MÉMOIRES

DE

MATHÉMATIQUE

ET

DE PHYSIQUE.

Tome X.

MÉMOIRES
DE
MATHÉMATIQUE
ET
DE PHYSIQUE,

PRÉSENTÉS A L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, PAR DIVERS SAVANS, ET LUS DANS SES ASSEMBLÉES.

TOME X.

A PARIS,

De l'Imprimerie de MOUTARD, Imprimeur-Libraire de la REINE, de MADAME, de Madame Comtesse D'ARTOIS, & de L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, rue des Mathurins, Hôtel de Cluni.

M. DCC. LXXXV.

PRÉFACE.

CE volume renferme quatre Pièces couronnées par l'Académie, & treize Mémoires.

Un d'Histoire Naturelle des Animaux.
Un de Minéralogie.
Trois de Chimie.
Un de Météorologie.
Deux d'Astronomie.
Un de Mécanique.
Et quatre d'Analyse.

PRIX.

Sur le dérangement d'une Comète qui passe près d'une Planète. Page 1.

CE Mémoire & l'Addition qui l'accompagne ont obtenu un Prix en 1778. Le Prix étoit double, & l'Académie en a réservé la moitié, & a de nouveau proposé la même question, avec un Prix double pour l'année 1780. L'Auteur de cette Pièce est M. Fuss, de l'Académie de Pétersbourg, élève de M. Euler, dont il a épousé la petite-fille en 1784. Dans le billet cacheté, où M. Fuss avoit déposé son nom, il déclaroit que si sa Pièce avoit quelque mérite, il le devoit aux conseils utiles que M. Euler lui avoit donnés, & prioit de rendre cette déclaration publique. M. Fuss étoit alors très-jeune ; & si la jeunesse est le temps où la modestie est le plus un devoir, c'est aussi l'époque de la vie où il est plus rare & plus méritoire de le remplir.

Sur les Perturbations des Comètes. Page 65.

L'ACADÉMIE, en proposant ce Prix de nouveau, désiroit une méthode générale de calculer les Perturbations des Comètes, & telle qu'on pût l'appliquer facilement à la Comète de 1532, qu'on croit être la même que celle de 1661, & qui par conséquent doit reparoître dans quelques années. Le Prix étoit double, & il a été remporté par M. de la Grange, Associé tranger de l'Académie, & Directeur de la Classe de Mathématiques dans celle de Berlin.

La plus grande difficulté de ce problême naît de l'impossibilité de se servir de la même méthode d'approximation, pour toutes les parties de l'orbite ; & la manière nouvelle dont M. de la Grange a envisagé le problême, lui a donné le moyen de vaincre cette difficulté, en employant successivement trois méthodes, l'une pour la partie inférieure de l'orbite, l'autre pour la partie supérieure, & la troisième pour le point de cette partie supérieure, où la distance plus petite de la Planète perturbatrice rendroit fautive l'application de la seconde méthode.

Sur les Comètes de 1532 & de 1661. Page 333.

LE succès de l'application des méthodes de calcul aux Perturbations d'une Comète, dépend nécessairement de l'exactitude des observations de cette Comète dans ses différentes apparitions; & il est aisé de sentir que des observations faites en 1532 & en 1661, avoient besoin d'être discutées. Ainsi, après s'être assurée d'une méthode de calculer les Perturbations, applicable à la Comète de 1532 & de 1661, l'Académie a jugé qu'il seroit utile de s'occuper de l'examen de ces observations. Elle a proposé cet examen pour sujet du Prix de 1782, & il a été remporté par M. Méchain, aujourd'hui Membre de l'Académie.

Le calcul des Perturbations de la Comète de 1532 à 1661, & par conséquent la prédiction de l'époque de son retour, d'après la théorie, est enfin le sujet d'un Prix qui sera décerné en 1786. On voit par-là avec quelle suite l'Académie s'est occupée de cette grande question, jusqu'ici sans utilité bien apparente, mais dont la solution est du moins une des preuves les plus brillantes de la hardiesse & des forces de l'esprit humain. On permet aux Compagnies savantes, comme aux Corps politiques, de songer quelquefois à la splendeur de l'Empire, & avec d'autant plus de raison, que dans les Sciences cette splendeur ne s'achète jamais aux dépens du bien général; & que si les questions qu'on y propose, ne sont souvent que curieuses, les méthodes inventées pour les résoudre finissent presque toujours par avoir une utilité réelle.

Sur la Théorie des Machines simples, en ayant égard aux effets du frottement & de la roideur des cordages. Page 161.

CETTE question a été proposée successivement en 1779 & en 1781, & le Prix, qui étoit double, a été remporté par M. Coulomb, Capitaine au Corps Royal du Génie, & aujourd'hui Membre de l'Académie.

Ce ſujet, indépendamment de l'utilité qu'on pouvoit eſpérer, dans la Mécanique pratique, d'une connoiſſance plus exacte des effets des frottemens & des cordages, avoit encore l'avantage d'offrir une nouvelle occaſion d'appliquer le calcul à la recherche des loix de la Nature, données ſeulement par l'obſervation & par l'expérience. Cet Art important eſt encore peu connu & peu avancé, & il ne faut pas en être étonné; il ne pouvoit faire de progrès réels, avant que l'on eût éclairci les principales difficultés de la Théorie générale du mouvement. M. Coulomb a ſatisfait également aux vûes que l'Académie s'étoit propoſées, & pour l'utilité pratique, & pour le progrès des connoiſſances phyſiques.

HISTOIRE NATURELLE DES ANIMAUX.

Sur les Albatros, par M. Forſter. Page 563.

Ces oiſeaux, que M. Forſter a obſervés dans ſes voyages autour du Monde, avec le Capitaine Cook, exiſtent dans l'hémiſphère auſtral : on en peut diſtinguer trois eſpèces; la première, qui eſt de la groſſeur d'un cygne, & la ſeconde, qui eſt à peu près de celle d'une oie, & qui de plus a une raie dorée ſur le bec, habitent la partie tempérée de cet hémiſphère. Plus au nord, on trouve la troiſième eſpèce, égale en grandeur à la ſeconde, & diſtinguée par des paupières blanches.

Ces

Les Albatros ſont très-voraces, & armés d'un bec propre à ſaiſir & à déchirer leur proie ; leurs ailes ſont très-grandes ; ils volent long-temps & avec une grande rapidité ; ils s'élèvent facilement de la ſurface de l'eau ; mais lorſqu'ils ſont à terre, ils ne peuvent prendre leur vol qu'en ſe laiſſant tomber d'une éminence : en général ils ne volent qu'à peu de diſtance de la ſurface de l'eau, même quand ils vont au loin : par ce moyen, non ſeulement ils ſe tiennent plus près de la mer, où ils cherchent leur nourriture, mais ils ſont plus en ſûreté. Leur ſternum eſt très-court, & des oiſeaux de proie plus foibles qu'eux les attaquent avec avantage lorſqu'ils peuvent gagner le deſſous. M. Forſter a vu de ces oiſeaux à ſept cent cinquante lieues des terres ; & en comparant leur vol à la marche du vaiſſeau, il a jugé qu'ils faiſoient quinze lieues par heure. Ils ſont très-avides ; & dans les gros temps ſur-tout, où ils trouvent plus difficilement de la nourriture, on les prend aiſément à l'ameçon. Dépouillée de la peau, leur chair eſt mangeable, & M. Forſter la préféroit aux ſalaiſons.

MINÉRALOGIE.

Sur les Volcans éteints du Briſgaw, par M. le Baron Dietrich, Correſpondant de l'Académie. Page 435.

LES Volcans éteints, qui étoient à peine ſoupçonnés il y a trente ans, ne peuvent plus être regardés comme un phénomène iſolé ; ils occupent une partie conſidérable de la ſurface du globe, s'y trouvent diſperſés dans preſque toutes ſes régions, n'exiſtent que dans des chaînes de montagnes, dont la forme & la compoſition ſont à peu près les mêmes. L'obſervation de ces Volcans annonce qu'ils ont ceſſé de brûler dans des époques très-éloignées les unes des autres. Dans pluſieurs cantons où on les apperçoit, il ne s'eſt conſervé aucune mémoire du temps où ils ont été brûlans. Il paroît que la cauſe qui produit les Volcans, tient à la conſtitution générale du globe; qu'elle agit ſucceſſivement dans différens points, pour y perdre enſuite toute ſon activité. Les cauſes de ces grands phénomènes ſont encore abſolument inconnues; mais ſi jamais nous pouvons eſpérer de les découvrir, c'eſt à force de multiplier les obſervations particulières. Ainſi, quoique l'on connoiſſe aujourd'hui un grand nombre de Volcans éteints, la découverte de ceux d'un pays où ils n'avoient pas été obſervés, eſt toujours importante pour l'Hiſtoire Naturelle; ce ſont des matériaux précieux que la poſtérité ſaura un jour mettre en œuvre. Dans les ſciences de faits, la véritable Philoſophie ne conſiſte point à rejeter toute théorie; mais à ſavoir attendre, & reconnoître le temps où il ſera permis d'en former une.

CHIMIE.

Analyſe du Marbre de Campan, par M. Bayen.
Page 397.

ON donne communément le nom de Marbre à une eſpèce de pierre calcaire, dure, ſuſceptible de poli, diverſement colorée, opaque ou n'ayant que très-peu de tranſparence ; mais en ſoumettant les marbres à l'analyſe chimique, on obſerve entre eux des différences plus réelles que celles de leur couleur & des accidens qu'ils offrent à la vue. Le marbre blanc, le marbre noir de Picardie, ſont preſque abſolument formés de terre calcaire, colorée dans ces derniers par une petite portion de terre ferrugineuſe. Dans le Marbre Campan au contraire, on trouve plus d'un quart d'une ſubſtance ſchiteuſe, & quelques parties de terre alumineuſe. M. Bayen propoſe, d'après ces obſervations, de claſſer les marbres d'après les produits de l'analyſe, plutôt que par leurs apparences extérieures, en réſervant ces apparences pour établir enſuite des ſubdiviſions. Cette méthode eſt celle de la plupart des Chimiſtes qui ont étudié la Minéralogie, & pluſieurs Naturaliſtes l'ont adoptée.

Sur la formation du Soufre, par M. le Veillard. Page 551.

Ce Mémoire eſt deſtiné à prouver, d'abord par des obſervations, & enſuite par des expériences directes, que le Soufre peut ſe former par la voie humide, & ſans le ſecours de la chaleur. M. le Veillard a trouvé que des mélanges de ſels vitrioliques, & de ſubſtances inflammables, lorſqu'ils ſont ſuſceptibles de fermentation putride, produiſent d'abord du foie de Soufre ; mais il faut que ces mêmes mélanges ne ſoient pas expoſés à l'air libre, pour que le Soufre s'y trouve ſéparé de l'alkali. Ces expériences lui ont confirmé ce que l'inſpection des eaux froides ſulfureuſes de Montmorency, & de celles de quelques égouts lui avoit déjà fait ſoupçonner.

Sur un Gas inflammable, retiré du phoſphore par les Alkalis, par M. Gengembre. Page 651.

CE Gas, dont on doit la connoiſſance à M. Gengembre, & qui ſe ſépare du phoſphore en le combinant avec un alkali, a la propriété ſingulière de s'enflammer ſpontanément lorſqu'il ſe mêle avec l'air vital; propriété qui le diſtingue des autres ſubſtances aériformes ſuſceptibles d'inflammation.

MÉTÉOROLOGIE.

Obſervations Thermométriques, par M. Marcorelle, Correſpondant de l'Académie. Page 589.

CES obſervations ont pour objet de comparer les degrés de température marqués ſur les thermomètres expoſés aux rayons du Soleil & à l'ombre, dans les mêmes lieux & aux mêmes heures; ainſi que la diminution de la chaleur du Soleil pendant les éclipſes.

ASTRONOMIE.

Sur une méthode de déterminer le mouvement d'une Planète, d'après l'obſervation d'une de ſes taches, par M. Cagnoli. Page 467.

CE problême d'Aſtronomie a été réſolu de pluſieurs manières; mais la méthode que propoſe M. Cagnoli eſt abſolument élémentaire & très-ſimple, & elle peut par conſéquent être utile aux Aſtronomes.

Sur l'Aſtronomie des Chinois.

Ce Mémoire renferme un catalogue des conſtellations Chinoiſes, comparées avec celles que nos Aſtronomes emploient, & la liſte des Comètes que les Chinois ont obſervées depuis l'an 613 avant notre Ere, juſqu'en 1222, temps où vivoit l'Écrivain dont M. de Guignes le fils a traduit l'Ouvrage. Les connoiſſances vaſtes dans les Langues & dans l'Hiſtoire des peuples Orientaux, dont M. de Guignes a donné depuis long-temps de ſi brillantes preuves, doivent inſpirer la plus grande confiance dans le travail de ſon fils. Non content d'avoir appris à connoître les Chinois dans le peu de Livres que nous avons d'eux, M. de Guignes le fils a voulu, depuis la compoſition de ce Mémoire, aller les étudier dans leur propre pays; & ce voyage nous donne des eſpérances fondées, que nous connoîtrons enfin cette Nation célèbre fur laquelle nous avons tant écrit, qui a été jugée ſi diverſement par nos Philoſophes & nos Politiques, & dont les mœurs, les Loix, le Gouvernement, les Arts, nous laiſſent encore tant de doutes à éclaircir.

MÉCANIQUE.

Sur une nouvelle Preſſe, par M. Aniſſon. Page 613.

La Preſſe qui eſt en uſage dans les Imprimeries, eſt défectueuſe à beaucoup d'égards; on ne peut eſpérer de belles impreſſions qu'avec beaucoup de peines & de ſoins ; d'où il réſulte que les Ouvrages communs ne ſeront jamais beaux, & que les beaux Ouvrages ſeront toujours très-chers. Or le véritable intérêt du Public dans les Arts, eſt que les choſes d'un uſage commun ſe perfectionnent, que l'on puiſſe obtenir des Ouvrages bien faits à bon marché. La Preſſe de M. Aniſſon a paru exempte des défauts de la Preſſe ordinaire ; elle demande peu de ſoins, même pour faire très-bien. A la vérité ſa première conſtruction eſt plus chère ; mais elle fait plus d'ouvrage, & la perfection y eſt portée au point de pouvoir tirer ſix fois ſur la même feuille ſans doubler aucune lettre.

ANALYSE.

Sur l'attraction des Sphéroïdes, par M. le Gendre, aujourd'hui Membre de l'Académie. Page 411.

L'ATTRACTION des Sphéroïdes elliptiques de révolution ſur un point quelconque, eſt proportionnelle à leur maſſe, pourvu que leur centre & les deux foyers de l'ellipſe génératrice ſoient les mêmes.

On peut donc connoître l'attraction de ces Sphéroïdes ſur un point quelconque : en effet, d'après le théorême précédent, il ſuffit de chercher celle d'un autre Sphéroïde, engendré par une ellipſe, ayant les mêmes foyers, & paſſant par ce point, & l'on ſait déterminer cette attraction, lorſque le point attiré eſt ſur la ſurface du Sphéroïde.

Tel eſt le théorême nouveau démontré par M. le Gendre dans ce Mémoire; il y emploie la méthode des ſéries ; mais la démonſtration n'en eſt pas moins rigoureuſe, parce qu'elle ne dépend point de la valeur, mais de la forme de ces ſuites.

Sur la Courbure des Surfaces, par M. Meuſnier, aujourd'hui Membre de l'Académie. Page 577.

M. EULER a donné le premier une méthode pour déterminer la Courbure des Surfaces ; celle que propoſe M. Meuſnier eſt différente, & elle le conduit à ce théorême curieux, que tout élément de Surface eſt produit par la révolution d'un petit arc de cercle, autour d'un axe donné, propriété analogue à celle des lignes courbes dont tous les élémens peuvent être conſidérés comme de petits arcs de cercle.

Il a joint à cette méthode pluſieurs autres remarques intéreſſantes ſur la théorie des Surfaces.

Sur les Développées & les points ſinguliers des courbes à double courbure, par M. Monge. Page 511.

CETTE théorie importante dans la Géométrie, & même pour quelques-unes de ſes applications, avoit été négligée. M. Monge s'en eſt occupé avec ſuccès, & la donne ici toute entière avec beaucoup de ſimplicité, de méthode & d'élégance.

Sur le Calcul aux différences finies, par M. Charles. Page 573.

DES conſidérations ſur la nature des intégrales des équations aux différences finies, ſur les loix auxquelles les fonctions arbitraires qui entrent dans ces intégrales doivent être aſſujetties, ſur l'étendue des ſolutions qui en réſultent, ſur leur conſtruction géométrique, forment le fond de ce Mémoire. Les diſcuſſions qu'il renferme touchent par quelques points à la métaphyſique du Calcul. Ainſi toutes les concluſions de l'Auteur ne ſeront généralement pas admiſes; mais elles méritent d'être diſcutées; & l'on peut dire de ce genre de queſtion, qu'il eſt utile pour le progrès de la ſcience, que les Savans s'en occupent quelquefois, quoiqu'il fût peut-être dangereux qu'ils s'en occupaſſent trop longtemps.

RECHERCHES

SUR

LE DÉRANGEMENT

D'UNE COMÈTE

QUI PASSE PRÈS D'UNE PLANÈTE.

RECHERCHES

SUR

LE DÉRANGEMENT D'UNE COMÈTE

QUI PASSE PRÈS D'UNE PLANÈTE.

RÉFLEXIONS PRÉLIMINAIRES.

AVANT que d'entreprendre ces Recherches en général, pour les rendre applicables à toutes les Comètes qui pourroient approcher d'une Planète, j'ai cru néceſſaire d'examiner un cas déterminé où une Comète approcheroit tant de la Terre qu'elle la toucheroit preſque, ſans pourtant la choquer actuellement, attendu que les effets qui réſulteroient d'un choc réel, ne ſauroient être douteux.

Pour faciliter cette recherche, j'ai ſuppoſé une Comète dont la marche ſeroit dirigée droit vers le Soleil, dans le plan même de l'écliptique, & qui y rencontreroit à peu près la Terre ſans pourtant la choquer. Or, à la Terre j'ai ſuppoſé un mouvement circulaire autour du Soleil à ſa diſtance moyenne de 24000 demi-diamètres de la Terre, conformément à la parallaxe du Soleil conclue du dernier paſſage de Vénus ; & en conſéquence de cette détermination, j'ai pris la maſſe du Soleil 360000 fois plus grande que celle de la Terre : enſuite j'ai ſuppoſé à la Comète une maſſe égale à celle de la Terre, pour en conclure auſſi l'effet que la Comète produiroit ſur le mouvement de la Terre.

Cela poſé, j'ai vu d'abord que l'action mutuelle entre la Terre & la Comète ne commençoit à devenir ſenſible qu'environ deux jours avant leur conjonction, où j'ai ſuppoſé le lieu de la Terre au commencement du Belier. Depuis ce terme, j'ai pourſuivi tant la Terre que la Comète par des intervalles de temps que j'ai pris plus petits, à meſure que la diſtance entre ces deux corps diminuoit.

Cette hypothèſe m'a mis en état de calculer pour chacun de ces intervalles, tant le lieu, que le mouvement de chacun, ſans avoir été obligé de recourir à l'intégration des équations que la théorie du mouvement fournit. C'eſt donc après avoir fait tout ce calcul, que je mets ici le réſultat dans la Table ſuivante, où l'on peut voir, pour chaque intervalle de temps, 1°. la longitude de la Terre avec ſa diſtance au Soleil ; 2°. la longitude héliocentrique de la Comète, avec ſa diſtance au Soleil, & 3°. la longitude géocentrique de la Comète, avec ſa diſtance à la Terre.

Temps.		Longitude de la Terre.			Diſtance de la Terre au Soleil.	Longitude Héliocentrique de la Comète.			Diſtance de la Comète au Soleil.	Longitude Géocentrique de la Comète.			Diſtance de la Comète à la Terre.
J.	H.	D.	M.	S.		D.	M.	S.		S.	D.	M.	
0	0	0	0	0	24000,00	1	58	17	25154,08	1	7	12	1430,697
1	0	0	59	8	24000,00	1	58	17	24580,60	1	7	$13\frac{1}{6}$	715,302
1	12	1	28	43	24000,01	1	58	17	24291,32	1	7	12	357,724
1	18	1	43	31	24000,02	1	58	17	24146,00	1	7	9	178,928
1	24	1	50	54	24000,03	1	58	17	24073,23	1	7	$3\frac{1}{6}$	89,521
1	$22\frac{1}{2}$	1	54	36	24000,04	1	58	17	24036,22	1	7	$20\frac{1}{10}$	44,808
2	$1\frac{1}{2}$	2	2	0	24000,06	1	58	17	23963,77	7	7	$37\frac{2}{5}$	44,657
2	3	2	5	42	24000,10	1	58	17	23927,24	7	7	$22\frac{}{4}$	89,298
2	6	2	13	6	24000,11	1	58	17	23854,04	7	7	$20\frac{1}{2}$	176,780
2	12	2	27	52	24000,14	1	58	17	23707,51	7	7	$17\frac{1}{6}$	357,240
3	0	2	57	27	24000,10	1	58	16	23413,05	7	7	$16\frac{1}{2}$	714,957
4	0	3	56	37	24000,01	1	58	16	22818,74	7	7	$15\frac{2}{3}$	1429,903

Cette Table nous fait voir :

1°. Que les dérangemens causés dans le mouvement tant de la Terre que de la Comète, ne sont pas à beaucoup près aussi considérables qu'on auroit pu s'imaginer, vu qu'il a paru à plusieurs Philosophes qu'une telle rencontre pourroit causer un bouleversement total tant dans la Terre que dans la Comète, ou qu'au moins ces deux corps devroient demeurer attachés ensemble que l'un devenoit quasi un satellite de l'autre, lequel sentiment se trouve à présent suffisamment réfuté ; car nous voyons :

2°. Que la Comète s'éloigne presque aussi rapidement de la Terre après la conjonction, qu'elle s'en étoit approchée avant ; de sorte que deux jours après la conjonction, où l'action mutuelle n'est presque plus sensible, tant la Terre que la Comète se trouvent presque entièrement rétablies dans le même mouvement qu'elles auroient poursuivi sans l'action mutuelle, puisque l'effet de cette action, pendant les deux derniers jours, détruit presque entièrement celui qui a été produit pendant les premiers.

3°. Quoique la différence entre le mouvement avant & après la conjonction soit très-petite en elle-même, elle ne laisse pas de produire des changemens assez considérables, tant de la Terre que de la Comète. Car d'abord le demi-axe de l'orbite de la Terre, deviendra un peu plus grand : de sorte que le temps d'une révolution en pourroit bien être augmenté de plus de six heures ; mais l'excentricité n'en sera pas changée considérablement : où il faut se souvenir que nous avons supposé nulle l'excentricité avant l'action mutuelle.

4°. Pour ce qui regarde le mouvement de la Comète après cette action, sa direction n'en sera presque point altérée ; mais au lieu que son temps périodique a été supposé infini avant l'action, il se trouvera réduit après à vingt-sept siecles environ.

5°. En considérant bien les phénomènes rapportés dans cette Table, on s'appercevra aisément que, pendant chaque intervalle, l'action mutuelle entre la Terre & la Comète a été presque entiérement indépendante de l'action du Soleil, & que réciproquement l'action du Soleil n'a pas été troublée par l'action mutuelle de la Terre & de la Comète. Cette observation est de la dernière importance, vu qu'elle nous met en état de déterminer, tant l'action du Soleil que l'action mutuelle, chacune séparément, sans que l'une soit dérangée par l'autre, pourvu qu'on suppose les intervalles de temps assez petits.

PLAN de la Méthode qu'on suivra dans ces Recherches.

Je remarque d'abord qu'on ne sauroit employer la méthode dont on se sert ordinairement pour déterminer le dérangement causé par l'action mutuelle des Planètes. Car cette méthode demande qu'on transforme la formule irrationnelle qui exprime la distance entre les deux Planètes, dans une série convergente, dont il suffiroit de prendre seulement quelques termes, en négligeant tous les suivans. Or une telle transformation ne sauroit avoir lieu, que quand la distance entre les deux Planètes ne varie point très-énormément; &, par cette raison, c'est une chose assurée qu'on ne sauroit appliquer cette méthode pour déterminer le dérangement que les deux Planètes, Jupiter & Saturne, produisent mutuellement dans leur mouvement, vu que la plus grande distance entre ces deux Planètes surpasse bien quatre fois la plus petite; d'où il est impossible de trouver une série assez convergente, pour qu'il suffise de n'en considérer qu'environ trois ou quatre termes, ce qui est sans doute la raison pourquoi on a si peu réussi jusqu'ici à déterminer le dérangement que la Terre & Vénus se causent réciproquement, puisque la plus grande distance peut devenir au delà de six fois plus grande que la plus petite: d'où il s'ensuit que les Tables solaires de feu M. l'Abbé de la Caille ne sauroient être que très-défectueuses sur l'inégalité que l'action de Vénus cause dans le mouvement de la Terre, comme M. Euler l'a prouvé très-évidemment dans le Tome XVI des Commentaires de l'Académie de Pétersbourg, où il s'est servi d'une méthode tout-à-fait différente & indépendante de la résolution mentionnée dans une série; & la Table qu'il a ajoutée sur la fin, diffère tout à fait de celle qu'on trouve dans les Tables de M. de la Caille. Cette différence eſt ſans doute la raiſon pourquoi les Tables du dernier, ſelon ſon propre aveu, diffèrent quelquefois juſqu'à trente ſecondes de la vérité.

Comme cette méthode, que je rejette, comme on voit, avec raiſon, eſt encore moins applicable aux Comètes, dont la diſtance à une Planète peut varier à l'infini; je me ſervirai de la même méthode que feu M. Clairaut a employée pour déterminer le retardement de la Comète de 1759, & je tâcherai de la rendre plus aiſée, en remarquant d'abord, qu'on n'a pas beſoin de comparer toute l'orbite de la Comète avec le mouvement de la Planète auprès de laquelle elle paſſe; mais qu'il ſuffit de conſidérer la portion ſur laquelle l'action de la Planète devient ſenſible, qui eſt, comme je l'ai fait voir, très-petite lorſque la Comète paſſe auprès de la Terre; mais en cas qu'elle paſſeroit auprès de Jupiter ou de Saturne, elle pourra durer beaucoup plus long-temps.

Quoi qu'il en ſoit, je partagerai tout le temps où la Comète demeure aſſujettie à l'action de la Planète en pluſieurs intervalles, & je calculerai pour chacun l'effet que tant l'action du Soleil que celle de la Planète y produit. De cette manière je pourrai déterminer l'action du Soleil indépendamment de celle de la Planète, & réciproquement l'effet de la Planète, indépendamment de celui du Soleil; de ſorte que, vers la fin de cet intervalle, on n'aura qu'à combiner ces deux effets pour connoître le vrai état de la Comète à la fin de cet intervalle, qui donnera l'état initial pour l'intervalle de temps ſuivant. Je me ſers ici du terme *état initial de la Comète*, pour y comprendre non ſeulement le lieu qu'elle occupe à un temps donné, mais auſſi ſon mouvement; ainſi tout reviendra à réſoudre cette queſtion: L'état de la Comète étant donné pour le commencement d'un intervalle, déterminer ſon état pour la fin de ce même intervalle, & on n'aura qu'à aſſembler tous les changemens qu'aura produits tant l'action du Soleil que celle de la Planète.

De cette manière on trouvera l'état de la Comète pour l'intervalle ſuivant, d'où l'on n'aura qu'à faire les mêmes opérations, juſqu'à ce qu'on ſera parvenu au dernier intervalle, où l'action de la Comète devient tout à fait inſenſible. Depuis ce temps on déterminera l'orbite de la Comète qui réſulte de la ſeule action du Soleil, ſelon les règles connues; & en comparant tous les élémens de cette nouvelle orbite avec ceux de l'orbite qu'elle a tenue avant l'action de la Planète, on connoîtra tous les changemens que l'action de la Planète aura produits, 1°. dans la ligne des nœuds, 2°. dans ſon inclinaiſon à l'orbite de la Planète, 3°. tant la poſition que la grandeur de ſon axe principal, d'où l'on tirera en même temps 4°. ſon temps périodique, & 5°. l'excentricité de ſon orbite.

ARTICLE I.

Détermination de l'état de la Comète, avant que de ſubir l'action de la Planète.

PUISQU'IL s'agit de déterminer le dérangement d'une Comète cauſé par l'action de quelque Planète, il faut ſuppoſer que le mouvement de cette Comète, avant que d'éprouver l'action de la Planète, ſoit parfaitement connu. Qu'on rapporte donc cette orbite connue au plan de l'orbite de la Planète, en y marquant la ligne des nœuds avec l'inclinaiſon de l'orbite, afin qu'on en puiſſe calculer tant la longitude que la latitude de la Comète ſur le plan de l'orbite de la Planète pour un temps propoſé. Que le plan de la planche repréſente donc le plan de l'orbite de la Planète ſur lequel ſe trouve le centre du Soleil en S, d'où ſoit tirée la ligne droite S ♈ vers le commencement du Belier, qui repréſentera l'axe fixe, auquel je rapporterai tant le lieu de la Planète que de la Comète par des coordonnées perpendiculaires entre elles.

Soit

Soit donc pour un temps quelconque la Comète en z, d'où l'on tire sur l'autre plan fixe la perpendiculaire zy, & de y sur l'axe, la perpendiculaire yx, en nommant $Sx = x$: $xy = y$, & $yz = z$, & ces trois coordonnées détermineront le lieu de la Comète pour le temps proposé. Et pour le rapporter à une mesure fixe, j'exprimerai constamment par l'unité la distance moyenne de la Terre au Soleil. Or, pour avoir une mesure fixe du temps, je prendrai un jour pour l'unité, au lieu que dans les recherches purement mécaniques, on est accoutumé d'exprimer le temps en secondes. Ainsi j'exprimerai ici le temps en jours chacun de 24 heures, & conformément à cette unité j'exprimerai toutes les vîtesses par l'espace qui en seroit parcouru en un jour. Cela posé, pour déterminer le mouvement de notre Comète, qu'on calcule pour le jour suivant son lieu par les coordonnées x', y', z', & les formules $x'-x$, $y'-y$ & $z'-z$ donneront les vîtesses de la Comète, selon les directions des trois coordonnées ; ou bien, posant le temps écoulé depuis une certaine époque $= \tau$ jours, ces mêmes vîtesses seront aussi exprimées par ces formules $\frac{dx}{d\tau}$, $\frac{dy}{d\tau}$, $\frac{dz}{d\tau}$. *FIGURE I.*

Par une manière semblable je représenterai le mouvement de la Planète, qui se trouve en Y, pendant que la Comète est en z ; d'où tirant l'appliquée YX, je nommerai $SX = X$ & $XY = Y$, pour avoir le lieu de la Planète, & son mouvement sera exprimé par les formules $\frac{dX}{d\tau}$ & $\frac{dY}{d\tau}$. De cette manière l'état de la Comète sera déterminé par les six élémens suivans : x, y, z & $\frac{dx}{d\tau}$, $\frac{dy}{d\tau}$, $\frac{dz}{d\tau}$, pendant que l'état de la Planète ne demande que ces quatre : X, Y & $\frac{dX}{d\tau}$, $\frac{dY}{d\tau}$.

Maintenant ayant fixé le temps où l'on juge que l'action de la Comète commence à devenir sensible, je suppose qu'on ait trouvé pour l'état de la Comète $x = a$, $y = b$ & $z = c$; puis $\frac{dx}{d\tau} = \alpha$, $\frac{dy}{d\tau} = \beta$, & $\frac{dz}{d\tau} = \gamma$. Or, pour la Planète, je ſuppoſerai les élémens de ſon état pour le même temps, $X = A$, $Y = B$; $\frac{dX}{d\tau} = U$, $\frac{dY}{d\tau} = Z$. Donc, s'il n'y avoit point de forces à l'action deſquelles la Comète ſeroit ſujette, ſon mouvement ſe feroit uniformément ſelon la même direction, & pour un temps quelconque de τ jours après l'époque établie, on auroit pour l'état de la Comète $x = a + \alpha\tau$, $y = b + \beta\tau$, $z = c + \gamma\tau$. (On trouvera vers la fin une démonſtration complette de cette ſuppoſition). Les vîteſſes demeurant les mêmes, ſavoir : $\frac{dx}{d\tau} = \alpha$, $\frac{dy}{d\tau} = \beta$, $\frac{dz}{d\tau} = \gamma$. De même manière, ſi la Planète continuoit ſon mouvement uniforme en ligne droite, on auroit pour le même temps : $X = A + U\tau$, $Y = B + Z\tau$, les vîteſſes étant $\frac{dX}{d\tau} = U$, $\frac{dY}{d\tau} = Z$. Cela poſé, je chercherai les dérangemens cauſés dans le mouvement uniforme & rectiligne, tant par l'action du Soleil que par celle de la Planète, au moins pour quelque intervalle de temps aſſez petit, pour que ces deux actions ne ſe troublent pas ſenſiblement.

Par cette même méthode, on pourroit auſſi déterminer le dérangement qui ſeroit cauſé dans le mouvement de la Planète même par l'action de la Comète. Mais puiſque l'Académie Royale n'exige pas ces recherches, je regarderai la maſſe de la Comète comme ſi petite, que la Planète n'en ſouffre aucun changement ſenſible.

ARTICLE II.

Détermination de l'action du Soleil ſur l'état de la Planète, pendant un intervalle de temps aſſez petit.

JE conſidère d'abord la Planète elle-même en tant que ſon mouvement eſt courbé par l'action du Soleil ; &, quoique ce changement puiſſe être déterminé exactement par les Tables aſtronomiques, il ſera bon pour mon deſſein de le déterminer plutôt par approximation, pour établir une harmonie avec la détermination du mouvement de la Comète. Car, puisqu'il ne s'agit que d'un petit intervalle de temps, cette approximation tiendra lieu d'une détermination exacte.

Ayant donc établi l'époque où l'action de la Planète sur la Comète commence, soit le temps écoulé après cette époque de τ jours, & prenant θ pour le moyen mouvement du Soleil, qui répond à ce temps de τ jours, & supposant la distance moyenne de la Terre au Soleil $= 1$, les principes du mouvement nous fournissent pour le mouvement de la Planète ces formules différentio-différentielles :

$$ddX = -\frac{X d\theta^2}{V^3} \text{ \& } ddY = -\frac{Y d\theta^2}{V^3}:$$

en marquant par V la distance de la Planète au Soleil, de sorte que $V = \sqrt{XX + YY}$. Mais puisque par les Tables du moyen mouvement du Soleil on a $\theta = \tau.\ 59', 8''$, en réduisant cet angle en parties du rayon on aura $\theta = 0{,}0172028.\ \tau$, & partant $d\theta = 0{,}0172028.\ d\tau$, dont le carré donne $d\theta^2 = 0{,}0002959.\ d\tau^2$. Or, pour abréger, je mettrai au lieu de cette fraction décimale la lettre M, de sorte que $M = 0{,}0002959$ & $lM = 6{,}4711984$, d'où l'on aura ces deux équations à résoudre :

$$\frac{ddX}{d\tau^2} = -\frac{MX}{V^3} \text{ \& } \frac{ddY}{d\tau^2} = -\frac{MY}{V^3}.$$

Mais nous avons vu ci-dessus, que si le mouvement de la Planète demeuroit uniforme, on auroit $X = A + U\tau$ & $Y = B + Z\tau$; donc, puisque l'action du Soleil est fort petite, les valeurs de X & de Y ne différeront quasi rien de celles-ci, & sur-tout dans les formules différentio-différentielles, puisque les coéfficiens sont si extrêmement petits, qu'on les pourra substituer au lieu de X & de Y; ce qu'on pourra faire aussi dans la distance V, d'où l'on aura $V^2 = X^2 + Y^2 = A^2 + B^2 + 2(AU + BZ)\tau + (U^2 + Z^2)\tau\tau$, où il faut remarquer que le premier membre $A^2 + B^2$ est non seulement beaucoup plus grand que les suivans, puisqu'on prend le temps τ assez petit : mais que les coéfficiens de ces membres sont aussi peu considérables par rapport au premier; de sorte que, pourvu qu'on ne prenne pas le temps τ bien grand, la formule $\frac{1}{V^3}$ ſera réſoluble dans une ſérie extrêmement convergente, dont il ſuffira, pour la plupart, de prendre les deux ou tout au plus les trois premiers termes, à cauſe de la petiteſſe du coéfficient M.

Suppoſons donc que la réſolution du dénominateur donne $\frac{1}{V^3} = H + K\tau + L\tau\tau$, de ſorte que $H = \frac{1}{(AA+BB)^{\frac{3}{2}}}$; $K = \frac{-3(AU+BZ)}{(AA+BB)^{\frac{5}{2}}}$; $L = \frac{-3(U^2+Z^2)}{2(AA+BB)^{\frac{5}{2}}} + \frac{15(AU+BZ)^2}{2(AA+BB)^{\frac{7}{2}}}$.

Cela poſé, nous aurons . . . .

$$\text{I. } \frac{ddX}{d\tau^2} = -MAH - MUH\tau - MUK\tau\tau - MAK\tau - MAL\tau\tau.$$

$$\text{II. } \frac{ddY}{d\tau^2} = -MBH - MZH\tau - MZK\tau\tau - MBK\tau - MBL\tau\tau.$$

Multiplions donc ces deux formules par $d\tau$ & l'intégration, puiſque prenant $d\tau = 0$, il faut qu'il devienne $\frac{dX}{d\tau} = U$, & $\frac{dY}{d\tau} = Z$, nous donnera ces deux formules.

$$\text{I. } \frac{dX}{d\tau} = U - MAH\tau - \tfrac{1}{2}M(UH + AK)\tau\tau.$$

$$\text{II. } \frac{dY}{d\tau} = Z - MBH\tau - \tfrac{1}{2}M(ZH + BK)\tau\tau.$$

Où dans l'application à des cas particuliers on s'appercevra aiſément juſqu'à quel degré on peut augmenter le temps, pour que l'erreur ne devienne pas ſenſible. Multiplions ces dernières formules encore par $d\tau$, & après l'intégration, puiſque poſant $\tau = 0$, il faut qu'il devienne $X = A$ & $Y = B$, on trouvera les valeurs ſuivantes :

$$\text{I. } X = A + U\tau - \tfrac{1}{2}MAH\tau\tau - \tfrac{1}{6}M(UH + AK)\tau^3.$$

$$\text{II. } Y = B + Z\tau - \tfrac{1}{2}MBH\tau\tau - \tfrac{1}{6}M(ZH + BK)\tau^3.$$

Maintenant on n'a qu'à donner à τ une grandeur convenable au cas qu'on veut traiter, & on aura les juſtes valeurs de ces quatre élémens X, Y, $\frac{dX}{d\tau}$, $\frac{dY}{d\tau}$, qui détermineront l'état de la

Planète pour le commencement du ſecond intervalle de temps; & en faiſant les mêmes opérations on parviendra au troiſième intervalle, & ainſi de ſuite juſqu'à ce que l'action de la Planète ſur la Comète aura entièrement ceſſé. Or, en faiſant ces opérations on aura l'avantage de pouvoir rectifier à chaque intervalle le lieu de la Planète pour l'intervalle ſuivant, par les Tables aſtronomiques de ſon mouvement, en cas qu'on le jugera néceſſaire; mais on verra, par cette même comparaiſon, qu'on pourra établir les intervalles de temps aſſez conſidérables, avant que la rectification devienne ſenſible; ou il ſera bon d'obſerver, que s'il s'agiſſoit de la Terre, on pourroit bien établir ces intervalles d'un ou même de quelques jours : or ſi c'étoit Jupiter ou même Saturne, on ne riſqueroit rien en prenant ces intervalles de pluſieurs jours. Mais ſi c'étoit de Vénus ou de Mercure qu'il s'agiſſoit, on ſeroit ſans doute obligé de les raccourcir conſidérablement; cependant le travail n'en ſeroit point augmenté, puiſque, dans ces cas, l'action de la Planète ſur la Comète ne dureroit que très-peu de temps.

ARTICLE III.

Détermination de l'action du Soleil ſur l'état de la Comète, pendant un intervalle de temps aſſez petit.

CETTE détermination s'exécutera de la même manière que dans l'article précédent pour la Planete, avec la ſeule différence, que l'état de la Comète eſt déterminé par les trois coordonnées x, y, z, avec les formules différentielles $\frac{dx}{d\tau}$, $\frac{dy}{d\tau}$, $\frac{dz}{d\tau}$, qui en repréſentent les vîteſſes; & nous avons déja exprimé les valeurs de ces ſix élémens par les lettres a, b, c & α, β, γ pour le commencement du premier intervalle, qui auront été tirées de la Théorie du mouvement, que la Comète aura tenu avant que d'entrer dans la ſphere d'activité de la Planète. Or les formules différentio-différentielles qui renferment l'action du Soleil sur la Comète, seront :

$$\frac{ddx}{d\tau^2} = -\frac{Mx}{v^3}; \quad \frac{ddy}{d\tau^2} = -\frac{My}{v^3}; \quad \frac{ddz}{d\tau^2} = -\frac{Mz}{v^3},$$

où v marque la distance de la Comète au Soleil, de sorte que $vv = xx + yy + zz$.

Maintenant, puisque la Comète est supposée à peu près aussi éloignée du Soleil que la Planète, pendant que l'action de celle-ci est assez considérable, l'action du Soleil sur la Comète le sera fort peu ; de sorte qu'on pourra établir les mêmes intervalles de temps. Cela remarqué, on aura pour le premier de ces intervalles assez exactement, ... :

$$x = a + \alpha\tau, \; y = b + \beta\tau, \; z = c + \gamma\tau; \; \frac{dx}{d\tau} = \alpha, \; \frac{dy}{d\tau} = \beta, \; \frac{dz}{d\tau} = \gamma;$$

c'est pourquoi en employant ces valeurs on aura . . . .

$$vv = aa + bb + cc + 2(a\alpha + b\beta + c\gamma)\tau + (\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)\tau\tau$$

où le premier membre sera toujours beaucoup plus grand que les suivans ; donc par la même résolution que j'ai employée ci-dessus, je poserai pour abréger $\frac{1}{v^3} = h + k\tau + l\tau\tau$, de sorte que $h = \frac{1}{(aa+bb+cc)_2}$, $k = -\frac{3(a\alpha+b\beta+c\gamma)}{(aa+bb+cc)^{\frac{3}{2}}}$, $l = -\frac{3(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)}{2(aa+bb+cc)^{\frac{5}{2}}} + \frac{15(a\alpha+b\beta+c\gamma)^2}{2(aa+bb+cc)^{\frac{5}{7}}}$ d'où nous aurons les formules suivantes :

$$\text{I. } \frac{ddx}{d\tau^2} = -Mah - M\alpha h\tau - M\alpha k\tau\tau$$
$$- Mak\tau - Mal\tau\tau.$$

$$\text{II. } \frac{ddy}{d\tau^2} = -Mbh - M\beta h\tau - M\beta k\tau\tau$$
$$- Mbk\tau - Mbl\tau\tau.$$

$$\text{III. } \frac{ddz}{d\tau^2} = -Mch - M\gamma h\tau - M\gamma k\tau\tau$$
$$- Mck\tau - Mcl\tau\tau.$$

qui étant intégrées, donneront pour les trois vîtesses de la Comète, ...

$$\frac{dx}{d\tau} = \alpha - Mah\tau - \tfrac{1}{2}M(\alpha h + ak)\tau\tau$$
$$\frac{dy}{d\tau} = \beta - Mbh\tau - \tfrac{1}{2}M(\beta h + bk)\tau\tau$$
$$\frac{dz}{d\tau} = \gamma - Mch\tau - \tfrac{1}{2}M(\gamma h + ck)\tau\tau;$$

lesquelles étant encore multipliées par dt, & intégrées, donneront :

$$x = a + \alpha\tau - \tfrac{1}{2}\mathrm{M}ah\tau\tau - \tfrac{1}{6}\mathrm{M}(\alpha h + ak)\tau^3$$
$$y = b + \beta\tau - \tfrac{1}{2}\mathrm{M}bh\tau\tau - \tfrac{1}{6}\mathrm{M}(\beta h + bk)\tau^3$$
$$z = c + \gamma\tau - \tfrac{1}{2}\mathrm{M}ch\tau\tau - \tfrac{1}{6}\mathrm{M}(\gamma h + ck)\tau^3.$$

Ayant donc calculé ces six valeurs, pour avoir l'état de la Comète, au commencement du second intervalle, on n'a qu'à donner à τ la quantité qu'on aura établie pour le premier intervalle, en tant qu'on ne tient compte que de l'action du Soleil. Mais avant que de passer à l'intervalle suivant, il faut encore corriger cet état par l'action de la Planète pendant le premier intervalle, laquelle découvrira le dérangement causé dans le mouvement de la Comète; c'est en quoi consiste la recherche principale que je dois entreprendre pour satisfaire à la question proposée.

Il est vrai qu'on pourroit aussi tirer immédiatement des Tables astronomiques les six élémens que je viens de déterminer pour le premier intervalle de temps; mais la réduction à nos trois coordonnées x, y, z, & sur-tout la détermination des trois vîtesses, selon les mêmes directions, causeroit beaucoup plus d'embarras. Or, cet expédient ne sauroit plus servir pour les intervalles suivans, où l'on est obligé de tenir compte de l'effet que l'action de la Planète aura produit dans tous les intervalles précédens.

ARTICLE IV.

Détermination de l'action de la Planète sur l'état de la Comète pendant un intervalle de temps assez petit.

CONSIDÉRONS d'abord la force dont la Planète en Y attire la Comète qui se trouve en z; & avant tout, il faut connoître le rapport qu'il y a entre la masse de la Planète & celle du Soleil. Soit donc pour cet effet M à m, comme la masse du Soleil à la masse de la Planète, ainsi qu'en cas que la Planète fût la Terre ou Vénus, on auroit $m = \frac{M}{360000}$; ou si c'étoit Jupiter, on auroit $m = \frac{M}{1067}$, & pour Saturne $m = \frac{M}{3021}$. Ayant établi cette lettre, qu'on considere la distance entre la Planète & la Comète Y z, en la posant $= w$, de sorte que $ww = (x - X)^2 + (y - Y)^2 + zz$. Cela posé, l'action de la Planète sur la Comète sera exprimée par ces trois formules différentio-différentielles.

$$\text{I. } \frac{ddx}{d\tau^2} = -\frac{m(x-X)}{w^3}. \quad \text{II. } \frac{ddy}{d\tau^2} = -\frac{m(y-Y)}{w^3}. \quad \text{III. } \frac{ddz}{d\tau^2} = -\frac{mz}{w^3}.$$

Maintenant il est clair que, pour le premier intervalle de temps, on aura à fort peu près comme ci-dessus $X = A + U\tau$, $Y = B + Z\tau$; $X = a + \alpha\tau$, $Y = b + \beta\tau$, $z = c + \gamma\tau$. Ces valeurs seront d'autant plus exactes, puisque la Comète n'est supposée que peu éloignée de la Planète, & que par-là l'action du Soleil est à peu près la même sur l'une & l'autre; de sorte qu'elle ne troublera presque point du tout l'action de la Planète sur la Comète, sur-tout quand on ne prend pas trop grands les intervalles de temps. Substituons donc dans nos formules ces valeurs,

$$x - X = a - A + (\alpha - U)\tau$$
$$y - Y = b - B + (\beta - Z)\tau$$
$$z = c + \gamma\tau,$$

& nous aurons:

$$ww = \begin{cases} (a - A)^2 + (b - B)^2 + cc \\ + 2\Big((a - A)(\alpha - U) + 2(b - B)(\beta - Z) + c\gamma\Big)\tau \\ + \Big((\alpha - U)^2 + (\beta - Z)^2 + (\gamma - L)^2\Big)\tau\tau. \end{cases}$$

Or, pour abréger, je poserai

$$ww = E + 2F\tau + G\tau\tau,$$

de sorte que les valeurs E, F & G sont connues; & il faut remarquer que les quantités E & G sont toujours

jours positives, pendant que F peut devenir tantôt positif, tantôt négatif. Outre cela, on verra facilement que le produit EG est toujours plus grand que FF. Mais on ne sauroit supposer comme auparavant, que le premier membre E soit beaucoup plus grand que les autres, sur-tout quand la distance entre la Comète & la Planète sera devenue assez petite, & partant, la résolution dans une série infinie ne sauroit plus être employée; cependant rien n'empêche qu'on ne puisse intégrer ces formules sans ce secours.

Or, comme ces formules ne different entr'elles que par les numérateurs, qui sont pour la première, $-m\left((a-A)+(\alpha-U)\tau\right)$; pour la seconde, $-m\left((b-B)+(\beta-Z)\tau\right)$, & pour la troisième, $-m(c+\gamma\tau)$, je mettrai, pour abréger, pour chacun de ces numérateurs, la formule $p+q\tau$; de sorte qu'il s'agit d'intégrer premièrement la formule $\frac{(p+q\tau)d\tau}{(E+2F\tau+G\tau\tau)^{\frac{3}{2}}}$, dont l'intégrale soit $\frac{P+Q\tau}{\sqrt{E+2F\tau+G\tau\tau}}$, où l'on aura $P=\frac{Eg-Fp}{FF-EG}$ & $Q=\frac{Fq-Gp}{FF-EG}$. Mais il y faut ajouter une constante telle, que posant $\tau=o$, l'intégrale évanouisse, puisque, dans l'action du Soleil, on a déjà tenu compte des valeurs initiales pour le commencement du premier intervalle; ainsi cette intégrale sera $\frac{P+Q\tau}{\sqrt{(E+2F\tau+G\tau\tau)}}-\frac{P}{\sqrt{E}}$. Maintenant pour la première formule, ayant $p=-m(a-A)$ & $q=-m(\alpha-U)$, on prendra $P=-\frac{mE(\alpha-U)+mF(a-A)}{FF-EG}$ & $Q=-\frac{mF(\alpha-U)+mG(a-A)}{FF-EG}$, d'où l'on aura . . . $\frac{dx}{d\tau}=\frac{P+Q\tau}{\sqrt{(E+2F\tau+G\tau\tau)}}-\frac{P}{\sqrt{E}}$. Pour la seconde formule, parce qu'il est $p=-m(b-B)$ & $q=-m(\beta-Z)$, on aura $P=-\frac{mE(\beta-Z)+mF(b-B)}{FF-EG}$ & $Q=-\frac{mF(\beta-Z)+mG(b-B)}{FF-EG}$, d'où il s'ensuit $\frac{dy}{d\tau}=\frac{P+Q\tau}{\sqrt{(E+2F\tau+G\tau\tau)}}-\frac{P}{\sqrt{E}}$. Enfin, pour la troisième formule, ayant $p=-mc$ & $q=-m\gamma$, on a

$P = -\frac{mE\gamma + mF\epsilon}{FF - EG}$ & $Q = -\frac{mF\gamma + mG\epsilon}{FF - EG}$ & de là $\frac{dz}{d\tau} = \frac{P + Q\tau}{\sqrt{(E + 2F\tau + G\tau\tau)}} - \frac{P}{\sqrt{E}}$.

Pour intégrer encore une fois ces formules multipliées par $d\tau$, cherchons en général l'intégrale de cette formule : $\frac{(P + Q\tau)d\tau}{\sqrt{E + 2F\tau + G\tau\tau}}$; & pour cet effet, posons d'abord $P + Q\tau = K + H(F + G\tau)$, de sorte que $P = K + FH$ & $Q = GH$, & partant $H = \frac{Q}{G}$ & $K = \frac{GP - FG}{G}$, & notre formule se résoudra en ces deux parties : $\frac{Hd\tau}{\sqrt{(E + 2F\tau + G\tau\tau)}}$ $\frac{+H(F + G\tau)d\tau}{\sqrt{(E + 2F\tau + G\tau\tau)}}$ où l'intégrale de la dernière partie est ouvertement $H\sqrt{E + 2F\tau + G\tau\tau}$, de sorte qu'il ne reste que la première partie $\frac{Kd\tau}{\sqrt{(E + 2F\tau + G\tau\tau)}}$ dont l'intégrale se trouve $-\frac{K}{\sqrt{G}}$ $l\left(F + G\tau - \sqrt{G(E + 2F\tau + G\tau\tau)}\right) + \frac{K}{\sqrt{G}} l(F - \sqrt{EG})$, prenant la constante telle que l'intégrale évanouisse en posant $\tau = o$: de sorte que l'intégrale cherchée sera $\int \frac{(P + Q\tau)d\tau}{\sqrt{E + 2F\tau + G\tau\tau}}$ $= \frac{Q}{G}\sqrt{E + 2F\tau + G\tau\tau} - \frac{Q\sqrt{E}}{G} + \frac{GP - FQ}{G\sqrt{G}}$ $l\frac{F - \sqrt{EG}}{F + G\tau - \sqrt{G(E + 2F\tau + G\tau\tau)}}$.

Au lieu de cette formule, écrivons, pour abréger le caractère, Ω, & nous aurons les valeurs suivantes $x = \Omega - \frac{P\tau}{\sqrt{E}}$, $y = \Omega - \frac{P\tau}{\sqrt{E}}$, & $z = \Omega - \frac{P\tau}{\sqrt{E}}$, pourvu qu'on donne aux lettres P & Q les valeurs marquées ci-dessus, tant pour x, que pour y & pour z, d'où chacun de ces cas tirera sa propre valeur de Ω.

Après avoir trouvé toutes ces valeurs qui découlent de l'action de la Planète, on n'a qu'à les ajouter aux valeurs de x, y, z, $\frac{dx}{d\tau}$, $\frac{dy}{d\tau}$, $\frac{dz}{d\tau}$, qui ont été trouvées dans l'article précédent ; & donnant à τ sa juste valeur pour le premier intervalle, on aura les six élémens de l'état de la Comète pour le commencement du second intervalle. Pour ce qui regarde le membre logarithmique, puisque $EG > FF$, il conviendra de le représenter en sorte $l\dfrac{\sqrt{EG}-F}{\sqrt{G(E+2F\tau+G\tau\tau)}-F-G\tau}$, ou bien en sorte $l\dfrac{F+G\tau+\sqrt{G(E+2F\tau+G\tau\tau)}}{F+\sqrt{EG}}$.

Au reste, puisque l'intégration a réussi si exactement, & que les membres affectés par la petite fraction m, sont ordinairement très-petits, on ne sera pas obligé de raccourcir les intervalles de temps où l'action de la Planète est fort variable, & on pourra régler les intervalles sur le mouvement de la Planète, en sorte que la portion parcourue pendant un tel intervalle, ne comprenne pas une courbure trop considérable, & peut-être pourra-t-on les régler jusqu'à 5 degrés.

ARTICLE V.

Explication plus détaillée des calculs qu'on aura à faire pour chaque intervalle.

APRÈS avoir établi les intervalles de temps depuis le commencement de l'action sensible de la Planète jusqu'à sa fin, le calcul fait pour chaque intervalle, selon les formules que je viens de donner, fournira pour le commencement de l'intervalle suivant, tant les quatre élémens A, B, U, Z, par lesquels l'état de la Planète est déterminé, que les six elémens a, b, c & α, β, γ, qui determinent l'état de la Comète. On trouvera pour un temps quelconque de τ jours, depuis le commencement de cet intervalle, les élémens suivans.

I. *Pour la Planète.*

Qu'on cherche d'abord les lettres H & K par les formules $H = \dfrac{1}{(A^2+B^2)^{\frac{3}{2}}}$ & $K = -\dfrac{3(AU+BZ)}{(A^2+B^2)^{\frac{5}{2}}}$, & l'on aura :

$$\frac{dX}{d\tau} = U - MAH\tau - \tfrac{1}{2}M(UH + AK)\tau\tau$$

$$\frac{dY}{d\tau} = Z - MBH\tau - \tfrac{1}{2}M(ZH + BK)\tau\tau.$$

$$X = A + U\tau - \tfrac{1}{2}MAH\tau\tau - \tfrac{1}{6}M(UH + AK)\tau^3$$

$$Y = B + Z\tau - \tfrac{1}{2}MBH\tau\tau - \tfrac{1}{6}M(ZH + BK\tau^3.$$

II. *Pour la Comète.*

On cherche d'abord les valeurs $h = \frac{1}{(aa+bb+cc)^{\frac{3}{2}}}$ & $k = -\frac{3(a\alpha + b\beta + c\gamma)}{(aa+bb+cc)^{\frac{5}{2}}}$ $E = (a-A)^2 + (b-B)^2 + cc$; $F = (a-A)(\alpha-U) + (b-B)(\beta-Z) + c\gamma$ & $G = (\alpha-U)^2 + (\beta-Z)^2 + \gamma\gamma$, d'où l'on tire la diſtance de la Comète à la Planète ou la lettre $w = \sqrt{E + 2F\tau + G\tau\tau}$. Outre cela, qu'on cherche ces valeurs : . . . .

$$P = \frac{mE(\alpha-U) - mF(a-A)}{EG-FF};\quad Q = \frac{mF(\alpha-U) - mG(a-A)}{EG-FF}$$

$$P' = \frac{mE(\beta-Z) - mF(b-B)}{EG-FF};\quad Q' = \frac{mF(\beta-Z) - mG(b-B)}{EG-FF}$$

$$P'' = \frac{mE\gamma - mFc}{EG-FF};\quad Q'' = \frac{mF\gamma - mGc}{EG-FF}$$

d'où l'on aura: . . . .

$$\frac{dx}{d\tau} = \alpha - Mah\tau - \tfrac{1}{2}M(\alpha h + ak)\tau\tau + \frac{P + Q\tau}{w} - \frac{P}{\sqrt{E}}$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \beta - Mbh\tau - \tfrac{1}{2}M(\beta h + bk)\tau\tau + \frac{P' + Q'\tau}{w} - \frac{P'}{\sqrt{E}}$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \gamma - Mch\tau - \tfrac{1}{2}M(\gamma h + ck)\tau\tau + \frac{P'' + Q''\tau}{w} - \frac{P''}{\sqrt{E}}$$

$$x = a + \alpha\tau - \tfrac{1}{2}Mah\tau\tau - \tfrac{1}{6}M(\alpha h + ak)\tau^3 + \frac{Q}{G}(w - \sqrt{E}) + \frac{GP - FQ}{G\sqrt{G}}\, l\left(\frac{F + G\tau + w\sqrt{G}}{F + \sqrt{EG}}\right) - \frac{P\tau}{\sqrt{E}}$$

$$y = b + \beta\tau - \tfrac{1}{2}Mbh\tau\tau - \tfrac{1}{6}M(\beta h + bk)\tau^3 + \frac{Q'}{G}(w - \sqrt{E}) + \frac{GP' - FQ'}{G\sqrt{G}}\, l\left(\frac{F + G\tau + w\sqrt{G}}{F + \sqrt{EG}}\right) - \frac{P'\tau}{\sqrt{E}}$$

$$z = c + \gamma\tau - \tfrac{1}{2}Mch\tau\tau - \tfrac{1}{6}M(\gamma h + ck)\tau^3 + \frac{Q''}{G}(w - \sqrt{E}) + \frac{GP'' - FQ''}{G\sqrt{G}}\, l\left(\frac{F + G\tau + w\sqrt{G}}{F + \sqrt{EG}}\right) - \frac{P''\tau}{\sqrt{E}}.$$

Or ici il faut remarquer que le caractère l ſignifie le logarythme hyperbolique de la quantité qui eſt miſe après, où l'on n'a qu'à multiplier le logarithme tabulaire par le nombre 2,30258509 pour avoir ce logarithme.

Maintenant, après avoir calculé toutes ces valeurs, on n'a qu'à mettre pour τ, le nombre de jours que dure l'intervalle dont il s'agit, pour avoir les élémens de l'intervalle ſuivant, qu'on déſignera de nouveau par les lettres A, B, U, Z pour la Planète, & par a, b, c & α, β, γ pour la Comète; & ainſi on fera, ſelon les mêmes règles, le calcul pour tous les intervalles qu'on aura jugé à propos d'établir, juſqu'à ce qu'on ſera parvenu au dernier qui donnera l'état où la Comète ſe trouve après que l'action de la Planète aura entièrement ceſſé: de là on n'a qu'à déterminer l'orbite que la Comète décrira après ce temps-là, pour la comparer avec celle qu'elle a décrite avant l'action de la Planète. C'eſt ce que je me propoſe dans l'Article ſuivant.

ARTICLE VI.

Détermination de l'orbite de la Comète, après que ſon mouvement ſera dérangé par l'action de la Planète.

IL faut tirer pour cet effet du dernier intervalle de temps la valeur des letttres a, b, c & α, β, γ qui détermine l'état de la Comète, c'eſt-à-dire, ſon lieu & ſon mouvement lorſqu'elle eſt ſortie de la ſphère d'activité de la Planète, & c'eſt de ces ſix élémens qu'on pourra déterminer la nouvelle orbite de la manière ſuivante.

On commencera par déterminer le plan de cette orbite, ou bien ſon interſection avec le plan de l'orbite de la Planète, avec ſon inclinaiſon. Soit pour le commencement de cette époque ou la fin du dernier intervalle, la Comète en z & les trois coordonnées pour ce lieu $Sx = a$, $xy = b$, $yz = c$. *FIGURE II.*

Or, pour le jour ſuivant, ſoit la Comète en z', & par les vîteſſes connues, ſelon nos trois directions fixes, on aura pour ce lieu $S\,x' = a + \alpha$, $x'\,y' = b + \beta$ & $y'\,z' = c + \gamma$ en mettant $\tau = 1$. Cela poſé, le plan de l'orbite de la Comète ſera déterminé, tant par le centre du Soleil S, que par les deux points z & z'. Pour cet effet, qu'on tire ſur le plan de la planche qui repréſente celui de l'orbite de la Planète par les points y & y', la droite V $y\,y'$, & l'on aura l'intervalle V $x = \frac{b\,\alpha}{\beta}$ & V $y = \frac{b\sqrt{\alpha\alpha+\beta\beta}}{\beta}$. Maintenant, tirons par les points z & z' la ligne T $z\,z'$ qui tombe en T ſur la droite V y, & puiſque $y\,y' = \sqrt{\alpha\alpha+\beta\beta}$, on fera $\gamma : \sqrt{\alpha\alpha+\beta\beta} = c : y$ T, de ſorte que y T $= \frac{c\sqrt{\alpha\alpha+\beta\beta}}{\gamma}$, laquelle étant retranchée de V y $= \frac{b\sqrt{\alpha\alpha+\beta\beta}}{\beta}$ donne l'intervalle V T $= \frac{b\gamma - c\beta}{\beta\gamma}\sqrt{\alpha\alpha+\beta\beta}$. Donc puiſque le point T eſt dans le même plan avec les deux points z & z', la droite S T prolongée ſera l'interſection de l'orbite de la Comète avec celle de la Planète. Il s'agit donc de trouver la poſition de cette ligne, ou bien l'angle ♈ S ☊ qui eſt la longitude de la ligne des nœuds, que nous nommerons $= \Psi$. Ayant donc pour cet effet, dans le triangle le S V T, le côté S V $= \frac{a\beta - b\alpha}{\beta}$ & V T $= \frac{b\gamma - c\beta}{\beta\gamma}\sqrt{\alpha\alpha+\beta\beta}$ avec l'angle x V T, dont la tangente eſt $\frac{\beta}{\alpha}$, le ſinus $= \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\alpha+\beta\beta}}$ & le coſinus $= \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\alpha+\beta\beta}}$. Si nous baiſſons du point T à l'axe la perpendiculaire T R, nous aurons T R $= \frac{b\gamma - c\beta}{\gamma}$ & V R $= \frac{\alpha(b\gamma - c\beta)}{\beta\gamma}$; donc S R $= \frac{a\beta - b\alpha}{\beta} + \frac{\alpha(b\gamma - c\beta)}{\beta\gamma}$ $= \frac{a\gamma - c\alpha}{\gamma}$, par conſéquent tag. $\Psi = \frac{b\gamma - c\beta}{a\gamma - c\alpha}$.

Ayant trouvé la ligne des nœuds S ☊ qu'on y tire du point y, la perpendiculaire $y\,p$, qui ſera $y\,p = b$ coſ. $\Psi - a$ ſin. Ψ.

Maintenant si l'on tiroit la droite $p\,z$, il est clair que l'angle $y\,p\,z$ mesureroit l'inclinaison de l'orbite de la Comète à celle de la Planète, de sorte que posant cette inclinaison $= \omega$, on aura tang. $\omega = \frac{c}{b \operatorname{cos}.\psi - a \operatorname{sin}.\psi}$.

Après avoir déterminé ces deux principaux élémens pour le mouvement de la Comète, considérons pour un temps quelconque de τ jours, après cette époque, les trois coordonnées pour le lieu de la Comète x, y & z; & nous avons vu ci-dessus que le mouvement de la Comète, par la seule action du Soleil, est compris dans ces trois équations différentio-différentielles :

$$\text{I. } \frac{ddx}{d\tau^2} = -\frac{Mx}{v^3}.\ \text{II. } \frac{ddy}{d\tau^2} = -\frac{My}{v^3}.\ \text{III. } \frac{ddz}{d\tau^2} = -\frac{Mz}{v^3},$$

où v exprime la distance de la Comète au Soleil, de sorte que $v = \sqrt{xx+yy+zz}$, & partant $x\,dx + y\,dy + z\,dz = v\,dv$. Cela posé, qu'on fasse cette combinaison. I. $2\,dx$ + II. $2\,dy$ + III. $2\,dz$ qui nous donnera . . . . .

$$\frac{2dx\,ddx + 2dy\,ddy + 2dz\,ddz}{d\tau^2} = \frac{-2Mx\,dx - 2My\,dy - 2Mz\,dz}{v^3}$$

$= -\frac{2M\,dv}{vv}$, dont l'intégrale est $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{d\tau^2} = C + \frac{2M}{v}$, où il faut déterminer la constante C, en sorte que pour le commencement de l'époque il devienne $\frac{dx}{d\tau} = \alpha$, $\frac{dy}{d\tau} = \beta$, $\frac{dz}{d\tau} = \gamma$: donc puisqu'au commencement on a $v = \sqrt{aa+bb+cc}$, cette constante sera $C = \alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma - \frac{2M}{\sqrt{aa+bb+cc}}$. Posons, pour abréger, $\sqrt{aa+bb+cc} = f$ & $\sqrt{\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma} = \zeta$, pour avoir $C = \zeta\zeta - \frac{2M}{f}$, & notre équation intégrale deviendra $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{d\tau^2} = \zeta\zeta - \frac{2M}{f} + \frac{2M}{v}$.

A présent, considérons cette combinaison : I. x + II. y + III. z pour avoir cette équation : $\frac{x\,ddx + y\,ddy + z\,ddz}{d\tau^2} = -\frac{M(xx+yy+zz)}{v^3}$

$= - \frac{M}{v}$, à laquelle on ajoute celle que nous venons de trouver, & on aura $\frac{x\,ddx + dx^2 + y\,ddy + dy^2 + z\,ddz + dz}{d\tau^2}$ $= \zeta\zeta - \frac{2M}{f} + \frac{M}{v}$, laquelle, à cause de $x\,dx + y\,dy + z\,dz = v\,dv$, se réduit à cette forme : $\frac{d.\,v\,dv}{d\tau^2} = \zeta\zeta - \frac{2M}{f} + \frac{M}{v}$. Multiplions cette équation par $2\,v\,dv$ pour la rendre intégrale, & l'intégrale se trouvera $\frac{vv\,dv^2}{d\tau^2} = C + \zeta\zeta vv - \frac{2Mvv}{f} + 2Mv$.

Pour déterminer maintenant la constante C par l'état initial, il faut considérer, que posant $\tau = o$, il en doit résulter $\frac{v\,dv}{d\tau} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{d\tau} = a\alpha + b\beta + c\gamma$; & puisqu'alors il devient $v = f$, cette constante sera $C = (a\alpha + b\beta + c\gamma)^2 - \zeta\zeta ff$: or, à cause de $\zeta\zeta ff = (\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)(aa + bb + cc)$ on aura $C = (a\alpha + b\beta + c\gamma)^2 - (\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)(aa + bb + cc) = -(a\beta - b\alpha)^2 - (a\gamma - c\alpha)^2 - (b\gamma - c\beta)^2$. Au lieu de cette quantité négative, écrivons simplement $-gg$, de sorte que $C = -gg$, & partant notre équation intégrale sera $\frac{vv\,dv^2}{d\tau^2} = -gg + \zeta\zeta vv - \frac{2Mvv}{f} + 2Mv$, d'où nous tirons $d\tau^2 = \frac{vv\,dv^2}{-gg + \zeta\zeta vv - \frac{2Mvv}{f} + 2Mv}$. Posons encore pour abréger $\frac{2M}{f} - \zeta\zeta = \eta$, & prenant la racine carrée, nous aurons $d\tau = \frac{\pm v\,dv}{\sqrt{-gg + 2Mv - \eta vv}}$, où l'on devroit prendre le signe $-$ si l'on vouloit rapporter la Comète à son aphélie, mais puisqu'il convient de la rapporter à son perihélie, on prendra le signe $+$, en sorte qu'on aura $d\tau = \frac{v\,dv}{\sqrt{-gg + 2Mv - \eta vv}}$. Voilà donc une équation qui ne renferme que les deux variables v & τ, d'où l'on pourra déterminer l'une par l'autre.

Maintenant

Maintenant, pour déterminer les autres élémens, ayant tiré du Soleil la droite $S\zeta = v$, qu'on nomme l'angle ☊ $S\zeta = \phi$, qui étant pris dans le plan de l'orbite de la Comète en désignera l'argument de latitude, il est connu qu'on aura alors $dx^2 + dy^2 + d\zeta^2 = dv^2 + vv\,d\phi^2$, puisque l'une & l'autre formule exprime le quarré de l'élément de la courbe; & partant notre première équation intégrale donnera $\frac{dv^2 + vv\,d\phi^2}{d\tau^2} = \zeta\zeta - \frac{2M}{f} + \frac{2M}{v}$, ou bien $dv^2 + vv\,d\phi^2 = \left(\zeta\zeta - \frac{2M}{f} + \frac{2M}{v}\right)\left(\frac{vv\,d\phi^2}{-gg + 2Mv - \eta vv}\right)$, d'où, en retranchant de part & d'autre dv^2, il reste $vv\,d\phi^2 = \frac{dv^2\left(\zeta\zeta vv + \eta vv - \frac{2Mvv}{f} + gg\right)}{-gg + 2Mv - \eta vv}$ $= \frac{dv^2\left(gg + \left(\frac{\zeta\zeta f + \eta f - 2M}{f}\right)vv\right)}{-gg + 2Mv - \eta vv}$ qui, à cause de $\eta = \frac{2M}{f} - \zeta\zeta$, se réduit à cette forme $vv\,d\phi^2 = \frac{gg\,dv^2}{-gg + 2Mv - \eta vv}$, d'où l'on tire $d\phi = \frac{g\,dv}{v\sqrt{-gg + 2Mv - \eta vv}}$, où l'on se souviendra que $gg = ff\zeta\zeta - (a\alpha + b\beta + c\gamma)^2$, ou bien . . . . . . $gg = (a\beta - b\alpha)^2 + (a\gamma - c\alpha)^2 + (b\gamma - c\beta)^2$.

Ayant trouvé cette équation, introduisons les élémens ordinaires, par lesquels on détermine les mouvemens des Planètes par des sections coniques, & soit p le demi-paramètre de l'orbite, e l'excentricité, & ξ son anomalie vraie, pour avoir $v = \frac{p}{1 + e\cos\xi}$, en comptant l'anomalie vraie ξ, depuis le périhélie, d'où l'on aura $\frac{dv}{v} = \frac{e\,d\xi\sin\xi}{1 + e\cos\xi}$. Ensuite la formule irrationelle deviendra $\frac{1}{1 + e\cos\xi}\sqrt{\left(-gg(1 + e\cos\xi)^2 + 2Mp(1 + e\cos\xi) - \eta pp\right)}$, ou bien $\frac{1}{1 + e\cos\xi}\sqrt{(-gg + 2Mp - \eta pp - 2egg\cos\xi + 2Mep\cos\xi - eegg\cos\xi^2)}$. Maintenant, qu'on fasse évanouir le terme $\cos\xi$, ce qui donne $2Mep - 2eegg = 0$, ou bien $p = \frac{gg}{M}$. Outre cela, qu'on fasse

$2\,M\,p - g\,g - n\,p\,p = e\,e\,g\,g$, & mettant pour n sa valeur, on aura $2\,M\,p - g\,g - \frac{2\,M\,p\,p}{f} + \zeta\,\zeta\,p\,p = e\,e\,g\,g$; ce qui, à cause de $p = \frac{g\,g}{M}$, donne $g\,g - \frac{2\,g^4}{M\,f} + \frac{\zeta^2\,g^4}{M\,M} = e\,e\,g\,g$, ou bien $1 - \frac{2\,g\,g}{M\,f} + \frac{\zeta\zeta\,g\,g}{M\,M} = e\,e$; de sorte que l'excentricité $e = \sqrt{1 - \frac{n\,g\,g}{M\,M}}$, & la formule irrationelle deviendra $\frac{1}{1 + e\,cos\,\xi}\sqrt{e^2\,g^2 - e^2\,g^2\,cos\,\xi^2} = \frac{e\,g\,sin\,\xi}{1 + e\,cos\,\xi}$; d'où, en substituant ces valeurs, nous aurons $d\,\varphi = d\,\xi$, ou bien $\varphi = \xi + const$: où l'on se souviendra que la valeur de l'angle φ est connue pour le commencement de notre époque, savoir, égal à l'angle ☊ S ζ; donc, si nous posons cet angle initial $= \delta$, & l'anomalie vraie pour le commencement $= \theta$, cette constante sera $= \delta - \theta$ de sorte que $\varphi = \xi + \delta - \theta$.

Pour développer mieux ces valeurs, ayant trouvé ci-dessus la longitude du nœud ♈ S ☊ $= \Psi$, de sorte que tag $\Psi = \frac{b\,\gamma - c\,\beta}{a\,\gamma - c\,\alpha}$ & de la ligne $y\,p = b\,cos\,\Psi - a\,sin\,\Psi$, on aura de la même manière $S\,p = a\,cos\,\Psi + b\,sin\,\Psi$; donc, puisque la distance S ζ étoit $= \sqrt{a\,a + b\,b + c\,c} = f$, nous aurons $cos\,\delta = \frac{S\,p}{S\,\zeta} = \frac{a\,cos\,\Psi + b\,sin\,\Psi}{f}$, de sorte que par cette formule on connoît l'angle δ. Or pour θ qui marque l'anomalie vraie pour le commencement, puisqu'alors il devient $v = f$, notre formule principale nous donne $f = \frac{p}{1 + e\,cos\,\theta}$, d'où nous tirons $cos\,\theta = \frac{p - f}{e\,f}$. Ayant donc trouvé ces deux angles δ & θ, puisqu'au commencement l'angle ☊ S ζ étoit $= \delta$, si nous tirons la droite S Π vers le périhélie de la Comète, à cause de l'angle Π S $\zeta = \theta$, on aura l'angle ☊ S $\Pi = \delta - \theta$, qui exprime la distance du périhélie à la ligne des nœuds : or, en chaque cas, on jugera aisément si la ligne S ☊ est tirée vers le nœud ascendant ou descendant.

FIGURE III.

Ayant donc trouvé le demi paramètre de l'orbite $= \frac{gg}{M}$ & l'excentricité $e = \sqrt{1 - \frac{ngg}{MM}}$, notre équation $v = \frac{p}{1 + e \operatorname{cof} \xi}$, en prenant $\xi = 0$, nous donnera la diſtance du périhélie au Soleil $= \frac{p}{1+e}$; mais prenant $\xi = 180^\circ$, nous aurons la diſtance de l'aphélie au Soleil $= \frac{p}{1-e}$; d'où l'on conclut le grand axe de l'orbite $\frac{2p}{1-ee}$, dont la moitié ou bien la diſtance moyenne de la Comète au Soleil ſera $\frac{p}{1-ee}$. Or, puiſque $p = \frac{gg}{M}$ & $1 - ee = \frac{ngg}{MM}$, cette diſtance moyenne, ou bien le demi-grand axe de l'orbite ſera $\frac{M}{n}$; & de là on pourra aiſément déterminer le temps périodique de la Comète, qui contiendra autant d'années que cette formule $\frac{M}{n} \sqrt{\frac{M}{n}}$ contient d'unités. Or cette détermination ne ſauroit avoir lieu, que lorſque l'excentricité e eſt moindre que 1, ce qui arrive toutes les fois que n eſt une quantité poſitive, ou bien $\frac{2M}{f} > \zeta\zeta$. Mais s'il arrivoit qu'il fût $\frac{2M}{f} < \zeta\zeta$, l'orbite de la Comète ſeroit une hyperbole qui n'auroit point de temps périodique.

Reflexions ſur la méthode qu'on vient d'expoſer.

D'abord, je conviens que cette méthode n'eſt point peu embarraſſante, à cauſe de la pluralité d'élémens qui y entrent dans le calcul de chaque intervalle. Mais il eſt certain que toutes les autres méthodes qu'on pourroit employer ne demandent pas moins de calcul, ſur-tout quand on veut auſſi déterminer les dérangemens cauſés dans le plan de l'orbite de la Comète, c'eſt-à-dire, dans la poſition de la ligne des nœuds, & dans l'inclinaiſon au plan de l'orbite de la Planète, puiſqu'alors le nombre des élémens ne ſauroit être plus petit. Mais auſſi cette méthode renferme des avantages très-réels ſur toutes les autres qu'on pourroit imaginer, & cela par les raisons suivantes.

1°. De quelque méthode qu'on voudra se servir, on est toujours obligé de partager tout le calcul en certains morceaux, en établissant des intervalles de temps, pour chacun desquels on doit faire le calcul à part, pour en connoître tous les dérangemens causés dans les élémens de l'orbite de la Comète pendant chaque intervalle. Or, ordinairement on regarde ces intervalles comme constans, ce qui s'écarte bientôt considérablement de la vérité, à moins qu'on n'établisse les intervalles très-petits; d'où il est clair que, puisque je tiens compte ici de la variabilité de tous les élémens dans chacun des intervalles, le calcul en doit devenir beaucoup plus exact, quoiqu'on fasse les intervalles considérablement plus grands que dans les autres méthodes, ce qui abrégera beaucoup le calcul tout entier.

2°. Cette circonstance a principalement lieu dans les intervalles où la distance entre la Planète & la Comète devient très-variable, où dans les autres méthodes on est obligé de subdiviser ces intervalles en plusieurs autres, comme on peut voir par le calcul rapporté ci-dessus, où j'ai été contraint de ne donner à ces intervalles de temps qu'une heure & demie; & si j'eusse voulu poursuivre, il m'auroit fallu les faire plus petits encore. Or, dans la méthode présente, cet inconvénient cesse entièrement; car, puisque tous les élémens y sont supposés variables, l'intégration fournira toujours les vrais dérangemens causés pendant chaque intervalle, quelque grande que puisse être la variabilité dans la distance de la Planète à la Comète, pourvu que le mouvement des principaux élémens demeure sensiblement uniforme; ce qui ne manquera pas d'arriver, à moins qu'on ne fasse ces intervalles énormément grands. Ainsi, par cette raison, je puis soutenir qu'en employant la méthode présente, le calcul pourra toujours devenir très-considérablement plus aisé.

3°. Mais le plus grand avantage de cette méthode consiste en ce qu'elle peut également être appliquée à trouver les dérangemens que la Comète peut causer dans le mouvement de la Planète, sans que le calcul en devienne plus embarrassant ; au lieu qu'en se servant de quelque autre méthode, l'une & l'autre détermination demande des opérations particulières, puisqu'on y est obligé de regarder le mouvement de l'une comme connu, pendant qu'on cherche celui de l'autre. Or, en suivant la même route qui vient d'être exposée ici, il sera facile d'arranger l'analyse, en sorte qu'elle nous découvre en même temps tout le dérangement causé, tant dans la Comète, que dans la Planète, comme je ferai voir tout à l'heure.

4°. Or, comme le cas n'arrive que très-rarement qu'on connoisse le mouvement d'une Comète assez exactement pour qu'il vaille la peine d'en chercher le dérangement causé par quelque Planète, je crois que ma méthode pourra être employée avec le meilleur succès pour déterminer le dérangement causé dans le mouvement de deux Planètes par leur action mutuelle; & cet avantage est d'autant plus grand, que les méthodes dont on s'est servi jusqu'ici s'écartent plus de la vérité ; & j'ai déjà remarqué au commencement sur les inégalités de la Terre, qui sont causées par l'action de Vénus, qu'elles peuvent différer au delà de 30 secondes de celles qui se trouvent dans les Tables de feu M. l'Abbé de la Caille. La raison de ce défaut est ouvertement celle que la plus grande & la plus petite distance entre la Terre & Vénus diffèrent trop entr'elles, pour que la résolution dans une série convergente puisse avoir lieu. Or, comme une si grande inégalité ne se trouve pas dans les distances de la Terre à Jupiter, les inégalités causées par cette Planète, rapportées dans les Tables de M. de la Caille, ne s'écartent pas tant de la vérité. Cependant elles demandent aussi une rectification tirée de cette méthode, qui, selon toute apparence, ne sera pas peu considérable.

50 Les Planètes Jupiter & Saturne se trouvent principalement dans le cas où la méthode ordinaire ne sauroit être que très-défectueuse, par la même raison qui est déjà rapportée ci-dessus; & c'est ouvertement la cause pourquoi les Astronomes ont si peu réussi jusqu'ici à déterminer les dérangemens que ces deux Planètes se causent par leur action mutuelle. Or la méthode présente ne sauroit manquer de suppléer parfaitement à ce défaut, & elle fournira en même temps ce grand avantage, que les mêmes opérations découvriront à la fois le dérangement tant de l'une que de l'autre de ces deux Planètes; & pour cet effet il sera nécessaire de poursuivre les deux Planètes, au moins par quelques révolutions entières, en partageant le temps en plusieurs intervalles, selon qu'on le jugera à propos, où l'on ne sera cependant pas obligé de mettre ces intervalles si petits, comme les autres méthodes l'exigent.

Je ne saurois mieux finir ces recherches, qu'en appliquant ma méthode à déterminer en général les dérangemens de deux Planètes ou Comètes, dont le mouvement est troublé par leur action mutuelle.

Détermination générale des dérangemens que deux Planètes ou Comètes se causent par leur action mutuelle.

Quand deux Planètes ou Comètes, dont je marquerai l'une par la lettre Π, & l'autre par π, ne se meuvent pas dans le même plan, il est nécessaire sans doute de chercher non seulement les changemens qui seront causés dans la position & longueur de leurs grands axes & de leur excentricité, mais il faut aussi principalement avoir égard au changement causé dans le plan de leurs orbites pendant chaque intervalle de temps établi. Par cette raison, on ne sauroit plus rapporter le mouvement de l'un de ces deux corps au plan de l'orbite de l'autre, vu que celui-ci est également variable. Il sera donc absolument nécessaire de rapporter tous les deux mouvemens à un plan fixe qui passe par le centre du Soleil, & il sera bon de l'établir, en sorte qu'il passe quasi par le milieu entre les deux orbites sensibles. Or, pour qu'il soit effectivement fixe, il n'y a d'autre moyen que de le faire passer par deux Etoiles qui occupent le même lieu au Ciel.

Que la planche représente donc ce plan fixe où le point S marque le centre du Soleil, d'où l'on tire vers un point fixe du Soleil l'axe S ♈, & que la Planète Π, à un temps quelconque, soit en Z, & l'autre π en z, d'où ayant baissé les perpendiculaires Z Y & $z\,y$ au plan de la planche, & de là à l'axe ♈ S, les perpendiculaires Y X & $y\,x$, qu'on nomme les coordonnées pour le corps Π : $SX = X$, $XY = Y$, $YZ = Z$, & pour l'autre corps π : $Sx = x$, $xy = y$ & $yz = z$, & le mouvement de l'un & de l'autre sera déterminé par les vîtesses, suivant les mêmes directions, qui sont $\frac{dX}{d\tau}$, $\frac{dY}{d\tau}$, $\frac{dZ}{d\tau}$ & $\frac{dx}{d\tau}$, $\frac{dy}{d\tau}$, $\frac{dz}{d\tau}$. Ensuite qu'on pose les distances $SZ = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = V$: $Sz = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = v$ & $Zz = \sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2} = w$. Puis en exprimant le temps τ en jours, soit comme ci-dessus $M = 0{,}0002959$, ou bien $l\,M = 6{,}4711984$: outre cela, qu'on prenne la fraction N, en sorte qu'il y ait M à N, comme la masse du Soleil à la masse du corps Π & n, en sorte qu'il soit M à n, comme la masse du Soleil à la masse du corps π. Cela posé, on aura pour le mouvement de l'un & de l'autre corps ces équations :

Pour le corps Π.	*Pour le corps* π.
I. $\frac{ddX}{d\tau^2} = -\frac{MX}{V^3} + \frac{n(x-X)}{w^3}$.	I. $\frac{ddx}{d\tau^2} = -\frac{Mx}{v^3} - \frac{N(x-X)}{w^3}$.
II. $\frac{ddY}{d\tau^2} = -\frac{MY}{V^3} + \frac{n(y-Y)}{w^3}$.	II. $\frac{ddy}{d\tau^2} = -\frac{My}{v^3} - \frac{N(y-Y)}{w^3}$.
III. $\frac{ddZ}{d\tau^2} = -\frac{MZ}{V^3} + \frac{n(z-Z)}{w^3}$.	III. $\frac{ddz}{d\tau^2} = -\frac{Mz}{v^3} - \frac{N(z-Z)}{w^3}$.

Ayant maintenant établi autant d'intervalles de temps qu'on jugera à propos, soient pour le commencement d'un intervalle quelconque les élémens pour Π, $X = A$, $Y = B$, $Z = C$ & $\frac{dX}{d\tau} = \mathcal{A}$, $\frac{dY}{d\tau} = \mathcal{B}$, $\frac{dZ}{d\tau} = \mathcal{C}$; de la même manière pour l'autre corps π : $x = a$, $y = b$, $z = c$ & $\frac{dx}{d\tau} = \alpha$, $\frac{dy}{d\tau} = \beta$, $\frac{dz}{d\tau} = \gamma$. En suivant les mêmes opérations rapportées ci-dessus, qu'on prenne ces valeurs : $H = \frac{1}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{3}{2}}}$ $K = -\frac{3(A\mathcal{A} + B\mathcal{B} + C\mathcal{C})}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{5}{2}}}$; $h = \frac{1}{(aa + bb + cc)^{\frac{3}{2}}}$, $k = -\frac{3(a\alpha + b\beta + c\gamma)}{(aa + bb + cc)^{\frac{5}{2}}}$; ensuite qu'on fasse pour l'un & pour l'autre corps $E = (a - A)^2 + (b - B)^2 + (c - C)^2$; $F = (b - B)(\beta - \mathcal{B}) + (a - A)(\alpha - \mathcal{A}) + (c - C)(\gamma - \mathcal{C})$ & $G = (\alpha - \mathcal{A})^2 + (\beta - \mathcal{B})^2 + (\gamma - \mathcal{C})^2$, de sorte qu'il devienne $w = \sqrt{E + 2F\tau + G\tau\tau}$. Enfin, on calcule encore ces formules :

$$P = \frac{E(\alpha - \mathcal{A}) - F(a - A)}{EG - FF};$$

$$Q = \frac{F(\alpha - \mathcal{A}) - G(a - A)}{EG - FF};$$

$$P' = \frac{E(\beta - \mathcal{B}) - F(b - B)}{EG - FF};$$

$$Q' = \frac{F(\beta - \mathcal{B}) - G(b - B)}{EG - FF};$$

$$P'' = \frac{E(\gamma - \mathcal{C}) - F(c - C)}{EG - FF};$$

$$Q'' = \frac{F(\gamma - \mathcal{C}) - G(c - C)}{EG - FF}.$$

Ayant calculé toutes ces valeurs, on aura pour le mouvement de nos corps, pendant l'intervalle proposé à un temps de τ jours, après le commencement, les vîtesses exprimées ainsi :

Pour le corps Π.

$$\frac{dX}{d\tau} = \mathcal{A} - MAH\tau - \tfrac{1}{2}M(\mathcal{A}H + AK)\tau\tau - \frac{n(P + Q\tau)}{w} + \frac{nP}{\sqrt{E}}.$$

$$\frac{dY}{d\tau} = \mathcal{B} - MBH\tau - \tfrac{1}{2}M(\mathcal{B}H + BK)\tau\tau - \frac{n(P' + Q'\tau)}{w} + \frac{nP'}{\sqrt{E}}.$$

$$\frac{dZ}{d\tau} = \mathcal{C} - MCH\tau - \tfrac{1}{2}M(\mathcal{C}H + CK)\tau\tau - \frac{n(P'' + Q''\tau)}{w} + \frac{nP''}{\sqrt{E}}.$$

Pour

Pour le corps π.

$$\frac{dx}{d\tau}=\alpha-\mathrm{M}ah\tau-\tfrac{1}{2}\mathrm{M}(\alpha h+ak)\tau\tau+\frac{\mathrm{N}(\mathrm{P}+\mathrm{Q})\tau}{w}-\frac{\mathrm{NP}}{\sqrt{\mathrm{E}}}.$$
$$\frac{dy}{d\tau}=\beta-\mathrm{M}bh\tau-\tfrac{1}{2}\mathrm{M}(\beta h+bk)\tau\tau+\frac{\mathrm{N}(\mathrm{P}'+\mathrm{Q}'\tau)}{w}-\frac{\mathrm{NP}'}{\sqrt{\mathrm{E}}}.$$
$$\frac{dz}{d\tau}=\gamma-\mathrm{M}ch\tau-\tfrac{1}{2}\mathrm{M}(\gamma h+ck)\tau\tau+\frac{\mathrm{N}(\mathrm{P}''+\mathrm{Q}'')}{w}-\frac{\mathrm{NP}''}{\sqrt{\mathrm{E}}}.$$

Or pour les lieux on aura les expreſſions ſuivantes :

Pour le corps Π.

$$\mathrm{X}=\mathrm{A}+\mathit{A}\tau-\tfrac{1}{2}\mathrm{MAH}\tau\tau-\tfrac{1}{6}\mathrm{M}(\mathit{A}\mathrm{H}+\mathrm{AK})\tau^3$$
$$-\frac{n\mathrm{Q}}{\mathrm{G}}(w-\sqrt{\mathrm{E}})-\frac{n(\mathrm{GP}-\mathrm{FQ})}{\mathrm{G}\sqrt{\mathrm{G}}}\,l\left(\frac{\mathrm{F}+\mathrm{G}\tau+w\sqrt{\mathrm{G}}}{\mathrm{F}+\sqrt{\mathrm{EG}}}\right)+\frac{n\mathrm{P}\tau}{\sqrt{\mathrm{E}}}.$$
$$\mathrm{Y}=\mathrm{B}+\mathit{B}\tau-\tfrac{1}{2}\mathrm{MBH}\tau\tau-\tfrac{1}{6}\mathrm{M}(\mathit{B}\mathrm{H}+\mathrm{BK})\tau^3$$
$$-\frac{n\mathrm{Q}'}{\mathrm{G}}(w-\sqrt{\mathrm{E}})-\frac{n(\mathrm{GP}'-\mathrm{FQ}')}{\mathrm{G}\sqrt{\mathrm{G}}}\,l\left(\frac{\mathrm{F}+\mathrm{G}\tau+w\sqrt{\mathrm{G}}}{\mathrm{F}+\sqrt{\mathrm{EG}}}\right)+\frac{n\mathrm{P}'\tau}{\sqrt{\mathrm{E}}}.$$
$$\mathrm{Z}=\mathrm{C}+\mathit{C}\tau-\tfrac{1}{2}\mathrm{MCH}\tau\tau-\tfrac{1}{6}\mathrm{M}(\mathit{C}\mathrm{H}+\mathrm{CK})\tau^3$$
$$-\frac{n\mathrm{Q}''}{\mathrm{G}}(w-\sqrt{\mathrm{E}})-\frac{n(\mathrm{GP}''-\mathrm{FQ}'')}{\mathrm{G}\sqrt{\mathrm{G}}}\,l\left(\frac{\mathrm{F}+\mathrm{G}\tau+w\sqrt{\mathrm{G}}}{\mathrm{F}+\sqrt{\mathrm{EG}}}\right)-\frac{n\mathrm{P}''\tau}{\sqrt{\mathrm{E}}}.$$

Pour le corps π.

$$x=a+\alpha\tau-\tfrac{1}{2}\mathrm{M}ah\tau\tau-\tfrac{1}{6}\mathrm{M}(\alpha h+ak)\tau^3$$
$$+\frac{\mathrm{NQ}}{\mathrm{G}}(w-\sqrt{\mathrm{E}})+\frac{\mathrm{N}(\mathrm{GP}+\mathrm{FQ})}{\mathrm{G}\sqrt{\mathrm{G}}}\,l\left(\frac{\mathrm{F}+\mathrm{G}\tau+w\sqrt{\mathrm{G}}}{\mathrm{F}+\sqrt{\mathrm{EG}}}\right)-\frac{\mathrm{NP}\tau}{\sqrt{\mathrm{E}}}.$$
$$y=b+\beta\tau-\tfrac{1}{2}\mathrm{M}bh\tau\tau-\tfrac{1}{6}\mathrm{M}(\beta h+bk)\tau^3$$
$$+\frac{\mathrm{NQ}'}{\mathrm{G}}(w-\sqrt{\mathrm{E}})+\frac{\mathrm{N}(\mathrm{GP}'-\mathrm{FQ}')}{\mathrm{G}\sqrt{\mathrm{G}}}\,l\left(\frac{\mathrm{F}+\mathrm{G}\tau+w\sqrt{\mathrm{G}}}{\mathrm{F}+\sqrt{\mathrm{EG}}}\right)-\frac{\mathrm{NP}'\tau}{\sqrt{\mathrm{E}}}.$$
$$z=c+\gamma\tau-\tfrac{1}{2}\mathrm{M}ch\tau\tau-\tfrac{1}{6}\mathrm{M}(\gamma h+ck)\tau^3$$
$$+\frac{\mathrm{NQ}''}{\mathrm{G}}(w-\sqrt{\mathrm{E}})-\frac{\mathrm{N}(\mathrm{GP}''-\mathrm{FQ}'')}{\mathrm{G}\sqrt{\mathrm{G}}}\,l\left(\frac{\mathrm{F}+\mathrm{G}\tau+w\sqrt{\mathrm{G}}}{\mathrm{F}+\sqrt{\mathrm{EG}}}\right)-\frac{\mathrm{NP}''\tau}{\sqrt{\mathrm{E}}}.$$

Après avoir calculé toutes ces valeurs, on n'a qu'à donner à τ le nombre de jours qu'on veut aſſigner à chaque intervalle, & ces mêmes formules donneront les élémens néceſfaires pour le commencement de l'intervalle ſuivant, qu'on marquera de rechef par les lettres A, B, C, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$; a, b, c, & α, β, γ, d'où l'on fera, ſelon les mêmes règles, le calcul pour l'intervalle ſuivant. Et ainſi on continuera le travail auſſi loin qu'on le jugera néceſſaire, en cas que l'action mutuelle devienne enfin inſenſible; & alors on tirera aiſément des dernières valeurs tous les élémens néceſſaires pour la détermination de l'orbite de chacun des deux corps Π & π.

Quand on veut appliquer cette méthode à la recherche des dérangemens que les deux Planètes Jupiter & Saturne ſe cauſent réciproquement, on les pourſuivra par de tels intervalles de temps, pendant deux ou même pluſieurs révolutions entières; & pourvu qu'on ait bien établi les élémens initiaux A, B, C, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$; a, b, c, & α, β, γ, ces mêmes calculs montreront pour chaque temps le vrai lieu des deux Planètes, qu'on n'aura qu'à comparer enſuite avec les lieux calculés par les Tables aſtronomiques ordinaires; & les différences qu'on y remarquera fourniront le plus ſûr moyen de corriger ces Tables, vu qu'on en conclura aiſément toutes les corrections qu'il faut accorder pour toutes les poſitions différentes des deux corps entre elles. Ce qui eſt, ſelon toute apparence, l'unique moyen de parvenir enfin à une parfaite connoiſſance de tous les dérangemens qui ſe trouvent dans le mouvement de ces deux Planètes.

Rectification des formules précédentes par l'action que les deux Planètes exercent ſur le Soleil.

Juſqu'ici, nous n'avons pas conſidéré les forces dont les deux Planètes agiſſent ſur le Soleil, pour les tranſporter en ſens contraire ſur les Planètes, afin qu'on puiſſe regarder le Soleil comme immobile. Car puiſque ces forces agiroient également ſur les deux Planètes, leur poſition reſpective, & partant auſſi leur action mutuelle, dont il s'agit ici principalement, n'en ſauroient être altérées. D'ailleurs, ces forces ſont ſi petites, que l'effet ſur le mouvement d'une Comète qui en pourroit réſulter, eſt abſolument nul. Mais quand il s'agit des dérangemens que deux Planètes ſe cauſent mutuellement, puiſque leur action dure toujours, & que l'effet en eſt quaſi accumulé, on ne ſauroit négliger ces petites forces. Auſſi rien n'eſt plus facile que d'en tenir compte, ſans que le calcul en devienne plus pénible; on n'a pour cet effet qu'à prendre les termes affectés par la lettre M, qui réſultent de l'action du Soleil ſur la Planète, & écrire, au lieu de M, ou la lettre N pour le corps Π, ou la lettre *n* pour le corps π, & ajouter encore ces termes aux formules de l'article précédent. Or, comme ces nouveaux termes ſeront extrêmement petits, on n'en prendra que les premières parties, comme les plus conſidérables. On ajoutera donc à toutes les formules données dans l'article précédent, les additions ſuivantes :

Aux formules	*on ajoutera ces termes :*
$\frac{dX}{d\tau}$ & $\frac{dx}{d\tau}$	$-NAH\tau - nah\tau.$
$\frac{dY}{d\tau}$ & $\frac{dy}{d\tau}$	$-NBH\tau - nbh\tau.$
$\frac{dZ}{d\tau}$ & $\frac{dz}{d\tau}$	$-NCH\tau - nch\tau.$
X & x	$-\frac{1}{2}NAH\tau\tau - \frac{1}{2}nah\tau\tau.$
Y & y	$-\frac{1}{2}NBH\tau\tau - \frac{1}{2}nbh\tau\tau.$
Z & z	$-\frac{1}{2}NCH\tau\tau - \frac{1}{2}nch\tau\tau.$

Et ayant apporté les corrections, on pourra être assuré qu'on n'aura rien négligé pour rendre ces formules aussi exactes qu'il est possible.

SUPPLÉMENT.

Quoique les formules que je viens de donner n'aient pas besoin d'une explication plus détaillée pour les appliquer à tous les cas possibles, il ne sera pourtant pas superflu d'en faire tout le calcul numérique pour un cas déterminé. J'imaginerai donc pour cet effet une Comète à peu près semblable à celle dont j'ai parlé au commencement, qui passera fort près de la Terre, avec la seule différence que cette Comète ne se mouvra pas entièrement dans le plan de l'écliptique, pour avoir occasion d'appliquer aussi les formules qui servent à déterminer le plan de son orbite; & puisqu'il ne s'agit pas ici des dérangemens que la Comète pourroit produire dans le mouvement de la Terre, j'en regarderai la masse comme nulle, de sorte que $n = 0$. Donc, puisque la Terre occupe la place de la Planète, dont la masse est environ 360000 fois plus petite que celle du Soleil, à cause de $M = 0{,}0002959$, ou bien $l\,M = 6{,}4711984$, nous aurons $l\,N = 0{,}9148959$: où il faut remarquer que la caractéristique 0 est déjà trop grande de 10; ou bien on pourra représenter ce logarithme en sorte $l\,N = 90{,}9148959$, de sorte que la caractéristique 90 doit être diminuée de 100. Cela remarqué, j'établirai les élémens du calcul pour l'état initial où l'action de la Terre sur la Comète peut devenir sensible, de la manière suivante:

Elémens pour l'état initial.

$A = 1{,}0000000.$	$B = 0{,}0000000.$	$C = 0{,}0000000.$
$a = 1{,}0470833.$	$b = 0{,}0358333.$	$c = 0{,}0250000.$
$a - A = 0{,}0470833.$	$b - B = 0{,}0358333.$	$c - C = 0{,}0250000.$

Elémens pour les vîteſſes.

$A =$ 0,0000000.	$B =$ 0,0172028.	$C =$ 0,0000000.
$\alpha = -$0,0237500.	$\beta = -$0,0008333.	$\gamma = -$0,0118750.
$\alpha - A = -$0,0237500.	$\beta - B = -$0,0180361.	$\gamma - C = -$0,0118750.

Maintenant je dreſſerai ſur ces élémens le calcul ſuivant, ſelon l'Article V, après avoir remarqué que je prends ici l'écliptique même pour le plan fixe, auquel je rapporterai le mouvement de la Planète; & j'aurai d'abord $H = 1$; $K = 0$ $h = 0,8688064$; $l\,h = 9,9389229$; $k = 0,0597915$; $l\,k = 8,7766397$, enſuite pour la diſtance $w = \sqrt{E + 2F\tau + G\tau\tau}$ $E = 0,0041259$; $F = -0,0020614$; $G = 0,0010304$; $lE = 7,6155155$; $lF = (-)\,7,3141601$; $lG = 7,0129931$. Or la formule w nous fait déjà voir que la Comète ſera la plus proche de la Terre après le commencement de l'époque au temps $\tau = -\frac{F}{G} = 2,00063$ jours, & alors cette diſtance ſera $w = \frac{\sqrt{EG - FF}}{\sqrt{G}} = 0,00133814$, ou bien les valeurs ſuivantes: $EG - FF = 0,000000001845$; $l(EG - FF) = 1,2659964$ & $F + \sqrt{EG} = 0,00000044$; mais, puiſque cette valeur eſt preſque évanouiſſante, & qu'une petite erreur pourroit devenir très-conſidérable, on remarquera que $F + \sqrt{EG} = \frac{EG - FF}{\sqrt{EG} - F}$, d'où, à cauſe de $\sqrt{EG} - F = 0,0041232$, on tire plus exactement $F + \sqrt{EG} = 0,000000447466$, & $l(F + \sqrt{EG}) = 3,0507599$. Ces valeurs étant trouvées, on en tire les ſuivantes:

$P = -\ 505,3549$	$l\,P = (-)\ 2,7035965.$
$P' = -\ 297,0895$	$l\,P' = (-)\ 2,4728872.$
$P'' = \ 1376,7206$	$l\,P'' = (+)\ 3,1388458.$

$$Q = 241{,}0785. \qquad l\,Q = (+)\ 2{,}3821586.$$
$$Q' = 139{,}7777. \qquad l\,Q' = (+)\ 2{,}1454381.$$
$$Q'' = -\ 693{,}8970. \qquad l\,Q'' = (-)\ 2{,}8412949.$$

Après avoir trouvé ces valeurs, dévelopons premièrement les ſix formules pour le mouvement de la Terre, & nous trouvons,

$$\frac{dX}{d\tau} = 0 - 0{,}0002959.\tau.$$
$$\frac{dY}{d\tau} = 0{,}0172028 - 0\,\tau - 0{,}0000025.\tau\tau.$$
$$\frac{dZ}{d\tau} = 0.$$
$$X = 1{,}000000 + 0.\tau - 0{,}0001479.\tau\tau.$$
$$Y = 0 + 0{,}0172028.\tau - 0.\tau\tau - 0{,}0000008.\tau^3.$$
$$Z = 0.$$

Enſuite pour la Comète ne développons d'abord que les termes qui ne contiennent pas la lettre N, & nous aurons :

$$\frac{dx}{d\tau} = -\ 0{,}0237500 - 0{,}00026922\tau - 0{,}0000062106\,\tau\tau + N\,S.$$
$$\frac{dy}{d\tau} = -\ 0{,}0008333 - 0{,}0000092131\,\tau - 0{,}00000020989.\,\tau\tau + N\,S'.$$
$$\frac{dz}{d\tau} = -\ 0{,}0118750 - 0{,}0000064278\,\tau + 0{,}00000130542\,\tau\tau + N\,S''.$$
$$x = 1{,}0470833 - 0{,}0237500.\tau - 0{,}000134608\tau\tau - 0{,}0000020702\tau^3 + N\int S\,d\tau.$$
$$y = 0{,}0358333 - 0{,}0008333.\tau - 0{,}000004607\tau\tau - 0.0000000700\tau^3 + N\int S'\,d\tau.$$
$$z = 0{,}0250000 - 0{,}0118750.\tau - 0{,}000003214\tau\tau + 0{,}000000435\,1\tau^3 + N\int S'\,d\tau.$$

Ici, il eſt néceſſaire de remarquer que ces valeurs auroient pu être tirées des élémens ordinaires du mouvement de la Terre & de la Comète, puiſque le dérangement, cauſé par l'action de la Terre, n'eſt pas encore tiré en conſidération. Or, pour trouver ce dérangement, il faut encore calculer les valeurs ſuivantes :

$$S=\frac{P+Q\tau}{w}-\frac{P}{\sqrt{E}};\ S'=\frac{P'+Q'\tau}{w}-\frac{P'}{\sqrt{E}};\ S''=\frac{P''+Q''\tau}{w}-\frac{P''}{\sqrt{E}},$$

où l'on se souviendra que $w=\sqrt{E+2F\tau+G\tau\tau}$, & $l\sqrt{E}=8,8077277$: outre cela nous aurons :

$$\int S\,d\tau=\frac{Q}{G}(w-\sqrt{E})+\frac{GP-FQ}{G\sqrt{G}}\,l\frac{F+G\tau+w\sqrt{G}}{F+\sqrt{EG}}-\frac{P\tau}{\sqrt{E}}.$$

$$\int S'\,d\tau=\frac{Q'}{G}(w-\sqrt{E})+\frac{GP'-FQ'}{G\sqrt{G}}\,l\frac{F+G\tau+w\sqrt{G}}{F+\sqrt{EG}}-\frac{P'\tau}{\sqrt{E}}.$$

$$\int S''\,d\tau=\frac{Q''}{G}(w-\sqrt{E})+\frac{GP''-FQ''}{G\sqrt{G}}\,l\frac{F+G\tau+w\sqrt{G}}{F+\sqrt{EG}}-\frac{P''\tau}{\sqrt{E}}.$$

Et pour les coëfficiens :

$$l\frac{GP-FQ}{G\sqrt{G}}=(-)\ 2,8560917,$$
$$l\frac{GP'-FQ'}{G\sqrt{G}}=(-)\ 2,7351938;$$
$$l\frac{GP''-FQ''}{G\sqrt{G}}=(-)\ 2,5546097,$$
$$l\frac{P}{\sqrt{E}}=(-)\ 3,8958388;$$
$$l\frac{P'}{\sqrt{E}}=(-)\ 3,6651295,$$
$$l\frac{P''}{\sqrt{E}}=(+)\ 4,3310881.$$

Où l'on remarquera que les caractéristiques de ces logarithmes ne sont pas défectives. Maintenant l'on ne sauroit aller plus loin avant que d'avoir fixé l'étendue de l'intervalle, ou bien le temps τ : or, puisque l'action de la Terre n'est sensible que pendant 4 jours ou environ, nous pourrons nous contenter d'un seul intervalle, en prenant $\tau = 4$, puisque d'un côté le mouvement de la Terre & de la Comète ne s'écarte guère sensiblement de l'uniformité rectiligne, & d'un autre côté, puisque le Soleil agit presque également sur les deux corps, de sorte que la courbure qui en résulte ne change rien dans l'action mutuelle : outre cela, le dérangement lui-même est ouvertement trop petit, pour qu'il en puisse résulter la moindre altération dans les membres affectés par la lettre M. Nous pourrons donc hardiment poser $\tau = 4$; mais, pour la commodité du calcul, nous poserons $\tau = -\frac{2F}{G} = 4{,}001262$, afin qu'il devienne $w = \sqrt{E}$, d'où nous trouverons aisément les valeurs S, S', S''. Savoir. $S = \frac{Q\tau}{\sqrt{E}} = 15017{,}510$, $S' = \frac{Q'\tau}{\sqrt{E}} = 8707{,}178$; $S'' = \frac{Q''\tau}{\sqrt{E}} = -43224{,}920$.

Pour les formules intégrales, commençons par le membre logarithmique, qui, à cause de $\tau = -\frac{2F}{G}$, deviendra $l\frac{\sqrt{EG}-F}{\sqrt{EG}+F} = l\,\frac{0{,}00412322}{0{,}000000447466} = l\ 12699{,}3320$ qui, étant converti en logarithme hyperbolique, donnera $3{,}9644766.2{,}3025851 = 9{,}1285400$; donc, posant pour abréger $l\,\frac{F+G\tau+w\sqrt{G}}{F+\sqrt{EG}} = T$, nous aurons $l\,T = 0{,}9604013$, d'où nous tirons :

$$\int S\, d\tau = T\left(\frac{GP-FQ}{G\sqrt{G}}\right) - \frac{P\tau}{\sqrt{E}} = +\ 24926{,}283.$$

$$\int S'\, d\tau = T\left(\frac{GP'-FQ'}{G\sqrt{G}}\right) - \frac{P'\tau}{\sqrt{E}} = +\ 13545{,}297.$$

$$\int S''\, d\tau = T\left(\frac{GP''-FQ''}{G\sqrt{G}}\right) - \frac{P'\tau}{\sqrt{E}} = -\ 89033{,}550.$$

Ayant donc trouvé ces valeurs, nous en tirons pour la nouvelle orbite de la Comète les élémens suivans :

$$\frac{dx}{d\tau} = -\ 0{,}0249266 + 0{,}0000124 = -\ 0{,}0249142.$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -\ 0{,}0008736 + 0{,}0000072 = -\ 0{,}0008664.$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -\ 0{,}0118798 - 0{,}0000355 = -\ 0{,}0119153.$$

$$x = +\ 0{,}9497659 + 0{,}0000205 = +\ 0{,}9497864.$$

$$y = +\ 0{,}0324207 + 0{,}0000111 = +\ 0{,}0324318.$$

$$z = -\ 0{,}0225385 - 0{,}0000732 = -\ 0{,}0226117.$$

Détermination

Détermination de l'orbite de la Comète.	*Avant l'action de la Terre.*	*Après l'action de la Terre.*
Elémens. $a =$	$+$ 0,9497659	$+$ 0,9497864
Elémens. $b =$	$+$ 0,0324207	$+$ 0,0324318
Elémens. $c =$	$-$ 0,0225385	$-$ 0,0226167
Vîtesses. $\alpha =$	$-$ 0,0249266	$-$ 0,0249142
Vîtesses. $\beta =$	$-$ 0,0008736	$-$ 0,0008664
Vîtesses. $\gamma =$	$-$ 0,0118798	$-$ 0,0119153
Log. *tang.* $\psi = l\left(\frac{b\gamma - c\beta}{a\gamma - c\alpha}\right) = \ldots$	8,5337554	8,5337249
d'où la longitude du nœud descendant $\psi =$	1° 57′ 28″	1° 57′ 27″
Log. *tang.* $\omega = l \frac{c}{b\,cos.\psi - a\,sin.\psi} = \ldots$	12,7047016	12,8846072
& de là l'inclinaison $\omega = \ldots$	89° 53′ 12″	89° 55′ 29″
$aa + bb + cc = ff = \ldots$	0,9036141	0,9036571
$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = \zeta\zeta = \ldots$	0,0007632	0,0007634
$ff\zeta\zeta - (a\alpha + b\beta + c\gamma)^2 = gg \ldots$	0,0001404	0,0001413
$\frac{2M}{f} - \zeta\zeta = \eta = \ldots$	$-$ 0,0001406	$-$ 0,0001408
Et de ces valeurs, on tire les élémens suivans:		
I. Le demi-grand axe de l'orbite $\frac{M}{\eta} = \ldots$	$-$ 2,10496	$-$ 2,10156
où le signe $-$ marque que l'orbite est hyperbolique.		
II. Le demi-paramètre de l'orbite $\frac{gg}{M} = p = \ldots$	$+$ 0,47463	$+$ 0,47750
III. L'excentricité $e = \frac{\sqrt{1 - \eta gg}}{MM} = \ldots$	1,10701	$+$ 1,10780
IV. Distance du périhélie au Soleil $= \frac{p}{1+e} = \ldots$	0,22526	$+$ 0,22654
V. Log. *cos.* $\delta = l\frac{a\,cos.\psi + b\,sin.\psi}{f} = \ldots$	9,9998826	9,9998811
VI. Log. *cos.* $\theta = l\frac{p - f}{ef} = \ldots$	$(-)$ 9,6554171	$-$ 9,6524941
Et partant $\delta = \ldots$	1° 19′ 56″	1° 20′ 26″
$e\,\theta = \ldots$	116 53 26	116 41 46
VII. La distance du périhélie au nœud descendant $=$	64 26 38	64 38 40

C'eſt ſuivant les préceptes de l'Article VI que nous avons déterminé ces élémens, tant pour la première que pour la nouvelle orbite de la Comète, après avoir remarqué que la première partie des doubles élémens $\frac{dx}{d\tau}$, $\frac{dy}{d\tau}$, $\frac{dz}{d\tau}$ & x, y, z, ait lieu s'il n'y a point de perturbation, & que la ſeconde renferme l'effet de l'action de la Terre. Nous les avons miſes ſéparément, afin qu'on puiſſe voir combien tous ces élémens ont été troublés par la force attractive de la Terre, & c'eſt ſur ces doubles élémens que nous avons ajouté le préſent calcul.

Quoiqu'un cas, tel que nous venons de conſidérer, ſavoir, qu'une Comète ſe meut dans une hyperbole, ne ſauroit jamais avoir lieu, il ſervira pourtant à faire voir toutes les opérations arithmétiques qu'on aura à faire dans chaque cas propoſé. Or, principalement on en peut voir combien peu l'orbite d'une Comète ſera jamais altérée par l'action de quelque Planète auprès de laquelle elle paſſe ; tout le changement qui en peut réſulter n'étant conſidérable que par rapport au temps périodique, où le moindre changement arrivé dans l'excentricité eſt de très-grande conſéquence. Au reſte, comme je n'ai établi ici qu'un ſeul intervalle, on comprend aiſément que ſi une Comète paſſoit près de Jupiter ou de Saturne, on pourroit bien être obligé d'établir deux ou bien trois intervalles : mais, quoi qu'il en ſoit, le calcul entier ſera toujours beaucoup plus aiſé à exécuter & moins laborieux que ſelon les méthodes connues juſqu'à préſent.

RÉFLEXIONS GÉNÉRALES.

L'essentiel de la méthode que je viens d'employer, consiste en ce que, pendant chaque intervalle de temps, j'ai regardé le mouvement de l'une & de l'autre Planète comme uniforme & rectiligne, quoique le vrai mouvement se fasse dans une ligne courbe, de sorte qu'on néglige dans chaque intervalle ce qui pourroit résulter de la courbure & de l'inégalité du mouvement. Donc, puisqu'il s'agit principalement de découvrir l'effet de l'action mutuelle, qui est renfermée dans les termes affectés par les lettres N & n, on peut avoir lieu de douter si ce qu'on néglige dans les premiers membres de nos équations différentielles du second degré, c'est-à-dire, dans les termes $-\frac{Nx}{v^3}$, $-\frac{Ny}{v^3}$, $-\frac{Nz}{v^3}$, ne sauroit surpasser ce qui résulte des petits termes; ce qui rendroit sans doute cette méthode tout à fait incertaine. Pour lever ce doute important, j'ajouterai ici le théorême suivant, dont la démonstration fera voir clairement qu'on peut toujours se servir hardiment de cette supposition, sans risquer qu'elle porte jamais à faux, pourvu qu'on établisse les intervalles assez petits.

Théorême fondamental.

Ayant autant d'équation differentio - différentielles qu'on voudra de cette forme : $\frac{ddx}{d\tau^2}=P$, $\frac{ddy}{d\tau^2}=Q$, $\frac{ddz}{d\tau^2}=R$, où les quantités x, y, z peuvent être des fonctions quelconques du temps τ, dont l'élément $d\tau$ est supposé constant, & qu'on sache qu'au commencement, où $\tau=0$, les valeurs de ces quantités ont été $x=a$, $y=b$, $z=c$: & de plus leurs valeurs différentielles $\frac{dx}{d\tau} = \alpha$, $\frac{dy}{d\tau} = \beta$, $\frac{dz}{d\tau} = \gamma$. Il ſuffit de mettre dans les formules P; Q, R ces valeurs $x = a + \alpha\tau$, $y = b + \beta\tau$ & $z = c + \gamma\tau$, pour tirer de ces équations les vraies valeurs des quantités x, y, z, juſqu'à la quatrième puiſſance de τ; de ſorte qu'en ne donnant à τ qu'une valeur médiocre, le terme qui en renferme la quatrième puiſſance puiſſe être négligé ſans aucune erreur.

Démonſtration.

Soient les vraies valeurs qui conviennent aux quantités x, y, z, celles - ci :

$$x = a + \alpha\tau + p\tau\tau + p'\tau^3 + p''\tau^4 + \&c.$$
$$y = b + \beta\tau + q\tau\tau + q'\tau^3 + q''\tau^4 + \&c.$$
$$z = c + \gamma\tau + r\tau\tau + r'\tau^3 + r''\tau^4 + \&c.$$

Dont il eſt certain que les termes conſtituent une ſérie extrêmement convergente, pourvu que le temps τ ne ſurpaſſe point certaines limites. Suppoſons à préſent qu'on ſubſtitue effectivement ces juſtes valeurs dans les formules P, Q, R, & qu'il en réſulte ces quantités :

$$\mathrm{P} = \mathrm{A} + \mathfrak{A}\tau + \mathfrak{P}\tau\tau + \mathfrak{P}'\tau^3 + \mathfrak{P}''\tau^4 + \&c.$$
$$\mathrm{Q} = \mathrm{B} + \mathfrak{B}\tau + \mathfrak{Q}\tau\tau + \mathfrak{Q}'\tau^3 + \mathfrak{Q}''\tau^4 + \&c.$$
$$\mathrm{R} = \mathrm{C} + \mathfrak{C}\tau + \mathfrak{R}\tau\tau + \mathfrak{R}'\tau^3 + \mathfrak{R}''\tau^4 + \&c.$$

Et on comprend aiſément que les deux premiers termes A, $\mathfrak{A}$; B, $\mathfrak{B}$; C, $\mathfrak{C}$ de ces formules ſeront uniquement déterminés par les valeurs a, α; b, β; c, γ, ſans que les valeurs ſuivantes inconnues p, p'; q, q'; r, r', &c. y entrent, puiſque ces lettres ſont affectées par de plus hautes puiſſances de τ ; & partant les deux premiers termes de ces formules ſeront abſolument connus, de ſorte qu'on aura les équations ſuivantes :

$$\frac{ddx}{d\tau^2} = \mathrm{A} + A\,\tau + P\,\tau\tau + P'\,\tau^3 + P''\,\tau^4 + \&c.$$
$$\frac{ddy}{d\tau^2} = \mathrm{B} + B\,\tau + Q\,\tau\tau + Q'\,\tau^3 + Q''\,\tau^4 + \&c.$$
$$\frac{ddz}{d\tau^2} = \mathrm{C} + C\,\tau + R\,\tau\tau + R'\,\tau^3 + R''\,\tau^4 + \&c.$$

D'où la première intégration fournit les formules ſuivantes :

$$\frac{dx}{d\tau} = \alpha + \mathrm{A}\,\tau + \tfrac{1}{2}A\,\tau\tau + \tfrac{1}{3}P\,\tau^3 + \tfrac{1}{4}P'\,\tau^4 + \tfrac{1}{5}P''\,\tau^5 + \&c.$$
$$\frac{dy}{d\tau} = \beta + \mathrm{B}\,\tau + \tfrac{1}{2}B\,\tau\tau + \tfrac{1}{3}Q\,\tau^3 + \tfrac{1}{4}Q'\,\tau^4 + \tfrac{1}{5}Q''\,\tau^5 + \&c.$$
$$\frac{dz}{d\tau} = \gamma + \mathrm{C}\,\tau + \tfrac{1}{2}C\,\tau\tau + \tfrac{1}{3}R\,\tau^3 + \tfrac{1}{4}R'\,\tau^4 + \tfrac{1}{5}R''\,\tau^5 + \&c.$$

Et de là par la ſeconde intégration,

$$x = a + \alpha\tau + \tfrac{1}{2}\mathrm{A}\,\tau\tau + \tfrac{1}{6}A\,\tau^3 + \tfrac{1}{12}P\,\tau^4 + \tfrac{1}{24}P'\,\tau^5 + \tfrac{1}{30}P''\,\tau^6 + \&c.$$
$$y = b + \beta\tau + \tfrac{1}{2}\mathrm{B}\,\tau\tau + \tfrac{1}{6}B\,\tau^3 + \tfrac{1}{12}Q\,\tau^4 + \tfrac{1}{24}Q'\,\tau^5 + \tfrac{1}{30}Q''\,\tau^6 + \&c.$$
$$z = c + \gamma\tau + \tfrac{1}{2}\mathrm{C}\,\tau\tau + \tfrac{1}{6}C\,\tau^3 + \tfrac{1}{12}R\,\tau^4 + \tfrac{1}{24}R'\,\tau^5 + \tfrac{1}{30}R''\,\tau^6 + \&c.$$

Donc, pourvu qu'on prenne l'intervalle de τ aſſez petit pour que les termes qui renferment les quantités inconnues P, Q, R deviennent abſolument inſenſibles dans le calcul, ou pourra être aſſuré qu'en effaçant les termes, on pourra toujours compter ſur la juſteſſe des valeurs x, y, z & $\frac{dx}{d\tau}$, $\frac{dy}{d\tau}$, $\frac{dz}{d\tau}$. De là on pourra auſſi aiſément connoître juſqu'à quel degré on doit diminuer le temps τ de chaque intervalle. Pour s'aſſurer davantage de cette vérité, on n'a qu'à jeter les yeux ſur le calcul précédent pour la Comète ſuppoſée; on y verra clairement que les termes des valeurs x, y, z qui renferment τ^3 ſont déjà ſi petits, que tous les ſuivans ne ſauroient être de la moindre conſéquence; & partant tous les doutes qui pourroient ſe préſenter contre cette méthode ſeront ſuffiſamment diſſipés.

