charbon et de jus de crottin.

Dans beaucoup d'établissements, on ne met pas de charbon dans le sable de moulage pour les pièces de fonte.

Cependant il n'est guère de fonderie qui ne se flatte avec plus ou moins de raison de couler des pièces dépouillant bien de leurs moules. L'essentiel, c'est que le sable de moulage soit homogène, liant, à gros grains, refractaire, et pas assez argileux pour que les moules puissent se fendiller. Si le charbon pulvérisé et mêlé au sable peut nuire à la solidité du moule, il a cependant un avantage incontestable, c'est de ralentir le refroidissement de la pièce lors de la coulée. Mais de combien.... ?

On mêlait autrefois et on le fait encore dans quelques établissements de la brique pilée à la terre du mouleur, afin d'en diminuer le retrait dans le séchage et d'en augmenter la compacité. Mais on a renoncé presque partout à cette substance, parce qu'elle nuisait à la résistance du moule. On a essayé l'ardoise pilée pour s'opposer aux infiltrations du bronze dans la chape, mais sans résultat satisfesant.

La terre de porcelaine, la terre de pipe peuvent être substituées avec plus ou moins de succès à l'argile proprement dite; mais elles doivent être préparées et mélangées avec du sable ou d'autres matières qui puissent les rendre moins susceptibles de retrait.

Nous avons indiqué que le crottin de cheval rendait la terre à mouler plus liante, plus poreuse, plus propre au moulage. La fiente des animaux jouit des mêmes propriétés, mais avec des avantages plus ou moins prononcés. La bouse de vache a quelquefois été employée au lieu de crottin de cheval. Avec la bouse de vache on obtient une terre très-fine, mais trop compacte.

Dans le but d'augmenter la résistance de la terre à mouler et de s'opposer aux effets du retrait, on la mélange très-souvent avec des poils de bœufs. Mais ces poils se consument au contact du métal en fusion ou dans la cuite des moules, et laissent de petits vides qui peuvent donner lieu à des infiltrations.

Il en serait de même du chanvre et des matières filamenteuses végétales ou animales. Aussi ces matières ne sont-elles généralement employées qu'à l'extérieur des moules, où elles sont moins exposées à l'action d'une trop haute température.

Dans plusieurs fonderies, principalement dans celles d'ornements ou de statues, on modèle avec la cire les parties ornementées et délicates ou les parties du modèle qu'on aurait de la peine à retirer du moule, telles que les anses des canons.

La cire étant très-fusible, on conçoit qu'on puisse la faire écouler en la fondant à une douce chaleur.

Mais par l'emploi de la cire on introduit dans la chape une matière décomposable par le feu , qu'on ne peut faire disparaître entièrement que par certaines précautions.

Le plâtre gâché est souvent utilisé pour faire les modèles des tourillons.

Les proportions adoptées à la fonderie de Liége , dans la préparation des matériaux de moulage, ne sont pas le résultat d'une formule, mais elles sont des moyennes dont on peut s'écarter en plus ou en moins , en raisonnant toutefois la chose.

Par exemple : si les couches de terre sont minces, si on les laisse sécher loin du feu, le retrait se fera plus uniformément, d'une manière presque insensible, et la terre du mouleur pourra être plus argileuse.

On doit avoir assez d'espèces de matériaux pour remédier aux inconvénients qu'on rencontre dans le moulage, mais il en faut le plus petit nombre possible. Moins il y a d'espèces de matériaux, moins l'ouvrier est exposé à se tromper dans leur choix ou dans l'ordre de leur emploi. Plus les procédés de préparation sont simples, plus la bonté des matériaux est indépendante du plus ou moins d'attention de l'ouvrier. De cette manière une petite négligence n'a pas de suites fâcheuses.

Le procédé de rendre le sable homogène en le disposant par couches horizontales, qu'on découpe verticalement pour former de nouvelles couches horizontales, et ainsi de suite, est un des plus parfaits. Car la bonté du mélange n'exige aucune attention particulière de l'ouvrier, il n'a qu'à faire son travail mécaniquement.

Le nombre des jours d'intervalle entre les différentes manipulations du sable, peut quelquefois être abrégé : mais le discernement de l'ouvrier devrait agir pour juger de la qualité du sable; il pourrait se tromper ou être négligent. Il est plus sûr de laisser le temps aider l'humidité à pénétrer dans l'argile, à la diviser et à favoriser le mélange des matières qui sont en présence.

Le travail de l'argile sur la battière, la préparation de la terre forte ou à chaper, peuvent différer de notre description. Le corroyage et le mélange des matières peuvent se faire par des procédés plus ou moins longs ou pénibles : mais la méthode que nous avons indiquée n'exige aucune combinaison de l'ouvrier, il n'a qu'à travailler matériellement, sans aucune dépense d'intelligence et il arrivera à bien préparer sa matière. En n'ayant que deux terres de moulage, la grosse terre et celle à chaper, on rend plus difficile une méprise dans leur emploi.

Les eaux d'arrosage sont presque toujours employées chaudes, parce qu'elles sont plus facilement absorbées : d'ailleurs il est indispensable qu'elles soient chauffées en hiver.

LIVRE III.

MOULAGE DES BOUCHES A FEU.

CHAPITRE PREMIER.

MOULAGE EN SABLE DES PIÈCES DE FONTE.

ARTICLE I.

DU MODÈLE.

Raison pour laquelle le modèle en métal est composé de plusieurs parties.

Le modèle dans le moulage en sable est en métal.

Les parties rentrantes ou saillantes, qu'il présente, empêcheraient de le retirer du moule s'il n'était décomposé en plusieurs parties. Le moule lui-même est divisible, de manière à permettre la sortie des différentes portions du modèle. On assure la solidité du moule en le fesant dans des caisses en fonte dont l'ensemble constitue le châssis.

Division du corps du modèle.

La forme des canons généralement composés de troncs de cône est très-favorable au démoulage : on fait donc passer les plans de séparation des parties du modèle par les intersections des diverses surfaces de révolution.

Le modèle d'un canon est formé de 7 tronçons (fig. 1, planche VI).

1° Le modèle de la masselotte AA′, jusqu'au renflement du bourrelet. Il est souvent en bois, parce que la masselotte n'a pas besoin d'autant de précision que le reste de la bouche à feu.

2° Le modèle du bourrelet BB′, depuis le renflement jusqu'à l'astragale.

3° Le modèle de la volée CC′ y compris la plinthe qui sépare cette partie du 2d renfort.

4° Le modèle du second renfort DD′ y compris la plinthe de séparation avec le 1er renfort.

5° Le modèle du 1er renfort EE′, y compris la plate-bande de culasse.

6° Le modèle de la culasse FF′ jusqu'à la partie la plus mince du collet.

On donne quelquefois à la partie du modèle de la culasse relative au collet le même diamètre qu'au grand cercle du bouton. Dans ce cas, le bouton de culasse et le collet sont coulés cylindriquement ou tronconiquement et façonnés sur le tour.

7° Le modèle du restant du collet, du bouton et du carré du faux bouton GG′.

Le carré du faux bouton est une partie excédante du bouton, servant au forage et enlevée après.

Motif pour lequel le modèle du bouton n'est pas divisé par un plan passant par le grand cercle du bouton.

En suivant la règle de couper le modèle à la place où le diamètre commence à décroître après avoir augmenté ou réciproquement, on devrait diviser le modèle du bouton par un plan passant par le grand cercle LL′ de ce bouton. On aurait ainsi un tronçon de modèle de fort peu de hauteur auquel correspondrait une portion de châssis.

On évite cette complication pour de petits tronçons par le procédé suivant :

On fait déborder la caisse de la culasse FF′ (fig. 2), vers le bouton jusqu'à son grand cercle. Le modèle du bouton et du faux bouton est moulé en partie dans le châssis du bouton GG′ (fig. 2) et en partie dans le châssis de la culasse FF′ (fig. 2).

Manière pour démouler le modèle du bouton.

On sépare le châssis de la culasse de celui du bouton.

La partie du modèle du bouton comprise depuis le grand cercle jusqu'au collet *aa* (fig. 2), sort facilement de son moule qui est dans le châssis de la culasse. On retire ensuite le modèle du bouton lui-même par le côté GG″ du châssis GG′.

Motifs pour lesquels les tronçons du modèle sont creux.

Les tronçons du modèle doivent être creux pour être légers et maniables et afin de permettre de visser par leur intérieur et de dévisser à volonté, les parties saillantes, telles que les tourillons, la plate-bande de volée, etc., etc.

L'épaisseur ordinaire des tronçons est de 0,025.

Le modèle de la culasse est très-peu évidé, parce qu'il a peu de poids. Pour une raison semblable, le modèle du bouton est plein. Il en résulte une économie de main-d'œuvre.

Mode d'assemblage des tronçons du modèle.

Les tronçons du modèle s'assemblent par gorge et feuillure, telles que *aa*, *bb* (fig. 1), à l'instar d'une tabatière et de son couvercle.

Repères qui se trouvent sur les tronçons du modèle.

La gorge de chaque tronçon présente une saillie *cc′* (fig. 6), le *talon de repère*, s'emboîtant parfaitement dans une cavité ou logement *ee′* de la feuillure du tronçon contigu.

Ces repères ont pour objet d'obtenir un assemblage toujours identique des divers tronçons et de guider le placement du modèle dans le châssis, de manière que les modèles des tourillons viennent se placer dans les logements qui leur sont ménagés au châssis du 1er renfort.

Tous les repères sont alignés suivant un plan passant par l'axe du modèle et perpendiculaire à celui des tourillons. Cette précaution est indispensable, quand il existe des saillies à la surface, tels que, masse de mire, champ de lumière, croc de braque, etc., dont il importe que la position soit toujours assurée relativement aux tourillons.

Moyen pour fixer les modèles des tourillons, des plates-bandes et des parties saillantes en général.

Les modèles des tourillons, des plates-bandes et des parties saillantes sont fixées sur le corps du modèle par des tire-fonds vissés par l'intérieur. Ces tire-fonds sont enlevés, lorsqu'on procède au démoulage, NO, fig. 7.

Le modèle de l'astragale est quelquefois d'une seule pièce enveloppant une gorge creusée au modèle de la volée.

Mode de réunion des divers tronçons du modèle.

Des doubles crochets II, KK, etc., (fig. 2 et 7) se trouvent à l'intérieur des tronçons et servent à les saisir pour les manier ou à les relier les uns aux autres, à l'aide de tirants MM' (fig. 7), recourbés en crochet à un bout et filetés à l'autre extrémité pour recevoir un écrou.

Pour attacher deux tronçons contigus lorsqu'ils sont emboités on engage la partie recourbée du tirant MM' (fig. 7) dans le crochet supérieur du tronçon de dessous, et l'on fait passer l'autre bout du tirant dans un trou percé dans une traverse ST, fixée à la partie supérieure du tronçon de dessus. On passe un écrou sur la partie filetée du tirant qui dépasse et on le serre autant qu'on peut. Tous les tronçons sont réunis les uns aux autres par deux tirants semblables.

La position de la traverse ST est assurée par ses extrémités qui sont reçues dans des entailles ou encoches pratiquées sur la feuillure du tronçon.

La jonction de la culasse et du bouton, se fait par un seul bouton à écrou PQ (fig. 2, planche VI). La tête P du bouton est retenue au modèle de culasse et la tige traverse le modèle du bouton.

Manière de retirer le modèle de la plate-bande de volée.

Nous avons dit que le modèle de plate-bande de volée était d'une pièce. Il reste engagé dans le moule, après qu'on en a retiré le modèle de la volée par sa grande base. On fait sortir le modèle de la plate-bande du côté de la petite base tournée vers le bourrelet. Il faut au préalable que le châssis de la volée soit séparé de ceux du bourrelet et du 2[d] renfort.

Pour faciliter la sortie de la plate-bande, on la saisit avec deux tire-fonds vissés sur le bord extérieur.

Manière de retirer les cordons situés autre part qu'aux extrémités des tronçons.

Quand un tronçon a un cordon ailleurs qu'à ses extrémités, on divise le cordon en 3 ou 4 parties assemblées en sifflet et fixées sur le modèle à l'aide de tire-fonds par l'intérieur du tronçon. Lors du démoulage, ces tire-fonds sont enlevés, on retire le corps du modèle et les segments du cordon restent dans le sable du moule. On remet les tire-fonds en guise de poignées pour saisir les segments. On détache d'abord le segment dont les sifflets recouvrent les autres, puis chacun de ceux-ci en le fesant pivoter autour d'une de ses extrémités.

ARTICLE II.

DU CHASSIS.

Définition du châssis.

Le châssis est l'enveloppe solide du moule en sable ; il lui procure une résistance dont le sable seul est incapable.

Le châssis est ordinairement en fonte.

Division du châssis.

Le châssis est composé de caisses en fonte, correspondantes aux diverses parties du modèle. Chaque partie du châssis prend le nom du tronçon du modèle, auquel il se rapporte : ainsi, on a le châssis du bouton GG′, (fig. 2, planche VI), celui de la culasse FF′, celui du 1[er] renfort EE′, etc., etc.

Chaque châssis est formé de deux demi-châssis, suivant un plan passant par leur axe, exceptés les châssis de la culasse et du bouton qui sont d'une seule pièce.

Mode d'assemblage du châssis.

Les châssis sont terminés à leurs extrémités par des rebords, les brides circulaires, par lesquels on les réunit les uns aux autres, ainsi qu'on le voit (fig. 3) en GG″, F′F″, E′E″, etc., (fig. 2).

La bride supérieure est pourvue de boulons à clavettes *ab*, *a′b′* (fig. 3), s'engageant dans les trous percés sur la bride joignante de l'autre châssis.

On assure l'assemblage toujours identique de deux châssis, l'un relativement à l'autre, au moyen d'une cheville de *repère*, cylindrique en fer forgé, placé sur la même bride que celle qui porte les boulons et reçu dans un trou percé sur la bride circulaire du châssis superposé.

Les demi-châssis sont pourvus de rebords suivant leur longueur, les brides longitudinales, *ef*, *gh*, *pq*, *rs*, *ik*, *lm* (fig. 3), et comme l'indique suffisamment la (fig. 2). Les demi-châssis s'assemblent comme les châssis entiers, par des boulons à clavettes fixés sur l'une des brides longitudinales, reçus dans des trous percés sur la bride longitudinale joignante de l'autre demi-châssis.

La bride longitudinale qui présente les boulons à clavettes, est aussi munie d'une ou deux chevilles de repère, afin que les deux parties d'un même châssis ne puissent être réunies que d'une seule manière.

Plan de division des demi-châssis.

Les brides longitudinales sont dans un même alignement (fig. 2 et 3) : leur plan de séparation est perpendiculaire à l'axe des tourillons, afin de permettre l'enlèvement de la pièce après la coulée. Pour faire cette opération, on détache le châssis de culasse et du bouton; on défait les clavettes qui réunissaient les brides longitudinales. Le châssis de la pièce entière (moins la culasse et le bouton) est alors divisé en deux demi-châssis renfermant chacun un tourillon : demi-châssis qu'il est facile de séparer.

Châssis du 2d renfort : logements des modèles et des tourillons.

Chaque demi-châssis du 2d renfort, présente une saillie ou boite, pour le logement du modèle du tourillon : DHD″, C′H′C″ (fig. 2 et 4). Cette boite a ordinairement une forme cylindrique ou tronconique : elle a un rebord circulaire et se ferme après le moulage par une plaque de fonte serrée contre le rebord par des boulons à écrous, qui traversent la plaque et le rebord.

Fermeture du châssis du bouton et du faux bouton.

Le châssis du faux bouton est fermé inférieurement par une plaque de fonte retenue par des boulons à écrous à la bride circulaire du châssis.

Lorsque le châssis du bouton n'a pas un grand diamètre inférieurement, on se dispense quelquefois de le fermer par une plaque après le moulage : le sable comprimé offrant une résistance suffisante.

Forme extérieure du châssis : épaisseur du moule.

Le châssis contourne grossièrement le modèle, sans égard pour les moulures, les plates-bandes et les petites saillies.

L'intervalle entre le châssis et le modèle, détermine l'épaisseur du moule, qui varie entre 0,04 et 0,07.

Plus les calibres sont forts, plus l'épaisseur du moule doit augmenter.

Disposition pour empêcher le moule en sable de glisser dans le châssis.

La paroi intérieure de chaque demi-châssis, a une légère saillie suivant tout le pourtour, afin de mieux retenir le sable qui, sans cette précaution, se détacherait dans les manœuvres par son propre poids.

On augmente encore l'adhérence du moule en ménageant dans la paroi intérieure du châssis un grand nombre de petites cavités dans lesquelles vient s'engager le sable lors du moulage.

Trous qu'on perçait autrefois dans les châssis, croyant ralentir le refroidissement de la pièce après la coulée.

La fonte étant bon conducteur du calorique, ce qui doit hâter le refroidissement du métal lors de la coulée, on avait imaginé d'y remédier en criblant le châssis de trous percés au travers de l'épaisseur des parois, afin de diminuer la masse du châssis. Ce procédé était vicieux, parce qu'il augmentait considérablement les surfaces de refroidissement : aussi a-t-il été abandonné depuis longtemps.

Anses de manœuvre des demi-châssis.

Chaque demi-châssis est pourvu d'une ou deux paires d'anses en fer forgé, pour qu'on puisse les saisir dans les diverses manœuvres auxquelles donnent lieu le moulage et le coulage des pièces.

ARTICLE III.

CONFECTION DU MOULE EN SABLE.

Appareils pour faciliter le maniement des modèles et châssis et pour effectuer les transports.

Les modèles, les châssis, les moules sont des objets plus ou moins lourds, dont le maniement et le transport ne peuvent s'effectuer qu'à l'aide de machines. L'atelier où se fait le moulage et le coulage des bouches à feu, possède trois grues, (planche VII), dont les bras peuvent se toucher par leurs extrémités.

Deux de ces grues A, B, sont disposées en regard des étuves à sécher les moules GH, G'H'.

La 3^{me} grue CD, capable de supporter les fardeaux les plus pesants qu'on rencontre dans une fonderie, est placée au centre de courbure de la fosse à canons MN.

Puits ou trous de moulage.

Près de chacune des petites grues A, B, et dans l'étendue de leur portée, se trouve un puits I, I', revêtu en maçonnerie; le *puits* ou *trou de moulage*, est assez profond pour qu'il puisse contenir deux ou trois parties de châssis assemblées. En descendant dans ce puits les parties superposées du modèle et du châssis à mesure que le moulage avance, les mouleurs ne sont pas obligés de travailler sur des échaffaudages de plus en plus élevés.

Moyens pour empêcher le sable du moule d'adhérer au modèle.

Pour prévenir l'adhérence du sable du moule avec le modèle, on chauffe celui-ci et on l'enduit d'huile épurée, qu'on laisse sécher. On le frotte ensuite avec une brosse contenant de la plombagine, en dirigeant la brosse suivant la longueur du tronçon.

Enfin on saupoudre les divers tronçons de poussier de coke au moment du moulage.

Moulage de la culasse et du bouton.

C'est par la culasse qu'on commence le moulage en sable.

La planche à mouler AB (fig. 5, planche VI), est une table carrée reposant sur deux liteaux. Une ouverture circulaire CD, est pratiquée dans son milieu, ayant le même diamètre que la gorge *bb* (fig. 1), du modèle de culasse. Une entaille se trouve sur le périmètre de cette ouverture, pour le logement du repère du modèle de culasse, lorsque ce modèle est mis sur la planche à mouler, avec sa gorge dans l'ouverture circulaire CD. Par ce moyen, le modèle de culasse occupe toujours la même position sur la planche à mouler.

Pour procéder au moulage, on place la planche à mouler horizontalement sur le sol, les liteaux en dessous; on superpose le modèle de culasse, le cul de lampe en haut; on introduit la feuillure de ce modèle, autour de laquelle est creusée la gorge, dans le trou circulaire de la planche à mouler, le talon de repère dans le logement qui lui a été ménagé.

On couvre cette partie du modèle par le châssis correspondant EFGH (fig. 5), les chevilles à clavettes et celle de repère de la bride circulaire entrant dans les trous percés dans la planche à mouler. On réunit ce châssis à la planche en serrant des clavettes dans les mortaises des chevilles qui débordent en dessous. Quand ces dispositions sont faites, le modèle de la culasse se trouve naturellement au centre du châssis; et la position respective de ces deux pièces est assurée, par le talon de repère du modèle de culasse et par la cheville de repère de la bride circulaire du châssis, qui entrent dans les trous percés dans la planche à mouler.

On saupoudre le modèle de poussier de coke.

Cette précaution étant prise pour chaque partie du modèle à mesure que le moulage avance, nous n'en parlerons plus.

On remplit de sable l'intervalle entre le modèle et le châssis par couches successives de 0,03 à 0,04 d'épaisseur, réparties uniformément sur tout le pourtour. On foule chaque couche de sable avec un outil en bois, la *batte* (fig. 5, planche IV), et on lui donne une dureté suffisante.

Il est essentiel que le sable soit comprimé uniformément : à cet effet, les mouleurs au nombre de 3 ou de 4, se promènent constamment autour du modèle, d'un pas régulier, en chassant d'une manière uniforme leurs battes sur le sable, le long de la paroi du châssis.

Arrivé à la partie la plus mince du collet IK (fig. 5), on place le modèle du bouton IKL sur celui de la culasse en les serrant l'un contre l'autre par un boulon à écrou. La tête du boulon se trouvant dans l'intérieur du modèle de culasse et l'écrou étant serré contre l'extrémité opposée du modèle de bouton (fig. 5), on continue ensuite le moulage, jusqu'à ce que le sable dépasse le bord supérieur du châssis.

Arrivé à ce point, on comprime le sable avec un marteau (fig. 8, planche IV) : on se sert d'un couteau (fig. 7), pour en égaliser la surface en enlevant les parties excédantes, et on lisse le sable avec la truelle (fig. 10). On saupoudre le sable de poussier de charbon (dans le but d'empêcher l'adhérence du moule de la culasse avec celui du bouton) et on superpose le châssis du bouton.

Le sable prenant du retrait par le séchage, il se produirait des fissures dans le moule à la jonction des deux châssis, si l'on n'avait soin d'interposer 3 petites calles en tôle entre deux châssis consécutifs. L'épaisseur de ces calles est réglée d'après le retrait présumé du sable.

Par ce moyen, chaque moule déborde son châssis d'une quantité égale au retrait qu'il doit prendre, et les parties consécutives du moule seront tellement jointives lorsqu'elles seront assemblées après le séchage, que le métal liquide ne pourra trouver d'issue pour s'échapper.

Les calles doivent être moins épaisses quand le sable est vieux.

Le moulage du bouton se fait comme celui de la culasse, par couches successives et régulières de sable uniformément foulées par la manœuvre des battes. Arrivé à hauteur de l'extrémité du modèle du bouton, on dévisse l'écrou du boulon qui serrait ce modèle contre celui de la culasse.

Le boulon n'étant plus retenu, tombe contre terre. On recouvre d'un morceau de tôle le trou à l'extrémité du modèle de bouton où passait le boulon qu'on vient de détacher, et on poursuit le moulage comme on l'a commencé jusqu'à ce que le sable déborde un peu l'extrémité du châssis du bouton. On comprime les dernières couches de sable avec un marteau; on en lisse et égalise la surface, enfin on ferme le moule de ce côté par une plaque circulaire MN (fig. 5, planche VI), qu'on attache fortement par les boulons à écrous.

Le moulage étant fini de ce côté, on retourne le moule sens dessus dessous en s'aidant de la grue et on enlève la planche à mouler.

On n'a pu damer le sable de la partie du moule de la culasse voisine de la planche à mouler, aussi bien que le reste, à cause de l'élasticité du bois et de la forme arrondie du châssis contournant le cul de lampe. Afin de procurer à cette partie la dureté et la consistance nécessaires, on enlève le sable sur une épaisseur de 0,03 environ; on le remplace par couches successives de nouveau sable qu'on dame fortement avec les battes et on en ajoute assez pour que le moule déborde le châssis. On comprime la dernière couche à coups de marteau : on enlève avec le couteau la partie excédante, on pare avec la truelle et on saupoudre de poussier de coke.

Moulage du 1er renfort.

On descend dans le trou de moulage les moules du bouton et de la culasse réunis, avec leurs modèles, le bouton en dessous, le système reposant d'aplomb sur une plaque de fonte. On superpose le modèle du 1er renfort sur celui de la culasse : on les réunit par des tirants à crochets et à écrous. Le châssis du 1er renfort est descendu sur celui de la culasse dont il reste séparé par trois petites calles de tôle. Les deux châssis sont assemblés par leurs brides circulaires serrées l'une contre l'autre par les boulons à clavettes.

Le moulage est continué par couches successives de sable uniformément foulées, ainsi qu'il a été expliqué pour le moule de la culasse; c'est-à-dire les mouleurs marchant continuellement autour du châssis et manœuvrant leurs battes en ayant soin de ne pas toucher le modèle.

La première couche de sable est ordinairement plus épaisse que les autres : elle est damée plus longtemps et plus faiblement, pour ne pas dégrader le moulage du châssis inférieur.

Moulage des autres tronçons du modèle.

Le moulage des autres parties du canon se poursuit de la même manière : les diverses parties du modèle étant successivement superposées et assemblées. On continue d'ailleurs à observer pour les diverses parties du moule les précautions déjà indiquées : la surface supérieure de chaque portion terminée du moule, doit être saupoudrée de coke pulvérisé; il doit en être de même pour chaque tronçon du modèle, avant d'en commencer le moulage. On doit séparer deux châssis consécutifs par trois petites calles placées entre leurs brides circulaires, etc., etc.

Toutes les manœuvres pour le placement des parties du modèle et du châssis, sont facilitées avec l'aide de la grue.

Lorsque les parties superposées du modèle et du moule ont acquis une hauteur devenue gênante pour les ouvriers, on les désunit, on les retire du trou de moulage et on ne conserve pour continuer l'opération que la dernière partie moulée, qu'on fait reposer sur un plateau ou bloc de bois par la partie inférieure du tronçon.

Cette disposition a pour but d'empêcher le sable du moule de se détacher du châssis, entraînée par son poids et par celui du tronçon du modèle.

Moulage des tourillons.

Quand on est au tronçon du modèle qui porte les tourillons, on arrête le moulage un peu en dessous des embases. On fixe les modèles des tourillons à leurs places, par le moyen de tire-fonds vissés à l'intérieur du tronçon. On bouche provisoirement avec un peu de sable l'ouverture extérieure des boîtes DD'' et C'C'' (fig. 2, planche VI) du châssis qui renferment les tourillons, et on achève le moulage du tronçon.

Les tourillons ne sont alors moulés qu'en partie; pour achever l'opération, on désassemble le châssis qui les contient d'avec le châssis inférieur.

On le couche horizontalement, de sorte qu'un des tourillons se trouve en haut et l'autre en bas.

On enlève le sable du moule du tourillon supérieur qui n'a pu être bien foulé, et même on en détache une partie adhérente au moule de l'embase ou de corps de la pièce. On le remplace par de l'autre sable qu'on foule avec une batte, on achève le moulage de ce tourillon, puis on ferme la boîte par un couvercle de fonte PQ (fig. 2), fixé par des boulons à clavettes ou à écrous. On fait ensuite tourner le châssis, de manière que le tourillon non encore moulé, se trouve en haut; et on moule le second tourillon comme on a fait pour le premier.

Il est essentiel que le sable de tout le moule soit fortement et uniformément tassé. On reconnaît qu'il a la consistance voulue, lorsqu'on ne peut y faire d'empreinte en appuyant vigoureusement le pouce dessus.

ARTICLE IV.

DÉMOULAGE.

Le démoulage est l'opération par laquelle on retire du moule les diverses parties du modèle.

Ce travail se fait d'autant plus facilement que le modèle reste moins longtemps renfermé dans le sable. Les tronçons adhèrent d'ailleurs plus ou moins fortement au moule selon leur dépouille et l'étendue de leur surface. Dès qu'une partie du moule ne doit plus servir au moulage de la partie suivante, on la désassemble. On dévisse à l'intérieur les parties saillantes sur le corps du modèle, telles que, les tourillons, l'astragale au collet de la volée, etc. On place deux chantiers en travers sur l'ouverture du trou de moulage, et convenablement espacés.

On dépose sur ces chantiers la partie à démouler, la petite base vers le haut, appuyant sur ces chantiers par les brides inférieures.

Une pièce de bois est mise sur la feuillure supérieure du modèle, laquelle, fesant saillie sur le moule, empêche le contact du moule et de la pièce de bois. Un homme appliquant alors de grands coups de maillet sur le bois, force le tronçon à glisser dans son moule vers la grande base qui est en bas.

L'opération est plus ou moins longue et difficile. Enfin le modèle se dégage entièrement et tombe sur un lit de sable préparé au fonds de la fosse.

Les modèles des parties saillantes se retirent par l'intérieur du moule.

Les dégradations du moule doivent être réparées. On se borne en général à enlever les aspérités et à égaliser les surfaces. Il faut éviter autant que possible de boucher les cavités par un appliage de sable, qui tient fort peu et se détache souvent lors de la coulée.

La partie détachée restant prise dans la fonte, parce que le métal s'introduit entre elle et le moule, il en résulte des *tacons*.

Une petite cavité qu'on laisserait dans le moule, occasionnerait après la coulée une partie excédante à la surface de la pièce, qu'on peut enlever au burin ou au tour : ce qui n'offre aucun inconvénient.

Lorsque les moules doivent être réparés, ils sont ordinairement renversés et couchés sur des chevalets ou autres supports, afin d'éclairer l'intérieur. Quand la réparation est terminée, on redresse les moules, et on les fait reposer sur 3 ou 4 pieds à chevilles (fig. 9, planche IV), qu'on engage dans les trous percés sur la bride circulaire inférieure. Par ce moyen, le sable du moule est préservé de tout contact et ne peut être endommagé dans les déplacements ultérieurs.

ARTICLE V.

DESSICCATION DU MOULE ET APPLICATION DE L'ENDUIT.

Application d'une 1re couche de jus de crottin.

Dans le but de donner plus de consistance et de liant au sable, on applique une première couche de jus de crottin aux diverses parties du moule dépouillées de leurs modèles.

A cet effet, on se sert d'un torchon trempé dans un seau rempli de jus qu'on promène contre la paroi du moule. On emploie quelquefois un pinceau à longs poils pour enduire les parties rentrantes.

But du séchage.

Les moules doivent être desséchés après l'application de l'enduit: S'ils étaient humides au moment de la coulée, des vapeurs d'eau se formeraient instantanément lors de l'arrivée du métal en fusion.

Des explosions seraient à craindre : tout au moins la transformation de l'eau en vapeurs absorberait une grande quantité de calorique, ce qui hâterait le refroidissement de la pièce, rendrait la fonte plus dure et pourrait même la blanchir à la surface : des soufflures se formeraient, le moule se dégraderait, et la bouche à feu pourrait être manquée.

Chemins de fer pour faciliter les transports.

Pour pouvoir introduire facilement les moules dans l'étuve et les en faire sortir, l'atelier de la fonderie (planche VII), contient un chemin de fer EFE'F', traversant la largeur de l'atelier, à portée des grues A et B, et pénétrant dans les étuves GH, G'H'. Ajoutons pour compléter la description du chemin de fer, qu'il existe un pont tournant en E'F; qu'un 3^{me} chemin de fer est dirigé suivant E''F'', à portée de la grande grue CD, tandis qu'un 4^{me} chemin de fer RS, conduit à l'atelier de la forerie en traversant la cour de l'établissement.

Introduction des moules dans l'étuve.

On fait sortir le chariot TU (fig. 1 et 2, planche I) de l'étuve, en le fesant rouler sur le chemin de fer dont nous venons de parler et le conduisant jusque près de la grue. On le charge des diverses parties du moule, reposant chacune sur les pieds à cheville.

On dépose une couche de sable de 0,02 à 0,03 d'épaisseur sur la partie supérieure de chaque moule, afin de la préserver d'une action trop forte ou trop rapide de la chaleur.

On rentre dans l'étuve le chariot chargé des divers moules. Les plus gros se trouvent les plus rapprochés des feux, sans que la flamme puisse les atteindre, de manière à obtenir une dessiccation aussi égale que possible. On ferme ensuite la porte de l'étuve.

Conduite du feu: durée du séchage.

On allume et on dirige les feux, de manière à obtenir une augmentation progressive de chaleur. Une vaporisation trop prompte de l'humidité exposerait les moules à se gercer ou à s'égrener.

Le séchage doit durer 12 à 15 heures. La température doit être assez élevée, mais moindre que la chaleur rouge, pour ne pas déformer les ferrures des châssis par une trop forte dilatation ou par leur ramollissement et pour éviter que le sable des moules ne se fendille.

Application d'une 2de couche de jus de crottin et de l'enduit noir. 2^{me} nuit de séchage.

On laisse refroidir les moules jusqu'à ce qu'ils aient une température modérée. On les enduit d'une seconde couche de jus de crottin, et on applique immédiatement l'enduit noir.

Les moules sont rentrés dans l'étuve où ils passent une nuit mais exposés à une chaleur moins forte que la première fois.

On peut alors les descendre dans la fosse à canon et les assembler l'un sur l'autre, ce qu'on appelle les renmouler.

Nous en parlerons.

Lorsque le canon ne doit pas être coulé de suite, on attend pour appliquer la seconde couche de jus de crottin et l'enduit noir jusqu'à la veille du jour de coulée.

CHAPITRE II.

MOULAGE EN TERRE DES PIÈCES DE FONTE.

ARTICLE I.

CONFECTION DU MODÈLE.

Du trousseau.

Le trousseau est une pièce de bois CDEF (fig. 1, planche VIII), diminuant de grosseur d'un bout à l'autre, et qui sert d'axe au modèle en terre. Il est en bois pour donner au modèle la rigidité nécessaire sans le rendre trop pesant : son diamètre va en diminuant pour lui donner de la dépouille. Le sapin bien sec est employé de préférence comme étant un bois léger et suffisamment rigide.

Le trousseau est généralement un corps de révolution composé d'un ou de plusieurs troncs de cône.

Les diamètres sont plus petits de 0,06 à 0,08 que ceux correspondants du modèle, afin de réserver l'épaisseur des nattes de foin et des couches de terre.

On allége le trousseau, quand il s'agit de très-grands calibres, en complétant ses dimensions avec des lattes ou tringles de bois, dirigées suivant les génératrices, et présentant entre elles autant de vide que de plein.

Le trousseau est soutenu par deux tourillons en fer A et B (fig. 1), façonnés en carré à leurs extrémités, afin de pouvoir y adapter les manivelles GH, IK (fig. 3).

Du chantier.

Le chantier LM (fig. 1, 3 et 4), est un châssis horizontal de bois, soutenu par deux chevalets à mi-hauteur d'homme au-dessus du sol, servant de support au trousseau dans la confection du modèle.

Des coussinets sont fixés aux petits côtés du chantier (fig. 4), pour recevoir les tourillons du trousseau. Entre les chevalets et aux côtés, sont des murs légers en briques, dont l'objet est de réfléchir sur le modèle la chaleur que produit la combustion du charbon de bois qu'on allume dans cette espèce d'âtre. On remplace quelquefois ces murs de briques par un assemblage de feuilles de tôle ou de plaques de fonte.

Les chantiers sont quelquefois disposés pour deux modèles : dans ce cas, ils sont pourvus de coussinets. Les trousseaux sont disposés ayant leurs axes parallèles, le gros bout de l'un correspondant au petit bout de l'autre, et étant assez espacés pour qu'on puisse travailler aux deux modèles à la fois, placer leurs tourillons et mouler.

La construction des chantiers est assez variable : ils se composent parfois de deux chevalets solidement fixés en terre ; ce système est souvent employé pour les gros calibres : d'autres fois, les chantiers sont formés de deux châssis verticaux de bois assemblés par des longerons ou longs côtés, également en bois, traversant des mortaises pratiquées dans les montants des châssis ; ce qui permet de varier la longueur du chantier.

Les chantiers doivent être placés à portée d'une grue et à proximité d'une étuve, quand les moules ne sont pas séchés sur place.

De l'échantillon.

L'échantillon est une pièce de bois OP, QR (fig. 2), représentant exactement le profil du modèle. Il est coupé en biseau le long de ce profil et est renforcé, suivant l'arête aiguë, par une feuille de tôle. L'échantillon est placé lors du moulage sur le chantier, vis-à-vis du modèle, ayant l'arête aiguë en dessous, de sorte que la partie enlevée, pour former le biseau, laisse un vide angulaire entre l'échantillon et le modèle *cc's* (fig. 2) ; vide qui diminue en dessous par la saillie qui fait l'arête du biseau.

La terre du mouleur projetée dans ce vide, est entrainée par le modèle dans son mouvement de rotation et est pressée de plus en plus contre lui.

L'échantillon est profilé pour la pièce entière, y compris le faux-bouton.

Le modèle de la masselotte se fait à part, avec les mêmes procédés que pour le modèle de la bouche à feu.

Exécution du modèle.

Le trousseau est enduit de savon vert, afin de le retirer aisément du modèle.

On corde du foin en le tordant à l'instar des cordages, et on en prépare d'avance la quantité nécessaire qu'on enroule sous forme de grosse pelotte.

Le foin cordé est quelquefois remplacé par des nattes plates et minces, tressées avec du foin ou de la paille.

Pour natter le trousseau, on cloue provisoirement au gros bout l'extrémité de la pelotte de foin.

Un homme fait tourner le trousseau à l'aide de la manivelle, tandis qu'un autre l'enveloppe de foin cordé, en le tendant aussi fortement que possible, et fesant remonter les nattes à coups de maillet vers le gros bout, ce qui les fait serrer les unes contre les autres et contre le trousseau. Il est essentiel que les nattes adhèrent bien au trousseau.

Cette enveloppe de foin doit suivre grossièrement le contour de la pièce, afin que l'épaisseur des couches de terre soit aussi uniforme que possible et qu'elle ait approximativement 0,015.

Quand le nattage est terminé, on arrête le bout de la corde de foin en le passant sous un des brins déjà enroulés : on a eu soin d'ailleurs de recouvrir l'autre bout par lequel on a commencé, ce qui permet d'enlever le clou qu'on y avait enfoncé provisoirement.

On applique sur cette enveloppe de foin une couche de terre forte, en fesant en même temps tourner le trousseau. Un feu de charbon de bois allumé dans l'intérieur du chantier, active le séchage de la couche de terre, à mesure qu'on l'étend. Cette première couche doit recouvrir entièrement les tresses de foin. Afin d'augmenter l'adhérence de cette couche avec la suivante, on a soin d'y faire, avec les doigts ou avec une cheville de bois, de petits trous, dans lesquels entrera la terre de la nouvelle couche.

On fait sécher le modèle 6 à 12 heures.

Quand l'opération se fait sur place, on recouvre le trousseau de feuilles de tôle pour faire rayonner la chaleur sur toute la surface, et on lui fait faire de temps en temps un quart de tour, afin d'en exposer uniformément toutes les parties au feu de charbon de bois, allumé en dessous. Mais si la dessiccation doit se faire dans l'étuve, on y transporte le modèle et on le suspend par les tourillons à des supports attachés à la voûte ou reposant sur le sol.

Quoi qu'il en soit, après le séchage, le modèle doit être disposé sur son chantier pour l'application de la seconde couche de terre comme il l'a été pour la première couche. On vérifie si la terre forte qui s'est durcie, adhère bien aux nattes de foin : on fait tomber les parties qui ne tiendraient qu'imparfaitement et on les remplace.

La seconde couche est formée de terre à chaper, qui s'étend plus facilement que la grosse terre, et se dessèche plus vite.

Lorsque les dimensions du modèle se rapprochent de celles voulues, on place l'échantillon sur le chantier, l'arête du biseau en dessous, à une distance convenable de l'axe du trousseau. On s'assure de l'exactitude de cette distance par le diamètre de la partie tournée sur l'échantillon, qui doit être le même que celui indiqué par le tracé.

La position de l'échantillon étant trouvée exacte, on l'assure par des clous enfoncés sur le chapeau du chantier. On jette de la terre à chaper sur l'échantillon contre le modèle pendant qu'on le fait tourner. La terre s'attache aux parties faibles, et peu à peu le modèle est amené aux dimensions voulues. On le sèche ensuite comme la première fois.

La dernière couche du modèle se fait avec la terre fine qu'on applique comme la couche précédente. La terre fine bouche toutes les fissures qui se sont produites par le retrait de la matière ; elle sert à mettre exactement le modèle aux dimensions voulues et à parer sa surface.

Après un nouveau séchage, on enlève au ciseau une certaine portion de terre vers l'extrémité du faux bouton, de manière à façonner le carré. On peut éviter cette opération en appliquant contre le faux-bouton un modèle en bois, percé d'un trou pour le passage du tourillon du trousseau, et représentant le carré qu'on veut obtenir.

Le modèle est enduit de lessive de cendres, qu'on étend avec un pinceau à longs poils. On fait ensuite évaporer par la chaleur l'eau contenue dans la lessive.

Il ne reste plus qu'à placer les modèles des parties saillantes, telles que les tourillons, pour pouvoir commencer le moulage.

Le modèle de la masselotte se fait comme celui du corps de la pièce.

ARTICLE II.

MODÈLES DES TOURILLONS. — LEUR POSE.

Modèles des tourillons.

Les deux modèles des tourillons sont de bois, munis chacun de l'embase correspondante. Ces pièces sont d'abord tournées ; le menuisier fait ensuite le raccordement de l'embase avec le corps de la bouche à feu. On leur donne une forme tronconique (fig. 8, planche VIII), pour en faciliter le dépouillement.

Les tourillons étant fort souvent le réceptacle de laitiers et de corps étrangers qui s'y accumulent lors de la coulée, on leur met à la partie supérieure (quand la pièce est verticale) une rencharge où les parties impures peuvent venir se loger. Les parties excédantes sont ensuite enlevées lors du tournage des tourillons.

Les modèles des tourillons et de leurs embases sont quelquefois trop volumineux pour pouvoir être facilement retirés du moule. Dans ce cas, on les divise dans le sens de leur longueur, en 3 ou 4 parties, chacune d'inégale épaisseur, de sorte que l'une d'elle au moins ait une dépouille qui permette de l'enlever facilement par l'intérieur du moule : les autres parties n'étant plus resserrées, peuvent ensuite être dégagées successivement. Les pièces du modèle sont d'ailleurs assemblées en coulisses en queue d'aronde.

On se fera une idée du système en pensant aux formes des bottes.

Afin de placer aisément les modèles des tourillons dans les positions qui leur conviennent, chacun d'eux contient des remarques indiquant leur intersection avec :

1° Le plan passant par l'axe et parallèle à celui de la pièce.

2° Le plan passant par l'axe et perpendiculaire à celui de la pièce.

Ainsi, *abcd* représentant la coupe du modèle de tourillon par le plan passant par l'axe parallèlement à celui de la pièce et projeté en *de* (fig. 2), le modèle du tourillon portera les marques des lignes *ac* et *bd* (fig. 8).

De même *efgh* étant la coupe du modèle du tourillon par le plan projeté en *ab* (fig. 2), le modèle indiquera les lignes *ef* et *gh* fig. 8).

Pose des modèles des tourillons.

On indique sur le modèle de la pièce son intersection avec deux plans diamétraux perpendiculaires entre eux. Nous n'entrerons pas dans le détail des procédés qui conduisent à l'exécution des tracés de ces plans, et qui sont fondés sur des considérations géométriques. Nous nous contenterons de dire qu'à la fonderie de Liége, ces intersections sont obtenues en s'aidant de deux colliers, tels que celui (fig. 7).

ln, diamètre fictif du demi-cercle *lkn*,

yz, côté parallèle au diamètre *ln*.

kx, prolongement du rayon perpendiculaire sur *yz*.

mm', droite parallèle à *kx* et distante d'une quantité égale à l'abaissement des tourillons.

Ces deux colliers sont posés sur le modèle, en des places où ils l'embrassent exactement : le côté *yz* horizontal, le plan du collier perpendiculaire à l'axe de la pièce, ce qu'on vérifie par des cercles *cf*, *c'f'* (fig. 2) tracés sur le modèle : les positions des points *l*, *k*, *n* (fig. 7) marquées sur le modèle de la pièce, et unies deux à deux par une droite tirée avec une règle et une pointe à tracer.

Ayant indiqué sur le modèle la droite *gh* (fig. 2), intersection d'un des plans diamétraux, on tire la droite *de*, indiquant la trace du plan passant par l'axe du tourillon parallèlement à celui projeté en *gh*.

On trouve deux points de cette droite *de*, au moyen du point *m* (fig. 7), qu'on repère sur le modèle, etc., etc.

On trace sur le modèle le cercle *ba* (fig. 2) passant par l'axe des tourillons.

Cela fait, on prend le modèle de tourillon (fig. 8), et on l'applique sur celui de la pièce, de sorte que :

Les lignes *ac*, *bd* (fig. 8), viennent rencontrer la droite projetée en *de* (fig. 2), et que les lignes *ef*, *gh* (fig. 8), aboutissent au cercle projeté en *ab* (fig. 2).

Quand la position du tourillon a été trouvée, il ne s'agit plus que de l'y fixer. Le menuisier perce avec une tarrière un trou dans le modèle du tourillon et jusque dans le trousseau en traversant les couches de terre et les nattes de foin. Il fait ensuite passer un boulon dans le modèle et le fixe en engageant le bout fileté dans la cavité percée dans le trousseau.

Pour s'assurer de la perpendicularité de l'axe des tourillons sur celui de la pièce, on mesure la distance à la plate-bande de culasse de deux points symétriquement placés sur chacun des modèles. Ces deux distances doivent être égales.

ARTICLE III.

CONFECTION DU MOULE.

Confection du moule du corps de la pièce.

Dans le moulage en terre, le modèle de la culasse et celui du corps de la pièce ne font qu'un, mais leurs moules forment deux parties distinctes.

Le modèle étant sur son chantier, on dépose sur la partie relative au corps de la pièce une couche mince de terre sablée, pendant qu'on fait tourner le trousseau, comme dans la confection du modèle. Sur cette couche on en applique immédiatement une seconde composée de terre à chaper pour renforcer la première. On laisse sécher ces deux couches à l'air.

On étend une seconde couche de terre à chaper, ayant pour objet de remplir les gerçures de la première.

Le moule est ensuite séché, soit sur place, soit dans une étuve, puis on le recouvre d'une ou de deux couches successives de terre à chaper selon le calibre. Pour les relier les unes aux autres, on pratique, avec les doigts ou avec une cheville de bois, de petits trous ou raies sur chaque couche dès qu'elle est terminée. On renforce les surfaces extérieures en les recouvrant de filaments de chanvre.

Pour achever le moule du corps de la pièce, on met deux couches de terre forte consolidées avec du chanvre.

Il faut avoir soin de faire sécher modérément le moule avant chaque nouvelle application de terre. Il suffit que la chape ait acquis de la consistance. On prévient par ce moyen les crevasses qui se produiraient sous l'influence d'une forte chaleur.

A mesure qu'on fait le moule, on ménage une gorge pour servir à sa réunion avec le moule de la culasse.

Cette gorge est creusée régulièrement et avec une certaine dépouille, en enlevant au ciseau de menuisier les parties excédantes de terre pendant qu'on fait tourner le trousseau. On dresse aussi l'extrémité du moule sur laquelle doit s'assembler celui de la masselotte.

Lorsque le moule de la pièce est fini, on enduit sa gorge de lessive de cendres, et on y ménage en même temps une petite excavation irrégulière qui doit servir de repère pour assurer sa position identique relativement à la chape de la culasse, lors du renmoulage.

Confection du moule de la culasse.

Le moule de la culasse se fait comme celui de la pièce.

On termine le faux-bouton par une feuillure, destinée à recevoir une rondelle de terre gâchée et séchée, qu'on lutte ensuite pour fermer exactement le moule en cette partie.

Feuillure aux moules des tourillons.

Les tourillons sont moulés jusqu'à la hauteur de la tranche en ménageant un épaulement et un rebord pour former le logement d'une plaque circulaire de terre bien séchée. Quand les moules des tourillons sont secs, on retire les boulons à vis qui fixaient leurs modèles au trousseau.

ARTICLE IV.

DÉMOULAGE, SÉCHAGE ET APPLICATION DE L'ENDUIT.

Démoulage.

Lorsque les moules de la pièce et de la culasse sont terminés et convenablement séchés, on les fait reposer par leur milieu sur une table recouverte de paille, et on enlève le moule de la culasse qui, ayant beaucoup de dépouille, se retire facilement. On applique un coup de masse sur le trousseau au petit bout et on le fait sortir par le gros bout. On déroule les nattes de foin, on détruit la croûte de terre qui les recouvrait et on la fait sortir morceau par morceau en ménageant le moule. Les modèles des tourillons se retirent par l'intérieur.

Le procédé suivant est utilement employé pour détacher du moule la croûte formée par la terre du modèle. On pratique avec un ciseau de menuisier deux rainures dans cette croûte, suivant les génératrices opposées aux extrémités d'un même diamètre. On fait l'entaille avec précaution pour ne pas toucher au moule. Lorsque ces rainures ont été faites sur une certaine longueur, la croûte qu'elles sillonnent, s'affaisse d'elle-même et s'enlève facilement.

On répare le moule, on fait disparaître les parties du modèle qui y sont restées, ainsi que les cendres de la lessive qui ont pu y adhérer. On applique une couche de terre fine, avec laquelle on bouche toutes les fissures, et on pare la surface.

Séchage du moule et application de l'enduit.

On fait sécher le moule plus fortement que précédemment, dans une étuve. On l'enduit ensuite de jus de crottin puis d'enduit noir, on bouche les tourillons par des plaques de terre séchée qu'on fait tenir avec de la terre gâchée, puis on remet le moule dans l'étuve, où il reste jusqu'au moment de l'enterrage.

ARTICLE V.

ENTERRAGE DU MOULE.

Les moules en terre des pièces de fonte n'ont pas de ferrures à la fonderie de Liége. Il n'en était pas ainsi autrefois. Les moules étaient renforcés de ferrures, comme cela se voit encore dans la plupart des fonderies; on les enterrait dans des fosses ou puits à proximité des fourneaux. Pendant les préparatifs pour l'enterrage et pour la coulée, l'humidité du sol pouvait gagner le sable damé autour du moule et le moule lui-même. Lors de la coulée, les ferrures se tourmentaient par l'énorme chaleur transmise par le métal en fusion : des fissures pouvaient se former dans la chape et livrer passage au métal liquide. L'humidité des terres damées se vaporisant subitement, des explosions dangereuses étaient à craindre.

On a apporté à la fonderie de Liége deux perfectionnements dans le moulage en terre.

1° Les moules ont été enterrés dans des châssis de fonte, et soustraits ainsi à l'influence de l'humidité du sol.

2° On a supprimé les ferrures dans les moules des pièces de fonte. Il est reconnu que le moule acquiert une grande résistance par le sable comprimé qui l'entoure dans la fosse.

D'ailleurs la fonte n'est pas assez fluide pour pénétrer dans la chape, à moins qu'il n'y ait des fissures.

Les moules des pièces en fonte sont donc moins exposés à s'élargir et n'ont pas besoin de ferrures qui sont indispensables quand on coule le bronze.

Voici les dispositions qu'on prend pour l'enterrage.

On commence par le moule de la culasse qu'on a fermé au carré du faux-bouton par une plaque de terre séchée et soudée avec de la terre pétrie.

On met ce moule dans un châssis de culasse de grandeur suffisante et on foule du sable entre le moule et le châssis. On place ce châssis dans la partie de la fosse à canon où la coulée doit avoir lieu, la bride circulaire horizontale. On fait descendre (en s'aidant de la grue) le moule du corps de la pièce sur celui de la culasse en faisant entrer la gorge de l'un dans la feuillure de l'autre, et faisant coïncider les marques destinées à servir de repère pour assurer la position relative de l'un et de l'autre.

On entoure la ligne de séparation des deux moules d'un cordon de chanvre légèrement tordu pour empêcher l'humidité de gagner l'intérieur par cette espèce de fissure. On lutte sur ce cordon les joints des deux moules par un peu de terre gâchée. On place un second châssis sur celui de la culasse. Pour y parvenir, on le désassemble dans ses deux demi-châssis : on place ces derniers successivement sur la bride circulaire du châssis de culasse, puis on les réunit par les boulons à clavettes. Par ce moyen, on évite l'obstacle des tourillons.

On remplit de sable comprimé l'intervalle entre le châssis et le moule et l'on continue à superposer les demi-châssis, à les assembler 2 à 2 et à fouler du sable entre leurs parois et le moule jusqu'à ce qu'on arrive à la partie supérieure du bourrelet.

On assemble le moule de la masselotte avec celui de dessous ; on lutte le joint comme on a fait pour la culasse. On entoure le moule de la masselotte d'un châssis et on remplit de sable damé le vide laissé entre eux.

On doit avoir l'attention en enterrant le moule de la culasse de le placer de telle sorte que le bord supérieur soit bien horizontal, afin que le moule tout entier soit vertical.

Dans cette position les parois sont moins exposées aux chocs obliques du métal en fusion.

Le foulage du sable doit se faire uniformément, par de légers coups de pilon, en évitant de toucher la chape.

Le châssis qui contient le moule de la culasse, doit être solidement appuyé sur une plaque de fonte ou consolidé par du sable bien damé.

CHAPITRE V.

MOULAGE MIXTE DES PIÈCES DE FONTE.

ARTICLE III.

CONFECTION DU MODÈLE.

Le modèle dans le moulage mixte est le même que pour le moulage en terre, à l'exception :

1° Que la couche de terre qui recouvre le trousseau et principalement la couche de terre forte, est plus épaisse. Le modèle dans le moulage mixte devant résister à la compression produite par le sable du moule qui est fortement foulé, il convient d'en augmenter la consistance par une plus forte épaisseur de la croûte de terre.

2° Que le modèle est enduit d'une lessive de mine de plomb, au lieu de lessive de cendres. Nous avons déjà fait ressortir les avantages de la lessive de mine de plomb et les motifs qui permettent de l'employer dans le moulage mixte des pièces de fonte. L'enduit étant séché, on donne un grand poli au modèle en le parant avec une petite truelle, ce qui aide beaucoup à le retirer du moule.

Cas particulier où le modèle a une culasse en bois.

Lorsqu'on doit couler plusieurs pièces de même calibre, il est plus avantageux de faire une culasse de bois et de terminer le modèle du corps du canon par la partie où commence cette culasse.

La culasse étant faite au tour ne demande pas beaucoup de façon et coûte peu. On la compose quelquefois de deux parties, la culasse proprement dite et le bouton avec le faux-bouton, comme aux modèles en métal. Dans ce cas, la culasse et le bouton s'adaptent l'un à l'autre par gorge et feuillure et sont reliés par un boulon à écrou, de la même manière que les modèles en métal.

D'autres fois, la culasse et le faux-bouton sont d'une pièce, mais au lieu d'un rétrécissement au collet du bouton, celui-ci est raccordé au cul de lampe par un tronc de cône pour faciliter le dépouillement. On enlève plus tard, sur le tour, les parties excédantes de la pièce.

Modèle de la masselotte.

Le modèle de la masselotte se fait comme celui du corps du canon. Mais le plus souvent il est formé d'un bloc de bois convenablement façonné.

Modèles des tourillons et des parties saillantes sur le corps de la pièce.

Les modèles des parties saillantes autres que les moulures, sont de bois et contournés de manière à faciliter leur enlèvement du moule après la sortie du modèle du corps de la pièce.

Les modèles en bois des tourillons sont fixés au trousseau par des boulons à vis comme dans le moulage en terre : boulons qu'on retire quand les tourillons sont moulés jusqu'à la tranche.

Les modèles des autres parties saillantes sont également en bois, mais placées le plus souvent dans une entaille faite sur le modèle lors du moulage.

Avec un peu de précaution, cette entaille ou ce logement de la base de ce modèle suffit pour en assurer la position pendant qu'on le moule.

Le plus souvent les masses de mire ne sont pas coulées en même temps que la bouche à feu ; mais ce sont des pièces rapportées par l'ajusteur.

Quand le modèle de culasse est en bois, il porte les parties saillantes qu'on peut dévisser par la grande base.

D'après ce qui vient d'être dit, on comprendra les dispositions à prendre pour les diverses parties saillantes du modèle, que peuvent présenter les tracés de bouches à feu.

ARTICLE II.

CONFECTION DU MOULE LORSQUE LE MODÈLE EST ENTIÈREMENT EN TERRE.

Quand le modèle est entièrement en terre, on le dispose verticalement, la volée en bas, lors du moulage. Voici de quelle manière on procède.

On descend le modèle dans la fosse à canons à l'aide de la grue, la culasse en haut. On le fait reposer par la tranche sur une pièce de bois horizontale qu'on recouvre d'un peu de sable pour éviter les dégradations. Un trou percé dans le bois, permet le passage du tourillon du trousseau du côté du bourrelet. On s'assure que dans cette position l'axe du modèle est vertical. On place le châssis du bourrelet de manière qu'il soit partout également distant du modèle : on remplit de sable comprimé l'intervalle qu'ils laissent entre eux. On scie le modèle suivant le plan de la bride circulaire supérieure du châssis en faisant l'entaille assez profonde pour qu'elle arrive jusqu'au trousseau.

Cette opération s'exécute chaque fois que le moule d'une partie de châssis est terminé. Nous n'en parlerons plus.

Le châssis de la volée est déposé sur celui du bourrelet et en est séparé par 3 petites calles (pour le retrait du sable). Le moulage se poursuit d'ailleurs de la même manière que pour le moulage en sable avec modèle en métal, à l'exception qu'on finit par la culasse au lieu du bourrelet.

Pour placer chaque châssis, on le désassemble suivant les brides longitudinales. On dépose chacune des parties sur le demi-châssis inférieur correspondant, puis on réunit d'abord ces parties entre elles et ensuite au châssis de dessous.

On enlève les boulons qui fixent les modèles des tourillons avant qu'ils ne soient entièrement recouverts de sable.

ARTICLE III.

CONFECTION DU MOULE LORSQU'IL Y A UN MODÈLE DE CULASSE EN BOIS.

Lorsqu'il y a un modèle de culasse en bois, on commence par mouler cette partie comme dans le moulage en sable sur modèle en métal, puis on renverse le châssis de culasse contenant son modèle, le bouton en dessous. On dépose le châssis dans la fosse à canon, de sorte que son plan supérieur soit horizontal.

On enlève le tourillon du côté du gros bout du trousseau.

On descend le modèle en terre la volée en haut : on le fait reposer verticalement sur le modèle de culasse. On place sur le châssis de la culasse celui du renfort désassemblé suivant les brides longitudinales : on en réunit les deux moitiés : on place les 3 petites calles entre les brides circulaires des deux châssis, et on remplit de sable comprimé l'intervalle entre le châssis et son modèle.

Arrivé au plan supérieur du châssis du renfort, on scie le modèle suivant ce plan jusqu'aux nattes de foin. On place le châssis du 2d renfort sur celui du premier on les sépare par 3 petites calles, et l'on continue ainsi qu'il a été expliqué au paragraphe précédent pour le moulage mixte sur modèle entièrement en terre

ARTICLE IV.

DÉMOULAGE, SÉCHAGE ET APPLICATION DE L'ENDUIT.

Démoulage.

Pour démouler, on ôte les clavettes des boulons qui réunissent le châssis de culasse à celui du 1er renfort, et on les sépare. Cette opération est facile parce que la culasse a une grande dépouille.

Le châssis du corps du canon étant disposé la volée en haut, on le fait reposer par sa partie inférieure sur deux chevalets laissant entre eux un passage pour le trousseau. Un coup de masse appliqué au petit bout du trousseau le fait descendre.

On désunit le châssis du bourrelet et celui de volée après avoir enlevé les clavettes qui les relient.

Les tresses de foin ayant dû être coupées à la jonction des deux châssis quand on a scié le modèle lors du moulage, on n'a qu'à rompre celles qui pourraient encore tenir aux deux parties.

Le châssis du bourrelet est transporté dans le trou de moulage pour servir à l'exécution du moule de la masselotte. La croûte de terre qui est restée ainsi que les tresses de foin offrent un appui suffisant au modèle de cette dernière partie de la pièce et permettent de procéder comme dans le moulage en sable sur modèle en métal. Ce n'est qu'après cette opération qu'on débarrasse le moule du bourrelet de la portion du modèle qui y est restée.

Les divers châssis du moule sont enlevés successivement, en commençant par le haut.

Pour vider chaque moule, on déroule les tresses de foin; on fait tomber les parties les plus grossières de la croûte de terre. On fait adroitement, à l'aide d'un ciseau de menuisier, un sillon dans la couche de terre jusqu'au moule, mais sans le dégrader, et on enlève les parties du modèle par grandes surfaces.

Les modèles des parties saillantes se retirent par l'intérieur comme il a déjà été expliqué.

La réparation des petites dégradations se fait comme dans le moulage en sable sur modèle en métal.

Séchage et application de l'enduit.

On enduit les moules d'une couche de jus de crottin avant de les faire sécher dans l'étuve. Au sortir de celles-ci, les moules reçoivent encore une couche de jus de crottin, puis une application d'enduit noir et sont rentrés dans l'étuve mais en les soumettant à une moindre chaleur que la première fois. En quelques mots le séchage et l'application des couches de jus de crottin et d'enduit noir sont les mêmes que dans le moulage en sable sur modèle en métal.

CHAPITRE IV.

MOULAGE EN SABLE DES PIÈCES DE BRONZE.

ARTICLE I.

CONFECTION DU MOULE.

Modèles et châssis.

Les modèles et les châssis sont les mêmes que pour les pièces de fonte, mais en tenant compte des anses et autres particularités que peuvent présenter les formes des bouches à feu.

Les anses sont coulées pleines pour éviter les soufflures et les cendrures qu'on rencontre souvent dans cette partie de la pièce. Le devant des anses est raccordé par une légère courbure avec le corps du modèle pour faciliter la sortie des laitiers et des charbons qui auraient pu s'y introduire lors de la coulée.

Le châssis du 2^d renfort contient des boîtes pour le logement des tourillons ainsi que pour les anses. Elles sont également fermées, après le moulage par des plaques de fer fixées sur les brides qui les contournent par des boulons à écrous ou à clavettes.

Matériaux employés.

Les matériaux sont ceux décrits au Livre II, chapitre IV. Ils ne diffèrent de ceux employés au moulage en sable des pièces de fonte, que par le sable de moulage qui ne contient pas de coke, et par la potée de cendres dont on se sert au lieu d'enduit noir.

Nous avons déjà expliqué les raisons de ces différences.

Exécution du moule.

Les procédés de moulage, sont identiques à ceux usités pour le moulage en sable des pièces de fonte.

Après le démoulage, on peut enduire les moules de jus de crottin ainsi que cela se fait pour les pièces de fonte. Mais le sable ne renfermant pas de coke, possède généralement une consistance qui permet de se passer de cet enduit. On y trouve l'avantage de ne pas introduire de l'humidité dans le moule et d'être ainsi dispensé de la faire évaporer.

Après le démoulage, on introduit les moules dans l'étuve où ils passent 36 heures au moins.

On les soumet ensuite à l'opération de la cuite, ainsi qu'il va être expliqué.

ARTICLE II.

CUITE DES MOULES.

La cuite a pour objet de débarrasser les moules des dernières traces d'humidité qu'ils pourraient contenir.

Au sortir de l'étuve, on les arrange pour cette opération dans l'atelier des fondeurs, de sorte que le feu ne puisse être communiqué au bâtiment.

On fait reposer les divers moules sur des pieds à chevilles (fig. 9, pl. IV), qu'on fixe à la bride circulaire inférieure des châssis. Par cette disposition, les moules étant élevés à une petite hauteur au dessus du sol, sont transformés en une sorte de fourneaux. On recouvre leurs bords supérieurs d'une couche de sable de 0,02 à 0,03 d'épaisseur pour les garantir de l'action inégale de la chaleur et pour les empêcher de s'égrener.

On introduit des bûchettes de bois dans les moules et on les allume par le bas. Le feu est conduit lentement pendant la première heure; puis il est activé jusqu'à ce que l'intérieur soit à la température du rouge blanc. On l'entretient par l'introduction de nouvelles bûchettes, pendant 4 ou 5 heures. Les braises développant une grande chaleur pourraient vitrifier par leur contact la partie inférieure des moules, si l'on n'avait la précaution de les enlever de temps en temps. Lorsque la cuite approche de sa fin, on ferme les ouvertures supérieures par une feuille de tôle, et on laisse le refroidissement se faire lentement pour éviter les crevasses et les gerçures. On reconnaît que la cuite a été faite à une chaleur convenable lorsque le moule présente l'aspect de la brique.

ARTICLE III.

APPLICATION DE LA POTÉE DE CENDRES ET SÉCHAGE DU MOULE.

Application de la potée de cendres.

La cuite étant terminée et les moules étant ramenés à une chaleur très-douce, on les enduit de potée de cendres, avec laquelle on bouche en même temps toutes les petites fissures.

Séchage.

Immédiatement après l'application de la potée les moules sont réunis dans l'étuve où ils passent encore une nuit, mais exposés à une chaleur moins élevée que la première fois.

CHAPITRE V.

MOULAGE EN TERRE DES PIÈCES DE BRONZE.

ARTICLE I.

CONFECTION DU MODÈLE.

Le modèle se fait par les mêmes procédés que dans le moulage en terre des pièces de fonte.

Pour déterminer la position des anses sur le modèle, on se sert de la *sellette,* pièce de bois évidée en dessous suivant la surface du modèle de la bouche à feu et dont les côtés latéraux *ac, bd* (fig. 9, planche VIII), ont l'inclinaison que doivent prendre les modèles des anses.

ef, *e'f''*, lignes tracées sur la sellette et indiquant le plan de symétrie perpendiculaire à l'axe des tourillons.

gh, ligne marquée sur la sellette et indiquant le plan passant par le milieu des anses et perpendiculaire à l'axe du modèle.

A l'aide des lignes *gh*, *ef* et *f'f'*, et de celles semblables tracées sur le modèle du corps de la bouche à feu, il est facile de placer la sellette.

On applique le modèle des anses contre les côtés de la sellette, en fesant coïncider leurs milieux avec la droite *gh*. Les modèles des anses sont ensuite fixés par des boulons à vis qui pénètrent jusque dans le trousseau comme pour les tourillons.

ARTICLE II.

CONFECTION DU MOULE, DÉMOULAGE, CUITE ET CENDRAGE DU MOULE.

Confection du moule.

Le commencement du moulage est identique à celui en terre des pièces de fonte, à l'exception que la première couche au lieu d'être de terre sablée, est de terre à chaper comme les couches suivantes. Après avoir appliqué par les procédés ordinaires 5 à 6 couches d'après le calibre, on superpose des couches de terre forte jusqu'à ce que la chape ait 0,04 à 0,05 d'épaisseur. On la renforce de ferrures, et c'est en cela que le moulage des pièces de bronze diffère principalement de celui pour les pièces de fonte.

Les ferrures se composent de barres de fer longitudinales (fig. 5 et 6, planche VIII), munies d'anneaux à leurs extrémités et reliées par des bandes de fer repliées en cercle et ayant leurs bouts recourbés en crochets. On pose les barres de fer à plat sur la chape du corps du canon suivant le sens de sa longueur, on les recouvre des bandes circulaires dont on réunit les bouts en crochets par des liens en fil de fer pour resserrer les cercles sur les barres de fer. Les anneaux dont celles-ci sont munies, sont destinés à faciliter le maniement de la chape, qui devient très-lourde. On remplit exactement avec de la terre forte les joints entre les ferrures et le moule, puis on continue d'appliquer d'autres couches de la même matière, qu'on fait sécher successivement, en ayant soin d'étendre des filaments de chanvre sur ces terres quand elles sont encore molles.

Une partie des barres de fer longitudinales sont repliées à angles droits sur les moules des tourillons, de manière à en assurer la solidité. Plus tard, lorsque le moule sera débarrassé du modèle, on formera les ouvertures des tourillons par des plaques circulaires en terre cuite qu'on recouvrira de brides de fer.

Les ferrures du moule de la culasse sont contournées suivant la forme de cette partie. On fait coïncider les extrémités de 4 ou 6 barres de fer du moule du corps de la pièce avec autant de ferrures du moule de la culasse pour avoir la facilité de les réunir lors du renmoulage.

Le moule devenant très-lourd, pourrait faire fléchir le trousseau et fausser les tourillons; on le soutient dans son milieu par un pointal dans toutes les occasions où on ne le fait pas tourner.

Démoulage.

Lorsque les moules sont terminés et séchés (ils ont alors une épaisseur de 0,09 à 0,10), on détache et on enlève celui de culasse, on fait sortir le trousseau, on déroule les nattes de foin, on détruit la croûte de terre qui recouvrait le modèle, etc., etc.; on procède pour l'enlèvement des débris du modèle absolument comme dans le moulage en terre des pièces de fonte, à l'exception de la cuite et du cendrage.

Cuite et cendrage du moule.

Lorsque les moules sont dépouillés de leurs modèles, on les fait sécher dans l'étuve, puis on les pare à l'intérieur avec de la terre fine avec laquelle on bouche aussi toutes les petites gerçures. Après une seconde ou une troisième nuit passée dans l'étuve, on procède à la cuite.

La cuite se fait avec des bûchettes de bois comme dans le moulage en sable des pièces de bronze.

La potée de sable s'applique de la même manière, le séchage dans l'étuve est le même.

ARTICLE III.

ENTERRAGE DU MOULE.

On creuse dans la fosse à canons, dans la place où la coulée doit se faire, une cavité de la profondeur nécessaire pour que le moule de la pièce y compris celui de la masselotte n'atteignent pas les bassins et les chenaux pour la coulée.

On dépose dans cette cavité le moule de la culasse, le bouton en bas; le dessus bien horizontal. On l'entoure d'un châssis de fonte d'un très-grand diamètre, qu'on fait bien appuyer sur le sol. On remplit de sable comprimé l'intervalle entre le moule de la culasse et le châssis.

Pendant ce temps ou un peu avant, on ferme les tourillons par deux disques en terre cuite qu'on fait entrer dans les logements préparés à cet effet. On les lutte soigneusement et on les relie par des croix en fer aux ferrures de la chape.

On fait sécher la terre qui a servi de ciment, soit par des réchauds portatifs, soit dans l'étuve.

Le moule du corps de la pièce est ensuite descendu sur celui de la culasse et assemblé avec lui à gorge et feuillure. Des liens en fil de fer réunissent les extrémités des barres de fer de l'un et l'autre moule qui se correspondent. On entoure d'un cordon de chanvre très-peu tordu la ligne de séparation des deux moules, pour empêcher l'humidité de pénétrer par leur jonction : on lutte sur ce cordon avec de la terre à chaper; puis on fait sécher par des réchauds portatifs.

Lorsque ces opérations sont terminées, on continue l'enterrage : on pose un second châssis sur le premier, puis les autres successivement, en remplissant de sable bien damé l'intervalle entre eux et la chape.

Arrivé à la hauteur du bourrelet, on superpose le moule de la masselotte et on réunit par du fil de fer les extrémités correspondantes les ferrures de l'un et de l'autre moule. On recouvre la ligne de séparation par un cordon de chanvre peu tordu, on lutte avec de la terre à chaper, on fait sécher par des réchauds portatifs et l'on continue de poser des châssis et de remplir de sable damé le vide entre eux et la chape. Si les mesures sont bien prises, la partie supérieure du moule et du châssis sera de 0,20 à 0,30 en dessous du fond du bassin de coulée.

Le sable avec lequel on entoure le moule dans son châssis doit être légèrement humide, ce qui le rend plus facile à comprimer; mais il ne doit avoir que l'humidité nécessaire, afin de prévenir les défauts et les accidents qui pourraient résulter de sa vaporisation lors du remplissage du moule.

L'enterrage demande beaucoup de soin et d'uniformité : il faut redoubler d'attention à la hauteur des anses et des tourillons pour ne pas briser ces parties peu résistantes. On dame avec des pilons en fer légèrement chauffés pour que le sable n'y adhère pas. On les change quand ils sont refroidis.

CHAPITRE VI.

MOULAGE MIXTE DES PIÈCES DE BRONZE.

ARTICLE I.

CONFECTION DU MODÈLE.

Le modèle se fait de la même manière que pour le moulage mixte des pièces de fonte; c'est-à-dire que la croûte de terre est plus épaisse que pour le moulage en terre, afin que le modèle soit plus dur.

La pose des anses se fait comme il a été expliqué pour le moulage en terre.

Le modèle est enduit de lessive de mine de plomb.

ARTICLE II.

CONFECTION DU MOULE, DÉMOULAGE, CUITE ET CENDRAGE DU MOULE.

On moule la pièce comme dans le moulage mixte des pièces de fonte, mais avec du sable préparé sans coke.

Le séchage, la cuite, le cendrage avec la potée de cendres, sont les mêmes que dans le moulage en sable des pièces de bronze.

CHAPITRE VII.

MOULAGE A NOYAU DES GROS MORTIERS DE 0,29.

ARTICLE I.

RAISONS QUI ENGAGENT A COULER A NOYAU LES GROS MORTIERS DE BRONZE. — DESCRIPTION DU TOUR A MOULER VERTICAL DE LA FONDERIE DE LIÉGE.

Raisons qui engagent à couler à noyau les gros mortiers de bronze.

Les gros mortiers de bronze, tels que ceux de 0,29, ont de fort grands diamètres. Ils présenteraient une masse énorme de métal si on les coulait pleins : la solidification en serait retardée. Le refroidissement se faisant plus lentement, l'étain se séparerait du cuivre en plus grande quantité, et il y aurait une altération notable dans le titre de ces pièces. On remédie à cet inconvénient, en coulant les mortiers à noyau et la volée en bas, afin de donner au noyau un appui solide. L'ame des gros mortiers étant courte et ayant un grand diamètre, on conçoit qu'il est possible de se passer de chapelets. Les inconvénients du coulage à noyau étant écartés, il n'en reste que les avantages.

La fonderie de Liége n'a pas encore coulé de mortier de 0,29 en bronze, mais elle possède un tour vertical avec lequel on a moulé des modèles de mortiers à plaque, des cylindres de machines à vapeur et des mortiers de fonte coulés pleins. On peut donc établir par analogie les procédés qu'on pourrait suivre si l'on avait des mortiers de 0,29 à fabriquer.

Description du tour à mouler vertical.

AB (fig. 1, planche V), arbre vertical en fer susceptible de prendre un mouvement de rotation.

A, pivot inférieur de l'arbre, reçu dans une crapaudine.

B, partie cylindrique de l'arbre servant de tourillon supérieur et maintenu par des coussinets à un châssis horizontal FC (fig. 1), CBC′ (fig. 2).

EC (fig. 1), CBC′ (fig. 2), châssis horizontal en fer attaché à la muraille par deux charnières *c*, *c′*.

MN (fig. 1 et 2), tirant en fer servant à consolider le châssis dans la position horizontale.

Lorsqu'on veut enlever l'arbre AB, on défait les boulons qui resserrent les coussinets sur le tourillon B; en ôtant l'un de ces coussinets, l'arbre AB se trouve dégagé.

ED (fig. 1), cadre rectangulaire en fonte ayant à l'un de ses petits côtés deux ouvertures pour le passage de l'arbre AB, sur lequel on le fixe à une hauteur quelconque par deux vis de pression.

HI (fig. 1), échantillon vertical profilé suivant l'objet à mouler, fixé au cadre ED par des boulons à écrous.

KL (fig. 1), arc boutant servant à consolider l'échantillon.

ARTICLE II.

CONFECTION DU NOYAU.

On commence le moulage du mortier par le noyau ; on fait ensuite successivement le modèle sur le noyau, et la chape sur le modèle. En détruisant celui-ci et enlevant les débris, il reste le noyau et le moule.

Nous allons décrire ces diverses opérations.

On place horizontalement un anneau circulaire en fonte OO′, P′P (fig. 1), en fesant correspondre le milieu avec l'axe de l'arbre vertical AC du tour.

En dessous de cet anneau, on arrange une espèce d'âtre ou de foyer RS avec plusieurs soupiraux pour le tirage, et l'on y fait un feu de charbon de bois pour sécher le noyau, le modèle et le moule, à mesure qu'on les exécute. On prépare une base en briques TU, T′U′ sur l'anneau en employant la terre fientée en guise de mortier, et on fait cette base suffisamment large pour servir d'appui ou de portée au noyau et au moule.

On fixe l'échantillon HI sur le châssis de l'arbre vertical et on le fait tourner pour s'assurer que cette base est parfaitement dressée. On ménage en même temps l'emboitement du moule.

L'intérieur du noyau se fait en briques bien cuites, taillées circulairement et scellées avec de la terre à chaper. On laisse au centre du noyau le plus grand vide possible pour faciliter et hâter le séchage. Les briques ont l'avantage de rendre le noyau plus solide et d'accélérer le travail.

On recouvre ces briques de terre à chaper, contournée avec l'échantillon suivant le profil voulu. On fait une feuillure à la partie supérieure du noyau, destinée à recevoir un disque de terre cuite, pour fermer cette partie lorsque le moulage sera terminé.

Le noyau étant sec, on en bouche les fissures avec de la terre fine, ou on en égalise la surface en manœuvrant l'échantillon, et on le fait sécher.

ARTICLE III.

EXÉCUTION DU MODÈLE.

Pour faire le modèle sur le noyau, on recouvre celui-ci de tresses de foin (fig. 3, planche V), avec lesquelles on suit grossièrement le contour indiqué par le tracé. On achève le modèle avec des couches successives de terre forte, de terre à chaper et de terre fine, suivant les procédés qui ont été indiqués pour le moulage en terre. La seule différence qu'il y a, c'est que le modèle est immobile, tandis que c'est l'échantillon qui tourne.

On ménage en même temps un vide au centre du modèle pour le passage de l'arbre vertical A du tour.

Au lieu de contourner le cul du mortier, on fait cette partie cylindrique YZ, parce qu'elle doit se raccorder avec la masselotte.

Les modèles des tourillons, des embases et des renforts sont de bois et divisés de manière à pouvoir être retirés du moule, et assemblés entre eux, soit à coulisses, soit avec des boulons à vis, etc. On maintient ces modèles en place au moyen d'un cadre AB′ (fig. 4), formé de deux étriers de fer CD, C′D′, resserrés contre les tourillons par les boulons à écrous AB, A′B′. Avec l'aide de ce cadre, les tourillons sont fixés au modèle jusqu'au moment où la chape est assez avancée pour qu'on puisse enlever cette ferrure. Au besoin les modèles sont raffermis dans leur position par des pointes de Paris, chassées dans la terre du modèle.

Le modèle de l'anse est aussi en bois : on le fixe soit avec des pointes de Paris, soit provisoirement avec un cadre, tel que celui (fig. 4), soit en le faisant entrer par sa base dans une excavation pratiquée sur le modèle du mortier.

Le modèle de la masselotte se fait d'une manière semblable sur celui de la pièce, en ménageant au centre un vide pour le passage de l'arbre : on peut aussi le faire sur un trousseau horizontal.

Le modèle entier étant fini, enduit de lessive de cendres et séché, on procède à la confection de la chape.

ARTICLE IV.

CONFECTION DU MOULE.

Le moule se fait en deux parties, l'une comprenant le mortier jusqu'à la partie YZ (fig. 3, planche V), l'autre relative à la masselotte.

Les chapes sont exécutées par les procédés déjà décrits : elles sont consolidées par des ferrures disposées d'après la forme du modèle, et dont quelques-unes servent à relier les chapes les unes aux autres et à l'anneau circulaire OP qui sert de base à tout le système. Des couches de terre forte recouvrent ces ferrures, comme dans le moulage des canons.

Les deux chapes s'emboîtent par gorge et feuillure. Lorsqu'elles sont suffisamment séchées, on fait le démoulage ainsi qu'il suit.

ARTICLE V.

DÉMOULAGE, SÉCHAGE, CUITE, CENDRAGE ET RENMOULAGE.

Démoulage de la masselotte.

On peut enlever le moule de la masselotte, renfermant encore son modèle, parce que l'emboîtement, avec la partie de dessous, a une dépouille suffisante. Mais on peut aussi, avant de le détacher, dérouler les nattes de foin, détruire et enlever la croûte de terre la plus grossière du modèle, ce qui rend la chape plus légère et plus maniable.

Quoi qu'il en soit des deux procédés, la chape doit être entièrement débarrassée des débris du modèle, réparée avec de la terre fine et séchée comme dans le moulage des canons de bronze.

Démoulage de la pièce.

On fait sortir par l'ouverture YZ, les torches de foin, on détache avec un ciseau de menuisier et on enlève peu à peu la croûte de terre la plus grossière du modèle; en ayant l'attention de ménager la chape et le noyau. On parvient ainsi à isoler complètement ce dernier. Il est alors facile d'enlever le moule, renfermant les modèles des tourillons, des embases, des renforts, de l'anse, et contenant en outre une mince couche de terre.

Les modèles des parties saillantes se retirent par l'intérieur. Le moule étant entièrement vidé, est réparé avec de la terre fine et séché ensuite.

Cuite et cendrage des moules et du noyau.

La cuite des moules et du noyau se fait par des procédés analogues à ceux employés pour les canons. Il en est de même pour le cendrage de ces parties et pour le séchage qui le suit.

Renmoulage.

On descend dans la fosse aux moules le noyau reposant toujours sur l'anneau de fonte comme sur un socle. On remplit le vide intérieur du noyau avec du sable bien damé et l'on ménage au milieu de ce sable un conduit cylindrique pour la sortie des gaz qui se développent au moment de la coulée. Pour former ce conduit, on place une baguette au centre du noyau pendant qu'on le remplit de sable damé : en la retirant ensuite, la baguette laisse un petit canal à la place qu'elle occupait.

On emploie également une baguette ou une corde qu'on retire après, pour prolonger ce canal en dessous du noyau et au travers du sable damé, jusqu'en dehors des châssis qui renferment le moule.

On ferme le dessus du noyau par un couvercle de terre cuite, engagé dans la feuillure et lutté avec de la terre fientée. On fait ensuite sécher ce couvercle. On agit semblablement pour la fermeture des moules des tourillons et de l'anse.

On superpose successivement les deux moules de la pièce et de la masselotte sur le noyau, en les assemblant entre eux, ainsi qu'à la base du noyau par les emboitements qu'on a ménagés. On les relie par leurs ferrures ; on lutte les joints.

Au fur et à mesure du renmoulage, on entoure les chapes de châssis de fonte qu'on remplit de sable damé.

ARTICLE VI.

MOULAGE HORIZONTAL DES MORTIERS.

Au lieu du moulage vertical, on pourrait employer celui horizontal et mouler sur un même arbre de fer, le noyau, le modèle et la chape. Mais il faut observer que l'ensemble serait très-pesant, et demanderait plus de temps que pour un canon, à cause du noyau. Ce noyau lui-même étant plein, serait plus difficile à sécher.

CHAPITRE VIII.

OBSERVATIONS CONCERNANT LE TRACÉ DU MODÈLE. SOINS A APPORTER DANS L'EXÉCUTION DU MOULE. DÉFAUTS DE COULÉE. MÉTHODES DIVERSES DE COULAGE.

ARTICLE I.

OBSERVATIONS CONCERNANT LE TRACÉ DU MODÈLE.

Les modèles des bouches à feu sont confectionnés d'après un tracé en grandeur naturelle. Les côtes de ces tracés sont celles du dessin de la pièce augmentée de $^1/_{144}$ à $^1/_{192}$. On indique par des lignes de couleur différente (pour qu'elles soient plus visibles) les surépaisseurs qu'on accorde pour le tournage et l'ajustage.

On suit ces dernières lignes pour l'exécution du modèle.

Les pièces de bronze doivent être tournées et ajustées, parce qu'on ne peut les couler avec une surface assez nette. On leur donne un excédant d'épaisseur de $0^m,007$ à $0^m,010$.

On ne tourne pas les pièces de fonte moulées en sable sur modèle en métal, ni celles obtenues par le moulage mixte, à moins que ces dernières ne soient d'un très-grand calibre : car les grosses pièces montrent en général à leur surface des serres et des ondulations très-prononcées.

Les bouches à feu de fonte moulées en terre, doivent être tournées, excepté celles d'un très-petit calibre. Le défaut principal des moules en terre, est de se déformer sous la pression du métal en fusion et de donner des pièces plus ou moins elliptiques.

On accorde environ $0^m,005$, pour la quantité de métal à enlever aux pièces de fonte pour les opérations du tournage et d'ajustage. Ces bouches à feu sont exemptes de soufflures, lorsqu'elles sont coulées dans de bonnes conditions, tandis qu'aux pièces de bronze, l'opération du tournage en fait souvent découvrir un nombre considérable. Il est donc convenable de leur laisser un excédant de métal plus fort qu'aux pièces de fonte.

Les modèles des parties rentrantes du moule, tels que les tourillons et leurs embases, les anses, etc., doivent permettre le dégagement des laitiers et des charbons qui auraient pu s'y introduire, lors de la coulée. A cet effet, on leur donne une rencharge, principalement vers le haut quand le moule est vertical, et l'on raccorde leur surface avec celle de la pièce par une courbure plus ou moins prononcée.

Il serait nuisible de chercher à garantir ces parties rentrantes par un crible, quelle qu'en soit la substance. Ce crible restant dans la bouche à feu, en détruit l'homogénéité, fût-il du même métal : sa fusion ou son ramollissement ne peuvent se faire qu'aux dépens de la chaleur du métal liquide : son interposition entre deux parties de la pièce, ne peut que rendre leur liaison imparfaite et moins solide : des accidents seraient à craindre, si une couche de laitier venait à s'appliquer contre les ouvertures du crible et à les boucher, etc.

L'emploi du crible produirait les inconvénients des chapelets qui ont fait abandonner le coulage à noyau.

Certaines parties saillantes de la pièce doivent présenter des trous, comme les anneaux de braque; il est préférable de les couler pleines et de les forer ensuite à la machine.

La fonte est ordinairement blanchie aux parties minces des canons, telles que les coulisses pour hausses ou visières. Elle est alors difficile à travailler, elle saute en éclats, quand on la taille. Il convient de couler ces parties pleines et de les façonner ensuite au burin et à la lime.

Les pièces moulées en sable sont exposées à de petites bavures et même à des mâchures à la jonction circulaire des châssis. Pour les dissimuler, on fait passer les plans de séparation de ces châssis par les plates-bandes et moulures, lesquelles peuvent être tournées et façonnées au burin et à la lime.

Quelquefois les parties saillantes sont en fer forgé ou en cuivre, ayant une base noyée dans le métal de la bouche à feu. Dans ce cas, ces pièces doivent être adaptées au modèle lors du moulage, et rester dans la chape après l'enlèvement du modèle. Quand ce procédé est impraticable, on adapte, au modèle, des parties saillantes qui sont vissées par l'intérieur et laissent, après le démoulage, des vides dans lesquels on introduit les ferrures.

ARTICLE II.

SOINS A APPORTER DANS L'EXÉCUTION DU MOULE. — DÉFAUTS DE COULÉE DES PIÈCES DE FONTE, DES PIÈCES DE BRONZE.

Soins à apporter dans l'exécution du moule.

En suivant exactement les procédés décrits, on sera dans de bonnes conditions pour le moulage. Certains points méritent cependant de fixer plus particulièrement notre attention.

Les emboîtements des divers tronçons du moule doivent être faits avec toute la précision possible, afin d'éviter des fuites de métal et pour que ces parties assemblées n'aient qu'un seul axe.

Dans le moulage en sable, le tassement doit se faire d'une manière uniforme : cependant la dureté du moule peut aller en diminuant à mesure qu'on approche de la masselotte.

Les moules en terre doivent avoir leurs diverses couches bien soudées les unes aux autres. Il convient de s'en assurer pendant le moulage, et de détruire, pour la remplacer ensuite, la portion de croûte de terre qui adhérerait imparfaitement à la partie qu'elle recouvre.

Tous les moules doivent être séchés graduellement. En voulant hâter la dessiccation par une trop forte chaleur, on n'obtient qu'une dessiccation incomplète, et l'humidité en se vaporisant subitement, fait éclater certaines parties de la chape. Les pièces de bronze sont exposées à de nombreuses soufflures, quand on abrège la durée du séchage. Il n'est pas moins important de soumettre chaque moule au degré de chaleur qui lui convient et pendant le temps nécessaire.

Les défauts de coulée que nous allons indiquer, nous paraissent le meilleur moyen de faire ressortir l'importance des soins qu'exige le moulage.

Défauts de coulée des pièces de fonte.

Loupes. Parties excédantes de métal. Elles proviennent d'une cavité dans le moule.

Tacon. Partie de métal, tenant à la pièce par une base plus ou moins forte, et recouvrant une couche d'enduit, de sable ou d'autre matière étrangère, interposée entre elle et le corps de la bouche à feu. Le tacon est formé par la fonte liquide, qui s'est introduite dans la fissure que laisse une partie soulevée du moule ou de l'enduit, mais non entièrement détachée. En travaillant au burin pour enlever les inégalités que présente ordinairement le tacon, on en détache une partie plus ou moins grande, on met à découvert le sable qui se trouvait dessous, et il en résulte une dépression dans le corps de la pièce.

Les tacons résultent ordinairement d'un enduit peu adhérent, d'un applicage de sable pour réparer mal à propos le moule, d'un petit caillou ou autre corps non réfractaire se trouvant dans la chape et qui, en éclatant, sous l'influence de la chaleur du métal liquide, aura soulevé ou brisé une partie du moule.

On rencontre fréquemment les tacons au cul de lampe, mais ils sont alors produits par la chute du métal en fusion. Les moules des gros calibres ayant plus à souffrir, on est quelquefois obligé, dans le moulage en sable, de faire la culasse avec un sable plus argileux.

Champignons. Partie de métal recouvrant une couche d'enduit, de sable ou d'autre matière étrangère, et n'adhérant au corps de la pièce que par le centre. Le champignon se forme lorsque la couche d'enduit ou une partie du moule se soulève et se fissure vers le centre. Le métal liquide entrant par cette crevasse, se répand entre la paroi du moule et cette couche soulevée. Le champignon est donc de même nature que le tacon et a une origine semblable.

Dépression. Partie déprimée à la surface de la pièce. Elle provient du gonflement d'une certaine partie du moule vers l'intérieur, d'un retrait inégal, d'une masselotte trop petite.

Ondulations. Parties circulaires saillantes à la surface des bouches à feu. Elles sont les suites de l'introduction d'une trop grande quantité de sable à la fois. Lors du moulage, le sable est foulé inégalement : trop à la partie supérieure de chaque couche, trop peu à la partie inférieure. Le moule en cédant inégalement à la pression du métal, détermine des ondulations sur la pièce. Ce défaut arrive le plus souvent avec les gros calibres.

Serres. Parties de la pièce d'un diamètre plus faible, à cause de certaines couches de sable qui ont été trop damées ou à cause d'un modèle trop compressible dans le moulage mixte.

Arcure. Inflexions que forment entre elles les diverses parties d'une pièce. Elles proviennent d'un mauvais renmoulage, les divers moules n'ayant pas été assemblés avec la précision nécessaire. Il est bien essentiel dans le renmoulage que les clavettes resserrant les châssis des moules en sable l'un contre l'autre, soient chassées à fond. Ce défaut peut aussi être occasionné par la présence d'un corps à la jonction de deux moules, lequel corps aura faussé leur position relative.

Il est donc essentiel de veiller à la propreté des emboitements des divers moules lors de leur réunion.

Cendrures. Parties légères, provenant de laitiers ou de charbons entraînés avec le métal liquide ou de débris de la chape, qui surnagent la fonte dans le moule et se fixent aux parois, le plus souvent à la partie supérieure des tourillons. On les évite en écumant la fonte avant son arrivée dans le moule ; en arrêtant les laitiers, les charbons et autres corps étrangers, lorsqu'ils traversent les écheneaux avec la fonte; en faisant tomber le métal à plein jet, de manière à produire des mouvements et des bouillonnements lorsqu'il arrive à hauteur des tourillons : en donnant de la dépouille aux tourillons et aux autres parties rentrantes.

Gravelures. Parties irrégulières, poreuses, inégales, occasionnées par l'enduit qui n'a pas adhéré au moule.

Écrasements des bords du moule. Parties rentrantes circulaires et remplies de sable sur le corps de la pièce. Ce défaut a lieu dans le moulage en sable, lorsque les calles placées entre deux châssis consécutifs sont trop épaisses.

Le moule ayant trop de longueur pour le châssis, s'écrase sur les bords lors du renmoulage et forme vers l'intérieur une saillie ou bourrelet de sable, qui, restant prise dans la fonte, occasionne une dépression annulaire sur la pièce. On s'en aperçoit quelquefois lors de la coulée. On la fait disparaître avec une perche de bois dont on promène l'extrémité contre la saillie de sable découverte à l'intérieur du moule.

Tourillons blanchis. Ce défaut arrive souvent par l'emploi de certaines fontes ou par un peu d'humidité restée dans le moule. Les fontes de Suède, les fontes manganésifères, celles trop décarburées, donnent souvent des canons dont les tourillons sont blanchis.

Canon difficile à dépouiller. Ce défaut provient d'un moule humide dont la paroi est devenue inégale par le passage de la vapeur d'eau; d'une très-haute température du métal au moment de la coulée, température qui détermine la formation et le passage au travers de la chape d'une certaine quantité de gaz carbonique; d'un enduit mal préparé ou mal appliqué; d'une partie de sable qui ne serait pas réfractaire; ou de l'enduit qui aurait été calciné dans l'étuve par un feu trop violent.

Goutte froide. Partie de fonte extrêmement dure. Pendant la chute du métal liquide dans le moule, certaines parties de fonte peuvent adhérer aux parois en se congelant, il peut en être de même pour des parties qui rejailliraient sur les parois : ces parties congelées se détachent ensuite, surnagent dans les scories, se fixent dans les parties anguleuses et rentrantes du moule et quelquefois dans le corps de la pièce, si la chaleur de la fonte liquide ne les a pas remises en fusion.

Les gouttes froides peuvent aussi provenir d'une partie de masselotte, fortement décarburée dans le fourneau à réverbère et qui, lors de la coulée, ne s'est pas mélangée intimement avec le reste du métal liquide.

Canon ovale. Ce défaut est plus fréquent dans les pièces moulées en terre, un enterrage régulier étant plus difficile, par la grande épaisseur de sable entre le moule et le châssis ou les parois de la fosse. D'ailleurs le moule en terre se tourmente lors du séchage, et prend ordinairement une forme plus ou moins ovale, le poids de la partie supérieure (lorsque le moule est couché) déprimant celle de dessous. Ce défaut arrive presque toujours aux pièces moulées en deux parties, suivant un plan passant par l'axe : dans le moulage en coquille, par exemple. Il peut aussi se rencontrer dans les pièces moulées en sable, les parties longitudinales des châssis, n'ayant pas été bien réunies ou ayant cédé par la rupture d'un boulon, etc. : dans ce cas, il y aurait une bavure et une fuite de métal serait à craindre.

Chambre. Cavité produite par un retrait inégal.

Soufflure. Cavité occasionnée par la présence d'une bulle de gaz qui est restée emprisonnée dans le métal.

Bavure. Métal qui s'est insinué entre les joints de deux parties consécutives du moule, qui ont été mal assemblées ou qui ont cédé lors de la coulée.

Mâchure. Saillie de métal provenant d'une partie de moule, mal assemblée et débordant une autre partie.

Défauts de coulée des pièces de bronze.

Loupe. *Tacon.* *Champignon.* *Dépression.* *Ondulation.* *Serre.* *Arcure.* *Ecrasement.* *Canon ovale.* *Canon difficile à dépouiller.* *Bavure.* *Mâchure.*	Mêmes défauts et mêmes causes que pour les pièces de fonte : ils disparaissent dans le tournage.

Cendrure. *Gravelure.* *Chambre.* *Soufflur.*	Mêmes défauts et mêmes causes que pour les pièces de fonte.

Sifflets. Sillons dirigés dans le sens de la longueur de la pièce.

Piqûres. Petites chambres, ne présentant pour ainsi dire qu'un point de profondeur. On les rencontre le plus souvent au bourrelet, principalement quand la masselotte n'est pas assez haute ou que le bronze n'est pas assez chaud, lors de la coulée.

Tâche d'étain. Marque blanchâtre qu'on rencontre souvent à la surface extérieure, particulièrement au second renfort dans le voisinage des anses et des tourillons. Les taches dénotent un excès d'étain, dont la proportion est au plus de 25 pour °/₀ d'alliage.

Dureté. Partie dure de la pièce, renfermant ordinairement un excès d'étain.

ARTICLE III.

MÉTHODES DIVERSES DE COULAGE.

Énumération des diverses méthodes de coulage.

Les pièces peuvent être coulées massives (pleines) ou avec un vide correspondant à celui de l'ame, vide qu'on obtient en plaçant un noyau dans l'axe du moule. Le métal peut arriver dans le moule, *directement* par le haut, ou par un canal latéral, aboutissant par un coude ou *siphon* à la partie inférieure. De la combinaison de ces éléments, on déduit quatre méthodes de coulage.

1° Le coulage *plein* et *direct*, qui est celui que nous avons décrit.

2° Le coulage à noyau et direct, tel que nous l'avons expliqué pour les mortiers de 0,29 en bronze.

3° Le coulage plein et à siphon.

4° Le coulage à noyau et à siphon, qui sert presque partout pour la fonte des gros mortiers de bronze.

Le coulage à noyau était autrefois usité pour toutes les bouches à feu. Les noyaux des canons, à cause de leur longueur, devaient être préparés par d'autres procédés que ceux que nous avons décrits pour les mortiers de 0,29. Le coulage à siphon est encore employé pour les mortiers de bronze, ce n'est que par exception, qu'on l'a essayé pour les canons. Il suffira que nous donnions quelques détails sur la confection et le placement du noyau dans le moule, ainsi que sur l'exécution du siphon, pour qu'on soit à même de concevoir toutes les combinaisons de ces deux modes de coulage.

Coulage à noyau.

Le noyau (fig. 5, planche V) est essentiellement composé d'un arbre ou d'un tube de fer, recouvert d'une pâte de cendres ou de terre pétrie, pour préserver le fer du contact du métal liquide et pour en faciliter la sortie de l'ame, après le refroidissement. La couche de pâte de cendres ou de terre, est consolidée par une ou plusieurs enveloppes de fils ou de bandelettes de fer enroulés en spirale autour du noyau. On continue à recouvrir le noyau de pâte, jusqu'à ce qu'il ait acquis les dimensions voulues. On laisse un peu de métal à prendre pour l'alésage, l'ame ne pouvant pas être obtenue avec la rectitude et la précision nécessaire.

Le cendrage et la cuite du noyau se font par des procédés analogues à ceux employés pour les moules des canons de bronze.

Quand l'axe en fer est plein, il convient de ménager plusieurs évents, suivant sa longueur, pour faciliter la sortie des gaz.

Le noyau est fixé dans le moule par une ferrure nommée *chapelet*. Il y en avait de plusieurs formes, à anneaux, à 3 ou 4 branches, partant du noyau et reçues dans la chape de la culasse, etc.

Lors de la coulée, la partie du chapelet traversant le moule, est noyée dans le métal liquide.

Quelquefois l'arbre en fer traverse le bouton de culasse et tient lieu de chapelet.

Le haut du noyau est soutenu par une sorte de cravatte ou de chapiteau circulaire en terre de mouleur, en plâtre ou autre matière, et reçue dans une feuillure pratiquée dans le moule, ou reposant sur l'orifice du moule.

En France, les noyaux des gros mortiers de bronze sont faits à la manière des modèles en terre, mais renforcés de ferrures disposées comme dans les moules en terre.

Les avantages de ce mode de coulage, sont les suivants :

1° Il procure une économie de matière dans la coulée, et de main-d'œuvre dans le forage.

2° Le bronze en contact avec le noyau, forme une croûte très-dure, qui résiste assez bien aux effets du tir.

3° Il diminue les effets de la liquation.

Mais en revanche, le coulage à noyau a des inconvénients fort graves, qui l'ont fait abandonner.

1° Il est difficile de placer le noyau d'une manière stable au centre du moule.

2° Pendant la coulée, les ferrures du chapelet se tourmentent, se ramollissent, s'infléchissent et dérangent la position du noyau.

3° La présence du noyau dans le moule, occasionne près de la paroi de l'ame des soufflures qui sont mises à nu, lors de l'alésage.

4° Le noyau lui-même peut s'infléchir pendant la coulée, ce qui donne lieu aux excentricités qu'on a occasion de remarquer, principalement à la volée dans presque toutes les anciennes bouches à feu, lorsqu'on les tronçonne.

5° La dureté acquise par la partie du bronze en contact avec le noyau, ne sert de rien, puisque cette partie est enlevée dans l'alésage.

6° La difficulté de retirer le noyau après le refroidissement, est augmentée par l'infiltration du bronze dans la croûte de terre, qui recouvre le noyau.

7° La croûte de terre qui recouvre le noyau, peut se fissurer, sauter en éclats, avant ou pendant la coulée, et donner lieu à des fuites et à des loupes dans l'ame. Ces fuites de métal et ces loupes s'opposent à la sortie des matières qui composent le noyau, elles occasionnent ainsi un surcroît de travail.

8° Indépendamment des difficultés de coulage, l'emploi du noyau entraine plusieurs autres graves inconvénients. Les branches du chapelet restées dans le métal après le forage, sont entamées par les produits de la combustion de la poudre, et par la rouille dans les circonstances ordinaires. La dilatation linéaire des branches en fer forgé du chapelet n'étant pas la même que celle du métal de la pièce, il se produit des tiraillements dans les alternatives de chaud et de froid provoquées par le tir, tiraillements qui amènent la séparation du chapelet d'avec le métal qui l'entoure. Toutes ces causes contribuent à la formation au fond de l'ame, de chambres et cavités qui, en recelant le feu, peuvent occasionner des explosions prématurées, lors de l'introduction de la charge.

Le coulage à noyau est encore pire pour les pièces en fer, puisqu'il amène un refroidissement plus prompt.

Coulage à siphon.

Le métal, en tombant directement dans le moule, peut en dégrader les parois et déranger le noyau. Les mouvements qu'il occasionne à la surface du bain, empêchent les laitiers de se réunir au centre, les disperse et les fait entrer dans les cavités du moule. On a donc pensé qu'en faisant entrer le métal par un canal particulier, *le siphon*, aboutissant à la partie inférieure, on ménagerait les parois de la chape et du noyau et que, le remplissage se fesant tranquillement, les parties rentrantes seraient moins exposées à s'encrasser. C'est principalement dans le coulage à noyau des mortiers, que ces avantages se font sentir : car le couvercle en terre qui ferme le noyau à la partie supérieure, est directement exposé à la chute du métal.

Le siphon est un canal de $0^m,05$ à $0^m,06$ de diamètre (fig. 5, planche V). On le construit par parties en même temps qu'on fait le moule de la pièce. Pour chaper la première partie communiquant au bas du moule, on fixe contre le modèle de la bouche à feu, l'extrémité d'un modèle coudé (le modèle du siphon proprement dit), sur lequel on applique de la terre pétrie, en même temps qu'on fait la chape de la pièce. L'autre extrémité du siphon est dirigée vers la bouche, mais en dehors du moule, et on la consolide par des bandages en fer terminés en crochets. Le reste du canal s'achève avec de petits tuyaux en terre, garnis de ferrures, s'emboitant les uns dans les autres et avec le siphon, et reliés par les crochets qui terminent les bandages et qu'on resserre par des liens en fil de fer.

Les avantages du coulage à siphon sont balancés par plusieurs inconvénients : les précautions à prendre pour ménager le siphon, rendent l'enterrage difficile : le canal peut être obstrué.

Parmi les moyens essayés pour remplacer le coulage à siphon, nous devons citer celui qui consiste à faire arriver le métal par un conduit débouchant dans un des tourillons.

Le coulage à siphon n'est guère utilisé que pour les gros mortiers de bronze.

LIVRE IV.

FUSION DES MÉTAUX. COULÉE DES BOUCHES A FEU.

CHAPITRE PREMIER.

FOURNEAUX A RÉVERBÈRE POUR LA FUSION DE LA FONTE.

ARTICLE I.

DESCRIPTION DU FOURNEAU A RÉVERBÈRE.

Parties principales du fourneau.

Le fourneau à réverbère comprend trois parties principales: (planche X).

1° La *chauffe (abfe* fig. 1), lieu où brûle le combustible.

2° Le *foyer de fusion (igk),* où se trouve le métal.

3° La *cheminée* (*hm*), dont le tirage active la combustion.

Une *voûte* (*aefgh*), recouvre la chauffe et le foyer de fusion.

Objet des fourneaux à réverbère.

Les fourneaux à réverbère sont des fours où le combustible est séparé du métal à liquéfier. Le combustible reçoit l'air nécessaire à sa combustion par le tirage que produit une cheminée très-élevée dont le débouché se trouve à l'extrémité du fourneau.

Le métal se trouve exposé à l'action de la flamme, pendant son trajet, depuis la chauffe jusqu'à sa sortie du fourneau.

Les fourneaux à réverbère sont destinés à produire une haute température, capable de liquéfier la fonte. On se fera une idée de la chaleur nécessaire en pensant que la fonte exige pour sa fusion une température 6 à 7 fois aussi grande que le bronze.

Moyen employé pour obtenir une température à peu près égale dans le fourneau.

Les fourneaux à réverbère ont une forme allongée. Leur section droite diminue à mesure qu'on s'éloigne de la chauffe, afin de compenser, par le rétrécissement de l'espace, la chaleur perdue, par l'éloignement du lieu où brûle le combustible. Le débouché de la cheminée dans le fourneau, est étroit, et la voûte s'abaisse de plus en plus à partir de la chauffe, afin de concentrer la flamme et de la rejeter sur le métal. On attachait une grande importance à la forme de la voûte, pensant que c'était par le calorique réfléchi ou réverbéré par ses parois que le métal s'échauffait. De là est venu le nom de fourneau à réverbère. On ne comptait pas sur la chaleur transmise directement par les gaz traversant le fourneau, ni sur le calorique qu'ils réfléchissent.