SUPPLÉMENT AU MÉMOIRE

SUR LE DÉRANGEMENT D'UNE COMETE QUI PASSE PRÈS D'UNE PLANETE.

COMME dans le Mémoire que j'ai eu l'honneur d'envoyer à l'Académie Royale des Sciences, intitulé : *Recherches ſur le dérangement d'une Comète qui paſſe près d'une Planete*, je n'ai pas rempli tous les points de cette matière épineuſe & importante, n'y ayant développé que le cas où une Comète paſſe fort près d'une Planète, le gracieux accueil & le jugement honorable que cet illuſtre Corps a bien voulu accorder à mon Ouvrage, quoiqu'imparfait encore, autant que l'importance du ſujet, m'encouragent à y joindre ce Supplément, où je me propoſe de développer le cas où les forces perturbatrices ſont extrêmement petites, par rapport à la force principale dont la Comète eſt attirée vers le Soleil, ayant reconnu depuis, que les plus petites forces perturbatrices peuvent produire, avec le temps, des dérangemens aſſez conſidérables dans les orbites des Comètes; & je me flatte que ces deux Mémoires joints enſemble, ſatisferont au but que l'illuſtre Académie a eu en vue en propoſant cette queſtion, dont l'importance lui a paru mériter la réitération.

Je remarque d'abord, conformément à la critique judicieuſe de l'Académie Royale, que, lorſqu'une Comète ſe trouve à une très-grande diſtance du Soleil, tant s'en faut qu'on puiſſe négliger l'action des Planètes perturbatrices, qu'il peut arriver plutôt que l'attraction du Soleil en ſoit très-conſi-

dérablement altérée, être réduite à rien, ou même devenir négative. Et pour mettre cette circonſtance dans tout ſon
FIGURE I. jour, je ſuppoſe que le Soleil étant en ⊙, une Comète ſe trouve en C, à une très-grande diſtance ⊙ C = z du Soleil, pendant que Jupiter ſoit placé de l'autre côté, à la diſtance ⊙ Υ = 1. Soit enſuite la maſſe du Soleil = 1 & celle de Jupiter = M, & la Comète, dont la maſſe peut être négligée, ſera premièrement pouſſée vers le Soleil par la force $= \frac{1}{z^2}$, & dans la même direction, par l'action de Jupiter, par la force $= \frac{M}{(1+z)^2}$. Enſuite, puiſque Jupiter exerce ſur le Soleil une force $= \frac{M}{1}$, pour maintenir le Soleil en repos, il faut appliquer cette force à la Comète en ſens contraire, de ſorte que la Comète ſera repouſſée du Soleil par la force = M, & pouſſée conjointement vers le Soleil par la force $= \frac{1}{zz} + \frac{M}{(z+1)^2} - M$.

Or, puiſqu'on eſtime la maſſe de Jupiter à celle du Soleil, en raiſon de 1 à 1024, ſi nous ſuppoſons la diſtance de la Comète au Soleil 32 fois plus grande que celle de Jupiter, ou bien $z = 32$, cette force qui agit ſur la Comète ſera $= \frac{1}{32^2 . 33^2}$, & prenant z tant ſoit peu plus grand que 32, il eſt clair que cette force deviendra même négative. Enſuite, ſuppoſant que Jupiter ſe trouve de l'autre côté en J, de ſorte que ⊙ J = 1, la Comète ſeroit attirée vers le Soleil, premièrement par les deux forces $\frac{1}{z^2}$ & $\frac{M}{(z-1)^2}$, & en ſecond lieu, puiſque Jupiter exerce ſur le Soleil une force égale à M, celle-ci étant appliquée à la Comète en ſens contraire, agira ſuivant la direction C ⊙, de ſorte que la force entière qui agit ſur la Comète, ſera $= \frac{1}{zz} + \frac{M}{(z-1)^2} + M$, & dans le cas $z = 32$ & $M = \frac{1}{1024} = \frac{1}{32^2}$, cette force deviendra $= \frac{1}{32^2} + \frac{1}{31^2 . 32^2} + \frac{1}{32^2}$, qui par conſéquent eſt plus de deux fois plus grande que la ſeule force du Soleil.

Mais

Mais il faut remarquer ici que, dans cette supposition $z = 32$, le grand axe de l'orbite cométaire devroit être au moins $= 32$, & partant le demi-grand axe au moins $= 16$, pendant que le demi-grand axe de Jupiter n'est que de 1; d'où l'on peut conclure que le temps périodique de la Comète seroit à celui de Jupiter comme $16 \sqrt{16} : 1$; ou bien comme $64 : 1$; par conséquent, comme le temps périodique de Jupiter est de 12 années, il est clair que ce cas ne sauroit avoir lieu que très-rarement & point du tout, à moins que le temps périodique de la Comète ne soit plus grand que de 768 années; & pour de telles Comètes ce temps périodique doit être entièrement incertain.

Après ces réflexions préliminaires sur l'action que les Planètes perturbatrices exercent sur le Soleil, je reprends mon sujet; & pour mieux déterminer les dérangemens que les orbites des Comètes peuvent souffrir par l'action des Planètes, je supposerai, comme j'ai déjà dit, les forces perturbatrices extrêmement petites par rapport à la force principale dont la Comète est attirée vers le Soleil. Et puisque les lieux des Comètes doivent être rapportés pour chaque instant au lieu du Soleil, je rapporterai d'abord le mouvement de la Comète à un plan fixe, qui passe par le Soleil; comme celui de l'écliptique, en déterminant son lieu pour chaque instant par trois coordonnées perpendiculaires entre elles, & en regardant le Soleil comme étant dans un perpétuel repos.

Soit donc ⊙ le centre du Soleil, que je considère comme immobile, en appliquant toutes les forces qui agissent sur lui, suivant des directions contraires à la Comète même, qui par conséquent doivent toujours être combinées avec les forces qui agissent immédiatemnnt sur la Comète. Cela remarqué, qu'après un temps quelconque t, écoulé depuis une certaine époque, la Comète se trouve au point Z, dont le lieu soit déterminé par les trois coordonnées $\odot X = x$, $XY = y$, $YZ = z$, &, pour abréger, je nommerai la distance au Soleil $\odot Z = v$, en sorte que $x^2 + y^2 + z^2 = v^2$ soit maintenant la force *FIGURE II.*

principale dont la Comète eſt pouſſée vers le Soleil $= \frac{A}{v\,v}$, où A déſigne la maſſe du Soleil, & quelles que ſoient les petites forces qui agiſſent encore outre cela ſur la Comète, qu'on les décompoſe pour chaque inſtant, ſelon les directions des coordonnées, & qu'il ſoit la force ſuivant Z P = L, ſuivant Z Q = M, & ſuivant Z R = N. Cela poſé, les principes du mouvement, en prenant l'élément du temps $d\,\tau$ conſtant, nous fourniſſent ces trois équations:

$$\text{I. } \frac{\Delta\, d\,d\,x}{d\,t^2} = -\frac{A\,x}{v^3} + L.$$

$$\text{II. } \frac{\Delta\, d\,d\,y}{d\,t^2} = -\frac{A\,y}{v^3} + M.$$

$$\text{III. } \frac{\Delta\, d\,d\,y}{d\,t^2} = -\frac{A\,z}{v^3} + N.$$

Pour ramener les quantités conſtantes A & Δ avec le temps t à des meſures abſolues, nous n'avons qu'à appliquer les formules générales au cas du mouvement de la Terre autour du Soleil. Pour cet effet, conſidérons l'orbite de la Terre comme un cercle dont le rayon $= 1$, & que pendant le temps t elle ait parcouru un angle $= \tau$. On aura donc $v = 1$, $x = cof.\,\tau$, $y = fin.\,\tau$ & $z = 0$. Donc puiſque l'angle τ eſt proportionnel au temps t, ſa différentielle $d\,\tau$ ſera auſſi conſtante, & partant $d\,d\,x = -\,d\,\tau^2\,cof.\,\tau$ & $d\,d\,y = -\,d\,\tau^2\,fin.\,\tau$: de là, en ſuppoſant nulles les forces perturbatrices L, M, N, les deux premières équations donneront $\frac{\Delta\, d\,\tau^2}{d\,t^2} = A$, & partant $\frac{\Delta}{d\,t^2} = \frac{A}{d\,\tau^2}$, ſubſtituant cette valeur dans nos trois équations, & en diviſant par A, & mettant $\frac{L}{A} = p$, $\frac{M}{A} = q$ $\frac{N}{A} = r$: attendu que les forces perturbatrices renferment toujours la maſſe d'une certaine Planète, dont le rapport à la maſſe du Soleil A peut être regardé comme connu, en ſorte que ces trois quantités p q r ſont auſſi des quantités déterminées & *per hypotheſin* très-petites, les trois équations qui déterminent le mouvement de la Comète ſeront:

$$\text{I. } \frac{ddx}{d\tau^2} = -\frac{x}{v^3} + p.$$

$$\text{II. } \frac{ddy}{d\tau^2} = -\frac{y}{v^3} + q.$$

$$\text{III. } \frac{ddz}{d\tau^2} = -\frac{z}{v^3} + r.$$

En combinant ces trois équations, on en tire les trois ſuivantes:

$$\text{I. } \frac{x\,ddy - y\,ddx}{d\tau^2} = q\,x - p\,y.$$

$$\text{II. } \frac{y\,ddz - z\,ddy}{d\tau^2} = r\,y - q\,z.$$

$$\text{III. } \frac{z\,ddx - x\,ddz}{d\tau^2} = p\,z - r\,x.$$

à l'occaſion deſquelles j'obſerve premièrement, qu'elles ſont intégrables : en ſecond lieu, qu'elles ſont entièrement affinées entre elles, que deux contiennent la troiſième, comme on peut voir en multipliant la première par z & la ſeconde par x, ou la ſeconde par x & la troiſième par y, ou enfin, la première par z & la troiſième par y, & en les ſommant deux à deux : en troiſième lieu, que les quantités $q\,x - p\,y$, $r\,y - q\,z$ & $p\,z - r\,x$ expriment certains momens des forces perturbatrices par rapport aux trois axes auxquels les coordonnées ſont parallèles ; de ſorte que,

par rapport à l'axe,	*en ſens,*	*le moment de forces ſoit :*
⊙C . . .	A B . . .	$qx - py$.
⊙A . . .	B C . . .	$ry - qz$.
⊙B . . .	C A . . .	$pz - ry$.

Or, ſi nous déſignons ces momens par les caractères correſpondans C, A, B, nous aurons par l'intégration :

$$\text{I. } \frac{x\,dy - y\,dx}{d\tau} = \int C\,d\tau = R.$$

$$\text{II. } \frac{y\,dz - z\,dy}{d\tau} = \int A\,d\tau = P.$$

$$\text{III. } \frac{z\,dx - x\,dz}{d\tau} = \int B\,d\tau = Q.$$

où il y a encore une remarque fort importante à faire : ſavoir, que les formules $x\,d\,y - y\,d\,x$, $y\,d\,z - z\,d\,y$, $z\,d\,x - x\,d\,z$, ſe rapportent à la projection de l'orbite cométaire ſur les trois plans principaux des axes, deſquels nous avons dit ci-deſſus que les momens des forces s'y rapportent : car il y aura . . . .

l'élément de projection	*ſur le plan,*	*en ſens.*
$\frac{x\,d\,y - y\,d\,x}{2}$	A ⊙ B	A B.
$\frac{y\,d\,z - z\,d\,y}{2}$	B ⊙ C	B C.
$\frac{z\,d\,x - x\,d\,z}{2}$	C ⊙ A	C A.

Ce qui s'accorde parfaitement bien avec la première remarque ſur les momens des forces ; car ſi les forces perturbatrices $p\ q\ r$ évanouiſſoient, ces élémens deviendroient proportionnels à l'élément du temps $d\,\tau$, comme les premiers principes l'enſeignent.

Ayant donc trouvé trois équations différentielles du premier degré, mais dont deux renferment la troiſième, tâchons d'en obtenir une quatrième, pour compenſer cette dépendance. Or, en multipliant la première de nos équations differentio-différentielles initiales par $2\,d\,x$, la ſeconde par $2\,d\,y$, & la troiſième par $2\,d\,z$, leur ſomme nous fournira celle-ci: $\frac{2\,d\,x\,d\,d\,x + 2\,dy\,d\,dy + 2\,d\,z\,d\,d\,z}{d\,\tau^2} = -\frac{2}{v^3}(x\,d\,x + y\,d\,y + z\,d\,z)$ $+ 2\,(p\,d\,x + q\,d\,y + r\,d\,z)$, & en mettant l'élément de la courbe décrite $\sqrt{d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2} = d\,s$, à cauſe de $x\,d\,x + y\,dy + z\,d\,z = v\,d\,v$, il y aura par l'intégration, $\frac{d\,s^2}{d\,\tau^2} = \frac{2}{v} + 2\int p\,d\,x + q\,d\,y + r\,d\,z$, où la formule $p\,d\,x + q\,d\,y + r\,d\,z$ exprime la force tangentielle de la courbe multipliée par ſon élément ; d'où, ſi l'on met cette force tangentielle $= T$, il y aura $p\,d\,x + q\,d\,y + r\,d\,z = T\,d\,s$, & partant le carré de la vîteſſe $\frac{d\,s^2}{d\,\tau^2} = \frac{2}{v} + 2\int T\,ds$.

De plus, en multipliant la première de nos trois équations par x, la seconde par y, & la troisième par z, leur somme donnera $\frac{xddx + yddy + zddz}{d\tau^2} = -\frac{1}{v} + px + qy + rz$, à laquelle, si nous ajoutons l'intégrale que nous venons de trouver, savoir, $\frac{ds^2}{d\tau^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{d\tau^2} = \frac{2}{v} + 2\int T\,ds$, il en résultera cette équation . . . .
$\frac{xddx + yddy + zddz + dx^2 + dy^2 + dz^2}{d\tau^2} = \frac{d.\,vdv}{d\tau^2} = \frac{1}{v} + 2\int T\,ds$ $+ px + qy + rz$; & parce que la formule $px + qy + rz$, divisée par v, exprime la force centrale qui résulte suivant la direction ☉ Z; si nous nommons cette force $=$ K, il y aura $\frac{d.\,vdv}{d\tau^2} = \frac{1}{v} + Kv + 2\int T\,ds$, qui, étant multipliée par $2\,v\,dv$, redevient intégrable, & l'intégrale sera $\frac{vvdv^2}{d\tau^2}$ $= 2v + 2\int Kvv\,dv + 4\int v\,dv\int T\,ds$; d'où l'on tire $d\tau = \frac{v\,dv}{\sqrt{(2v + 2\int Kvv\,dv + 4\int v\,dv\int T\,ds)}}$.

Ayant donc déterminé l'élément du temps $d\tau$ par la variable v, nous allons voir quelle valeur on pourra tirer des trois équations différentielles du premier ordre, que nous avons obtenues par l'intégration : pour cet effet, nous les combinerons en sorte que les coordonnées x, y, z sortent entièrement du calcul; ce qui se fait en ajoutant ensemble les carrés de ces trois équations. Or, à cause de $xx + yy = vv - zz$, $xx + zz = vv - yy$ & $yy + zz = vv - xx$, il y aura $vv\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2 = d\tau^2\,(\mathrm{PP} + \mathrm{QQ} + \mathrm{RR})^2$, ou bien $vv\,ds^2 - vv\,dv^2 = d\tau^2\,(\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 + \mathrm{R}^2)$. Or, si nous concevons que la Comète ait parcouru pendant le temps $d\tau$ dans son orbite le petit arc ds, il est clair qu'en nommant l'angle élémentaire décrit par ce mouvement $= d\varphi$, il y aura $ds^2 - dv^2 = vv\,d\varphi^2$, & de là notre équation sera $vv\,d\varphi = d\tau\sqrt{\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 + \mathrm{R}^2}$, & en mettant $\sqrt{\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 + \mathrm{R}^2}$, $=$ S, il y aura $vv\,d\varphi = \mathrm{S}\,d\tau$.

Introduisons maintenant cet angle élémentaire $d\ \varphi$ dans l'équation $\frac{d\ s^2}{d\ \tau^2} = \frac{2}{v} + 2\int T d\ s$, & à cause de $d\ s^2 = d\ v^2 + v\ v\ d\ \varphi^2$, il y aura $\frac{d\ v^2 + v\ v\ d\ \varphi^2}{d\ \tau^2} = \frac{2}{v} + 2\int T d\ s$, de sorte que nous ayons à présent deux équations entre les trois variables v, τ & φ, dont la première nous donne $d\ \varphi = \frac{S\ d\ \tau}{v\ v}$, & l'autre, en mettant $2\int T d\ s = \mathrm{T}$, nous donne $d\ v^2 + v\ v\ d\ \varphi^2 = \frac{2\ d\ \tau^2}{v} + \mathrm{T}\ d\ \tau^2$; ou bien, à cause de $d\ \varphi = \frac{S\ d\ \tau}{v\ v}$, il y aura $d\ \tau^2\ (2\ v + \mathrm{T}\ v\ v - \mathrm{S\ S}) = v\ v\ d\ v^2$, & partant $d\tau = \frac{v\ d\ v}{\sqrt{(2\ v + \mathrm{T}\ v\ v - \mathrm{S\ S})}}$ & $d\ \varphi = \frac{\mathrm{S}\ d\ v}{v\sqrt{(2\ v + \mathrm{T}\ v\ v - \mathrm{S\ S})}}$.

Quoique nous ayons trouvé deux valeurs pour l'élément du temps $d\ \tau$, qui semblent assez différentes entre elles, on verra néanmoins bientôt qu'elles conviennent parfaitement, si l'on met, au lieu de S S, sa valeur $\mathrm{P\ P} + \mathrm{Q\ Q} + \mathrm{R\ R} = \frac{v\ v\ d\ s^2}{d\ \tau^2} - \frac{v\ v\ d\ v^2}{d\ \tau^2}$, qui, à cause de $\frac{v\ v\ d\ s^2}{d\ \tau^2} = 2\ v + 2\ v^2 \int T d\ s = 2\ v + \mathrm{T}\ v\ v$ & $\frac{v\ v\ d\ v^2}{d\ \tau^2} = 2\ v + 2\int K v\ v\ d\ v + 4\int v\ d\ v \int T d\ s$, substituée dans le dénominateur irrationnel de l'expression $d\ \tau$, la rend telle que nous l'avons assignée ci-dessus.

Reprenons maintenant nos trois équations différentielles: I. $\frac{y\ d\ z - z\ d\ y}{d\ \tau} = \mathrm{P}$. II. $\frac{z\ d\ x - x\ d\ z}{d\ \tau} = \mathrm{Q}$. III. $\frac{x\ d\ y - y\ d\ x}{d\ \tau} = \mathrm{R}$, & en faisant I. x + II. y + III. z, il y aura $\mathrm{P}\ x + \mathrm{Q}\ y + \mathrm{R}\ z = o$; où il est évident que, parce que les quantités P, Q, R ne peuvent pas varier sensiblement pendant un intervalle de temps très-petit, si on les prend pour constantes, cette équation pourra servir à déterminer le plan dans lequel la Comète se meut pendant ce petit espace de temps.

Figure III. Or, pour déterminer la mobilité de ce plan, soit A ☉ B le plan de l'écliptique, & ☉ N l'intersection que le plan cherché dans lequel la Comète se meut, fait avec le plan de l'écliptique, & il est clair que, parce que la Comète existe dans le plan ⊙ N, il y aura dans toute la longueur de cette ligne $z = o$, & partant sa position sera exprimée par l'équation $Px + Qy = o$. Soit l'angle A ⊙ N, qui désigne la variation de la ligne des nœuds $= \zeta$, & il est clair que, parce que la fraction $\frac{y}{x}$ exprime la tangente de cet angle, il y aura $tang.\ \zeta = \frac{y}{x} = -\frac{P}{Q}$. Quant à l'inclinaison de ce plan à l'écliptique, il est évident que si l'on met $x = o$, il y aura $Q\,y + R\,z = o$, & partant, si l'on fait dans la figure ⊙ $P = y$, il sera la perpendiculaire $PQ = z = -\frac{Qy}{R}$. Et si l'on tire du point P la perpendiculaire P R sur la ligne des nœuds, l'angle P R Q sera l'angle d'inclinaison que nous nommerons $= \eta$, & parce que la tangente est exprimée par $\frac{PQ}{PR} = -\frac{Q}{R\,cos.\,\zeta}$, à cause de $PR = y\,cos.\,\zeta$. Or nous avons $tang.\ \zeta = -\frac{P}{Q}$, & partant $cos.\,\zeta = \frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}}$, d'où l'on tire $tang.\ \eta = -\frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{R}$, & partant $sin.\ \eta = -\frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{\sqrt{(P^2+Q^2+R^2)}}$ & $cos.\,\eta = \frac{R}{\sqrt{(P^2+Q^2+R^2)}}$.

Maintenant, constituons une certaine époque où la Comète se meuve dans le plan même de l'écliptique, & soit pour ce temps-là la valeur *constante* de nos trois intégrales $\int A\,d\tau = \alpha$, $\int B\,d\tau = \beta$ & $\int C\,d\tau = \gamma$, & après un temps τ écoulé depuis cette époque, nous aurons $\int A\,d\tau + \alpha = P$, $\int B\,d\tau + \beta = Q$ & $\int C\,d\tau + \gamma = R$. Or, à cause de $z = o$, il y aura aussi $\alpha = o$ & $\beta = o$, afin qu'il soit $\alpha x + \beta y + \gamma z = o$, & partant nos valeurs P, Q, R seront $P = \int r\,y\,d\tau$, $Q = -\int r\,x\,d\tau$, $R = \gamma + \int d\tau(q\,x - p\,y)$, d'où, en substituant ces valeurs, il y aura pour cette époque $tang.\ \zeta = \frac{\int r\,y\,d\tau}{\int r\,x\,d\tau}$ & $tang.\ \eta = -\frac{\sqrt{(\int r\,y\,d\tau)^2 + (\int r\,x\,d\tau)^2}}{\gamma}$, où nous avons négligé dans le dénominateur l'intégrale $\int d\tau\,(q\,x - p\,y)$, qui évanouit devant la constante γ, parce que les quantités p & q sont censées être infiniment petites; ensuite il y aura $sin.\ \zeta = \frac{\int r\,y\,d\tau}{\sqrt{(\int r\,y\,d\tau)^2 + (\int r\,x\,d\tau)^2}} = \frac{\int r\,y\,d\tau}{\gamma\,tag.\,\eta}$,

& partant $\mathit{ſin.}\ \zeta\ \mathit{tang.}\ \eta = \eta\ \mathit{ſin.}\ \zeta$ (à cauſe de η extrêmement petit) $= -\frac{\int r y\, d\tau}{\gamma}$, où il faut encore obſerver que la loi du changement inſtantané de ces deux élémens eſt telle que $d\eta = \eta\, d\zeta\ \mathit{coſ.}\ \psi$, ψ déſignant l'argument de latitude.

Pour faire voir cela plus clairement, on n'a qu'à reprendre l'équation $\eta\ \mathit{ſin.}\ \zeta = -\frac{\int r y\, d\tau}{\gamma}$; & parce qu'il y a de même manière $\eta\ \mathit{coſ.}\ \zeta = -\frac{\int r x\, d\tau}{\gamma}$, ces deux équations différentiées donnent $d\eta\ \mathit{ſin.}\ \zeta + \eta\, d\zeta\ \mathit{coſ.}\ \zeta = -\frac{r y\, d\tau}{\gamma}$, & . . . . $d\eta\ \mathit{coſ.}\ \zeta - \eta\, d\zeta\ \mathit{ſin.}\ \zeta = -\frac{r x\, d\tau}{\gamma}$, qui étant multipliées, la première par $\mathit{ſin.}\ \zeta$, & la ſeconde par $\mathit{coſ.}\ \xi$, & enſuite la première par $\mathit{coſ.}\ \zeta$, & la ſeconde par $\mathit{ſin.}\ \zeta$, fourniſſent ces deux équations, $d\eta = -\frac{r\, d\tau\, (y\ \mathit{ſin.}\ \zeta + x\ \mathit{coſ.}\ \zeta)}{\gamma}$,
FIGURE IV. & $\eta\, d\zeta = -\frac{r\, d\tau\, (y\ \mathit{coſ.}\ \zeta - x\ \mathit{ſin.}\ \zeta)}{\gamma}$. Or, en conſtituant le lieu de la Comète en Z infiniment peu au deſſus de Y, & tirant la perpendiculaire Y P, il aura ouvertement $\odot\, \mathrm{P} = y\ \mathit{ſin.}\ \zeta + x\ \mathit{coſ.}\ \zeta$, & $\mathrm{YP} = y\ \mathit{coſ.}\ \zeta - x\ \mathit{ſin.}\ \zeta$. Mais ſi l'on met l'angle $\mathrm{N} \odot \mathrm{Z} = \psi$, à cauſe de $\odot\, \mathrm{V} = v$, il y aura $\odot\, \mathrm{P} = y\ \mathit{ſin.}\ \zeta + x\ \mathit{coſ.}\ \zeta = v\ \mathit{coſ.}\ \psi$, & $\mathrm{YP} = y\ \mathit{coſ.}\ \zeta - x\ \mathit{ſin.}\ \zeta = v\ \mathit{ſin.}\ \psi$, & partant $d\eta = -\frac{r v\, d\tau\ \mathit{coſ.}\ \psi}{\gamma}$, & $\eta\, d\zeta = -\frac{r v\, d\tau\ \mathit{ſin.}\ \psi}{\gamma}$, d'où il s'enſuit $d\eta = \eta\, d\zeta\ \mathit{coſ.}\ \psi$.

Pour réunir aux formules que nous venons de donner, & par leſquelles on eſt en état de déterminer, tant l'inclinaiſon de l'orbite cométaire à l'écliptique infiniment petite η, que la poſition de la ligne des nœuds ζ, ils nous font voir auſſi que la mobilité de l'orbite dépend uniquement de la force perturbatrice r, qui agit perpendiculairement ſur le plan de l'orbite, de ſorte que la Comète demeureroit toujours dans le même plan, s'il n'y avoit que les forces p & q qui agiſſent ſur lui, & qu'elle ne s'en écarte qu'en tant que la force r ſubſiſte, dont l'action l'action est consumée par cette altération ; en sorte que, dans la détermination de l'inégalité du mouvement que nous allons entreprendre, il n'y ait que l'action des forces p & q à considérer, qui, si elles cessoient d'agir, laisseroient à la Comète son mouvement uniforme, qui n'est dérangé qu'en tant que p & q agissent sur lui.

Pour déterminer donc cette aberration du mouvement uniforme qui ne peut être bien sensible, parce que les forces p & q sont censées être très-petites, il faut connoître pour chaque intervalle de temps la section conique dans laquelle la Comète se meut pour cet instant. Pour cet effet, soit $\odot$, le centre du Soleil, Y le lieu de la Comète qui soit donné aussi bien que son mouvement, soit la distance $\odot\, Y = v$, & l'angle par lequel il est déjà avancé depuis la direction fixe $\odot\, A$, savoir, $A \odot Y = \varphi$. Que la Comète parcoure avec un mouvement quelconque l'espace Y y, si l'on résout ce mouvement, suivant les directions Y v & Y u, nous nommerons les vîtesses $\frac{dv}{d\tau} = u$ & $\frac{v\,d\varphi}{d\tau} = v\,\xi$, d'où nous pourrons déterminer l'espece de section conique que la Comète parcourt, en déduisant de nos données v, φ, u & ξ, le semi-paramètre, l'excentricité, l'anomalie vraie & le mouvement des absides, ce qui pourra se faire de la manière suivante.

Soit Π le lieu du perihélie, l'angle $A \odot \Pi = \pi$, l'anomalie vraie $\Pi \odot Y = \omega = \varphi - \pi$, le semi-paramètre $= f$ & l'excentricité $= g$, & l'on sait qu'il y a $\odot\, Y = v = \frac{f}{1 + g\, cos.\, \omega}$ & $d\tau = \frac{v\,v\,d\varphi}{\sqrt{f}}$, d'où, à cause de $\frac{d\varphi}{d\tau} = \xi$, il y aura $\sqrt{f} = v\,v\,\xi$, & partant $f = v^4\,\xi^2$, & delà $1 + g\, cos.\, \omega = v^3\,\xi^2$, ou bien $g\, cos.\, \omega = v^3\,\xi^2 - 1$, d'où il s'ensuit $tang.\, \omega = \frac{u\,v\,v\,\xi}{v^3\,\xi^2 - 1}$. Ensuite, reprenant $v = \frac{f}{1+g\, cos.\, \omega}$, il y aura $d\,v = \frac{f\,g\,d\,\omega\, sin.\, \omega}{(1+g\, cos.\, \omega)^2}$, & partant à cause de $d\,\tau = \frac{v\,v\,d\varphi}{\sqrt{f}} = \frac{v\,v\,d\omega}{\sqrt{f}} = \frac{f\,d\,\omega \sqrt{f}}{(1 + g\, cos.\, \omega)^2}$, il y aura $\frac{d\,v}{d\,\tau} = u = \frac{g\, sin.\, \omega}{\sqrt{f}} = \frac{g\, sin.\, \omega}{v\,v\,\xi}$, & partant $g = \frac{u\,v\,v\,\xi}{sin.\, \omega}$.

Figure VI. Considérons maintenant l'action des forces perturbatrices p & q, & pour cet effet, introduisons nos deux coordonnées $\odot X = x$, $XY = y$, & au lieu de deux forces $YP = p$, & $YQ = q$, introduisons-en deux autres qui agissent suivant les directions Ym & Yn, & soit celle-ci $= n$ & l'autre $= m$, & il il y aura, à cause de $A \odot Y = \varphi$, la force $p = m \cos \varphi - n \sin \varphi$, & $q = m \sin \varphi + n \cos \varphi$, & nous aurons pour le mouvement que l'action de ces forces produit :

$$\frac{ddx}{d\tau^2} = -\frac{x}{v^3} + m \cos.\varphi - n \sin.\varphi, \text{ \&}$$

$$\frac{ddy}{d\tau^2} = -\frac{y}{v^3} + m \sin.\varphi + n \cos.\varphi,$$

ou bien, à cause de $x = v \cos.\varphi$ & $y = v \sin.\varphi$, il y aura, en substituant ces valeurs, aussi bien que leurs différentio-différentielles :

$$\text{I.} \quad \frac{ddv \cos.\varphi - 2dvd\varphi \sin.\varphi - vd\varphi^2 \cos.\varphi - vdd\varphi \sin.\varphi}{d\tau^2} = -\frac{\cos.\varphi}{vv} + m \cos.\varphi - n \sin.\varphi.$$

$$\text{II.} \quad \frac{ddv \sin.\varphi + 2dvd\varphi \cos.\varphi - vd\varphi^2 \sin.\varphi + vdd\varphi \cos.\varphi}{d\tau^2} = -\frac{\sin.\varphi}{vv} + m \sin.\varphi + n \cos.\varphi.$$

Or, de ces deux équations, on tire par les combinaisons : $\text{I.} \times \cos.\varphi + \text{II.} \times \sin.\varphi$ & $\text{II.} \times \cos.\varphi - \text{I.} \times \sin.\varphi$ les deux suivantes : $\frac{ddv - vd\varphi^2}{d\tau^2} = -\frac{1}{vv} + m$ & $\frac{2dvd\varphi + vdd\varphi}{d\tau^2} = n$, qui, à cause de $\frac{dv}{d\tau} = u$ & $\frac{d\varphi}{d\tau} = \xi$, se réduisent à celles-ci $\cdot \frac{du}{d\tau} - v\xi^2 = -\frac{1}{vv} + m$ & $2u\xi + \frac{vd\xi}{d\tau} = n$, d'où l'on tire $\frac{du}{d\tau} = v\xi^2 - \frac{1}{vv} + m$ & $\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{n - 2v\xi}{v}$.

Or, pour déterminer les variations de l'orbite cométaire, il faut considérer que si le mouvement de la Comète a été dans la section conique que nous avons considérée ci-dessus, & qu'elle continuoit de s'y mouvoir si les forces perturbatrices m & n, que nous venons de substituer aux forces p & q, cesseroient d'agir ; ces forces tendront continuellement à changer les élémens, en forte qu'ils feront augmentés après chaque élément du temps $d\tau$ écoulé, de leurs différentielles.

Reprenons donc, premièrement, notre équation $f = v^4 \xi^2$, qui, différentiée & divifée par $d\tau$, donne $\frac{df}{d\tau} = \frac{4 v^3 \xi dv}{d\tau} + \frac{2 v^4 \xi d\xi}{d\tau}$; ou bien, à caufe de $\frac{dv}{d\tau} = u$ & $\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{n - 2u\xi}{v}$, il y aura $\frac{df}{d\tau} = 2 n v^3 \xi$, & partant $df = 2 n v^3 \xi d\tau$. De la même manière, fi nous différencions les équations $g \,\mathit{fin.}\, \omega = u v v \xi$ & $g \,\mathit{cof.}\, \omega = v^3 \xi^2 - 1$, & divifons par $d\tau$; nous aurons, après avoir fubftitué, au lieu de $\frac{du}{d\tau}$, $\frac{d\xi}{d\tau}$ & $\frac{dv}{d\tau}$, leurs valeurs, ces deux équations :

$$\text{I.}\quad \frac{dg \,\mathit{fin.}\, \omega + g d\omega \,\mathit{cof.}\, \omega}{d\tau} = n u v + m v v \xi + v^3 \xi^3 - \xi.$$

$$\text{II.}\quad \frac{dg \,\mathit{cof.}\, \omega - g d\omega \,\mathit{fin.}\, \omega}{d\tau} = 2 n v v \xi - n v v \xi^2,$$

qui, à caufe de $v^3 \xi^3 - \xi = g \xi \,\mathit{cof.}\, \omega$ & $u v v \xi^2 = g \xi \,\mathit{fin.}\, \omega$, fe réduifent à celles-ci :

$$\text{I.}\quad \frac{dg \,\mathit{fin.}\, \omega + g d\omega \,\mathit{cof.}\, \omega}{d\tau} = n u v + m v v \xi + g \xi \,\mathit{cof.}\, \omega.$$

$$\text{II.}\quad \frac{dg \,\mathit{cof.}\, \omega - g d\omega \,\mathit{fin.}\, \omega}{d\tau} = 2 n v v \xi - g \xi \,\mathit{fin.}\, \omega;$$

& ces deux équations nous fourniffent les deux fuivantes, par les combinaifons :

I. $\times \,\mathit{fin.}\, \omega$ + II. $\times \,\mathit{cof.}\, \omega$, & I. $\times \,\mathit{cof.}\, \omega$ — II. $\times \,\mathit{fin.}\, \omega$.

$$\frac{dg}{d\tau} = m v v \xi \,\mathit{fin.}\, \omega + n v (u \,\mathit{fin.}\, \omega + 2 v \xi \,\mathit{cof.}\, \omega) \text{ \&}$$

$$\frac{g d\omega}{d\tau} = m v v \xi \,\mathit{cof.}\, \omega + n v (u \,\mathit{cof.}\, \omega - 2 u \xi \,\mathit{fin.}\, \omega) + g \xi;$$

& enfin, à caufe de $d\pi = d\varphi - d\omega$ & $\frac{d\pi}{d\tau} = \xi - \frac{d\omega}{d\tau}$, il y aura pour le mouvement des abfides $\frac{d\pi}{d\tau} = - \frac{m v v \xi \,\mathit{cof.}\, \omega}{g} - \frac{n v (u \,\mathit{cof.}\, \omega - 2 v \xi \,\mathit{fin.}\, \omega)}{g}$.

Remarquons, par rapport à ces différentielles, 1°, que fi les forces m & n ceffoient d'agir, le paramètre de l'orbite ne fubît aucun changement auſſi peu que l'excentricité comme la nature exige. Or, dans ce cas, il y auroit $\frac{g\,d\,\omega}{d\,\tau} = g\,\xi = \frac{g\,d\,\phi}{d\,\tau}$, ou bien $d\,\omega = d\,\phi$, c'eſt-à-dire que, parce que la ligne des abſides ſeroit en repos, il y auroit l'angle π conſtant, & par conſéquent $d\,\phi = d\,\omega$, ce qui s'enſuivroit auſſi de la quatrième équation. 2°. En ſubſtituant, au lieu de v, u, ξ, leurs valeurs dans ces différentielles, nous aurons :

$$\frac{d\,f}{d\,\tau} = \frac{2\,n\,f\sqrt{f}}{1 + g\,cof.\,\omega}.$$

$$\frac{d\,g}{d\,\tau} = m\,fin.\,\omega\sqrt{f} + n\sqrt{f}\left(\frac{g\,fin.\,\omega^2}{1 + g\,cof.\,\omega} + 2\,cof.\,\omega\right).$$

$$\frac{d\,\omega}{d\,\tau} = \frac{m\,cof.\,\omega\sqrt{f}}{g} - \frac{n\,fin.\,\omega\sqrt{f}}{g}\left(\frac{2 + g\,cof.\,\omega}{1 + g\,cof.\,\omega}\right) + \frac{(1 + g\,cof.\,\omega)^2}{f\sqrt{f}}.$$

$$\frac{d\,\pi}{d\,\tau} = -\frac{m\,cof.\,\omega\sqrt{f}}{g} + \frac{n\,fin.\,\omega\sqrt{f}}{g}\left(\frac{2 + g\,cof.\,\omega}{1 + g\,cof.\,\omega}\right).$$

Raſſemblons maintenant tout ce que nous avons trouvé juſqu'ici, pour ſaiſir d'un coup d'œil toutes les opérations que la détermination des dérangemens d'une Comète exige. Et parce que nous avons d'abord établi que les forces perturbatrices ſoient extrêmement petites par rapport à la force principale dont le corps eſt attiré vers le Soleil, en ſorte qu'on puiſſe regarder ſon mouvement comme régulier dans une orbite elliptique pendant un eſpace de temps très-petit, nous avons établi une certaine époque pendant laquelle la Comète eſt ſuppoſée ſe mouvoir dans le plan A ⊙ B, & cette orbite factice dans laquelle la Comète continueroit ſon mouvement s'il n'y avoit point de forces perturbatrices qui agiſſent ſur lui, nous a fourni les moyens de déterminer pour chaque élément de temps tous les changemens entre cette orbite imaginaire & la vraie orbite de la Comète. Car ayant conſtitué le lieu du *FIGURE V.* perihélie en Π, l'angle A ⊙ Π = π, le ſemi-paramètre = f, l'excentricité = g, nous avons établi qu'après un eſpace de temps écoulé depuis l'époque fixée, la Comète ſe trouve dans l'orbite factice en Y, ſon anomalie vraie A ⊙ Y = ω, & ſa longitude A $\odot$ Y $= \pi + \omega$; on ſait que ſa diſtance au Soleil $\odot$ Y eſt $= \frac{f}{1 + g \, cof. \, \omega}$.

Pour déterminer enſuite les forces perturbatrices qui agiſſent ſur la Comète, je conſidère un autre corps quelconque au deſſus du plan A $\odot$ B en P, & après avoir abaiſſé ſur le plan la perpendiculaire P Q, & joint les droites P $\odot$ & Q $\odot$, auſſi bien que P Y & Q Y, je ſuppoſe la maſſe du corps perturbant en P = M & la maſſe du Soleil = 1. Cela établi, la force dont le corps agit ſur le Soleil en ſens $\odot$ P, ſera $= \frac{M}{P\odot^2}$, & la force qui agit ſur la Comète en ſens Y P $= \frac{M}{YP^2}$. Or la force ſuivant $\odot$ P, qui doit être appliquée à la Comète en ſens contraire P $\odot$, peut être réſolue en deux autres, ſuivant les directions P Q & Q $\odot$, & la force agiſſante en ſens Y P auſſi en deux autres, ſuivant les directions Q P & Y Q, & nous aurons : *FIGURE VII.*

1°. La force, ſuivant P Q $= M \frac{PQ}{P\odot^3}$.

2°. . . . . Q $\odot$ $= M \frac{Q\odot}{P\odot^3}$.

De la même manière :

3°. La force, ſuivant Q P $= M \frac{QP}{YP^3}$.

4°. . . . . P Q $= M \frac{YQ}{YP^3}$.

Puis donc que la Comète eſt attirée en haut par la force 3, & en bas par la force 1, la force perturbatrice qui agit perpendiculairement, & que nous avons déſignée ci-deſſus pour la lettre r, ſera $r = M\,PQ\left(\frac{1}{YP^3} - \frac{1}{P\odot^3}\right)$, qui agit en haut lorſque P $\odot$ > Y P, en bas lorſque P $\odot$ < Y P, & évanouit lorſque Y P = P $\odot$.

Quant aux forces 2 & 4 qui agiſſent dans le plan même, ſi on les réſout, la première ſuivant Q R & $\odot$ R, & l'autre ſuivant Y R & R Q, on aura :

1°. La force ſuivant $QR = M\frac{QR}{P\odot^3}$.

2°. . . . . $R\odot = M\frac{R\odot}{P\odot^3}$.

3°. . . . . $YR = M\frac{YR}{YP^3}$.

4°. . . . . $RQ = M\frac{RQ}{YP^3}$.

Nous avons donc pour les forces perturbatrices m & n les valeurs $m = -M\frac{YR}{YP^3} - M\frac{R\odot}{P\odot^3}$ & $n = MQR\left(\frac{1}{YP^3} - \frac{1}{P\odot^3}\right)$.

Quant aux élémens de l'orbite, nous les avons déterminés, en ſorte que ſi la longitude $= \varphi$ la diſtance au Soleil $= v$, la vîteſſe $\frac{dv}{d\tau} = u$ & $\frac{v\,d\varphi}{dv} = v\,\xi$, il y ait pour le ſemi-paramètre $f = v^4\,\xi^2$, pour l'anomalie vraie ω, $tang\,\omega = \frac{u\,v\,v\,\xi}{v^3\,\xi^2 - 1}$, pour l'excentricité $g = \frac{u\,v\,v\,\xi}{ſin.\,\omega}$, & pour le lieu du perihélie ou le mouvement des abſides $\pi = \varphi - \omega$. Or, par l'action des forces perturbatrices, ces élémens ſeront changés en ſorte qu'après chaque élément de temps $d\tau$, ils ſoient augmentés de leurs différentielles, c'eſt-à-dire, f de $df = \frac{2\,n\,f\,d\tau\sqrt{f}}{1 + g\,coſ.\,\omega}$, . . g de $dg = m\,d\tau\,ſin.\,\omega\sqrt{f} + n\,d\tau\sqrt{f}\left(\frac{g\,ſin.\,\omega^2}{1+g\,coſ.\,\omega} + 2\,coſ.\,\omega\right)$, π de $d\pi = -\frac{m\,d\tau\,coſ.\,\omega\sqrt{f}}{g} + \frac{n\,d\tau\,ſin.\,\omega\sqrt{f}}{g}\left(\frac{2 + g\,coſ.\,\omega}{1 + g\,coſ.\,\omega}\right)$ & ω de $d\omega = \frac{(1 + g\,coſ.\,\omega)^2\,d\tau}{f\sqrt{f}} - d\pi$.

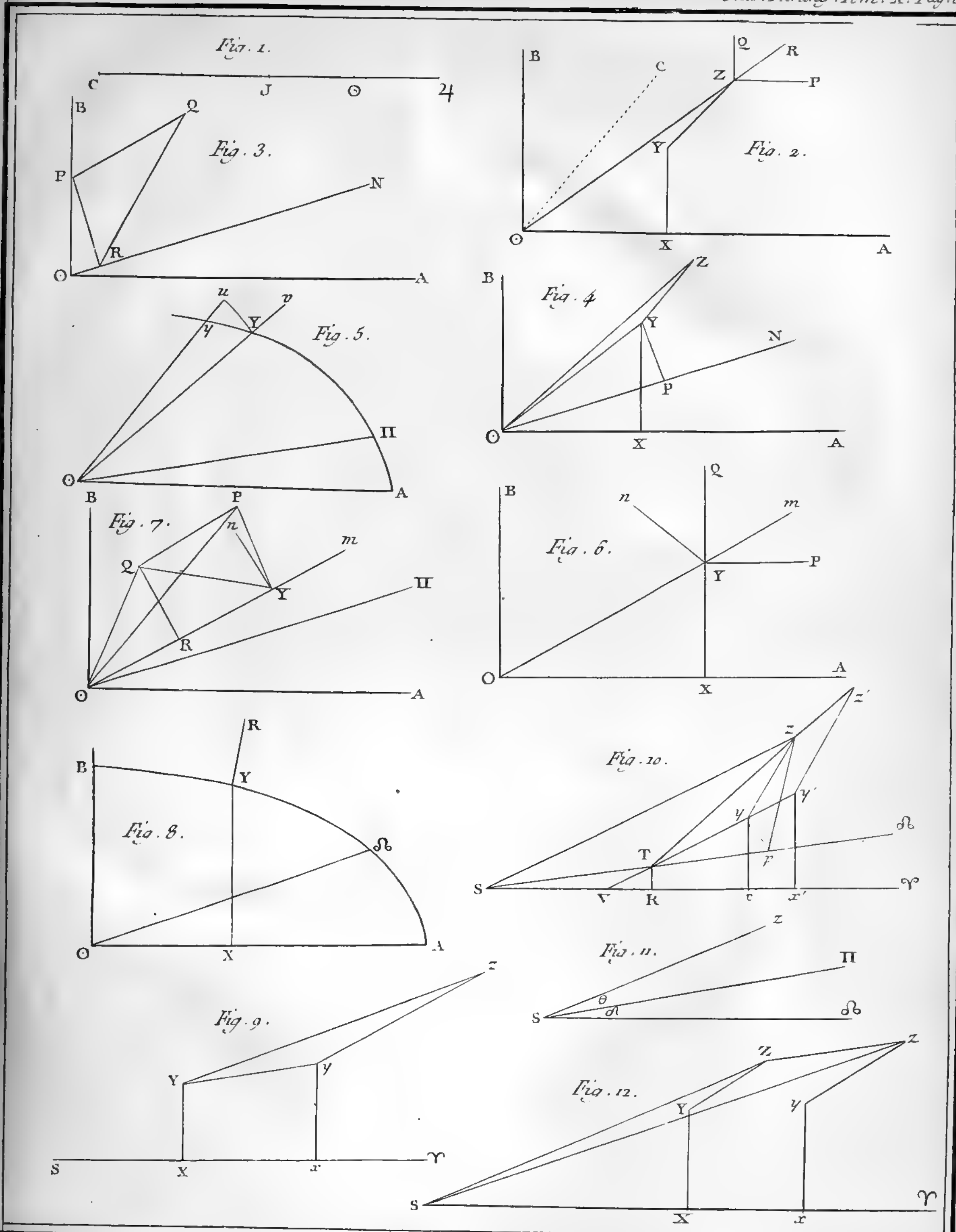
Mais comme il n'eſt pas à eſpérer qu'on puiſſe parvenir directement aux intégrales de ces formules, on ſe verra obligé de recourir au même expédient dont j'ai fait uſage, en calculant les élémens d'une Comète imaginaire dont j'ai parlé au commencement de mon Mémoire, & que j'ai auſſi propoſé pour calculer l'effet de l'action du Soleil & de la Planète ſur la Comète, c'eſt-à-dire, d'établir pluſieurs intervalles de temps, & de calculer pour chacun, tant les forces m, n, r, que l'angle ω, & les incrémens des élémens de l'orbite, dont la somme donnera les vrais incrémens que ces élémens reçoivent, où l'on pourra sans hésiter prendre pour l'élément du temps $d\tau$ les intervalles assez petits, établis depuis l'époque fixée, comme j'ai fait dans mes premières recherches.

Enfin, quant à la ligne des nœuds & à l'inclinaison de l'orbite à l'ecliptique, dont la variation ne dépend, comme nous avons déjà remarqué, que de la force perturbatrice r, si nous considérons l'orbite factice A Y B, dans laquelle la Comète se meut, & que nous supposons qu'elle se trouve en Y vers le temps τ écoulé depuis l'époque où elle est attirée en haut par la force $YR = r$, soit $\odot X = x$, $XY = y$, & les momens de la force r par rapport aux axes $\odot A$ & $\odot B$, seront ry & rx. Supposé donc qu'on ne puisse intégrer actuellement, si l'on établit des intervalles de temps assez petits pour qu'ils puissent être exprimés sans erreur sensible par l'élément de temps $d\tau$, il faudra déterminer ces momens pour chacun de ces intervalles séparément, & leurs sommes pour tout l'espace de temps τ, seront $\int rx\,d\tau = P$ & $\int ry\,d\tau = Q$. Soit ensuite pour le temps τ, la ligne des nœuds en $\odot ☊$, & l'angle $A \odot ☊ = \zeta$, & l'inclinaison $= \eta$, & nous avons trouvé ci-dessus $cos.\,\zeta\, sin.\,\eta = \frac{\int rx\,d\tau}{\gamma}$ & $sin.\,\zeta\, sin.\,\eta = \frac{\int ry\,d\tau}{\gamma}$, où γ désigne dans le mouvement régulier la valeur de $\frac{vv\,d\varphi}{d\tau} = vv\xi = \sqrt{f}$, d'où nous aurons $cos.\,\zeta\, sin.\,\eta = \frac{P}{\sqrt{f}}$, $sin.\,\zeta\, sin.\,\eta = \frac{Q}{\sqrt{f}}$, partant $tang.\,\zeta = \frac{Q}{P}$ & $sin.\,\zeta = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$, d'où l'on tire . . . . . $sin.\,\eta = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{\sqrt{f}}$.

FIGURE VIII.

Par ce que nous venons de dire dans ce résumé, on voit clairement qu'on est en état d'assigner de cette manière pour un temps quelconque écoulé depuis l'époque fixée, l'espèce de courbe dans laquelle la Comète se meut pour lors, aussi bien que la situation du plan de cette orbite, par rapport au plan fixe $A \odot B$, ou à l'écliptique, qui étant une fois déterminées, conduiront facilement à la connoissance du vrai lieu de la Comète. Je me flatte donc d'avoir satisfait ici d'une manière assez succincte à tous les points de la question proposée. J'aurois pu appliquer cette méthode à quelque Comète en particulier ; mais comme l'Académie Royale a déclaré expressément qu'elle n'exige pas ces applications de la théorie à des cas spéciels, je finis ici mon Mémoire, en laissant aux Juges éclairés de cet illustre Corps, à décider jusqu'à quel point j'ai atteint le but qu'elle eut en vue en proposant cette matière importante,

F I N.



El.th Haussard

RECHERCHES
SUR
LA THÉORIE
DES PERTURBATIONS
QUE LES COMÈTES PEUVENT EPROUVER
PAR L'ACTION DES PLANÈTES.

CES Recherches ſont diviſées en quatre Sections, que je vais parcourir ſommairement.

Dans la première Section, je donne d'abord les équations générales du mouvement d'une Comète autour du Soleil, en ayant égard aux perturbations qu'elle peut éprouver par l'action d'une ou de pluſieurs Planètes, & en rapportant les lieux tant de la Comète que des Planètes à des coordonnées rectangles. Je ſimplifie enſuite ces équations en partageant chacune d'elles en deux, dont l'une appartienne à l'orbite non altérée, & dont l'autre renferme l'effet des perturbations; & je fais voir qu'en négligeant, à l'exemple des grands Géomètres qui ont déjà traité la Théorie des Comètes, les carrés & les produits des forces perturbatrices, on peut conſidérer à part l'action de chaque Planète, & prendre la ſomme des effets de leurs différentes actions pour l'effet total de leurs actions réunies. Enfin, je montre comment on peut ſatisfaire aux équations différentielles des perturbations, dans le cas où la Comète ſeroit à une diſtance du Soleil infiniment grande par rapport à la diſtance de la Planète au Soleil. D'où réſulte naturellement une transformation de ces mêmes équations, laquelle en facilite beaucoup l'intégration relativement à la partie ſupérieure de l'orbite de la Comète. Cette transformation tient lieu des méthodes ſyntétiques, propoſées juſqu'ici pour ſimplifier le calcul des perturbations dans les régions ſupérieures de l'orbite ; & elle a en même temps l'avantage de conſerver l'uniformité dans la marche du calcul.

La ſeconde Section eſt deſtinée uniquement à l'intégration des équations différentielles de l'orbite non altérée, & contient une ſolution complette du fameux problême que Newton a réſolu le premier, & une foule d'Auteurs après lui. Je me flatte que mon analyſe pourra paroître encore digne de l'attention des Géomètres par ſa ſimplicité, & par ſa généralité. Elle eſt d'ailleurs néceſſaire pour les calculs de la Section ſuivante, & fournit différentes formules qui ſont d'un grand uſage dans tout le cours de cet Ouvrage.

Dans la troiſième Section, je m'occupe de l'intégration des équations différentielles des perturbations. Je fais voir comment leurs intégrales ſe déduiſent naturellement de celles des équations de l'orbite non altérée, en y faiſant varier les conſtantes arbitraires qui repréſentent les élémens de l'orbite. Ce qui conduit directement à exprimer l'effet des perturbations par la variation des élémens de l'orbite conſidérée comme elliptique ; & ces variations ſe trouvent déterminées par des formules différentielles aſſez ſimples, dont chacune ne demande qu'une ſeule intégration. Je fais enſuite uſage des transformations propoſées dans la première Section pour les parties ſupérieures de l'orbite ; les formules différentielles dont il s'agit deviennent par-là compoſées d'une partie abſolument intégrable, & d'une partie non intégrable, mais qui eſt toujours d'autant plus petite que la Comète eſt plus éloignée du Soleil, en ſorte qu'elle devient inſenſible lorſque la Comète eſt à une très-grande diſtance du Soleil. Je termine cette Section par les formules générales qui expriment l'altération de la durée des révolutions anomaliſtiques & périodiques de la Comète.

La quatrième Section contient l'application des méthodes & des formules données dans les Sections précédentes aux perturbations des Comètes, & en particulier à celles de la Comète de 1532 & de 1661. Toute la difficulté de cette application conſiſte dans l'intégration des formules différentielles qui déterminent les variations des élémens de l'orbite. Après avoir mis ces formules ſous une forme plus ſimple & plus commode pour le calcul, je montre les obſtacles qui s'oppoſent à leur intégration générale, & qui obligent d'avoir recours aux quadratures des courbes mécaniques. Comme la méthode de ces quadratures eſt aſſez connue par les Ouvrages de Cotes & de Stirling, je n'entre là-deſſus dans aucun détail; mais je remarque qu'il y a des cas où l'uſage de cette méthode ceſſe d'être légitime, c'eſt lorſque la diſtance entre la Comète & la Planète perturbatrice eſt fort petite & approche de ſon *minimum*. Je donne pour ces ſortes de cas une méthode particulière qui réduit l'intégration aux logarithmes ou aux arcs de cercles, & ne peut jamais être ſujette à aucun inconvénient. Tout ce que nous venons de dire ne regarde que la partie inférieure de l'orbite de la Comète; car pour la partie ſupérieure de cette orbite, dans laquelle la diſtance de la Comète au Soleil ſera beaucoup plus grande que la diſtance de la Planète au Soleil, je fais voir que la partie des formules différentielles qui reſte à intégrer, ſe partage de nouveau en deux parties; l'une indépendante du lieu de la Planète, & qui eſt abſolument intégrable; l'autre qui contient les ſinus ou coſinus de l'angle du moyen mouvement de la Planète, & qui n'eſt intégrable par aucune méthode connue, mais dont je démontre que l'intégrale eſt néceſſairement beaucoup plus petite que celle de la première partie; en ſorte qu'on peut la négliger entièrement; & au cas qu'on voulût pouſſer l'exactitude plus loin, je donne un moyen d'approcher de plus en plus de la vraie valeur de cette intégrale. D'où il s'enſuit que dans les régions ſupérieures de l'orbite des Comètes, on peut déterminer leurs perturbations par des formules analytiques, qui ne demandent que des ſubſtitutions numériques pour donner les réſultats cherchés, comme dans le cas des Planètes. Je conſidère enfin la Comète des années 1532 & 1661, que les Aſtronomes attendent vers 1789 ou 1790, & je déduis des élémens de cette Comète toutes les données néceſſaires pour le calcul de ſes perturbations. Comme dans le programme de 1778, on n'exige pas que les Concurrens donnent les réſultats numériques de ce calcul, je m'abſtiens d'entrer dans aucun détail à cet égard; mais je me flatte qu'il n'y aura point de Calculateur tant ſoit peu intelligent qui ne ſoit en état d'appliquer à la Comète dont il s'agit, la théorie expoſée dans cet Ouvrage.

Tels ſont les principaux objets du travail que je ſoumets au jugement de l'Académie; j'en ſerai ſuffiſamment récompenſé, ſi cette illuſtre Compagnie daigne l'honorer de quelque attention.

SECTION PREMIERE.

Equations différentielles du mouvement d'une Comète autour du Soleil, en ayant égard aux perturbations qu'elle peut éprouver par l'action des Planètes.

(1). JE prends la masse du Soleil pour l'unité, & je nomme m la masse de la Comète, μ, μ', &c. les masses des Planètes perturbatrices. Il est clair que ces quantités m, μ, μ', &c. doivent être des fractions très-petites, puisqu'elles expriment les rapports des masses de la Comète & des Planètes à la masse du Soleil : en effet, on sait que Jupiter, la plus grosse de toutes les Planètes, a environ mille fois moins de masse que le Soleil; & quant aux masses des Comètes, quoiqu'elles soient inconnues, on ne peut guère les supposer plus grandes que celle de Jupiter, autrement il pourroit résulter de leur attraction des dérangemens sensibles dans les orbites des Planètes; ce que les observations n'ont pas encore fait connoître, & ce qu'on ne suppose pas d'ailleurs qui arrive dans le problème des Comètes, tel qu'on l'a envisagé jusqu'à présent.

Nous regarderons donc dans la suite, & nous traiterons les quantités m, μ, μ', &c. comme des quantités très-petites dont il sera permis de négliger les puissances & les produits de deux ou de plusieurs dimensions : cette supposition est conforme à ce que les Géomètres ont pratiqué jusqu'ici dans la théorie des Planètes principales, & dans celle des Comètes; & une plus grande exactitude ne seroit peut-être d'aucune utilité.

(2). Je rapporte les orbites que la Comète & les Planètes décrivent autour du Soleil à des coordonnées rectangles, prises du centre de cet astre, & paralleles à trois droites fixes, & perpendiculaires entre elles.

Et je nomme ces coordonnées x, y, z pour l'orbite de la Comète ; ξ, η, ζ pour l'orbite de la Planète μ ; ξ', η', ζ' pour l'orbite de la Planète μ', &c.

Je nomme de plus r la distance de la Comète au Soleil, ou le rayon recteur de son orbite ; ρ, le rayon recteur de l'orbite de la Planete μ ; ρ', le rayon recteur de l'orbite de la Planète μ', &c

Enfin je désigne par R, la distance de la Planète μ à la Comète ; par R', la distance de la Planète μ' à la Comète, &c.

Il est clair qu'on aura :

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\ \rho'=\sqrt{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2},\ \&c.$$

$$R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},\ R'=\sqrt{(x-\xi')^2+(y-\eta')^2+(z-\zeta')^2},\ \&c.$$

(3). Cela posé, si on décompose, suivant les directions des trois coordonnées rectangles x, y, z, toutes les forces qui agissent sur la Comète pour lui faire décrire son orbite autour du Soleil, savoir, les attractions $\frac{1}{r^2}$, $\frac{\mu}{R^2}$, $\frac{\mu'}{R'^2}$, &c. exercées par le Soleil & par les Planètes sur la Comète, & les attractions $\frac{m}{r^2}$, $\frac{\mu}{\rho^2}$, $\frac{\mu'}{\rho'^2}$, &c. exercées par la Comète & par les Planètes sur le Soleil, & qui doivent être transportées à la Comète en sens contraire ; & qu'on égale la somme de toutes les forces qui agissent suivant la ligne x, & qui tendent à diminuer cette ligne, à $-\frac{d^2x}{dt^2}$, la somme de toutes les forces qui agissent suivant y à $-\frac{d^2y}{dt^2}$, & la somme de toutes les forces qui agissent suivant z à $-\frac{d^2z}{dt^2}$, dt étant les élémens du temps supposés constans, on aura ces trois équations :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{(1+m)x}{r^3}+\mu\left(\frac{x-\xi}{R^3}+\frac{\xi}{\rho^3}\right)+\mu'\left(\frac{x-\xi'}{R^3}+\frac{\xi'}{\rho'^3}\right)+\&c.=0.$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{(1+m)y}{r^3}+\mu\left(\frac{y-\eta}{R^3}+\frac{\eta}{\rho^3}\right)+\mu'\left(\frac{y-\eta'}{R'^3}+\frac{\eta'}{\rho'^3}\right)+\&c.=0.$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{(1+m)z}{r^3}+\mu\left(\frac{z-\zeta}{R^3}+\frac{\zeta}{\rho^3}\right)+\mu'\left(\frac{z-\zeta'}{R'^3}+\frac{\zeta'}{\rho'^3}\right)+\&c.=0.$$

Lesquelles, d'après les principes connus de la Dinamique, serviront à déterminer le mouvement de la Comète par rapport au Soleil regardé comme immobile.

(4). On aura des équations semblables pour le mouvement de la Planète μ autour du Soleil, en tant qu'elle est dérangée par l'action de la Comète & des autres Planètes; pour cela, il n'y aura qu'à changer, dans les équations précédentes, les quantités m, x, y, z, r, appartenantes à l'orbite de la Comète, dans les quantités analogues μ, ξ, η, ζ, ρ, appartenantes à l'orbite de la Planète, *& vice versâ*, celles-ci en celles-là.

Mais il faut considérer que pour notre objet il n'est pas nécessaire de tenir compte des termes affectés des quantités très-petites m, μ, μ', &c. dans les équations de la Planète, parce que les quantités ξ, η, ζ dépendantes de ces équations ne se trouvent dans les équations de la Comète que dans des termes déjà affectés de la quantité très-petite μ.

On peut donc réduire les équations de la Planète μ aux deux premiers termes, savoir:

$$\frac{d^2 \xi}{d t^2} + \frac{(1+\mu)\xi}{\rho^3} = 0.$$

$$\frac{d^2 \eta}{d t^2} + \frac{(1+\mu)\eta}{\rho^3} = 0.$$

$$\frac{d^2 \zeta}{d t^2} + \frac{(1+\mu)\zeta}{\rho^3} = 0.$$

Et l'on réduira, par des raisons semblables, les équations du mouvement de la Planète μ' à celles-ci:

$$\frac{d^2 \xi'}{d t^2} + \frac{(1+\mu')\xi'}{\rho'^3} = 0.$$

$$\frac{d^2 \eta'}{d t^2} + \frac{(1+\mu')\eta'}{\rho'^3} = 0.$$

$$\frac{d^2 \zeta}{d t^2} + \frac{(1+\mu')\zeta'}{\rho'^3} = 0.$$

Et ainsi pour les autres Planètes perturbatrices.

Ces réductions sont fondées, comme l'on voit, sur la supposition que dans le calcul des perturbations des Comètes, on néglige les perturbations des Planètes perturbatrices. Si cette ſuppoſition n'eſt pas rigoureuſement exacte, elle eſt du moins permiſe dans la première approximation, à laquelle nous nous contenterons ici de borner nos recherches, à l'exemple des grands Géomètres qui ont traité avant nous le problême des Comètes.

(5). En conſidérant les expreſſions des quantités r, ρ, ρ', &c. R, R', &c. il eſt aiſé de voir qu'on peut mettre les équations précédentes ſous une forme plus ſimple, que voici :

Pour la Comète.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{(1+m)\,d.\frac{1}{r}}{dx} + \mu\,\frac{d.\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{R}\right)}{d\xi} + \mu'\,\frac{d.\left(\frac{1}{\rho'}-\frac{1}{R'}\right)}{d\xi'} + \text{\&c.}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{(1+m)\,d.\frac{1}{r}}{dy} + \mu\,\frac{d.\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{R}\right)}{d\eta} + \mu'\,\frac{d.\left(\frac{1}{\rho'}-\frac{1}{R'}\right)}{d\eta'} + \text{\&c.}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{(1+m)\,d.\frac{1}{\rho}}{dz} + \mu\,\frac{d.\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{R}\right)}{d\zeta} + \mu'\,\frac{d.\left(\frac{1}{\rho'}-\frac{1}{R'}\right)}{d\zeta'} + \text{\&c.}$$

Pour la Planète μ.

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{(1+\mu)\,d.\frac{1}{\rho}}{d\xi},\quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \frac{(1+\mu)\,d.\frac{1}{\rho}}{d\eta};\quad \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \frac{(1+\mu)\,d.\frac{1}{\rho}}{d\zeta}.$$

Pour la Planète μ'.

$$\frac{d^2 \xi'}{dt^2} = \frac{(1+\mu')\,d.\frac{1}{\rho'}}{d\xi'},\quad \frac{d^2 \eta'}{dt^2} = \frac{(1+\mu')\,d.\frac{1}{\rho'}}{d\eta'},\quad \frac{d^2 \zeta'}{dt^2} = \frac{(1+\mu')\,d.\frac{1}{\rho'}}{d\zeta'}.$$

Et ainſi des autres.

Dans ces formules, les expreſſions $\frac{d.\frac{1}{r}}{dx}$, $\frac{d.\frac{1}{r}}{dy}$, &c. dénotent, ſuivant la notation reçue parmi les Géomètres, les coëfficiens

coëfficiens de dx, dy, &c. dans la différentielle de $\frac{1}{r}$; & ainſi des autres expreſſions ſemblables.

(6). Si on ſuppoſe que dans le mouvement de la Comète on faſſe abſtraction des forces perturbatrices, il faudra rejeter dans les équations de la Comète les termes affectés de μ, μ', &c. : on aura ainſi,

Pour l'orbite non altérée de la Comète.

$$\frac{ddx}{dt^2}=\frac{(1+m)\,d.\frac{1}{r}}{dx},\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{(1+m)\,d.\frac{1}{r}}{dy},\quad \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{(1+m)\,d.\frac{1}{r}}{dz}.$$

Nous pouvons ſuppoſer que les quantités x, y, z ſe rapportent à l'orbite non altérée, & ſont par conſéquent déterminées par les équations précédentes : dans cette ſuppoſition, il eſt clair que les vraies valeurs des quantités x, y, z, dans l'orbite troublée, ne peuvent différer des précédentes que par des quantités très-petites de l'ordre de μ, μ', &c. qu'on peut déſigner, pour plus de ſimplicité, par la caractériſtique δ à la manière des différences ordinaires. Et la recherche des perturbations de la Comète ſe réduira à déterminer les valeurs des différences δx, δy, δz.

(7). Dorénavant donc les quantités x, y, z, r appartiendront toujours à l'orbite non altérée de la Comète, & devront par conſéquent ſe déterminer par les équations du §. précédent. Dans l'orbite troublée, ces quantités deviendront $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, $r+\delta r$, & devront être déterminées par les équations du §. 5, en mettant, dans ces équations, ces nouvelles quantités à la place des premières x, y, z, r. Or, comme les différences δx, δy, δz ſont très-petites de l'ordre μ, μ', &c. il ſuffira de conſerver dans cette ſubſtitution, les premières dimenſions de ces différences (par l'hyp. du §. 1.), dans les termes non affectés de μ, μ', &c.; & dans les termes affectés de ces quantités, on pourra négliger tout à fait les différences dont il s'agit.

Ainsi donc le terme $\frac{d^2 x}{d t^2}$ de la première équation du §. 5 deviendra $\frac{d^2 x}{d t^2} + \frac{d^2 \delta x}{d t^2}$, le terme $(1 + m)\frac{d. \frac{1}{r}}{d x}$ de la même équation deviendra

$$(1+m)\frac{d. \frac{1}{r}}{d x} + (1+m)\left(\frac{d.^2 \frac{1}{r}}{d x^2}\delta x + \frac{d^2. \frac{1}{r}}{d x d y}\delta y + \frac{d.^2 \frac{1}{r}}{d x d z}\delta z\right),$$

& les autres termes demeureront les mêmes.

On transformera de même la seconde & la troisième équation du mouvement de la Comete ; & effaçant ensuite les termes qui se détruisent en vertu des équations du §. 6, on aura ces trois-ci, qui serviront à déterminer les valeurs des quantités δx, δy, δz, dues aux perturbations de la Comète.

Pour les perturbations de la Comète.

$$\frac{d^2 \delta x}{d t^2} = (1 + m).\left(\frac{d.^2 \frac{1}{r}}{d x^2}\delta x + \frac{d.^2 \frac{1}{r}}{dx\, dy}\delta y + \frac{d.^2 \frac{1}{r}}{dx\, dz}\delta z\right)$$

$$+ \mu \frac{d.\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}\right)}{d \xi} + \mu' \frac{d.\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R'}\right)}{d \xi'} + \&c.$$

$$\frac{d^2 \delta y}{d t^2} = (1 + m).\left(\frac{d.^2 \frac{1}{r}}{dy\, dx}\delta x + \frac{d.^2 \frac{1}{r}}{d y^2}\delta y + \frac{d.^2 \frac{1}{r}}{dy\, dz}\delta z\right)$$

$$+ \mu \frac{d.\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}\right)}{d \eta} + \mu' \frac{d.\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{R'}\right)}{d \eta'} + \&c.$$

$$\frac{d^2 \delta z}{d t^2} = (1 + m).\left(\frac{d.^2 \frac{1}{r}}{dz\, dx}\delta x + \frac{d.^2 \frac{1}{r}}{dz\, dy}\delta y + \frac{d.^2 \frac{1}{r}}{d z^2}\delta z\right)$$

$$+ \mu \frac{d.\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}\right)}{d \zeta} + \mu' \frac{d.\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R'}\right)}{d \zeta'} + \&c.$$

C'est donc de l'intégration de ces équations que dépend la solution du problême des perturbations des Comètes. Nous allons nous en occuper, après avoir fait quelques remarques générales sur la nature de ces équations.

(8). J'observe d'abord que comme ces équations ne renferment que les premières dimensions des variables δx, δy, δz, on peut chercher à part les valeurs de ces variables pour les différens termes affectés des quantités μ, μ', &c., & qui viennent de l'action des différentes Planètes dont ces quantités sont les masses. Car il est visible que si on réunit ensuite ces différentes valeurs, on aura les valeurs complettes des variables δx, δy, δz, qui satisfont aux équations proposées.

En général, il est facile de concevoir que lorsqu'on néglige, ainsi que nous l'avons fait, les carrés & les produits des forces perturbatrices, l'effet total de ces forces doit être égal à la somme des effets que chacune en particulier produiroit si elle étoit seule.

(9). Je remarque ensuite que les termes multipliés par les masses μ, μ', &c. des Planètes perturbatrices, deviennent d'autant plus petites que les quantités x, y, z sont plus petites, c'est-à-dire, que la Comète est plus près du Soleil. En effet, en supposant x, y, z des quantités très-petites vis-à-vis de ξ, η, ζ, on a à très-peu près (§. 2.):

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} - \frac{d.\frac{1}{\rho}}{d\xi}x - \frac{d.\frac{1}{\rho}}{d\eta}y - \frac{d.\frac{1}{\rho}}{d\zeta}z;$$ d'où l'on voit que la quantité $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}$, ainsi que ses différences, divisées par $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, seront du même ordre de petitesse que les quantités x, y, z. Par conséquent, si on suppose que ces quantités soient devenues de l'ordre des quantités μ, μ', &c., il est clair que les termes dont il s'agit, seront pour lors de l'ordre de μ^2, $\mu\mu'$, &c.; de sorte qu'on pourra les négliger, d'autant plus que, dans ce cas, la quantité $\frac{1}{r}$ devient d'autant plus grande. Ces termes disparoissant, il est visible qu'on pourra satisfaire aux équations proposées par la supposition de

$\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$. Ainsi on peut regarder ces valeurs comme les limites des variables δx, δy, δz, du côté du Soleil.

(10). Voyons maintenant quelles sont les limites des mêmes variables du côté opposé.

Supposons donc les quantités x, y, z infiniment grandes vis-à-vis de ξ, η, ζ, on aura ici (§. 2) :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \frac{d.\frac{1}{r}}{dx}\xi - \frac{d.\frac{1}{r}}{dy}\eta - \frac{d.\frac{1}{r}}{dz}\zeta + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{2\,dx^2}\xi^2 + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{2\,dy^2}\eta^2 +$$

$$\frac{d.^2\frac{1}{r}}{2\,dz^2}\zeta^2 + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dx\,dy}\xi\,\eta + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dx\,dz}\xi\zeta + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dy\,dz}\eta\,\zeta +, \text{ \&c.}$$ J'ai poussé ici l'approximation jusqu'à la seconde dimension des quantités ξ, η, ζ, parce que la différentiation par $d\,\xi$, $d\,\eta$, $d\,\zeta$, fait disparoître une dimension de ces quantités.

On aura donc :

$$\frac{d.\frac{1}{R}}{d\xi} = -\frac{d.\frac{1}{r}}{dx} + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dx^2}\xi + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dx\,dy}\eta + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dx\,dz}\zeta.$$

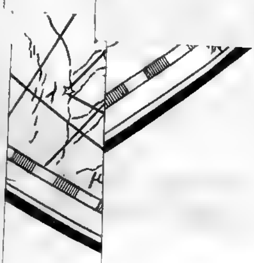
$$\frac{d.\frac{1}{R}}{d\eta} = -\frac{d.\frac{1}{r}}{dy} + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dx\,dy}\xi + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dy^2}\eta + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dy\,dz}\zeta.$$

$$\frac{d.\frac{1}{R}}{d\zeta} = -\frac{d.\frac{1}{r}}{dz} + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dx\,dz}\xi + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dy\,dz}\eta + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dz^2}\zeta.$$

Qu'on substitue ces valeurs dans les équations du §. 7, en n'ayant égard qu'aux termes affectés de μ, par la remarque ci-dessus §. 8, on aura les équations suivantes :

$$\frac{d^2\,\delta x}{dt^2} = (1+m)\left(\frac{d.^2\frac{1}{r}}{d\,x^2}\left(\delta x - \frac{\mu}{1+m}\xi\right) + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dx\,dy}\left(\delta y - \frac{\mu}{1+m}\eta\right)\right.$$

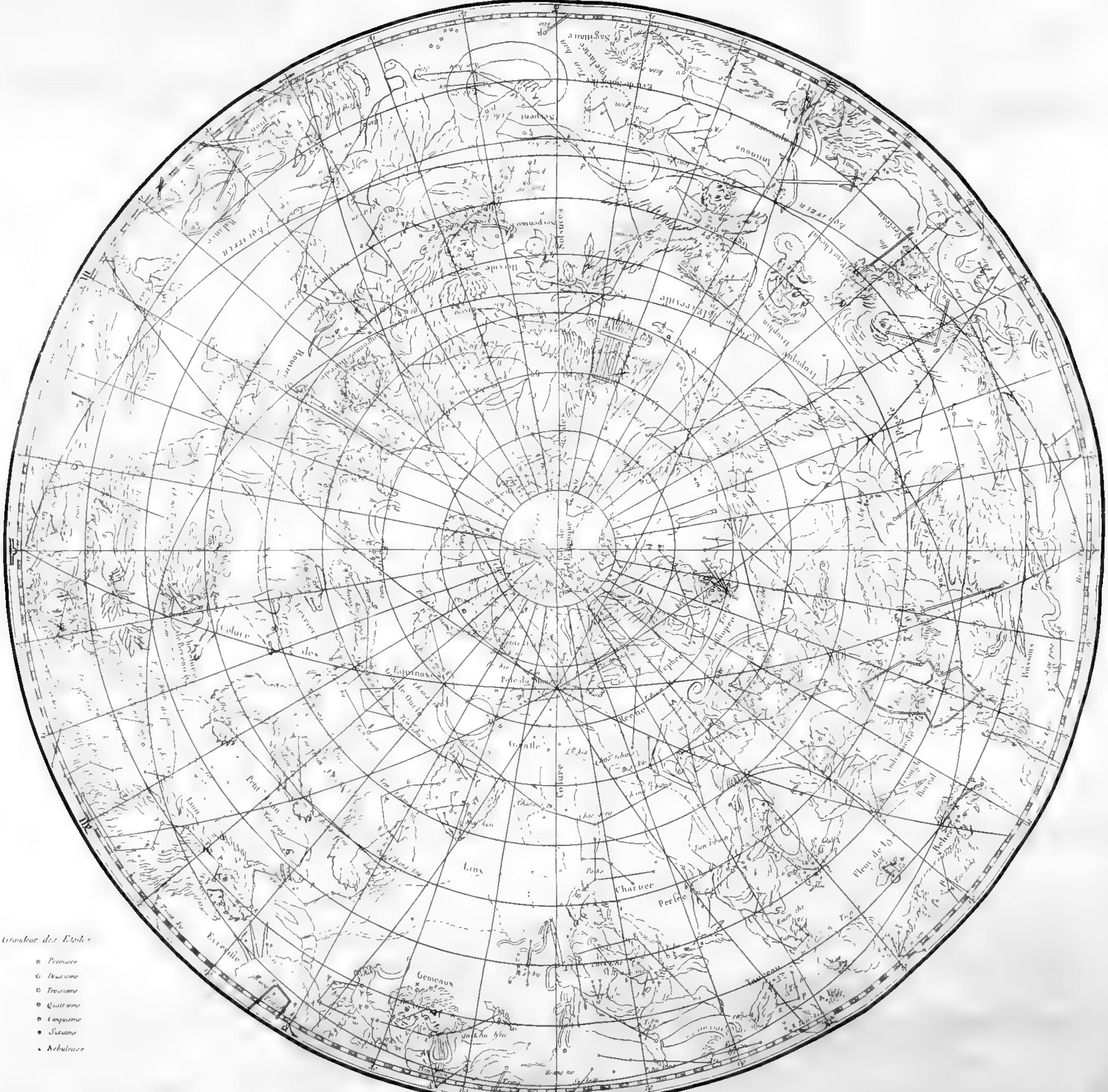
$$\left. + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dx\,dz}\left(\delta z - \frac{\mu}{1+m}\zeta\right)\right) + \mu\left(\frac{d.\frac{1}{\rho}}{d\xi} + \frac{d.\frac{1}{r}}{d\,x}\right),$$



PLANISPHERE CÉLESTE CHINOIS.

PARTIE SEPTENTRIONALE;

Par M.r De Guignes Fils.



Grandeur des Etoiles

- *Première*
- *Deuxième*
- *Troisième*
- *Quatrième*
- *Cinquième*
- *Sixième*
- *Nébuleuse*

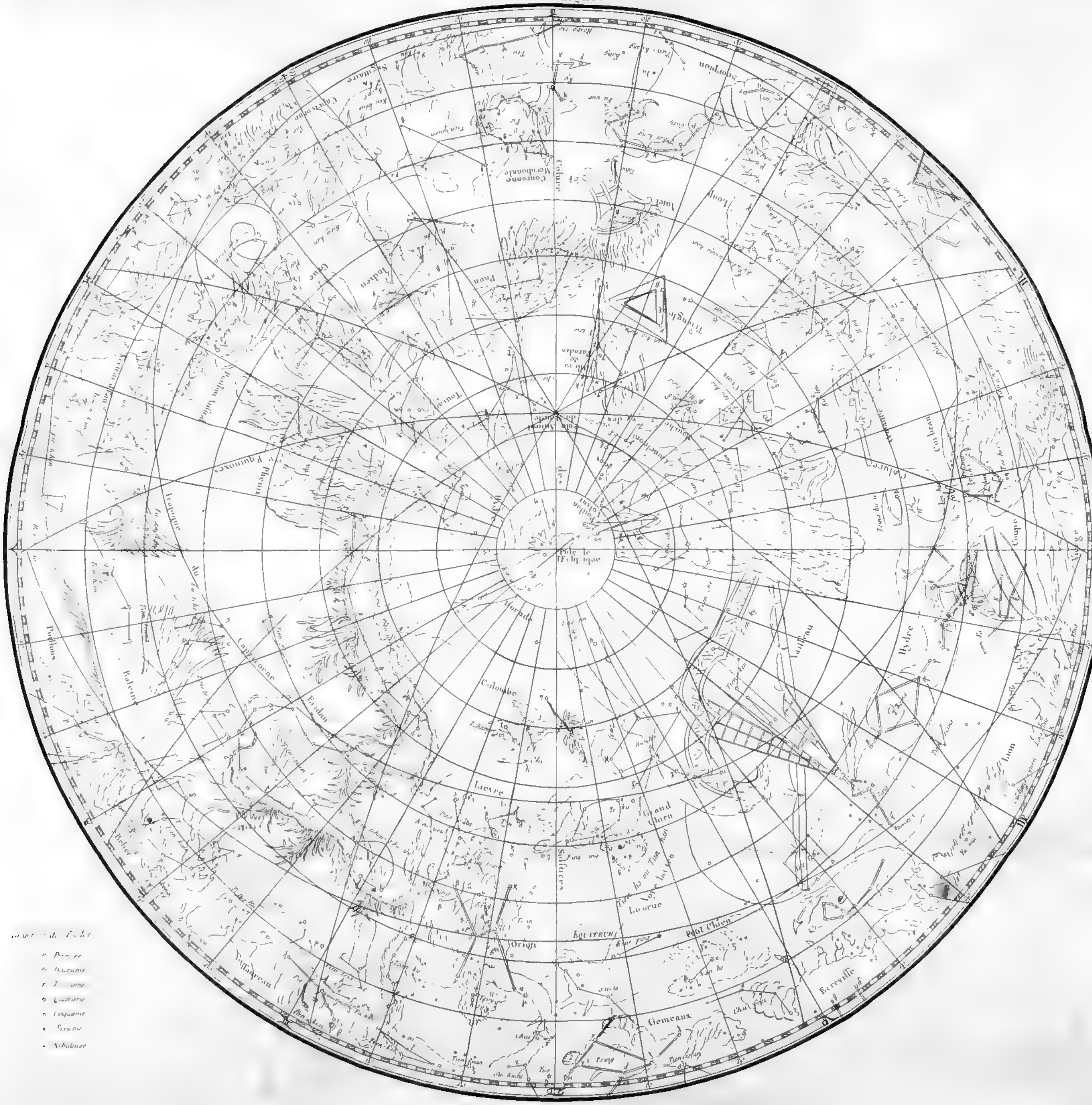
N.º 2.

PLANISPHERE CÉLESTE CHINOIS.

PARTIE MÉRIDIONALE;

Par Mr De Guignes Fils.

N° 2



$$\frac{d^2\,\delta y}{dt^2}=(1+m)\left(\frac{d.^2\frac{1}{r}}{dy\,dx}\left(\delta x-\frac{\mu}{1+m}\xi\right)+\frac{d.^2\frac{1}{r}}{dy^2}\left(\delta y-\frac{\mu}{1+m}\eta\right)\right.$$
$$\left.+\frac{d.^2\frac{1}{r}}{dy\,dz}\left(\delta z-\frac{\mu}{1+m}\zeta\right)\right)+\mu\left(\frac{d.\frac{1}{\rho}}{d\eta}+\frac{d.\frac{1}{r}}{dy}\right),$$

$$\frac{d^2\,\delta z}{dt^2}=(1+m)\left(\frac{d.^2\frac{1}{r}}{dz\,dx}\left(\delta x-\frac{\mu}{1+m}\xi\right)+\frac{d.^2\frac{1}{r}}{dz\,dy}\left(\delta y-\frac{\mu}{1+m}\eta\right)\right.$$
$$\left.+\frac{d.^2\frac{1}{r}}{dz^2}\left(\delta z-\frac{\mu}{1+m}\zeta\right)\right)+\mu\left(\frac{d.\frac{1}{\rho}}{d\zeta}+\frac{d.\frac{1}{r}}{dz}\right).$$

Or on a par les équations de la Planète μ (§. 5.):

$$\frac{d.\frac{1}{\rho}}{d\xi}=\frac{d^2\xi}{(1+\mu)\,dt^2},\quad \frac{d.\frac{1}{\rho}}{d\eta}=\frac{d^2\eta}{(1+\mu)\,dt^2},\quad \frac{d.\frac{1}{\rho}}{d\zeta}=\frac{d^2\zeta}{(1+\mu)\,dt^2};$$

faiſant ces ſubſtitutions dans les pénultièmes termes des équations précédentes, on verra incontinent que ſi les derniers termes $\mu\,\frac{d.\frac{1}{r}}{dx}$, $\mu\,\frac{d.\frac{1}{r}}{dy}$, $\mu\,\frac{d.\frac{1}{r}}{dz}$ n'exiſtoient pas, & que l'on eût $\mu=m$, on ſatisferoit exactement à ces équations, en faiſant $\delta x=\frac{\mu}{1+\mu}\xi$, $\delta y=\frac{\mu}{1+\mu}\eta$, $\delta z=\frac{\mu}{1+\mu}\zeta$.

Suppoſons donc $\delta x=\frac{\mu}{1+\mu}\xi+\alpha$, $\delta y=\frac{\mu}{1+\mu}\eta+\beta$, $\delta z=\frac{\mu}{1+\mu}\zeta+\gamma$; ſi on ſubſtitue ces valeurs, & qu'on rejette les termes, qui auroient pour coëfficient, $\frac{\mu}{1+\mu}-\frac{\mu}{1+m}=\frac{\mu\,(m-\mu)}{(1+\mu)\,(1+m)}$, d'après l'hypothèſe établie dans le §. 1, on aura ces nouvelles équations:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}=(1+m)\left(\frac{d.^2\frac{1}{r}}{dx^2}\alpha+\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx\,dy}\beta+\frac{d.^2\frac{1}{r}}{dx\,dz}\gamma\right)+\mu\,\frac{d.\frac{1}{r}}{dx},$$

$$\frac{d^2\beta}{dt^2}=(1+m)\left(\frac{d.^2\frac{1}{r}}{dy\,dx}\alpha+\frac{d.^2\frac{1}{r}}{dy^2}\beta+\frac{d.^2\frac{1}{r}}{dy\,dz}\gamma\right)+\mu\,\frac{d.\frac{1}{r}}{dy},$$

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2}=(1+m)\left(\frac{d.^2\frac{1}{r}}{dz\,dx}\alpha+\frac{d.^2\frac{1}{r}}{dz\,dy}\beta+\frac{d.^2\frac{1}{r}}{dz^2}\gamma\right)+\mu\,\frac{d.\frac{1}{r}}{dz}.$$

J'obſerve qu'on peut ſatisfaire à ces équations, en faiſant $\alpha = Kx$, $\beta = Ky$, $\gamma = Kz$, K étant un coëfficient conſtant. Car elles deviennent par là :

$$K\frac{d^2 x}{dt^2} = (1+m)\left(\frac{d.^2\frac{1}{r}}{a x^2}x + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dx\,ay}y + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dx\,az}z\right)K + \mu\frac{d.\frac{1}{r}}{dx},$$

$$K\frac{d^2 y}{dt^2} = (1+m)\left(\frac{d.^2\frac{1}{r}}{dy\,dx}x + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dy^2}y + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dy\,dz}z\right)K + \mu\frac{d.\frac{1}{r}}{dy},$$

$$K\frac{d^2 z}{dt^2} = (1+m)\left(\frac{d.^2\frac{1}{r}}{dz\,dx}x + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dz\,dy}y + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dz^2}z\right)K + \mu\frac{d.\frac{1}{r}}{dz}.$$

Mais les équations de l'orbite non altérée (§. 6.) donnent

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = (1+m)\frac{d.\frac{1}{r}}{dx},\quad \frac{d^2 y}{dt^2} = (1+m)\frac{d.\frac{1}{r}}{dy},$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = (1+m)\frac{d.^2\frac{1}{r}}{dz}.$$

Enſuite je remarque que la quantité $\frac{1}{r}$ eſt une fonction homogène de x, y, z de la dimenſion -1, qu'ainſi les quantités $\frac{d.\frac{1}{r}}{dx}$, $\frac{d.\frac{1}{r}}{dy}$, $\frac{d.\frac{1}{r}}{dz}$, ſont auſſi des fonctions homogènes de x, y, z, mais de la dimenſion $= 2$. Donc par le théorême connu, concernant ces ſortes de fonctions, on aura:

$$\frac{d.^2\frac{1}{r}}{dx^2}x + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dx\,dy}y + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dx\,az}z = -2\frac{d.\frac{1}{r}}{dx},$$

$$\frac{d.^2\frac{1}{r}}{dy\,dx}x + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dy^2}y + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dy\,dz}z = -2\frac{d.\frac{1}{r}}{dy},$$

$$\frac{d.^2\frac{1}{r}}{dz\,dx}x + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dz\,dy}y + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dz^2}z = -2\frac{d.\frac{1}{r}}{dz}.$$

C'eſt de quoi on peut d'ailleurs s'aſſurer par la différentiation actuelle. Ces substitutions faites, on verra d'abord que pour satisfaire aux trois équations dont il s'agit, il suffit de satisfaire à celle-ci $K(1+m) = -2(1+m)K + \mu$, laquelle donne $K = \frac{\mu}{3(1+m)}$.

Donc enfin on aura

$$\delta x = \frac{\mu}{1+\mu}\xi + \frac{\mu}{3(1+m)}x,$$

$$\delta y = \frac{\mu}{1+\mu}\eta + \frac{\mu}{3(1+m)}y,$$

$$\delta z = \frac{\mu}{1+\mu}\zeta + \frac{\mu}{3(1+m)}z.$$

Ce sont les limites cherchées dont les quantités δx, δy, δz s'approchent d'autant plus que la Comète s'éloigne davantage du Soleil.

(11). De-là il s'ensuit que si l'on suppose en général

$$\delta x = \mu\left(\frac{x}{3(1+m)} + \frac{\xi}{1+\mu}\right) + \delta x',$$

$$\delta y = \mu\left(\frac{y}{3(1+m)} + \frac{\eta}{1+\mu}\right) + \delta y',$$

$$\delta z = \mu\left(\frac{z}{3(1+m)} + \frac{\zeta}{1+\mu}\right) + \delta z';$$

qu'on substitue ces valeurs dans les équations du §. 7, & qu'on y fasse les réductions enseignées ci-dessus, on aura, en n'ayant égard qu'aux termes affectés de μ, & faisant pour abréger,

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{r} - \frac{1+m}{1+\mu}\left(\frac{d.\frac{1}{r}}{dx}\xi + \frac{d.\frac{1}{r}}{dy}\eta + \frac{d.\frac{1}{r}}{dz}\zeta\right),$$

on aura, dis-je, ces transformées :

$$\frac{d^2\delta x'}{dt^2} = (1+m)\left(\frac{d.^2\frac{1}{r}}{dx^2}\delta x' + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dx\,dy}\delta y' + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dx\,dz}\delta z'\right)$$

$$- \mu\frac{d.\left(\frac{1}{S} - \frac{1}{R}\right)}{dx},$$

$$\frac{d^2\,\delta y'}{dt^2} = (1+m)\left(\frac{d.^2\,\frac{1}{r}}{dy\,dx}\,\delta x' + \frac{d.^2\,\frac{1}{r}}{dy^2}\,\delta y' + \frac{d.^2\,\frac{1}{r}}{dy\,dz}\,\delta z'\right)$$

$$-\,\mu\,\frac{d.\left(\frac{1}{S}-\frac{1}{R}\right)}{dy},$$

$$\frac{d^2\,\delta z'}{dt^2} = (1+m)\left(\frac{d.^2\,\frac{1}{r}}{dz\,dx}\,\delta x' + \frac{d.^2\,\frac{1}{r}}{dz\,dy}\,\delta y' + \frac{d.^2\,\frac{1}{r}}{dz^2}\,\delta z'\right)$$

$$-\,\mu\,\frac{d.\left(\frac{1}{S}-\frac{1}{R}\right)}{dz},$$

Dans ces équations, j'ai mis à la place des quantités $\frac{d.\frac{1}{R}}{d\xi}$, $\frac{d.\frac{1}{R}}{d\eta}$, $\frac{d.\frac{1}{R}}{d\zeta}$, leurs équivalentes $-\frac{d.\frac{1}{R}}{dx}$, $-\frac{d.\frac{1}{R}}{dy}$, $-\frac{d.\frac{1}{R}}{dz}$, pour mettre plus d'uniformité dans les formules.

(12). On peut auſſi donner une forme ſemblable aux équations primitives du §. 7. En effet, ſi l'on fait

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\rho} - \left(\frac{d.\,\frac{1}{\rho}}{d\xi}\,x + \frac{d.\,\frac{1}{\rho}}{d\eta}\,y + \frac{d.\,\frac{1}{\rho}}{d\zeta}\,z\right),$$

& qu'on faſſe abſtraction des termes affectés de μ', on aura :

$$\frac{d^2\,\delta x}{dt^2} = (1+m)\left(\frac{d.^2\,\frac{1}{r}}{dx^2}\,\delta x + \frac{d.^2\,\frac{1}{r}}{dx\,dy}\,\delta y + \frac{d.^2\,\frac{1}{r}}{dx\,dz}\,\delta z\right)$$

$$-\,\mu\,\frac{d.\left(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{R}\right)}{dx},$$

$$\frac{d^2\,\delta y}{dt^2} = (1+m)\left(\frac{d.^2\,\frac{1}{r}}{dy\,dx}\,\delta x + \frac{d.^2\,\frac{1}{r}}{dy^2}\,\delta y + \frac{d.^2\,\frac{1}{r}}{dy\,dz}\,\delta z\right)$$

$$-\,\mu\,\frac{d.\left(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{R}\right)}{dy},$$

d^2

$$\frac{d^2\,\delta z}{dt^2} = (1+m)\left(\frac{d.^2\frac{1}{r}}{dz\,dx}\,\delta x + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dz\,dy}\,\delta y + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dz^2}\,\delta z\right)$$
$$-\ \mu\ \frac{d.\left(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{R}\right)}{dz}.$$

(13). On voit que la quantité $\frac{1}{\sigma}$ contient les deux premiers termes de la quantité $\frac{1}{R}$ développée en ſuite aſcendante par rapport aux puiſſances de x, y, z; comme la quantité $\frac{1}{S}$ contient les deux premiers termes de la même quantité $\frac{1}{R}$ développée en ſuite aſcendante par rapport aux puiſſances de ξ, η, ζ, en négligeant (ce qui eſt permis ici) la différence infiniment petite entre $\frac{1+m}{1+\mu}$ & l'unité. D'où réſultent naturellement les concluſions que nous avons trouvées plus haut (§. 10, 11.).

Il s'enſuit auſſi delà, que tant que $r < \rho$, il eſt plus ſimple de ſe ſervir des formules du §. 12; & qu'au contraire lorſque $r > \rho$, il eſt plus avantageux d'employer celles du §. 11; d'autant que dans celles-ci les termes affectés de μ, & qui ſont l'effet des forces perturbatrices, deviennent preſque nuls lorſque la Comète eſt à une grande diſtance du Soleil.

SECTION II.

Intégration des équations différentielles de l'orbite non alterée.

(14) AYANT décompoſé les équations générales du mouvement de la Comète en équations de l'orbite non troublée (§. 6), & en équations des perturbations (§. 7), nous allons nous occuper, dans cette Section, de l'intégration des premières. Nous pourrions à la vérité nous en diſpenſer, puiſqu'on ſait d'avance, par les théorèmes de Newton, que, ſans les forces perturbatrices, la Comète doit décrire autour du Soleil une ſection conique dont cet aſtre occupe le foyer, & que le temps doit être proportionnel à l'aire parcourue, diviſée par la racine carrée du paramètre. Mais comme nous avons beſoin de connoître les intégrales mêmes des équations dont il s'agit, il eſt beaucoup plus court, & en même temps plus direct de chercher ces intégrales par l'intégration effective, que de les déduire des propriétés des ſections coniques.

(15). Les équations qu'il s'agit d'intégrer, ſont celles-ci, en mettant pour $\frac{d.\frac{1}{r}}{dx}$, $\frac{d.\frac{1}{r}}{dy}$, $\frac{d.\frac{1}{r}}{dz}$ leurs valeurs $-\frac{x}{r^3}$, $-\frac{y}{r^3}$, $-\frac{z}{r^3}$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{(1+m)x}{r^3} = 0;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{(1+m)y}{r^3} = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{(1+m)z}{r^3} = 0.$$

On peut intégrer ces équations par différentes méthodes; celle dont je vais faire uſage m'a paru une des plus ſimples.

Je remarque d'abord qu'en ſuppoſant les deux premières équations, on peut ſatisfaire à la troiſième, en faiſant:

$$z = b\,x + c\,y. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (A),$$

b & c étant deux conſtantes arbitraires; & il eſt viſible que cette valeur de z eſt en même temps l'intégrale complette de la troiſième équation, puiſqu'elle renferme deux conſtantes arbitraires.

Je multiplie maintenant la première des trois équations différentielles propoſées par $2\,d\,x$, la ſeconde par $2\,d\,y$, la troiſième par $2\,d\,z$, enſuite je les ajoute enſemble, & j'integre; j'ai

$$\frac{d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2}{d\,t^2} - 2\,(1+m)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) = 0. \quad . \; . \; . \quad (B),$$

a étant une conſtante arbitraire.

Je multiplie enſuite les mêmes équations par x, y, z, & j'ajoute à leur ſomme l'équation précédente; j'ai, à cauſe de $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\frac{d.^2\,r^2}{2\,d\,t^2} - (1+m)\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{a}\right) = 0. \quad . \quad (C).$

Cette équation étant multipliée par $d.\,r^2$, & enſuite intégrée, donne celle-ci:

$$\left(\frac{d.\,r^2}{2\,d\,t}\right)^2 = 2\,(1+m)\left(r - \frac{r^2}{a} - h\right) = 0. \quad . \; . \quad (D),$$

h étant une nouvelle conſtante arbitraire. Or $\frac{d.^2\,r^2}{2} = r\,d^2\,r + d\,r^2$ & $\left(\frac{d.\,r^2}{2}\right)^2 = r^2\,d\,r^2$; donc ſi on diviſe l'équation (D) par r^2, & qu'on la retranche de l'équation (C), on aura, après avoir diviſé par r,

$$\frac{d^2\,r}{d\,t^2} + (1+m)\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\,h}{r^3}\right) = 0,$$

équation, qui, en faiſant $2\,h - r = p$, prend cette forme:

$$\frac{d^2\,p}{d\,t^2} + (1+m)\,\frac{p}{r^3} = 0,$$

qui eſt, comme l'on voit, ſemblable aux équations primitives.

C'eſt pourquoi on aura ſur le champ cette intégrale $p = f\,x + g\,y$, ou bien,

$$2\,h - r = f\,x + g\,y. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (E),$$

f & g étant deux nouvelles conſtantes arbitraires, en ſorte que l'intégrale eſt complette.

Les équations (A) & (E) offrent déjà, comme l'on voit, deux intégrales finies. On trouvera la troiſième au moyen de l'équation (D), laquelle ſe réduit à

$$\frac{r\,d\,r}{\sqrt{r-\frac{r^2}{a}-h}}=d\,t\sqrt{2(1+m)},$$

dont l'intégrale eſt

$$\text{arc. ſin.}\ \frac{2\sqrt{r-\frac{r^2}{a}-h}}{\sqrt{a-4h}}-\frac{2\sqrt{r-\frac{r^2}{a}-h}}{\sqrt{a}}$$

$$=2\,t\frac{\sqrt{2(1+m)}}{a^3}+i\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\text{F}),$$

i étant encore une conſtante arbitraire.

Cette équation détermine r en t, & les équations (A) & (E) combinées avec celle-ci $r^2=x^2+y^2+z^2$ ſervent à déterminer x, y, z en r; ainſi on aura x, y, z en t. Mais ces valeurs, pour être complettes, doivent renfermer ſix conſtantes, parce que les équations différentielles propoſées ſont chacune du ſecond ordre. Or l'équation (A) renferme deux conſtantes arbitraires b & c; l'équation (E) en renferme trois f, g & h, & l'équation (F) en renferme encore deux autres a & h. Il y en a donc en tout ſept, & par conſéquent une de plus qu'il ne faut.

En examinant la choſe de plus près, il eſt aiſé de s'appercevoir que cela vient de ce que la conſtante a a été introduite par l'intégration qui a donné l'équation (B), équation dont nous n'avons point tenu compte dans la ſuite du calcul comme d'une équation intégrale. Il eſt donc néceſſaire d'avoir égard à cette équation, & il en doit réſulter une équation de condition entre les conſtantes; en ſorte qu'il n'en reſtera plus que ſix d'arbitraires, comme le problême le demande.

(15). Commençons par déterminer x, y, z en r. Les équa-

tions (A) & (E) donnent, en retenant p à la place de $2h - r$, $x = \frac{gz - cp}{bg - cf}$, $y = \frac{fz - bp}{cf - bg}$, ſubſtituant ces valeurs dans $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, & ordonnant par rapport à z, on a :
$(\overline{cf - bg}^2 + f^2 + g^2)z^2 - 2(bf + cg)pz + (b^2 + c^2)p^2 - (cf - bg)^2 r^2 = 0$, d'où l'on tirera z, & enſuite x & y.

Si l'on fait pour plus de ſimplicité

$$q = \sqrt{\left((\overline{cf - bg}^2 + f^2 + g^2)r^2 - (1 + b^2 + c^2)p^2\right)};$$

on trouvera

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\left(f + c(cf - bg)\right)p - gq}{(cf - bg)^2 + f^2 + g^2} \\ y &= \frac{\left(g - b(cf - bg)\right)p + fq}{(cf - bg)^2 + f^2 + g^2} \\ z &= \frac{(bf + cg)p + (cf - bg)q}{(cf - bg)^2 + f^2 + g^2} \end{aligned}\right\} \ldots (G).$$

(16). Maintenant l'équation (B) donne, en chaſſant dt, par le moyen de l'équation (D),

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{r - \frac{r^2}{a}}{r - \frac{r^2}{a} - h}\, dr^2;$$

mais les équations précédentes donnent
$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{(1 + b^2 + c^2)\,dp^2 + dq^2}{(cf - bg)^2 + f^2 + g^2}$; il faut donc que ces deux expreſſions de $dx^2 + dy^2 + dz^2$ deviennent identiques après qu'on aura ſubſtitué dans la dernière les valeurs de p & q en r.

Ces ſubſtitutions faites, on verra que l'identité aura lieu en effet, en faiſant

$$\frac{4h}{a} = 1 - \frac{(cf - bg)^2 + f^2 + g^2}{1 + b^2 + c^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (H).$$

C'eſt l'équation de condition cherchée.

Si, dans l'expreſſion de q du §. précédent, on ſubſtitue la valeur de $(cf - bg)^2 + f^2 + g^2$ donnée par l'équation (G), que nous venons de trouver, & qu'on y mette de plus pour p ſa valeur $2h - r$, elle deviendra

$$q = 2\sqrt{h(1 + b^2 + c^2)} . \sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}.$$

(17). Pour pouvoir appliquer les formules précédentes au mouvement des Comètes, il faut connoître les valeurs des conſtantes que ces formules renferment.

Pour cet effet, je remarque d'abord que l'équation (A) eſt celle d'un plan, dont la poſition à l'égard du plan des coordonnées x & y, dépend des conſtantes b & c. Ce plan ſera donc celui de l'orbite de la Comète, & qui eſt déterminé par les obſervations.

Soit ω l'angle que l'interſection des deux plans, c'eſt-à-dire la ligne des nœuds de l'orbite ſur le plan des x & y, fait avec l'axe des x, & ψ l'inclinaiſon de l'orbite ſur ce dernier plan, il eſt facile de prouver qu'on aura $c = tang.\, \psi \; coſ.\, \omega$, $b = -\, tang.\, \psi \; ſin.\, \omega$.

L'équation (E) ſervira enſuite à déterminer la figure de l'orbite ; & il eſt aiſé de conclure de la forme même de cette équation, que l'orbite ne peut être qu'une ſection conique, ayant le foyer dans l'origine des coordonnées, en ſorte que r ſera le rayon recteur de l'orbite.

Les deux apſides ſeront donc aux points où $\frac{dr}{dt} = o$; or, dans ce cas, l'équation (D) donne $r - \frac{r^2}{a} - h = o$, équation dont les deux racines ſont $\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4ah}}{2}$.

La ſomme de ces deux racines ſera le grand axe, & leur différence, diviſée par la ſomme, ſera l'excentricité. Donc le grand axe de l'orbite ſera a, & l'excentricité ſera $\sqrt{1 - \frac{4h}{a}}$, que je déſignerai dans la ſuite par e.

Puis donc que $e = \sqrt{1 - \frac{4h}{a}}$, on aura $a\sqrt{1 - e^2} = \sqrt{4ha}$ égal au petit axe de l'orbite; par conséquent $4h$ sera le paramètre du grand axe.

Or on sait que le rayon recteur qui répond à 90° d'anomalie, c'est-à-dire, qui est perpendiculaire au grand axe, est égal au demi-paramètre. Donc on aura à 90° d'anomalie $r = 2h$, & l'équation (E) donnera $fx + gy = 0$; d'où l'on tire $\frac{y}{x} = -\frac{f}{g}$ égal par conséquent à la tangente de l'angle que fait avec l'axe des x, dans le plan des x & y, la projection du rayon recteur qui répond à 90° d'anomalie dans l'orbite.

Soit cet angle $= 90° + \varepsilon$, on aura donc $\frac{g}{f} = tang.\, \varepsilon$; donc faisant $l = \sqrt{f^2 + g^2}$, on aura $g = l\, sin.\, \varepsilon$, $f = l\, cos.\, \varepsilon$; ces valeurs étant substituées dans l'équation (H) du §. 16, ainsi que celles de b & c trouvées ci-dessus, & mettant e^2 à la place de $1 - \frac{4h}{a}$, elle deviendra $e^2 = l^2 \times \frac{1 + tang.\, \psi^2\, cos.\, (\omega - \varepsilon)^2}{1 + tang.\, \psi^2}$ $= l^2\left(1 - sin.\, \psi^2\, sin.\, (\omega - \varepsilon)^2\right)$; d'où l'on tire . . . . .
$l = \frac{e}{\sqrt{1 - sin.\, \psi^2\, sin.\, (\omega - \varepsilon)^2}}$; de sorte qu'on aura . . . . .

$$f = \frac{e\, cos.\, \varepsilon}{\sqrt{1 - sin.\, \psi^2\, sin.\, (\omega - \varepsilon)^2}},\quad g = \frac{e\, sin.\, \varepsilon}{\sqrt{1 - sin.\, \psi^2\, sin.\, (\omega - \varepsilon)^2}}.$$

(18). Si on fait coincider le plan de l'orbite avec celui de x & y, on aura $\psi = 0$, & l'angle ε sera évidemment celui que le grand axe de l'orbite fait avec l'axe des x. Donc, si on suppose de plus que ces deux axes coincident, on aura aussi $\varepsilon = 0$; de sorte que, dans cette hypothèse, $b = 0$, $c = 0$, $f = e$, $g = 0$, & les formules (G) du §. 15 donneront $x = \frac{p}{e}$, $y = \frac{q}{e}$, $z = 0$, savoir, $x = \frac{2h - r}{e}$ & $y = \frac{2\sqrt{h}}{e}.\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}$. Or il est visible que, dans ce cas, x & y deviennent les coordonnées de l'orbite dans le plan même de cette orbite; & comme ces coordonnées doivent être indépendantes de la position du plan de l'orbite, il s'ensuit que les valeurs précédentes de x & y exprimeront toujours l'une l'abside prise dans le grand axe depuis le foyer, & l'autre l'ordonnée rectangle dans le plan même de l'orbite, quelle que soit d'ailleurs la position de ce plan.

Donc, si on nomme φ l'angle du rayon recteur r avec le grand axe, on aura, dans la supposition précédente $x = r\ cos.\ \varphi$, $y = r\ sin.\ \varphi$; savoir, $r\ cos.\ \varphi = \frac{2h - r}{e}$, $r\ sin.\ \varphi = \frac{2\sqrt{h}}{e}$ $\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}$; d'ou l'on tire $r = \frac{2h}{1 + e\ cos.\ \varphi}$, $\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h} = \frac{e\sqrt{h}.\ sin.\ \varphi}{1 + e\ cos.\ \varphi}$; cette expression de r fait voir que φ est l'anomalie vraie de l'orbite, comptée de son périhélie.

On aura donc en général $p = e\ r\ cos.\ \varphi$, $q = \frac{e\ r\ sin.\ \varphi}{cos.\ \psi}$, & l'on pourra, par ces substitutions, dans les formules (F) & (G), avoir les valeurs de t, x, y, z exprimées par la seule anomalie φ.

(19). Dans le nœud on a $z = o$, donc (équat. G) $(bf + cg)p + (cf - bg)q = o$, savoir, en substituant les valeurs précédentes de p & q, $(bf + cg)\ cos.\ \varphi + (cf - bg)$ $\frac{sin.\ \varphi}{cos.\ \psi} = o$, où φ est l'anomalie qui répond au nœud.

Dénotons cette anomalie par α, on aura donc . . . $(bf + cg)\ cos.\ \alpha\ cos.\ \psi + (cf - bg)\ sin.\ \varphi = o$; d'où l'on tire $\frac{g}{f} = \frac{c\ sin.\ \alpha + b\ cos.\ \psi\ cos.\ \alpha}{b\ sin.\ \alpha - c\ cos.\ \psi\ cos.\ \alpha} =$ (en mettant pour b & c leurs valeurs, §. 13) $- \frac{-cos.\ \omega\ sin.\ \alpha + cos.\ \psi\ sin.\ \omega\ cos.\ \alpha}{sin.\ \omega\ sin.\ \alpha + cos.\ \psi\ cos.\ \omega\ cos.\ \alpha}$; mais on a trouvé plus haut (§. 13.) $\frac{g}{f} = tang.\ \varepsilon$; ainsi on aura l'équation . . $tang.\ \varepsilon = \frac{-cos.\ \omega\ sin.\ \alpha + cos.\ \psi\ sin.\ \omega\ cos.\ \alpha}{sin.\ \omega\ sin.\ \alpha + cos.\ \psi\ cos.\ \omega\ cos.\ \alpha}$; d'où il est aisé de tirer $sin.\ \varepsilon = \frac{-cos.\ \omega\ sin.\ \alpha + cos.\ \psi\ sin.\ \omega\ cos.\ \alpha}{\sqrt{1 - sin.\ \psi^2\ cos.\ \alpha^2}}$, $cos.\ \varepsilon = \frac{sin.\ \omega\ sin.\ \alpha + cos.\ \psi\ cos.\ \omega\ cos.\ \alpha}{\sqrt{1 - sin.\ \psi^2\ cos.\ \alpha^2}}$; & en substituant ces valeurs dans les expressions de f & g du §. 13, on trouvera . . . .

f

$f = e\left(\text{cof.}\,\omega\,\text{cof.}\,\alpha + \frac{\text{fin.}\,\omega\,\text{fin.}\,\alpha}{\text{cof.}\,\psi}\right)$, $g = e\left(\text{fin.}\,\omega\,\text{cof.}\,\alpha - \frac{\text{cof.}\,\omega\,\text{fin.}\,\alpha}{\text{cof.}\,\psi}\right)$; par-là, & par les valeurs de b & c, on aura $ef - bg = e\,\text{tang.}\,\psi\,\text{cof.}\,\alpha$, $bf + cg = -\frac{e\,\text{tang.}\,\psi\,\text{fin.}\,\alpha}{\text{cof.}\,\psi}$, $f + c(cf - bg) = \frac{e\,(\text{cof.}\,\omega\,\text{cof.}\,\alpha + \text{fin.}\,\omega\,\text{fin.}\,\alpha\,\text{cof.}\,\psi)}{\text{cof.}\,\psi^2}$, $g - b(cf - bg) = \frac{e\,(\text{fin.}\,\omega\,\text{cof.}\,\alpha - \text{cof.}\,\omega.\,\text{fin.}\,\alpha\,\text{cof.}\,\psi)}{\text{cof.}\,\psi^2}$, $(cf - bg)^2 + f^2 + g^2 = \frac{e^2}{\text{cof.}\,\psi^2}$; de forte qu'à caufe de $p = e\,r\,\text{cof.}\,\varphi$, $= q\,\frac{e\,r\,\text{fin.}\,\varphi}{\text{cof.}\,\psi}$, les formules (G) du §. 15 deviendront :

$$x = r\left(\text{cof.}\,\omega\,\text{cof.}\,(\varphi - \alpha) - \text{fin.}\,\omega\,\text{fin.}\,(\varphi - \alpha)\,\text{cof.}\,\psi\right).$$

$$y = r\left(\text{fin.}\,\omega\,\text{cof.}\,(\varphi - \alpha) + \text{cof.}\,\omega\,\text{fin.}\,(\varphi - \alpha)\,\text{cof.}\,\psi\right).$$

$$z = r\,\text{fin.}\,\psi\,\text{fin.}\,(\varphi - \alpha).$$

dans lefquelles $\varphi - \alpha$ eft ce qu'on nomme l'argument de latitude.

(20). Si on fait

$$\frac{2\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}}{\sqrt{a - 4h}} = \text{fin.}\,u.$$

$$2\,t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}} + i = \theta,$$

& qu'on fe fouvienne que $\sqrt{1 - \frac{4h}{a}} = e$ (§. 17.), il eft clair que l'équation (F) du §. 14 prendra cette forme très-fimple, $u - e\,\text{fin.}\,u = \theta$, dans laquelle u fera évidemment ce que l'on nomme, d'après Kepler, l'anomalie excentrique, mais comptée du périhélie, & où θ fera par conféquent l'anomalie moyenne.

Donc comme $\theta = i$ lorfque $t = o$, on voit que la conftante i n'eft autre chofe que l'époque de l'anomalie moyenne.

En appliquant les formules au mouvement de la Terre autour du Soleil, & prenant la diftance moyenne $\frac{a}{2}$ pour l'unité, on aura (en négligeant $m = \frac{1}{394355}$ vis-à-vis de 1)

$t+i=\theta$ égal à l'anomalie moyenne du Soleil; d'où il s'ensuit que t exprimé en angles, représentera proprement le mouvement moyen du Soleil pendant le temps écoulé, depuis l'époque d'où l'on part; & qu'ainsi en divisant la valeur de t par $360°$, ou bien si t est exprimé en nombres (la distance moyenne du Soleil étant l'unité) en divisant la valeur de t par le rapport de la circonférence au rayon, on aura le temps exprimé en années sidérales, puisque nous pouvons faire abstraction ici du mouvement de l'apogée du Soleil.

Or, puisque $1-\frac{4h}{a}-4\left(\frac{r}{a}-\frac{r^2}{a^2}-\frac{h}{a}\right)=\left(1-\frac{2r}{a}\right)^2$, il est clair qu'on aura $r-\frac{2r}{a}=e\ cof.\,u$; donc $r=\frac{a}{2}(1-e\,cof.\,u)$, & comme $p=2h-r$, & $q=2\sqrt{h(1+b^2+c^2)}\times\sqrt{r-\frac{r^2}{a}-h}$ (§. 14 & 16.), on aura à cause de $h=\frac{a(1-e^2)}{4}$,

$$p=\frac{ae}{2}(cof.\,u-e),$$

$$q=\frac{ae}{2}\sqrt{(1-e^2)(1+b^2+c^2)}\,fin.\,u.$$

De sorte qu'en substituant ces valeurs dans les formules (G), on aura aussi x, y, z exprimées en u.

Dans la parabole, le grand axe a devient infini, par conséquent l'angle u est infiniment petit. Dans les ellipses très-alongées, telles que sont les orbites des Comètes, la quantité a est seulement très-grande; donc l'angle u sera très-petit, du moins tant que r n'est pas fort grand.

Dans ce cas donc, on aura $u=fin.\,u+\frac{1}{6}fin.\,u^3+\frac{3}{40}fin.\,u^5+\frac{5}{112}fin.\,u^7+$ &c., & l'équation entre θ & u deviendra

$$\theta=(1-e)fin.\,u+\frac{1}{6}fin.\,u^3+\frac{3}{40}fin.\,u^5+\frac{5}{112}fin.\,u^7+\&c.$$

mais $1-e=\frac{1-e^2}{1+e}=\frac{4h}{a(1+e)}$; donc si on met pour θ sa valeur $2t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}}+i$, & qu'on fasse $i\sqrt{\frac{a^3}{8}}=j$,

$\text{fin. } u = \sqrt{\frac{w}{\frac{a}{2}}}$, on aura, après avoir tout multiplié par $\sqrt{\frac{a^3}{8}}$,

$$t\sqrt{1+m+j} = \frac{2h}{1+e}w + \frac{1}{6}w^3 + \frac{3}{10a}w^5 + \frac{5}{28a^2}w^7 + \&c.$$

où w sera une quantité finie, puisqu'on aura

$$w = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}}{\sqrt{1 - \frac{4h}{a}}} = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}}{e},$$

& substituant pour $\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}$ sa valeur en φ trouvée ci-dessus, il viendra $w = \frac{\sqrt{2h}.\text{fin. }\varphi}{1+e\,\text{cof. }\varphi}$. Pour la parabole, on fera $a = \infty$, & l'on aura $t\sqrt{1+m+j} = hw + \frac{w^3}{6}$, où (à cause de $e = 1$) $w = \sqrt{2(r-h)} = \sqrt{2h}.\,\text{tang. }\frac{\varphi}{2}$. Et h sera pour lors égal à la distance périhélie.

(21). Nous remarquerons encore que si, dans l'équation différentielle entre dr & dt du §. 14, on substitue pour dr & pour $\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}$ leurs valeurs en φ (§. 18.), on trouve $dt = \sqrt{\frac{1}{2h(1+m)}}\,r^2\,d\varphi$; & si on différencie l'équation qui donne la relation entre t & u (§. 20.), & qu'on y mette pour $1 - e\,\text{cof. }u$, $\frac{2r}{a}$, il vient $dt = \sqrt{\frac{a}{2(1+m)}}.\,r\,du$; dans la première formule, φ est l'anomalie vraie; & dans la seconde, u est l'anomalie excentrique.

SECTION III.

Intégration des équations différentielles des Perturbations.

(22). Nous avons vu, dans la première Section, que x, y, z étant les coordonnées de l'orbite non altérée, & $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, celles de l'orbite troublée par l'action d'une Planète μ, on a pour la détermination des quantités δx, δy, δz les équations suivantes.

$$\frac{d^2\, \delta x}{d t^2} = (1 + m)\left(\frac{d.^2 \frac{1}{r}}{dx^2}\delta x + \frac{d.^2 \frac{1}{r}}{dx\, dy}\delta y + \frac{d.^2 \frac{1}{r}}{dx\, dz}\delta z\right) - \mu X,$$

$$\frac{d^2\, \delta y}{d t^2} = (1 + m)\left(\frac{d.^2 \frac{1}{r}}{dy\, dx}\delta x + \frac{d.^2 \frac{1}{r}}{dy^2}\delta y + \frac{d.^2 \frac{1}{r}}{dy\, dz}\delta z\right) - \mu Y,$$

$$\frac{d^2\, \delta z}{d t^2} = (1 + m)\left(\frac{d.^2 \frac{1}{r}}{dz\, dx}\delta x + \frac{d.^2 \frac{1}{r}}{dz\, dy}\delta y + \frac{d.^2 \frac{1}{r}}{dz^2}\delta z\right) - \mu Z;$$

en faisant pour abréger (§. 12.)

$$X = \frac{d.\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{R}\right)}{dx}, Y = \frac{d.\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{R}\right)}{dy}, Z = \frac{d.\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{R}\right)}{dz}.$$

(23). C'est donc de l'intégration de ces équations que dépend la recherche des perturbations causées par l'action d'une Planète quelconque sur la Comète. Or cette intégration dépend, comme l'on sait, de celle du cas où il n'y auroit aucun terme tout connu, à cause que les variables inconnues δx, δy, δz ne paroissent que sous la forme linéaire. Ainsi toute la difficulté se réduit à intégrer des équations de la forme suivante.

$$\frac{d^2\,\delta x}{dt^2} = (1+m)\left(\frac{d.^2\frac{1}{r}}{dx^2}\,\delta x + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dx\,dy}\,\delta y + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dx\,dz}\,\delta z\right);$$

$$\frac{d^2\,\delta y}{dt^2} = (1+m)\left(\frac{d.^2\frac{1}{r}}{dy\,dx}\,\delta x + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dy^2}\,\delta y + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dy\,dz}\,\delta z\right);$$

$$\frac{d^2\,\delta z}{dt^2} = (1+m)\left(\frac{d.^2\frac{1}{r}}{dz\,dx}\,\delta x + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dz\,dy}\,\delta y + \frac{d.^2\frac{1}{r}}{dz^2}\,\delta z\right).$$

(24). Si on ſe rappelle les calculs du §. 7, on doit voir que les équations précédentes réſultent des équations de l'orbite non altérée, en y faiſant varier les quantités x, y, z, des différences δx, δy, δz regardées comme infiniment petites. Donc les intégrales des équations dont il s'agit doivent réſulter auſſi des intégrales des mêmes équations de l'orbite non altérée, en y faiſant varier non ſeulement ces mêmes quantités, mais encore les conſtantes arbitraires introduites par les différentes intégrations, & qui n'exiſtant point dans les équations différencielles, peuvent, à leur égard, être auſſi regardées comme variables.

Ainſi donc, pour avoir les intégrales des trois équations différencielles du §. précédent, il n'y aura qu'à différencier à l'ordinaire les intégrales de l'orbite non altérée, trouvées dans la ſeconde Section, en y regardant les trois indéterminées x, y, z, & les ſix arbitraires a, b, c, f, g, i, comme variables à la fois, & marquant leurs différences par la caractériſtique δ; (à l'égard de h, elle doit auſſi être traitée comme variable, parce que c'eſt une fonction de a, b, c, f, g donnée par l'équation H du §. 16.) les différences de ces arbitraires ſeront elles-mêmes les nouvelles conſtantes arbitraires que les intégrales cherchées doivent contenir pour être complettes.