Aussi l'expérience n'a pas justifié l'importance attribuée à la courbure de la voûte, au contraire, elle a fait voir que la puissance de chauffe dépendait principalement des dimensions et des proportions de certaines parties du fourneau.

Intérieur du fourneau.

La chauffe comprend la *grille* (*ab* fig. 1 et 2), formée de barreaux de fer, reposant sur deux traverses ou supports en fonte.

La chauffe est séparée du foyer de fusion par une partie élevée, le *pont* (*cd*, fig. 1), dont l'objet est d'empêcher le métal de se mêler avec le combustible et de le préserver du contact immédiat de l'air.

La *sole* est un plan incliné (*ik*, fig. 1 et *ik'*, fig. 2), en forme de trapèze allongé, partant du pont et s'abaissant du côté opposé, vers la face du fourneau située dans l'atelier des fondeurs. La largeur de la sole diminue à mesure qu'on s'éloigne du pont.

La *voûte* (*aefg*, fig. 1) qui se rapproche de plus en plus de la sole en s'abaissant, jusqu'à sa rencontre avec la cheminée.

Du côté opposé au pont, le métal en fusion est retenu par un mur en maçonnerie, qui sert de digue, et qui sépare le fourneau de l'intérieur de la fonderie.

Au bas de cette digue, à son intersection avec la partie inférieure de la sole, les *trous de coulée* sont percés et débouchent dans l'intérieur de l'atelier (*k*, fig. 1, planche X et *xy*, fig. 2, planche IX).

On voit que les fourneaux à réverbère de la fonderie de Liége n'ont pas d'autel, puisque la sole forme un seul plan depuis le pont jusqu'à la partie inférieure du fourneau.

On donne particulièrement le nom de *bassin* à la partie inférieure du fourneau où le métal en fusion s'accumule.

Le foyer de fusion communique avec la cheminée (*lm*, fig. 1, planche X), par une partie rétrécie le *rampant*.

On appelle *bec*, le solide (*ghl*, fig. 1), formé par la rencontre de la voûte avec la cheminée.

L'intérieur du fourneau est revêtu d'une chemise en briques réfractaires. Il en est de même pour la cheminée. La sole est recouverte de sable réfractaire.

Cheminée.

La cheminée (*hlm*, fig. 1), communique avec le fourneau par le rampant.

La section horizontale de la cheminée augmente à mesure qu'on s'élève à partir du bec, jusqu'à une certaine hauteur (*l*, fig. 1).

La hauteur de la cheminée varie entre 15 et 20 mètres. Elle est très-élevée, afin d'activer la combustion par un fort tirage.

Les fourneaux à réverbère sont généralement accouplés.

Les fourneaux à réverbère sont généralement accouplés, un seul ne pouvant suffire à la coulée de la plupart des bouches à feu.

Un mur épais (NM, fig. 2), établit la séparation des deux fourneaux.

Emplacement des fourneaux à réverbère.

Il est important de favoriser le tirage et de faire arriver le métal liquide par le plus court chemin dans l'atelier de la fonderie, où se fait la coulée des bouches à feu. On satisfait à ces deux objets, en construisant les fourneaux à l'extérieur de l'atelier (*kl*, *k'l'*, *k''l''*, planche VII), et les fesant aboutir par le bas de la sole aux murs de cet atelier.

Les *trous de coulée* sont percés dans ces murs (*xy*, fig. 2, planche IX; et *k*, fig. 1, planche X).

Un toit (*no*, fig. 3, planche IX et fig. 1, planche X), recouvre le fourneau et le garantit de la pluie.

Cendrier.

En dessous de la grille se trouve le *cendrier*; (*bp*, fig. 1, planche X), c'est une excavation d'environ 2^{m},50 de profondeur en contre-bas de la grille, permettant à l'air d'arriver dans la chauffe et recevant les escarbilles ou menus charbons plus ou moins calcinés, qui passent à travers les barreaux de grille.

On descend dans le cendrier par un escalier (fig. 2), à ciel ouvert, pratiqué à l'extérieur du fourneau.

La face du fourneau au-dessus du cendrier (fig. 1, planche IX), se nomme la face de derrière. Elle est consolidée par des traverses de fonte reliées par de fortes ancres.

Côté extérieur du fourneau.

Le côté extérieur du fourneau est celui opposé au mur de séparation de deux fourneaux accouplés (fig. 3, planche IX).

Ce côté est fortement ancré et soutenu par des plaques en fonte. Il comprend deux ouvertures essentielles.

1° Le *trou de chauffe* (*A*), par où l'on introduit le combustible, et qu'on ferme, soit par une petite porte en fonte et à coulisses, soit en le bouchant simplement par du charbon entassé.

2° La *porte de chargement* (*B*), par laquelle on communique avec le foyer de fusion, et par laquelle on introduit les métaux qui composent la charge.

La porte de chargement est fermée par une portière, composée de briques réfractaires, assemblées dans un châssis en fer forgé.

Une chaine passant sur une poulie de renvoi et munie d'un contrepoids, facilite l'élévation ou l'abaissement de la portière. Lorsque celle-ci est descendue jusque sur l'appui de l'embrasure, on achève d'intercepter la communication entre le dedans et le dehors, en lutant les joints avec du sable argileux et réfractaire.

Indépendamment du trou de chauffe et de la porte de chargement, le côté libre du fourneau contient quelquefois une troisième ouverture (c, fig. 3, planche IX), ayant une vue sur la partie inférieure du foyer de fusion. Mais cette ouverture est toujours bouchée et l'on ne s'en sert pas.

Face du fourneau.

La *face du fourneau* se trouve à l'intérieur de la fonderie (fig. 2, planche IX). Elle est renforcée de plaques en fonte, d'ancres solides, et de supports en même métal, qui servent d'appui au mur de l'atelier.

On y remarque la *porte de brassage*, (c fig. 2, planche IX et *KK'*, fig. 1, planche X). Elle est fermée par une portière composée de briques réfractaires assemblées dans un châssis de fer. Au centre de cette portière est un petit trou, qu'on ferme à volonté par un bouchon de terre cuite. Ce trou sert à observer l'intérieur du fourneau pendant la fusion et à recevoir le bout d'une barre de fer avec laquelle on manœuvre la portière.

La porte de brassage donne accès au fourneau par l'intérieur de l'atelier et permet de brasser et d'écumer.

La plupart des fourneaux à réverbère n'ont qu'un trou de coulée : il en existe deux cependant aux fourneaux de la fonderie de Liége. Ils sont inégalement élevés (*xy*, fig. 2, planche IX). Lors du remplissage du moule, on perce le trou supérieur, pour laisser écouler le dessus du bain, qui, étant le plus chaud, est employé de préférence pour la culasse.

ARTICLE II.

CONSIDÉRATIONS SUR LES DIVERSES PARTIES DU FOURNEAU A RÉVERBÈRE.

Problèmes à résoudre dans la construction d'un fourneau à réverbère.

Il y a deux problèmes à résoudre dans la construction d'un fourneau destiné à la fusion de la fonte.

1° Obtenir la température nécessaire dans toutes les parties du foyer de fusion, avec le moins de combustible possible.

2° Disposer le fourneau, de sorte que, tout en satisfaisant à la condition précédente, le métal liquide soit le plus possible soustrait à l'action de l'oxigène amené dans le fourneau par le tirage de la cheminée.

Quand ces dispositions existent, on dit que le fourneau *a un pouvoir peu décarburant.*

Il résulte de l'expérience que la température la plus élevée est toujours préférable pour la coulée des canons. Une diminution dans la dépense en combustible n'est pas à dédaigner, mais l'objet principal étant de couler dans les meilleures conditions, on peut formuler le premier problème de la manière suivante :

Obtenir la température la plus élevée dans toutes les parties du foyer de fusion, avec le moins de combustible possible.

Parties du fourneau qui influent sur le degré de chaleur qu'on peut obtenir.

On peut poser en principe que toutes les parties du fourneau influent sur la température obtenue. Mais considéré dans cette généralité, le problème resterait indéterminé et sans solution pratique. Il a certaines parties du fourneau qui ont le plus d'effet sur la chaleur développée. Les fourneaux doivent satisfaire à certaines conditions industrielles, par exemple, de fondre une quantité déterminée de métal. Ces préliminaires posés, l'expérience et le raisonnement conduisent aux propositions suivantes :

Le degré de chaleur qu'on peut obtenir d'un fourneau d'une capacité donnée, dépend :

1° De la surface de la grille et de la disposition du cendrier.

2° De la hauteur et de la section de la cheminée.

3° De l'aire de la section du rampant.

Une grande surface de grille permet de brûler plus de combustible en même temps, de produire une plus grande somme de chaleur, et d'en faire arriver une plus grande quantité vers le foyer de fusion. Une bonne disposition du cendrier facilite l'accès de l'air nécessaire à la combustion, l'empêche de trop s'échauffer avant d'arriver à la grille, et rend ainsi le tirage plus actif.

Une cheminée élevée favorise le tirage, fait consommer plus de combustible dans un temps donné et occasionne ainsi un plus grand développement de calorique. Une section convenable de la cheminée fait conserver aux gaz qui la traversent, une température plus élevée, ce qui accélère leur sortie, et réduit en même temps dans une juste limite les frottements produits par ses parois.

Si un fort tirage de la cheminée est avantageux, il ne l'est pas moins de forcer la flamme à séjourner quelque temps dans le foyer de fusion, afin qu'elle puisse communiquer une partie de la chaleur qu'elle transporte, ce qui exige nécessairement un certain temps, si petit qu'il soit. Dans ce but, le rampant rétrécit la cheminée vers le foyer, ralentit la sortie de la flamme, lui donne le temps de perdre une grande partie de son calorique, avant sa sortie du fourneau, la refoule et la fait tourbillonner dans toutes les parties du foyer de fusion, d'où il résulte une température plus uniforme.

Il ne faut cependant pas perdre de vue, qu'un rampant trop étroit ralentit le tirage et fait languir le feu.

Il y a donc un terme moyen à garder dans les dimensions du rampant. La meilleure section du rampant est celle qui occasionne la chaleur la plus élevée et la plus uniforme dans un fourneau donné.

Éléments du pouvoir décarburant d'un fourneau.

Le pouvoir décarburant d'un fourneau croît en raison directe :

1° De la quantité d'air, qui, dans un temps donné, traverse le fourneau.

2° De la durée de la fusion.

3° De l'inclinaison de la sole.

Ce pouvoir décarburant est, en outre, en raison inverse de la hauteur du pont.

Plus il arrive d'air dans le fourneau, plus grande est la quantité d'oxigène en contact avec le métal, plus forte aussi est l'oxidation. Il est donc important de régler l'espace entre les barreaux de grille, de sorte qu'il n'arrive que la quantité d'air nécessaire à la combustion de la houille.

Quand la fusion se prolonge, l'oxigène de l'air qui traverse le fourneau, se trouve plus longtemps en contact avec la fonte, ce qui augmente la décarburation. Il est donc essentiel de produire la chaleur voulue dans le moins de temps possible. Dans un fourneau bien construit, si la houille est de bonne qualité, le tirage est actif, la fusion des métaux se fait promptement, ceux-ci restent peu de temps soumis à l'action de l'oxigène, et la décarburation en est diminuée.

Relativement à l'inclinaison de la sole, il faut observer qu'une pente très-forte fait écouler le métal avec plus de vitesse vers le bassin : et que les filets de fonte liquide s'écoulant des métaux à mesure qu'ils fondent, sont d'autant plus minces et présentent plus de surface à l'action décarburante de la flamme.

Un pont élevé rejette la flamme vers la voûte, soustrait une partie du métal à son action et diminue le pouvoir décarburant du fourneau. Mais un pont trop élevé soustrait une partie notable de la fonte à l'action directe de la flamme, force à prolonger la fusion et occasionne une décarburation plus forte.

Comparaison entre les fourneaux de diverses grandeurs.

Les fourneaux de diverses grandeurs, construits dans des proportions semblables, sont loin de produire la même chaleur et de consommer une égale quantité de combustible pour une quantité donnée de métal.

En général, plus les fourneaux sont grands, moins ils consomment de combustible. Passé une certaine limite, il est impossible de faire produire aux grands fourneaux la même chaleur qu'aux petits. Cela tient probablement aux difficultés de diriger la combustion et de surveiller la fusion. Il paraît que les petits fourneaux de 1,000 à 1,500 kilogrammes au plus, dont on se sert en Angleterre, produisent en très-peu de temps le degré de chaleur voulue, mais qu'ils consomment beaucoup de combustible. On peut considérer les fourneaux d'une grandeur moyenne de 3,000 à 3,500 kilogr., comme étant ceux qui satisfont le mieux aux conditions de produire la température la plus élevée avec la moindre dépense en combustible.

En prenant ce fourneau comme point de départ, pour en construire un autre d'une capacité différente, il faudrait donner à la chauffe des dimensions plus fortes, toute proportion gardée. Agir autrement, ce serait s'exposer à de fâcheux mécomptes.

Il faudrait en même temps donner à la cheminée une élévation en rapport avec l'étendue de la chauffe.

Proportions observées dans les principales parties des fourneaux de grandeur moyenne.

On remarque dans les fourneaux d'environ 3,000 à 3,500 kilog. qui marchent bien, les rapports suivants :

En prenant pour unité la surface de la grille.

1° L'aire de la sole varie de 2, 5 à 3, 5.

2° La section du fourneau au-dessus du pont est 0,75.

3° La section du fourneau en dessous du bec varie de 0,25 à 0,35.

Ces rapports sont influencés par la qualité du combustible. Plus les houilles sont maigres, plus il faut augmenter la surface de chauffe.

La cheminée doit avoir 15 à 20 mètres de hauteur; sa section la plus large, doit être le double ou le triple de sa section la plus étroite.

Constructions d'un fourneau.

Les fondations d'un fourneau doivent être solides. Le massif doit en être voûté pour éviter l'humidité. L'enveloppe extérieure est en maçonnerie ordinaire, fortement ancrée et consolidée par des plaques de fontes. Il en est de même pour l'extérieur de la cheminée. L'intérieur du fourneau est en briques réfractaires, de même que la cheminée.

On n'a donc que la sole et la voûte à refaire, quand le fourneau est usé. Pour le reconstruire, on monte la chemise sur les côtés de la sole. On trace sur ces côtés la courbure de la voûte. On fait ensuite la voûte elle-même en partant de la chauffe.

La voûte est plate, raccordée avec les murs de côtés par une petite courbure.

Le ciment employé, est formé de terre de pipe et d'un peu de sable blanc.

L'intérieur de la cheminée doit permettre qu'on s'y introduise pour exécuter les réparations nécessaires.

Toutes les portières et ouvertures doivent avoir des embrasures extérieures en fonte, afin de ne pas se déformer.

On tapisse la sole avec une couche suffisamment épaisse de sable réfractaire environ $0^{m},06$.

Fourneaux d'une grandeur moyenne.

Cendrier. Le cendrier doit non-seulement favoriser l'arrivée de l'air nécessaire à la combustion, mais il doit en même temps satisfaire à plusieurs autres conditions. Il doit offrir un large espace aux charbons et escarbilles qui tombent de la grille, afin qu'ils n'échauffent et ne dilatent pas trop l'air affluent, ce qui nuirait au tirage. L'arrivée de l'air froid est également nécessaire pour rafraichir les barreaux de grille et les garantir contre l'action trop forte du feu. Le cendrier doit permettre l'accès de la grille pour tisonner et pour les travaux que les circonstances exigent.

Le cendrier doit être suffisamment spacieux et profond ($2^{m},5$ à $3^{m},0$); d'un abord facile (par une rampe ou un escalier), placé en dehors de l'atelier, tourné au nord quand c'est possible, l'expérience ayant fait voir que c'est la meilleure exposition.

Grille. La grille doit être assez grande pour recevoir la quantité de charbon que la conduite du fourneau exige. Une grille trop grande fait consommer un excès de combustible et permet l'entrée d'une trop grande quantité d'air, ce qui peut refroidir le fourneau et augmenter son action décarburante.

Les barreaux de grille ont généralement 0,04 à 0,05 de largeur sur 0,06 de hauteur, et une longueur proportionnée à la chauffe.

Ils sont en fer n° 2, cette qualité résistant assez bien à l'action du feu. On les place perpendiculairement au pont, suivant la direction de la longueur du fourneau.

On les espace convenablement, on laisse ordinairement autant de vide que de plein, ou un peu plus, selon la qualité du combustible; l'intervalle le plus grand convenant pour les houilles grasses.

La grille doit être suffisamment abaissée en dessous du pont (0,45 environ), pour avoir l'espace nécessaire au placement du charbon et pour obtenir dans la chauffe la combustion de la fumée, avant que la flamme ne se rende dans le foyer de fusion. Elle ne doit pas être trop basse, parce que la flamme arriverait avec trop de vitesse contre la voûte, ce qui l'éloignerait de la sole et l'empêcherait de s'échauffer vers le pont. D'ailleurs un trop grand abaissement de la grille, produirait le même effet que son éloignement de la sole.

Pont. Le pont empêche le combustible de se mêler avec le métal. En forçant la flamme de s'élever, il favorise la combustion de la fumée. Un pont élevé protége la fonte contre l'action décarburante de la flamme : trop élevé, il empêche le métal de s'échauffer vers le haut de la sole, il rend la température inégale, et s'oppose à la fusion. On donne généralement au pont une hauteur de 2 ou 3 assises de briques au-dessus de la sole (0,16 à 0,24), mais le plus souvent 2 assises et quelquefois 1 $^1/_2$ assise (0,12).

La *sole.* La sole a la forme d'un trapèze dont le plus petit côté est à la partie inférieure du bassin. C'est sur la sole qu'on dépose les métaux qui doivent être fondus. Leur placement n'est pas indifférent, ainsi que nous le verrons en parlant du chargement du fourneau. Le rétrécissement de la sole à mesure qu'on s'éloigne du pont, contribue à amener l'égalité de température dans le foyer de fusion.

Dans un fourneau moyen, la largeur du petit côté est généralement les $^3/_4$ du grand côté. La longueur de la sole n'est pas arbitraire : trop grande, elle éloigne le bassin de la chauffe et l'empêche de s'échauffer suffisamment ; trop courte, la flamme sort trop vite et l'on consomme trop de combustible, ou l'on ne chauffe pas assez pour une égale consommation de combustible. Généralement, la longueur de la sole est le double de sa grande largeur, soit 3^m,20 à 3^m, 30.

Nous avons déjà fait voir les inconvénients d'une inclinaison trop forte. Avec une pente trop faible, le métal s'écoulerait difficilement du fourneau et les diverses qualités de fonte ne se mélangeraient pas, et le pouvoir décarburant serait trop faible.

Une inclinaison de 3° ½, ou 0,20 sur la longueur suffit généralement.

Dans les petits fourneaux, comme ceux anglais, où la fusion se fait plus promptement, on peut abaisser davantage la sole vers le bassin, l'augmentation qui en résulte dans le pouvoir décarburant, est compensée par une moindre durée de la fusion.

La *voûte*. La voûte doit s'élever assez au-dessus de la chauffe pour permettre à la fumée de s'y convertir en flamme, avant de se rendre dans le foyer de fusion. Elle doit être assez basse pour forcer la flamme à envelopper les métaux qu'il s'agit de fondre et à bien chauffer la sole avant que la fusion commence. La voûte doit se rapprocher de plus en plus de la sole à mesure qu'elle s'éloigne de la chauffe, afin de rétrécir constamment la section du four et de concentrer plus la chaleur. L'abaissement de la voûte vers le bec doit être plus prononcé. La voûte doit se rapprocher le plus possible de la sole. A cet effet, les génératrices de sa surface, perpendiculaires à la longueur du four, sont presque droites, ce qui fait que la voûte est légèrement cintrée. Généralement, la hauteur de la voûte au-dessus du pont est les ¾ de la longueur de la grille, suivant l'axe du four.

Pour un fourneau d'une capacité moyenne de 3,000 kilogrammes, la hauteur de la voûte au-dessus du pont est généralement de 0,95.

Les angles rentrants, fesant perdre du calorique, et étant peu favorables à la solidité, on arrondit davantage la voûte à sa rencontre avec les parois du fourneau.

Cheminée. La cheminée doit avoir une hauteur de 15 à 20 mètres pour un fourneau de 3,000 kilog. et plus. La section de la cheminée doit être suffisamment large pour permettre les réparations (0,50 de côté). Elle doit se rétrécir avant d'arriver au bec, et présenter une section minimum de 0,25 à 0,30 de côté.

Par suite, on laisse un intervalle de 0,25 à 0,30 entre le bec et le côté opposé de la cheminée.

Hauteur de l'appui de la porte de brassage au-dessus de la sole. La hauteur de cet appui donne la profondeur maximum du bain. Un peu plus de hauteur que celle strictement nécessaire pour la capacité du fourneau, ne nuit pas, cela équivaut à un agrandissement du four dans des circonstances exceptionnelles. Il convient cependant que la hauteur de cet appui soit en dessous du niveau du bec, afin qu'on puisse brasser sur toute l'étendue de la sole.

CHAPITRE II.

ENCAGEMENT DES MOULES : DISPOSITIONS POUR LA COULÉE DES PIÈCES DE FONTE.

ARTICLE I.

ENCAGEMENT DES MOULES.

Les fourneaux de la fonderie de Liége sont disposés autour de la fosse à canon (planche VII). Cette fosse (*MN*) est creusée concentriquement à la grande grue de l'atelier. Elle est revêtue en maçonnerie et percée d'embrasures, de distance en distance, pour le placement des étançons en bois avec lesquels on maintient les moules.

La fonderie de Liége possède deux fonderies, désignées sous les nos 1 et 2 : chacune est entourée de 6 fourneaux accouplés. Ces deux ateliers servaient autrefois exclusivement à la fabrication des canons. Mais depuis longtemps il n'y a qu'un seul fourneau en activité à la fonderie n° 1, et on ne s'en sert que par exception. C'est donc principalement à la fonderie n° 2 que les pièces sont coulées.

Outre la fosse circulaire (MN), la fonderie n° 2 en possède une rectangulaire (OP) d'une plus grande largeur. Elle a été construite pour servir au fondage des statues de Rubens et de Grétry, par notre compatriote Mr Buckens, professeur à l'académie de Liége. Depuis, elle est utilisée pour le moulage mixte, qui demande plus de place et de profondeur que le moulage ordinaire en sable : elle sert également à la coulée des pièces de bronze, pour lesquelles sont disposés les fourneaux accouplés (L'K').

Les moules doivent être placés dans la fosse, de manière que le métal, au sortir des fourneaux, ait le moins de chemin à parcourir pour éviter le refroidissement.

Lorsque les pièces sont moulées en sable, on descend les moules dans la fosse, partie par partie, en commençant par celui de la culasse et du bouton réunis. On pose celui-ci sur un fond solide et horizontal. Ce fond est ordinairement formé d'une forte plaque de fonte, bien soutenue, et recouverte d'une légère couche de sable, pour mieux asseoir la partie inférieure du moule.

On descend et on réunit successivement toutes les autres parties du moule ; on en rectifie l'assemblage au moyen des clavettes avec lesquelles on serre plus ou moins les brides circulaires des châssis l'une contre l'autre (fig. 4, planche X). Pour s'assurer s'il n'y a pas de jour à la jonction des divers moules partiels, on regarde de l'extérieur, à hauteur des brides circulaires, si l'on n'aperçoit pas une lumière qu'on promène dans l'intérieur du moule. Au besoin, on lute avec de la terre fientée les petits vides que les brides laisseraient entre elles. On assure la position verticale du moule en l'arc-boutant contre les murs de la fosse.

Quand le moule est entièrement assemblé, sa partie supérieure doit se trouver en dessous du bassin où l'on accumule le métal au moment de la coulée.

Pour vérifier la verticalité du moule, on place une croix sur l'ouverture de la masselotte en fesant coïncider son centre avec l'axe du moule. On laisse descendre une bougie allumée suspendue par un support en fer à un fil à plomb, qui traverse un trou percé au milieu de la croix. Le fil à plomb doit rester constamment à égale distance des parois.

Nous avons déjà expliqué comment l'enterrage des moules en terre se fait dans des châssis en fonte : nous nous rappellerons qu'il faut faire en sorte, que la partie supérieure du moule enterré soit inférieure au bassin de coulée.

ARTICLE II.

DISPOSITIONS POUR LA COULÉE DES PIÈCES DE FONTE.

A la fonderie de Liége, on ne fait pas arriver le métal directement jusqu'au moule, mais on l'accumule à la sortie du fourneau dans un bassin (*A*, fig. 2, planche X), aussi rapproché que possible de la fosse, et dont les dimensions varient suivant le nombre des fourneaux qui participent à la coulée. Par ce procédé, la fonte arrivée la première et promptement refroidie par son contact avec les écheneaux, n'entre pas dans le moule, mais sert à réchauffer les passages que doit traverser le métal qui continue à affluer.

Le pourtour et le fond du bassin sont en briques réfractaires ainsi que les écheneaux (*C*, *D*, fig. 2), qui vont de ce bassin aux deux trous de coulée de chaque fourneau. Le bassin et les écheneaux sont enduits d'une couche de terre à chaper qu'on fait bien sécher.

Les écheneaux doivent être disposés de sorte qu'on puisse faire écouler sur le parterre de l'atelier les laitiers qui se forment dans toute fusion. A cet effet, le revêtement extérieur en maçonnerie est interrompu en *D'* près du fourneau et est remplacé par du sable damé et soutenu par des lestes de fer. Quand la coulée d'une pièce approche de sa fin, on fait tomber les lestes qui consolident extérieurement la rigole en D', ainsi que le sable de cette rigole, et le laitier se répand sur le sol par la brèche qu'on a faite.

Le bassin a autant d'ouvertures du côté de la fosse qu'il y a de pièces à couler. Sur chaque châssis on appuie une plaque de fonte (EF, fig. 2), qui, partant du bassin, déborde un peu l'ouverture du moule.

La rigole de coulée (fig. 2, 2 bis et 2 ter, planche XI), est un canal en tôle ouvert à un bout et fermé à l'autre. Près de l'extrémité fermée, ce canal est percé d'un trou auquel est adapté un tuyau également en tôle, comme on peut le voir suivant *AB* (fig. 2 et 2 bis). L'intérieur du canal est recouvert de terre fientée et séchée. Une règle qu'on ne doit jamais perdre de vue, c'est d'empêcher le métal liquide de couler dans des rigoles en fer, en fonte ou en d'autres métaux. Les parois de ces rigoles seraient bien vite rongées par le métal liquide. Celui-ci s'échapperait par les fissures et des accidents en seraient les suites. D'un autre côté, il y a toujours explosion au contact d'un métal liquide avec un métal solide, à moins que ce dernier ne soit rouge de chaleur.

On pose la rigole de coulée (*GH*, fig. 2, planche X) sur la plaque de fonte, l'extrémité ouverte dirigée vers le bassin, et le centre du tuyau correspondant avec l'axe du moule. On l'assujettit convenablement avec des lestes de fer (fig. 1, planche XI), ou des briques et du sable damé. On prolonge la rigole jusque vers l'une des ouvertures (*K*, fig. 2, planche X), du bassin, par un canal en sable bien damé et consolidé extérieurement par des lestes de fer. On établit la communication entre ce canal et la rigole de coulée par un tuyau en tôle (fig. 14, planche XI), revêtu intérieurement et extérieurement de terre fientée et séchée (fig. 2, planche X). On recouvre ce tuyau de sable damé, qui sert de digue pour arrêter les laitiers et les charbons surnageant la fonte liquide, tandis que la partie inférieure du courant de métal traverse le tuyau, comme un siphon, se rend dans la rigole de coulée et tombe ensuite dans le moule.

Pour empêcher le métal de traverser le tuyau avant qu'il n'ait atteint une certaine hauteur, on ferme ce tuyau par un bouchon de foin, qui ne livre passage que lorsqu'il s'est consumé en brûlant.

On pratique un emboîtement à l'ouverture (K, fig. 2) du bassin correspondante à chaque moule, pour loger une porte ou écluse en fer, *l'écluse de bassin* (fig. 5), recouverte sur ses deux faces de terre fientée et séchée. Un manche de fer adapté à cette écluse, permet de l'élever ou de l'abaisser, et, par conséquent, d'établir ou d'interrompre à volonté la communication entre le bassin et le canal qui conduit au moule.

Indépendamment de l'écluse de bassin, on en place une seconde, *la grande écluse* (fig. 4, planche XI), également revêtue de terre fientée et séchée. Elle se trouve en L (fig. 4 et 2, planche X), entre le bassin et la rigole de coulée. Sa partie inférieure est un peu au-dessus du fond du canal pour permettre l'écoulement du métal.

La fonte liquide passant sous la grande écluse comme dans un siphon, il y a une chance de plus d'arrêter les laitiers et les charbons qui surnagent et viennent s'accumuler devant l'obstacle formé par elle. La grande écluse est implantée dans le sable qui forme les parois du canal de coulée et qu'on a fortement damé.

On ménage une rigole pour recevoir l'excédant de métal après le remplissage des moules.

On dispose un plancher au-dessus de la fosse et autour des moules, pour les hommes nécessaires au service de la coulée.

Pour empêcher l'introduction dans les moules des poussières et autres corps étrangers, on en recouvre les orifices par des feuilles de tôle qu'on enlève un peu avant la percée du fourneau. On se sert avantageusement d'une petite corbeille suspendue à l'intérieur du moule, et qu'on enlève au moment de la coulée, pour recueillir les corps étrangers qui se seraient introduits, malgré les précautions prises.

On se munit de tous les objets qui peuvent être nécessaires, soit pour effectuer la coulée, soit pour parer aux accidents.

Parmi ces objets nous citerons :

La *masse de fer* (fig. 3, planche XI), servant à chasser le piquoir dans le trou de coulée, ou à enfoncer la grande écluse dans la rigole de sable pour arrêter l'affluence du métal vers le moule.

La *quenouillette* (fig. 7), qu'on introduit dans le tuyau de décharge de la rigole de coulée (fig. 2, 2 bis et 2 ter, planche XI) et (GH, fig. 2, planche X) et avec laquelle on règle la quantité de métal liquide qui tombe dans le moule, en même temps qu'on en dirige le jet.

L'*écluse de rigole* (fig. 6, planche XI), qu'on introduit dans la rigole de coulée (GH, fig. 2, planche X), au moment où l'on remplit le moule, afin d'arrêter les laitiers entraînés avec la fonte et de les empêcher d'arriver jusque dans le moule.

Le *piquoir* (fig. 9, planche XI), avec lequel on débouche le fourneau, en le chassant à coups de masse. On a soin d'en rougir la pointe au feu avant de s'en servir.

Le *tampon* (fig. 10), barre de fer dont une extrémité est garnie de terre fientée et séchée. Le tampon sert à modérer la sortie du métal par les trous de coulée.

Le *rable* (fig. 12), sorte de racloir en fer, qui sert à brasser et à écumer.

La *poche* ou *écumoire* (fig. 8), sorte de bassin hémisphérique en tôle, revêtue de terre fientée, séchée et munie d'un manche en fer. Cette poche sert à puiser dans le fourneau par la porte de brassage, et à prendre soit du métal liquide, soit du laitier.

Les *bouchoirs* (fig. 11 et 13), longs manches en fer ou en bois, munis à une extrémité d'un morceau de tôle, replié sur les bords, formant une sorte de caisse ou de canal qu'on remplit de terre de mouleur. Lorsqu'une fissure est remarquée dans le châssis du moule, on s'empresse de la tamponner avec la terre contenue à l'extrémité du bouchoir. Il est bon de se hâter dans cette opération, car le métal liquide élargit promptement les issues par lesquelles il s'échappe. Il y a deux sortes de bouchoirs, l'un pour les brides longitudinales (fig. 11), l'autre pour les brides circulaires (fig. 13).

CHAPITRE III.

FUSION DE LA FONTE : COULÉE DES PIÈCES EN FER.

ARTICLE I.

COMPOSITION DE LA CHARGE ET CHARGEMENT DU FOURNEAU A RÉVERBÈRE.

Composition de la charge.

Pour déterminer le poids total de la fonte nécessaire à la coulée d'une pièce, il faut avoir égard au poids de la pièce finie, au métal qui entre dans le vide de l'ame, à l'excédant pour le tournage et le ciselage, au poids de la masselotte et enfin au déchet.

Il est admis en principe que la masselotte, pour produire son effet, ne doit se figer qu'après le bourrelet.

Il convient donc de lui donner un diamètre un peu plus fort : quant à sa hauteur, l'expérience a fait voir que 0,60 à 0,70, suffisaient pour les pièces actuelles.

En tout cas, la hauteur de la masselotte doit excéder son diamètre.

Le déchet est variable suivant la durée de la fusion, l'activité du fourneau et la qualité des fontes. Dans le calcul des charges, on doit supposer la réunion des circonstances les plus défavorables, afin de n'être jamais en défaut de métal. Dans un cas extrême, on aurait encore la ressource, à la fonderie de Liége, de profiter de la fonte du cubilot, pour achever de remplir le moule après la coulée, s'il y avait eu perte de métal. Mais pour que la pièce soit sauvée, il faut que la fonte, sortie du fourneau à réverbère, arrive au moins jusqu'à la naissance de la masselotte.

Les fontes au coke de première fusion donnent plus de déchet, que celles au bois, et celles-ci plus que les masselottes et autres fontes de seconde fusion. Il faut remarquer que, quand les fontes sont peu carburées ou que le fourneau marche mal, il y a une certaine partie de métal qui se fige sur la sole, dans le bassin et les écheneaux, et qui ne peut arriver jusque dans le moule. Ces circonstances conduisent au même résultat que s'il y avait une perte de fonte.

Lorsqu'on coule une pièce d'un certain calibre pour la première fois, on compte sur 10 pour °/₀ de déchet; ce chiffre est, du reste, une limite qu'on n'atteint presque jamais. On rectifie la charge pour les pièces suivantes, d'après le résultat de la première coulée.

En général, la charge se compose de :

$^4/_5$ de fonte de première fusion :

$^1/_5$ de masselottes et restant de coulée.

Les établissements qui fournissent des fontes à canon, en Belgique, sont en petit nombre. Le fourneau du Poucet fournit depuis longtemps des fontes fortes au bois. Celui de Lassoye, dans le Luxembourg, est entré en lice depuis quelque temps. Enfin, l'établissement de Seraing a fourni, à diverses reprises, d'excellentes fontes au coke.

Nous avons dit à l'article *fontes*, que celles aux bois étaient généralement livrées en grosses barres triangulaires, nommées *gueuses*. Les maîtres de forges avaient effectivement l'habitude de couler leurs produits sous cette forme. Mais leurs dernières fournitures ont été effectuées en barreaux ou en plaques d'une certaine dimension. On y trouve l'avantage de pouvoir les charger plus aisément et d'éviter la manœuvre de les briser au casse-gueuse.

Ces avantages pourraient bien être balancés par un grave inconvénient. En effet, nous verrons plus loin que la sole a besoin d'être échauffée avant le commencement de la fusion. Les petits barreaux entrant plus vite en fusion que les gros, il est à craindre que la sole ne soit pas convenablement échauffée au moment où le métal se fond, si la charge entière du fourneau est composée de petits morceaux.

L'aspect des fontes changeant avec la grosseur des échantillons coulés, il faut remarquer que les fontes fortes au bois, coulées en plaques ou en barreaux, ne seront plus à gros grains, comme nous l'avons indiqué pour les gueuses, mais que ces fontes auront le grain plus petit, une couleur plus claire, et montreront même parfois un aspect truité.

Il convient pour la régularité des produits et pour entretenir les maîtres de forges dans les bonnes traditions sur la fabrication des fontes fortes, en leur donnant occasion d'en livrer de temps en temps, il convient, disons-nous, de prendre les fontes des divers hauts-fourneaux, en proportions aussi constantes que possible dans la composition des charges des fourneaux à réverbère. Quand on a de vieux canons de Suède, on les fait entrer pour $^1/_5$ dans les charges et on les considère comme fonte de première fusion.

Les petites pièces se refroidissent plus vite que les grosses, après la coulée : elles sont, à mélange égal, d'une fonte plus dure. On y remédie en augmentant un peu la proportion des fontes de première fusion. Pour les très-grosses pièces, au contraire, dont le refroidissement est très-lent, on peut, dans certains cas, pousser jusqu'à $^1/_4$ la proportion des fontes de seconde fusion.

Chargement du fourneau à réverbère.

Il est essentiel que la sole soit bien échauffée avant que la charge commence à fondre, afin que la partie inférieure du bain ne forme pas une couche de métal à l'état pâteux, qu'on ne pourrait liquéfier qu'aux dépens de la chaleur du restant du bain. On s'est donc décidé, dans plusieurs fonderies, à chauffer d'abord le fourneau, et à introduire ensuite la charge. C'est ce qu'on appelle *charger à chaud.*

Ce procédé augmente la dépense en combustible, et occasionne de grands embarras par la difficulté de ranger les métaux sur la sole, lorsque le feu est en pleine activité.

A la fonderie de Liége et dans plusieurs établissements, le chargement se fait à froid, c'est-à-dire avant que le feu soit mis au fourneau. Mais on prend des précautions, pour que la sole soit convenablement échauffée avant que la fusion commence. Nous aurons soin de les indiquer.

On recouvre la sole de menu coke qui s'enflamme lors de la mise à feu, et qui, surnageant plus tard, lorsque la fusion s'est opérée, protége le métal contre l'action de l'oxigène.

Les masselottes sont placées vers le bas du fourneau et élevées sur des briques réfractaires de manière qu'elles occupent le milieu de l'intervalle entre la voûte et la sole. Les fontes de première fusion sont déposées près du pont, les plus gros barreaux les plus rapprochés de la chauffe. On les range suivant la longueur du fourneau, mais en les faisant porter sur d'autres barreaux transversaux qui leur servent de chantiers. Ces barreaux transversaux eux-mêmes reposent par leurs extrémités sur des briques réfractaires, de manière à distancer la fonte également entre la voûte, la sole et les côtés. Ces dispositions ont pour objet de forcer la flamme à se diviser, à envelopper le métal, à le chauffer également et à porter la sole au plus haut degré de chaleur avant que la fusion commence.

Les fontes de première fusion sont les plus rapprochées du pont afin de protéger contre l'action décarburante de la flamme la masselotte et les tronçons de canons qui sont plus lents à fondre, à cause de leurs dimensions.

Pensant que la plus grande chaleur se fesait sentir près du pont, on y plaçait la masselotte. Mais celle-ci, comme nous venons de le dire, était lente à se fondre vu sa grande masse. La partie de la masselotte dirigée vers la chauffe, étant longtemps soumise à l'action de la flamme, avant le commencement de la fusion, se décarburait complètement et s'affinait : l'enveloppe ne pouvant plus entrer en fusion, restait à l'état pâteux et formait ce que l'on appelle du *carcas.*

On évite actuellement cette perte en plaçant la masselotte et les tronçons de canons vers le bas du fourneau. Dans cette position, ils reçoivent la même chaleur et ils ne tardent pas à se trouver dans le bain. Le bain communique sa chaleur aux fontes qu'il enveloppe et en accélère ainsi la fusion.

Pour charger la grille, on la couvre d'un peu de paille, puis de fagots en chêne bien secs, et enfin de grosses houilles jusqu'au niveau du pont. Quand le chargement est terminé, on ferme le trou de chauffe par une petite portière, ou bien on le bouche avec un gros morceau de houille et du menu charbon entassé dans l'embrasure. On lute avec du sable argileux et réfractaire la porte de chargement et la porte de brassage. On bouche les trous de coulée avec le même sable, qu'on dame fortement. On peut alors mettre le feu au fourneau, si les moules sont encagés dans la fosse à canons. Il est prudent de ne pas allumer avant, un accident pouvant arriver aux moules pendant l'encagement et rendre la coulée impossible.

ARTICLE II

DE LA HOUILLE.

La houille destinée aux fourneaux à réverbère, doit s'allumer facilement, sans être sulfureuse; elle doit brûler avec une flamme claire et exempte de fumée : elle ne doit pas s'agglutiner ni se convertir en cendres; enfin, elle doit posséder une grande puissance de chauffe. Cette qualité de houille ne peut se rencontrer que parmi celles qui ne sont ni grasses ni maigres, et qu'on nomme *houilles demi-grasses*.

Une houille trop grasse se boursouffle, s'agglutine, ferme les intervalles entre les barreaux de grille et empêche l'arrivée de l'air nécessaire à la combustion. Une houille trop maigre ne donne pas assez de flamme, ne chauffe que par le calorique rayonnant, produit une température inégale dans le fourneau et ne peut empêcher le bain de se refroidir. Une houille trop bitumineuse produit un excès de fumée qui étouffe la flamme et empêche le fourneau de parvenir à une haute température.

La houille doit être débarrassée de pierres, de morceaux de schiste ou de grès; elle doit être en gros morceaux, afin de ne pas s'entasser, ce qui empêcherait la circulation de l'air, et pour ne pas tomber au travers de la grille.

La houille employée à la fonderie de Liége, provient principalement de la houillère de Belle-Vue. Elle a une couleur noire et un aspect luisant. Elle ne contient pas de stratification de schiste ou de grès, elle est légère, friable et connue sous le nom de houille chaude, demi-grasse.

ARTICLE III.

CONDUITE DES FOURNEAUX A RÉVERBÈRE.

Le fourneau étant chargé et les moules encagés dans la fosse à canons, on met le feu au combustible par un peu de paille enflammée qu'on tient sous la grille. Il est important de pouvoir observer l'intérieur du fourneau. A cet effet, on regarde de temps en temps par le *guichet* de la porte de chargement ou de brassage. Le guichet est un petit trou percé au centre de la porte, qu'on bouche par un tampon d'argile après qu'on a observé le fourneau.

On remarque si tous les morceaux de fonte entrent également en fusion, s'il ne se forme pas trop de laitiers, si le fourneau marche bien, si la flamme est claire et active. De temps en temps on recharge la grille par le trou de chauffe qu'on ferme ensuite exactement. On reconnait que le feu marche bien, à la flamme qui sort de la cheminée et qui doit être claire et courte.

Le feu doit être conduit progressivement pour empêcher le métal d'entrer en fusion avant que l'intérieur du fourneau et principalement la sole aient eu le temps d'acquérir un haut degré de chaleur. Deux heures et demie après la mise à feu (plus ou moins), la fonte est ordinairement liquéfiée. Mais il arrive souvent que la sole est recouverte d'une couche de métal qui s'est refroidi en coulant et qui, restant à l'état pâteux, ferait manquer la coulée si l'on n'y portait remède.

Pour reconnaître l'état du fourneau, on ouvre la porte de brassage, et l'on promène un rable (fig. 12, planche XI), sur le fond du bassin. On ramène à la surface les parties de métal seulement ramollies, pour les exposer à la chaleur de la flamme : on les brise, on les divise et on les mélange avec le reste de la charge. Ces manœuvres font acquérir la température générale du fourneau à ces parties de métal qui ne sont que ramollies ou pâteuses. Il faut en agir de même avec les morceaux de fonte ou de masselottes qui résistent à la fusion; on prévient ainsi la formation du carcas et le déchet qui en est la suite. Le brassage doit durer jusqu'à ce que la sole soit entièrement débarrassée du métal qui s'y serait attaché à l'état pâteux. Les fondeurs appellent *relever la sole*, l'opération effectuée par ce *premier brassage*.

On prévient l'oxidation de la fonte en projetant de temps en temps sur le bain un peu de menu coke ou de charbon de bois qui sert en même temps à le réchauffer en brûlant. Il faut projeter du charbon chaque fois qu'on ouvre le fourneau. Le brassage étant terminé, on referme aussitôt la porte de brassage et on la lute avec du sable argileux.

La surface du bain se recouvre toujours plus ou moins de laitiers, qui proviennent principalement du fourneau, et de la fonte elle-même. Il faut éviter qu'il y en ait trop à la surface du bain, ils empêcheraient la flamme de chauffer le métal. On les retire par la porte de brassage. On les coagule pour les enlever plus facilement, en répandant un peu de sable blanc sur le fourneau : le laitier refroidi subitement se prend en une masse pâteuse qu'on entraine sans peine avec un rable. On peut laisser sur le métal une couche mince de laitier, qui, sans s'opposer trop sensiblement à l'action de la chaleur, empêche la décarburation de la fonte.

Le brassage a l'avantage de mélanger les fontes et de les rendre homogènes; mais il refroidit le fourneau. Il faut donc éviter de le faire durer trop longtemps et il faut se hâter de refermer le fourneau hermétiquement.

On reconnaît que la fonte est suffisamment chaude quand elle paraît très-fluide et qu'elle est *étincelante*.

Il est difficile de bien en juger par la couleur seulement.

Il est bien vrai que la fonte liquéfiée est d'autant plus blanche qu'elle est plus chaude, mais elle présente des nuances qui dépendent de sa nature : ainsi, à température égale, la fonte grise est plus rouge que la fonte blanche.

ARTICLE IV.

COULÉE DES CANONS.

Il est temps de couler quand la fonte commence à étinceler. Une fusion trop prolongée brûle le métal, détermine un commencement d'affinage, rend la fonte moins liquide et même peut l'amener à l'état pâteux. Dans ces circonstances, les moules se rempliraient difficilement, la fonte se figerait promptement, le métal serait dur et cassant après le refroidissement.

Le moment de couler étant arrivé, on dispose les hommes près des écheneaux et du bassin. Quelques-uns se munissent d'écluses de rigole (fig. 6, planche XI), espèces de pelles en fer, à manches obliques, recouvertes de terre fientée et séchée, et dont le profil est le même que celui des écheneaux, afin de pouvoir arrêter les laitiers, modérer l'arrivée de la fonte et, au besoin, la retenir entièrement.

D'autres saisissent une perche de bois pour écumer le métal à la surface et écarter les laitiers et les charbons. On allume un morceau de chandelle au bas du châssis qui renferme le moule, afin d'allumer les gaz lorsqu'ils se produisent et de faciliter leur sortie.

L'ouvrier chargé du tuyau de décharge qui conduit le métal dans le moule, prend la quenouillette (fig. 7) avec laquelle il doit diriger le jet vers le fond du moule et régler la chute du métal.

On dégage avec la truelle une partie du sable entassé dans l'œil ou le trou de coulée. Pendant ce temps, on rougit au feu la pointe de la perrière ou du piquoir (fig. 9) ; on dispose horizontalement près du mur où débouche le trou de coulée, une autre barre de fer, dont l'objet est de servir, au besoin, d'appui au piquoir. On place ensuite l'extrémité du piquoir dans le trou de coulée, on l'enfonce à coups de masse et on le retire quand la fonte arrive. Lorsque plusieurs fourneaux concourent à la même coulée, on les dégage en même temps.

On laisse le bassin se remplir : on écrase avec la pelle les charbons de bois, qui surnagent, et on laisse les fontes se mélanger. On soulève l'écluse placée à l'ouverture du bassin, en ayant soin qu'elle appuie toujours contre son emboîtement. La fonte passe par dessous l'écluse : les laitiers qui surnagent, sont arrêtés. Le métal liquide s'écoule ensuite sous la *grande écluse* (L, fig. 4, planche X), traverse le tuyau placé à l'extrémité de la rigole de coulée, après avoir brûlé le bouchon de foin qui l'obstruait, et enfin afflue dans la rigole de coulée.

On arrête les corps étrangers entraînés avec le métal au moyen d'écumoirs en bois et d'une ou deux écluses de rigole. On dirige avec la quenouillette le jet de métal sur le centre du moule, en évitant de le projeter sur les parois. Lorsque la fonte est parvenue à la hauteur des tourillons, on ferme le tuyau de décharge avec la quenouillette, et on interrompt la chute du métal. Les canaux et le bassin se remplissent. En soulevant ensuite la quenouillette, on fait tomber un gros jet de métal dans le moule, et on occasionne des mouvements et des bouillonnements qui ramènent vers le centre les laitiers et les charbons entraînés avec la fonte. De cette manière, on en préserve les tourillons.

Lorsque le bain du fourneau s'est abaissé jusqu'au niveau du trou de coulée, on perce le trou inférieur, afin d'empêcher les laitiers d'arriver. On laisse le fourneau se vider et le moule se remplir, en prenant les mêmes précautions.

La masselotte étant pleine, on perce sur le côté des écheneaux une ouverture communiquant à une rigole, où l'on reçoit la fonte excédante.

On interrompt en même temps la communication avec le moule, en enfonçant à coups de masse la grande écluse dans le sable, et en bouchant l'écheneau par du sable damé contre cette écluse.

Il est important d'empêcher les laitiers de se mêler avec la fonte. Ils arrivent vers la fin de la coulée, et se font remarquer par des filets plus fluides et blanchâtres qui surnagent. On les arrête en jetant du sable sur la rigole près du trou de coulée. On détruit ensuite la paroi extérieure de cette rigole, comme nous l'avons déjà expliqué, et le laitier se répand sur le sol de l'atelier.

La coulée étant terminée, et la fonte restante dans les écheneaux étant figée, on enlève la rigole de coulée, on écume le métal au dessus de la masselotte et l'on répand sur sa surface une couche épaisse de coke pulvérisé. Par ce moyen, on débarrasse les masselottes des laitiers, et on ralentit le refroidissement de la pièce, parce que le charbon est mauvais conducteur du calorique.

Pendant la coulée, il se forme dans la matière du moule des gaz dont il faut faciliter le dégagement. Nous avons déjà dit qu'on les allumait par le feu d'une bougie placée au bas du moule contre la jonction de deux châssis.

Les gaz, en brûlant, développent une certaine chaleur qui se communique au châssis et contribue à en ralentir le refroidissement.

La combustion des gaz se fait remarquer par les flammes bleuâtres qui courent le long des brides longitudinales et circulaires.

La durée de la fusion est ordinairement de 4 heures.

La consommation moyenne de houille par 1,000 kilogrammes de fonte, est d'environ 650 kilogrammes. La coulée dure 5 à 10 minutes.

Le séchage des moules dans l'étuve exige de 750 à 1,000 kilogrammes de houille par bouche à feu, en moyenne 850 kilogrammes.

ARTICLE V.

ACCIDENTS QUI PEUVENT SURVENIR.

Les accidents qui peuvent survenir sont nombreux ; le maître fondeur doit les prévoir par une attention continuelle. Nous citerons quelques-uns de ces accidents.

1° Une forte température acquise trop subitement, une température excessivement élevée, une fusion trop prolongée, peuvent occasionner des dilatations et des tiraillements dans les ferrures de la maçonnerie et dans la maçonnerie elle-même ; de là, des fissures par lesquelles la fonte peut s'échapper dans le cendrier.

2° Une température très-élevée, ou une fusion trop prolongée, peuvent provoquer la détérioration du pont et la fusion d'une partie des briques qui composent la sole près du pont, et par suite, le métal liquide peut fuir dans le cendrier.

3° Une partie de la charge près du pont peut s'affaisser sur elle-même, rester à l'état pâteux, former une digue à une certaine distance du pont, et empêcher l'écoulement du métal à mesure qu'il entre en fusion. Le métal liquide ne pouvant plus descendre vers le bas du fourneau, passe au-dessus du pont et tombe au travers de la grille dans le cendrier.

On ouvre la porte de brassage, on perce avec un rable ou un piquoir la digue formée par le métal affaissé sur lui-même à l'état pâteux, et on livre au métal liquide un passage vers le bas du fourneau.

4° La charge peut être trop forte pour la capacité du bassin, et la fonte liquide déborde la porte de brassage. On exhausse la partie inférieure de cette porte avec des briques réfractaires ou avec du sable argileux bien foulé, ce qui forme un barrage capable de retenir le métal.

5° Le fourneau étant trop chargé, le niveau du métal rétrécit trop le passage de la flamme sous le bec, ce qui ralentit le tirage et empêche le métal d'acquérir la température nécessaire.

On ouvre la porte de brassage, et on démolit une partie du bec à coups de ringards, afin d'élargir la section du fourneau à cette place. Le tirage devenant plus facile, la température du fourneau ne tarde pas à s'élever.

6° Une partie de la voûte peut s'affaisser sur le métal liquide. On ouvre la porte de brassage, on enlève avec un rable les briques et les laitiers, on recouvre de feuilles de tôle suffisamment épaisses l'ouverture produite par l'affaissement d'une partie de la voûte, et on lute les joints avec du sable réfractaire.

On coule dès que l'état de la fonte le permet.

7° Fourneau qui marche mal accidentellement. Il arrive quelquefois que, malgré une fusion prolongée, on ne parvient pas à chauffer la fonte assez fortement. Il est préférable, dans ce cas, de couler de suite. En cherchant à augmenter la température par la continuation du feu, on court risque de trop décarburer le métal.

Quand on prolonge la fusion, on a soin de couvrir le bain de charbon de bois ou de coke pour garantir le métal de l'oxigène apporté par le tirage de la cheminée.