(25). Comme les formules (G) du §. 15 donnent x, y, z en r, & que la formule (F) du §. 14 donne r en t, on pourra tirer directement de la différenciation des premières, les valeurs de δx, δy, δz en δr; enſuite on aura δr par la différenciation de la dernière; mais à la place de r, il ſera plus ſimple d'introduire l'angle u, au moyen des formules du §. 20; & pour donner à notre calcul toute la simplicité dont il est susceptible, nous remarquerons de plus que la position du plan des x & y, auquel nous avons jusqu'ici rapporté l'orbite de la Comète, étant arbitraire, on peut, sans nuire à la généralité du problème, supposer que ce plan coincide avec celui de l'orbite non altérée de la Comète; & l'on peut, par la même raison, supposer aussi que l'axe des x coincide avec le grand axe de la même orbite, en sorte que les abscisses x soient prises depuis le foyer, & soient positives en allant vers l'abside inférieure.

Ces deux suppositions donneront (§. 15 & 19.) $\psi = o$, $\alpha = \omega$; donc $b = o$, $c = o$ $f = e$, $g = o$, ce qui simplifiera beaucoup les expressions finies de x, y, z; mais comme les différences δb, δc, δg ne sont pas nulles, il ne faudra pas faire disparoitre entièrement les quantités b, c, g; mais il en faudra conserver les premières dimensions dans les expressions de x, y, z, afin de pouvoir en tirer par la différentiation les valeurs complettes de δx, δy, δz.

(26). De cette manière, on aura donc (§. 15, form. G) $x = \frac{fp - gq}{f^2}$, $y = \frac{gp + fq}{f^2}$, $z = \frac{bp + eq}{f^3}$, & par les formules du §. 20, on aura, à cause de $e = f$, $p = \frac{af}{2}(\text{cos}. u - f)$, $q = \frac{af}{2}\sqrt{1 - f^2}.\ \text{sin}. u$, de sorte qu'en substituant il viendra

$$x = \frac{a}{2}(\text{cos}. u - f) - \frac{ag}{2f}\sqrt{(1 - f^2)}\,\text{sin}. u,$$

$$y = \frac{a}{2}\sqrt{1 - f^2}\ \text{sin}. u + \frac{ag}{2f}(\text{cos}. u - f),$$

$$z = \frac{ab}{2}(\text{cos}. u - f) + \frac{ac}{2}\sqrt{1 - f^2}\ \text{sin}. u.$$

Différenciant donc suivant la caractéristique δ, en faisant tout varier, & supposant ensuite les constantes b, c, g nulles, on aura:

$$\delta x = \frac{cos.\,u - f}{2}\,\delta a - \frac{a}{a}\,\delta f - \frac{a\sqrt{1-f^2}}{2f}\,sin.\,u\,\delta g$$
$$- \frac{a}{2}\,sin.\,u\,\delta u.$$

$$\delta y = \frac{\sqrt{1-f^2}}{2}\,sin.\,u\,\delta a - \frac{af}{2\sqrt{1-f^2}}\,sin.\,u\,\delta f + \frac{a\,(cos.\,u - f)}{2f}\,\delta g$$
$$+ \frac{a\sqrt{1-f^2}}{2}\,cos.\,u\,\delta u.$$

$$\delta z = \frac{a\,(cos.\,u - f)}{2}\,\delta b + \frac{a\sqrt{1-f^2}}{2}\,sin.\,u\,\delta c.$$

Mais par le §. 20, on a, en mettant f à la place de e; $u - f\,sin. = \theta = 2t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}} + i$; donc faisant varier f, a, i & u, l'on en tirera la valeur de δu, laquelle sera

$$\delta u = \frac{-3t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}}.\,\delta a + sin.\,u\,\delta f + \delta i}{1 - f\,cos.\,u}.$$

Substituant donc cette valeur de δu dans les expressions précédentes de δx, δy, δz, on aura les valeurs cherchées, lesquelles seront évidemment de cette forme:

$$\delta x = A\,\delta a + B\,\delta f + C\,\delta g + O\,\delta i.$$
$$\delta y = E\,\delta a + F\,\delta f + G\,\delta g + H\,\delta i.$$
$$\delta z = K\,\delta b + L\,\delta c.$$

en supposant, pour abréger,

$$A = \frac{cos.\,u - f}{2} + \frac{3t}{2}\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}} \times \frac{sin.\,u}{1 - f\,cos.\,u},$$

$$B = -\frac{a}{2}\left(1 + \frac{sin.\,u^2}{1 - f\,cos.\,u}\right),$$

$$C = -\frac{a\sqrt{1-f^2}}{2f}\,sin.\,u,$$

$$D = -\frac{a}{2} \times \frac{sin.\,u}{1 - f\,cos.\,u},$$

$$E = \frac{\sqrt{1-f^2}}{2}\,sin.\,u - \frac{3t}{2}\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}} \times \frac{\sqrt{1-f^2}.\,cos.\,u}{1 - f\,cos.\,u},$$

$$F = -\frac{af}{2\sqrt{1-f^2}}\,sin.\,u + \frac{a\sqrt{1-f^2}}{2} \times \frac{sin.\,u\,cos.\,u}{1 - f\,cos.\,u},$$

$$G = \frac{a}{2f}\left(cos.u - f\right),$$
$$H = \frac{a\sqrt{1-f^2}}{2} \times \frac{cos.u}{1 - f\,cos.u},$$
$$K = \frac{a}{2}\left(cos.u - f\right),$$
$$L = \frac{a\sqrt{1-f^2}}{2}.\,sin.\,u.$$

Telles sont les valeurs complettes des quantités δx, δy, δz, en tant qu'elles résultent des trois équations différencielles du §. 23 ; & les quantités δa, δb, δc, δf, δg, δi sont les six constantes arbitraires que ces valeurs doivent contenir à raison des six intégrations qu'elles supposent.

(27). Voyons maintenant comment on doit déterminer ces nouvelles arbitraires ; il est clair qu'elles dépendent des valeurs des quantités δx, δy, δz, & de leurs différences premières, $\frac{d\delta x}{dt}$, $\frac{d\delta y}{dt}$, $\frac{d\delta z}{dt}$ pour un instant quelconque donné. Il faudra donc différencier les expressions de δx, δy, δz trouvées ci-dessus, en y regardant les arbitraires δa, δb, δc, δf, δg, δi comme constantes, c'est-à-dire, en y faisant varier seulement les quantités qui sont des fonctions du temps t pour avoir les valeurs de $\frac{d\delta x}{dt}$, $\frac{d\delta y}{dt}$, $\frac{d\delta z}{dt}$, lesquelles seront représentées en général par les formules suivantes :

$$\frac{d\delta x}{dt} = \frac{dA}{dt}\,\delta a + \frac{dB}{dt}\,\delta f + \frac{dC}{dt}\,\delta g + \frac{dD}{dt}\,\delta i,$$
$$\frac{d\delta y}{dt} = \frac{dE}{dt}\,\delta a + \frac{dF}{dt}\,\delta f + \frac{dG}{dt}\,\delta g + \frac{\delta H}{dt}\,\delta i,$$
$$\frac{d\delta z}{dt} = \frac{dK}{dt}\,\delta b + \frac{dL}{dt}\,\delta c.$$

Ces trois équations étant combinées avec les trois du §. précédent, on en tirera par la méthode ordinaire d'élimination les valeurs des six inconnues δa, δb, δc, δf, δg, δi ; & il est aisé de voir que ces valeurs seront de la forme suivante :

$$\delta a = A' \delta x + B' \delta y + C' \frac{d\delta x}{dt} + D' \frac{d\delta y}{dt},$$

$$\delta f = E' \delta x + F' \delta y + G' \frac{d\delta x}{dt} + H' \frac{d\delta y}{dt},$$

$$\delta g = A'' \delta x + B'' \delta y + C'' \frac{d\delta x}{dt} + D'' \frac{d\delta y}{dt},$$

$$\delta i = E'' \delta x + F'' \delta y + G'' \frac{d\delta x}{dt} + H'' \frac{d\delta y}{dt},$$

$$\delta b = K' \delta z + L' \frac{d\delta z}{dt},$$

$$\delta c = K'' \delta z + L'' \frac{d\delta z}{dt}.$$

les quantités A', B', C', &c. étant des fonctions rationelles de A, B, C, &c. & de $\frac{dA}{dt}$, $\frac{dB}{dt}$, &c.

(28). Quoique la détermination de ces quantités A', B', &c. ne soit pas difficile, elle pourroit néanmoins entraîner dans des calculs très-longs, si on l'entreprenoit par la méthode ordinaire; voici un moyen de la simplifier beaucoup.

Ce moyen consiste à chercher d'abord les valeurs des constantes a, b, c, f, g, i, en x, y, z, t, & en $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, à quoi on parviendra facilement par le moyen des formules du §. 14; ensuite à différencier ces valeurs relativement à la caractéristique δ, c'est-à-dire en faisant varier seulement les constantes dont il s'agit, & les indéterminées x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, & marquant les variations par δ; & comme les différentiations relatives aux deux caractéristiques différentes d & δ sont totalement indépendantes entr'elles, on voit aisément que $\delta\, d$ sera la même chose que $d\delta$, de sorte qu'on aura ainsi directement les valeurs de δa, δb, δc, &c. en δx, $\frac{d\delta x}{dt}$, δy, &c.

Nous allons donner ici les résultats de ce calcul, parce qu'ils nous seront utiles dans la suite.

(29). On voit d'abord (§. 14.) que l'équation (B) donnera la valeur de a, & que l'équation (D) donnera celle de h; ensuite l'équation finie (E), combinée avec sa différencielle, donnera les valeurs de f & g; & de même l'équation (A), combinée avec sa différencielle, donnera celle de b & c; enfin l'équation (F) donnera la valeur de i : on aura donc d'abord,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{r} - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2(1+m)dt^2},$$

$$h = r - \frac{r^2}{a} - \frac{(d.r^2)^2}{8(1+m)dt^2}$$; ensuite on trouvera :

$$f = \frac{(2h-r)dy + ydr}{xdy - ydx}, \quad g = \frac{(2h-r)dx + xdr}{ydx - xdy},$$

$$b = \frac{zdy - ydz}{xdy - ydx}, \quad c = \frac{zdx - xdz}{ydx - xdy}:$$

or si, dans la valeur de h, on substitue celle de $\frac{1}{a}$, & qu'on y mette $2(xdx + ydy + zdz)$ à la place de $d.r^2$, on a :

$$h = \frac{r^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (xdx + ydy + zdz)^2}{2(1+m)dt^2},$$

ce qui, à cause de $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, peut se réduire à cette forme :

$$h = \frac{(xdy - ydx)^2 + (zdy - ydz)^2 + (xdz - zdx)^2}{2(1+m)dt^2};$$

mais on vient de trouver $zdy - ydz = b(xdy - ydx)$, $xdz - zdx = c(xdy - ydy)$; donc faisant ces substitutions, extrayant la racine carrée, & supposant pour abréger $\frac{h}{1+b^2+c^2} = K^2$, on aura $K = \frac{xdy - ydx}{dt\sqrt{2(1+m)}}$, & les autres formules deviendront, étant multipliées par K,

$$Kf = \frac{(2h-r)dy + ydr}{dt\sqrt{2(1+m)}}, \quad Kg = -\frac{(2h-r)dx + xdr}{dt\sqrt{2(1+m)}},$$

$$Kb = \frac{zdy - ydz}{dt\sqrt{2(1+m)}}, \quad Kc = -\frac{zdx - xdz}{dt\sqrt{2(1+m)}}.$$

Enfin on aura (form. F), $i = -2t\frac{\sqrt{2(1+m)}}{a^3}$

$$+ \text{arc.fin.}\frac{2\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}}{\sqrt{a - 4h}} - \frac{2\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}}{\sqrt{a}}.$$

(30). En différenciant ces équations par rapport à la caractériſtique δ, & changeant par-tout δd en $d\delta$, on trouvera les formules ſuivantes :

$$\delta a = a^2 \left(\frac{\delta r}{r2} + \frac{dx\,d\delta x + dy\,d\delta y + dz\,d\delta z}{(1+m)\,dt^2}\right),$$

$$\delta K = \frac{dy\,\delta x - dx\,\delta y + x\,d\delta y - y\,d\delta x}{dt\sqrt{2(1+m)}},$$

$$\delta f = \frac{dy\,(2\delta h - \delta r) + dr\,\delta y + (2h - r)\,d\delta y + y\,d\delta r}{K\,dt\sqrt{2(1+m)}} - \frac{f\,\delta K}{K},$$

$$\delta g = -\frac{dx\,(2\delta h - \delta r) + dr\,\delta x + (2h - r)\,d\delta x + x\,d\delta r}{K\,dt\sqrt{2(1+m)}} - \frac{g\,\delta K}{K},$$

$$\delta b = \frac{dy\,\delta z - dz\,\delta y + z\,d\delta y - y\,d\delta z}{K\,dt\sqrt{2(1+m)}} - \frac{b\,\delta K}{K},$$

$$\delta c = -\frac{dx\,\delta z - dz\,\delta x + z\,d\delta x - x\,d\delta z}{K\,dt\sqrt{2(1+m)}} - \frac{c\,\delta K}{K},$$

$$\delta h = 2(1 + b^2 + c^2)\,K\,\delta K + 2K^2(b\,\delta b + c\,\delta c);$$

dans leſquelles il faudra ſubſtituer pour δr ſa valeur, $\frac{x\delta x + y\delta y + z\delta z}{r}$, & pour $d\delta r$, $\frac{x\,d\delta x + y\,d\delta y + z\,d\delta z}{r}$ $+ d.\frac{x}{r} \times \delta x + d.\frac{y}{r} \times \delta y + d.\frac{z}{r} \times \delta z$.

Quant à la valeur de δi, pour la trouver plus aiſément, on ſuppoſera $\frac{r}{a} = v$, $\frac{h}{a} = n$, & $\frac{2\sqrt{v - v^2 - n}}{\sqrt{1-4n}} = V$; ce qui réduira la valeur de i à cette forme $i = -2t\frac{\sqrt{2(1+m)}}{a^3}$ $+ arc\ sin.\, V - V\sqrt{1-4n}$; de ſorte qu'on aura en différenciant ſuivant δ, & faiſant tout varier, excepté t,

$$\delta i = 3t\frac{\sqrt{2(1+m)}}{a^5}\delta a + \frac{\delta V}{\sqrt{1-V^2}} - \sqrt{1-4n}.\,\delta V$$

$- V\delta.\sqrt{1-4n}$; or $\sqrt{1-V^2} = \frac{1-2v}{\sqrt{1-4n}}$; donc ſubſtituant cette valeur, ainſi que celles de V & de δV, & réduiſant il viendra

$$\delta i = 3t\frac{\sqrt{2(1+m)}}{a^5}\delta a + \frac{2v\,\delta v + \frac{2\delta n}{1-4n}(v-2n)}{\sqrt{v - v^2 - n}},$$

où il n'y aura plus qu'à remettre pour v & n leurs valeurs $\frac{r}{a}$,

$\frac{h}{a}$, & par conſéquent pour δv & δn les quantités $\frac{a\delta r - r\delta a}{a^2}$, $\frac{a\delta h - h\delta a}{a^2}$.

Après avoir trouvé cette expreſſion de δi, j'ai remarqué qu'elle avoit l'inconvénient de contenir au dénominateur la radicale $\sqrt{v - v^2 - n}$, ſavoir, $\frac{\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}}{\sqrt{a}}$, lequel, comme on l'a vu dans le §. 17, devient nul dans les deux abſides de l'orbite; de ſorte que comme δi ne ſauroit devenir infini, il faut néceſſairement que le numérateur ſoit alors pareillement nul; d'où il s'enſuit que la formule ſera en défaut dans ces deux points.

Pour éviter cet inconvénient, il faut tâcher de donner une autre forme à la valeur de δi, & qui ſoit telle qu'il n'y ait aucune fonction des variables au dénominateur; voici comment je ſuis parvenu à ce but.

Je conſidère que la quantité $\frac{\delta V}{\sqrt{1 - V^2}}$ eſt la même choſe que celle-ci, $\sqrt{1 - V^2}\,\delta V - V\,\delta.\sqrt{1 - V^2}$, & qu'ainſi on peut réduire la première expreſſion de δi à celle-ci.

$$\delta i = 3t\frac{\sqrt{2(1+m)}}{a^3}\delta a + \left(\sqrt{1 - V^2} - \sqrt{1 - 4n}\right)\delta V - V\,\delta.\left(\sqrt{1 - V^2} + \sqrt{1 - 4n}\right);$$

mais $V = \frac{2\sqrt{v - v^2 - n}}{\sqrt{1 - 4n}} = \frac{2\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}}{\sqrt{a}.\sqrt{1 - 4n}} =$ (par le §. 16, & à cauſe de $h = na$) $\frac{q}{a\sqrt{1 - 4n}.\sqrt{n(1 + b^2 + c^2)}}$; & $\sqrt{1 - V^2} = \frac{1 - 2v}{\sqrt{1 - 4n}}$, par conſéquent $\sqrt{1 - V^2} - \sqrt{1 - 4n} = \frac{4n - 2v}{\sqrt{1 - 4n}} = \frac{4h - 2r}{a\sqrt{1 - 4n}} = \frac{2p}{a\sqrt{1 - 4n}}$;

(§. 14.), & $\sqrt{1-V^2}+\sqrt{1-4n}=\frac{2p}{a\sqrt{1-4n}}+2\sqrt{1-4n}$; donc faisant ces substitutions dans l'équation précédente, & effaçant les termes qui viendront de la différentiation de la quantité $a\sqrt{1-4n}$, laquelle divise p & q, parce que ces termes se détruisent mutuellement, on aura

$$\delta i = 3t\frac{\sqrt{2(1+m)}}{a^5}.\delta a+\frac{2}{a^2(1+4n)}\left(p\,\delta.\frac{q}{\sqrt{n(1+b^2+c^2)}}\right.$$
$$\left.-\frac{q}{\sqrt{n(1+b^2+c^2)}}(\delta p-2a\delta n)\right).$$

Or les formules (G) du §. 15 donnent

$$p=fx+gy$$
$$q=\big(f+c(cf-bg)\big)y-\big(g-b(cf-bg)\big)x;$$

donc substituant ces valeurs, on aura pour δi une expression toute rationelle & entière, & qui ne sera par conséquent sujette à aucun inconvénient.

On remarquera encore à l'égard de δf, δg, δb, δc, qu'on peut aussi les exprimer d'une manière plus simple & plus commode à quelques égards, en les déduisant directement des équations (A) & (E) différenciées d'abord relativement à la caractéristique δ, & ensuite par rapport à la caractéristique ordinaire d; ce qui, dans le fond, revient au même que si on les différencie d'abord par rapport à cette dernière caractéristique, & ensuite par rapport à la première, ainsi que nous en avons usé plus haut.

De cette manière, l'équation (E) donnera ces deux-ci:

$$2\delta h-\delta r=x\delta f+y\delta g+f\delta x+g\delta y,$$
$$-d\delta r=dx\delta f+dy\delta g+fd\delta x+gd\delta y;$$

d'où l'on tire, en mettant pour $xdy-ydx$, sa valeur $Kdt\sqrt{2(1+m)}$,

$$\delta f=\frac{dy(2\delta h-\delta r)+yd\delta r-f(dy\delta x-yd\delta x)-g(dy\delta y-yd\delta y)}{Kdt\sqrt{2(1+m)}},$$

$$\delta g=-\frac{dx(2\delta h-\delta r)+xd\delta r-f(dx\delta x-xd\delta x)-g(dx\delta y-xd\delta y)}{Kdt\sqrt{2(1+m)}}.$$

De même l'équation (A) donnera ces deux ci :

$$\delta z = x\,\delta b + y\,\delta c + b\,\delta x + c\,\delta y;$$
$$d\,\delta z = dx\,\delta b + dy\,\delta c + b\,d\,\delta x + c\,d\,\delta y;$$

d'où l'on tire

$$\delta b = \frac{dy\,\delta z - y\,d\,\delta z - b\,(dy\,\delta x - y\,d\,\delta x) - c\,(dy\,\delta y - y\,d\,\delta y)}{K\,dt\sqrt{2(1+m)}},$$

$$\delta c = -\frac{dx\,\delta z - x\,d\,\delta z - b\,(dx\,\delta x - x\,d\,\delta x) - c\,(dx\,\delta y - x\,d\,\delta y)}{K\,dt\sqrt{2(1+m)}},$$

ce ſont les formules que nous emploierons dans la ſuite, par préférence aux autres trouvées ci-deſſus.

Enfin on obſervera que comme $n = \frac{h}{a}$, on aura par la formule (H) du §. 16, $4\,n = 1 - \frac{(cf - bg)^2 + f^2 + g^2}{1 + b^2 + c^2}$, de ſorte qu'en différenciant ſuivant δ, on aura la valeur de $\delta\,n$ exprimée à volonté par $\delta\,h$ & $\delta\,a$, ou par δf, $\delta\,g$, $\delta\,b$, $\delta\,c$.

(31). Les formules précédentes ont toute la généralité poſſible ; mais pour les appliquer à notre cas, il y faut ſuppoſer $b = 0$, $c = 0$, $g = 0$ (§. 25.), ce qui donne $z = 0$, $\frac{dz}{dt} = 0$ (équat. G), par conſéquent $d.\frac{x}{r} = -\frac{(x\,dy - y\,dx)\,y}{r^3}$, $d.\frac{y}{r} = \frac{(x\,dy - y\,dx)\,x}{r^3}$; donc $\delta\,r = \frac{x\,\delta x + y\,\delta y}{r}$, $d\,\delta\,r = \frac{x\,d\,\delta x + y\,d\,\delta y}{r} + \frac{(x\,\delta y - y\,\delta x)\,(x\,dy - y\,dx)}{r^3}$; de plus on aura $K = \sqrt{h}$ & $\delta\,K = \frac{\delta h}{2\sqrt{h}}$; donc faiſant ces différentes réductions dans les formules ci-deſſus, elles deviendront

$$\delta\,h = 2\,h.\,\frac{dy\,\delta x - dx\,\delta y + x\,d\,\delta y - y\,d\,\delta x}{dt\sqrt{2h(1+m)}}$$

$$\delta\,a = a^2\left(\frac{x\,\delta x + y\,\delta y}{r^3} + \frac{dx\,d\,\delta x + dy\,d\,\delta y}{(1+m)\,dt^2}\right)$$

$$\delta\,f = \frac{y}{r^3}(x\,\delta y - y\,\delta x) - \left(f + \frac{x}{r}\right)\frac{dy\,\delta x - y\,d\,\delta x}{dt\sqrt{2h(1+m)}}$$
$$- \frac{y}{r}.\frac{dy\,\delta y - y\,d\,\delta y}{dt\sqrt{2h(1+m)}} + \frac{2\,dy\,\delta h}{dt\sqrt{2h(1+m)}},$$

$$\delta g = -\frac{x}{r^3}(x\delta y - y\delta x) + \left(f+\frac{x}{r}\right)\frac{dx\delta x - x d\delta x}{dt\sqrt{2h(1+m)}}$$

$$+\frac{y}{r}\cdot\frac{dx\delta y - x d\delta y}{dt\sqrt{2h(1+m)}} - \frac{2dx\delta h}{dt\sqrt{2h(1+m)}},$$

$$\delta b = \frac{dy\delta z - y d\delta z}{dt\sqrt{2h(1+m)}},$$

$$\delta c = \frac{-dx\delta z + x d\delta z}{dt\sqrt{2h(1+m)}},$$

$$\delta i = 3t\frac{\sqrt{2(1+m)}}{a^5}\cdot\delta a + \frac{2(p\delta q - q\delta p)}{a^2(1-4n)\sqrt{n}}$$

$$-\frac{q(p-4an)\delta n}{a^2(1+4n)n^{\frac{3}{2}}};$$

mais, à cauſe de $b=o, c=o, g=o$, on aura $p=fx, q=fy$, $\delta p=f\delta x, +x\delta f+y\delta g$, $\delta q=f\delta y+y\delta f-x\delta g$; donc $p\delta q-q\delta p=f^2(x\delta y-y\delta x)+(x^2+y^2)f\delta g$; de plus $n=\frac{h}{a}=\frac{1-f^2}{4}$, & $\delta n=-\frac{f\delta f}{2}$; donc la dernière formule deviendra

$$\delta i = 3t\frac{\sqrt{2(1+m)}}{a^5}\cdot\delta a + \frac{2\left(x\delta y - y\delta x - \frac{r^2\delta g}{f}\right)}{\sqrt{a^3h}}$$

$$+\frac{y(fx-4h)\delta f}{2\sqrt{ah^3}}.$$

Et l'on remarquera qu'à cauſe de $n=\frac{h}{a}$ & de $\delta n=-\frac{f\delta f}{2}$, on aura encore cette équation entre δa, δh, & δf, ſavoir,

$$a\delta h - h\delta a + \frac{a^2 f\delta f}{2} = o,$$

laquelle pourra tenir lieu d'une quelconque des trois premières formules.

Telles ſont donc les valeurs des quantités δh, δa, δf, δg, δb, δc, δi en δx, δy, δz, $\frac{d\delta x}{dt}$, $\frac{d\delta y}{dt}$, $\frac{d\delta z}{dt}$; par conſéquent ſi on met dans ces formules les valeurs de x, y, dx, dy & dt en u & du, ſavoir, $x=\frac{a}{2}(coſ.u-f)$, y

$= \frac{a}{2} \sqrt{1 - f^2}\, cos.\, u\, d u$, $d t = \frac{\sqrt{a}}{2(1+m)} \cdot r\, d u$ (§. 21.) $= \frac{a}{2} \frac{\sqrt{a}}{2(1+m)} \cdot (1 - f\, cos.\, u)\, d u$, à cauſe de $e = f$, elles doivent devenir identiques avec celles du §. 27; de ſorte qu'on pourra trouver, par la comparaiſon des coëfficiens de δx, δy, δz, $d \delta x$, &c. dans les expreſſions de δa, δf, &c., les valeurs des quantités A', B', C', &c. des formules de ce §.; leſquelles valeurs ſeront néceſſairement les mêmes que ſi on les avoit déduites des formules du §. 26, au moyen de l'élimination.

(32). Revenons maintenant aux expreſſions de δx, δy, δz trouvées dans le §. que nous venons de citer : comme ces expreſſions ſatisfont aux équations différentielles du §. 23, les quantités δa, δb, δc, δf, δg, δi demeurant conſtantes & indéterminées, il s'enſuit que, par la ſubſtitution de ces valeurs de δx, δy, δz, dans les mêmes équations, tous les termes doivent ſe détruire d'eux-mêmes, indépendamment des quantités δa, δb, &c.; donc en général les termes qui renfermeront les quantités finies δa, δb, &c. ſe détruiront toujours dans les équations dont il s'agit, ſoit que ces quantités ſoient conſtantes ou non.

Donc ſi on ſuppoſe, ce qui eſt permis, que les mêmes expreſſions de δx, δy, δz ſatisfaſſent aux équations du §. 22, (leſquelles ne diffèrent, comme l'on voit, de celles du §. 23, que par les termes $- \mu X$, $- \mu Y$, $- \mu Z$ ajoutés à leurs ſeconds membres), mais en y regardant les ſix quantités δa, δb, δc, δf, δg, δi comme des variables indéterminées, & qu'on en faſſe la ſubſtitution, il eſt viſible que les termes qui renfermeront ces variables finies s'en iront auſſi, & que les équations réſultantes ſeront (§. 26.):

$$\frac{A\, d^2 \delta a + B\, d^2 \delta f + C\, d^2 \delta g + D\, d^2 \delta i}{d t^2}$$

$$+ 2\, \frac{d A\, d \delta a + d B\, d \delta f + d C\, d \delta g + d D\, d \delta i}{d t^2} = - \mu X,$$

E

$$\frac{E\,d^2\,\delta a + F\,d^2\,\delta f + G\,d^2\,\delta g + H\,d^2\,\delta i}{dt^2}$$

$$+ 2\,\frac{dE\,d\delta a + dF\,d\delta f + dG\,d\delta g + dH\,d\delta i}{dt^2} = -\mu Y;$$

$$\frac{K\,d^2\,\delta b + L\,d^2\,\delta c + 2\,(dK\,d\delta b + dL\,d\delta c)}{dt^2} = -\mu Z.$$

(33). Comme il y a ici six variables indéterminées, & qu'il n'y a que trois équations pour la détermination de ces variables, il est clair qu'on peut supposer à volonté trois autres équations entre ces mêmes variables, & il sera à propos de prendre ces équations en sorte que les différences secondes des variables δa, δb, &c. disparoissent d'elles-mêmes; c'est de quoi on viendra à bout en supposant

$$\frac{A\,d\delta a + B\,d\delta f + C\,d\delta g + D\,d\delta i}{dt} = 0,$$

$$\frac{E\,d\delta a + F\,d\delta f + G\,d\delta g + H\,d\delta i}{dt} = 0,$$

$$\frac{R\,d\delta b + L\,d\delta c}{dt} = 0;$$

car en retranchant respectivement des équations précédentes les différences de celles-ci, on aura

$$\frac{dA\,d\delta a + dB\,d\delta f + dC\,d\delta g + dD\,d\delta i}{dt} = -\mu X,$$

$$\frac{dE\,d\delta a + dF\,d\delta f + dG\,d\delta g + dH\,d\delta i}{dt} = -\mu Y,$$

$$\frac{dR\,d\delta b + dL\,d\delta c}{dt} = -\mu Z.$$

Ayant ainsi six équations entre les six quantités $\frac{d\delta a}{dt}$, $\frac{d\delta f}{dt}$, $\frac{d\delta g}{dt}$, $\frac{d\delta i}{dt}$, $\frac{d\delta b}{dt}$, $\frac{d\delta c}{dt}$, on déterminera, par l'élimination, la valeur de chacune de ces quantités; ensuite il n'y aura plus qu'à multiplier ces différentes valeurs par dt, & les intégrer; on aura de cette manière les valeurs des variables δa, δb, δc, δf, δg, δi qu'il faudra substituer dans les expressions de δx, δy, δz; & les équations du §. 22, qui expriment les perturbations de la Comète, seront résolues.

(34). Il est important de remarquer que si on différencie les expreſſions de δx, δy, δz, on aura, en vertu des équations ſuppoſées ci-deſſus,

$$d\,\delta x = d\mathrm{A}\,\delta a + d\mathrm{B}\,\delta f + d\mathrm{C}\,\delta g + d\mathrm{D}\,\delta i,$$
$$d\,\delta y = d\mathrm{E}\,\delta a + d\mathrm{F}\,\delta f + d\mathrm{G}\,\delta g + d\mathrm{H}\,\delta i,$$
$$d\,\delta z = d\mathrm{R}\,\delta b + d\mathrm{L}\,\delta c,$$

préciſément, comme ſi les quantités δa, δf, δg, δi, δb, δc étoient conſtantes, parce que les termes dépendans des variations de ces quantités ſont préciſément ceux qui forment les équations ſuppoſées. D'où il eſt facile de conclure que ſi les équations différentielles du §. 22 contenoient auſſi les différences premières de δx, δy, δz, elles s'intégreroient également par la méthode du §. précédent, & l'on parviendroit aux mêmes réſultats.

Il y a plus, & c'eſt ici le point eſſentiel, dans l'orbite non altérée on a pour coordonnées x, y, z, fonctions du temps t & des ſix conſtantes arbitraires a, f, g, i, b, c, leſquelles déterminent les ſix élémens de l'orbite, ſavoir, le grand axe, l'excentricité, la poſition de l'aphélie, l'époque du paſſage par l'aphélie, le lieu du nœud, & l'inclinaiſon (§. 17, 19, 20). Dans l'orbite troublée, les coordonnées ſont $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, les quantités δx, δy, δz n'étant autre choſe que les variations de x, y, z provenantes des variations δa, δf, δg, δi, δb, δc des ſix conſtantes a, f, g, i, b, c, comme on l'a vu ci-deſſus. Ainſi, dans l'orbite troublée, les coordonnées ſont exprimées de la même manière que dans l'orbite non troublée, c'eſt-à-dire qu'elles ſont les mêmes fonctions de t & de $a + \delta a$, $f + \delta f$, $g + \delta g$, $i + \delta i$, $b + \delta b$, $c + \delta c$, qu'elles le ſont de t, a, f, g, i, b, c dans l'orbite non troublée. Par conſéquent on peut à chaque inſtant regarder l'orbite troublée comme étant de la même forme que l'orbite non troublée, mais dont les élémens dépendent des quantités $a + \delta a$, $f + \delta f$, $g + \delta g$, $i + \delta i$, $b + \delta b$, $c + \delta c$, leſquelles étant variables, il s'enſuit que les élémens de l'orbite troublée ſeront variables auſſi, & que les quantités δa, δf, δg, δi, δb, δc ſerviront à déterminer leurs variations. Or comme nous venons de voir que les valeurs de ces quantités ſont telles que les différences premières de δx, δy, δz ſont les mêmes que ſi ces quantités étoient conſtantes, il eſt aiſé d'en conclure que les élémens de l'orbite troublée, quoiqu'eſſentiellement variables, peuvent néanmoins être regardés & traités comme conſtans pendant un inſtant ; & qu'ainſi non ſeulement le lieu de la Comète dans l'orbite troublée, mais encore ſon mouvement inſtantané, c'eſt-à-dire ſa vîteſſe & ſa direction, ſeront dans chaque inſtant les mêmes que l'on trouveroit en les déterminant à l'ordinaire dans une orbite fixe dont les élémens ſeroient ceux qui répondent à ce même inſtant.

(35). La difficulté eſt donc réduite à déterminer les valeurs des quantités δa, δf, δg, δi, δb, δc au moyen des ſix équations du §. 33.

Or, en examinant ces équations, & en les comparant avec les formules qui donnent les valeurs de δx, δy, δz, & de leurs différences $\frac{d\delta x}{dt}$, $\frac{d\delta y}{dt}$, $\frac{d\delta z}{dt}$ (§. 26, 27.), il eſt aiſé de voir qu'elles ſont ſemblables, & qu'elles peuvent ſe déduire de ces mêmes formules en y changeant ſeulement les quantités δa, δf, δg, &c. en leurs différences $\frac{d\delta a}{dt}$, $\frac{d\delta f}{dt}$, $\frac{d\delta g}{dt}$, &c. & en y ſuppoſant en même temps $\delta x = o$, $\delta y = o$, $\delta z = o$, $\frac{d\delta x}{dt} = -\mu X$, $\frac{d\delta y}{dt} = -\mu Y$, $\frac{d\delta z}{dt} = -\mu Z$. Donc, en faiſant ces mêmes ſuppoſitions dans les expreſſions de δa, δf, δg, &c. en δx, $\frac{d\delta x}{dt}$, δy, &c. on aura les valeurs des différences $\frac{d\delta a}{dt}$, $\frac{d\delta f}{dt}$, &c. ; ainſi on aura (§. 23.) :

$$\frac{d\delta a}{dt} = -\mu(C'X + D'Y), \quad \frac{d\delta f}{dt} = -\mu(G'X + H'Y);$$

$$\frac{d\delta g}{dt} = -\mu(C''X + D''Y), \quad \frac{d\delta i}{dt} = -\mu(G''X + H''Y);$$

$$\frac{d\delta b}{dt} = -\mu LZ, \quad \frac{d\delta c}{dt} = -\mu L''Z.$$

(36). En général, il eſt viſible que les équations du §. 33 ne ſont autre choſe que les différencielles de celles qui donnent les valeurs de $d\,x$, $\frac{d\,\delta x}{dt}$, δy, &c. en δa, δf, δg, &c., en y faiſant varier ſeulement ces dernières quantités, ainſi que les différences premières $\frac{d\,\delta x}{d\,t}$, $\frac{d\,\delta y}{d\,t}$, $\frac{d\,\delta z}{d\,t}$, & mettant à la place des différences ſecondes $\frac{d^2\,\delta x}{d\,t^2}$, $\frac{d^2\,\delta y}{d\,t^2}$, $\frac{d^2\,\delta z}{d\,t^2}$, les quantités $-\mu\,X$, $-\mu\,Y$, $-\mu\,Z$; de ſorte qu'en faiſant les mêmes opérations ſur les équations qui donnent directement les valeurs de δa, δf, &c. en δx, $\frac{d\,\delta x}{d\,t}$, δy, &c., on aura ſur le champ les valeurs cherchées de $\frac{d\,\delta a}{dt}$, $\frac{d\,\delta f}{dt}$, $\frac{d\,\delta g}{dt}$, &c. C'eſt ce qu'on peut auſſi démontrer *à priori*, par le raiſonnement ſuivant.

Soit en général $\Delta = \Phi$ une quelconque des équations dont il s'agit, Δ étant une des ſix conſtantes arbitraires δa, δf, δg, δi, δb, δc, & Φ la fonction de t & de δx, δy, δz, $\frac{d\,\delta x}{dt}$, $\frac{d\,\delta y}{dt}$, $\frac{d\,\delta z}{dt}$ qui lui eſt égale, il eſt clair que cette équation conſidérée en elle-même n'eſt autre choſe qu'une intégrale première, ou du premier ordre des équations du §. 23, dans laquelle Δ eſt la conſtante arbitraire, introduite par l'intégration; donc en différenciant on aura cette équation du ſecond ordre $d\,\Phi = 0$, laquelle ne contenant plus de conſtantes arbitraires devra être identique, c'eſt-à-dire avoir lieu en même temps que les équations du §. cité; de ſorte que la différentielle $d\,\Phi$ devra être telle que ſi on y ſubſtitue à la place des différences ſecondes $\frac{d^2\,\delta x}{d\,t^2}$, $\frac{d^2\,\delta y}{d\,t^2}$, $\frac{d^2\,\delta z}{d\,t^2}$ leurs valeurs données par ces mêmes équations, tous ſes termes ſe détruiſent d'eux-mêmes; c'eſt auſſi de quoi on pourra ſe convaincre *à poſteriori* par le calcul.

Or, comme les équations du §. 22 ne diffèrent de celles du §. 23, que parce que les valeurs de $\frac{d^2\,\delta x}{d\,t^2}$, $\frac{d^2\,\delta y}{d\,t^2}$, $\frac{d^2\,\delta z}{d\,t^2}$ ont les termes $-\mu\,X$, $-\mu\,Y$, $-\mu\,Z$ de plus; il s'enſuit que ſi, au lieu de ſubſtituer dans l'expreſſion de $d\,\Phi$ les valeurs de

$\frac{d^2 \delta x}{d t^2}$, $\frac{d^2 \delta y}{d t^2}$, $\frac{d^2 \delta z}{d t^2}$ déduites des équations du §. 23, on y subſtituoit les valeurs de ces mêmes quantités, déduites des équations du §. 22, on auroit néceſſairement le même réſultat que ſi on y ſubſtituoit ſimplement $-\mu X$, $-\mu Y$, $-\mu Z$ à la place de $\frac{d^2 \delta x}{d t^2}$, $\frac{d^2 \delta y}{d t^2}$, $\frac{d^2 \delta z}{d t^2}$, & qu'on y effaçât en même temps tous les autres termes : ſoit $d\Delta$ ce que devient alors la valeur de $d\Phi$ (Δ étant ici regardée comme variable), on aura donc pour les équations du §. 22, $d\Phi = d\Delta$ & de là $\Phi = \Delta$, comme pour celles du §. 23, mais avec cette différence que Δ ne ſera plus ici conſtante, mais une fonction donnée de t; & cette équation $\Phi = \Delta$ ſera par conſéquent auſſi une intégrale première des équations du §. 22.

D'où il eſt aiſé de conclure en général que pour trouver les intégrales de ces dernières équations qui ſont proprement celles qui déterminent les perturbations de la Comète, il n'y aura qu'à différencier chacune des formules $\Delta = \Phi$ trouvées plus haut (§. 30, 31.), en n'y faiſant varier que la conſtante Δ & les différences premières $\frac{d\delta x}{dt}$, $\frac{d\delta y}{dt}$, $\frac{d\delta z}{dt}$, & y ſubſtituer enſuite à la place de $\frac{d^2 \delta x}{d t^2}$, $\frac{d^2 \delta y}{d t^2}$, $\frac{d^2 \delta z}{d t^2}$ les quantités $-\mu X$, $-\mu Y$, $-\mu Z$; on aura par ce moyen la valeur de $d\Delta$, dont l'intégrale ſera celle de Δ.

Ayant déterminé ainſi les valeurs des différentes quantités Δ qui étoient auparavant conſtantes, & qui ſont devenues maintenant des fonctions de t, on aura des intégrales premières de la même forme qu'auparavant; par conſéquent les intégrales ſecondes ou finies qui réſulteront de celles-là par l'élimination des différences premières $\frac{d\delta x}{dt}$, $\frac{d\delta y}{dt}$, $\frac{d\delta z}{dt}$, ſeront encore de la même forme; d'où il s'enſuit que tant ces différences que les variables finies δx, δy, δz ſeront auſſi de la même forme, c'eſt-à-dire les mêmes fonctions de t & des différentes quantités Δ, que dans le cas où ces quantités ſeroient conſtantes.

Et il eſt facile de ſe convaincre qu'il n'eſt pas néceſſaire, pour l'exactitude de cette méthode, que les différentes conſtantes Δ ſoient dégagées tout-à-fait des variables dans les intégrales premières des équations du §. 23, ainſi que nous l'avons ſuppoſé; il ſuffit de les imaginer dégagées, ce qui eſt toujours poſſible, & de les traiter comme toutes variables à la fois dans la différentiation des mêmes équations intégrales : on éliminera enſuite ſucceſſivement les différentielles de ces différentes quantités Δ, pour avoir la valeur de chacune de ces différentielles.

Voilà, comme l'on voit, un moyen auſſi ſimple que direct pour déduire les intégrales des équations du §. 22, de celles des équations plus ſimples du §. 23; & en général pour intégrer toutes ſortes d'équations linéaires, en ſuppoſant qu'on ſache déjà intégrer ces mêmes équations dans le cas où elles ne contiendroient aucun terme tout connu.

(37). Qu'on différencie donc, d'après la méthode précédente, les formules du §. 31, en y faiſant varier ſeulement les quantités δh, δa, δf, δg, δi, δb, δc, ainſi que les trois différences premières $\frac{d\delta x}{dt}$, $\frac{d\delta y}{dt}$, $\frac{d\delta z}{dt}$, & qu'on y mette enſuite à la place des différences ſecondes $\frac{d^2\delta x}{dt^2}$, $\frac{d^2\delta y}{dt^2}$, $\frac{d^2\delta z}{dt^2}$, les quantités $-\mu X$, $-\mu Y$, $-\mu Z$, c'eſt-à-dire $-\mu X\,dt$, $-\mu Y\,dt$, $-\mu Z\,dt$, à la place de $d.\frac{d\delta x}{dt}$, $d.\frac{d\delta y}{dt}$, $d.\frac{d\delta z}{dt}$, on aura les équations ſuivantes :

$$d\delta h = -\mu\frac{\sqrt{2h}}{1+m}.(xY-yX)\,dt,$$

$$d\delta a = -\frac{\mu}{1+m}a^2(X\,dx+Y\,dy),$$

$$d\delta f = -\frac{\mu y\,dt}{\sqrt{2h(1+m)}}\left(\left(f+\frac{x}{r}\right)X+\frac{y}{r}Y\right)+\frac{2\,dy\,d\delta h}{dt\sqrt{2h(1+m)}},$$

$$d\delta g = \frac{\mu x\,dt}{\sqrt{2h(1+m)}}\left(\left(f+\frac{x}{r}\right)X+\frac{y}{r}Y\right)-\frac{2\,dx\,d\delta h}{dt\sqrt{2h(1+m)}},$$

$$d\delta b = \frac{\mu y}{\sqrt{2h(1+m)}}.Z\,dt,$$

$$d\delta c = -\frac{\mu x}{\sqrt{2h(1+m)}}.Z\,dt.$$

$$d\,\delta\,i = 3\,t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^5}}.\,d\,\delta\,a - \frac{2\,r^2\,d\,\delta\,g}{f\sqrt{a^3 h}} + \frac{y\,(f x - 4 h)\,d\,\delta\,f}{2\sqrt{a\,h^3}}.$$

Et l'équation entre $\delta\,a$, $\delta\,h$, $\delta\,f$, étant différenciée auſſi, donnera :

$$a\,d\,\delta\,h - h\,d\,\delta\,a + \frac{a^2\,f\,d\,\delta\,f}{2} = o,$$

qui ſervira à déterminer, ſi l'on veut, $d\,\delta\,f$, en connoiſſant $d\,\delta\,h$, & $d\,\delta\,a$.

Or je remarque qu'on a cette combinaiſon $x\,d\,\delta\,f + y\,d\,\delta\,g = 2\,\frac{x\,d\,y - y\,d\,x}{d\,t\sqrt{2\,h\,(1+m)}}\,d\,\delta\,h = 2\,d\,\delta\,h$; de ſorte qu'on aura $d\,\delta\,g = \frac{2\,d\,\delta\,h - x\,d\,\delta\,f}{y}$; ainſi, comme $d\,\delta\,f = \frac{2\,(h\,d\,\delta\,a - a\,d\,\delta\,h)}{a^2\,f}$, on aura $d\,\delta\,g = \frac{2}{a\,f\,y}\left((a\,f + x)\,d\,\delta\,h - x\,h\,\frac{d\,\delta\,a}{a}\right)$; valeurs que l'on pourra employer à la place des précédentes.

Telles ſont les formules par l'intégration deſquelles il faudra déterminer les valeurs des quantités $\delta\,h$, $\delta\,a$, $\delta\,b$, $\delta\,c$, $\delta\,f$, $\delta\,g$, $\delta\,i$; & il eſt viſible que ces intégrations ne demandent que de ſimples quadratures, puiſque les quantités x, y & X, Y, Z ſont cenſées données en t d'après les mouvemens ſuppoſés connus de la Comète dans l'orbite non altérée, & de la Planète perturbatrice dans ſon orbite.

(38). Connoiſſant ces différentes quantités, on aura les élémens de l'orbite troublée, au moyen deſquels on pourra calculer par les méthodes ordinaires, tant le lieu que la vîteſſe & la direction de la Comète dans un inſtant quelconque, ainſi que nous l'avons démontré plus haut (§. 34).

Pour cet effet, on ſe reſſouviendra que a eſt le grand axe de l'orbite non altérée, $4\,h$ le paramètre du grand axe, & $e = \sqrt{1 - \frac{4\,h}{a}}$ l'excentricité (§. 17.).

Ainſi $a + \delta\,a$ ſera le grand axe de l'orbite troublée, $4\,h + 4\,\delta\,h$ le paramètre de cette orbite, & $e + \delta\,e = e + 2\,\frac{h\,\delta\,a - a\,\delta\,h}{e\,a^2}$ ſon excentricité.

Enſuite en différenciant, ſuivant δ, les valeurs de b & de c de ce même §. 17, & faiſant, ſuivant l'hypothèſe du §. 25, $\psi = 0$, on aura :

$$\delta b = -\sin.\, \omega\, \delta \psi,\ \delta c = \cos.\, \omega\, \delta \psi;$$

ainſi $\delta \psi$ ſera l'inclinaiſon du plan de l'orbite troublée ſur le plan de l'orbite non troublée, & ω ſera l'angle que la ligne des nœuds de ces deux plans fait avec l'axe des x, lequel eſt en même temps le grand axe de l'orbite non altérée (§. 25); de ſorte que ω ſera proprement la longitude du nœud aſcendant de l'orbite troublée, comptée ſur le plan de l'orbite non troublée depuis le périhélie de cette dernière orbite.

En différenciant de même les valeurs de f & de g du §. 17, & faiſant, d'après le §. 25, $\psi = 0$ & $\varepsilon = 0$, on aura :

$$\delta f = \delta e,\ \delta g = e\, \delta \varepsilon;$$

& il eſt clair, par les dénominations du §. 13, que $90^\circ + \delta \varepsilon$ ſera la longitude du point de l'orbite troublée qui eſt à 90° du périhélie, comptée ſur le plan de l'orbite non troublée, depuis le périhélie de celle-ci ; mais à cauſe que ces deux orbites ne font entre elles qu'un très-petit angle $\delta \psi$, & que nous négligeons ici les $\delta \psi^2$, il eſt très-facile de prouver que $\delta \varepsilon$ ſera la longitude même du périhélie de l'orbite troublée, la projection d'un arc de 90° ne pouvant différer de 90° que par des quantités de l'ordre de $\delta \psi^2$. Ainſi le petit angle $\delta \varepsilon$ exprimera proprement le mouvement du périhélie en longitude, en vertu des perturbations.

Enfin, on ſe rappellera que i eſt l'époque de l'anomalie moyenne dans l'orbite non troublée, c'eſt-à-dire la valeur de cette anomalie, lorſque $t = 0$ (§. 20); donc $i + \delta i$ ſera auſſi l'époque de la même anomalie dans l'orbite troublée; en ſorte qu'ajoutant à cette époque le mouvement moyen pendant le temps t dans une orbite dont le grand axe ſeroit $a + \delta a$, on aura l'anomalie moyenne qui ſervira à déterminer le lieu de la Comète dans l'orbite troublée.

Ainſi

Ainsi $\theta = 2\,t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}} + i$ étant (§. cité) l'anomalie moyenne dans l'orbite non troublée, on aura $\theta + \delta\,\theta$ pour l'anomalie moyenne dans l'orbite troublée, & l'on trouvera la valeur de $\delta\,\theta$ par la différenciation de l'équation précédente, en y faisant varier a & i seulement, en sorte qu'on aura

$$\delta\,\theta = -\,3\,t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a}}.\ \delta\,a + \delta\,i.$$

Comme $\delta\,a$ & $\delta\,i$ sont ici des quantités variables, si on différencie à l'ordinaire cette valeur de $\delta\,\theta$, on aura $d\,\delta\,\theta$ $= -\,3\,d\,t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^5}}.\ \delta\,a - 3\,t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^5}}\,d\,\delta\,a + d\,\delta\,i$; & substituant pour $d\,\delta\,i$ sa valeur trouvée dans le §. précédent, on aura

$$d\,\delta\,\theta = -\,3\,d\,t\sqrt{\frac{2(1+m)}{2^5}}.\ \delta\,a - \frac{2\,r^2\,d\,\delta\,g}{f\sqrt{a^3\,h}} + \frac{y\,(xf - 4h)\,d\,\delta\,f}{2\sqrt{a\,h^3}},$$

dont l'intégrale donnera directement la valeur de $\delta\,\theta$, qui est l'altération de l'anomalie moyenne causée par les perturbations.

(39). Nous avons donné dans la première Section (§. 10, 11) une manière de transformer les équations générales des perturbations, en sorte que les forces perturbatrices deviennent très-petites lorsque la Comète est à une grande distance du Soleil : comme cette transformation est d'une grande utilité pour le calcul des perturbations dans la partie supérieure de l'orbite, il faut voir maintenant comment elle peut s'appliquer aussi aux formules que nous venons de trouver.

La transformation dont il s'agit consiste en ce que si l'on fait

$$\delta\,x = \mu\left(\frac{x}{3(1+m)} + \frac{\xi}{1+\mu}\right) + \delta\,x',$$

$$\delta\,y = \mu\left(\frac{y}{3(1+m)} + \frac{\eta}{1+\mu}\right) + \delta\,y',$$

$$\delta\,z = \mu\left(\frac{z}{3(1+m)} + \frac{\zeta}{1+\mu}\right) + \delta\,z';$$

& de plus,

$$X' = \frac{d\left(\frac{1}{S} - \frac{1}{R}\right)}{dx}, \quad Y' = \frac{d.\left(\frac{1}{S} - \frac{1}{R}\right)}{dy}, \quad Z' = \frac{d.\left(\frac{1}{S} - \frac{1}{R}\right)}{dz},$$

on aura entre $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, & X', Y', Z', les mêmes équations qu'entre δx, δy, δz, & X, Y, Z, c'est-à-dire des équations de la même forme que celles du §. 22, en y marquant seulement les quantités δx, δy, δz, X, Y, Z, chacune d'un trait.

On peut donc appliquer à ces équations les mêmes raisonnemens & les mêmes opérations que nous venons de faire dans cette Section sur les équations du §. 22, & en tirer des conclusions semblables. Ainsi, si on dénote par $\delta a'$, $\delta b'$, $\delta c'$, $\delta f'$, $\delta g'$, $\delta h'$, $\delta i'$, des quantités analogues aux quantités δa, δb, δc, &c. on aura des formules semblables à celles des §. 31 & 37 ci-dessus, en y marquant d'un trait les quantités δa, δb, δc, δf, δg, δh, δi, δx, δy, δz, X, Y, Z. Par les premières, on aura les valeurs de $\delta a'$, $\delta b'$, &c. en $\delta x'$, $\frac{d\delta x'}{dt}$, $\delta y'$, &c. & par les autres, les valeurs de $d\delta a'$, $d\delta b'$, &c. en X', Y', Z'.

Supposons maintenant qu'on substitue dans les formules du §. 31, les valeurs précédentes de δx, δy, δz, il est aisé de voir (à cause que ces quantités n'entrent dans les mêmes formules que sous une forme linéaire) que les valeurs des quantités δh, δa, δf, &c. deviendront

$$\begin{aligned}
\delta h &= \mu H + \delta h', \\
\delta a &= \mu A + \delta a', \\
\delta f &= \mu F + \delta f', \\
\delta g &= \mu G + \delta g', \\
\delta b &= \mu B + \delta b', \\
\delta c &= \mu C + \delta c', \\
\delta i &= \mu I + \delta i',
\end{aligned}$$

en dénotant par μH, μA, μF, &c. les valeurs de δh, δa, δf, &c. provenantes de la simple substitution de

$\mu\left(\frac{x}{3(1+m)}+\frac{\xi}{1+\mu}\right)$ à la place de δx, de $\mu\left(\frac{y}{3(1+m)}+\frac{\eta}{1+m}\right)$ à la place de δy, & de $\mu\left(\frac{z}{3(1+m)}+\frac{\zeta}{1+\mu}\right)$ à la place de δz.

De sorte qu'en faisant $z=o$, $\frac{dz}{dt}=o$, & mettant à la place de $x\,dy-y\,dx$ sa valeur $dt\sqrt{2h(1+m)}$ (§. 29, 31.), on aura

$$H=\frac{4h}{3(1+m)}+\frac{2h}{1+\mu}\times\frac{\xi\,dy-\eta\,dx+x\,d\eta-y\,d\xi}{dt\sqrt{2h(1+m)}};$$

$$A=\frac{a^2}{3(1+m)}\left(\frac{1}{r}+\frac{dx^2+dy^2}{(1+m)\,dt^2}\right)$$
$$+\frac{a^2}{1+\mu}\left(\frac{x\xi+y\eta}{r^3}+\frac{dx\,d\xi+dy\,d\eta}{(1+m)\,dt^2}\right),$$

$$F=-\frac{f+\frac{x}{r}}{3(1+m)}+\frac{\frac{y}{r^3}(x\eta-y\xi)}{1+\mu}$$
$$-\frac{\left(f+\frac{x}{r}\right)(\xi\,dy-y\,d\xi)+\frac{y}{r}(\eta\,dy-y\,d\eta)}{(1+\mu)\,dt\sqrt{2h(1+m)}}+\frac{2H\,dy}{dt\sqrt{2h(1+m)}},$$

$$G=-\frac{\frac{y}{r}}{3(1+m)}-\frac{\frac{x}{r^3}(x\eta-y\xi)}{1+\mu}$$
$$+\frac{\left(f+\frac{x}{r}\right)(\zeta\,dx-x\,d\xi)+\frac{y}{r}(\eta\,dx-x\,d\eta)}{(1+\mu)\,dt\sqrt{2h(1+m)}}-\frac{2H\,dx}{dt\sqrt{2h(1+m)}},$$

$$B=\frac{\zeta\,dy-y\,d\zeta}{(1+\mu)\,dt\sqrt{2h(1+m)}},$$

$$C=\frac{x\,d\zeta-\zeta\,dx}{(1+\mu)\,dt\sqrt{2h(1+m)}},$$

$$I=3t\frac{\sqrt{2(1+m)}}{a^5}A+\frac{2\left(\frac{x\eta-y\xi}{1+\mu}-\frac{r^2G}{f}\right)}{\sqrt{a^3h}}+\frac{y(fx-4h)F}{2\sqrt{a^3h}}.$$

De plus, on aura par les formules du §. 37, en y marquant d'un trait les quantités δh, δa, &c. X, Y, Z.

$$d\,\delta\,h' = -\,\mu\,\frac{\sqrt{2\,h}}{1+\mu}.\,(x\,Y' - y\,X')\,d\,t,$$

$$d\,\delta\,a' = -\,\frac{\mu}{1+m}\,a^2\,(X'\,d\,x + Y'\,d\,y);$$

$$d\,\delta\,f' = -\,\frac{\mu\,y\,d\,t}{\sqrt{2\,h\,(1+m)}}\left(\left(f+\frac{x}{r}\right)X' + \frac{y}{r}\,Y'\right) + \frac{2\,d\,y\,d\,\delta\,h'}{d\,t\,\sqrt{2\,h\,(1+m)}},$$

$$d\,\delta\,g' = \frac{\mu\,x\,d\,t}{\sqrt{2\,h\,(1+m}}\left(\left(f+\frac{x}{r}\right)X' + \frac{y}{r}\,Y'\right) - \frac{2\,d\,x\,d\,\delta\,h'}{d\,t\,\sqrt{2\,h\,(1+m)}};$$

$$d\,\delta\,b' = \frac{\mu\,y}{\sqrt{2\,h\,(1+m)}}\,Z'\,d\,t;$$

$$d\,\delta\,c' = -\,\frac{\mu\,x}{\sqrt{2\,h\,(1+m)}}\,Z'\,d\,t;$$

$$d\,\delta\,i' = 3\,t\,\frac{\sqrt{2\,(1+m)}}{a^5}.\,d\,\delta\,a' - \frac{2\,r^2\,d\,\delta\,g'}{f\,\sqrt{a^3\,h}} + \frac{y\,(f\,x - 4\,h)\,d\,\delta\,f')}{2\,\sqrt{a\,h^3}}.$$

Donc, si on différencie les valeurs de $\delta\,h$, $\delta\,a$, &c. données ci-dessus, & qu'on y substitue ensuite les valeurs précédentes de $d\,\delta\,h'$, $d\,\delta\,a'$, &c. il viendra

$$d\,\delta\,h = \mu\,d\,H - \mu\,\frac{\sqrt{2\,h}}{1+\mu}\,(x\,Y' - y\,X')\,d\,t,$$

$$d\,\delta\,a = \mu\,d\,A - \frac{m}{1+\mu}\,a^2\,(X'\,d\,x + Y'\,d\,y);$$

$$d\,\delta\,f = \mu\,d\,F - \frac{\mu\,y\,d\,t}{\sqrt{2h\,(1+m)}}\left(\left(f+\frac{x}{r}\right)X' + \frac{y}{r}\,Y'\right) + \frac{2\,d\,y\,d\,\delta\,h'}{d\,t\,\sqrt{2\,h\,(1+m)}},$$

$$d\,\delta\,g = \mu\,d\,G + \frac{\mu\,x\,d\,t}{\sqrt{2\,h\,(1+m)}}\left(\left(f+\frac{x}{r}\right)X' + \frac{y}{r}\,Y'\right) - \frac{2\,d\,x\,d\,\delta\,h'}{d\,t\,\sqrt{2\,h\,(1+m)}},$$

$$d\,\delta\,b = \mu\,d\,B + \frac{\mu\,y}{\sqrt{2\,h\,(1+m)}}\,Z'\,d\,t;$$

$$d\,\delta\,c = \mu\,d\,C - \frac{\mu\,x}{\sqrt{2\,h\,(1+m)}}\,Z'\,d\,t,$$

$$d\,\delta\,i = \mu\,d\,I + 3\,t\,\frac{\sqrt{2\,(1+m)}}{a^5}.\,d\,\delta\,a' - \frac{2\,r^2\,d\,\delta\,g'}{f\,\sqrt{a^3\,k}}$$

$$+ \frac{y\,(f\,x - 4\,h)\,d\,\delta\,f'}{2\,\sqrt{a\,h^3}}.$$

formules qu'on pourra employer à la place de celles du §. 37, avec lesquelles elles sont identiques dans le fond.

(40). En comparant les formules précédentes avec celles du §. 37, il est aisé d'en tirer cette conclusion générale ; qu'il est permis de changer dans ces dernieres les quantités X, Y, Z en X′, Y′, Z′, pourvu qu'on ajoute en même temps aux valeurs de $d\,\delta\,h$, $d\,\delta\,a$, $d\,\delta\,f$, &c. les quantités $\mu\,d\,H$, $\mu\,d\,A$, $\mu\,d\,F$, &c.

De là il s'ensuit que, soit, par exemple, $\mu\,\Pi\,d\,t$ la valeur de $d\,\delta\,h$ dans les formules du §. 37, on aura en intégrant $\delta\,h = \int\mu\,\Pi\,d\,t$, cette intégrale étant supposée commencer au point où $\delta\,h = o$. Supposons maintenant qu'à commencer d'un point donné de l'orbite, on veuille employer les quantités X′, Y′, Z′, à la place des X, Y, Z ; & qu'on dénote par $\delta\,h'$ la valeur de $\delta\,h$ pour ce point, c'est-à-dire la valeur de l'intégrale $\int\mu\,\Pi\,d\,t$ étendue jusqu'à ce point : soit Π', ce que devient Π en y changeant X, Y, Z en X′, Y′, Z′, on aura en général par les formules du §. précédent, $d\,\delta\,h = \mu\,d\,H + \mu\,\Pi'\,d\,t$; donc intégrant $\delta\,h = \mu\,H + \int\mu\,\Pi'\,d\,t + const.$: soit H′ la valeur de H dans le même point de l'orbite, & supposons que l'intégrale $\int\mu\,\Pi'\,d\,t$ commence aussi à ce point dans lequel on a supposé que finit l'intégrale $\int\mu\,\Pi\,d\,t$, on aura donc dans ce point $\delta\,h' = \mu\,H' + const.$; donc $const. = \delta\,h' - \mu\,H'$; donc on aura en général $\delta\,h = \mu\,H - \mu\,H' + \delta\,h' + \int\mu\,\Pi'\,d\,t$, savoir :

$$\delta\,h = \mu\,H - \mu\,H' + \int\mu\,\Pi\,d\,t + \int\mu\,\Pi'\,d\,t.$$

Supposons ensuite que dans un autre point quelconque de l'orbite, on veuille changer de nouveau les quantités X′, Y′, Z′ en

X, Y, Z, & ſoient dénotées par $\delta h''$ & par H″ les valeurs de δh & de H pour ce ſecond point, on aura donc dans ce point :

$$\delta h'' = \mu H'' - \mu H + \int \mu \Pi\, dt + \int \mu \Pi'\, dt,$$

l'intégrale $\int \mu \Pi'\, dt$ étant ſuppoſée étendue juſqu'à ce ſecond point. Or, lorſqu'on emploie les quantités X, Y, Z, on a en général $d\delta h = \mu \Pi\, dt$; donc $\delta h = \int \mu \Pi\, dt + conſt.$: ſuppoſons que l'intégrale $\int \mu \Pi\, dt$ commence à ce ſecond point dans lequel δh devient $\delta h''$, & l'on aura $\delta h'' = conſt.$; donc en général $\delta h = \int \mu \Pi\, dt + \delta h''$, & ſubſtituant la valeur de $\delta h''$,

$$\delta h = \mu H'' - \mu H' + \int \mu \Pi\, dt + \int \mu \Pi'\, dt + \int \mu \Pi\, dt;$$

dans cette formule, la première intégrale $\int \mu \Pi\, dt$ eſt ſuppoſée commencer au point de l'orbite où δh eſt nul, & s'étendre ſeulement juſqu'au point où les quantités X, Y, Z ſe changent en X′, Y′, Z′; la ſeconde intégrale $\int \mu \Pi'\, dt$ eſt ſuppoſée commencer à ce point, & s'étendre juſqu'à l'autre point où les quantités X′, Y′, Z′ redeviennent X, Y, Z; enfin la troiſieme intégrale $\int \mu \Pi\, dt$ commence à ce dernier point, & s'étend indéfiniment : de ſorte que ces différentes intégrales ne forment proprement qu'une ſeule intégrale qui commence au point où δh eſt nul, & qui s'étend indéfiniment, mais avec cette condition que la quantité Π ſe change en Π′ dans une certaine étendue.

On voit par-là que dans l'intégration de la valeur de $d\delta h$ du §. 37, on peut changer à volonté les quantités X, Y, Z en leurs analogues X′, Y′, Z′, & rétablir enſuite celles-là à la place de celles-ci, pourvu qu'on ajoute en même temps à la valeur finie de δh, la quantité $\mu H'' - \mu H'$ qui eſt la différence des deux valeurs de μH, dont l'une $\mu H'$ ſe rapporte au point où X, Y, Z ſe changent en X′, Y′, Z′, & dont l'autre $\mu H''$ ſe rapporte au point où X′, Y′, Z′ redeviennent X, Y, Z.

On fera le même raiſonnement ſur chacune des autres formules du §. 37, & on tirera des concluſions ſemblables. Ainſi dans l'intégration de la valeur de $d\,\delta\,a$, on pourra, pour un certain eſpace à volonté, changer X, Y, Z en X′, Y′, Z′, pourvu qu'on ajoute enſuite à la valeur finie de $\delta\,a$ l'excès de la valeur de μ A, qui répond à la fin de cet eſpace ſur la valeur de μ A qui répond au commencement du même eſpace, &c.

Et ſi on vouloit ſubſtituer à pluſieurs repriſes les quantités X′, Y′, Z′ à la place de X, Y, Z, on feroit la même opération pour chaque nouvelle ſubſtitution.

(41). Une des déterminations les plus importantes de la Théorie des Perturbations des Comètes, eſt celle de l'altération du temps périodique. Rien n'eſt plus facile que de trouver cette altération par le moyen de la formule que nous avons donnée (§. 38.) pour l'anomalie moyenne dans l'orbite troublée. En effet, θ exprimant en général l'anomalie moyenne dans l'orbite non altérée, & $\theta + \delta\,\theta$ l'anomalie moyenne qui a lieu en même temps dans l'orbite troublée, on aura pour l'inſtant du périhélie dans l'orbite troublée $\theta + \delta\,\theta = o$; d'où $\theta = -\,\delta\,\theta$, ou (ce qui revient au même) $= 360^\circ - \delta\,\theta$. D'où l'on voit que lorſque la Comète paſſera au périhélie dans ſon orbite troublée, une Comète fictice, qu'on ſuppoſeroit ſe mouvoir dans l'orbite non altérée, ſeroit encore éloignée de ſon périhélie de la quantité qui répond à l'anomalie moyenne $\delta\,\theta$ dans cette même orbite. Donc, comme l'on a en général $\theta = 2\,t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}} + i$ (§. 20.), i étant une conſtante dans l'orbite non altérée, ſi on dénote par $\delta\,t$ le temps qui répond à l'anomalie $\delta\,\theta$ dans cette orbite, on aura $\delta\,\theta = 2\,\delta\,t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}}$; donc $d\,t = \sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}}.\ \delta\,\theta$: c'eſt le temps dont le paſſage au périhélie de l'orbite troublée précédera le paſſage au périhélie de l'orbite non altérée; ce temps étant exprimé par le mouvement moyen du Soleil qui y répond (§. cité).

Dénotons par $\delta\,\theta'$ & $\delta\,\theta''$ les valeurs de $\delta\,\theta$ qui répondent à deux périhélies conſécutifs, & par $\delta t'$, $\delta t''$ les valeurs correſpondantes de δt, en ſorte que l'on ait

$$\delta t' = \sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}}.\, \delta\theta', \quad \delta t'' = \sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}}.\, \delta\theta'';$$

ſoit de plus t' & t'' les temps des paſſages par les deux périhélies conſécutifs dans l'orbite non altérée, on aura pour les temps de ces paſſages dans l'orbite troublée $t' - \delta t'$, $t'' - \delta t''$; donc la différence de ces temps, c'eſt-à-dire l'intervalle de temps entre deux paſſages conſécutifs au périhélie de l'orbite troublée, ſera $t'' - t' + \delta t' - \delta t''$, où $t'' - t'$ eſt le même intervalle pour l'orbite non altérée. D'où il s'enſuit que la durée de la révolution anomalyſtique dans l'orbite troublée ſurpaſſera la même durée dans l'orbite non altérée, du temps exprimé par $\delta t' - \delta t''$, ou par $\sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}}(\delta\theta' - \delta\theta'')$; c'eſt l'altération produite par les perturbations.

Il faut remarquer que pour avoir les valeurs de $\delta\theta'$ & $\delta\theta''$, il faudroit à la rigueur ſuppoſer, dans $\delta\theta$, $t = t' - \delta t'$, $= t'' - \delta t''$; mais comme nous négligeons les carrés & les produits des forces perturbatrices, & par conſéquent auſſi de toutes les quantités réſultantes de ces forces, il ſuffira d'y faire $t = t'$ & $= t''$.

Nous venons de déterminer l'altération de la révolution anomalyſtique de la Comète; ſi on vouloit avoir l'altération de ſa révolution périodique, il faudroit défalquer de l'altération précédente le temps dû au changement du périhélie. Or nous avons vu (§. 38.) que le périhélie de l'orbite troublée eſt plus avancé que celui de l'orbite non altérée de l'angle $d\,\epsilon = \frac{\delta g}{e}$; donc ſi on dénote par $\delta\epsilon'$ & $\delta\epsilon''$ les valeurs de $\delta\epsilon$ qui répondent à $t = t'$ & t'', on aura $\delta\epsilon'' - \delta\epsilon'$ pour l'angle dont le périhélie de l'orbite troublée aura avancé pendant une révolution; ainſi la quantité à défalquer de l'altération de la révolution anomalyſtique, pour avoir celle de la révolution périodique, ſera le temps qui répond à l'angle ou à l'anomalie vraie $\delta\epsilon'' - \delta\epsilon'$

Pour

Pour trouver ce temps, on pourra employer la formule différencielle $dt = \frac{r^2 d\varphi}{\sqrt{2h(1+m)}}$ (§. 21), en faisant $d\varphi = \delta\varepsilon'' - \delta\varepsilon'$, & $r =$ à la distance périhélie dans l'orbite non altérée, laquelle est $= \frac{a - ae}{2} = \frac{a}{2}(1-e) = \frac{a(1-e^2)}{2(1+e)} = \frac{2h}{1+e}$, de sorte qu'on aura pour le temps cherché la quantité $\left(\frac{2h}{1+e}\right)^2 \times \frac{\delta\varepsilon'' - \delta\varepsilon'}{\sqrt{2h(1+m)}}$.

Donc la durée de la révolution périodique de la Comète dans l'orbite troublée, c'est-à-dire le temps qu'elle mettra à faire une révolution entière depuis son départ du périhélie, jusqu'à ce qu'elle revienne sur la ligne du même périhélie, surpassera le temps de la révolution entière dans l'orbite non altérée, de la quantité

$$\sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}}.(\delta\theta' - \delta\theta'') - \left(\frac{2h}{1+e}\right)^2 \times \frac{\delta\varepsilon'' - \delta\varepsilon'}{\sqrt{2h(1+m)}};$$

laquelle, en substituant pour $\delta\theta'$ & $\delta\theta''$, leurs valeurs déduites de la formule du §. 38, & dénotant par $\delta a'$, $\delta i'$ & par $\delta a''$, $\delta i''$, les valeurs de δa, δi qui répondent à $t = t'$ & t'', se réduit à celle-ci.

$$\frac{3(t''\delta a'' - t'\delta a')}{2a} - \sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}}.(\delta i'' - \delta i') - \left(\frac{2h}{1+e}\right)^2 \times \frac{\delta\varepsilon'' - \delta\varepsilon'}{\sqrt{2h(1+m)}}.$$

SECTION IV.

Application des Théories précédentes au calcul des Perturbations des Comètes, & en particulier au calcul des Perturbations de la Comète de 1532 & de 1661.

(42). CETTE application se présente d'elle-même; il ne s'agit que de trouver les valeurs des quantités δh, δa, δf, δg, δb, δc, δi, par l'intégration des formules du §. 37, & l'on aura immédiatement les altérations des élémens de l'orbite de la Comète dues aux Perturbations (§. 38.); mais la grande difficulté consiste dans ces intégrations, lesquelles, à cause de la grande excentricité de l'orbite des Comètes, ne peuvent s'exécuter en général par aucune méthode connue, & demandent nécessairement des quadratures de courbes mécaniques.

Nous allons proposer les moyens qui nous paroissent les plus propres pour arriver à ce but.

Je commence par substituer dans les équations du §. 37, les valeurs de X, Y, Z (§. 22.), lesquelles en effectuant les différenciations indiquées, deviennent

$$X = \frac{\xi}{\rho^3} + \frac{x - \xi}{R^3},\ Y = \frac{\eta}{\rho^3} + \frac{y - \eta}{R^3},\ Z = \frac{\zeta}{\rho^3} + \frac{z - \zeta}{R^3};$$

je substitue de plus à la place des quantités x, y, z, r, dt; leurs valeurs exprimées par l'anomalie excentrique u, parce que l'emploi de cette anomalie rend tout à la fois les formules plus simples & plus faciles à calculer; ces valeurs sont (en faisant $b = o$, $c = o$, $f = e$, $g = o$, par l'hyp. du §. 25):

$x = \frac{a}{2}(cos.\,\omega - f)$, $y = \sqrt{ah.}\,sin.\,\omega$, $z = o$ (§. 26.),

$r = \frac{a}{2}(1 - f\,cos.\,u)$, $dt = \sqrt{\frac{a}{2(1+m)}}.\,r\,du$ (§. 20, 21.).

Ces substitutions faites, si on suppose, pour plus de simplicité,

$$\Pi = \frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3},\ \pi = \frac{1}{R^3},$$

on aura des équations de la forme suivante :

$$d\,\delta\,h = \frac{\mu}{1+m}\Big((H)\,\Pi + (h)\,\pi\Big)\,du;$$

$$d\,\delta\,a = \frac{\mu}{1+m}\Big((A)\,\Pi + (a)\,\pi\Big)\,du;$$

$$d\,\delta\,f = \frac{\mu}{1+m}\Big((F)\,\Pi + (f)\,\pi\Big)\,du;$$

$$d\,\delta\,g = \frac{\mu}{1+m}\Big((G)\,\Pi + (g)\,\pi\Big)\,du,$$

$$d\,\delta\,b = \frac{\mu}{1+m}\Big((B)\,\Pi + (b)\,\pi\Big)\,du,$$

$$d\,\delta\,c = \frac{\mu}{1+m}\Big((C)\,\Pi + (c)\,\pi\Big)\,du,$$

$$d\,\delta\,i = \frac{\mu}{1+m}\Big((I)\,\Pi + (i)\,\pi\Big)\,du;$$

dans lesquelles on aura les valeurs suivantes des quantités (H), (*h*), (A), (*a*), &c.

$(H) = \sqrt{ah.}\,(y\xi - x\eta)\,r$; $(h) = o$;

$(A) = a^2\Big(\frac{a}{2}\,\xi\,sin.\,u - \sqrt{ah.}\,\eta\,cos.\,u\Big)$, $(a) = -\frac{a^3 f}{2}\,r\,sin.\,u$;

$(F) = -\sqrt{\frac{a}{4h}}\Big((fr + x)\xi + y\eta\Big)y + 2\sqrt{ah.}\,(y\xi - x\eta)\,cos.\,u$,

$(f) = -\sqrt{ah.}\,r\,y$,

$(G) = \sqrt{\frac{a}{4h}}.\Big((fr + x)\,\xi + y\,\eta\Big)x + a\,(y\xi - x\eta)\,sin.\,u$,

$(g) = \sqrt{ah.}\,r\,x$;

$(B) = \sqrt{\frac{a}{4h}}.\,r\,y\,\zeta$, $(b) = o$,

$(C) = -\sqrt{\frac{a}{4h}}.\,r\,x\,\zeta$, $(c) = o$,

$$(E) = 3\,t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^5}}\,(A) - \frac{2\,r^2\,(G)}{f\sqrt{a^3 h}} + \frac{y\,(f\,x - 4\,h)}{2\sqrt{a\,h^3}}\,(F),$$

$$(i) = 3\,t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^5}}\,(a) - \frac{2\,r^2\,(g)}{f\sqrt{a^3 h}} + \frac{y\,(f\,x - 4\,h)}{2\sqrt{a\,h^3}}\,(f).$$

Dans ces expreſſions j'ai conſervé, pour plus de ſimplicité, les lettres x, y, r à la place de leurs valeurs en *ſin.* u & *coſ.* u; il eſt facile de les y ſubſtituer ſi on le juge à propos.

(43). Il eſt viſible par les formules précédentes, que les quantités (H), (h), (A), (a), &c. ſont toutes exprimées par des fonctions rationnelles & entières de *ſin.* u, *coſ.* u, ξ, η, ζ; de ſorte que ſi on pouvoit exprimer de même les quantités ξ, η, ζ, $\frac{1}{\rho^3}$ & $\frac{1}{R^3}$ par des fonctions rationnelles & entières de *ſin.* u & *coſ.* u, l'intégration des équations differencielles dont il s'agit, n'auroit aucune difficulté. Voyons quels ſont les obſtacles qui s'oppoſent à cette réduction dans la théorie des Comètes.

On ſe rappellera d'abord que les quantités ξ, η, ζ ſont les trois coordonnées rectangles du lieu de la Planète perturbatrice dont la maſſe eſt μ, que ρ eſt ſon rayon recteur, & R la diſtance rectiligne entre le lieu de la Planète & le lieu de la Comète dans l'orbite non altérée (§. 2, 7) : on ſe rappellera enſuite que nous prenons pour le plan de projection celui de l'orbite non altérée de la Comète, & pour l'axe des abſciſſes la ligne du périhélie de cette orbite (§. 25.).

Nommons Ψ l'inclinaiſon du plan de l'orbite de la Planète ſur le plan de l'orbite non altérée de la Comète, & Ω la longitude du nœud aſcendant de l'orbite de la Planète comptée ſur le plan de l'orbite de la Comète, depuis le périhélie de cette orbite.

Soit de plus λ l'argument de latitude de la Planète, c'eſt-à-dire la longitude dans ſon orbite, moins la longitude de ſon nœud avec l'orbite de la Comète.

Il eſt facile de comprendre que l'on aura pour ξ, η, ζ des expressions semblables à celles de x, y, z du §. 19, en y changeant r en ρ, ω en Ω, ψ en Ψ, & $\varphi - \alpha$ en λ, on aura donc ainsi :

$$\xi = \rho\,(\textit{cos.}\,\Omega\,\textit{cos.}\,\lambda - \textit{sin.}\,\Omega\,\textit{cos.}\,\Psi\,\textit{sin.}\,\lambda);$$
$$\eta = \rho\,(\textit{sin.}\,\Omega\,\textit{cos.}\,\lambda + \textit{cos.}\,\Omega\,\textit{cos.}\,\Psi\,\textit{sin.}\,\lambda),$$
$$\zeta = \rho\,\textit{sin.}\,\Psi\,\textit{sin.}\,\lambda.$$

Or on sait que dans les orbites des Planètes, à cause de la petitesse de leur excentricité, on peut exprimer tant l'équation du centre que le rayon vecteur par des suites très-convergentes qui procèdent suivant les *sinus* & *cosinus* de l'anomalie moyenne & de ses multiples (on trouve ces suites développées d'après les principales Tables Astronomiques, dans le premier Volume du Recueil de Tables, publié par l'Académie de Berlin); on pourra donc représenter par de semblables séries les valeurs de ξ, η, ζ, & de $\frac{1}{\rho^3}$ pour chaque Planète; & il n'y aura plus qu'à exprimer l'anomalie moyenne de la Planète par l'anomalie excentrique u de la Comète.

Pour faire cette réduction, soit α le grand axe de l'orbite de la Planète, & M son anomalie moyenne comptée à l'ordinaire depuis l'aphélie; soit de plus T la valeur de l'anomalie moyenne θ de la Comète pour l'instant du passage de la Planète par l'aphélie, il est visible que M & $\theta - T$ seront les anomalies contemporaines de la Planète & de la Comète, lesquelles doivent être entre elles en raison réciproque de la durée de leurs révolutions, & par conséquent par les théorêmes connus en raison de $\sqrt{a^3} : \sqrt{\alpha^3}$; d'où il suit qu'on aura $M = (\theta - T)\sqrt{\frac{a^3}{\alpha^3}}$, où il n'y aura plus qu'à substituer pour θ sa valeur $u - e\,\textit{sin.}\,u$ (§. 20.).

Comme dans l'orbite des Comètes l'excentricité e est peu différente de l'unité, il est clair que les *sinus* & *cosinus* de M & de ses multiples ne sauroient s'exprimer par de simples *sinus* & *cosinus* de u & de ses multiples; par conséquent il est impoſſible d'exprimer en général ξ, η, ζ, & $\frac{1}{\rho^3}$ par des fonctions rationnelles & entières de *ſin. u* & de *coſ. u*. C'eſt la première difficulté qui s'oppoſe à l'intégration des équations du §. précédent.

La ſeconde difficulté vient du dénominateur irrationnel R^3; en effet, il eſt d'abord impoſſible, par la raiſon précédente, de réduire l'expreſſion rationnelle de R^2, laquelle eſt (§. 2.), ζ étant $= o$,

$$R^2 = r^2 - 2(x\xi + y\eta) + \rho^2$$

à une fonction rationnelle de *ſin. u* & *coſ. u*; à plus forte raiſon le ſera-t-il d'y réduire la quantité irrationnelle & rompue $\frac{1}{R^3}$.

(44). On eſt donc forcé dans la théorie des Comètes de renoncer à l'avantage de parvenir à des formules analytiques qui expriment les inégalités de leur mouvement pour un temps quelconque, telles que celles que l'on trouve pour les inégalités des Planètes ; & la ſeule reſſource qui reſte eſt de déterminer ces inégalités par parties, en partageant l'orbite de la Comète en différentes portions, & calculant ſéparément l'effet des perturbations pour chacune de ces portions.

En effet, tant que l'angle $\theta \sqrt{\frac{a^3}{\alpha^3}}$ ne ſera pas trop grand, on pourra exprimer ſon *ſinus* & ſon *coſinus* par les ſéries connues qui procèdent ſuivant les puiſſances de l'arc, & par-là on remédiera au premier inconvénient.

Enſuite on obſervera que tant que le rayon r de la Comète ſera beaucoup moindre que le rayon ρ de la Planète perturbatrice, & que par conſéquent x & y ſeront moindres que ρ, on pourra réduire la quantité $\frac{1}{R^3}$ en une ſérie convergente, en prenant $\frac{1}{\rho^3}$ pour le premier terme.

De cette manière, on pourra donc intégrer les valeurs de

$d\delta h$, $d\delta a$, &c. du §. 42, depuis le périhélie de l'orbite de la Comète jusqu'à un point de cette orbite dans lequel $\theta \sqrt{\frac{a^3}{\alpha^3}}$ & $\frac{r}{\rho}$ soient des quantités encore assez petites.

Soit maintenant u' l'anomalie excentrique qui répond à ce point, on sera en général $u = u' + v$, & tant que l'angle v sera assez petit, on pourra mettre les quantités à intégrer sous la forme rationnelle $(L + Mv + Nv^2 +$, &c.$)\,dv$; on intégrera donc de rechef depuis $\omega = u'$ jusqu'à $\omega = u''$, en supposant l'arc $u'' - u'$ assez petit, & ainsi de suite.

(45). On peut faciliter beaucoup ce calcul par la méthode connue des courbes paraboliques; mais pour pouvoir employer cette méthode en toute sûreté, il faut que les quantités qu'on veut exprimer par des formules paraboliques ne souffrent pas de trop grandes ni de trop fréquentes irrégularités; autrement il arriveroit que parmi les coëfficiens de la série parabolique il s'en trouveroit de très-grands; ce qui diminueroit la convergence de la série, & obligeroit à la pousser à un grand nombre de termes. Il est donc nécessaire d'examiner *à priori* la nature des quantités auxquelles on veut appliquer la méthode des courbes paraboliques.

De ce que nous avons dit dans le §. 43, il s'ensuit que les différentes quantités (H), (h), (A), (a), &c. ainsi que les quantités $\frac{1}{\rho^3}$ & R^2 peuvent être exprimées par des fonctions rationnelles & entières de *sinus* & de *cosinus* des angles u & $\theta \sqrt{\frac{a^3}{\alpha^3}}$, c'est-à-dire de l'anomalie excentrique de la Comète & du mouvement moyen correspondant de la Planète; donc si on suppose que ces deux angles varient en même temps des angles contemporains β & γ, chacune des quantités dont il s'agit pourra être représentée pendant ces variations par une formule algébrique de la forme

$$L + M\beta + N\gamma + O\beta^2 + P\beta\gamma + Q\gamma^2 +, \&c.$$

dans laquelle les quantités L, M, N, &c. seront toutes aussi des fonctions rationnelles & entières de *sin.* u, *cos.* u; *sin.* $\theta \sqrt{\frac{a^3}{\alpha^3}}$, *cos.* $\theta \sqrt{\frac{a^3}{\alpha^3}}$. Or $\theta = u - e \sin. u$; donc faisant croître u de γ, & θ de $\gamma \sqrt{\frac{a^3}{\alpha^3}}$, on aura

$$\gamma = \sqrt{\frac{a^3}{\alpha^3}} . \left((1 - e \cos. u) \beta + \frac{e^2 \sin. u^2}{2} \beta^2 +, \&c. \right).$$

Si donc on substitue cette valeur de γ dans la formule précédente, elle prendra cette forme plus simple $L + M \beta + N \beta^2 +$, &c. dans laquelle les quantités L, M, N, &c. seront pareillement des fonctions toutes rationnelles & entières de *sin.* u, *cos.* u, *sin.* $\theta \sqrt{\frac{a^3}{\alpha^3}}$, *cos.* $\theta \sqrt{\frac{a^3}{\alpha^3}}$; en sorte que ces quantités ne pourront jamais augmenter au delà d'un certain terme. Et il est clair que la formule précédente n'étant poussée que jusqu'au second degré, sera exacte, aux quantités près, des ordres de β^3, & de γ^3.

Il semble qu'il faudroit faire une exception à l'égard des quantités (I) & (i) qui contiennent des termes multipliés par t, & qui, par conséquent, ne sont pas uniquement des fonctions de *sin.*, & *cos.* de u & de $\theta \sqrt{\frac{a^3}{\alpha^3}}$, mais renferment aussi l'angle même u; mais il est facile de se convaincre que cette circonstance ne peut apporter aucun changement à la conclusion précédente.

Si donc on dénote en général par V une quelconque des quantités dont il s'agit, & que V_0, V_1, V_2, soient les valeurs de V qui répondent à $u = u_0$, $= u_1 = u_0 + \beta$, $= u_2 = u_1 + \beta$; il résulte de ce que nous venons de démontrer, que pour $u = u_1 + n \beta$ (n étant un nombre quelconque compris entre 0 & 1), on aura, aux quantités près, des ordres de β^3 & de γ^3, $V = V_1 + V'_1 n + V''_1 n^2$, formule qui pourra servir aussi par la même raison, en faisant n negatif depuis 0 jusqu'à -1.

Or comme $V = V_0$ lorsque $n = -1$, & $V = V_2$ lorsque

$n = 1$, on aura $V_0 = V_1 - V'_1 + V''_1$, $V_2 = V_1 + V'_1 + V''_1$; d'où l'on tire

$$V'_1 = \frac{V_2 - V_0}{2},\ V''_1 = \frac{V_2 - 2V_1 + V_0}{2}.$$

(46). Cela posé, séparons, dans les équations différentielles du §. 42, les termes divisés par R^3 des autres, & représentons en général chacune de ces équations par

$$d\Delta = \frac{\mu}{1+m}\left(V + \frac{U}{R^{\frac{3}{2}}}\right) du;$$

R étant $= R^2$, Δ étant une des quantités δh, δa, &c., V étant respectivement $\frac{(H)}{\rho^3}$, $\frac{(A)}{\rho^3}$, &c., & U étant $(h) - (H)$, $(a) - (A)$, &c.

Qu'on calcule les valeurs des quantités V, U, & R pour trois anomalies excentriques $u = u_0, u_1, u_2$, dont la commune différence soit β; & qu'on marque ces valeurs respectivement par V_0, U_0, R_0, V_1, U_1, R_1, V_2, U_2, R_2; qu'on en déduise ensuite, par les dernières formules du §. précédent, les valeurs de V'_1, V''_1, ainsi que celles de U'_1, U''_1, R'_1, R''_1; & qu'on substitue par-tout dans l'équation précédente, $u_1 + \beta n$, à la place de u, on aura donc, en regardant maintenant n comme variable, la transformée

$$d\Delta = \frac{\mu\beta}{1+m}\left(V_1 + V'_1 n + V''_1 n^2 + \frac{U_1 + U'_1 n + U''_1 n^2}{(R_1 + R'_1 n + R''_1 n^2)^{\frac{3}{2}}}\right) dn,$$

qui étant intégrée depuis $n = -1$ jusqu'à $n = 1$, donnera, aux quantités près de l'ordre de $\mu\beta^3$ & $\mu\gamma^3$, la valeur de Δ ou plutôt l'accroissement de Δ, depuis l'anomalie excentrique u_0, jusqu'à l'anomalie $u_2 = u_0 + 2\beta$; en sorte que désignant par Δ_0 & Δ_2 les valeurs de Δ qui répondent à ces deux anomalies, on aura $\Delta_2 - \Delta_0$ égale à l'intégrale du second membre de cette équation, prise depuis $n = -1$ jusqu'à $n = 1$.

L'intégration de la partie $(V_1 + V'_1 n + V''_1 n^2)\, dn$ n'a aucune difficulté, & l'on trouve sur le champ pour l'intégrale totale $2V_1 + \frac{2}{3}V''_1$.

A l'égard de l'autre partie $\frac{U_1 + U'_1 n + U''_1 n^2}{(R_1 + R'_1 n + R''_1 n^2)^{\frac{3}{2}}} dn$, elle dépend de la quadrature de l'hyperbole ou du cercle, suivant que R''_1 est une quantité positive ou négative.

Pour en trouver l'intégrale, on supposera cette différentielle égale à

$$d.\frac{K + Ln}{\sqrt{R_1 + R'_1 n + R''_1 n^2}} + \frac{M\,dn}{\sqrt{R_1 + R'_1 n + R''_1 n^2}},$$

& l'on trouvera par la comparaison des termes, après avoir réduit au même dénominateur,

$$K = \frac{\frac{1}{2}U_1 R'_1 - U'_1 R_1 + \frac{U''_1 R_1 R'_1}{2 R''_1}}{R_1 R''_1 - \frac{1}{4} R'^2_1},$$

$$L = \frac{U_1 R''_1 - \frac{1}{2}U'_1 R'_1 - U''_1\left(R_1 - \frac{R'^2_1}{2 R''_1}\right)}{R_1 R''_1 - \frac{1}{4} R'^2_1},$$

$$M = \frac{U''_1}{R''_1};$$

or l'intégrale de la première partie est évidemment . . . . $\frac{K + Ln}{\sqrt{R_1 + R'_1 n + R''_1 n^2}}$; & celle de la seconde est, en faisant pour abréger,

$$\frac{\sqrt{R_1 + R'_1 n + R''_1 n^2}}{\frac{1}{2}R'_1 + R''_1 n} = N, \quad \frac{M}{2\sqrt{R''_1}}\, l.\, \frac{1 + N\sqrt{R''_1}}{1 - N\sqrt{R''_1}},$$

si R''_1 est positif; mais si R''_1 est négatif, cette intégrale devient $\frac{M}{2\sqrt{-R''_1}}$ *arc. tang.* $N\sqrt{-R''_1}$.

On fera maintenant dans ces formules $n = 1$ & $n = -1$, & on retranchera la seconde valeur de la première, pour avoir l'intégrale complette; or en faisant $n = 1$, la quantité sous le signe devient $R_1 + R'_1 + R''_1 = R_2$, & en faisant $n = -1$, elle devient $R_1 + R'_1 + R''_1 = R_0$. Donc la valeur complette de l'intégrale de la différentielle dont il s'agit sera représentée par $\frac{K + L}{\sqrt{R_2}} - \frac{K - L}{\sqrt{R_0}} + \frac{M}{2\sqrt{\pm R''_1}} P$, en faisant . . . .

$$P = l.\ \frac{\frac{1}{2}R'_1 + R''_1 + \sqrt{R_2 R''_1}}{\frac{1}{2}R'_1 + R''_1 - \sqrt{R_2 R''_1}} - l.\ \frac{\frac{1}{2}R'_1 + R'_1 + \sqrt{R_0 R_1''}}{\frac{1}{2}R'_1 + R''_1 - \sqrt{R_0 R_1''}},$$

si R''_1 est positif, ou bien

$$P = arc.\ tang. \frac{\sqrt{-R_1 R''_1}}{\frac{1}{2}R_1 + R'_1} - arc.\ tang. \frac{\sqrt{-R'_0 R_1''}}{\frac{1}{2}R_1 + R_1''},$$

si R''_1 est négatif.

Donc enfin, on aura, aux quantités près des ordres de $\mu\beta^3$ & $\mu\gamma^3$,

$$\Delta_2 - \Delta_0 = \frac{\mu\beta}{1+m}\left(2V'_1 + \frac{2}{3}V''_1 + \frac{K+L}{\sqrt{R_2}} - \frac{K-L}{\sqrt{R_0}} + \frac{MP}{2\sqrt{\pm R'_1}}\right).$$

(43). Il n'y a que deux cas où la formule précédente ne puisse pas servir ; l'un est celui de $R'^2_1 = 0$, & l'autre celui de $R_1 R''_1 - \frac{1}{4}R'^2_1 = 0$.

Soit, 1°. $R''_1 = 0$, on aura à intégrer cette différentielle $\frac{U_1 + U'_1 n + U''_1 n^2}{(R_1 + R'_1 n)^{\frac{1}{2}}} dn$, & supposant son intégrale de la forme $\frac{K + Ln + Mn^2}{\sqrt{R_1 + R'_1 n}}$, on trouvera par la différenciation, & par la comparaison des termes :

$$K = -\frac{2U_1}{R'_1} + \frac{4U'_1 R_1}{R_1'^2} - \frac{16U''_1 R^2_1}{3R'^3_1},$$

$$L = \frac{2U'_1}{R'_1} - \frac{8U''_1 R_1}{3R'^2_1},$$

$$M = \frac{2U''_1}{3R'_1}.$$

Complétant donc cette intégrale de la manière que nous l'avons dit, on aura à la place de la dernière équation du §. précédent, celle-ci :

$$\Delta_2 - \Delta_0 = \frac{\mu\beta}{1+m}\left(2V_1 + \frac{2}{3}V''_1 + \frac{K+L+M}{\sqrt{R_2}} - \frac{K-L+M}{\sqrt{R_0}}\right).$$

Soit, 2°. $R_1 R''_1 - \frac{1}{4}R'^2_1 = 0$; dans ce cas la quantité $R_1 + R'_1 n + R''_1 n^2$ deviendra $\frac{(R_1 + \frac{1}{2}R'_1 n)^2}{R_1}$; & l'on aura à intégrer cette différentielle rationnelle $\frac{(U_1 + U'_1 n + U''_1 n^2) R_1^{\frac{3}{2}} dn}{(R_1 + \frac{1}{2}R'_1 n)^3}$, qu'on supposera égal à $R_1^{\frac{3}{2}}\left(d.\frac{K + Ln}{(R_1 + \frac{1}{2}R'_1 n)^2} + \frac{M\,dn}{R_1 + \frac{1}{2}R'_1 n}\right)$, ce qui donnera, en réduiſant au même dénominateur, & comparant les termes,

$$K = -\frac{U_1}{R'_1} - \frac{2\,U_1\,R_1}{R'^{3}_1} + \frac{12\,U''^{2}_1\,R_1}{R'^{2}_1},$$

$$L = -\frac{2\,U'_1}{R'_1} + \frac{8\,U''_1\,R_1}{R^{2}_1},$$

$$M = \frac{4\,U''_1}{R^{2}_1}.$$

Intégrant donc & complétant dûment l'intégrale, on trouvera pour le cas dont il s'agit l'équation

$$\Delta_2 - \Delta_0 = \frac{\mu\,\beta}{1+m}\Big(2\,V_1 + \tfrac{2}{3}V''_1 + \Big(\frac{K+L}{R_2} - \frac{K-L}{R_0}\Big)\sqrt{R_1}$$
$$+ \frac{M\,R_1^{\frac{3}{2}}}{R'_1}\,l.\frac{R_2}{R_0}\Big).$$

48. Ayant trouvé ainſi la valeur de $\Delta_2 - \Delta_0$ pour une portion d'anomalie excentrique $u_2 - u_0$, on trouvera de même la valeur de $\Delta_4 - \Delta_2$ pour une portion ſuivante d'anomalie $u_4 - u_2$, & ainſi de ſuite; & ces différentes valeurs ſeront exactes, aux quantités près, de l'ordre de $\mu\,\beta^3$ & $\mu\,\gamma^3$, β étant $= \frac{u_2 - u_0}{2}$, $\frac{u_4 - u_2}{2}$, &c., & γ étant la partie correſpondante de l'anomalie moyenne de la Planète. Ajoutant donc ſucceſſivement ces valeurs enſemble, on aura la valeur totale de $\Delta_s - \Delta_0$ répondante à une anomalie excentrique quelconque $u_s - u_0$; & faiſant $u_s - u_0 = 360°$, on aura la valeur de $\Delta_s - \Delta_0$, c'eſt-à-dire l'accroiſſement de la quantité Δ pour une révolution entière de la Comète.

Au reſte, il eſt bon de remarquer que les formules précédentes ne doivent proprement être employées que pour les parties de l'anomalie excentrique, relativement auxquelles la quantité R ſera aſſez petite, & du même ordre que les différences finies R', R'', ce qui arrivera vers les *minimum* de diſtance entre la Comète & la Planète; dans ces cas, les formules dont il s'agit ne ſont ſujettes à aucun inconvénient, & réſolvent le problême avec toute l'exactitude qu'on peut déſirer; au lieu que la méthode ordinaire des quadratures par les lignes paraboliques, ſeroit trop inexacte, à cauſe que les valeurs de $\frac{U}{R^{\frac{3}{2}}}$ ſeront fort grandes, & que leurs différences ſeront fort intégrales.

Dans tout autre cas, c'eſt-à-dire lorſque la diſtance entre la Comète & la Planète ſera aſſez grande, & que les variations de cette diſtance ſeront fort régulières, on emploiera avec ſuccès la méthode ordinaire, tant pour intégrer la partie $V\,d\,u$, que pour intégrer l'autre partie $\frac{U\,d\,u}{R^{\frac{3}{2}}}$; & comme cette méthode eſt très-connue & très en uſage parmi les Géomètres, nous ne croyons pas devoir nous arrêter ici à l'expliquer; les Ouvrages de Cotes & de Sterling renferment tout ce que l'on peut déſirer ſur ce ſujet.

(49). Quoiqu'on puiſſe, au moyen de ces différentes méthodes, calculer les variations des quantités Δ pour telles portions de l'orbite qu'on voudra, il ne ſera cependant néceſſaire de les employer que pour la partie inférieure de l'orbite, dans laquelle la diſtance de la Comète au Soleil ſera moindre, ou ne ſera pas beaucoup plus grande que la diſtance de la Planète au Soleil; car pour la partie ſupérieure de l'orbite, dans laquelle la diſtance de la Comète au Soleil ſurpaſſera de beaucoup la diſtance de la Planète au Soleil, il ſera bien plus avantageux d'employer la méthode du §. 39 & ſuivans, laquelle abrege & ſimplifie conſidérablement le calcul des perturbations dans cette partie.

Pour faire uſage de cette méthode, il ne s'agit que de ſubſtituer dans les équations du §. 37, à la place des valeurs de X, Y, Z, qu'on a employées dans le §. 42, celles de X′, Y′, Z′ (§. 39.): or nous avons déjà remarqué dans le §. 13, que la quantité $\frac{1}{S}$ n'eſt autre choſe que les deux premiers termes de la quantité $\frac{1}{R}$ réduite en ſérie aſcendante par rapport aux quantités ξ, η, ζ; donc, comme $R^2 = r^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta) + \rho^2$ (§. 2.), ρ^2 étant $= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, on aura par la formule connue

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r^3} - \frac{\rho^2}{2r^3} + \frac{3(x\xi + y\eta + z\zeta)^2}{2r^5}$$
$$- \frac{3(x\xi + y\eta + z\zeta)\rho^2}{2r^5} + \frac{5(x\xi + y\eta + z\zeta)^3}{2r^7}, \text{ \&c.}$$

donc $\frac{1}{S} = \frac{1}{r} + \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r^3}$; & par conféquent

$$\frac{1}{S} - \frac{1}{R} = \frac{\rho^2}{2r^3} - \frac{3(x\xi + y\eta + z\zeta)^2}{2r^5}$$
$$+ \frac{3(x\xi + y\eta + z\zeta)\rho^2}{2r^5} - \frac{5(x\xi + y\eta + z\zeta)^3}{2r^7}, \text{ \&c.}$$

On différenciera maintenant cette quantité en faifant varier feulement x, y, z, & les coëfficiens de dx, dy, dz feront les valeurs de X', Y', Z' ; on trouvera donc, en fuppofant pour abréger

$$\pi' = -\frac{3\rho^2}{2r^5} + \frac{15(x\xi + y\eta + z\zeta)^2}{2r^7} - \frac{15(x\xi + y\eta + z\zeta)\rho^2}{2r^7}$$
$$+ \frac{35(x\xi + y\eta + z\zeta)^3}{2r^9}, \text{ \&c.}$$

$$\Pi' = -\frac{3(x\xi + y\eta + z\zeta)}{r^5} + \frac{3\rho^2}{2r^5} - \frac{15(x\xi + y\eta + z\zeta)^2}{2r^7}, \text{ \&c.}$$

$$X' = \Pi'\xi + \pi' x, \quad Y' = \Pi'\eta + \pi' y, \quad Z' = \Pi'\zeta + \pi' z.$$

En comparant ces expreffions de X', Y', Z', avec celles de X, Y, Z du §. 42, il eft vifible qu'elles n'en different qu'en ce que les quantités Π & π fe trouvent changées en Π' & π'. D'où il eft aifé de conclure que par la fubftitution dont il s'agit, on aura les mêmes équations différentielles que dans le §. 42, en y changeant feulement Π & π en Π' & π'.

Il n'y aura donc qu'à employer dans les équations du §. 42, à la place de Π & π, les quantités Π' & π' ; & on pourra continuer à les employer pour telle portion de l'orbite qu'on voudra, & reprendre enfuite les premières quantités, pourvu qu'on ajoute aux valeurs totales de δh, δa, &c. les quantités refpectives $\mu(H'' - H')$, $\mu(A'' - A')$, &c. ; H', A', &c. étant les valeurs de H, A, &c du §. 39, qui répondent au point de l'orbite où l'on change Π, π en Π', π' ; & H'', A'', &c. étant les valeurs des mêmes quantités pour le point où l'on reprendra Π & π à la place de Π' & π' (§. 40.).

(50). Le grand avantage de la transformation précédente consiste en ce que les quantités Π' & π' qu'on substitue à la place de Π & π, deviennent très-petites lorsque la distance r de la Comète au Soleil est beaucoup plus grande que la distance ρ de la Planète au Soleil; ce qui est visible par les expressions des quantités Π' & π' (§. précéd.); tandis que la valeur de Π (§. 42.) demeure toujours finie, quel que soit l'éloignement de la Comète, à cause du terme $\frac{1}{\rho^3}$ qui ne dépend que la distance de la Planète au Soleil, & qui est l'effet de l'action de la Planète sur le Soleil.

Or, si on considère que l'on a en général $(x^2 + y^2 + z^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = (x\xi + y\eta + z\zeta)^2 + (x\eta - y\xi)^2 + (x\zeta - z\xi)^2 + (y\zeta - z\eta)^2$; & que par conséquent $x\xi + y\eta + z\zeta$ est toujours nécessairement renfermé entre $+ r\rho$ & $- r\rho$, on verra que le premier terme de la quantité Π' sera de l'ordre de $\frac{\rho}{r^4}$, & les deux autres de l'ordre de $\frac{\rho^2}{r^5}$; & que les deux premiers termes de π' seront de l'ordre de $\frac{\rho^2}{r^5}$, & les deux suivans de l'ordre de $\frac{\rho^3}{r^6}$, & ainsi de suite. Donc, lorsque r est assez grand vis-à-vis de ρ, en sorte que $\frac{1}{R^3}$ diffère peu de $\frac{1}{r^3}$, le rapport de Π' à Π sera de l'ordre de $\frac{\rho^4}{r^4}$, & celui de π' à π de l'ordre de $\frac{\rho^2}{r^2}$; la quantité π étant déjà elle-même très-petite de l'ordre de $\frac{1}{r^3}$.

Donc, lorsque $\frac{\rho}{r}$ sera devenu $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{4}$, on pourra du moins, dans la première approximation, négliger les quantités Π' & π' comme nulles; ou si l'on veut absolument y avoir égard, il suffira d'y tenir compte des premiers termes. Dans ce cas, on pourra en toute sûreté employer la méthode ordinaire des quadratures mécaniques, pour intégrer les quantités $d\delta h$, $d\delta a$, &c.; mais on pourra aussi les intégrer analytiquement, du moins par approximation; c'eſt ce que nous allons faire voir.

(51). Pour cet effet, on commencera par remettre dans les expreſſions des quantités (H), (h), (A), (a), &c. du §. 42, à la place de *coſ.* u & *ſin.* u, leurs valeurs en x & y, ſavoir, *coſ.* $u = \frac{2x}{a} + f$, & *ſin.* $u = \frac{y}{\sqrt{ah}}$; moyennant quoi ces quantités deviendront des fonctions rationnelles & entières de x, y, r & de ξ, η, ζ, dans leſquelles les quantités x, y, r ne paſſeront pas la ſeconde dimenſion, excepté les expreſſions de (I) & de (i) où ces quantités monteront à la quatrième dimenſion; mais je remarque, à l'égard de l'expreſſion de (I), qu'on y peut réduire les dimenſions de x, y, r à la troiſième. En effet, il eſt viſible que les termes qui, dans cette expreſſion, peuvent donner des dimenſions de x, y, r plus hautes que la troiſième, ſont ceux-ci : $-\frac{2r^2}{f\sqrt{a^3h}}$ (G) $+ \frac{fyx}{2\sqrt{ah^3}}$ F, autant que les valeurs de (F) & (G) contiennent x, y, r, élevées à la ſeconde dimenſion. Or, en faiſant, pour un moment, $\sqrt{\frac{a}{4h}} \cdot \Big((fr+x)\xi + y\eta\Big) = \Xi$ & $y\xi - x\eta = \Upsilon$, on a (F) $= -\Xi y + \left(4x\sqrt{\frac{h}{a}} + 2f\sqrt{ah}\right)\Upsilon$, & (G) $= \Xi x + \sqrt{\frac{a}{h}} \cdot y\,\Upsilon$; donc les termes en queſtion ſeront $-\left(\frac{2r^2x}{f\sqrt{a^3h}} + \frac{fy^2x}{2\sqrt{ah^3}}\right)\Xi + \left(-\frac{2r^2y}{fah} + \frac{2fyx^2}{ah}\right)\Upsilon$. Maintenant, à cauſe que nous prenons le grand axe de l'orbite pour celui des abſciſſes x, & que $e = f$ (§. 25.), on aura (§. 18.) $x = \frac{2h-r}{f}$, & $y = \frac{2\sqrt{h}}{f}\sqrt{r - \frac{r^2}{a} - h}$; donc ſubſtituant cette valeur de y dans le coëfficient de Ξ, il deviendra $\frac{2r^2x}{f\sqrt{a^3h}} + \frac{2x}{f\sqrt{ah}}\left(r - \frac{r^2}{a} - h\right) = \frac{2x(r-h)}{f\sqrt{ah}}$; & ſubſtituant la valeur de

x^2 dans le coëfficient de Υ, il deviendra $-\frac{2r^2y}{fah}+\frac{2r^2y}{fak}$ $+\frac{8(h-r)y}{fa}=\frac{8(h-r)y}{fa}$.

Donc, puiſque Ξ & Υ ne contiennent que la première dimenſion de x, y, r, il s'enſuit que les termes dont il s'agit de l'expreſſion de (I), leſquelles paroiſſent, au premier aſpect, devoir contenir la quatrième dimenſion de ces quantités, n'en contiendront réellement que la troiſième.

Cela ſuppoſé, on mettra, tant dans les expreſſions de (H), (h), (A), (a), &c. du §. cité, que dans celles de Π' & π' du §. 48, à la place de x & y, les valeurs $r\ cof.\ \varphi$, $r\ fin.\ \varphi$ (§. 18.), φ étant l'anomalie vraie de la Comète dans ſon orbite non altérée; on verra, 1°. que les expreſſions de (H), (h), (A), (a), &c. deviendront des fonctions rationnelles & entières de ξ, η, ζ, & de $fin.\ \varphi$, $cof.\ \varphi$, & r, dans leſquelles r ne montera au plus qu'au ſecond degré, à l'exception des quantités (I) & (i), dont la première contiendra r^3, & dont la ſeconde contiendra r^4.

2°. Que les expreſſions de Π' & π' deviendront, à cauſe de $\zeta = o$,

$$\Pi' = \frac{3(\xi\, cof.\ \varphi + \eta\, fin.\ \varphi)}{r^4} + \frac{3\rho^2 - 2(\xi\, cof.\ \varphi + \eta\, fin.\ \varphi)^2}{r^5} +, \&c.$$

$$\pi' = \frac{-3\rho^2 + 15(\xi\, cof.\ \varphi + \eta\, fin.\ \varphi)^2}{r^5}$$
$$+ \frac{-15(\xi\, cof.\ \varphi + \eta\, fin.\ \varphi)\rho^2 + 35(\xi\, cof.\ \varphi + \eta\, fin.\ \varphi)^3}{r^6} +, \&c.$$

On ſubſtituera maintenant ces valeurs de (H), (h), (A), (a), &c. dans les expreſſions des différentielles $d\,\delta\, h$, $d\,\delta\, a$, $d\,\delta\, f$, &c. du §. 42, & on y mettra, à la place de Π & π, les valeurs précédentes de Π' & π'; enfin on mettra pour du ſa valeur $\frac{r\,d\varphi}{\sqrt{a\,h}}$ déduite de l'équation $dt = \frac{r^2\,d\varphi}{\sqrt{2h(1+m)}} = \sqrt{\frac{a}{2(1+m)}}.\, r\,du$ (§. 21.).

(52). Il eſt aiſé de voir que par ces différentes ſubſtitutions, les valeurs des différentielles $d\,\delta\,h$, $d\,\delta\,a$, $d\,\delta\,f$, &c. du §. 42, ſe trouveront compoſées de différens termes de la forme $\frac{\Sigma\, cof.\, \varphi^{m}\, fin.\, \varphi^{n}\, d\varphi}{r^{p}}$, m, n, p étant des nombres entiers poſitifs ou *zero*, & Σ étant une fonction rationnelle & entière de ξ, η, ζ; (j'en excepte ſeulement les termes de la valeur de $d\,\delta\,i$ qui ſeront multipliés par l'angle t, & que nous examinerons plus bas). Et il n'eſt pas difficile de prouver que $m + \nu + p$ ne ſera pas > 5 pour les premiers termes de π' & Π', ni > 7 pour les termes ſuivans, & ainſi du reſte.

Or, $r = \frac{2h}{1 + f\, cof.\, \varphi}$ (§. 18.), à cauſe de $e = f$; donc ſi on ſubſtitue cette valeur dans la formule précédente, on n'aura dans les valeurs de $d\,\delta\,h$, $d\,\delta\,a$, $d\,\delta\,f$, &c. que des termes de cette forme $\Sigma\ cof.\ \varphi^{\mu}\ fin.\ \varphi^{\nu}\ d\,\varphi$, μ & ν étant des nombres entiers poſitifs, tels que $\mu + \nu$ non > 5 pour les premiers termes de Π' & π', ni > 7 pour les termes ſuivans; j'excepte toujours les termes affectés de t dans la valeur de $d\,\delta\,i$ (Voyez ci-après le §. 56.).

Qu'on ſubſtitue maintenant dans Σ à la place de ξ, η, ζ leurs valeurs en *ſinus* & *coſinus* de $\theta\sqrt{\frac{a^3}{\alpha^3}}$ (§. 43.); & pour cela on remarquera qu'à cauſe de la petiteſſe des quantités Π' & π', on peut ſans ſcrupule négliger l'effet de l'excentricité de la Planète, & faire ſimplement $\rho = \frac{\alpha}{2}$, $\lambda = \text{M} - \text{A}.\ (\theta - \text{T}) = \sqrt{\frac{a^3}{\alpha^3}} - \text{A}$, en dénotant par A l'anomalie vraie de la Planète qui répond au nœud aſcendant de ſon orbite ſur l'orbite non altérée de la Comète; mais ſi on vouloit abſolument avoir égard à l'excentricité de l'orbite de la Planète, il n'y auroit qu'à ajouter aux valeurs moyennes de ρ & de λ les inégalités du rayon recteur & de la longitude de la Planète, inégalités dont les premières ſont repréſentées par une ſuite très-convergente de termes qui procèdent ſuivant les *coſinus* de M, 2 M, &c. & dont les autres sont représentées par une semblable suite, mais qui procède suivant les *sinus* des mêmes angles.

Voyez les pages 6 & 8 des Tables Astronomiques de Berlin, où *a* dénote l'anomalie moyenne que nous désignons ici par M.

Ces substitutions rendront la quantité Σ de la forme $A + B\,\textit{sin.}\,\upsilon + C\,\textit{cos.}\,\upsilon + D\,\textit{sin.}\,2\upsilon +$, &c., les coëfficiens A, B, C, &c. étant constans, & l'angle υ étant $= \theta\sqrt{\frac{a^3}{\alpha^3}}$.

Ainsi les valeurs des différentielles $d\,\delta\,h$, $d\,\delta\,a$, &c. se trouveront composées de deux sortes de termes; les uns indépendans de l'angle υ, c'est-à-dire du mouvement moyen de la Planète, les autres affectées des *sinus* ou *cosinus* de cet angle ou de ses multiples.

(53). A l'égard des termes de la première espèce, il est clair qu'ils seront de la forme $\textit{cos.}\,\varphi^{\mu}\,\textit{sin.}\,\varphi^{\nu}\,d\,\varphi$, & par conséquent tous intégrables, μ & ν étant, par l'hypothèse, des nombres entiers positifs.

Quant à ceux de l'autre espèce, ils seront évidemment de la forme $\textit{cos.}\,\varphi^{\mu}\,\textit{sin.}\,\varphi^{\nu}\,\textit{sin.}\,N\,\upsilon\,d\varphi$, ou $\textit{cos.}\,\varphi^{\mu}\,\textit{sin.}\,\varphi^{\nu}\,\textit{cos.}\,N\,\upsilon\,d\varphi$, N étant un nombre entier. Ces termes ne sont intégrables par aucune méthode connue; mais nous allons faire voir que dans la partie supérieure de l'orbite de la Comète, à laquelle est destinée la méthode que nous exposons, ces termes seront considérablement plus petits que les précédens; en sorte qu'on pourra le plus souvent les négliger sans scrupule.

Pour cet effet, je remarque que $d\,\upsilon = d\,\theta\sqrt{\frac{a^3}{\alpha^3}}$, mais (§. 20.) $d\,\theta = \sqrt{\frac{8(1+m)}{a^3}}\,d\,t$, & (§. 21.) $d\,t = \frac{r^2\,d\,\varphi}{\sqrt{2h(1+m)}}$; donc $d\,\upsilon = \frac{2\,r^2\,d\,\varphi}{\sqrt{\alpha^3\,h}}$, & de là $d\,\varphi = \frac{d\,\upsilon\sqrt{\alpha^3\,h}}{2\,r^2}$.

Si on substitue cette valeur de $d\,\varphi$ dans les termes dont il s'agit, & qu'on faſſe, pour abréger, $\sqrt{a^3 h} \times \frac{cof. \varphi^{\mu} \; fin. \varphi^{\nu}}{2 N r^2} = \Phi$, ils deviendront $- \Phi \, d. cof. N v$ & $\Phi \, d. fin. N v$, dont l'intégrale eſt $- \Phi \, cof. N v + \int cof. N v \, d \Phi$, $\Phi \, fin. N v - \int fin. N v \, d \Phi$.

Les expreſſions $\int cof. N v \, d \Phi$ & $\int fin. N v \, d \Phi$ repréſentent, comme l'on voit, les aires des courbes qui auroient Φ pour abſciſſe, & $cof. N v$ ou $fin. N v$ pour ordonnée; & il eſt facile de concevoir que l'aire totale de chacune de ces courbes ſera toujours moindre (abſtraction faite du ſigne) que le produit de l'abſciſſe totale par la plus grande ordonnée, laquelle eſt $= 1$. De ſorte que dénotant par (Φ) cette abſciſſe totale, on aura $\pm (\Phi)$ pour les deux limites entre leſquelles ſeront néceſſairement renfermées les aires $\int cof. N v \, d \Phi$ & $\int fin. N v \, d \Phi$.

Or, dans la partie ſupérieure de l'orbite, la diſtance r de la Comète au Soleil eſt ſuppoſée beaucoup plus grande que la diſtance moyenne $\frac{a}{2}$ de la Planète au Soleil; de plus, la diſtance périhélie $\frac{2h}{1+e} = h$, à très-peu près, eſt dans la plupart des Comètes, & ſur-tout dans celles dont on attend le retour, moindre que l'unité, diſtance moyenne de la Terre au Soleil; de ſorte que la quantité $\frac{\sqrt{a^3 h}}{2 N r^2}$ ſera néceſſairement fort petite. Par conſéquent les quantités Φ & (Φ) ſeront beaucoup plus petites, généralement parlant, que la valeur de $\int cof. \varphi^{\mu} \; fin. \varphi^{\nu} \; d \varphi$.

Il faut remarquer au reſte que pour avoir la valeur de (Φ) pour toute la partie ſupérieure de l'orbite, c'eſt-à-dire la valeur totale de l'intégrale de $d \Phi$ pour cet eſpace, il faut prendre les élémens $d \Phi$ toujours avec le même ſigne. Si donc dans tout cet eſpace la quantité Φ n'a ni *maximum* ni *minimum*, on prendra l'intégrale à la manière ordinaire; & l'on aura pour (Φ) la différence entre les deux valeurs extrêmes de Φ. Mais ſi entre ces valeurs extrêmes il ſe trouve des *maxi-*

mum & des *minimum*, alors la valeur exacte de (Φ) sera égale au double de la différence entre la somme de toutes les plus grandes valeurs de Φ; & la somme de toutes les plus petites, en regardant les *maximum* négatifs comme des *minimum*, & les *minimum* négatifs comme des *maximum*, & comptant les deux valeurs extrêmes de Φ par les *maximum* ou *minimum*, suivant que Φ va en diminuant ou en augmentant, mais en ne prenant que la moitié de chacune de ces valeurs. C'est de quoi on peut se convaincre aisément par l'inspection d'une figure parabolique quelconque qui auroit différens *maximum* & *minimum*.

Or, je dis que si $r > (2 + \mu) h$, la quantité Φ n'aura ni *maximum* ni *minimum* lorsque ν sera impair, & qu'elle aura un seul *minimum* au périhélie ou $\Phi = 180^\circ$, lorsque μ sera pair. En effet, à cause de $r = \frac{2h}{1 + f \cos. \varphi}$, on aura $\cos. \varphi = \frac{1}{f} \left(\frac{2h}{r} - 1 \right)$; en sorte que si $r > (2 + \mu) h$ $\cos. \varphi$ sera négatif, & ne changera point de signe, mais $\sin. \varphi$ sera positif en deçà de l'aphélie, & deviendra négatif au delà. Or $\Phi = \sqrt{\alpha^3 h} \times \frac{\cos. \varphi^\mu \sin. \varphi^\nu}{2 N r^2} = \frac{\sqrt{\alpha^3 h}}{(-f)^\mu \cdot 2N} \times \left(1 - \frac{2h}{r} \right)^\mu \frac{\sin. \varphi^\nu}{r^2}$;

mais la quantité $\frac{1}{r^2} \left(- 1 \; \frac{2h}{r} \right)^\mu$ diminue à mesure que r augmente, & *vice versâ*, du moins tant que $r > (\mu + 2) h$, puisque sa différentielle est $- 2 \left(1 - \frac{2h}{r} \right)^{\mu - 1} \left(1 - \frac{(\mu + 2) h}{r} \right) \frac{dr}{r^3}$;

donc si r est impair, la quantité $\left(1 - \frac{2h}{r} \right)^\mu \frac{\sin. \varphi^\nu}{r^2}$ ira en diminuant jusqu'à l'aphélie où elle sera nulle, & continuera à diminuer au delà de l'aphélie où elle sera négative; mais si ν est pair, la même quantité, après avoir diminué jusqu'à l'aphélie, augmentera de nouveau au delà de l'aphélie, en demeurant toujours positives.

Donc si on suppose que la partie supérieure de l'orbite commence au point où $\varphi = \varphi'$, $r = r'$, & finisse au point semblablement ſitué au delà de l'aphélie où $\varphi = 360^\circ - \varphi'$ & $r = r'$ on aura (pourvu que $r' > (2+\mu)\,h$), $(\Phi) = \sqrt{\alpha^3 h}$ $\times \frac{cos.\ \varphi'^{\mu}\ sin.\ \varphi'^{\nu}}{N\,r'^2}$ ſi ν eſt impair, & $(\Phi) = \sqrt{\alpha_3 h}$ $\times \left(\frac{cos.\ \varphi'^{\mu}\ sin.\ \varphi'^{\nu}}{N\,r'^2} - \frac{cos.\ 180^{\circ\mu}\ sin.\ 180^{\circ\nu}}{N\left(\frac{a(1+e)}{2}\right)^2} \right)$ ſi ν eſt pair, $\frac{a(1+e)}{2}$ étant la valeur de r dans l'aphélie.

A l'égard de la condition de $r' > (2+\mu)\,h$, comme nous avons vu (§. 51.) que μ ne peut être > 5 pour les premiers termes de Π' & π', auxquels il ſuffira le plus ſouvent d'avoir égard, il eſt clair que cette condition aura toujours lieu dans la partie ſupérieure de l'orbite où l'on ſuppoſe r beaucoup plus grand que $\frac{\alpha}{2}$, puiſque pour Jupiter & Saturne, qui ſont les ſeules Planètes qu'on ait à conſidérer dans la Théorie des Perturbations des Comètes, on a à peu près $\frac{\alpha}{2} = 5$, ou $9\frac{1}{2}$.

(54). Si les limites $\pm(\Phi)$ n'étoient pas aſſez petites, en ſorte qu'on ne crût pas pouvoir négliger les quantités renfermées entre ces limites, on pourroit les reſſerrer davantage de la manière ſuivante.

Les deux différentielles $cos.\ N\,\upsilon\,d\,\Phi$, $sin.\ N\,\upsilon\,d\,\Phi$, étant miſes ſous la forme $\frac{d\,\Phi}{d\,\varphi}\,cos.\ N\,\upsilon\,d\,\varphi$, & $\frac{d\,\Phi}{d\,\varphi}\,sin.\ N\,\upsilon\,d\,\varphi$, ſe changent par la ſubſtitution de $\frac{d\upsilon\sqrt{\alpha^3 h}}{2\,r^2}$, & par la ſuppoſition de $\frac{\sqrt{\alpha^3 h}}{2\,N\,r^2}\cdot\frac{d\,\Phi}{d\,\varphi} = \Phi'$ en celles-ci $-\Phi'\,d\,cos.\ N\,\upsilon$, & $\Phi'\,d.\,sin.\ N\,\upsilon$, dont l'intégrale eſt $-\Phi\ cos.\ N\,\upsilon + \int cos.\ N\,\upsilon\,d\,\Phi'$, & $\Phi'\ sin.\ N\,\upsilon - \int sin.\ N\,\upsilon\,d.\,\Phi'$; & l'on pourra appliquer aux quantités $\int cos.\ N\,\upsilon\,d\,\Phi'$, $\int sin.\ N\,\upsilon\,d\,\Phi'$ les mêmes raiſonnemens que nous avons faits dans le §. précédent; ainſi dénotant par (Φ') la valeur totale de l'intégrale de $d\,\Phi'$, priſe comme nous l'avons dit dans ce §., on aura de nouveau $\pm (\Phi')$ pour les limites entre lesquelles seront renfermées les valeurs des quantités dont il s'agit.

Or il est facile de se convaincre que la quantité Φ' est nécessairement beaucoup plus petite que la quantité Φ lorsque r^2 est assez grand vis-à-vis de $\sqrt{a^3 h}$: ainsi en négligeant les intégrales renfermées entre ces dernières limites, on commettra une erreur bien plus petite que celle qui pourroit résulter de l'omission des intégrales renfermées dans les limites du §. précédent.

On voit par-là comment on pourroit s'y prendre pour pousser cette approximation plus loin, & diminuer à volonté l'erreur résultante des intégrales qu'on négligeroit; mais il suffira, dans la plupart des cas, de s'en tenir à l'approximation du §. précédent.

(55). Il nous reste encore à examiner les termes multipliés par l'angle t dans la différentielle $d\,\delta\,i$, termes que nous avons expressément exceptés (§. 51.). Or on voit par la valeur générale de $d\,\delta\,i$ du §. 37 (Sect. précédente), que les termes dont il s'agit ne peuvent venir que du terme $3\,t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^5}}.\ d\,\delta\,a$; il suffit donc de considérer ce terme, & d'en chercher l'intégrale, en supposant que l'on mette dans la valeur de $d\,\delta\,a$, les quantités X', Y', Z', à la place des quantités X, Y, Z (§. 48.).

Je reprends pour cela l'expression générale de la différentielle $d\,\delta\,a$ du même §. 37, laquelle est $d\,\delta\,a = -\frac{\mu}{1+m} a^2 (X\,dx + Y\,dy)$, & pour embrasser en même temps toute la généralité possible, je remarque que si on n'avoit pas supposé $z = o$ & $\frac{dz}{dt} = o$, & qu'on eût par conséquent employé dans les calculs de ce §. la valeur complette de $\delta\,a$ du §. 30 à la place de celle du §. 31, on eût trouvé cette expression plus générale de $d\,\delta\,a$, savoir :

$$d\,\delta\,a = -\frac{\mu}{1+m} a^2 (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Qu'on change maintenant dans cette expreſſion les quantités X, Y, Z en X', Y', Z', & qu'on y ſubſtitue enſuite, à la place de ces dernières quantités, leurs valeurs, leſquelles (en faiſant pour abréger $\frac{1}{S} - \frac{1}{R} = P$) ſont exprimées ainſi (§. 39.)

$$X' = \frac{dP}{dx},\ Y' = \frac{dP}{dy},\ Z' = \frac{dP}{dz};$$

il eſt viſible que la différentielle $X'\,dx + Y'\,dy + Z'\,dz$ ne ſera autre choſe que la différence de P priſe en faiſant varier ſeulement les quantités x, y, z, qui appartiennent à l'orbite de la Comète, & en regardant comme conſtantes les coordonnées ξ, η, ζ de l'orbite de la Planète.

De ſorte que ſi on déſigne par la caractériſtique D cette différence partielle, on aura en général $d\,\delta\,a = -\frac{\mu}{1+m}a^2\,DP$. Or on a par le §. 48,

$$P = \frac{\rho^2}{2r^3} - \frac{3(x\xi + y\eta + z\zeta)^2}{2r^5}$$
$$+ \frac{3(x\xi + y\eta + z\zeta)\rho^2}{2r^5} - \frac{5(x\xi + y\eta + z\zeta)^3}{2r^7} + \text{, \&c.}$$

Et ſi l'on ſubſtitue dans cette expreſſion de P les valeurs de ξ, η, ζ, ρ en *ſinus* & *coſinus* de υ (51.), il eſt viſible qu'elle deviendra de cette forme $R + \mathrm{R}\,\mathit{ſin.}\,\upsilon + S\,\mathit{coſ.}\,\upsilon + T\,\mathit{ſin.}\,2\,\upsilon + V\,\mathit{coſ.}\,2\,\upsilon$ + &c., dans laquelle R, R, S, &c. ſeront des fonctions rationnelles & entières de x, y, z, & dont chaque terme ſera de plus diviſé par une puiſſance de r, dont l'expoſant ſurpaſſera de trois unités ou davantage la ſomme des dimenſions de x, y, z dans le numérateur.

Or, comme l'angle υ dépend uniquement des quantités ξ, η, ζ qui doivent être regardées comme conſtantes dans la différence partielle D P, & qu'au contraire les quantités R, R, S, &c. dépendent uniquement des quantités x, y, z qui ſont les ſeules variables dans cette différentielle, il eſt clair qu'on aura $DP = dR + \mathit{ſin.}\,\upsilon\,d\mathrm{R} + \mathit{coſ.}\,\upsilon\,dS + \mathit{ſin.}\,2\,\upsilon\,dT + \mathit{coſ.}\,2\,\upsilon\,dV$, &c.; dR, $d\mathrm{R}$, dS, &c. étant les différences ordinaires & totales des quantités R, R, S, &c.

Donc

Donc on aura en général $d\,\delta\, a = -\frac{\mu\, a^2}{1+m}\,(d\,R + \mathit{sin.}\ v.\ d\,\mathrm{R}$ $+ \mathit{cos.}\ v\, d\,\mathrm{S} + \mathit{sin.}\ v.\ d\,\mathrm{T} +$ &c.) ; & cette valeur de $d\,\delta\, a$, en y faisant $x = r\ \mathit{cos.}\ \varphi$, $y = r\ \mathit{sin.}\ \varphi$, & $z = o$ deviendra identique avec celle du §. 50, mais elle sera toujours d'une forme plus simple & plus commode pour l'intégration.

(56). En effet, on voit d'abord par l'expression précédente de $d\,\delta\, a$, que la partie indépendante de l'angle v est intégrable, son intégrale étant $-\frac{\mu\, a^2}{1+m}\,R$, où R est la partie indépendante de v dans la valeur de P, laquelle sera par conséquent une fonction rationnelle & entière de $\mathit{sin.}\ \varphi$ & $\mathit{cos.}\ \varphi$, en faisant $x = r\ \mathit{cos.}\ \varphi$, $y = r\ \mathit{sin.}\ \varphi$, $z = o$, $r = \frac{2\,h}{1 + f\ \mathit{cos.}\ \varphi}$.

De là on tire cette conclusion importante, que la valeur de $\delta\, a$, c'est-à-dire l'altération du grand axe de l'orbite de la Comète, en tant qu'elle vient des perturbations de la partie supérieure de l'orbite, ne contient aucun terme proportionnel à l'angle φ, & qui puisse par conséquent augmenter continuellement.

A l'égard des autres termes de la valeur de $d\,\delta\, a$, il est clair qu'après la substitution des valeurs de x, y, r en φ, ils deviendront de la forme $\mathit{cos.}\ \varphi^{\mu}\ \mathit{sin.}\ \varphi^{\nu}\ \mathit{sin.}\ \mathrm{N}\, v.\ d\,\varphi$, ou $\mathit{cos.}\ \varphi^{\mu}\ \mathit{sin.}\ \varphi^{\nu}$ $\mathit{cos.}\ \mathrm{N}\, v.\ d\,\varphi$, & pourront être traités par la méthode du §. 52 & suiv.

(57). Venons maintenant au terme $3\,t\sqrt{\frac{2\,(1+m)}{a^3}}\ d\,\delta\, a$ de la valeur de $d\,\delta\, i$. En y substituant d'abord pour $d\,\delta\, a$ la quantité $-\frac{\mu}{1+m}\,a^2\,d\,R$ indépendante de v, on aura la differencielle $-\mu\, 3\sqrt{\frac{2}{a\,(1+m)}}.\ t\ d\ R$, dont l'intégrale est $-3\ \mu\sqrt{\frac{2}{a\,(1+m)}}\left(t\,R - \int R\,d\,t\right)$. Or on a (§. 21.) $d\,t = \frac{r^2\, d\,\varphi}{\sqrt{2\,h\,(1+m)}}$; donc, comme dans l'expression de R, les expoſans négatifs de r ſurpaſſent de trois unités ou davantage la ſomme des expoſans poſitifs de x, y, z (§. 54.), il eſt viſible qu'en mettant dans $R\,r^2$, pour x & y, $r\,cof.\,\varphi$ & $r\,fin.\,\varphi$, (z étant $= o$), la quantité r ne s'y trouvera encore qu'au dénominateur; en ſorte que ſubſtituant enſuite $\frac{2h}{1+f\,cof.\,\varphi}$ pour r, la quantité $R\,r^2$ deviendra une fonction rationnelle & entière de $fin.\,\varphi$ & $cof.\,\varphi$; d'où il s'enſuit que $R\,d\,t = \frac{R\,r^2\,d\,\varphi}{\sqrt{2h(1+m)}}$ ſera tout à fait intégrable.

Quant à l'autre partie de la valeur de $d\,\delta\,a$, elle ſera compoſée, comme nous l'avons vu ci-deſſus, de termes de la forme $-\frac{\mu\,a^2}{1+m}\,cof.\,\varphi^{\mu}\,fin.\,\varphi^{\nu}\,fin.\,N\,v.\,d\,\varphi$, ou $-\frac{\mu\,a^2}{1+m}\,cof.\,\varphi^{\mu}\,fin.\,\varphi^{\nu}\,cof.\,N\,v.\,d\,\varphi$; donc les termes qui en réſulteront dans la valeur de $d\,\delta\,i$ ſeront de la forme $-3\,\mu\sqrt{\frac{2}{a(1+m)}}\,t\,cof.\,\varphi^{\mu}\,fin.\,\varphi^{\nu}\,fin.\,N\,v.\,d\,\varphi$, ou $-3\,\mu\sqrt{\frac{2}{a(1+m)}}\,t\,cof.\,\varphi^{\mu}\,fin.\,\varphi^{\nu}\,cof.\,N\,v.\,d\,\varphi$. Ainſi il ſuffira de conſidérer les différencielles $t\,cof.\,\varphi^{\mu}\,fin.\,\varphi^{\nu}\,fin.\,N\,v.\,d\,\varphi$, & $t\,cof.\,\varphi^{\mu}\,fin.\,\varphi^{\nu}\,cof.\,N\,v.\,d\,\varphi$.

A l'imitation de ce qu'on a fait plus haut (§. 52.), on ſubſtituera dans ces différencielles $\frac{d\,v\sqrt{\alpha^3\,h}}{d\,t^2}$ au lieu de $d\,\varphi$, & faiſant pour abréger $\left(\text{à cauſe de } d\,t = \sqrt{\frac{\alpha^3}{8(1+m)}}\,d\,v\right)$

$$V = \int t\,fin.\,N\,v.\,N\,d\,v = -t\,cof.\,N\,v + \sqrt{\frac{\alpha^3}{8(1+m)}} \times \frac{fin.\,N\,v}{N},$$

$$W = \int t\,cof.\,N\,v : N\,d\,v = t\,fin.\,N\,v - \sqrt{\frac{\alpha^3}{8(1+m)}} \times \frac{cof.\,N\,v}{N},$$

on aura ces transformées $\Phi\,d\,V$ & $\Phi\,d\,W$, en conſervant la valeur de Φ du §. cité.

Intégrant par parties, on aura $\Phi\,V - \int V\,d\,\Phi$, & $\Phi\,W - \int W\,d\,\Phi$, & l'on démontrera par un raiſonnement analogue à celui de ce §. que les valeurs des intégrales $\int V\,d\,\Phi$

& $\int W\, d\,\Phi$ seront renfermées entre les limites $\pm\,(V)\,(\Phi)$, & $\pm\,(W)\,(\Phi)$, en désignant par (V) & (W) les plus grandes valeurs de (V) & (W) dans la partie supérieure de l'orbite, & conservant la valeur de (Φ) de l'endroit cité. Or les *maximum* de V & W ayant lieu lorsque $d\,V = o$ ou $d\,W = o$, c'est-à-dire lorsque $\sin.\,N\,\upsilon = o$, ou $\cos.\,N\,\upsilon = o$, il s'ensuit que les plus grandes valeurs des quantités V & W seront $= t$ (abstraction faite du signe). Si donc on désigne par (t) la valeur de t qui répond à toute la partie supérieure de l'orbite, c'est-à-dire la valeur de t pour le point où finit cette partie de l'orbite, on aura (V) & $(W) = (t)$; & les valeurs des intégrales $\int V\, d\,\Phi$, $\int W\, d\,\Phi$, pour toute la partie supérieure de l'orbite, seront renfermées entre ces limites $\pm\,(t).\,(\Phi)$.

(58). Si on ne jugeoit pas les limites assez approchées, surtout à cause que la valeur de (t) peut être assez considérable, on pourroit les resserrer davantage par une méthode analogue à celle du §. 53.

En effet, en conservant la valeur de Φ' de ce §., & faisant pour abréger

$$V_{,} = \int V N\, d\upsilon = -W - \sqrt{\frac{\alpha^3}{8\,(1+m)}} \times \frac{\cos.\,N\,\upsilon}{N},$$

$$W_{,} = \int W N\, d\upsilon = V - \sqrt{\frac{\alpha^3}{8\,(1+m)}} \times \frac{\sin.\,N\,\upsilon}{N},$$

on transformera les différencielles $V\, d\,\Phi$ & $W\, d\,\Phi$ en celles-ci $\Phi'\, d\,V_{,}$ & $\Phi'\, d\,W_{,}$; dont l'intégrale, prise par parties, sera $\Phi'\,V_{,} - \int V_{,}\, d\,\Phi'$ & $\Phi'\,W_{,} - \int W_{,}\, d\,\Phi'$; & l'on démontrera de la même manière que si $(V_{,})$ & $(W_{,})$ sont les plus grandes valeurs de $V_{,}$ & de $W_{,}$ dans la partie supérieure de l'orbite, on aura pour les valeurs des intégrales $\int V_{,}\, d\,\Phi'$ & $\int W_{,}\, d\,\Phi'$ dans cette partie, les limites $\pm\,(V_{,})\,(\Phi')$ & $\pm\,(W_{,})\,(\Phi')$. Or, sans chercher les valeurs exactes de $(V_{,})$ & $(W_{,})$, il suffira de considérer que les plus grandes valeurs de V & W étant $= t$ (abſtraction faite du ſigne), & les plus grandes valeurs de *ſin.* N υ & *coſ.* N υ étant 1, les plus grandes valeurs de V & de W ne pourront jamais être plus grandes que $t + \frac{1}{N}\sqrt{\frac{\alpha^3}{8(1+m)}}$; en ſorte qu'on pourra prendre dans les limites précédentes $(V_{\prime})$ & $(W_{\prime})$ égales à $(t_{\prime}) + \frac{1}{N}\sqrt{\frac{\alpha^3}{8(1+m)}}$. Et comme la quantité Φ' eſt néceſſairement moindre que Φ dans la partie ſupérieure de l'orbite, il eſt clair que ces nouvelles limites ſeront plus approchées que les premières, & qu'ainſi l'erreur qu'on commettroit en négligeant les intégrales $\int V_{\prime}\, d\,\Phi'$ & $\int W_{\prime}\, d\,\Phi'$, ſera beaucoup moindre que celle qui réſulteroit de l'omiſſion des premières intégrales $\int V_{\prime}\, d\,\Phi$, $\int W_{\prime}\, d\,\Phi$. Et ainſi de ſuite.

(59). De ce que nous venons de démontrer depuis le §. 48 juſqu'ici, il eſt aiſé de conclure que les perturbations que la Comète doit éprouver dans la partie ſupérieure de ſon orbite, peuvent être déterminées analytiquement ſans avoir recours aux quadratures mécaniques, ſinon par des formules rigoureuſes, du moins par des formules très-approchées, & dont on peut pouſſer l'approximation auſſi loin que l'on veut. Si ce Mémoire n'étoit peut-être pas déjà trop long, je préſenterois ici ces formules toutes développées, en ſorte qu'il n'y eût plus que les ſubſtitutions numériques à faire; mais comme cela ne demande plus qu'un travail mécanique de calcul, nous croyons pouvoir nous en diſpenſer, & nous contenter d'avoir expoſé les principes de cette analyſe avec tout le détail & la clarté néceſſaires.

Nous allons donner maintenant une idée de la manière dont on doit faire uſage des théories précédentes, en montrant comment on doit les appliquer à la Comète des années 1532 & 1661 que les Aſtronomes attendent vers 1789 ou 1790.

(60). La Comète de l'année 1532 a été obſervée par Appien, & calculée par Halley; ſes élémens ſont (la diſt. moy. du ☉ étant $= 1$):

Temps moyen du périhélie, à Paris 19 Octobre........		22^h	$21'$	$0''$.
Longitude du périhélie..........................	3^s	21°	$7'$	$0''$.
Distance périhélie..............................	0,50910			
Longitude du nœud ascendant.....................	2^s	20°	$37'$	$0''$.
Inclinaison de l'orbite.........................		32°	$36'$	$0''$.
Sens du mouvement...............................		direct.		

Celle de l'année 1661 a été observée par Hevelius, & calculée par Halley; ses élémens sont :

Temps moyen du périhélie à Paris, 26 Janvier.......		23^h	$50'$	$0''$.
Longitude du périhélie..........................	3^s	25°	$58'$	$40''$.
Distance périhélie..............................	0,44851.			
Longitude du nœud ascendant.....................	2^s	22°	$30'$	$30''$.
Inclinaison de l'orbite.........................		32°	$35'$	$50''$.
Sens du mouvement...............................		direct.		

Comme les élémens de ces deux Comètes sont à très-peu près les mêmes, on est fondé à prendre ces astres pour une même Comète, dont la révolution seroit d'environ 128 ans, & qui devroit, par conséquent, reparoître en 1789. Dans cette hypothèse, on peut attribuer les différences qui se trouvent entre les élémens de 1532 & de 1661, en partie à l'inexactitude des observations, du moins de celles de 1532, & en partie à l'effet des perturbations que la Comète a dû éprouver pendant la révolution de 1532 à 1661 par l'action des Planètes; & on ne sauroit fixer au juste le retour de cette Comète qu'en calculant d'avance l'effet des perturbations qu'elle doit éprouver dans la révolution de 1661 à 1789.

(61). Comme les observations de 1661 ont été faites par Hevelius, on peut les prendre pour exactes, ainsi que les élémens qu'Halley en a déduits. On peut supposer de plus, que ces élémens soient ceux de l'orbite non altérée; puisqu'en faisant abstraction des perturbations qui ont précédé & suivi l'apparition de cette Comète en 1661, elle auroit dû se mouvoir toujours dans le même plan, & avoir le périhélie placé dans le même lieu du ciel.

Nous prendrons donc, pour plus de ſimplicité, le temps du paſſage par le périhélie en 1661, c'eſt-à-dire le 21 Janvier $23^h\ 50'$, temps moyen à Paris pour l'époque du temps t, en ſuppoſant t poſitif après cette époque & négatif avant elle, & en ſe ſouvenant que t exprime l'angle du mouvement moyen du Soleil (20).

Nous prendrons de plus le plan qui coupe l'écliptique à $2^s\ 22^\circ\ 30'\ 32''$, & ſous un angle égal à $32^\circ\ 35'\ 50''$ (cet angle doit être du côté du Nord & ſur la partie de l'écliptique compriſe entre $2^s\ 22^\circ\ 30'\ 32''$ & $8^s\ 22^\circ\ 30'\ 32''$) pour le plan fixe des coordonnées x & y; & nous prendrons l'axe des x dans la ligne menée du Soleil au point de ce plan qui répond à $3^s\ 25^\circ\ 58'\ 40''$ de longitude comptée depuis le lieu de l'équinoxe en 1661. Nous rapporterons enſuite à ce même plan & à ce même axe les lieux des Planètes perturbatrices au moyen des coordonnées rectangles ξ, η, ζ. Ces déterminations s'accordent avec les ſuppoſitions des §. 2 & 25.

(62). Cela poſé ſoit, comme dans la ſeconde Section, a le grand axe de l'orbite non altérée, $4h$ le paramètre de ce grand axe & e l'excentricité de l'orbite $=\sqrt{1-\frac{4h}{a}}$; la diſtance périhélie ſera $=\frac{a-ae}{2}=\frac{a}{2}(1-e)=\frac{a(1-e^2)}{2(1+e)}$ $=\frac{2h}{1+e}$. Or, par les obſervations de 1661, on a conclu la diſtance périhélie $=0{,}44851$ (la diſtance moyenne du Soleil à la Terre étant $=1$), on aura donc $\frac{2h}{1+e}=0{,}44851$. Mais j'obſerve que comme les élémens de 1661 ont été calculés dans l'hypothèſe de l'orbite parabolique, il paroît naturel d'adopter auſſi cette hypothèſe dans la détermination de h; or, dans la parabole, on a $a=\infty$, donc $e=1$, par conſéquent $h=0{,}44851$.

Au reste, nous verrons ci-après que cette valeur de h ne seroit tout au plus diminuée que d'un centième, si on vouloit la déterminer dans l'hypothèse elliptique (§. 64.).

(63). Il faut déterminer maintenant le grand axe a; ce qu'on fera par le principe connu que dans les orbites elliptiques décrites par une même force tendante au foyer & variant dans la raison inverse des carrés des distances, les temps des révolutions sont comme les racines carrées des cubes des moyennes distances. Or l'intervalle entre le passage par le périhélie en 1532, & le passage par le périhélie en 1661 est de 128 ans $99^j\ 1^h\ 21'$; mais il faut remarquer que comme en 1582 on a retranché dix jours, il faut aussi les retrancher du nombre précédent; ce qui le réduira le vrai intervalle entre les deux passages par le périhélie à 128 années $89^j\ 1^h\ 21'$; parmi lesquelles années il y en a 32 de bissextiles.

Réduisant ce temps en jours & en décimales de jours, on aura donc pour l'intervalle dont il s'agit $46841^j, 05625$.

Si les deux périhélies étoient placés dans le même lieu du ciel, il est clair que l'intervalle qu'on vient de trouver seroit en même temps la durée de la révolution de la Comète; mais comme les lieux des deux périhélies diffèrent un peu entre eux, il faut défalquer de l'intervalle trouvé, le temps que la Comète a mis à aller du lieu du périhélie de 1532 à celui du périhélie de 1661.

Pour cela, j'observe que le périhélie de 1661 est plus avancé en longitude que celui de 1532 de $3^\circ\ 51'\ 40''$; mais l'équinoxe a reculé dans l'espace de 128 ans 89^j de $1^\circ\ 45'\ 36''$; donc retranchant cette quantité de la précédente, on aura $2^\circ\ 41'\ 42''$ pour le vrai espace dont le périhélie de 1661 étoit plus avancé par rapport aux étoiles fixes que celui de 1532; donc la Comète, après avoir atteint en 1532 son périhélie a dû parcourir encore autour du Soleil un angle de $2^\circ\ 41'\ 4''$ pour arriver au lieu du périhélie de 1661, parce que le mouvement de cette Comète se fait suivant l'ordre des signes; ce seroit le contraire si la Comète étoit rétrograde.

Il faut donc chercher le temps qui répond à l'anomalie vraie $2^{\circ}\ 41'\ 4''$ dans une parabole dont la distance périhélie est 0,50910. Or, dans la Table générale du mouvement des Comètes (cette Table calculée d'abord par Halley, rendue ensuite plus commode par l'Abbé de la Caille, a été étendue davantage dans le Recueil des Tables, publié par l'Académie de Berlin, tom. 3. p. 2 & suiv.), on trouve que pour l'orbite, dont la distance périhélie seroit $= 1$, ce temps seroit de $1^{j}\ 93$; il faut donc multiplier ce nombre par la racine carrée du cube de 0,50910; & l'on aura $0^{j}\ 70107$ pour le nombre qu'il faudra retrancher du nombre de jours trouvé plus haut, pour avoir la durée de la révolution de la Comète par rapport aux étoiles fixes; laquelle durée sera donc $= 46840^{j},\ 35515$.

Or la durée de la révolution périodique de la Terre, c'est-à-dire, l'année sidérale, est de $365^{j}\ 9'\ 10''$, ou en décimales de jours, de $365^{j}\ 25636$. Donc, puisque la distance moyenne de la Terre au Soleil est prise pour l'unité, & que la distance moyenne de la Comète est $\frac{a}{2}$, on fera cette proportion $365{,}25636 : 46840{,}35515 = 1 : \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$, d'où l'on tire $\frac{a}{2} = \left(\frac{46840{,}35515}{365{,}25636}\right)^{\frac{2}{3}} = 25{,}43013$. C'est la distance moyenne ou le demi-grand axe de l'orbite elliptique de la Comète.

(64). Il est aisé de conclure de l'équation précédente, que si le temps périodique de la Comète étoit plus long ou plus court d'un petit nombre n d'années sidérales, la distance moyenne $\frac{a}{2}$ seroit augmentée ou diminuée à très-peu près de la quantité $\frac{2n}{3\sqrt{\frac{a}{2}}} = 0{,}13220n$; de sorte qu'il faudroit que

n fût plus grand que 7, pour que la distance moyenne fût changée d'une unité.

Or, quoique les Observations de 1532, faites par Appien, ne soient peut-être pas tout à fait exactes, cependant, comme la Comète dont il s'agit n'a été observée que pendant un mois, dans lequel temps elle a passé par le périhélie, il est visible qu'on ne sauroit admettre une erreur de 15 jours dans le passage au périhélie, & qu'ainsi, à cet égard, on est assuré que la valeur de $\frac{a}{2}$ est exacte à 0,05 près.

Mais il y a une autre source d'erreur qui est bien plus considérable; je veux parler de l'effet des perturbations que la Comète a dû éprouver dans la période de 1532 à 1661, & qui ont pu alonger ou diminuer cette période de quelques années. En effet, la détermination précédente du grand axe étant fondée sur l'hypothèse, que la Comète a décrit une orbite régulière autour du Soleil en vertu de la seule attraction de cet astre, cette détermination cesse d'être exacte dès qu'on admet l'action des Planètes sur la Comète : dans ce cas, il est clair qu'on ne sauroit chercher le grand axe de la véritable orbite décrite par la Comète, puisque cette orbite n'est plus une ellipse ; mais on doit chercher plutôt le grand axe de l'orbite que la Comète auroit décrite sans les perturbations, & que nous avons nommée dans le cours de ce Mémoire, orbite non altérée ; & pour cela, il est visible qu'on ne doit pas employer la durée observée de la révolution, mais cette durée corrigée de l'effet des perturbations.

Supposons que cet effet consiste à alonger ou à raccourcir le temps périodique de l'orbite non altérée, d'un petit nombre n d'années sidérales pendant la période de 1532 à 1661; il est clair que ce temps périodique sera plus court ou plus long de n années, que la durée observée de la révolution de la Comète; par conséquent la distance moyenne de l'orbite non altérée sera à très-peu-près $= 25{,}43013 \mp 0{,}13220\, n$.

Or on ne peut déterminer la valeur de n que par le calcul même des perturbations, calcul dans lequel la quantité a entre comme élément; mais comme la valeur de n ne peut être que de quelques unités, il sera permis de prendre pour la valeur de a la quantité 25,43013 qui auroit lieu sans les perturbations, du moins dans le calcul de ces perturbations. L'erreur qu'on pourra commettre par cette supposition, ne sera que de l'ordre des carrés des forces perturbatrices, quantités que nous avons toujours supposées qu'on néglige dans la Théorie des perturbations des Comètes.

(65). En faisant donc $\frac{a}{2} = 25,43013$, & prenant pour h la valeur déterminée ci-dessus (§. 61.), savoir $h = 0,44851$, on trouvera d'abord l'excentricité $e = \sqrt{1 - \frac{4h}{a}} = 0,98222$ $= f$ (§. 25.).

Employant cette valeur de e dans l'équation $\frac{2h}{1+e} = 0,44851$ du §. cité, on trouvera $h = 0,44452$; c'est la valeur de h dans la supposition que la distance périhélie, déduite des observations, soit la véritable distance périhélie dans l'ellipse; & l'on voit que cette valeur diffère à peine de $\frac{4}{1000}$ de celle que donne la supposition de l'orbite parabolique; c'est pourquoi on pourra sans crainte employer la première valeur de h dans le calcul des perturbations.

Comme le demi-petit axe de l'ellipse est $= \sqrt{ah}$, on trouvera ce demi-petit axe $= 4,77612$.

Et si l'on cherche l'angle dont le *cosinus* sera $= e$, on trouvera $10^\circ\ 49'\ 10''$; c'est la valeur de l'anomalie excentrique qui répond à 90° d'anomalie vraie, à compter du périhélie; & c'est aussi la valeur de l'anomalie vraie comptée de l'aphélie pour les points de la distance moyenne.

Enfin, comme nous prenons le périhélie de 1661 pour l'époque d'où l'on doit compter le temps t, & que nous suppoſons que dans ce périhélie, l'orbite troublée coïncide avec l'orbite non troublée (§. 60.); il s'enſuit qu'on aura non ſeulement $\varepsilon = o$, $\psi = o$, & $i = o$, mais auſſi $\delta\varepsilon = o$, $\delta\psi = o$, $\delta i = o$, & de plus $\delta h = o$ dans le même périhélie (§. 38.); donc les cinq variables δh, δg, δb, δc, δi devront être nulles lorſque $t = o$, de ſorte qu'en faiſant commencer dans ce point les intégrations des différencielles $d\delta h$, $d\delta g$, $d\delta b$, $d\delta c$, & $d\delta i$ (§. 42.), il n'y aura point de conſtantes à y ajouter.

Nous remarquerons encore qu'à cauſe de $i = o$, on aura ſimplement $\theta = 2t\sqrt{\frac{2(1+m)}{a^3}}$ (§. 20.), & par conſéquent $t = \theta\sqrt{\frac{8(1+m)}{a^3}}$; & les angles t, θ, u, φ ſeront tous nuls à la fois dans le périhélie de 1661; ils ſeront poſitifs après ce périhélie, & négatifs avant.

A l'égard de la quantité δa, elle devroit auſſi être nulle lorſque $t = o$, ſi la valeur de a étoit exactement égale au grand axe de l'orbite non altérée de la Comète; mais ayant ſuppoſé ci-deſſus $\frac{a}{2} = 25{,}43013$, on aura (§. 63.) pour la vraie diſtance moyenne de l'orbite non altérée, $25{,}43013 \mp 0{,}13220\,n$, laquelle doit être, par l'hypothèſe, la même que celle de l'orbite troublée dans le périhélie de 1661 où $t = o$. Or, le grand axe de l'orbite troublée étant en général $a + \delta a$ (§. 38.), on aura donc, lorſque $t = o$, $\frac{a+\delta a}{2} = 25{,}43013 \mp 0{,}13220\,n$; donc $\frac{\delta a}{2} = \mp 0{,}13220\,n$. D'où l'on voit que cette valeur de δa dépend du nombre n qui eſt l'effet des perturbations dans la période précédente.

(66). Conſidérons maintenant le retour de la Comète au périhélie; il eſt viſible qu'en faiſant abſtraction des perturbations, il n'y aura qu'à ajouter l'intervalle trouvé ci-deſſus (§. 62.) de 128 années $89^{j}\ 1^{h}\ 21'$ à l'époque du paſſage par le périhélie de 1661, pour avoir le temps du retour au périhélie ; & il viendra (en se souvenant que l'année 1700 n'a pas été bissextile) le 26 Avril 1789 $1^h\ 11'$, temps moyen au méridien de Paris. Mais pour avoir exactement le temps du retour de la Comète au périhélie dans l'orbite elliptique dont le demi-grand axe seroit 25,43013, tel qu'on l'a déterminé dans le §. cité, il faudra retrancher du temps qu'on vient de trouver $0^j, 70107$, c'est-à-dire $16^h\ 49' \frac{1}{2}$, par la raison expliquée dans ce même §, ce qui donnera le 25 Avril 1789 $8^h\ 21' \frac{1}{2}$.

Cette détermination seroit entièrement exacte, même en ayant égard aux perturbations, si les deux révolutions consécutives de 1532 à 1661, & de 1661 à 1789 étoient parfaitement égales ; & par conséquent si l'effet des perturbations étoit le même dans ces deux périodes. Donc, si l'altération de ces deux périodes n'est pas la même, il est clair qu'il ne faudra qu'ajouter au temps déterminé ci-dessus, l'excès de l'altération de la seconde période sur l'altération de la première.

Or nous avons donné dans le §. 41 la formule qui exprime en général l'altération de la révolution périodique de la Comète : appliquant donc ici cette formule, & marquant par un, deux, trois traits les quantités qui répondent aux trois périhélies consécutifs de 1532, 1661, 1789, on aura cette quantité, dans laquelle j'ai substitué au lieu de $\delta\varepsilon$ sa valeur $\frac{\delta g}{\epsilon}$ (§. 38.).

$$\frac{3\,(t'''\,\delta a''' - 2\,t''\,\delta a'' + t'\,\delta a')}{2\,a}$$
$$- \sqrt{\frac{a^3}{8\,(1+m)}}\,(\delta i''' - 2\,\delta i'' + \delta i')$$
$$- \left(\frac{2\,h}{1+e}\right)^2 \times \frac{\delta g''' - 2\,\delta g'' + \delta g'}{e\sqrt{2\,h\,(1+m)}};$$

c'est la correction du temps, c'est-à-dire le temps qu'il faudra ajouter au 25 Avril 1789 $8^h\ 21' \frac{1}{2}$ pour avoir l'instant du passage de la Comète par la ligne du périhélie de 1661, dont la longitude étoit alors de $3^s\ 25^\circ\ 58'\ 40''$, & sera en 1789 (à cause de la précession des équinoxes) de $3^s\ 27^\circ\ 46'\ 16''$.

Il est bon de remarquer que la dernière partie de la quantité précédente, celle qui contient les quantités $\delta g'$, $\delta g''$, $\delta g'''$, dépend uniquement du déplacement du périhélie, comme on peut le voir par le §. 41 ; de sorte qu'en rejetant cette partie, la quantité restante sera la correction du temps pour le passage de la Comète par le vrai périhélie de 1789 ; mais il faudra alors ajouter cette correction au 26 Avril 1789 $1^h\ 11'$, temps du passage par le périhélie, dans le cas où la révolution anomalistique de 1661 à 1789 seroit égale à celle de 1532 à 1661.

Pour réduire ces quantités en temps, on se souviendra que nous exprimons le temps par le mouvement moyen du Soleil (§. 20.). De sorte que si la quantité à réduire en temps est exprimée en angles, en la divisant par 360°, on aura des années sidérales de $365^j, 25636$; & si elle est exprimée en nombres absolus (la moyenne distance du Soleil étant l'unité), il faudra la diviser par le rapport de la circonférence au rayon, c'est-à-dire, par 6,283185....... pour la réduire de même en années sidérales.

(67). La formule précédente est générale ; mais dans notre cas on aura, par ce qu'on a établi dans le §. 64, $t'' = o$, $\delta i'' = o$, $\delta g'' = o$; de plus, à cause de $t = \theta \sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}}$ (θ étant l'anomalie moyenne de la Comète), on aura $t''' = 360^\circ \sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}}$, $t' = -360^\circ \sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}}$; de sorte que la première partie de la formule dont il s'agit se réduira à $\frac{3 \cdot 360^\circ}{4} \sqrt{\frac{a}{2(1+m)}} \cdot (\delta a''' - \delta a')$; où $\delta a'''$ sera l'intégrale totale de la différencielle $d\,\delta\,a$, pour la période entière de 1661 à 1789, en faisant t positif, & où $\delta a'$ sera de même l'intégrale totale de $d\,\delta\,a$, pour la période de 1661 à 1532, en faiſant t négatif; de ſorte que comme il n'y a que la différence de ces deux intégrales qui entre en ligne de compte, il n'y aura point de conſtantes à y ajouter, & on pourra prendre chaque intégrale, en ſorte qu'elle commence au périhélie de 1661, où $t = o$.

Les deux autres parties de la même formule deviendront $-\sqrt{\frac{a^3}{8(1+m)}}(\delta i''' + \delta i') - \left(\frac{2h}{1+e}\right)^2 \times \frac{\delta g'' + \delta g'}{e\sqrt{2h(1+m)}}$, où (à cauſe de $\delta i'' = o$ & $\delta g'' = o$), il faudra prendre pour $\delta i'''$ & $\delta g'''$ les intégrales des quantités $d\,\delta\,i$, & $d\,\delta\,g$ depuis le périhélie de 1661 juſqu'à celui de 1789, & pour $\delta\,i'$, & $\delta\,g'$ les intégrales des mêmes quantités, mais depuis le périhélie de 1661 juſqu'à celui de 1532, en ſuppoſant t négatif.

L'altération du temps périodique eſt celle qu'il eſt le plus important de déterminer dans la Théorie des Perturbations des Comètes.

Quant aux altérations des autres élémens de l'orbite, on les déterminera directement par l'intégration des quantités $d\,\delta\,h$, $d\,\delta\,a$, $d\,\delta\,g$, $d\,\delta\,b$, $d\,\delta\,c$ (§. 58, 42 & ſuiv.), en faiſant commencer les intégrales au périhélie de 1661, & les étendant juſqu'au périhélie de 1789 ou de 1532, ſuivant qu'on voudra déterminer ces altérations pour la dernière période de la Comète ou pour la période précédente.

(68). Voilà toutes les données & les formules néceſſaires pour calculer les perturbations cauſées à l'orbite de la Comète dont il s'agit par l'action des Planètes. Or, parmi toutes les Planètes, il n'y a que Jupiter & Saturne, dont l'action ſur la Comète puiſſe être ſenſible, tant parce que les maſſes des autres Planètes ſont trop petites, que parce qu'elles ſont trop proches du Soleil. Ainſi on prendra ſucceſſivement Jupiter & Saturne pour la Planète perturbatrice dont on a ſuppoſé la maſſe μ, & dont le rayon vecteur eſt ρ, & les coordonnées rectangles ξ, η, ζ. Les Tables Aſtronomiques de Halley donneront toutes les valeurs des quantités qui dépendent des lieux de ces Planètes dans un temps quelconque; & nous ne croyons pas qu'il ſoit néceſſaire d'entrer là-deſſus dans aucun détail.

Comme la diſtance de Jupiter au Soleil eſt environ 5, & celle de Saturne environ $9\frac{1}{2}$, il eſt clair que ſi on fait commencer la partie ſupérieure de l'orbite de la Comète aux points de la moyenne diſtance, c'eſt-à-dire, aux extrémités du petit axe, alors r ſera toujours beaucoup plus grand que ρ, & la méthode du §. 48 & ſuiv. aura toute l'exactitude qu'on peut déſirer, en négligeant même tout à fait les termes qui dépendent du mouvement moyen de la Planète perturbatrice dans les formules des quantités différencielles $d\,\delta\,h$, $d\,\delta\,a$, &c., & en ne tenant compte que des termes indépendans de l'angle υ, que nous avons vu être toujours intégrables (§. 52 & 56.).

Il y aura encore un autre avantage à prendre ainſi la moitié ſupérieure de l'orbite pour ce que nous appelons la partie ſupérieure. Car on aura alors pour le commencement de cette partie $u = \pm - 90$, & pour la fin $u = \pm 270$; de ſorte qu'à cauſe de $x = \frac{a}{2}(\text{coſ.}\,u - e)$, $y = \sqrt{a\,h}.\,\text{ſin.}\,u$, $r = \frac{a}{2}(1 - e\,\text{coſ.}\,u)$ & $dt = \sqrt{\frac{a}{2(1+m)}}.\,r\,d\,u$, ($u$ étant l'anomalie excentrique comptée depuis le périhélie), on aura pour le commencement de la partie ſupérieure $x = -\frac{a\,e}{2}$, $y = \pm\sqrt{a\,h}$, $r = \frac{a}{2}$, $\frac{dx}{dt} = \mp\sqrt{\frac{2(1+m)}{a}}$, $\frac{dy}{dt} = 0$, $\frac{dr}{dt} = \pm\,e\sqrt{\frac{2(1+m)}{a}}$, & pour la fin $x = -\frac{a\,e}{2}$, $y = \mp\sqrt{a\,h}$, $r = \frac{a}{2}$, $\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2(1+m)}{a}}$, $\frac{dy}{dt} = 0$, $\frac{dr}{dt} = \mp\,e\sqrt{\frac{2(1+m)}{a}}$ (les ſignes ſupérieurs étant pour le cas où l'on prendra les angles t & u poſitifs, c'eſt-à-dire, pour la période qui ſuit le périhélie de 1661, & les ſignes inférieurs étant pour le cas où t & u ſeront négatifs, c'eſt-à-dire, pour la période qui précède ce périhélie), ce qui ſimplifiera beaucoup les valeurs des quantités H′, H″, A′, A″, &c. c'eſt-à-dire, les valeurs de H, A, &c.

pour le commencement & pour la fin de la partie ſupérieure de l'orbite (§. 48.).

Quant à la maſſe m de la Comète que nous avons conſervée, pour plus d'exactitude & de généralité, dans les formules de ce Mémoire, elle eſt inconnue, & rien ne ſauroit conduire à la déterminer; mais il eſt naturel de la ſuppoſer très-petite vis-à-vis de la maſſe du Soleil; de ſorte qu'on pourra négliger par-tout la quantité m vis-à-vis de l'unité.

THÉORIE

DES

MACHINES SIMPLES,

EN AYANT ÉGARD AU FROTTEMENT DE LEURS PARTIES, ET A LA ROIDEUR DES CORDAGES.

PIECE qui a remporté le Prix double de l'ACADÉMIE DES SCIENCES pour l'année 1781.

La Raiſon a tant de formes, que nous ne ſavons à laquelle nous prendre; l'Expérience n'en a pas moins.

ESSAI DE MONTAIGNE. Liv. III, ch. 13.

Par M. COULOMB, Chevalier de l'Ordre de SAINT LOUIS, Capitaine en premier au Corps Royal du Génie, pour lors Correſpondant, & depuis Membre de l'ACADÉMIE DES SCIENCES.

THÉORIE

DES

MACHINES SIMPLES,

EN AYANT ÉGARD AU FROTTEMENT DE LEURS PARTIES, ET A LA ROIDEUR DES CORDAGES.

M. AMONTONS, dans les Mémoires de l'ACADÉMIE DES SCIENCES pour 1699, paroît être le premier Auteur qui ait cherché à évaluer le frottement & la roideur des cordes dans le calcul des Machines. Il crut trouver, par ses expériences, que l'étendue des surfaces n'entroit pour rien dans les frottemens, dont la mesure dépendoit uniquement de la pression des parties en contact : il en conclut que, dans tous les cas, le frottement étoit proportionnel aux pressions.

La plupart des Mécaniciens suivirent les résultats de M. Amontons ; cependant M. Muschembroek trouva, dans plusieurs expériences, que les frottemens ne dépendoient pas uniquement de la pression, & que l'étendue des surfaces y influoit. M. de Camus, dans son Traité des Forces mouvantes, & Désaguilliers, dans son Cours de Physique, s'apperçurent que le frottement d'un corps ébranlé étoit moins considérable que celui d'un corps que l'on vouloit sortir de l'état de repos : mais ni l'un ni l'autre ne cherchèrent à déterminer le rapport qui pouvoit exister entre ces deux espèces de frottement. M. l'Abbé Bossut, dans son excellent Traité de Mécanique, penche pour le système de M. Amontons, qui donne une grande facilité dans les calculs, & qui suffit dans la plupart des cas de pratique; pourvu que l'on ait soin de distinguer le frottement dans les surfaces en mouvement, d'avec la force qu'il faut employer pour détacher ces mêmes surfaces après un certain temps de repos. L'on voit de plus, par les réflexions qui précèdent le calcul du frottement des machines dans la mécanique de M. l'Abbé Bossut, que ce célèbre Auteur a prévu, comme l'on pourra s'en convaincre par nos expériences, ce qui arriveroit relativement à l'étendue des surfaces, aux pressions & aux vîtesses dans les expériences qui restoient encore à faire.

Des essais faits en petit, dans un Cabinet de Physique, ne peuvent pas suffire pour nous diriger dans le calcul des machines destinées à soulever plusieurs milliers; parce que la moindre inégalité, le plus foible obstacle placé entre les surfaces, la cohérence de quelques parties plus ou moins homogènes, jettent la plus grande irrégularité dans les résultats. L'on exécute tous les jours dans nos Ports une manœuvre qui montre combien peuvent être fautives des conclusions sur le frottement, tirées des expériences faites en petit; c'est celle de lancer les vaisseaux à l'eau sur un plan incliné de 10 ou 12 lignes par pied, ce qui indique que le frottement n'est pas, dans cette opération, le quatorzième de la pression; tandis qu'en faisant glisser, sous de petites pressions, un madrier de chêne sur un autre madrier du même bois, on avoit cru qu'il étoit le tiers de la pression.

M. Amontons avoit aussi cherché à évaluer la roideur des cordes. Le moyen ingénieux qu'il a employé dans ses expériences, a été depuis mis encore en usage par Désaguilliers, & par plusieurs autres Physiciens; mais le travail de ces différens Auteurs a le même inconvénient que celui fait jusques à présent sur les frottemens: ce sont plutôt des ficelles que des cordes, qui ont été soumises aux épreuves, avec des tractions de soixante livres au plus, & ſur des rouleaux dont le plus grand n'étoit que de 18 lignes de diamètre.

L'Académie voulant un travail qui puiſſe diriger dans le calcul des machines, exige » que les loix du frottement & » l'examen des effets réſultans de la roideur des cordages » ſoient déterminés d'après des expériences nouvelles & faites » en grand; elle exige de plus, que les expériences ſoient » applicables aux machines uſitées dans la Marine, telles que » la poulie, le cabeſtan & le plan incliné «. Je ne me flatte pas d'avoir rempli les vûes auſſi vaſtes qu'utiles de cette illuſtre Compagnie; mais je crois avoir fait quelques pas dans la carrière qu'elle a ouverte.

Ce Mémoire ſera diviſé en deux Parties; dans la première, nous chercherons le frottement des ſurfaces qui gliſſent l'une ſur l'autre, tel que celui d'une ſurface qui gliſſe le long d'un plan incliné.

Dans la deuxième Partie, nous chercherons à évaluer la roideur des cordages : nous y examinerons auſſi le frottement dans les mouvemens de rotation.

PREMIERE PARTIE.

Du frottement des surfaces planes qui glissent l'une sur l'autre.

2. LE frottement, dans ce genre de mouvement, peut être envisagé sous deux points de vue, ou lorsque les plans sont posés l'un sur l'autre depuis un certain temps, & que, par une traction dans la direction du plan de contact, l'on veut les détacher, ou lorsque ces plans ont déjà un certain degré de vîtesse uniforme, & que l'on cherche le frottement sous ce degré de vîtesse.

3. Dans le premier cas où l'on veut faire glisser une surface sur une autre en la sortant de l'état de repos, le frottement peut dépendre de quatre causes.

1°. De la nature des matières en contact, & de leurs enduits;

2°. De l'étendue des surfaces.

3°. De la pression que ces surfaces éprouvent.

4°. De la longueur du temps écoulé depuis que les surfaces sont en contact.

A ces quatre causes, l'on pourroit en ajouter peut-être une cinquième, c'est la situation humide ou sèche de l'atmosphère. L'on conçoit en effet que les particules humides contenues dans l'air, s'attachant aux surfaces en contact, y forment un enduit qui les dénature. Mais comme cette dernière cause ne paroît pas devoir influer d'une manière sensible dans les résultats, nous n'y avons point eu égard dans nos épreuves.

4. Lorsque les surfaces glissent l'une sur l'autre avec un certain degré de vîtesse, pour lors le frottement peut encore dépendre

des trois premières causes rapportées à l'article qui précède, & en outre de la vîtesse plus ou moins grande des plans en contact.

5. La cause physique de la résistance opposée par le frottement au mouvement des surfaces qui glissent l'une sur l'autre, ne peut être expliquée, ou que par l'engrainage des aspérités des surfaces qui ne peuvent se dégager qu'en se pliant, qu'en se rompant, qu'en s'élevant à la sommité les unes des autres; ou bien il faut supposer que les molécules des surfaces des deux plans en contact contractent, par leur proximité, une cohérence qu'il faut vaincre pour produire le mouvement : l'expérience seule pourra nous décider sur la réalité de ces différentes causes.

Etablissement pour exécuter les Expériences.

6. Nous avons fait construire (*Fig.* 1.) une table très-solide, dont chaque pilier montant étoit accoré par des jambes de forces. Le madrier CC′ dd′ qui forme la table, a 5 pouces d'épaisseur, 8 pieds de longueur & 2 pieds de largeur. Sur cette table, l'on a posé deux pieces de bois de chêne AB, A′B′ de 12 pieds de longueur & de 8 pouces de grosseur : ces deux pieces de bois sont posées suivant la longueur de la table, & à 3 pouces de distance l'une de l'autre; à l'extrémité B B′ des pieces de bois, l'on a placé, dans le vide qui les sépare, une poulie h de bois de gaïac d'un pied de diamètre, tournant sur un axe de chêne vert de 10 lignes de diamètre : sous cette poulie, l'on a creusé un puits de 4 pieds de profondeur.

A l'autre extrémité AA′ des pieces de bois, l'on a placé, à angle droit, un petit treuil horizontal. L'on a fortement attaché sur les deux pieces de bois un madrier de chêne aa′ bb′ de 8 pieds de longueur, 16 pouces de largeur & 3 pouces d'épaisseur; son plan supérieur aa′ bb′ posé de niveau, avoit été dressé à la varlope avec beaucoup de soin, & poli ensuite avec une peau de chien de mer.

L'on a fait successivement glisser sur ce madrier plusieurs traîneaux dont voici la construction : A B C D (*Fig.* 2, n°. 1 & 2.), est un madrier de 18 pouces de largeur & de différentes longueurs, comme il sera détaillé aux expériences. Sous ce madrier, n°. 1, l'on a cloué des deux côtés deux petits liteaux, A m C m, BD n n'; en sorte que le traîneau posé sur le madrier dormant, est retenu des deux côtés par ces liteaux avec un jeu de 2 ou 3 lignes, pour qu'il suive, sans être gêné, la direction du madrier.

Lorsqu'on veut diminuer les surfaces de contact, l'on cloue sous le traîneau des règles de différentes largeurs, dont on arrondit les extrémités pour y placer les clous, afin qu'ils ne portent pas contre le madrier dormant. Des deux crochets, n°. 2, fixés aux deux extrémités du traîneau, l'un sert (*Fig.* 1.) à attacher la corde qui passe sur la poulie h, & porte le plateau F ; à l'autre est attachée une corde qui enveloppe le treuil, & sert à rappeler le traîneau du côté A A'.

CHAPITRE PREMIER.

Du premier effort nécessaire pour vaincre le frottement, ou pour faire glisser une surface après un temps de repos donné.

7. Nous avons dit que, dans le frottement, il falloit distinguer avec soin la force nécessaire pour le vaincre lorsque les surfaces sont posées l'une sur l'autre depuis un certain temps, de la force nécessaire pour entretenir une vîtesse uniforme lorsque les surfaces ont un mouvement respectif. Ce Chapitre est destiné à déterminer la résistance du frottement après un certain temps de repos.

8. Comme, dans les expériences de ce Chapitre, il faut avoir le frottement des surfaces posées l'une sur l'autre depuis un

un temps donné ſouvent très-court, & que, ſous les grandes preſſions, ce frottement devient conſidérable, la manœuvre lente de charger & de décharger le plateau P, pour augmenter & diminuer les tractions, ne peut pas convenir à la recherche actuelle, & nous y avons ſubſtitué le moyen ſuivant.

Nous avons fait faire (*Fig.* 3.) une eſpèce de romaine a b de 7 pieds de longueur; à l'extrémité eſt fixé un axe de fer taillé en couteau, qui ſert de point de rotation, & qui porte librement contre deux petites plaques de fer attachées ſous les extrémités BB′ des deux pieces de bois de la première Figure. En C, eſt un anneau que l'on attache à la corde du traîneau qui paſſe ſur la poulie h : au moyen d'un poids P que l'on fait gliſſer peu à peu le long de la romaine a b, l'on meſure la tenſion de la corde fixée au point C, & lorſque le levier commence à emporter le traîneau, cette tenſion eſt la meſure du frottement du traîneau. L'on a eu ſoin d'ajouter à la tenſion produite par le poids P, celle qui répondoit au poids du levier, & à la diſtance de ſon centre de gravité au point de rotation.

SECTION PREMIERE.

Des frottemens des ſurfaces qui gliſſent à ſec l'une ſur l'autre, ſuivant le fil du bois, ſans aucune eſpèce d'enduit, mais ſeulement avec le degré de poli que l'art peut leur donner.

Bois de chéne ſur bois de chéne.

9. LE traîneau (*Fig.* 2.) a 2 pieds 3 pouces de longueur; le madrier dormant, ſur lequel porte le traîneau, a 1 pied 4 pouces de large, ce qui donne une ſurface de contact de 3 pieds carrés. L'on veut déterminer le frottement après un certain temps de repos, ſous différentes preſſions.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Le traîneau, ſans être chargé d'aucun poids, peſant 74 livres, le frottement a augmenté d'une manière irrégulière pendant les 30 premières ſecondes ; mais il a fallu indiſtinctement, au bout d'une minute & de dix minutes de repos, une traction de 30 livres pour vaincre le frottement.

II.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon propre poids compris de 874 ℔

Le mouvement a été incertain, mais a augmenté pendant les dix premières ſecondes ; après une minute & une heure de repos, l'on a eu indiſtinctement. . . . 406 ℔

III.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 2474 ℔

Après $\frac{1}{2}''$ de repos, le frottement a été trouvé de . 586 ℔

Il a augmenté pendant deux ſecondes, où on l'a trouvé de 1106

Après une minute & deux heures de repos, l'on a eu également 1116

Obſervations ſur ces trois Expériences.

10. (*a*) Nous avons conſtamment obſervé, dans les trois expériences qui précèdent, que la réſiſtance du frottement étoit moindre après une ſeconde de repos qu'après une ou deux minutes ; mais qu'après une ou deux minutes, le frottement avoit acquis toute l'augmentation dont il paroît ſuſceptible. Nous

(*a*) Le frottement de la poulie *h* peut être négligé dans toutes ces expériences ; il n'eſt guère ici, comme nous le trouverons en déterminant le frottement des axes, que la cent cinquantième partie du frottement du traîneau.

avons, d'après cette obſervation, cherché à déterminer le rapport de la preſſion au frottement, lorſque ce dernier eſt parvenu à ſa limite ou au *maximum* de ſon accroiſſement; nous avons pour ce rapport:

I.ere Expérience	$\frac{74}{30}$	2,46.
II.e Exp.	$\frac{874}{406}$	2,16.
III.e Exp.	$\frac{2474}{1116}$	2,21.

Comme ces trois expériences donnent, pour le rapport de la preſſion au frottement, une quantité à peu près conſtante, malgré la grande différence qui ſe trouve dans les preſſions, j'ai voulu voir ſi, en diminuant, autant qu'il eſt poſſible, les ſurfaces de contact, ce rapport ſe trouveroit encore le même.

11. Sous un traîneau de 15 pouces de longueur, j'ai fait clouer deux petits priſmes triangulaires de bois de chêne de 15 pouces de longueur, mais dont l'angle qui portoit ſur le madrier dormant étoit arrondi: la *Fig.* 4 repréſente une ſection tranſverſale du traîneau & des deux petites règles priſmatiques ſur leſquelles il porte.

IV.eme Expérience.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 250 ℔

Après un quart de ſeconde de repos, après une minute & une heure, l'on trouve indiſtinctement que la traction néceſſaire pour vaincre le frottement eſt de . . . . 106 ℔

V.eme Expérience.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 450 ℔

Après un quart de ſeconde & une heure, la réſiſtance due au frottement a été trouvée indiſtinctement de . . 186 ℔

VI.$^{\text{eme}}$ EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 856 ℔
Après un quart de ſeconde & une heure, le frottement a été trouvé également de . . . . 356 ℔

Obſervations ſur les trois Expériences qui précèdent.

12. Si l'on veut déterminer, d'après les trois dernières expériences, le rapport de la preſſion au frottement, l'on obſervera d'abord que lorſque les points de contact ſont réduits aux plus petites dimenſions poſſibles, comme ils le ſont ici, le frottement parvient, dans un temps très-court, à ſon *maximum* : car il ne m'a jamais été poſſible, dans les trois dernières expériences, quelque court qu'ait été le temps de repos, de faire varier le frottement, & de le trouver moindre que la quantité qui repréſente ici ſa limite. Le rapport de la preſſion au frottement, tiré des trois dernières expériences, donne :

III.^{e} EXPÉRIENCE.	$\frac{250}{106}$	2,36.
IV.^{e} EXP.	$\frac{450}{186}$	2,42.
V.^{e} EXP.	$\frac{856}{356}$	2,40.

L'on trouve donc que lorſque les ſurfaces de contact ſont réduites aux plus petites dimenſions poſſibles, comme elles le ſont ici, puiſque notre traîneau ne porte que par des angles arrondis, le rapport de la preſſion au frottement eſt repréſenté par une quantité conſtante; que ce rapport d'ailleurs diffère très-peu de celui que nous avons trouvé dans les trois premières expériences, puiſque le rapport moyen de la preſſion au frottement donné par les trois premières expériences, eſt de 2,28, & qu'il eſt dans les trois dernières 2,39; quantités qui ne diffèrent pas d'un vingt-troiſième, quoique l'étendue des ſurfaces ſoient entre elles dans un rapport preſque infini. Ainſi, il réſulte certainement des expériences qui précèdent, que lorſque les ſurfaces de bois de chêne gliſſent l'une ſur l'autre ſans aucun enduit, le rapport de la preſſion au frottement eſt toujours une quantité conſtante, & que la grandeur des ſurfaces n'y influe que d'une manière inſenſible. Il y a cependant une remarque à faire; c'eſt que lorſque les ſurfaces en contact ont beaucoup d'étendue, & qu'elles n'éprouvent que des petites preſſions, le frottement varie d'une manière très-irrégulière, ſuivant les poſitions où ſe trouve le traîneau. Ainſi, dans la première expérience, lorſque la preſſion étoit ſeulement de 74 livres, & la ſurface en contact de 3 pieds carrés; quoique j'aye trouvé moyennement le frottement de 30 livres, je l'ai auſſi trouvé quelquefois, après un temps très-long, au deſſous de 30 livres, & après un temps très-court, au deſſus de 30 livres, & une fois de 55 livres, ſans que je puiſſe attribuer ces différences à d'autres cauſes qu'à la cohéſion, & qu'au plus ou moins d'homogénéité des parties en contact; mais lorſque les preſſions ſont de pluſieurs quintaux, comme dans les cinq dernières expériences, ces irrégularités ceſſent d'avoir lieu, ou au moins, étant probablement indépendantes des preſſions, elles ceſſent d'être ſenſibles. C'eſt-là la raiſon pour laquelle nous avons toujours trouvé plus d'exactitude dans les eſſais des trois dernières expériences où la ſurface de contact eſt très-petite, que dans ceux des trois premières où la ſurface de contact eſt de 3 pieds; c'eſt ce qui, juſqu'à préſent, a dû jeter de l'incertitude ſur les eſſais faits en petit.

Frottement du chêne & du ſapin.

13. L'on a fixé, ſous un traîneau de 15 pouces de longueur, deux règles de ſapin de 2 pouces de largeur; ces règles étoient arrondies à leur extrémité, en ſorte que les clous enfoncés dans ces arrondiſſemens pour fixer les règles au traîneau, ne pouvoient ni toucher ni écorcher le madrier dormant; la ſurface de contact étoit de 48 pouces.

VII.^{eme} Expérience.

Le traîneau chargé, son poids compris de 50 ℔

Après $\frac{1}{2}''$ de repos, le frottement a été trouvé de . . . . 25 ℔

Après 2″ de repos. 30

Après 10″ & une heure. 36

VIII.^{eme} Expérience.

Le traîneau chargé, son poids compris de 450 ℔

Après $\frac{1}{2}''$ de repos. 256

Après 2″ de repos. 286

Après une minute & une heure. 284

IX.^{eme} Expérience.

Le traîneau chargé, son poids compris de 850 ℔

Après $\frac{1}{2}''$ & une heure de repos. . . . . 560 ℔

Observations sur ces trois Expériences.

14. Le frottement du sapin contre le chêne nous donne des résultats analogues à ceux que nous venons de trouver pour le frottement du chêne contre le chêne : moins les pressions sont grandes, plus il faut du temps pour que le frottement atteigne sa limite. Dans la septième expérience, où la charge du traîneau n'est que 50 livres, on voit le frottement croître sensiblement pendant quatre ou cinq secondes. Dans la neuvième expérience, où la charge est de 850 livres, il parvient à son *maximum* dans une demi-seconde : en déterminant le rapport de la pression au frottement, l'on trouve :

VII.^{e} Expérience. . . . . $\frac{50}{36}$ . . . . 1,39.

VIII.^{e} Exp. . . . . $\frac{450}{286}$ . . . . 1,58.

IX.^{e} Exp. . . . . $\frac{850}{560}$ . . . . 1,52.

Ces quantités peuvent être regardées comme absolument égales entre elles, & donnent 1,50 pour le rapport moyen de la pression au frottement, lorsqu'il est parvenu à sa limite.

Frottement du sapin contre le sapin.

15. L'on a fixé sur le madrier dormant deux règles de sapin, & l'on a fait glisser sur ces règles le traîneau qui avoit servi dans les trois dernières expériences; la surface de contact étoit de 48 pouces.

X.^eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 50 ℔
Après ½″ de repos. . . . . 20 ℔
Après 3″ & une heure. 27

XI.^eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 250 ℔
Après 2″ de repos & une heure. . . . . 145 ℔

XII.^eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 850 ℔
Après 2″ & une heure de repos. . . . . 480 ℔

Observations sur ces trois Expériences.

16. Le frottement du sapin contre le sapin a acquis son *maximum* dans aussi peu de temps, & suivant les mêmes loix que le chêne glissant sur le sapin : l'on trouve encore ici le rapport de la pression au frottement constant sous tous les degrés de pression.

X.^e EXPÉRIENCE.	$\frac{50}{27}$	1,85.
XI.^e EXP.	$\frac{250}{145}$	1,72.
XII.^e EXP.	$\frac{850}{480}$	1,77.

pour le rapport moyen de la preſſion au frottement, l'on aura . . . . 1,78.

Frottement du bois d'orme contre lui-même.

17. L'on a ſubſtitué aux deux règles de ſapin placées ſur le madrier dormant, ainſi qu'à celles clouées ſous le traîneau, des règles de bois d'orme des mêmes dimenſions, en ſorte que la ſurface de contact étoit de 48 pouces.

XIII.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 45 ℔

Après un repos de $\frac{1}{2}''$, le frottement a été trouvé de	6 ℔
Après un repos de $3''$.	10
Après un repos de $60''$.	19
Le frottement a paru encore augmenter pendant deux ou trois minutes; ſa limite, après une heure de repos, a été trouvée de	21

XIV.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 450 ℔

Après un repos de $\frac{1}{2}''$.	100 ℔
Après un repos de $3''$.	160
Après une minute & une heure.	207

XV.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 1650 ℔

Après un repos de $\frac{1}{2}''$.	356 ℔
Après un repos de $2''$.	556
Après un repos de $10''$, d'une minute & d'une heure.	756

Obſervations ſur ces trois Expériences.

18. Le bois d'orme, qui au toucher paroît doux & velouté, s'engraine beaucoup plus lentement que les autres bois. L'accroiſſement

croiſſement du frottement eſt ſenſible pendant quelques ſecondes, & ne parvient à ſon *maximum*, ſous une preſſion de 45 livres, qu'après un repos de plus d'une minute. Si l'on cherche, en comparant les trois expériences, le rapport de la preſſion au frottement, lorſque ce frottement a atteint ſon *maximum*, l'on trouve:

XIII.ᵉ Expérience	$\frac{45}{21}$	2,14.
XIV.ᵉ Exp.	$\frac{450}{207}$	2,18.
XV.ᵉ Exp.	$\frac{1660}{756}$	2,18.

Ainſi le rapport de la preſſion au frottement, lorſqu'il ceſſe de prendre des accroiſſemens, eſt une quantité conſtante pour le bois d'orme, comme pour les autres bois.

CONCLUSION GÉNÉRALE.

19. L'on peut conclure des expériences qui précèdent, que dans les bois poſés l'un ſur l'autre ſans aucune eſpèce d'enduit, la réſiſtance due au frottement croît pendant quelques ſecondes; mais qu'elle atteint ſa limite après une ou deux minutes de repos, & que le frottement parvenu à ſa limite eſt toujours proportionnel à la preſſion : en raſſemblant ici les rapports de la preſſion au frottement, après quelques minutes de repos, nous trouvons :

Chêne contre chêne	2,34.
Chêne contre ſapin	1,50.
Sapin contre ſapin	1,78.
Orme contre orme	2,18.

REMARQUE.

20. Dans toutes les expériences qui précèdent, le frottement ſe faiſoit ſuivant le fil du bois. L'on a eſſayé de déterminer le frottement, en poſant les règles attachées au traîneau

par le travers du traîneau ; en ſorte que, dans le mouvement du traîneau, le fil de bois des règles ſe trouve former un angle droit avec le fil de bois du madrier dormant : il a réſulté de ces expériences, qu'à égalité de preſſion & de ſurface, le frottement parvenoit à ſa limite dans un temps plus long que lorſque les bois gliſſoient ſuivant leur fil, & que, parvenu à ſa limite, il ſe trouvoit moindre que dans le premier cas, mais cependant toujours proportionnel à la preſſion. Voici deux expériences qui ont été faites avec beaucoup de ſoin, dans leſquelles le traîneau étoit porté, comme on le voit *Fig.* 5, qui repréſente le traîneau coupé dans le ſens de ſa longueur, par deux règles de chêne taillées en coin, & touchant le madrier dormant par un angle arrondi.

XVI.eme Expérience.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 50 ℔

Après une ſeconde & une minute de repos, il a fallu également, pour vaincre le frottement, une traction de . . . 13 ℔

XVII.eme Expérience.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 1650 ℔

Il a fallu pour vaincre le frottement. . . . . . 450 ℔

Ces deux expériences donnent pour le rapport de la preſſion au frottement parvenu à ſon *maximum* :

I.ere Expérience	$\frac{50}{13}$	3,85.
II.e Exp.	$\frac{1650}{450}$	3,67.

quantités qui ſont preſque égales, malgré la grande différence qui ſe trouve entre les preſſions.

Ces deux expériences répétées avec des ſurfaces de contact de 48 pouces, ont donné le rapport qui précède ſous tous les degrés de preſſions : nous avons ſeulement remarqué que ſous les preſſions de 50 livres, il falloit un repos de plus de dix ſecondes avant que le frottement eût atteint ſon *maximum*. Nous trouvons en prenant une moyenne dans les deux dernières expériences, & en la comparant avec celle qui réſulte des quatrième, cinquième & ſixième expériences, que le frottement du chêne, lorſque le fil de bois ſe recroiſe, eſt au frottement ſuivant le fil du bois, comme 2,34 eſt à 3,76.

Du frottement entre les bois & les métaux, après un certain temps de repos.

21. L'accroiſſement des frottemens, relativement aux temps de repos, marche ici très-lentement : les variations ſont quelquefois à peine ſenſibles après quatre ou cinq ſecondes ; il eſt rare que le frottement ait acquis ſon *maximum* avant quatre ou cinq heures de repos, quelquefois même il n'y eſt pas parvenu après cinq ou ſix jours.

Fer ſur bois de chêne.

22. Le traîneau de 15 pouces de longueur a été garni (comme on le voit *Fig. 6*, qui repréſente une ſection ſuivant ſa longueur) de deux lames de fer, recourbées à leurs extrémités pour ſaiſir le traîneau. Ces lames poſées des deux côtés du traîneau, gliſſoient ſur le madrier dormant ſuivant le fil de bois ; la ſurface de contact étoit de 45 pouces.

XVIII.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 53 ℔

Après un repos de $\frac{1}{2}$″, le frottement a été trouvé de	55 ℔
Après un repos de 30″.	5 $\frac{1}{4}$
Après un repos de 60″.	6 $\frac{1}{2}$
Après une heure de repos.	9
Après quatre jours.	10

XIX.^eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 1650 ℔

Après un repos de $\frac{1}{2}''$, le frottement a été trouvé de	125 ℔
Après un repos de $10''$.	130.
Après un repos de $80''$.	145
Après 4 heures de repos.	200
Après 16 heures.	280
Après 4 jours.	340

Observations sur ces deux Expériences.

23. Ces deux expériences nous apprennent que des surfaces hétérogènes, telles que les bois & les métaux, n'acquièrent la limite de leur frottement qu'après un repos très-long; elles nous apprennent que les accroissemens dus à trois ou quatre secondes de repos, sont insensibles. Si nous voulons déterminer la limite du frottement, en le supposant parvenu à son *maximum*, après quatre jours de repos, nous trouvons le rapport de la pression au frottement.

XVIII.^e EXPÉRIENCE.	$\frac{53}{10}$	5,30
XIX.^e EXP.	$\frac{1650}{340}$	4,86.

REMARQUE.

24. Le cuivre glissant sans enduit sur le chêne, donne des résultats analogues à ceux du fer glissant sur le même bois. Il paroît même que les accroissemens du frottement, relativement aux temps de repos, marche plus lentement pour le cuivre que pour le fer : parvenu à son *maximum*, le rapport de la pression au frottement est à peu près comme $5\frac{1}{2}$ à 1.

Du frottement entre les métaux après un certain temps de repos.

25. L'on a cloué & fixé solidement sur le madrier dormant de notre table, deux règles de fer qui ont été dressées & polies avec le plus grand soin; elles avoient 4 pieds de longueur, 3 pouces de largeur & 3 lignes d'épaisseur; elles étoient placées à 10 pouces de distance l'une de l'autre, & elles répondoient, lorsque le traîneau étoit posé & emboîtoit le madrier dormant, aux deux règles de fer attachées sous le traîneau: l'on a arrondi toutes les arrêtes pour qu'elles n'influassent point sur les frottemens. Les règles de fer attachées au traîneau avoient 18 lignes de largeur, 15 pouces de longueur; la surface de contact étoit de 45 pouces. FIG. 7.

Fer contre fer.

XX.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 51 ℔

Après $\frac{1}{2}''$ de repos, ou après un temps plus long, l'on a également trouvé pour le frottement. . . . . . . 15 ℔

XXI.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 450 ℔

Le frottement acquiert dans cette expérience, comme dans celle qui précède, toute son intensité dans un instant; on le trouve de . . . . 124 ℔

Observations sur ces deux expériences.

26. Il ne m'a pas été possible de continuer les expériences du frottement pour le fer glissant sans enduit sur lui-même, sous des pressions plus considérables que celles de 450 livres. Sous de plus grandes pressions, le fer se rayoit, & les résultats devenoient incertains, le frottement augmentant très-considérablement, c'est ce qui est arrivé deux fois en répétant la vingt-unième expérience: mais une remarque qui a été conf-

tamment faite pour les métaux gliſſant à ſec l'un ſur l'autre, c'eſt que la longueur du temps de repos n'augmente point le frottement. Nous verrons même, dans le Chapitre ſuivant, qu'en général, lorſque les métaux gliſſent ſans enduit l'un ſur l'autre, le frottement ſe trouve abſolument le même pour les ſurfaces en mouvement, & pour celles que l'on veut ſortir de l'état de repos : en cherchant le rapport de la preſſion au frottement, dans les expériences qui précèdent, nous trouverons :

XX.ᵉ Expérience............	$\frac{51}{15}$	.... 3,40.
XXI.ᵉ Exp..................	$\frac{450}{124}$	.... 3,63.

Ces deux expériences, quoique faites ſous des preſſions qui ſont entre elles comme 9 eſt à 1, donnent, pour le rapport de la preſſion au frottement, une meſure qui eſt à peu près la même. Ainſi, lorſque les ſurfaces de fer gliſſent à ſec l'une ſur l'autre, le frottement eſt proportionnel aux preſſions.

Fer contre cuivre jaune.

27. L'on a remplacé les deux règles de fer clouées au traîneau par deux règles de cuivre jaune, exactement des mêmes dimenſions que les premières. Ces règles avoient été dreſſées avec beaucoup de ſoin, & polies avec une pierre à aiguiſer, d'un grain très-fin ; la ſurface de contact eſt de 45 pouces.

XXII.ᵉᵐᵉ Expérience.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 50 ℔

Le frottement acquiert dans un inſtant toute ſon intenſité, & on le trouve de . . . . 14 ℔

XXIII.ᵉᵐᵉ Expérience.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 450 ℔

Le frottement a été toujours le même, ſans être augmenté par la longueur du temps de repos, & il a été trouvé de 112 ℔

OBSERVATIONS.

L'on a fait ici la même remarque que dans les expériences qui précèdent. En recommençant trois fois la vingt-troisième expérience, les règles de cuivre se sont rayées, & il n'a pas été possible d'augmenter les pressions. Si l'on détermine, comme dans les articles qui précèdent, le rapport de la pression au frottement, l'on trouve :

XXII.^{e} Expérience.	$\frac{50}{14}$	3,6.
XXIII.^{e} Exp.	$\frac{450}{112}$	4,0.

Ces deux quantités ne diffèrent entre elles que d'un dixième; ainsi l'on peut les regarder comme égales, & en tirer des conclusions analogues à celles des articles qui précèdent.

Frottement du fer & du cuivre jaune, en réduisant les surfaces de contact aux plus petites dimensions possibles.

28. Comme il étoit intéressant de savoir si le rapport de la pression au frottement pour le fer & le cuivre suivoit la même loi lorsque les surfaces étoient réduites à quelques points de contact, j'ai ôté les deux règles placées sous le traîneau dans l'article qui précède, &, à leur place, j'ai substitué quatre clous de cuivre, qui, enfoncés dans le traîneau, portoient, au moyen de leur tête sphérique, sur les deux grandes règles de fer attachées au madrier dormant; par-là les surfaces de contact, qui, dans les dernières épreuves, se trouvoient de 45 pouces, étoient réduites ici à quatre points de surface dont les dimensions étoient insensibles.

XXIV.^{eme} Expérience.

Le traîneau chargé, son poids compris de 47 ℔

L'on a eu constamment, pour vaincre le frottement, une traction de . . . . 8 ℔

XXV.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 850 ℔
Le frottement a été trouvé de . . . . 140 ℔

OBSERVATIONS.

29. En comparant ici ces deux expériences, l'on trouve pour le rapport de la pression au frottement:

XXIV.e Expérience	$\frac{47}{8}$	5,9.
XXV.e Exp.	$\frac{850}{140}$	6,0.

Les pressions sont dans ces expériences comme 18 est à 1, & les rapports de la pression au frottement sont égaux. Ainsi, toutes les fois que les surfaces de contact entre le fer & le cuivre jaune se trouvent réduites à des petites dimensions, le rapport de la pression au frottement se trouvera indistinctement sous tous les degrés de pression, comme 6 est à 1 : nous trouverons, dans le dernier Livre, le même rapport, lorsque nous chercherons à déterminer par l'expérience le frottement des axes de fer dans des chapes de cuivre. Quoique nous serons obligés d'examiner de nouveau le frottement du cuivre & du fer lorsque nous chercherons le frottement des surfaces, & celui des axes en mouvement, nous ne pouvons pas quitter cet article sans quelques remarques relatives aux différences des frottemens que nous venons de trouver sous les mêmes degrés de pression pour une surface de 45 pouces, comme dans les expériences 22 & 23, & pour les surfaces de dimensions nulles comme les deux dernières. Cette différence ne peut être attribuée qu'à l'imperfection du poli, c'est au moins, ce me semble, ce qui suit de quelques expériences dont je vais rapporter les résultats. Lorsqu'on a fait glisser les premières fois les quatre têtes de clous de cuivre qui portent le traîneau sur les règles de fer, elles ont donné le rapport de la pression au frottement moindre que celui de 5 à 1. Ce rapport

port a ensuite augmenté à mesure que les expériences se font multipliées; en sorte que lorsque ces mêmes clous de cuivre ont eu parcouru sept à huit fois, sous des pressions de cinq ou six quintaux, toute la longueur des règles de fer, pour lors, le frottement, sous tous les degrés de pression, a été constamment le sixième de la pression, & ce rapport n'a plus varié: il suit de là, que les pierres, les poudres & tous les instrumens dont on se sert pour donner le poli, ne plient & ne rompent qu'imparfaitement les aspérités dont les surfaces sont hérissées, mais qu'elles disparoissent par l'usé, sous les grandes pressions, dans le mouvement rapide des machines.

Voici encore une expérience qui vient à l'appui de la remarque qui précède: Pour adoucir, dans la vingt-troisième expérience, le frottement des règles de cuivre qui se rayoient sous une pression de 450 livres, nous avons mis sur ces règles un enduit d'huile, & nous avons fait parcourir au traîneau une vingtaine de fois la longueur des règles de fer; pour lors les règles de cuivre, quoique sous des pressions plus considérables que 450 livres, ont cessé de se rayer, & elles sont devenues luisantes & très-polies: soit ensuite que l'on laissât l'enduit d'huile, soit qu'on l'essuyât avec le plus grand soin, le frottement, après quelques secondes de repos, étoit, dans les deux cas, le sixième de la pression; il paroît, par cette expérience, que, par le mouvement du traîneau, toutes les aspérités dues à l'imperfection du poli étoient détruites, puisque le frottement se trouvoit le même que dans les surfaces de contact réduites aux plus petites dimensions.

L'on ne peut pas croire ici que ce soient les particules d'huile qui, en pénétrant dans les pores du cuivre & du fer, adoucissent le frottement: car si, au lieu des règles de cuivre, l'on fait glisser sans essuyer l'huile, le traîneau portant par les quatre têtes des clous de cuivre sur les règles de fer, l'on trouvera que l'enduit diminue bien un peu le frottement de la surface une fois en mouvement; mais qu'il ne change rien à l'intensité de ce frottement après une ou deux secondes de repos, & qu'il ſe trouve le ſixième de la preſſion, comme lorſque l'on faiſoit gliſſer les mêmes clous à ſec ſur les règles de fer.

SECTION DEUXIÈME.

Du frottement des ſurfaces garnies d'un enduit, & du premier degré de force néceſſaire pour les faire gliſſer l'une ſur l'autre après un certain temps de repos.

29. LORSQUE les ſurfaces ſont garnies d'un enduit, le temps de repos néceſſaire pour que la force qui doit vaincre la réſiſtance de la tenacité due au frottement parvienne à ſa limite, eſt un temps long, mais variable. Il dépend de la dureté de l'enduit, il eſt plus long avec un enduit de ſuif qu'avec un enduit de vieux oing; il dépend encore de la nature & de l'étendue des ſurfaces de contact : ſi ces ſurfaces ſont réduites à de très-petites dimenſions, le frottement arrive à ſa limite dans très-peu de ſecondes. Les expériences ſuivantes ont été faites avec des enduits de ſuif très-pur.

Du frottement du bois de chêne, lorſque les ſurfaces ſont enduites de nouveau ſuif à chaque opération.

30. Le traîneau de 15 pouces de longueur a été poſé ſur le madrier dormant, enduit d'une couche de ſuif d'une demi-ligne d'épaiſſeur; le madrier dormant, ainſi que le traîneau, avoient acquis le plus grand poli, par des expériences antérieures qui duroient depuis un mois : le ſuif, dans ces expériences, avoit pénétré dans les pores du bois à plus de 2 lignes de profondeur. Comme l'on avoit été obligé de creuſer de quelques lignes, ſur 4 pouces de largeur, le milieu du madrier dans toute ſa longueur, pour faire ſauter un nœud qui donnoit quelques variétés dans les frottemens, la ſurface de contact ſe trouvoit dans les expériences qui ſuivent de 180 pouces.

XXVI.^{eme} Expérience.

Le traîneau chargé, son poids compris de 47 ℔

Lorsqu'on ébranle le traîneau, en lui donnant un mouvement insensible, il continue à se mouvoir sous une traction de . . . . 6 ℔ $\frac{1}{2}$

Après un repos de 4′, le frottement a été trouvé de 8

Après un repos de 2 heures. 9

XXVII.^{eme} Expérience.

Le traîneau chargé, son poids compris de 1650 ℔

Lorsque le temps du repos est nul, & que l'on donne une vîtesse insensible, le traîneau continue à se mouvoir sous une traction de . . . . 64 ℔

Après un repos de 3″, le frottement a été trouvé de 160

Après un repos de 15″. 209

Après un repos de 60″. 280

Après un repos de 240″. 318

Après un repos de 2 heures. 452

Après un repos de 6 jours. 622

XXVIII.^{eme} Expérience.

Le traîneau chargé, son poids compris de 3250 ℔

Lorsque le temps de repos est nul, & que l'on imprime une vîtesse insensible, le traîneau continue à se mouvoir sous une traction de . . . . 120 ℔

Après un repos de 3″, l'on a trouvé le frottement de 320

Après un repos de 15″. 355

Après un repos de 60″. 413

Après un repos de 240″. 593

Après une heure de repos. 880

Après deux heures de repos. 920

Après cinq jours, une fois 1220 ℔; une autre fois. 1554

Observations sur ces trois Expériences.

31. L'on voit, par ces expériences, que lorsque les bois sont enduits de suif, le frottement parvient à sa limite beaucoup plus lentement que lorsque les surfaces glissent à sec l'une sur l'autre : nous ne sommes pas sûrs, dans les expériences actuelles, que le frottement ait atteint sa limite après un repos de cinq ou six jours; au lieu que huit ou dix secondes suffisoient, lorsque les corps glissoient à sec, pour que le frottement parvînt à son *maximum.* Dans les essais où les surfaces ont de l'étendue relativement à leurs pressions, les résultats varient, & la cohésion paroît augmenter de beaucoup le frottement : il s'en faut bien que la vingt-sixième expérience où la pression n'étoit que de 47 livres, soit aussi exacte que les deux suivantes. Les trois expériences ont été répétées deux fois; les valeurs moyennes, sur-tout de la dernière, ont été très-rapprochées; mais celles de la vingt-sixième ont souvent différé entre elles d'un tiers. L'on doit remarquer que si les surfaces sont réduites à de très-petites dimensions, pour lors le frottement parvient à son *maximum* dans très-peu de temps : lorsque nous avons voulu faire porter le traîneau sur deux petites règles, & que les surfaces de contact n'étoient que de 45 pouces sous une pression de 900 livres, le frottement avoit atteint son *maximum*; dans moins d'une minute, il étoit à peu près le même que lorsque les bois n'étoient point enduits.

Le vieux oing très-mou ralentit très-peu l'accroissement du frottement qui parvient à son *maximum* avec une surface de contact d'un pied carré sous une pression de 1600 livres, presque en aussi peu de temps que si les bois glissoient à sec l'un sur l'autre. L'on observe de plus, qu'avec ce genre d'enduit, le frottement parvenu à son *maximum*, est quelquefois plus considérable que lorsque les bois glissent à sec l'un sur l'autre : il semble qu'outre l'engraînage des surfaces qui se fait ici presque aussi librement, à cause du peu de consistance du vieux oing, que s'il n'y avoit point d'enduit, il y a encore une cohérence entre les surfaces, augmentée par l'intermède de l'enduit qui occasionne une résistance étrangère au frottement.

Du frottement du bois de chêne, lorsque l'enduit de suif est usé par des opérations antérieures.

32. Dans les expériences qui précèdent, l'enduit étoit absolument neuf, & renouvelé à chaque opération; il arrivoit de là qu'il étoit assez inégalement répandu sur les surfaces, d'où il pouvoit résulter quelques différences dans les observations. Dans les essais qui vont suivre, l'enduit étoit posé depuis huit jours, & l'on avoit fait plus de cinquante opérations sans le renouveler: le traîneau, dans chaque expérience, avoit parcouru toute la longueur du madrier; par-là, l'enduit s'étoit répandu par-tout d'une manière très-uniforme, il paroissoit homogène; mais sa consistance avoit changé, & il avoit beaucoup perdu de son onctuosité: l'accroissement du frottement, relativement au temps de repos, se faisoit très-lentement, & je pouvois espérer d'avoir une loi suivie dans les observations. Je puis assurer que les deux expériences qui suivent, la dernière surtout, a été faite avec toute la patience & toute l'attention possibles. Le traîneau avoit 4 pieds & demi de longueur, & la surface de contact, à cause du petit enfoncement pratiqué tout du long du madrier pour les raisons que nous venons d'expliquer, se trouvoit réduite à 4 pieds & demi.

XXIX.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 2310 ℔

Lorsque le temps du repos est nul, & que l'on imprime au traîneau une vîtesse insensible, l'on trouve qu'il continue à se mouvoir sous une traction de . . . . . . 187 ℔

Après 2' de repos. 392

Après 60' de repos. 451

Après 16 heures de repos. 514

XXX.^{eme} Expérience.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 5810 ℔

En imprimant au traîneau une vîteſſe inſenſible, l'on trouve qu'il continue à ſe mouvoir ſous une traction de	502 ℔
Après un repos de 2′.	790
Après un repos de 4′.	866
Après un repos de 9′.	925
Après un repos de 26′.	1036
Après un repos de 60′.	1186
Après 16 heures de repos.	1535

Obſervations ſur ces deux Expériences.

33. En comparant l'une à l'autre les deux expériences qui précèdent, il paroît qu'avec des ſurfaces de contact de 4 ou 5 pieds carrés, les frottemens, après un même temps de repos, ſont, pour différentes preſſions, proportionnelles aux preſſions: l'on ſent cependant, d'après les obſervations de l'article qui précède, que lorſque les preſſions deviendront énormes, ou, ce qui revient au même, les ſurfaces de contact très-petites, relativement aux preſſions, les frottemens arriveront à leur limite dans très-peu de temps; conſéquemment que cette loi ne ſera pas ſuivie.

Si l'on cherche, d'après la trentième expérience qui a été faite avec le plus grand ſoin, la marche que ſuit l'accroiſſement des frottemens, relativement aux temps de repos, l'on remarquera que, pour une vîteſſe inſenſible, c'eſt-à-dire, lorſque le temps de repos eſt nul, le frottement eſt déjà une quantité finie & donnée. Ainſi, en nommant F le frottement, ſi l'on veut chercher la fonction du temps qui doit repréſenter cette quantité F, il faudra d'abord, dans cette fonction, que le temps devenant o, cette fonction devienne une quantité conſtante égale au frottement des ſurfaces mues d'un mouvement inſenſible. Ainſi l'expreſſion la plus ſimple que l'on puiſſe imaginer pour repréſenter F, ſera $F = A + m T^{\mu}$, où A eſt le poids égal au frottement ſous une vîteſſe inſenſible ; m eſt un coëfficient conſtant, & T^{μ} le temps de repos qui a précédé l'expérience, élevé à la puiſſance μ. Si nous comparons cette formule avec notre dernière expérience, il eſt clair qu'il faudra faire A = 502 livres, & que pour avoir m T^{μ}, il faudra retrancher la quantité A du frottement trouvé à chaque obſervation, ce qui donnera la petite Table ſuivante :

	T	A + m T^{μ}	m T^{μ}
I.^ere^ Observation.	.... 0′	.. A = 502	 0
II.^e^	.... 2′	 790	 288
III.^e^..............	.... 4′	 866	 364
IV.^e^..............	.... 9′	 925	 423
V.^e^...............	.... 26′	 1036	 534
VI.^e^..............	.... 60′	 1186	 684
VII.^e^.............	.... 960′	 1535	 1033

En prenant pour module l'obſervation troiſième, faite après un repos de 4 minutes, parce que les variations croiſſent très-rapidement dans un temps plus court, & que quelques ſecondes d'erreur dans l'obſervation en produiroient de très-grandes dans les frottemens correſpondans, nous aurons :

III.^e^ & II.^e^ Observation. $\mu = \dfrac{\log.\left(\dfrac{288}{364}\right)}{\log.\left(\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{34}{100}$

III.^e^ & IV.^e^ .... $\dfrac{19}{100}$

III.^e^ & V.^e^ .... $\frac{20}{100}$

III.^e^ & VI.^e^ .... $\frac{23}{100}$

III.^e^ & VII.^e^ .... $\frac{19}{100}$

Les quatre dernières valeurs de μ ſont à peu près égales; la première diffère des autres : mais comme les frottemens croiſſent rapidement dans les premiers inſtans de repos, la moindre erreur dans les obſervations a pu produire cette différence. Ainſi, il paroîtroit, d'après notre expérience, que $F = 502 + m\,T^{\frac{1}{5}}$, le coëfficient m ſera facile à déterminer dans cette formule, en la comparant avec une des obſervations. Si l'on prend la troiſième qui nous a ſervi de module pour découvrir la valeur de μ, nous trouverons $m\,T^{\frac{1}{5}} = 364$ livres, & comme $T = 4'$, l'on aura $m = \frac{364}{(4')^{\frac{1}{5}}}$.

Quoique la quantité μ ſe trouve ; d'après quatre obſervations, aſſez bien repréſentée par la même quantité, cependant nous ne pouvons regarder notre formule que comme propre à déterminer par approximation le frottement après un repos aſſez court ; l'on ſent en effet que ſi F pouvoit être exactement exprimée par la formule $A + m\,T^{\mu}$, quelque petite que fût la quantité μ, lorſque T ſeroit infini, F deviendroit infini : or c'eſt ce qui n'eſt pas, puiſque le frottement atteint ſa limite, au bout de quelques jours de repos dans les ſurfaces qui ſont enduites, & au bout de quelques ſecondes dans celles qui ne le ſont pas. L'on ſatisferoit facilement à cette nouvelle condition, en ſuppoſant $F = \frac{A + m\,T^{\mu}}{C + T^{\mu}}$, lorſque $T = 0$ pour lors $F = \frac{A}{C}$, quantité qui doit être égale au frottement lorſque le temps du repos eſt nul, ou que la vîteſſe eſt inſenſible. Si T eſt infiniment grand, pour lors $F = m$; ainſi cette dernière quantité m doit être égale à la limite connue du frottement : au moyen de ces deux conditions & de deux expériences, l'on déterminera les quatre conſtantes qui entrent dans la formule. Il ne nous a pas été poſſible de nous occuper en détail de cette théorie, parce que nous n'avions pas le temps de raſſembler un aſſez grand nombre de faits pour aſſurer notre marche : des expériences de ce genre ſont longues à faire ; elles demandoient ſouvent cinq ou ſix jours pour une ſeule obſervation. Pendant tout ce temps, il ne falloit ni ébranler ni faire aucun uſage de notre chantier : d'ailleurs, d'ailleurs, ces opérations qui, pour être complettes, exigeroient des années de patience & de travail, n'avoient qu'un rapport indirect avec le frottement des machines qui doivent être considérées dans leur état de mouvement. Nous allons terminer ce Chapitre, en rendant compte de quelques expériences destinées à faire connoître le frottement des lames de cuivre sur les lames de fer enduites de suif, que l'on veut ébranler après un certain temps de repos.

Du frottement des lames de cuivre sur les lames de fer enduites de suif neuf.

33. L'on a attaché & fixé, sous un traîneau de 15 pouces de longueur, les deux règles de cuivre de 15 pouces de longueur & de 18 lignes de largeur; l'on a attaché les deux grandes règles de fer sur le madrier dormant : l'on y a mis un enduit de suif d'une demi-ligne à peu près d'épaisseur; la surface de contact étoit de 45 pouces. FIG. 7.

XXXI.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 50 ℔.

En imprimant au traîneau une vîtesse insensible, il continue à se mouvoir sous une traction de . . . . . 6 ℔

Après un repos de 4 & de 30 minutes. . . . 7

XXXII.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 450 ℔.

En imprimant au traîneau une vîtesse insensible, il continue à se mouvoir sous une traction de . . . . . 42 ℔

Après un repos de 4′ & de 2 heures. 48

XXXIII.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 1650 ℔.

En imprimant au traîneau une vîtesse insensible, il a continué à se mouvoir d'un mouvement lent à raison d'un pouce.

En 10″, sous une traction de . . . . . . 150 ℔

Après 3′ de repos. 158

Après 4 heures & 4 jours. 168

Observations sur ces trois Expériences.

34. Dans le frottement du fer & du cuivre enduits de suif, l'on observe un accroissement pendant les premiers momens de repos; mais le temps de cet accroissement est court, & l'accroissement peu considérable. Si nous cherchons à déterminer le frottement lorsque la vîtesse est insensible, ou lorsque le temps du repos est nul, nous aurons :

XXXI.e	Expérience.............	$\frac{50}{6}$	.... 8,33.
XXXII.e	Exp....................	$\frac{450}{42}$	.... 10,7.
XXXIII.e	Exp....................	$\frac{1650}{150}$	.... 11,0.

Dans les deux dernières expériences, quoique les pressions soient entre elles dans un rapport plus grand que celui de $3\frac{1}{2}$ à 1, le rapport de la pression au frottement est presque exactement le même. Quant à la différence que l'on trouve entre ce résultat & celui de la trente-unième expérience, où la pression n'est que de 50 livres, elle ne peut être attribuée, comme nous le verrons encore mieux dans la suite, qu'à la cohérence que contractent entre elles les deux surfaces en contact, qui sont ici de 45 pouces carrés. Cette cohérence qui dépend de la nature du suif & de l'étendue des surfaces, se trouve ici d'une livre & demie, elle est constante dans les trois expériences où la surface ne varie pas; ainsi, en la retranchant du frottement, l'on trouve :

XXXI.e	Expérience corrigée......	$\frac{50}{4\frac{1}{2}}$	.... 11,1.
XXXII.e	Exp....................	$\frac{450}{40\frac{1}{2}}$	.... 11,1.
XXXIII.e	Exp....................	$\frac{1650}{148\frac{1}{2}}$	.... 11 ..

Le rapport de la pression au frottement est donc exactement le même, & l'étendue des surfaces n'y influe nullement; c'est ce que nous trouverons confirmé par toutes les expériences que nous détaillerons dans la suite, & même par celles sur le frottement des axes, dans lesquelles nous verrons que, quoique les surfaces de contact soient réduites aux plus petites dimensions possibles, le rapport de la pression au frottement y est comme ici de 11 à 1.

35. Si l'on cherche, d'après nos trois dernières expériences, le rapport de la pression au frottement, lorsque ce dernier est parvenu, par le repos, à sa limite, en retranchant une livre & demie pour la cohérence, comme nous avons fait à la fin de l'article précédent, nous aurons pour ce rapport :

XXXI.e Expérience corrigée.	$\frac{50}{5\frac{1}{2}}$	9,1.
XXXII.e Exp.	$\frac{450}{46\frac{1}{2}}$	9,6.
XXXIII.e Exp.	$\frac{1560}{166\frac{1}{2}}$	9,9.

Les différences que l'on trouve ici entre les trois résultats précédens, sont trop peu considérables pour nous empêcher de conclure que, lorsqu'après un temps de repos suffisant, le frottement a atteint sa limite, il est toujours proportionnel à la pression : ces différences d'ailleurs peuvent dépendre de l'imperfection des opérations ; car les forces de traction dans les trente-deux & trente-troisième expériences répétées, ont varié de 5 à 6 livres.

36. Lorsque l'on essuie avec beaucoup de soin les lames de fer & celles de cuivre, & que l'on y met un enduit abondant d'huile d'olive, le frottement paroît atteindre son *maximum* après un instant de repos trop court pour être observé. Il se trouve constamment égal au sixième de la pression : le frottement est moindre dans les mouvemens insensibles, suivant que le suif que l'on a essuyé a pénétré plus ou moins profondément dans les pores du métal.

Lorsqu'au lieu d'huile l'on se sert d'un enduit de vieux oing, le frottement arrive aussi très-rapidement à son *maximum*; il eſt rarement moindre que le ſeptième de la preſſion ; il augmente en s'approchant du ſixième de la preſſion, à meſure que la conſiſtance du vieux oing diminue.

CHAPITRE II.

Du Frottement des ſurfaces en mouvement.

37. DANS le Chapitre qui précède, nous avons cherché à déterminer la réſiſtance due aux frottemens, lorſque les ſurfaces ont été en contact pendant quelque temps, & que l'on fait effort pour les tirer de l'état de repos : nous allons actuellement chercher à déterminer le frottement, lorſque les ſurfaces ſe meuvent avec une vîteſſe quelconque.

Nous nous ſommes ſervis ici du même établiſſement que nous avons décrit dans le Chapitre précédent. L'on doit ſe rappeler, *Fig.* 1 & 2, que le madrier dormant, ſur lequel gliſſe le traîneau, eſt de 8 pieds de longueur ; que ſous la poulie h, où eſt ſuſpendu le plateau de balance qui entraîne le traîneau, nous avons creuſé un puits pour que ce plateau pût deſcendre de 7 à 8 pieds de hauteur. Nous avions d'abord voulu, pour augmenter la courſe du traîneau, nous ſervir d'un madrier de 12 pieds de longueur ; mais outre la difficulté d'en trouver un de cette dimenſion qui n'eût ni nœud ni défaut, nous nous ſommes apperçus que le traîneau, chargé de pluſieurs milliers, acquéroit, dans une courſe auſſi longue, des vîteſſes, & produiſoit des chocs qui auroient exigé les plus grandes précautions pour la ſûreté des Obſervateurs. L'on verra d'ailleurs, que, dans une courſe de 6 pieds, notre traîneau a eu preſque toujours des vîteſſes plus grandes que celles de toutes les machines qui ſont en uſage : nous avons même réduit cette courſe à 4 pieds dans la plupart de nos opérations.

Voici la manière dont les expériences ont été conduites lorſque le traîneau étoit placé ſur le madrier dormant, & qu'il étoit chargé du poids ſous lequel on vouloit l'éprouver; l'on chargeoit ſucceſſivement le plateau P de différens poids, & l'on ébranloit le traîneau à petits coups de marteau, ou en le preſſant par-derrière, au moyen d'un levier qui portoit contre un taquet attaché à l'extrémité a b du madrier dormant. L'on avoit diviſé de pouce en pouce, avec beaucoup d'exactitude, le côté du madrier; & l'extrémité du traîneau, dans ſon mouvement, tenoit lieu d'index, & meſuroit les eſpaces parcourus: la durée des mouvemens s'obſervoit au moyen d'un pendule qui battoit les demi-ſecondes. Les Ouvriers que j'employois furent bientôt ſtylés, l'un à compter les vibrations du pendule, l'autre à annoncer par un cri le paſſage du traîneau à chaque diviſion, tandis que j'écrivois la correſpondance des deux meſures.

SECTION PREMIÈRE.

Du frottement des ſurfaces en mouvement, gliſſant l'une ſur l'autre ſans aucun enduit.

Frottement du bois de chêne.

38. LE traîneau de bois de chêne dont je me ſuis ſervi dans les trois expériences ſuivantes, avoit 3 pieds de longueur; on l'avoit fait gliſſer une vingtaine de fois ſur le madrier dormant, ſous une preſſion de 10 quintaux, pour augmenter le poli du bois; la ſurface de contact étoit de 3 pieds carrés, ou de 432 pouces.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 74 ℔.

PREMIER ESSAI. Le traîneau eſt mené d'un mouvement lent mais incertain, s'accélérant & s'arrêtant quelquefois ſous une traction de . . . . 12 ℔

II.ᵉ Essai. Avec une traction de 14 livres, il a parcouru les deux premiers pieds en $\frac{7}{2}''$, les deux derniers en $\frac{5}{2}''$.

II.^eme^ Expérience.

Le traîneau chargé, son poids compris de 874 ℔.

I.^er^ Essai. Sous une traction de 94 livres, le traîneau ébranlé prend un mouvement lent & incertain; l'on a eu une fois les deux premiers pieds en $\frac{28}{2}''$, les deux autres en $\frac{19}{2}''$.

II.ᵉ Essai. Sous une traction de 105 livres, les deux premiers pieds en $\frac{6}{2}''$, les deux suivans en $\frac{3}{2}''$.

III.^eme^ Expérience.

Le traîneau chargé, son poids compris de 2474 ℔.

I.^er^ Essai. Le mouvement commence en ébranlant le traîneau avec une traction de 250 livres; mais il est lent & incertain.

IIᵉ Essai. Avec une traction de 270 livres, les deux premiers pieds en $\frac{8}{2}''$, les deux autres en $\frac{5}{2}''$.

Continuation des mêmes Expériences pour une surface de contact de 36 pouces.

39. Dans les trois expériences qui vont suivre, l'on a cherché à réduire les surfaces de contact à de plus petites dimensions que dans les précédentes : l'on s'est servi d'un traîneau de 15 pouces de longueur, sous lequel l'on a cloué deux règles de 15 lignes de large, arrondies aux extrémités pour y placer les clous. La surface de contact étoit de 36 pouces carrés.

IV.^eme^ Expérience.

Le traîneau chargé, son poids compris de 47 ℔.

I.^er^ Essai. Le traîneau a été mené par une traction de 5 livres;

d'un mouvement lent, mais à peu près uniforme. L'on a obſervé la marche du traîneau pendant 2′, à raiſon de 6 pouces en 25″.

II.ᵉ ESSAI. Il y a eu des variétés dans le mouvement ſous tous les degrés de traction au deſſous de 9 livres; mais avec une traction de 9 livres, le traîneau a parcouru les deux premiers pieds en $\frac{3}{2}''$, les deux ſuivans en $\frac{1}{2}''$.

V.ᵉᵐᵉ EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 447 ℔.

I.ᵉʳ ESSAI. Avec une traction de 45 livres, ſi on imprime une vîteſſe d'un pied par ſeconde au traîneau, il continue à ſe mouvoir, & même s'accélère; mais ſous une moindre vîteſſe il s'arrête, ébranle; il ne commence à ſe mouvoir qu'avec une traction de 50 livres.

II.ᵉ ESSAI. Seulement ébranlé avec 54 livres de traction, il parcourt les deux premiers pieds en $\frac{6}{2}''$, les deux autres en $\frac{3}{2}''$.

VI.ᵉᵐᵉ EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 1647 ℔.

I.ᵉʳ ESSAI. Ebranlé ſous une traction de 166 livres, les deux premiers pieds en $\frac{11}{2}''$, les deux autres eu $\frac{5}{2}''$.

II.ᵉ ESSAI. Avec une traction de 172 livres, 2 pieds en $\frac{9}{2}''$, 2 pieds en $\frac{4}{2}''$.

Continuation des mêmes Expériences; les ſurfaces de contact réduites aux plus petites dimenſions poſſibles.

40. L'on a voulu, dans les expériences qui vont ſuivre, déterminer le frottement pour les ſurfaces réduites aux plus petites dimenſions poſſibles; l'on a en conſéquence taillé en angle un peu arrondi le deſſous des règles qui portoient le traîneau dans l'article précédent; en ſorte que la ſurface de contact FIG. 4.

ſe trouvoit réduite à un angle qui s'applatiſſoit un peu ſous les preſſions.

VII.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 47 ℔.

I.^{er} ESSAI. Avec une traction de 4 livres & demie, les deux premiers pieds ont été parcourus en $\frac{15}{2}''$, les deux autres en $\frac{6}{2}''$.

II.^{e} ESSAI. Avec une traction de 6 livres & demie, les deux premiers pieds ont été parcourus en $\frac{3}{2}''$, les deux autres en $\frac{2}{2}''$.

VIII.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 447 ℔.

I.^{er} ESSAI. Avec une force de traction de 36 livres, ſi l'on donne au traîneau un mouvement primitif de 5 ou 6 pouces par ſeconde, il continue à ſe mouvoir, & même paroît s'accélérer; ſi on lui donne une vîteſſe moindre, il s'arrête.

II.^{e} ESSAI. Avec une traction de 41 livres & un ſimple ébranlement, le traîneau parcourt les deux premiers pieds en $\frac{8}{2}''$; les deux ſuivans en $\frac{5}{2}''$.

IX.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 847 ℔.

I.^{er} ESSAI. Avec une traction de 60 livres, le traîneau continue à ſe mouvoir; ſi on lui donne une vîteſſe primitive de 7 à 8 pouces par ſeconde, il s'arrête ſous de moindres vîteſſes.

II.^{e} ESSAI. Si on ne fait qu'ébranler ou que donner une vîteſſe inſenſible au traîneau, il parcourt avec une traction de 68 livres, les deux premiers pieds en $\frac{3}{2}''$, les deux autres en $\frac{2}{2}''$.

Obſervations ſur ces Experiences.

41. Dans les neuf expériences qui précèdent, après avoir ébranlé ou ſeulement imprimé une vîteſſe inſenſible au traîneau, l'on a toujours eu ſoin d'obſerver le mouvement pendant une courſe de 4 pieds de longueur diviſée en deux parties égales de

de 2 pieds chacune : dans ce mouvement, il a paru qu'en général ses deux premiers pieds ont été parcourus dans un temps un peu plus que double des deux derniers. Or, lorsqu'un corps est mis en mouvement par une puissance constante, & que le mouvement est uniformément accéléré, deux espaces égaux sont consécutivement parcourus dans des temps qui sont entre eux à peu près comme 100, 42; ainsi notre traîneau a parcouru sa course de 4 pieds d'un mouvement à peu près uniformément accéléré; ainsi, comme il étoit mené par un poids constant, il falloit que la force retardatrice du frottement fût aussi une quantité constante : conséquemment elle est à peu près la même sous tous les degrés de vîtesse.

42. Il y a cependant deux remarques à faire : lorsque les surfaces sont très-étendues relativement aux pressions, pour-lors le frottement paroît augmenter avec les vîtesses. Mais lorsque les surfaces sont très-petites relativement aux pressions, le frottement diminue à mesure que les vîtesses augmentent; c'est ainsi que dans la dernière expérience, il falloit une moindre force de traction pour continuer à faire mouvoir le traîneau, lorsqu'en le poussant on lui avoit imprimé une vîtesse de 7 à 8 pouces par seconde, que lorsqu'on s'étoit contenté de l'ébranler; mais comme le poids que l'on trouve pour vaincre le frottement, lorsque le traîneau a déjà une vîtesse de 7 pouces par seconde, diffère très-peu de celui qui est nécessaire pour lui faire continuer son mouvement, lorsqu'on ne fait que l'ébranler, il paroît que, dans tous les cas de pratique, l'on peut regarder le frottement comme étant indépendant du degré de vîtesse. Pour confirmer cette remarque, nous allons calculer le frottement dans le traîneau en mouvement, d'après le deuxième essai de chacune des expériences qui précède, en regardant le frottement comme une quantité constante.

43. Soit la force qui tire le traîneau, ou, ce qui revient au même, le poids dans le plateau de la balance, le plateau compris. . . . . A.

Soit la résistance due au frottement. . . . . F.

Le temps obſervé pendant que le traîneau parcourt les quatre pieds. . . . . T.

La force de la gravité. . . . . $g = \frac{30 \text{ pieds.}}{1''}$

Les poids du traîneau & du plateau de balance réunis. . . . . M.

Puiſque la force de traction eſt conſtante, ſi l'on ſuppoſe le frottement indépendant de la vîteſſe, nous aurons $A - F = \frac{2.\ 4 \text{ pieds } M}{30.\ T^2}$. Il faut, dans l'uſage de cette formule, ajouter à la quantité M un poids de 7 livres, pour repréſenter la partie de la réſiſtance due à l'accélération du mouvement de rotation de la poulie, qui a 12 pouces de diamètre, & qui pèſe 14 livres. En comparant cette formule avec le deuxième eſſai de chacune de nos expériences, nous trouverons, en négligeant les fractions de livres:

		$A - F$	d'où $\frac{\text{Preſſion.}}{\text{Frottement.}}$	
Surface de Contact, 3 pieds.	I.ere Expérience. II.e Essai. A — F =	1 ℔	$\frac{74}{13}$ =	5,7.
	II.e Exp.	13	$\frac{874}{92}$	9,50.
	III.e Exp.	17	$\frac{2474}{253}$	9,77.
Surface de Contact, 36 pouces.	IV.e Exp.	4	$\frac{47}{5}$	9,4.
	V.e Exp.	7	$\frac{447}{49}$	9,1.
	VI.e Exp.	12	$\frac{1647}{160}$	10,3.
Surface de Contact, nulle.	VII.e Exp.	2	$\frac{47}{4\frac{1}{2}}$	10,4.
	VIII.e Exp.	5	$\frac{447}{36}$	12,4.
	IX.e Exp.	10	$\frac{847}{58}$	14,6.

Pour pouvoir préſenter ſous le même point de vue les ſix premières expériences, il faut réduire les ſurfaces comprimées à une ſurface moyenne d'un pied carré, dont chaque point éprouveroit la même compreſſion qu'il éprouve dans les expériences; ainſi, comme dans les trois premières la ſurface de contact eſt de 3 pieds carré, chaque pied n'éprouve que le tiers de la preſſion : dans les trois expériences ſuivantes, la ſurface de contact eſt de 36 pouces carrés ou d'un quart de pied; ainſi un pied carré, dont chaque pouce ou chaque partie égale ſeroit comprimé comme dans ces expériences, devroit être chargé d'un poids quadruple.

Frottement d'une ſurface d'un pied carré, chargé des preſſions ſuivantes.

I.ere Expérience.	II.e Essai. Preſſion.	25 ℔	Preſſion. / Frottement.	5,7
IV.e Exp.		188		9,4.
II.e Exp.		291		9,5.
III.e Exp.		825		9,4.
V.e Exp.		1788		9,2.
VI.e Exp.		6588		10,4.

44. Les tables qui précèdent nous préſentent pluſieurs remarques qui doivent nous diriger dans l'évaluation du frottement du chêne gliſſant ſur lui-même.

Première Remarque. Si nous comparons le frottement calculé d'après le deuxième eſſai de chaque expérience, nous trouverons qu'à 2 ou 3 livres près, il eſt le même que celui que nous avons eu dans le premier eſſai, en imprimant une vîteſſe inſenſible au traîneau. Dans le deuxième eſſai, le traîneau a ſouvent parcouru ſa courſe de 4 pieds en 4 ou 5 ſecondes, mouvement plus rapide que celui des points de contact de toutes les machines en uſage : ainſi, puiſque le frottement calculé d'après ce degré de mouvement, ſe trouve le même que celui qui a été obſervé lorſque la vîteſſe étoit inſenſible; puiſque d'ailleurs nous avons obſervé que le traîneau ſe meut d'un mouvement uniformément accéléré, nous pouvons conclure que la vîtesse n'influe point sur le frottement, & qu'il est, dans tous les cas, une quantité constante.

Deuxième Remarque. Si l'on examine la table qui précède, l'on trouvera que, depuis 188 jusqu'à 1788 livres de pression sur un pied carré, le frottement se trouve constamment un peu plus du neuvième de la pression, quoique les pressions soient très-différentes : si l'on compare même les quatrième & sixième expériences, l'on ne trouvera qu'un dixième de différence pour les nombres qui expriment, dans ces deux expériences, le rapport de la pression au frottement; quoique les pressions soient entre elles comme 35 est à 1. Ainsi, toutes les fois que, dans la pratique, un pied carré de chêne éprouvera une pression depuis deux quintaux jusqu'à quatre ou cinq milliers, l'on pourra prendre $9\frac{1}{2}$ à 1 pour le rapport de la pression au frottement.

Troisième Remarque. Lorsque la pression n'est que de 25 livres pour un pied carré, pour lors la pression est au frottement comme 5,7 est à 1, & la vîtesse croissant, le frottement augmente. Ces deux variétés ne peuvent venir que d'une cause étrangère au frottement, & dépendante de l'étendue des surfaces : les surfaces, par leur rapprochement, ou peuvent contracter une cohérence entre elles, ou, ce qui est plus probable, elles sont couvertes d'un duvet qui se pénètre avec la plus grande facilité, mais qu'il faut plier ensuite dans le mouvement des surfaces : la résistance produite par ce duvet est indépendante des cavités & des pointes solides qui s'engrainent mutuellement, & qui occasionnent les frottemens proportionnels aux pressions. Il y a donc une résistance, dans le frottement des surfaces, indépendante du degré de pression, & proportionnelle à l'étendue du duvet ou à l'étendue des surfaces : si c'est-là en effet ce qui augmente la loi du frottement sous de petites pressions, il doit arriver que la vîtesse augmentant, le frottement doit aussi augmenter, puisque, sous une grande vîtesse, l'on pliera un plus grand nombre de ces parties : or, c'eſt ce que l'expérience confirme; il ſera très-facile de trouver pour combien l'étendue des ſurfaces entre dans les frottemens. L'expérience première donne, pour une ſurface de 3 pieds carrés, preſſée de 74 livres, un frottement de 13 livres; or, ſi le frottement avoit été le 9^e $\frac{1}{2}$ de la preſſion, comme dans les expériences qui ſuivent, nous aurions dû trouver à peu près 8 livres au lieu de 13 livres : ainſi les cinq livres de différence ſont dues à l'étendue des ſurfaces; & la réſiſtance qui vient, ſoit de la cohérence des ſurfaces, ſoit, ce qui eſt plus probable, d'un petit duvet qui les couvre, eſt une quantité indépendante des preſſions, & égale à 1 livre $\frac{2}{3}$ par pied carré : cette petite quantité conſtante qui augmente le frottement dans la première expérience, n'eſt pas ſenſible dans les autres.

Quatrième Remarque. (*a*) Lorſque les ſurfaces de contact ſont réduites, comme dans les expériences 7, 8 & 9, aux plus petites dimenſions poſſibles, & que le traîneau ne porte que par deux angles comprimés ſur le madrier dormant, l'on trouve pour lors que le frottement diminue relativement aux preſſions à meſure que l'on augmente les preſſions : l'on trouve auſſi que le frottement diminue à meſure que l'on augmente les vîteſſes : voici, ce me ſemble, l'explication de ce phénomène. Tant que les cavités de la ſurface du bois ſont aſſez grandes pour recevoir librement les pointes dont la ſurface correſpondante eſt hériſſée, le rapport de la preſſion au frottement eſt une quantité conſtante qui ſe meſure par l'inclinaiſon mutuelle des parties qui n'ont pas encore changé de figure; c'eſt le cas de nos cinq premières expériences. Mais dès que les preſſions deviennent énormes, les

(*a*) Lorſque nous diſons que les ſurfaces de contact ſont réduites aux plus petites dimenſions, il ne faut pas les croire nulles. Dans les bois qui ſont très-compreſſibles, les ſurfaces de contact s'étendent proportionnellement à une loi des preſſions. En meſurant l'empreinte laiſſée par le mouvement du traîneau ſur le madrier dormant, nous l'avons trouvée, pour une preſſion de 2000 livres, de 5 $\frac{1}{2}$ lignes de largeur; ce qui donne, pour la longueur du traîneau, près de 12 pouces carrés de ſurface de contact. Nous l'avons trouvée de 3 lignes pour une preſſion de 500 livres : en général, il nous a paru que ces ſurfaces étoient comme la racine carrée des preſſions.

ſurfaces ſe dénaturent, les cavités diminuent, les pointes deviennent plus obtuſes, & ne pénètrent plus que difficilement dans les cavités : l'inclinaiſon des parties changeant à meſure que l'on augmente les preſſions, & le diamètre des cavités devenant moindre que celui des pointes, il doit en arriver une diminution de frottement relativement à l'augmentation de preſſion & à l'augmentation de vîteſſe. Toute cette théorie ſera développée plus en détail à la fin de cette première Partie, lorſque nous chercherons à déterminer la cauſe des variétés que l'on éprouve dans les différens genres de frottemens.

Du frottement des bois de chêne gliſſant à ſec, & le fil de bois ſe recoupant à angle droit.

45. Au lieu d'attacher, comme dans les expériences précédentes, deux règles de chêne de 18 lignes de largeur ſuivant la longueur du traîneau, on les attache en travers aux extrémités de ce traîneau : le recoupement de chaque règle avec le madrier dormant étoit d'un pied de longueur, & la ſurface de contact ſe trouvoit de 36 pouces carrés.

Surface de contact de 36 pouces.

X.eme Expérience.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 47 ℔.

I.er Essai. Le traîneau tiré par un poids de 5 livres, a parcouru les deux premiers pieds en $\frac{8}{2}''$, les deux autres en $\frac{4}{2}''$.

XI.eme Expérience.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 147 ℔.

I.er Essai. Tiré par un poids de 15 livres, le traîneau a parcouru les deux premiers pieds en $\frac{9}{2}''$, les deux autres en $\frac{5}{2}''$.

XII.eme Expérience.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 447 ℔.

I.er Essai. Le traîneau tiré par un poids de 51 livres, a parcouru les deux premiers pieds en $\frac{6}{2}''$, les autres en $\frac{4}{2}''$.

XIII.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 847 ℔.

I.^{er} ESSAI. Tiré par un poids de 97 livres, les deux premiers pieds ont été parcourus en $\frac{7}{2}''$, les deux derniers en $\frac{3}{2}''$.

Continuation des mêmes Expériences pour une ſurface de contact nulle.

46. L'on a taillé en coin, en arrondiſſant un peu l'angle, le deſſous des deux règles fixées au traîneau dans les quatre dernières expériences; en ſorte que la ſurface de contact ſe trouvoit réduite à des angles arrondis.

XIV.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 47 ℔.

I.^{er} ESSAI. Le traîneau tiré par un poids de 5 livres, les deux premiers pieds en $\frac{9}{2}''$, les deux autres en $\frac{5}{2}''$.

XV.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 447 ℔.

I.^{er} ESSAI. Le traîneau mené par une traction de 48 livres; deux pieds en $\frac{21}{2}''$, les deux derniers pieds en $\frac{10}{2}''$.

II.^{e} ESSAI. Mené par une traction de 58 livres, deux pieds en $\frac{5}{2}''$, les deux ſuivans en $\frac{2}{2}''$.

XVI.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 1647 ℔.

I.^{er} ESSAI. Le traîneau mené par 160 livres, les deux premiers pieds en $\frac{20}{2}''$, les deux ſuivans en $\frac{14}{2}''$.

II.^{e} ESSAI. Mené par 172 livres, deux pieds en $\frac{8}{2}''$, les deux ſuivans en $\frac{5}{2}''$.

Observations sur ces Expériences.

46. Les résultats de ces six expériences sont analogues à ceux que nous avons trouvés, en déterminant le frottement du chêne glissant suivant son fil de bois : les deux premiers pieds de la course du traîneau sont encore parcourus ici dans un temps à peu près double des deux derniers ; conséquemment, puisque la force qui accélere le traîneau est une quantité constante, la force retardatrice du frottement sera aussi une quantité constante, & le plus ou moins de vîtesse n'influera pas sur cette force. Si nous comparons le deuxième essai de chaque expérience, avec la formule $A - F = \frac{8}{30} \cdot \frac{M}{T^2}$ que nous avons expliquée dans les articles qui précèdent, nous pourrons former la Table suivante.

TABLE du frottement calculé d'après le deuxième essai de chaque Expérience.

		Frottement calculé.	Pression. / Frottement.	
Surface de Contact de 36 pouces.	X.e Expérience..	4 ℔ ½	$\frac{47}{4\frac{1}{2}}$	= 10,4.
	XI.e Exp.	14	$\frac{147}{14}$	... 10,5.
	XII.e Exp.	46	$\frac{447}{46}$	... 9,9.
	XIII.e Exp.	87	$\frac{847}{87}$	... 9,8.
Surface de Dimension linéaire.	XIV.e Exp.	4 ½	$\frac{47}{4\frac{1}{2}}$	... 10,4.
	XV.e Exp.	47	$\frac{447}{47}$	... 9,5.
	XVI.e Exp.	161	$\frac{1647}{161}$	... 10,2.

47. Dans la Table qui précède, les quatre premières expériences ont été exécutées avec des surfaces de 36 pouces carrés. Dans les trois suivantes, le traîneau portoit sur deux

angle

angles arrondis, & la surface de contact étoit réduite aux plus petites dimensions possibles : les pressions ont varié, dans ces différentes expériences, à peu près comme 35 à 1. Malgré cette différence de pression, l'on a toujours trouvé, pour le module qui mesure le rapport de la pression au frottement, une quantité constante égale moyennement à 10. Ce module ne diffère que très-peu de $9,\frac{4}{10}$ que nous avons trouvé pour le rapport de la pression au frottement, lorsque le chêne glissoit suivant son fil de bois, & que les surfaces de contact n'étoient point dénaturées par des pressions énormes.