On parvient quelquefois à ranimer le fourneau en projetant de l'eau sur le cendrier. Cette eau, en se vaporisant, traverse la grille, entre dans la chauffe où elle se décompose. L'hydrogène, devenu libre, brûle ensuite au contact de l'oxigène de l'air affluent, ce qui détermine souvent une accélération dans l'allure du fourneau.

8° La haute température de la matière peut opérer la vitrification et la fusion d'une partie des terres qui recouvrent la rigole de coulée, et de la tôle dont cette rigole est composée. La partie de la plaque de fonte située sous la rigole de coulée, au point où elle est percée, peut elle-même entrer en fusion par le courant de métal liquide.

La plaque étant percée, il en résulte des fuites, soit sur le sol de l'atelier, soit dans la fosse aux moules. Dès qu'on s'en aperçoit, on tamponne le trou de coulée, on ferme les écluses, on arrête la coulée et on replace une nouvelle rigole de coulée. Ces diverses opérations doivent se faire avec la plus grande célérité.

9° Fuite à travers le moule. Elle résulte d'une fonte extrêmement chaude, d'une réparation mal faite lors du moulage, d'un mauvais assemblage de deux parties consécutives du châssis, d'un boulon ou d'une clavette brisés à la bride longitudinale, des dilatations qu'éprouvent les châssis et les boulons lors du séchage, lors de la coulée et même après la coulée.

On remédie à ces fuites, en tamponnant avec de l'argile pétrie appliquée avec le bouchoir.

La fonte s'épaissit au contact d'un corps froid et se congèle quelquefois, ce qui arrête la fuite.

Mais, pour réussir, il faut que la fissure soit bien petite et promptement bouchée, car le courant de fonte liquide est extrêmement rongeur. On interrompt en même temps l'arrivée de la fonte, et on ne reprend la coulée que lorsque la fissure est bien bouchée.

10°. *Moule humide en une certaine partie.* Quand on remarque un bouillonnement produit par l'humidité du moule qui se vaporise au contact de la fonte, on ralentit la coulée, on fait arriver le métal à petit jet, jusqu'à ce que le bouillonnement ait cessé.

CHAPITRE IV.

FUSION DU BRONZE : COULÉE DES BOUCHES A FEU EN BRONZE.

ARTICLE I.

FOURNEAU A RÉVERBÈRE POUR LA FUSION DU BRONZE.

A la fonderie de Liége, on opère la fusion du bronze comme celle de fonte dans un fourneau à réverbère allongé.

Mais le bronze exigeant une température moins élevée, on peut donner plus de capacité au foyer de fusion pour une même surface de chauffe. On a utilisé pour cet objet deux fourneaux à réverbère accouplés de la fonderie n° 2. Les dimensions de ces fourneaux sont restées les mêmes avec les exceptions suivantes :

1° On a élevé le pont jusqu'à la hauteur de 0,20 à 0,25.

2° On a abaissé la grille de 0,50 à 0,85 en dessous du pont.

3° On a abaissé la sole près du pont, ce qui a augmenté la capacité du fourneau et diminué l'inclinaison de la sole.

Le pont est renforcé, parce qu'il est plus élevé et qu'il doit résister aux effets de l'infiltration du métal. On lui donne 0,30 de largeur en haut, et on le raccorde avec la sole par un talus sous 45°.

Le bas du fourneau étant réglé d'après la position des trous de coulée, ne varie pas.

L'abaissement de la sole dans les deux fourneaux est réglé d'après la capacité qu'on veut leur donner : l'un étant destiné à fondre une charge de 5,000 kilogrammes environ et l'autre devant fondre jusqu'à 8,000 kilogrammes.

On doit éviter de trop abaisser la sole dans le plus petit des deux fourneaux, car il deviendrait difficile à chauffer pour les petites charges, qu'on est quelquefois obligé de fondre quand on a une seule pièce de campagne à couler.

On élève le pont et on abaisse la grille dans le double but de prévenir l'oxidation du métal et de retarder sa fusion, pour avoir le temps de bien chauffer le fourneau avant que le métal commence à couler.

La sole est formée de briques réfractaires posées de champ, afin qu'elles soient moins facilement soulevées par l'infiltration du bronze entre les joints.

ARTICLE II.

DISPOSITIONS POUR LA COULÉE DES PIÈCES DE BRONZE.

L'encagement des moules dans la fosse à canons, se fait de la même manière que pour les pièces de fonte.

On a les mêmes écheneaux et le même bassin de coulée que pour les pièces de fonte. Cependant on ne peut faire couler le bronze liquide sur des rigoles en sable, parce qu'il s'infiltrerait dans la matière qui en forme les parois. On est donc obligé, pour les parties non revêtues en maçonnerie, de composer ces rigoles avec des portions de canaux formées de plaques en terre fientée et convenablement séchées. Ces plaques sont soudées avec de la terre de mouleur.

Les rigoles sont consolidées par du sable damé et soutenu par des lestes en fer.

Les écheneaux et le bassin étant préparés, on les remplit de gros fagots qu'on allume pour les faire sécher.

On continue ensuite les feux jusqu'au moment de la coulée avec du charbon de bois, et on recouvre les rigoles par des feuilles de tôle pour concentrer la chaleur.

On remplace la grande écluse (fig. 4, planche XI) et (L, fig. 4, planche X), par une écluse de bassin ou de rigole (fig. 5 et 6, planche XI), pour laquelle on a pratiqué un emboitement dans l'écheneau.

A la fonderie de Liége, on prend quelques dispositions particulières, quand on coule plusieurs canons à la fois.

On établit une rigole de communication d'un moule à l'autre, un peu en dessous de la partie supérieure de la masselotte. Elle est amorcée entre deux moules consécutifs par un petit tuyau partant de chaque châssis et coulé en même temps. Cette rigole est recouverte intérieurement de terre fientée et séchée.

Un des moules extrêmes a en outre un tuyau de décharge également tapissé de terre de mouleur.

Ce tuyau surplombe une vaste chaudière de fonte destinée à recevoir l'excédant de métal après le remplissage des moules.

La chaudière, qui est tapissée intérieurement de terre fientée et séchée, est suspendue à la grue qui commande la fosse à canon.

La chaudière est suspendue de la manière suivante :

Elle est pourvue de deux tourillons placés un peu au-dessus du centre de gravité du vide intérieur.

Deux étriers en fer, partant de ces tourillons, emboîtent un arbre horizontal en fer forgé (semblable au fléau d'une balance), qu'on accroche à la grue par son milieu.

Aux extrémités des tourillons, on adapte deux grands leviers en fer, qui permettent d'incliner ou de redresser la chaudière à volonté.

Ainsi, à l'aide de la grue et des deux leviers de fer, on peut reverser dans les moules, l'excédant de métal arrivé dans la chaudière et compenser la perte due à l'infiltration du bronze dans les chapes. Cette infiltration est nommée *absorption*, par les fondeurs, pour indiquer que le métal est sorti du moule pour entrer dans la chape.

S'il y a plusieurs moules, indépendamment de la communication d'un moule à l'autre, on construit encore des écheneaux, qui, partant de chacun d'eux, aboutissent au bassin de coulée.

Pour éviter les embarras du maniement de cette vaste chaudière, il faudrait augmenter la capacité des moules, en allongeant les masselottes. L'excédant de bronze obtenu par le remplissage des moules, remplacerait la perte due à l'absorption. On obtiendrait une économie de main-d'œuvre, les chances d'accident diminueraient, et le métal n'étant pas déplacé inutilement, se refroidirait moins vite. Une augmentation de 0,30 dans la hauteur de la masselotte, suffirait pour arriver à ce résultat.

Rien ne s'oppose à ce qu'on allonge le châssis de la masselotte de 0,30, un excès de longueur dans le moule ne pouvant nuire.

ARTICLE III.

COMPOSITION DE LA CHARGE DU FOURNEAU A RÉVERBÈRE.

La question de savoir, s'il est préférable de fondre avec des métaux neufs (le cuivre et l'étain purs), ou avec du vieux bronze, a été un sujet de controverse.

Les partisans des métaux neufs prétendent que le bronze souvent refondu, devient plus blanc (à dose égale d'étain), et beaucoup moins tenace. Ils attribuent ces effets à la présence des oxides métalliques, qui ont dû se former et s'accumuler dans des refontes souvent répétées. Mais ils ne remarquent pas que ces oxides ont dû se séparer en vertu de leur moindre densité et entrer dans les laitiers. Ils admettent également que l'alliage a pu se compliquer des substances étrangères renfermées dans les matériaux qui composent les fourneaux ou les moules.

Les partisans du vieux bronze, font remarquer que, si les métaux refondus sont purs, les produits sont plus homogènes, moins sujets aux effets de la liquation, et plus durs à dose égale d'étain. Ils font observer que le manque de dureté est un des plus grands défauts qu'on reproche aux pièces de bronze, et que la refonte des métaux est un des moyens d'y remédier. Ils soutiennent d'ailleurs que des substances étrangères ne peuvent s'introduire dans le bronze par l'effet de la fusion, puisqu'une fusion prolongée ramènerait le bronze à l'état de cuivre pur et que ces substances étant plus oxidables que le cuivre, doivent entrer dans les laitiers.

La difficulté de former un bon alliage de cuivre et d'étain est si grande, qu'à la fonderie de Liége et dans plusieurs fonderies de France et d'autres contrées, on fait l'alliage par une fusion préalable; afin de composer le *mélange préalable*, qu'on doit employer au fondage des pièces, au lieu du cuivre et de l'étain purs.

L'étain étant beaucoup plus oxidable que le cuivre, le titre de bronze s'altère par la fusion.

On est donc obligé, quand on emploie du vieux bronze, d'ajouter à la charge du fourneau, soit de l'étain pur, soit un alliage très-riche en étain, d'après les indications du calcul et de l'analyse.

Mr le colonel Fréderix a introduit à la fonderie de Liége un procédé qu'il a importé de l'Angleterre, et qui consiste à remplacer l'étain par un alliage formé de deux parties de cuivre et d'une partie d'étain. Cet alliage, il le nomme *métal chimique*.

L'emploi du métal chimique nous semble bon, car l'étain déjà allié au cuivre se dissoudra plus uniformément dans la masse, que si on le projetait pur.

Mr le colonel Fréderix forme le mélange préalable de 8 parties d'étain *seulement* sur 100 parties de cuivre.

Nous pensons qu'il serait beaucoup plus rationnel de le composer au titre voulu de 11 pour °/₀, ce qui éviterait l'embarras d'introduire dans le fourneau, pendant la fusion, des quantités plus grandes d'étain ou de métal chimique, et préviendrait l'inconvénient d'ouvrir souvent la porte de brassage.

Du reste, la fonderie de Liége a coulé de belles pièces de bronze en employant le mélange préalable à l'un ou à l'autre des deux titres de 8 pour °/₀ et de 11 pour °/₀.

Les métaux *neufs* ou *vieux*, pourront donner de bons produits s'ils sont *purs* : mais le bronze sera plus *homogène* par l'emploi de *vieux métaux*.

La charge du fourneau se compose de diverses espèces de bronze : elle comprend les masselottes obtenues à la coulée précédente, les fonds de bassin et de cuillers, les écheneaux, une partie de mélange préalable, les tronçons de canons et vieux bronze qu'on utilise, le bronze provenant de l'exploitation des croûtes de chape, les bûchilles et autres résidus de fabrication, et, en dernier lieu, l'étain ou le métal chimique nécessaires pour compléter le titre de la charge.

L'analyse indique les diverses quantités d'étain que les fontes renferment. Mais la composition du bronze n'étant pas homogène, les échantillons analysés peuvent ne pas posséder le titre moyen des morceaux d'où on les a tirés. Les analyses elles-mêmes laissent quelquefois à désirer. Il est donc prudent de composer les charges toujours à peu près dans les mêmes proportions, en ayant égard à l'approvisionnement existant et aux résidus que fournit la fabrication de chaque pièce.

Dans une fonderie où l'approvisionnement est réglé en prévoyant l'avenir, on ne doit introduire dans les fourneaux que la quantité de mélange préalable nécessaire pour couvrir les déchets. Car un gouvernement doit posséder le nombre nécessaire de bouches à feu en bronze, de sorte que la fabrication ne consiste que dans le renouvellement de celles mises hors de service.

Malheureusement il n'en a pas été ainsi à la fonderie de Liége, et les approvisionnements ont varié au point de forcer à couler entièrement, tantôt avec du vieux bronze, tantôt avec des métaux neufs.

D'après le titre des diverses parties qui composent la charge, on détermine la quantité d'étain ou de métal chimique à ajouter, pour que le titre moyen de la charge soit de 11 pour °/₀.

Le déchet en étain sur la totalité des produits d'une fabrication, varie ordinairement entre $^1/_2$ et 1 pour °/₀, pour une fusion de 6 à 8 heures de durée.

La quotité de la charge se règle de la même manière que pour les pièces de fonte, en ayant égard au poids de la pièce finie et de la masselotte, à la quantité de métal qui entre dans l'ame, à l'excédant pour les opérations du tournage et du ciselage, au déchet. Mais il faut remarquer que les masselottes des pièces de bronze doivent être beaucoup plus plus hautes que celles des pièces de fonte, et que le déchet doit comprendre l'absorption du métal.

Il faut également tenir compte de l'infiltration du bronze dans la sole d'un fourneau neuf, dans le bassin et les écheneaux. Enfin il est impossible d'éviter qu'il ne s'attache un peu de bronze aux parois du bassin et des rigoles de conduite.

Un excédant de métal n'a d'autre inconvénient que d'occasionner une petite perte de matière et de main-d'œuvre, mais une masselotte trop faible, peut faire manquer une pièce.

ARTICLE IV.

CHARGEMENT DU FOURNEAU A RÉVERBÈRE.

Les métaux se fondent plus ou moins lentement, selon leur grosseur. Si le fourneau était uniquement chargé de menus morceaux, ceux-ci seraient liquéfiés bien longtemps avant que le fourneau et la sole particulièrement eussent acquis le degré de chaleur voulue; le bronze se prendrait en une masse pâteuse sur la sole, et le feu le plus ardent ne pourrait que l'oxider à la surface, sans pouvoir communiquer aux parties inférieures le degré de chaleur et de fluidité nécessaires pour la coulée. Quand cela arrive, on dit que le bronze fait *pâte* ou *gâteau*. Il faut donc faire le chargement avec des métaux d'une dimension assez forte pour que cet accident ne soit pas à craindre. Lorsqu'ils sont fondus, après que la sole est parvenue à un degré élevé de chaleur, on peut introduire successivement les menus morceaux qui complètent la charge. Ces morceaux noyés dans le bain, en acquièrent promptement la température : on les projette d'ailleurs en quantités assez petites pour qu'ils ne puissent refroidir la charge d'une manière sensible. On utilise ainsi tous les échantillons de l'approvisionnement, quelle que soit leur grosseur.

D'autres motifs s'opposent à l'introduction de parcelles de bronze dans le premier chargement. La flamme les oxiderait promptement à cause de leur grand état de division, le déchet en serait augmenté et il y aurait en même temps altération dans le titre de la charge : des parties aussi légères que les bûchilles pourraient même être entraînées jusque dans la cheminée, par la force du courant. Ces objections tomberaient en partie si l'on chargeait à chaud, mais nous en avons déjà fait ressortir les inconvénients.

Nous ajouterons, qu'on ne peut chauffer un fourneau vide, aussi bien que quand il est convenablement chargé; car le bain de métal produit un retrécissement de la section sous le bec, lequel, en retardant la sortie de la flamme la condense, lui donne le temps de communiquer une plus grande partie de sa chaleur au fourneau et en élève la température.

Ces considérations ont fait diviser le chargement en deux parties distinctes : les *gros métaux* et les *petits métaux.*

Les gros métaux comprennent les masselottes, les tronçons de canons, les lingots de mélange préalable, les restes des coulées précédentes, les rondelles provenant de l'excédant de longueur des pièces, les faux-boutons, etc., etc.

Les petits métaux se composent des bûchilles et menus morceaux provenant du ciselage.

L'étain et le métal chimique forment une troisième catégorie.

Les gros métaux sont introduits avant la mise à feu. On utilise ainsi la chaleur produite.

Les petits métaux sont projetés pendant la fusion; noyés dans le bain, ils sont soustraits à l'action de la flamme et préservés de l'oxidation.

L'étain ou le métal chimique ne sont ajoutés à la charge qu'une demi-heure ou une heure avant la coulée (selon la quantité), afin d'exposer ce métal le moins longtemps possible aux courants d'air.

Lorsqu'un fourneau est mis à feu pour la première fois, on enduit la sole de potée de cendres, pour s'opposer, autant que possible, à l'infiltration du métal dans les joints des briques réfractaires.

On bouche les trous de coulée avec un tampon pyramidal en fer à base carrée : la grande base vers l'intérieur du fourneau. On répare et on ajuste l'ouverture pour le passage du tampon avec de la potée de cendres très-épaisse. On fait sécher au feu les couches de potée, au fur et à mesure qu'on les applique, pour les durcir. Quand le tampon est placé dans le logement qu'on lui a préparé, on le recouvre d'un gâteau de terre fientée, pour prévenir l'infiltration du bronze à travers les joints. On fait bien sécher, par un feu de charbon de bois, ce gâteau de terre et la partie environnante du trou de coulée, et l'on peut alors procéder au chargement.

Le combustible est déposé sur la grille de la même manière que dans les fourneaux destinés à la fusion du fer.

On arrange les métaux de sorte qu'ils laissent des intervalles égaux entre la voûte, la sole et les côtés du fourneau, pour que la flamme puisse les envelopper. On élève la charge au moyen de briques réfractaires en guise de calles ; sur ces briques on appuie quelques lingots parallèlement au pont, pour qu'ils servent de chantiers à d'autres gros métaux qu'on dirige dans le sens de la longueur du fourneau. La charge est d'ailleurs répartie aussi uniformément que possible, depuis le pont jusques un peu avant le bec. On répand sur la sole du charbon de bois, qui, en s'allumant, contribue à l'échauffer. Quand le bain est formé, le charbon de bois, en surnageant, couvre le métal et le préserve de l'oxidation et de plus il réduit une partie de l'oxide d'étain au fur et à mesure qu'il se forme.

Les bûchilles et l'étain, ou le métal chimique, ne devant s'introduire qu'après la mise à feu, nous en reparlerons.

ARTICLE V.

CONDUITE DU FOURNEAU ET COULÉE DES CANONS.

La conduite et l'entretien du feu se font de la même manière que pour la fusion de la fonte.

Deux heures et demie environ après la mise à feu, tout le bronze est liquéfié. On ouvre la porte de brassage, et on commence à brasser avec une perche de chêne vert. La partie immergée de la perche dégage une grande quantité de vapeurs, qui font bouillonner le métal et produisent des mouvements qui favorisent le mélange des diverses parties de la charge. On laboure la sole pour ramener à la surface du bain le métal moins chaud qui s'y est attaché à l'état pâteux. On brise les gros morceaux qui ont résisté à la fusion, on les divise, on les noie dans le bain, afin qu'ils en acquièrent la température. On accumule les laitiers vers la porte de brassage, on les coagule en projetant un peu de sable dessus et on les enlève avec un rable.

Lorsqu'on a fini de brasser, on projette du charbon de bois dans le fourneau et on referme la porte de brassage.

On doit commencer l'introduction des bûchilles quand la charge est devenue liquide et a acquis un haut degré de chaleur. On reconnait que le métal est très-chaud, quand il bouillonne, quand il écarte les laitiers en produisant des ondulations, quand les charbouilles se meuvent à la surface du bain, quand il est d'une blancheur éblouissante.

L'introduction des bûchilles doit se faire avec précaution, pour ne pas trop refroidir le bain. On en projette ordinairement 100 à 200 kilogram. chaque fois qu'on ouvre le fourneau. On a soin de brasser chaque fois et d'introduire du charbon de bois. On s'arrête dès que le métal devient moins fluide et s'épaissit. On recommence l'opération de demi-heure en demi-heure ou d'heure en heure, plus ou moins, selon l'allure du fourneau.

L'étain ou le métal chimique ne s'introduisent qu'après les bûchilles. On évite de les laisser tomber à l'état solide sur le bain, car le bronze rejaillirait jusque sur les travailleurs.

On dépose le métal sur une grande pelle de fer, armée d'un long manche aussi en fer et munie à l'extrémité de ce manche d'une forte traverse en bois.

Lorsque la porte de brassage est ouverte, l'étain ou le métal chimique, déposés sur la pelle en question, sont amenés jusque vers le bec du fourneau; et on les laisse dans cette position jusqu'à ce que la chaleur les fasse fondre. On répand le métal en différentes places pour faciliter l'alliage. C'est le moment de donner plus d'activité au brassage, afin que les gaz qui s'échappent de la partie immergée de la perche de chêne remuent toutes les parties du bain et rendent l'alliage homogène. On a soin également de labourer la sole pour en détacher les métaux qui s'y seraient attachés à l'état pâteux.

On écume avec le rable et on referme le fourneau.

On laisse le métal se réchauffer. On peut en apprécier le degré de chaleur aux indices que nous avons indiqués.

Mais pour la fin de la fusion, on se sert d'un moyen plus certain pour en juger. On puise un peu de bronze dans le bain, avec une poche ou cuiller de fer, enduite extérieurement et intérieurement de terre fientée et séchée : et on coule quelques menus barreaux dans des moules préparés d'avance. La cuiller doit se vider sans que le métal s'attache aux parois.

Les barreaux étant refroidis, on les brise et on juge d'après la cassure et à la couleur du grain si le métal est homogène, et si le titre en est satisfaisant. Dans cette appréciation, on procède par voie de comparaison avec d'autres barreaux, provenant de coulées antérieures, et dont on connait bien le titre moyen.

Enfin, le moment de couler est arrivé. On chasse le tampon dans l'intérieur du fourneau avec une barre de fer sur laquelle on frappe à grands coups de masse. Afin d'obtenir un mélange plus homogène, on débouche les deux trous de coulée en même temps. Le métal en sortant, répand une épaisse fumée blanchâtre, composée d'oxide d'étain emporté par les courants d'air. On aperçoit également de petites flammes verdâtres dues à la volatilisation du cuivre. On laisse le métal s'accumuler dans le bassin. Des hommes sont disposés aux diverses écluses qui barrent les écheneaux, afin de les ouvrir au moment voulu : d'autres sont armés d'écluses de rigole ou d'écumoirs en bois, pour arrêter les laitiers et les charbons entraînés avec eux. Un ouvrier muni de la quenouillette est prêt à diriger le métal vers le fond du moule.

On écrase avec une pelle le charbon qui surnage dans le bassin, afin de favoriser encore le mélange des diverses parties du bain. A un signal donné, on livre passage au métal et on le fait arriver dans le moule. Lorsque le bronze est parvenu à la hauteur des tourillons, on ralentit son arrivée en serrant la quenouillette dans le tuyau de décharge, et on laisse les écheneaux et le bassin se remplir, comme pour la coulée des pièces de fonte. Puis on dégage tout d'un coup le tuyau de décharge en soulevant la quenouillette, on fait arriver un gros jet de métal liquide dans le moule. Les agitations provoquées par cette affluence de bronze, ramènent vers le centre les corps étrangers, et en délivrent les tourillons et les anses.

Lorsque le métal est parvenu au haut de la masselotte, il passe par les rigoles qu'on a ménagées d'un moule à l'autre, et enfin il tombe dans la chaudière placée sous le tuyau de décharge d'un des moules extrêmes, ainsi que nous l'avons déjà expliqué en parlant des dispositions pour la coulée.

L'absorption du métal se fait pendant tout le temps que le moule se remplit. On peut la remarquer en arrêtant un moment la coulée, car à l'instant le niveau du métal s'abaisse dans le moule. Quand tout le bronze excédant est entré dans la chaudière, on ferme avec du sable argileux les rigoles communiquant d'un moule à l'autre, ainsi que le tuyau de décharge qui conduisait le métal dans la chaudière. On profite du moment où le métal est encore chaud, et par conséquent peu tenace pour couper les languettes de bronze solidifiées au fond de ces rigoles.

La durée d'une fusion dans les fourneaux de la fonderie de Liége, est d'environ 6 h. 30′. La consommation de houille est de 380 kilogrammes par 1,000 kilogrammes de bronze. Le poids de la première charge de houille sur la grille, ou du premier feu est de 450 kilogrammes.

La durée moyenne d'un feu à l'autre est de 22 minutes.

Le nombre de brassages varie de 6 à 8. La consommation de houille pour l'étuvage des moules, varie entre 900 et 1,000 kilogrammes pour les plus fortes pièces de campagne.

Le dernier brassage a lieu $^1/_2$ heure ou 1 heure avant la coulée ; celle-ci dure 10 minutes.

Lorsqu'on fait le mélange préalable, la fusion ne dure pas aussi longtemps, quoique le cuivre résiste à une plus haute température que le bronze. Cela tient à ce que l'on ne refroidit pas le fourneau par l'introduction des bûchilles. On mêle l'étain avec le cuivre 1 heure ou 1 $^1/_2$ heure avant la coulée, en une, deux ou trois fois, selon la charge. Il faut aller progressivement pour ne pas épaissir le bain en le refroidissant.

La durée d'une fusion pour le mélange préalable est de 4 à 4 $^1/_2$ heures. La consommation de houille est de 350 kilogram. par 1,000 kilogrammes de mélange.

Le déchet à chaque fusion varie entre 2 $^1/_2$ et 4 pour °/₀.

ARTICLE VI.

ÉVALUATION DE LA TEMPÉRATURE DU BRONZE FONDU DANS LE FOURNEAU A RÉVERBÈRE.

La difficulté d'apprécier exactement la température du bain, a fait imaginer, par Mr le colonel Dusaussoy, un procédé fondé sur la capacité des corps pour la chaleur. Ce procédé a été décrit dans l'ouvrage de Mr le colonel Serres, sur le service dans les fonderies, puis rapporté et annoté dans le traité de Mr le colonel Émy, sur la fabrication des bouches à feu. Nous ne croyons pouvoir faire mieux, que d'extraire ce qui suit des excellents ouvrages que nous venons de citer.

On plonge un boulet dans le bain de bronze, jusqu'à ce qu'il en ait acquis la température, puis on l'immerge dans de l'eau, jusqu'à ce que l'équilibre se soit établi entre la température de l'eau et celle du boulet.

La quantité de calories absorbées par le boulet, divisée par sa masse, est égale à la température du bain de métal. D'un autre côté, la quantité de calories communiquées à l'eau par le boulet, plus la quantité de calories restées dans celui-ci, doivent être égales à la quantité de calories que possédait le boulet à la sortie du bain.

En introduisant dans les calculs les chiffres que comportent ces éléments, on parvient à une équation du premier degré, qui donne la température du bain. On doit faire les corrections indiquées par quelques expériences pour tenir compte de la perte de chaleur occasionnée par le trajet du boulet au sortir du fourneau, jusqu'au moment de son immersion dans l'eau, et de la perte produite par la vaporisation d'une partie de l'eau ou par l'absorption de chaleur par les parois du vase qui contient l'eau.

Quelques explications préliminaires sur les mots *calorie* et *capacité calorifique*, ne seront peut-être pas inutiles.

Les corps sont susceptibles de contenir des quantités plus ou moins grandes de chaleur. Ces variations dans la quantité de chaleur sont accusées par la température.

La quantité de chaleur contenue dans les corps étant variable, elle est susceptible d'augmentation ou de diminution; on doit donc pouvoir la mesurer, comme toute *grandeur*, au moyen d'une unité conventionnelle. Cette unité se nomme *calorie*.

La *calorie* est la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1 degré la température de l'unité de poids d'eau. (Ordinairement 1 kilogramme).

Les corps de même poids, en s'échauffant d'un même nombre de degrés, prennent des quantités différentes de chaleur : ainsi, pour que la température du fer s'élève d'un certain nombre de degrés, il ne faut que les 0,11 de la chaleur nécessaire pour produire la même élévation de température sur un poids égal d'eau.

On appelle *calorique spécifique*, *chaleur spécifique*, *capacité calorifique des corps*, ou bien *capacité des corps pour la chaleur*, la quantité de chaleur, c'est-à-dire le nombre de calories nécessaires pour élever de 1° la température de l'unité de poids de ce corps.

On se dispense généralement de mentionner l'unité de chaleur ou la calorie, et les nombres qui représentent la chaleur spécifique, s'introduisent dans les calculs comme des nombres abstraits, et portent le nom de *coefficient de chaleur spécifique*, mais il faut sous-entendre, qu'ils représentent des nombres de calories.

Soient m le poids d'un corps
c la chaleur spécifique de ce corps
t la température.

Le nombre de calories que ce corps renfermera, quand il sera élevé à la température t sera exprimé par

$$cmt.$$

Il est à remarquer que cette formule suppose que la chaleur spécifique c est constante, quel que soit le changement de température; c'est-à-dire que de degrés en degrés, le corps absorbe ou perd la même quantité de chaleur, ce qui n'est pas.

L'expérience démontre que la capacité calorifique des corps est moindre aux basses températures qu'à celles élevées. Ainsi, pour le fer, la capacité calorifique est 0,11 entre 0° et 100°; elle devient 0,13 aux températures analogues à celles du bronze en fusion. Dans la pratique, on est obligé d'adopter pour c une valeur moyenne relative aux températures extrêmes observées.

Soient :

M, le poids de l'eau contenue dans le vase.

m, le poids du boulet. Ce poids est pris après l'expérience, parce que l'immersion dans le bain de bronze, fait presque toujours éprouver une perte au boulet.

C, la capacité de l'eau pour la chaleur (représentée par 1).

Cette quantité étant prise pour unité, on se dispense de la faire entrer dans les calculs : elle est ce qu'on appelle une *calorie*.

c, la capacité du fer pour la chaleur (égale à 0,127).

t, la température de l'eau en degrés centigrades, avant l'immersion du boulet.

T, la température de l'eau après l'immersion.

x, la température du bronze en fusion. C'est la quantité qu'il s'agit de déterminer.

Si l'on admet que le boulet est resté assez longtemps dans le métal liquide, pour en avoir pris la température :

cmx, sera la quantité de calories que renferme le boulet à sa sortie du fourneau.

CMT, est la quantité de calories contenues dans l'eau, après l'immersion du boulet.

CMt, était la quantité de calories contenues dans l'eau, avant l'immersion.

cmT, est la quantité de calories restées dans le boulet, après l'immersion.

La quantité de calories communiquées par le boulet à l'eau, est exprimée par

$$\mathrm{CMT} - \mathrm{CM}t = \mathrm{CM}(\mathrm{T}-t). \quad (1)$$

Mais la quantité de calories contenues dans le boulet au sortir du bain, doit être égale à celle communiquée à l'eau plus la quantité restante dans le boulet. On aura donc l'équation

$$cmx = \mathrm{CM}(\mathrm{T}-t) + cm\mathrm{T},$$

d'où

$$x = \mathrm{T} + \frac{\mathrm{CM}}{cm}(\mathrm{T}-t). \quad (2)$$

Cette équation fera connaître la valeur de x. Mais elle n'est pas exacte, parce qu'il faut tenir compte de la perte de calorique pendant le trajet du boulet au sortir du bain, comme aussi de l'absorption par les parois et par la vaporisation de l'eau. Il parait rationnel de prendre cette perte proportionnelle à la différence $\mathrm{T}-t$, des températures observées. En appelant donc k, un coefficient à déterminer par l'expérience, la formule précédente corrigée devient

$$x = \mathrm{T} + \frac{\mathrm{CM}}{cm}(\mathrm{T}-t) + k(\mathrm{T}-t). \quad (3)$$

On pourrait employer un moyen semblable pour mesurer la température de la fonte en fusion.

Mais au lieu d'un boulet qui se fondrait dans le bain, ce serait la fonte liquide elle-même, qu'il faudrait puiser dans le fourneau et projeter dans l'eau.

Si l'on craignait une trop grande vaporisation de l'eau, on pourrait immerger dans de la glace ou de la neige fondantes (comme dans le calorimètre de Lavoisier), dans un bain de plomb fondu, etc., etc. On pourrait même combiner plusieurs moyens.

ARTICLE VII.

DES FOURNEAUX A RÉVERBÈRE RONDS POUR LA FUSION DU BRONZE.

Les anciennes fonderies de bronze, fondent leurs métaux dans des fours à réverbère ronds, chauffés par un feu de bûches de bois. L'emploi de la houille amènera peu-à-peu la suppression de ces énormes fourneaux, et fera adopter les fourneaux à *réverbère allongés*.

Les fourneaux ronds se composent essentiellement :

1° De la *cuve*, espace circulaire ou elliptique, couvert d'une voûte surbaissée et où l'on dépose les métaux.

2° De la chauffe, lieu où brûle le combustible.

3° De la cheminée, dont le tirage active la combustion.

La chauffe communique avec la cuve par un espace voûté. Un petit mur, le *pont*, sépare ces deux parties inférieurement. Quand la cuve est elliptique, la chauffe est placée à une des extrémités du grand diamètre. Du côté opposé de la chauffe, est percé le trou de coulée.

Une embrasure est pratiquée sur chaque partie latérale du fourneau, et en permet la communication par la porte de chargement.

Une vaste cheminée est adossée au fourneau; mais pour forcer la flamme à se diviser par le tirage et à chauffer toute la capacité intérieure, la cheminée communique avec la partie inférieure de la cuve par 4 soupiraux placés symétriquement.

Les bûches de bois s'introduisent dans la chauffe par un canal ou conduit vertical, qu'on ferme ensuite par un registre.

Des galeries ou soupiraux permettent l'arrivée de l'air sous la grille. On leur donne le nom de ventouses.

L'expérience a constaté que les grands fourneaux ronds chauffaient mieux que les petits; mais comme on n'a pas toujours de quoi faire de grandes coulées, la plupart des anciennes fonderies de bronze possèdent des fourneaux de 3 grandeurs, de 25,000 à 30,000, de 15,000 et de 6,000 kilogrammes.

Les embarras qui résultent des grandes coulées et les avantages que présente la houille sur le bois comme combustible, feront nécessairement abandonner ces fourneaux ; pour adopter ceux allongés chauffés à la houille.

Sous le rapport de la régularité du travail, il y a moins d'embarras à couler une pièce tous les jours, que d'en couler 15 tous les 15 jours; et s'il est vrai que l'oxidation soit plus forte dans les fours allongés, elle est amplement compensée par une moindre durée de la fusion.

Dans les fourneaux ronds, la durée moyenne d'une fusion est de 15 à 16 heures, mais elle peut aller jusqu'à 30 heures et même plus.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

TABLE DES MATIÈRES

Contenues dans la première partie de ce Mémoire.

LIVRE I.

APERÇU HISTORIQUE. — MÉTAUX EMPLOYÉS A LA FABRICATION DES BOUCHES A FEU.

LIVRE II.

MATÉRIAUX DE MOULAGE.

PRÉLIMINAIRES.

CHAPITRE I.

Matériaux pour le moulage en sable des pièces de fonte.

CHAPITRE II.

Matériaux pour le moulage en terre des pièces de fonte.

58

CHAPITRE III.

Matériaux pour le moulage mixte des pièces de fonte.

CHAPITRE IV.

Matériaux pour le moulage en sable des pièces de bronze.

CHAPITRE V.

Matériaux pour le moulage en terre des pièces de bronze.

CHAPITRE VI.

Matériaux pour le moulage mixte des pièces de bronze.

CHAPITRE VII.

Récapitulation des divers matériaux employés au moulage. Considération sur ces matériaux.

LIVRE III.

MOULAGE DES BOUCHES A FEU.

CHAPITRE I.

Moulage en sable des pièces de fonte.

CHAPITRE II.

Moulage en terre des pièces de fonte.

CHAPITRE III.

Moulage mixte des pièces de fonte.

CHAPITRE IV.

Moulage en sable des pièces de bronze.

CHAPITRE V.

Moulage en terre des pièces de bronze.

CHAPITRE VI.

Moulage mixte des pièces de bronze.

CHAPITRE VII.

Moulage à noyau des gros mortiers de 0,29.

CHAPITRE VIII.

Observations concernant le tracé du modèle. Soins à apporter dans l'exécution du moule. Défauts de coulée. Méthodes diverses de coulage.

LIVRE IV.

FUSION DES MÉTAUX. COULÉE DES BOUCHES A FEU.

CHAPITRE I.

Fourneau à réverbère pour la fusion de la fonte.

CHAPITRE II.

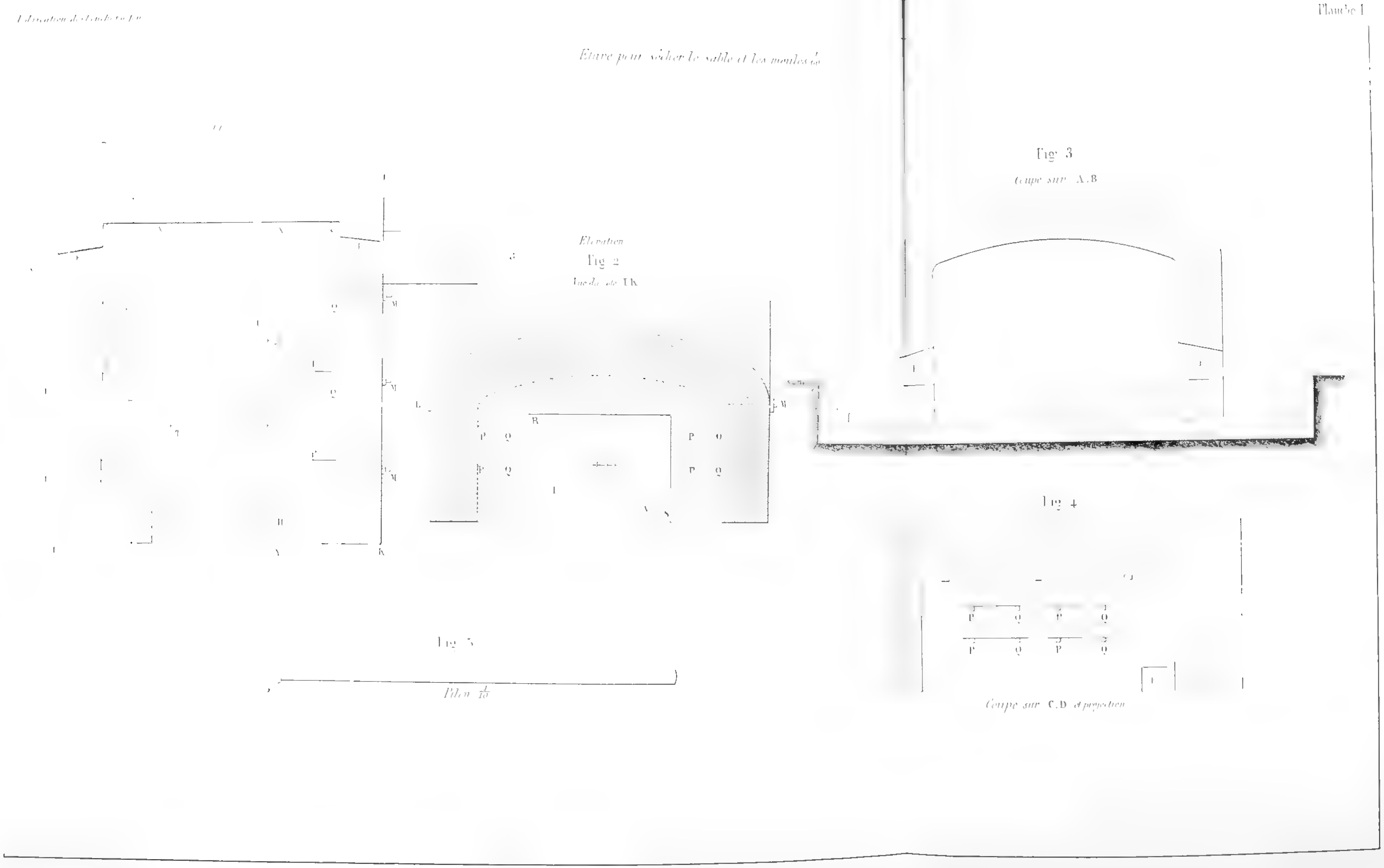
Encagement des moules: dispositions pour la coulée des pièces de fonte.

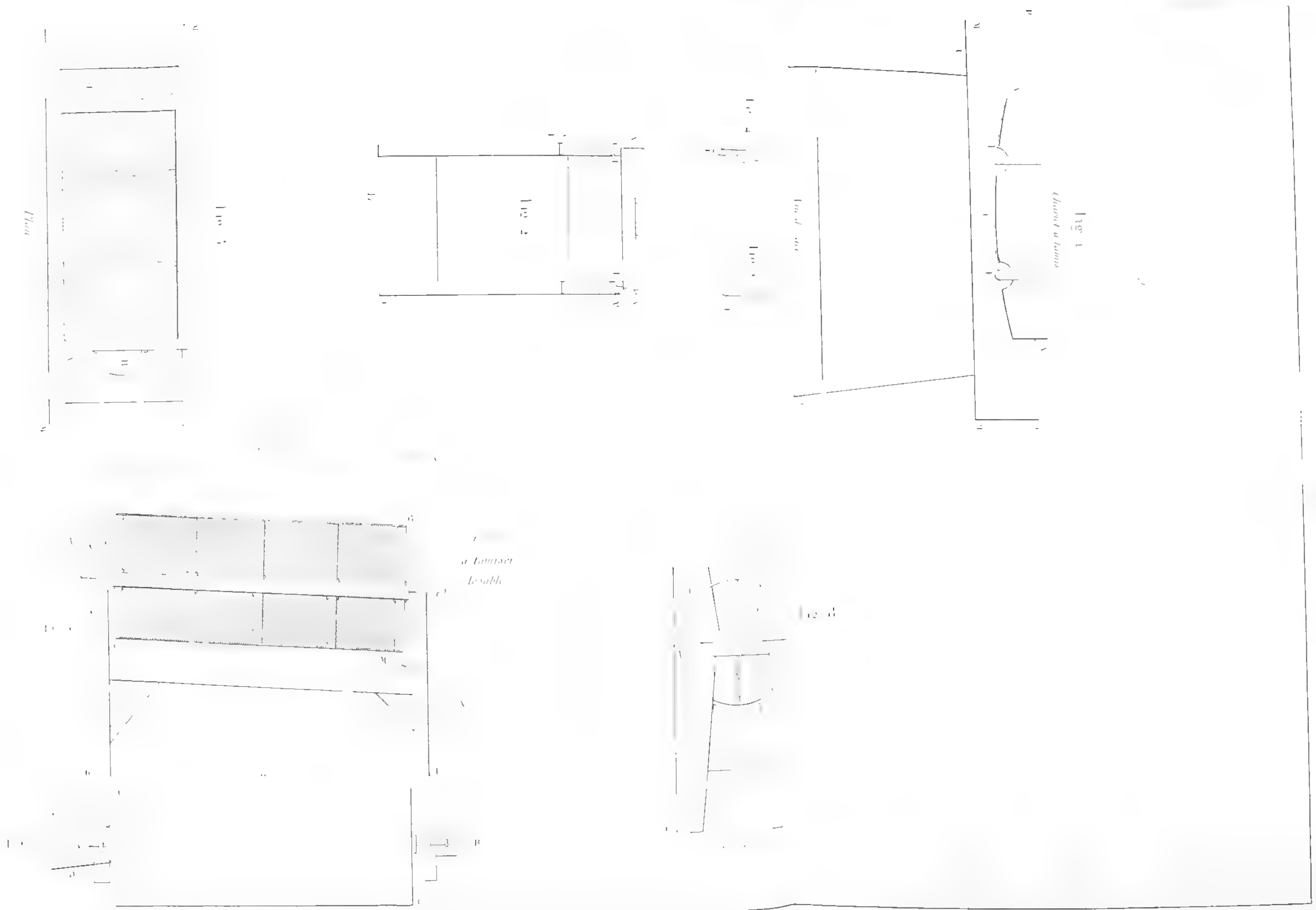
CHAPITRE III.

Fusion de la fonte : coulée des pièces en fer.

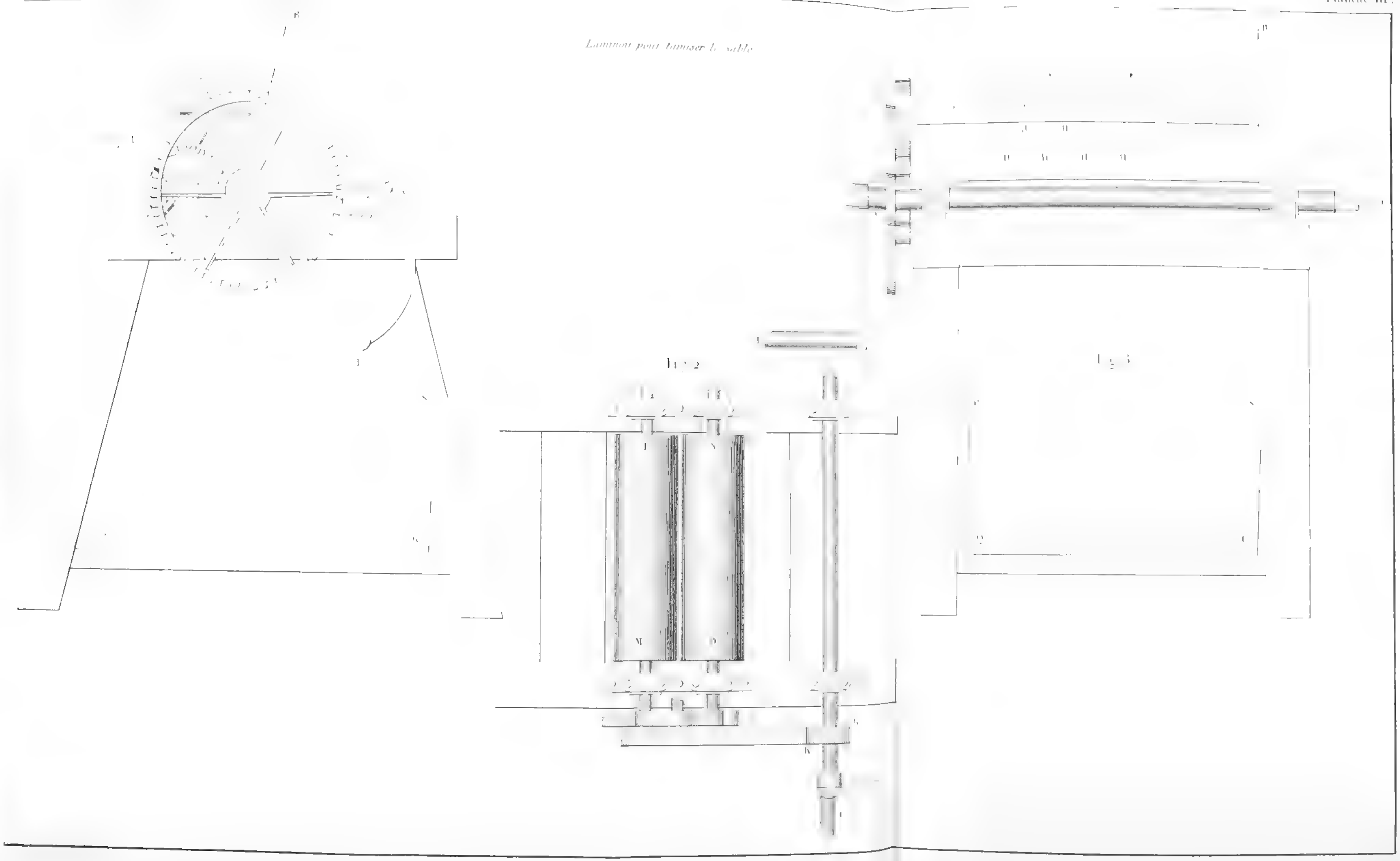
CHAPITRE IV.

Fusion du bronze. Coulée des pièces de bronze.