48. Mais il y a ici deux remarques bien intéressantes à faire, qui distinguent parfaitement le frottement des bois glissant dans le sens de leur fil, d'avec ce frottement, lorsque, dans le mouvement du traîneau, le fil de bois est posé à angle droit. Nous avons vu, article 44, que le rapport de la pression au frottement étoit une quantité constante, lorsque le bois glissoit suivant son fil, tant que les pressions n'étoient point énormes relativement à l'étendue des surfaces de contact; mais nous avons trouvé en même temps que lorsque la surface de contact étoit réduite à un angle arrondi, non seulement le frottement diminuoit sensiblement relativement aux pressions, mais qu'il diminuoit aussi très-sensiblement en augmentant les vîtesses. Ces deux effets n'ont pas lieu lorsque les bois glissent l'un sur l'autre, le fil de bois se recroisant à angle droit, quoique la surface de contact soit réduite à des dimensions angulaires. Les sept expériences qui précèdent, nous montrent clairement que, quelque différence qu'il y eût entre les pressions & entre l'étendue des surfaces, le nombre qui mesure le rapport de la pression au frottement a toujours resté une quantité constante; d'un autre côté, j'ai constamment éprouvé, dans les trois dernières expériences où le traîneau portoit sur deux angles, que quelque vîtesse primitive qu'on lui imprimât, si le poids qui le tire n'étoit pas égal à celui qui étoit nécessaire pour lui donner un mouvement continu lorsqu'on lui imprimoit une vîtesse insensible, cette vîtesse primitive diminuoit rapidement, & le traîneau s'ar-

rêtoit : cette différence entre ces deux eſpèces de frottement qui, au premier coup-d'œil, peut paroître embarraſſante, s'explique cependant très-facilement. Lorſque les règles taillées en coin gliſſent ſelon le fil du bois, chaque point du madrier dormant, ſaiſi par l'extrémité des règles, reſte comprimé enſuite tout le temps que le traîneau emploie à parcourir ſa longueur : comme le traîneau a 15 pouces de longueur, ſi le mouvement eſt, par exemple, de 15 pouces en 4 ſecondes, chaque point du madrier ſera comprimé pendant 4 ſecondes. Ainſi, quoique les inégalités des ſurfaces, à cauſe de leur cohérence mutuelle, oppoſent une certaine réſiſtance au changement de figure que leur fait prendre la compreſſion, ce temps de 4 ſecondes eſt ſuffiſant pour dénaturer & condenſer en partie ces ſurfaces ; par conſéquent, lorſque le traîneau, ſoutenu ſur des angles arrondis, gliſſera ſelon le fil du bois, le frottement ſera proportionnellement moindre ſous les grandes que ſous les petites preſſions : mais lorſque les règles taillées en coin ſont poſées, *Fig.* 5, par le travers du traîneau, pour lors le traîneau étant en mouvement, chaque point du madrier dormant ne reſte comprimé qu'un inſtant, qui eſt celui du paſſage de l'angle. Cet inſtant n'eſt pas aſſez long pour fléchir ſenſiblement les inégalités des ſurfaces ; le frottement doit donc ſe trouver le même ici que lorſque les ſurfaces ont une étendue finie, puiſque, dans l'un & l'autre cas, les inégalités ne changeant de figure que d'une quantité inſenſible, elles doivent ſe pénétrer librement.

Nous allons actuellement paſſer aux frottemens de quelques autres eſpèces de bois, pour les comparer avec le chêne.

Des frottemens de différentes eſpèces de bois gliſſant ſuivant le fil de bois.

49. Nous ne répéterons pas ici des détails où nous ſommes déjà entrés pour déterminer le frottement du chêne ſur lui-même : dans les expériences qui vont ſuivre, la ſurface de contact étoit de 48 pouces.

Chêne & ſapin.

XVII.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 47 ℔.

Ebranlé, ne commence à ſe mouvoir d'un mouvement lent que ſous une traction de . . . . 7 ℔ $\frac{1}{2}$

XVIII.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 447 ℔.

Ebranlé, ne commence à ſe mouvoir que ſous une traction de . . . . 72 ℔

XIX.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris de 847 ℔.

Ebranlé, n'a commencé à ſe mouvoir que ſous une traction de . . . . 130 ℔

OBSERVATIONS.

50. Pour peu que l'on augmente les tractions rapportées dans les expériences qui précèdent, le traîneau prend un mouvement uniformément accéléré, dû à l'augmentation de traction; ainſi le frottement eſt conſtant, & ne dépend point de la vîteſſe. Si, d'après les trois expériences qui précèdent, nous cherchons le rapport de la preſſion au frottement, nous trouverons :

XVII.^{e} Exp.	Preſſion. 47	Frottement.	7 ℔ $\frac{1}{2}$	Rapport de la preſſion au frottement.	6,3.
XVIII.^{e} Exp.	447	. . . .	72	. . . .	6,2.
XIX.^{e} Exp.	847	. . . .	130	. . . .	6,5.

Le rapport donné, dans ces trois expériences, de la preſſion au frottement, ſe trouvant conſtamment le même, nous en tirerons des conféquences analogues à celles des articles qui précèdent.

51. Par beaucoup d'expériences du même genre, qu'il eft inutile de détailler, nous avons trouvé le rapport de la preffion au frottement :

Pour le fapin contre fapin.	6 à 1.
Pour l'orme contre l'orme.	10 à 1.

L'on a fait une remarque en faifant gliffer le bois d'orme fur lui-même : c'eft que ce bois qui paroît au tact très-velouté, donne, fous les petites preffions, un frottement qui augmente fenfiblement avec les vîteffes; ainfi, en foumettant à l'expérience une furface de 48 pouces carrés, l'on trouve qu'avec une preffion de 47 livres, une traction de 5 livres produit une vîteffe conftamment uniforme d'un pied en 25″; qu'avec 6 livres de traction, la vîteffe devenoit uniforme d'un pied en 15″; mais avec une traction de 9 livres, les efpaces parcourus paroiffoient s'accélérer uniformément, les deux premiers pieds en $\frac{5}{2}$″, les deux autres en $\frac{3}{2}$″ : fous une preffion de 1647 livres, l'on ne peut produire que rarement des petites vîteffes uniformes, & le rapport de la preffion au frottement eft conftamment fous tous les degrés de vîteffe, comme 10 à 1. La nature de l'orme, qui paroît au toucher très-velouté, lui fait produire ici avec une furface de 48 pouces de contact un effet qui n'eft fenfible, dans le frottement des bois de chêne, qu'avec des furfaces de plufieurs pieds carrés.

Du frottement des bois & des métaux.

52. Dans les expériences qui précèdent, nous venons de voir que le rapport de la preffion au frottement étoit toujours à peu près une quantité conftante, & que le plus ou moins de vîteffe ne l'augmentoit ni ne le diminuoit. La nature paroît ici fuivre une autre marche, & le frottement augmente avec la vîteffe de la manière la plus fenfible.

Frottement du fer & du chêne.

53. Sous le traîneau de 15 pouces de longueur, l'on a placé, *Fig. 6*, deux règles de fer de 18 lignes de largeur, & de 15 pouces de longueur, saisissant le traîneau à leurs extrémités par des retours d'équerre. Tous les angles & arêtes ont été arrondis pour qu'elles n'écorchassent point les bois : l'on a fait ensuite glisser le traîneau armé des deux règles de fer le long du madrier dormant, & l'on a remarqué les temps successifs de sa marche ; mais comme l'on s'est apperçu tout de suite que, soit que le traîneau glissât naturellement, soit qu'on lui imprimât une grande vîtesse, après un ou deux pieds de marche, il prenoit une vîtesse uniforme, l'on s'est contenté d'observer le mouvement lorsqu'il a été réduit à l'uniformité : la surface de contact est de 45 pouces.

XX.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 53 ℔.

I.^{er} ESSAI. Le traîneau ne commence à se mouvoir que sous une traction de 4 ℔ $\frac{1}{2}$, & il prend une vîtesse uniforme d'un pied en 264''.

II.^{e} ESSAI. Avec une traction de 6 ℔ $\frac{1}{2}$, il parcourt uniformément un pied en $\frac{6}{2}$''.

III.^{e} ESSAI. Traction, 9 ℔, il parcourt uniformément un pied en $\frac{3}{4}$''.

XXI.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 453 ℔.

I.^{er} ESSAI.	35 ℔ de traction, il parcourt un pied d'un mouvement uniforme en	$\frac{264''}{2}$
II.^{e} ESSAI.	44	$\frac{24}{2}$
III.^{e} ESSAI.	53	$\frac{13}{2}$
IV.^{e} ESSAI.	65	$\frac{5}{2}$
V.^{e} ESSAI.	78	$\frac{2}{2}$.

XXII.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 853 ℔.

		Un pied parcouru uniformément.
I.er ESSAI. Traction.........	67 ℔	dans un temps lent & incertain.
IIe. ESSAI.................	80	.... $\frac{80''}{2}$
IIIe. ESSAI................	105	.... $\frac{20}{2}$
IVe. ESSAI.................	130	.... $\frac{5}{2}$
V.e ESSAI..................	155	.... $\frac{2}{2}$.

XXIII.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris de 1653 ℔.

		Un pied parcouru uniformément.
I.er ESSAI. Force de traction.	125 ℔	dans un temps lent & incertain.
II.e ESSAI.................	135	.... 1320''
III.e ESSAI................	160	.... $\frac{148}{2}$
IV.e ESSAI.................	185	.... $\frac{44}{2}$
V.e ESSAI..................	210	.... $\frac{18}{2}$
VI.e ESSAI.................	235	.... $\frac{5}{2}$
VIIe. ESSAI................	260	.... $\frac{2}{2}$.

Continuation des mêmes Expériences.

54. L'on a voulu voir si, en mettant le fil de bois en travers, & réduisant aux plus petites dimensions possibles les surfaces de contact, l'on trouveroit le même résultat que dans l'expérience qui précède. L'on a ôté les deux règles de fer de dessous le traîneau, l'on y a substitué deux règles de chêne taillées en coin & attachées aux extrémités du traîneau, comme à la *Fig.* 5, le fil de bois se recoupant à angle droit : l'on a ensuite attaché sur le madrier dormant deux grandes règles de fer dressées & polies avec le plus grand soin ; alors l'on a fait glisser le traîneau,

qui ne portoit sur les règles de fer que par les angles arrondis des règles de chêne.

XXIV.eme Expérience.

Le traîneau est chargé, tout compris, de 1653 ℔.

			Un pied parcouru uniformément.
Ier. Essai. Force de traction.	115 ℔	dans	476″
II.e Essai	135		$\frac{440}{2}$
III.e Essai	160		$\frac{260}{2}$
IV.e Essai	185		$\frac{96}{2}$
V.e Essai	210		$\frac{30}{2}$
VI.e Essai	235		$\frac{13}{2}$
VII.e Essai	260		$\frac{5}{2}$.

Frottement du cuivre glissant sans enduit sur le bois de chêne, suivant le fil du bois.

55. L'on a fixé, sous le madrier de 15 pouces de longueur, deux règles de cuivre des mêmes dimensions que les règles de fer (*Fig. 6.*) des expériences 20, 21. L'on a fait ensuite glisser le traîneau sur le madrier dormant de la même manière que dans ces expériences : la surface de contact étoit de 45 pouces.

XXV.eme Expérience.

Le traîneau est chargé, tout compris, de 50 ℔.

			Un pied parcouru uniformément.
I.er Essai. Force de traction.	2 ℔ $\frac{1}{2}$	dans	288″
II.e Essai	3 $\frac{1}{2}$		88
III.e Essai	4 $\frac{1}{2}$		28
IV.e Essai	6 $\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$
V.e Essai	9 $\frac{1}{2}$		$\frac{4}{6}$.

XXVI.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, tout compris, de 450 ℔.

				Un pied parcouru uniformément.
I.^{er}	ESSAI. Force de traction.	23 ℔	dans	1440″.
II^{e}.	ESSAI................	28	....	360
III.^{e}	ESSAI................	33	....	200
IV.^{e}	ESSAI................	43	....	$\frac{80}{2}$
V.^{e}	ESSAI................	53	....	$\frac{16}{2}$
VI.^{e}	ESSAI................	65	....	$\frac{3}{2}$
VII.^{e}	ESSAI................	78	....	$\frac{5}{6}$.

XXVII.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, tout compris, de 850 ℔.

				Un pied parcouru uniformément.
I.^{er}	ESSAI. Force de traction.	42 ℔	dans un temps lent & incertain.	
II.^{e}	ESSAI................	67	....	180″.
III.^{e}	ESSAI................	80	....	$\frac{128}{2}$
IV.^{e}	ESSAI................	105	....	$\frac{24}{2}$
V.^{e}	ESSAI................	130	....	$\frac{6}{2}$
VI.^{e}	ESSAI................	155	....	$\frac{5}{6}$.

OBSERVATIONS.

56. Nous avons à comparer ici les frottemens ſous différentes preſſions & ſous différens degrés de vîteſſe. Nous allons commencer par les eſſais où la vîteſſe étoit inſenſible : dans les expériences (20, 21, 22 & 23), où les lames de fer gliſſent à ſec, ſuivant le fil de bois, ſur le madrier dormant, la ſurface de contact étant de quarante-cinq pouces, nous avons,

avons, pour les vîtesses insensibles, le rapport de la pression au frottement :

	Pression.	Frottement.	Rapport de la pression au frottement avec vîtesse insensible.	
XX.e Exp. I.er Essai.	53 ℔	4 ℔ $\frac{1}{2}$	$\frac{53}{4\frac{1}{2}}$	11,8.
XXI.e Exp. I.er Essai.	453	35	$\frac{453}{35}$	12,9
XXII.e Exp. I.er Essai.	853	67	$\frac{453}{35}$	12,7.
XXIII.e Exp. I.er Essai.	1653	125	$\frac{1653}{125}$	13,2.

Le rapport de la pression au frottement, donné dans ces quatre expériences, est une quantité qui augmente très-peu, malgré les différences considérables des pressions; il paroît donc certain, d'après ces expériences, que, pour le premier degré de vîtesse, le frottement du bois de chêne & des lames de fer est à peu près le treizième de la pression.

57. Si l'on cherche actuellement à déterminer le rapport de la pression au frottement sous d'autres degrés de vîtesse, il faudra comparer entre eux les essais qui, avec différentes pressions, ont donné le même degré de vîtesse : or l'on voit, dans le dernier essai de chaque expérience, que la vîtesse étoit, à peu de chose près, d'un pied par seconde; ainsi nous pouvons connoître le rapport de la pression au frottement, qui répond à une vîtesse d'un pied par seconde.

	Pression.	Frottement.	Rapport de la pression au frottement avec une vîtesse d'un pied par seconde.	
XX.e Exp. III.e Essai.	53 ℔	9 ℔	$\frac{53}{9}$	5,9.
XXI.e Exp. V.e Essai.	453	78	$\frac{453}{78}$	5,8.
XXII.e Exp. V.e Essai.	853	155	$\frac{853}{155}$	5,5.
XXIII.e Exp. VII.e Essai.	1653	260	$\frac{1653}{260}$	6,3.

Le peu de variété qui règne dans les résultats précédens, nous apprend que pour un même degré de vîtesse, quelleque soit la pression, elle sera toujours dans un rapport constant avec le frottement.

58. Il sembleroit que l'on pourroit conclure de la vingt-troisième expérience comparée avec la vingt-quatrième, que l'étendue des surfaces de contact ni la position du fil de bois n'ont aucune influence sur le frottement. Dans la vingt-troisième expérience, une surface de quarante-cinq pouces carrés est comprimée par un poids de 1653 ℔; le frottement se fait suivant le fil de bois. Dans la vingt-quatrième expérience, la charge est de 1650 ℔; la surface de contact est nulle, ou au moins est formée par la compression d'un angle arrondi; le fil de bois est placé à angle droit avec la direction de la marche du traîneau; & malgré ces différences, le résultat des deux expériences se trouve à peu près le même: il faut cependant prévenir que cette augmentation de frottement qui, d'après les expériences qui précèdent, suit progressivement l'augmentation de vîtesse, n'a lieu pour les petites surfaces de contact comprimées par des poids considérables, que lorsque les bois sortent des mains de l'Ouvrier, & qu'après un frottement de plusieurs heures, la vîtesse cesse presque en entier d'influer sur le frottement.

59. Il ne reste, pour compléter la théorie du frottement des métaux glissant sans enduit sur les bois, que de chercher suivant quelles loix les augmentations de traction font croître les vîtesses : prenons la vingt-troisième expérience, dans laquelle la pression est de 1653 ℔, elle fournit un assez grand nombre d'essais; nous y remarquerons qu'à chaque essai les forces de traction étant augmentées de 25 ℔, chaque vîtesse est à peu près triple de celle qui la précède. Présentons ici notre expérience de manière à rendre sensible la loi de cette progression.

Récapitulation de la vingt-troisième expérience pour déterminer la loi des vîtesses.

	Traction.	Vîtesse éprouvée.	Vîtesse calculée d'après le troisième Essai.
II.e Essai.....	135 ℔	1320″	
III.e Essai.....	160	$\frac{148}{2}$	148″
IV.e Essai.....	160 + 25.....	$\frac{44}{2}$	$\frac{493}{2}$
V.e Essai.....	160 + 2.25.....	$\frac{18}{2}$	$\frac{164}{2}$
VI.e Essai.....	160 + 3.25.....	$\frac{5}{2}$	$\frac{55}{2}$
VII.e Essai.....	160 + 4.25.....	$\frac{2}{2}$	$\frac{18}{2}$

L'on voit par cette table, que depuis le troisième essai jusqu'au septième, les tractions étant augmentées de 25 ℔ à chaque essai, la vîtesse correspondante est toujours à peu près le tiers de la précédente; c'est ce qui résulte évidemment de la dernière colonne calculée d'après le troisième essai, & comparée avec l'avant dernière colonne qui représente les vîtesses observées. Ainsi les tractions croissant suivant une progression arithmétique, les vîtesses croissent suivant une progression géométrique.

60. Il sera facile, d'après tout ce que nous venons de dire, de trouver une formule qui exprime, dans ce genre de frottement, la loi des tractions & des vîtesses. Voici les données que nous avons pour établir cette formule : dans la vingt-troisième expérience où la pression est de 1653 ℔, nous trouvons qu'au dessous de 125 ℔ de traction, l'on ne peut produire aucun mouvement; que la vîtesse va ensuite en augmentant suivant une progression géométrique, à mesure que les forces de traction augmentent suivant une progression arithmétique, en sorte que 260 ℔, ou une augmentation de traction de 135 ℔ produit une vîtesse d'un pied par seconde.

Nous remarquons ensuite, en comparant entre elles les différentes expériences, que l'étendue des surfaces n'influe pas sensiblement sur les résistances que produit le frottement; en sorte que, sous les mêmes pressions & avec les mêmes degrés de vîtesse, le frottement est à peu près le même pour les grandes & les petites surfaces.

Ces remarques seroient suffisantes pour établir, à l'aide de quelques expériences, la formule générale qui indiqueroit la marche du traîneau. Mais il faut prévenir, comme nous l'avons déjà fait à la fin de l'article 58, que l'on ne pourra regarder une pareille formule que comme un à peu près qui ne doit déterminer les loix des frottemens relativement à la vîtesse, que pendant les premières heures où l'on soumet le traîneau aux expériences; qu'ensuite les frottemens ne croissent plus dans une aussi grande proportion relativement aux vîtesses; qu'il arrive même qu'après que le mouvement d'une très-petite surface a été continué pendant long-temps sous de très-grandes pressions, la vîtesse cesse en entier d'avoir de l'influence sur le frottement; c'est de quoi nous trouverons plusieurs exemples dans la suite de ce Mémoire.

SECTION DEUXIÈME.

Des surfaces qui glissent l'une sur l'autre, garnies d'un enduit.

61. LES seuls enduits qui puissent convenir pour diminuer le frottement des bois, sont le suif & le vieux oing; l'huile ne peut être employée que dans les métaux : comme les enduits sont des corps mous, ils n'adoucissent le frottement des surfaces que parce qu'ils remplissent les cavités; & qu'interposés entre les surfaces, ils les soutiennent à une certaine distance l'une de l'autre : de là il arrive que, sous les grandes pressions, les enduits les plus mous sont toujours les plus mauvais; que sous les grandes pressions, lorsque les surfaces de contact sont réduites à des angles arrondis, les enduits diminuent très-peu

le frottement du traîneau : l'on remarque encore que lorsque le traîneau, ayant une grande surface de contact, a passé deux ou trois fois sur le même suif, le suif s'applique sur le madrier, pénètre dans ses pores, & ne s'oppose plus qu'imparfaitement à l'engrainage des parties; en sorte que, dans différens essais répétés sans renouveler les enduits, on trouve une augmentation de frottement très-considérable. Avant de rapporter les expériences que nous avons faites en enduisant les bois à chaque essai, nous devons parler d'une cause qui jette souvent la plus grande incertitude dans les résultats.

Lorsque le madrier & le traîneau sortent des mains de l'Ouvrier, quelque soin que l'on ait pris pour bien unir les surfaces en les polissant avec la varlope & une peau de chien de mer, ou même en les faisant glisser plusieurs fois à sec l'une sur l'autre, l'on trouve qu'en enduisant les surfaces elles donnent d'abord de grandes inégalités dans les frottemens. Ces inégalités sont d'autant plus remarquables, que les surfaces sont plus étendues & la pression moindre : elles augmentent très-sensiblement les frottemens, à proportion que les vîtesses sont plus grandes. Ces variétés suivent des loix incertaines, & dont aucune théorie ne peut rendre raison; mais lorsqu'en enduisant de suif ou de vieux oing, l'on fait glisser le traîneau pendant plusieurs jours consécutifs sous de fortes charges, l'on trouve ensuite que le frottement est presque toujours proportionnel à la pression, & que l'augmentation des vîtesses ne l'augmente que d'une manière insensible : voici nos expériences pour déterminer le frottement du bois de chêne enduit de suif.

Frottement du bois de chêne enduit de suif, renouvelé à chaque essai.

62. L'on s'est servi d'un traîneau de 15 pouces de longueur, qui portoit sur le madrier dormant par une surface de contact de 180 pouces carrés : il y avoit déjà huit jours que ce traîneau servoit aux expériences du frottement, & l'on avoit fait, avec des enduits de suif que l'on renouveloit souvent, plus de deux

cents expériences ſous des preſſions de pluſieurs milliers. Les cinquante premières avoient donné beaucoup de variété; mais les autres étoient moins incertaines, & le traîneau ainſi que le madrier dormant paroiſſoient avoir pris tout le poli dont le bois de chêne peut être ſuſceptible; le traîneau ainſi préparé a été enduit de ſuif à chaque expérience : la ſurface de contact étoit de 180 pouces carrés.

Première Expérience.

Le traîneau chargé, tout compris, de 3250 ℔.

I.er Essai. Etant ébranlé, le traîneau a commencé à ſe mouvoir d'un mouvement continu, mais lent & incertain, avec une traction de 118 ℔.

II.e Essai. Le traîneau, tiré par un poids de 124 livres, a parcouru ſucceſſivement 2 pieds en $\frac{23}{2}''$, & les deux ſuivans en $\frac{9}{2}''$.

II.eme Expérience.

Le traîneau chargé, tout compris, de 1650 ℔.

I.er Essai. Ebranlé, le traîneau marche d'un mouvement continu, mais lent & incertain, avec une traction de 64 livres.

II.e Essai. Tiré par 70 livres, a parcouru ſucceſſivement les deux premiers pieds en $\frac{19}{2}''$, les deux autres en $\frac{10}{2}''$.

III.eme Expérience.

Le traîneau chargé, tout compris, de 850 ℔.

I.er Essai. Avec une traction de 36 livres, le traîneau marche d'un mouvement continu, mais lent & incertain.

IV.eme Expérience.

Le traîneau chargé, tout compris, de 450 ℔.

I.er Essai. Le mouvement, ſous une traction de 21 livres, a été lent, mais à peu près uniforme à raiſon d'un pied en $\frac{20}{2}''$.

V.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, tout compris, de 250 ℔.

I.^{er} ESSAI. Avec une traction de 13 livres & demie, prend une vîtesse uniforme d'un pied en 60″.

II.^{e} ESSAI. Avec une traction de 20 livres s'accélère d'abord, puis prend une vîtesse uniforme d'un pied en $\frac{4}{2}$″.

VI.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 50 ℔.

I.^{er} ESSAI. Avec une traction de 6 livres & demie, prend une vîtesse uniforme d'un pied en $\frac{15}{2}$″.

II.^{e} ESSAI. Avec une traction de 13 livres s'accélère rapidement, &, après une marche de 3 pieds, paroît parcourir les deux derniers pieds avec une vîtesse uniforme d'un pied par seconde.

OBSERVATIONS.

63. Si nous cherchons d'abord, d'après les six expériences qui précèdent, quel est le rapport de la pression au frottement, lorsque la force de traction est seulement suffisante pour donner au traîneau une vîtesse insensible, nous trouverons, d'après le premier essai de chaque expérience :

I.^{ere} EXPÉRIENCE.	$\frac{\text{Pression.}}{\text{Frottement.}}$	$\frac{3250}{118}$	.... 27,6.
II.^{e} EXP.	....	$\frac{1650}{64}$	.... 25,8.
III.^{e} EXP.	....	$\frac{850}{36}$	.... 23,6.
IV.^{e} EXP.	....	$\frac{450}{21}$	.... 21,5.
V.^{e} EXP.	....	$\frac{250}{13\frac{1}{2}}$	.... 18,5.
VI.^{e} EXP.	....	$\frac{50}{6\frac{1}{2}}$	.... 7,7.

Si l'on observe la marche du rapport de la pression au frottement dans le tableau qui précède, l'on voit que ce rapport diminue ſenſiblement d'une expérience à l'autre ; mais que la marche de cette dimnution, lente depuis la première expérience juſqu'à la cinquième, devient très-rapide de la cinquième à la ſixième ; en ſorte que l'on trouve ici une eſpèce de ſaut qui paroît dépendre de la cohérence des parties du ſuif & de l'étendue des ſurfaces, comme nous l'avons déjà apperçu en faiſant gliſſer ſans enduit des grandes ſurfaces.

Si cette cohérence eſt la cauſe qui fait varier le rapport de la preſſion au frottement, il eſt évident que la réſiſtance conſtante qu'elle produit ne peut influer que très-peu ſur ce rapport déterminé dans la première expérience : nous pourrions donc regarder le rapport 27,6 à 1, donné par cette expérience, comme celui qui repréſente le frottement dans toutes les autres, & notamment dans la dernière ; ainſi, puiſque nous trouvons que le frottement, plus la cohérence produiſent, avec une preſſion de 50 livres, une réſiſtance de 6 livres & demie, la cohérence eſt à peu près pour notre ſurface de 180 pouces, équivalente à 5 livres : ôtons par-tout 5 livres des tractions qui ont été trouvées néceſſaires pour produire des vîteſſes inſenſibles, & nous aurons pour le rapport de la preſſion au frottement corrigé de la réſiſtance due à la cohérence :

I.$^{\text{ere}}$ Expérience. $\frac{\text{Preſſion.}}{\text{Frottement.}}$	$\frac{3250}{113}$	28,7.
II.$^{\text{e}}$ Exp.	$\frac{1650}{59}$	27,9.
III.$^{\text{e}}$ Exp.	$\frac{850}{31}$	27,4.
IV.$^{\text{e}}$ Exp.	$\frac{450}{16}$	28,1
V.$^{\text{e}}$ Exp.	$\frac{250}{8\frac{1}{2}}$	29,4.
VI.$^{\text{e}}$ Exp.	$\frac{50}{1\frac{3}{4}}$	28,6.

Ce tableau donne à préſent, pour les ſix expériences, le rapport de la preſſion au frottement preſque exactement le même :

même : la différence des résultats est si petite, que, quelques précautions que l'on ait prises dans les expériences, l'on ne peut l'attribuer qu'aux imperfections inévitables des opérations.

64. Dans les trois dernières expériences où les pressions sont peu considérables, l'on apperçoit une augmentation de frottement à mesure que les vîtesses augmentent, car en augmentant les forces de traction au delà de celles qui sont nécessaires pour vaincre le frottement dans les vîtesses insensibles, l'on produit bientôt une vîtesse uniforme, & non pas une vîtesse uniformément accélérée. L'on retrouve ici la même marche que nous déjà apperçue lorsque nous avons fait glisser des surfaces d'une grande étendue l'une sur l'autre. La cohésion des surfaces nous avoit paru produire une résistance due à la vîtesse, & absolument indépendante des pressions : la cohésion du suif produit ici le même phénomène d'une manière plus marquée. Pour qu'il ne restât aucun doute, comme j'avois remarqué que le vieux oing avoit une cohésion beaucoup plus considérable que le suif, je fis tout de suite, avec le même traîneau, les expériences qui vont suivre.

L'on a enduit avec une couche abondante de vieux oing le madrier dormant, ainsi que le traîneau des expériences précédentes : la surface de contact étoit toujours de 180 pouces carrés; en poussant le traîneau, on lui donnoit une vîtesse primitive à peu près d'un pied par seconde : lorsque le traîneau avoit parcouru deux ou trois pieds, cette vîtesse se ralentissoit & devenoit à peu près uniforme, mais plus ou moins grande suivant le degré de traction : à chaque essai l'on renouveloit l'enduit; l'on a observé seulement les vîtesses devenues uniformes.

VII.eme Expérience.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 50 ℔.

I.er Essai. Avec une traction de 13 livres, la vîtesse uniforme a été d'un pied en 540″.

II.e Essai. Avec une traction de 16 livres, d'un pied en $\frac{8}{2}$″.

III.e Essai. Avec une traction de 22 livres, d'un pied en $\frac{3}{5}$″.

VIII.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris, de 250 ℔.

I.er ESSAI. Avec une traction de 20 livres, le traîneau marche d'un mouvement extraordinairement lent.

II.e ESSAI. Avec une traction de 26 livres, le traîneau a pris une vîteſſe uniforme d'un pied en $\frac{8}{2}''$.

III.e ESSAI. Avec une traction de 32 livres, le traîneau a pris une vîteſſe uniforme d'un pied en $\frac{3}{2}''$.

IX.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris, de 450 ℔.

I.er ESSAI. Avec une traction de 34 livres, le traîneau lancé prend une vîteſſe uniforme d'un pied en $\frac{9}{2}''$.

II.e ESSAI. Avec une traction de 40 livres, le traîneau a pris une vîteſſe uniforme d'un pied en $\frac{3}{2}''$.

Ces trois expériences faites avec le plus grand ſoin, ont prouvé que le vieux oing adouciſſoit le frottement moins que le ſuif; mais elles ont prouvé d'une manière encore plus ſûre, que la réſiſtance produite par l'augmentation des vîteſſes étoit abſolument indépendante des preſſions, puiſque ſous trois degrés de preſſion très-différens, lorſque les tractions étoient telles que le traîneau prenoit une vîteſſe uniforme d'un pied en $\frac{8''}{2}$, une augmentation de traction conſtante & égale à 6 livres, donnoit, quelleque fût la preſſion, la même vîteſſe uniforme d'un pied en $\frac{3''}{2}$: ainſi la réſiſtance due aux augmentations de vîteſſe dépend uniquement de la nature des ſurfaces & de la cohérence des enduits, & elle eſt abſolument indépendante de la preſſion : l'on peut, dans la pratique, la négliger lorſque les vîteſſes ne paſſent pas 4 ou 5 pouces par ſeconde, & que chaque pied carré de ſurface de contact eſt chargé de trois ou quatre milliers : elle peut à peu près être eſtimée de 6 à 7 livres par pied carré, pour les ſurfaces enduites de ſuif mues avec des vîteſſes d'un pied par ſeconde.

65. En ſuivant la marche de nos ſix premières expériences, l'on s'imagineroit peut-être qu'en diminuant autant qu'il eſt poſſible la ſurface de contact, & en l'enduiſant de ſuif, l'on trouveroit le rapport de la preſſion au frottement comme 27 à 1; l'on ſe tromperoit, lorſque les ſurfaces de contact ſont très-petites, l'enduit n'eſt pas en état de ſoutenir la preſſion qu'éprouve chaque point de contact; le ſuif pénètre dans l'intérieur des pores du bois, ou eſt chaſſé en avant par la partie antérieure du traîneau en mouvement: par-là les deux ſurfaces ſe rapprochent preſque autant que s'il n'y avoit point d'enduit; j'ai fait gliſſer pluſieurs fois mon traîneau porté ſur deux petites règles, de manière que la ſurface de contact n'étoit que de 30 pouces carrés ſous des preſſions de 2000 livres. Il ne m'a pas été poſſible, en ébranlant ſeulement le traîneau, ou même en lui donnant une vîteſſe primitive d'un ou deux pouces par ſeconde, d'avoir le rapport de la preſſion au frottement plus grand que 16 ou 17 à 1: il eſt vrai cependant qu'avec une couche épaiſſe de ſuif, & en imprimant une vîteſſe primitive d'un pied par ſeconde, il arrivoit quelquefois que le traîneau continuoit à ſe mouvoir d'un mouvement même qui paroiſſoit s'accélérer ſous une traction qui n'étoit que le vingt-ſeptième de la preſſion. Mais ſi, par quelque accident, la vîteſſe diminuoit, ou ſi même l'on imprimoit au traîneau une vîteſſe primitive moindre qu'un pied par ſeconde, il s'arrêtoit tout de ſuite: l'explication de ce que l'on obſerve ici eſt très-facile; comme la longueur du traîneau eſt peu conſidérable, l'enduit, qui n'eſt affaiſſé que peu à peu par la preſſion, ne l'eſt pas en entier lorſque la vîteſſe eſt d'un pied par ſeconde; ainſi il contribue à adoucir le mouvement.

66. Il nous reſte encore à déterminer le frottement des bois enduits de graiſſe, lorſque les ſurfaces de contact ſont réduites aux plus petites dimenſions poſſibles: comme je voulois avoir mes ſurfaces dans un état permanent ſans les enduire à chaque opération, j'ai eſſuyé la ſurface de mon madrier dormant; mais d'après toutes les expériences qui précèdent, le ſuif avoit pénétré dans les pores du bois à plus d'une ligne de profondeur,

& le madrier essuyé restoit onctueux & luisant : c'est dans cet état, où se trouvent à peu près les machines qui agissent pendant un certain temps, sans qu'on renouvelle les enduits, que nous avons d'abord cherché à déterminer le frottement des surfaces de contact réduites aux plus petites dimensions : l'on a placé à l'ordinaire, sous le traîneau, deux règles taillées en coin, & qui ne touchoient le madrier dormant que par leurs angles arrondis; ces règles étoient placées sur les côtés du traîneau, de manière que, dans sa marche, elles glissoient suivant le fil de bois : l'on a fait parcourir au traîneau plusieurs fois la longueur du madrier dormant, pour donner aux surfaces de contact tout le poli dont elles sont susceptibles : l'on a fait ensuite les expériences qui suivent.

Frottement du bois de chêne enduit de suif, lorsque les surfaces de contact sont nulles.

X.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 50 ℔.

I.^{er} ESSAI. Ne commence à marcher d'un mouvement continu qu'avec une traction de 3 livres.

XI.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 250 ℔.

I.^{er} ESSAI. Ne commence à marcher que sous une traction de 15 livres.

XII.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 450 ℔.

I.^{er} ESSAI. Ne commence à marcher qu'avec une traction de 28 livres.

XIII.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 850 ℔.

I.^{er} ESSAI. Marche d'un mouvement continu avec une traction de 50 livres.

XIV.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris, de 1650 ℔.

I.er ESSAI. Marche d'un mouvement continu en donnant une vîteſſe primitive d'un pouce par ſeconde, avec une traction de 100 livres.

Remarques ſur ces Expériences.

67. Soit qu'on enduiſît de ſuif le madrier dormant à chaque eſſai, ſoit qu'on l'eſſuyât, & qu'il reſtât ſeulement luiſant & onctueux, à cauſe du ſuif qui, dans toutes les opérations précédentes, avoit pénétré dans les pores du bois, les réſultats ſe ſont toujours trouvés les mêmes; en ſorte que le plus ou moins de ſuif ne diminue point le frottement lorſque les ſurfaces de contact ſont nulles : la vîteſſe paroît auſſi très-peu influer dans ce genre de frottement, & le mouvement a été accéléré uniformément dans différens autres eſſais que j'ai cru inutiles de rapporter ici. Cette accélération étoit toujours due à l'excédent des tractions qui la produiſoit ſur les tractions néceſſaires pour donner un mouvement très-lent : l'on doit cependant remarquer que, dans ces expériences, le traîneau ne part pas ſous un ſimple ébranlement, lorſque les preſſions ſont très-conſidérables; mais il faut lui imprimer une vîteſſe primitive d'un ou deux pouces par ſeconde, & pour lors il continue à ſe mouvoir d'une vîteſſe uniformément accélérée.

Nous allons actuellement déterminer le rapport de la preſſion au frottement dans les plus petites ſurfaces de contact poſſibles, d'après les expériences qui précèdent.

X.e EXPÉRIENCE. $\frac{\text{Preſſion.}}{\text{Frottement.}}$	$\frac{50}{3}$	16,7.
XI.e EXP.	$\frac{250}{15}$	16,6.
XII.e EXP.	$\frac{450}{28}$	16,1.
XIII.e EXP.	$\frac{850}{50}$	17,0.
XIV.e EXP.	$\frac{1650}{100}$	16,5.

68. Malgré les augmentations de preſſion qui, dans ces expériences, ſe trouvent de la dixième à la quatorzième, comme 1 à 33, l'on trouve toujours le même rapport entre la preſſion & le frottement; & ce rapport moyen ſe meſure par celui des nombres 16 $\frac{1}{2}$ à 1. Ici ce rapport n'a pas été différent ſous les grandes & les petites preſſions, comme nous l'avions trouvé en faiſant gliſſer ſans enduit le traîneau ſur le madrier dormant (art. 46); nous en donnerons les raiſons dans la dernière Section de ce Chapitre, lorſque nous eſſayerons de déterminer les cauſes & la théorie des frottemens.

69. Lorſqu'au lieu de faire gliſſer, comme dans les quatorze expériences qui précèdent, les règles qui portent le traîneau ſuivant le fil de bois, nous avons poſé ces règles en travers aux deux extrémités du traîneau, & que nous les avons fait gliſſer, le fil de bois ſe recoupant à angle droit, nous avons toujours eu, pour des ſurfaces de contact réduites aux plus petites dimenſions, le même degré de frottement que dans l'article qui précède. Pour une preſſion de 50 livres, le frottement a été de 3 livres, & pour une preſſion de 1650 livres, il a été de 100 livres : l'on a même obſervé qu'un ſimple ébranlement produiſoit toujours, ſous tous les degrés de preſſion, un mouvement continu uniformément accéléré, plus régulier que lorſque le bois gliſſoit ſuivant ſon fil; ce qui vient de ce qu'ici tous les points de contact du madrier dormant changent à chaque inſtant dans le mouvement, & qu'ils n'ont pas le temps de ſe dénaturer ſous les grandes preſſions (*a*).

70. Le traîneau, portant ſur le madrier dormant par une ſurface de contact de quelques pieds d'étendue, pénétré de ſuif par des opérations antérieures, reſtant onctueux après avoir été eſſuyé, ou même conſervant ſon ancien ſuif, mais écraſé

(*a*) Lorſque les bois enduits de ſuif gliſſent par le travers du fil de bois, & que les ſurfaces de contact ont de l'étendue, l'on trouve que le frottement eſt le même que celui trouvé en pareil cas (art. 62), lorſque le traîneau gliſſoit ſuivant ſon fil de bois.

& appliqué contre le bois par huit ou dix opérations qui ont precédé, se trouve dans les mêmes circonstances des deux articles qui précèdent, & les surfaces de contact se joignent ici immédiatement. Aussi trouve-t-on toujours pour lors le rapport de la pression au frottement sous des pressions même de deux milliers par pied carré, moindre que 16 à 1. Dans une surface de deux pieds carrés, soumise aux expériences depuis deux jours avec un enduit de suif, l'on a trouvé, en essuyant cette surface qui étoit encore très-onctueuse, que le rapport de la pression au frottement étoit comme 13 à 1 : sans essuyer le suif, mais faisant glisser le traîneau dix fois sans le renouveler, l'on a trouvé le rapport de 14 à 1. Ce traîneau, au surplus, n'avoit point encore pris tout-à-fait son poli dans deux jours d'opérations, quoiqu'il eût parcouru plus de cinquante fois une course de cinq pieds sous des pressions de trois & quatre milliers: la résistance due à la cohérence des surfaces étoit, dans cette expérience, de plus de 7 livres par pied carré.

71. Je ne puis trop avertir, avant de terminer les épreuves du frottement des bois glissant avec des enduits, que l'on ne peut absolument compter sur des résultats suivis que lorsque le bois aura pris tout son poli, & que le suif aura pénétré dans ses pores par beaucoup d'opérations préliminaires; ce n'est qu'après une quantité d'expériences qui nous sont devenues inutiles, que nous nous sommes apperçu de la nécessité de cette précaution (*a*). Nous nous étendrons davantage sur cet article, lorsqu'à la fin de ce Chapitre nous rassemblerons tous nos résultats, pour tâcher de découvrir les causes du frottement.

(*a*) En faisant glisser un traîneau neuf sur le madrier dormant enduit une seule fois de suif au commencement des opérations, l'on a trouvé qu'après deux jours de travail, pendant lesquels l'on pouvoit avoir fait quarante expériences en chargeant le traîneau de 5800 livres,

Une traction de 400 ℔	donnoit un mouvement uniforme d'un pouce en	80″.
Une traction de 525	....	12.
Une traction de 600	....	2.

Des métaux glissant sur les bois enduits de suif.

72. Lorsque les métaux glissent sur des bois enduits de matières graisseuses, le frottement en paroît très-adouci, & l'on produit des vîtesses insensibles avec des degrés de traction moins considérables que dans toutes les autres espèces de frottemens : mais pour peu que l'on veuille augmenter les vîtesses, l'on retrouve, comme dans la première Section, lorsqu'on a fait glisser sans enduit les métaux sur le bois, que le frottement augmente beaucoup avec la vîtesse ; & l'on a, pour le rapport de l'augmentation des vîtesses & du degré de traction qui produit cette augmentation, à peu près les mêmes loix que nous avons cherché à déterminer dans le frottement des métaux glissant à sec sur les bois ; mais si l'on ne renouvelle pas les enduits à chaque expérience, ils se coagulent, changent de nature, & le frottement augmente successivement : l'on trouvera plus bas une expérience qui montrera avec quelle rapidité le frottement augmente lorsqu'on ne renouvelle pas les enduits. Nous allons d'abord commencer par exposer les essais où le suif a été renouvelé à chaque opération.

Frottement du fer contre le chêne garni d'un enduit de suif, que l'on renouvelle à chaque opération.

73. L'on a attaché au traîneau de 15 pouces de longueur, les deux règles de fer de 15 pouces de longueur & de 18 lignes de largeur (*Fig. 6*), dont nous nous sommes déjà servi dans plusieurs opérations; elles glissoient suivant le fil de bois du madrier dormant, qui étoit enduit de nouveau suif à chaque essai : la surface de contact étoit de 45 pouces.

XV.^{eme} Expérience.

Le traîneau chargé, tout compris, de 53 ℔.

I.^{er} Essai. Avec une traction de	3 ℔ $\frac{1}{2}$, le traîneau a parcouru 1 pouce en	4',	15''.
II.^{e} Essai.	5 ℔ $\frac{1}{2}$, ...	2,	6.
III.^{e} Essai.	10 ℔, ...		6.

XVI.^{eme}

XVI.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, tout compris, de 450 ℔.

I.er ESSAI. Avec une traction de	12 ℔	1 pouce en	380″
II.e ESSAI.	18	1	85
III.e ESSAI.	23	1	20
IV.e ESSAI.	33	12 pouces en	$\frac{60}{2}$
V.e ESSAI.	53	12	$\frac{5}{2}$.

XVII.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, tout compris, de 850 ℔.

I.er ESSAI. Avec une traction de	30 ℔	1 pouce en	100″.
II.e ESSAI.	55	1	24
III.e ESSAI.	80	12 pouces en	$\frac{32}{2}$
IV.e ESSAI.	105	12	$\frac{8}{2}$
V.e ESSAI.	130	12	$\frac{3}{2}$.

XVIII.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, tout compris, de 1650 ℔.

I.er ESSAI. Avec une traction de	47 ℔	1 pouce en	240″
II.e EESAI.	50	1	180
III.e ESSAI.	85	1	60
IV.e ESSAI.	110	12 pouces en	$\frac{60}{2}$
V.e ESSAI.	135	12	$\frac{25}{2}$
VI.e ESSAI.	160	12	$\frac{6}{1}$
VII.e ESSAI.	185	12	$\frac{2}{2}$.

Frottement du cuivre contre le chêne garni d'un enduit de ſuif que l'on renouvelle à chaque opération.

74. L'on a ſubſtitué aux deux règles de fer qui portoient le traîneau dans les expériences qui précèdent, deux règles de cuivre (*Fig. 6.*), dont les dimenſions étoient les mêmes que celles de fer : ainſi la ſurface de contact étoit encore de 45 pouces,

XIX.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, tout compris, de 1650 ℔.

I.^{er} ESSAI. Avec une traction de	35 ℔	1 pouce en	1′, 43″
II.^{e} ESSAI........................	47	1	60
III.^{e} ESSAI........................	60	1 pied en	24
IV.^{e} ESSAI........................	110	1	$\frac{2}{2}$.

Observations sur les cinq dernières Expériences.

75. Nous croyons inutile de calculer le rapport des pressions, des frottemens & des vîtesses, d'après les expériences qui précèdent : l'on retrouve ici à peu près les mêmes loix que l'on avoit entrevues dans les essais du frottement des métaux glissant à sec sur le bois ; mais l'on éprouve beaucoup d'irrégularités dans le résultat des expériences. Quelquefois le traîneau s'arrête au milieu de sa course, quoique mené par une traction qui devroit lui faire parcourir un pied en 60″ : quelquefois il marche avec des vîtesses plus grandes que celles que nous venons d'indiquer. L'on conçoit qu'un peu plus ou un peu moins de consistance, dans quelques parties du suif qu'on renouvelle à chaque opération, doit produire toutes ces variétés qu'il est impossible d'empêcher ni de soumettre à aucunes loix réglées. La seule conséquence certaine que l'on peut tirer de ces différentes épreuves, c'est qu'un enduit de suif entre le bois & les métaux, diminue le frottement, au moins dans les vîtesses insensibles, beaucoup plus que dans toutes les autres natures de corps que nous avons soumis à l'expérience. En calculant le rapport de la pression au frottement, dans les premiers degrés de vîtesse, d'après la dix-huitième & la dix-neuvième expérience, l'on aura :

XVIII.^{e} EXP. I.^{er} ESSAI. Fer & chêne........ $\frac{\text{Pression.}}{\text{Frottement.}}$ $\frac{1650}{47}$ .... 35,1.

XIX.^{e} EXP. I.^{er} ESSAI. Chêne & cuivre jaune. .... $\frac{1650}{35}$ .... 47,1.

76. Mais dès l'instant que l'on cesse de renouveler le suif à chaque essai, ses parties acquièrent de la cohérence ; & l'on voit sensiblement augmenter la résistance à mesure que l'on continue les opérations. Pour en donner un exemple, j'ai fait glisser le traîneau garni des deux règles de cuivre, quinze fois

de suite sur le madrier dormant, sans renouveler l'enduit de suif, & sans changer la force de traction qui étoit triple de celle que nous avions trouvée nécessaire dans la dix-neuvième expérience pour produire une vîtesse insensible lorsque l'enduit étoit neuf: la vîtesse uniforme que prenoit le traîneau a diminué à chaque essai, & enfin il a cessé de se mouvoir : voici le détail de cette expérience.

XX.^{eme} Expérience.

De l'augmentation du frottement des bois & des métaux, à mesure que les enduits vieillissent.

Cuivre & chêne, surface de 45 pouces.

Le traîneau chargé, tout compris, de 1650 ℔: l'on a enduit de suif au premier essai; mais cet enduit n'a pas été renouvelé dans les essais qui ont succédé. Le traîneau pouvoit parcourir 5 pieds de longueur; on lui imprimoit une vîtesse primitive qu'il perdoit en partie dans le commencement de sa course, & il marchoit les trois derniers pieds d'un mouvement uniforme.

La force de traction a été constamment dans tous les essais de 100 livres.

I.^{er} Ess.	3 pieds ont été parcourus uniformément en	$\frac{8''}{2}$	IX.^{e} Ess.	3 pieds ont été parcourus uniformément en	$\frac{21''}{2}$
II.^{e} Ess.	....	$\frac{8}{2}$	X.^{e} Ess.	....	$\frac{23}{2}$
III.^{e} Ess.	....	$\frac{9}{2}$	XI.^{e} Ess.	....	$\frac{30}{2}$
IV.^{e} Ess.	....	$\frac{11}{2}$	XII.^{e} Ess.	....	$\frac{68}{2}$
V.^{e} Ess.	....	$\frac{12}{2}$	XIII.^{e} Ess.	....	550
VI.^{e} Ess.	....	$\frac{15}{2}$	XIV.^{e} Ess.	....	900
VII. Ess.	....	$\frac{17}{2}$	XV.^{e} Ess.	....	1140.
VIII.^{e} Ess.	....	$\frac{20}{2}$	XVI.^{e} Ess.	Le traîneau s'est arrêté à tous les instans, quelque vîtesse primitive qu'on lui imprimât.	

Il paroît résulter de cette expérience, que lorsque les surfaces de contact sont enduites de suif à chaque opération, elles adoucissent beaucoup le mouvement, sur-tout dans les petits degrés de vîtesses ; mais que lorsqu'elles doivent se mouvoir long-temps sur le même enduit, cet enduit est plus nuisible qu'utile.

Du frottement des bois & des métaux, lorsque les surfaces de contact sont réduites à de très-petites dimensions.

77. L'on a fixé, suivant la longueur du madrier dormant, deux fils de cuivre de 6 lignes de diamètre & de 6 pieds de longueur. Ils étoient percés à leurs extrémités & attachés sur le madrier avec des clous à tête perdue : l'on a fait courir le traîneau de 15 pouces sur ces deux fils de cuivre ; & l'on a trouvé que, soit que le traîneau fût enduit de suif ou seulement onctueux, les résultats étoient à peu près les mêmes : voici les expériences faites avec un enduit.

XXI.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 47 ℔.

I.er Essai. Traction	2 ℔ $\frac{1}{2}$	Un pied parcouru uniformément en	420''
II.e Essai	4 $\frac{1}{2}$		80
III.e Essai	7 $\frac{1}{2}$		$\frac{4}{2}$.

XXII.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 447 ℔.

I.er Essai. Force de traction	21 ℔	Un pied parcouru uniformément en	36' 4''
II.e Essai	28		280
III.e Essai	40		$\frac{18}{2}$
IV.e Essai	53		$\frac{8}{2}$.

XXIII.^{eme} Expérience.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 847 ℔.

I.^{er} Essai. Force de traction........	55 ℔	Un pied parcouru uniformément en	......	120″
II.^{e} Essai....................	80	....		$\frac{26}{2}$
III.^{e} Essai....................	105	....		$\frac{5}{2}$.

XXIV.^{eme} Expérience.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 1647 ℔.

I.^{er} Essai. Force de traction.......	85 ℔	Un pied parcouru uniformément en	......	1640″
II.^{e} Essai....................	110	....		420
III.^{e} Essai....................	135	....		120
IV.^{e} Essai....................	160	....		$\frac{40}{2}$
V.^{e} Essai....................	210	....		$\frac{10}{2}$.

OBSERVATIONS.

78. L'on trouve, en comparant ces expériences avec la dix-neuvième, & avec celles de l'article 55, que l'enduit de suif n'influe que très-peu ici sur le frottement, parce que les surfaces de contact étant presque nulles, la cohérence du suif n'est pas assez forte pour empêcher les surfaces de se joindre d'aussi près que s'il n'y avoit point d'enduit; l'on voit de plus, que l'étendue des surfaces change très-peu le rapport des frottemens relativement aux vîtesses. Il faut cependant faire ici la même observation que nous avons rapportée à la fin de l'article 60; c'est que ces résultats n'ont lieu que pour les premières opérations, & qu'en répétant les mêmes expériences plusieurs fois, le degré de vîtesse influe beaucoup moins sur le frottement. Plusieurs causes étrangères au frottement contribuent d'ailleurs à rendre irrégulières les quatre dernières expériences.

79. Il nous reste encore à déterminer le frottement des

métaux & des bois enduits de ſuif, lorſque le traîneau étant porté, comme à la Fig. 5, par deux règles poſées par ſon travers, & taillées en coin, l'une des ſurfaces de contact n'eſt ſoumiſe qu'un ſeul inſtant à la compreſſion de la charge du traîneau.

Frottement du ſer & du chêne enduit de ſuif, les ſurfaces de contact réduites aux plus petites dimenſions, & marchant par le travers du fil de bois, comme à la Fig. 5.

80. L'on a poſé, comme à la Fig. 5, deux règles de chêne taillées en coin aux deux extrémités & en travers du deſſous du traîneau de 15 pouces de longueur. L'on a enſuite cloué ſur le madrier dormant deux grandes règles de fer de 4 pieds de longueur, & l'on a fait gliſſer le traîneau ſur ces règles garnies d'un enduit de ſuif abondant.

XXV.^{eme} EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, tout compris, de 47 ℔.

I.er Essai. Avec une traction de 3 livres, marche d'un mouvement uniforme avec le degré de vîteſſe qui lui eſt imprimé, ſans paroître retarder ſa marche.

II.e Essai. Avec une traction de 3 livres & demie, ébranlé, parcourt ſucceſſivement 18 pouces en $\frac{7}{2}''$, & 18 pouces ſuivans en $\frac{4}{2}''$.

XXVI.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, tout compris, de 447 ℔.

I.er Essai. Quelque degré primitif de vîteſſe qu'on lui imprime, le traîneau s'arrête ſous une traction de 22 livres.

II.e Essai. Mais avec une traction de 26 livres, quelque grande que ſoit la vîteſſe primitive qu'on lui imprime, au lieu de retarder ſa marche pour prendre une vîteſſe uniforme, il continue à s'accélérer.

XXVII.^eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, tout compris, de 1647 lb.

I.^er Essai. L'enduit étant renouvelé, le traîneau a paru se mouvoir avec une traction de 70 livres sans accélérer ni retarder; mais conservant la vîtesse primitive qu'on lui imprimoit, quelle que fût cette vîtesse.

II.^e Essai. Mais lorsque le traîneau a eu passé cinq ou six fois sur l'enduit sans qu'il fût renouvelé, il a fallu 90 livres de traction pour qu'il pût se mouvoir d'un mouvement continu. L'augmentation des vîtesses n'influe pas dans cet essai sur le frottement; il s'accélère également en lui imprimant une vîtesse d'un pied ou d'un pouce par seconde, si la force de traction est de 90 livres ou au dessus; il se ralentit & s'arrête, si elle est au dessous. Lon a répété vingt fois de suite ce dernier essai sans renouveler l'enduit, & l'on a toujours trouvé que 90 livres suffisoient pour vaincre le frottement, & qu'il n'étoit plus susceptible que d'une très-petite augmentation.

OBSERVATIONS.

81. Ce dernier genre de frottement nous présente des résultats différens de ceux qui ont précédé. Jusqu'ici, dans toutes nos expériences sur le frottement des bois & des métaux, nous avons trouvé que l'augmentation de vîtesse faisoit croître les frottemens de la manière la plus sensible, & que cet effet ne cessoit d'avoir lieu pour les bois glissant sur les métaux suivant le fil de bois, qu'après un très-grand nombre d'opérations; mais il paroît, d'après les dernières expériences que nous venons de rapporter, qu'ici les fibres du bois pliées par le travers du fil de bois sont collées par l'enduit, & perdent en entier leur élasticité dès la première opération : il ne nous restoit plus qu'à voir si, en essuyant les règles qui étoient pénétrées de graisse, & qui restoient toujours onctueuses, quelque soin

que l'on prît à les eſſuyer, nous trouverions un réſultat analogue à celui de nos dernières expériences.

Continuation des mêmes Expériences.

Surfaces onctueuſes, mais non enduites.

82. L'on a laiſſé les règles de chêne taillées en coin, clouées ſous le traîneau & gliſſant par le travers du fil de bois, comme dans les trois dernières expériences qui précèdent; mais l'on a eſſuyé avec beaucoup de ſoin les règles de fer fixées ſur le madrier dormant; par toutes les opérations antérieures, le ſuif avoit pénétré dans l'intérieur des pores du fer, & la ſurface de ces règles, quoiqu'eſſuyée avec ſoin, reſtoit luiſante & onctueuſe.

XXVIII.eme Expérience.

Le traîneau eſt chargé, tout compris, de 47 ℔.

I.er Essai. Avec une traction de 3 livres & demie, le traîneau continue à ſe mouvoir ſans ralentir ſa marche, quelle que ſoit la vîteſſe primitive qu'on lui imprime; il s'arrête ſous une moindre traction.

XXIX.eme Expérience.

Le traîneau chargé, ſon poids compris, de 447 ℔.

I.er Essai. Il s'arrête ſous les tractions moindres que 30 livres; mais lorſque ces tractions ſont plus grandes que 30 livres, il s'accélère, quelle que ſoit la vîteſſe primitive qu'on lui imprime.

XXX.eme Expérience.

Le traîneau chargé, ſon poids compris, de 1647 ℔.

I.er Essai. Il s'arrête ſous les tractions moindres que 115 livres; mais ſous celles qui ſont plus grandes, il continue à s'accélérer, quelque vîteſſe primitive qu'on lui imprime.

OBSERVATIONS.

OBSERVATIONS.

83. L'on obſerve abſolument les mêmes loix dans ces expériences que dans celles expliquées à l'article 81 ; elles nous apprennent que dès l'inſtant que les ſurfaces ſont pénétrées par le ſuif, quoiqu'elles n'en ſoient pas enduites, les vîteſſes ceſſent d'influer ſur les frottemens. Si l'on cherche le rapport de la preſſion au frottement dans les trois dernières expériences, l'on trouvera :

XXVIII.e Expérience.	$\frac{\text{Preſſion.}}{\text{Frottement.}}$	$\frac{47}{3\frac{1}{2}}$	13,4.
XXIX.e Exp.		$\frac{447}{30}$	14,9.
XXX.e Exp.		$\frac{1647}{115}$	14,3.

Ainſi le rapport de la preſſion au frottement ſe trouvant ici une quantité à peu près conſtante, l'on en conclut que ce genre de frottement, qui eſt analogue à celui de toutes les machines où des axes de fer tournent dans des boîtes de bois, rentre dans la claſſe de tous les frottemens que nous avons déjà examinés, où nous avons trouvé que le rapport de la preſſion au frottement étoit toujours conſtant, & où le plus ou moins de vîteſſe n'influoit que d'une manière inſenſible.

SECTION TROISIÈME.

Du frottement des métaux.

84. COMME les métaux ſont d'un grand uſage dans toutes les machines deſtinées à ſoulever de grands poids ; comme d'ailleurs ils forment une claſſe particulière, j'ai cru qu'il ſeroit avantageux de raſſembler, dans une même ſection, toutes les expériences relatives à leur frottement, quoique le réſultat d'une partie de ces expériences eût déjà été annoncé dans le

Chapitre qui précède. L'on a fait polir avec le plus grand ſoin deux règles de fer de 4 pieds de longueur & de 2 pouces de largeur ; on les a fixées par leurs extrémités au madrier dormant. L'on a fait faire enſuite quatre autres règles, deux de fer & deux de cuivre jaune de 15 pouces de longueur & de 18 lignes de largeur, formant crochet à leurs extrémités, pour ſaiſir le traîneau de 15 pouces ſous lequel on vouloit les placer : tous les angles de ces règles étoient arrondis. La *Fig. 7*, qui eſt une ſection verticale, dans le ſens de la longueur du traîneau du madrier dormant, repréſente le traîneau garni de ſes règles de cuivre ou de fer, & gliſſant ſur le madrier dormant, garni des longues règles de fer.

Du frottement du fer contre le fer ſans enduit.

Surface de contact de 45 pouces.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

85. Le traîneau chargé, ſon poids compris, de 53 ℔.

I.er ESSAI. Il faut toujours une force de traction de 15 livres pour donner un mouvement continu au traîneau ; mais ſoit qu'on l'ébranle, ſoit qu'on lui imprime une vîteſſe quelconque, le frottement paroît conſtamment le même.

II.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, tout compris, de 453 ℔.

I.er ESSAI. Le traîneau s'eſt arrêté ſous toutes les forces de traction au deſſous de 125 livres. Avec une traction plus conſidérable, il s'accélère uniformément avec une vîteſſe due à cette augmentation de force.

Nota. Les règles de fer ſe ſont rayées, & il n'a pas été poſſible de continuer les expériences ſous de plus grandes preſſions.

Du frottement du fer & du cuivre ſans enduit.

Surface de contact de 45 pouces.

86. L'on a ſubſtitué les deux règles de cuivre de 15 pouces de longueur aux règles de fer qui étoient fixées au traîneau dans les deux dernières expériences.

III.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris, de 52 ℔.

I.er ESSAI. Une traction de 12 livres & demie met le traîneau en mouvement : il n'eſt pas néceſſaire de l'ébranler ; il part ſeul avec ce degré de traction, qui ne peut pas être moindre pour que le mouvement ſoit continu, quelque vîteſſe primitive que l'on donne au traîneau.

IV.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris, de 452 ℔.

I.er ESSAI. Une traction de 110 livres met le traîneau en mouvement avec les mêmes circonſtances que dans la dernière expérience.

Nota. Les règles commencent à ſe rayer, & l'on ne peut pas continuer les obſervations en employant de plus grandes preſſions.

Obſervations ſur ces Expériences.

87. Nous aurions déſiré de continuer nos expériences en employant des preſſions plus conſidérables que 450 livres ; mais toutes les fois que nous avons voulu l'eſſayer, les règles ſe ſont rayées, les frottemens ſont devenus incertains ; il a donc fallu ſe contenter des quatre expériences qui précèdent, d'où il réſulte :

		Pression. / Frottement.	
Fer et Fer.	I.ere Expérience.	$\frac{53}{15}$	3,5.
	II.e Exp.	$\frac{453}{125}$	3,6.
Fer et Cuivre.	III.e Exp.	$\frac{52}{12\frac{1}{2}}$	4,2.
	IV.e Exp.	$\frac{452}{110}$	4,1.

Comme le rapport de la pression au frottement se trouve ici exactement le même pour chaque couple d'expérience, quoique les pressions soient entre elles comme 9 à 1, l'on en peut conclure que, dans les métaux glissant sans enduit l'un sur l'autre, le frottement est indépendant de l'étendue des surfaces : les remarques faites à chaque expérience nous apprennent aussi qu'il est indépendant des vîtesses. Nous pouvons encore faire ici une observation intéressante, & qui distingue parfaitement le frottement des métaux de celui des bois ; c'est qu'en comparant les résultats du premier & du deuxième Chapitre, nous trouvons que dans les bois, les forces nécessaires pour vaincre les frottemens ou pour ébranler le traîneau après un certain temps de repos, sont souvent quadruples de celles nécessaires pour entretenir le mouvement continu uniforme du traîneau : ici l'on trouve la même intensité de frottement, soit qu'il faille détacher les surfaces après un temps quelconque de repos, soit qu'il faille entretenir une vîtesse uniforme. Nous reviendrons à cette observation à la fin de ce Chapitre, lorsque nous chercherons les causes du frottement.

Le rapport de 4 à 1, que nous trouvons par les troisième & quatrième expériences pour le fer & le cuivre, ne peut, ainsi que nous l'avons déjà dit, être regardé comme exact, que lorsque les surfaces sont neuves & très-étendues. Car en réduisant les surfaces de contact aux plus petites dimensions possibles, ce rapport varie en s'approchant de celui de 6 à 1, qu'il ne joint que lorsque, par un frottement continu de plus d'une heure, le cuivre & le fer ont pris tout le poli dont ils peuvent être sufceptibles. Il faut cependant, pour que cette dernière opération réussisse, & que le cuivre ne soit pas rayé par le frottement des règles de fer, que les métaux soient d'un grain fin & homogène. Nous développerons cette observation dans les expériences destinées à déterminer le frottement des axes; nous allons passer au frottement des métaux garnis d'un enduit.

Du frottement des métaux glissant l'un sur l'autre, avec un enduit interposé.

88. Avant de commencer les expériences sur les métaux enduits de suif, de vieux oing ou d'huile, il est absolument nécessaire d'avoir soumis nos règles à quelques opérations préliminaires, pour leur donner tout le degré de poli qu'elles peuvent prendre; il faut d'abord les enduire de suif, & les faire glisser en les attachant au traîneau, sur les règles de fer que nous avons fixées dans les dernières expériences au madrier dormant. Cette opération se continue sous une grande pression pendant une demi-heure, en renouvelant de temps en temps l'enduit; par-là le suif pénètre dans les pores du métal, & les règles prennent un degré de poli qu'il seroit difficile de leur donner autrement. Dans le commencement de l'opération, le frottement est incertain, mais à mesure que les surfaces se polissent, il devient plus régulier. Nous allons commencer par rapporter les expériences où nos surfaces de 45 pouces de contact étoient enduites à chaque essai : nous donnerons ensuite celles où les surfaces étoient seulement onctueuses; enfin nous chercherons le frottement des surfaces enduites ou onctueuses, mais réduites au plus petit nombre de points de contact possible.

Frottement du fer contre le fer avec enduit de suif renouvelé à chaque essai.

Surface de contact de 45 pouces.

89. Les deux règles de fer de 15 pouces de longueur sont attachées au traîneau : celles de 4 pieds de longueur le sont au madrier dormant.

V.eme Expérience.

Le traîneau chargé, ſon poids compris, de 53 ℔.

I.er Essai. Une traction de 8 livres & demie ſuffit pour donner un mouvement continu au traîneau.

VI.eme Expérience.

Le traîneau chargé, ſon poids compris, de 453 ℔.

I.er Essai. Avec une traction de 40 livres, ſi on donne au traîneau une vîteſſe de 7 à 8 pouces par ſeconde, il continue à ſe mouvoir, & même paroît s'accélérer; il s'arrête ſous un moindre degré de vîteſſe: mais ſi on ne fait qu'ébranler le traîneau ou même lui imprimer une vîteſſe d'un pouce par ſeconde, il ne continuera à ſe mouvoir qu'avec une traction de 45 livres.

VII.eme Expérience.

Le traîneau chargé, ſon poids compris, de 1653 ℔.

I.er Essai. Avec une traction de 140 livres, ſi on donne au traîneau une vîteſſe de 7 à 8 pouces par ſeconde, il continuera à ſe mouvoir ſans ralentir ſa marche; mais ſi on ne fait que l'ébranler, il ne prendra un mouvement continu qu'en employant une traction de 160 livres.

Frottement du fer & du cuivre enduits de nouveau ſuif à chaque eſſai.

Surface de contact de 45 pouces.

90. L'on a remplacé les deux règles de fer attachées au traîneau dans les trois dernières expériences, par les deux règles de cuivre des mêmes dimenſions: la ſurface de contact ſe trouvoit encore de 45 pouces.

VIII.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris, de 52 ℔.

I.er Essai. Avec une force de traction de 6 livres & demie, le traîneau ſe meut d'un mouvement incertain; mais en l'ébranlant, il s'accélère toujours très-rapidement, s'il eſt tiré par un poids de 7 livres & demie.

IX.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris, de 452 ℔.

I.er Essai. Avec une traction de 42 livres, en imprimant au traîneau une vîteſſe inſenſible, il continue à ſe mouvoir & s'accélère rapidement; mais ſi on lui imprime une vîteſſe de 7 à 8 pouces par ſeconde, il ne faut qu'une traction de 30 livres pour qu'il continue à ſe mouvoir ſans être retardé.

X.eme EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, ſon poids compris, de 1652 ℔.

I.er Essai. Le traîneau continue à ſe mouvoir ſans ralentir ſa marche, avec une traction de 90 livres, lorſqu'on lui imprime une vîteſſe primitive d'un pied en $\frac{1}{2}''$; mais lorſqu'on ne fait que l'ébranler ou même lui imprimer une vîteſſe inſenſible, il ne continue à ſe mouvoir qu'avec une traction de 150 livres; pour lors il accélère ſa marche rapidement: cependant, avec cette traction de 150 livres, j'ai produit deux fois un mouvement uniforme d'un pouce en $\frac{10}{2}''$; ce mouvement uniforme a duré la première fois $2'$, après quoi le traîneau s'eſt accéléré très-promptement: j'ai détaché une fois le traîneau après $3'$ de repos avec cette même traction de 150 livres; mais en général, l'on a trouvé qu'après $3'$, une heure & 4 jours de repos, il falloit, pour détacher le traîneau, une traction de 170 livres.

Continuation des mêmes Expériences.

Fer & cuivre enduits d'huile ſur enduit de ſuif.

91. L'on a voulu voir ſi en mettant un enduit d'huile ſur l'enduit de ſuif, l'on changeroit la valeur du frottement.

XI.eme Expérience.

Le traîneau chargé, ſon poids compris, de 52 ℔.

I.er Essai. Le traîneau ſeulement ébranlé s'accélère avec rapidité avec une traction de 6 livres & demie.

Après un repos de 3′ & d'une heure, il a fallu un poids de 10 livres pour détacher le traîneau.

XII.eme Expérience.

Le traîneau chargé, ſon poids compris, de 452 ℔.

I.er Essai. Si on ne fait qu'ébranler le traîneau, il faut, pour qu'il continue à ſe mouvoir, une force de traction de 56 livres, avec laquelle il s'accélère très-rapidement; mais ſi on lui imprime une vîteſſe primitive de 8 ou 10 pouces par ſeconde, il continue à ſe mouvoir ſans ralentir ſa marche, avec une traction de 45 livres.

XIII.eme Expérience.

Le traîneau chargé, ſon poids compris, de 1652 ℔.

I.er Essai. Lorſqu'on ne fait qu'ébranler le traîneau, il faut une traction de 210 livres pour qu'il puiſſe ſe mouvoir : il faut à peu près le même degré de traction pour qu'il ne s'arrête pas ſi on lui imprime une vîteſſe d'un pouce par ſeconde; mais ſi on lui imprime une vîteſſe primitive de 8 ou 10 pouces par ſeconde, il continuera ſon mouvement ſans ralentir ſa marche, avec une traction de 190 livres.

Pour détacher le traîneau, il a fallu, après $\frac{1}{2}''$ de repos, une traction de 250 livres : après 3′, il a fallu une fois 280 livres, une autre fois 330 livres.

OBSERVATIONS.

92. Le rapport de la preſſion au frottement, dans les expériences

expériences qui précèdent, dépend de la nature de l'enduit & du degré de vîtesse du traîneau : lorsque les métaux sont enduits de suif, le frottement diminue beaucoup sous les grandes pressions à mesure que la vîtesse augmente. Nous trouvons par exemple, dans la dixième expérience, que lorsque la vîtesse est d'un pied par seconde, le frottement du traîneau, chargé de 1652 livres, est de plus d'un tiers moindre que lorsque la vîtesse est insensible, ou même d'un pouce par seconde. Cet effet que nous appercevons ici, de la diminution du frottement à mesure que la vîtesse augmente, ne peut être attribué qu'à la dureté & à la consistance du suif; car, en essuyant nos règles, & en y répandant un enduit d'huile d'olive, le frottement n'est que très-peu diminué sous les grandes pressions en passant d'une vîtesse insensible à une vîtesse de 4 à 5 pouces par seconde. Nous allons chercher, d'après nos expériences, le rapport de la pression au frottement dans les vîtesses insensibles.

Rapport de la pression au frottement dans les mouvemens au dessous d'un pouce par seconde.

Fer contre Fer enduit de suif à chaque essai.	V.e Expérience. $\frac{\text{Pression.}}{\text{Frottement.}}$	$\frac{53}{8\frac{1}{2}}$	6,2.
	VI.e Exp.	$\frac{453}{45}$	10,1.
	VII.e Exp.	$\frac{1653}{160}$	10,3.
Fer contre Cuivre enduit de suif à chaque essai.	VIII.e Exp.	$\frac{52}{6\frac{1}{2}}$	8,0.
	IX.e Exp.	$\frac{452}{42}$	10,7.
	X.e Exp.	$\frac{1652}{150}$	11,0.
Fer contre Cuivre enduit de suif & d'huile non renouvelée.	XI.e Exp.	$\frac{52}{6\frac{1}{2}}$	8,0.
	XII.e Exp.	$\frac{452}{56}$	8,1.
	XIII.e Exp.	$\frac{1652}{210}$	7,9.

En ne prenant, dans chaque article de ces résultats, que les deux dernières expériences, l'on trouve que le rapport de la pression au frottement est pour le fer contre le fer, avec enduit de suif, comme . . . . 10 à 1.
Pour le fer & le cuivre enduits de suif, comme 11 à 1.
Et pour le fer & le cuivre enduits primitivement de suif, & ensuite d'huile, comme . . . . . 8 à 1.
Dans les enduits de suif, le rapport de la pression au frottement se trouve moindre sous des pressions de 52 livres que sous les grandes pressions. Nous avons vu déjà (art. 34 & 35) que cette variété provenoit de la cohérence du suif qui oppose, sous tous les degrés de pression, une résistance constante proportionnelle à l'étendue des surfaces : cette résistance constante, qui n'est sensible que sous les petites pressions, peut s'évaluer ici, pour notre surface de contact de 45 pouces carrés, à une livre & demie pour le fer & le cuivre, & à 3 livres pour le fer contre le fer.

Mais par la onzième expérience, comparée avec les deux suivantes, il paroît qu'avec les enduits d'huile d'olive la cohérence peut être regardée comme nulle. Nous avons répété les expériences qui précèdent, en plaçant les règles de fer ou de cuivre attachées au traîneau en travers, & aux deux extrémités du traîneau ; elles recoupoient à angle droit la direction des grandes règles de fer attachées aux madriers dormans. Par-là la surface de contact étoit réduite à 12 pouces au lieu de 45 pouces : éprouvées sous des pressions de 2000 livres, l'on a eu les mêmes résultats que précédemment ; en sorte que la diminution des surfaces n'a influé, dans ce rapport, que d'une manière insensible.

Avec des enduits de vieux oing, le frottement n'a jamais été moindre que le neuvième de la pression. Sa résistance dépend absolument de la consistance de l'enduit, & le frottement augmente à proportion que l'enduit est plus mou.

Lorsque les surfaces sont enduites de suif, & qu'elles ont une grande étendue, le frottement dénature le suif, & augmente sensiblement à mesure que l'on continue les essais sans renouveler l'enduit : cependant je l'ai toujours trouvé moindre que le huitième de la pression ; mais lorsque le suif est noyé d'huile, comme dans nos trois dernières expériences, & que les surfaces de contact sont très-petites, pour lors cet effet est moins sensible. J'ai fait, pendant trois heures de suite, des expériences avec un axe de fer enduit primitivement de suif & d'huile, sans rafraîchir l'enduit, & sans éprouver aucune irrégularité ni aucun accroissement dans le rapport de la pression au frottement.

Cuivre & fer enduits, les surfaces de contact réduites aux plus petites dimensions possibles.

72. Nous avons fait arrondir avec beaucoup de soin la tête de quatre gros clous de cuivre ; nous les avons enfoncés aux quatre coins du traîneau, de manière que le traîneau ne portoit sur les deux grandes règles de fer attachées au madrier dormant que par la convexité comprimée de quatre demi-sphères de 6 lignes de diamètre. Nous avons d'abord essuyé avec soin nos règles dormantes ; mais pénétrées de suif par toutes les expériences qui avoient précédé, elles restoient onctueuses, luisantes & grasses au toucher : c'est à peu près l'état où sont les machines dont on n'a pas renouvelé l'enduit depuis quelque temps. Nous avons voulu savoir quel seroit le frottement de nos quatre têtes de clous sur une pareille surface.

Surfaces restant onctueuses après son ancien enduit essuyé.

XIV.^eme^ EXPÉRIENCE.

Le traîneau chargé, son poids compris, de 47 ℔.

ESSAI. Avec une traction de 5 livres & demie, le traîneau commence à se mouvoir en l'ébranlant ; il s'arrête sous une moindre traction, quelque vîtesse primitive qu'on lui imprime.

XV.eme Expérience.

Le traîneau chargé, ſon poids compris, de 447 ℔.

Essai. Avec une traction de 51 livres, le traîneau ébranlé ſe meut d'un mouvement continu; il s'arrête ſous une moindre traction, quelque vîteſſe primitive qu'on lui imprime : l'on n'a jamais pu produire une vîteſſe uniforme, & le traîneau ou s'accélère dans ſa marche ou s'arrête.

XVI.eme Expérience.

Le traîneau chargé, tout compris, de 847 ℔.

Essai. Il faut une force de traction de 112 livres, pour que le traîneau continue à ſe mouvoir. Il faut même lui imprimer une vîteſſe primitive d'un ou deux pouces par ſeconde; car ſouvent il ne marche pas lorſqu'on ne fait que l'ébranler.

Surface de contact réduite aux plus petites dimenſions, & enduites d'une couche de ſuif.

XVII.eme Expérience.

Le traîneau chargé, tout compris, de 847 ℔.

Essai. L'on a mis une couche de ſuif ſur les règles dormantes; il a fallu, en ébranlant ſeulement le traîneau pour qu'il prît un mouvement continu, une traction de 95 livres : mais en lui imprimant une vîteſſe primitive de 5 ou 6 pouces par ſeconde, le traîneau continue à ſe mouvoir en s'accélérant lorſqu'il eſt tiré par un poids de 88 livres.

Même enduit que dans l'expérience précédente, avec une couche d'huile.

XVIII.eme Expérience.

Le traîneau chargé, tout compris, de 847 ℔.

Essai. En répandant de l'huile ſur l'enduit de ſuif, de l'expérience qui précède, le traîneau s'arrêtoit toujours, quelque vîtesse primitive qu'on lui imprimât, lorsqu'il n'étoit tiré que par un poids de 106 livres : mais tiré par 112 livres, il marche toujours en s'accélérant, quelque petite que soit la vîtesse primitive qu'on lui imprime.

OBSERVATIONS.

93. Lorsque les surfaces sont comme ici réduites aux plus petites dimensions possibles & seulement onctueuses, il paroît que les vîtesses influent très-peu dans les frottemens : toutes les fois que nous avons ôté un dixième du poids nécessaire pour donner au traîneau une vîtesse continue, en ne faisant que l'ébranler, il a ralenti son mouvement & s'est arrêté, quelque degré de vîtesse primitive qu'on lui ait imprimé.

Lorsque, dans la dix-septième expérience, nous avons enduit les règles dormantes de fer avec beaucoup de suif, pour lors le frottement a paru diminuer un peu à mesure que l'on augmentoit la vîtesse ; mais cette diminution étoit beaucoup moindre que lorsque les surfaces de contact étoient comme à l'article 90, de plusieurs pouces carrés.

En répandant, expérience dix-huitième, de l'huile sur le suif, pour lors le suif perd sa consistance, & le frottement redevient à peu près le même que lorsque les surfaces étoient seulement onctueuses, & qu'il n'y avoit point de suif interposé.

94. Nous allons actuellement déterminer, d'après nos expériences, le rapport de la pression au frottement pour les surfaces onctueuses.

Rapport de la pression au frottement dans les surfaces onctueuses, sous tous les degrés de vîtesse.

XIV^e. EXPÉRIENCE.....	$\frac{\text{Pression.}}{\text{Frottement.}}$	$\frac{47}{5\frac{1}{2}}$	8,5.
XV.^e EXP..........................		$\frac{447}{51}$	8,7.
XVI.^e EXP..........................		$\frac{847}{112}$	7,6.

Surfaces enduites de suif, vîtesse de deux pouces par seconde & au dessous.

XVII.e Expérience....	Pression.	847	....	8,9.
	Frottement.	95		

Même enduit avec couche d'huile, vîtesse quelconque.

XVIII.e Expérience....	Pression.	847	....	7,6.
	Frottement.	112		

CHAPITRE III.

Essai sur la théorie du frottement.

95. Avant de chercher les causes physiques du frottement, nous allons rassembler les principaux résultats de nos expériences.

1.° Le frottement des bois glissant à sec sur les bois, oppose, après un temps suffisant de repos, une résistance proportionnelle aux pressions: cette résistance augmente sensiblement dans les premiers instans de repos; mais après quelques minutes elle parvient ordinairement à son *maximum* ou à sa limite.

2.° Lorsque les bois glissent à sec sur les bois avec une vîtesse quelconque, le frottement est encore proportionnel aux pressions; mais son intensité est beaucoup moindre que celle que l'on éprouve en détachant les surfaces après quelques minutes de repos: l'on trouve, par exemple, que la force nécessaire, pour détacher & faire glisser deux surfaces de chêne après quelques minutes de repos, est (articles 10 & 44) à celle nécessaire pour vaincre le frottement, lorsque les surfaces ont déjà un degré de vîtesse quelconque, comme 9,5 à 2,2.

3.° Le frottement des métaux glissant sur les métaux sans enduit, eſt également proportionnel aux preſſions; mais ſon intenſité eſt la même, ſoit qu'on veuille détacher les ſurfaces après un temps quelconque de repos, ſoit qu'on veuille entretenir une vîteſſe uniforme quelconque.

4.° Les ſurfaces hétérogènes, telles que les bois & les métaux, gliſſant l'une ſur l'autre ſans enduit, donnent pour leurs frottemens des réſultats très-différens de ceux qui précèdent, car l'intenſité de leur frottement, relativement au temps de repos, croît lentement, & ne parvient à ſa limite qu'après quatre ou cinq jours & quelquefois davantage; au lieu que, dans les métaux, elle y parvient dans un inſtant, & dans les bois dans quelques minutes: cet accroiſſement eſt même ſi lent, que la réſiſtance du frottement, dans les vîteſſes inſenſibles, eſt preſque la même que celle que l'on ſurmonte en ébranlant ou détachant les ſurfaces après trois ou quatre ſecondes de repos. Ce n'eſt pas encore tout, dans les bois gliſſant ſans enduit ſur les bois, & dans les métaux gliſſant ſur les métaux, la vîteſſe n'influe que très-peu ſur les frottemens; mais ici (articles 55 & ſuivans) le frottement croît très-ſenſiblement à meſure que l'on augmente les vîteſſes; en ſorte que le frottement croît à peu près ſuivant une progreſſion arithmétique, lorſque les vîteſſes croiſſent ſuivant une progreſſion géométrique.

Ces quatre principaux faits vont former la baſe de notre théorie du frottement.

96. Le frottement ne peut venir que de l'engrainage des aſpérités des ſurfaces, & la cohérence ne doit y influer que très-peu: car nous trouvons que le frottement eſt, dans tous les cas, à peu près proportionnel aux preſſions, & indépendant de l'étendue des ſurfaces: or la cohérence agiroit néceſſairement ſuivant le nombre des points de contact ou ſuivant l'étendue des ſurfaces. Nous trouvons cependant que cette cohérence n'eſt pas préciſément nulle, & nous avons eu ſoin de la déterminer dans les différens genres d'expériences qui ont précédé. Nous l'avons trouvée, art. 44, d'une livre deux tiers par pied carré pour les ſurfaces de chêne non enduites; mais, dans la

pratique, la réſiſtance qui peut venir de cette cohérence peut être négligée, toutes les fois que chaque pied carré eſt chargé de pluſieurs quintaux.

97. Dans les faits que nous venons de rapporter, les ſurfaces ne ſont dénaturées par aucun enduit; ainſi la variété des phénomènes ne peut tenir qu'à quelque différence eſſentielle dans la nature des parties conſtitutives des bois & des métaux: les bois ſont compoſés de fibres alongées, de parties flexibles & élaſtiques; les métaux au contraire ſont compoſés de parties angulaires, globuleuſes, dures & inflexibles, en ſorte qu'aucun degré de preſſion ni de traction ne peut changer la figure des parties qui tapiſſent la ſurface des métaux, tandis que les fibres ou les eſpèces de poil dont les bois ſont formés peuvent ſe plier aiſément dans tous les ſens.

98. Ainſi, pour nous ſervir d'une comparaiſon ſimple, nous concevons (*Fig.* 8.) que les fibres dont la ſurface du bois eſt couverte, entrent les uns dans les autres, comme le pourroient faire les crins de deux broſſes. Pour avoir le degré de traction néceſſaire pour faire gliſſer l'une des broſſes ſur l'autre, il faudroit examiner la différente poſition des crins dans le moment où, après un certain temps de repos, l'on feroit un effort pour détacher les broſſes, & celles où les crins ſe trouveroient, lorſqu'en gliſſant l'une ſur l'autre, les broſſes auroient un mouvement reſpectif quelconque.

Nous ſuppoſons donc (*Fig.* 8.) que lorſqu'on poſe une planche bien polie ſur une autre, les fibres, dont les ſurfaces ſont hériſſées, entrent librement les unes dans les autres, comme on le voit dans cette Figure. Si à préſent l'on veut faire gliſſer la planche ſupérieure ſur l'inférieure, les fibres des deux ſurfaces ſe plieront mutuellement juſqu'à ce qu'elles ſe touchent, ſans cependant ſe déſengrainer; cette poſition des fibres eſt repréſentée dans la nevième Figure. Arrivées à cette poſition, les fibres ſe touchant mutuellement ne peuvent pas ſe coucher davantage, & l'angle de leur inclinaiſon dépendant de la groſſeur des fibres, ſera le même ſous tous les degrés de preſſion: ainſi

ainſi il faudra, ſous tous les degrés de preſſion, une force proportionnelle à la preſſion, pour que les fibres gliſſant ſuivant cette inclinaiſon, puiſſent ſe déſengrainer.

Mais ſi l'on détache le traîneau, & qu'on continue à le faire gliſſer, tous les fibres (*Fig.* 10.) ſe déſengraineront, & en ſe déſengrainant il reſtera un vide entre les fibres voiſines d'une même ſurface; ainſi elles ſe coucheront les unes ſur les autres juſqu'à ce qu'elles ſe touchent, & elles prendront conſéquemment encore une inclinaiſon plus grande que la précédente, mais qui ſera encore toujours la même pour tous les degrés de preſſion. Ainſi, dans les ſurfaces en mouvement, le frottement ſera encore proportionnel aux preſſions : l'on ne trouvera de variété, relativement à cette théorie, que lorſque les ſurfaces de contact ſeront réduites à leurs plus petites dimenſions, parce que pour lors les parties intérieures des ſurfaces venant à céder ſous les preſſions énormes qu'elles éprouvent, les fibres pourront encore s'incliner : c'eſt effectivement ce que nous avons trouvé en faiſant gliſſer ſuivant le fil de bois (art. 38 & ſuiv.) le traîneau porté ſur deux angles de chêne arrondis.

L'on expliquera avec facilité, par cette théorie, une obſervation que nous avons faite (art. 46 & 47.); c'eſt que lorſque les angles de chêne qui portent le traîneau gliſſent dans le ſens de leur longueur, les points du madrier dormant, placés ſous ces angles, ſe trouvant comprimés tout le temps que le traîneau emploie à parcourir ſa longueur, ce temps eſt aſſez long pour que les ſurfaces fléchiſſent, & que les fibres s'inclinent davantage que lorſque leurs extrémités ſeulement ſe touchent. Mais lorſque les angles qui portent le traîneau ſont placés (*Fig.* 5.) à l'extrémité & en travers du traîneau, pour lors les points de contact avec le madrier dormant n'étant ſoumis qu'un inſtant à la compreſſion, n'ont pas le temps de fléchir d'une manière ſenſible, & le rapport de la preſſion au frottement reſte le même pour les grandes & les petites preſſions.

100. Les métaux n'étant point compoſés de fibres ni de parties flexibles, la ſituation des cavités, leur figure, ne variera

dans aucune circonſtance : conſéquemment, ſoit que le traîneau ſoit en mouvement, ſoit qu'il ſoit en repos, l'intenſité du frottement ſera toujours la même, parce qu'elle dépend de la figure des molécules élémentaires qui conſtituent les ſurfaces, & de l'inclinaiſon du plan tangentiel dans les points de contact : la *Fig.* 11 repréſente deux ſurfaces du genre des métaux, poſées l'une ſur l'autre.

101. Lorſque les bois gliſſent ſur les métaux, ce ſont pour lors les fibres élaſtiques du bois qui, en ſe pliant le long des parois des cavités, pénètrent dans les cavités : or comme ces fibres ſont flexibles & élaſtiques, elles ne s'enfoncent que peu à peu dans ces cavités ; ainſi la réſiſtance due au frottement augmentera à meſure que le temps de repos qui précédera l'effort pour faire gliſſer les ſurfaces ſera plus long. Mais ſi nous ſuppoſons le traîneau en mouvement, les fibres dont les ſurfaces du bois ſont couvertes, rencontrant les inégalités du métal, ſeront fléchies pour franchir le ſommet de ces inégalités. Cette flexion ſera néceſſairement telle que la réaction de l'élaſticité des fibres ſoit proportionnelle à la preſſion : ainſi, dans les vîteſſes inſenſibles, le frottement ſe trouvera encore proportionnel à la preſſion, comme nous l'avons trouvé par nos expériences (art. 55 & ſuiv.) : lorſque le traîneau ſera mu avec une vîteſſe quelconque, pour lors, comme les cavités de la ſurface du métal ont de l'étendue, relativement à la groſſeur des fibres du bois, les fibres, après avoir paſſé ſur les ſommités des inégalités des ſurfaces métalliques, ſe releveront en partie comme des faiſceaux de reſſort. Il faudra donc les plier de nouveau, pour leur faire franchir l'inégalité ſuivante. Plus la vîteſſe ſera grande, plus il faudra plier de fois les fibres : ainſi le frottement doit croître ſuivant une loi de la vîteſſe ; mais cependant on les pliera ſous un moindre angle, à meſure que la vîteſſe augmentera, parce qu'en paſſant d'une ſommité à l'autre, les fibres n'ont pas le temps de ſe redreſſer en entier.

Dans le frottement des bois & des métaux enduits de ſuif, les ſurfaces de contact étant réduites à des angles arrondis, nous avons trouvé que, les règles marchant par le travers du fil de bois, la vîtesse cessoit d'influer dans le frottement : il paroît que, dans ce genre de frottement, le suif colle les fibres du bois les uns contre les autres, & leur fait perdre en partie leur élasticité : voici à ce sujet une observation intéressante. En faisant tourner une poulie de gaïac sur un axe de fer, sans y avoir mis aucun enduit, j'ai trouvé que pendant les vingt premières minutes, la poulie étant neuve, le frottement augmentoit avec la vîtesse, suivant des loix analogues à celles que nous trouvons pour le bois & le fer dans le mouvement du traîneau. Cependant, après deux heures d'un frottement continu, sous une rotation rapide, les fibres du bois avoient perdu la plus grande partie de leur élasticité, & l'augmentation de vîtesse n'augmentoit presque plus le frottement. Cet effet a été produit bien plus rapidement en enduisant l'axe de suif : car, après une minute de mouvement de rotation, sous une pression de 600 livres, une poulie de gaïac, montée sur un axe de fer enduit de suif, a toujours eu le même frottement avec un degré quelconque de vîtesse.

Je ne m'étendrai pas davantage sur cette théorie ; elle paroît expliquer avec facilité tous les phénomènes du frottement ; mais l'Académie ne demande aujourd'hui que des recherches qui puissent être utiles : ainsi il seroit dangereux de trop se livrer à un système qui pourroit peut-être influer sur la manière de rendre compte des expériences qui nous restent à faire.

DEUXIÈME PARTIE.

De la ſorce néceſſaire pour plier les cordes, & du frottement des axes.

102. Nous ſommes obligés d'interrompre ici l'ordre des matières, & de déterminer la roideur des cordes avant de donner nos expériences ſur le frottement des axes; parce qu'après pluſieurs tentatives, nous avons trouvé que le moyen qui convenoit le mieux pour déterminer ce genre de frottement, étoit de ſuſpendre deux poids égaux des deux côtés d'une poulie mobile ſur ſon axe, & de donner un ébranlement à tout le ſyſtême, après avoir ajouté un petit poids du côté qui doit vaincre le frottement, & d'obſerver enſuite le temps des chutes: mais dans cette expérience, la réſiſtance due au frottement ſe trouve confondue avec celle de la roideur de la corde, que nous allons d'abord déterminer, pour la défalquer de la réſiſtance totale qui nous ſera donnée par nos expériences. La première méthode dont nous avons fait uſage, eſt celle de M. Amontons: elle eſt très-commode pour faire des expériences avec des rouleaux d'un petit diamètre; mais elle ne peut pas convenir à des rouleaux d'un pied, ni même de 6 pouces de diamètre: d'ailleurs cette méthode n'eſt pas directe; c'eſt ce qui nous a déterminés à en vérifier les réſultats par un autre moyen, qui peut être employé indiſtinctement avec des rouleaux de toutes les groſſeurs. Les loix que nous trouverons par ces deux méthodes pour la roideur des cordes, ſeront encore confirmées en déterminant le frottement des axes dans le deuxième Chapitre.

CHAPITRE PREMIER.

De la roideur des cordes.

103. M. AMONTONS, dans le Volume de l'Académie des Sciences pour 1699, a donné une méthode très-ingénieuse pour déterminer la roideur des cordes : elle a été suivie par M. Désaguilliers, dans son Cours de Physique, qui a répété les expériences de M. Amontons avec le plus grand soin. Il a paru résulter des tentatives de ces deux Auteurs, que les forces nécessaires pour plier des cordes autour d'un cylindre, sont en raison inverse du rayon des rouleaux, & en raison directe de la tension & du diamètre de la corde; mais ce résultat, qui n'est fondé que sur des expériences très en petit, est plutôt propre à fournir des inductions probables que des règles sûres : voici la manière dont nous nous sommes servis de l'appareil de M. Amontons pour faire les expériences en grand.

104. A une poutre AA′ (*Fig.* 13, n.° 1 & 2.) est soutenu, au moyen de deux crochets & d'une corde a b d d′ b′ a′, un plateau B B′ chargé de gueuses de 50 livres : le cylindre b b′ est enveloppé par la corde, comme on le voit au n.° 2 de la treizième Figure : l'on y voit en même temps un petit bassin de balance Q, soutenu par une ficelle très-flexible qui enveloppe le cylindre : ce bassin est chargé de poids jusqu'à ce qu'il fasse descendre le rouleau.

Dans cette expérience, chaque corde soutient la moitié de la charge, & les poids du petit bassin Q sont uniquement employés à plier la corde autour du cylindre qu'elle enveloppe : le poids Q que nous trouvons par cette méthode, est, comme nous le verrons dans la deuxième Section de ce Chapitre, la moitié de celui qui est nécessaire pour plier une corde placée dans la gorge d'une poulie du même diamètre que le rouleau;

il faut, dans toutes les expériences de cette Section, empêcher, avec le plus grand soin, les cordes pliées sur le rouleau de se toucher & de frotter l'une contre l'autre.

SECTION PREMIÈRE.

Expériences pour déterminer la roideur des cordes, en employant l'appareil de M. Amontons.

105. DANS les expériences qui suivent, nous avons toujours réuni la moitié du poids du cylindre bb′ au poids du petit bassin Q, parce que le centre de gravité de ce cylindre n'a, relativement au point de suspension qui répond, n.° 2, à la verticale gd, qu'un bras de levier égal au rayon du cylindre, tandis que le levier du poids Q est égal à son diamètre.

106. Nous avons fait fabriquer dans la corderie d'un des principaux Ports de France, avec du chanvre de premier brin, trois cordes à trois torons : les fils de carret qui forment les torons, se trouvoient réduits à l'ordinaire par les différentes torsions données dans l'attelier aux deux tiers à peu près de leur longueur primitive : ces trois cordes sont les mêmes qui nous ont servi ensuite pour déterminer, au moyen d'une poulie, le frottement des axes.

CORDE, n.° 1. Cette corde étoit formée de six fils de carret ou de trois torons de deux fils de carret chacun : la circonférence de la corde étoit de $12\frac{1}{2}$ lignes; les 6 pouces de longueur pesoient $\frac{9}{4}$ gros.

CORDE, n.° 2. Cette corde étoit composée de quinze fils de carret, ou de trois torons de cinq fils chacun : le tour de la corde étoit de 20 lignes; les 6 pouces de longueur pesoient $\frac{25}{4}$ gros.

CORDE, n.° 3. Cette corde étoit formée de trente fils de carret, ou de trois torons de dix fils de carret chacun : le tour de la corde étoit de 28 lignes, & les 6 pouces de longueur pesoient $\frac{49}{4}$ gros.

Pour mettre ces cordes à peu près dans le même état que celles dont nous nous servons dans la manœuvre des machines, on les plaçoit dans la gorge d'une poulie ; l'on y suspendoit des deux côtés un poids de 4 à 500 livres ; un homme faisoit alternativement monter & descendre ce poids de 8 ou 10 pieds de hauteur pendant une grosse heure : lorsque la corde avoit ainsi acquis une flexibilité à peu près uniforme dans toute sa longueur, on la soumettoit aux expériences qui devoient déterminer sa roideur. Cette préparation est absolument indispensable, si l'on veut éviter des irrégularités qui nous mettroient hors d'état de tirer aucun parti des expériences.

Les rouleaux bb', dont on s'est servi depuis le diamètre d'un pouce jusqu'à celui de 6 pouces, avoient été tournés avec le plus grand soin : la moitié de leur poids a toujours été ajoutée, dans les expériences, à celui du petit bassin Q ; lorsque le poids du rouleau étoit considérable, on le soutenoit au moyen d'un petit contre-poids φ, & d'une ficelle qui passoit sur une petite poulie n (*Fig.* 13, n.° 2.) attachée à la poutre A A'. Dans la réduction de la charge du petit bassin Q, l'on avoit égard à ce petit contre-poids.

107. Les trois Tables qui suivent, représentent les forces nécessaires pour plier nos trois cordes autour de différens rouleaux : la première colonne désigne le poids du plateau BB' & de sa charge : les autres colonnes marquent en livre & dixième de livre la charge du bassin Q réunie à la moitié du poids du rouleau bb', dans l'instant où ce rouleau commence à descendre : en tête de chaque colonne, l'on trouve en pouce le diamètre des rouleaux qui ont servi aux expériences.

TABLE pour déterminer la roideur des cordes à trois torons non goudronnées.

POIDS qui tend les CORDES en livres.	I.^{ere} TABLE. CORDE, n.° 1, de 6 fils de carret. Diamètre des rouleaux.			II.^{e} TABLE. CORDE, n.° 2, de 15 fils de carret. Diamètre des rouleaux.			III.^{e} TABLE. CORDE, n.° 3, de 30 fils de carret. Diamètre des rouleaux		
	1 pouc.	2 pouc.	4 pouc.	1 pouc.	2 pouc.	4 pouc.	2 pouc.	4 pouc.	6 pouc.
℔	℔	℔	℔	℔	℔	℔	℔	℔	℔
25	2,0	*	*	7,0	3,2	1,7	11,0	5,0	*
125	11,0	4,0	*	22,0	9,0	5,0	21,0	8,5	*
225	17,0	6,5	*	30,0	17,0	7,0	29,0	14,0	*
425	31,0	12,0	5,7	65,0	31,0	13,0	47,0	23,0	*
625	43,0	15,0	7,2	92,0	41,0	16,7	67,0	31,0	*
1025	*	*	11,0	*	*	27,0	*	50,0	34,0

108. La Table qui précède est le résultat d'un travail long & pénible; mais malgré tous les soins que l'on a pu prendre pour rendre les expériences exactes, elles ne sont pas parfaitement régulières : cependant elles suffisent, dans la pratique, pour conclure que, sous les grandes tensions, les forces nécessaires pour plier les cordes autour de différens rouleaux, sont à peu près en raison directe des tensions des cordes, & inverse du diamètre des rouleaux (*a*), comme l'ont trouvé MM. Amontons & Désaguilliers; mais elles ne sont pas, ainsi que l'ont voulu

(*a*) Il paroît par la Table qui précède, & par quelques autres expériences, que les forces nécessaires pour plier les cordes autour des rouleaux, croissent pour les petits rouleaux dans un plus grand rapport que celui suivant lequel le diamètre des rouleaux diminue; mais lorsque le diamètre des rouleaux est très-grand, relativement à celui des cordes, ce qui a presque toujours lieu dans la pratique, pour lors la loi que nous établissons ici est assez conforme à l'expérience.

ces

ces deux Auteurs, en raiſon directe du diamètre des cordes : car ſi l'on compare nos trois cordes pliées autour d'un rouleau de 4 pouces, & tendues par un poids de 625 livres, l'on trouvera pour la force qui plie les cordes :

N.° 1. Corde de 6 fils & de 12 $\frac{1}{2}$ lignes de tour. 7,2 ℔

N.° 2. Corde de 15 fils & de 20 lignes de tour. 16,7

N.° 3. Corde de 30 fils & de 28 lignes de tour. 31,0.

Nous avons ici même rouleau & même tenſion ; ainſi en ſuppoſant, en pareil cas, que les forces qui plient les cordes ſont comme une puiſſance m de leur diamètre, nous aurons, en comparant n.° 1 avec n.° 3, $31,0 : 7,2 :: 28^m : 12\frac{1}{2}^m$, d'où

$$m = \frac{\log.\left(\frac{310}{72}\right)}{\log.\left(\frac{28}{12\frac{1}{2}}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1,8$$

En comparant n.° 1 avec n.° 2, l'on aura m 1,7

En comparant n.° 2 & n.° 3, l'on aura m .... 1,8.

Il réſulte de ces trois expériences, & généralement de toutes celles compriſes dans notre Table, que les forces néceſſaires pour plier les cordes autour d'un rouleau ſont très-approchant comme le carré des diamètres des cordes : il paroît cependant que la valeur de cette quantité m n'eſt pas la même dans toutes les eſpèces de cordes ; elle dépend pour les cordes d'une même fabrique, de l'uſé & du plus ou moins de flexibilité de la corde ; mais quoiqu'elle diminue à meſure que les cordes s'uſent, je ne l'ai jamais trouvée au deſſous du nombre 1,4.

Il ſe pourroit que les forces néceſſaires pour plier des ficelles d'une ou deux lignes de diamètre, telles que celles miſes en expériences par MM. Amontons & Déſaguilliers, fuſſent, à cauſe de leur grande flexibilité, comme le ſimple diamètre des cordes : d'ailleurs, M. Déſaguilliers (Cours de Phyſique, tom. I, pag. 247 & 248.) avoue que lorſqu'il s'eſt ſervi d'une corde de $\frac{5}{10}$ pouces de diamètre, c'eſt la plus groſſe qu'il ait employée, il a trouvé que la force néceſſaire pour plier cette corde a été à proportion plus conſidérable que dans les autres. Mais ce que je puis aſſurer, c'eſt qu'en comparant des cordes d'une groſſeur ſuffiſante pour manœuvrer pluſieurs quintaux, que les cordes ſoient neuves ou vieilles, pourvu qu'elles aient ſervi à peu près également, jamais l'on ne trouvera le nombre m auſſi petit que l'unité : je l'ai trouvé une ſeule fois égal à 1,4 ; mais les cordes étoient ſi uſées qu'elles étoient preſque hors d'état de ſervir.

109. Le rapport donné par MM. Amontons & Déſaguilliers, relativement à la tenſion proportionnelle aux forces qui plient les cordes, exige, dans les gros cordages, une correction dont ces deux Auteurs travaillant en petit, n'ont pas pu s'appercevoir. Si l'on examine la première colonne de notre troiſième Table, où la corde eſt de trente fils de carret, & le rouleau de 2 pouces de diamètre, l'on trouvera qu'avec une tenſion de 25 livres, il faut 11 livres pour faire deſcendre le rouleau, tandis qu'avec une tenſion de 625 livres, il faut 67 livres. Si nous retranchons 11 livres de 67 livres, il en réſultera qu'une augmentation de tenſion égale à 600 livres exige, pour faire deſcendre le rouleau, une force de 56 livres, ce qui, ſuivant la règle, donneroit 9,3 livres par quintal, & conſéquemment $2,\frac{3}{10}$ ℔ pour une tenſion de 25 livres. Mais nous trouvons par l'expérience, qu'une tenſion de 25 livres exige 11 livres pour vaincre la roideur de notre corde, ainſi c'eſt 8,7 livres de plus que nous n'aurions dû avoir. Cependant ſi en comptant ſur une force de 11 livres pour une tenſion de 25 livres, nous calculons pour tous les autres degrés de tenſion à raiſon de 9,3 livres par quintal, nous trouverons, pour les forces qui plient la corde, à peu près les mêmes nombres que

dans nos expériences : c'est ce que l'on peut voir dans la petite Table que je joins ici, où la deuxième colonne est donnée par l'expérience, & où la troisième est calculée.

CORDE, n.° III, de trente fils de carret, rouleau de 2 pouces.		
TENSION en livre.	EXPÉRIENCE.	THÉORIE calculée.
℔	℔	℔
25	11	11,0
125	21	20,3
225	29	29,6
425	47	48,2
625	67	67,0

Les forces requises pour plier une corde autour d'un rouleau, sont donc, d'après cette observation, représentées par deux termes; le premier est une quantité constante, & l'autre est proportionnel au poids qui tend la corde : la quantité constante ne peut être attribuée qu'aux différens degrés de tension & de torsion que les cordes éprouvent dans leur fabrique. Chaque fil de carret y est tendu par une certaine force, & il conserve son degré de tension lorsque la corde est ourdie, parce que les fils de carret serrés & engagés les uns dans les autres, sont retenus par leur frottement. Ainsi dans une corde qui soutient un poids, chaque fil est tendu, non seulement par le poids qu'il soutient, mais encore suivant le degré de tension qu'il conserve d'après l'ourdissage de la corde : or si les forces nécessaires pour plier une corde sont proportionnelles aux tensions, il en résulte qu'elles seront proportionnelles à une quantité constante plus au poids dont la corde est chargée; cette quantité constante doit varier suivant le degré de tension & de torsion que l'on fait éprouver aux cordes dans leur fabrique : dans des cordes neuves à trois torons, elle suit assez exactement le rapport du carré des diamètres des cordes : lorsque les cordes servent depuis longtemps, les fils de carret se détendent, & la quantité constante qui répond à leur tension primitive diminue.

Cette quantité constante diminue encore proportionnellement au diamètre des rouleaux. Ainsi la formule qui repréſentera les forces néceſſaires pour plier les cordes, ſera aſſez exactement exprimée par $\frac{r^m}{R}$ ($a + b$ P) où r eſt le diamètre de la corde; R eſt le diamètre du rouleau; a & b ſont deux quantités conſtantes que l'expérience détermine pour des cordes d'une même nature; P eſt le poids que ſoutient la corde; m, art. 108, eſt égale à 1,7 pour les cordes neuves, & à 1,4 pour les vieilles cordes.

Si nous voulons déterminer les quantités a & b d'après les expériences & les obſervations de cet article, où la corde de trente fils de carret, dont le diamètre eſt à peu près 9 lignes, ſe plie ſur un rouleau de 24 lignes de diamètre, nous aurons $\frac{r^m a}{R} = \frac{9^{\frac{17}{10}}}{24} a = 8{,}7$ ℔, & $\frac{r^m b}{R}$ 100 ℔ $= \frac{9^{\frac{17}{10}}}{24}$ 100 ℔ $b = 9{,}3$ ℔, d'où l'on tirera facilement a & b. Il faut ſeulement remarquer que comme le rouleau, dans nos expériences, eſt ſoutenu par deux cordes, la quantité que nous trouvons pour la conſtante a eſt double de celle que nous trouverions pour une ſeule corde.

Cable blanc de cent douze fils de carret à quatre torons.

110. Pour rendre notre travail plus utile dans la pratique, nous allons rapporter le réſultat de quelques expériences pour déterminer les forces néceſſaires pour plier les cables autour d'un rouleau.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Nous avons mis en expérience un cable formé de quatre torons, de vingt-huit fils de carret chacun, en tout cent douze fils; au centre de ce cable étoit une meche pour remplir le vide que la réunion des quatre torons laiſſe entre eux: le tour du cable étoit de 57 lignes; les 6 pouces de longueur peſoient $\frac{170}{4}$ gros.

I.er Essai. Ce cable éprouvé ſous une tenſion de 1000 livres, & roulé autour d'un cylindre de 6 pouces de diamètre, ſuivant la méthode d'Amontons, n'a été mené que par un poids de 100 livres.

II.e Essai. Avec le même rouleau de 6 pouces & une tenſion de 100 livres, le rouleau n'a été entraîné que par une force de 19 livres.

Obſervations ſur cette Expérience.

111. En comparant ce cable avec la corde de trente fils de carret qui, dans la troiſième Table, art. 107, lorſqu'elle eſt tendue par un poids de 1000 livres, & qu'elle enveloppe un rouleau de 6 pouces, exige une force de 34 livres pour faire deſcendre le rouleau, l'on trouve en ſuivant le procédé de l'article 108, $m = \frac{\log.\left(\frac{100}{34}\right)}{\log.\frac{57}{28}} = 1,5$, quantité plus petite que celle que nous avons trouvée par nos premières expériences, quoique le cable fût preſque neuf: l'on ne doit pas être ſurpris de cette diminution dans la quantité m, parce que, comme nous l'avons obſervé, il y avoit ici une meche de 10 ou 12 lignes de tour au centre du cable; & que, dans la fabrique des cables, il n'eſt pas poſſible que chaque fil de carret ſe tende auſſi parfaitement que dans les cordes d'une groſſeur moyenne.

Roideur des cordages blancs imbibés d'eau.

112. Comme dans l'uſage des machines il arrive ſouvent que les cordes ſont mouillées par la pluie, nous avons cherché quelles étoient les forces néceſſaires pour plier nos trois cordes n.° 1, 2 & 3 ſur différens rouleaux, après qu'elles ont eu trempé dans l'eau pendant 5 ou 6 heures, & nous avons trouvé les réſultats contenus dans la Table qui ſuit.

TABLE pour évaluer la roideur des cordes blanches imbibées d'eau.

POIDS qui tend les CORDES en livre.	I.ere TABLE. CORDE, n.° 1, de 6 fils de carret. Diamètre des rouleaux.		II.e TABLE. CORDE, n.° 2, de 15 fils de carret. Diamètre des rouleaux.		III.e TABLE. CORDE, n.° 3, de 30 fils de carret. Diamètre des rouleaux.	
	2 pouces.	4 pouces.	2 pouces.	4 pouces.	2 pouces.	4 pouces.
℔	℔	℔	℔	℔	℔	℔
25	*	,5	5,0	2,0	2,5	9,0
125	4,5	2,2	11,0	4,5	35,0	13,0
225	7,0	3,0	17,0	*	45,0	17,0
425	11,0	5,1	28,0	10,0	64,0	26,0
625	14,0	6,5	38,0	15,0	82,0	35,0
1025	*	*	*	23,0	*	5,4

Nous avons marqué, dans cette Table, d'une * les expériences qui n'ont pas été faites, ou que nous n'avons pas retrouvées ſur notre regiſtre. Si nous comparons ce Tableau avec celui de l'article 107, nous trouvons que, relativement aux deux cordes de quinze & de ſix fils de carret, l'humidité a plutôt augmenté la flexibilité de la corde que ſa roideur. Les mêmes forces répondent à peu près au même degré de tenſion dans les deux Tableaux : il n'y a ici que la corde, n.° 3, de trente fils de carret dont l'augmentation de roideur paroît très-ſenſible, ſur-tout lorſqu'elle n'eſt chargée que de 25 livres : car nous trouvons ici, troiſième Table, qu'avec un rouleau de 2 pouces de diamètre, la force qu'il faut pour plier la corde de trente fils de carret mouillée, & pour faire deſcendre le rouleau, eſt elle-même de 25 livres, au lieu que nous la trouvons ſeulement de 11 livres pour la corde sèche. Mais ſi nous retranchons 25 livres de 82 livres, force qui répond ici, dans l'avant-dernière colonne, à une charge de 625 livres, nous trouvons qu'avec la corde, n.° 3, mouillée, une augmentation de charge de six quintaux exige, pour faire descendre le rouleau de 2 pouces, une force de 57 livres : or nous avons trouvé en pareille circonstance pour la corde sèche 56 livres. Ainsi l'augmentation de roideur que nous trouvons ici est mesurée uniquement par une quantité constante qu'il faut attribuer à l'augmentation de tension, que l'eau, en s'insinuant dans les interstices de la corde & en y adhérant, fait contracter à tous les fils. Si cette augmentation de tension ne produit pas un effet sensible dans les petites cordes, c'est peut-être parce que l'eau s'en exprime avec beaucoup de facilité.

Evaluation de la roideur des cordes goudronnées.

113. Les cordes goudronnées étant les seules dont on fasse usage dans la Marine pour les manœuvres à découvert, nous avons cherché à déterminer, par plusieurs expériences, les forces nécessaires pour plier cette espèce de corde ; nous nous contenterons d'en rapporter les résultats.

Première Expérience.

Corde goudronnée neuve, de trente fils de carret.

Nous avons soumis à l'expérience une corde goudronnée neuve, de trois torons de dix fils de carret chacun ; elle avoit 33 lignes de circonférence ; les 6 pouces pesoient $\frac{57}{4}$ gros.

I.er Essai. Nous avons trouvé qu'avec un rouleau de 6 pouces & une charge de 1000 livres, il falloit, pour faire descendre le rouleau, une force de 42 livres.

IIe. Essai. Nous avons trouvé qu'avec un rouleau de 4 pouces, il falloit, pour une charge de 1000 livres, une force de 65 livres pour faire descendre le rouleau, & que, pour une charge de 25 livres, il falloit une force de 8 livres.

III.^e Essai. Avec un rouleau de 2 pouces & une charge de 25 livres, il faut 21 livres pour faire descendre le rouleau.

II.^eme Expérience.

Corde goudronnée neuve, de quinze fils de carret.

Nous avons mis en expérience une corde neuve goudronnée, & à trois torons de cinq fils de carret chacun; sa circonférence étoit de 24 lignes, & 6 pouces de longueur pesoient $\frac{28}{4}$ gros.

I.^er Essai. Sur un rouleau de 4 pouces, avec une charge de 1000 livres, il falloit, pour faire descendre le rouleau, une force de 30 livres; & pour une charge de 25 livres, il falloit à peu près 2 livres & demie.

III.^eme Expérience.

Corde goudronnée neuve, de six fils de carret.

Nous avons mis en expérience une corde neuve goudronnée, formée de trois torons de deux fils de carret chacun; elle avoit 13 lignes de tour; les 6 pouces de longueur pesoient $\frac{12}{4}$ gros.

I.^er Essai. Avec un rouleau de 2 pouces de diamètre, la corde éprouvée depuis 25 livres jusqu'à 600 livres; le poids qui entraînoit le rouleau s'est trouvé de 25 livres par millier; la constante à ajouter n'alloit pas à $\frac{3}{4}$ livres.

II.^e Essai. Avec un rouleau de 4 pouces de diamètre, le poids qui entraîne le rouleau est de 12 livres par millier; la quantité constante est trop petite pour que l'expérience puisse la saisir.

RÉSULTAT.

114. Il résulte des expériences que nous venons de rapporter, que les forces qu'il faut employer pour plier une corde goudronnée

goudronnée autour d'un rouleau, feront exprimées par les mêmes formules que nous avons trouvées pour les cordes blanches, c'eſt-à-dire, qu'il faut ajouter au degré de force qui répond à la charge de la corde, une quantité conſtante, relative à celle que nous avons trouvée à l'article 109.

Si nous comparons, pour les cordes formées du même nombre de fil de carret, la roideur d'un cordage goudronné avec celle d'un cordage blanc, nous trouverons en général que les forces employées pour plier la corde goudronnée, ſont à peine d'un ſixième plus conſidérable que celle qu'il faut employer pour vaincre la roideur de la même corde non goudronnée : car, en prenant pour exemple les différentes cordes blanches ou goudronnées que nous avons ſoumiſes à l'expérience, nous trouvons qu'avec un cylindre de 4 pouces & une charge d'un millier, nous aurons :

Cordes blanches.

Les cordes chargées de 1025 ℔.

N.° 1. Six fils de carret, il faut, pour vaincre la roideur,	11 ℔	Article 107.
N.° 2. Quinze fils de carret, ...	27	
N.° 3. Trente fils de carret, ...	50.	

Cordes goudronnées.

Les cordes chargées de 1000 ℔.

Corde de ſix fils de carret.	12 ℔	Article 113.
Corde de quinze fils de carret.	30	
Corde de trente fils de carret.	65.	

La roideur des deux eſpèces de corde diffère peu pour les cordes de ſix & de quinze fils (1); il n'y a que dans les gros

(1) En comparant les réſultats trouvés pour les cordes goudronnées, comme nous l'avons fait, art. 108, pour les cordes blanches, l'on trouve que la roideur des cordes goudronnées ſuit à peu près le rapport du nombre de fils de carret qui les compoſe.

cordages où l'augmentation de roideur pour les cordes goudronnées devient sensible ; mais il paroîtroit qu'elle dépend encore ici, au moins en grande partie, comme nous l'avions déjà trouvée dans les cordes imbibées d'eau, de l'augmentation du terme constant, ou du degré de tension indépendant de la charge, que le goudron, en remplissant les interstices de la corde, fait contracter à tous les fils qui la composent.

115. Lorsqu'on a soumis à l'expérience du vieux cordage goudronné, l'on a trouvé qu'il avoit à peu près la même roideur que le cordage goudronné neuf : si d'un côté, par l'usé, les parties du chanvre se détendent ; de l'autre, l'exposition à l'air & à la pluie durcit le goudron : trois cordes, l'une de six fils de carret, l'autre de quinze, & la troisième de trente fils de carret qui servoient depuis quinze mois dans les manœuvres d'un vaisseau qui venoit de faire campagne, ont donné à peu près les mêmes résistances que les cordes neuves goudronnées.

116. Rien n'est si facile que d'appliquer à la pratique les résultats qui précèdent : nous allons en donner un exemple, en cherchant les forces nécessaires pour plier les cordes de nos expériences autour d'un rouleau d'un pied de diamètre ; mais il faut toujours remarquer, comme nous le verrons plus bas, art. 121, que les forces nécessaires pour plier les cordes dans la méthode d'Amontons, ne sont que la moitié de celles qu'il faudroit employer pour vaincre cette roideur en élevant un poids avec une poulie ou un cabestan.

Nous trouvons, art. 107, qu'une corde blanche de trente fils de carret, se roulant autour d'un cylindre de 4 pouces de diamètre, exige, pour faire descendre le cylindre, une force de 50 livres sous une charge de 1025 livres. Nous trouvons également qu'il faut 5 livres de force pour une charge de 25 livres. C'est donc, indépendamment de la quantité constante, une force de 45 livres par millier, & 4 livres à peu près pour la force constante indépendante de la charge ; mais comme la charge & le rouleau sont soutenus par deux cordes, la conftante qui répond à une ſeule corde n'eſt que de 2 livres : ainſi ſi nous voulons nous ſervir de cette corde ſur une poulie de 12 pouces de diamètre, il faut prendre, pour les forces qui plient la corde, le tiers des quantités trouvées pour un rouleau de 4 pouces ; ce ſera $\frac{7}{10}$ livres pour la conſtante, & 15 livres par millier de charge. Nous calculerons, par le même moyen, les autres cordes, & nous aurons :

Forces néceſſaires pour plier les cordes blanches autour d'un rouleau dans la Méthode de M. Amontons.

Corde blanche de trente fils de carret, N.° 3.

Sur un rouleau de 4 pouces de diamètre, la quantité conſtante eſt	2 ℔
La force proportionnelle à la charge eſt par quintal.	4,5
Sur un rouleau de 12 pouces, la force conſtante eſt de	0,7
La force proportionnelle à la charge eſt par quintal.	1,5.

Corde blanche de quinze fils de carret, N.° 2.

Sur un rouleau de 4 pouces, la force conſtante eſt de $\frac{5}{10}$ livres, & celle proportionnelle à la tenſion, de 2,6 livres par quintal.

Corde blanche de ſix fils de carret, N.° 1.

Sur un rouleau de 4 pouces de diamètre, la force conſtante peut s'évaluer à $\frac{1}{10}$ livres, & la force proportionnelle aux charges, à 1,1 livres par quintal.

Corde goudronnée de trente fils de carret.

Sur un rouleau de 4 pouces, la force conſtante peut s'évaluer à 3,3 livres, & la force proportionnelle aux charges, à 5,8 livres par quintal.

Corde goudronnée de quinze fils de carret.

Sur un rouleau de 4 pouces, la force constante peut s'évaluer à une livre, & la force proportionnelle à la charge, à 2,8 livres par quintal.

Corde goudronnée de six fils de carret.

Sur un rouleau de 4 pouces, la force constante peut s'évaluer à $\frac{2}{10}$ livres, & la force proportionnelle aux charges, à 1,2 livres par quintal.

Quant aux forces qui répondent à la grosseur des cordes, & qu'il faut employer pour les plier autour d'un rouleau, elles se calculeront assez exactement dans la pratique, en se conformant pour les cordes blanches, suivant qu'elles seront vieilles ou neuves, aux observations de l'article 109; & pour les cordes goudronnées les plus en usage dans la Marine, en supposant ces forces proportionnelles au nombre des fils de carret qui entrent dans la corde.

117. Les expériences des cordes goudronnées ont été faites pendant l'hiver par un vent d'ouest, le thermomètre de Reaumur de 5 ou 6 degrés au dessus de la congélation; mais il paroît que la gelée augmente la roideur de cette espèce de cordage, sur-tout dans les grosses cordes : la corde de quinze fils de carret goudronnée, éprouvée le thermomètre de 4 degrés au dessous de la congélation, a demandé une force plus grande à peu près d'un sixième que lorsque le thermomètre étoit de 6 degrés au dessus de la congélation; mais cette augmentation ne suit pas le rapport des charges; c'est encore ici la partie de la force qui est constante, qui paroît augmenter le plus sensiblement.