Étuve pour sécher le sable et les moules &c
Elevation
Fig. 2
Vue du côté I.K
Fig. 3
Coupe sur A.B
Fig. 4
Coupe sur C.D et projection
Fig. 5
Plan $\frac{1}{10}$



Laminoir pour tamiser le sable



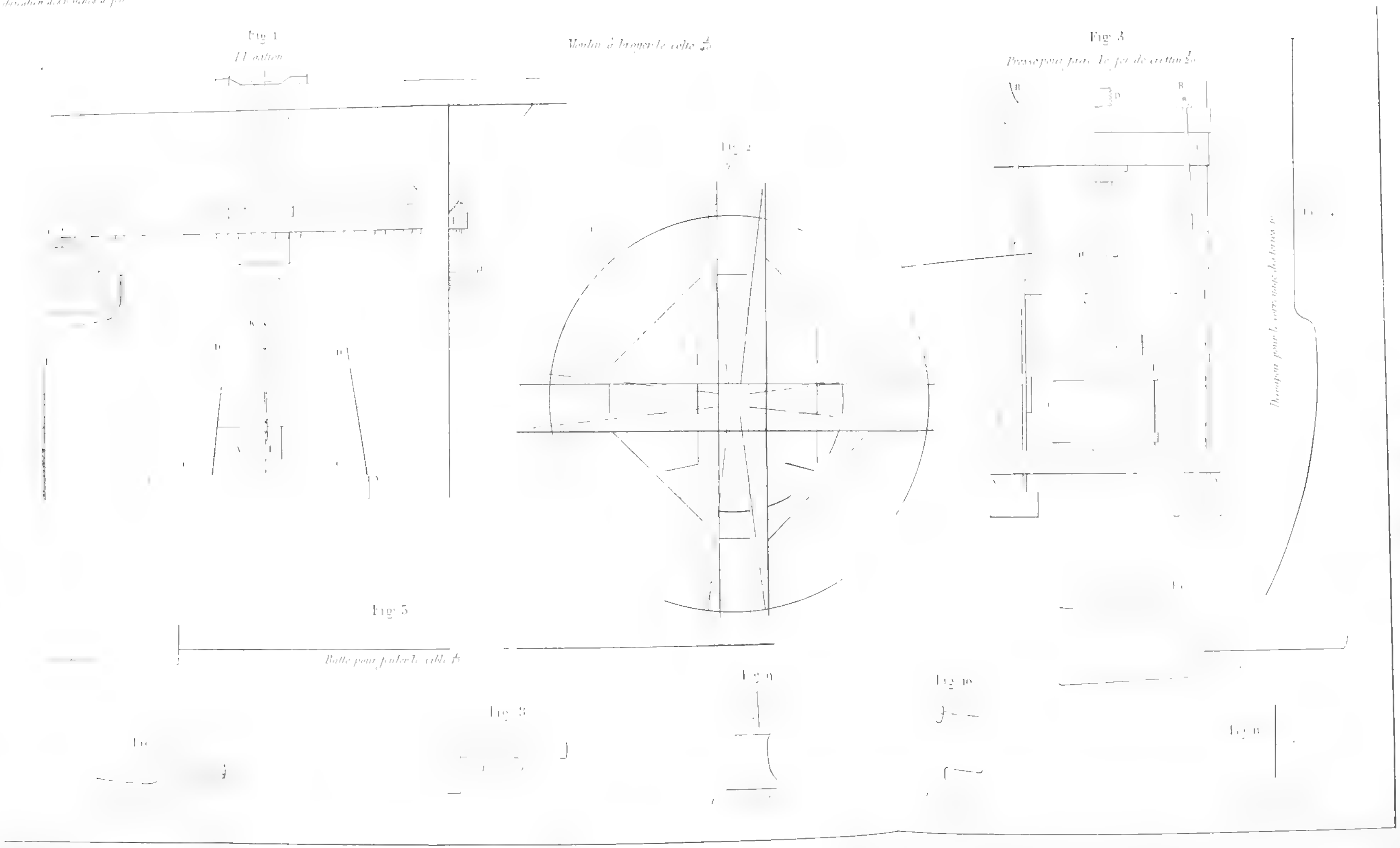


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 5
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10

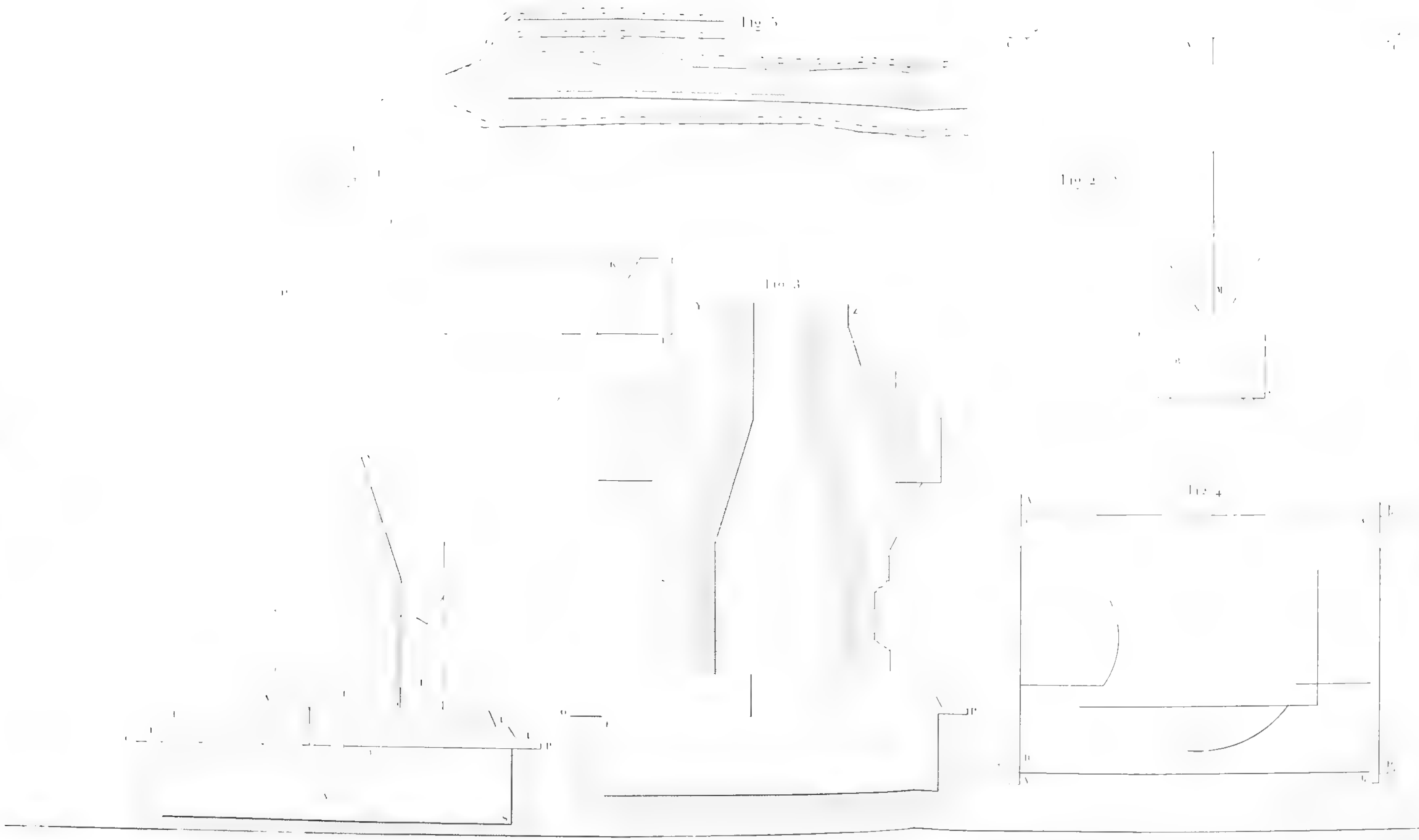
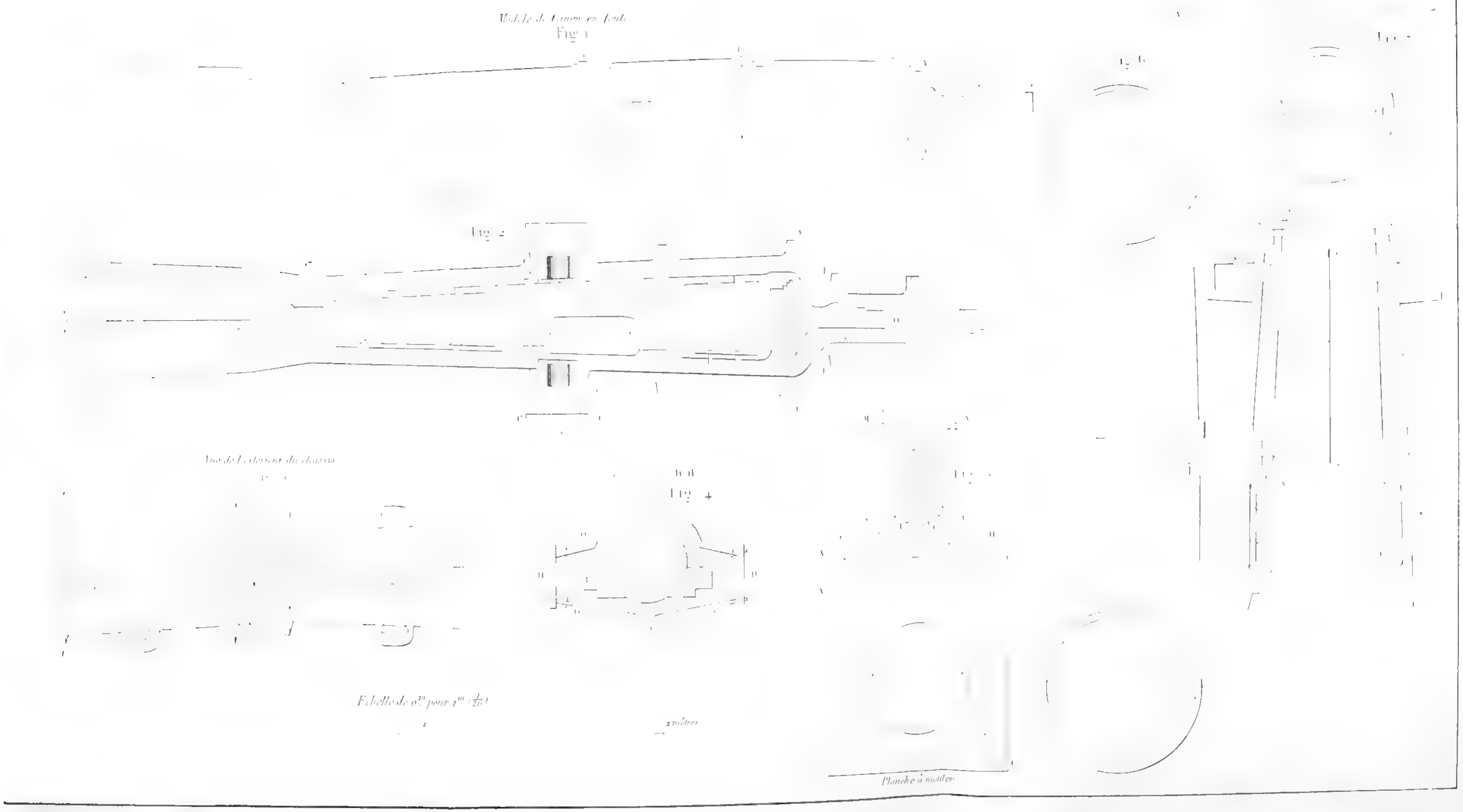


Fig. 5
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4

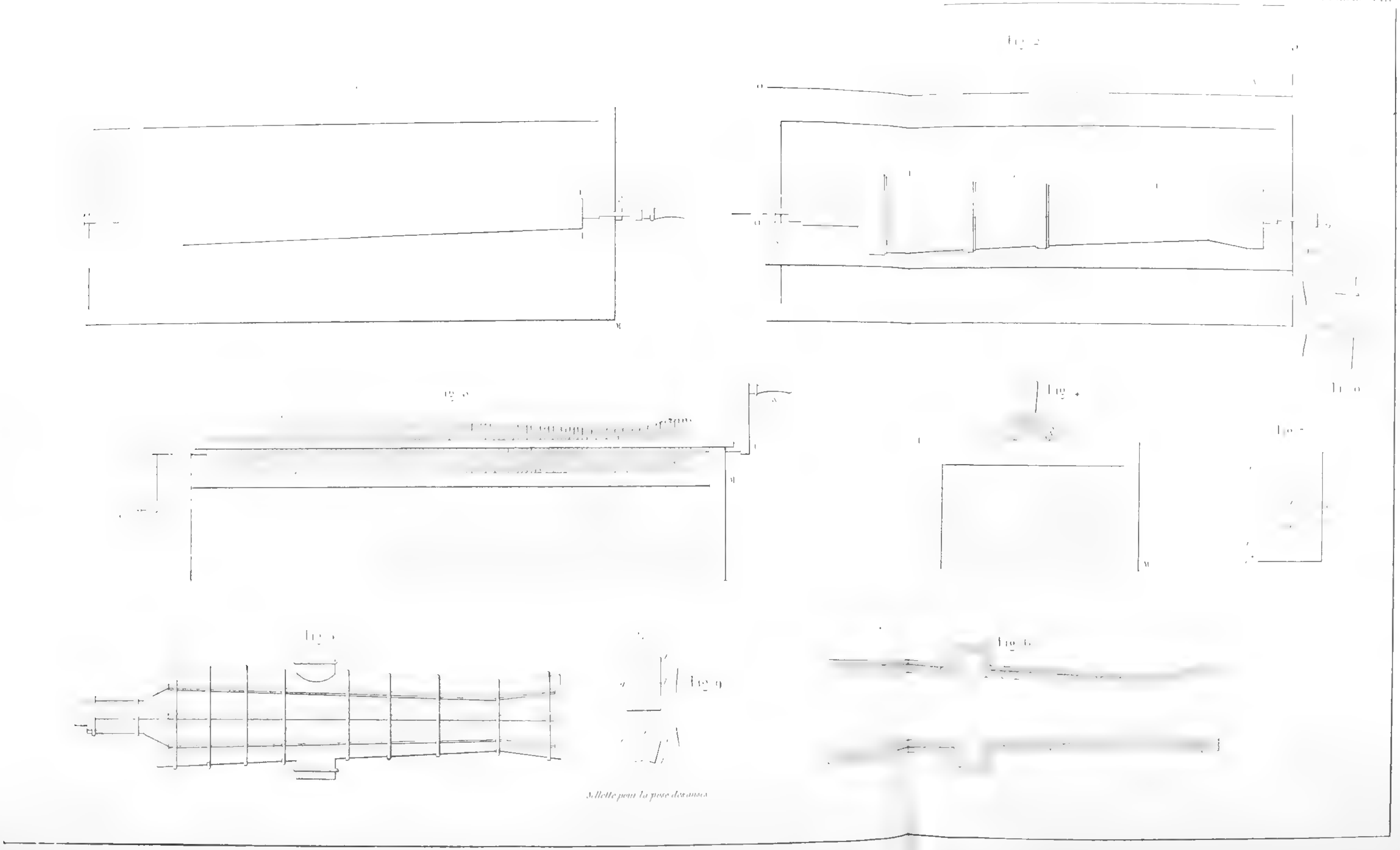
Moulage en sable des canons en fonte de fer



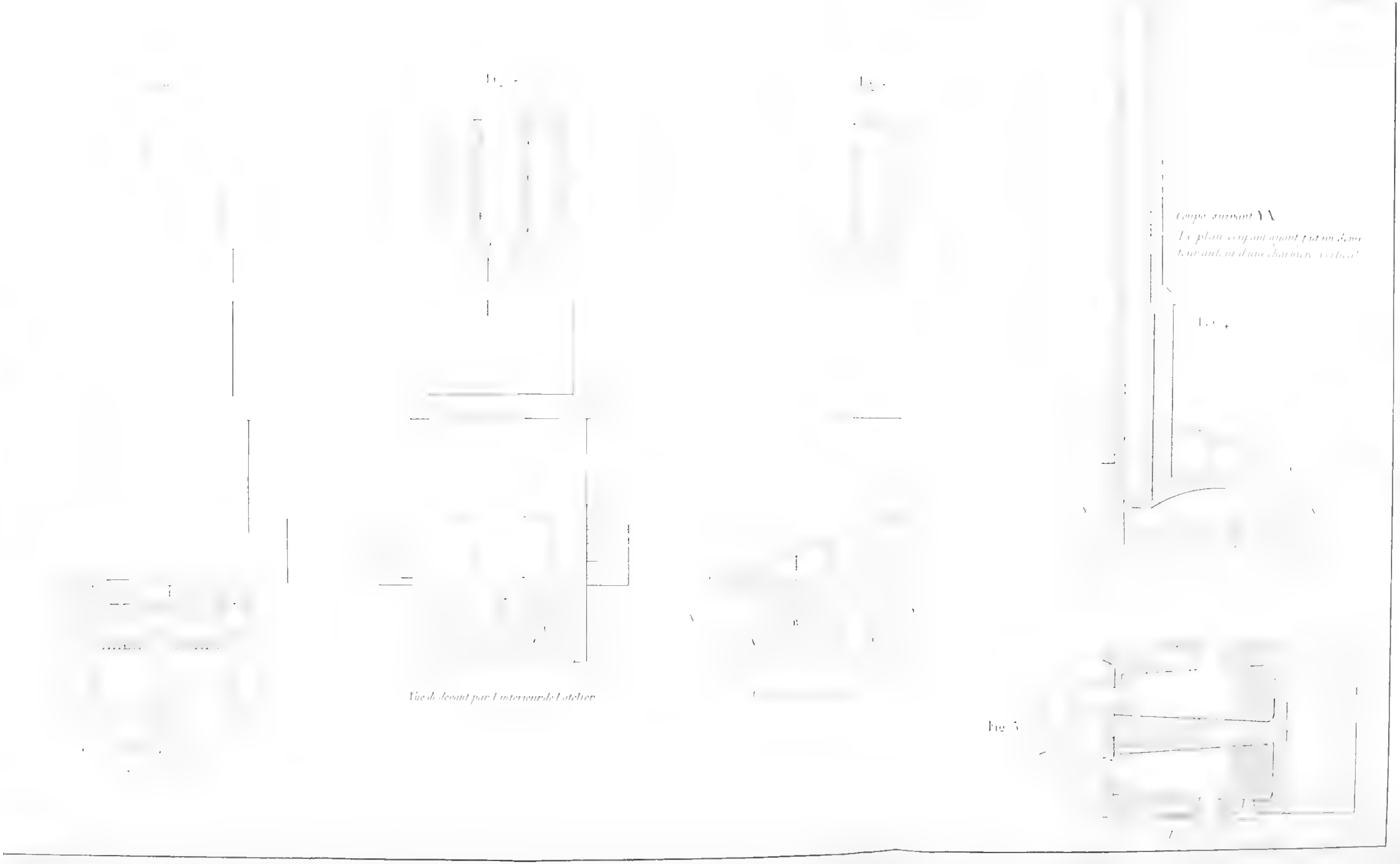
Echelle de 0.m05 pour 1m (1/20)

Fonderie de bouches à feu

Plan



Sellette pour la pose des anses



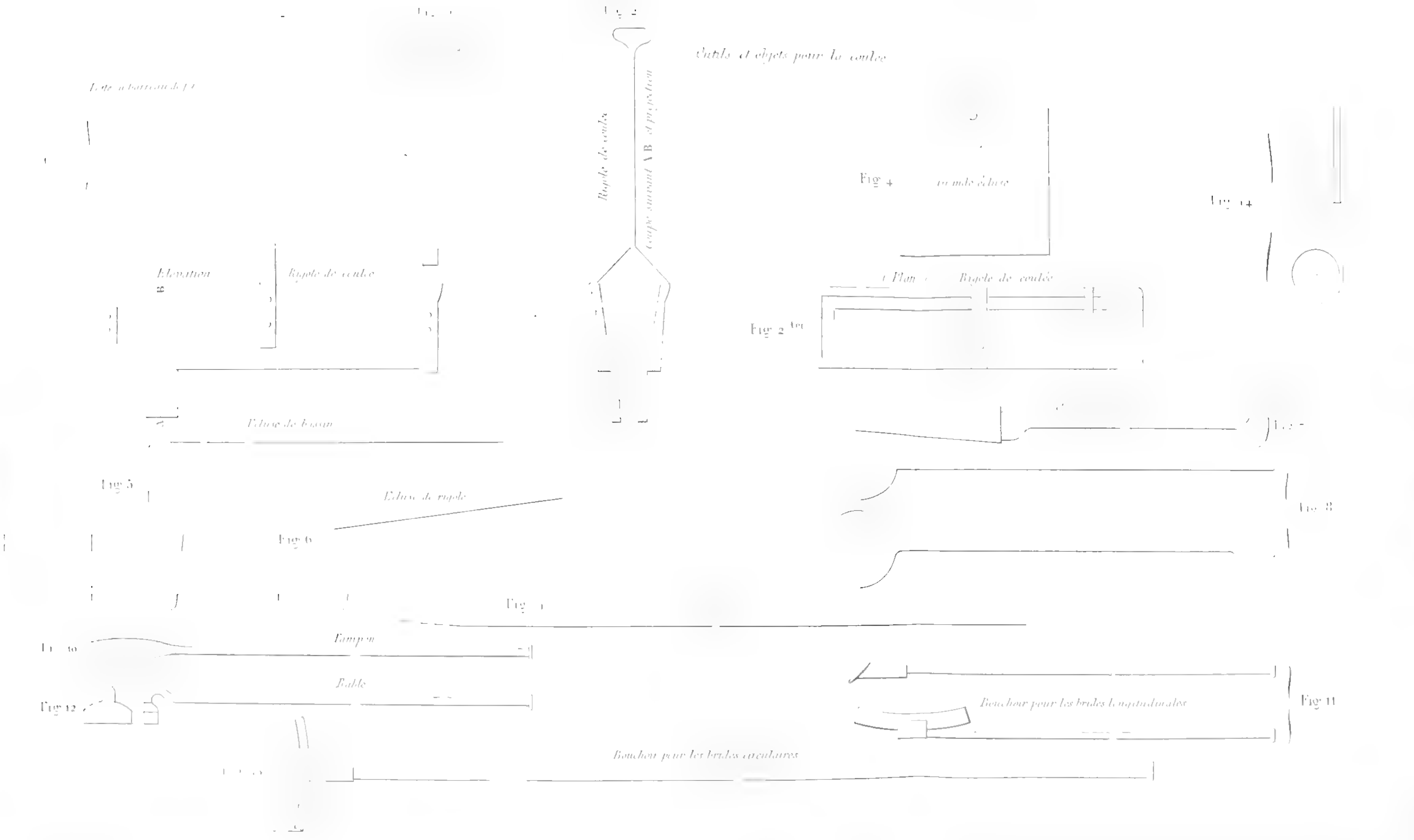
Vue de devant par l'intérieur de l'atelier

Fourneau à réverbère

Coupe

Fig. 1

Plan


Outils et objets pour la coulée
Rigole de coulée
Coupe suivant AB et projection
Fig 4
Fig 14
Elevation
Rigole de coulée
Plan
Rigole de coulée
Fig 2
Eclusc de bassin
Fig 5
Eclusc de rigole
Fig 6
Fig 8
Tampon
Rable
Fig 12
Fig 11
Boucheur pour les brides longitudinales
Boucheur pour les brides circulaires

XI. — *Simplification des éléments de géométrie ;*

PAR

J.-N. Noël,

PROFESSEUR ÉMÉRITE DE L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

Le présent mémoire a pour but : 1° de justifier, par plusieurs développements, les méthodes que j'ai employées en géométrie, afin d'en faciliter l'étude complète, et 2° de résoudre certaines difficultés récentes opposées à ces méthodes. — Voici d'abord le procédé le plus simple et le plus naturel pour établir le principe ou la règle des *variables auxiliaires*, nécessaire à la simplification des éléments de géométrie.

1. Supposons que, dans l'équation finale exacte $a+x=b+y$, les grandeurs a et b restent *constantes* pendant que les termes x et y *varient* en diminuant ensemble, même indéfiniment, sans pouvoir devenir nuls et sans que l'égalité des deux membres cesse d'exister. Il est évident alors que les variables x et y n'ont aucune influence sur cette égalité et pas plus que si ces deux termes n'entraient point dans l'équation proposée, toujours exacte ; ils peuvent donc en disparaître, sans la détruire, et l'on a rigoureusement $a=b$.

Ainsi les termes variables x et y ne sont ici que des *auxiliaires* pour faciliter les raisonnements et la mise en équation. Il en résulte donc ce principe fondamental de la méthode des variables auxiliaires : *Lorsqu'une équation finale exacte renferme deux termes constants et des termes variables, pouvant diminuer ensemble indéfiniment sans que l'égalité des deux membres cesse d'exister, cette égalité subsiste encore en y supprimant les termes variables proposés, bien qu'ils ne soient jamais nuls;* et cela donne ici $a=b$.

2. Maintenant, puisque les termes variables x et y ne sont jamais nuls, il est clair qu'en les négligeant dans $a+x=b+y$, pour

avoir $a = b$, on commet deux erreurs ; *mais ces deux erreurs se compensent ou se détruisent toujours, et il n'y a point d'erreur finale.* On vient de voir, en effet, que, dans l'équation finale ci-dessus, toujours exacte, les termes variables x et y peuvent en disparaître, sans la détruire. Or, cela exige que ces deux termes, qui ne sont jamais nuls, soient toujours égaux entre eux et qu'on ait $x = y$ ou $x - y = 0$. De sorte que l'erreur finale est rigoureusement nulle. — On voit de plus que l'équation finale proposée est la somme des deux $a = b$ et $x = y$.

De même, dans l'équation finale $a - x = b - y$, on a rigoureusement $a = b$ et $x = y$. Pareillement, $a - x = y - b$ donne $a = -b$ et $-x = y$, ou encore $a + b = 0$ et $x + y = 0$.

3. Mais si, dans $a = b + cx$, les grandeurs a, b, c restent constantes pendant que la variable x diminue ou augmente, x pouvant devenir infiniment petite ou infinie, sans jamais devenir nulle et sans que l'égalité des deux membres cesse d'exister, c'est une preuve que l'équation proposée est absolument indépendante du terme variable cx, lequel est ici *auxiliaire ;* et par suite on a rigoureusement $a = b$. D'ailleurs, si le terme variable cx devait être conservé dans l'équation $a = b + cx$, toujours exacte, la grandeur constante a serait toujours variable ; chose absurde. Le terme cx disparaît donc de l'équation, non parce qu'il est nul, mais uniquement parce qu'il est variable, et l'on aura toujours $a = b$, *sans aucune erreur finale.*

Par exemple, si de l'expression $b - cx$ de la somme des n premiers termes d'une progression géométrique, dont la raison diffère de l'unité, on veut déduire la *génératrice* constante, alors désignée par a ; il est clair que, dans l'équation finale $a = b - cx$, toujours exacte, les nombres a, b, c sont constants, mais x varie avec n, sans jamais devenir nul et sans que l'égalité des deux membres cesse d'exister : donc $a = b$. — Il est évident, en effet, que la génératrice constante d'une progression géométrique ne saurait dépendre aucunement du nombre variable n de termes calculés dans son développement. Il en est de même de la génératrice constante de toute *série récurrente* du second ordre, du troisième, etc.

Observons toutefois que, dans la démonstration du principe fondamental de la *méthode des coefficients indéterminés*, où la variable x n'est jamais nulle, le coefficient c est fonction de x, et le terme cx disparait parce que $c = 0$; d'où $a = b$.

4. Reprenons l'équation finale, toujours exacte, $a + x = b + y$,

dans laquelle les grandeurs a et b sont constantes pendant que les variables x et y diminuent ensemble sans pouvoir devenir nulles. Cette équation finale est identique avec celle-ci :

$$a = b + y - x;$$

et il s'agit de démontrer que $y - x = 0$. Supposons que la différence $y - x$ ne soit pas nulle : dans ce cas, elle est nécessairement variable, positive ou négative, comme étant toujours moindre que l'un de ses deux termes variables. Si cette raison ne suffit pas, soit posé $x = vy$, d'où $y - x = y(1 - v)$: il est évident alors que la différence $y - x$ varie avec le facteur y. Cette différence variable doit donc disparaître de l'équation $a = b + y - x$: autrement, la grandeur constante a serait toujours variable ; chose impossible. On a donc nécessairement $a = b$: c'est le principe des variables, lequel ne suppose pas que ces variables diminuent indéfiniment ensemble. Et puisque l'équation ci-dessus est toujours exacte, il en résulte $y - x = 0$ ou $x = y$: c'est la compensation des erreurs x et y.

5. L'équation finale, toujours exacte, savoir $a + x = b + y$, est aussi identique avec celle-ci : $a - b = y - x$.

Le premier membre est une grandeur constante ; il en est donc de même du second $y - x$, et pour cela *il faut que ce second membre soit nul* et qu'on ait $y - x = 0$. Ce second membre, en effet, étant identique avec le produit $y(1 - v)$, ne peut être constant que quand il est nul, c'est-à-dire que quand $v = 1$ et $y = x$; d'où $y - x = 0$. — D'ailleurs, si la différence $y - x$ pouvait avoir une valeur constante d, si petite qu'elle fût au-dessus de zéro, on ne pourrait point supposer chacune des variables x et y plus petite que d ; ce qui est contre l'hypothèse que ces deux variables peuvent diminuer ensemble indéfiniment. Donc enfin la différence $y - x$ ne peut être constante que quand elle est nulle ; d'où il vient $y - x = 0$ et $a - b = 0$ ou $x = y$ et $a = b$.

6. Ce dernier raisonnement est analogue à celui de Francœur (Cours de Mathématiques, n° 113). « Cette démonstration paraît » plus rigoureuse que la précédente (n° 4) : elle a cependant l'in» convénient très-grave de reposer à la fois sur la réduction à l'ab» surde et sur les infiniment petits. » (*Revue pédagogique*, p. 74, mars 1855). — L'inconvénient très-grave est de chercher à exclure des raisonnements, les deux genres d'infinis qui en sont les éléments logiques indispensables, et qu'on ne cache même pas entièrement par des non-sens ou de longs et obscurs détours. — Pourquoi

cette démonstration paraît-elle plus rigoureuse que la précédente, indiquée à la p. 74 ci-dessus? C'est que cette dernière est incomplète et que « si la différence $y-x$ était variable, ce ne serait » point parce qu'elle est moindre que l'un de ses termes varia- » bles. » (*Revue*, p. 22). — J'ai toujours cru cette raison suffisante; et l'on vient de démontrer (n^{os} 4 et 5) que la différence $y-x$ n'est constante que quand elle est nulle. Or, si l'on veut que cette différence soit toujours constante, comme dans les raisonnements (*Revue*, p. 73, 74 et p. 221 et 222) et si l'on prétend que ces raisonnements démontrent que $y-x=0$, on reconnaîtra du moins que cette démonstration est fort obscure. Il faut remarquer d'ailleurs que les variables ne peuvent diminuer indéfiniment ensemble que par voie de division.—Nous verrons plus bas d'autres objections opposées, dans la *Revue* citée, aux raisonnements n^{os} 3 et 4, objections qui ne sont pas plus fondées que les précédentes; et celles-ci n'atteignent pas les raisonnements n^{os} 1 et 2.

7. Maintenant, pour simplifier le plus possible la géométrie élémentaire, en y rendant plus complètes la clarté et l'exactitude logique qui distinguent si éminemment les théories de cette science importante, j'ai reconnu depuis longtemps qu'il fallait d'abord modifier plusieurs définitions et tâcher de donner à celles-ci toute l'évidence et toute la précision de véritables axiomes; ce qui est très-possible pour la droite, la courbe, le plan, l'angle, le rapport, etc., en définissant chaque fois d'après la *propriété caractéristique*, évidente ou rendue telle, par la *génération* de la chose définie. C'est ainsi, par exemple, qu'il faut appeler *ligne courbe*, ou simplement *courbe*, toute ligne qui n'est ni droite ni composée de droites visibles et appréciables; ou bien encore, toute ligne n'ayant aucune partie visible et appréciable qui soit droite. — La ligne *mixte* est composée de parties, droites et courbes contigües.

8. Pour établir une théorie claire, simple et rigoureuse des parallèles, je n'ai trouvé d'autres moyens que de *perfectionner* la définition obscure et incomplète de l'angle, en l'énonçant en termes clairs, précis et parfaitement intelligibles à tous les élèves d'après les notions déjà acquises. Voici cet énoncé, un peu développé:

On appelle *angle* la portion plane dont deux droites *illimitées* ou *indéfinies*, partant d'un même point, sont *écartées* l'une de l'autre, quant à leur *position* sur le plan. Ce point est le *sommet* de l'angle, et les deux droites en sont les *côtés*.

Cette définition caractérise clairement et fait bien connaître tout angle tracé sur le plan : elle exprime que l'angle est une figure plane rectiligne ouverte, dont la *grandeur* est considérée seulement par rapport à l'ouverture, à l'écartement ou à la position relative des deux côtés autour du sommet. Ces deux côtés ont donc des longueurs *arbitraires* ou indéfinies; *et on peut les prolonger l'un et l'autre autant qu'on le veut, sans que l'angle cesse d'être le même.* De sorte que l'angle est complètement déterminé dès que le sommet et un point sur chaque côté sont donnés. — On voit aussi que *plus un angle est grand, plus sa surface indéfinie est grande elle-même,* et la réciproque est vraie évidemment.

L'angle plan est nul dès que ses deux côtés coïncident; car alors ces deux côtés ne sont point écartés l'un de l'autre. Supposons que le côté AB restant fixe, le côté AC, d'abord sur AB, s'en *écarte* ensuite en tournant sur le plan autour du sommet fixe A. Dans ce mouvement, le côté AC décrit successivement une infinité d'angles qui croissent ou augmentent par angles ou écarts *infiniment petits*, jusqu'à ce que AC, s'arrêtant dans une seconde position, ait décrit l'angle cherché CAB. Celui-ci est donc bien la portion plane dont deux droites illimitées ou indéfinies AB, AC, partant d'un même point A, sont écartées l'une de l'autre, quant à leur position sur le plan.

Cette définition de l'angle le fait connaitre tel qu'il est réellement. Tous les mots y sont nécessaires; et l'omission d'un seul terme, bien qu'on puisse aisément sous-entendre l'idée qu'il exprime, rendrait la définition incomplète et par conséquent obscure.

Observons encore que si le côté AC, tournant autour du point fixe A, revient sur la position AB, qu'il a d'abord quittée en s'en *écartant* de plus en plus, ce côté AC a fait une *révolution* autour du point A et a décrit l'*espace angulaire* plan, lequel est évidemment le même autour de chaque point du plan proposé. D'ailleurs, chaque quart de révolution de AC décrit un angle appelé *droit;* donc *tous les angles droits séparés sont égaux entre eux,* comme étant les quarts respectifs d'espaces plans angulaires égaux.

9. La définition perfectionnée de l'angle plan est critiquée dans la *Rev. pédagogique;* on lit, p. 225 : « Cette définition suppose une chose » très-contestable, savoir que l'angle est une surface et elle renferme » une idée surabondante, celle de l'infini. » Plus loin on affirme que « l'idée d'angle n'a rien de commun avec l'idée de surface. » — On sait cependant que deux droites, issues d'un même point, sont toujours dans un même plan; elles ne peuvent donc présenter à

l'œil que la portion plane, ouverte et indéfinie, comprise entre elles et exprimant leur *écartement* ou la *position* de l'une à l'égard de l'autre.

L'angle ne serait pas clairement désigné et l'on omettrait plusieurs des circonstances qui le caractérisent, si l'on disait (*Revue* p. 225) : « *L'angle est l'ouverture formée sur un plan par deux* » *droites qui se rencontrent.* » — On admettrait donc alors que cette ouverture est plane. Et comme deux droites qui se rencontrent forment plusieurs ouvertures sur le plan, la clarté et la précision exigent que l'on désigne celle de ces ouvertures que l'on considère, en disant l'*ouverture de deux droites indéfinies, partant d'un même point.* D'ailleurs, les mots *ouverture* et *écartement* de deux droites signifient ici la même chose. — L'ouverture du compas ne désigne pas un angle, mais bien une droite donnée. — Si les mots *direction* et *droite* n'expriment pas la même idée, la *direction d'une droite* ne peut signifier que la *position de cette droite ;* et cette position est déterminée quand deux points de la droite sont donnés, ainsi qu'on le démontre aisément.

Il importe beaucoup, à la facilité et à la sûreté des déductions logiques en géométrie, que les notions premières y soient développées et approfondies, du moins par le professeur, et résumées ensuite par de *bonnes* définitions, où l'on mentionne, en termes clairs et précis, toutes les circonstances qui caractérisent les faits, d'ailleurs évidents ou démontrés, que ces définitions énoncent. Si l'on dit que « *l'angle est une figure de deux côtés,* » on ne le fait pas connaître complètement, parce qu'on omet plusieurs des circonstances qui le caractérisent : il existe des figures planes de deux côtés qui ne sont pas des angles.

10. *Lorsque, dans le même plan, deux droites* AB *et* CD, *se coupant au point* O, *rencontrent une même troisième* CAE, *l'angle externe* EAB *est plus grand que l'angle interne correspondant* ECD. (Les figures sont clairement indiquées par les grandes lettres ; mais il est bon de les tracer d'abord).

Les deux surfaces indéfinies DOB et AOC sont égales, comme opposées au sommet O. De plus, la surface finie et limitée OAC est une partie de la seconde AOC; elle est donc plus petite que la première DOB. Cela posé, les deux surfaces indéfinies EAB et ECD ont la partie commune EAOD; mais la partie restante DOB de la première est plus grande que la partie restante OAC de la seconde. Donc la première surface EAB est plus grande que la seconde

ECD : donc aussi l'angle externe EAB est plus grand que l'angle interne correspondant ECD. Ce qu'il fallait démontrer.

Ce théorème fondamental a pour *réciproque* le fameux *postulatum* d'Euclide, servant à démontrer, de la manière la plus simple, les propriétés des droites *parallèles*. Et quant au théorème *direct* ci-dessus, il démontre toutes les circonstances où deux droites, situées dans le même plan, sont parallèles, c'est-à-dire ne peuvent jamais se rencontrer, quelque loin qu'on les suppose prolongées l'une et l'autre dans les deux sens. C'est ainsi, par exemple, que :

Dans le même plan, deux droites AB *et* CD *sont parallèles lorsque, coupant en* G *et* H *une même troisième* EGHF, *elles font avec celle-ci les deux angles correspondants ou externe-interne* EGB *et* EHD *égaux entre eux.* (Ces deux angles pourraient être droits).

D'abord, comme les angles opposés au sommet sont égaux, on voit que les deux angles correspondants ou interne-externe AGF et CHF sont aussi égaux entre eux. Ensuite, si GB et HD suffisamment prolongées, pouvaient se rencontrer en un point O, l'angle externe EGB serait plus grand que l'angle interne EHD; contrairement à l'hypothèse. On verra de même que GA et HC, prolongées, ne sauraient se rencontrer. Donc les deux droites AB et CD, prolongées indéfiniment dans les deux sens, ne se rencontrent point; donc elles sont parallèles. Ce qu'il fallait démontrer.

De là résulte immédiatement la démonstration de chacune des autres propositions relatives au parallélisme des deux droites AB et CD.

Observons que l'angle EGB étant égal à l'angle EHD, la surface indéfinie EGB est aussi égale à la surface indéfinie EHD. On ne peut donc pas dire, malgré l'apparence, que la *première surface est une partie de la seconde ;* d'abord parce que ce serait dire que l'angle EGB est plus petit que EHD, contrairement à l'hypothèse; et ensuite, parce que si la surface indéfinie EGB était une partie de la surface indéfinie EHD, la seconde partie serait la surface indéfinie BGHD; celle-ci devrait donc être de même espèce, chose absurde, puisque ce n'est pas la surface indéfinie d'un angle. Il est évident, en effet, que les deux parallèles GB et HD ne pouvant jamais se rencontrer, pas même à l'infini, ne sont côtés d'aucun angle; vu que cet angle n'aurait point de sommet. Il n'y a donc ici aucun *écart ;* et voilà pourquoi l'on dit que les deux parallèles GB et HD font entre elles un *angle nul :* celui-ci est retranché de l'angle EHD par la droite GB ; il n'est donc pas étonnant que l'angle restant soit égal à l'angle proposé. — Ainsi on ne prouve pas que l'*angle n'est point une surface*, en disant que si cela était « *la partie* EGB *serait égale au tout* EHD ; » vu que la surface EGB n'est pas une partie de EHD.

11. Venons maintenant au théorème, *postulatum* d'Euclide, savoir : *Si dans le même plan, l'angle externe* EAB *est plus grand et plus ouvert que l'angle interne correspondant* ECD ; *je dis que les deux côtés non communs* AB *et* CD *finissent toujours par se couper, étant suffisamment prolongés.*

D'abord, en prolongeant les côtés AB et CD autant qu'on le veut, les deux angles EAB et ECD restent absolument les mêmes. Ensuite, puisque l'angle EAB est plus grand que l'angle ECD, la surface indéfinie EAB est aussi plus grande que la surface indéfinie ECD, et cela uniquement parce qu'elle est plus ouverte que celle-ci. De plus, bien que la surface indéfinie EAB n'ait encore qu'une partie tracée dans la surface plus petite ECD, il est clair qu'elle ne peut rester contenue dans cette dernière et qu'en prolongeant suffisamment les côtés, elle en sortira tôt ou tard. Or, il est évident que la surface EAB ne peut sortir de la surface ECD ni par le côté CE, limite commune, ni dans le sens indéfini des ouvertures ; donc elle en sortira par les deux côtés non communs AB et CD, lesquels se couperont nécessairement en un point, fût-il même situé à l'infini.

Cette démonstration très-simple du théorème, postulatum d'Euclide, étant une conséquence rigoureuse des définitions, est comme celles-ci, d'une exactitude complète et d'une clarté comparable à celle des axiomes. Ce théorème simplifie beaucoup les démonstrations des propriétés des parallèles. Euclide ne pouvait démontrer le théorème ci-dessus ; car sa définition de l'angle ne lui en faisait pas connaître la double propriété caractéristique, d'être une portion plane indéfinie et d'être d'autant plus grand que l'*écart* et l'*ouverture* des deux côtés sont plus grands eux-mêmes. Ce n'est sans doute qu'en désespoir de cause qu'Euclide fit de ce théorème un *postulat*, d'ailleurs difficile à accorder, bien qu'il ait des caractères d'évidence, ainsi que celui plus simple de Lacroix.

Ce dernier est justifié par l'auteur en disant : « La notion de la
» ligne droite ou la sensation qui nous fait connaître si un aligne-
» ment est bien pris, montre même l'endroit où l'oblique rencon-
» tre la perpendiculaire. » (Essai sur l'enseignement).

12. Dans la *Revue pédagogique* de 1855, où, ainsi que je l'ai

fait dans le *Résumé des méthodes élémentaires*, on reconnaît la nécessité de démontrer le postulat d'Euclide, on dit (p. 76) : « Quel-
» ques auteurs ont cru écarter la difficulté en perfectionnant,
» comme ils disent, la définition de l'angle. La démonstration fon-
» damentale de la théorie des parallèles, qui est sortie de ce pré-
» tendu perfectionnement, consiste à affirmer que les côtés des
» angles interne-externe doivent se rencontrer, parce que l'angle
» externe étant plus grand que son correspondant, ne peut rester
» renfermé dans celui-ci. Ce raisonnement, qui fait voir au simple
» coup-d'œil que les lignes doivent se rencontrer dans la figure
» qu'on a sous les yeux, est sans portée scientifique pour la dé-
» monstration du théorème dont il s'agit : il revient, quant au fond,
» à cette théorie des sensations que Lacroix aurait voulu appliquer
» à la géométrie. »

D'abord la démonstration ci-dessus n'exige pas que la figure proposée soit sous les yeux, ce qui d'ailleurs n'est possible, le plus souvent, que par la figure *semblable* ou supposée telle, mais suffisante pour diriger les raisonnements ou les rendre plus clairs et plus faciles. Ensuite quand même la figure serait sous les yeux pour y voir, au simple coup-d'œil, l'endroit où les côtés non communs se rencontrent, cet endroit serait absolument invisible, s'il devait être fort éloigné. Il y aurait donc alors doute sur l'existence de l'intersection; et c'est alors que la démonstration ci-dessus devient indispensable. Il en résulte qu'il y aura toujours intersection; mais que le point, où les deux côtés vont se couper, est situé à l'infini quand l'angle externe surpasse infiniment peu l'angle interne correspondant.

13. L'auteur de la critique précédente attaque de nouveau la démonstration ci-dessus dans la *Revue*, déjà citée plusieurs fois. — Je ferai d'abord observer que si les élèves connaissent la *véritable* définition de l'angle, ils ne peuvent tirer aucune des conclusions indiquées 1°, p. 224.

Ensuite je remarque, pour 2°, que les partisans et les non-partisans de l'infini se trompent évidemment lorsqu'ils admettent que :
« *se rencontrer à l'infini et être parallèles* sont deux locutions expri-
» mant la même chose, savoir : *qu'il n'y a point de rencontre.* » —
L'absurdité est flagrante : si les deux droites se rencontrent à l'infini et y forment par conséquent un angle infiniment petit, elles ne sont donc point partout également distantes, et ne peuvent être parallèles. — Observons toutefois que pour certaines applications géo-

métriques, on peut, sans erreur finale appréciable, regarder l'angle infiniment petit comme nul et les deux droites comme parallèles; mais ces deux droites ne se rencontrent pas moins en un point situé à l'infini, et partant ne sont point parallèles.

Dans 3°, on dit : « La grandeur de l'angle externe EAB et son » sommet A ont seuls servi à déterminer la droite AB. Ces deux » conditions et la possibilité de prolonger la droite qu'elles déter- » minent, sont les seules bases sur lesquelles on puisse établir la » démonstration du théorème. » — Ce sont en effet les seules bases employées. Mais il y a contradiction à dire ensuite : « La grandeur » de l'angle EAB *dans le sens de l'ouverture*, étant sans influence » sur la direction (la position) du côté AB, est également sans in- » fluence sur le point de rencontre et ne peut, par conséquent, servir » aucunement à démontrer que ce point existe. » — La contradiction est ici manifeste; car la *grandeur* de l'angle n'a pas lieu dans le sens de l'ouverture ou du prolongement des côtés, comme on le suppose, contrairement à la définition. Que signifie donc la conclusion énoncée, p. 225, pour infirmer la démonstration plus haut? Rien, absolument rien; et cette démonstration n'en reste pas moins très-claire, très-simple et rigoureuse.

14. On connaît les travaux de Legendre pour démontrer complètement la théorie des parallèles; ce à quoi il n'est parvenu que dans la note II de ses éléments de géométrie, 12^{me} édition. Il y regarde l'angle comme une portion ouverte du plan indéfini, et, après avoir démontré fort simplement le postulat de Lacroix, il ajoute, p. 280 : « Nous laissons aux géomètres à décider si cette démons- » tration ne mériterait pas d'être admise dans les éléments, de pré- » férence à toute autre, pour rétablir la marche d'Euclide devenue » entièrement rigoureuse par la suppression de son postulatum. »

15. Lorsqu'on définit l'angle « *une figure de deux côtés*, » il y a de graves inconvénients à fonder la théorie des parallèles sur un postulat, dont l'évidence complète peut toujours être contestée, et lequel, par suite, rend douteuse l'exactitude de cette théorie : il n'y apporte même aucune simplification. Car, à moins d'agir par voie d'autorité, il faudra bien quelques explications aux élèves qui n'auraient pu acquérir la certitude que : « *Par un point donné, on ne » peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée;* » et ces explications ne peuvent être plus courtes, pour devenir efficaces, que la démonstration elle-même, d'ailleurs fort simple. Et remarquons que, supprimer une démonstration nécessaire, ce n'est pas simplifier, au contraire.

Si le postulat ci-dessus, proposé par M. Gergonne, peut être regardé comme un axiome, il faudra aussi regarder comme tel la proposition, au moins aussi évidente, savoir : *d'un point situé hors d'une droite, on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire à cette droite.* Cependant on juge nécessaire de démontrer cette dernière proposition ; il faut donc aussi démontrer l'autre.

C'est faute d'une bonne définition de l'angle plan qu'on a dû recourir à des *postulats* pour établir la théorie des parallèles. Le précédent, ainsi que ceux de Lacroix, d'Euclide et même de Francœur, doivent être démontrés, bien qu'ils aient des caractères d'évidence qui les ont fait accepter par différents géomètres, préférant ainsi une simplification fort douteuse à une certitude complète dont ils n'ont pas tous les éléments positifs.

16. Legendre a basé la théorie des parallèles sur le théorème de la somme des trois angles de tout triangle rectiligne ; mais il n'est point parvenu à démontrer simplement et complètement ce théorème. Toutes ses démonstrations sont longues et difficiles à saisir ; la plus simple (12me édit. des élém. de géométrie) ne démontre rien, parce qu'elle est basée sur l'hypothèse absurde que si un angle est infiniment petit, un point quelconque de l'un de ses deux côtés se trouve sur l'autre côté. — Dans la *Revue pédagogique*, p. 77, Mr Batteux modifie cette démonstration et la rend rigoureusement exacte à l'aide du principe de la méthode des variables auxiliaires. — Voici, je pense, la modification la plus simple et où il est facile de tracer la figure, s'il est nécessaire. (Voyez cette figure dans Legendre).

Soit ABC un triangle rectiligne quelconque dont les angles sont désignés par A, B, C, l'angle B étant aigu et le plus petit des trois. Soit I le milieu du côté BC : prolongez AI en C′ et AB en B′ de telle sorte que AC′ = AB et AB′ = 2AI. Si vous joignez B′C′, vous formerez ainsi le triangle AB′C′ dont les angles seront désignés par A′, B′, C′. Soit K le milieu de AB′, d'où AK = AI, et joignez C′K. Les deux triangles ABI et AKC′ ont l'angle commun C′AB ou A′ ; ils ont le côté AB = AC′ et le côté AI = AK : donc ces deux triangles sont égaux et l'on a BI = KC′, l'angle AC′K = B et l'angle AKC′ = AIB.

Dans les deux triangles AIC et KB′C′, les deux angles AIC et C′KB′ sont égaux, comme suppléments respectifs de deux angles égaux AIB et AKC′. D'ailleurs le côté AI = AK = KB′ et le côté

$IC = IB = KC'$. Donc les deux triangles AIC et $KB'C'$ sont égaux; d'où l'angle $KC'B' = C$ et l'angle $IAC = B'$.

On voit que l'angle $A = A' + B'$ et que $B + C = C'$; d'où il vient $A + B + C = A' + B' + C'$. La somme des trois angles reste donc la même en passant du triangle ABC au triangle $AB'C'$, puis de celui-ci à un troisième triangle, construit de la même manière, de ce troisième à un quatrième, et ainsi indéfiniment.

Soit S la somme constante des trois angles de chaque triangle, soit D l'angle droit et soient désignés par x et x' les angles *extérieurs* adjacents aux angles C et C' : on a donc le système d'égalités

$$S = A + B + C, \qquad S = A' + B' + C',$$
$$C + x = 2D. \qquad C' + x' = 2D.$$

Ajoutant membre à membre les deux égalités qui se correspondent, puis supprimant les termes communs aux deux membres, on trouve

$$S + x = 2D + A + B, \ldots. \quad (1)$$
$$S + x' = 2D + A' + B' \ldots. \quad (2)$$

A cause de $C' > C$, il est clair, au contraire, que $x' < x$ et que $A' + B' < A + B$. L'équation (2) n'est donc que l'équation (1) où x et $A + B$ diminuent ensemble. On verra de même que les quantités x et $A + B$ diminuent en passant du second triangle au troisième, de celui-ci au quatrième, etc. Ainsi, dans l'équation (1), les deux quantités S et 2D restent constantes pendant que les deux variables x et $A + B$ diminuent ensemble indéfiniment, sans jamais pouvoir devenir nulles et sans que l'égalité de deux membres cesse d'exister, absolument comme si ces deux variables n'entraient point dans l'équation proposée (1), toujours exacte. On a donc nécessairement, comme il fallait le démontrer, $S = 2D$ ou $A + B + C = 2D$; et il en résulte $x = A + B$.

Par cette belle application de la méthode des variables, la théorie des parallèles de Legendre devient rigoureuse, mais elle reste encore fort compliquée. D'ailleurs, toutes les théories des parallèles ne sont générales et complètes que par l'emploi, du moins implicite, des grandeurs infinitésimales. Par exemple, si l'angle externe surpasse infiniment peu l'angle interne correspondant, il s'en suit que la somme des deux angles intérieurs, d'un même côté de la sécante, est surpassée par deux angles droits d'un angle a infiniment petit et par conséquent *inexprimable en degrés*. Or, pour que la démonstration de Legendre (Liv. I, prop. XXIII) soit générale et complète, elle doit encore s'appliquer à ce cas. Il faut donc alors concevoir une infinité de bissections successives d'angles pour que la dernière droite de division tombe dans l'angle a infiniment petit; d'où résulte alors la certitude que les deux côtés non communs se rencontrent en un point situé à l'infini, et font entre eux un angle infiniment petit égal à l'angle a proposé.

Revenons au théorème de la somme des trois angles de tout triangle ABC. Si nous prolongeons CA vers E, CB et AB vers D et F, nous formerons l'angle *extérieur* ou *externe* EAF et l'angle DBF, égal à son opposé au sommet B. Or l'angle externe EAF restant fixe, aussi bien que les droites CAE et ABF, faisons glisser l'angle ECD sur le plan de telle sorte que le côté CE et le sommet C glissent sur la droite fixe CAE jusqu'à ce que le point C tombe en A, et par conséquent le côté CD en AG, dans l'angle EAF. Par ce mouvement de l'angle ECD, il est clair que le côté CD entraîne l'angle DBF de telle sorte que DB glissant sur DC et FB sur FA, les deux sommets C et B arrivent à coïncider ensemble avec le sommet A. Le côté CD ayant alors la position AG, dans l'angle EAF, désigné par x, on voit que l'angle $EAG = C$ et l'angle $GAF = DBF = B$; donc $x = C + B$. Donc aussi $C + B + A = x + A = 2D$. Ce qu'il fallait démontrer de nouveau.

Puisque l'angle $EAF > EAG > ECD$, on voit que *si les deux côtés non communs se coupent en un point* B, *l'angle externe* EAF *est plus grand que l'angle interne correspondant* ECD.

Réciproquement, ayant l'angle externe EAF plus grand que l'angle interne ECD, il faut faire voir que les côtés non communs AF et CD finiront toujours par se couper. Pour cela, soit fait au point A l'angle $EAG = ECD$: le côté AG tombe donc dans l'angle EAF. Si l'on fait glisser l'angle EAG sur le plan de telle sorte que son côté EA et son sommet A glissent sur la droite fixe EAC jusqu'à ce que le point A tombe en C et que l'angle mobile coïncide avec son égal ECD; alors, comme deux droites ne peuvent se couper qu'en un seul point, il est clair que la droite indéfinie AG ne cessera pas un seul instant d'avoir un seul point sur la droite fixe AF, prolongée indéfiniment; et ce point, s'éloignant de plus en plus du point A, est commun aux deux droites AF et CD quand les deux angles EAG et ECD coïncident. Donc enfin *les deux côtés non communs* AF *et* CD, *étant suffisamment prolongés, se coupent nécessairement lorsque* *l'angle externe* EAF *est plus grand que l'angle interne correspondant* ECD.

Les deux théorèmes sur la rencontre de deux droites, situées dans un même plan, sont donc ainsi de nouveau complètement démontrés ; et l'on a vu plus haut que ces deux théorèmes sont les bases de la théorie des parallèles la plus claire, la plus simple, la plus générale et la plus complètement exacte, comme étant fondée sur la définition perfectionnée de l'angle plan. — On sait d'ailleurs que les propriétés des parallèles démontrent très-simplement le théorème de la somme des trois angles de tout triangle rectiligne.

17. La notion approfondie du rapport conduit aux définitions, très-claires et très-précises, des deux genres d'infinis, bien que ces derniers restent toujours inconnus comme inexprimables en chiffres. — Soit r le *rapport* ou la *raison* des deux grandeurs continues A et B de même nature ; r est donc le nombre abstrait, exprimable ou inexprimable en chiffres, par lequel il faut multiplier le *conséquent* B pour avoir l'*antécédent* A, et l'on doit écrire $A = Br$. Donc, en vertu de la définition générale de la multiplication, *le rapport indique toujours comment l'antécédent se trouve avec le conséquent seul*, même quand ce rapport n'est qu'approché : seulement alors la valeur de l'antécédent au moyen du conséquent n'est elle-même qu'approximative, et il faut toujours tâcher que l'approximation soit suffisante.

S'il est vrai que nous ne connaissons, en fait de grandeurs, que des rapports et ne calculons que par eux, la relation $A = Br$ est fondamentale dans les sciences. On en déduit $r = A : B = A$ sur B. Mais, pour mieux rappeler que r est le résultat de la comparaison de A à B, il faut toujours indiquer ce rapport par les deux points verticaux, s'énonçant *est à* et signifiant *divisé* ou *mesuré par*.

Le rapport r se trouve, en effet, en mesurant le premier *terme* A par le second *terme* B.

18. Dans la *Revue*, p. 190, on lit : « Personne ne nie l'existence
» du rapport. Quand deux grandeurs n'ont point de rapport rigou-
» reusement exact, *parce qu'elles n'ont point de plus grande mesure*
» *commune*, elles ont toujours un rapport approximatif, d'autant
» moins éloigné du véritable rapport, que le reste qu'on a négligé
» est plus petit, relativement aux grandeurs proposées ; et à chaque
» rapport approximatif correspond une p. g. c. m. également ap-
» proximative et qui n'est que le reste précédant celui qu'on a né-
» gligé. »

Cela signifie sans doute que quand un rapport est inexprimable en chiffres et reste absolument inconnu, comme dans $D = A\sqrt{2}$, on peut toujours en calculer des valeurs de plus en plus approximatives et qu'en même temps on obtient des valeurs de plus en plus approchées de la véritable p. g. c. m. Celle-ci, bien que toujours inconnue et indéterminable, existe donc nécessairement. Il est évident, en effet, que si elle n'existait pas, on ne pourrait en trouver aucune valeur approchée, ni par conséquent aucune valeur approchée du rapport, lequel n'existerait pas non plus. Il en résulte que l'impossibilité de déterminer exactement une grandeur n'autorise aucunement à en nier l'existence, quel que soit le nom donné à cette grandeur, toujours inconnue.

Ici la p. g. c. m. des quantités continues D et A n'est pas seulement d'une petitesse *invisible* et *inappréciable* aux instruments les plus précis, comme un millionième de mètre, par exemple; mais elle est inexprimable en chiffres ; elle est moindre que toute grandeur assignée, si petite que soit cette dernière, et elle est *infiniment petite*, sans être nulle (car le néant n'est pas une grandeur). C'est, du reste, ce que nous avons démontré ailleurs; et la remarque de M. Lamarle (citée, p. 195 de la *Revue*), est un corollaire de cette démonstration. D'ailleurs, dans le calcul on admet des nombres *infinis du second ordre;* l'un de ces nombres peut donc être double d'un autre.

19. Il est clair que, pour démontrer l'égalité de deux rapports quelconques, il n'est pas nécessaire de les calculer, ni de connaître le commun diviseur des deux termes de chacun : il suffit de savoir que cette mesure commune existe nécessairement. Et de là résulte la *méthode des parties égales* que nous avons employée pour démontrer, par un seul raisonnement très-simple et rigoureusement exact, chaque *proportion* exprimant l'égalité des deux rapports entre quatre quantités continues.

Cette méthode générale est d'autant plus simple et plus exacte, qu'elle rend absolument inutile la distinction de deux cas *commensurable* et *incommensurable* ordinairement employée pour établir la proportion, soit à l'aide de la méthode des *variables*, soit le plus souvent par *la réduction à l'absurde.* Or, pour le second cas ci-dessus, chacun de ces procédés est une *pétition de principe*, si l'on admet, comme cela doit être, que les deux grandeurs, dites *incommensurables entre elles*, ont toujours un commun diviseur inconnu; ou bien est un *non-sens*, si l'on soutient que ces deux grandeurs n'ont absolument aucun diviseur commun, pas même approché ; oubliant ainsi qu'il n'existe aucun rapport *numérique* sans mesure commune à ses deux termes *continus*.

Il est certain que les anciens géomètres, tenant surtout à raisonner avec une exactitude complètement rigoureuse, n'auraient jamais employé la réduction à l'absurde pour établir la proportion, où l'on suppose toujours que les deux rapports existent, si la notion du rapport leur avait été mieux connue. — Il ne faut pas confondre les différents genres d'application de cette forme de raisonnement; et les réflexions de Carnot, citées p. 191 et 192 de la *Revue*, ne s'appliquent nullement à la théorie des rapports égaux : elles rappellent seulement que, dans cette théorie, les anciens se servaient aussi de la réduction à l'absurde.

Je n'ai pas contesté l'exactitude du procédé, très-ancien, employé dans la géométrie de Legendre pour démontrer le théorème de l'aire du cercle, par exemple, et où le commun diviseur infiniment petit, de l'unité linéaire et de la circonférence, est tacitement employé, bien qu'on pense l'avoir évité. Mais ce qu'on reproche à ce procédé, c'est d'être incomplet, en ce qu'il ne montre pas comment on est parvenu au théorème, et surtout, c'est de rendre la démonstration fort longue et d'autant plus obscure que les deux réductions à l'absurde successives ne cachent même pas entièrement les grandeurs infinitésimales qu'on voudrait éviter. Pour preuve, voyez le Lemme fondamental, où les rayons des deux circonférences concentriques peuvent différer *infiniment peu*.

20. Revenons à la théorie des rapports égaux. Chercher un rapport, c'est mesurer l'antécédent avec le conséquent, et la réciproque est vraie. On est donc ainsi conduit à l'*axiome de mesurage*, savoir : *Si quatre grandeurs* A *et* B, C *et* D, *sont telles qu'en mesurant* A *avec* B, *on mesure en même temps* C *avec* D, *il est évident que les deux nombres ou les deux rapports résultants sont égaux.* De sorte qu'on a $A:B = C:D$.

En théorie, cet axiome conduit le plus simplement possible à la proportion ci-dessus, où il faut déterminer le rapport $A:B$ par le rapport égal $C:D$, plus facile à calculer exactement. Mais, dans la pratique, le rapport $C:D$ ne sera souvent que plus ou moins approché du véritable rapport numérique, comme dans tout mesurage effectif.

En général, si l'on cherche la p. g. c. m. des deux grandeurs C et D, les instruments les plus exacts ne donneront jamais que les premiers termes de la *fraction continue* qui doit exprimer le rapport C:D; et souvent celui-ci ne sera qu'approché, même lorsqu'il serait exprimable en chiffres, c'est-à-dire serait un nombre *rationnel.* Mais du moins cette fraction continue fera toujours connaître le degré d'approximation ; ainsi qu'on le voit par la détermination du rapport lorsque C et D sont deux *droites* ou deux *arcs circulaires* de même rayon, tracés sur le papier dans les deux cas; et l'on doit avoir indiqué les solutions *numériques* de ces deux problèmes avant la *théorie des lignes proportionnelles.*

Il est d'ailleurs évident que si les deux rapports A:B et C:D sont égaux entre eux, on peut toujours les concevoir développés en deux fractions continues identiques, et que par conséquent calculer l'une de ces deux fractions continues, c'est en même temps calculer l'autre; c'est-à-dire que mesurer C avec D, c'est mesurer en même temps A avec B. Les deux nombres résultants doivent donc être égaux, comme on le supposait : c'est l'axiome de mesurage.

Enfin, pour la théorie des rapports égaux, on a deux méthodes générales, qui ne supposent point que l'on connaisse ces rapports, savoir : la méthode *des parties égales* et l'*axiome de mesurage.* Ces deux méthodes sont très-simples; mais la seconde exprime plus directement l'opération du mesurage des grandeurs continues.

21. On ne doit pas indiquer le rapport comme les fractions littérales, parce que souvent les élèves regarderont cette indication comme une fraction réelle ou dont les deux termes sont des nombres, et croiront par suite que pour multiplier entre eux deux rapports, ainsi indiqués, il faut multiplier l'un par l'autre les deux antécédents et les deux conséquents. Or, ces multiplications sont des non-sens, puisque le multiplicateur devant toujours être un nombre abstrait, ne saurait être une quantité continue.

Pour empêcher les élèves de commettre ces non-sens, même quand chaque rapport est indiqué par les deux points verticaux, il faut les prévenir que les deux termes de chacun sont censés réduits en nombres abstraits, exprimables ou inexprimables, en supposant ces termes divisés par l'unité, toujours *sous-entendue*, de même nature qu'eux ; ce qui ne change pas la valeur du rapport, ainsi qu'on le démontre aisément.

C'est particulièrement dans la multiplication *terme à terme* qu'il faut supposer rendues *numériques* les proportions entre quantités continues. Mais d'abord cette multiplication peut et doit toujours s'éviter; car, dans $A:B=C:D$, si l'on veut trouver le premier terme continu A, les trois autres étant censés donnés, il n'est pas nécessaire de rendre *numériques* les quatre termes : il est beaucoup plus simple d'observer que le second rapport exprime un nombre abstrait, valeur du premier rapport, et que par suite on a $A = B \times (C:D)$. Substituant ensuite la valeur de B, tirée de la même manière de la seconde proportion, on aura une autre expression de A.

C'est ainsi qu'on évite, avec une grande simplicité, la multiplication terme à terme dans la recherche du rapport de deux rectangles, de deux triangles ayant un angle égal ou supplémentaire, de deux parallélipipèdes rectangles, etc.

22. Dans la *Revue*, p. 196, où l'on indique les rapports comme les fractions littérales et où l'on suppose les grandeurs *incommensurables*, on emploie la méthode des variables pour démontrer que : $(A:B) \times (B:C) = A:C$.

Mais il est beaucoup plus simple de poser $A:B = m$ et $B:C = n$, m et n étant deux nombres inexprimables et inconnus. Il en résulte que mn représente le premier membre de l'égalité ci-dessus ; et quant au second membre, il est aussi représenté par mn.

Ayant en effet, $A = Bm$ et $B = Cn$, il vient $A = Cnm$ et $A:C = mn$. Car on peut, sans altérer la valeur du produit nm, renverser l'ordre des facteurs et écrire mn, vu que ces deux facteurs *irrationnels* sont deux fractions à termes entiers infinis.

On voit que, pour démontrer avec facilité les propriétés des proportions entre grandeurs continues, il faut y faire intervenir le rapport commun à chacune et le représenter par une lettre, s'il n'est pas connu en chiffres. — Ces propriétés, pour plus de simplicité, doivent être traitées dans les démonstrations mêmes des théorèmes de géométrie qu'elles servent à énoncer. Mais il sera toujours nécessaire de fixer, avant, le sens de différentes expressions, très-usitées en français et auxquelles les proportions donnent lieu. (Voyez à ce sujet, la 4me édit. du traité de géométrie).

23. Dans la théorie des rapports égaux et dans plusieurs autres investigations géométriques, les deux genres d'infinis se présentent inévitablement pour la clarté et la facilité des démonstrations. Il faut donc bien, bon gré, mal gré, les y reconnaître ou en être *partisan*. — Toutefois, il n'est pas toujours nécessaire de prononcer les mots *infini* et *infiniment petit*, comme pour l'*équivalence de deux tétraèdres :* la démonstration (Legendre, 12me édit.) est rigoureuse, bien que les infinis y soient *déguisés* et non *évités*. Car supposer

l'un des tétraèdres plus grand que l'autre, ce n'est pas assigner de valeur à leur différence ; celle-ci pourrait donc être infiniment petite, et cela exigerait alors une infinité de tranches.

D'ailleurs, soient T et T' deux tétraèdres de hauteur h commune et de bases a, a' équivalentes dans le même plan : si ces deux tétraèdres ne sont pas équivalents, soit T le plus grand des deux. Divisant la hauteur h en un grand nombre n de parties égales à x par des plans parallèles à celui des bases, les raisonnements connus donnent $T - T' < ax$ et $T = T' + < ax$. Soit k un nombre constant tel qu'on ait $k < 1$, d'où $kax < ax$ et par conséquent $T = T' + kax$.

Ici les volumes T et T' restent constants pendant que le terme kax varie avec x et diminue à mesure que n augmente indéfiniment, sans que l'égalité des deux membres cesse d'exister. Or, c'est absolument comme si ce terme variable n'entrait point dans l'équation finale proposée, et l'on a nécessairement $T = T'$ ou plutôt T équivalent à T'. — On conçoit bien, en effet, que la différence des deux tétraèdres étant constante, ne peut être exprimée par le terme variable kax, à moins que celui-ci ne soit nul, vu que c'est le seul cas où il soit constant. Or, $kax = 0$ exige qu'on ait $k = 0$; valeur qui satisfait à la condition de k constant < 1.

Tel est un second exemple demandé à la p. 222 de la *Revue*, en disant : « Nous serions d'ailleurs curieux de voir la question con-
» crète qui, fidèlement traduite, serait représentée analytiquement
» par l'égalité $a = b + x$; l'exemple de la progression qu'on cite, ne
» nous satisfait pas du tout. » — Pourquoi ? C'est ce qu'on ne dit pas.

J'ai démontré directement l'équivalence des deux tétraèdres ci-dessus (*Théorie infinitésimale appliquée*) : il en est résulté l'équation finale exacte $T = T' + y - y'$; laquelle prouve que T vaut T', par un raisonnement très-simple, rentrant dans celui du n° 4 plus haut. Or, (*Revue*, p. 263) on affirme que « *Ce raisonnement est évidemment faux.* » — Il est sans doute inutile de faire voir que la preuve de cette affirmation est évidemment fausse elle-même. — Du reste, les raisonnements des n^{os} 1 et 2 plus haut, étant appliqués à l'équation finale, toujours exacte, $T - y = T' - y'$, donnent plus simplement et sans difficulté $y = y'$ et $T = T'$.

24. Soient C et C' les longueurs des circonférences de deux cercles dont R et R' sont les rayons. Soient P et P' les périmètres de deux polygones réguliers *inscrits* du même nombre n de côtés, égaux à a et à a' : il est clair que R et R' sont aussi les *rayons* de

ces deux polygones, et qu'on a $P = an$ et $P' = a'n$; d'où $P:P' = a:a'$. Or, les deux triangles isocèles, dont a et a' sont les bases, ont les deux côtés latéraux égaux à R pour l'un et à R' pour l'autre ; et comme les angles aux sommets sont égaux chacun à la n ième partie de quatre droits, ces deux triangles sont équiangles et donnent $a:a' = R:R'$; d'où il vient $P:P' = R:R'$. Soit m le rapport commun, nombre abstrait exprimable ou inexprimable en chiffres : on a donc $R = R'm$ et $P = P'm$.

Cela posé, comme chaque corde est moindre que l'arc soutendu, il est clair que $P < C$ et $P' < C'$. On peut donc poser $P = C - x$ et $P' = C' - y$: alors l'égalité $P = P'm$ devient

$$C - x = C'm - ym.... (1)$$

Cette égalité ne cesse pas d'exister lorsque le nombre n de sommets de P et de P' devient de deux en deux fois plus grand. Mais alors les périmètres P et P', ayant de deux en deux fois plus de points communs avec les circonférences C et C', approchent de plus en plus de coïncider avec ces courbes, et les différences x et y diminuent de plus en plus.

D'ailleurs les longueurs C, C' et le rapport m sont des grandeurs constantes pendant que les variables x et ym diminuent ensemble indéfiniment, sans pouvoir jamais devenir nulles et sans que l'égalité des deux membres de l'équation (1) cesse d'exister ; ces deux variables n'ont donc aucune influence sur cette égalité et pas plus que si elles n'entraient point dans l'équation proposée. On a donc nécessairement

$$C = C'm ; \text{ d'où } x = ym \text{ et } x - ym = 0.... (2)$$

De plus, ayant simultanément $C = C'm$ et $R = R'm$, il en résulte ces deux théorèmes :

$$C:C'::R:R'::2R:2R',$$
$$C:2R = C':2R' = \pi.$$

25. L'égalité $C = C'm$ est le résultat du principe fondamental de la méthode des variables auxiliaires, énoncé plus haut (n° 1) et démontré ensuite de plusieurs manières.

C'est pour plus de clarté que nous répétons l'un des raisonnements qui amènent ce résultat (lequel résultat est indépendant de la *notion de similitude*). Mais, ce qu'il faut ici bien remarquer, c'est que la *méthode des variables* conduit immédiatement à la *méthode infinitésimale.*

D'abord les égalités (2) précédentes sont indépendantes du nombre n de côtés de deux polygones réguliers inscrits ; elles subsistent donc encore lorsqu'on suppose n infini. Mais alors tous les côtés sont infiniment petits, ainsi que les termes x et ym ; lesquels termes doivent se négliger dans (1), puisqu'on cherche des *grandeurs finies.* De cette manière, on commet deux erreurs, *dont on ne saurait tenir compte;* mais ces deux erreurs se compensent ou se détruisent, vu qu'on a $x = ym$ ou $x - ym = 0$. Donc l'égalité $C = C'm$ est rigoureusement exacte.

On voit que, pour les rapports et le mesurage, *on peut toujours, sans aucune erreur finale, regarder le cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés infiniment petits, dont le rayon et l'apothème sont égaux entre eux et dont chaque angle extérieur est égal à l'angle infiniment petit au centre.* — On démontrerait de même qu'on peut toujours, sans erreur finale, traiter tout secteur circulaire comme un secteur de polygone régulier d'une infinité de côtés infiniment petits.

C'est ainsi, comme je l'ai établi depuis longtemps, qu'il faut toujours considérer le cercle et tout secteur circulaire pour simplifier le plus possible, sans qu'elle cesse d'être rigoureusement exacte, la théorie du mesurage dans le cercle et les corps ronds.

On voit comment la méthode des variables auxiliaires conduit à la méthode infinitésimale et la démontre. Rien d'ailleurs n'empêche de vérifier, par la première méthode, les résultats obtenus beaucoup plus simplement par la seconde, et celle-ci est réellement une méthode directe exacte de recherche et d'invention. Sous ce rapport, elle doit toujours être préférée à la méthode des limites ; car cette dernière est fort obscure et rarement bien comprise par les élèves, si on ne la regarde pas comme identique avec la méthode infinitésimale.

Si donc il s'agit de mesurer la surface latérale de tout *cylindre droit*, à base mixte ou curviligne quelconque plane, il n'y aura aucune erreur finale à traiter ce cylindre comme un *prisme droit*, et par conséquent *à regarder la courbe, qui termine la base, comme une ligne brisée d'une infinité de côtés infiniment petits, dont les angles extérieurs ou de courbure sont infiniment petits eux-mêmes.* — C'est ainsi que la méthode infinitésimale conduit directement à toutes les propositions de mesurage dans les corps ronds. Chaque fois on démontrera, si l'on veut, par la méthode des variables ; mais cette démonstration est inutile, puisque la méthode infinitésimale est ici une conséquence rigoureuse de la méthode des variables auxiliaires, elle-même démontrée complètement.

26. En résumé, pour simplifier le plus possible les éléments de géométrie ou leur donner toute la clarté et toute la rigoureuse exactitude dont ils sont susceptibles, il faut : 1° énoncer les véritables définitions de la courbe, de l'angle, du rapport, etc., afin de faciliter les déductions; 2° employer la superposition pour démontrer les égalités et les inégalités principales dans les perpendiculaires, les obliques, les parallèles, le cercle, les triangles, les quadrilatères, etc. (ce qui évite un grand nombre de réductions à l'absurde, comme pour démontrer l'égalité de deux triangles ayant les côtés égaux chacun à chacun, par exemple); 3° éviter autant que possible la réduction à l'absurde et employer la méthode des parties égales, ou bien encore l'axiome de mesurage, pour démontrer directement les proportions; 4° enfin, employer la méthode des variables, mais plus souvent la méthode infinitésimale qui s'en déduit, celle-ci étant plus élémentaire, plus expressive dans la théorie du mesurage et montrant mieux comment on passe du connu à l'inconnu, ainsi qu'on vient de le prouver.

D'ailleurs, les notions des grandeurs infinitésimales sont élémentaires : elles n'ont rien de plus *métaphysique* ni de plus *abstrait* ou de plus difficile à concevoir que les notions des lignes, du plan, des surfaces et du rapport, où les deux genres d'infinis se trouvent nécessairement. On conçoit bien, en effet, par exemple, que le point géométrique, générateur d'une ligne, décrit successivement toutes les longueurs *infiniment petites* croissantes, à partir du néant, avant d'avoir décrit l'une des plus petites longueurs *finies* ou *assignées*.

La méthode infinitésimale se présente donc naturellement pour simplifier certaines recherches géométriques. Mais dans ces recherches, on pourrait remplacer, souvent avec avantage, la méthode infinitésimale par l'*axiome de généralisation*, lequel d'ailleurs renferme l'axiome de mesurage. C'est ce que j'ai indiqué ailleurs et particulièrement dans la 4^{me} édition du traité élémentaire de géométrie, en appliquant l'axiome ci-dessus au mesurage de tout prisme, de toute pyramide et dans les corps ronds.

Cette 4^{me} édition est rendue plus simple par un choix convenable de démonstrations et par l'ordre suivant lequel les théories s'y succèdent. Je pense toujours que cet ordre est le plus naturel pour passer du connu à l'inconnu, sans difficultés, bien qu'il puisse contrarier des habitudes acquises. Je sais que c'est là, pour l'auteur et non pour la science, un inconvénient auquel je ne pouvais avoir égard, puisque je me proposais de simplifier l'étude des éléments de géométrie; et ce qui précède montre bien, je crois, que cette simplification est réelle. J'ai tâché d'éviter, autant qu'il est possible, les démonstrations *indirectes*, toujours plus ou moins obscures, et je me suis bien gardé, par exemple, d'employer la réduction à l'absurde pour démontrer que: *deux triangles sont équiangles lorsqu'ils ont les côtés parallèles ou perpendiculaires chacun à chacun.*

Je ne m'arrêterai pas ici à examiner comment un traité *complet* de géométrie élémentaire peut et doit s'approprier aux différents cours de l'enseignement moyen, ni à discuter les conditions qu'il doit remplir pour que l'étude en soit réellement profitable aux élèves. On peut consulter à ce sujet l'avant-propos de la 4[me] édition ci-dessus et l'ouvrage lui-même, aussi bien que celui-ci : *Considérations sur l'enseignement scientifique moyen.*

J'observerai seulement que dans les éléments des sciences, il s'agit moins d'apprendre beaucoup de choses que de bien connaître celles qu'on a étudiées. Or, pour cela, il ne faut pas seulement la complète analyse logique des propositions successives; mais il faut, du moins dans les répétitions, des *exercices* variés pour pénétrer plus avant dans les théories et les compléter ou en bien saisir l'esprit. C'est ce à quoi l'on parvient sûrement en appliquant les propositions principales à la résolution de questions choisies; peu nombreuses, si l'on est pressé par le temps, mais prises parmi les choses usuelles, autant qu'il est possible de le faire. Tous les professeurs savent combien ces applications sont utiles à l'instruction des élèves.

27. Revenons à la théorie du mesurage des pyramides. Soient T et T′ deux tétraèdres quelconques de hauteurs h commune, leurs bases B et B′ étant situées dans le même plan; je dis qu'on aura toujours $T:T'=B:B'$.

Imaginons, en effet, que la hauteur h soit divisée en un grand nombre n de parties égales à y par des plans parallèles à celui des bases : on sait que les deux sections faites dans T et T′, par chacun de ces plans, sont dans le rapport $B:B'$ des deux bases. Sur les n couples de sections correspondantes, prises pour bases *inférieures*, à partir de B et B′, concevons n couples de prismes triangulaires désignés par a et a', b et b', c et c', d et d', etc. Tous ces prismes sortent en parties hors des tétraèdres, savoir a, b, c, d,... hors de T et a', b', c', d',.... hors de T'. Donc si l'on pose $S=a+b+c+d+....$ et $S'=a'+b'+c'+d'+....$, on aura $S>T$ et $S'>T'$.

De plus, puisque tous les prismes ont la même hauteur y, il s'en suit que ceux qui se correspondent, savoir a et a', b et b' c et c',... sont dans le rapport des sections qui leur servent de bases et par conséquent dans le rapport de B à B'. Soit donc r ce dernier rapport constant, exprimable ou inexprimable en chiffres : on a évidemment

$$a=ra',\ b=rb',\ c=rc', \text{ etc. De là, } S=rS'.$$

D'ailleurs, $S>T$ et $S'>T'$; posant donc $S=T+x$ et $S'=T'+x'$, puis substituant, il vient

$$T+x=r\,T'+rx'.$$

Cette équation finale est exacte quel que soit le nombre n des parties égales de h. Or, n devenant de plus en plus grand, les sommes S et S' approchent de plus en plus de coïncider avec T et T'; donc les différences x et x' deviennent de plus en plus petites. Ainsi les grandeurs T et rT' restent constantes pendant que les variables x et rx' diminuent ensemble, sans que l'égalité des deux membres cesse d'exister, absolument comme si deux variables n'entraient point dans l'équation finale proposée. On a donc nécessairement $T=rT'$; d'où $T:T'=r=B:B'$. — Par cette proportion, si B vaut B', il est clair que T vaut T'.

Maintenant, soit C le cube construit sur $2h$. Ce cube est la somme de 6 pyramides régulières égales, ayant chacune pour base une face du cube, pour hauteur la moitié h du côté $2h$ et pour sommet commun le centre.

Et comme chaque pyramide régulière se décompose en deux tétraèdres égaux, on voit que le cube est la somme de 12 tétraèdres égaux à T', ayant chacun la hauteur h et la base B' étant la moitié de la base 2B' de C. On a donc $12T'=C=2B'\times 2h=4hB'$ et $T'=\frac{1}{3}hB'$. Par cette valeur, la proportion ci-dessus devient

$$T:\tfrac{1}{3}hB'=B:B' \text{ ou } T:\tfrac{1}{3}h=B:1 \text{ et } T=\tfrac{1}{3}Bh.$$

Enfin, comme toute pyramide polygonale P, de hauteur h et de base b, convexe ou concave, peut se décomposer en autant de tétraèdres que la base b contient de triangles formés par les diagonales menées d'un sommet, on voit que $P=\frac{1}{3}bh$.

Dans la Revue pédagogique, p. 262, on considère des prismes *intérieurs* à T et à T′, et l'on trouve la proportion $T-x:T'-x'=B:B'$. Mais les raisonnements, p. 263, ne démontrent pas que cette proportion donne $T:T'=B:B'$.

Le procédé rigoureusement exact qu'on vient d'employer pour calculer l'expression du volume de toute pyramide, peut, ce me semble, remplacer avec avantage celui recommandé par Legendre pour cet effet.

28. Voici le procédé le plus simple pour trouver l'expression du volume de toute pyramide. D'abord, si n est un nombre entier quelconque, on vérifie aisément qu'on aura toujours

$$n^2=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\tfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1).$$

Donc $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ est la somme des carrés des n premiers nombres entiers. D'ailleurs, prenant successivement $n=1, 2, 3, 4, 5,\ldots, n$, puis ajoutant membre à membre les n égalités résultantes et réduisant dans le nouveau second membre, il vient

$$1+4+9+16+25+\ldots+n^2=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Cela posé, soit P une pyramide quelconque, de hauteur h et de base plane quelconque b rectiligne, convexe ou concave. Imaginons que la hauteur h soit divisée en un grand nombre n de parties égales à x par des plans parallèles à la base b : on a donc $nx=h$ et ces plans divisent P en n tranches, toutes de même épaisseur x. Soit t la m ième de ces tranches, à partir du sommet de P, et soit y la plus grande de ses deux bases parallèles : y est donc à la distance mx du même sommet. Les différentes unités v, s et u étant toujours *sous-entendues* comme conséquents des rapports *numériques* qui mesurent les antécédents, on a d'abord, comme on sait, $h^2:m^2x^2=b:y$, d'où en posant $b=rh^2$, il vient $y=rx^2m^2$.

Soit p le prisme de hauteur x et de base y, on a $t<p$ et

$$p=xy \text{ ou } p=rx^3m^2.$$

Prenant successivement $m=1, 2, 3, 4, 5,\ldots,n$; ajoutant ensuite membre à membre les n égalités résultantes, en désignant par S la somme de tous les prismes p et en observant que, dans le nouveau second membre, rx^3 est multiplié par la somme des carrés des n premiers nombres entiers, on aura

$$S=\tfrac{1}{6}rx^3n(n+1)(2n+1)=\tfrac{1}{6}rx^3[2n^3+n(3n+1)].$$

Il est clair que la somme $S>P$, et qu'ainsi $S=P+z$. D'ailleurs $nz=h$ et $b=rh^2$; l'égalité précédente devient donc

$$P+z=\frac{1}{3}bh+\frac{1}{6}rhx\,(3h+x).$$

Cette équation finale exacte renferme deux termes constants et deux termes variables, pouvant diminuer ensemble indéfiniment à mesure que n augmente, sans que l'égalité des deux membres cesse d'exister, et cela absolument comme si ces deux termes variables n'entraient point dans l'équation. On a donc nécessairement

$$P=\tfrac{1}{3}bh \text{ ou } P=v\times\tfrac{1}{3}\,(b:s)\,(h:u).$$

Cette démonstration très-simple n'exige que des calculs algébriques fort élémentaires ; elle devrait donc figurer seule dans les éléments de géométrie.

Le même procédé conduirait à l'expression du volume de tout cône P, à l'aide du volume de tout cylindre, ainsi que je l'ai fait voir, p. 46 et 47 de la brochure sur l'*emploi de l'infini*. Mais il est beaucoup plus simple de considérer la base quelconque, mixte ou curviligne du cône proposé, comme un polygone rectiligne d'une infinité de côtés, et par conséquent ce cône comme une pyramide.

Du reste, l'axiome de généralisation fait passer directement, et avec la plus grande simplicité, de la mesure de chaque pyramide régulière, sixième d'un cube, à l'expression du volume de toute pyramide et de tout cône; tout comme il ferait passer immédiatement de la mesure d'un parallélipipède rectangle à l'expression du volume de tout prisme et de tout cylindre; et de même pour les surfaces et les volumes de révolution décrits par un triangle isocèle et le secteur circulaire correspondant, etc. (Voyez la 4^me^ édit. de géométrie.

29. Voici comment, dans la première édition de ses éléments de géométrie, en 1794, Legendre appréciait la difficulté d'une théorie rigoureuse du mesurage des pyramides; il disait (p. 308) : « La mesure de la pyramide, dont l'invention est attribuée à Eudoxe, a dû être le sujet d'une assez grande difficulté parmi les anciens géomètres; car le moyen le plus naturel de mesurer la pyramide est de la comparer au prisme : or d'un côté, la pyramide n'est point décomposable en prismes, et de l'autre, le prisme ne peut se partager qu'en pyramides, ou inégales, ou dont l'égalité (l'équivalence) a besoin d'être démontrée. Il n'y a plus de difficulté lorsqu'on suppose que les pyramides de même hauteur sont entre elles comme leurs bases; mais cette proposition elle-même exige des décompositions à l'infini, et ne peut se démontrer par le principe ordinaire de la superposition. »

« La démonstration qu'Euclide a donnée dans la proposition V du livre XII est une des plus ingénieuses des éléments ; cependant le nombre toujours croissant des petites pyramides, qu'on semble négliger, peut laisser quelque nuage dans l'esprit des commençants, et c'est pour éviter cet inconvénient que nous avons choisi dans le texte un autre genre de démonstration. On pourrait aussi, en partant des mêmes bases qu'Euclide, parvenir directement à la solidité de la pyramide triangulaire, sans supposer de prolongement à l'infini. »

On sait qu'en s'appuyant sur la décomposition d'Euclide, Legendre a démontré péniblement les théorèmes relatifs au mesurage du tétraèdre, à partir de la seconde édition de ses éléments de géométrie jusqu'à la 12[me] exclusivement, où il a pris une autre base, beaucoup plus simple. J'ai déjà indiqué ailleurs comment on pouvait tirer parti du théorème d'Euclide pour simplifier la théorie du mesurage des tétraèdres, et j'y reviens, en priant le lecteur de tracer la figure, s'il la juge nécessaire à la clarté des raisonnements.

50. Soit SABC$=t_1$ le tétraèdre dont h est la hauteur et ABC $=b$ la base. Par le milieu E de l'arête SB menons le plan parallèle à cette base : il passe par les milieux D et F de SA et SC, ainsi que par le milieu de h. Soient G, H, I les milieux de AB, BC, CA : il est clair que les triangles AGI et GBH sont égaux entre eux et à DEF$=\frac{1}{4}b$. On voit aussi que les deux tétraèdres SDEF et EGBH sont égaux entre eux, comme ayant un trièdre égal compris sous trois arêtes égales chacune à chacune. Soit t_2 le tétraèdre SDEF : on a donc aussi le tétraèdre DAGI$=t_2$.

De plus, soit p_1 le prisme triangulaire construit sur les trois arêtes AB, AC, AS de t_1 : il est clair que h est la hauteur et b la base de p_1, et qu'ainsi les unités v, s et u étant sous-entendues, on a $p_1=bh$. En outre, soit p_2 le prisme triangulaire construit sur les trois arêtes DS, DE, DF de t_2 : ce prisme ayant $\frac{1}{4}b$ pour base et $\frac{1}{2}h$ pour hauteur, on a $p_2=\frac{1}{4}b\times\frac{1}{2}h=\frac{1}{8}bh=\frac{1}{8}p_1$ et $p_1=8p_2$. On voit aussi que AGIFDE est un prisme triangulaire égal à p_2. Soit d'ailleurs P le parallélipipède construit sur les trois droites GE, GI, GH ; lequel a $\frac{1}{2}h$ pour hauteur et le parallélogramme GICH$=\frac{1}{2}b$ pour base ; d'où P$=\frac{1}{4}bh=\frac{1}{4}p_1$. Le plan diagonal HEFC divisant P en deux parties équivalentes, on voit que le prisme triangulaire GHEFCI vaut $\frac{1}{8}p_1=p_2$. De sorte qu'on a le volume AGHCFDE équivalent à $\frac{1}{4}p_1$. La décomposition ci-dessus fournit donc ce théorème d'Euclide, employé par Legendre :

$$p_1=8p_2 \text{ et } t_1=\tfrac{1}{4}p_1+2t_2 \text{ ou } 4t_1=p_1+8t_2.$$

Cela posé, les deux prismes triangulaires p_1 et p_2 sont directement semblables, comme ayant un trièdre égal compris sous trois faces semblables chacune à chacune et disposées dans le même ordre ; ces deux prismes ne diffèrent donc que par leurs grandeurs. De même, les deux tétraèdres, t_1 et t_2 sont directement semblables ; de sorte que t_2 est exactement en petit ce que t_1 est en grand. Or, puisque $p_1=8p_2$, on voit que p_1 n'est que p_2 devenu 8 fois plus grand ; donc chaque partie de p_1 n'est que la partie semblable de p_2 devenue aussi 8 fois plus grande ; donc enfin $t_1=8t_2$. Substituant donc, il vient successivement :

$$4t_1=p_1+t_1,\ 3t_1=p_1 \text{ et } t_1=\tfrac{1}{3}p_1=\tfrac{1}{3}bh.$$

Ce procédé, très-simple et très-clair, pour calculer la mesure de tout tétraèdre, suppose bien acquise la notion de *similitude directe*, laquelle consiste en ce que : *deux polyèdres directement semblables ne diffèrent que par leurs grandeurs, c'est-à-dire que l'un est exactement en petit ce que l'autre est en grand.* Or, la théorie des figures directement semblables, l'une des plus importantes de la géométrie, doit développer complètement cette notion et la rendre évidente dans tous les théorèmes de similitude. — Les définitions généralement admises ne font bien connaître les figures semblables que quand ces définitions sont amenées par des considérations préliminaires indispensables pour mettre en évidence toutes les conditions *nécessaires* à la similitude (Voyez à ce sujet la 4^{me} édit., citée plus haut). — On voit pourquoi Legendre n'a pu démontrer que $t_1=8t_2$. D'ailleurs, dans son ouvrage, la similitude ne précède pas le mesurage.

31. Si l'on ne veut pas recourir à la notion de similitude pour démontrer que $t_1=\frac{1}{3}p_1$, la méthode des variables y conduit directement, sans supposer de prolongement à l'infini. En effet, soient t_1, t_2, t_3,...,t_n la suite de tétraèdres retranchés chacun de celui qui le précède immédiatement par le plan joignant les milieux des arêtes du sommet de ce dernier : cette suite de tétraèdres est infinie, évidemment. Soient p_1, p_2, p_3, ..., p_n la suite des prismes triangulaires construits sur trois arêtes contiguës, dont une latérale, des tétraèdres successifs : les bases de ces prismes deviennent

de 4 en 4 fois plus petites, les hauteurs de 2 en 2 fois moindres et par conséquent les volumes de 8 en 8 fois plus petits. Chaque prisme vaut donc 8 fois celui qui le suit immédiatement, et l'on a

$$p_1=8p_2,\ p_2=8p_3,\ p_3=8p_4,\dots,\ p_n=8p_{n+1};\ \text{d'où}$$

$$p_1=8^2p_3=8^3p_4=\dots=8^{n-1}p_n \ \text{et}\ p_n=p_1:8^{n-1}.$$

Le théorème d'Euclide, appliqué à t_n, donne

$$t_n=\tfrac{1}{4}p_n+2t_{n+1};\ \text{d'où}\ t_n-2t_{n+1}=\tfrac{1}{4}p_1:8^{n-1}.$$

Multipliant les deux membres par 2^{n-1} et réduisant, on trouve

$$2^{n-1}t_n-2^nt_{n+1}=p_1\times\frac{1}{4^n};\ \text{d'où il vient}$$

$$2^{n-1}t_n-2^nt_{n+1}=\tfrac{1}{3}p_1\left(\frac{1}{4^{n-1}}-\frac{1}{4^n}\right).$$

Prenant donc successivement $n=1, 2, 3, 4,\dots, n$, puis ajoutant membre à membre les n égalités résultantes et réduisant dans les deux membres de la nouvelle égalité, elle devient

$$t_1-2^nt_{n+1}=\tfrac{1}{3}p_1\left(1-\frac{1}{4^n}\right).$$

Le prisme triangulaire p_{n+1} est construit sur les trois arêtes contiguës du tétraèdre t_{n+1}; celui-ci est donc plus petit que le prisme. Si donc on pose $k<1$, k étant un nombre constant, on aura

$$t_{n+1}=kp_{n+1}=kp_1:8^n\ \text{et}\ 2^nt_{n+1}=kp_1:4^n.$$

Substituant cette valeur, il est clair qu'on aura finalement

$$t_1-kp_1:4^n=\tfrac{1}{3}p_1-\tfrac{1}{3}p_1:4^n.$$

Cette équation finale, toujours vraie quel que soit le nombre entier n. renferme deux termes constants et deux termes variables, ceux-ci diminuant ensemble à mesure que n augmente, sans que l'égalité des deux membres cesse d'exister. On a donc séparément

$$kp_1:4^n=\tfrac{1}{3}p_1:4^n\ \text{et}\ t_1=\tfrac{1}{3}p_1.$$

Ici la compensation des deux erreurs donnant $k=\frac{1}{3}$, vérifie que *tout tétraèdre est le tiers du prisme triangulaire de même base et de même hauteur.* — On voit que n étant supposé infini, les deux termes variables de l'équation sont infiniment petits et nuls à l'égard des deux termes constants. Ils disparaissent, en effet, de l'équation finale comme s'ils étaient nuls rigoureusement.

32. La géométrie élémentaire est à la fois *graphique* et *numérique;* l'emploi des signes abréviatifs et généraux, désignant les opérations et les quantités continues, y est donc nécessaire pour faciliter les diverses théories. Il y faut l'algèbre la plus élémentaire pour résoudre des équations très-simples des deux premiers degrés, provenant des rapports, des proportions, des relations entre les longueurs, les aires, les volumes, et il faut la *décomposition en facteurs* pour obtenir des valeurs, soit calculables par logarithmes, soit constructibles à l'aide de la règle et du compas seuls; et cela exige souvent des inconnues *auxiliaires.*

Pour donner un exemple de ces derniers cas, proposons-nous ce problème : *Mener dans le trapèze donné* ABCD, *la parallèle* EF *aux deux bases* AB *et* CD, *de telle sorte que les deux trapèzes résultants soient entre eux comme les deux nombres donnés* m *et* n.

Posons $AB=a$, $CD=b$ et supposons $a>b$. Dans le trapèze proposé, menons la hauteur $DA=h$, rencontrant en I la parallèle cherchée $EF=x$ et soit $\mathrm{II}=y$, d'où $DI=h-y$. D'après l'énoncé et d'après les expressions des aires des trois trapèzes, on a, pour déterminer x et y, deux équations qui se réduisent à celles-ci:

$$ny(a+y)=m(h-y)(b+x)$$

$$y(a+y)+(h-y)(b+x)=h(a+b).$$

Prenant la valeur de y dans la seconde de ces équations et la substituant dans la première, on trouve, réductions faites,

$$y=\frac{h(a-x)}{a-b} \text{ et } x^2=\frac{a^2n+b^2m}{m+n}.$$

Pour $m=3n$, on a $x^2=\frac{1}{4}(a^2+3b^2)$. Or posant $c^2=3b^2$ et $d^2=a^2+c^2$, on a $x=\frac{1}{2}d$. Toutes ces valeurs sont faciles à construire; car c est le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle dont b est le rayon, tandis que d est l'hypoténuse du triangle rectangle dont a et c sont les côtés donnés de l'angle droit. Prenant donc, sur AB, la longueur $AP=\frac{1}{2}d$ et menant par P la parallèle à AD, elle coupera BC au point F de la parallèle cherchée. — Si l'on posait $ak=3b^2$, d'où $x^2=\frac{1}{4}a(a+k)$, x se construirait par une quatrième et une moyenne proportionnelle. — Chaque fois on vérifierait la solution en construisant la 4me proportionnelle y ou III.

Sur le terrain, *s'il fallait diviser le trapèze proposé en deux trapèzes équivalents*, d'où $m=n$, il faudrait l'équerre d'arpenteur pour tracer des perpendiculaires et la chaîne métrique (décamètre) pour mesurer les longueurs. Supposons donc qu'on ait ainsi trouvé $a = 80$ mètres, $b = 60$ et $h = 120$: on aura $x = 50\sqrt{2}$ et de plus $y = 60(8 - 5\sqrt{2})$; etc.

Remarque. Lorsque les *données*, nécessaires et suffisantes, sont tracées sur le papier, le compas et la règle suffisent pour construire le triangle ABC, dans lequel les trois angles sont désignés par A, B, C et les côtés respectivement opposés à ces angles, par a, b, c. — Voici plusieurs problèmes sur le tracé et la détermination des triangles, où, pour arriver facilement aux constructions, il faut d'abord supposer le problème résolu :

I. Tracer le triangle ABC dont on connaît les deux côtés a et c, avec la différence v des angles opposés A et C; ou bien avec la condition que l'angle A soit double de l'angle C. — Dans ce second cas, menant la bissectrice x de l'angle A et déterminant la projection y de b sur a, on aura trois équations, desquelles éliminant x et y, on trouvera

$$bc = (a+c)(a-c).$$

Ainsi le troisième côté b cherché peut se calculer par logarithmes, ou se construire par une 4^{me} proportionnelle, etc.

II. Construire le triangle connaissant, 1° les deux angles A et C avec la bissectrice d de l'angle B du sommet; 2° l'angle B, sa bissectrice d et la hauteur h; 3° l'angle B, sa bissectrice d et le côté c.

III. Tracer le triangle dont on connaît le périmètre p avec, 1° les angles A et C; 2° l'angle A et le côté c adjacent; 3° l'angle A et la hauteur h menée du sommet de B; 4° le côté c et la hauteur h.

IV. Construire le triangle connaissant, 1° les deux angles A et C, avec la hauteur h, b étant la base inconnue; 2° l'angle A, la hauteur h et la somme n ou bien la différence d des deux côtés latéraux a et c; 3° l'angle A, la hauteur h et la différence v des deux angles B et C; 4° deux côtés et la projection orthogonale de l'un sur l'autre.

V. Tracer le triangle dont on connaît, 1° l'angle A, la hauteur h et la médiane m de la base b inconnue; 2° le côté c, la hauteur h et la médiane m; 3° la base b, sa médiane m et la somme n ou bien la différence d des côtés latéraux a et c.

VI. Construire le triangle, connaissant deux angles avec le rayon du cercle circonscrit, ou du cercle inscrit, ou de l'un des cercles ex-inscrits.

VII. Tracer le triangle dont on connaît, 1° deux côtés et le point où l'un d'eux, ou son prolongement, est touché par le cercle inscrit, ou par le cercle ex-inscrit; 2° un côté, le rayon du cercle inscrit et le point de contact du cercle et du côté; 3° un côté, le rayon du cercle ex-inscrit et le point où ce cercle touche le prolongement du côté.

VIII. Construire le triangle dont on connaît deux hauteurs et un côté ou un angle. — Chaque fois il y a deux cas à distinguer.

IX. Construire le parallélogramme connaissant les deux diagonales et un côté; ou bien deux côtés contigus et la hauteur.

X. Construire le trapèze dont on connaît une base, un angle adjacent et les deux diagonales; ou bien celles-ci et deux côtés contigus.

XI. Construire le triangle dont on connaît le côté b, l'angle opposé B et le rayon r du cercle circonscrit, ou du cercle inscrit, ou du cercle ex-inscrit, touchant le côté b. (Il faut chaque fois un segment capable d'un angle donné).

XII. Construire le trapèze dont on connaît : 1° la hauteur, les deux diagonales et la plus petite base; 2° la hauteur, les deux bases et une diagonale; 3° les deux diagonales et les deux bases; 4° une base, la hauteur et les deux côtés latéraux; 5° un côté latéral, la hauteur et les deux diagonales; 6° les deux côtés latéraux, une diagonale et la hauteur; 7° enfin, les deux diagonales et les deux côtés latéraux. — Dans ce dernier cas, la détermination de l'une des deux bases exige des calculs et des constructions compliqués.

35. Voici plusieurs problèmes sur le calcul des aires par logarithmes et fondés le plus souvent, sur l'expression logarithmique de l'aire du triangle au moyen de ses trois côtés donnés numériquement.

I. *Calculer l'aire* T *du triangle dont on connaît un côté* b, *avec les deux médianes* m *et* n.

1° Si les médianes m et n partent des extrémités A et C du côté $AC=b$, on sait qu'elles se coupent en un point O donnant $AO=\frac{2}{3}m$ et $CO=\frac{2}{3}n$. On connaît donc les trois côtés du triangle AOC : celui-ci étant tracé, on prolonge AO de $OM=\frac{1}{3}m$ et CO de $ON=\frac{1}{3}n$. Alors les prolongements de AN et CM vont se couper en un point B; de sorte que $ABC=T$ est le triangle demandé. Il est facile de voir, d'ailleurs, que ce triangle est triple du triangle AOC; et comme les trois côtés de ce dernier sont donnés numériquement, on a l'expression logarithmique de son aire t, et l'aire T se calculera, au moyen des tables, par la formule $T = 3t$.

2° Si la médiane m part de l'extrémité A du côté $AC = b$ et que l'autre médiane n s'arrête au milieu P de ce côté, on sait que m et n se coupent en un point O, donnant $AO = \frac{2}{3}m$ et $PO = \frac{1}{3}n$. De sorte que le triangle APO peut se tracer au moyen de ses trois côtés connus $\frac{1}{2}b$, $\frac{2}{3}m$, $\frac{1}{3}n$, et son aire t' peut se calculer par logarithmes. Prolongeant alors PO de $OB = \frac{2}{3}n$, il est clair que BAC est le triangle demandé et que son aire T se calculera par la formule $T = 6t'$.

II. *Calculer et construire le triangle dont on connaît les deux côtés latéraux* a *et* c, *ainsi que la médiane* m *de la base* b. — On a

$$2m^2 + 2\left(\tfrac{1}{2}b\right)^2 = a^2 + c^2 \quad \text{et} \quad b^2 = 2a^2 + 2c^2 - 4m^2.$$

Posant $d^2 = 2a^2 + 2c^2$, il est clair que d est la diagonale du carré fait sur l'hypoténuse du triangle dont a et c sont les côtés de l'angle droit; et comme alors

$$b^2 = (d + 2m)(d - 2m),$$

on voit que b se construit par une moyenne proportionnelle; d'où résulte le tracé du triangle cherché, au moyen de ses trois côtés connus a, b, c. Mais pour trouver l'expression logarithmique de l'aire T de ce triangle, il faut d'abord calculer d en prenant la racine carrée, exacte ou suffisamment approchée, du nombre obtenu en effectuant les opérations dans $2a^2 + 2c^2$, et calculer ensuite b par logarithmes.

On peut aussi construire le triangle et en calculer l'aire T, connaissant la hauteur h, la médiane m de la base b et la somme d^2 des carrés faits sur les deux côtés latéraux a et c.

III. *Calculer la mesure du triangle dont on connaît les trois médianes* k, m *et* n. — Il faut d'abord construire ce triangle. Pour cela, on trace le triangle ABC dans lequel $AB = 2k$, $AC = 2m$ et $BC = 2n$. Menant ensuite, dans ce triangle, les médianes CI et AH, se coupant en D, puis prolongeant CI de $IE = ID$, on démontre aisément que ADE est le triangle demandé.

Maintenant, il est facile de voir que l'aire $ADE = \frac{1}{3}ABC$. De plus, M étant le milieu de AC, le triangle AIM a pour côtés les trois médianes proposées k, m et n; d'où résulte l'expression logarithmique de l'aire t de ce triangle. D'ailleurs $ABC = 4t$; donc aire $ADE = \frac{4}{3}t$.

IV. *Calculer la mesure du triangle* t, *connaissant numériquement* *les trois hauteurs* a′, b′, c′, *répondant aux trois bases inconnues* a, b, c, *côtés de ce triangle.*

Il faut d'abord construire le triangle t, et pour cela il est clair qu'on a

$$aa' = bb' = cc = 2t \dots \ (1)$$

Posant $a' = b'c' : n$ ou $a' : b' = c' : n$, puis construisant ou calculant la quatrième proportionnelle n, il est clair qu'en substituant la valeur de a' dans (1), divisant par $b'c'$ et simplifiant, il vient

$$a : n = b : c' = c : b' \dots \ (2)$$

Soit t' le triangle AB′C′, ayant pour côtés donnés B′C′ $= n$, B′A $= c'$ et C′A $= b'$: comme les côtés n, c', b' sont proportionnels aux côtés homologues a, b, c, les triangles t' et t sont semblables et il faut construire ce dernier. — A cet effet, menons AI $= h$ perpendiculaire à B′C′ ; prolongeons AI en D de telle sorte que AD $= a'$; menons à B′C′, par le point D, la parallèle rencontrant en C et B les prolongements de AB′ et de AC′ : le triangle ABC est le triangle cherché. Car étant semblable à AB′C′, on a

$$\text{BC} : n = \text{AC} : c' = \text{AB} : b'.$$

Comparant à la suite (2) et observant que BC$\cdot a' = 2t = aa'$, d'où BC $= a$, on verra que AC $= b$ et AB $= c$. Menant d'ailleurs les hauteurs BK et CF, il en résulte $b \cdot$BK $= 2t = bb'$ et BK $= b'$. On verra de même que CF $= c'$.

Cela posé, on connait les mesures n, b', c' des trois côtés du triangle AB′C′ ; son aire t' est donc calculable par logarithmes. D'ailleurs, $2t' = nh$ et $t : t' = a'^2 : h^2$. Substituant donc les valeurs de a' et h, il vient, réductions faites, la formule

$$t = (b'c')^2 : 4t'.$$

V. *Calculer l'aire* T *de tout trapèze, connaissant une diagonale* d, *sa projection* p *sur la plus petite des deux bases et la somme arithmétique* s *des projections des deux diagonales sur cette base.*

Soient a et c les deux bases parallèles, c étant la plus petite, et soit h la hauteur, inconnue avec a et c : il est facile de voir que

$$\text{T} = \tfrac{1}{2} h\,(a + c), \quad s = a + c, \quad h^2 = d^2 - p^2,$$

$$\text{et par suite} \quad \text{T} = \tfrac{1}{2} s \sqrt{(d+p)(d-p)}.$$

Cette expression s'applique aussi au parallélogramme ; mais les trois données d, p, s ne suffisent pas pour construire le trapèze : il est indéterminé de forme, bien que la mesure de son étendue soit constante et déterminée.

VI. *Exprimer l'aire* T *de tout trapèze, connaissant numériquement les deux bases parallèles* a *et* c, *ainsi que les deux diagonales* d *et* e.

Menant par l'extrémité commune à la plus petite base c et à la diagonale d, une parallèle à l'autre diagonale e, cette parallèle, terminée au prolongement de a, donne le triangle équivalent au trapèze T et dont les trois côtés numériques sont d, e et $a+c$. Posant donc $2s=d+c+a+c$, on verra, d'après l'expression logarithmique de l'aire de tout triangle en fonction de ses côtés numériques, qu'on aura toujours

$$T^2=s(s-a-c)(s-d)(s-e).$$

Cette formule s'applique au trapèze isocèle pour lequel $e=d$, au parallélogramme quand $a=c$, et enfin au rectangle si l'on a $e=d$ et $a=c$. — On démontre aisément ce théorème : dans tout trapèze T, la parallèle à l'une des diagonales, tirée du milieu de l'autre et terminée à la plus grande base, donne un triangle équivalent à $\frac{1}{4}$T.

VII. *Calculer l'aire de tout trapèze* T, *connaissant numériquement ses quatre côtés.* — Soit ABCD le trapèze T dans lequel $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ et $DA=d$, c étant la plus petite des deux bases parallèles a, et c. Menant par le sommet C la parallèle CE à DA, cette parallèle divise le trapèze en un parallélogramme et un triangle CEB ou t. On connaît numériquement les trois côtés de ce triangle, savoir b, d et $a-c$; on peut donc en calculer l'aire t par logarithmes. De plus, soit h la hauteur commune au trapèze et au triangle, $a-c$ étant la base de ce dernier : il est clair qu'on a successivement $T=\frac{1}{2}h(a+c)$ et $t=\frac{1}{2}h(a-c)$;

$$T:t=a+c:a-c \quad \text{et} \quad T=\frac{a+c}{a-c}\times t.$$

Telle est l'expression logarithmique de l'aire cherchée du trapèze ; lequel d'ailleurs *peut toujours se construire avec ses quatre côtés donnés*, en construisant d'abord le triangle t, etc. — Si $a=c$, le trapèze devient un parallélogramme T ; et comme alors $a-c=0$ et $t=0$, il vient $T=\frac{0}{0}$. On trouve, pour l'aire T, le *symbole de l'indétermination*, comme cela doit être, puisqu'il existe une infinité de parallélogrammes différents, ayant les côtés égaux chacun à chacun.