Addition envoyée après le jugement du Prix, pour être insérée à la fin de l'art. 117, relatif à la roideur des cordes.

Dans le courant des expériences de cette Section, nous avons oublié de prévenir, & ce résultat a également lieu de quelque manière & de quelque procédé dont on se serve pour éprouver la roideur des cordes, que si les cordes étant chargées, l'on releve le rouleau en le tournant à force de bras, & que l'on le laisse tomber tout de suite, la roideur de la corde sera souvent d'un tiers plus petite que dans nos expériences. Ce résultat a lieu avec les cordes blanches comme avec les goudronnées, avec les vieilles comme avec les neuves. Il est seulement plus sensible avec les grosses cordes & avec les neuves qu'avec les petites, avec les petits rouleaux qu'avec les gros : mais si l'on laisse le rouleau remonté quelque temps en repos, sans l'obliger à redescendre, l'on trouvera que la roideur de la corde augmente sensiblement, & qu'elle ne parvient à sa limite, telle que nous l'avons trouvée dans nos expériences, qu'après un repos de 5 ou 6 minutes. Ainsi dans un mouvement alternatif où les forces seroient employées à faire monter & descendre un poids, comme, par exemple, dans les sonnettes qui servent à élever le mouton pour battre les pilotis, la roideur de la corde seroit un peu moindre que dans nos expériences. Il en seroit de même d'une corde qui passeroit sur deux poulies très-proche l'une de l'autre : pour peu que le mouvement fût rapide, la force qu'il faudroit employer pour vaincre la roideur de la corde, en la pliant sur la deuxième poulie, seroit moindre, quoique sous le même degré de tension, que la force employée à la plier sur la première.

Il paroît résulter de cette observation, que les parties de la corde pliée ne se redressent que lentement, comme nous l'observerons dans la théorie des cordes, & que la roideur plus ou moins grande dépend du redressement des parties.

Cette observation au surplus doit rarement influer dans les calcul des machines destinées à la Marine, dont les mouvemens sont lents, & où les poulies sont presque toujours assez éloignées l'une de l'autre, pour que chaque partie de la corde, en passant d'une poulie à l'autre, ait le temps de reprendre toute sa roideur. D'ailleurs il est presque toujours nécessaire, dans l'évaluation des machines, de calculer les résistances dans le cas le plus désavantageux pour les forces motrices.

SECTION DEUXIÈME.

Deuxième méthode pour déterminer, par l'expérience, la force nécessaire pour plier les cordes, & pour vaincre le frottement d'un cylindre, ou d'une roue qui roule sur un plan.

118. LA Méthode que je vais décrire, & qui m'a été utile pour déterminer la roideur des cordes, & le frottement des cylindres qui roulent sur des plans horizontaux, est plus directe que celle de M. Amontons : elle a d'ailleurs l'avantage de faire connoître les forces nécessaires pour plier une corde sur un rouleau d'un pied de diamètre; ce qui n'est pas praticable dans la première méthode, sans employer un contre-poids pour soutenir le poids du rouleau, ce qui, multipliant les forces, jette nécessairement de l'incertitude dans le résultat des expériences.

Frottement des rouleaux.

FIGURE 14. 119. L'on a posé sur deux treteaux de 6 pieds de hauteur, solidement assis (*Fig.* 14, n.° 1 & 2.), deux pièces de bois équarries : sur ces deux pièces de bois, l'on a fixé deux règles de chêne DD, D′D′ dressées à la varlope, & polies avec une peau de chien de mer : l'on a fait tourner avec soin deux cylindres de bois de gaïac, l'un de 6 pouces de diamètre, & l'autre de 2 pouces : l'on a fait également exécuter autour plusieurs cylindres de bois d'orme, depuis 2 jusqu'à 12 pouces de diamètre.

L'on a posé successivement les rouleaux sur les deux règles de chêne, de manière que l'axe des rouleaux se trouvoit, ainsi qu'on le voit (*Fig.* 14.), perpendiculaire à l'alignement des règles dont avoit arrondi les arêtes : les deux règles étoient parfaitement de niveau : l'on suspendoit des deux côtés du rouleau des poids de 50 livres, avec des ficelles très-flexibles de 2 lignes de tour, & dont la roideur n'étoit pas le trentième de celle de notre corde de six fils de carret : au moyen de plusieurs ficelles distribuées sur les rouleaux, & chargées chacune de 50 livres de chaque côté, l'on produisoit sur les règles une pression déterminée : l'on cherchoit ensuite, au moyen d'un petit contre-poids que l'on suspendoit alternativement des deux côtés du rouleau, quelle étoit la force nécessaire pour lui donner un mouvement continu insensible, ou pour vaincre son frottement. Voici le résultat des expériences dans lesquelles, à chaque essai, l'on commençoit par ébranler le rouleau.

Rouleaux de bois de gaïac.

CHARGE des ROULEAUX, leur poids compris.	FORCES qui produisent un mouvement continu très-lent.	
	DIAMÈTRE des rouleaux, 6 pouces.	DIAMÈTRE des rouleaux, 2 pouces.
100 ℔	0,6 ℔	1,6 ℔
500	3,0	9,4
1000	6,0	18,0

Il résulte de cette Table, que le frottement des cylindres qui roulent sur des plans horizontaux, est en raison directe des pressions, & inverse du diamètre des rouleaux. Nous avons éprouvé que les enduits ne donnent ici aucune diminution sensible dans les frottemens.

Rouleaux de bois d'orme.

Les rouleaux de bois d'orme ont donné un frottement de $\frac{2}{5}$ plus grand que les rouleaux de gaïac : avec un rouleau d'orme de 6 pouces de diamètre, nous avons trouvé, pour une preſſion de 1000 livres, le frottement de 10 livres, & de 5 livres avec un rouleau de 12 pouces de diamètre : l'on remarque ſeulement que, ſous les petites preſſions, le frottement paroît un peu plus grand que celui qui réſulteroit de la loi des frottemens proportionnels aux preſſions ; mais cette différence eſt trop peu conſidérable, pour pouvoir produire des erreurs ſenſibles dans la pratique.

Evaluation de la roideur des cordes d'après les Expériences de cette nouvelle Méthode.

120. Le frottement des rouleaux nous étant connu par l'article qui précède, nous allons, au moyen de quelques Expériences, chercher les forces qui ſont néceſſaires pour plier des cordes chargées de différens poids, poſées ſur ces mêmes rouleaux, ou ſur des poulies du même diamètre.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Corde blanche, n.° 3, de trente fils de carret, ſur rouleau de bois d'orme de 12 pouces de diamètre peſant 110 livres.

I.er ESSAI. Chaque côté de la corde étant chargé de 100 livres, il a fallu un poids de 5 livres pour faire mouvoir le ſyſtème d'un mouvement inſenſible continu.

II.e ESSAI. Chargé de 300 livres de chaque côté, il a fallu 11 livres.

III.e ESSAI. Chargé de 500 livres, il a fallu 20 livres.

II.e

II.eme EXPÉRIENCE.

Même corde, n.° 3, de trente fils de carret, ſur rouleau de bois d'orme, de 6 pouces de diamètre, peſant 25 livres.

I.er ESSAI. Chaque côté chargé de 200 livres, il faut, en imprimant une vîteſſe inſenſible au rouleau, pour que le mouvement ſoit continu, une traction de 18 livres.

III.eme EXPÉRIENCE.

Même corde de trente fils de carret, ſur rouleau de gaïac, de 6 pouces de diamètre, peſant 50 livres.

I.er ESSAI. Le rouleau chargé de 200 livres de chaque côté, il faut un poids de 16 livres pour produire un mouvement continu.

IV.eme EXPÉRIENCE.

Même corde de trente fils de carret ſur rouleau de gaïac, de 2 pouces de diamètre, peſant 4 livres & demie.

I.er ESSAI. Chargé de 25 livres de chaque côté, il faut, en imprimant une vîteſſe inſenſible, pour que le mouvement ſoit continu, une force de traction de 11 livres.

II.e ESSAI. Chargé de 200 livres, il faut, en imprimant une vîteſſe inſenſible, pour que le mouvement ſoit continu, une traction de 52 livres.

V.eme EXPÉRIENCE.

Corde de quinze fils de carret, n.° 2, ſur rouleau de gaïac, de 6 pouces de diamètre, peſant 50 livres.

I.er ESSAI.	Chaque côté chargé de 25 livres, il faut	1 ℔ $\frac{1}{4}$
II.e ESSAI.	Chaque côté chargé de 100 livres, . . .	6
III.e ESSAI.	Chaque côté chargé de 200 livres, . . .	11
IVe ESSAI.	Chaque côté chargé de 500 livres, . . .	24.

VI.^me Expérience.

Corde de six fils de carret, n.° 1, sur rouleau de gaïac, de 6 pouces de diamètre.

I.^er Essai. Chaque côté chargé de 100 livres, il faut 3 ℔

II.^e Essai. Chaque côté chargé de 200 livres, . . . 6.

Calcul des Expériences pour le rouleau de 12 pouces.

120. En ajoutant le poids du rouleau à celui dont les cordes sont chargées, nous aurons le résultat de la première expérience sous la forme suivante :

I.^ere Expérience.	I.^er Essai. Pression.	315 ℔	Le frottement calculé d'après l'art. 119.	1,5 ℔
	II.^e Essai.	721	....	3,6
	III^e. Essai.	1130	....	5,6.

En retranchant ces frottemens des quantités trouvées à chaque expérience, il reste, pour la force qui plie la corde sur un rouleau de 12 pouces de diamètre :

I.^ere Exp.	I.^er Essai.	La corde chargée de	100 ℔	Roideur de la corde.	3,5 ℔
	II^e. Essai.	....	300	....	7,4
	III.^e Essai.	....	500	....	14,4.

Nous trouverions, art. 116, par la méthode de M. Amontons, que les forces nécessaires pour plier une pareille corde sur un rouleau de 12 pouces, sont :

Pour une tension de 100 livres, ... 2,2 ℔

Pour une tension de 300 livres, ... 5,2

Pour une tension de 500 livres, ... 8,2.

Calcul pour les trois cordes, avec un rouleau de gaïac de 6 pouces de diamètre.

Corde, n.° 3, de trente fils de carret.

Dans la troisième Expérience, les règles sont chargées de 466 livres, le frottement, art. 119, ... 2,8 ℔;
il reste, pour la force due à la roideur de la corde. 13,2.

Nous trouverions pour cette force, par la méthode de M. Amontons, art. 116, ... 7,4 ℔.

Corde, n.° 2, de quinze fils de carret.

Dans la cinquième Expérience, les règles sont chargées, dans le troisième essai, de 461 livres; le frottement des rouleaux est de . . . . 2,8 ℔;
il reste, pour la roideur de la corde, ... 8,2.

Nous trouverions, par la méthode de M. Amontons, art. 116, ... 3,7 ℔.

Dans le quatrième essai de la même Expérience, les règles sont chargées de 1074 livres, le frottement est de 6,4 ℔;
il reste, pour la roideur de la corde, ... 17,6.

Nous trouverions, art. 116, pour cette force, . 8,9 ℔.

Corde, n.° 1, de six fils de carret.

Dans la sixième Expérience, les règles sont chargées au deuxième essai de 456 livres, c'est pour le frottement 2,7 ℔;
il reste, pour la roideur de la corde, ... 3,3.

Nous trouverions, par l'art. 116, ... 1,5 ℔.

Il résulte des calculs qui précèdent, que la force nécessaire pour plier une corde autour d'une poulie mobile sur son axe, est double de celle que nous avons trouvée par la méthode de M. Amontons; il n'y a que la corde de trente fils de carret, première & troisième Expériences, qui ne donne pas tout à fait le double des forces déterminées par l'art. 116; mais cette différence doit être attribuée à ce que la roideur de notre corde n'a été éprouvée, par cette deuxième méthode, qu'à la fin de nos opérations, lorsqu'elle étoit usée par un grand nombre d'essais; au lieu que, lorsqu'elle a été mise en expérience, par la méthode de M. Amontons, elle n'avoit été encore rompue que par quelques opérations décrites au commencement de la Section précédente.

La correspondance que nous trouvons ici entre des résultats auxquels nous sommes parvenus par deux marches d'expériences absolument différentes, leur sert de preuves réciproques. Il n'est plus question que de voir pourquoi les forces trouvées par notre deuxième méthode, sont doubles de celles trouvées par la première.

121. (*a*) La *Fig.* 15 qui correspond au n.° 2 de la treizième Figure, représente une partie de l'appareil de M. Amontons; la corde Q P soutient la charge P : en Π est le poids qui plie la corde autour du rouleau : la roideur de la corde fait prendre à sa partie inférieure une courbure e n g, excentrique au cercle de la section du rouleau; mais la partie supérieure n L de la corde qui se déroule, reprenant son état naturel, n'oppose point de résistance, en sorte que la partie supérieure de la corde est verticale & tangente au rouleau : dans le moment où l'on suppose que tout le système est prêt à se mouvoir, le rouleau étant entraîné par le poids Π, le centre de gravité doit répondre à la verticale r L; & si Q P est une verticale passant par le centre de gravité P du poids, l'on aura, lorsque le rouleau sera supposé entraîné d'un mouvement insensible & uniforme, l'équation $P. Q r = \Pi, R r$ ou $\Pi = \frac{P Q r}{2 r C}$: mais dans la seizième

(*a*) L'on trouvera cette théorie plus en détail à l'article 147 & suivans. Dans les Figures de cet article, l'on a supposé que les actions agissoient à l'extrémité du rayon du rouleau, au lieu que la traction moyenne passe par le centre de la corde : si l'on employoit de grosses cordes, il faudroit y avoir égard dans les calculs.

Figure où la corde soutient des poids des deux côtés d'un rouleau ou d'une poulie, comme dans les expériences de la deuxième méthode, si le poids $(P + \Pi)$ entraîne le poids P d'un mouvement insensible uniforme, le côté de la corde qui soutient le poids P prendra la courbure e n g, la même sous le même degré de tension que dans la quinzième Figure du côté $P + \Pi$; la corde se dépliera sans effort, & sera tangente à la poulie. L'on aura donc, à cause du mouvement supposé insensible & uniforme, l'équation $(P + \Pi) RC = P (rC. + rQ)$ d'où $\Pi = \frac{PQr}{RCr}$, quantité double de celle que nous venons de trouver pour la méthode de M. Amontons.

En finissant ce Chapitre, nous préviendrons ceux qui voudroient recommencer les expériences de cette Section, sous des pressions de 1000 & 1200 livres, qu'elles exigent beaucoup d'attention, parce que la mobilité des rouleaux les rend dangereuses dans le moment où l'on charge les cordes : nous devons aussi les avertir de s'assurer toujours, dans les expériences en grand, de la solidité des nœuds. Il ne faut jamais charger les cordes au delà de 80 livres par fil de carret, quoiqu'en général elles puissent soutenir, sans se rompre, de 100 à 120 livres. Après deux mois de travail, les évènemens m'avoient rendu très-circonspect, & je savois perdre plusieurs heures à prendre des précautions pour la sûreté des hommes que j'employois.

CHAPITRE II.

Du frottement des axes.

122. DANS les cabestans, les grues & les poulies destinées à soutenir de grandes pressions, l'on emploie presque toujours des axes de fer qui roulent dans des boîtes de cuivre : dans les petites manœuvres & dans le gréage des vaisseaux, les poulies sont ordinairement de bois de gaïac, portées par des axes de chêne vert ou de buis : l'on commence même, dans nos ports,

à ne plus employer que des axes de chêne vert, qui ſont plus ſûrs & moins caſſans que ceux de buis. Nous allons traiter ici chaque objet ſuivant ſon degré d'utilité dans la pratique. Ainſi nous commencerons par les axes de fer & les boîtes de cuivre; nous paſſerons de là aux poulies de gaïac ſur axe de chêne vert. Nous parcourrons enſuite les frottemens de pluſieurs autres matières qui ſont quelquefois employées dans les mouvemens de rotation.

Etabliſſement pour exécuter les Expériences.

123. Une poulie C (*Fig.* 17, *n.°* 1 & 2.) d'un pied de diamètre bien centrée, eſt ſoutenue, au moyen de ſon axe, ſur deux pièces de bois BB & B′B′ : cette poulie ſe trouve élevée de 10 pieds au deſſus du ſol du hangard où les expériences ont été exécutées : une corde qui paſſe dans la gorge de la poulie, porte, au moyen de deux crochets, des poids P & P′, formés d'un aſſemblage de gueuſes de 50 livres chacune, qui ſont percées à leur extrémité comme au n.° 3 de la même Figure : l'on paſſe une corde dans le trou des gueuſes, & l'on en attache enſemble une quantité ſuffiſante pour former le poids que l'on veut mettre en expérience. Dans notre Figure il y a ſix gueuſes liées enſemble de chaque côté de la poulie; le milieu de l'axe AA′ (*Fig.* 17, n.° 2.) qui porte la poulie, eſt tourné avec ſoin; mais ſes deux extrémités ſont équarries, entrent dans des mortoiſes, & ſe fixent ſolidement aux deux pièces de bois BB, B′B′.

Pour que les expériences ſoient régulières, il faut que l'axe ſoit poſé horizontalement, & la poulie exactement centrée; autrement elle varie dans ſes mouvemens de rotation, & ſe jette à droite & à gauche contre les pièces de bois.

Lorſqu'on veut déterminer le frottement de l'axe, qui ſe trouve dans cette expérience, joint aux forces néceſſaires pour plier la corde, l'on ajoute alternativement de chaque côté un petit poids p (*a*), l'on donne enſuite un mouvement inſenſible, & l'on obſerve en demi-ſecondes le temps que le poids $P + p$ emploie, en tombant de 6 pieds, pour parcourir les trois premiers & les trois derniers pieds de ſa chute.

Dans toutes les expériences qui vont ſuivre, nous chercherons ſeulement à déterminer le frottement des axes dans les machines en mouvement, parce qu'il eſt impoſſible de trouver rien de régulier lorſqu'on veut ébranler le ſyſtème après un temps quelconque de repos : nous en expliquerons les raiſons dans le courant de ce Chapitre.

SECTION PREMIÈRE.

Frottement des axes de fer dans des boîtes de cuivre.

124. L'AXE de fer dont nous nous ſommes ſervis avoit 19 lignes de diamètre; la poulie avoit 144 lignes de diamètre; le jeu de l'axe, dans le trou de la poulie, n'étoit que d'une ligne trois quarts : le corps de la poulie étoit de bois de gaïac; mais elle avoit été garnie à ſon centre d'une boîte de cuivre; le tout peſoit 14 livres.

Frottement des axes de fer dans des boîtes de cuivre ſans enduit.

125. L'on a fixé l'axe de la poulie aux deux pièces de bois BB & B'B' (*Fig.* 17, n.° 2.); l'on a fait enſuite paſſer une corde ſur la poulie : des hommes agiſſant aux deux extrémités de cette corde, comme s'ils ſonnoient une cloche, ont fait tourner avec activité la poulie ſur ſon axe, pour lui donner tout le poli dont elle peut être ſuſceptible : après cette opération

---

(*a*) Dans chaque Expérience, il faut alternativement obſerver, avec une petite charge p, les chutes de chaque côté de la poulie : l'on prend la moyenne entre ces deux obſervations.

absolument nécessaire pour faire disparoître les irrégularités, l'on a commencé les expériences.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

L'on s'est servi, dans cette expérience, d'une ficelle de 3 lignes de circonférence, à laquelle l'on a attaché un poids de 103 livres de chaque côté de la poulie; il a fallu un petit contre-poids *p* de 6 livres, pour produire un mouvement lent & irrégulier.

II.^{eme} EXPÉRIENCE.

L'on s'est servi, dans cette expérience, de la corde, n.° 1, de six fils de carret; elle a été chargée de 200 livres de chaque coté de la poulie; il a fallu:

I.^{er} ESSAI. Pour donner un mouvement lent & irrégulier, il faut ajouter réciproquement de chaque côté 10,5 ℔.

II.^{e} ESSAI. Avec une force de 13 livres & demie, les trois premiers pieds de chute parcourus en $\frac{12''}{2}$, les trois autres en $\frac{6''}{2}$.

III.^{eme} EXPÉRIENCE.

L'on s'est servi de la même corde de six fils de carret; elle a été chargée de 400 livres de chaque côté; il a fallu:

I.^{er} ESSAI. 21 livres pour donner un mouvement lent & continu.

II.^{e} ESSAI. Avec 28 livres, les trois premiers pieds en $\frac{11''}{2}$, les trois autres en $\frac{5''}{2}$.

III.^{e} ESSAI. Avec 39 livres, les trois premiers pieds en $\frac{6''}{2}$, les trois autres en $\frac{3''}{2}$.

Résultat

Résultat de ces trois Expériences.

Calcul du premier Essai.

(*a*) Dans la première expérience, premier essai, les poids étoient soutenus par une ficelle très-flexible; ainsi la roideur de la corde peut être regardée comme nulle : le rapport du diamètre de la poulie à celui de son axe est très-approchant, comme 7 à 1; ainsi le frottement réduit à l'axe sera de 42 ℔, & $\frac{\text{Pression.}}{\text{Frottement.}} = \frac{206 + 14 + 6}{42}$ . . . . 5,4.

Dans la deuxième expérience, premier essai, l'on s'est servi de la corde de six fils de carret, n.° 1 : la force nécessaire, pour la plier sur une poulie de 12 pouces, est, art. 116 & 120, pour une tension de 200 livres, 1,5 livres; ainsi il reste 9 livres pour le frottement, comme la corde a 4 lignes à peu près de diamètre, & que le centre de sa tension peut, dans la pratique, être supposé passer par son milieu, l'on aura 7,2 à 1 pour le rapport du diamètre de la poulie à celui de son axe. Ainsi la force employée pour vaincre le frottement, calculée relativement au rayon de l'axe, sera de 65 livres, d'où l'on tirera : $\frac{\text{Pression.}}{\text{Frottement.}} = \frac{400 + 14 + 10}{65}$ . . . . 6,5.

Dans la troisième expérience, premier essai, la corde est la même que la précédente; il faut donc un poids de 3 livres pour plier la corde, & $\frac{\text{Frottement.}}{\text{Pression.}} = \frac{800 + 14 + 21}{130} =$ . . 6,4.

Calcul du frottement d'après la poulie en mouvement.

L'on remarque d'abord, d'après le deuxieme & troisième essai de chaque expérience, que la vîtesse n'influe pas au moins sensiblement sur le frottement, puisque les trois premiers pieds de chute sont toujours parcourus dans un temps à

(*a*) Il faut, comme on le verra à l'art. 157, évaluer le diamètre de l'axe de la poulie, non pas d'après la grosseur de l'axe, mais d'après celui du trou de la poulie qui est ici $20,\frac{3}{4}$ lignes.

peu près double des trois derniers, ce qui annonce une vîtesse uniformément accélérée, & une force accélératrice constante, d'où il résulte que le frottement est aussi constant; mais pour confirmer cette remarque, calculons nos essais d'après la formule $Q = \frac{2aM}{gT^2}$, dans laquelle Q représente la force constante qui produit l'accélération de la chute; *a* est la chute totale qui est de 6 pieds dans nos expériences; M est la masse totale des poids en mouvement qu'il faut augmenter de 7 livres pour l'énergie du momentum de la poulie qui pese 14 livres, & qui a un pied de diamètre; *g* est la force de la gravité $= \frac{30^{\text{pieds}}}{1^{''2}}$; T est le temps observé pour la chute des 6 pieds: en calculant les essais d'après cette formule, nous aurons:

Deuxième expérience, deuxième essai, Q = 2 livres; ainsi il reste 11 livres & demie pour la résistance due à la roideur de la corde & au frottement, au lieu de 10 livres que nous avions pour une vîtesse insensible dans le premier essai de cette même expérience.

Troisième expérience, deuxième essai, Q = 5,2; la force employée étoit 28 livres; il reste 22,8 livres, au lieu de 21 livres données dans le premier essai.

Troisième expérience, troisième essai, Q = 16,9 livres; la force employée est de 39 livres; il reste 22,1 livres, au lieu de 21 livres données par le premier essai.

126. Il résulte évidemment de ces différens essais, que la vîtesse n'influe que d'une manière insensible dans les frottemens. Si, dans la troisième expérience, nous prenons une moyenne entre les trois essais pour déterminer le poids qui équivaut à la roideur de la corde & au frottement, nous le trouvons de 22 livres, & le rapport de la pression au frottement comme 6,1 à 1.

En nous servant d'une vieille corde très-flexible, & dont nous connoissions la roideur par les procédés dont nous avons déjà fait usage, nous avons également trouvé que le même axe chargé d'une pression de 2000 livres, le frottement étoit encore un peu moindre que le sixième de la pression, en sorte que le rapport de la pression au frottement se trouve moyennement, dans le fer & le cuivre, glissant sans enduit l'un sur l'autre, comme $6\frac{3}{10}$ à 1 : l'on ne trouve d'exception à cette règle, que lorsque la pression de l'axe & des boîtes est au dessous de 200 livres; pour lors la loi du frottement augmente, non seulement dans les mouvemens insensibles, mais encore relativement à l'augmentation des vîtesses. Cette variété paroît ne pouvoir s'attribuer qu'à l'imperfection du poli, & qu'à quelques inégalités élastiques dont les surfaces sont hérissées, qui ne sont pas pliées en entier par des pressions au dessous de 200 livres. Une remarque qui confirme cette idée, c'est que lorsque les axes ont été enduits de quelques matières graisseuses, & que, par un mouvement continu, sous une pression de 5 ou 600 livres, ils ont acquis tout le degré de poli dont ils sont susceptibles, le plus ou moins de pression ne paroît plus influer, au moins sensiblement, sur le rapport de la pression au frottement, qui reste le même sous tous les degrés de vîtesse : il sembleroit que les inégalités flexibles des surfaces une fois couchées & collées l'une contre l'autre, ne peuvent plus se relever, & perdent leur élasticité.

Du frottement des axes de fer dans des chapes de cuivre garnies de différens enduits, avec enduit de suif.

127. Le suif bien pur, sans mélange & sans fibres, est de tous les enduits celui qui réussit le mieux pour adoucir le frottement des machines. Nous en avons frotté notre axe & l'intérieur de notre chape : nous avons fait ensuite tourner notre poulie pendant plusieurs minutes, pour que le suif se répandît uniformément, & qu'il prît le même degré de consistance; l'on a attaché différens poids à la corde de six fils de carret, n.° 1, & l'on observoit une chute de 6 pieds, comme dans l'article qui précède.

IV.^{eme} EXPÉRIENCE.

I.^{er} ESSAI. L'on s'eſt ſervi, dans cette expérience, d'une petite ficelle très-flexible, de 2 lignes de circonférence, & dont la roideur peut être négligée : en chargeant cette ficelle de 100 livres de chaque côté, il a fallu, pour donner un mouvement lent & continu, une force de traction de 2,5 ℔.

II.^{e} ESSAI. Avec un poids de 6 livres, les trois premiers pieds de la chute ſont parcourus en $\frac{7''}{2}$, les trois autres en $\frac{3''}{2}$.

V.^{eme} EXPÉRIENCE.

I.^{er} ESSAI. La corde, n.° 1, de ſix fils de carret, a été chargée de 200 livres de chaque côté; il a fallu, pour donner un mouvement lent & continu, une traction de 6,5 ℔.

II.^{e} ESSAI. Avec une traction de 10 livres, les trois premiers pieds en $\frac{7''}{2}$, les trois autres en $\frac{3''}{2}$.

VI.^{eme} EXPÉRIENCE.

I.^{er} ESSAI. La même corde, n.° 1, chargée de 400 livres, il faut, pour donner un mouvement lent & continu, une traction de 13 ℔.

II.^{e} ESSAI. Avec 18 livres, 3 pieds en $\frac{11''}{2}$, & 3 pieds en $\frac{4''}{2}$.

III.^{e} ESSAI. Avec 24 livres, 3 pieds en $\frac{6''}{2}$, & 3 pieds en $\frac{4''}{2}$.

Réſultat de ces Expériences.

Calcul du premier Eſſai.

Dans la quatrième expérience, premier eſſai, la roideur de la corde eſt nulle; ainſi $\frac{\text{Preſſion.}}{\text{Frottement.}} = \frac{217}{17,5}$ . . . . 12,4.

Dans la cinquième expérience, l'on s'eſt ſervi d'une corde de six fils de carret : ainsi en suivant le procédé de l'art. 125, l'on aura : $\frac{\text{Pression}}{\text{Frottement.}} = \frac{400 + 14 + 6}{36}$ . . . . . $= 11,6$.

Dans la sixième expérience, premier essai, la corde est tendue par 400 livres ; il faut 3 livres pour la plier, il reste 10 livres pour le frottement réduit à l'axe ; l'on aura : $\frac{\text{Pression.}}{\text{Frottement.}} = \frac{800 + 14 + 13}{72}$ . . . . 11,5.

Calcul du deuxième & troisième Essai.

Quatrième expérience, deuxième essai, l'on a $Q = 3,4$ livres ; en suivant le procédé de l'art. 125, la force employée étoit 6 livres ; il reste donc 2,6 livres pour le frottement & la roideur de la corde : dans le premier essai de cette même expérience, l'on avoit 2,5 ℔.

Cinquième expérience, deuxième essai, l'on a $Q = 3,7$ livres ; nous avons employé, pour produire le mouvement, une force de 10 livres ; il reste 6,3 livres : dans le premier essai, l'on avoit eu 6,5 ℔.

Sixième expérience, deuxième essai, l'on a $Q = 5,9$ livres ; nous avons employé, pour produire la chute, une force de 18 livres ; il reste 12,1 livres, au lieu de 13 livres données par le premier essai.

Sixième expérience, troisième essai, l'on a $Q = 13,2$ livres ; nous avons employé une force de 24 livres pour produire la chute, il reste 10,8 livres, au lieu de 13 livres données par le premier essai.

127. Ainsi dans les axes enduits de suif très-pur, le rapport de la pression au frottement est comme 11 & demie à 1 pour les petites vîtesses ; mais nous avons trouvé (art. 92.) que lorsqu'une lame de cuivre glissoit sur une lame de fer enduite de suif, le frottement étoit à peu près le onzième de la pression ; ainsi ces deux genres d'expérience se correspondent, & se servent de preuves réciproques.

Remarquons cependant que, dans le mouvement des axes, nous avons toujours trouvé le frottement moindre que dans celui du traîneau. Il semble en effet que, dans le mouvement de rotation, les parties en contact peuvent se désengrainer bien plus facilement que lorsque les surfaces glissent l'une sur l'autre. Voici encore une remarque qui distingue ces deux espèces de frottemens. Lorsque l'on fait passer plusieurs fois les lames de cuivre sur les lames de fer sans renouveler l'enduit, le suif s'use & le frottement augmente : l'on éprouve cet effet beaucoup moins sensiblement dans le frottement des axes. Les quatre dernières expériences ont été faites sans renouveler l'enduit, & répétées quatre ou cinq fois chacune; le frottement à la dernière n'avoit pas paru augmenter sensiblement : d'ailleurs, dans le frottement des surfaces qui glissent l'une sur l'autre, lorsque ces surfaces ont été réduites aux plus petites dimensions possibles, comme à quatre points de contact avec les têtes de clous *, le suif n'empêchant qu'imparfaitement le contact des surfaces, diminue moins le frottement que lorsque les surfaces ont de l'étendue. Mais, dans le frottement des axes, quoique le contact se fasse par la tangente des surfaces, le frottement n'a jamais été trouvé plus grand que la onzième partie de la pression, au lieu qu'avec les quatre têtes de clous glissant sur les lames de fer enduites de suif, il étoit à peu près le neuvième de la pression.

* Art. 93 & 94.

Le calcul des essais où les poids ont acquis de la vîtesse dans leur chute, nous apprend que le frottement diminue un peu à mesure que la vîtesse augmente. Nous avions déjà fait cette remarque dans les expériences de l'art. 90; mais comme toutes les machines de rotations employées dans la Marine sont ordinairement manœuvrées à bras d'hommes, & n'élevent des fardeaux qu'avec de petites vîtesses, la diminution du frottement due à l'augmentation de vîtesse ne doit presque jamais influer dans la pratique. Il ne restera à ce sujet aucun doute, si l'on remarque que, dans le dernier essai, une vîtesse moyenne de 6 pieds en 5 secondes n'a paru diminuer le frottement que de la cinquième partie de ce qu'il a été trouvé avec une vîtesse insensible : d'ailleurs cette diminution du frottement, en augmentant les vîtesses, n'a lieu qu'avec des enduits de suif; elle n'est pas sensible avec les enduits mous, tels que le vieux oing & l'huile, comme nous allons le voir tout à l'heure.

Frottement des axes de fer dans des chapes de cuivre, avec enduit de vieux oing.

128. L'axe de fer & la chape de cuivre enduits de suif dans l'expérience qui précède, ont été essuyés avec beaucoup de soin; l'on y a substitué un enduit de vieux oing : dans les trois premières expériences, les poids étoient soutenus par une ficelle de 2 lignes de circonférence; dans les suivantes, par notre corde, n.° 1, de six fils de carret.

VII.eme EXPÉRIENCE.

I.er ESSAI. Chaque côté de la ficelle, chargé de 50 livres, il a fallu, pour donner un mouvement lent & continu, augmenter d'un côté la charge de 2,5 ℔.

VIII.eme EXPÉRIENCE.

I.er ESSAI. Chaque côté de la même ficelle, chargé de 100 livres, il a fallu 3,7 ℔.

IX.eme EXPÉRIENCE.

I.er ESSAI. Chaque côté de la même ficelle, chargé de 150 livres, il a fallu 5,7 ℔.

X.eme EXPÉRIENCE.

I.er ESSAI. Avec la corde, n.° 1, de six fils de carret, chargée de 100 livres de chaque côté, il a fallu, pour donner un mouvement lent, incertain & continu, une traction de 4,3 ℔.

II.e ESSAI. Avec une traction de 9 livres, les trois premiers pieds de la chute ont été parcourus en $\frac{6'}{2}$, les trois autres en $\frac{3''\frac{1}{2}}{2}$.

XI.eme EXPÉRIENCE.

I.er ESSAI. La corde de six fils de carret, chargée de 200 livres de chaque côté, il faut, pour produire un mouvement incertain & continu, une traction de 8,5 ℔.

II.e ESSAI. Avec une traction de 14 livres, 3 pieds en $\frac{8''}{2}$, 3 pieds en $\frac{4''}{2}$.

III.e ESSAI. Avec une traction de 20 livres, les 6 pieds en $\frac{7''}{2}$.

XII.eme EXPÉRIENCE.

I.er ESSAI. La corde de six fils de carret, chargée de 400 livres de chaque côté, l'on produit un mouvement incertain, avec une traction de 17 ℔.

II.e ESSAI. Avec une traction de 22 livres, 3 pieds en $\frac{13''}{2}$, 3 pieds en $\frac{5''}{2}$.

III.e ESSAI. Avec une traction de 28 livres, 3 pieds en $\frac{8''}{2}$, 3 pieds en $\frac{3''}{2}$.

Calcul du premier essai de chaque Expérience.

Dans la septième expérience & dans les deux suivantes, la force employée à plier la ficelle peut être regardée comme nulle; ainsi en réduisant la force qui représente le frottement, d'après la différence des diamètres du rayon & de l'axe, nous aurons:

VII.e EXPÉRIENCE.	I.er ESSAI.	$\frac{\text{Pression.}}{\text{Frottement.}}$	$=$	$\frac{100+14+3}{17,5}$	...... 6,7.
VIII.e EXPÉRIENCE.	I.er ESSAI.	....	$=$	$\frac{200+14+4}{26}$	...... 8,3.
IX.e EXPÉRIENCE.	I.er ESSAI.	....	$=$	$\frac{300+14+6}{40}$	...... 8,0.

Dans la dixième expérience, premier essai, la tension de la corde

corde de ſix fils de carret eſt de 100 livres ; il faut, par l'art. 116, une force de $\frac{7}{10}$ livres pour la plier ſous cette charge autour d'une poulie d'un pied de diamètre : nous avons trouvé 4,3 livres pour la force totale, il reſte 3,6 livres pour le frottement : dans la huitième expérience, avec la ficelle, ſous le même degré de preſſion, nous avons eu 3,5 livres. Si nous réduiſons tous les frottemens à l'axe de la poulie, le rapport du diamètre de la poulie à celui de ſon axe, étant ici, à cauſe de la groſſeur de la corde, comme 7,2 à 1, nous aurons, en retranchant les forces néceſſaires, pour plier la corde de ſix fils de carret :

X.e Expérience.	I.er Essai.	$\frac{\text{Preſſion.}}{\text{Frottement.}}$	$=$	$\frac{200+14+4}{26}$	...... 8,3.
XI.e Expérience.	I.er Essai.	....	$=$	$\frac{400+14+8}{50}$	...... 8,4.
XII.e Expérience.	I.er Essai.	....	$=$	$\frac{800+14+17}{101}$	...... 8,2.

Calcul du frottement ſuivant le degré de vîteſſe.

Nous n'avons pas cherché à déterminer l'influence des vîteſſes, dans les expériences où les poids étoient ſoutenus par des ficelles, parce que, dans les chutes accélérées, les poids éprouvent des chocs qui auroient pu caſſer les ficelles & occaſionner des accidens ; mais en ſe ſervant de la corde de ſix fils de carret, nous avons eu :

Dixième expérience, deuxième eſſai. La force accélératrice* Q = 4,3 livres qu'il faut retrancher de 9 livres ; ainſi il reſte 4,7 livres pour la réſiſtance due à la roideur de la corde & au frottement de l'axe : nous avons trouvé, dans le premier eſſai, 4,3 livres ; ainſi la vîteſſe n'a pas influé, au moins ſenſiblement, dans le frottement.

* Art. 125.

Onzième expérience, deuxième eſſai. Q = 4,7 livres ; dans l'expérience, la force employée étoit de 14 livres ; il reſte

9,3 livres, au lieu de 8,5 livres trouvées dans le premier essai.

Onzième expérience, troisième essai. Q = 14,2 livres. La force employée étoit de 20 livres; ainsi il reste 7,8 livres, au lieu de 8,5 livres données par le premier essai.

Douzième expérience, deuxième essai. Q = 4,1 livres. La traction employée est de 22 livres; il reste 17,9, au lieu de 17 livres données, dans cette expérience, par le premier essai.

Douzième expérience, troisième essai. Q = 11,1 livres. La traction employée étoit de 28 livres; ainsi il reste 16,9 livres pour le frottement & la roideur de la corde, au lieu de 17 livres trouvées par le premier essai : ainsi il paroît que l'on peut, dans la pratique, supposer, sans erreur sensible, que les vîtesses n'influent point sur le frottement.

129. Il résulte donc de ces expériences, que le frottement des axes de fer, dans des chapes de cuivre, est beaucoup moins adouci par le vieux oing que par le suif; que le rapport de la pression au frottement est une quantité constante, non seulement sous tous les degrés de pression, mais encore sous tous les degrés de vîtesse : car, dans le calcul du deuxième & troisième essai de chacune de nos expériences, nous n'avons jamais trouvé que le frottement diminuât sensiblement, quelque rapides que fussent les chutes : il semble donc que la diminution du frottement trouvée avec les enduits de suif, à mesure que les vîtesses augmentent, doit être attribué à la dureté du suif qui, interposé entre les points de contact, oppose une telle résistance à la pression, qu'il faut un certain temps de repos pour que les surfaces se touchent immédiatement, & qu'elles se touchent plus ou moins suivant le degré de vîtesse.

Si cet effet n'a pas lieu avec le vieux oing, c'est que, par sa fluidité, il n'oppose qu'une foible résistance à la compression, & que le contact est le même avec tous les degrés de vîtesse :

voici le résultat de plusieurs expériences qui confirment l'opinion que nous avançons ici.

Du frottement des axes de fer dans des boîtes de cuivre enduites d'huile d'olive, ou seulement onctueuses, & telles à peu près qu'elles se trouvent dans l'usage des machines qui n'ont pas été enduites depuis long-temps.

130. En essuyant le vieux oing dont les surfaces étoient enduites dans les expériences qui précèdent, elles ont resté onctueuses, parce que le suif avoit pénétré dans les pores du métal; & l'on a trouvé par l'expérience, que depuis une pression de 200 livres jusqu'à celle de 1000 & 1200 livres, le rapport de la pression au frottement a été le même que dans l'article qui précède, c'est-à-dire, comme 8 à 1.

131. Lorsque nous avons mis un enduit d'huile d'olive sur notre surface onctueuse, le rapport de la pression au frottement a été encore trouvé comme 8 à 1, & même un peu plus petit, mais jamais au dessous de 7 & demie à 1 : ces résultats se trouvent conformes à ceux de l'article 94.

132. Dans l'usage ordinaire des machines, les axes de fer & les boîtes de cuivre ont été enduites anciennement de quelque matière graisseuse que l'on ne renouvelle que de loin en loin. Il entroit dans le plan de notre travail, de faire des recherches sur cette espèce de frottement : nous nous sommes servis d'un axe de fer qui portoit une poulie de cuivre, & qui servoit depuis trois mois à manœuvrer des poids de plus de cinq milliers, sans que l'enduit de suif dont il avoit été garni eût été renouvelé: l'axe ainsi que le trou de la poulie étoient très-doux au toucher, sans cependant laisser de graisse sur les doigts : cette poulie soumise à l'expérience, nous a donné, pour le rapport de la pression au frottement, 7 & demie à 1 : d'autres axes du même genre & dans les mêmes circonstances, ont quelquefois donné ce rapport un peu plus petit; mais presque jamais au dessous de 7 à 1, ni au dessus de 8 à 1 : ainsi, dans les usages ordinaires, relatifs à la

Marine, où toutes les manœuvres étant exposées à l'air, à la pluie & au soleil, les axes de fer à boîte de cuivre conservent rarement long-temps les suifs & les autres enduits dont ils ont été garnis au commencement de la campagne : l'on doit calculer le frottement comme $\frac{1}{7\frac{1}{2}}$ de la pression.

SECTION TROISIÈME.

Résultat de plusieurs Expériences pour connoître le frottement des différentes espèces de bois qui entrent ordinairement dans les machines de rotation.

133. POUR rendre les frottemens plus sensibles, nous nous sommes servis, dans toutes les expériences qui vont suivre, de poulies de 12 pouces de diamètre, montées sur des axes de 3 pouces; en sorte que le rapport du diamètre de la poulie au diamèttre de son axe étoit comme 4 à 1 : quelquefois l'on fixoit les axes à la poulie, & on les faisoit tourner dans des boîtes attachées solidement aux pièces de bois BB de la dix-septième Figure; l'on trouvoit le même frottement que lorsque la poulie étoit mobile autour de son axe.

Comme nous avons déjà remarqué que le frottement des bois qui sortent de la main de l'Ouvrier varie pendant quelque temps, & diminue sensiblement à mesure que, par le mouvement de rotation, sous une pression considérable, les parties des surfaces se polissent & se condensent : pour être assurés d'avoir ces frottemens à peu près au même degré où ils se trouvent dans le mouvement ordinaire des machines, nous faisions enduire les axes de suif avant de commencer nos expériences; ensuite, au moyen d'une corde posée dans la gorge de la poulie, & chargée de 1000 ou 1200 livres, nous produisions à force de bras un mouvement de rotation pendant une heure ou deux : dans le cours de cette opération, le suif étoit rafraîchi deux ou trois fois.

Axe de chêne vert, boîte de gaïac.

134. Lorſque l'axe de chêne vert & la poulie de gaïac ont été enduits de ſuif, l'on a trouvé le rapport de la preſſion au frottement moyennement, comme 26 à 1.

En eſſuyant l'enduit, la ſurface reſtant ſeulement onctueuſe, le rapport du frottement à la preſſion a été trouvé comme 17 à 1.

Axe de chêne vert, boîte d'orme.

135. L'axe de chêne vert, dans des boîtes d'orme, eſt, dans tous nos eſſais, celui qui a conſtamment moins de frottement

Enduits de ſuif, le rapport de la preſſion au frottement a été trouvé comme 33 à 1.

En eſſuyant les boîtes & l'axe, les ſurfaces reſtant ſeulement onctueuſes, le frottement a été réduit au vingtième de la preſſion.

Axe de buis, poulie de gaïac.

136. Une poulie de bois de gaïac, tournant ſur un axe de buis enduit de ſuif, a donné le rapport de la preſſion au frottement comme 23 à 1.

L'axe & la boîte eſſuyés & reſtant onctueux, le rapport de la preſſion au frottement a été trouvé comme 14 à 1.

Axe de buis, boîte d'orme.

137. Un axe de buis enduit de ſuif, & tournant dans des boîtes d'orme, a donné le rapport de la preſſion au frottement comme 29 à 1.

En eſſuyant l'axe & la boîte de la poulie, ce rapport a été trouvé comme 20 à 1.

Axe de fer, boîte de bois.

138. Les axes de fer, dans leurs mouvemens de rotation

ſur le bois, ont donné des effets analogues à ceux que nous avons apperçus en faiſant mouvoir nos traîneaux armés de règles de fer ou de cuivre ſur le madrier dormant : lorſque les poulies ſortent de la main de l'Ouvrier, & qu'elles n'ont encore reçu aucun enduit, l'on produit un mouvement uniforme très-lent, avec des axes de fer tournant dans des boîtes de gaïac : une traction qui répondoit au vingtième de la preſſion, a produit un mouvement uniforme d'un pouce en 40″, & qui a été continué ſur 2 pieds de chute : l'on a toujours eu des mouvemens uniformes aſſez lents, tant que la force de traction a été au deſſous du quinzième de la preſſion ; mais lorſqu'elle a été le douzième de la preſſion, les 6 pieds de chute ont été parcourus en moins de 5 ſecondes.

Cette augmentation de frottement, à meſure que les vîteſſes augmentent, n'a abſolument lieu que lorſque les chapes de bois ſortent de la main de l'Ouvrier : car en faiſant tourner une poulie de bois de gaïac pendant une heure ſur un axe de fer, avec une preſſion de 1000 livres, ſans employer aucun enduit, la vîteſſe ceſſoit peu à peu d'influer ſur le frottement qui pour lors étoit le vingtième de la preſſion, ſous tous les degrés de vîteſſe ; même rapport que nous avions trouvé dans les vîteſſes inſenſibles, avant que les fibres flexibles dont la ſurface du bois eſt hériſſée, euſſent perdu leur élaſticité & leur roideur par un long mouvement de rotation.

En enduiſant de ſuif l'axe de fer, & en le faiſant tourner quelque temps avant de commencer les expériences, l'on trouve encore que le rapport de la preſſion au frottement eſt comme 20 à 1 : l'on trouve un rapport plus grand, mais variable entre la preſſion & le frottement dans l'inſtant où l'enduit vient d'être rafraîchi : il paroît même, dans ce dernier cas, que l'augmentation de vîteſſe diminue un peu le frottement, mais pas aſſez ſenſiblement pour qu'il faille y avoir égard dans la pratique.

Les parties élaſtiques dont les ſurfaces du bois poli à neuf ſont hériſſées, perdent, dans moins de 3 minutes, toute leur élaſticité, lorſqu'au lieu de faire frotter les axes à ſec dans les boîtes, on les garnit de suif, & que l'on produit un mouvement de rotation sous des pressions de sept à huit cens livres.

Ces observations s'accordent très-bien avec la théorie du frottement, que nous avons cherché à expliquer dans le troisième Chapitre du premier Livre.

REMARQUES.

139. Lorsque les axes de bois, tournant dans des chapes de bois, sont seulement onctueux, & que le suif a été essuyé, l'augmentation de vîtesse ne paroît pas diminuer au moins sensiblement les frottemens. Cet effet n'a eu lieu que dans le moment où le suif venoit d'être rafraîchi; mais beaucoup moins que nous ne l'avions déjà observé avec des axes de fer dans des chapes de cuivre.

140. Le rapport de 17 à 1 que nous avons trouvé; celui de la pression au frottement, pour axe de chêne vert, dans des boîtes de gaïac, après avoir essuyé l'enduit, est un peu plus grand que celui des poulies de la même nature, employées à gréer les vaisseaux, & qui servent depuis plusieurs mois sans qu'on ait rafraîchi les enduits. Plusieurs axes & poulies de ce genre qui venoient de faire une campagne de six mois, étant doux, luisans, polis au toucher, sans cependant graisser les doigts, ont donné le rapport de la pression au frottement entre les nombres 16 & 13 à 1, & la vîtesse a toujours très-peu influé sur les frottemens.

141. Lorsque des axes secs ou enduits de toute espèce de bois sont employés à soutenir des poulies, le premier effort qu'il faut employer pour vaincre le frottement, est une quantité très-incertaine & très-irrégulière; en voici la raison: comme il faut toujours conserver un peu de jeu entre l'axe & la boîte, si nous supposons (*Fig.* 18.) que l'axe, au commencement du mouvement, est placé de manière que le point du contact réponde à une tangente horizontale, l'axe se détachera du fond de la boîte sans aucun effort, & avec la même facilité qu'un cylindre qui roule sur un plan horizontal; il s'élevera

ensuite dans la boîte jusqu'à ce que le point de contact soit en g, dont la tangente g f est telle relativement à la verticale C f, que la normale C g : g f, comme la pression est au frottement; en sorte que l'effort nécessaire pour ébranler, après un certain temps de repos, un axe renfermé dans une boîte, dépend du jeu, de la position de l'axe & de la compressibilité du bois.

142. Nous ne pouvons trop répéter que, quoique les bois qui sortent de la main de l'Ouvrier nous paroissent bien unis à l'œil & au toucher, il s'en faut de beaucoup qu'ils aient acquis le degré de poli qu'ils prennent sous de grandes pressions dans un mouvement de rotation de plusieurs heures : un axe de chêne vert, de 36 lignes de diamètre, tourné avec soin, & posé sur des boîtes de gaïac non enduites, a donné, sous une pression de 400 livres, pendant les dix premières minutes de son mouvement, le sixième à peu près de sa pression pour son frottement : après 30 minutes de mouvement, le frottement étoit à peu près la dixième de la pression : l'on a fait encore une autre remarque relative à la vîtesse, c'est que, pendant les premières minutes, le frottement paroissoit augmenter avec les vîtesses; mais dès que, par un mouvement continu de plusieurs heures, l'axe a eu pris tout le degré de luisant & de poli dont il peut être susceptible, le frottement paroît plutôt diminuer qu'augmenter, à mesure que les vîtesses augmentent.

SECTION QUATRIÈME.

Expériences pour déterminer la résistance due à la roideur des cordes dans les machines en mouvement.

143. DANS les expériences du premier Chapitre de ce Livre, nous avons seulement déterminé les forces nécessaires pour plier les cordes autour d'un rouleau, lorsque le mouvement du rouleau est insensible ; il se pourroit qu'avec une vîtesse finie, l'effet qui résulte de la roideur des cordes fût augmenté

ou

ou diminué; c'eſt ce que nous allons chercher ici par l'expérience.

Nous nous ſommes ſervis, comme à l'art. 127, d'une poulie à boîte de cuivre & à axe de fer, que nous avons enduite de ſuif : le diamètre de la poulie étoit, comme dans cet article, de 144 lignes, & celui de l'axe de 20 lignes & demie; mais au lieu d'employer, comme à l'art. 127, la corde, n.° 1, de ſix fils de carret, nous nous ſommes ſervis de celle de trente fils, n.° 3, dont nous connoiſſions la roideur dans les vîteſſes inſenſibles, par les différentes expériences qui précèdent.

Première Expérience.

I.er Essai. Chaque côté de la corde étant chargé de 100 livres, il a fallu, pour produire un mouvement lent & continu, une traction de 7,5 ℔.

II.e Essai. Avec une force de 12 livres, les trois premiers pieds ont été parcourus en $\frac{6''}{2}$, les trois autres en $\frac{3''}{2}$.

III.e Essai. Avec 15 livres de traction, trois pieds en $\frac{4''}{2}$, trois pieds en $\frac{3''}{2}$.

II.eme Expérience.

I.er Essai. Chaque côté chargé de 200 livres, il a fallu, pour donner un mouvement lent & continu, une traction de 11 ℔.

II. Essai. Avec 15 livres de traction, trois pieds en $\frac{12''}{2}$, trois pieds en $\frac{6''}{2}$.

III.e Essai. Avec 19 livres de traction, trois pieds en $\frac{7''}{2}$, trois pieds en $\frac{3''}{2}$.

III.eme Expérience.

I.er Essai. Chaque côté chargé de 400 livres, il faut, pour donner un mouvement continu, 20,5 ℔.

II.e Essai. Avec 24 livres, trois pieds en $\frac{12''}{2}$, trois pieds en $\frac{6''}{2}$.

III.e Essai. Avec 31 livres, trois pieds en $\frac{6''}{2}$, trois pieds en $\frac{4''}{2}$.

IV.eme Exprience.

I.er Essai. Chaque côté chargé de 600 livres, il faut, pour donner un mouvement incertain & continu, 31,5 ℔.

II.e Essai. Avec 37 livres, trois pieds en $\frac{12''}{2}$, trois pieds en $\frac{7''}{2}$.

Résultat de ces Expériences.

144. Il faut d'abord remarquer, avant de chercher à calculer nos expériences, que la corde de trente fils de carret n'a été employée ici qu'à la fin de notre travail, & que, depuis trois mois, elle servoit à toutes les manœuvres de nos opérations : ainsi elle étoit dans le même état où nous l'avons trouvée dans les expériences de l'art. 120; mais nous avons vu que pour lors, sous une tension de 500 livres, il falloit une force de 14,4 livres pour la plier autour d'un rouleau de 12 pouces; que cette force étoit composée de deux parties, l'une constante, qui a été trouvée, art. 116, une livre $\frac{4}{10}$, mais qui doit être réduite ici à quelque chose de moins; nous continuerons cependant à l'évaluer sur le pied de 1,4 livres, parce que la différence ne peut pas influer sensiblement dans les résultats : l'autre partie est proportionnelle aux forces de tension, & se trouve ici de 13 livres pour 500 livres, ou de 2,6 livres par quintal.

Calcul du premier essai de chaque Expérience.

145. L'axe étant enduit de suif, le frottement doit être ici, comme il a été trouvé à l'article 127, le $11\frac{1}{2}$ de la pression : le diamètre de la poulie est augmenté de chaque côté de la moitié de l'épaisseur de la corde qui a 28 lignes de tour : le diamètre de la poulie est au diamètre de son axe, comme 7,5 à 1 : ainsi les poids qu'il faut attacher à la circonférence des

poulies pour vaincre les frottemens, sont la 7,5.×11,5 ou la quatre-vingt-sixième partie de la pression. Ainsi nous aurons :

Première expérience, premier essai. La pression de l'axe est de 221 livres : ainsi le poids qu'il faut attacher à la poulie pour vaincre le frottement est de 2,6 livres : celui que nous avons employé dans cet essai, est de 7,5 livres ; il reste donc 4,9 livres pour la roideur de la corde : cette roideur calculée d'après les données de l'article qui précède, donne ici, pour la tension qui est de 100 livres, 4 livres, au lieu de 4,9 livres.

Deuxième expérience, premier essai. La pression de l'axe est de 425 livres ; le frottement doit donc être de 4,9 livres : nous avons employé 11 livres pour donner un mouvement continu ; il reste 6,1 livres pour la roideur de la corde, qui, calculée d'après les données de l'article qui précède, seroit de 6,6 livres.

Troisième expérience, premier essai. La pression de l'axe est de 834 livres ; divisé par 86 livres, l'on a 9,7 livres pour le frottement : nous avons employé 20,5 livres pour donner un mouvement continu ; il reste 10,8 livres pour la roideur de la corde : nous la trouvons par l'article précédent, de 11,8 livres.

Quatrième expérience, premier essai. La pression de l'axe est de 1245 livres ; le frottement est donc 14,5 livres : nous avons employé 31,5 livres pour donner un mouvement continu ; il reste 17 livres pour la roideur de la corde, qui, calculée d'après l'article qui précède, est de 17 livres.

Calcul des Essais pour la corde en mouvement.

Première expérience, deuxième essai. La force accélératrice Q calculée, comme à l'article 125, donne Q = 4,4 livres : la force de traction employée dans cet essai, est de 12 livres ; il reste 7,6 livres pour le frottement de l'axe & la roideur de la corde, que nous trouvons 7,5 livres dans le premier essai.

Première expérience, troisième essai. Q = 7,4 : la force employée eſt de 15 livres ; il reſte encore 7,6 livres, comme dans le deuxième eſſai : ainſi, dans cette expérience, la vîteſſe n'a point influé ſur la roideur des cordes.

Deuxième expérience, deuxième eſſai. Q = 2,1 livres : la force employée, dans cet eſſai, eſt de 15 livres ; il reſte 12,9 livres, au lieu de 11 livres données par le premier eſſai.

Deuxième expérience, troiſième eſſai. Q = 6,8 livres : la force employée eſt de 19 livres ; il reſte 12,2 livres, au lieu de 11 livres données par le premier eſſai.

Troiſième expérience, deuxième eſſai. Q = 4,1 livres : la force employée, dans cet eſſai, eſt de 24 livres ; il reſte 19,9 livres, au lieu de 20,5 livres données par le premier eſſai.

Troiſième expérience, troiſième eſſai. Q = 13,4 livres : la force employée eſt ici de 31 livres ; il reſte 17,6 livres, au lieu de 20,5 livres données au premier eſſai.

Quatrième expérience, deuxième eſſai. Q = 5,5 livres : la force de traction employée dans cette expérience, eſt de 37 livres ; il reſte 31,5 livres, comme dans le premier eſſai.

Il ſuit du calcul de tous ces eſſais, que la force qui ſe perd dans les manœuvres des machines, à vaincre la roideur des cordages, paroît indépendante de la rapidité des mouvemens ; & que les vîteſſes, plus ou moins grandes de la corde & du rouleau, n'entrent dans le calcul des machines que pour des quantités qui peuvent être négligées dans la pratique, ſur-tout dans les machines en uſage dans la Marine, où des poids de pluſieurs milliers ne ſont jamais élevés à force de bras qu'avec des degrés de vîteſſe très-lents : voici encore quelques remarques qui confirmeront les réſultats donnés par les calculs qui précèdent : l'on voit d'abord, dans tous les eſſais, que les trois derniers pieds de la chute ont toujours été parcourus dans un temps qui n'eſt que la moitié de celui où les trois premiers pieds ont été parcourus, ce qui annonce que la force accélératrice étoit à peu près constante, & conséquemment que le plus ou moins de vîtesse ne l'augmentoit ni ne la diminuoit pas sensiblement.

Si d'ailleurs vous augmentez, sous tous les degrés de tension, la puissance capable de vaincre le frottement & la roideur du cordage seulement d'un dixième, quelque vîtesse primitive que vous imprimiez ensuite au systême, il continuera à se mouvoir en s'accélérant, ou au moins sans être retardé; ce qui sûrement n'auroit pas lieu, si l'augmentation de vîtesse augmentoit la résistance due à la roideur des cordes d'une manière sensible. Pour être plus sûr des conclusions que l'on peut tirer de cette expérience, il faut la répéter avec des poulies de gaïac sur des axes de chêne vert très-fin & seulement onctueux : le frottement étant moindre que pour les axes de fer à chape de cuivre, produira de moindre erreur dans l'estimation des roideurs des cordes : d'ailleurs avec des axes seulement onctueux, il paroît que la vîtesse n'influe point sur les frottemens; au lieu qu'avec des axes enduits de suif, les grandes vîtesses les diminuent un peu.

Cependant il faut avouer qu'il n'est pas exactement vrai que l'augmentation de vîtesse n'augmente pas les résistances dues à la roideur des cordages : cette augmentation paroît sur-tout sensible lorsque les cordes ne sont tendues que par des forces au dessous de 100 livres. L'on a estimé, par beaucoup d'essais, qu'en pareil cas une vîtesse de 8 pouces par seconde, pouvoit augmenter d'un peu plus d'une livre les résistances dues à la roideur de notre corde de trente fils de carret; mais cette augmentation de résistance paroît être une quantité constante pour le même degré de vîtesse, quelle que soit la tension; en sorte qu'elle cesse d'être sensible sous les grandes tensions, & qu'il n'y a guère de circonstance où l'on ne puisse la négliger dans la pratique : cette augmentation relative à la vîtesse, paroît d'ailleurs beaucoup plus grande dans les cordes neuves que dans les vieilles, dans les cordes goudronnées que dans les cordes blanches.

Résultat général.

146. Il résulte de toutes les expériences détaillées jusqu'ici, que, relativement à la pratique dans toutes les machines de rotation, le rapport de la pression au frottement peut toujours être supposé constant; & que la vîtesse y influe trop peu, pour qu'on doive y avoir égard; que la résistance qu'il faut vaincre pour plier une corde sur un rouleau, est représenté par une formule composée de deux termes *: le premier est une quantité constante, indépendante de la tension & de la forme $\frac{n r^{\mu}}{R}$, où n est une quantité constante que l'expérience détermine; r^{μ} est une puissance du diamètre de la corde; & R le diamètre du rouleau. Le second terme, $\frac{n' r^{\mu} T}{R}$, où n' est une quantité constante; r^{μ}, à peu près la même puissance du diamètre de la corde que dans le premier terme : T est la tension de la corde; ainsi l'on a, pour la formule qui donne la roideur de la corde $\frac{r^{\mu}}{R}(n + n' T)$; la puissance μ, comme nous l'avons déjà dit plus haut, est une quantité qui varie suivant la flexibilité de la corde : dans les cordes neuves & dans les cordes goudronnées, composées de cinq ou six fils de carret & au dessus, nous trouvons $\mu = 2$; dans les cordes plus qu'à demi-usées $\mu = \frac{3}{2}$.

* Voy. art. 109 & suivant.

CHAPITRE III.

Théorie de la roideur des cordes : application des expériences qui précèdent au calcul des machines.

SECTION PREMIÈRE.

De la roideur des cordes.

147. Les cordes sont formées de plusieurs torons ; chaque toron de plusieurs fils de carret ; par la double torsion du fil de carret, pour former le toron, & du toron, dans le sens contraire, pour former la corde, le fil de carret, lorsque la corde est achevée, se trouve réduit à peu près aux deux tiers de sa longueur. Je n'entrerai ici dans aucun détail sur la fabrique des cordes, parce que je ne puis rien ajouter à un excellent Ouvrage de M. Duhamel, sur la Corderie, où l'on trouve, avec tout ce qui se pratique dans nos Corderies, des vues neuves & utiles sur les moyens d'augmenter la force, la flexibilité des cordes, & de perfectionner cet Art.

148. Une corde ARBR′A′ (*Fig.* 19.) étant placée sur une poulie, & chargée d'un poids à chacune de ses extrémités, si l'on suppose que ce soit le poids P′ qui entraîne le poids P, la corde opposant, par sa roideur, une résistance aux forces qui la plie, prendra à peu près la forme qu'elle a dans la Figure : si, par le centre de gravité de chaque poids, l'on fait passer une verticale P f, P′ f′ qui rencontre le diamètre horizontal R R′ de la poulie en f & en f′, le poids P qui monte agira avec le bras de levier C f, & le poids P′ qui descend avec le bras de levier C f′ ; en sorte que, dans le cas où le poids P′ commence seulement à entraîner le poids P, l'on aura, dans le cas

d'équilibre, $P\ (C\,R + R\,f) = P'\,(C\,R' - R'\,f')$, d'où $(P' - P)\,C\,R = P\,R\,f + P'\,R'\,f'$, lorſqu'une fois les poids ſeront en mouvement, la quantité $P' - P$ qui ſera donnée par cette formule ſera exacte, ſi la corde n'a aucune élaſticité; car ſi la corde étoit parfaitement élaſtique, à meſure que la partie R A de la corde ſe plieroit ſur la poulie, & que la partie de la corde B R′ ſe déplieroit, la quantité de reſſorts tendus du côté où le poids ſe lève, ſeroit la même que celle qui ſe détendroit du côté du poids qui deſcend : ainſi, ſi la corde étoit parfaitement élaſtique, c'eſt-à-dire, ſi tous les élémens tendoient à ſe rétablir avec la même meſure d'action qu'il faut employer pour les plier, la roideur de la corde n'auroit plus aucune influence dans le mouvement du ſyſtême ; en ſorte que, ſi les deux poids P & P′ étoient égaux, & que l'on imprimât un mouvement primitif, la hauteur dont un des poids P s'éleveroit, étant égale à celle dont l'autre poids P′ deſcendroit, la force vive ſeroit conſtante, comme elle l'eſt dans tout aſſemblage de corps liés par des reſſorts ou par des leviers flexibles & élaſtiques.

Mais cela n'arrive pas ainſi, parce que les cordes n'ont qu'une élaſticité très-imparfaite; & s'il faut employer une certaine force pour les plier, elles reſtent enſuite dans la ſituation où cette force les a miſes : veut-on les redreſſer, il faut une nouvelle action dans le ſens contraire : cette ſeconde force néceſſaire, pour remettre la corde dans ſon premier état, eſt en général beaucoup moindre que celle qu'il a fallu pour la plier; elle augmente un peu, ſuivant que le temps, depuis lequel la corde eſt pliée, a été plus long; mais quand même nous la ſuppoſerions nulle, ce qui, dans le mouvement des poulies, approche peut-être aſſez de la vérité, toujours eſt-il certain que, puiſqu'il n'y a aucune réaction, la force vive employée à plier la corde, eſt perdue pour l'agent qui fait monter le poids : ainſi cette force ſera déterminée par $P' - P = \frac{P\,R\,f + P'\,R'\,f'}{C\,R}$, & dans le cas de $R'\,f' = 0$ par $P' - P = \frac{P\,R\,f}{C\,R}$: par nos expériences, nous trouvons $P' - P$ dans les groſſes cordes neuves, proportionnel au carré des diamètres

diamètres de la corde : dans les cordes demi-uſées, nous le trouvons proportionnel à la puiſſance $\frac{3}{2}$ du diamètre; & dans les cordes très-petites & très-flexibles, MM. Amontons & Déſaguilliers l'ont trouvé proportionnel au ſimple diamètre.

149. Lorſque les poids ſont ſoutenus & manœuvrés ſur un tambour ou ſur une poulie par des chaînes, au lieu de l'être par des cordes, le frottement des chaînons qui ſe plient pour envelopper la poulie, produit une réſiſtance analogue à la roideur des cordes. Dans la Fig. 20, nous ſuppoſons la chaîne compoſée d'une très-grande quantité de chaînons : chaque chaînon eſt lié au chaînon voiſin, au moyen d'un axe : le n.° 2 de la vingtième Figure repréſente un chaînon vu de champ.

Si l'on ſuppoſe que ce ſoit le poids P′ qui entraîne le poids P, la preſſion qu'éprouve l'axe du chaînon en *a*, qui correſpond au diamètre horizontal de la poulie, ſera égale au poids P, & le frottement de cet axe ſera $\frac{P}{n}$, *n* étant la quantité conſtante qui meſure le rapport de la preſſion au frottement. Si *r* eſt le rayon de l'axe du chaînon, le momentum du frottement du poids P, relativement à cet axe, ſera $\frac{Pr}{n}$; ainſi il faut, pour ſatisfaire à cette condition, qu'en élevant une verticale par le centre de gravité du poids P, elle rencontre le diamètre horizontal C R de la poulie en un point *f*, tel que l'on ait toujours $P.af = \frac{Pr}{n}$, a étant le centre de l'axe : ainſi ſi P′ eſt tel que l'on ait $(P' - P)\,Ca = P.af = \frac{Pr}{n}$, le mouvement pourra être continu, & l'on auroit, dans ce cas, pour le frottement d'un des côtés de la chaîne, en nommant R le rayon de la poulie, augmenté de la moitié de l'épaiſſeur de la chaîne, $P' - P = \frac{Pr}{nR}$; mais comme il faut vaincre le frottement des axes des chaînons des deux côtés de la poulie, l'on aura très-approchant $(P' - P) = \frac{2Pr}{nR}$. Ainſi la réſiſtance due au frottement des chaînons, ſera proportionnelle au produit de la tenſion par l'axe des chaînons, divisé par le rayon de la poulie, augmenté de la moitié de l'épaisseur de la chaîne.

Il y a ici une analogie entre les résistances produites par le frottement des axes des chaînons, & celles trouvées pour la roideur des cordes très-flexibles, qui pourroit peut-être avoir quelque utilité dans la théorie de la roideur des cordes.

SECTION DEUXIÈME.

Application des Expériences qui précèdent au calcul des machines.

150. DANS le premier Livre de ce Mémoire, nous avons déterminé le frottement d'un traîneau mené par une puissance parallèle au plan de contact, & nous avons fait glisser successivement l'une sur l'autre des surfaces de différentes natures & de différentes étendues : dans le deuxième Livre, nous avons déterminé le frottement des axes, & la roideur des cordes pliées sur différens rouleaux : dans les observations que l'on trouve jointes à nos expériences, nous avons été obligés, pour les réduire, de calculer les différentes machines qui ont servi à nos épreuves. L'objet de cette Section se trouve donc déjà en partie rempli : ainsi il ne nous reste qu'à chercher des formules générales qui puissent s'appliquer à toutes les machines d'usage dans la Marine.

Nous allons d'abord commencer par le calcul du plan incliné, en supposant que la force qui élève un corps sur ce plan a une direction quelconque : nous calculerons après cela les machines de rotations, & principalement le palan composé d'un nombre de poulies quelconques, en supposant que la direction des cordes soit verticale, & en faisant entrer dans le calcul le frottement & la roideur des cordes : nous chercherons ensuite la théorie de ces mêmes machines, en supposant que les puissances agissent ſuivant des directions quelconques : nous appliquerons les formules qui réſulteront de notre théorie, au cabeſtan.

Théorie du plan incliné.

151. Le plan incliné, repréſenté par la ligne C B, forme, avec la ligne horizontale C A, un angle . . . . . . *n*. FIGURE 21.

La direction de la corde T F forme en D, avec le plan incliné, un angle . . . . *m*.

Le poids du traîneau chargé eſt . . . . P.

La tenſion de la corde T F eſt . . . . T.

Décompoſons ces forces en deux autres, l'une parallèle au plan incliné, & l'autre qui lui ſoit perpendiculaire, nous aurons:

Force ſuivant B C, dépendante du poids P. . P *ſin. n*.
Force ſuivant B C, dépendante de la tenſion T. T *coſ. m*.
Force perpendiculaire à B C, dépend. de P. . P *coſ. n*.
Force perpendiculaire à B C, dépend. de T. . T *ſin. m*.

Comme nous avons trouvé, dans le premier Livre, que le frottement du traîneau, une fois en mouvement, eſt égal à une petite conſtante dépendante de la cohérence des ſurfaces, plus à une partie conſtante μ de la preſſion, nous aurons, dans le cas d'un mouvement uniforme très-lent,

$$A + \frac{P\, cos.\, n - T\, sin.\, m}{\mu} = T\, cos.\, m - P\, sin.\, n, \text{ d'où}$$

$$T = \frac{A\mu + P\,(cos.\, n + \mu\, sin.\, n)}{\mu\, cos.\, m + sin.\, m}.$$

Cette formule eſt ſuffiſante dans la pratique, quel que ſoit le degré de vîteſſe & de preſſion, lorſque les bois frottent ſans enduit ſur les bois, ou les métaux ſur les métaux ; mais lorſque les bois frottent ſur les métaux, la quantité μ diminue un peu à meſure que la vîteſſe augmente : l'on trouve, dans les expériences du premier Livre, toutes les données néceſſaires pour déterminer cette quantité μ, ſuivant la nature des ſurfaces, l'ancienneté & la nature des enduits, & ſuivant le degré de vîteſſe.

152. Si dans la formule qui précède, en supposant l'angle n du plan incliné constant, l'on vouloit faire varier l'angle m, ou, ce qui revient au même, la direction de la corde qui soutient le traîneau, de manière que la tension T fût un *minimum*, l'on auroit $\mu = \frac{cos.\, m}{sin.\, m}$. Si dans la formule l'on fait n & $m = 0$, l'on aura $T = A + \frac{P}{\mu}$; c'est le cas du traîneau tiré horizontalement sur un plan horizontal; c'est le cas de toutes les expériences du premier Livre.

PREMIÈRE REMARQUE.

152. Nous avons vu, par les expériences du premier Livre, qu'il y avoit deux espèces de frottement; celui qu'il falloit vaincre pour détacher le traîneau après un certain temps de repos, & celui du traîneau une fois en mouvement. Nous avons trouvé que, dans les bois glissant sur les bois, le premier genre de frottement est toujours beaucoup plus considérable que le dernier: dans le chêne, par exemple, glissant à sec sur le chêne, il est à peu près comme 4 à 1; ainsi toutes les fois que le traîneau s'arrête, il faut employer un grand effort pour lui faire reprendre son mouvement. Cet effort est aussi nuisible aux hommes qu'aux machines dont il délie bientôt toutes les parties. Il faut donc, autant qu'il est possible, que, dans cette espèce de frottement, les agens puissent produire un mouvement continu, ou au moins il faut que, par quelques moyens assez simples, l'on puisse ébranler & détacher les surfaces après un certain temps de repos. Dans les expériences du premier Livre, je faisois souvent glisser mon traîneau à force de bras sous de très-grandes pressions; mais toutes les fois que le traîneau s'arrêtoit, les forces de deux hommes que j'employois n'auroient pas été suffisantes, si je ne les avois aidés en détachant le traîneau d'un coup de marteau. Il y a des cas où l'on pourroit faciliter l'ébranlement du traîneau, en le faisant porter (*Fig.* 22.) par une courbure convexe sur le plan incliné: car pour lors, au moindre ébranlement, il rouleroit sur cette courbure; mais si l'on ne veut pas employer ce moyen, & que par la destination de la machine, l'on se trouve

néceſſité d'arrêter ſouvent le mouvement des traîneaux, il faudra ſe conformer aux expériences du premier Livre, & ne mettre en contact que des ſurfaces qui puiſſent ſe détacher aiſément l'une de l'autre; telles ſont, par exemple, deux ſurfaces hétérogènes, comme les bois & les métaux; tels ſont auſſi les métaux gliſſant ſur les métaux avec enduit de ſuif.

II.e Remarque.

153. Les différens réſultats trouvés dans notre premier Livre, pourront peut-être ſervir à perfectionner une des opérations des plus importantes de nos Ports; c'eſt celle de lancer les vaiſſeaux à l'eau ſur un plan incliné : cette manœuvre s'exécute ordinairement en ſoutenant le bâtiment par un aſſemblage de charpente & de cordage que l'on appelle ſon berceau; deux pièces de bois poſeés parallèlement à la quille & à peu près de même longueur, ſervent de baſe au berceau. Ces deux pièces de bois ſont poſées & gliſſent ſur un chantier très-ſolide & très-uni, formé par des lits de pièces de bois qui ſe joignent & qui ſont poſées perpendiculairement à la direction de la quille : ce chantier eſt couvert, dans tous les points où la baſe du berceau doit gliſſer, d'un enduit de ſuif très-épais; on donne au chantier une inclinaiſon du côté de la mer, qui eſt rarement de moins de 10 lignes par pied & de plus de 14 lignes, ce que l'on fait dépendre du plus ou moins de peſanteur du vaiſſeau : dans cette opération, les ſurfaces de contact ſont ſouvent chargées de plus de 7000 livres par pied carré.

La grande quantité de ſuif dont le chantier eſt enduit; les différentes accores & les clefs qui ſoulèvent le vaiſſeau, & que l'on ne fait ſauter que dans l'inſtant où l'on veut le mettre à l'eau, empêchent que le plan des deux pièces de bois qui forment la baſe du berceau, & qui doit gliſſer ſur le chantier, ne s'engraine dans la ſurface de ce chantier; le vaiſſeau part ordinairement tout ſeul par le ſeul ébranlement qu'il éprouve, en coupant deux gros cables qui le ſoutiennent au ſommet du chantier. Il eſt abſolument néceſſaire, pour le ſuccès de cette opération, que la couche de suif interposée entre la base du berceau & le chantier, soit très-épaisse, très-pure, & que le suif ait beaucoup de consistance : quelquefois l'on met sur le suif un second enduit de vieux oing ; mais il paroît, par toutes nos expériences, que ce procédé est vicieux, que le vieux oing ne fait que ramollir le suif, accélérer le rapprochement des surfaces, & augmenter le frottement.

Lorsqu'une fois le vaisseau est en mouvement, il paroîtroit, d'après l'art. 63 & suivans, que le frottement des bois enduits de suif n'étant que le vingt-septième de la pression, & l'inclinaison du plan étant toujours au moins de 10 lignes par pied, le vaisseau devroit s'accélérer avec beaucoup de rapidité ; c'est aussi ce qui arrive presque toujours ; mais cependant, quelquefois il s'arrête au milieu de sa marche. Voici, d'après nos expériences, les raisons de cet évènement ; il s'en faut de beaucoup que les surfaces du bois qui sortent de la main de l'Ouvrier aient acquis le degré de poli qu'elles avoient dans nos expériences successives ; mais nous avons trouvé que des bois polis à neuf, & enduits de suif, donnoient beaucoup d'irrégularité dans les frottemens, qui, au lieu d'être le vingt-septième de la pression, étoient souvent le douzième & le treizième : or comme l'inclinaison du chantier, à 10 lignes par pied, ne donne pas tout-à-fait, pour la force accélérante, le quatorzième de la pression, il n'est pas étonnant que le bâtiment s'arrête souvent au milieu de sa course : un moyen de prévenir en partie cet évènement, seroit de faire glisser à plusieurs reprises, en enduisant de suif, un traîneau chargé d'un grand poids sur les surfaces qui doivent se trouver en contact lorsque le berceau court sur le chantier : par cette opération préparatoire, l'on feroit disparoître les inégalités qui rendent les frottemens irréguliers dans les surfaces neuves ; mais ce qui pourroit peut-être encore mieux réussir, ce seroit de former le dernier lit ou la surface du chantier avec des pièces de bois d'orme, en donnant une plus grande largeur aux surfaces en contact. J'ai toujours trouvé, en mettant en expérience un traîneau de chêne porté par un madrier de bois d'orme enduit de ſuif, le fil de bois ſe recoupant à angle droit, que non ſeulement le frottement étoit moindre que dans le chêne ſur le chêne, mais qu'il étoit, ſur-tout dans les ſurfaces neuves, beaucoup moins irrégulier : il paroîtroit que les inégalités dont la ſurface du bois d'orme eſt couverte, étant très-flexibles, ſe plient avec facilité dans la marche du traîneau, & produiſent moins d'irrégularité que le chêne dont les fibres ſont beaucoup plus dures. D'ailleurs, ce qui eſt déciſif ici, c'eſt que l'engrainage des parties, qui produit la grande réſiſtance que l'on éprouve en détachant les ſurfaces après un certain temps de repos, ſe fait dans le bois d'orme gliſſant ſur le chêne, beaucoup plus lentement que dans le chêne contre chêne.

Voici encore une cauſe des irrégularités du frottement du berceau gliſſant ſur le chantier; le vaiſſeau qui part d'abord lentement, s'accélère enſuite, & la vîteſſe eſt telle que les ſurfaces de contact contractent un degré de chaleur capable de les enflammer. Par-là il arrive que la couche de ſuif interpoſée entre les ſurfaces de contact ſe fond, & perd toute ſa conſiſtance; en ſorte que la baſe du berceau joint la ſurface du chantier, comme s'il n'y avoit point de ſuif interpoſé entre les ſurfaces de contact : or dans le cas où les ſurfaces étoient ſeulement onctueuſes, nous avons trouvé que le frottement étoit le ſeizième de la preſſion : ici il doit être encore plus grand, parce que la chaleur fond le ſuif juſque dans les pores du bois : ſi, par cette cauſe ou par quelque autre, le vaiſſeau vient à s'arrêter, le ſuif interpoſé entre les ſurfaces ſe trouvant entièrement fondu, elles s'engraineront, dans un inſtant, comme ſi les bois étoient ſecs, & il faudra, pour détacher de nouveau le berceau, employer une force qui ſoit au moins le tiers de la preſſion; auſſi arrive-t-il ſouvent qu'après un pareil accident, il n'y a d'autre moyen, pour faire mouvoir le vaiſſeau, que de ſéparer les ſurfaces en contact, & d'y mettre un nouvel enduit.

Nous n'étendrons pas plus loin nos réflexions ſur cet objet; nous laiſſons à MM. les Officiers de Marine qui dirigent actuellement les conſtructions des vaiſſeaux du Roi, à décider ſi, d'après nos expériences, il n'y auroit pas quelque moyen certain d'aſſurer le ſuccès de cette importante opération; l'on peut tout attendre de leur capacité, de leur zèle, de cette fermentation générale qui, dans nos Ports, embraſe tous les eſprits, & qui ſe modifiant, ſuivant les circonſtances, mène également à la gloire dans les combats, & aux découvertes utiles dans les Arts. Je voudrois que la deſtination de ce Mémoire me permît de rendre ici juſtice au Commandant reſpectable du Département où j'ai fait mes expériences : tout ce qui peut être utile à la perfection de l'Art & au bien du ſervice y eſt accueilli, encouragé & protégé : les Officiers qui le ſecondent, ſe prêtent à ſes vûes avec autant d'honnêteté que de zèle, & le plus foible talent qui veut ſe rendre utile, rencontre par-tout des hommes de génie qui l'éclairent. Si des occupations & des voyages néceſſités m'avoient permis de profiter à loiſir d'une poſition auſſi heureuſe, ce Mémoire ſeroit probablement meilleur (*a*).

Théorie des machines de rotation.

154. Nous avons vu, dans toutes les expériences qui précèdent, que le frottement des axes étoit toujours proportionnel aux preſſions : nous avons vu que les forces néceſſaires pour plier une corde autour d'une poulie, pouvoient toujours être repréſentées par la quantité $\frac{A + BT}{R}$, dans laquelle, art. 146, $A = n r^q$, & $B = n' r^\mu$, r étant le rayon de la corde, R, celui de la poulie, T, la tenſion de la corde, n & n' ſont des coëfficiens conſtans donnés par nos expériences; q, dans la pratique, peut être ſuppoſé égal à μ, quantité qui varie ſuivant la nature de la corde, ſuivant qu'elle eſt plus ou moins uſée.

(*a*) *Note ajoutée depuis le jugement de l'Académie.* Les expériences détaillées dans ce Mémoire ont été faites dans le Port de Rochefort, à la fin de 1779. M. de la Touche, que la mort a enlevé au commencement de l'année 1781, y commandoit alors le Département de la Marine : dès qu'il fut convaincu que mon travail avoit un objet utile, il voulut bien s'en occuper avec cet air d'intérêt ſi précieux & ſi rare dans les gens en place, mais qui caractériſe toujours le Citoyen honnête & le Chef éclairé.

Roue

Roue ou poulie chargée de deux poids.

155. Au lieu de ſuppoſer la poulie mobile autour de ſon axe, fixons la *Fig.* 23 à cet axe dont le rayon eſt C B, & ſuppoſons que cet axe ſoit porté par la chape F n B R, dont le rayon eſt plus grand que celui de l'axe de la poulie; que R ſoit le rayon de la poulie chargée d'un côté par le poids P, de l'autre par le poids P′ qui eſt ſuppoſé ſuffiſant pour entraîner le poids P, vaincre le frottement & la roideur de la corde. Comme le plus ou le moins de vîteſſe du ſyſtême change très-peu l'énergie de cette double réſiſtance, le poids P′ continuera à deſcendre avec la vîteſſe qui lui ſera imprimée ſans s'accélérer ni retarder: mais comme nous ſuppoſons ici du jeu entre l'axe & la boîte qui le porte, l'axe roulera d'abord juſques en B, en ſorte que la tangente B N fera, avec la ligne horizontale Q B Q′, un angle Q B N, tel que le frottement de tout le ſyſtême porté & en équilibre ſur le point B, l'empêche de gliſſer le long de B N; ainſi, ſi $m =$ le rapport de la preſſion au frottement, l'on aura $\frac{\textit{ſin.}\ Q B N}{\textit{coſ.}\ Q B N} = \frac{1}{m}$, & en ſuppoſant le rayon des tables égal à l'unité, l'on trouvera $\textit{ſin.}\ Q B N = \frac{1}{(m^2+1)^{\frac{1}{2}}}$, & $\textit{coſ.}\ Q B N = \frac{m}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}$: ſi actuellement du centre de l'axe C l'on abaiſſe la verticale C K, & que la ligne horizontale Q Q′ rencontre les verticales qui paſſent par le centre de gravité des deux poids en Q & Q′, l'on verra que, puiſque le ſyſtême eſt en équilibre autour du point B lorſque le poids P′ emporte d'un mouvement inſenſible & uniforme le poids P, l'on doit avoir $P(QK+KB) = P'(Q'K-KB)$; or $QK = R$, rayon de la poulie, & $KB = CB\ \textit{ſin.}\ BCK = \frac{r}{(1+mm)^{\frac{1}{2}}}$, d'où l'on tirera:

$$P\left(R + \frac{r}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = P'\left(R - \frac{r}{(1+mm)^{\frac{1}{2}}}\right).$$

L'on pourroit encore avoir la même valeur de P′ par un autre moyen plus direct: la ſomme des forces qui agiſſent ſuivant la réſultante & verticale E B eſt P + P; ainſi la preſſion du plan de contact en B eſt $\frac{m(P+P')}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}$: or, lorſque le mouvement eſt parvenu à l'uniformité, le centre C de l'axe doit reſter immobile dans l'eſpace ; ainſi toutes les forces & les réactions du frottement doivent être en équilibre autour du centre C, & puiſque le frottement du point B $= \frac{P + P'}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}}$, nous aurons $PR + \frac{(P + P')r}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}} = P'R$ qui ſe trouve exactement la même formule que nous avions eue tout à l'heure par la première méthode : la quantité P' donnée par cette dernière formule dépend ſeulement du frottement ; ſi l'on avoit égard à la roideur des cordes, elle ſeroit $PR + \frac{(P + P')r}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}} + A + BP = P'R$, parce que la force néceſſaire pour plier une corde autour d'un rouleau dont le rayon eſt R, étant $\frac{A + BP}{R}$, le momentum de cette force agiſſant avec un levier R, ſera $A + BP$.

Première Remarque.

156. Le frottement des axes dans les boîtes, que nous avons rigoureuſement déterminé dans l'article qui précède, & que nous trouvons égal à $\frac{(P + P')}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}}$, eſt plus petit que celui dont nous nous ſommes ſervis dans nos expériences, où nous avons ſuppoſé le frottement égal à la quantité $\frac{P + P'}{m}$; mais comme, dans nos expériences, m n'a jamais été moindre que le nombre 6, les erreurs qui auroient pu en réſulter ſont inſenſibles ; puiſqu'en prenant pour m le nombre 6, l'on trouve $(1 + m^2)^{\frac{1}{2}} = 6{,}08$, qui ne diffère du nombre 6 que d'une quantité que l'on peut négliger dans des recherches de ce genre.

Deuxième Remarque.

157. Si au lieu de faire mouvoir l'axe dans la concavité de la boîte, comme aux deux derniers articles, c'étoit (*Fig.* 24.) la boîte ou la concavité du trou de la poulie qui tournât ſur l'axe fixe, ce qui eſt le cas de toutes le poulies mobiles dont on fait uſage pour la manœuvre des vaiſſeaux, le problême auroit la

même ſolution que le précédent; car puiſque le poids P′ (*Fig.* 24.) entraîne le poids P, & que, par la ſuppoſition, le mouvement eſt ſuppoſé uniforme, il y a équilibre entre toutes les puiſſances, en y comprenant la réaction du frottement. Ne nous occupons pas pour cet inſtant de la roideur du cordage. Comme nous ſuppoſons qu'il y a du jeu entre le trou de la poulie & ſon axe, & que le poids P′ entraîne le poids P, lorſque le mouvement ſera parvenu à l'uniformité, le point de contact B ſera tel qu'en faiſant paſſer par ce point une tangente BN, la réſultante BE de la ſomme des poids P & P′, dirigée ſuivant une verticale BE, ne faſſe que commencer à faire gliſſer les ſurfaces de contact retenues par le frottement : nous aurons donc ici, comme à l'article 155, pour la preſſion ſuivant BC, $\frac{(P+P')m}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}$; mais ſi c'eſt le centre de l'axe, & C′ celui de la poulie, l'on remarquera que le rayon BC de l'axe étant prolongé, doit néceſſairement paſſer par le centre C′ de la poulie; l'on remarquera encore, que lorſque le mouvement ſera parvenu à l'uniformité, le centre C′ de la poulie reſtera fixe dans l'eſpace. Ainſi l'on aura égalité entre le momentum des puiſſances & la réaction du frottement; & comme ce frottement eſt encore ici $\frac{(P+P)}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}$, l'on trouvera, comme à l'article 155, en nommant r' le rayon du trou de la poulie, $PR+\frac{(P+P')r'}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}=P'R$.

Cette dernière formule offre, relativement aux poulies mobiles ſur leurs axes, une remarque intéreſſante; c'eſt que le momentum du frottement ne dépend pas du diamètre de l'axe, mais uniquement de celui du trou de la poulie.

Calcul d'un palan composé d'un nombre quelconque de poulies, les directions de toutes les cordes étant parallèles & verticales.

158. Le palan que nous allons calculer ici eſt un des plus en uſage dans la Marine. Dans la *Fig.* 25 qui le repréſente,

nous avons beaucoup écarté les poulies l'une de l'autre, sans cependant les séparer par des cloisons, comme elles le sont ordinairement dans la pratique, ce qui auroit rendu notre Figure trop confuse.

La chape supérieure en A est dormante, & attachée à des crochets; la chape inférieure en B est mobile, & soutient le poids P : une extrémité de la corde est fixée au point a, & la corde enveloppe successivement les poulies b, c, d, e, f, g, h, &c. & est soutenue à son autre extrémité par une force en Q.

Soit la tension de la corde qui va de a en b. . . . T.
Celle de la corde qui va de b en c. . . . . . T'.
Celle de la corde qui va de c en d. . . . . . . T''.
Celle de la corde & . . . . $T'^{\mu'}$.

$T'^{\mu'}$ représentant la tension de la corde, après qu'elle a enveloppé, depuis le point a, un nombre μ de poulies.

Supposons, pour simplifier, toutes les poulies égales, & ayant R pour rayon (a), & r pour rayon de leur axe, par l'article qui précède, lorsque le mouvement sera parvenu à l'uniformité, le frottement de l'axe de la première poulie b sera $\frac{(T+T')}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}$, celui de la poulie c sera $\frac{(T'+T'')}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}$, &; mais puisque nous supposons le palan en mouvement, il faut que la tension T' de la partie de la corde qui va de b en c, soit telle qu'elle fasse tourner la poulie b autour de son axe, quoique retenue, dans l'autre sens, par la tension T de la corde a b, par le frottement de l'axe, & par la résistance due à la roideur de la corde qu'il faut plier sur une poulie dont le rayon est R : ainsi le mouvement étant supposé parvenu à l'uniformité, nous formerons, d'après les articles qui précèdent, les équations suivantes pour chaque poulie :

(a) Par rayon de l'axe r, nous entendons celui du trou de la poulie.

$$R\,(T' - T) = \frac{(T+T')\,r}{(m^2+1)^{\frac{1}{2}}} + A + B\,T.$$

$$R\,(T'' - T') = \frac{(T'+T'')\,r}{(m^2+1)^{\frac{1}{2}}} + A + B\,T'.$$

$$R\,(T''' - T'') = \frac{(T'''+T'')\,r}{(m^2+1)^{\frac{1}{2}}} + A + B\,T''.$$

$$R\,(T'^{\mu'} - T'^{(\mu-1)'}) = \frac{\left(T'^{\mu'} + T'^{(\mu-1)'}\right) r}{(m^2+1)^{\frac{1}{2}}} + A + BT'^{(\mu-1)'}.$$

Ces équations se résoudroient facilement par les méthodes données pour intégrer les différences finies ; mais comme c'est ici le cas le plus simple de ce genre d'intégration, & que nous n'avons que des progressions géométriques à sommer, nous n'aurons besoin que de l'analyse élémentaire : faisons pour simplifier,

$$C = \frac{\left(R + \frac{r}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}} + B\right)}{R - \frac{r}{(m^2+1)^{\frac{1}{2}}}}, \;\&\; D = \frac{A}{R - \frac{r}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}},$$

nos équations se trouveront réduites par cette substitution, à

$$T \;= T \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = T \quad + \frac{D(1-1)}{C-1}.$$

$$T' = T\,C + D = T\,C + D \ldots\ldots\ldots\ldots = T\,C + \frac{D(C-1)}{C-1}.$$

$$T'' = T'\,C + D = T\,C^2 + D\,C + D \ldots\ldots = T\,C^2 + \frac{D(C^2-1)}{C-1}.$$

$$T''' = T''\,C + D = T\,C^3 + D\,(C^2 + C + 1) = T\,C^3 + \frac{D(C^3-1)}{C-1}.$$

$$T'^{\mu'} = T'^{(\mu-1)'}\,C + D = T\,C^{\mu} + D\left(C^{\mu-1} + C^{\mu-2}\;\&+1\right)$$

$$= T\,C^{\mu} + \frac{D\left(C^{\mu}-1\right)}{C-1}.$$

Remarquons à présent que puisque le poids P est supposé s'élever d'un mouvement uniforme, toute l'action momentanée de la pesanteur est soutenue & détruite par des cordes que nous supposons parallèles & verticales ; ainsi $\left(T + T' + T'' + \& + T'^{\mu'}\right) + P$, où $T'^{\mu'}$ est la tension de l'extrémité de la corde tenue en Q ;

ainſi en faiſant une ſomme de toutes nos équations, nous trouverons $P = \frac{T\left(C^{\mu+1}-1\right)}{C-1} + \frac{D\left(C^{\mu+1}-1\right)}{(C-1)^2} - \frac{(\mu+1)D}{C-1}$, d'où nous tirerons en quantités connues,

$$T = \frac{P(C-1) - \frac{D}{(C-1)}\left(C^{\mu+1}-1\right) + (\mu+1)D}{C^{\mu+1}-1}.$$

En ſubſtituant, dans une des équations de notre ſuite, cette valeur de T, nous aurons tout de ſuite en quantités connues la tenſion de la partie de la corde qui y correſpond : nous trouverons par exemple que la force Q qui peut produire un mouvement uniforme, eſt

$$T'^{\mu'} = \frac{C^{\mu}\left(P(C-1) + (\mu+1)D - \frac{D}{C-1}\left(C^{\mu+1}-1\right)\right)}{C^{\mu+1}-1} + \frac{D(C^{\mu}-1)}{C-1};$$

mais ſi l'on remarque que nous avons ſuppoſé $D = \frac{A}{R - \frac{r}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}}$; & que A repréſente la force conſtante néceſſaire pour plier la corde, il ſuit de nos expériences que, lorſqu'on manœuvre un palan avec une corde au deſſous de dix ou douze fils de carret, l'on peut négliger la quantité A, & par conſéquent D, & pour lors la formule précédente ſe réduit à $T'^{\mu'} = \frac{C^{\mu}.P.(C-1)}{C^{\mu+1}-1}$.

Si l'extrémité de la corde, au lieu d'être ſoutenue par une puiſſance Q, paſſoit ſur une poulie F, la tenſion de la corde en Q, étant donnée par la formule de cet article, l'on auroit facilement la peſanteur d'un poids G, qui, attaché à l'extrémité de cette corde, pourroit entretenir le mouvement uniforme d'un palan.

159. Le palan dont nous venons de donner le calcul, eſt celui

qui est le plus en usage dans la Marine ; mais il faut avouer que notre théorie n'est pas parfaitement exacte quant à la pratique, parce que nous supposons ici que toutes les cordes sont exactement verticales & parallèles ; au lieu que, dans la pratique, elles sont obligées de biaiser pour aller d'une poulie à l'autre, suivant que la chape mobile B est plus ou moins proche de la chape dormante A. Du défaut du parallélisme des cordes, il résulte encore que comme les poulies portées par la même chape sont séparées entre elles par une cloison, s'il y a beaucoup de jeu entre le trou de la poulie & son axe, la poulie s'incline & frotte contre la cloison : d'ailleurs en s'inclinant, le rapport du diamètre de la poulie au diamètre de son axe diminue, & la poulie ne porte sur son axe que par les arêtes extérieures de son trou qui est bientôt évasé & dénaturé : par-là les frottemens augmentent & deviennent d'une irrégularité qui ne peut être soumise à aucune théorie. Pour diminuer ces défauts, il faut forer les poulies bien perpendiculairement à leur plan, arrondir un peu les arêtes de leur trou ; mais sur-tout faire en sorte, dans les manœuvres, que la direction des cordes passe, le plus exactement qu'il sera possible, dans le plan de la poulie perpendiculairement à l'axe de rotation.

Calcul du frottement des axes, lorsque les directions des puissances ne sont pas parallèles entre elles.

160. La *Fig.* 26 représente le plan d'une roue ou d'un tour coupé perpendiculairement à son axe. Le centre de rotation est en C ; l'axe a pour rayon $CT = r$: la puissance Q qui fait mouvoir la machine, a pour rayon celui de la roue $CQ = R'$, & agit perpendiculairement à ce rayon, suivant la direction QR' : la résistance P qu'il faut vaincre, agit suivant la direction PR, perpendiculaire au rayon $CP = R$, qui est celui du cylindre ou de l'arbre du tour.

Prolongeons la direction $R'Q$, suivant laquelle la puissance Q agit, de manière qu'elle rencontre en S la direction RP de la réſiſtance ; que la réſultante de ces deux forces ſoit T S, T ſera le point de contact de la boîte, dont nous voyons, dans la Figure, une partie T N qui ſoutient l'axe du tour. Comme nous ſuppoſons ici le mouvement parvenu à l'uniformité, & que la roue eſt entraînée ſuivant Q R′, il faut que la direction de la réſultante S T faſſe, avec la tangente T O, un angle tel que la force réſultante décompoſée dans la direction de la tangente, ſoit égale au frottement : ainſi, ſi nous nommons Z la force de la réſultante S T, nous aurons $\frac{Z m}{(1 + m m)^{\frac{1}{2}}}$ pour la preſſion de l'axe & de la boîte, d'où, en ſuivant la même marche que dans les articles qui précèdent, l'on tirera $P R + \frac{Z r}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}} = Q R'$. L'on y joindroit, ſi l'on vouloit, les forces néceſſaires pour plier la corde ; mais il n'eſt queſtion ici que du frottement. Pour déterminer la valeur de Z, par le centre C de la roue & par le point S, ſoit tiré la ligne C S qui forme, avec les directions Q S & P S, les angles H & H′ : décompoſons la force ſuivant S Q en une force ſuivant S C & une force perpendiculaire à cette ligne ; faiſons-en autant pour la force ſuivant S P, la ſomme des forces ſuivant S C, ſera $Q \cos. H + P \cos. H'$: la ſomme des forces perpendiculaires à C S, à cauſe que c'eſt la force Q qui entraîne le ſyſtême, ſera $Q. \sin. H - P. \sin. H'$. Ainſi la force ſuivant la réſultante S T, ſera

$$Z = \Big((Q \cos. H + P \cos. H')^2 + (Q \sin. H - P \sin. H')^2 \Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$\Big(Q^2 + P^2 + 2 P Q (\cos. H + H') \Big)^{\frac{1}{2}}$; ainſi l'on aura, pour l'équation générale des momentum,

$$P R + \frac{(Q^2 + P^2 + 2 P Q \cos. (H + H'))^{\frac{1}{2}} r.}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}} = Q R',$$ d'où l'on tire

$Q = a + (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$, en faiſant

$$a = -\frac{P R R' - \frac{P r^2 \cos. (H + H')}{1 + m^2}}{R'^2 - \frac{r^2}{1 + m^2}}, \quad \& \; b^2 = \frac{P^2 \left(\frac{r^2}{1 + m^2} - R^2 \right)}{R'^2 - \frac{r^2}{1 + m m}}.$$

L'on ſimplifiera beaucoup notre formule relativement à la pratique, ſi l'on remarque que le frottement étant toujours une petite

petite partie de la pression, $Q = \frac{PR}{R'}$ peut être regardé comme une valeur assez approchée pour qu'on puisse la substituer dans le petit terme qui exprime le frottement : ainsi l'équation, avant d'être réduite, deviendra

$$\frac{PR}{R'} + \frac{Pr}{R'} \cdot \frac{\left(\frac{R^2}{R'^2} + 1 + \frac{2R}{R'} \cos. (H + H')\right)^{\frac{1}{2}}}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}} = Q.$$

Si l'on veut avoir égard à la roideur des cordes, il faudra ajouter à la quantité qui représente Q celle $\frac{f^{\mu}}{R'}(n + n'P)$, qui se détermine, d'après nos expériences, suivant la nature & l'usé des cordes : la quantité Q ainsi déterminée, substituée à la place de Q, dans le terme qui représente le frottement & la roideur de la corde, donnera une seconde approximation, si l'on ne croit pas la première assez exacte. La valeur de Q que nous trouvons ici pour les tours, convient également aux poulies dans le cas où les directions des cordes ne sont pas parallèles ; la dernière formule se simplifie même pour la poulie, parce qu'il faut faire $R = R'$.

Première Remarque.

161. La formule qui précède, où nous trouvons, par approximation, le frottement égal à $\frac{\frac{Pr}{R'}\left(\frac{R^2}{R'^2} + 1 + \frac{2R}{R'} \cos. (H + H')\right)^{\frac{1}{2}}}{(1 + mm)^{\frac{1}{2}}}$, offre quelques réflexions, relativement à l'angle $(H + H')$ que doivent former entre elles les directions de la puissance & de la résistance, pour que le frottement s'évanouisse, ou au moins pour qu'il devienne un *minimum :* il est clair d'abord que ce frottement diminuera à mesure que *cos.* $(H + H')$ diminuera s'il est positif, & augmentera s'il est négatif ; & comme, à cause du rayon égal à l'unité, *cos.* $(H + H')$ pris négativement, ne peut pas être plus grand que -1, il s'ensuit que le frottement sera le moindre possible, lorsque *cos.* $(H + H') = -1$, tant que $\frac{R^2}{R'^2} + 1$ sera plus grand que $\frac{2R}{R'}$; car s'il étoit plus petit, il

faudroit déterminer $cof. (H + H')$, en faisant $\frac{R^2}{R'^2} + 1 + \frac{2R}{R'} cof. (H + H') = 0$, ce qui rendroit le frottement nul : ainsi, par exemple, dans les poulies où $R = R'$, si $cof. (H + H') = -1$, le frottement s'évanouit, dans lequel cas la puissance & la résistance sont opposées & dirigées suivant une même ligne.

Du Cabestan.

162. La théorie qui précède, & l'équation qui en résulte, s'appliquent facilement au calcul du cabestan.

La *Fig.* 27 représente le plan d'un cabestan, ou une section perpendiculaire à son arbre vertical : les puissances Q, Q', Q'', & sont placées à l'extrémité des bras C Q, & comme elles sont distribuées également, il n'en résulte aucune pression sur l'axe : l'axe qui frotte contre la boîte, a pour rayon $CT = r$; l'arbre autour duquel s'enveloppe la corde, a pour rayon $CP = R$: les bras du cabestan mesurés depuis le point C, centre de rotation du cabestan, jusques aux points Q, Q', &, où les puissances sont appliquées, ont pour rayon $CQ = R'$: l'on remarquera que, comme dans le cabestan, les puissances Q, Q', & sont développées uniformément autour du centre C, il s'ensuit que la somme des forces estimées suivant une direction quelconque, sera égale à 0, d'où la pression de l'axe sur la boîte, & conséquemment le frottement qui en résultera, sera nul : ainsi dans l'équation de l'article 160, où nous trouvons $PR + \left(\frac{P^2 + Q^2 + 2PQ\,cof.\,(H + H')}{(1 + mm)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} r = QR'$, la puissance Q qui se fait équilibre à elle-même, ne doit pas entrer dans le terme qui représente le frottement; ainsi l'on aura $\frac{PR}{R} + \frac{Pr}{R'(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}} = Q$; & en faisant entrer dans le calcul la roideur du cable PN, nous aurons généralement

$$Q = \frac{PR}{R'} + \frac{Pr}{R'(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{f^{\mu}}{R'}(n + n'P),$$

où f représente le demi-diamètre de la corde.

EXEMPLE.

163. Pour faciliter aux Artistes l'intelligence de la théorie qui précède, nous allons donner une application au cabestan en calcul numérique.

L'on veut élever, au moyen de la corde P R, un poids de huit mille livres. La corde P R est une corde goudronnée de cent vingt fils de carret, qui pourroit porter douze à quatorze milliers sans se rompre. L'axe du cabestan est de fer; la boîte, dans laquelle il tourne, est de cuivre: l'on suppose que cet axe n'a pas été enduit de suif depuis quelque temps; en sorte que le rapport de la pression au frottement est, art. 132, comme 7 & demie à 1.

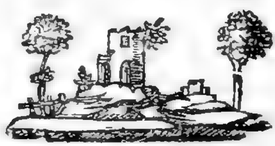
Le rayon C T de l'axe est égal à . . 2 pouces.
Le rayon C P de l'arbre est égal à . . 10.
Le bras C Q du cabestan est égal 10 pieds 120.

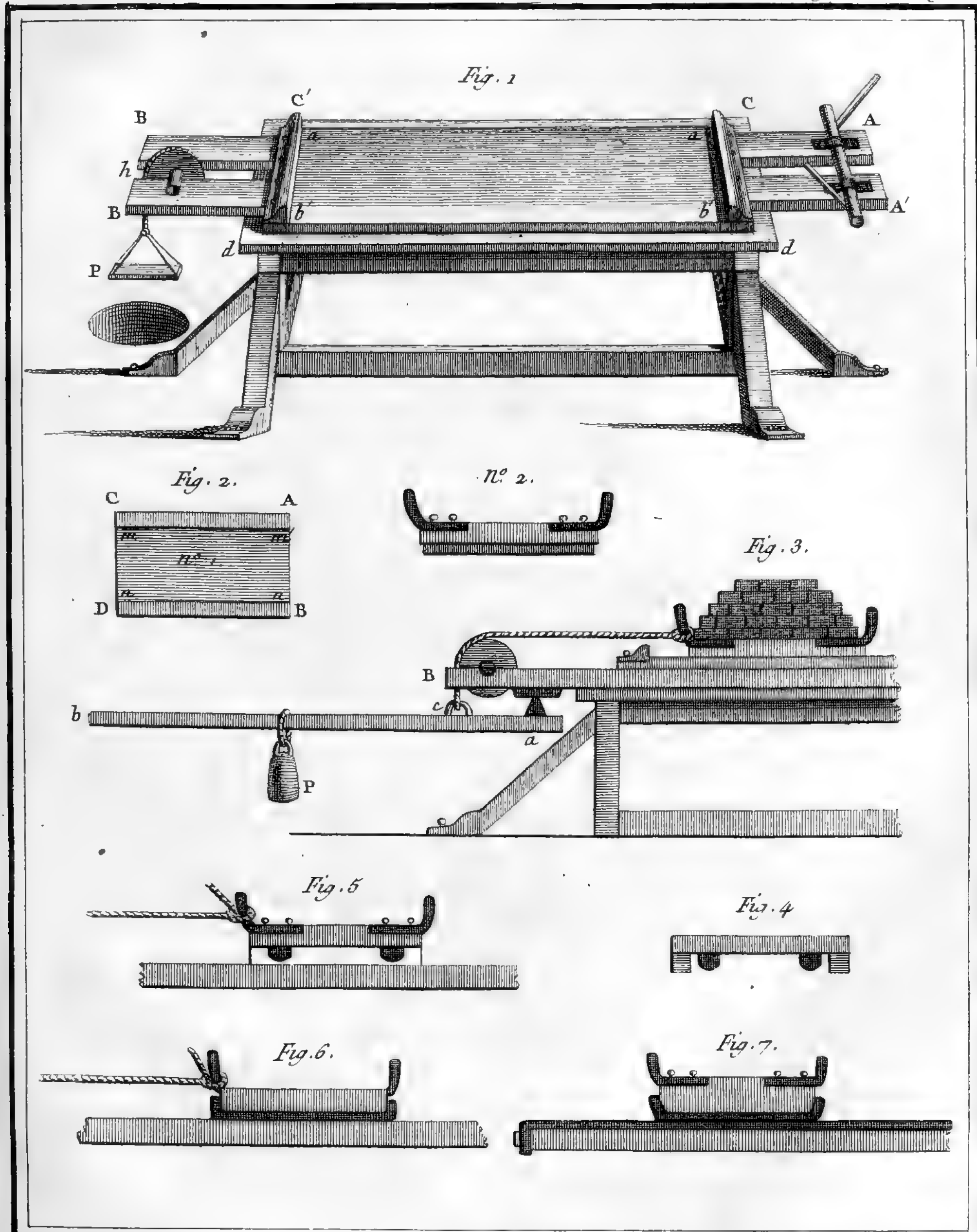
L'on cherche la somme des forces Q, Q', &, qu'il faut distribuer à l'extrémité des bras du cabestan.

Nous avons trouvé, article 116, par la méthode de M. Amontons, dont, art. 121, il faut doubler le résultat, qu'une corde goudronnée de trente fils de carret exige, pour être pliée autour d'un rouleau de 4 pouces de diamètre, une force constante de 6,6 livres, & une force proportionnelle à la tension, à raison de 116 livres par millier. Comme l'arbre de notre cabestan a 20 pouces de diamètre, les forces nécessaires pour plier la corde autour de cet arbre, ne seront que le cinquième de celles que nous venons de trouver; ce sera 1,3 livres pour la force constante, & 23,2 livres par millier: & comme nous avons ici une tension de huit milliers, nous aurons, pour la force totale qui plieroit la corde de trente fils de carret autour de notre rouleau, 186,9 livres.

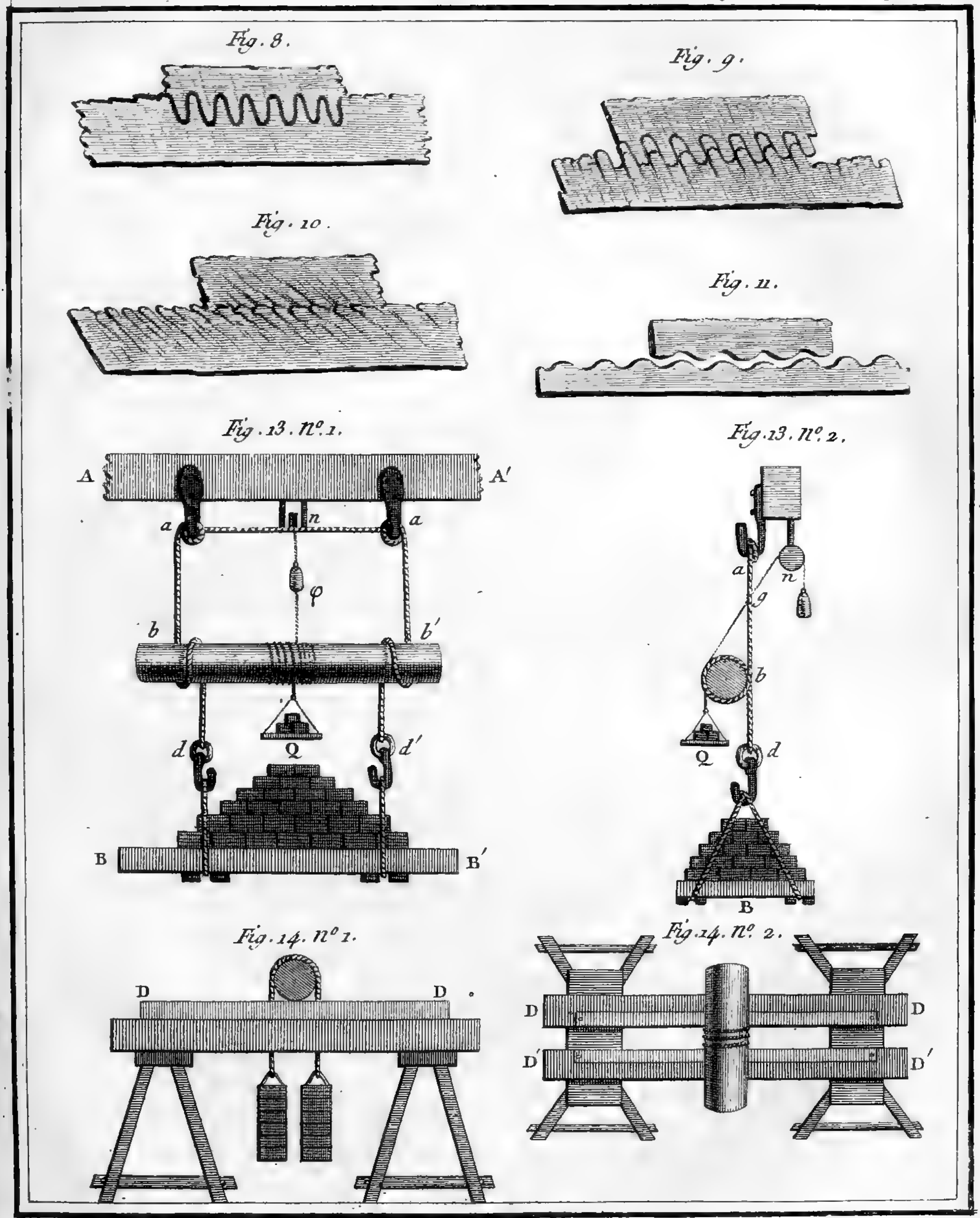
Mais nous avons vu, art. 116, que les forces nécessaires, pour plier différentes cordes goudronnées autour d'un même rouleau, ſont aſſez approchantes entre elles, comme le nombre des fils de carret qui compoſent ces cordes : ainſi, comme nous nous ſervons ici d'un cable de cent vingt fils de carret, il faudra une force pour plier ce cable, quadruple de celle que nous aurions employée avec la corde de trente fils; nous aurons donc ici, pour cette force, 747,6 livres : ainſi nous aurons, dans l'équation de l'article qui précède : $\frac{f^{\mu}(n + n'P)}{R'} = 747,6$, d'où $\frac{f^{\mu}(n + n'P)}{R'} = \frac{R}{R'} . 747,6 = \frac{10}{10.12} . 747,6 = 62,3$ livres ; $\frac{PR}{R'} = \frac{8000.10}{12.10} = 666,6$. $\frac{PR}{R'(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{8000.2}{10.12\,(7\tfrac{1}{2}^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} = 17,6$, d'où $Q = 666,6 + 62,3 + 17,6 = 746,5$ livres.

Comme un homme, en pouſſant d'un mouvement continu la barre d'un cabeſtan, peut faire à peu près un effort de 25 livres, il faudroit trente hommes ſur ce cabeſtan pour élever le poids de 8000 livres : il y a à peu près 80 livres de forces employées à plier la corde & à vaincre le frottement des axes ; ainſi il y a au moins trois hommes dont l'action eſt perdue dans l'effet de ce cabeſtan.

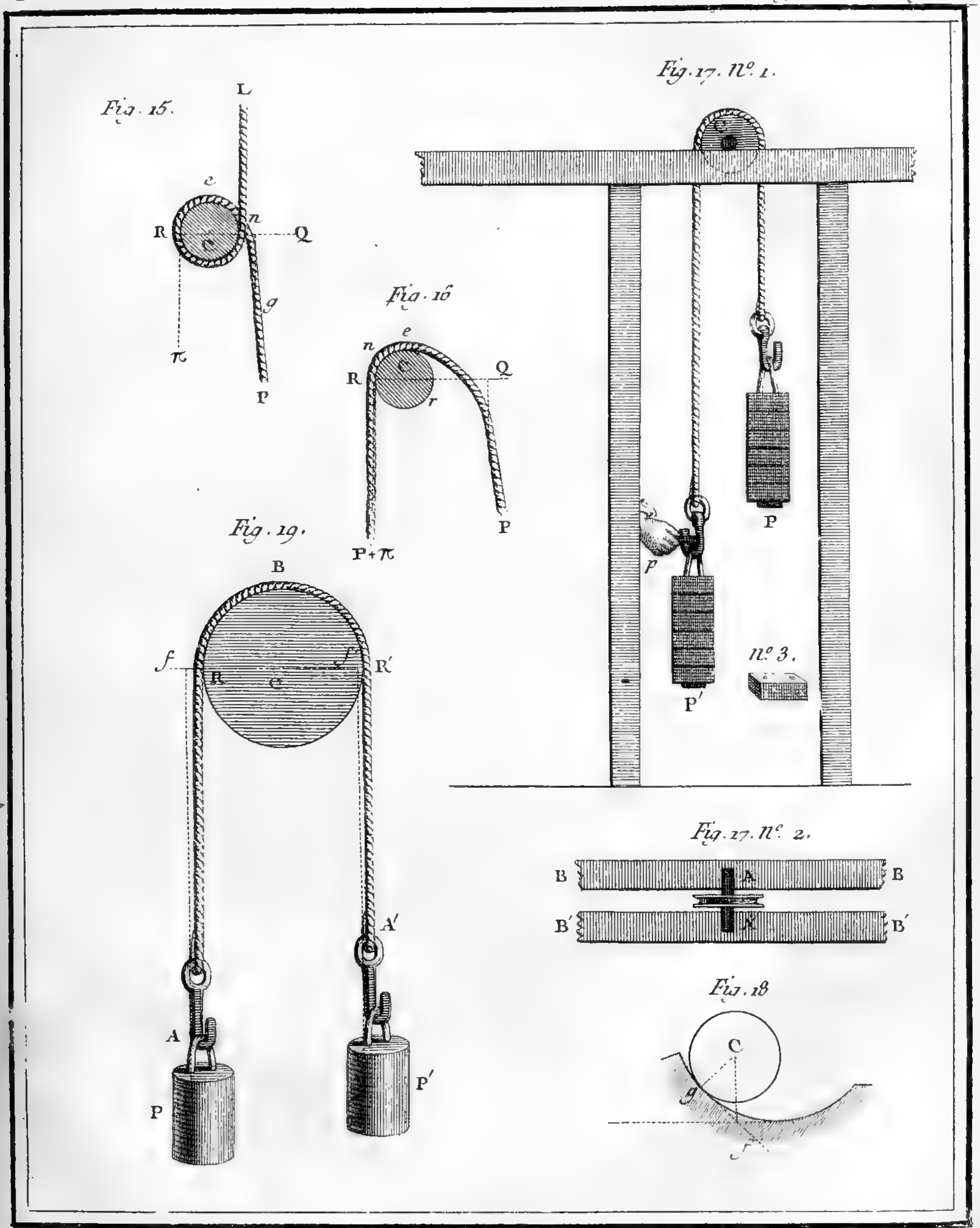




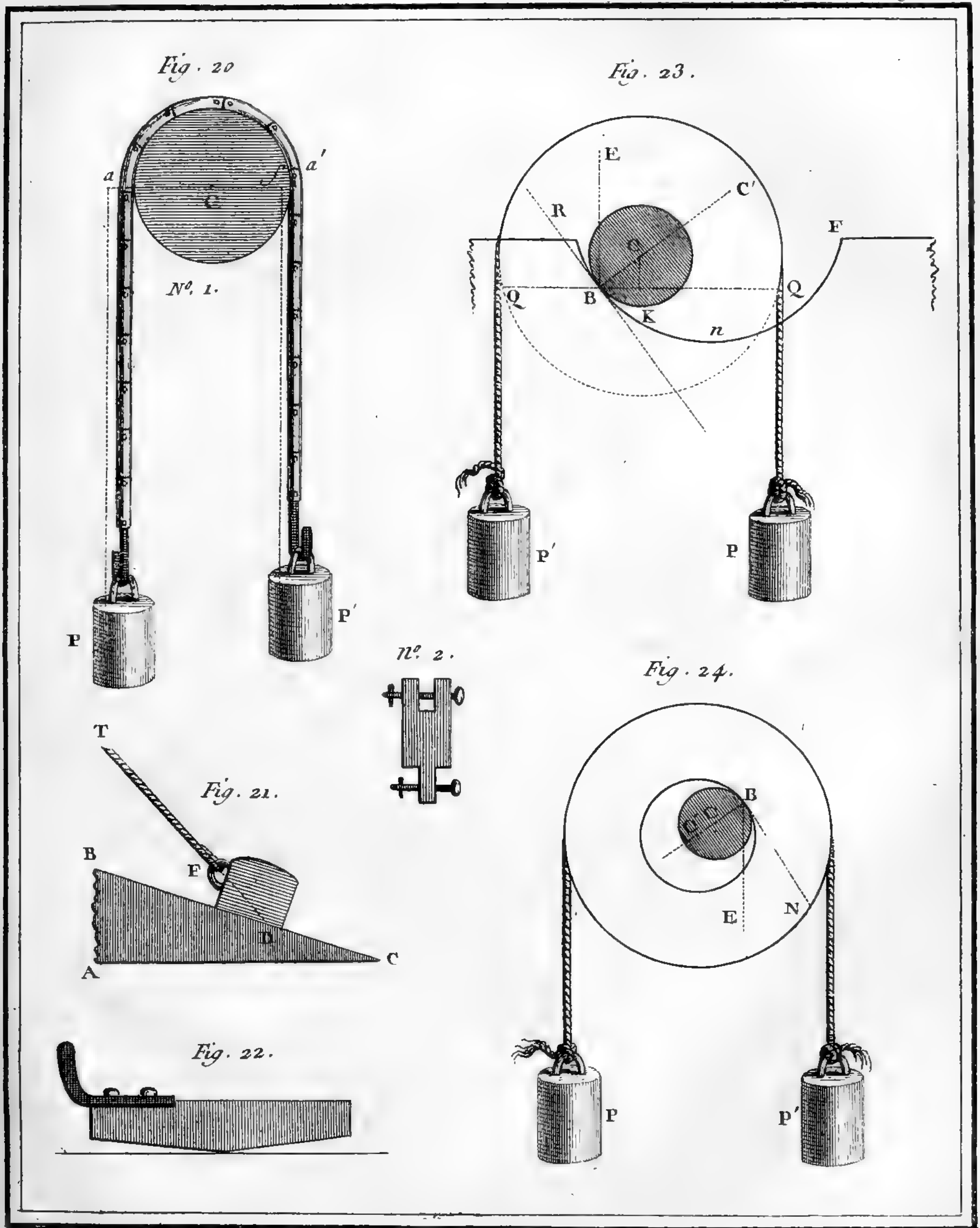
Elth Haussard Sculp.