VIII. *Calculer l'aire* Q *de tout quadrilatère, convexe ou concave, connaissant numériquement les deux diagonales* d *et* e, *ainsi que la projection* p *de* d *sur* e. — Soit x la somme des distances de la diagonale e aux deux sommets opposés du quadrilatère: on sait que la mesure de celui-ci est donnée par la formule $Q=\frac{1}{2}ex$. Mais x est un côté de l'angle droit du triangle dont l'autre côté p et l'hypoténuse d sont donnés; on a donc

$$x^2=d^2-p^2 \text{ et } Q=\tfrac{1}{2}e\sqrt{(d+p)(d-p)}.$$

On voit que : *Deux quadrilatères quelconques, convexes ou concaves, l'un ou l'autre ou tous les deux, sont équivalents entre eux lorsque leurs diagonales sont égales chacune à chacune et comprennent un angle égal.* Alors en effet, les deux projections p sont égales, etc. — Le quadrilatère est donc déterminé de *grandeur*, et non pas de *forme*, par les seules données d, e et p.

Remarque. Soient d et e les diagonales de tout quadrilatère, convexe ou concave; soient m et n ses deux *médianes*, joignant les milieux des côtés opposés. On démontre que : *m et n sont les diagonales du parallélogramme* P *dont les sommets sont les milieux des côtés du quadrilatère* Q *proposé, ce parallélogramme valant* $\frac{1}{2}$Q *et son périmètre étant égal à* d + *e*. — C'est sur ce théorème que sont basées les solutions des deux problèmes suivants.

IX. *Connaissant les mesures* d, e *et* m *des deux diagonales et d'une médiane de tout quadrilatère, calculer l'aire* Q *de ce quadrilatère.* — D'abord T désignant l'aire du triangle dont m, $\frac{1}{2}d$ et $\frac{1}{2}e$ sont les côtés numériques, on sait calculer l'aire T par logarithmes. Et comme T, moitié de P, équivaut à $\frac{1}{4}$Q, on voit que l'aire cherchée se calcule par la formule $Q=4T$.

X. *Calculer la mesure de tout quadrilatère* Q, *connaissant les mesures* m, n *et* d *de ses deux médianes et d'une diagonale.* — D'abord le triangle dont $\frac{1}{2}d$, $\frac{1}{2}m$ et $\frac{1}{2}n$ sont les côtés numériques est à la fois équivalent à $\frac{1}{4}$P et à $\frac{1}{4}t$, t désignant l'aire du triangle dont m, n, d sont les mesures connues des trois côtés; d'où $P=t$ et $Q=2t$. Posant donc $2s=d+m+n$, on verra que

$$Q^2=4s(s-d)(s-m)(s-n).$$

54. On doit parfois, pour abréger l'étude des éléments de géométrie, y supprimer différentes matières et se borner aux proposi-

tions les plus importantes. Mais dans ce cas même, comme quelques idées bien acquises sont toujours utiles pour en acquérir d'autres avec facilité, il est nécessaire d'approfondir les notions et les propositions fondamentales, afin de les bien connaître; ce à quoi l'on parvient par de bonnes définitions et des applications, clairement et logiquement analysées, en s'aidant s'il le faut des équations. Celles-ci d'ailleurs se présentent toujours dans la géométrie numérique, limitée aux propositions les plus essentielles, et exigent ainsi le calcul et l'interprétation des symboles numériques.

Or, dans tout problème de géométrie, où il faut calculer la *position* d'un point inconnu sur une ligne tracée, droite ou circulaire, il existe toujours, avec les équations de ce problème, une équation *auxiliaire*, le plus souvent implicite ou sous-entendue, par laquelle on démontre clairement et très-simplement les deux principes de l'interprétation des longueurs positives et des longueurs négatives.—Ces deux principes sont encore vrais lorsque la ligne tourne autour d'un point fixe; vu que l'équation auxiliaire ne change pas dans ce mouvement. (Voyez à ce sujet la théorie infinitésimale appliquée).

Si donc le signe — de l'inconnue ne vient pas des changements de signes de quelques données, il est ainsi démontré qu'en algèbre : *Toute solution négative indique un mode opposé d'existence de l'inconnue;* vu qu'alors celle-ci diminue ou augmente ce qu'elle augmentait ou diminuait d'abord. Et ceci n'est pas une vérité de convention; car, si cela était, « une autre convention donnerait donc une solution différente: » ce n'est pas non plus une simple hypothèse, puisque c'est une vérité démontrée, ou du moins que l'on pourrait démontrer très-simplement, ainsi que le calcul des symboles numériques, pour la discussion des problèmes des deux premiers degrés; et rien, à cet égard, ne justifie les scrupules, les détours obscurs de quelques auteurs récents d'algèbre et de géométrie.

Dans les mélanges de mathématiques, en 1822, et dans différents ouvrages d'algèbre et de géométrie, j'ai démontré les deux principes ci-dessus du positif et du négatif, à l'aide desquels on effectue l'interprétation de presque tous les symboles numériques, désignant des *impossibilités relatives;* ainsi que je l'ai établi en géométrie, 2me édition, et où les difficultés de Carnot, portant sur l'interprétation des longueurs positives et négatives, sont résolues. — Nous y reviendrons plus bas.

Dans les mélanges ci-dessus, p. 112, j'ai dit : « Le principe des distances négatives est général ; et quand on le croit en défaut, c'est qu'on oublie de remarquer que la droite, sur laquelle la distance négative est mesurée, a tourné autour d'un point fixe et a pris une position différente de celle qu'elle occupait d'abord. »

» Le principe peut aussi paraître en défaut lorsque le problème renferme des *conditions particulières* qui n'entrent point dans ses équations ; car alors la valeur négative, quoique portée en sens contraire, peut ne résoudre aucun problème. Mais la même chose peut aussi arriver à une valeur positive, portée dans le sens proposé. »

Dans chacun de ces cas, pour que la valeur négative ou positive cesse d'être *insignifiante*, il faut, s'il est possible, écarter les conditions particulières, en généralisant l'énoncé du problème proposé ; comme, par exemple, dans la division d'une droite donnée en *moyenne et extrême raison*. L'énoncé généralisé est : *Diviser une droite donnée en deux segments tels que l'un soit moyen proportionnel entre l'autre et la droite entière*. Ici la solution négative place le point de division sur un prolongement de la droite donnée.

L'interprétation la plus générale de la valeur négative de l'inconnue x consiste, comme on sait, à changer x en $-x$ dans les équations proposées et à interpréter les nouvelles équations. C'est ainsi qu'on s'assure que toute équation du second degré en x résout généralement, quand elle est possible, deux problèmes différents, ou deux fois un même problème. Et si l'équation proposée est impossible, ce qui est indiqué par un symbole *imaginaire* de x ou par le symbole de la *non-existence*, tel que $x=\frac{1}{0}$; on peut souvent résoudre un problème possible avec les mêmes nombres donnés, en changeant la soustraction qui produit l'impossibilité, alors *relative*, en une addition. Et c'est en cela que consiste l'interprétation des symboles imaginaire et de la non-existence de l'inconnue.

On interprète de même le symbole de l'*indétermination* de x, savoir $x=\frac{0}{0}$; ce qui donne une valeur déterminée à cette inconnue. Mais cette interprétation est rarement possible ; et même, quand l'indétermination de l'inconnue provient d'un facteur commun à ses deux termes, facteur devenant nul par une hypothèse particulière, la suppression de ce facteur commun ne donne qu'une des valeurs, alors en nombre illimité, dont l'inconnue est susceptible. Dans ce cas, en effet, le problème reste indéterminé, comme pour l'équation

$$a^3x - a^4 = c^3x - c^4,$$

où, quand on pose $c = a$, il vient $x = \frac{0}{0}$; ainsi que cela doit être, puisque par $c = a$, les deux membres sont *identiques* quelle que soit la valeur de x. Néanmoins la suppression du facteur $a - c$ commun doit toujours se faire afin de donner l'une des véritables valeurs de x qui répondent à la supposition de $c = a$; et cette valeur véritable est $x = \frac{2}{5}a$.

Le symbole de l'indétermination peut s'interpréter dans

$$a^3x^2 + c^5 = c^3x^2 + a^5.$$

Car les deux termes de x ayant le facteur commun $a - c$, l'hypothèse de $c = a$ donne $x = \frac{0}{0}$. Mais en changeant c en $-c$, le facteur commun $a - c$ devient $a + c$; et soit qu'on supprime ou qu'on ne supprime pas ce facteur, la nouvelle équation, par $c = a$, donne toujours $x = \pm a$.

Pour $b = a$, l'inconnue x est indéterminée dans l'équation

$$ax^2 - b^2x + a^2b = bx^2 - a^2x + ab^2.$$

C'est que le facteur $a - b$ est commun aux deux membres de l'équation préparée; et en le supprimant, l'équation résultante donne $x = -a$ et $x = -b$. Ces deux valeurs négatives s'interprètent en changeant simplement x en $-x$ dans l'équation proposée. Et si l'on y change seulement b en $-b$, l'indétermination disparait pour $a = b$; car alors $a + b$ est facteur des deux membres de l'équation proposée. On trouve alors $x = b$ et $x = -a$.

Enfin, si l'on connait la hauteur h d'un triangle, ainsi que les deux côtés latéraux a et c; le calcul des projections x et y des côtés a et c, sur la droite indéfinie contenant la base b, donne $x = \pm m$ et $y = \pm n$. Or, ces longueurs sont mesurées sur la droite indéfinie, à partir du pied de h; et les combinaisons des signes donne à b quatre valeurs égales et de signes contraires deux à deux. Il en résulte donc quatre triangles égaux deux à deux et *symétriquement* disposés de part et d'autre de la hauteur h. — On trouve immédiatement et sans calcul ces quatre triangles à l'aide de deux arcs circulaires dont a et c sont les rayons, etc.

35. Voici maintenant plusieurs problèmes d'interprétation dans les éléments de géométrie numérique :

I. *Calculer le rayon* R *numérique du cercle dont l'aire* A *est donnée.* — On a

$$R = \pm\sqrt{(A:\pi)}.$$

La valeur négative de R est ici *insignifiante*, puisqu'il ne s'agit que de calculer la longueur du rayon et non sa *position* autour du centre. — Il est clair que ce rayon peut avoir une infinité de positions différentes et que, pour interpréter le double signe de la valeur de R, il suffit d'observer qu'en faisant tourner 2R autour du centre fixe, la valeur positive de R décrit le premier demi-cercle, tandis que la valeur négative, toujours mesurée en sens directement opposé sur ce diamètre mobile, décrit la seconde moitié du cercle proposé.

II. *Par un point donné* P *mener une droite telle que la corde interceptée sur cette droite, par une circonférence tracée, ait la longueur donnée* 2c.

Supposons d'abord le point P situé sur un diamètre AB : on connaît donc les distances $PA=a$ et $PB=b$. Soit d'ailleurs x la partie inconnue PD de la corde CD ou $2c$ à tracer : l'autre partie PC sera $2c-x$; et, d'après la propriété des parties numériques de deux cordes qui se coupent dans le cercle, on a

$$x(2c-x)=ab;\ \text{d'où}\ x=c\pm\sqrt{c^2-ab.}$$

Il est facile de construire ces deux valeurs positives, lesquelles doivent se mesurer dans le même sens, à partir de P, sur la même droite mobile autour de ce point fixe. De sorte que si $c^2>ab$, le problème a deux solutions.

Mais ces deux solutions se réduisent à une seule, perpendiculaire en P à AB, si $c^2=ab$. Et si $c^2<ab$, les deux valeurs de x étant alors imaginaires, le problème est impossible : c'est une impossibilité relative, signifiant qu'alors le point P ne saurait être sur le diamètre AB.

On peut, en effet, interpréter les valeurs imaginaires et résoudre un problème avec les mêmes données générales a, b, c. Pour cela, il suffit de changer simplement a en $-a$; ce qui donne

$$x(x-2c)=ab\ \text{et}\ x=c\pm\sqrt{c^2+ab.}$$

Comme alors la distance a, devenue négative, est mesurée en sens directement contraire et place le point donné P sur le prolongement de BA, les deux valeurs réelles de x résolvent le problème : *Par un point* P *donné hors d'un cercle tracé, mener une sécante telle que la corde interceptée sur elle ait une longueur donnée* 2c.

Ici, x désigne la sécante entière : sa valeur positive étant construite et prise pour rayon de l'arc dont le nouveau point P est le centre, détermine la seconde extrémité E de la corde cherchée $2c$. Quant à la valeur négative de x, elle doit être mesurée en sens opposé sur le prolongement EP de la droite tournant autour du point fixe P. Et comme alors cette valeur exprime la longueur de la partie extérieure de la nouvelle sécante, il en résulte, de l'autre côté de PAB, la première extrémité de la corde cherchée $2c$, toujours moindre que AB.

Le nouveau problème aura donc toujours deux solutions *égales*, *symétriques* par rapport à PAB. Aussi l'arc circulaire, de centre P et de rayon égal à la valeur positive de x, coupe-t-il la circonférence proposée aux deux points E et E′ qui déterminent les deux sécantes cherchées PE et PE′. Cela simplifie de moitié la solution complète, et tel est un avantage de la symétrie. De plus, soit K le point où l'arc circulaire coupe PAB : les deux arcs KE, KE′ sont égaux et symétriques par rapport à PAB, aussi bien que les angles KPE, KPE′; et le premier étant *positif*, le second est *négatif*.

On voit d'ailleurs que si $2c = 0$ d'où $PE = PE' = \sqrt{ab}$, E et E′ sont les points de contact des deux tangentes égales, menées du point P à la circonférence proposée.

III. *Mener les tangentes communes à deux cercles extérieurs tracés.*

Soient A et B les centres, a et b les rayons des deux cercles donnés. Soit d la distance AB des centres et supposons d'abord $a > b$: une tangente extérieure commune coupe donc le prolongement de AB en un point P, et il s'agit de calculer la distance $BP = x$. Pour cela, on sait que les rayons $AM = a$ et $BN = b$, menés aux points M et N de contact, sont parallèles comme étant perpendiculaires à la tangente; les deux triangles PAM et PBN sont donc équiangles et donnent

$$a : b = d + x : x; \text{ d'où } a - b : b = d : x.$$

On sait construire cette quatrième proportionnelle x; mais pour la calculer, il suffit de supposer toutes les droites exprimées en nombres de la même unité linéaire u; car cette unité disparaissant des deux termes de chaque rapport de la proportion, les lettres a, b, d, x représentent alors des nombres abstraits, exprimables ou inexprimables en chiffres, et la proportion donne la formule :

$$x = \frac{bd}{a - b} \dots. \ (1)$$

Pour la seconde tangente commune extérieure, les rayons a et b sont mesurés en sens directement contraires ou sur les prolongements MA et NB des deux droites indéfinies, tournant autour des centres fixes A et B, sans cesser d'être parallèles. Donc les rayons a et b sont négatifs ou se changent en $-a$ et $-b$ dans la formule (1). Et comme en changeant les signes du numérateur et du dénominateur de la nouvelle formule, celle-ci conserve la même valeur et devient la proposée (1), on voit que la seconde tangente commune extérieure passe aussi par le point P; et il en est de même de toute droite joignant les extrémités de deux rayons parallèles, situés d'un même côté de ABP.

Maintenant, les deux droites indéfinies peuvent tourner autour des centres fixes A et B, sans cesser d'être parallèles, mais de telle sorte que les rayons a et b, situés de part et d'autre de AB, soient perpendiculaires à une même droite ; laquelle alors est une tangente commune intérieure. Dans ce cas, l'un des deux rayons devient négatif, comme mesuré en sens directement opposé, sur l'une des droites mobiles. La formule (1) s'applique donc aux deux tangentes intérieures communes, en y changeant successivement a en $-a$ et b en $-b$. Et comme chaque fois la longueur x est négative et doit se mesurer en sens contraire, de B et Q sur BA, on voit qu'en posant $BQ = x'$, on aura, pour calculer le point Q où les deux tangentes communes intérieures coupent la distance AB, la formule

$$x' = \frac{bd}{a + b} \dots. \ (2)$$

Menant donc, de chacun des points P et Q, deux tangentes à l'une des deux circonférences, elles seront aussi tangentes à l'autre, et l'on aura ainsi les quatre tangentes communes cherchées. Car chacune sera perpendiculaire aux extrémités des deux rayons a et b, ainsi que le suppose la mise en équation.

On connaît la construction plus simple des quatre tangentes, savoir : du centre A et avec les rayons $a+b$ et $a-b$, on décrit deux circonférences, à chacune desquelles on mène, par le point B, deux tangentes, etc.

Nous supposons $a > b$ et les deux cercles extérieurs, d'où $d > a + b$. Supposons maintenant que les deux cercles se touchent extérieurement et qu'on ait $d=a+b$. Dans ce cas, la distance x diminue et il vient $x'=b$: il y a toujours deux tangentes communes extérieures, mais une seule intérieure, perpendiculaire sur AB au point où les deux circonférences se touchent. — Si elles se coupent, ce qui suppose $d<a+b$ et $d>a-b$, d'où $x'<b$ et $x>b$, il n'y a plus de tangentes intérieures, mais encore deux tangentes communes extérieures ; ce qui est d'ailleurs évident. — Enfin, si les deux cercles se touchent intérieurement, d'où $d=a-b$, $x'<b$ et $x=b$, il est clair que les quatre tangentes communes se réduisent à une seule extérieure.

Pour compléter la discussion des formules (1) et (2), dans lesquelles $d>a+b$ et $a>b$, il faut, a restant constant, faire croître b par infiniment petits. Il est clair qu'alors x et x' croîtront de la même manière, mais x beaucoup plus rapidement que x' ; tellement que si $b=a-i$, i désignant un nombre infiniment petit, le point P est à une distance infinie de B et le point Q infiniment près du milieu O de AB. Enfin, si b devient rigoureusement égal à a, ce qui donne $x'=\frac{1}{2}d$ et $x=bd$ sur 0 (symbole de la non-existence), le point Q coïncide avec le milieu O et le point P cesse d'exister ; comme cela doit être, puisque les deux tangentes communes extérieures sont alors parallèles à la distance AB et ne peuvent la rencontrer.

Corollaire. Les formules (1) et (2) donnent facilement

$$d+x:d-x'=x:x', \text{ ou } AP:AQ=BP:BQ\ldots. \quad (3)$$

D'ailleurs, si l'on mène à volonté deux diamètres parallèles $2a$ et $2b$, ces diamètres sont les bases d'un trapèze dont les deux côtés latéraux vont se couper au point P, tandis que les deux diagonales se coupent au point Q. La proportion (3) démontre donc que : *dans tout trapèze, les intersections* Q *et* P *des diagonales et des côtés latéraux divisent la médiane* AB *des deux bases en quatre segments proportionnels.* — On peut voir dans quel cas ce trapèze est un maximum.

Remarques. La discussion précédente conduit à plusieurs propositions remarquables que voici indiquées très-brièvement :

1° Il est facile d'expliquer pourquoi le point P est appelé *centre de similitude directe* et le point Q *centre de similitude inverse* des deux circonférences proposées.

2° Par chacun des centres de similitude P et Q, on peut mener deux sécantes telles, que la somme des cordes qui en résultent, pour chacune, dans les deux circonférences, ait une longueur donnée m, moindre que la somme des diamètres. — Le problème peut avoir quatre solutions, faciles à construire, même quand m serait la différence des deux cordes.

3° La proportion (3) se transforme, comme on sait, en une proportion *harmonique ;* d'où résultent les propriétés, tant du *faisceau* que des *pôles* et des *polaires* dans le cercle, etc.

4° Menant, par le milieu d'une tangente extérieure commune à deux circonférences extérieures, la perpendiculaire à la distance des centres; les tangentes aux deux courbes, partant d'un point quelconque de cette perpendiculaire indéfinie, sont égales entre elles. — C'est ce qu'on démontre aisément par deux couples de triangles rectangles. On démontre de même que :

5° Si deux circonférences se coupent, la corde commune étant prolongée dans les deux sens, passe par les milieux des deux tangentes extérieures communes. Non-seulement ces prolongements jouissent de la propriété de la perpendiculaire précédente, nommée *axe radical* des deux cercles; mais les deux moindres cordes des deux circonférences, tirées d'un point quelconque de la corde commune, sont égales entre elles.

6° Les axes radicaux de trois cercles, considérés deux à deux, se coupent en un même point, appelé *centre radical* de ces trois cercles. Il en résulte la construction plus simple de l'axe radical de deux cercles tracés, en décrivant un troisième cercle qui coupe les deux proposés, etc.

7° Enfin, les droites qui passent par les deux intersections de la circonférence O avec chacune des circonférences O_1, O_2, O_3, ... tracées dans le plan et toutes ces dernières ayant les deux points A et B communs, vont se couper sur la droite AB, prolongée ou non, en un même point P, centre radical de tous les cercles proposés. De plus, M et N désignant les contacts des tangentes au cercle O, menées par P, les circonférences ABM et ABN touchent le cercle O en M et N.

IV. *Deux droites indéfinies* XX' *et* YY' *se coupant à angles droits au centre* O *d'une circonférence tracée, de rayon donné* a, *mener à cette courbe une tangente telle que sa partie entre les deux droites indéfinies ait une longueur* b *donnée.*

Supposons le problème résolu et soit $AB=b$ la partie de la tangente terminée en A et B à OX et à OY. Menons le rayon a au point de contact, et soit $OA=x$, $OB=y$: il est clair qu'on a

$$x^2+y^2=b^2 \text{ et } xy=ab.$$

Ces deux équations donnent aisément celles-ci :

$$x+y=\pm\sqrt{b^2+2ab}=\pm m,$$
$$x-y=\pm\sqrt{b^2-2ab}=\pm n.$$

Les longueurs m et n sont deux moyennes proportionnelles, faciles à calculer et à construire. De plus, à cause de $b>2a$, on a $m>n$; d'où il vient

$$2x=\pm m\pm n \text{ et } 2y=\pm m\mp n.$$

Si donc $a=24$ et $b=50$, on trouve $m=70$ et $n=10$; d'où résultent les huit systèmes de valeurs :

$$x=40,\quad 40,-40,-40,\quad 30,\quad 30,-30,-30,$$
$$y=30,-30,\quad 30,-30,\quad 40,-40,\quad 40,-40.$$

L'interprétation des longueurs positives et négatives correspondantes fait voir que le problème a huit solutions, formant deux losanges circonscrits, égaux entre eux; car l'un peut, en tournant autour du centre, aller coïncider avec l'autre. — L'aire de chacun est exprimée par 2400.

Le minimum de b est le côté $2a$ du carré circonscrit ; vu que pour $b<2a$, x et y sont imaginaires. Ici le symbole imaginaire désigne une *impossibilité absolue;* car en changeant b en $-b$ ou a en $-a$, x et y restent toujours imaginaires.

La symétrie de chacun des deux losanges permet d'abréger de moitié leurs constructions avec la règle et le compas : aussi le côté b est-il alternativement positif et négatif dans chacun. — Il en serait de même des constructions s'il s'agissait, 1° de *mener une tangente* z, *hypoténuse du triangle rectangle équivalent au carré donné* c^2 ; 2° de *tracer une tangente terminée aux deux côtés de l'angle droit au centre et divisée, par le point de contact, en deux parties dont l'une soit quadruple de l'autre.* — Chaque fois il y a huit solutions et deux losanges égaux circonscrits.

V. *Diviser la droite donnée* AB *en deux segments dont les carrés numériques soient entre eux dans le rapport des deux droites numériques données* a *et* b.

Soit d la longueur connue de AB. Supposons que le point P de division cherché soit placé entre A et B : les deux segments numériques inconnus sont donc $PA=x$ et $BP=d-x$. Ainsi, en vertu de l'énoncé, on a

$$x^2:(d-x)^2=a:b\,;\ \text{d'où}\ (a-b)x^2-2adx=-ad^2.$$

Multipliant les deux membres par $a-b$, puis regardant $(a-b)x$ comme l'inconnue qu'il faut d'abord calculer, on trouve

$$(a-b)\,x=d(a\pm\sqrt{ab}).$$

Si $a>b$, les deux valeurs de x, d'ailleurs faciles à construire, sont toutes les deux positives, l'une plus grande que d, donnant $d-x$ négatif, et plaçant le point P sur le prolongement de AB, tandis que la seconde valeur positive de x est plus petite que d et place le point P cherché entre A et B, comme le suppose la mise en équation. Mais si $a<b$, les deux valeurs de x sont l'une positive $<d$, plaçant le point P entre a et b, et l'autre négative, déterminant le point P sur le prolongement de BA. — Dans les deux cas, le problème général a deux solutions; mais il n'en aurait qu'une seule s'il renfermait la *condition particulière* que le point P fût placé entre A et B, ou bien sur l'un des prolongements de AB.

Observons encore que si $a=b$, le signe — du radical donne $x=\frac{0}{0}$. Mais ce symbole n'est pas celui de l'indétermination : il vient ici du facteur *étranger* $a-b$, introduit dans la résolution de l'équation du second degré, et qu'on sait faire disparaître des deux termes de la double expression de x. Pour $a=b$, la nouvelle formule se tire de l'équation $x^2:(d-x)^2=1$; il en résulte donc $x=\frac{1}{2}d$ et $x=d:0$. Dans ce cas, le problème n'a qu'une seule solution : il en aurait encore deux, dont une infinie, si a surpassait b d'un nombre infiniment petit. — Dans ce qui va suivre, on fait usage de certaines relations *trigonométriques*.

VI. *Construire le triangle* ABC, *connaissant la base* $AC=b$, *l'angle* B *du sommet et le rapport* m *des autres côtés* $AB=x$ *et* $CB=y$. — Il faut d'abord calculer ces deux côtés. Pour cela, on a les deux équations :

$$x=my\ \text{ et }\ x^2+y^2-2xy\cos B=b^2.$$

Éliminant x et posant $k=b:\sqrt{1+m^2-2m\cos B}$, le nombre k sera connu, et l'on aura

$$y=\pm k;\ \text{d'où}\ x=\pm km.$$

Le rapport donné m étant essentiellement positif, les deux côtés

x et y sont toujours de même signe; le problème admet donc les deux solutions :

$$y=k,\ x=km \text{ et } y=-k,\ x=-km.$$

La première solution donne le triangle ACB cherché. Quant à la seconde, où les longueurs négatives $-k$, $-km$ doivent être mesurées en sens directement opposés sur deux droites mobiles et à partir de leurs points fixes C et A, on prolongera BC de $CB'=CB$ et BA de $AB'=AB$, puis on fera tourner ces prolongements autour de C et A jusqu'à ce que les deux points B' se réunissent en un seul : on aura ainsi le triangle ACB' égal au premier ACB et *symétriques* tous les deux par rapport à AC. Aussi les arcs circulaires, de centres A, C et de rayons km, k, se coupent-ils aux deux points B et B'. — Il n'y a réellement qu'un seul triangle cherché; mais ce triangle peut avoir quatre *positions* différentes sur la même base AC. Les deux autres positions résultent de ce que, au lieu de poser $x=my$, on aurait pu prendre $y=mx$; vu que l'antécédent du rapport donné m n'est pas désigné dans l'énoncé, et peut être indifféremment x ou y.

Posant $z^2=1+m^2-2m\cos B$, il est clair que z est la base numérique du triangle dont on connaît numériquement l'angle B du sommet, ainsi que les deux côtés latéraux 1 et m. On peut donc construire ce triangle et par suite sa base z; d'où $z:b=u:y$ et $z:b=mu:x$, u désignant l'unité linéaire. Mais le calcul est toujours préférable pour l'exactitude des résultats et pour apprécier les approximations.

Ici, il faut opérer par logarithmes, et pour cela, on a d'abord

$$z^2=(1+m)^2-4m\cos^2\tfrac{1}{2}B;\ \text{d'où}\ v^2=4m\cos^2\tfrac{1}{2}B$$

$$\text{et}\ z^2=(1+m+v)(1+m-v).$$

La valeur de z se calculera aisément par logarithmes, dès qu'on aura calculé de la même manière la valeur de v; et pour cela, il faudra rendre homogène l'équation en v^2 et écrire $Rv^2=4m\cos^2\frac{1}{2}B$, R désignant le rayon tabulaire, pris d'abord pour unité linéaire; et l'on sait que 10 est le logarithme ordinaire de R. — L'aire T du triangle ABC se calcule par la formule homogène :

$$2RT\ z^2=b^2m\sin B.$$

VII. *Un cercle et sa corde* AB *étant tracés, mener du milieu* M *de l'un des arcs soutendus une droite telle que sa partie entre la cir-*

conférence et la corde ou ses prolongements ait une longueur donnée 2b. (fig. facile à construire).

Soit MDI l'une des droites cherchées, I appartenant à la circonférence et D à la corde AB elle-même. Menant le diamètre MN perpendiculaire à la corde AB et passant par le milieu C de cette corde : en supposant toutes les droites rendues numériques d'après la même unité linéaire sous-entendue, les données du problème sont $AC = CB = a$, $DI = 2b$, $MC = c$ et $MA = MB = d$, tandis qu'il y a seulement deux inconnues $MD = x$ et $CD = y$. On a les deux équations :

$$x^2 = c^2 + y^2 \quad \text{et} \quad 2bx = a^2 - y^2.$$

Éliminant y^2, on trouve successivement, à cause de $d^2 = a^2 + c^2$:

$$x^2 + 2bx = d^2 \quad \text{et} \quad x = -b \pm \sqrt{d^2 + b^2}.$$

Le radical représente l'hypoténuse k du triangle rectangle dont les côtés donnés de l'angle droit sont d et b, celui-ci pris sur AN, et ainsi $x = -b \pm k$; d'où $x = k - b$ et $x = -(b + k)$.

On n'a que le seul point M de la droite sur laquelle, à partir de ce point, les valeurs de x doivent se mesurer ; cette droite est donc nécessairement mobile autour du point fixe M. Et comme évidemment $k > b$, la première valeur ci-dessus de x est positive. Il faut donc d'abord la construire sur MN, à partir de M ; puis du centre M et avec la longueur trouvée pour rayon, décrire un arc circulaire coupant AB en deux points D et D_1, *symétriques* par rapport à MN : alors MDI et MD_1I_1 sont deux droites, solutions du problème proposé, vu que $D_1I_1 = DI = 2b$. Ces deux solutions se réduisent à une seule, si $2b = CN$, et sont impossibles, si $2b > CN$.

Quant à la seconde valeur ci-dessus de x, elle est entièrement négative. On doit donc la construire, à partir de M, sur le prolongement de NM. Si donc du centre M et du rayon égal à la longueur ainsi construite, on décrit une circonférence, elle coupera les prolongements de AB en deux points D_2 et D_3, symétriques par rapport à MN. De sorte que les deux droites MI_2D_2 et MI_3D_3 sont deux autres solutions, évidemment toujours possibles, du problème proposé. Celui-ci a donc généralement quatre solutions, égales et symétriques deux à deux par rapport à MN ; ce qu'on pouvait aisément prévoir. Les quatre solutions peuvent se réduire à trois ou à deux seulement.

Si l'on voulait interpréter la valeur négative de x par le changement de x en $-x$ dans l'équation finale $x^2 + 2bx = d^2$, on trouverait la même nouvelle équation que si l'on changeait $2b$ en $-2b$, savoir : $x^2 - 2bx = d^2$. Celle-ci donnant $x = b \pm k$, la valeur positive $x = b + k$ est précisément celle qui s'est présentée avec le signe $-$, avant aucun changement. D'ailleurs, la détermination des deux points D_2 et D_3 s'est faite absolument comme si, x étant positive, on avait porté $k + b$ sur MN, à partir de M. Donc pour passer de la solution MDI à la solution MI_2D_2, ce n'est pas x qui change de signe ; c'est $2b$. On le vérifie par l'*équation auxiliaire ;* car désignant par z la corde dont x est un segment, il est clair que pour la solution MDI, on a $z = x + 2b$, tandis que pour la solution MI_2D_2, il vient $z = x - 2b$. Donc $2b$ pour le point D, devient $-2b$ pour le point D_2, tandis que la longueur x reste positive. Le signe $-$ de x provient donc du signe $-$ de $2b$. On voit de plus que la distance négative $-2b$ est mesurée en sens directement opposé sur la droite mobile, à partir du point où celle-ci rencontre la droite fixe AB indéfinie : c'est toujours le second principe du positif et du négatif.

L'interprétation des longueurs négatives devient beaucoup plus facile lorsqu'on prend la distance y pour l'inconnue du problème ; vu que cette distance est mesurée sur la droite fixe AB, à partir du point C invariable. Or, éliminant x des deux équations proposées, on trouve une équation finale en y^2 et y^4 ; et k désignant la longueur construite plus haut, cette équation donne

$$y = \pm \sqrt{a^2 + 2b^2 \pm 2bk}.$$

Cette formule est plus compliquée que l'expression de x ; mais aussi elle conduit, sans difficulté, aux quatre solutions du problème proposé. Car les deux valeurs positives de y déterminent les deux points D et D_2, tandis que les deux valeurs négatives donnent les deux points D_1 et D_3. — Il est facile de voir dans quels cas deux valeurs de y sont nulles ou imaginaires : ces deux dernières valeurs désignent deux *impossibilités absolues.*

VIII. *Calculer l'aire* T *du triangle dont on connaît numériquement le côté* c, *l'angle opposé* C *et la différence* d *des deux autres côtés* x *et* y. — Il faut d'abord calculer ces deux autres côtés à l'aide des deux équations

$$x - y = d \text{ et } c^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos C.$$

Éliminant x et posant $m = (c^2 - d^2) : \sin^2 \frac{1}{2} C$, on trouve

$$y = -\tfrac{1}{2} d \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{d^2 + m} \text{ et } x = \tfrac{1}{2} d \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{d^2 + m}.$$

Substituant ces valeurs dans $T=\frac{1}{2}xy$ sin C et réduisant, il vient

$$T=\frac{1}{4}(c+d)(c-d)\cot\frac{1}{2}C.$$

Telle est l'expression cherchée de l'aire du triangle : elle est calculable par logarithmes en y faisant reparaître le rayon R tabulaire, *diviseur sous-entendu* de $\cot\frac{1}{2}C$. — Nous avons supposé l'angle C *aigu;* mais s'il est *obtus*, $\cot\frac{1}{2}C$ devient $\tang\frac{1}{2}C$. Et si l'angle C est *droit*, T équivaut au carré fait sur le demi-côté de l'angle droit du triangle rectangle dont c est l'hypoténuse et d l'autre côté.

Il est facile de voir que $(x+y)^2=c^2+4T\cot\frac{1}{2}C$. Or, il est évident que les plus grandes valeurs de T et de $x+y$ répondent à $d=0$ ou à $x=y$. *Le plus grand de tous les triangles de même base et de même angle au sommet est donc le triangle isocèle ; lequel en même temps a le plus grand périmètre.*

Maintenant, pour interpréter sur le papier les valeurs précédentes de x et de y, ou tracer le triangle, on prend la droite AB $=c$; puis des centres A, B et avec les rayons égaux aux longueurs positives x et y, on décrit deux arcs circulaires se coupant en un point C; et alors ABC est le triangle cherché. — Si B, A étaient les centres des arcs décrits avec les rayons x et y précédents, ces deux arcs se couperaient en un point C_1 ; et le triangle résultant ABC_1 serait égal au triangle ABC, mais *inversement situé* du même côté de la base AB.

De plus, la valeur négative de x est numériquement égale à la valeur positive de y, et réciproquement. D'ailleurs, puisque chaque longueur négative doit se mesurer en sens contraire sur la même droite et à partir du même point fixe, alors même que la droite serait mobile autour de ce point; on voit que si l'on prolonge CB de $BC_2=AC$ et CA de $AC_2=BC$; qu'ensuite on fasse tourner ces deux prolongements autour de B et A jusqu'à ce que les deux points C_2 se réunissent en un seul, on aura ainsi le triangle $ABC_2=ABC$. — Le triangle ABC_1 donne de même le triangle $ABC_3=ABC$.

Il n'y a qu'un seul triangle qui réponde aux données du problème ; mais ce triangle peut avoir quatre positions différentes autour de la base commune AB, lesquelles sont *symétriques* deux à deux par rapport à cette base. — Ici encore la symétrie abrége de moitié les constructions. Car les arcs circulaires, de centres A et B_1 ayant pour rayons les valeurs positives de x et de y, se coupent aux points C et C_3, tandis que les deux arcs de mêmes rayons positifs, mais de centres B et A, se coupent aux deux points C_1 et C_2. — Les points C et C_1, C_3 et C_2 sont symétriques par rapport à la perpendiculaire indéfinie élevée au milieu de AB. — Enfin, on connaît la construction, plus simple et plus élémentaire, du triangle cherché quand les données sont tracées sur le papier.

IX. *Calculer l'aire* T *du triangle dont on connaît numériquement la base* c, *l'angle du sommet* C *et la somme* n *des deux autres côtés* x *et* y. — Ici les trois équations donnent directement l'expression de l'aire T cherchée, calculable par logarithmes. Mais si l'on veut calculer les deux côtés x et y, chacun aura deux valeurs positives telles que la plus grande de l'un répondra à la plus petite de l'autre. Interprétant ces deux systèmes de valeurs positives, on verra, comme dans le précédent problème, qu'il n'y a qu'un seul triangle, mais que ce triangle peut avoir quatre positions différentes, symétriques deux à deux par rapport à la base commune. — Ici encore la construction du triangle est plus simple et plus élémentaire, lorsque les données sont tracées sur le papier.

X. *Construire le rectangle équivalent au carré de côté* n *donné, connaissant la diagonale* d *de ce rectangle.* — Pour la construction cherchée, il faut d'abord calculer les côtés x et y du rectangle, puis le tracer ensuite, après avoir construit les valeurs résultantes de x et de y, à l'aide de la règle et du compas. Il n'y a qu'un seul rectangle qui résulte des données du problème; mais les principes du positif et du négatif lui donnent huit positions différentes, symétriques deux à deux autour du sommet commun. — On peut faire $d=130$ et $n^2=6000$. — On peut calculer le maximum de n, le nombre d étant seul connu, et le minimum de d, le nombre n étant seul donné.

XI. *Calculer l'aire* T *du triangle* ABC *dans lequel on connaît numériquement l'angle* B *du sommet, la hauteur* h *et la médiane* m *de la base* b. — Soient a et c les côtés numériques opposés aux angles A et C : on a les trois équations

$$2m^2+\tfrac{1}{2}b^2=a^2+c^2,\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B \text{ et } bh=ac\sin B.$$

L'Élimination des inconnues a et c donne aisément

$$b^2=4m^2-2bh\cot B.$$

Comme ici la valeur négative de b est absolument *insignifiante*, cette équation finale donne seulement

$$b = -h \cot B + \sqrt{4m^2 + h^2 \cot^2 B}.$$

Pour rendre cette formule calculable par logarithmes, on pose

$$2m \cot x = h \cot B;$$

puis observant que $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{1}{2} x$, etc., on trouve

$$b = 2m \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}x; \text{ d'où } T = hm \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}x.$$

Ces deux formules se calculent par logarithmes en y faisant reparaître le rayon tabulaire R diviseur, et après avoir déterminé l'angle auxiliaire x au moyen des tables.

Nous avons supposé l'angle B aigu; mais s'il est droit, on aura $\cot B = 0$ et $b = 2m$, comme cela doit être. Enfin, si B obtus, il en est de même de l'angle auxiliaire x, et $\operatorname{tang}\frac{1}{2}x$ devient $\cot\frac{1}{2}x$ dans les deux formules précédentes.

36. Ce qui précède, montre bien le rôle important que les différents symboles numériques jouent dans la géométrie élémentaire; et il en résulte que la *symétrie* simplifie toujours la solution des problèmes, soit graphiques, soit numériques. — C'est aussi la symétrie et la régularité des figures qui rendent très-faciles les démonstrations des théorèmes que nous énonçons ci-dessous, pour exercer les élèves aux applications des théories, dans l'étude des figures planes, dont les tracés sur le papier sont d'ailleurs des exercices utiles.

I. Les quatre sommets des triangles équilatéraux, dont T désigne l'aire de chacun, construits extérieurement sur les côtés c d'un carré, comme bases, sont les sommets d'un carré dont l'aire vaut $2c^2 + 4T$.

II. Dans tout triangle équilatéral T, les sommets extérieurs des carrés, construits extérieurement sur les côtés c, déterminent un hexagone inscriptible, ayant trois axes de symétrie égaux chacun à $\frac{1}{2}c(3 + \sqrt{3})$. L'aire de chaque hexagone vaut $3c^2 + 4T$; et l'on peut calculer le rayon du cercle circonscrit.

III. Si, dans les deux sens, on prolonge chacun des côtés c d'un carré de la longueur égale à ce côté, on aura les sommets d'une *croix*, formée de cinq carrés égaux, et qu'on transforme en un carré équivalent par simple transposition de parties. Les huit sommets de la croix sont ceux d'un octogone, symétrique par rapport à un centre, ayant quatre axes de symétrie, égaux et perpendiculaires deux à deux, dont les longueurs sont $3c$ et $c\sqrt{10}$. L'aire de cet octogone vaut $7c^2$; et si l'on prolonge dans les deux sens chacun des quatre côtés $c\sqrt{2}$, ces prolongements se coupent aux sommets d'un carré équivalent à $8c^2$.

IV. Dans tout triangle régulier T, si l'on prolonge dans les deux sens chacun des côtés c d'une longueur égale à ce côté, on aura les sommets d'un hexagone inscriptible, ayant trois axes égaux de symétrie. L'aire et le contour de cet hexagone valent respectivement 12T et $9c$, tandis que le rayon du cercle circonscrit équivaut à $\frac{1}{3}c\sqrt{15}$. — Tous les prolongements pourraient avoir la longueur a quelconque donnée.

V. Chaque côté donné c d'un triangle équilatéral soutend un arc circulaire a, touché à ses extrémités par les deux autres côtés; et alors on a, pour calculer l'arc a, son rayon r et l'aire S du secteur circulaire, les formules :

$$a=\tfrac{2}{3}\pi c,\quad r=\tfrac{1}{3}c\sqrt{3}\ \text{ et }\ S=\tfrac{1}{9}\pi c^2\sqrt{3}.$$

De plus, les trois arcs a se coupant aux sommets du triangle et à son centre, forment une *rosace* triangulaire, égale à la rosace décrite des sommets du triangle, comme centres, et avec le rayon r : il en résulte la rosace hexagonale dont on sait calculer le contour et l'aire; vu qu'elle est décrite des sommets d'un hexagone régulier dont r est le côté.

VI. Prolongeant dans les deux sens chacun des côtés c d'un carré de la longueur égale à la demi-diagonale $\frac{1}{2}c\sqrt{2}$, on a les sommets d'un octogone régulier, de côté c et d'aire $2c^2(1+\sqrt{2})$. Le rayon r de cet octogone se calcule par $r^2=\frac{1}{4}c^2(4+2\sqrt{2})$. Enfin, l'octogone proposé est inscrit dans le carré dont le côté a pour mesure $c(1+\sqrt{2})$.

VII. Réciproquement, si l'on cherche le côté a d'un carré tracé pour qu'en retranchant de ce carré quatre triangles rectangles isocèles égaux, il reste un octogone régulier de côté c donné, on trouvera $a=c(1+\sqrt{2})$. L'aire de l'un des carrés inscrits dans cet octogone a pour mesure $c^2(2+\sqrt{2})$.

VIII. Dans tout pentagone régulier P, 1° chaque diagonale est parallèle à un côté c; 2° elle est coupée en moyenne et extrême par chacune des deux diagonales partant du sommet du triangle dont elle est la base, et chaque fois c est le plus grand segment; 3° la distance des deux points d'intersection est le côté d'un pentagone régulier P_1 concentrique au proposé P; 4° P_1 est entouré de cinq autres pentagones réguliers égaux, ayant chacun un côté commun avec lui et un angle commun avec P; 5° les rayons de P sont divisés en moyenne et extrême par les centres des cinq pentagones égaux à P_1; 6° si l'on prolonge chacun des apothèmes de P d'une longueur égale, on arrive aux centres de cinq pentagones réguliers égaux à P et dont les sommets les plus éloignés de P sont ceux d'un pentagone régulier P_2 concentrique avec P; 7° les sommets de P_1 et ceux de P sont les sommets des angles *rentrants* et des angles *saillants* d'un décagone régulier *étoilé*, et il en est de même des sommets de P et de P_2; 8° les côtés de P_1 et de P_2, puis ceux des deux décagones réguliers étoilés ci-dessus, valent respectivement

$$\tfrac{1}{2}c(3-\sqrt{5}) \text{ et } \tfrac{1}{2}c(3+\sqrt{5}),\ \tfrac{1}{2}c(\sqrt{5}-1) \text{ et } \tfrac{1}{2}c(\sqrt{5}+1);$$

9° enfin, il en résulte évidemment

$$P_1=\tfrac{1}{4}P(3-\sqrt{5})^2 \text{ et } P_2=\tfrac{1}{4}P(3+\sqrt{5})^2;\ \text{d'où } P^2=P_1P_2.$$

IX. Dans tout pentagone régulier P, si l'on construit extérieurement des carrés sur les côtés c, on a les sommets d'un décagone régulier concentrique dont $10c$ et $2P+5c^2$ sont les mesures du contour et de l'aire.

X. Dans tout hexagone régulier H, de côté c, les diagonales non diamètres valent chacune $c\sqrt{3}$ et chacune est coupée par deux autres en trois parties égales, aux sommets d'un hexagone régulier H_1, concentrique. De plus, si l'on prolonge dans les deux sens les côtés de H jusqu'à ce qu'ils se rencontrent deux à deux, on a les sommets d'un hexagone régulier H_2 concentrique, de côté $c\sqrt{3}$; d'où $H_1=\frac{1}{3}H$, $H_2=3H$ et $H^2=H_1H_2$. Enfin, les sommets de H_1 et de H sont ceux des angles rentrants et des angles saillants d'un dodécagone régulier *étoilé*, double de H_1; tandis que le dodécagone régulier *étoilé*, dont les sommets sont ceux de H et de H_2 vaut 2H.

XI. Dans tout hexagone régulier H, si l'on construit extérieurement des carrés sur les côtés c, on a les sommets d'un dodécagone régulier, de côté égal à c et dont l'aire vaut $2H+6c^2$. Son rayon r est donné par $r^2=c^2(2+\sqrt{3})$; donc $3r^2$ en exprime l'aire.

XII. Pour qu'un dodécagone régulier, de côté c donné, puisse s'inscrire dans un hexagone régulier concentrique, il faut que le côté de celui-ci ait pour mesure $\frac{1}{3}c(3+2\sqrt{3})$. De plus, a, r et D désignant l'apothème, le rayon et l'aire du dodécagone, on a

$$a=\tfrac{1}{2}c(2+\sqrt{3}),\ r^2=c^2(2+\sqrt{3}),\ D=3r^2 \text{ et } r^2=2ac.$$

XIII. Les trois demi-circonférences intérieures décrites sur chacun des côtés c d'un triangle équilatéral, comme diamètre, passent chacune par les milieux des deux autres côtés et forment une rosace, dont l'aire a pour mesure $\frac{1}{4}c^2(\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3})$.

XIV. Dans tout triangle équilatéral, de côté c, si sur chacun des trois rayons égaux à $\frac{1}{3}c\sqrt{3}$, pris pour diamètre, on décrit une circonférence, les trois courbes passent par les milieux des côtés, sommets communs à deux rosaces triangulaires, l'une intérieure et l'autre extérieure au triangle. La somme des aires de ces deux rosaces équivaut au quart du cercle dont c est le rayon ; vu que ces deux aires ont pour mesures respectives :

$$\tfrac{1}{4}c^2(\tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}) \text{ et } \tfrac{1}{4}c^2(\tfrac{2}{3}\pi + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}).$$

XV. Les quatre demi-circonférences intérieures décrites sur les côtés c d'un carré, comme diamètres, se touchent au centre de ce carré et terminent une rosace à quatre feuilles, dont l'aire a pour mesure $\frac{1}{2}c^2(\pi - 2)$.

XVI. Les quatre quadrans intérieurs décrits des sommets d'un carré, comme centres, et avec le côté c pour rayon, se coupent mutuellement en trois parties égales sur les médianes c de ce carré, chaque point d'intersection divisant l'une des médianes en deux parties dont la plus grande vaut $\frac{1}{2}c\sqrt{3}$. Les quatre points de division sont les sommets d'un carré concentrique, dont chaque côté soutend le tiers du quadran et dont l'aire a pour mesure $c^2(2 - \sqrt{3})$. L'aire de la figure formée par les quatre tiers des quadrans et circonscrite au second carré, se calcule par $c^2(\frac{1}{3}\pi + 1 - \sqrt{3})$; tandis que l'aire de la rosace extérieure se réduit à $c^2(\frac{1}{3}\pi - 4 + 2\sqrt{3})$.

XVII. Les six demi-circonférences intérieures décrites sur les côtés c d'un hexagone régulier, comme diamètres, se coupent deux à deux sur les rayons de cet hexagone, aux sommets d'un hexagone régulier concentrique, de côté $\frac{1}{2}c$, et terminent une rosace dont l'aire totale équivaut au quart du cercle dont c est le rayon.

XVIII. Dans tout hexagone régulier, si des milieux des côtés c, comme centres, et avec l'apothème $\frac{1}{2}c\sqrt{3}$ pour rayon, on décrit six circonférences, 1° elles se coupent deux à deux aux milieux des côtés, sommets d'une rosace, dont l'aire a pour mesure $\frac{3}{4}c^2(2\pi - 3\sqrt{3})$; 2° elles se coupent aussi deux à deux sur les prolongements des rayons de l'hexagone et interceptent le côté du triangle équilatéral inscrit dans chacune; 3° enfin, l'aire de la rosace résultante équivaut au double de l'aire de la première.

XIX. Dans tout hexagone régulier, de côté c donné, les circonférences décrites sur les rayons, comme diamètres, se coupent deux à deux aux milieux des rayons, puis aux milieux des côtés, et terminent deux rosaces concentriques dont la différence des aires équivaut au demi-cercle ayant c pour rayon.

Remarque. Les lignes trigonométriques sont nécessaires pour calculer les différentes rosaces que fournit le pentagone régulier dont le côté c est donné, et dans lesquelles les circonférences décrites ont pour diamètres, 1° les côtés, 2° les apothèmes et 3° les rayons. On peut aussi considérer la rosace que donnent les circonférences ayant pour centres les milieux des côtés et pour rayons les apothèmes du pentagone, et encore la rosace lorsque les circonférences décrites, avec le rayon du pentagone, ont pour centres les sommets de ce dernier.

37. On sait que des applications convenables fixent les idées, éclaircissent les théories, en les approfondissant, et développent l'esprit de recherche. Il importe donc beaucoup que le professeur choisisse les *exercices*, théorèmes ou problèmes, et qu'il les approprie à son enseignement de telle sorte qu'ils aient pour résultat de donner aux élèves le désir de bien connaître et par conséquent l'amour du travail. Or, parmi les exercices les plus propres à produire ce double effet, on doit compter ceux dont le but est la détermination d'un *maximum* ou d'un *minimum;* vu d'ailleurs qu'il en résulte souvent d'utiles et de curieuses applications, ainsi que je l'ai fait voir en géométrie. — Voici plusieurs théorèmes faciles :

I. *Lorsque deux points* A *et* B *sont donnés d'un même côté de la droite tracée* MN, *le plus court chemin pour aller du point* A *au point* B, *en passant par un point* I *de* MN, *est celui pour lequel les deux angles* AIM *et* BIN *sont égaux entre eux.* — Menant AC perpendiculaire à MN et prolongeant AC de CD = AC, la droite DB coupe MN au point I cherché (à démontrer).

II. *De tous les triangles équivalents, ou ayant base commune et hauteurs égales, celui de moindre périmètre est isocèle.* — Car tous les triangles proposés ont leurs sommets sur une parallèle à la base commune, et la perpendiculaire au milieu de celle-ci rencontre la parallèle au sommet du triangle isocèle de moindre périmètre, d'après le théor. I; vu que les deux côtés latéraux de ce triangle font deux angles égaux avec la parallèle ci-dessus.

Corollaire. De tous les triangles équivalents, celui de moindre périmètre est équilatéral. — Car, si le périmètre minimum avait deux côtés inégaux, on pourrait, sans changer l'aire constante, rendre égaux ces deux côtés ; et alors on aurait un triangle équivalent et de périmètre moindre que le proposé minimum ; chose absurde.

III. Réciproquement, *le triangle isocèle est le plus grand de tous les triangles isopérimètres de même base commune.* — Si tous les triangles étaient équivalents, on vient de voir que le triangle isocèle aurait le moindre périmètre. Donc, pour que ce triangle isocèle devienne isopérimètre avec tous les autres, il faut que ses deux côtés égaux augmentent et restent égaux ; il faut donc aussi que sa hauteur augmente : donc il est le plus grand de tous.