Cne Haussard Sculp.



C.ne Haussard Sculp.



Elth Haussard Sculp.

Fig. 25

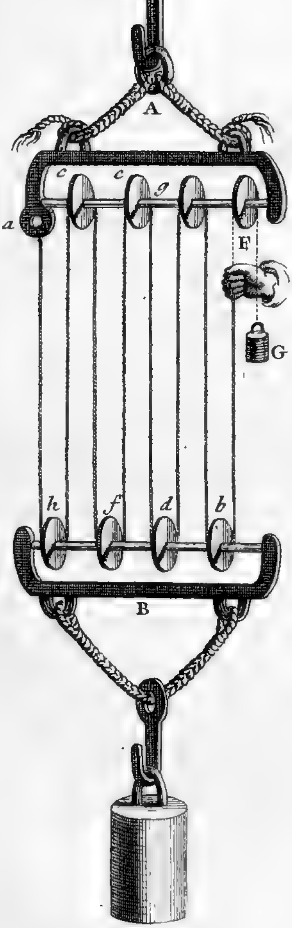


Fig. 26.

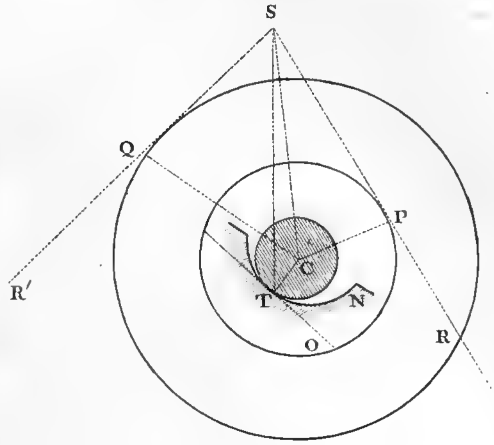
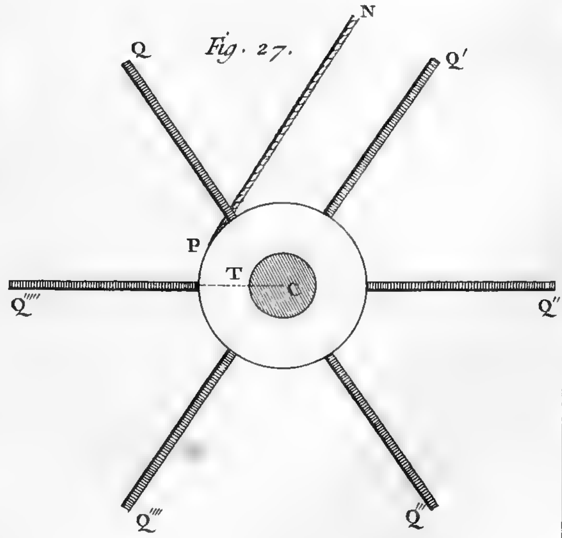
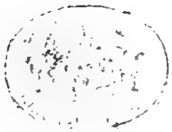


Fig. 27.





RECHERCHES
SUR
LES COMÈTES
De 1532 & de 1661.

PIECE qui a remporté le Prix proposé par L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, pour l'année 1782.

> Altiora Mundi secat, & tum demùm apparet,
> Cùm in imum cursus sui venit. SENEC.

Par M. MÉCHAIN, Astronome Hydrographe de la Marine; & depuis Membre de l'ACADÉMIE.

L'ACADÉMIE a proposé les questions suivantes:

1.° *Vérifier & réduire aux distances véritables, les distances apparentes de la Comète de 1661 aux étoiles, en ne négligeant pas même d'entrer dans la critique des positions de ces étoiles, données par les différens Catalogues.*

2.° *Vérifier & discuter, autant qu'il sera possible, les différentes périodes anciennes des retours de cette Comète, dont les Historiens ont pu faire mention.*

3.° *Corriger, par l'effet connu des réfractions & des parallaxes, les observations relatives à cette Comète, faites par Apian en 1532.*

4.° *Examiner l'influence que les mouvemens propres des étoiles fixes & la précession des équinoxes ont dû avoir sur ces différentes observations.*

Pour essayer d'y répondre, je commencerai par les Observations d'Apian; je les rapporterai telles qu'on les trouve dans le Livre intitulé *Astromicum Cæsareum*, publié par Apian, à Ingolstadt, en 1540, & dont les exemplaires sont devenus, depuis long-temps, extrêmement rares. Je discuterai ces Observations, je les réduirai, j'en donnerai les résultats, ainsi que les principaux élémens des calculs : j'en ferai aussi la comparaison avec les lieux de la Comète, calculés sur les élémens de l'orbite, donnés par M. Halley.

Je rapporterai ensuite les Observations d'Hévélius, faites à Dantzick en 1661; je discuterai les positions des étoiles, d'après les principaux Catalogues; je donnerai les distances vraies de la Comète aux étoiles déduites des distances apparentes observées, les longitudes & latitudes vraies conclues de ces distances, & la comparaison avec le calcul fait sur les élémens de l'orbite, déterminés par M. Halley.

J'examinerai si les apparitions de Comètes qui tombent à des années où peut répondre la période écoulée entre 1532 & 1661, se concilient avec l'orbite de la Comète de 1532, & sur-tout avec celle de 1661, qui est mieux connue.

L'influence des mouvemens propres des étoiles, & de la précession des équinoxes, se trouvera nécessairement discutée dans les recherches précédentes.

Enfin, je terminerai par un court exposé des résultats que j'ai tirés des Observations de 1532 & de 1661, sur les orbites de ces Comètes.

On trouvera peut-être que je suis entré dans de trop longs détails, & que j'aurois pu me dispenser de mettre autant de précision dans les calculs des Observations, sur-tout pour la Comète de 1532; mais je devois me conformer à ce qu'exigeoit le Programme de l'Académie.

OBSERVATIONS
DE LA COMÈTE DE 1532,
PAR APIAN.

Observatio prima.

Cometa, anno 1532, fulsit in regione orientali, cœpit autem videri 25 Septembris in diem usque 20 Novembris, septies per me & studiosissimè observatus. Primo autem omnium secundo Octobris die in *Dreseno* Misniæ oppido (cujus loci altitudo est 51 grad.) horâ solis ortum præcedente quintâ, in qua contemplatione Azimuth altitudoque hujusmodi reperta sunt.

Altitudo Cometæ supra horizontem	13°	10′
Azimuth ejusdem ab ortu versùs Meridiem	24	30
Altitudo cordis Leonini	34	
Azimuth ejusdem	19	22

Hiis conquisitis operatum mihi consequenter est, hac quâ solui hactenùs ratione, non secus ac in priori Cometa factum est eaque mihi cognita.

Declinatio cordis Leonini		14°	12′	
Ascensio recta ejusdem		144	54	
Ascendens eclipticæ observationis horâ	♎	1	28	
Declinatio Cometæ		4	25	*Merid.*
Ascensio recta ejusdem		154	47	
Latitudo Cometæ		13	44	*Merid.*
Locus verus Cometæ in ecliptica	♍	8	24	

Observatio Secunda.

Secundò, consideratus est Cometa *die Septembris* 3 (lege Octobris 3) eodem in loco, caudam verò ejus solem sequi jam comperto, extremum ejus inſpectum eſt. E qua inſpectione ſequentia ſe obtulerunt.

Altitudo cordis Leonini........................		31°	30′	
Altitudo Cometæ.............................		9		
Azimuth ejuſdem ab ortu Meridiem versùs........		16	43	
Altitudo extremitatis caudæ....................		20	42	
Azimuth ejuſdem extremitatis.................		27	6	

E quibus ſubnexa eliciuntur.

Verus Cometæ locus..........................	♍	11°	25′	
Declinatio ejuſdem...........................		3	53	*Merid.*
Aſcenſio ejus recta...........................		158	27	
Latitudo Cometæ ab ecliptica..................		10	12	*Merid.*
Diſtantia Cometæ à Sole......................		39	10	
Locus Solis horâ obſervationis.................	♎	19	27	
Verus extremitatis caudæ locus in ecliptica........	♌	26	24	
Latitudo extremitatis ejuſdem..................		13	8	

Observatio tertia.

Tertia Cometæ inſpectio 14 Octobris die facta eſt, quo quidem die mihi *Lyptziæ* eſſe contigit, quamobrem itinerarii ſolius horologii, quod compaſſum vocant, uſu, Cometam in æquinoctiali ipſiſſimo ſuboriri animadvertimus, in libræ principio conſtitutum, eâdem enim obſervationis horâ libræ initium aſcenderat.

Observatio quarta.

Quartò, Cometa viſus eſt die Octobris 19, ubi eum quintum libræ gradum, min. 46, tenere in longitudine deprehenſimus, ab ecliptica verò Septentrionali inclinantem grad. 4, min. 51.

Observatio quinta.

Quintò, Cometam contemplatus ſum die Octobris 31, horâ 5, min. 15 poſt noctis medium, iterùm in Dreſeno Miſniæ oppido. Hæc autem ſequentia inventa ſunt.

Altitudo Bootis Stellæ........................	20°		
Altitudo Cometæ.............................	8		
Azimuth ipſius...............................	3	43′	*Sept.*

Ex

Ex quibus talia consurgunt.

Distantia Cometæ à Sole.		29°	6′	
Ascensio recta Cometæ.		204	47	
Locus ipsius verus in ecliptica.	♎	21	30	
Latitudo ejusdem ab ecliptica.		13	15	*Sept.*

Eo die, proximèque ante illum, cœpit Cometa post Solem occidere, parumque videri vesperi.

Observatio sexta.

Sextò, Cometam lustrantes 1 Novembris, priori quoque in loco hæc subscripta comperimus.

Bootis altitudinem.	26°	0′	
Altitudinem Cometæ.	12	40	
Azimuth ejusdem.	8	50	*Merid.*

Hæc subnexa ex Observatione eliciuntur.

Ascensio Cometæ recta.		207°	33′	
Latitudo ejusdem.		14	42	*Sept.*
Locus verus Cometæ in ecliptica.	♎	23	57	
Distantia quoque ejusdem à Sole.		28	34	

Cometa ille caudam primò merid. versùs direxit, post hac in dies magis ac magis eam elevans, hunc usque in diem quo ferè perpendicularis ad Zenith erigebatur.

Observatio septima.

Septima & novissima Observatio, 8 Novembris die celebrata, loco proximè dicto, horâ 5, min. 12 post noctem mediam. Quanquam verò 20 usque Novembris in diem Cometa perstiterit, ob aëris tamen turbulentiam minimè conspicuus fuit. Ea contemplatio sequentia collegit.

Bootis altitudinem.		25°	40′	
Altitudinem Cometæ.		7	20	
Azimuth ejusdem *ab Occid. ad Sept.*		0	30	
Verum locum Cometæ in ecliptica.	♏	3	35	
Latitudinem ejusdem.		19	36	*Sept.*

Hiis jam diebus cauda ſatis evidenter Boream versùs mota eſt, & poſt occidentem Solem cerni potuit.

Motus ille, ſi penitùs conſideratur, oſtendit quomodo & ille Cometa pronus & viâ directâ incesserit, eclipticamque in Libræ principio ſecuerit. . . . .

Voilà tout ce qu'Apian rapporte d'eſſentiel ſur cette Comète : il l'obſerva avec des inſtrumens dont on ne peut pas attendre une grande préciſion ; il n'avoit en vue que de démontrer que les queues des Comètes ont une direction oppoſée au Soleil. Je vais cependant rapporter les calculs rigoureux que j'en ai faits pour me conformer aux intentions de l'Académie ; mais il eſt eſſentiel de remarquer qu'il y a évidemment une faute d'impreſſion dans le nom du mois de la ſeconde obſervation, & qu'il faut lire *Octobris* au lieu de *Septembris :* il paroît certain qu'il y en a une autre dans l'Azimuth de la dernière obſervation, que j'ai ſouſligné, & qu'il faut lire *Azimuth ejuſdem ab Oriente ad Sept.*, parce que l'obſervation a été faite le matin, & que la Comète étoit à l'orient, ainſi qu'Arcturus.

Une troiſième erreur qui n'eſt point d'abord auſſi palpable que les deux précédentes, c'eſt la dénomination de l'Azimuth de la Comète de la cinquième obſervation ou du 31 Octobre. Apian donne cet Azimuth vers le nord, il eſt certain qu'il a dû être vers le midi ; je l'ai ſouſligné en rapportant l'obſervation, & je l'emploierai ainſi corrigé en la calculant. On verra d'ailleurs que ſi on prenoit cet Azimuth de l'orient au nord, il en réſulteroit une déclinaiſon de la Comète beaucoup plus grande que celle du lendemain, & de même pour l'aſcenſion droite, ce qui eſt contraire au mouvement apparent de cette Comète.

Latitude & longitude du lieu où Apian obſerva la Comète.

On a vu ci-deſſus, que cinq des obſervations les plus détaillées, & les ſeules que l'on puiſſe calculer, ont été faites ſelon

Apian, *in Dreseno Misniæ oppido, cujus loci altitudo est 51 grad.*, & dans la Table de la différence des Méridiens des principaux lieux de la terre avec Ingolstadt, qu'il rapporte au commencement de son Livre; il place *Dresen* 10′ de temps à l'orient d'Ingolstadt, ce qui revient à 46′ de temps à l'orient de Paris. Mais dans les Ephémérides du P. Hell, on trouve la latitude de Dresde de 51° 6′, & 44′ 21″ de temps à l'orient de Paris. Mayer a trouvé, par combinaisons, la latitude de 51° 3′ & 45′ 32″ de temps à l'orient de Paris. La fin de l'éclipse de Soleil de 1748 m'a donné 44′ 32″ de temps. Dans les Ephémérides de Berlin, année 1782, on donne la latitude de Dresde observée par M. Koler en 1769 & en 1778, de 51° 5′ $\frac{1}{4}$, & la différence des Méridiens avec Paris, de 45′ 26″ par les satellites de Jupiter : j'adopterai cette dernière quantité pour la longitude de Dresde, & je supposerai la latitude de 51° 5′.

Précession des Equinoxes, & obliquité de l'Ecliptique employées dans ces Recherches.

J'ai fait beaucoup de recherches sur la précession, d'après les Catalogues anciens & modernes; j'ai examiné les quantités adoptées par différens Auteurs; mais il seroit trop long d'entrer ici dans tous ces détails. Afin d'abréger, je dirai seulement que j'ai adopté la précession séculaire moyenne de 1° 23′ 50″ de ce temps-ci à 1532 & à 1661, pour me rapprocher de ce qui est le plus généralement suivi; & encore parce que cette quantité a été employée par les Astronomes qui ont recherché les mouvemens propres des étoiles dont j'ai fait usage : d'ailleurs j'avois trouvé 1° 23′ 46″ au plus.

Quant à l'obliquité de l'Ecliptique & à sa diminution; j'ai combiné & calculé les observations les plus certaines, faites depuis la fin du quinzième siècle; elles m'ont donné, par un milieu général, la diminution en 100 années de 39″ $\frac{1}{2}$, ou de 37″, en rejetant les résultats qui s'éloignoient trop. Par les hauteurs solsticiales observées par Hévélius, j'ai trouvé l'obliquité moyenne, en 1660, de 23° 29′ 0″; les obſervations du Gnomon de Bologne donnent quelques ſecondes de moins. M. le Monnier, dans ſon Mémoire ſur Arcturus (*Mem. Acad. 1769*), ſuppoſe l'obliquité moyenne, en 1675, de 23° 28′ 50″, & en 1769, de 23° 28′ 15″, ce qui donne une diminution de 37″.2 par ſiècle; on en tire l'obliquité moyenne, en 1661, de 23° 28′ 55″, telle que je l'ai employée pour les obſervations de la Comète de cette année. En remontant de cette époque à 1532, j'ai établi pour ce temps l'obliquité moyenne de 23° 29′ 43″.

Mes combinaiſons m'auroient donné quelques ſecondes de différence en 1532, ainſi qu'en 1661; mais j'ai préféré de m'arrêter à ces quantités, afin de profiter du travail de M. le Monnier ſur le mouvement propre d'Arcturus, & parce que ſon ſentiment doit être du plus grand poids.

Réduction du lieu des Etoiles au temps des obſervations de 1532.

REGULUS.

Aſcenſion droite.			Déclinaiſon.			
145°	48′	26″	14°	11′	30	1532, ſelon le Catalogue Britannique.
145	48	5	14	12	33	*Idem*, Aſtron. nautique de M. le Monnier.
145	48	15	14	11	58	*Id.* Catalogue de M. Bradley.
145	48	3	14	11	52	*Id.* Maskeline, fin du vol des Obſ. de Greenvich.
145	48	13	14	12	50	*Id.* Catalogue de M. Mayer.
145	48	11	14	12	8	*Id.* Catalogue de M. de la Caille.

Les différens réſultats ci-deſſus s'accordent aſſez en aſcenſion droite, mais ils diffèrent plus en déclinaiſon; Regulus paroîtroit ſujet à un mouvement propre. M. le Monnier l'indique dans ſon Aſtronomie nautique, pag. 79; mais il dit que ce mouvement ne paroît pas être bien ſenſible : M. Mayer le fait de 16″ en cinquante ans, contre l'ordre des ſignes, & M. Maskeline, de 41″ en cent ans; il en réſulteroit une aſcenſion droite d'environ 1′ ½ plus forte que celle ci-deſſus vers 1532. Il paroît que M. le Monnier a tenu compte d'un mouvement en déclinaiſon entre 1750 & 1770, dans la Table de l'Aſtronomie nautique. M. Mayer a trouvé ce mouvement de 10″ vers le nord en cinquante ans : on demandera ſans doute ſi les obſervations de Rœmer, qu'il a employées dans ces recherches, étoient aſſez exactes pour s'aſſurer d'une auſſi petite quantité. M. Maskeline ne paroît point avoir reconnu de mouvement en déclinaiſon, du moins ſelon ſa Table. Enfin il ſemble qu'on pourroit ſuppoſer ce mouvement de $\frac{1}{4}$ de minute de ce temps-ci à 1532, & diminuer d'autant la déclinaiſon de Regulus pour cette époque, en partant des Catalogues les plus récens. Les obſervations aſſez exactes pour donner des quantités auſſi petites, ſont encore trop peu éloignées entre elles, pour qu'on puiſſe ſe flatter de déterminer avec préciſion la correction convenable aux ſiècles précédens. On croit qu'il eſt ſuffiſant, pour répondre aux vûes de l'Académie, d'avoir aſſigné quelle influence ces mouvemens peuvent avoir ſur les obſervations de la Comète par Apian : il eſt certain que l'erreur qui en peut réſulter eſt incomparablement plus petite que celle des obſervations, de la manière dont elles ont été faites par Apian.

On fera pour 1532.

L'aſcenſion droite de *Regulus* de.........	145°	48′	10″	Déclinaison.	14°	12′	10″
Le mouv. juſqu'au commenc. d'Oct. 1532.		+	37			—	13
Poſition moyenne du 2 au 3 Oct.........	145	48	47		14	11	47
Aberration..........................		—	11,2			+	3,8
Nutation............................		—	6,9			—	3,1
Poſition appar. de *Regulus* du 2 au 3 Oct.	145	48	29		14	11	48

Arcturus.

On trouve dans le volume de l'Académie pour 1769, un excellent Mémoire de M. le Monnier ſur le mouvement propre d'Arcturus. Ce célèbre Aſtronome établit d'abord la poſition de cette étoile pour le 21 Juin 1675, en entrant dans une diſcuſſion très-étendue ſur les obſervations de ce temps.

L'aſcenſion dr. moy. étoit à cette époque de	210°	13′	40″	Déclinaison.	20°	53′	33″
Ses Obſervations de 1769 donnent......	211	17	20		20	23	35 ½
Donc en quatre-vingt-quatorze ans.....	1	3	40			29	57 ½
Le mouvement auroit dû être de........	1	6	14			26	58
Différence en quatre-vingt-quatorze ans..	—	2	34		+	3	0
C'eſt en cent ans.....................	—	2	43,8		+	3	11 ½

En partant de ces données, j'ai établi pour le premier Novembre 1532.

Ascension droite.	Déclinaison.	
208° 36′ 54″ ½	21° 39′ 51″ ½	Selon M. le Monnier.
208 36 0	21 39 46	Catal. Britann. en y appliquant le mouv. propre.
208 36 58 ½	21 39 35	M. Bradley, mouv. prop. selon M. le Monnier.
208 36 1	21 40 58	M. Mayer, & le mouv. propre donné par lui.
208 36 1	21 39 56	M. Maskeline, & le mouv. propre d'après lui.

Les résultats ci-dessus ne sont pas bien d'accord pour l'ascension droite, excepté ceux d'après M. Bradley & M. le Monnier. Il paroît que MM. Mayer & Maskeline ont fait le mouvement en ascension droite un peu trop lent, car toutes s'accorderoient assez (excepté celle de Flamsteed), si l'on y appliquoit le mouvement propre d'après M. le Monnier; mais comme M. le Monnier a recherché la position & le mouvement propre d'Arcturus par les observations les plus éloignées & les plus favorables, on s'en tiendra à ce qui résulte de ses données. On voit encore ici combien ces différences sont au dessous de l'erreur qu'Apian a pu commettre dans ses observations.

	Ascension droite.	Déclinaison.
Donc position moy. d'*Arcturus* pour le 1er Nov. 1532.	208° 36′ 54″,5	21° 39′ 51″
Et l'apparente.	208 36 29	21 39 57

Lieux du Soleil au temps de chaque observation.

Année 1532.	Temps vrai à Dresde.	Longitude du Soleil.	Log. dist. du Soleil.	Equation du Temps.	Ascension droite du Soleil.
Oct. 2	5h 3′ 54″	6s 18° 32′ 40″	4.998155	— 13′ 13″	197° 6′ 1″
3	4 43 0	6 19 31 34	4.998030	— 13 27	198 0 52
14	5 15 22	7 0 31 11	4.996710	— 15 22	
19	5 15 47	7 5 31 38	4.996165	— 15 47	
31	5 15 11	7 17 35 57	4.994953	— 15 28	225 7 25
Nov. 1	5 49 35	7 18 38 0	4.994867	— 15 21	226 9 50
8	5 18 44	7 25 41 21	4.994242	— 14 9	233 9 32

Les temps vrais ont été calculés d'après les hauteurs d'étoiles données dans les Observations d'Apian : on se dispensera d'entrer dans d'autres détails à ce sujet; on rapportera seulement ci-après les angles horaires en degrés, & les ascensions droites du milieu du ciel, pour s'en servir à la détermination des lieux de la Comète.

La troisième & la quatrième observation ont été faites à Leipsick : Apian n'en a pas donné les temps vrais ; on a supposé que c'étoit vers 5 heures du matin, & les lieux du Soleil ont été calculés pour 5 heures, temps moyen à Leipsick ; c'est pourquoi on voit des minutes & des secondes dans les temps vrais de ces jours-là.

Apian n'ayant donné que les résultats de ses Observations des 14 & 19 Octobre, on ne peut rédiger que les deux premières & les trois dernières faites à Dresde.

Détermination des ascensions droites, déclinaisons, longitudes & latitudes de la Comète par les Observations d'Apian.

PREMIÈRE OBSERVATION du 2 Octobre 1532, à $5^h\ 3'\ 54''$ temps vrai au matin.

Hauteur de la Comète....	13°	10′	0″	Azimuth de la Comète de l'Orient au Midi.	24°	30′	0″
Réfraction..............	—	4	0				
Parallaxe de hauteur......	+	0	13				
Hauteur vraie de la Comète.	13	6	13	Latitude..........	51	5	0

De ces données on conclut l'angle horaire oriental de la Comète de		62°	44′	20″
L'ascension du milieu du ciel étoit alors......................		92	59	17
Donc ascension droite de la Comète...........................		155	43	37
On trouve aussi sa déclinaison australe........................		4	26	5
Et supposant que l'obliquité moyenne de l'écliptique étoit alors...		23	29	43
On aura la longitude de la Comète de..........................	5ˢ	9°	12′	39
Aberration & nutation..			+	17
(a) Latitude australe..		13	33	5
Aberration...			—	21

(a) Apian donne l'Azimuth de Regulus, ainsi que sa hauteur : si on employoit l'Azimuth pour trouver l'ascension droite du milieu du ciel, on auroit la longitude de la Comète de $5^s\ 7^\circ\ 10'\ 8''$, & la latitude de $14^\circ\ 20'\ 6''$; ce qui fait voir quel degré d'incertitude il y a dans ces observations. J'ai préféré la hauteur, parce que le mouvement du 2 au 3 m'a déjà paru bien grand, & parce qu'Apian ne donne l'Azimuth de l'étoile que cette seule fois.

II.^{e} Observation, le 3 Oct. à $4^h\ 43'\ 0''$ temps vrai au matin.

Hauteur de la Comète	9°	0′	0″	Azimuth de la Comète de l'Orient au Midi.	16° 43′ 0″
Réfraction	—	5	48		
Parallaxe de hauteur	+		13		
Hauteur vraie	8	54	25		

Angle horaire oriental de la Comète		71°	24′	13″
Ascension droite du milieu du ciel		88	45	49
Ascension droite de la Comète		160	10	2
Déclinaison australe		3	19	40
Donc longitude de la Comète	5^s	12	58	46
Aberration & nutation			+	17
Latitude australe		10	51	6
Aberration			—	21

V.^{e} Observ. le 31 Oct. à $5^h\ 15'\ 11''\frac{1}{2}$ de temps vrai au matin.

Hauteur de la Comète	8°	0′	0″	Azimuth de la Comète de l'Orient au Midi.	3° 43′ 0″
Parallaxe de hauteur	+	0	7		
Réfraction	—	6	29		
Hauteur vraie	7	53	38		

Angle horaire oriental de la Comète		82°	9′	10″
Ascension droite du milieu du ciel		123	55	17
Ascension droite de la Comète		206	4	27
Déclinaison boréale		3	48	52
Donc longitude de la Comète	6^s	22	44	42
Aberration & nutation			+	27
Latitude boréale		13	38	2
Aberration			+	7

J'ai supposé ici l'Azimuth de l'Orient au Midi, quoiqu'il soit donné dans Apian de l'Orient au Nord, par les raisons que j'ai déjà rapportées ci-dessus, & parce qu'alors on trouveroit l'ascension droite de la Comète de 211° 46′ 7″, la déclinaison boréale de 8° 27′ 8″; ce qui surpasseroit de beaucoup les résultats de l'observation du lendemain.

VI.^{e} Observ. le 1.^{er} Novembre, à $5^h\ 49'\ 34''\frac{3}{4}$ du matin.

Hauteur de la Comète	12°	40′	0″	Azimuth de la Comète de l'Orient au Midi.	8° 50′ 0″
Parallaxe de hauteur	+		6,5		
Réfraction	—	4	9,4		
Hauteur vraie	12	35	57		

Angle

Angle horaire oriental de la Comète	75°	16′	28″
Afcenfion droite du milieu du ciel	133	33	31
Afcenfion droite de la Comète	208	49	59
Déclinaifon boréale	4	19	6
Donc longitude de la Comète	6ˢ 25	11	45
Aberration & nutation		+	36
Latitude boréale	15	7	8
Aberration		+	7

VII.ᵉ Observ. le 8 Nov. à $5^h\ 18'\ 44''\frac{1}{4}$ de temps vrai au matin.

Hauteur de la Comète	7°	20′	0″
Réfraction	—	7	2
Parallaxe de hauteur	+	0	6
Hauteur vraie	7	13	4

Azimuth de la Comète de l'Orient au Nord. 0° 30′ 0″.

Angle horaire oriental de la Comète	85°	50′	14″
Afcenfion droite du milieu du ciel	133	1	35
Afcenfion droite de la Comète	218	51	49
Déclinaifon boréale	5	55	23
Donc longitude de la Comète	7ˢ 4	26	49
Aberration & nutation		+	27
Latitude boréale	20	5	16
Aberration		+	5

Comparaifon des longitudes & latitudes rapportées ci-deffus, avec celles qu'Apian a conclues de fes Obfervations.

Année 1532.	Temps vrai à Dresde.	Longitudes de la Comète.	Différences.	Latitudes de la Comète.	Différences.
Oct. 2	5ʰ 3′ 54″ *Apian....*	5ˢ 9° 12′ 56″ 5 8 24	0° 49′ +	13° 32 44″ A 13 44	0° 11′ —
3	4 43 0 *Apian....*	5 12 59 3 5 11 25	1 34 +	10 50 45 A 10 12	0 49 +
31	5 15 11 *Apian....*	6 22 45 9 6 21 30	1 15 +	13 38 9 B 13 15	0 23 +
Nov. 1	5 49 35 *Apian....*	6 25 12 21 6 23 57	1 15 +	15 7 15 B 14 42	0 15 +
8	5 18 44 *Apian....*	7 4 27 16 7 3 35	0 52	20 5 21 19 36	0 29 +

On voit par cette Table, que les longitudes d'Apian font toujours trop petites, & fes latitudes boréales toujours trop fortes.

Il supposoit l'ascension droite de Régulus de 0° 54′ trop peu avancée ; ce qui cause une grande partie de l'erreur ; il donne la position d'Arcturus au sujet de la Comète de 1531 ; son ascension droite est de 28′ trop petite, & la déclinaison de 42′ trop forte : il paroît qu'il s'est servi des Tables Alphonsines, tant pour les lieux du soleil que pour ceux des étoiles, & qu'il n'employoit que des moyens mécaniques pour réduire ses observations; ainsi il n'est pas étonnant qu'on trouve d'aussi grandes différences entre ses résultats & ceux calculés exactement.

Le mouvement apparent total en longitude a été de 1ˢ 25° 14′, on a 3′ de moins selon Apian.

Le mouvement apparent total en latitude a été de 33° 38′, on a 18′ de moins selon Apian.

Comparaison des longitudes & latitudes observées avec celles calculées sur les élémens de M. Halley.

Année 1532.	Temps vrai à Dresde ou à Leipsick.	Longitudes vraies géocentriques de la Comète.	Différences.	Latitudes vraies géocentriques de la Comète.	Différences.	Distances à la Terre.
Oct. 2	5ʰ 3 54″ Théorie..	5ˢ 9° 12 56″ 5 9 18 10	0° 5′ +	13° 32′ 44″ A 14 36 10	1° 3′ +	0,654
3	4 43 0 Théorie..	5 12 59 3 5 10 58 37	2 0 —	10 50 45 A 12 59	2 8 +	0,663
14	5 15 22 Théorie..	6 0 0 0 5 28 18 3	1 42 —	0 0 0 2 33 54 B	2 34 +	0,826
19	5 15 47 Théorie..	6 5 46 6 5 46 55	0 ½ +	4 51 B 7 26 45	2 36 +	0,948
31	5 15 11 Théorie..	6 22 45 9 6 22 51 14	0 6 +	13 38 9 B 13 48 23	0 10 +	1,202
Nov. 1	5 49 35 Théorie..	6 25 12 21 6 24 12 28	1 0 —	15 7 15 B 14 5 0	1 2 —	1,253
8	5 18 44 Théorie..	7 4 27 16 7 2 48 4	1 39 —	20 5 21 B 15 17 10	4 48 —	1,377

Les différences entre le calcul, d'après les élémens & l'obſervation, ſont très-conſidérables, ſur-tout en latitude ; les obſervations d'Apian ont été faites trop groſſièrement, pour eſpérer de les faire accorder dans tous les points d'une courbe exacte ; cependant on remarquera que le mouvement en latitude, d'après les élémens de M. Halley, ſe trouve d'environ 6 degrés plus petit que ſelon les obſervations.

Il ſeroit à déſirer qu'on pût trouver d'autres obſervations, pour vérifier celles d'Apian ; on n'a que celles de Fracaſtor, qui malheureuſement ne ſont guere propres à cet objet.

Voici le détail de ces obſervations, tel qu'on le trouve à la pag. 42 de quelques fragmens tirés d'un manuſcrit de la main de l'Auteur, & imprimés à la ſuite des Poéſies de Fracaſtor. (*2e édit. Padoue, 1739, in-4°.*) Les obſervations y ſont plus détaillées, plus nombreuſes, & me paroiſſent moins incorrectes que celles qui ſont rapportées dans les homocentriques du même Auteur (*in-4°. 1538, ſect. 3, chap. 3, pag. 59*).

Obſervations de la Comète de 1532, faites à Vérone par Fracaſtor.

Videri primùm is cœpit Cometa die 22 Septembris, deſiit 4 Decembris. Nos non niſi ultimâ Septembris per inſtrumenta habuimus obſervationem illius. Erat eâ die Saturnus in grad. 13 Cancri, verſùs auſtrum min. 47, ſuprà horizontem grad. 65, ante medium cœli grad. 13, medium cœli erat grad. 2 Cancri. Cometa tamen erat eâ parte ſupra horizontem grad. 17, ante medium cœli grad. 60, ab æquinoctiali auſtralis grad. circiter 6, ab ecliptica in Virgine grad. circiter 5. Die primâ Octobris, eodem accepto medio cœli ex Saturno, apparuit Cometa in Virgine, grad. 7, auſtralis ab æquinoctiali, grad. 3 $\frac{1}{2}$; ab ecliptica, ferè 14. Die 2, fuit in Virgine, grad. ferè 8 $\frac{1}{2}$, ab æquinoctiali, grad. 2, ab ecliptica, 12 $\frac{1}{2}$. Die 3, in Virgine, grad. 11, auſtralis ab æquinoctiali, grad. 1, ab ecliptica, grad. 9. Die 12, visus fuit in Virgine, grad. 22, septentrionalis ab æquinoctiali, grad. 3, australis ab ecliptica, min. 30. Die 16, apparuit in Libra, grad. ferè 2, septentrionalis ab ecliptica, grad. 4, ab æquinoctiali, 2. Die 23, visus fuit in Libra, grad. 12, Septentrionalis ab ecliptica, 2, australis ab æquinoctiali, grad. 4. Die 4 Novembris, fuit in Libra, grad. 20, australis ab æquinoctiali, grad. 3 $\frac{1}{2}$, ab ecliptica septentrionalis, grad. ferè 8. Die 27 Novembris, fuit in Scorpio, grad. ferè 8, australis ab æquinoctiali, grad. 6. Visus deindè & 4 die Decembris, sed incertâ observatione. Videtur igitur in diebus 65, in longitudine peregisse, grad. 67, orientem versùs, in latitudine autem grad. circiter 10 obiisse, quasi arcu facto, cujus capita australia fuerint, venter verò septentrionalis. . . . .

Ces observations, & sur-tout les dernières, diffèrent beaucoup de celles d'Apian; elles s'accordent encore moins que celles-ci avec les élémens de M. Halley. Pour en faire le calcul, j'ai supposé que Fracastor avoit observé la Comète vers 5 heures du matin.

Comparaison des Observations de Fracastor avec les elémens de M. Halley.

Année 1532.	Temps vrai à Vérone.	Longitudes vraies géocentriques de la Comète.	Longitudes par les élémens.	Différences.	Latitudes vraies géocentriques de la Comète.	Latitudes par les élémens.	Différences.
Sept. 30	5h 0′	5s 5° 0′	5s 5° 48′	+ 0° 48′	15° 0′. A	17° 57′.	+ 2° 57′
Oct. 1	5 0	5 7 0	5 7 36	+ 0 36	14 0 —	16 17	+ 2 17
2	5 0	5 8 30	5 9 18	+ 0 48	12 30	14 36	+ 2 6
3	5 0	5 11 0	5 10 59	— 0 1	9 0	12 59	+ 3 59
12	5 0	5 22 0	5 25 17	+ 3 17	0 30. A	0 11. B	+ 0 41
16	5 0	6 2 —	6 1 18	— 0 42	4 0. B	4 40	+ 0 40
23	5 0	6 12 0	6 11 39	— 0 33	2 0	10 18	+ 8 18
Nov. 4	5 0	6 20 0	6 27 56	+ 7 56	8 0	14 45	+ 6 45
27	5 0	7 8 0	7 17 29	+ 9 29	9 43	17 38	+ 7 55

On voit combien ces obſervations s'éloignent des poſitions calculées d'après les élémens de M. Halley ; il eſt poſſible qu'il ſe ſoit gliſſé quelques fautes d'impreſſion dans les dernières obſervations. Il y a une erreur évidente dans la déclinaiſon du 23 ; cette déclinaiſon a dû être boréale & non auſtrale ; la ſuite même des obſervations indique que la latitude devoit être plus grande ce jour-là, que celle donnée par Fracaſtor. Enfin, dans les dernieres obſervations, les différences entre les latitudes obſervées & celles calculées, ſont en ſens contraire de celles d'Apian.

OBSERVATIONS
DE LA COMÈTE DE 1661.

Cette Comète fut obſervée à Dantzic par Hévélius, depuis le 3 Février juſqu'au 28 Mars; il la compara, ſuivant ſa méthode ordinaire d'obſerver, à différentes étoiles, en prenant, avec un très-grand ſextant à pinules, les diſtances de la Comète aux étoiles. Il prit auſſi des hauteurs d'étoiles avec un petit quart de cercle qui ne donnoit que les minutes, pour corriger le temps de l'horloge portative dont il ſe ſervoit : il prit de même les hauteurs de la Comète; celles-ci ſont toujours marquées *à peu près*, & l'on verra qu'effectivement elles étoient ſouvent peu exactes.

Cette manière d'obſerver entraîne dans des réductions exceſſivement longues; je donnerai ſeulement les principaux élémens de calcul, afin de ne pas être trop long. On trouvera tout ce qu'il eſt néceſſaire d'avoir pour vérifier mes réſultats. Je vais commencer par dire un mot ſur la latitude & la longitude de l'obſervatoire d'Hévélius; je rapporterai enſuite ſes obſervations relatives à la Comète, extraites de ſa Cométographie, depuis la page 725 juſques & compris la page 730.

La latitude a été ſuppoſée, dans tous les calculs ſuivans, de $54^\circ\ 22'\ 14''$; je l'ai déduite de toutes les hauteurs ſolſticiales & des hauteurs méridiennes, ſupérieures & inférieures, de l'étoile polaire, obſervées par Hévélius avec ſon grand quart de cercle azimuthal, depuis 1652 juſqu'en 1675. Hévélius avoit établi cette latitude de $54^\circ\ 22'\ 52''$ (prod. aſtron.); mais il négligeoit la réfraction dans les hauteurs de la polaire, &c.

La conn. des temps donne la longitude de Dantzic de $1^h\ 4'\ 44''$ de temps à l'orient de Paris, d'après M. de Caſſini. J'ai ſoupçonné cette quantité un peu trop petite; la plupart des occultations d'étoiles & éclipſes de Soleil, obſervées par Hévélius, me la donnoient plus grande; enfin, je l'ai trouvée de $1^h\ 5'\ 12''$ par deux occultations & une éclipſe de Soleil, obſervées ces années dernières à Dantzic par M. Volf, comparées aux correſpondantes à Paris : je pourrai en donner les détails dans un autre Mémoire.

OBSERVATIONES Cometæ 1661, menſe Febr. & Martio, Gedani, à Johanne Hevelio peractæ.

JUXTA HOROLOG. AMBULAT. MANÈ.	DIE JOVIS, 3 FEBRUARII, COMETA OBSERVATUS.	DISTANTIÆ & ALTITUDINES.	TEMPUS EX ALTITUDINE CORRECT.	DISTANTIÆ PER REFRACTIONES CORRECTÆ.
5h 29′ 30″	Altitudo lyræ pro corrigendo tempore	50° 25′ 0″	5h 37′ 11″	
5 30 45	Denuò capta	50 35 0	5 38 20	
5 33 30	Diſtantia Cometæ à cauda Cygni	40 30 0	5 41 18	40° 35′ 55″
5 35 30	Eadem diſtantia	40 30 15	5 43 22	
5 36 0	Altitudo Cometæ circ.	7 28 0	5 41 0	
5 44 0	Diſtantia Cometæ à capite Serpentarii	47 12 40	5 22 18	47 17 34
5 46 30	Eadem diſtantia	47 13 15	5 54 54	
5 48 0	Altitudo Cometæ circ.	9 2 0	5 56 27	
5 50 0	Diſtantia Cometæ à penultima caudæ Serpentis	36 35 30	5 58 32	36 18 27
	Eadem diſtantia	36 35 30		
6 10 30	Diſtantia Cometæ à cauda Cygni	40 31 25	6 19 59	40 34 0
	Eadem diſtantia	40 31 25		
6 12 0	Altitudo Cometæ circ.	12 15 0	6 21 32	
6 15 40	Altitudo caudæ Cygni pro corrigendo tempore	43 8 0	6 25 23	
6 18 30	Altitudo lucidæ Aquilæ	24 13 0	6 28 14	
6 19 45	Denuò capta	24 24 0	6 30 52	
	DIE SATURNI, 5 FEBRUARII, COMETA OBSERVATUS.			
4 33 10	Altitudo lyræ pro corrigendo tempore	42 6 0	4 31 57	
4 34 10	Eadem altitudo	42 12 0	4 32 30	
4 41 0	Cauda Comet. ſupra horiz. conſpicua fuit nudo oculo.	....	4 39 27	
4 42 0	Altitudo extremitatis caudæ ſuprà horiz. viſæ. circ.	2 45 0	4 40 27	
4 46 0	Altitudo Cometæ	2 0 0	4 44 25	
5 0 30	Diſtantia Cometæ à capite Serpentarii	44 12 45	4 58 49	44 21 18
5 3 40	Eadem diſtantia	44 12 25	5 1 57	44 20 48
5 4 30	Altitudo Cometæ circ.	4 18 0	5 2 46	
5 9 0	Diſtantia cuſpidis caudæ à capite Serpentarii	40 42 20	5 8 15	
5 14 0	Diſtantia Cometæ à cauda Cygni	39 34 55	5 14 13	39 42 5
5 18 40	Eadem diſtantia	39 33 25	5 17 1	39 40 27
5 19 20	Altitudo Cometæ circ.	7 15 0	5 17 40	
5 23 0	Diſtantia cuſp. caudæ à cauda Cygni	35 10 40	5 21 10	
5 28 45	Diſtantia Cometæ ab extrema alæ Cygni dub.	26 16 45	5 26 52	26 10 15
5 31 0	Eadem diſtantia	26 16 25	5 29 5	
5 32 0	Altitudo Cometæ	8 31 0	5 30 4	
5 38 40	Diſtantia Cometæ à penultima caudæ Serpentis	33 40 15	5 36 42	33 42 43
5 41 40	Eadem diſtantia	33 40 5	5 39 11	
5 48 0	Diſtantia Cometæ à capite Serpentarii	44 13 0	5 45 58	44 16 38
	Eadem diſtantia	44 13 0		
5 52 10	Altitudo Cometæ	11 34 0	5 50 6	
5 59 40	Diſtantia Cometæ à cauda Cygni	39 40 45	5 57 33	39 43 15
	Eadem diſtantia	39 40 45		
6 3 0	Altitudo Cometæ	13 10 0	6 0 51	
6 4 45	Altitudo caudæ Cygni pro corrigendo tempore	41 15 0	6 3 29	
6 5 45	Eadem altitudo	41 21 0	6 4 20	

Juxta Horolog. ambulat. manè.	Die Saturni, 5 Februarii, Cometa obſervatus.	Diſtantiæ & altitudines.	Tempus ex altitudine correct.	Diſtantiæ per refractiones correctæ.
6h 13′ 30″	Diſtantia Cometæ à Venere	34° 47′ 35″	6h 11′ 18″	
6 15 0	Altitudo Veneris . . . circ.	3 16 0	6 12 47	
6 15 45	Altitudo Cometæ . . . circ.	14 58 0	6 13 31	
6 23 30	Diſtantia Cometæ à capite Serpentarii . . . dub.	43 51 50	6 21 6	
	Eadem diſtantia	43 51 50		
6 25 0	Altitudo Cometæ . . . circ.	16 30 0	6 22 36	
6 34 30	Altitudo caudæ Cygni. Vix ſatis diligent. ob crepuſc.	45 20 0	6 32 0	
6 41 15	Altitudo Arcturi	50 0 0	6 38 54	
6 42 15	Eadem altitudo	49 52 0	6 40 12	
	Die Solis, 6 Fepruarii, Cometa obſervatus.			
5 10 45	Altitudo caudæ Cygni . . . dub.	33 5 0	4 57 40	
5 12 40	Eadem altitudo	33 20 0	4 59 29	
5 20 0	Diſtantia Cometæ à penult. caudæ Serpentis dub.	32 19 50	5 6 48	32° 23′ 37″
5 21 0	Eadem diſtantia	32 19 55	5 8 48	
5 25 40	Diſtantia cuſp. caudæ à capite Serpentarii	39 40 0	5 12 10	
5 33 15	Diſtantia Cometæ à capite Serpentarii	42 37 45	5 19 32	42 40 25
	Eadem diſtantia	42 37 45		
5 41 15	Diſtantia Cometæ à cauda Cygni	39 22 50	5 27 18	
5 44 0	Eadem diſtantia	39 22 10	5 31 2	
5 46 0	Denuò capta	39 22 30	5 31 59	39 26 25
5 47 0	Altitudo Cometæ . . . circ.	10 40 0	5 32 54	
5 50 0	Diſtantia cuſp. caudæ à cauda Cygni	36 47 0	5 35 48	
6 12 0	Diſtantia Cometæ ab extrema alæ Cygni	26 38 15	5 57 10	26 40 0
6 13 0	Eadem diſtantia	26 38 15	5 58 8	
6 14 0	Altitudo Cometæ . . . circ.	15 0 0	5 59 3	
6 21 0	Diſtantia Cometæ à capite Serpentarii	42 38 50	6 5 58	42 40 42
	Eadem diſtantia	42 38 50		
6 30 0	Diſtantia Cometæ à cauda Cygni	39 27 15	6 14 40	39 28 40
6 31 0	Altitudo Cometæ	17 0 0	6 15 38	
6 35 0	Altitudo lyræ	58 18 0	6 19 34	
6 36 45	Eadem altitudo	58 30 0	6 21 2	
	Die Lunæ, 7 Februarii, Cometa obſervatus.			
3 49 0	Altitudo lyræ	36 6 20	3 41 29	
3 51 45	Eadem altitudo	36 30 15	3 44 21	
4 21 30	Cauda primùm ſup. horiz. conſpecta	. . . .	4 14 41	
4 44 0	Diſt. cuſp. caudæ à cap. Serpentarii . . . dub.	38 44 30	4 37 38	
4 51 0	Diſtantia Cometæ à cap. Serpentarii	41 15 15	4 44 47	41 21 55
4 53 25	Eadem diſtantia	41 13 20	4 47 15	
4 57 40	Diſtantia Cometæ à cauda Cygni	39 8 55	4 51 35	39 14 37
4 59 40	Eadem diſtantia	39 07 50	4 53 38	
5 1 35	Altitudo Cometæ	7 0 0	4 55 34	
5 3 50	Diſtantia cuſp. caudæ à cauda Cygni . . . dub.	36 19 25	4 57 51	
5 18 30	Diſtantia Cometæ ab extrema alæ Cygni	26 51 35	5 12 46	
5 20 45	Eadem diſtantia	26 49 0	5 15 3	
5 22 30	Denuò capta	26 50 20	5 16 51	26 52 30
5 23 26	Altitudo Cometæ . . . circ.	11 3 0	5 17 50	

Juxta

JUXTA HOROLOG. AMBULAT. MANÈ.	DIE LUNÆ, 7 FEBRUARII, COMETA OBSERVATUS.	DISTANTIÆ & ALTITUDINES.	TEMPUS EX ALTITUDINE CORRECT.	DISTANTIÆ PER REFRACTIONES CORRECT.
5h 24′ 54″	Altitudo caudæ Cygni pro corrig. temp.	36° 51′ 0″	5h 19′ 11″	
5 29 15	Diſtantia Cometæ à dextro genu Pegaſi	41 4 45	5 24 46	
5 30 20	Eadem diſtantia	41 4 30	5 24 52	41° 4′ 45″
5 33 25	Denuò capta	41 4 30	5 28 0	
5 44 50	Diſtantia Cometæ à lucida Lyræ	39 56 40	5 39 40	
5 47 30	Eadem diſtantia	39 57 50	5 42 25	40 1 40
5 51 0	Rursùs	39 57 50	5 46 0	
5 59 20	Diſtantia Cometæ à cap. Serpentarii .... dub.	40 58 25	5 54 25	
6 1 35	Altitudo Cometæ .... circ.	15 30 0	5 56 44	
6 5 25	Diſtantia à cauda Cygni .... dub.	39 11 0	6 0 39	40 11 22
6 10 25	Altitudo Cometæ .... circ.	17 15 0	6 5 45	
6 12 15	Altitudo caudæ Cygni .... dub.	43 22 20		
6 14 20	Eadem altitudo	43 39 5		
6 40 40	Altitudo Arcturi	48 59 0	6 36 31	
6 41 30	Eadem altitudo	48 52 0	6 37 42	
	DIE JOVIS, 10 FEBRUARII, COMETA OBSERVATUS.			
4 23 50	Altitudo Lyræ	41 43 0	4 9 35	
4 24 45	Eadem altitudo	41 57 0	4 11 12	
4 53 30	Diſtantia Cometæ à capite Serpentarii	37 23 45	4 39 30	37 28 15
4 55 45	Denuò capta	37 23 5	4 41 45	
4 56 30	Altitudo Cometæ .... circ.	9 30 0	4 42 25	
5 2 40	Diſtantia Cometæ à cauda Cygni	39 5 30	4 48 30	39 8 50
5 5 15	Eadem diſtantia	39 5 30	4 51 5	
5 10 0	Diſtantia Cometæ ab extr. alæ auſtr. Cygni	28 7 15	4 55 45	28 8 30
5 12 0	Eadem diſtantia	28 7 11	4 57 45	
5 16 30	Diſtantia Cometæ à dext. genu Pegaſi	43 33 30	5 2 12	43 33 30
5 19 0	Eadem diſtantia	43 32 50	5 4 42	
5 29 0	Diſtantia Cometæ à lucida Lyræ	37 40 20	5 14 40	37 43 32
5 33 0	Eadem diſtantia	37 39 30	5 19 40	
5 35 0	Altitudo Cometæ .... circ.	15 0 0	5 20 35	
5 42 30	Diſtantia Cometæ à cauda Cygni	39 7 45	5 28 5	39 9 22
5 44 15	Eadem diſtantia	39 7 20	5 29 50	
5 46 0	Altitudo Cometæ	16 0 0	5 31 32	
5 50 45	Diſtantia Cometæ à capite Serpentarii .... dub.	37 31 35	5 36 17	37 33 2
	Eadem diſtantia .... dub.	37 31 35		
5 55 0	Altitudo Cometæ .... circ.	17 50 0	5 41 30	
6 0 0	Diſtantia Cometæ ab infer. in dext. man. Serpent.	35 39 5	5 45 30	35 39 10
6 3 0	Eadem diſtantia	35 39 0	5 48 30	
6 4 5	Altitudo Cometæ .... circ.	18 50 0	5 49 0	
6 5 0	Altitudo infer. in dext. man. Serpent. .... circ.	20 0 0	5 51 25	
6 10 15	Diſtantia Cometæ à capite Serpentarii .... dub.	37 17 40	5 55 35	
	Eadem diſtantia	37 17 40		
6 16 40	Diſtantia Cometæ à cauda Cygni... dub. ob Auroram.	39 7 5	6 1 55	
6 17 30	Altitudo Cometæ .... circ.	21 25 0	6 2 45	
6 21 30	Altitudo caudæ Cygni	44 25 55	6 6 47	
6 24 30	Eadem altitudo	44 49 40	6 9 39	

Juxta Horolog. ambulat. manè.	Die Solis, 13 Februarii, Cometa observatus.	Distantiæ & altitudines.	Tempus ex altitudine correct.	Distantiæ per refractiones correctæ.
4^h 19 45''	Altitudo Lyræ	44° 43' 0''	4^h 18' 27''	
4 21 0	Eadem altitudo	44 51 0	4 19 22	
4 28 0	Distantia caudæ Cygni & Cometæ	39 27 0	4 26 30	
4 34 0	Eadem distantia	39 28 45	4 32 30	39° 30' 32''
4 47 0	Distantia Cometæ ab Ancone alæ infer. Cygni	29 19 0	4 45 30	
4 51 0	Eadem distantia	29 17 0	4 49 50	29 13 43
5 4 0	Distantia Cometæ ab Ancone sup. alæ Cygni	38 9 30	5 3 0	
5 8 30	Eadem distantia	38 5 30	5 7 40	38 7 0
5 11 30	Denuò capta	38 5 30	5 10 50	
5 34 0	Distantia Cometæ ab Ancone inf. alæ Cygni	29 17 45	5 34 0	
	Eadem distantia	29 18 0		
5 44 0	Altitudo caudæ Cygni	42 57 0	5 44 24	
5 45 0	Eadem altitudo	43 5 0	5 45 17	
5 49 0	Distantia Cometæ ab Ancone sup. alæ Cygni	38 6 30	5 49 20	
5 50 0	Eadem distantia	38 6 30	5 50 25	
5 52 30	Altitudo Cometæ	22 10 0	5 53 0	
5 54 40	Altitudo Aquilæ	25 15 0	5 56 8	
	DIE LUNÆ, 14 FEBRUARII, Cometa observatus.			
5 0 0	Distantia Cometæ à collo Aquilæ æqualis erat distantiæ duarum fixarum in pede Bor. Cygni	....	4 54 0	
5 18 0	Altitudo Lyræ	53 26 0	5 14 17	
5 21 0	Altitudo Cometæ	19 15 0		
5 26 0	Cometa triangulum æquilaterum, cum lucida in scapulis & lucidam sequente, constituebat; basis erat lucida Aquilæ & lucidam sequens	....	5 22 0	
	Distantia Cometæ à lucida & à collo obtinebat rationem sesqui alteram, hoc est 2 ad 3			
5 39 30	Altitudo Cometæ	22 12 0	5 39 0	
5 41 0	Altitudo Lyræ	57 9 0	5 40 38	
	DIE JOVIS, 17 FEBRUARII, Cometa observatus.			
4 41 0	Dist. Com. à lucid. Aquil. min. aliquant. dist. lucid. & colli, aliquant. verò maj. dist. lucid. & humeri Aquil.	....	4 48 0	
5 5 0	Altitudo caudæ Cygni	40 45 0	5 12 46	
5 8 0	Altitudo Cometæ	21 30 0	5 16 0	
	DIE SOLIS, 20 FEBRUARII, Cometa observatus.			
3 9 15	Altitudo Lyræ	39 14 0	3 13 10	
3 12 0	Eadem altitudo	39 42 0	3 16 28	
	Distantia Cometæ à stell. alæ austr. (μ)	1 0 0	tubo majori.	
	Et ab australiori ($\varkappa$)	1 30 0		
	Ab nova aliqua stella suprà hanc, Austr. versùs	0 45 0		
4 45 5	Distantia Cometæ ab Ancone alæ aust. Cygni	31 8 0	4 49 20	
4 49 0	Eadem distantia	31 2 0	4 53 20	
4 56 0	Distantia Cometæ ab Ancone alæ Bor. Cygni	38 10 30	5 0 20	
4 58 0	Eadem distantia	38 11 25	5 2 0	
5 0 0	Altitudo Cometæ ... circ.	23 0 0	5 4 20	

Juxta horolog. ambulat. mané.	Die Solis, 20 Februarii, Cometa observatus.	Distantiæ & altitudines.	Tempus ex altitudine correct.	Distantiæ per refractiones correctæ.
5h 2′ 30″	Distantia Cometæ à cauda Cygni...............	40° 40′ 0″	5h 7′ 0″	
	Distantia Cometæ à lucida Aquilæ........... circ.	3 45 0		
5 11 40	Altitudo caudæ Cygni.........................	42 46 0	5 16 2	
5 12 30	Eadem altitudo................................	42 55 0	5 17 47	
5 14 0	Repetita.......................................	43 4 0	5 18 12	
	Die Mercurii, 2 Martii. Cometa observatus.			
3 55 0	Altitudo caudæ Cygni.........................	36 44 0	3 53 24	
	Distantia Cometæ ab extrema alæ A Cygni.......	35 21 0	3 52 0	
	Eadem distantia...............................	35 21 0		
4 7 0	Cometa & cauda Cygni.........................	42 55 15	4 3 0	
	Eadem distantia...............................	42 55 15		
4 17 0	Altitudo caudæ Cygni.........................	39 1 0	4 10 42	
	Distantia Cometæ ab Ancone alæ B Cygni........	39 38 0		
	Eadem distantia...............................	39 38 0		
4 34 0	Altitudo caudæ Cygni.........................	41 12 0	4 27 0	
	Altitudo Cometæ........................ circ.	24 30 0		
4 34 0	Distantia Cometæ à lucida Lyræ................	34 41 5	4 27 0	
	Eadem distantia...............................	34 41 5		
4 47 0	Distantia Cometæ à cauda Cygni........... dub.	42 58 20	4 41 0	
	Eadem distantia...............................	42 55 45		
4 56 0	Distantia Cometæ ab extrem. alæ A Cygni.... dub.	35 12 30	4 51 0	
	Eadem distantia...............................	35 16 20		
5 3 0	Altitudo caudæ Cygni.........................	45 32 0	4 58 22	
	Die Jovis, 10 Martii. Cometa observatus.			
2 45 0	Altitudo caudæ Cygni.........................	30 10 0	2 36 20	
2 55 0	Distantia Cometæ & in Ancone alæ B Cygni......	40 34 20	2 52 0	40° 36′ 35″
	Eadem distantia...............................	40 34 20		
3 2 0	Distantia Cometæ à cauda Cygni........A.....	44 19 0	3 1 0	44 20 4
	Eadem distantia...............................	44 19 0		
3 3 0	Altitudo Cometæ........................ circ.	22 20 0	3 6 0	
3 15 0	Distantia Cometæ ab extrema alæ A Cygni.......	37 22 40	3 17 0	37 22 38
	Eadem distantia...............................	37 22 40		
3 29 0	Distantia Cometæ à lucida Lyræ................	34 47 0	3 30 0	
	Eadem distantia...............................	34 47 0		
3 35 0	Distantia Cometæ à cauda Cygni................	44 24 10	3 36 0	
3 40 0	Altitudo lucidæ Aquilæ........................	25 12 0	3 41 35	

Die Solis, 28 Martii, Cometa tubo prælongo observatus.

2 15 0 — Huc usque à die 10 Martii, cœlum continuò fuit adeò nubilum, ut nihil penitùs de Cometa animadverti potuit : inter diem verò 27 & 28 Martii, clarissima nox affulsit, ut plurimæ fixæ cum Planetis, congruis organis, tùm etiam ipse Cometa, sed tubo tantùm optico, haud vulgari tamen observatus sit, & quidem præsente ac teste eximio & celeb. viro D. Ismale Bullialdo, Astron. summo, quem tum in ædib. meis longè exoptatissim., de quo mihi valdè gratulor, habebam hospitem. Cometa quidem valdè pallidus ac tenuis erat, quoad diametr. tamen satis conspicuus ; existebat propè stellulam hactenùs incognit. & quidem paulò supr. eam sinistr. versùs, in rect. circit. lin. inter brach. dext. Antinoi & ultim. caud. Serp. ; item int. lucid. Aquil. & penult. caud. Serp.

Hæc sunt, quæ hîc Gedani observari de Cometa 1661 potuerunt.

Réduction & examen des ascensions droites & déclinaisons moyennes des étoiles au temps des observations de la Comète de 1661, en Fevrier & Mars.

α du Cygne, 3 Février 1661. *Cauda Cygni.*

Ascension droite.	Déclinaison.	
307° 25′ 42.″3	44° 6′ 6. 9″	Par le Catalogue Britannique.
307 28 20. 8	44 5 48. 3	Selon la Table Astron. naut. de M. le Monnier.
307 28 12. 1	44 5 41. 3	Selon le Catalogue de M. Bradley.
307 28 0. 4	44 5 44. 6	*Id.* Catalogue de M. Mayer.
307 28 8. 8	44 5 44. 3	Tab. de M. Maskeline, fin des Obs. de Greenvich.
307 28 3. 1	44 5 41. 6	Selon le Catalogue de M. de la Caille.
307 28 9. 1	44 5 44.	Position moyenne le 3 Fév. 1661, par un milieu entre 5.

α du Serpentaire, 3 Février 1661. *Caput Serpentarii.*

Ascension droite.	Déclinaison.	
259° 47′ 41.″2	12° 50′ 26.″	Catalogue Britannique.
259 48 24. 6	12 50 42. 5	Catalogue de M. Bradley.
259 48 34. 0	12 50 46. 3	Catalogue de M. Mayer.
259 48 23. 1	12 50 42. 2	M. Maskeline.
259 48 20. 3	12 50 49. 2	Catalogue de M. de la Caille.
259 48 25. 5	12 50 45. 0	Par un milieu entre 4. On a négligé le mouv. propre en ascens. dr. donné par M. Mayer, parce qu'il n'est que de — 9″ en 44 ans, quantité trop petite pour être bien constatée.

η à la queue du Serpent, 3 Fév. 1661. *Penultima caud. Serpentis.*

Ascension droite.	Déclinaison.	
270° 56′ 56.″6	2° 56′ 51.″6	Catalogue Britannique.
270 55 54. 8	2 57 15. 8	Catalogue de M. de la Caille; donc Flamsteed donne 62″ de plus en ascens. dr. & 24″ de moins en déclinaison : on a adopté le dernier résultat.

Arcturus du 3 au 4 Février 1661.

Ascension droite.	Déclinaison.	
210° 3′ 55.″3	20° 58′ 9″7	Selon M. le Monnier. On s'en est tenu à ce seul résultat, par les raisons rapportées au sujet des observations de 1532.

α de la Lyre, 7 Février 1661. *Lucida Lyræ.*

Ascension droite.	Déclinaison.	
276° 21′ 24.″9	38° 30′ 29.″7	Catalogue Britannique.
276 22 23. 6	38 30 55. 6	M. le Monnier.
276 22 15. 9	38 30 30. 1	M. Bradley.
276 22 3. 8	38 30 32. 5	M. Mayer.
276 22 18. 9	38 30 33. 1	M. Maskeline.
276 22 12. 9	38 30 32. 3	M. de la Caille.
276 22 14. 9	38 30 36. 9	Par un milieu entre 5.

ζ du Cygne, 7 Février 1661. *Extrem. alæ Cygni.*

Ascension droite.	Déclinaison.	
314° 37′ 18.″7	28° 51′ 52.″1	Catalogue Britannique.
314 37 40. 8	28 51 51. 8	Catal. de M. de la Caille. On s'est tenu à ce dernier.

υ à la main dr. du Serpent. 10 Fév. 1661. *Inf. in dext. man. Serp.*

Ascension droite.	Déclinaison.	
265° 5′ 24.″8	9° 41′ 12.″7	Catalogue Britannique.

η au genou droit de Pégase, 7 Février 1661. *Dext. genu Pegasi.*

Ascension droite.	Déclinaison.	
336° 46′ 50.″1	28° 27′ 52.″1	Catalogue Britannique.
336 47 28. 4	28 27 54. 4	Catal. de M. de la Caille. On a adopté ce dernier.

ε du Cygne, 13 Février 1661. *In Ancone inf. alæ Cygni.*

Ascension droite.	Déclinaison.	
308° 6′ 40.″4	32° 44′ 11.″7	Catalogue Britannique.
308 8 19. 0	32 44 17. 0	M. Bradley.
308 8 1. 0	32 44 11. 0	M. de la Caille.

M. Mayer donne le mouvement propre de cette étoile de + 18″ en ascension droite en 44 ans, & de + 30″ en déclinaison, en comparant les Observations de M. de la Caille à celles de Rœmer; il paroît cependant moindre en ascension droite, selon M. de la Caille, & plus grand, selon M. Bradley. En prenant un milieu entre ces deux Catalogues, & ayant égard au mouvement propre par un milieu aussi, on aura la position moyenne corrigée pour le 13 Février 1661.

Ascension droite.	Déclinaison.	
308° 7′ 27″	32° 43′ 15″	Ce qui se rapproche de Flamsteed en ascens. dr.; mais on s'éloigne en déclinaison : ce mouvement ne paroît pas trop connu.

δ du Cygne, 13 Février 1661. *In Ancone sup. alæ Cygni.*

Ascension droite.	Déclinaison.	
293° 34′ 26.″1	44° 20′ 22.″5	Catalogue Britannique.
293 35 43. 3	44 19 56. 1	M. Bradley.
293 35 42. 4	44 19 59. 2	M. de la Caille.
293 35 42. 8	44 19 57. 6	Par un milieu entre 2.

α de l'Aigle, 20 Février 1661. *Lucida Aquilæ.*

Ascension droite.	Déclinaison.	
293° 32′ 46.″0	8° 1′ 12.″4	Catalogue Britannique.
293 33 23. 1	8 1 44. 3	M. le Monnier.
293 33 18. 8	8 1 34. 3	M. Bradeley.
293 33 25. 6	8 1 38. 9	M. Mayer.
293 33 21. 1	8 1 37. 9	M. Maskeline.
293 33 24. 6	8 1 38. 8	M. de la Caille.
293 33 22. 6	8 1 38. 8	Par un milieu entre 5.

On a eu égard au mouvement propre de cette étoile, en prenant un milieu entre le mouvement donné par M. Mayer de $64''$ en 100 ans, & celui donné par M. Maskeline de $57''$ en 100 ans. M. de Caſſini (*Mém. Acad.* 1738) avoit déjà déterminé ce mouvement, en comparant ſes Obſervations à celles de Flamſteed, & même à celles de Tycho. On a rapproché par ce moyen le réſultat du Catalogue Britannique, qui s'éloignoit encore plus des autres ſans cette conſidération.

Ces aſcenſions droites & déclinaiſons réduites, en ayant égard à toutes les corrections néceſſaires entre les époques des Catalogues & celles de 1661, ainſi qu'à l'aberration & à la nutation, ont ſervi à calculer les temps vrais des obſervations de chaque jour par les hauteurs des étoiles obſervées par Hévélius, les hauteurs des étoiles dont il a meſuré les diſtances à la Comète, les longitudes & latitudes de ces étoiles; enfin, à trouver tous les élémens néceſſaires pour corriger de la réfraction & de la parallaxe les diſtances de la Comète aux étoiles : on a calculé les hauteurs de la Comète d'après les élémens de M. Halley. On ſent dans quelle longue ſuite de calculs cela a dû entraîner; mais afin d'abréger, on ne donnera dans la Table ſuivante que les réſultats les plus eſſentiels : le titre de chaque colonne indique ce qu'elle renferme.

Hévélius avoit pris les poſitions des étoiles dans le Catalogue de Tycho-Brahé; il ſe ſervoit de tables du Soleil, qui donnoient le lieu de cet aſtre de pluſieurs minutes trop avancé; il employoit une mauvaiſe réfraction; il la négligeoit même quand les étoiles étoient élevées de plus de 20 degrés; il ſuppoſoit à la Comète une parallaxe quatre fois trop grande, & ſes hauteurs obſervées de la Comète n'étoient pas exactes : ce ſont les principales raiſons pour leſquelles les temps vrais qu'il a rapportés, & ſes diſtances vraies de la Comète aux étoiles, diffèrent aſſez des nôtres. Cependant on a ſuivi les temps vrais d'Hévélius pour les obſervations du 10 Mars, quoiqu'on ait de fortes raiſons pour croire qu'il faudroit y ajouter une heure environ, à partir de $2^h\,55'$; ce qui eſt ſur-tout indiqué par la hauteur de l'Aigle. On n'a pas oſé faire cette correction; on ſe borne à l'indiquer, en faiſant remarquer qu'il n'en pourroit réſulter qu'une légère différence ſur le lieu de la Comete, parce que ſon mouvement étoit alors très-lent.

Distances apparentes de la Comète aux étoiles, & distances corrigées de la réfraction & de la parallaxe.

3 Février au matin.

Temps vrai.	Distance apparente de la Comète aux étoiles.	Hauteur des étoiles, & réfraction.	Hauteur vraie de la Comète, réfraction et parallaxe.	Distance vraie de la Comète aux étoiles.
5h 41′ 45″	Dist. à α du Cygne. 40° 30′ 0″	37° 13′ 0″ réfr. 1 15	6° 24′ 0″ réfr. 7 49 paral. 14	40° 35′ 16″
5 52 38	Dist. à α d'Ophiucus. 47 12 40	40 34 0 1 7	8 0 0 6 25 14	47 17 49
5 58 51	Dist. à η du Serpent. 36 15 30	22 13 0 2 19	8 55 0 5 48 14	36 17 17
6 20 7	Dist. à α du Cygne. 40 31 25	42 23 0 1 3	11 59 0 4 20 14	40 34 4½

La distance à η du Serpent se trouve de 36° 35′ 30″ dans les Observations d'Hévélius; mais c'est une faute d'impression, il faut 36° 15′ 30″, comme il l'employe lui-même dans ses calculs.

5 Février au matin.

Temps vrai.	Distance apparente de la Comète aux étoiles.	Hauteur des étoiles, & réfraction.	Hauteur vraie de la Comète, réfraction et parallaxe.	Distance vraie de la Comète aux étoiles.
5h 2′ 26″	Dist. à α d'Ophiucus. 44° 12′ 25″	35° 44′ 0″ 1 19	4° 32′ 0″ 10 24 14	44° 19′ 16″
5 15 5	Dist. à α du Cygne. 39 34 10	34 50 0 1 22	6 23 0 7 50 14	39 39 8
5 27 28	Dist. à ζ du Cygne. 26 16 45	21 16 0 2 25	8 11 0 6 17 13	26 18 56
5 37 23	Dist. à η du Serpent. 33 40 15	20 41 0 2 30	9 39 0 5 23 13	33 41 40
5 46 42	Dist. à α d'Ophiucus. 44 13 0	40 48 0 1 6	11 11 0 4 40 13	44 15 47
5 58 20	Dist. à α du Cygne. 39 40 35	40 31 0 1 7	12 40 0 4 7 13	39 43 6½

6 Février au matin.

Temps vrai.	Distance apparente de la Comète aux étoiles.	Hauteur des étoiles, & réfraction.	Hauteur vraie de la Comète, réfraction et parallaxe.	Distance vraie de la Comète aux étoiles.
5h 6′ 33″	Dist. à η du Serpent. 32° 19′ 55″	17° 31′ 0″ réf. 2 59	6° 57′ 0″ réf. 7 17 par. 13	32° 21′ 48″
5 19 25	Dist. à α d'Ophiucus. 42 37 45	38 14 0 1 12	8 46 0 5 54 13	42 41 22
5 31 56	Dist. à α du Cygne. 39 22 30	37 31 0 1 14	10 35 0 4 53 13	39 25 16
5 57 28	Dist. à ζ du Cygne. 26 38 15	26 1 0 1 56	14 17 0 3 40 13	26 39 16
6 6 8	Dist. à α d'Ophiucus. 42 38 50	43 5 0 1 1	15 31 0 3 21 13	42 40 41 $\frac{1}{3}$
6 15 9	Dist. à α du Cygne. 39 27 15	43 21 0 1 0	16 48 0 3 5 13	39 28 50 $\frac{2}{3}$

7 Février au matin.

Temps vrai.	Distance apparente de la Comète aux étoiles.	Hauteur des étoiles, & réfraction.	Hauteur vraie de la Comète, réfraction et parallaxe.	Distance vraie de la Comète aux étoiles.
4h 47′ 8″	Dist. à α d'Ophiucus. 41° 15′ 15″	34° 48′ 0″ réf. 1 22	5° 42′ 0″ réf. 8 40 par. 13	41° 20′ 47″
4 54 6	Dist. à α du Cygne. 39 8 55	33 10 0 1 27	6 43 0 7 30 13	39 13 10
5 20 13	Dist. à ζ du Cygne. 26 50 20	21 22 0 2 24	10 32 0 4 57 13	26 51 2 $\frac{2}{3}$
5 28 16	Dist. à η de Pégase. 41 4 30	10 41 0 4 53	11 43 0 4 28 13	41 5 10
5 45 48	Dist. à la Lyre. 39 57 50	53 56 0 41	14 14 0 3 41 13	40 0 36
6 4 7	Dist. à α du Cygne. 39 11 0	42 23 0 1 2	16 51 0 3 5 13	39 12 37 $\frac{1}{3}$

10 Février au matin.

Temps vrai.	Distance apparente de la Comète aux étoiles.	Hauteur des étoiles, & réfraction.	Hauteur vraie de la Comète, réfraction et parallaxe.	Distance vraie de la Comète aux étoiles.
4h 39′ 38″	Dist. à α d'Ophiucus. 37° 23′ 45″	35° 21′ 0′ réf. 1 20	8° 56′ 0″ réf. 5 48 par. 12	37° 27′ 17″
4 48 43	Dist. à α du Cygne. 39 5 30	33 59 0 1 25	10 14 0 5 5 12	39 8 11
4 56 0	Dist. à ζ du Cygne. 28 7 15	19 42 0 2 37	11 19 0 4 37 12	28 8 13
5 2 27	Dist. à η de Pégase. 43 33 30	9 1 0 5 45	12 15 0 4 17 12	43 34 21
5 14 51	Dist. à la Lyre. 37 40 20	51 10 0 46	14 2 0 3 44 12	37 43 5 1/3
5 28 15	Dist. à α du Cygne. 39 7 45	39 8 0 1 10	15 57 0 3 17 12	39 9 21 1/2

13 Février au matin.

Temps vrai.	Distance apparente de la Comète aux étoiles.	Hauteur des étoiles, & réfraction.	Hauteur vraie de la Comète, réfraction et parallaxe.	Distance vraie de la Comète aux étoiles.
4h 33′ 13″	Dist. à α du Cygne. 39° 38′ 45″	33° 31′ 0″ réf. 1 26	11° 32′ 0″ réf. 4 32 par. 12	39° 30′ 55″
4 50 42	Dist. à ε du Cygne. 29 17 0	27 5 0 2 1	14 4 0 3 41 12	29 17 53 1/2
5 8 22	Dist. à δ du Cygne. 38 5 30	45 45 0 55	16 36 0 3 8 1/2 11 1/2	38 7 22
5 34 22	Dist. à ε du Cygne. 29 17 45	33 15 0 1 27	20 16 0 2 33 11	29 18 35
5 49 38	Dist. à δ du Cygne. 38 6 30	51 36 0 45	22 20 0 2 18 11	38 7 49

Hévélius avertit que le 10 Février les observations sont un peu douteuses, parce que son Aide qui avoit la vue courte, ne distinguoit pas trop bien la Comète, à cause du clair de Lune; cependant on voit que ces distances s'accordent assez bien, lorsqu'elles sont dégagées de la réfraction & de la parallaxe.

20 Février au matin.

Temps vrai.	Distance apparente de la Comète aux étoiles.	Hauteur des étoiles, & réfraction.	Hauteur vraie de la Comète, réfraction et parallaxe.	Distance vraie de la Comète aux étoiles.
4h 49′ 45″	Dist. à ε du Cygne. 31° 8′ 30″	30° 43′ 0″ réfr. 1 36	20° 2′ 0″ réfr. 2 34,4 paral. 10,4	31° 8′ 44″
4 53 40	Dist. à ε du Cygne. 31 2 0	....	....	31 2 43
5 0 40	Dist. à δ du Cygne. 38 10 30	48 35 0 50	21 40 0 2 22 10	38 11 51 $\frac{1}{3}$
5 2 40	Dist. à δ du Cygne. 38 11 25	....	....	38 12 46
5 7 10	Dist. à α du Cygne. 40 40 0	41 31 0 1 4	22 25 0 2 17 10	40 41 2 $\frac{1}{2}$

2 Mars au matin.

3h 53′ 40″	Dist. à ζ du Cygne. 35° 21′ 0″	21° 36′ 0″ 2 23	18° 45′ 0″ 2 46 9	35° 21′ 36″
4 4 0	Dist. à α du Cygne. 42 55 15	38 4 0 1 13	20 10 0 2 33 9	42 56 22 $\frac{1}{2}$
4 12 36	Dist. à δ du Cygne. 39 38 0	46 58 0 53	21 21 0 2 24 9	39 38 45
4 27 14	Distance à la Lyre. 34 41 5	55 17 0 39	23 17 0 2 12 9	34 42 28 $\frac{1}{2}$

10 Mars au matin.

2h 52′ 0″	Dist. à δ du Cygne. 40° 34′ 20″	39° 56′ 0″ 1 8	14° 46′ 0″ 3 32 9	40° 36′ 14″
3 1 0	Dist. à α du Cygne. 44 19 0	33 44 0 1 25	16 3 0 3 16 9	44 20 22

10 MARS AU MATIN.

TEMPS VRAI.	DISTANCE APPARENTE DE LA COMÈTE AUX ÉTOILES.	HAUTEUR DES ÉTOILES, & RÉFRACTION.	HAUTEUR VRAIE DE LA COMÈTE, RÉFRACTION ET PARALLAXE.	DISTANCE VRAIE DE LA COMÈTE AUX ÉTOILES.
3h 17′ 0″	Dist. à ζ du Cygne. 37h 22′ 40″	20° 36′ 0″ 2 30	18° 17′ 0″ 2 51 9	37° 23′ 16′
3 30 0	Distance à la Lyre. 34 47 0	51 17 0 45	20 4 0 2 34 9	34 48 $37\frac{1}{3}$

Si l'on ajoutoit une heure aux temps de l'horloge (comme je soupçonne qu'il faudroit le faire), cette dernière distance vraie seroit diminuée d'environ 38 à 40″. Il n'y a aucune des quatre dernières distances qui puisse être affectée d'une minute d'erreur par cette correction d'une heure, soit qu'on l'adopte ou qu'on la rejette; les observations d'Hévélius, faites avec de simples pinules, ont-elles ce degré de précision à l'égard d'une Comète dont le centre est toujours difficile à distinguer, & qu'on a bien de la peine à estimer, même avec des instrumens à lunettes?

Longitudes & latitudes des étoiles affectées de l'aberration seulement, telles qu'on les a employées pour calculer les positions de la Comète de 1661, d'après les distances corrigées qu'on vient de rapporter.

3 Février.

	Longitude.	Latitude.
η du Serpent.	27° 59′ 21″,9	20° 31′ 26″,2
α du Serpentaire.	257° 42′ 22″,6	35° 53′ 24″,1
α du Cygne.	330 39 7,0	55 55 27,71

7 Février.

	Longitude.	Latitude.
η du Serpent.	270 59 23,7	20 31 25,8
α d'Ophiucus.	25[illegible] 42 24,6	35 53 23,7
α du Cygne.	330 39 7,1	59 55 26,5
la Lyre.	280 33 50,8	61 45 19
ζ du Cygne.	328 20 15,6	43 43 7,4
η de Pegase.	250 59 56,2	35 6 51,1

10 Février.

	Longitude.	Latitude.
α d'Ophiucus.	257 42 26,3	35 53 23,4
α du Cygne.	330 39 7,1	59 55 25,6
la Lyre.	280 33 52,7	61 45 18,4
ζ du Cygne.	328 20 16,1	43 43 6,6
η de Pegase.	350 59 56,0	35 6 50,6
ν du Serpentaire.	265 0 54,3	13 42 33,0

13 FÉVRIER.

ε du Cygne.		δ du Cygne.	
Longitude.	*Latitude.*	*Longitude.*	*Latitude.*
322° 58′ 32″,8	49° 25′ 8″,5	311° 33′ 48″,8	64° 26′ 1″,9

20 FÉVRIER.

α de l'Aigle.		α du Cygne.	
296 59 19,4	29 19 23,4	330 39 8,0	59 55 22,6
ε du Cygne.		**δ du Cygne.**	
322 58 34,1	49 25 6,7	311 33 51,4	64 25 59,7

2 MARS.

la Lyre.		α du Cygne.	
280 34 06,9	61 45 14,5	330 39 10,1	59 55 19,6
ζ du Cygne.		**δ du Cygne.**	
328 20 19,4	43 43 1,8	311 33 56,4	64 25 56,9

10 MARS.

la Lyre.		α du Cygne.	
280 34 13,3	61 45 13,4	330 39 12,6	59 55 17,3
ζ du Cygne.		**δ du Cygne.**	
328 20 21,7	43 43 0	311 34 1,0	64 25 54,8

On a calculé les distances des étoiles entre elles, au moyen de leurs longitudes & latitudes ; ensuite on a combiné, pour chaque jour & de plusieurs manières, deux distances de la Comète avec la distance des étoiles correspondantes pour déterminer la longitude & la latitude de la Comète, comme on va le voir dans la Table qui suit.

Longitudes & latitudes géocentriques de la Comète, conclues des distances vraies aux étoiles (a).

3 FÉVRIER AU MATIN.

TEMPS VRAI.	DISTANCES DES ÉTOILES, ET DISTANCES VRAIES DE LA COMETE aux mêmes étoiles.		LONGITUDE de la COMÈTE.	LATITUDE BORÉALE DE LA COMÈTE.
$5^h\ 52'\ 38''$	α du Cyg. & α d'Ophiuc.	$51°\ 12'\ 56''$	$310°\ 5'\ 36''$	$22°\ 1'\ 19''$
	Comète & α du Cygne.	40 34 55		
	Comète & α d'Ophiuc.	47 17 49		
5 58 51	α du Cyg. & η du Serp.	57 17 8	310 0 12	22 2 54
	Comète & η du Serp.	36 17 17		
	Comète & α du Cygne.	40 34 43		
5 52 38	α d'Ophiuc. & η du Serp.	19 16 24	309 59 19	21 50 41
	Comète & η du Serpent.	36 17 37		
	Comète & α d'Ophiucus.	19 16 24		

Le premier triangle doit bien donner la longitude & sur-tout la latitude, sauf l'erreur de l'observation; il en est de même du second. Mais le troisième n'est pas propre à donner la latitude; la plus légère erreur, dans les distances de la Comète, y influe considérablement; il doit au contraire très-bien donner la longitude, sauf l'erreur de la distance de la Comète. Je crois cette distance à η du Serpent un peu trop petite; si elle étoit plus grande, la latitude se rapprocheroit très-rapidement des deux autres, & la longitude aussi.

5 FÉVRIER AU MATIN.

TEMPS VRAI.	DISTANCES		LONGITUDE	LATITUDE
$5^h\ 15'\ 5''$	Comète & α du Cygne.	39 39 8	$307°\ 24'\ 51''$	$23°\ 44'\ 28'$
	Comète & α d'Ophiucus.	44 18 30		
5 27 28	ζ du Cygne & η du Serp.	52 35 28	307 18 28	23 50 17
	Comète & ζ du Cygne.	26 18 56		
	Comète & η du Serpent.	33 42 12		
5 46 42	Comète & α du Cygne.	39 43 16	307 20 23	23 42 32
	Comète & α d'Ophiucus.	44 15 47		
5 58 20	Comète & α du Cygne.	39 43 6	307 16 19	23 41 10
	Comète & η du Serpent.	33 40 30		

Hévélius donne pour douteuse la distance à ζ du Cygne; d'ailleurs le triangle est très-aigu à η du Serpent, donc la latitude qui en résulte doit être rejetée. Les trois autres résultats devroient être plus cohérens, parce que les triangles sont mieux disposés; mais les premières & les dernières distances à α du Cygne ne s'accordent pas avec le temps écoulé; en réduisant la première & la deuxième au même instant, il y a 5″ de différence; cela produit une erreur en plus sur la première longitude de 2′ 30″, & une de 2′ 54″ en plus aussi sur la première latitude.

(a) Les distances vraies de la Comète aux étoiles ont été réduites deux à deux à la même heure.

6 Février au matin.

Temps vrai.	Distances des étoiles, et distances vraies de la Comète aux mêmes étoiles.	Longitude de la Comète.	Latitude boréale de la Comète.
5h 31′ 56″	Comète & α du Cygne. 39° 25′ 16″ Comète & α d'Ophiuc. 42 40 36	305° 49 12″	24° 28′ 43″
5 57′ 28	α d'Oph. & ζ du Cyg. 53 10 37 Comète & ζ du Cyg. 26 39 16 Comète & α d'Ophiuc. 42 41 14	305 48 45	24 26 31
6 6 8	Comète & α du Cygne. 39 28 56 Comète & α d'Ophiuc. 42 40 41	305 47 49	24 26 5

La distance à η du Serpent est indiquée douteuse, ainsi on ne la combinera point avec les autres. Il semble que la première distance à α d'Ophiucus a été observée trop petite, puisque la dernière qui est environ 3′ plus grande, à proportion du temps écoulé, donne la latitude à peu près comme les distances à ζ du Cygne & à α d'Ophiucus, qui sont très-propres à cet objet; on pourroit donc, sans erreur sensible, prendre un milieu entre les deux derniers résultats.

7 Février au matin.

4h 47′ 48″	Comète à α du Cygne. 39° 13′ 10″ Comète à α d'Ophiuc. 41 20 47	304° 31′ 57″	25° 6′ 55″
5 45 48	La Lyre & α du Cygne. 23 51 58 Comète & α du Cygne. 39 12 40 Comète & la Lyre.... 40 0 36	304 26 53	25 9 14
5 45 48	La Lyre & η de Pegase. 50 28 45 Comète & la Lyre..... 40 0 36 Comète & η......... 41 5 40	304 26 58	25 8 21
5° 45′ 48″	Les premières réduites à la même heure.........................	304° 28′ 35″	25 8 42

La distance de la Comète à ζ du Cygne est certainement trop petite de 8′ à 9′ aujourd'hui, ainsi on ne l'emploiera point.

10 Février au matin.

4h 48′ 43″	Comète & α du Cygne. 39° 8′ 11″ Comète & α d'Ophiuc. 37 26 41	300° 33′ 12″	26° 37′ 7″
5 14 51	Comète & la Lyre.... 37 43 5 Comète & η de Pegase. 43 34 45	300 41 55	26 31 52
5 14 51	Comète & la Lyre.... 37 43 5 Comète & α du Cygne. 39 9 17	300 44 8	26 33 22

10 FÉVRIER AU MATIN.

TEMPS VRAI.	DISTANCES DES ÉTOILES, ET DISTANCES VRAIES DE LA COMÈTE aux mêmes étoiles.				LONGITUDE de la COMÈTE.	LATITUDE BORÉALE DE LA COMÈTE.
5h 14′ 51″	La Lyre & ζ du Cygne.	32°	59′	50″	300° 44′ 0″	26° 32′ 23″
	Comète & la Lyre....	37	43	5		
	Comète & ζ.........	28	8	30		

La première distance à α d'Ophiucus paroît trop courte de 6 à 7′. Hévélius la rapporte ensuite de 8′ plus forte comme douteuse; mais elle étoit certainement meilleure que la première. Je crois que le parti le plus sûr seroit celui de prendre le milieu entre les deux derniers résultats, parce que η de Pegase n'étoit élevé sur l'horizon que de 9°.

13 FÉVRIER AU MATIN.

5h 29′ 0″	ε & δ du Cygne......	16°	11′	48″	297° 52′ 4″	27° 19′ 50″
	Comète & ε...........	29	18	30		
	Comète & δ..........	38	7	35		
4 33 13	α & δ du Cygne......	9	55	56	297 53 50	27 20 9
	Comète & α du Cygne.	39	29	10		
	Comète & δ...........	38	7	0		
4 33 13	Comète & α du Cygne.	39	30	55	297 46 35	27 21 16
	Comète & δ..........	38	7	0		

On voit donc qu'une variation de 1′ 45″ dans la distance à α du Cygne a produit 7′ 15″ de différence dans la longitude; ce triangle est très-peu propre à donner la longitude, la plus légère erreur y influe beaucoup; il n'en est pas de même de la latitude. Je crois cependant que les deux premiers résultats sont préférables, parce que le second confirme le premier, où le triangle est bien moins aigu à la Comète, & que Hévélius donne tout d'abord la distance à α du Cygne de 1′ 45″ plus courte que celle qui suit, sans la marquer douteuse; donc on pouvoit l'employer de même.

Hévélius dit à la fin des Observations de ce jour, que la Comète étoit en ligne droite avec α & γ de l'Aigle, & aussi distante d'α que cette étoile paroissoit l'être de γ. Quoique cette estime soit grossière, en voici le résultat en longitude & en latitude:

Longitude.	*Latitude.*
297° 45′ 44″	27° 22′ 19″

Cela n'est pas favorable au parti que j'ai pris; mais on fera attention que ce n'est qu'une estime. Il résulte de tout ceci que la longitude de la Comète est incertaine le 13 Février.

20 FÉVRIER AU MATIN.

3h 20′ 0″	Par les distances estimées à μ & à σ de l'Aigle. *Voyez* les Observations.	292° 51′ 14″	27° 59′ 59″

20

20 Février au matin.

Temps vrai.	Distances des étoiles, et distances vraies de la Comète aux mêmes étoiles.	Longitude de la Comète.	Latitude boréale de la Comète.
4h 55′ 42″	Comète & ε du Cygne. 31° 8′ 44″ Comète & δ du Cygne. 38 12 19	293° 17′ 15″	28° 2′ 43″
4 55 42	Comète & ε du Cyg. 31 2 43 Comète & δ du Cyg. 38 12 19	293 32 50	27 59 43
	Il paroît que la distance à ε étoit trop courte, & cela influe beaucoup sur la longitude, mais bien moins sur la latitude.		
5h 4′ 0″	Comète & α du Cygne. 40° 41′ 2″ Comète & δ du Cygne. 38 19 19	293° 15′ 41″	28° 3′ 5″
5 7 0	Par la dist. estimée à α de l'Aigle & la latit. conclue de la 2e & 4e Observat.	292 58 11	28 2 54

Il y a beaucoup de différence dans les résultats ci-dessus; Hévélius dit que les observations furent douteuses, à cause de la clarté & de la proximité de la Lune (*Cométog. pag.* 723.); j'adopterois volontiers le deuxième & le quatrième résultat.

2 Mars au matin.

4h 3′ 8″	δ & ζ du Cygne...... 22° 46′ 4″ Comète & ζ du Cygne. 35 21 36 Comète & δ......... 39 38 45	289° 6′ 30″	27° 28′ 16″
4 10 27	Comète & la Lyre.... 34 42 28 Comète & ζ du Cygne. 35 21 36	289 4 16	27 31 12
4 15 37	Comète & la Lyre.... 34 42 28 Comète & α du Cygne. 42 56 22	289 0 45	27 31 36

Ces combinaisons sont les plus favorables par les dispositions des triangles; on n'en fera point d'autres. Il paroît que la distance à δ du Cygne étoit un peu trop grande : la seconde observation me paroît préférable aux deux autres; Hévélius dit que la Comète étoit assez obscure le 2 Mars.

10 Mars au matin.

3h 4′ 30″	Comète & δ du Cygne. 40° 36′ 14″ Comète & ζ du Cygne. 37 23 16	286° 32′ 19″	27° 6′ 31″

10 Mars au matin.

Temps vrai.	Distances des étoiles, et distances vraies de la Comète aux mêmes étoiles.	Longitude de la Comète.	Latitude boréale de la Comète.
3^h 15′ 30″	Comète & α du Cygne. 44° 20′ 22″ Comète & la Lyre...... 34 48 37	286° 29′ 48″	27° 11′ 12″
3 23 30	Comète & la Lyre..... 34 48 37 Comète & ζ du Cygne. 37 23 16	286 29 20	27 10 10

Il paroît que la distance à δ du Cygne étoit un peu trop grande; les deux dernières distances à la Lyre & à ζ sont les plus propres pour donner la longitude & la latitude par la disposition du triangle; il semble qu'on doit en préférer le résultat, sur-tout par l'accord avec le second; d'ailleurs la Comète devoit être difficile à observer à la vue simple. Je vais joindre ici les résultats d'Hévélius pour les 14 & 17 Février, & pour le 28 Mars, faits d'après son estime: il les donne pour douteux; il eût été inutile de les calculer. Il étoit plus en état que personne d'apprécier ce qui devoit résulter de son estime; j'ajouterai qu'on doit avoir peu de confiance aux résultats du 28 Mars, puisqu'Hévélius ne voyoit plus la Comète a la vue simple, & qu'il l'a rapportée par des alignemens à des étoiles qui n'étoient pas dans le champ de sa lunette, & qui étoient assez éloignées entre elles & de la Comète.

	Longitude.	*Latitude.*
14 Février, vers $5^h \frac{1}{2}$ du matin...............	297° 5′ 43″	27° 40 24
17 Février..... $5^h \frac{1}{2}$ du matin...............	296 6 22	28 54 50
28 Mars....... $2^h \frac{1}{4}$ du matin...............	283 0 0	26 10 0 B

Longitudes du Soleil; mouvement horaire; logarithme de sa distance avec l'équation du temps pour chaque jour, vers le temps des observations de la Comète de 1661.

Il faut ôter 6″ des lieux du Soleil jusqu'au 20 Février, & 5″ jusqu'au 28 Mars, pour les dégager de la nutation.

Année 1661.	Temps moyen à Dantzick au matin.	Longitude du Soleil.	Mouvement horaire.	Logarithme de la distance.	Equation soustractive du temps moyen.
Février 3	5° 30′ 0″	10ˢ 14° 56 26,″4	2′ 31,″9	4,994157	14′ 34,″2
5	5 30 0	10 16 57 55, 3	2 31, 8	4,994313	14 43, 6
6	5 30 0	10 17 58 37, 1	2 31, 7	4,994391	14 47, 0
7	5 30 0	10 18 59 17, 9	2 31, 7	4,994471	14 49, 8
10	5 30 0	10 22 1 8, 5	2 31, 5	4,994725	14 53, 0
13	5 30 0	10 25 2 42, 5	2 31, 3	4,994994	14 49, 6
14	5 30 0	10 26 3 10, 2	2 31, 2	4,995088	14 46, 8
17	5 0 0	10 29 3 8, 2	2 31, 0	4,995380	14 34, 2
20	5 0 0	11 2 4 7, 5	2 30, 7	4,995693	14 15, 2
Mars 2	4 0 0	11 12 3 18, 8	2 30, 0	4,996810	12 32, 8
10	3 00 0	11 20 0 0, 1	2 29, 3	4,997731	10 35, 2
28	2 0 0	0 7 47 16, 8	2 27, 9	4,999972	5 9, 2

J'ai cru cette Table utile pour compléter tous les élémens des calculs, & pour faciliter l'usage qu'on voudra faire des longitudes & latitudes de la Comète. Je vais maintenant rapporter les longitudes & latitudes que j'ai jugées les plus exactes, & que j'ai comparées aux élémens de M. Halley.

Comparaison des lieux observés de la Comète avec les élémens de M. Halley.

Année 1661.	Temps vrai.	Longitude de la Comète observée.	Latitude observée.	Différence calculée en longitude.	Différence calculée en latitude.	Distance de la Comète à la Terre.
Fév. 3	5h 55′ 24″	310° 1′ 46″ aberrat. — 19	22° 02′ 6″ aberr. + 10	+ 3′	— 1′	0,616
5	5 36 54	307 20 1	23 42 20	— 13	+ 7	0,630
6	6 1 48	305 48 17	24 26 18	— 7	+ 8	0,639
7	5 45 48	304 27 29	25 8 46	— 6	+ 4	0,648
10	5 14 51	300 43 21	26 32 32	0	+ 5	0,679
13	5 29 0	297 52 4 aberrat. — 12	27 19 50 aberr. + 4	— 8	+ 6	0,712
20	4 59 51	293 16 28	28 2 54	— 25	— 2	0,786
Mars 2	4 10 27	289 4 16 aberrat. — 6	27 31 34	— 14	+ 8	0,872
10	3 19 30	286 29 34 aberrat. — 4	27 10 41	+ 4	+ 2	0,922
28	2 15 0	283 0 0	26 10 0	— 118	+ 9	0,986

Les signes + ou — indiquent la correction qu'il faudroit faire aux observations pour les accorder avec les élémens : celle du 20 Février peut aller depuis 0′ jusqu'à 40′ en long, & depuis 0′ jusqu'a 2′ ½ en latitude : celle du 10 Mars peut être aussi 0′, selon le choix que l'on fera. Je n'ai rapporté l'observation du 28 Mars, que pour faire juger de son inexactitude. Je remarquerai ici en passant, que la Comète de 1532 a été beaucoup plus grande & plus visible aux mêmes distances à la Terre, que celle de 1661, & bien au delà ; il est vrai qu'elle étoit alors moins éloignée du Soleil.

L'aberration doit s'appliquer aux longitudes & latitudes de la Comète, que l'on choisira à chaque jour d'observation, proportionnellement à celle que j'ai marquée ici au commencement, vers le milieu & à la fin de son apparition.

On n'a point entrepris de rédiger d'autres observations de la Comète de 1661, parce qu'on n'en connoît pas d'aussi exactes que celles d'Hévelius. Elle a été observée dans plusieurs endroits, sur-tout en Allemagne & en Suisse ; mais toutes ces observations m'ont paru très-grossièrement faites, & je me contenterai d'en indiquer quelques-unes.

La Comète a été observée à Basle, par P. Megerlin, Professeur de Philosophie & de Droit ; à Schaffouse, par Etienne Spleiss : ce qu'ils en ont vu est rapporté dans une brochure intitulée : *Discursus de Cometa nuper viso, &c. Basileæ, apud J. Konig.* Gaspard Marchen, Professeur de Mathématiques & de Médecine à Rostock, en a publié quelques observations dans une brochure Allemande, imprimée à Rostock, chez Jean Wilden. M. Trew, Professeur à Altorf, en a donné aussi quelques observations dans une brochure Allemande, publiée à Nuremberg.

Erhard Weigelius, Professeur de Mathématiques à Jena, observa la Comète plusieurs fois ; mais il n'y a qu'une seule de ses observations sur laquelle on pourroit compter à peu près. On peut consulter sa brochure : *Speculum Uranicum, &c. 1661.* Enfin, la Comète fut encore observée à Augsbourg & à Strasbourg ; il y en a une petite brochure imprimée en Allemand à Augsbourg, chez J. Schultes.

EXAMEN des anciennes apparitions des Comètes qu'on peut rapporter à celles de 1532 & de 1661.

LORSQUE M. Halley publia, en 1705, l'Abrégé de sa Cométographie, & qu'il annonça ou plutôt qu'il proposa son opinion sur le retour de la Comète de 1682, qui lui paroissoit être la même que celles des années 1531, 1607, il ajouta qu'il étoit encore porté à croire que la Comète de 1532 étoit la même que celle observée par Hévélius en 1661; mais que les observations d'Apian étoient trop imparfaites, pour pouvoir décider quelque chose de bien certain sur une matière aussi délicate. Dans la nouvelle édition de cette Cométographie, qui fut faite en 1719, & qui ne parut qu'en 1749, M. Halley annonça, avec plus d'assurance, le retour de la Comète de 1682 pour 1758 ou 1759; mais il ne parla plus de l'identité des Comètes de 1532 & de 1661. Cependant, d'après la ressemblance des orbites de ces deux Comètes, selon la Table de M. Halley, les Astronomes ont toujours présumé que ce n'étoit qu'une même Comète, dont la période étoit de cent vingt-huit à cent vingt-neuf ans, & qu'elle reparoîtroit vers 1789 ou 1790.

M. Struick a remarqué, dans son Introduction à la connoissance universelle des Comètes (pag. 11.), qu'en remontant aux Histoires les plus reculées, on trouve des preuves certaines que pendant plus de mille ans il a non seulement paru une Comète tous les cent vingt-neuf ans environ, mais qu'on découvre encore, dans ces apparitions, des singularités qui sont principalement propres à la Comète de 1661, & que de seize périodes, il croit qu'on en trouvera onze dans les Auteurs connus; mais qu'il deviendroit trop long s'il vouloit suivre les traces de chacune. M. Struick indique ensuite toutes ces apparitions, dans sa Description abrégée de toutes les Comètes, en commençant même par celle qui a paru l'an

525 avant J. C. Il cite les Auteurs qui ont fait mention de celles-là, ainſi que de toutes les autres.

M. Pingré a lu un Mémoire ſur le même ſujet, à la Séance publique de l'Académie en Novembre 1779. Il eſt à préſumer que ce Mémoire fera partie de la Cométographie que ce célèbre Aſtronome doit publier inceſſamment. Mais en attendant, & pour tâcher de ſatisfaire aux demandes de l'Académie, je vais examiner les apparitions des Comètes qu'on peut rapporter à celles de 1532 & de 1661. Je rapporterai les principaux paſſages qu'on trouve dans les Hiſtoriens, afin qu'on ſoit plus à portée de reconnoître ſi les circonſtances de ces apparitions peuvent ſe concilier avec l'orbite de la Comète de 1532, & ſur-tout avec celle de 1661 qui eſt mieux déterminée. On trouvera à la fin de ce Mémoire la figure de l'orbite de la Comète de 1661; elle ſervira à vérifier les apparitions antérieures, en ayant égard ſeulement à la préceſſion des équinoxes pour le lieu du périhélie & celui du nœud, car on ne peut rien ſtatuer ſur leur mouvement.

Les inégalités des périodes de la Comète qui a reparu en 1759, cauſées par les attractions de Saturne & de Jupiter, ſont très-conſidérables, puiſque la révolution de 1607 à 1682 a été d'environ un an & ſept mois plus courte que celle de 1682 à 1759. Ainſi nous ſuppoſerons que la période de cent vingt-huit ans trois mois, écoulée entre l'apparition de 1532 & celle de 1661, peut s'étendre depuis cent vingt-ſept juſqu'à cent trente ans environ : ce ſeroit un travail immenſe que de calculer les inégalités de chaque période juſqu'en l'an 525 avant J. C.

La révolution ſuppoſée de cent vingt-neuf ans, à partir de 1532, remonte à 1403. Hévélius rapporte, d'après Eckſtormius (Cométogr. pag. 834.), qu'il parut cette année une Comète entre l'orient & le nord; mais on n'en peut rien conclure, parce qu'il n'eſt pas dit dans quel temps de l'année. On trouve, dans le XVIII^e tome de Muratori, pag. 577, un

Comète de 1403.

passage d'un Ecrivain Italien qui se rapporte assez à la Comète de 1661 : *A di 10 Gennaio apparve una stella rilucente piu che la Luna, e duro sino à di 27 di Febbrajo.* La figure jointe à la fin de ce Mémoire, & l'exemple de celle de 1661, prouvent que cette apparition, en 1403, peut y convenir; on auroit dû la voir plus long-temps. Voyez aussi dans Mizauld, pag. 277. Il est étonnant que d'autres Historiens n'en aient pas fait mention; car, à cette époque, la Comète est très-visible & paroît long-temps. M. Struick, qui a fait des recherches très-étendues sur les anciennes apparitions des Comètes, ne parle point de celle de 1403.

Deuxième Comète de 1402.

En 1402 il parut deux Comètes; la première, en Janvier, Février, Mars & Avril; la seconde, en été & en automne. Les circonstances de l'apparition de la seconde Comète de 1402 ne conviennent pas à celle de 1661; voici ce que Mich. Ducas en rapporte, p. 34 de son Histoire Byzantine: *Dum sol Geminorum Dodecatemorion emetiebatur, in occidentali plaga signum in cælo malorum nuncium apparuit. Cometes iserat lucidus & clarus, comam erectam explicans ignis flammantis specie; supraque quatuor cubitos, non secus ac hastam ab occasu in ortum radios jaculabatur : & sole infrà horizontem demerso, propriis radiis effusis, omnes orbis terræ terminos collustrabat, nec aliis stellis lumen exerere concedebat, aut aerem noctis umbrâ infuscari........... usque ad æquinoctium autumnale perduravit, cum sol Libræ signum permeare incepit.* On trouve encore ce qui suit dans une Chronique de Bologne, qui fait partie du XVIII.e tome de Muratori (col. 576.) : *A die 4 di Settembre apparve la Cometa à ora di vespere, e degradando l'ora appariva poi la mattina.* Il est aisé de se convaincre que ces circonstances ne peuvent convenir avec l'orbite de la Comète de 1661; car, à quelque époque que l'on suppose le passage au périhélie, elle ne peut être visible que très-peu de temps pendant l'été; elle est alors presque toujours fort éloignée de la terre; elle ne peut point par conséquent éteindre, par son éclat, la lumière des autres astres. Il est encore

encore moins possible qu'au moins de Septembre elle paroisse le matin, après s'être montrée le soir.

On peut au contraire concilier, avec l'orbite de la Comète de 1661, une grande partie de ce que les Historiens ont dit de celle qui a paru au commencement de 1402 : nous allons d'abord rapporter ce qu'on trouve de plus essentiel & de plus détaillé dans plusieurs Auteurs. Première Comète de 1402.

On pourroit peut-être fixer le commencement de son apparition en Janvier ; car on trouve, dans l'extrait d'une Chronique Suisse, qui est au dépôt de la Marine, qu'en Janvier & en Octobre il parut une très-belle Comète qui avoit une queue comme celle d'un paon, & qu'on la voyoit même en plein jour ; mais l'Auteur confond ensemble les deux Comètes de cette année. On la vit tout au commencement de Février : *Visus est Cometa multis diebus ante carnis privium, qui sursùm tendebat in modum lanceæ* (Historia de Landgraviis Thuringiæ, pag. 952). Avant le milieu du mois elle étoit très-apparente ; on la voyoit tous les soirs entre le midi & l'occident ; sa queue devint d'une grandeur extraordinaire, on l'appercevoit en plein jour vers la fin de Mars : *Die 12 (Februarii), quæ fuit prima Dies Dominica quadragesimæ, apparuit stella Comes, incipiens apparere singulo sero inter meridiem & occidentem, occasum suum finiens ad occidentem; quæ apparuit continuè per totam quadragesimam, habens caudam seu potiùs comam à parte superiori; augendo quotidie ejus comam aliqualiter, adeò ut quæ priùs visa fuerat in mensuram duorum brachiorum vel trium, postea paulatìm creverit ad mensuram unius perticæ & ultrà. In Hebdomada autem Sancta, ejus coma mirabiliter crevit per tres dies in modum flammæ longissimæ, ita ut primâ die videretur esse longa brachiis 25; secundâ die, longitudinis brachiorum 50; tertiâ die, brach. 100 & multò plus. Ulteriùs non apparuit de nocte, sed dies per octo sequentes apparuit de die incipiendo die Mercurii sancto, apparens juxta Solem longitudinis brachii unius cum dimidio, nec Solis lumine offuscabatur etiam in meridie, quæ admirationem*

& futurorum malorum timorem Gentibus intulit (Muratori, tome XVI, col. 837). On trouve ailleurs exactement le même récit. [Ricobaldi, Compilatio chronologica in corpore Historico; J. Ecardi, col. 1297]. (Dello Bernardino Corio Milanense Historia). [Historia di Bologna de R. P. Cherubino Ghirardacci, lib. XXVIII, pag. 528]. La Comète étoit dans le signe du Belier, vers la fin de Février : *Circa finem mensis Februarii, & per principium mensis Martis sequentis, Cometes satis magna apparuit in parte oriente, de sero in signo Arietis, & duravit per duas horas cum dimidia* (Annales Foroliv. Muratori, tom. XXII, col. 281). Elle ne se couchoit que vers la troisième, même la cinquième heure de la nuit : *Anno 1402, apparuit Cometa in occidente, in fine Februarii & principio Martis, cujus occasus erat circa tertiam horam noctis, dirigens caudam versùs occidentem, sed basin versùs orientem, colore nigredini attingens* (Chronica Sisgism. Rozitii, in Script. rerum Silesiac. tom. I, pag. 72). *Qui ingens ac fulgidus mense Martio antè apparuerat ac quinque horis, post Solis occasum, palàm conspiciebatur* (Muratori, tom. XX, col. 290). [Poggii, Historia Florentina à J. B. Recanato, lib. IV]. Elle se porta de plus en plus vers le nord : *Cometa apparuit mense Martio, primò inter Corum & Septentrionem viz. in circo flammas emittens, postremò comas in boream transferens* (Anglica Norman. à Veteribus scripta, Thom. de Walsingham, pag. 577). Enfin, la Comète paroissoit le matin avant le lever du Soleil, & le soir après son coucher, selon Thomas Ebendorffer : *Nec prætereundum existimo prodigium, quod his annis se mundo demonstravit pro avisamento. Nam anno Domini 1402, Cometa ingens, in longitudine unius hastæ porrigens retrò se caudam à vento agitatam, ultrà unius ulnæ ad visum & longitudinem. Hic tempore mensis Martii apparuit in nocte quadragesimali tempore, adeo grandis & lucida, ut nullius viventis memoria de simili prodigio retineret. Duravit quoque ultrà trium septimanarum spatium, & festa Paschalia. Quem primum in domo cognatæ, in qua tunc degebam, nesciens quid esset conspexi; & Sacerdotibus, qui simul aderant,*

& meo Magiſtro nuntiavi, dicens : O cognata, quàm magna ardet in cœlo candela ! quod dum verbum puer ſæpiùs iterarem, factus eſt omnium diſcurſus, dicentes : Cometa ! Cometa ! quod verbum uſquè mea retinuit memoria ..... Denique præſati Cometæ ..... qui nocte occaſum ſolis ſubſequebatur, & mane ipſius præveniebat ortum in aurora (In Scriptor. rerum Auſtriac. veter. Hieronimi Pez. tom. II, col. 826). Un Ecrivain Italien dit encore qu'elle paroiſſoit toute la nuit ; mais on ne ſait pas bien à quelle époque : *A di 15 Febbraïo apparve una ſtella Cometa, ogninomo ne giudicava gran male, duro tutta la notte, udirette quello chene venne.* (Cronica di Bolona in Muratori, t. XVIII, col. 569).

Beaucoup d'autres Hiſtoriens ont fait mention de cette Comète ; mais on n'y trouve pas de plus grands détails que ceux que je viens de rapporter : examinons maintenant comment cela ſe concilie avec l'orbite de la Comète de 1661.

En ſuppoſant le paſſage au périhélie vers la fin de Février 1402, on verra que la Comète étoit, à la fin de Janvier, à l'orient du Soleil d'environ 30 degrés ; éloignée de la terre d'une fois & un tiers de la diſtance du Soleil à la terre, à peu près autant que lors de la dernière obſervation d'Apian en 1532. Il n'eſt donc pas impoſſible qu'on l'ait apperçue le ſoir à la fin de Janvier 1402, puiſque Fracaſtor l'obſerva encore le 27 Novembre 1532, lorſque ſa diſtance à la terre étoit encore plus grande. Dans le courant de Février, elle ſe ſera rapprochée de la terre ; vers le 11 de ce mois, ſa déclinaiſon auſtrale étoit de peu de degrés ; elle devoit par conſéquent paroître le ſoir entre le midi & l'occident, & ſe coucher près du vrai oueſt : ſon mouvement devenant plus rapide à meſure qu'elle avançoit vers le périhélie, s'élevant au deſſus du plan de l'écliptique, & s'approchant de la terre de plus en plus, elle devoit paroître monter vers le nord, & augmenter en éclat de jour en jour. L'angle d'élongation diminuoit au commencement de Mars ; mais la latitude & la déclinaiſon boréales augmentoient toujours. Elle aura été en conjonction nférieure vers le 20 de Mars, ayant une latitude boréale de 50 à 60 degrés, à une distance de la terre moindre que la moitié de celle du Soleil à la Terre : elle ne se couchoit plus. Sa queue aura dû s'accroître considérablement; la position de la Comète étoit favorable pour faire voir cette queue dans la plus grande étendue; elle étoit assez éloignée du Soleil, & pouvoit avoir assez d'éclat pour paroître en plein jour. A la fin du mois, elle étoit encore plus près de la terre, toujours plus boréale. Elle aura été en opposition au commencement d'Avril; on devoit la voir toute la nuit, le soir après le coucher du Soleil, & le matin avant son lever. Enfin, on auroit dû la voir pendant tout le mois d'Avril, & même au commencement de Mai, parce qu'elle n'étoit pas encore trop éloignée de la terre, quoique la distance au Soleil fût assez considérablement augmentée?

La plupart des phénomènes de la première Comète de 1402, conviennent donc à celle de 1661 : mais comment expliquer pourquoi on cessa de la voir de nuit, à commencer du Mercredi saint, & pourquoi, durant huit jours, elle ne parut éloignée du Soleil que d'une brasse ou d'une brasse & demie? Cette élongation ne peut pas s'accorder avec une latitude géocentrique de 50 à 60 degrés : supposera-t-on que pendant huit jours le ciel fut serein tant que le Soleil étoit sur l'horison, & qu'il se couvroit de nuages chaque nuit, pour dérober cette Comète? En lisant le récit qui se trouve dans le XVI^e tome de Muratori, ceux de Ricobaldus, de Bernardino Corio, du P. Ghirardacci, on remarque que ces Auteurs se sont copiés successivement : s'il y a eu une erreur dans la première relation, elle est donc dans toutes les autres. Il est vrai que, par opposition à ces détails, l'Auteur de la Chronique de Bologne (qu'on croit contemporain) dit qu'on voyoit la Comète toute la nuit; ce ne pouvoit être que vers le milieu de Mars. Rappelons encore le témoignage de Thomas Ebbendorffer; mais il etoit enfant lors de l'apparition de cette Comète. Enfin, pourquoi n'en fait-on pas mention jusque vers le 10 de Mai?

Elle devoit cependant être encore presque aussi apparente alors, qu'elle l'étoit au commencement de Février ; il est possible que le mauvais temps ait empêché de la suivre jusqu'à cette époque.

Il faut remarquer encore, que la trace qu'a suivie cette première Comète de 1402, convient tout aussi bien à l'orbite de celle de 1702, qu'à celle de 1661 ; c'est pour cela que M. Struick, dans l'Addition à son Histoire des Comètes, qui fait partie de son second volume, publié en 1750, dit (pag. 22 & 23) que la première Comète de 1402 est la même qui a reparu en 1702, & que la seconde Comète de 1402 est celle de 1661 ; mais on a vu que les phénomènes de cette seconde Comète de 1402 ne pouvoient pas se concilier avec l'orbite de celle de 1661. Ainsi, quoiqu'il soit bien vrai que la première Comète de 1402 ait une grande ressemblance, par la route qu'elle a suivie, avec celle de 1702, il est certain cependant que M. Struick s'est trompé en 1750, en voulant rectifier ce qu'il avoit avancé en 1740, & en établissant l'identité de la seconde Comète de 1402 & de celle de 1661. La première Comète de 1402 peut donc être une apparition de celle de 1661 ; mais on ne peut l'affirmer, puisque sa route convient aussi à la Comète de 1702, & peut-être à d'autres. Enfin, du passage au périhélie en 1402, à celui de 1532, la révolution auroit été de 130 ans & trois mois environ.

On ne trouve point de détails sur les Comètes de 1273 & 1274. La première parut dans les mois de Juillet & d'Août : *Mens. Jul. & August. stella quædam apparuit, quæ à se miræ magnitudinis radios emittebat* (Lubinietzki. pag. 245). La Comète de 1661 paroissant en Juillet & en Août, doit être très-peu brillante, parce que si elle a passé le périhélie, elle est fort éloignée de la terre ; elle en est plus près, si elle n'a point passé au périhélie ; mais sa latitude est fort australe : il est donc difficile de croire que cette Comète soit une apparition de celle de 1661. Il est peut être douteux qu'il ait paru une Comète en 1273, puisque d'autres Historiens n'en font pas mention, si ce n'est qu'on lit encore, sans autre époque que celle de

Comète de 1273.

l'année : *Cometa visus est signum mali* (Fascicul. temp. p. 82 ; in Script German. ex Biblioth. J. Pistorii, tom. II).

Comète de 1274. Au commencement de Mars 1274, on vit une Comète trois jours avant la mort de S. Thomas d'Aquin : *Aliud signum in ipso Monasterio (Fossæ novæ) visum fuit, nam quædam stella per modum Cometæ, tribus diebus ante prædicti Doctoris obitum, super Monasterium visa fuit, quæ cùm ignoraretur quid significaret dum apparuit, ostendit Doctoris obitum dum cessavit* (Vita Sancti Thomæ Aquinatis in Actis Sanctorum, à J. Bollando cœptis, cap. 10, §. 60, pag. 677). La Comète de 1661 peut être très-visible au commencement de Mars ; mais une apparition aussi peu circonstanciée n'est point suffisante pour rien décider : si cette Comète de 1274 est la même que celle de 1661, on voit bien qu'elle a dû paroître plus long-temps.

Comète de 1147. A compter de 1274, une révolution de 127 ans reporte à 1147. Le P. Gaubil a dressé un Catalogue (*a*) des Comètes qui ont été observées à la Chine depuis l'an 613 avant J. C. jusqu'en 1539 de l'Ere Chrétienne ; on y trouve qu'en 1147, à la première lune, au jour *sin-ouey* (8 Février), il parut une Comète vers l'est, que sa queue étoit de 10 degrés, & qu'on la vit pendant 15 jours. La Comète de 1661 étant supposée avoir passé au périhélie dans le milieu de Janvier de 1147, elle a dû paroître le matin, à l'époque indiquée, entre le signe du Sagittaire & celui du Capricorne, avec une latitude boréale de 25 degrés, c'est-à-dire, à peu près sur l'équateur ou un peu au dessus, à une distance de la Terre d'environ trois quarts de celle du Soleil à la Terre : on devoit la voir du côté de l'est avec une queue assez remarquable ; mais sa distance à la Terre, & sur-tout celle au Soleil, s'augmentant de jour en jour, elle n'étoit plus guere apparente à la fin de Février. Dans la supposition que nous

(*a*) Ce Catalogue étoit au Dépôt de la Marine, parmi les Manuscrits astronomiques recueillis par M. de Lisle ; mais il est égaré depuis quelque temps, & je n'ai pu en retrouver que des extraits informes : M. Pingré a bien voulu m'en communiquer une copie qu'il s'étoit procurée, & qu'il fait imprimer dans sa Cométographie.

venons de faire pour le passage au périhélie, on auroit dû voir la Comète, avant sa conjonction inférieure, au commencement de Janvier, peu après le coucher du Soleil, & presque sur l'écliptique; mais son peu d'élévation sur l'horizon & les mauvais temps de cette saison ont pu la dérober.

Au printemps de l'année précédente, ou en 1146, on vit à l'occident une Comète très-brillante : *Circa tempus istud* (*Paschale*), *Cometa multis diebus apparuit in occidente, vicinum aerem spatiis circumquaque diffusis coruscantibus radiis immensum illuminans* [Abbreviationes Chronicorum Radulphi de Diceto, pag. 508, in Scriptor. decem Histor. Angl.]. (Math. Paris, Histor. Anglic. p. 55). [Chronica Regia Sancti Pantaleonis, in corpore Historico J. Ecardi, tom. I, col. 932]. (J. Trithemii, Annales Hirsaugienses, tom. II, pag. 413). Les deux derniers Auteurs disent seulement, & sans aucun détail, qu'en 1146 il parut une Comète. Il est évident, par la figure de l'orbite de la Comète de 1661, que la Comète de 1146 ayant passé au périhélie 15 jours avant Pâques, elle devoit être très-apparente à l'occident à la fin de Mars & au commencement d'Avril; sa latitude devoit être très-boréale, & sa queue fort grande : elle aura été visible pendant deux mois environ; ainsi, ce que l'on sait de cette Comète peut convenir avec une apparition de celle de 1661. Comète de 1146.

On avoit encore vu une Comète en 1145 : *Aprilis XVII Kalend. apparuit stella cum magna cauda in cœlo* (Excerpta e vetustiss. Kalendar. manuscripto Bibliot. Ambrosianæ, in Muratori, tom. I, pag. 235). *Hoc anno, apparuit Cometes mense Maïo, quem secuta est mortalitas hominum & animalium* (Recueil des Historiens de France, tom. XII, pag. 288, ex Chronico Senonensi Sanctæ Colombæ); & pag. 481 du même volume : *Obiit Lucius Papa, stella Cometes apparuit radios adversùs ortum habens* (Ex Chronico Sancti Albani Andegavensis) : il est dit dans la Note des Editeurs, que Lucius mourut le 25 Février 1145. On trouve encore dans le même volume (ex Chronico Britannico) *Cometa visa, hyems tepida*, Comète de 1145.

& arbores fuerunt steriles, & dans la Note des Editeurs (ex Epistola Hugonis Rothomagensis, Archiep. ad Albericum, Episcop. Hostiensem) : *Ibi tecum aspeximus Cometam præcipiti lapsu in occiduo ruentem.* Ces détails ne sont pas suffisans pour en conclure que ce soit un retour de la Comète de 1661 ; cependant cette dernière peut paroître à l'occident dans les mois d'Avril & de Mai. Le P. de Mailla rapporte à la page 545 du VIIIe tome de l'Histoire de la Chine, que le premier jour de la quatrième Lune (24 Avril), il parut une Comète vers l'est; il n'est guere possible que le 24 Avril 1145, on ait pu voir à l'orient la Comète de 1661, parce que, dans cette position, sa latitude étoit trop australe, & sa distance à la Terre trop considérable, pour qu'elle fût sensible. Selon le Catalogue du P. Gaubil, on la vit en Chine, à la quatrième Lune, au jour *Vou-yn* (26 Avril); au jour *Ping-chin* (14 Mai), elle fut dans la constellation *Tsan* (Orion); au jour *Ting-se* de la cinquième Lune (4 Juin), elle étoit comme une étoile; au jour *Gin-su* (9 juin), elle fut stationnaire dans la constellation *Tchang* (φ, μ, λ, υ, $\varkappa$ de l'Hydre); on la vit jusqu'au jour *Ting-hai* de la sixième Lune (4 Juillet). Tout cela ne peut point désigner une apparition de la Comète de 1661 ; car si, le 14 Mai, elle étoit dans la constellation d'Orion, ou plutôt à même ascension droite, il falloit qu'elle eût une très-grande latitude boréale, pour être apperçue; car elle étoit presque en conjonction avec le Soleil; or cela ne convient pas à l'orbite de 1661, puisque, dans cette position, la Comète aura une très-petite latitude boréale, & qu'elle sera très-éloignée de la Terre. Enfin, si elle parvient à la constellation *Tchang*, son mouvement est direct & assez rapide, parce qu'il se combine avec celui de la Terre, de manière à paroître accéléré; donc elle n'a pu être stationnaire le 9 Juin. Ce que l'on vient de rapporter d'après les Chinois, conviendroit plutôt à une Comète dont l'orbite seroit presque opposée, dans sa situation, à celle de 1661, & dont le mouvement seroit rétrograde.