Corollaire. Le triangle équilatéral est le plus grand de tous les triangles isopérimètres. — Car le triangle équilatéral diminue, sans que la longueur du périmètre change, lorsqu'on rend inégaux deux quelconques de ses côtés.

IV. *Parmi tous les trapèzes équivalents, c'est-à-dire ayant même hauteur et bases parallèles égales chacune à chacune, celui de moindre périmètre est isocèle.* — C'est ce qu'on démontre en divisant le trapèze proposé, non isocèle, en un triangle et un parallélogramme. — La réciproque est vraie.

V. *Le périmètre de tout quadrilatère est plus grand que celui d'un losange équivalent.* — D'après le théorème II ci-dessus, il est évident que le périmètre diminue en passant de tout trapèze et de tout quadrilatère, convexe ou concave, au quadrilatère équivalent composé de deux triangles isocèles inégaux, situés de part et d'autre de l'une des diagonales, base commune. Le périmètre diminue encore en passant de ce dernier quadrilatère, ainsi que de tout rectangle et d'un parallélogramme quelconque, au losange équivalent cherché.

Remarques. Suivant qu'on prend l'une ou l'autre diagonale pour base des constructions, dans tout quadrilatère convexe, on obtient deux losanges équivalents dont les périmètres inégaux sont moindres chacun que celui du quadrilatère. — Mais pour le rectangle, les deux losanges sont égaux. — De simples transpositions de parties transforment, 1° tout losange en un rectangle équivalent de moindre périmètre ; 2° tout rectangle en un losange équivalent et de contour plus petit.

VI. Réciproquement, *le losange est plus grand que tout quadrilatère isopérimètre.* — Si le losange était équivalent au quadrilatère, il aurait un périmètre plus petit que celui de ce dernier (V). Donc, pour que les deux figures soient isopérimètres, il faut que le contour du losange augmente; ce qui exige que ce losange devienne plus grand que le quadrilatère.

VII. *Le périmètre du carré est moindre que celui de toute figure plane équivalente, de trois ou quatre côtés.*

Soit x le côté du carré équivalent à la figure plane proposée et p le périmètre de cette dernière. Si elle est un triangle quelconque, de base b et de hauteur h, il est clair qu'on aura

$$x^2 = \tfrac{1}{2}bh \text{ et } p > b + 2h.$$

Élevant au carré les deux membres de l'inégalité, puis observant que d'après l'algèbre, *la somme des carrés de deux nombres est toujours plus grande que leur double produit*, tandis que $16x^2 = 8bh$, on aura successivement :

$$p^2 > b^2 + 4h^2 + 4bh,\ p^2 > 8bh > 16x^2 \text{ et } 4x < p.$$

Pour le secteur circulaire dont a est l'arc et r le rayon, il vient

$$x^2 = \tfrac{1}{2}ar \text{ et } p = a + 2r. \text{ De là donc } 4x < p.$$

Ce résultat s'applique au demi-cercle dont a est la demi-circonférence. — Ce mode de démonstration s'appliquerait directement au rectangle, au parallélogramme et au trapèze. Mais, comme le contour du losange est moindre que celui de tout quadrilatère équivalent (V), il suffit de faire voir que le contour du carré est moindre que celui du losange équivalent, de base b et de hauteur h. Or, pour cela on a

$$x^2 = bh \text{ et } p > 2b + 2h;\ \text{d'où } 4x < p.$$

Enfin, pour le trapèze circulaire, différence de deux secteurs dont r, r' sont les rayons et a, a' les arcs *semblables*, c'est-à-dire chacun la même fraction k de la circonférence à laquelle il appartient, d'où $a = 2\pi rk$ et $a' = 2\pi r'k$; il est facile de voir, en posant $r - r' = h$, qu'on aura

$$x^2 = \tfrac{1}{2}h(a + a') \text{ et } p = a + a' + 2h;\ \text{d'où } 4x < p.$$

VIII. Réciproquement, *le carré est plus grand que toute figure plane isopérimètre, de trois ou quatre côtés.* — Si le carré x^2 était équivalent à la figure plane F proposée, dont p est le périmètre, on vient de démontrer qu'on aurait $4x < p$. Donc, pour que $4x$ devienne égal à p, il faut que x augmente et par suite x^2. De sorte que si $4x = p$, on a $x^2 > \mathrm{F}$.

IX. *Parmi tous les secteurs de différents cercles et isopérimètres,* *le plus grand est celui dans lequel l'arc et le diamètre sont égaux au demi-périmètre donné.* — Soit S l'aire, p le périmètre, a l'arc et r le rayon du secteur circulaire cherché. On a donc

$$a+2r=p \text{ et } \tfrac{1}{2}ar=S; \text{ d'où } r=\tfrac{1}{4}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{16}p^2-S}.$$

Puisque p est seul donné, on voit que le *maximum* de S répond à $2r=a=\frac{1}{2}p$. Mais ces valeurs répondent aussi au *minimum* de p quand l'aire S est seule donnée.

Remarque. Soit k la fraction par laquelle il faut multiplier la circonférence pour avoir l'arc a ci-dessus, d'où $a=2\pi rk$. A cause de $a=2r$, il vient $k\pi=1$ et $k=1$ sur $\pi=0,3183099$. Convertissant l'arc a en degrés, minutes et secondes, on trouve $a=360°\times 0,31831=114°\,35'\,30''$, à moins d'un quart de seconde près, en plus. — On voit d'ailleurs que le secteur maximum est équivalent au carré fait sur $\frac{1}{4}p$.

X. *Parmi tous les quadrilatères formés avec quatre côtés donnés, dont deux opposés sont égaux, le plus grand est le trapèze isocèle.*

Soient a et b les longueurs des deux côtés opposés inégaux, c désignant la longueur de chacun des côtés égaux opposés. Supposant $a>b$ soient x et y les prolongements des côtés c jusqu'à leur intersection ; soient t et t' les deux triangles résultants, ayant un angle commun compris par les côtés x, y de t et compris par les côtés $c+x$, $c+y$ de t'. On a donc

$$t':t=(c+x)(c+y):xy.$$

Soit Q le quadrilatère formé avec les côtés donnés : il est évident que $Q=t'-t$, et qu'ainsi la proportion précédente donne

$$Q:t=c^2+cx+cy:xy.$$

D'ailleurs, pour l'aire t en fonction de ses côtés b, x, y, on a

$$16t^2=4x^2y^2-(x^2+y^2-b^2)^2.$$

Éliminant t et posant $x=n+v$, $y=n-v$, on trouve

$$4Q=(c^2+2cn)\sqrt{\left[4-\frac{(2n^2+2v^2-b^2)^2}{(n^2-v^2)^2}\right]}.$$

Si n a la valeur qui convient au maximum du quadrilatère Q, il est évident que ce maximum répond à $v=0$; d'où $x=y=n$ et $c+x=c+y$. Les deux triangles t et t' étant donc alors isocèles, b est parallèle à a et partant le quadrilatère Q maximum est un trapèze isocèle.

Remarque. On démontre en trigonométrie que : *De tous les quadrilatères formés avec quatre côtés donnés, le plus grand est inscriptible dans un cercle ;* et ce théorème fournit le précédent, comme corollaire immédiat.

XI. *Le polygone régulier est plus grand que tout polygone isopérimètre du même nombre de côtés.* — Car, d'après le théor. III ci-dessus, le polygone maximum est équilatéral, et en vertu du théor. X, il a tous ses angles égaux : donc il est régulier.

XII. Réciproquement, *parmi tous les polygones équivalents, du même nombre de côtés, le polygone régulier a le plus petit périmètre.* — Si le périmètre avait la même longueur pour tous, on vient de voir que le polygone régulier serait le plus grand : donc, pour qu'il devienne équivalent à chacun des autres polygones, il faut qu'il diminue ; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que son périmètre diminue lui-même et devient le plus petit de tous.

XIII. *Le cercle est plus grand que tout polygone régulier isopérimètre.* — Les deux figures étant rendues concentriques, il est clair que leurs contours, ayant la même longueur, ne peuvent être l'un entièrement hors de l'autre et qu'ils se coupent nécessairement. Mais alors le rayon du cercle est évidemment plus grand que l'apothème du polygone régulier ; donc le cercle est plus grand que ce polygone.

Corollaire. Le cercle est plus grand que toute figure plane rectiligne isopérimètre (XI).

XIV. *La circonférence est moindre que le périmètre de tout polygone régulier équivalent au cercle.* — Ce théorème, réciproque du précédent XIII, se démontre comme le théorème XII.

Corollaire. La circonférence est moindre que le périmètre de toute figure plane rectiligne équivalente au cercle (XII).

XV. *Le cercle est plus grand que toute figure plane, mixte ou curviligne, isopérimètre.* — On sait qu'il n'y a aucune erreur finale commise sur les aires et les périmètres quand on regarde le cercle et la figure proposée comme deux polygones rectilignes du même nombre infini de côtés. Or, le cercle étant alors un polygone régulier du même nombre de côtés que la figure plane isopérimètre, devenue rectiligne, est plus grand que cette dernière (XI).

Remarque. Le plus grand espace plan renfermé par un contour de 600 mètres, étant un cercle, il est facile de calculer l'étendue plane maximum proposée, aire de ce cercle. On peut comparer à l'hexagone régulier, etc.

XVI. Réciproquement, *la circonférence est moindre que le contour de toute figure plane, mixte ou curviligne, équivalente au cercle.* — C'est ce qu'on démontre en raisonnant comme pour le théorème XII.

XVII. *Comparaison de deux polygones réguliers* P *et* P' *de* n *et* n+v *côtés.* — Soient c et c' les contours ou les périmètres de ces deux polygones; r et r' leurs rayons; a et a' leurs apothèmes : on a d'abord

$$P=\tfrac{1}{2}ac \text{ et } P'=\tfrac{1}{2}a'c'.$$

Cela posé, 1° si $r=r'$, les deux polygones réguliers P et P' sont inscriptibles dans le cercle de rayon r; et alors le contour c' a $n+v$ points communs avec la circonférence, tandis que le contour c n'en a que n. Ainsi c' approche plus de cette courbe que c; donc $c'>c$ et partant $a'>a$: cela donne $P'>P$. Donc *de deux polygones réguliers de même rayon, celui qui a le plus de côtés est le plus grand et a le plus grand périmètre.*

2° Si $a=a'$, les deux polygones réguliers P et P' sont circonscriptibles au cercle de rayon a; et alors, comme le contour c' a $n+v$ points communs avec la circonférence, tandis que le contour c n'en a que n, d'où $r'<r$, il en résulte que c' approche plus de cette courbe que c. Donc $c'<c$ et par conséquent $P'<P$. Ainsi *de deux polygones réguliers de même apothème, celui qui a le plus de côtés est le plus petit et a le moindre périmètre.*

3° Puisque quand $a=a'$, on a $c'<c$, on voit que le contour c' doit augmenter pour devenir égal à c. Mais alors l'apothème a' augmente nécessairement et devient plus grand que a. Ayant donc à la fois $c'=c$ et $a'>a$, il en résulte $P'>P$. Ainsi, *de deux polygones réguliers isopérimètres, celui qui a le plus de côtés est le plus grand.* Voilà pourquoi le cercle est plus grand que tout polygone régulier isopérimètre.

4° Enfin, puisque quand $c'=c$, on a $P'>P$, il est clair que P' doit diminuer pour devenir équivalent à P. Mais alors le contour c' diminue aussi et devient plus petit que le contour c. On voit que *de deux polygones réguliers équivalents, celui qui a le plus de côtés, a le plus petit périmètre.* Voilà aussi pourquoi la circonférence est plus petite que le périmètre de tout polygone régulier équivalent au cercle.

XVIII. *La longueur de l'arc de cercle est un minimum parmi les courbes planes qui, ayant une corde commune, enferment entre* *elles et cette corde des surfaces équivalentes.* — Soit a l'arc circulaire et b l'arc de l'une des courbes proposées; soit achevée la circonférence et soit a' le restant de la courbe, alors fermée. La circonférence $a+a'$ et la courbe $b+a'$ terminent donc deux surfaces équivalentes; par conséquent (XVI) on a $a+a'<b+a'$ et $a<b$.

Corollaire. Réciproquement, *entre tous les arcs de courbes de même longueur, ayant une corde commune, l'arc circulaire est celui qui enferme la plus grande surface entre lui et sa corde.* — Si les surfaces enfermées étaient équivalentes, l'arc circulaire a serait le plus petit; donc, pour qu'il ait la même longueur que tous les autres, la corde commune restant invariable, il faut qu'il augmente, aussi bien par suite que la surface enfermée par lui et la corde; cette surface est donc la plus grande de toutes.

Remarque. On démontre aussi qu'*entre tous les segments de différents cercles, mais terminés par des arcs de même longueur, le demi-cercle et le segment maximum;* et réciproquement, *de tous les segments équivalents, pris dans différents cercles, le demi-cercle est celui d'arc minimum.*

XIX. Si en suivant le contour d'un parallélogramme, on prend sur chaque côté la première des n parties égales de ce côté, les quatre points de division, ainsi obtenus, sont les sommets d'un parallélogramme inscrit, dont le *minimum* est la moitié du parallélogramme proposé. — C'est ce qu'on démontre par des triangles ayant un angle égal et par la résolution d'une équation du second degré. — Démonstration analogue pour le théorème que voici :

XX. Dans tout parallélogramme P, les parallèles à une diagonale, retranchant deux triangles égaux et opposés, déterminent sur les côtés les sommets d'un parallélogramme inscrit, dont le *maximum* est la moitié de P.

XXI. Si en suivant le contour d'un quadrilatère quelconque Q, convexe ou concave, on prend sur chaque côté la première des n parties égales de ce côté, les quatre points de division, ainsi obtenus, sont les sommets d'un quadrilatère Q′ inscrit, dont le *minimum* est un parallélogramme équivalent à $\frac{1}{2}$ Q. — Ce théorème généralise le précédent XIX; et si l'on pose 1 sur $n=x$, m désignant le rapport de Q′ à Q, on trouve le minimum de Q′ par $m=1-2x+2x^2$.

XXII. Il existe une infinité de parallélogrammes inscrits dans un rectangle donné, ayant leurs côtés parallèles aux deux diagonales, tous de périmètre *minimum* égal au double de l'une d'elles, et dont un seul losange, le plus grand de tous ces parallélogrammes. — C'est ce qu'on démontre par les théorèmes I et XX.

XXIII. Dans tout rectangle ABCD, si le point P, situé sur BC de telle sorte que PC soit moindre que $\frac{1}{2}$BC, se meut suivant quatre chemins rectilignes rencontrant les côtés CD, DA, AB, BC aux points M, N, O, Q; la somme de ces quatre chemins PM, MN, NO, OQ est un *minimum* dès que deux chemins partiels contigus font deux angles égaux avec le côté auquel ils aboutissent. De plus, menant DE parallèle à PM, E appartenant à BC, il résulte des propriétés du parallélogramme et du triangle isocèle, que *la somme minimum est constante et égale à* 2DE, même quand il n'y aurait que trois chemins partiels pour revenir sur BC. Or cela arrive quand PC$>\frac{1}{2}$BC; car le premier chemin partiel, parallèle à ED, rencontre alors AD avant CD, c'est-à-dire qu'alors *le sens du mouvement est contraire*, vu que le point mobile P va de AD à DC et de DC à CB : aussi alors la distance DM est-elle *négative* et mesurée sur le prolongement de CD. — La somme minimum est donc la plus grande possible quand le point E tombe en B; et c'est alors le contour minimum constant d'un parallélogramme inscrit (XXII). — Enfin, ce contour est déterminé quand les points P et M ou P et N sont donnés, comme dans le jeu de Billard.

XXIV. Soit P un point situé sur le côté AC du triangle équilatéral ABC : si P se meut vers les côtés successifs et décrit les chemins rectilignes parallèles à ces côtés, chacun à chacun; 1° lorsque PA $<\frac{1}{2}$AC, le point P décrit trois chemins partiels pour revenir sur AC, et la somme de ces trois chemins est (théor. I) un minimum égal à AC + PA; 2° après six chemins partiels, le point mobile est revenu à sa première position sur AC, et la somme de ces six chemins est encore un minimum égal au périmètre du triangle ABC. — Il est clair que si PA$=\frac{1}{4}$AC$=\frac{1}{4}c$, M désignant le milieu de AB $=c$ et Q un point de BC, le chemin PMQ est un minimum dès que BQ $=\frac{1}{4}c$, tandis que la longueur de ce chemin minimum a pour mesure $\frac{1}{2}c\sqrt{3}$.

XXV. Soient a et b les côtés contigus d'un parallélogramme tracé P : si l'on en suit le contour et qu'on prolonge chaque côté de la même longueur x arbitraire; les points, ainsi obtenus, sont les sommets d'un parallélogramme P′ *inscrit*, dont le *minimum* répond à $x=-\frac{1}{4}(a+b)$, valeur à interpréter. — Pour $a=b$, le minimum de P′ se réduit à $\frac{1}{2}$P. — Si les deux côtés a et b sont inégaux, la somme des carrés des côtés de P′ est-elle susceptible de *minimum?*

XXVI. Dans tout quadrilatère ABCD, si à partir des sommets de deux angles opposés B et D, on prend sur chaque côté la longueur égale au quotient de ce côté par le nombre entier n, on a les sommets d'un parallélogramme *inscrit*, dont le *maximum*, moitié du quadrilatère, répond à $n = 2$. — Ce maximum est donc identique au minimum du théor. XXI ci-dessus.

XXVII. Si les côtés d'une feuille triangulaire d'acajou valent respectivement 13, 14 et 15 décimètres, le rectangle maximum inscrit, moitié de cette feuille, vaut 42 décimètres carrés; tandis que le cercle inscrit en vaut 50, 27 environ. De plus, il existe trois rectangles maximum inscrits équivalents, mais de périmètres de différentes longueurs : la plus petite répond à la plus petite base 13 du triangle et vaut 25,923 décimètres, tandis que la circonférence inscrite en vaut 25,133. — La plus petite ligne brisée à scier pour avoir le rectangle maximum inscrit répond à la plus grande base 15 et vaut 18,70 décimètres. — Enfin, si pour avoir le dessus d'une table, on transforme la feuille triangulaire d'acajou en un rectangle équivalent, cela se fait *par simple transposition de parties* de trois manières différentes; mais celui des trois rectangles obtenus, qui approche le plus d'un carré et qui a le plus petit contour, répond à la plus petite base 13, et son périmètre vaut 38,923 décimètres.

Remarque I. Si la feuille triangulaire proposée était de marbre et qu'on voulût en couper la plus grande table possible, celle-ci devrait être le cercle inscrit, bien qu'elle fût plus difficile à façonner que l'un des trois rectangles ci-dessus.

Remarque II. Il existe un grand nombre de théorèmes connus sur la détermination du *maximum* et du *minimum* d'une longueur, d'une aire ou d'un volume. Plusieurs de ces théorèmes fournissent d'utiles applications; et l'on peut consulter, à ce sujet, le *Complément de Trigonométrie*, ainsi que le présent Recueil, où se trouvent les trois méthodes pour calculer les conditions de tout maximum et de tout minimum numérique.

38. Reprenons encore la méthode infinitésimale. — On a démontré (n° 23) qu'on peut toujours, sans aucune erreur finale sur l'aire et le contour, considérer le cercle comme un polygone régulier, et toute figure plane, mixte ou curviligne, comme un polygone rectiligne d'une infinité de côtés infiniment petits, invisibles et toujours inconnus, aussi bien que les angles *extérieurs* du polygone, eux-mêmes infiniment petits.

Je dis *invisibles*; car déjà une partie très-petite *assignée*, le billionième du mètre, par exemple, échappe à l'œil armé du plus fort instrument d'optique. Or, l'impossibilité de trouver où sont les côtés et les sommets invisibles du polygone rectiligne ci-dessus doit-elle et peut-elle en faire nier l'existence ?

Considérons les deux points M et N, aussi éloignés l'un de l'autre qu'on veut le supposer. Si le point M s'avance infiniment peu vers chacune des positions *instantanées* successives du point N, lui-même mobile sur une droite fixe, formant avec la droite MN un angle quelconque donné : il est clair qu'à l'instant précis où ce double mouvement commence, le point M décrit une ligne continue. Or, est-on bien fondé à affirmer que cette ligne décrite « ne peut être droite *sur aucune étendue ?* » Je ne le crois pas, car l'un des moindres mouvements instantanés du point M, vers chacune des positions successives du point N, décrit nécessairement une droite infiniment petite, *élément* invisible de la courbe résultante ; et cette courbe alors *est une ligne brisée*, laquelle n'en est pas moins une ligne *continue*, vu que le point décrivant M se meut *continuement*, en se détournant à chaque instant et sans cesse, par angles naissants ou infiniment petits, pour s'avancer vers chacune des positions successives du point N. — Pour qu'il n'y eût aucune droite décrite, il faudrait que M demeurât en repos. Et remarquez d'ailleurs que si les mouvements de M et N sont uniformes, tous les éléments rectilignes décrits sont égaux.

Dans cette appréciation complète du fait de la description de toute courbe plane, je ne vois rien d'incompréhensible ni de mystérieux, rien d'absurde ni de contradictoire et rien qui détruise la continuité. Il en résulte donc que le cercle peut toujours se traiter comme un polygone régulier, dont le rayon et l'apothème sont égaux.

On ne manquera pas d'objecter que la circonférence ne peut jamais avoir trois points en ligne droite. Mais, pour chaque côté infiniment petit du polygone régulier ci-dessus, les deux extrémités coïncident en quelque sorte avec le milieu. D'ailleurs, dès que l'on établit une distinction entre l'*arc* circulaire infiniment petit et sa *corde*, on trouve nécessairement une *flèche.* Mais celle-ci est un nombre infiniment petit du second ordre, *nul* à l'égard de l'arc proposé.

En général, le calcul apprend que la courbe plane quelconque C ne surpasse la longueur de la ligne brisée B, *inscrite* et d'une infinité de côtés infiniment petits, que d'un infiniment petit du second ordre i^2, de telle sorte qu'on a $C=B+i^2$. Et comme ici on ne cherche que la longueur finie de C, il est clair que l'infiniment petit i^2 ne saurait en faire partie, et qu'ainsi, *en longueur finie*, on a rigoureusement $C=B$. Cela revient à supposer d'abord que B coïncide avec C ou que chaque arc infiniment petit de C se confond avec sa corde, côté de B. (Voyez à ce sujet la *théorie infinitésimale appliquée*).

39. Un nombre est *infini* lorsqu'il surpasse tout nombre imaginé, si grand que soit ce dernier. Un nombre infini est donc absolument inexprimable en chiffres et restera toujours inconnu. Tel est *évidemment* le nombre de toutes les fractions possibles comprises entre 1 et 2, par exemple. — Un nombre est dit *infiniment petit* quand il est moindre que tout nombre assigné, si petit que soit ce dernier, sans être nul ; car le néant n'est pas un nombre. Un

nombre infiniment petit n'est donc pas exprimable en chiffres et restera toujours inconnu. Telle est *nécessairement* la différence d suivant laquelle toutes les fractions possibles, entre 1 et 2, croissent successivement. — L'existence du nombre infini et du nombre infiniment petit ci-dessus est certaine, bien qu'ils soient *inimaginables;* et toutes les fractions possibles entre 1 et 2 ont nécessairement leurs termes entiers infinis et un dénominateur infini commun. — Il ne s'agit pas ici de calculer ces fractions, ce qui est impossible, mais d'en prouver l'existence, ce qu'on vient de faire.

Or, si je comprends bien l'article (p. 58 et suiv., *Revue pédagogique*, 15 février 1856), on nie l'existence des nombres infinis, infiniment petits et irrationnels *parce qu'on ne peut jamais les calculer et qu'ils restent toujours inconnus;* d'où résulterait, par exemple, que dans $A=B\sqrt{12}$, le rapport $\sqrt{12}$ n'existe pas et que cette égalité est absurde!

J'ai démontré que la racine carrée de 12 n'est pas une fraction dont les deux termes, premiers entre eux, aient chacun un nombre limité de chiffres; ils en ont donc chacun une infinité et sont infinis. De sorte que $\sqrt{12}$ est une fraction inconnue, à termes infinis, comprise entre 3 et 4, et l'on a nécessairement $A=B\sqrt{12}$. — Sans doute que la valeur approchée de A n'est pas A lui-même; mais le rapport approché n'en indique pas moins comment on trouve la valeur approchée de l'antécédent au moyen du conséquent seul. — Puisque $\sqrt{12}$ est une fraction à termes entiers infinis, le commun diviseur x des grandeurs continues A et B existe nécessairement, mais il est infiniment petit.

On dit (Revue, p. 62) : « Quant aux fractions à termes infinis qui existe- » raient entre 3 et 4, limites de $\sqrt{12}$, ce que nous avons dit plus haut suf- » fit pour démontrer que leur existence n'a rien de réel. » Or, quelle est cette démonstration? Elle consiste simplement à nier l'existence d'une infinité de fractions possibles, à termes infinis, comprises entre 1 et 2; et cela toujours parce qu'il est impossible de calculer ces fractions. Car il ne s'agit pas ici de s'en tenir « à l'idée générale que comporte la possibilité d'insérer entre 1 et 2 autant de fractions qu'on voudra; » mais il faut les calculer toutes; chose aussi impossible que d'en compter le nombre infini. — Peut-on, d'après cela, affirmer avec exactitude que toutes les fractions possibles entre 1 et 2 n'existent pas? — Toutes ces fractions ont le même dénominateur infini p, et les numérateurs infinis sont successivement $p+1$, $p+2$, $p+3, \ldots$, $2p-1$. Et comme l'une des fractions à termes infinis, comprise entre 1 et 2, se réduit $\frac{7}{4}$, il faut que ces deux termes aient un facteur infini commun, contenu 7 fois et 4 fois dans le numérateur et le dénominateur.

Il est sans doute inutile de répéter ici que pour démontrer l'égalité des rapports entre deux couples de quantités continues, il n'est pas nécessaire de calculer ces deux rapports : il suffit de savoir que les deux termes de chacun ont toujours un commun diviseur assignable ou inassignable, fini ou infiniment petit, connu ou toujours inconnu; ce qui simplifie la démonstration et la rend complètement rigoureuse, en supprimant la distinction des deux cas: commensurable et incommensurable : c'est la méthode *des parties égales*.

S'il s'agissait de calculer le rapport de deux lignes tracées A et B (droites ou arcs circulaires de même rayon), on chercherait la plus grande commune mesure des lignes A et B : il en résulterait une *fraction continue*, limitée forcément ou non, laquelle ferait toujours connaître le degré d'approximation du rapport *numérique* cherché, en supposant toutefois les divisions exactement effectuées. Mais ce double problème doit être résolu avant d'aborder la *théorie des lignes proportionnelles ;* car alors celle-ci devient plus claire et plus simple.

Il y aurait *pétition de principe* si, afin de démontrer l'égalité des rapports A:B et C:D, les grandeurs C et D étant *incommensurables entre elles*, on se servait des fractions continues pour calculer les deux rapports ; car C et D ont toujours un commun diviseur infiniment petit inconnu, et la démonstration d'ailleurs serait beaucoup plus compliquée. Dans ce cas, en effet, on trouverait, pour les deux rapports proposés, un même nombre r, avec les deux restes variables x et y, qui échapperaient aux instruments. De sorte qu'on aurait l'équation toujours exacte

$$A:B-x=C:D-y \quad \text{ou} \quad A:B=C:D+x-y.$$

Or, Revue, p. 63 : « avant d'en conclure que A:B=C:D, il faut d'abord » démontrer que $x=y$. On est sans doute de cet avis, puisqu'on essaie de dé- » montrer, par la méthode des variables, qu'on a réellement $x=y$. » — On n'essaie pas, mais on démontre effectivement. — « Mais alors que dire de la » méthode qui déduirait la seconde de ces égalités de la première, parce que » x et y étant des infiniment petits sont négligeables relativement aux rap- » ports A:B et C:D. » — On dira que les restes x et y, bien qu'échappant aux instruments les plus précis, par leur petitesse, ne sont pas infiniment petits et qu'ainsi la méthode infinitésimale n'est pas applicable à ce mode de démonstration, à cette longue pétition de principe.

Dans $x-y$, on peut toujours poser $x=vy$, sans devoir s'enquérir d'abord si le rapport v est rationnel ou non, vu que ce rapport existe dans les deux cas. Il en résulte donc $x-y=y\,(v-1)$, et cela même quand on aurait $x<y$.

Les autres difficultés soulevées dans l'article ci-dessus sont déjà résolues ; et, en disant, p. 56, théorie infin. appliquée : « Il est clair que si la différen- » ce $y-y'$ (qui n'est pas nulle, mais variable) devait.... », je rappelais un fait démontré, p. 17, et que M. Batteux n'avait pas sans doute remarqué. — Enfin, la longueur de la circonférence est certainement égale à celle d'une droite qui sera toujours inconnue ; mais les méthodes pour calculer le rapport approché de la circonférence au diamètre n'exigent aucunement que cette courbe soit étendue en ligne droite, ce qui serait d'ailleurs impossible. On obtient donc ce rapport sans l'hypothèse que la circonférence soit *rectifiée*.

10. Dans la *Revue pédagogique*, p. 347, on lit : « .... plusieurs géomètres se sont habilement servi des considérations infinitésimales, pour faire descendre dans les éléments des propositions d'analyse, dont la connaissance est utile au physicien. Ces essais, en rendant l'étude de la physique accessible à un plus grand nombre de personnes, n'ont pas peu contribué aux progrès de cette science ; mais précisément à cause de cela, nous croyons qu'ils ont ex-

ercé *une influence fâcheuse* sur les mathématiques, en encourageant l'emploi de la méthode infinitésimale, *qui manque de clarté et de rigueur.* »

En énonçant ces dernières affirmations, que rien ne prouve, on oublie que la méthode infinitésimale simplifie la méthode des variables et que par conséquent elle n'est pas moins claire ni moins rigoureuse que cette dernière : seulement *elle conduit plus directement au résultat cherché.*

Quel est, en effet, le but de la méthode infinitésimale? C'est de trouver des grandeurs *finies* à l'aide des nombres *auxiliaires* infiniment grands et infiniment petits, nécessairement inconnus. Or, le principe abréviatif de cette méthode consiste essentiellement à supprimer d'abord, dans les deux membres de l'équation proposée, les termes fournissant ceux qui en doivent disparaître à la fin, soit en vertu de la règle des variables auxiliaires, soit parce que ces derniers termes étant chacun infiniment petit, ne peuvent faire partie de la grandeur finie cherchée. De là résulte donc le principe infinitésimal, savoir : *Tout nombre doit se négliger ou être regardé comme nul par rapport à celui qui le contient une infinité de fois, et auquel il est ajouté ou retranché.*

La suppression immédiate des termes ci-dessus abrège singulièrement les calculs et les raisonnements, sans que le résultat final cesse d'être rigoureusement exact; et c'est en cela précisément que la méthode infinitésimale l'emporte, en clarté, et en facilité, sur toutes les autres méthodes, dites rigoureuses. Bien loin donc que son emploi exerce *une influence fâcheuse* sur les mathématiques, il en rend au contraire l'étude plus simple, plus élémentaire et plus complètement exacte. Ceci est bien établi pour les théorèmes relatifs au mesurage dans le cercle et les corps ronds, ainsi que pour les courbes planes, considérées comme des lignes brisées, et pour la détermination des lois du mouvement uniformément varié. (Voyez la *théorie infinitésimale* pour cette détermination, dont voici le résumé).

41. Dans le mouvement *uniformément accéléré*, la force accélératrice constante agit, d'une manière continue, sur le point matériel libre, c'est-à-dire par *impulsions* successives égales et infiniment petites *qui se touchent*, de telle sorte que quand une impulsion finit, celle qui la suit immédiatement, commence. La durée nécessaire pour que l'*inertie* du point matériel reçoive entièrement chaque impulsion est évidemment infiniment petite elle-même. Le chemin c que le point mobile décrit uniformément pendant cette durée infiniment petite, en vertu de chaque impulsion reçue, est lui-même infiniment petit. Ainsi l'on doit, pour calculer l'espace réel E décrit pendant le temps T quelconque donné, concevoir ce temps divisé en un nombre infini n de parties égales, chaque partie x désignant le temps infiniment petit qu'il faut pour que, par son inertie, le mobile reçoive et conserve complètement chaque impulsion, et l'on a $T = nx$.

On voit que les grandeurs infinitésimales n et x sont indispensables pour apprécier clairement et d'une manière complète ce phénomène de mouvement. — De plus, bien que n et x soient inexprimables en chiffres, ainsi que $\sqrt{3}$, par exemple, il est évidemment « permis de supposer faites les opérations inexécutables qui donnent ces trois nombres, » dont l'existence est certaine et qui restent toujours inconnus. De sorte qu'on doit soumettre au calcul n et x, aussi bien que $\sqrt{3}$.

Maintenant, comme l'état du mobile ne change que quand il a reçu chaque impulsion qui lui fait décrire le chemin c pendant chaque instant x, la loi d'inertie démontre clairement que :

$$E = c + 2c + 3c + 4c + \ldots + nc = \tfrac{1}{2}cn(n+1).$$

Soient x et g les vitesses du mobile quand les temps T et s expirent : à cause de $T = nx$, on trouve aisément les relations $vx = cn$ ou $vx^2 = cT$ et $gx^2 = c$; d'où $v = gT$. Éliminant donc c et n de l'expression de E, on trouve

$$E = \tfrac{1}{2}gT^2 + \tfrac{1}{2}gTx \ldots. \quad (1)$$

Dans cette équation exacte, les deux premiers termes sont des nombres finis, tandis que $\frac{1}{2}gTx$ est infiniment petit avec x. Et comme on cherche un nombre fini E, il est clair que le nombre infiniment petit $\frac{1}{2}gTx$ ne saurait en faire partie. Ainsi la valeur finie cherchée de E est rigoureusement $E = \frac{1}{2}gT^2$.

C'est ce que j'ai trouvé, beaucoup plus simplement, en appliquant d'abord le principe infinitésimal, c'est-à-dire en négligeant d'abord 1 à l'égard du nombre infini n, dans la première expression de E ; ce qui la réduit à $E = \frac{1}{2}cn^2$.

Dans la *Revue*, p. 348, on pose $T = nt$, n désignant un nombre entier fini quelconque. On part d'une hypothèse contraire à la réalité, et l'on désigne par e le chemin que le mobile décrit uniformément pendant le temps t, en vertu de cette hypothèse. On n'indique pas le rôle de l'inertie dans le raisonnement incomplet qui donne la formule $S = \frac{1}{2}en(n+1)$. Enfin, à l'aide de $T = nt$ et de $gt^2 = e$, on transforme l'équation en S en celle-ci :

$$E = \tfrac{1}{2}gT^2 + \tfrac{1}{2}gTt - X.$$

Si l'hypothèse d'où l'on est parti est admissible, il est clair que n devenant $\frac{1}{2}n$, t devient $2t$. Mais e deviendra-t-il $4e$, comme il le faudrait pour que g fût constant ? C'est ce qu'on ignore, et c'est même ce qu'il s'agit de démontrer, bien qu'il soit évident que e doit augmenter avec t. Mais si g n'est pas constant, l'expression de E sera composée de trois termes variables, et l'on ne saurait en conclure que $E = \frac{1}{2}gT^2$.

Le principe des variables n'est pas applicable ici, parce que, en effet, il n'y a rien de variable dans ce phénomène de mouvement, tant que le point matériel libre et la force accélératrice constante restent les mêmes.

42. Il est démontré que le temps T quelconque a toujours, avec l'unité, un commun diviseur fini ou infiniment petit, et que par conséquent, pour établir l'égalité des rapports, il n'y a pas à distinguer les deux cas : commensurable et incommensurable, le second étant une *pétition de principe* ou un *non sens*. Et cependant, *Revue*, p. 349, on considère encore le cas où le temps T est incommensurable avec l'unité, c'est-à-dire sans doute le cas où T et 1 n'ont absolument aucun diviseur commun, pas même approché. Ainsi on préfère alors commettre un non-sens plutôt que de reconnaître un

commun diviseur infiniment petit ! Or, est-ce par cet obscur non-sens que l'on prétend prouver *le manque de clarté et de rigueur* de la méthode infinitésimale ?

On cède ici à l'influence routinière de notions obscures ou fausses. Mais le devoir essentiel du professeur est de lutter contre cette influence, en approfondissant les notions premières, afin de ne transmettre aux élèves que des idées claires, des principes certains et bien compris. Or, les grandeurs infinitésimales se présentent inévitablement en géométrie et en mécanique, pour compléter les notions fondamentales. Ce n'est donc pas rendre les théories plus claires, plus simples, plus rigoureuses, que de masquer ces grandeurs par de longs et obscurs détours, par des pétitions de principe ou des non-sens. Une telle méthode ne saurait évidemment « stimuler l'application des élèves, pour qui un manque de clarté et de rigueur devient immédiatement un motif de découragement. »

Bien que les deux genres d'infinis nous soient toujours inconnus, comme inexprimables en chiffres, leur existence n'en est pas moins certaine par plusieurs faits géométriques, dont l'appréciation exacte, suffisamment développée, est entièrement à la portée des jeunes intelligences. Ces grandeurs sont le plus souvent des *variables auxiliaires*, employées alors pour faciliter la détermination de certains nombres *finis*. Il n'est donc pas étonnant que la méthode infinitésimale simplifie celle des variables, sans en altérer l'exactitude rigoureuse. D'ailleurs, les infinis sont nécessaires pour résoudre certaines questions, *où ils ne sont pas variables*, comme pour la détermination ci-dessus de E. Ici le terme $\frac{1}{2}gTx$ disparaît de l'équation (1), non parce qu'il est nul, mais parce qu'il est *constant* et *infiniment petit* avec x, pour la même force accélératrice constante et le même point matériel.

43. Dans la *Revue*, p. 350 et suiv., la méthode des variables sert à démontrer les formules pour apprécier le phénomène de l'*arc-en-ciel*. Mais il eût été plus simple et tout aussi rigoureux d'employer, à cet effet, le principe infinitésimal, ainsi que nous l'avons fait en note dans les *Éléments de mécanique*. Car les accroissements i' et r' de i et de r, dont on fait usage dans la *Revue*, sont nécessairement infiniment petits chacun. On y démontre bien, à l'aide du principe des variables, que $\cos i' = \cos r' = 1$; mais cela résulte immédiatement du principe infinitésimal.

Il est d'ailleurs évident que le principe fondamental de la méthode des variables auxiliaires coïncide avec le principe infinitésimal, du moins quant au résultat que ce dernier fournit beaucoup plus simplement, en opérant, comme on l'a dit, « *un escamotage réel.* » Mais cet escamotage, c'est-à-dire la suppression immédiate de certains termes, est nécessaire pour simplifier les calculs et les raisonnements, sans altérer aucunement l'exactitude du résultat final, ainsi qu'on l'a démontré plus haut.

Dans les applications du *calcul différentiel* et du *calcul intégral*, les accroissements de la fonction et de la variable peuvent diminuer ensemble indéfiniment ou être d'abord infiniment petits, sans jamais devenir nuls ; et alors la méthode des variables, abrégée par le principe infinitésimal, est toujours employée, du moins implicitement, pour la *rectification* des courbes planes, la *quadrature* des aires curvilignes, planes et courbes, et pour la *cubature* de certains volumes ronds.

44. On sait que la partie élémentaire du calcul différentiel n'est en réalité que le *calcul des fonctions dérivées*, démontré très-simplement en algèbre, où il sert de base à plusieurs théories importantes. Il y a sans doute plusieurs procédés pour établir le calcul des dérivées, ainsi que le théorème de Taylor qui en résulte ; mais je pense toujours que la méthode la plus claire et la plus simple doit d'abord définir la *fonction dérivée ;* et pour cela, voici comment j'ai procédé dans la 5^{me} édition du *Traité d'algèbre :*

Soit u une fonction *implicite* de la variable x, de telle sorte qu'on ait $u = \mathrm{f}x$. Soit u' ce que devient cette fonction lorsqu'on y change x en $x+h$, d'où $u' = \mathrm{f}(x+h)$; et cherchons quelle forme doit avoir le développement de $\mathrm{f}(x+h)$. Or, comme u' se réduit à $\mathrm{f}x$ ou u lorsqu'on y fait $h=0$, on est autorisé à poser

$$u' = \mathrm{f}(x+h) = u + \mathrm{A}h + \mathrm{B}h^2 + \mathrm{C}h^3 + \text{etc.}, \ldots \quad (1)$$

A, B, C, ... étant des fonctions inconnues de x et indépendantes de h.

Cette forme satisfait à la condition d'avoir $u' = u$ quand $h=0$, et le développement doit procéder suivant les puissances ascendantes *entières* et *positives* de h : 1° *entières ;* car, si le développement contenait un terme où h aurait l'exposant $\frac{2}{3}$, par exemple, il est clair que pour une valeur donnée de h, ce terme aurait trois valeurs différentes ; tandis que dans ce cas u' ne doit en avoir qu'une seule, répondant à une valeur assignée à x, et qu'alors le développement doit représenter cette valeur cherchée de u'. 2° *positives ;* car, si le développement avait un terme affecté de l'exposant négatif -2 de h et prenant la forme $\mathrm{N}:h^2$, ce terme, pour $h=0$, serait impossible ; vu que N étant fonction de la variable x seule et celle-ci restant absolument indéterminée, N ne saurait s'anéantir par $h=0$; de sorte que le terme proposé ne saurait devenir $\frac{0}{0}$. Donc le développement serait impossible lui-même, tandis que pour $h=0$, il se réduit à u.

Ces considérations prouvent bien que tous les exposants de h sont entiers et positifs, mais il n'en résulte pas nécessairement que ces exposants croissent suivant les nombres naturels 1, 2, 3, 4, etc. D'ailleurs aucun des coefficients A, B, C, ... ne s'évanouit tant que x reste indéterminée. On peut donc toujours admettre que le développement (1) est exactement celui de $\mathrm{f}(x+h)$, tant que x et h restent indéterminés : cela revient à considérer uniquement les fonctions, en grand nombre, qui peuvent se développer sous la forme (1) proposée.

Reste maintenant à calculer les fonctions A, B, C, ..., nécessairement toutes dépendantes de la proposée u. La première A en dépend plus immédiatement que les autres ; et c'est pourquoi A est dite la *dérivée* de u : elle s'en déduit ou en *dérive* d'après une opération constante, dont d est le *signe*, opération qui varie pour chaque genre de fonction, et l'on a $\mathrm{A} = \mathrm{d}u$; d étant la lettre initiale du mot *dérivée* et du s'énonçant *dérivée de* u, ou simplement d, u.

Ainsi la *dérivée* de toute fonction de la variable x est le coefficient de la première puissance de h, dans le développement que cette fonction donne lorsqu'on y change x en $x+h$.

Il faut d'abord calculer cette dérivée; et pour démontrer, avec facilité, les théorèmes du calcul des dérivées de toute fonction implicite, il suffit d'écrire simplement

$$u'=f(x+h)=u+h\mathrm{d}u+ph^2.$$

J'ai démontré le calcul des fonctions dérivées, tant implicites qu'explicites, dans la 5me édition ci-dessus, et où l'*axiome de généralisation* démontre que pour toutes les valeurs positives ou négatives, rationnelles ou irrationnelles et même imaginaires de l'exposant n constant, ou aura toujours

$$\mathrm{d}\cdot u^n=nu^{n-1}\,\mathrm{d}u.$$

De plus, dans l'*addition* au calcul des fonctions dérivées, celles des lignes *Trigonométriques* et la méthode des *coefficients indéterminés* m'ont servi à démontrer, avec facilité, différentes *séries circulaires* importantes.

Remarque. Dans les *Notes complémentaires* à la 3me édition du Traité d'algèbre, Notes imprimées en 1836 à Luxembourg, et destinées au Cours de calcul différentiel que je devais faire à l'Université, j'ai démontré l'identité de la *dérivée* et du *coefficient différentiel;* de sorte que *la différentielle de la fonction est le produit de sa dérivée par la différentielle de la variable.* J'ai prouvé que la dérivée et la différentielle existent indépendamment de toute hypothèse particulière faite sur l'accroissement h ou $\mathrm{d}x$ de la variable x, tant que celle-ci demeure *indéterminée.*

LISTE DES MEMBRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÉGE.

Membres du Bureau pour l'année 1856.

Président,	MM. TRASENSTER L., Professeur à l'Université.	
Vice-Président,	DE KONINCK L.	id.
Secrétaire-général,	LACORDAIRE Th.	id.
Trésorier,	SPRING A.	id.

Membres effectifs.

MM.

1835. GLOESENER J. M., Professeur à l'Université de Liége.
DELVAUX. id. id.
DUMONT A. id. id.
LESOINNE A. id. id.
BRASSEUR J. B. id. id.
FRÉDÉRIX, Colonel du Génie, Directeur de la Fonderie de canons à Liége.
1842. NOEL J. B., Professeur à l'Université de Liége.
CHANDELON J. F. G. id. id.
DE SÉLYS-LONGCHAMPS Edm., propriétaire à Liége.
MARTYNOWSKI J., Répétiteur à l'Université de Liége.
LAGUESSE, Ingénieur des mines, à Liége.
1843. COQUILHAT, Major d'artillerie, Sous-directeur de la Fonderie de canons à Liége.
1844. SCHMIDT J. G., Répétiteur à l'Université de Liége.
KUPFFERSCHLAEGER J., Professeur à l'Université de Liége.
1845. DELVAUX Ad., Ingénieur honoraire des mines, à Liége.
LECLERCQ, Directeur de l'École industrielle, à Liége.

MM.

1847. De Cuyper A. C., Professeur à l'Université de Liége.
Schwann Th., id. id.
1849. Meyer A., id. id.
1853. Bède E., Agrégé id.
Davreux C., Pharmacien, à Liége.
Candèze E., Docteur en médecine, à Glain (Liége).
Chapuis F., id. id. à Verviers.
Paque, Professeur de mathématiques à l'Athénée de Liége.
1855. Dewalque J., Docteur en médecine et en sciences natur., à Liége.
Bourdon J., Docteur en sciences naturelles, à Liége.

Membres correspondants.

MM.

1835. De Vaux A., Inspecteur-Général des Mines, à Bruxelles.
Omalius d'Halloy (d'), Sénateur, propriétaire à Halloy.
Dumortier, Membre de la Chambre des représentants, à Tournai.
Quetelet, Directeur de l'Observatoire, à Bruxelles.
Timmermans, Professeur à l'Université de Gand.
Teichmann, Gouverneur de la Province d'Anvers.
1842. Van Beneden, Professeur à l'Université de Louvain.
1843. Decaisnes, Professeur au Muséum d'histoire naturelle à Paris.
J. Liebig, id. à l'Université de Munich.
Graham, id. id. de Londres.
Pelouze, Membre de l'Académie des Sciences, à Paris.
Stas, Professeur à l'École militaire, à Bruxelles.
Mitscherlich, Professeur à l'Université de Berlin.
Nyst, Contrôleur des matières d'or et d'argent, à Anvers.
Verneuil (De), Membre de la Société géologique de France.
Kaiserling (comte de), à St.-Pétersbourg.
Martius Ph. (von), Professeur à l'Université de Munich, Directeur du Jardin botanique.
Kicks, Professeur à l'Université de Gand.
Mohl Hugo, Professeur à l'Université de Tubingen.
Gervais, Professeur à l'École de médecine de Montpellier.
Sundewal C., Directeur du Muséum d'histoire naturelle de Stockholm.
Putzeys J., Directeur au Ministère de la justice, à Bruxelles.
Reichert, Professeur à l'Université de Heidelberg.
Valentin, id. id. de Berne.
Wagner Rud., id. id. de Gœttingen.
Longet, Chirurgien de la Première Succursale de la Maison royale de St.-Denis, à Paris.
Steichen, Professeur à l'École militaire, à Bruxelles.
Lamarle, id. à l'Université de Gand.
Breguet, Mécanicien, à Paris.
Masson, Professeur de Physique, à Paris.
Simonoff, Directeur de l'Observatoire de Casan.

MM.

1843. Tchefkine, Général, aide-de-camp de S. M. l'Empereur de Russie.
Berthier, Professeur à l'École des Mines, à Paris.
Combes, Ingénieur en chef des Mines, id.
Seiler, Docteur en médecine à Wiltz (Luxembourg).
1844. Galeotti, Membre de l'Académie de Belgique, à Bruxelles.
Lecointe, Professeur à l'Athénée royal d'Arlon.
Malherbe, Juge au Tribunal de première instance, à Metz.
Carez, Ingénieur des ponts-et-chaussées, à Bruxelles.
Bidaut, Ingénieur en chef des Mines, à Bruxelles.
1845. Van Rees, Professeur à l'Université d'Utrecht.
Maus, Ingénieur des Ponts-et-chaussées, à Bruxelles.
Navez, Capitaine d'artillerie, à Bruxelles.
Michiels, id. id à Gand.
Du Bus B. Directeur du Muséum d'histoire naturelle, à Bruxelles.
Hagen, Docteur en médecine, à Kœnigsberg.
Olivier, Professeur à l'École centrale, à Paris.
Chasles, Membre de l'Académie des sciences, à Paris.
Ambrosi, Répétiteur à l'École militaire, à Bruxelles.
Perdonnet, Ingénieur civil, à Paris.
1846. De Vriese J. H. Professeur à l'Université de Leyde.
Klotsh J. G., Conservateur des herbiers royaux, à Schœnfeld, près Berlin.
1847. Bosquet, Pharmacien, à Maestricht.
1848. Klipstein (von), Professeur à l'Université de Giesen.
1849. Michaelis, Professeur à l'Athénée de Luxembourg.
1851. Baumgartner, Président de l'Académie impériale des sciences de Vienne.
Schroeter, Secrétaire de l'Académie impériale des sciences de Vienne.
Jacobi, Membre de l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg.
Ansted, Professeur de Géologie à Londres.
Schroeder van der Kolk, Professeur à l'Université d'Utrecht.
Schlegel, Conservateur du Muséum d'histoire naturelle, à Leyde.
1852. Le Conte J. L., Docteur en médecine, à Philadelphie.
Poncelet, Général du Génie, ancien Directeur de l'École polytechnique, à Paris.
Vrolik, Professeur d'anatomie à l'Athénée d'Amsterdam.
Lyell Ch., Membre de la Société géologique de Londres.
Davidson, id.
Steinheil, Directeur des télégraphes électriques, à Vienne.
Ettingshausen (von), Professeur à l'Université de Vienne.
Lamont, Directeur de l'Observatoire royal de Munich.
Dana, Membre de l'Académie des sciences naturelles, à Philadelphie.
Grant, Professeur à l'Université de Londres.
Ettingshausen Const. (von), à Vienne.

MM.

1852. POHL, Répétiteur de chimie à l'Institut polytechnique de Vienne.
1853. WESTWOOD J. O., Membre des Sociétés Linnéenne et Entomologique de Londres, à Hammerschmidt, près Londres.
WATERHOUSE, Conservateur au Muséum britannique, à Londres.
PARRY, Membre de la Société entomologique, à Londres.
PERRIS Ed., Chef de division à la préfecture de Mont de Marsau (Landes).
1854. KOELLIKER, Professeur à l'Université de Würzbourg.
DUFOUR L., Docteur en médecine, à St. Sever (Landes).
SCHAARS, Membre de l'Académie de Bruxelles.
DUTREUX, Receveur-général, à Luxembourg.
DROUET, Naturaliste à Troyes (France).
WEBER, Professeur de physique à l'Université de Goettingen.
STAMMER, Docteur en médecine, à Dusseldorf.
ERLENMEYER, id. à Neuwied.
LUCAS H., Aide-naturaliste au Muséum d'histoire naturelle, à Paris.
BLANCHARD, id. id. id.,
1855. PLÜCHER, Professeur à l'Université de Bonn.
HAUER (von), Membre de l'Académie des sciences de Vienne.
NODOT, Directeur du Muséum d'histoire naturelle, à Dijon.
1856. HAIMES J., Professeur au Lycée Napoléon, à Paris.
GEINITZ, Professeur à l'École polytechnique de Dresde.
CATALAN, Professeur de mathématiques, à Paris.
FOUCAULT L., Attaché à l'Observatoire de Paris.
BECQUEREL E., Professeur de Physique au Conservatoire des Arts-et-métiers, à Paris.
DESPRETZ, Membre de l'Institut de France, à Paris.
BABINET, id. id. id.

Membres décédés.

MM.

BUCH L. (von), Chambellan de S. M. le Roi de Prusse, à Berlin.
GÉNÉ J. B., Professeur à l'Université de Turin.
PIOCHE, Professeur à l'École militaire, à Bruxelles.
SIMONIS, Professeur à l'Université de Gand.
LESSON R. P., Professeur à l'Ecole maritime de Rochefort (France).
CORDA J. B., Botaniste, à Prague.
DE LA BÈCHE, Directeur du Musée de Géologie pratique, à Londres.
FORBES E., Président de la Société géologique de Londres.
PETRINA, Professeur à l'Université de Prague.

TABLE DES MATIÈRES.

5/27. P.