Comète de 1018. Cent vingt-huit ans avant 1146, ou en 1018, il parut une Comète

Comète en Juillet & en Août : *In menſe Auguſto, ſtella quædam juxta plauſtrum noviter apparens, radiis eminùs emiſſis, cunctos cernentes terruit, ſtella hæc quæ effulſit pluſquam 14 dies* (Recueil des Hiſtoriens de France, tom. X, pag. 137 *ex Chronico Ditmari, Epiſcopi Merſburg.*). Le P. de Mailla rapporte qu'à la ſixième lune de 1018, on vit, en Chine, une Comète à l'étoile polaire (Hiſtoire de la Chine, t. VIII, pag. 178). Le P. Gaubil la rapporte auſſi à la ſixième lune, mais en 1019; ſon apparition fut de 37 jours : elle paſſa par les étoiles de la grande Ourſe, du Lion & de l'Hydre, elle avoit une queue de 30 degrés; mais il paroît qu'il y a erreur d'une année. Il eſt évident que cette Comète ne peut pas être la même que celle qui parut en 1661; car on reconnoîtra facilement, que ſi cette Comète étoit en Juillet & en Août dans la partie boréale de ſon orbite, ſa latitude géocentrique ſeroit trop petite, pour qu'elle parût près de la grande Ourſe, encore moins à la polaire, & que ſa diſtance à la Terre ſeroit beaucoup trop grande, pour que ſon éclat & ſa queue fuſſent auſſi frappans; à peine ſeroit-elle apperçue à la vue ſimple. Cette Comète n'eſt donc pas celle de 1661, quoiqu'elle ait paru à une année où ſe termine la période de 128 ans.

L'année précédente eſt encore marquée par l'apparition d'une Comète; ſa durée fut très-longue : *Cometes ſolito mirabilior in modum trabis maximæ per quatuor menſes apparuit* (Sigiberti Chronicon. pag. 146, & tom. X du Recueil des Hiſtoriens de France, pag. *cxxiv*). Voyez encore Mizauld, p. 227, & la Chronique de Cambrai & d'Arras, par Balderic, pag. 294, d'après laquelle on pourroit croire que la Comète parut au printemps de 1018. On la vit long-temps tous les ſoirs : *Anno Domini 1017, Cometa grandis in modum trabis, omni ſero, longo tempore in Hollandia apparuit* (J. Gerbrandi Chronicon. libr. IX, cap. 8, in Annalibus rerum Belgicarum, Fr. Swertii). On ne trouve nulle part la date préciſe de l'apparition de cette Comète. Hévélius dit, d'après Herlicius, qu'elle Comète de 1017.

parut dans le Lion (Cometogr. pag. 819). Il eſt fort embarraſſant de conclure quelque choſe de tout ceci : la Comète de 1661 peut bien paroître dans le Lion à la fin du printemps, avec une latitude boréale; ſa queue ſera fort grande & ſon mouvement rapide, elle s'éloignera aſſez promptement de la Terre; on peut auſſi expliquer ſon apparition le ſoir, avec une aſſez longue queue, en fixant le paſſage au périhélie en Février: mais elle ne ſe montrera pas d'une manière auſſi remarquable pendant quatre mois; il faudroit au moins connoître la date de ſon apparition. Comment les Chinois n'ont-ils pas vu, en 1017, une Comète qui parut pendant quatre mois, puiſqu'ils ont obſervé celle de l'année ſuivante? Ne pourroit-on pas ſoupçonner que les Hiſtoriens Européens ſe ſont trompés d'un an, & que c'eſt la Comète de 1018 que quelques-uns d'entre eux rapportent à 1017? D'ailleurs, ſi la Comète de 891 eſt un retour de celle de 1661, la période de 1017 à 891 n'aura été que de 126 ans.

Comète de 891.

L'apparition de la Comète de 891 ſe date du 21 Mars: *Stella quædam apparuit miræ magnitudinis, quam multi ferunt Cometam fore, erat enim deorſum radios magnos emittens, & multis noctibus per zodiacum aſcendens, viſa eſt XII. Kalend. aprilis* (Annaliſta Saxo col. 229). On la trouve ailleurs un peu plus tard : *Anno 891, Cometæ apparuerunt poſt Paſcha, circa Rogationem* (Annales J. Aſſerii in Scriptor. quindecim Hiſtoriæ Britann. Saxonica, Anglo-danicæ à Thom. Gale vol. II, pag. 171). On la vit en Chine vers le même temps; à la quatrième lune elle commença à paroître à l'étoile *San-tay* (une des pattes de devant de la grande Ourſe); elle ſe perdit dans la conſtellation de *Tay-ouey;* on jugea qu'elle pouvoit avoir au moins dix *Tchang* ou cent pieds de long (Hiſt. de la Chine du P. de Mailla, tom. VII, pag. 12). Voyez encore (Muratori, tome II, pag. 279, ou Fragmentum Hiſt. Longobard. in Theſauro antiquit. Italiæ, t. IX, P. I, pag. 95). En ſuppoſant que cette Comète ſoit la même que celle de 1661, & qu'elle ait paſſé au périhélie vers la fin de

Mars, on aura pu la voir dès le 21 de ce mois, un peu après le coucher du Soleil, entre les étoiles du Belier & celles du Taureau; ensuite elle se sera avancée assez rapidement en s'élevant vers le Nord; elle aura traversé les constellations du Cocher & du Linx. Les premiers jours de Mai, on l'aura vu entrer dans la grande Ourse, passer entre les pattes & le carré; aller de là à la chevelure de Bérénice, vers le pied du Bouvier & au dessus de la Vierge, c'est-à-dire, dans le *Tay-ouey*. Sa distance à la Terre, & celle au Soleil augmentant beaucoup alors, on l'aura perdue bientôt après. Ainsi les circonstances de l'apparition de cette Comète s'expliquent fort bien par l'orbite de celle de 1661.

Selon Hévélius, il parut une Comète en 761, une autre en 763 (Cometogr. p. 814); Lubinietzki les rapporte aussi aux mêmes années. M. Struick fixe la première en 760; la seconde en 762 : il dit que celle-ci est la Comète de 1661 (1 vol. p. 210). Voici ce qu'on trouve ailleurs à ce sujet : *Docetes clarissima in Oriente apparuit per decem dies, & iterum ad Occidentem diebus viginti uno*, Histor. Miscellæ, L. 22, p. 158, in Muratori, tom. I, p. 1.). *Hoc anno, Cometa trabis instar ad orientem visus* (Theophanis Chronographia, p. 363). Puisqu'on ne sait pas dans quel temps de l'année cette Comète parut, on ne peut porter de jugement sur son orbite. Si c'est celle de 1661, la période aura été de 129 ans entre l'apparition en 762 & celle en 891. Comète de 762.

Cent trente ans auparavant, ou en 632, il parut une Comète vers le midi : *Postquam Muchumetus ille dirus mortem obiit, mediâ die visus est Cometa, quem à trabis forma Græci Dociten nominant, Arabum prænuncians imperium; duravit dies trigenta, à meridie ad septentrionem pertingens, habuit gladii formam* (Georgii Cedreni Historiarum Compendium, t. I. p. 25; Annales Michaëlis Glycæ, P. IV, p. 277). Voyez encore (Sigiberti Chronicon, p. 90; Mizauld, p. 251, & autres); mais c'est toujours à peu près le même récit, & Comète de 632.

l'on n'a ſur cette Comète aucun détail qui puiſſe éclairer.

Comète de 504. En 504, on vit une très-grande Comète : *Apparuit ſtella miræ magnitudinis, uno radio contenta; ad radium verò erat globus igneus, &c.* (Scriptores vetuſtiores & præcipui rerum Britannicarum, &c. p. 59). J'ai abrégé le récit de l'Auteur, parce qu'on n'en peut rien conclure autre choſe que l'apparition d'une Comète au terme de 128 ans depuis celle de 632.

Comète de 375. Une révolution de 129 ans remonte à l'an 375; voici ce qu'on trouve dans Ammien Marcellin, Liv. XXX, chap. V, p. 600 : *Namque diebus antè pauciſſimis ruinas fortunarum indicantia celſarum, arſere crinita ſidera Cometarum, quorum originem ſuprà docuimus :* il paroît que ce fut en été. On ne peut donc rien établir, depuis 891, ſur les retours de la Comète de 1661, ſi ce n'eſt qu'il parut une Comète à toutes les années où ſe termine la période de 128 à 130 ans.

Comète de 245. On eſt plus inſtruit ſur l'apparition de la Comète de l'an 245. Selon le Manuſcrit du P. Gaubil, on la vit en Chine; le jour *Vou-ou* de la huitième lune (18 Septembre), elle étoit dans la conſtellation *Sing* (α, ι, τ de l'Hydre); elle avoit une queue de deux pieds de longueur; elle parut 23 jours, & alla à la conſtellation *Tchang* (φ, μ, λ, υ, $\varkappa$ de l'Hydre). Pour appliquer ceci à la Comète de 1661, il faut ſuppoſer qu'elle paſſa par le périhélie à la fin de Septembre 245; dans ce cas, on l'aura vue le 18 Septembre répondre au commencement du cinquième ſigne environ, avec une petite latitude auſtrale; elle étoit donc aſſez près de la conſtellation *Sing*. En 23 jours elle aura eu un aſſez grand mouvement en longitude; elle a donc dû dépaſſer la conſtellation *Tchang*, & paroître plus au nord. Elle aura toujours été à une aſſez grande diſtance de la Terre; on ſait que les Comètes n'acquièrent ordinairement leur plus grand éclat qu'après le paſſage au périhélie, & à cette époque celle-ci commençoit à s'éloigner rapidement de la Terre. Enfin ſa route auroit dû être un peu plus nord que celle indiquée par les Chinois; mais on ſait qu'ordinairement ils rapportoient un astre à telle constellation, quand il avoit même ascension droite que cette constellation. D'ailleurs, pour bien juger de la route que la Comète de 1661 a dû parcourir en 245, il faudroit connoître, pour ce temps, la position du nœud & celle du périhélie; mais je n'ai pu avoir égard ici qu'au mouvement apparent causé par la précession des équinoxes. Quoi qu'il en soit, les circonstances de cette apparition conviennent assez à un retour de la Comète de 1661.

L'apparition précédente tombe vers l'an 116; voici ce qu'on lit dans le Catalogue du P. Gaubil: » Au jour *Kia-ou* de la » onzième lune (10 Novembre), étoile nouvelle à l'ouest. Au » jour *Ki-ay* (15 Novembre), elle fut au sud de la constella- » tion *Hiu* (β du ♒ & α du petit Cheval), elle alla à la » constellation *Ouey* (la Mouche) «. Il y a erreur dans la date; M. Pingré l'avoit déjà remarqué dans la copie de ce catalogue, qu'il a bien voulu me communiquer. En effet, le jour *Kia-ou* étoit bien le 10 Novembre de l'année 116, mais ce n'étoit pas de la onzième lune, puisque le solstice d'hiver doit, selon le principe des Chinois, tomber dans la onzième lune, & que ce solstice arrivoit, en 116, le 22 Décembre. Quand il y auroit eu une intercalation, cela ne suffiroit point encore; car en 116 la première lune de l'année, comptée à la manière des Chinois, est celle dont la conjonction moyenne est arrivée le 2 Février, puisque le Soleil est entré dans le signe des Poissons le 20 de ce mois, que l'éclipse du Soleil du 31 Mars est rapportée par les Chinois mêmes au premier jour de la troisième lune (Astronom. Chinoise du P. Gaubil, tom. 3, p. 276); ainsi le jour *Kia-ou* (10 Novembre) étoit dans la dixième lune, & non dans la onzième. Mais le jour *Kia-ou* ne se retrouve plus que le 9 Janvier 117, & le jour *Ki-hay* le 14 Janvier; donc si la lune est bien indiquée, il faut changer de deux mois le temps de l'apparition de cette Comète. Dans le cas où la Comète aura paru le 9 Novembre à l'ouest, on trouvera, en fixant son passage au

Comète de 116 ou 117.

périhélie vers la fin de Décembre, qu'elle devoit être le 14 Novembre au sud de la constellation *Hiu*, avec une latitude australe, ayant un mouvement direct peu considérable en longitude, mais plus grand en latitude vers le nord; on verra qu'il est impossible qu'elle soit parvenue jusqu'à la Mouche. Peut-être que la constellation *Ouey* ne doit pas être prise ici pour la Mouche, mais pour *Ouey* qui suit *Hiu*; alors cela conviendroit à l'orbite de la Comète de 1661. Si c'est en Janvier qu'il faut fixer l'apparition de la Comète, il est alors fort difficile d'y reconnoître un retour de celle de 1661; car elle devoit être plus avancée en longitude qu'on ne le dit, pour qu'on la vît le 9 Janvier à l'ouest : le 14 Janvier, le Soleil étoit presque en conjonction avec la constellation *Hiu*; comment a-t-on pu voir la Comète qui étoit au sud de cette constellation ? Et à cette époque il ne se pouvoit pas qu'elle parvînt jusqu'à la Mouche. Je crois que, d'après cet examen, on conclura que la Comète a réellement paru en Novembre 116, & que, pour concilier cette apparition avec l'orbite de celle de 1661, il faut prendre la constellation *Ouey*, non pour la Mouche, mais pour *Ouey* qui renferme α du ♒, θ & ε de Pégase.

12 ans avant J. C. L'an 12 avant Jésus-Christ, ou 742 de la fondation de Rome, on vit une Comète dans cette ville (Dionis Historiæ Romanæ, lib. 54, p. 760); on l'observa aussi en Chine à la fin d'Août (Histoire de la Chine, par le P. de Mailla, tom. 3, p. 200). Le P. Gaubil en donne un plus grand détail, dans lequel il est évident qu'il s'est glissé quelques fautes. » A la » septième lune, jour *Sin-ouey* (26 Août) Comète dans la » constellation *Tsing* (η, μ, ν, γ, ξ, λ, ζ, ε, des Gémeaux). » Elle passa sur les étoiles de la main gauche de Castor : elle » parut au nord de l'Aigle, alla aux étoiles du Lion & de la » Vierge au matin; ensuite le soir elle fut près d'Arcturus, » alla aux étoiles du *Tien-che*. On la vit 63 jours «. Si cette Comète est celle de 1661, il est aisé de voir qu'elle avoit une latitude fort australe lorsqu'elle commença à paroître, & que

ce devoit être plus d'un mois avant son passage au périhélie; les Chinois peuvent l'avoir rapportée à la constellation *Tsing* par l'ascension droite ou la longitude: mais la Comète de 1661 n'auroit certainement pas passé ensuite sur la main gauche de Castor. Elle a dû parcourir les environs du Lion & de la Vierge, parvenir ensuite jusqu'à la longitude d'Arcturus, & même au delà, c'est-à-dire, aller au *Tien-che*; mais sa latitude ne sera pas devenue assez boréale, pour qu'elle fût bien près d'Arcturus. Il est impossible que dans ce trajet elle ait passé au nord de l'Aigle, il faut qu'il y ait erreur ici dans le P. Gaubil. Enfin, on peut, à la rigueur, rapporter les principales circonstances de l'apparition de la Comète de l'an 12, à celle de 1661, en remarquant toutefois que sa route apparente en l'an 12, a dû être bien plus australe que celle indiquée par les Chinois.

Selon le P. de Mailla, il parut une Comète en Chine, l'an 138 avant Jésus-Christ; on la vit à la septième lune, & en automne au nord-ouest (Hist. de la Chine, tome III, p. 9). La période entre les années 12 & 138 n'auroit été que de 126 ans: cela n'est peut-être pas impossible; mais on ne peut rien conclure d'après une indication aussi légère. 138 avant J. C.

Enfin, si l'on remonte trois révolutions plus haut, on trouve encore une Comète observée en Chine. Le P. Gaubil dit qu'en hiver de l'année 525, il parut une Comète dans les étoiles du Scorpion, qu'elle alla jusqu'à la voie lactée. Voyez aussi l'Histoire de la Chine du P. de Mailla, tome II, p. 193, l'Histoire de l'Astronomie Chinoise du P. Gaubil, tome III, p. 25. Le P. de Mailla dit qu'au jour *Kia-su* de la sixieme lune, il y eut éclipse de Soleil, & que cette même année, en hiver, il parut une grande Comète. Le P. Gaubil remarque, p. 251 & 252 de l'Astron. Chinoise, que le premier jour de la sixième lune n'étoit pas *Kia-su*; & qu'il n'a pu y avoir éclipse dans les années voisines au jour *Kia-su*, si ce n'est le 21 Août 525; je ne rapporte ceci que relativement à la date de l'apparition de la Comète. Quoi qu'il en soit, si cette Comète est celle de 1661, elle pouvoit avoir Comète de 725.

même longitude qu'Antarés en hiver 525; mais elle devoit être plus boréale; ſon mouvement en longitude étoit aſſez lent, pour qu'elle ne dépaſſât point de beaucoup la voie lactée : on a dû la voir aſſez long-temps.

Voilà donc quatorze apparitions de Comètes à des intervalles à peu près égaux à la période écoulée entre 1532 & 1661, ou multiples de cette période; j'en ai diſcuté les principales circonſtances; il en eſt pluſieurs qui conviennent à l'orbite de la Comete de 1661, d'autres ne peuvent s'y rapporter. Les Hiſtoriens qui ont fait mention de ces Cometes, n'ont ſouvent écrit que d'après d'anciens récits : ceux qui ont été témoins de ces apparitions, n'étoient pas Aſtronomes; ainſi il n'eſt pas ſurprenant qu'on trouve beaucoup d'obſcurité dans leurs relations. La plupart ne nous en auroient pas même conſervé la mémoire, s'ils n'euſſent été perſuadés que les apparitions des Cometes étoient néceſſairement liées avec les grands évènemens qui les ont précédées ou ſuivies. Les Chinois ont ſans doute été plus exacts; mais quand on remonte à des époques auſſi éloignées, on doit s'attendre à rencontrer auſſi de l'incertitude chez eux. Je conviens que ce ſeroit un grand haſard de trouver autant d'apparitions de Comètes à égales diſtances, & que chacune d'elles ne fût pas un retour de la même Comète, ſur-tout lorſqu'on voit que les circonſtances de pluſieurs de ces apparitions peuvent s'expliquer par la même orbite; cependant je crois n'avoir point aſſez de preuves, pour prononcer ſur l'identité : j'en ſoumets la déciſion aux Aſtronomes. Les différences que j'ai trouvées entre le calcul & les obſervations de la Comète de 1532, me retiennent encore : je ſais bien que les obſervations d'Apian n'étoient pas ſuſceptibles d'une grande exactitude, & qu'on ne peut pas ſe flatter de les faire convenir toutes avec une certaine préciſion; cependant ces différences me paroiſſent trop grandes : les obſervations de Fracaſtor vont encore plus mal. Tout ce que l'on peut dire de plus favorable, c'eſt que l'orbite calculée par M. Halley, paſſe, à peu près, autant au nord des obſervations de Fracaſtor, qu'au midi de celles d'Apian, & même un peu plus près de celles-ci. M. Halley n'a ſans

sans doute donné ses élémens qu'après les avoir sévèrement critiqués : je ne prétends pas y en substituer d'autres; mais je vais montrer qu'on peut, par des élémens très-différens des siens, représenter tout aussi bien, & même un peu mieux, les observations d'Apian.

Essai sur la détermination des élémens de la Comète de 1532, & de celle de 1661.

J'ai fait plusieurs tentatives pour trouver des élémens qui représentassent mieux que ceux de M. Halley les observations de la Comète de 1532, faites par Apian : je n'ai eu en vue que de chercher à me rapprocher des élémens de la Comète de 1661; mais toutes les hypothèses que j'ai pu faire m'en ont toujours beaucoup éloigné; je me contenterai de donner ici celle qui m'a paru s'accorder le mieux avec toutes les observations. Pour établir cette hypothèse, j'ai pris un milieu entre les observations des 1er & 2 Octobre, & entre celles des 30 & 31 du même mois; j'ai tâché de représenter la dernière observation du 7 Novembre, ainsi que les intermédiaires; mais j'ai été obligé de laisser subsister une différence de 2° en latitude sur l'observation du 7 Novembre, & une de 2° 17′ en longitude sur celle du 13 Octobre. Voici les élémens que j'ai conclus; je les place à côté de ceux de M. Halley, pour qu'on puisse les comparer plus facilement.

	Élémens de l'orbite de la Comète de 1532, par M. Halley.	Nouveaux élémens.
Nœud ascendant	2^s 20° 27′	3^s 29° 8′
Inclinaison	32 36	42 27
Périhélie sur l'orbite	3 21 7	4 15 44
Distance périhélie	0,5091	0,61255
Passage au périhélie, temps moy. à Paris.	19 Oct. 22^h 21′	19 Oct. 15^h 2′

Comparaison des Observations avec le calcul fait sur les nouveaux élémens.

Année 1532.	Temps moyen à Paris.	Longitude observée.	Les élémens donnent.	Latitude observée.	Les élémens donnent.
Oct. 1	16h 5'	5s 9° 13'	+ 1° 10'	13° 33'. A	— 0° 50'
2	15 44	5 12 59	— 1 10	10 51. A	+ 0 51
13	16 20	6 0 0	— 2 17	0 0	+ 0 15 B
18	16 20	6 5 46	— 0 32	4 51. B	— 0 7
30	16 14	6 22 45	+ 0 28	13 38. B	+ 0 26
31	16 49	6 25 12	— 0 29	15 7. B	— 0 26
Nov. 7	16 19	7 4 27	+ 0 11	20 5. B	— 1 59

La plus grande erreur en longitude tombe sur le 13 Octobre, comme je l'ai dit ci-dessus ; il faut se rappeler que les 13 & 18 Octobre Apian se trouvoit à Leipsick, où il n'avoit qu'un mauvais instrument : *Itinerarium horologium*, *quod compassum vocant.* De sorte qu'on ne doit regarder ces deux positions que comme estimées ; tandis qu'il a fait à Dresde les observations précédentes & suivantes, en prenant les hauteurs de la Comète, celles d'une étoile & les azimuths de la Comète.

Je n'ai pas comparé ces nouveaux élémens aux observations de Fracastor ; on voit bien qu'ils les représenteroient plus mal que ceux de M. Halley.

J'ai voulu essayer aussi de déterminer l'orbite de la Comète de 1661, en m'appuyant sur les observations des 3, 13 Février & 10 Mars ; j'ai reconnu qu'on pourroit changer plusieurs des élémens de M. Halley, sans que cela produisît une différence bien sensible sur l'observation intermédiaire : la variation n'a cependant jamais été à un degré sur aucun de ces élémens. Il m'a paru que l'on ne pouvoit pas accorder toutes les meilleures observations d'Hévélius à quelques minutes près, quelque combinaison que l'on fît. L'inclinaison de l'orbite est mieux déterminée, en 1661, que le nœud, parce que les latitudes géocentriques & héliocentriques n'ont pas beaucoup varié depuis le 3 Févrierjusqu'au 10 Mars. Voici des élémens qui repréſentent fort bien les trois obſervations que j'ai choiſies.

Nœud aſcendant	2^s	21^o	$54'$	
Inclinaiſon		33	0	$55''$
Périhélie ſur l'orbite	3	25	16	8
Diſtance périhélie	0,442722			

Paſſage au périhélie, 26 Janvier à 21^h $18'$, temps moyen à Paris.

Ces élémens ne ſont pas bien différens de ceux de M. Halley; j'aurois bien déſiré trouver le même accord pour ceux de la Comète de 1532; les Obſervations d'Apian ſont trop imparfaites, pour l'eſpérer. On pourroit ſans doute les combiner différemment; peut-être trouveroit-on le moyen de ſe rapprocher des élémens de celle de 1661. On pourroit auſſi, pour plus d'exactitude, faire le calcul de ces deux Comètes dans l'ellipſe; mais l'hypothèſe parabolique devoit ſuffire pour donner à peu près les mêmes élémens; & c'eſt dans cette hypothèſe que ceux de M. Halley, que j'ai voulu vérifier, ont été calculés. D'ailleurs le temps m'a manqué pour entreprendre ce travail, qui n'entroit pas dans l'objet du Programme de l'Académie; je me propoſe d'y revenir dans la ſuite.

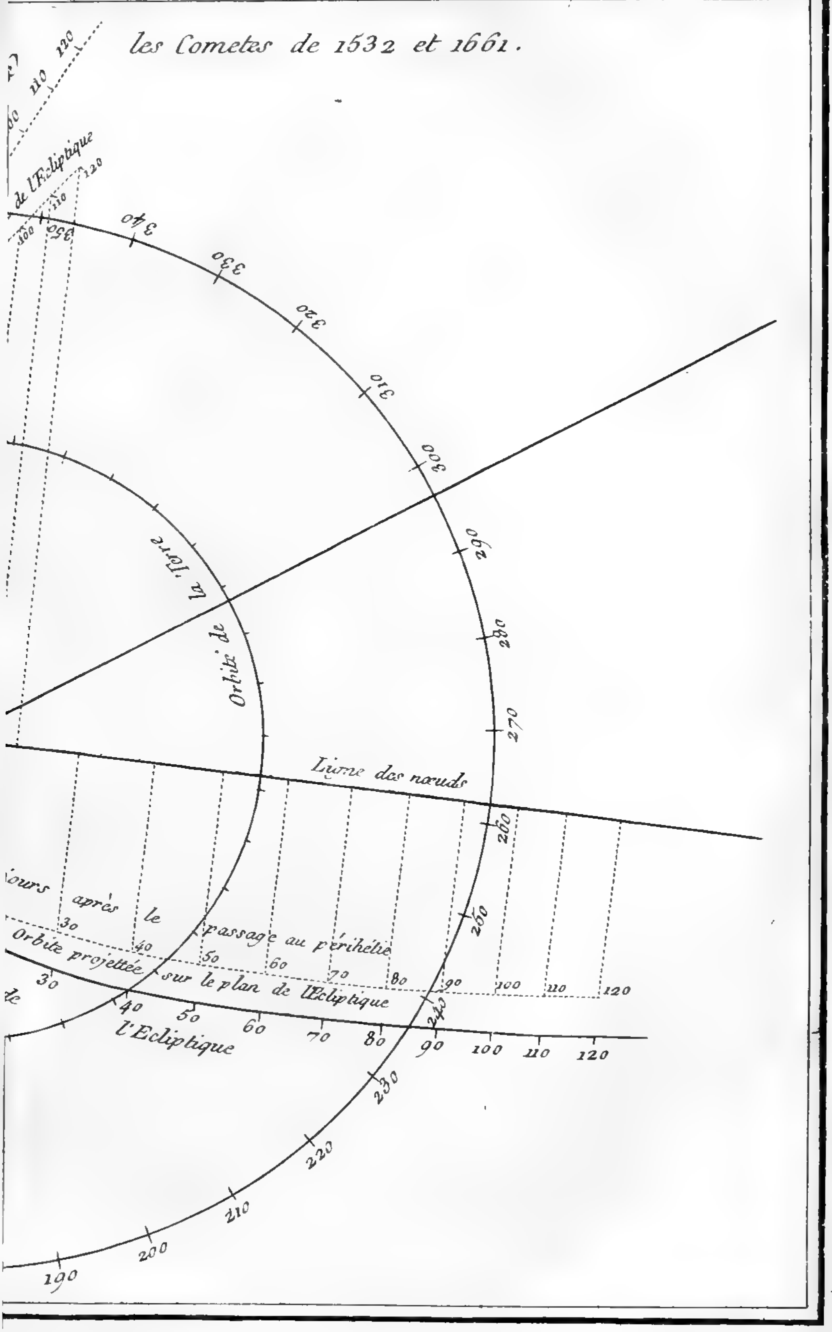
FAUTES A CORRIGER

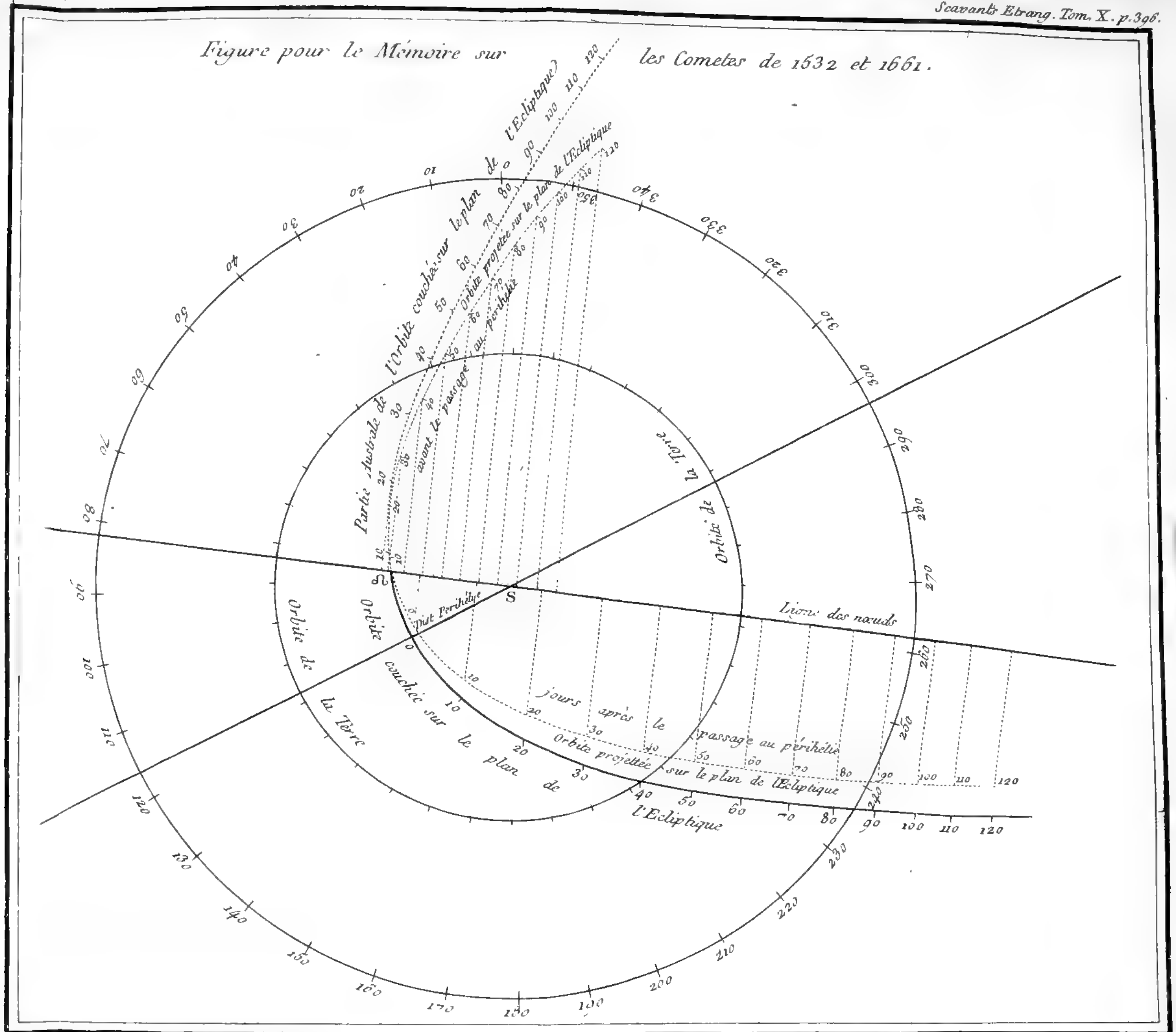
Dans les Recherches sur les Comètes de 1532 & de 1661.

PAGE 347, *ligne 6 comptée d'en bas*, ab ecliptica in Virgine, *lisez* ab ecliptica 15, in Virgine, &c.

Pag. 367, *quatrième ligne des Temps vrais du 7 Février*, $5^{\circ}\,45'\,48''$, *lisez* $5^{h}\,45'\,48''$.

les Cometes de 1532 et 1661.





Ch. Haussard Sculp.

EXAMEN CHIMIQUE

DU

MARBRE DE CAMPAN,

Fait dans le courant des mois d'Octobre, Novembre, Décembre 1772, & Janvier 1773.

PAR M. BAYEN,

Apothicaire Major des Camps & Armées du Roi.

LES Naturalistes divisent les marbres en trois espèces générales :

1°. En marbre d'une seule couleur, & cette première espèce comprend, selon eux, les marbres blanc, gris, noir, jaune, &c.

2°. En marbre de diverses couleurs ; & dans celle-ci, ils placent tous les marbres dans lesquels on distingue les couleurs précédentes, mélangées & distribuées de manière à former des variétés agréables.

3°. En marbre figuré : cette dernière espèce, moins répandue dans la nature que les deux autres, comprend les marbres de Florence & de Heſſe, dont on voit de ſi beaux morceaux dans les Cabinets (*a*).

Les Chimiſtes qui ne claſſent point les corps naturels d'après leur forme extérieure, diviſeroient ſans doute ce genre de pierre tout autrement que n'ont fait les Naturaliſtes, ſi, par une ſuite d'expériences, pour ainſi dire, docimaſtiques, ils avoient conſtaté les différences de chaque eſpèce de marbre en particulier. En attendant que ce travail ſe faſſe, je crois qu'on pourroit déjà en former quatre claſſes générales, ſauf à les reſtreindre ou à les augmenter à meſure que l'expérience éclaireroit le Chimiſte qui entreprendroit l'examen des différens marbres connus.

La première claſſe comprendroit uniquement les marbres purs, ou, ce qui eſt la même choſe, les marbres blancs, quelle que ſoit leur dureté, quelle que ſoit la forme de leur grain. On ſait que toute cette claſſe eſt ſans mélange de matières étrangères; que les acides la diſſolvent entièrement; qu'elle forme avec eux divers ſels à baſe calcaire; & qu'étant calcinée elle ſe convertit en chaux pure.

On rangeroit, dans la ſeconde claſſe, les marbres colorés, qui ne différeroient du marbre ſimple & pur, que par la petite portion de matière colorante qui leur ſeroit unie.

J'ai examiné le marbre noir qu'on emploie à Paris, & dans deux onces je n'ai trouvé que 60 grains ou $\frac{5}{96}$ de matière colorante. Le reſte, abſtraction faite du gaz & de l'eau que donne ce marbre dans la calcination, étoit de pure terre calcaire dont l'eſſence eſt d'être blanche; auſſi ai-je obtenu, en précipitant la diſſolution de ce marbre noir, une terre d'une blancheur parfaite. Lorſque la matière colorante noire ſe trouve unie au marbre blanc en plus petite quantité $\frac{1.\ 2.\ 3.}{96.}$, par exemple, elle

(*a*) Voyez le Dictionnaire d'Hiſtoire Naturelle de M. Valmont de Bomare, article MARBRE. Wallerius, &c.

lui donne une couleur intermédiaire entre le noir & le blanc, ce qui conſtitue le marbre gris plus ou moins foncé. On en peut dire autant des morceaux de marbre jaune, qui ſe trouvent dans certaines brèches, & que l'examen m'a appris être colorés par une petite quantité de terre martiale de la nature de l'ochre.

Ainſi tous les marbres qui ne contiennent d'autres matières étrangères que celles qui les colorent, devroient entrer dans cette claſſe, ſans en excepter ceux dont les couleurs ſont variées; on n'en excluroit même pas les brèches, lorſque les fragmens qui entrent dans leur compoſition, & le ciment qui les unit, ſont abſolument de nature calcaire.

Toute cette ſeconde eſpèce eſt propre à faire de la chaux, ſur-tout les marbres noirs & gris, dont la partie colorante s'atténue tellement dans le feu, que la chaux qui en réſulte eſt très-blanche.

On rangeroit, dans la troiſième, les marbres où on appercevroit des coquilles, des madrepores, des coraux & autres productions animales, ſi une analyſe ſcrupuleuſe faiſoit découvrir des différences eſſentielles dans la comparaiſon qu'on en feroit avec ceux de la claſſe précédente.

On mettroit enfin, dans la quatrième claſſe, ceux qui, outre la matière colorante, contiendroient une quantité remarquable de terre ou pierre d'une nature abſolument différente de celle de la pierre calcaire : tel eſt le marbre de Campan, dont j'ai l'honneur de préſenter l'Examen Chimique à l'Académie. Cette quatrième eſpèce ne feroit que de très-mauvaiſe chaux, ſur-tout ſi la matière étrangère s'y trouvoit dans de grandes proportions.

Les Naturaliſtes font entrer, dans la deſcription qu'ils donnent du marbre, une demi-tranſparence qu'on y remarque, lorſque ſes fragmens ou les ouvrages qu'on en fait n'ont pas trop d'épaiſſeur. C'eſt ſur-tout dans ceux de la première claſſe, que j'ai appelés simples & purs, que cette demi-transparence est sensible (*a*).

Les marbres de la seconde & troisième classe ont d'autant moins la propriété de transmettre la lumière, que les matières qui les colorent sont plus grossières, plus abondantes & moins *fondues* dans le marbre blanc qu'elles ternissent, qu'elles troublent, pour ainsi dire, ou enfin qu'elles rendent absolument opaque, selon les proportions où elles se trouvent.

Quant à ceux de la quatrième classe, il est impossible que la lumière puisse les pénétrer; les corps étrangers avec lesquels ils sont mélangés, leur communiquant leur opacité, cet accident doit les faire rentrer dans la classe des pierres appelées opaques.

Je n'ai fait jusqu'ici aucune recherche sur les pierres de Florence & de Hesse, nommées par les Naturalistes *marmor figuratum*. Je ne peux donc avoir que des conjectures sur le rang qu'elles doivent occuper. Quant au marbre de Campan, les expériences dont l'Académie a la bonté de me permettre de lui faire lecture, prouvent qu'il ne peut être placé que dans la classe des marbres composés ou mixtes.

Le marbre connu dans les ateliers & dans les appartemens, sous le nom de Vert-Campan, nous est apporté de la partie des hautes Pyrénées, qui dépend du pays de Bigorre : la carrière dont on le tire, est située à très-peu de distance de la rive droite d'un des torrens qui forment les sources de l'Adour. Ce marbre doit sa double dénomination, 1.° à la vallée de Campan,

(*a*) La cause de cette transparence ne peut-elle pas être rapportée à la cristallisation que subit la terre calcaire, lorsque l'eau & le gaz qu'elle contient éprouvent avec elle le degré de combinaison intime qui constitue le marbre ? car, quoique je sois naturellement éloigné de tout ce qui s'appelle systême, je ne peux cependant m'empêcher d'avouer que je tiens pour démontré que tous les corps du règne minéral sont soumis aux loix de la cristallisation qui constitue les masses, & que je la regarde, après la combinaison qui constitue les mixtes, comme une des grandes opérations de la Nature. Il ne seroit pas difficile de prouver que tout ce que nous connoissons de minéralisé ou de lapidifié, a pris un arrangement conforme aux loix de la cristallisation. On dit communément les animaux vivent, les plantes végètent ; on pourroit dire de même les minéraux cristallisent, ce qui exprimeroit en un seul mot leur manière d'être & de s'agréger.

à

à l'extrémité-ſud de laquelle on trouve la montagne dont on le détache; 2.° à la couleur verte qui paroît faire le fond de preſque tout celui qu'on nous apporte.

La couleur rouge eſt après la couleur verte, celle qui ſe fait le plus remarquer; ſouvent même elle y eſt la dominante, & alors on l'appelle rouge-Campan; on y rencontre auſſi des veines de marbre blanc; enfin on y apperçoit quelquefois des petites pyrites martiales, jaunes & luiſantes.

On y chercheroit en vain des débris de coquilles, de madrepores, &c. Les marbres, ainſi que les autres pierres des hautes Pyrénées, ne contiennent, ou du moins ne m'ont paru contenir aucunes productions du règne animal bien caractériſées.

Analyſe du Marbre-vert Campan par l'acide nitreux.

Premier Procédé.

Ayant choiſi un morceau de vert-Campan dans lequel on ne voyoit abſolument point de marbre rouge ni de marbre blanc, j'en expoſai deux onces à l'action de l'acide nitreux étendu d'eau diſtillée; la diſſolution s'en fit dans le commencement avec aſſez de vîteſſe; mais ſur la fin elle devint fort lente. Lorſque l'acide employé fut ſaturé, je le décantai & en ſubſtituai d'autre que je laiſſai ſur la matière plus de 24 heures, quoiqu'on n'y apperçût plus d'efferveſcence.

La portion ſur laquelle l'acide nitréux n'avoit point agi, étoit partie en poudre griſe, partie en morceaux aſſez tendres & de la même couleur que la poudre; le tout peſa, après l'édulcoration & la deſſication, cinq gros & douze grains: la texture de cette matière ne me permet pas de douter de ſa nature; c'eſt un vrai ſchiſte.

La liqueur, qui tenoit en diſſolution la terre calcaire de notre marbre, avoit un excès d'acide, & n'étoit que foiblement colorée; la noix de galle ne l'altéroit point, une goutte d'alkali fixe verſée deſſus y excitoit une vive efferveſcence, & il ſe formoit une petite quantité de précipité rougeâtre qui étoit sur le champ redissous; ce qui se fit constamment jusqu'à ce que tout l'acide surabondant fût parvenu au point d'une saturation parfaite qui fit prendre à la dissolution une couleur de biere forte, sans cependant la troubler; je remarquai alors que la noix de galle pouvoit la teindre en noir foncé, ce qui n'étoit point arrivé tant qu'il y avoit eu excès d'acide.

La couleur rouge des premières portions de la poudre qui se séparoit du dissolvant par l'affusion de quelques gouttes d'alkali fixe, me détermina à précipiter en deux temps la dissolution que j'étendis dans deux livres d'eau distillée. Les premières portions d'alkali que je versai dessus peu à peu & avec précaution, en précipitèrent une matière rouge qui s'amassa bientôt au fond du vase. Au moment où je m'apperçus que la liqueur avoit perdu sa couleur de bière forte, qu'elle étoit devenue claire & limpide comme l'eau, enfin qu'elle ressembloit parfaitement à une dissolution de marbre blanc, je suspendis l'opération, & séparai par le filtre ce premier précipité, qui, édulcoré & séché, pesoit 31 grains. La couleur foncée de la liqueur, son goût martial, sa propriété de teindre en noir, l'infusion de noix de galle, la couleur rousse du précipité, tout enfin annonçoit qu'il étoit de nature ferrugineuse; & une simple expérience m'a appris que c'étoit un mélange de fer & de terre alumineuse. J'ai fait dissoudre ce précipité dans une suffisante quantité d'acide vitriolique foible; la dissolution, qui avoit un goût très-stiptique, ayant été filtrée & abandonnée à l'évaporation insensible, donna en moins de cinq jours des cristaux d'alun bien caractérisés, & un peu de vitriol vert.

Le moyen que j'avois employé pour séparer de la dissolution de notre marbre tout ce qu'elle contenoit de ferrugineux & d'alumineux, m'ayant réussi, même au delà de mes espérances, je procédai sur le champ à la seconde précipitation de la liqueur, par le même alkali qui en sépara une terre calcaire d'une blancheur parfaite, dont le poids se trouva être d'une once & quarante grains, après avoir été suffisamment lavée & séchée.

En additionnant les produits, nous voyons que les deux onces de marbre vert employées contenoient :

	onces.	gros.	grains.	
1.°	»	5	12	de ſchiſte.
2.°	»	»	31	de terre martiale, mêlée de terre alumineuſe.
3.°	1	»	40	de terre calcaire.
Total..	1	6	11	

La perte, qui eſt d'un gros ſoixante-un grains, doit être attribuée au gaz qui s'eſt échappé pendant la diſſolution, & à la portion d'eau qui, ainſi que le gaz, s'étoit combinée avec la terre calcaire pour former notre marbre (*a*).

Analyſe du Marbre rouge de Campan par le même acide.

Deuxième Procédé.

J'ai ſoumis à l'action de l'acide nitreux deux onces de Marbre de Campan, en un ſeul morceau qui ne contenoit point de marbre blanc, & dans lequel la couleur rouge étoit dominante.

Il ſe ſépara, pendant la diſſolution, une poudre d'un rouge obſcur ſemblable au colcothar, ou plutôt à ce rouge brun dont on colore le carreau des appartemens.

En agitant l'acide nitreux & en le décantant, lorſque la ſaturation fut à ſon point, il fut facile de retirer cette poudre rouge, qui, lavée & ſéchée, peſoit ſoixante grains. C'étoit du fer qui avoit perdu la propriété d'être attiré par l'aimant, mais au-

(*a*) Il étoit important de ſavoir ſi les 31 grains de premier précipité étoient la quantité préciſe de fer & de terre alumineuſe, contenue dans les 2 onces de marbre que j'avois employées dans le premier procédé ; pour m'en aſſurer, je fis l'expérience ſuivante.

Je ſaturai, avec une ſuffiſante quantité d'acide vitriolique étendu de beaucoup d'eau diſtillée, une demi-once de la terre calcaire que j'avois obtenue par la deuxième précipitation : je ſéparai, par le moyen du filtre, la ſélénite qui s'étoit formée ; mais la liqueur ne ſe trouva être ni vitriolique ni alumineuſe ; elle ne fut point altérée par la noix de galle ; concentrée par une évaporation lente, elle ne donna ni alun ni vitriol.

quel il fut facile de la rendre en le tenant quelque temps au feu dans un creuset fermé, avec un corps qui pouvoit lui donner du phlogistique.

Lorsque je me fus assuré que toute la partie sur laquelle l'acide nitreux avoit de l'action, étoit dissoute, je substituai à cet agent quelques onces d'eau distillée pour laver la matière insoluble, qui, séchée exactement, pesoit un gros soixante-trois grains. Elle étoit divisée en plusieurs morceaux fort fragiles & percés de divers trous; sa couleur étoit grise, & tachée en divers endroits par un peu de la poudre rouge que les lavages n'avoient pu enlever.

En précipitant la dissolution en deux temps, suivant la méthode indiquée dans la première expérience, j'ai obtenu un premier précipité martial du poids de vingt-cinq grains, & un deuxième de nature calcaire, du poids d'une once trois gros cinquante trois grains.

Les deux onces de Marbre Campan rouge, employées dans ce procédé, ont donc produit:

	onces.	gros.	grains.	
1.°	»	»	60	de safran de Mars rouge-brun, qui s'est séparé de lui-même pendant la dissolution.
2.°	»	1	63	de schiste.
3.°	»	»	25	de terre martiale & alumineuse, précipitée par les premières portions d'alkali.
4.°	1	3	53	de terre calcaire.
TOTAL..	1	6	57	
PERTE...	»	1	15	de gaz & d'eau (a).

Si on compare les produits de cette seconde expérience avec ceux de la première, on verra les différences qu'il y a entre les deux morceaux de marbre qui en ont été le sujet, & on sentira les raisons qui m'ont déterminé à travailler sur les deux échantillons auxquels j'ai donné la préférence. Je les ai envisagés

(a) Ayant exposé à un assez grand degré de feu 2 onces de ce marbre, & l'y ayant tenu pendant 2 heures $\frac{1}{4}$, je l'ai trouvé diminué d'un gros 23 grains, quoiqu'il fût encore bien éloigné d'être réduit en chaux.

comme les extrêmes; le vert ne contenoit pas de marbre rouge, & le rouge ne contenoit de marbre vert que le moins possible.

Si on choisissoit des morceaux d'un mélange différent, on trouveroit sans doute des proportions différentes de celles que j'ai indiquées. Et qui sait si on pourroit jamais parvenir à rencontrer précisément les mêmes? J'ai, par exemple, traité par l'acide nitreux un morceau de notre marbre dans lequel j'avois apperçu une pyrite, il pesoit une once; c'étoit un mélange de marbre rouge & vert, on y distinguoit même quelques portions de marbre blanc. Je désirois savoir à laquelle des terres, la calcaire ou la schisteuse, étoit attachée la pyrite. La dissolution de la terre calcaire étant faite, il resta deux gros & quelques grains de schiste, dont un morceau se faisoit remarquer par sa grosseur & par une petite excavation où on voyoit non seulement la pyrite dont j'ai parlé, mais encore plusieurs autres que le marbre, qui les couvroit, avoit empêché d'appercevoir.

Analyse des mêmes Marbres par l'acide vitriolique.

TROISIÈME PROCÉDÉ.

QU'ON mette dans une capsule de verre ou de grès une certaine quantité de marbre concassé, & qu'on l'humecte avec de l'acide vitriolique foible; ce dissolvant attaquera le marbre, se desséchera, & les fragmens seront couverts d'une incrustation blanche, séléniteuse, c'est-à-dire, d'un sel vitriolique à base calcaire.

Si la matière étoit desséchée avant que la saturation fût au point requis, il faudroit l'humecter avec un peu d'eau distillée, pour étendre de nouveau l'acide & lui donner plus de prise sur les corps qu'il doit dissoudre.

Dès qu'on s'appercevra que l'acide ne se fait plus sentir, on versera dans la capsule où se fait la dissolution, une ou deux onces d'eau distillée pour délayer la sélénite, qu'on pourra, par ce moyen, retirer & mettre dans un autre vase, une bouteille, par exemple, pour y être gardée jusqu'à la fin de l'opération ; après quoi on versera de nouveau sur le marbre une pareille quantité du même acide, qui, en se saturant, formera de nouvelle sélénite, qu'on retirera & qu'on mettra dans la bouteille, ainsi qu'il a été dit; en continuant ce travail, qui est long, mais sûr & facile, on parvient à combiner, avec l'acide de vitriol, tout ce que le marbre employé contient de soluble, & par cette sorte de vitriolisation, on forme divers sels beaucoup mieux caractérisés, que ceux qui résultent de l'union de l'acide nitreux avec les mêmes matières; avantage qui, dans ce genre de travail, doit faire préférer l'acide vitriolique à celui de nitre.

En traitant, suivant la méthode que je viens d'indiquer, deux onces de Marbre vert Campan séparé de toutes portions rouges ou blanches, j'ai obtenu, 1.° une once six gros trente grains de vitriol calcaire ou sélénite.

2.° Cinq gros soixante-trois grains de schiste, qui n'étoit pas entièrement privé de terre calcaire, puisque l'acide nitreux put en dissoudre environ trente grains.

3.° Quatorze onces d'une liqueur légèrement colorée en vert jaunâtre & d'un goût vitriolique, dont quelques gouttes versées sur une infusion de noix de galle, la teignirent en noir foncé.

Lorsque, par une évaporation faite dans un vase de verre au bain de sable, cette liqueur fut réduite à peu près à cinq ou six onces, il s'en sépara un peu de sélénite & une petite quantité de terre martiale : filtrée & mise de nouveau sur le sable, elle fut concentrée au point de ne pas excéder le volume d'une once & demie d'eau; à ce moment je l'abandonnai à l'évaporation spontanée.

Le sixième jour, on appercevoit au fond du vase une trentaine de petits cristaux blancs & séparés les uns des autres; leur goût & leur forme octaèdre annonçoient leur nature : c'étoit une cristallisation d'alun, très-régulière. Deux jours après, il se forma une seconde cristallisation du même sel, dont les cristaux, quoique plus petits, étoient cependant bien caractérisés,

& à celle-ci il en ſuccéda une troiſième plus petite encore que la précédente. A cette époque il commença à ſe former ſur les parois du vaſe des effloreſcences ſalines, & en moins de quatre jours la matière ſe coagula entièrement en une maſſe de couleur verte, tirant ſur le jaune, dans laquelle il fut impoſſible de diſtinguer aucun ſel par des caractères propres à le faire reconnoître.

En traitant les ſels vitrioliques alumineux dans l'état d'eau mère, tel qu'étoit celui dont je parle, il n'eſt pas facile de les mettre au point de donner de beaux criſtaux, à moins qu'on n'ait recours aux alkalis fixes ou volatils, ainſi qu'on le pratique dans les travaux en grand de la Halotechnie; ce ne fut donc qu'après bien des tentatives, toutes faites ſans addition d'aucun alkali, que je parvins à retirer encore de cette eau mère quelques criſtaux d'alun pur, & de vitriol de Mars: la couleur peu foncée de ces derniers, & leur goût ſtiptique, prouvoient aſſez que ce n'étoit qu'un mélange de ces deux ſels, & que l'alun même y étoit le dominant. Ce qui me reſtoit de la liqueur ſe coagula de nouveau: je fis différens eſſais pour la ramener au point de donner des criſtaux; mais ce fut envain, la matière ſaline s'élevoit conſtamment le long des parois du vaſe ſans prendre aucune forme régulière. J'eus recours alors aux intermèdes; mais ne voulant employer ni alkali fixe, ni alkali volatil, pour ne pas trouver un ſujet d'erreur dans les dernières criſtalliſations, j'étendis l'eau mère dans deux onces d'eau diſtillée, & j'y ajoutai quelques grains de craie en poudre: il ſe fit une efferveſcence; la craie, devenue ſélénite, ſe précipita, entraînant avec elle une petite portion de terre martiale. Cette dernière liqueur, qui, filtrée, avoit une couleur rouſſe, ayant été concentrée par une évaporation lente, donna juſqu'à la fin des criſtaux d'alun, ſans qu'il me fût poſſible d'appercevoir un ſeul criſtal de ſel de ſedlitz, autre ſel vitriolique que je ſoupçonnois devoir être dans cette liqueur, d'après un grand nombre d'expériences qui m'ont appris que les terres, l'alumineuſe & la ſedliſienne, ſe trouvent très-ſouvent enſemble dans des ſchiſtes de différentes eſpèces.

Il résulte de l'analyse du Marbre Campan vert par l'acide vitriolique,

1.° Que les deux onces employées ont fourni, en se vitriolisant, une quantité de terre calcaire suffisante pour former une once six gros trente grains de sélénite.

2.° Qu'il s'est trouvé dans ces deux onces, cinq gros trente-trois grains de schiste.

3.° Que ce dernier a fourni une quantité suffisante de fer, pour former douze à treize grains de vitriol martial, & environ cinq grains de terre ochreuse qui s'est séparée d'elle-même pendant l'évaporation.

4.° Qu'il s'y est également trouvé une quantité suffisante de terre alumineuse, pour former au moins cinquante-quatre grains d'alun.

Je n'ai rien négligé pour m'assurer que le sel de sedlitz n'existoit pas dans la dissolution du Marbre de Campan par l'acide vitriolique; c'étoit le principal but de toutes les tentatives que j'ai faites pour mettre les dernières portions de liqueur en état de donner d'elles-mêmes des cristaux réguliers; & quand enfin j'ai été contraint d'avoir recours à un intermède, je me suis servi de la craie, qui, formant avec l'acide vitriolique un sel peu soluble & d'ailleurs facile à distinguer, ne m'exposoit à aucune erreur : d'où je crois pouvoir conclure que la terre qui fait la base du sel de sedlitz n'existe pas dans le schiste qui se rencontre dans notre marbre.

Analyse du Marbre Campan rouge par l'acide vitriolique.

Quatrième Procédé.

Ayant également traité par l'acide vitriolique deux onces de Marbre rouge de Campan, j'en ai obtenu une once sept gros quarante-deux grains de vitriol calcaire, de couleur blanche tirant sur le rouge; il est resté dans la capsule où se faisoit l'opération, deux gros & demi de schiste absolument décoloré & en petits

petits fragmens, parmi lesquels on en distinguoit un de la grosseur d'une petite noisette, dont la surface étoit hérissée de pyrites martiales; on en appercevoit aussi quelques-unes dans le schiste pulvérulent, avec lequel elles n'avoient plus d'adhérence.

Les différens arrosemens d'acide vitriolique, & les lavages avec l'eau distillée, m'avoient donné douze onces de liqueur alumino-vitriolique, de laquelle j'ai retiré trente-sept grains d'alun & quarante-cinq grains de vitriol vert; il s'est séparé, pendant l'évaporation, sept grains de terre martiale.

Ce quatrième procédé confirme les différences déjà observées dans nos marbres, lors de leur analyse par l'acide nitreux; il y a constamment plus de schiste dans le marbre vert que dans le marbre rouge, & plus de fer dans celui-ci que dans le premier.

Quoiqu'il soit hors de mon sujet de m'étendre sur le sel séléniteux que j'ai obtenu en traitant le Marbre de Campan avec l'acide vitriolique, je ne peux cependant m'empêcher de dire que ce sel, qu'on nomme sélénite, que j'ai appelé quelquefois vitriol calcaire, & qu'on pourroit aussi nommer sel gypseux, gypse artificiel, ou simplement gypse, étant cuit comme la pierre à plâtre pulvérisé & gâché avec une suffisante quantité d'eau, a été plus de deux heures à prendre corps; mais qu'enfin il est devenu, en moins de douze ou quinze heures, aussi dur que le meilleur plâtre, ce qui n'arrive pas toujours au gypse artificiel. Je dois aussi faire remarquer que le sel séléniteux, fourni par le marbre vert, perdit, pendant sa calcination, sa couleur blanche, qui se changea en rouge briqueté; effet qu'on doit attribuer à un peu de vitriol martial, & à quelques portions de schiste des plus tenues, qui étoient restées dans le sel séléniteux.

Il résulte des expériences dont l'Académie a bien voulu entendre la lecture, 1.° que le Marbre vert de Campan est un marbre mixte ou composé, que c'est enfin un mélange de marbre & de schiste. 2.° Que les parties véritablement marbre sont les dominantes. 3.° Que le schiste qui les accompagne, contient, ainsi que toutes les pierres de ce genre que j'ai jusqu'ici examinées, une quantité remarquable de terre alumineuse & de fer. 4.° Que c'est au fer minéralisé avec le schiste, qu'est due la couleur verte qui distingue le marbre dont je parle.

Quant aux portions de marbre rouge qui se rencontrent dans le marbre vert, nous avons vu qu'elles doivent leur couleur à un safran de Mars, dispersé sous la forme d'une poudre fine entre toutes les parties de la terre calcaire; d'où il faut conclure que le fer qui est uni au Marbre de Campan, s'y trouve dans deux états très-différens. Dans le marbre vert il est minéralisé avec le schiste, de manière qu'il a conservé la propriété d'être entièrement dissous par les acides, sans en excepter même celui de nitre, qui, comme on sait, n'a pas d'action sur le fer déflogistiqué : dans le marbre rouge au contraire, ce métal est dans un état de safran de Mars ou de chaux martiale, qui, dispersée entre toutes les parties de la terre calcaire, leur communique sa couleur en leur adhérant fortement, mais sans avoir subi avec elle de combinaison intime : ce safran de Mars n'est point du tout soluble dans l'acide nitreux, & par-là le Chimiste trouve un moyen sûr & facile de le séparer entièrement de la terre calcaire, sous sa forme pulvérulente & sans altérer sa couleur, ainsi qu'il est prouvé par le second de mes Procédés.

Quand on traite notre marbre rouge avec l'acide vitriolique, il n'est pas possible de séparer & de mettre, pour ainsi dire, à nu le safran de Mars; il perd, à la vérité, son adhérence à la terre calcaire; mais comme celle-ci se change, par sa combinaison avec l'acide, en un sel qui cristallise à l'instant même de sa formation, le safran de Mars recouvrant son état pulvérulent, se mêle entre les parties du nouveau corps salin, & lui communique cette teinte rouge qu'on remarque dans le sel vitriolico-calcaire, obtenu par le quatrième Procédé.

Telles sont les expériences que j'ai faites sur le Marbre de Campan; telles sont les conséquences que j'en ai tirées : je soumets les unes & les autres au jugement de l'Académie.

RECHERCHES
SUR
L'ATTRACTION
DES
SPHÉROÏDES HOMOGÈNES,

PAR M. LE GENDRE.

M. MACLAURIN eſt le premier qui ait déterminé l'attraction d'un Sphéroïde elliptique pour les points ſitués dans ſon intérieur ou à ſa ſurface. Les propoſitions qu'il a établies à ce ſujet, & d'où réſulte une ſolution ſi ſimple du problême de la figure de la Terre, ſervent de baſe à ſon excellente Pièce ſur le Flux & le Reflux de la Mer, & ſont connues de tous les Géomètres. Le même Auteur a conſidéré auſſi l'attraction des Sphéroïdes elliptiques ſur les points ſitués au dehors; mais il s'eſt borné aux points ſitués ſur l'axe ou ſur l'équateur pour les Sphéroïdes de révolution, & ſeulement aux points placés dans la direction d'un des trois axes, lorſque le Sphéroïde a toutes ſes coupes elliptiques. Ces deux objets ſe trouvent compris dans un théorême remarquable, dont M. Maclaurin donne l'énoncé, art. 653 de ſon Traité des Fluxions; théorême dont MM. d'Alembert & de la Grange ont donné depuis la démonſtration; le premier, dans les Mémoires de Berlin, année 1774, & dans le tome VII de ſes Opuſcules; le ſecond, dans les Mémoires de Berlin, année 1775.

Il ne paroît pas que les Géomètres aient pouſſé plus loin leurs recherches ſur cette matière intéreſſante; car, quoique M. de la Grange ait conſidéré le problême dans toute ſa généralité (Mém. de Berlin, année 1773), l'intégration n'a réuſſi à ce grand Géomètre que dans les cas déjà réſolus par M. Maclaurin. C'eſt dans la vûe de concourir à la perfection de cette théorie, que j'ai entrepris les Recherches dont je vais rendre compte.

Pour reprendre cette matière au point où M. Maclaurin l'a laiſſée, je commence par donner une démonſtration nouvelle du théorême déjà cité. Ma méthode paroît avoir l'avantage d'être directe, & de conduire à une expreſſion fort ſimple de la valeur abſolue de l'attraction.

Je conſidère enſuite l'attraction d'un Sphéroïde de révolution ſur un point quelconque ſitué au dehors, en ſuppoſant le méridien de figure quelconque, pourvu que l'équateur le diviſe en deux parties égales & ſemblables. Au moyen d'une décompoſition analytique, dont la démonſtration fait une partie conſidérable de ce Mémoire, je parviens à un théorême nouveau, ſuivant lequel l'attraction d'un Sphéroïde étant ſuppoſée connue pour les points ſitués dans le prolongement de ſon axe, j'en déduis auſſi-tôt l'attraction qui a lieu pour tout autre point.

L'application de ce théorême aux Sphéroïdes elliptiques de révolution, conduit à une valeur abſolue de l'attraction, auſſi ſimple pour un point quelconque ſitué au dehors, que pour un point ſitué à ſa ſurface.

La méthode que j'ai ſuivie n'étant point applicable aux Sphéroïdes qui ne ſont pas de révolution, je n'en ai tiré aucune concluſion pour ceux dont toutes les coupes ſont elliptiques. J'ai cependant lieu de croire que, relativement à ces derniers, on peut généraliser ainsi le théorême de M. Maclaurin. *L'attraction d'un tel Sphéroïde sur un point situé au dehors, est égale à celle d'un autre Sphéroïde de même masse, dont les ellipses principales auroient les mêmes foyers, & dont la surface passeroit par le point attiré.* J'aurois pu insérer ici quelques tentatives que j'ai faites pour la démonstration de ce théorême; mais comme elles n'ont pas eu un succès complet, j'ai mieux aimé m'en tenir au simple énoncé.

Démonstration du Théorême de M. Maclaurin.

1. Il s'agit de déterminer l'attraction d'un Sphéroïde, dont toutes les coupes sont elliptiques, sur un point S placé dans le prolongement d'un de ses trois axes à la distance $CS = r$. FIGURE 11.

On sait qu'un tel Sphéroïde a trois axes principaux, perpendiculaires entre eux. J'appelle a le demi-axe CA qui est dans la direction du point S; b & c, les deux autres demi-axes CG & CE. L'équation de la surface du Sphéroïde sera $\frac{xx}{aa} + \frac{yy}{bb} + \frac{zz}{cc} = 1$; x, y, z étant les coordonnées d'un même point, parallèles aux demi-axes a, b, c, & comptées du centre. Ayant fait passer par le point S le plan ACE qu'on peut appeler l'équateur, quoiqu'il soit elliptique, je mène le plan SMl perpendiculaire à l'équateur. Il en résulte la section elliptique LMl, dans le plan de laquelle je mène les rayons infiniment proches Sm, Sm'. Si on imagine ensuite que le plan SMl décrive un angle infiniment petit autour de l'axe SO parallèle à CG, le trapèze MM$'m'm$ décrira une pyramide tronquée, dont l'attraction sur le point S sera $Mm \times d\psi\, d\varphi\, cos.\,\varphi$, en appelant l'angle ASL, ψ, & l'angle LSM, φ. Cette attraction agit suivant SM; on aura donc, suivant SC, la force $Mm\, d\psi\, d\varphi\, cos.^2\varphi\, cos.\,\psi$. Substituant la valeur de Mm qu'on tire facilement de la nature du solide, on a l'attraction élémentaire

$$\frac{2\,abc\,d\varphi\,d\psi\,cos.^2\varphi\,cos.\,\psi}{a^2c^2 sin.^2\varphi + a^2b^2 cos.^2\varphi\, sin.^2\psi + b^2c^2 cos.^2\varphi\, cos.^2\psi}$$

$$\sqrt{[(a^2 - r^2)c^2 sin.^2\varphi + b^2 cos.^2\varphi\,(a^2 sin.^2\psi + c^2 cos.^2\psi - r^2 sin.^2\psi)]}$$

qu'il faut intégrer deux fois par rapport à φ & ψ.

2. Cette formule n'eſt point intégrable par rapport à φ, mais elle l'eſt par rapport à ψ. Je lui donne la forme $\frac{M\alpha\psi\, cof.\psi}{1+\alpha\, fin.^2\psi}\sqrt{(A^2 - B^2\, fin.^2\psi)}$; & comme cette différentielle doit être intégrée depuis $\psi = o$ juſqu'à $fin.\,\psi = \frac{A}{B}$, je fais $fin.\,\psi = \frac{A}{B}\, fin.\,\zeta$, & j'ai la transformée $\frac{MA^2}{B}\cdot\frac{d\zeta\, cof.^2\zeta}{1+\frac{A^2\alpha}{B^2}fin.^2\zeta}$ à intégrer depuis $\zeta = o$ juſqu'à $\zeta = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$. On trouve, par les méthodes connues, l'intégrale $\frac{MB}{\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\left(1+\frac{A^2\alpha}{B^2}\right)}-\frac{\pi}{2}\right)$. Doublant & ſubſtituant, on aura la différentielle . . . .

$$\frac{2\pi acr}{a^2-c^2}\, d\varphi\, cof.\,\varphi\left[\sqrt{\left(\frac{c^2\, fin.^2\varphi + b^2\, cof.^2\varphi}{a^2\, fin.^2\varphi + b^2\, cof.^2\varphi}\right)} - \sqrt{\left(\frac{r^2+a^2-c^2}{r^2}\right)}\right]$$

qu'il faut encore intégrer pour toutes les valeurs de φ. Or, en faiſant $\psi = o$ dans la valeur de Mm, & égalant cette valeur à zéro, on aura, pour déterminer la limite de φ, $fin.^2\varphi = \frac{b^2}{r^2+b^2-a^2}$: ſoit donc $fin.\,\varphi = \frac{b\, fin.\,\theta}{\sqrt{(r^2+b^2-a^2)}}$, on aura, en ſubſtituant, doublant & introduiſant la maſſe du Sphéroïde M à la place de ſon volume $\frac{4\pi abc}{3}$, ...

$$\frac{3Mr}{(a^2-c^2)\sqrt{(r^2+b^2-a^2)}}\cdot d\theta\, cof.\,\theta\left[\sqrt{\left(\frac{r^2+b^2-a^2+(c^2-b^2)fin.^2\theta}{r^2+b^2-a^2+(a^2-b^2)fin.^2\theta}\right)} - \sqrt{\left(\frac{r^2+c^2-a^2}{r^2}\right)}\right],$$

différentielle qui doit être intégrée depuis $\theta = o$ juſqu'à $\theta = 90^\circ$, pour donner l'attraction en S'.

3. Cette différentielle n'eſt pas intégrable exactement, à moins que deux des quantités a, b, c ne ſoient égales entre elles, ce qui eſt le cas des Sphéroïdes de révolution. Mais une conſéquence très-remarquable, qui ſe déduit de cette formule, c'eſt qu'on peut changer les axes du Sphéroïde, pourvu que les foyers des ellipſes principales ne changent pas, & les attractions de ces différens Sphéroïdes ſeront entre elles comme leurs maſſes. Car les quantités a^2-b^2, a^2-c^2 reſtant les mêmes, il n'y aura de variable, dans la formule précédente,

que la quantité M. C'eſt préciſément en cela que conſiſte le Théorême de M. Maclaurin, dont voici l'énoncé:

Si deux Sphéroïdes ont leurs trois ſections principales décrites des mêmes foyers, leurs attractions ſur un même point ſitué dans le prolongement d'un des trois axes, ſeront entre elles comme leurs maſſes.

4. Pour déterminer maintenant la valeur abſolue de l'attraction, j'obſerve qu'en vertu du Théorême précédent on peut faire $r = a$, puiſque le cas où le point attiré eſt à la ſurface du Sphéroïde, conduit à la ſolution de tous les autres. Cette ſuppoſition réduit ma différentielle à la forme

$$\frac{3 M a}{b(a^2 - c^2)} d\,\theta \cos.\theta \left[\sqrt{\left(\frac{b^2 + (c^2 - b^2) \sin.^2 \theta}{b^2 + (a^2 - b^2) \sin.^2 \theta} \right)} - \frac{c}{a} \right];$$

mais il ſe préſente ici une difficulté dont il eſt bon de donner la ſolution avant d'aller plus loin.

5. Puiſque a eſt le demi-axe du Sphéroïde qui eſt dans la direction du point attiré, & que b & c ſont les deux autres demi-axes, il doit être indifférent de changer b & c l'un dans l'autre, & la valeur de l'attraction doit toujours être la même. Cependant notre formule ne paroît pas ſe prêter à ce changement. Pour examiner la choſe de plus près, je commence par ſimplifier ma différentielle en faiſant

$$\sin.\theta = x$$
$$b^2 = a^2 (1 - \beta)$$
$$c^2 = a^2 (1 - \gamma),$$

elle devient

$$\frac{3 M}{a^2} \cdot \frac{dx}{\gamma \sqrt{(1 - \beta)}} \left[\sqrt{\left(\frac{1 - \beta + (\beta - \gamma) x^2}{1 - \beta + \beta x^2} \right)} - \sqrt{(1 - \gamma)} \right];$$

nouvelle expreſſion où il faut que β & γ ſoient permutables, lorſqu'on aura intégré depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$. Soit encore $\frac{x^2}{1 - \beta + \beta x^2} = z^2$, on aura $\frac{3 M}{a^2} \left[\int \frac{dz \sqrt{(1 - \gamma z^2)}}{\gamma (1 - \beta z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sqrt{(1 - \gamma)}}{\gamma \sqrt{(1 - \beta)}} \right]$, & l'intégration qui reſte à effectuer doit toujours être priſe entre les limites $z = 0$, $z = 1$. Mais en différenciant la quantité $\frac{z\sqrt{(1-\gamma z^2)}}{\sqrt{(1-\beta z^2)}}$, on a $\frac{dz\sqrt{(1-\gamma z^2)}}{(1-\beta z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\gamma z^2 dz}{\sqrt{(1-\beta z^2)}.\sqrt{(1-\gamma z^2)}}$; donc $\int \frac{dz\sqrt{(1-\gamma z^2)}}{(1-\beta z^2)^{\frac{3}{2}}} - \int \frac{\gamma z^2 dz}{\sqrt{(1-\beta z^2)}.\sqrt{(1-\gamma z^2)}} = \frac{z\sqrt{(1-\gamma z^2)}}{\sqrt{(1-\beta z^2)}}$, & en prenant ces intégrales depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$, on aura

$$\int \frac{dz\sqrt{(1-\gamma z^2)}}{(1-\beta z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sqrt{(1-\gamma)}}{\sqrt{(1-\beta)}} = \gamma \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1-\beta z^2)}.\sqrt{(1-\gamma z^2)}};$$

donc l'attraction cherchée sera $\frac{3M}{a^2}\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1-\beta z^2)}.\sqrt{(1-\gamma z^2)}}$, quantité où il est clair maintenant que β & γ sont permutables l'une dans l'autre.

6. La formule de l'attraction étant réduite à cette forme très-simple, on effectuera l'intégration en développant le produit

$$z^2 dz\left(1 + \frac{1}{2}\beta z^2 + \frac{1.3}{2.4}\beta^2 z^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\beta^3 z^6 + \&c.\right)\left(1 + \frac{1}{2}\gamma z^2 + \frac{1.3}{2.4}\gamma^2 z^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\gamma^3 z^6 + \&c.\right):$$

or un terme quelconque de ce produit pouvant être représenté par

$$\frac{1.3.5\ldots 2m-1}{2.4.6\ldots\ldots 2m}\beta^m . \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots\ldots 2n}\gamma^n z^{2m+2n+2} dz,$$

son intégrale sera

$$\frac{1.3.5\ldots 2m-1}{2.4.6\ldots\ldots 2m}.\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots\ldots 2n}.\frac{\beta^m \gamma^n}{2m+2n+3};$$

donc l'attraction demandée sera exprimée par cette suite dont la loi est manifeste :

$$\frac{3M}{a^2}\Big[\frac{1}{3} + \frac{1}{2}.\frac{\beta+\gamma}{5} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{\beta^2+\gamma^2}{7} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\beta^3+\gamma^3}{9} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{\beta^4+\gamma^4}{11} + \&c.$$
$$+ \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{\beta\gamma}{7} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{2}.\frac{\beta^2\gamma+\beta\gamma^2}{9} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{2}.\frac{\beta^3\gamma+\beta\gamma^3}{11}$$
$$+ \frac{1.3}{2.4}.\frac{1.3}{2.4}.\frac{\beta^2\gamma^2}{11}.\Big]$$

Telle est l'attraction d'un Sphéroïde elliptique, qui a pour équation $\frac{xx}{aa} + \frac{yy}{bb} + \frac{zz}{cc} = 1$, sur un point placé à l'extrémité du demi-axe demi-axe a, les quantités β & γ étant $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ & $\frac{a^2 - c^2}{a^2}$, & pouvant être positives ou négatives à volonté. On en déduit facilement, par le théorême ci-dessus, la valeur de l'attraction pour tout autre point placé dans le prolongement d'un des trois axes à une distance quelconque r du centre. Il suffit de mettre r à la place de a dans la formule précédente, sans changer la valeur des quantités $a^2 - b^2$ & $a^2 - c^2$. On prendra donc $\beta = \frac{a^2 - b^2}{r^2}$, $\gamma = \frac{a^2 - c^2}{r^2}$, & l'attraction à la distance r, sur le prolongement du demi-axe a, sera . . . . . .

$$\frac{3\,M}{r^2}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2}.\,\frac{\beta + \gamma}{5} + \frac{1.\,3}{2.\,4}.\,\frac{\beta^2 + \gamma^2}{7} + \&c.\right].$$

7. Suivant la remarque que nous venons de faire, l'attraction à la distance r sera généralement $\frac{3\,M}{r^2}\int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1 - \beta z^2)}.\sqrt{(1 - \gamma z^2)}}$, les quantités β & γ désignant $\frac{a^2 - b^2}{r^2}$ & $\frac{a^2 - c^2}{r^2}$. Cette formule devient intégrable lorsque le Sphéroïde est de révolution. Soit, par exemple, $c = a$, on aura $\gamma = 0$, & l'intégrale sera

$\frac{M}{r^2}\left[\frac{\theta - \frac{1}{2}\,\sin.\,2\,\theta}{\frac{2}{3}\,\sin.^3\theta}\right]$, en prenant l'angle θ tel que $\sin.\,\theta = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{r}$.

Cette formule donne l'attraction d'un point situé dans le plan de l'équateur du Sphéroïde à la distance r du centre.

8. Si, pour le même Sphéroïde dont a est le rayon de l'équateur, & b le demi-axe, on demande l'attraction dans le prolongement de l'axe, il faudra d'abord changer a en b l'un dans l'autre, puis faire $a = c$, ce qui donnera $\beta = \gamma = -\left(\frac{a^2 - b^2}{r^2}\right)$. Je prends $\frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{r} = tang.\,\lambda$, & la quantité à intégrer devient $\frac{3\,M}{r^2}\,\frac{z^2\,dz}{1 + z^2\,tang.^2\,\lambda}$; d'où résulte l'attraction dans le prolongement de l'axe $\frac{M}{r^2}\left[\frac{tang.\,\lambda - \lambda}{\frac{1}{3}\,tang.^3\,\lambda}\right]$.

Ces résultats sont parfaitement d'accord avec ceux de M. Maclaurin. Il est inutile d'avertir que les angles θ & λ ne sont réels qu'autant que le Sphéroïde est applati ; s'il étoit alongé, on auroit, dans les formules précédentes, des logarithmes à la place des arcs de cercle.

De l'attraction des Sphéroïdes de révolution, quelle que soit la figure du méridien.

FIGURE 3. 9. Soit B A b le méridien qui passe par le point attiré S; B C, l'axe du Sphéroïde ; A a son équateur qui divise le méridien en deux parties égales & semblables A B, A b. D'un point quelconque M du Sphéroïde, j'abaisse M Q perpendiculaire sur le méridien B A b ; & suivant M Q, je mène les plans triangulaires M Q P, M Q O perpendiculaires aux droites C B, C S. Je fais C S $= r$, B C S $= \omega$, C M $= z$, B C M $= \psi$, M P Q $= \theta$, M C S $= \mu$, d'où je tire $MS^2 = r^2 - 2rz \cos.\mu + z^2$, & $\cos.\mu = \cos.\omega \cos.\psi + \sin.\omega \sin.\psi \cos.\theta$. Cela posé, la particule dM, située en M, exercera sur le point S les deux attractions suivantes dirigées dans le plan du méridien.

Suivant S C . . . . (P) $= \int \frac{(r - z\cos.\mu)\,dM}{(r^2 - 2rz\cos.\mu + z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Suiv. S V perp. à S C (Q) $= \int \frac{(\cos.\psi \sin.\omega - \cos.\omega \sin.\psi \cos.\theta)\,z\,dM}{(r^2 - 2rz\cos.\mu + z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Quant à l'expression de la particule dM, on peut la faire dépendre de variables bien différentes, & le choix de ces variables contribue beaucoup à faciliter les intégrations. D'après celles que nous avons adoptées pour déterminer la position du point M, savoir z, ψ & θ, on aura $dM = z^2\,dz\,d\theta\,d\psi \sin\psi$. On commencera donc par intégrer, par rapport à z, depuis le centre jusqu'à la surface du solide ; on prendra ensuite les deux autres intégrales par rapport à θ & ψ entre les limites o & 180°. Nous verrons que les deux premières intégrations, par rapport à z & θ, peuvent s'effectuer sans connoître la figure du méridien, & c'eſt ce qui conduit au Théorême que nous avons annoncé.

10. Pour évaluer la force (P), je conſidère d'abord la différentielle $\frac{(r - z \cos. \mu) z^2 dz}{(r^2 - 2rz \cos. \mu + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, & je la réduis enſuite, quoiqu'on la puiſſe intégrer exactement par les méthodes connues. Mon but eſt de ſimplifier par-là les intégrations ultérieures ; d'ailleurs, la méthode des ſuites n'eſt pas moins rigoureuſe qu'une autre, tant que la loi permet de les continuer ſans difficulté auſſi loin qu'on veut. J'aurai donc, en rejetant les puiſſances impaires de z, $\frac{z^2 dz}{r^2}\left[1 + 3\,A.\frac{z^2}{r^2} + 5\,B.\frac{z^4}{r^4} + 7\,C.\frac{z^6}{r^6} + \&c.\right]$, & les coëfficiens A, B, C, &c. feront les fonctions ſuivantes de $\cos. \mu$,

$$A = \frac{3}{2} \cos.^2 \mu - \frac{1}{2}.$$

$$B = \frac{5.7}{2.4} \cos.^4 \mu - \frac{3.5}{2.4}\, 2 \cos.^2 \mu + \frac{1.3}{2.4}.$$

$$C = \frac{7.9.11}{2.4.6} \cos.^6 \mu - \frac{5.7.9}{2.4.6}\, 3 \cos.^4 \mu + \frac{3.5.7}{2.4.6}\, 3 \cos.^2 \mu - \frac{1.3.5}{2.4.6}.$$

$$D = \frac{9.11.13.15}{2.4.6.8} \cos.^8 \mu - \frac{7.9.11.13}{2.4.6.8}\, 4 \cos.^6 \mu + \frac{5.7.9.11}{2.4.6.8}\, 6 \cos.^4 \mu - \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\, 4 \cos.^2 \mu + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\ \&c.$$

L'intégrale de cette ſuite, priſe depuis $z = 0$ juſqu'à $z = \pm$ CN, que j'appelle Z, ſera . . . .

$$\frac{2\,Z^3}{r^2}\left[\frac{1}{3} + \frac{3\,A}{5}.\frac{Z^2}{r^2} + \frac{5\,B}{7}.\frac{Z^4}{r^4} + \frac{7\,C}{9}.\frac{Z^6}{r^6} + \&c.\right].$$

11. Nous avons maintenant à intégrer la différentielle

$$\frac{2\,Z^3}{r^2}\, d\theta\, d\psi \sin. \psi \left[\frac{1}{3} + \frac{3\,A}{5}.\frac{Z^2}{r^2} + \frac{5\,B}{7}.\frac{Z^4}{r^4} + \&c.\right]$$

par rapport à θ ; & comme Z eſt une fonction de ψ ſeul, donnée par la figure du méridien, il ſuffira d'intégrer les termes $d\theta$, A $d\theta$, B $d\theta$, &c. entre les limites $\theta = 0$, $\theta = 180°$. On ſubſtituera donc, dans les quantités A, B, C, &c. pour $\cos. \mu$, ſa valeur $\cos. \omega \cos. \psi + \sin. \omega \sin. \psi \cos. \theta$, & ſuppoſant

$$\mathrm{P}' = cos.^2\ \omega\ cos.^2\ \psi + \frac{2.1}{2.2} sin.^2\ \omega\ sin.^2\ \psi.$$

$$\mathrm{P}'' = cos.^4\ \omega\ cos.^4\ \psi + \frac{4.3}{2.2} cos.^2\ \omega\ cos.^2\ \psi\ sin.^2\ \omega\ sin.^2\ \psi + \frac{4.3.2.1}{2.2.4.4} sin.^4\ \omega\ sin.^4\ \psi.$$

$$\mathrm{P}''' = cos.^6\ \omega\ cos.^6\ \psi + \frac{6.5}{2.2} cos.^4\ \omega\ cos.^4\ \psi\ sin.^2\ \omega\ sin.^2\ \psi + \frac{6.5.4.3}{2.2.4.4} cos.^2\ \omega\ cos.^2\ \psi\ sin.^4\ \omega\ sin.^4\ \psi + \frac{6.5.4.3.2.1}{2.2.4.4.6.6} sin.^6\ \omega\ sin.^6\ \psi\ \&c.$$

ensuite

$$\mathrm{A}' = \frac{3}{2}\mathrm{P}' - \frac{1}{2}.$$

$$\mathrm{B}' = \frac{5.7}{2.4}\mathrm{P}'' - \frac{3.5}{2.4} 2\,\mathrm{P}' + \frac{1.3}{2.4}.$$

$$\mathrm{C}' = \frac{7.9.11}{2.4.6}\mathrm{P}''' - \frac{5.7.9}{2.4.6} 3\,\mathrm{P}'' + \frac{3.5.7}{2.4.6} 3\,\mathrm{P}' - \frac{1.3.5}{2.4.6}\ \&c.$$

On aura $\int d\theta = \pi$, $\int \mathrm{A}\ d\theta = \mathrm{A}'\pi$, $\int \mathrm{B}\ d\theta = \mathrm{B}'\pi$ &c. & l'intégrale cherchée sera

$$\frac{2\pi Z^3 d\psi\, sin.\psi}{r^2}\left[\frac{1}{3} + \frac{3\mathrm{A}'}{5}.\frac{Z^2}{r^2} + \frac{5\mathrm{B}'}{7}.\frac{Z^4}{r^4} + \&c.\right].$$

12. Avant de passer à la dernière intégration, je remarque que les quantités A', B', C', &c. peuvent se décomposer en fonctions séparées de ω & de ψ, comme il suit :

$$\mathrm{A}' = \left(\frac{3}{2} cos.^2\ \omega - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2} cos.^2\ \psi - \frac{1}{2}\right).$$

$$\mathrm{B}' = \left(\frac{5.7}{2.4} cos.^4\ \omega - \frac{3.5}{2.4} 2\ cos.^2\ \omega + \frac{1.3}{2.4}\right)\left(\frac{5.7}{2.4} cos.^4\ \psi - \frac{3.5}{2.4} 2\ cos.^2\ \psi + \frac{1.3}{2.4}\right).$$

$$\mathrm{C}' = \left(\frac{7.9.11}{2.4.6} cos.^6\ \omega - \frac{5.7.9}{2.4.6} 3\ cos.^4\ \omega + \frac{3.5.7}{2.4.6} 3\ cos.^2\ \omega - \frac{1.3.5}{2.4.6}\right)\left(\frac{7.9.11}{2.4.6} cos.^6\psi - \frac{5.7.9}{2.4.6} 3\ cos.^4\psi + \frac{3.5.7}{2.4.6} 3\ cos.^2\psi - \frac{1.3.5}{2.4.6}\right)\ \&c.$$

Ce Théorême algébrique que nous démontrerons plus loin, va nous offrir des conséquences utiles.

13. Soient prises les intégrales suivantes depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = 90^\circ$, je les représente par $3\,M$, $3\,M\alpha$, $3\,M\beta$, &c. M étant la masse du Sphéroïde.

$$3\,M = 4\pi\int Z^3\,d\psi\,\sin.\psi.$$

$$3\,M\alpha = 4\pi\int Z^5\,d\psi\,\sin.\psi\left(\frac{3}{2}\cos.^2\psi - \frac{1}{2}\right).$$

$$3\,M\beta = 4\pi\int Z^7\,d\psi\,\sin.\psi\left(\frac{5.7}{2.4}\cos.^4\psi - \frac{3.5}{2.4}.\,2\cos.^2\psi + \frac{1.3}{2.4}\right).$$

$$3\,M\gamma = 4\pi\int Z^9\,d\psi\,\sin.\psi\left(\frac{7.9.11}{2.4.6}\cos.^6\psi - \frac{5.7.9}{2.4.6}\,3\cos.^4\psi + \frac{3.5.7}{2.4.6}\,3\cos.^2\psi - \frac{1.3.5}{2.4.6}\right)\&c.,$$

& l'attraction (P) dirigée vers le centre du Sphéroïde, sera exprimée par cette formule très-simple :

$$(P) = \frac{3\,M}{r^2}\Big[\frac{1}{3} + \frac{3\alpha}{5\,r^2}\left(\frac{3}{2}\cos.^2\omega - \frac{1}{2}\right) + \frac{5\beta}{7\,r^4}\left(\frac{5.7}{2.4}\cos.^4\omega - \frac{3.5}{2.4}.\,2\cos.^2\omega + \frac{1.3}{2.4}\right)$$
$$+ \frac{7\gamma}{9\,r^6}\left(\frac{7.9.11}{2.4.6}\cos.^6\omega - \frac{5.7.9}{2.4.6}\,3\cos.^4\omega + \frac{3.5.7}{2.4.6}.\,3\cos.^2\omega - \frac{1.3.5}{2.4.6}\right) + \&c.\Big],$$

dans laquelle les quantités α, β, γ, &c. ne dépendent que de la figure du méridien.

14. Par des calculs semblables, on détermineroit la force (Q) en intégrant trois fois la quantité

$$\frac{(\sin.\omega\cos.\psi - \cos.\omega\sin.\psi\cos.\theta)\,z\,dM}{(r^2 - 2\,r\,z\cos.\mu + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

mais on y parvient bien plus facilement à l'aide d'un Théorême que M. de la Place a bien voulu me communiquer : voici en quoi il consiste.

Soit V la somme des particules du corps, divisées par leurs distances au point attiré, c'est-à-dire $V = \int\frac{dM}{(r^2 - 2\,r\,z\cos.\mu + z^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Cette seule intégrale suffira pour déterminer, par ses différences partielles, les deux forces (P) & (Q), & on en conclura

$$(P) = -\frac{dV}{dr};\ (Q) = -\frac{1}{r}.\frac{dV}{d\omega}.$$

Ce Théorème se démontre facilement par la différentiation sous le signe; en observant que

$$\frac{d\,cos.\,\mu}{d\,\omega} = \frac{d\,(cos.\,\omega\,cos.\,\psi + sin.\,\omega\,sin.\,\psi\,cos.\,\theta)}{d\,\omega} = -sin.\,\omega\,cos.\,\psi + cos.\,\omega\,sin.\,\psi\,cos.\,\theta,$$

d'où résulte

$$-\frac{dV}{dr} = \int \frac{(r - z\,cos.\,\mu)\,dM}{(r^2 - 2\,r\,z\,cos.\,\mu + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$-\frac{1}{r}.\frac{dV}{d\omega} = \int \frac{(sin.\,\omega\,cos.\,\psi - cos.\,\omega\,sin.\,\psi\,cos.\,\theta)\,z\,dM}{(r^2 - 2\,r\,z\,cos.\,\mu + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

valeurs qui sont précisément celles des forces (P) & (Q).

15. De ce que $(P) = -\frac{dV}{dr}$, on tire facilement

$$V = \frac{3\,M}{r}\left[\frac{1}{3} + \frac{\alpha}{5\,r^2}\left(\frac{3}{2}\,cos.^2\,\omega - \frac{1}{2}\right) + \frac{\beta}{7\,r^4}\left(\frac{5.7}{2.4}\,cos.^4\,\omega - \frac{3.5}{2.4}\,2\,cos.^2\,\omega + \frac{1.3}{2.4}\right) + \&c.\right],$$

& puisque $(Q) = -\frac{1}{r}.\frac{dV}{d\omega}$, nous aurons

$$(Q) = \frac{3\,M}{r^2}\,sin.\,\omega\,cos.\,\omega\left[\frac{\alpha}{5\,r^2}.\,3 + \frac{\beta}{7\,r^4}\left(\frac{5.7}{2}\,cos.^2\,\omega - \frac{3.5}{2}\right)\right.$$
$$+ \frac{\gamma}{9\,r^6}\left(\frac{7.9.11}{2.4}\,cos.^4\,\omega - \frac{5.7.9}{2.4}\,2\,cos.^2\,\omega + \frac{3.5.7}{2.4}\right)$$
$$+ \frac{\delta}{11\,r^8}\left(\frac{9.11.13.15}{2.4.6}\,cos.^6\,\omega - \frac{7.9.11.13}{2.4.6}\,3\,cos.^4\,\omega\right.$$
$$\left.\left. + \frac{5.7.9.11}{2.4.6}\,3\,cos.^2\,\omega - \frac{3.5.7.9}{2.4.6}\right) + \&c.\right].$$

16. Ces formules font voir que si on connoît l'attraction pour un point situé sur l'axe du Sphéroïde, on en déduira facilement les deux attractions qui ont lieu pour tout autre point. En effet, que l'attraction pour un point situé sur l'axe à la distance r du centre, soit donnée par la formule

$$\frac{M_3}{r^2}\left[1 + \frac{A}{r^2} + \frac{B}{r^4} + \frac{C}{r^6} + \&c.\right],$$

& les deux forces (P) & (Q) auxquelles se réduit l'attraction du Sphéroïde sur un point quelconque, auront pour valeurs

$$(P) = \frac{M}{r^2}\left[1 + \frac{A}{r^2}\left(\frac{3}{2}\cos.^2\omega - \frac{1}{2}\right) + \frac{B}{r^4}\left(\frac{5.7}{2.4}\cos.^4\omega - \frac{3.5}{2.4}\,2\cos.^2\omega + \frac{1.3}{2.4}\right) + \frac{C}{r^6}\left(\frac{7.9.11}{2.4.6}\cos.^6\omega - \frac{5.7.9}{2.4.6}\,3\cos.^4\omega + \frac{3.5.7}{2.4.6}\,3\cos.^2\omega - \frac{1.3.5}{2.4.6}\right) + \&c.\right].$$

$$(Q) = \frac{M\,sin.\omega\cos.\omega}{r^2}\left[\frac{A}{r^2} + \frac{B}{5r^4}\left(\frac{5.7}{2}\cos.^2\omega - \frac{3.5}{2}\right) + \frac{C}{7r^6}\left(\frac{7.9.11}{2.4}\cos.^4\omega - \frac{5.7.9}{2.4}\,2\cos.^2\omega + \frac{3.5.7}{2.4}\right) + \frac{D}{9r^8}\left(\frac{9.11.13.15}{2.4.6}\cos.^6\omega - \frac{7.9.11.13}{2.4.6}\,3\cos.^4\omega + \frac{5.7.9.11}{2.4.6}\,3\cos.^2\omega - \frac{3.5.7.9}{2.4.6}\right) + \&c.\right].$$

Cela suppose que lorsque $\omega = 0$, les quantités $\frac{3}{2}\cos.^2\omega - \frac{1}{2}$, $\frac{5.7}{2.4}\cos.^4\omega - \frac{3.5}{2.4}\,2\cos.^2\omega + \frac{1.3}{2.4}$, &c. sont égales à l'unité; on peut le démontrer de plusieurs manières, & notamment par la théorie des différences.

17. Si on aime mieux exprimer l'attraction pour un point quelconque par deux forces X & Y parallèles à l'axe & à l'équateur, il faudra substituer les valeurs de (P) & de (Q) dans les formules $X = (P)\cos.\omega - (Q)\,sin.\omega$ & $Y = (P)\,sin.\omega + (Q)\cos.\omega$, & on trouvera

$$X = \frac{M\cos.\omega}{r^2}\left[\frac{A}{r^2}\left(\frac{5}{2}\cos.^2\omega - \frac{3}{2}\right) + \frac{B}{r^4}\left(\frac{7.9}{2.4}\cos.^4\omega - \frac{5.7}{2.4}\,2\cos.^2\omega + \frac{3.5}{2.4}\right) + \frac{C}{r^6}\left(\frac{9.11.13}{2.4.6}\cos.^6\omega - \frac{7.9.11}{2.4.6}\,3\cos.^4\omega + \frac{5.7.9}{2.4.6}\,3\cos.^2\omega - \frac{3.5.7}{2.4.6}\right) + \&c.\right].$$

$$Y = \frac{M\,sin.\omega}{r^2}\left[1 + \frac{A}{3r^2}\left(\frac{3.5}{2}\cos.^2\omega - \frac{1.3}{2}\right) + \frac{B}{5r^4}\left(\frac{5.7.9}{2.4}\cos.^4\omega - \frac{3.5.7}{2.4}\,2\cos.^2\omega + \frac{1.3.5}{2.4}\right) + \frac{C}{7r^6}\left(\frac{7.9.11.13}{2.4.6}\cos.^6\omega - \frac{5.7.9.11}{2.4.6}\,3\cos.^4\omega + \frac{3.5.7.9}{2.4.6}\,3\cos.^2\omega - \frac{1.3.5.7}{2.4.6}\right) + \&c.\right].$$

Application du Théorème de l'art. 16 aux Sphéroïdes elliptiques de révolution.

18. Nous avons trouvé (art. 8.) que l'attraction d'un point

ſitué dans le prolongement de l'axe, étoit $\frac{M}{r^2}\left[\frac{tang.\,\lambda - \lambda}{\frac{1}{3}\,tang.^3\,\lambda}\right]$, en ſuppoſant $tang.\,\lambda = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{r}$. Réduiſant cette quantité enſuite, & faiſant $a^2 - b^2 = c^2$, on aura

$$\frac{M}{r^2}\left[1 - \frac{3}{5}\cdot\frac{c^2}{r^2} + \frac{3}{7}\cdot\frac{c^4}{r^4} - \frac{3}{9}\cdot\frac{c^6}{r^6} + \&c.\right];$$

donc les deux attractions X & Y, pour un point quelconque, ſeront

$$X = \frac{M\,cof.\,\omega}{r^2}\left[1 - \frac{3}{5}\cdot\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{5}{2}\,cof.^2\,\omega - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{7}\cdot\frac{c^4}{r^4}\left(\frac{7\cdot 9}{2\cdot 4}\,cof.^4\,\omega - \frac{5\cdot 7}{2\cdot 4}\,2\,cof.^2\,\omega + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\right) - \&c.\right].$$

$$Y = \frac{M\,fin.\,\omega}{r^2}\left[1 - \frac{3}{5}\cdot\frac{c^2}{3\,r^2}\left(\frac{3\cdot 5}{2}\,cof.^2\,\omega - \frac{1\cdot 3}{2}\right) + \frac{3}{7}\cdot\frac{c^4}{5\,r^4}\left(\frac{5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4}\,cof.^4\,\omega - \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4}\,2\,cof.^2\,\omega + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4}\right) - \&c.\right].$$

La loi de ces expreſſions permet de les continuer auſſi loin qu'on veut; mais comme elles ne contiennent d'autre fonction de a & de b que c^2 ou $a^2 - b^2$ qui eſt le carré de l'excentricité, on en tire une propriété très-remarquable, qui donne bientôt les valeurs de X & Y en termes finis:

Si un même point eſt attiré par deux Sphéroïdes dont les ellipſes génératrices ont les mêmes foyers, les attractions de ces Sphéroïdes auront la même direction, & ſeront entre elles comme leurs maſſes.

FIGURE 2. 19. On peut donc ſubſtituer au Sphéroïde B A b un autre Sphéroïde de même maſſe β S α qui paſſe par le point S, & l'attraction ſera la même dans les deux cas. Il faut ſeulement que les deux ellipſes B A b, $\beta\,\alpha\,\beta'$ ſoient décrites des mêmes foyers, & qu'elles faſſent leur révolution autour de la même ligne C β. Soit α l'attraction du Sphéroïde β S α au point α de ſon équateur, & β ſon attraction au pôle, on aura, ſuivant les principes de M. Maclaurin, les deux attractions du point S dans les directions S D & S E.

$$X = \frac{CE}{C\beta}\cdot\beta,\quad Y = \frac{CD}{C\alpha}\cdot\alpha.$$

Pour avoir ces valeurs analytiquement, je ſuppoſe, comme le repréſente

représente la Figure, que A a est le grand axe de l'ellipse B A b, & F l'un de ses foyers, qui sera aussi celui de l'ellipse β S α. J'appelle C a, A; C β, B, & j'ai les deux équations

$$A^2 - B^2 = a^2 - b^2 = c^2,$$

$$r^2 \, \sin.^2 \omega = \frac{A^2}{B^2} (B^2 - r^2 \cos.^2 \omega),$$

d'où l'on tire

$$A = \sqrt{\left[\frac{r^2 + c^2 + \sqrt{(r^4 + 2 r^2 c^2 \cos. 2\omega + c^4)}}{2} \right]}.$$

$$B = \sqrt{\left[\frac{r^2 - c^2 + \sqrt{(r^4 + 2 r^2 c^2 \cos. 2\omega + c^4)}}{2} \right]}.$$

J'appelle l'angle β C F, λ, ce qui donne $tang. \lambda = \frac{C}{B}$, $\sin. \lambda = \frac{C}{A}$. Les attractions α & β sont donc, par les formules des art. 7 & 8,

$$\alpha = \frac{M}{A^2} \left(\frac{\lambda - \frac{1}{2} \sin. 2\lambda}{\frac{2}{3} \sin.^3 \lambda} \right)$$

$$\beta = \frac{M}{B^2} \left(\frac{tang. \lambda - \lambda}{\frac{1}{3} \, tang.^3 \lambda} \right),$$

d'où l'on déduit les deux attractions X & Y au point S en termes finis, savoir :

$$X = \frac{3 M r \cos. \omega}{c^3} (tang. \lambda - \lambda).$$

$$Y = \frac{3 M r \sin. \omega}{2 c^3} \left(\lambda - \tfrac{1}{2} \sin. 2\lambda \right).$$

20. Si nous avions voulu trouver directement l'attraction des Sphéroïdes elliptiques, sans connoître l'attraction dans le prolongement de l'axe, il auroit fallu effectuer les intégrations de l'art. 13. Or la valeur de Z^2 ou CN^2 est dans ce cas $\frac{a^2 b^2}{b^2 + c^2 \cos.^2 \psi}$ ou $\frac{c^2 (1 + k)}{k (1 + k \cos.^2 \psi)}$, en faisant $c^2 = b^2 k$; & comme k doit disparoître dans les quantités α, β, γ, &c. il auroit fallu démontrer que les intégrales suivantes, prises depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = 90°$, sont indépendantes de k.

$$\int \frac{(1+k)^{\frac{1}{2}}}{(1+k\,\text{cos.}^2\,\psi)^{\frac{3}{2}}}.\,d\psi\,\text{sin.}\,\psi.$$

$$\int \frac{(1+k)^{\frac{3}{2}}}{k\,(1+k\,\text{cos.}^2\,\psi)^{\frac{5}{2}}}.\,d\psi\,\text{sin.}\,\psi\left(\frac{3}{2}\,\text{cos.}^2\,\psi - \frac{1}{2}\right).$$

$$\int \frac{(1+k)^{\frac{5}{2}}}{k^2\,(1+k\,\text{cos.}^2\,\psi)^{\frac{7}{2}}}.\,d\psi\,\text{sin.}\,\psi\left(\frac{5.7}{2.4}\,\text{cos.}^4\,\psi - \frac{3.5}{2.4}\,2\,\text{cos.}^2\,\psi + \frac{1.3}{2.4}\right).$$

$$\int \frac{(1+k)^{\frac{7}{2}}}{k^3\,(1+k\,\text{cos.}^2\,\psi)^{\frac{9}{2}}}.\,d\psi\,\text{sin.}\,\psi\left(\frac{7.9.11}{2.4.6}\,\text{cos.}^6\,\psi - \frac{5.7.9}{2.4.6}\,3\,\text{cos.}^4\,\psi + \frac{3.5.7}{2.4.6}\,3\,\text{cos.}^2\,\psi - \frac{1.3.5}{2.4.6}\right) \&c.$$

On trouve en effet que, pour l'identité de nos résultats, ces intégrales doivent être reſpectivement $+1$, $-\frac{1}{3}$, $+\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{7}$, &c. C'eſt ce qu'on trouveroit auſſi par l'intégration immédiate.

Démonſtration du Théorême algébrique de l'art. 12.

21. La théorie précédente ne ſeroit fondée que ſur une induction peu ſatisfaiſante, ſi nous n'ajoutions pas la démonſtration rigoureuſe du Théorême algébrique qui lui ſert de baſe. Mettons d'abord ſous les yeux l'objet de la queſtion, en la conſidérant d'une manière purement analytique.

Les quantités P′, P″, P‴, &c. étant formées ſuivant cette loi,

$$P' = x^2 y^2 + \frac{2.1}{2.2}(1-x^2)(1-y^2).$$

$$P'' = x^4 y^4 + \frac{4.3}{2.2}x^2 y^2 (1-x^2)(1-y^2) + \frac{4.3.2.1}{2.2.4.4}(1-x^2)^2(1-y^2)^2.$$

$$P''' = x^6 y^6 + \frac{6.5}{2.2}x^4 y^4 (1-x^2)(1-y^2) + \frac{6.5.4.3}{2.2.4.4}x^2 y^2 (1-x^2)^2 (1-y^2)^2$$
$$+ \frac{6.5.4.3.2.1}{2.2.4.4.6.6}(1-x^2)^3(1-y^2)^3 \;\&c.$$

on en compoſe les quantités A′, A″, A‴, &c. ſuivant cette nouvelle loi.

$$A' = \frac{3}{2}.\,P' - \frac{1}{2}.$$

$$A'' = \frac{5.7}{2.4}\,P'' - \frac{3.5}{2.4}\,2\,P' + \frac{1.3}{2.4}.$$

$$A''' = \frac{7.9.11}{2.4.6}.\,P''' - \frac{5.7.9}{2.4.6}.\,3\,P'' + \frac{3.5.7}{2.4.6}.\,3\,P' - \frac{1.3.5}{2.4.6}.$$

$$A^{\text{IV}} = \frac{9.11.13.15}{2.4.6.8}.\,P^{\text{IV}} - \frac{7.9.11.13}{2.4.6.8}.\,4\,P''' + \frac{5.7.9.11}{2.4.6.8}.\,6\,P'' - \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}.\,4\,P' + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8},\ \&c.$$

Il faut démontrer que ces quantités A', A'', A''', &c. feront décompoſables chacune en deux fonctions ſéparées de x & de y, & ſemblables entre elles, de ſorte qu'on aura

$$A' = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{2}\right).$$

$$A'' = \left(\frac{5.7}{2.4}x^4 - \frac{3.5}{2.4}\,2\,x^2 + \frac{1.3}{2.4}\right)\left(\frac{5.7}{2.4}y^4 - \frac{3.5}{2.4}\,2\,y^2 + \frac{1.3}{2.4}\right).$$

$$A''' = \left(\frac{7.9.11}{2.4.6}x^6 - \frac{5.7.9}{2.4.6}\,3\,x^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6}\,3\,x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\right)\left(\frac{7.9.11}{2.4.6}y^6 - \frac{5.7.9}{2.4.6}\,3\,y^4 - \frac{3.5.7}{2.4.6}\,3\,y^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\right),\ \&c.$$

On peut prouver d'abord que la décompoſition des quantités A', A'', &c. ne peut pas ſe faire autrement ſi elle eſt poſſible. Car en admettant qu'elles puiſſent ſe partager ainſi en deux fonctions, l'une de x ſeule, l'autre de y ſeule, ces deux fonctions doivent être ſemblables, puiſque x & y entrent également dans les quantités P', P'', P''', &c. Elles ont de plus la forme que nous leur avons donnée; car en faiſant $y = 1$, A''', par exemple, devient

$$\frac{7.9.11}{2.4.6}x^6 - \frac{5.7.9}{2.4.6}.\,3\,x^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6}\,3\,x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}.$$

Cette quantité doit donc être facteur de A''' dans notre hypothèſe; & l'autre facteur ſera

$$\frac{7.9.11}{2.4.6}y^6 - \frac{5.7.9}{2.4.6}\,3\,y^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6}\,3\,y^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}.$$

Il reſte à voir ſi le produit de ces deux facteurs donne exactement la quantité A''', ou s'il ne faut pas les multiplier encore par une quantité constante. Mais on s'assure que cette constante n'a pas lieu, & que le produit est exact, en observant que la quantité $\frac{7.9.11}{2.4.6} - \frac{5.7.9}{2.4.6}.3 + \frac{3.5.7}{2.4.6}.3 - \frac{1.3.5}{2.4.6}$ qu'on a en faisant x & y égales à l'unité, & toutes celles de la même forme sont égales à l'unité, comme nous l'avons déjà dit (art. 16).

22. Il faut donc prouver que chacune des quantités A', A'', A''', &c. est de la forme XY, X étant une fonction de x seule, & Y une fonction semblable de y. Pour simplifier le calcul, à la place de x^2 & de y^2, je mets $\frac{x^2}{1+x^2}$ & $\frac{y^2}{1+y^2}$, & négligeant les dénominateurs communs, je fais de nouveau

$$P' = x^2 y^2 + \frac{2.1}{2.2}$$

$$P'' = x^4 y^4 + \frac{4.3}{2.2} x^2 y^2 + \frac{4.3.2.1}{2.2.4.4}.$$

$$P''' = x^6 y^6 + \frac{6.5}{2.2} x^4 y^4 + \frac{6.5.4.3}{2.2.4.4} x^2 y^2 + \frac{6.5.4.3.2.1}{2.2.4.4.6.6} \text{ \&c.}$$

d'où je forme les quantités

$$A' = \frac{3}{2} P' - \frac{1}{2} (1+x^2)(1+y^2).$$

$$A'' = \frac{5.7}{2.4}. P'' - \frac{3.5}{2.4} 2P'(1+x^2)(1+y^2) + \frac{1.3}{2.4}(1+x^2)^2(1+y^2)^2.$$

$$\begin{aligned} A''' = \frac{7.9.11}{2.4.6} P''' &- \frac{5.7.9}{2.4.6} 3 P''(1+x^2)(1+y^2) \\ &+ \frac{3.5.7}{2.4.6} 3 P'(1+x^2)^2(1+y^2)^2 \\ &- \frac{1.3.5}{2.4.6}(1+x^2)^3(1+y^3)^3 \text{ \&c.} \end{aligned}$$

Or si ces quantités sont décomposables, comme nous voulons le démontrer, on verra facilement, comme ci-dessus, que la décomposition ne peut avoir lieu que de la manière suivante.

$$A' = \left(x^2 - \frac{2.1}{2.2}\right)\left(y^2 - \frac{2.1}{2.2}\right).$$

$$A'' = \left(x^4 - \frac{4.3}{2.2}x^2 + \frac{4.3.2.1}{2.2.4.4}\right)\left(y^4 - \frac{4.3}{2.2}y^2 + \frac{4.3.2.1}{2.2.4.4}\right).$$

$$A''' = \left(x^6 - \frac{6.5}{2.2}x^4 + \frac{6.5.4.3}{2.2.4.4}x^2 - \frac{6.5.4.3.2.1}{2.2.4.4.6.6}\right)\left(y^6 - \frac{6.5}{2.2}y^4 + \frac{6.5.4.3}{2.2.4.4}y^2 - \frac{6.5.4.3.2.1}{2.2.4.4.6.6}\right) \&c.$$

Ce Théorême est renfermé dans le suivant, qui paroît plus facile à démontrer.

Soit $xy = p$, $(1+x^2)(1+y^2) = q$, & soient prises les quantités P^0, P^1, P^2, &c. puis A^1, A^2, A^3, &c. (où les nombres 0, 1, 2, 3, &c. désignent des quantièmes & non des exposans) suivant cette loi.

$$P^0 = 1.$$

$$P^1 = p.$$

$$P^2 = p^2 + \frac{2.1}{2.2}.$$

$$P^3 = p^3 + \frac{3.2}{2.2}p.$$

$$P^4 = p^4 + \frac{4.3}{2.2}p^2 + \frac{4.3.2.1}{2.2.4.4}.$$

$$P^5 = p^5 + \frac{5.4}{2.2}p^3 + \frac{5.4.3.2}{2.2.4.4}p.$$

$$P^6 = p^6 + \frac{6.5}{2.2}p^4 + \frac{6.5.4.3}{2.2.4.4}p^2 + \frac{6.5.4.3.2.1}{2.2.4.4.6.6}.$$

&c.

$$A^1 = P^1.$$

$$A^2 = \frac{3}{2}P^2 - \frac{1}{2}qP^0.$$

$$A^3 = \frac{5}{2}P^3 - \frac{3}{2}.qP^1.$$

$$A^4 = \frac{5.7}{2.4}P^4 - \frac{3.5}{2.4}.2qP^2 + \frac{1.3}{2.4}q^2P^0.$$

$$A^5 = \frac{7.9}{2.4}P^5 - \frac{5.7}{2.4}.2qP^3 + \frac{3.5}{2.4}q^2P^1.$$

$$A^6 = \frac{7.9.11}{2.4.6}P^6 - \frac{5.7.9}{2.4.6}3qP^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6}3q^2P^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}q^3P^0.$$

$$A^7 = \frac{9.11.13}{2.4.6}P^7 - \frac{7.9.11}{2.4.6}3qP^5 + \frac{5.7.9}{2.4.6}3q^2P^3 - \frac{3.5.7}{2.4.6}q^3P^1 \&c.$$

Je dis qu'on aura

$$A^1 = x\,y.$$

$$A^2 = \left(x^2 - \frac{2.1}{2.2}\right)\left(y^2 - \frac{2.1}{2.2}\right).$$

$$A^3 = \left(x^3 - \frac{3.2}{2.2}\,x\right)\left(y^3 - \frac{3.2}{2.2}\,y\right).$$

$$A^4 = \left(x^4 - \frac{4.3}{2.2}\,x^2 + \frac{4.3.2.1}{2.2.4.4}\right)\left(y^4 - \frac{4.3}{2.2}\,y^2 + \frac{4.3.2.1}{2.2.4.4}\right).$$

$$A^5 = \left(x^5 - \frac{5.4}{2.2}\,x^3 + \frac{5.4.3.2}{2.2.4.4}\,x\right)\left(y^5 - \frac{5.4}{2.2}\,y^3 + \frac{5.4.3.2}{2.2.4.4}\,y\right).$$

$$A^6 = \left(x^6 - \frac{6.5}{2.2}\,x^4 + \frac{6.5.4.3}{2.2.4.4}\,x^2 - \frac{6.5.4.3.2.1}{2.2.4.4.6.6}\right)\left(y^6 - \frac{6.5}{2.2}\,y^4 + \frac{6.5.4.3}{2.2.4.4}\,y^2 - \frac{6.5.4.3.2.1}{2.2.4.4.6.6}\right) \text{ \&c.}$$

23. Si cette décompoſition eſt vraie en général, on aura $\frac{dd(A^n)}{dx\,dy} = n^2\,A^{n-1}$, comme il eſt facile de voir à l'inſpection des facteurs précédens. Nous ferons voir d'abord que cette équation a lieu; nous prouverons enſuite que la décompoſition de A^n en eſt une ſuite néceſſaire.

La quantité A^n peut être repréſentée par la ſuite

$$A^n = a\,P^n - b\,P^{n-2}\,q + c\,P^{n-4}\,q^2 - f\,P^{n-6}\,q^3 + g\,P^{n-8}\,q^4 - \text{\&c.}$$

dans laquelle a, b, c, f, &c. ſont des fonctions connues de n. Je différencie cette équation deux fois de ſuite; la première, par rapport à x; la ſeconde, par rapport à y, & j'obſerve que par la nature des quantités P^1, P^2, &c. on a $\frac{d(P^n)}{dp} = n\,P^{n-1}$; d'ailleurs $\frac{dp}{dx} = y$, $\frac{dp}{dy} = x$, $\frac{dq}{dx} = 2x(1+y^2)$, $\frac{dq}{dy} = 2y(1+x^2)$.

On aura donc

$$\begin{aligned}\frac{dd(A^n)}{dx\,dy} = {} & n\,a\,P^{n-1} - 3(n-2)\,b\,P^{n-3}\,q + 5(n-4)\,c\,P^{n-5}\,q^2 - 7(n-6)\,f\,P^{n-7}\,q^3 + \text{\&c.} \\ & + p\left\{\begin{array}{l} n(n-1)\,a\,P^{n-2} - (n-2)(n-3)\,b\,P^{n-4}\,q + (n-4)(n-5)\,c\,P^{n-6}\,q^2 - \text{\&c.} \\ \quad - 4\,b\,P^{n-2} + 16\,c\,P^{n-4}\,q \ldots\ldots\ldots - 36\,f\,P^{n-6}\,q^2 \ldots\ldots\ldots + \text{\&c.} \end{array}\right\} \\ & - 2(p^2-1)\left[(n-2)\,b\,P^{n-3} - 2(n-4)\,c\,P^{n-5}\,q + 3(n-6)\,f\,P^{n-7}\,q^2 - \text{\&c.}\right].\end{aligned}$$

Comme il s'agit de réduire cette quantité à la forme $n^2 A^{n-1}$ que l'on peut repréſenter par

$$n^2 (a' P^{n-1} - b' P^{n-3} q + c' P^{n-5} q^2 - \&c.),$$

on voit qu'une telle réduction ne pourroit avoir lieu, ſi on n'avoit pas en général

$$P^n = \alpha P^{n-1} p + \beta P^{n-2} (p^2 - 1),$$

α & β étant fonctions de n ſeul. Pour examiner ſi on a en effet une ſemblable équation, je reprends les valeurs générales de P^n, P^{n-1}, P^{n-2} qui ſont

$$P^n = p^n + \frac{n.\,n-1}{2.\,2} p^{n-2} + \frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3}{2.\,2.\,4.\,4} p^{n-4} + \frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4.\,n-5}{2.\,2.\,4.\,4.\,6.\,6} p^{n-6} + \&c.$$

$$P^{n-1} = p^{n-1} + \frac{n-1.\,n-2}{2.\,2} p^{n-3} + \frac{n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4}{2.\,2.\,4.\,4} p^{n-5} + \frac{n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4.\,n-5.\,n-6}{2.\,2.\,4.\,4.\,6.\,6} P^{n-7} + \&c.$$

$$P^{n-2} = p^{n-2} + \frac{n-2.\,n-3}{2.\,2} p^{n-4} + \frac{n-2.\,n-3.\,n-4.\,n-5}{2.\,2.\,4.\,4} p^{n-6} + \frac{n-2.\,n-3.\,n-4.\,n-5.\,n-6.\,n-7}{2.\,2.\,4.\,4.\,6.\,6} p^{n-8} + \&c.$$

& je les ſubſtitue dans l'équation précédente. Il faut, pour qu'elle devienne identique, qu'on ſatisfaſſe à différentes conditions, qui ſont toutes repréſentées par l'équation . . $(n-1)(n-2k)\alpha + (n-2k)(n-2k-1)\beta - 4k^2\beta = n(n-1)$, le nombre k étant à volonté. Or cette équation ſe réſout ſans difficulté, en prenant $\alpha = \frac{2n-1}{n}$, & $\beta = \frac{1-n}{n}$. On aura donc

$$P^n = \frac{2n-1}{n} P^{n-1} p - \left(\frac{n-1}{n}\right) P^{n-2} (p^2 - 1).$$

Au moyen de cette formule, j'élimine les termes affectés de $p^2 - 1$ dans ma différentielle, & j'ai

$$\frac{dd(A^n)}{dxdy} = [na + 2b(n-1)]P^{n-1} - [3(n-2)b + 4(n-3)c]P^{n-3}q + [5(n-4)c + 6(n-5)f]P^{n-5}q^2$$

$$+p\left\{\begin{array}{l} n(n-1)aP^{n-2} - (n-2)(n-3)bP^{n-4}q + (n-4)(n-5)cP^{n-6}q^2 - \&c. \\ -2(2n-1)bP^{n-2} + 4(2n-3)cP^{n-4}q - 6(2n-5)fP^{n-6}q^2 + \&c. \end{array}\right.$$

Il faut maintenant que les termes qui multiplient p se détruisent d'eux-mêmes, & qu'on ait

$$b = \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}a,\ c = \frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}b,\ f = \frac{(n-4)(n-5)}{6(2n-5)}c, \text{ \&c.}$$

Cette relation entre les coëfficiens a, b, c, f, &c. est d'autant plus singulière, que la valeur générale de A^n semble n'être pas la même lorsque n est pair & lorsqu'il est impair. En effet, nous avons

$$A^{2m} = \frac{2m+1.2m+3\ldots4m-1}{2.4\ldots\ldots2m}P^{2m} - \frac{2m-1.2m+1\ldots4m-3}{2.4\ldots\ldots2m}mP^{2m-2}q$$
$$+ \frac{2m-3\ldots4m-5}{2\ldots2m}.\frac{m.m-1}{2}P^{2m-4}q^2 - \&c.$$

$$A^{2m+1} = \frac{2m+3.2m+5\ldots4m+1}{2.4\ldots\ldots2m}P^{2m+1} - \frac{2m+1.2m+3\ldots4m-1}{2.4\ldots\ldots2m}mP^{2m-1}q$$
$$+ \frac{2m-1\ldots4m-3}{2.4\ldots2m}.\frac{m.m-1}{2}P^{2m-3}q^2 - \&c.$$

Cependant on trouve, dans les deux cas, que les relations précédentes entre les coëfficiens a, b, c, &c. sont exactes. On a donc

$$\frac{dd(A^n)}{dxdy} = \frac{n}{2n-1}.an^2P^{n-1} - \frac{n-2}{2n-3}bn^2P^{n-3}q + \frac{n-4}{2n-5}.cn^2P^{n-5}q^2 - \&c.$$

& pour que cette quantité se réduise enfin à $n^2 A^{n-1}$ ou $n^2(a'P^{n-1} - b'P^{n-3}q + \&c.)$, il faut que

$$a = \frac{2n-1}{n}a',\ b = \frac{2n-3}{n-2}b',\ c = \frac{2n-5}{n-4}c', \text{ \&c.}$$

Ces égalités se vérifient en comparant les coëfficiens des formules A^{2m}, A^{2m+1}, A^{2m+2}. Mais on verra le tout d'un coup-d'œil, d'œil, ainsi que les relations qui ont été données ci-dessus entre les coëfficiens a, b, c, &c, si nous mettons la valeur de A^n sous cette forme générale où il n'y a plus à distinguer le cas de n pair & celui de n impair.

$$A^n = \frac{1.3.5\ldots\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots\ldots\ldots n} P^n - \frac{1.3.5\ldots\ldots 2n-3}{1.2.3\ldots\ldots n-2}.\frac{1}{2} P^{n-2} q$$
$$+ \frac{1.3.5\ldots\ldots 2n-5}{1.2.3\ldots\ldots n-4}.\frac{1}{2.4} P^{n-4} q^2 - \frac{1.3.5\ldots 2n-7}{1.2.3\ldots n-6}.\frac{1}{2.4.6} P^{n-6} q^3$$
$$+ \frac{1.3.5\ldots\ldots 2n-9}{1.2.3\ldots\ldots n-8}.\frac{1}{2.4.6.8} P^{n-8} q^4 - \&c.$$

24. L'équation $\frac{dd\, A^n}{dx\,dy} = n^2\, A^{n-1}$ étant ainsi vérifiée, j'appelle X^n la quantité

$$x^n - \frac{n.n-1}{2.2} x^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.2.4.4} x^{n-4} - \&c.$$

& Y^n une semblable fonction de y; je suppose qu'on a trouvé $A^{n-1} = X^{n-1} Y^{n-1}$, & je vais démontrer qu'il en résulte $A^n = X^n Y^n$. Car soit $A^n = X^n\, Y^n + u$, puisque $\frac{dd\, A^n}{dx\, dy} = n^2\, A^{n-1}$, & $\frac{dX^n}{dx} = n\, X^{n-1}$, on aura $\frac{ddu}{dx\,dy} = 0$. Donc $u = \varphi : x + \psi : y$. Mais les quantités x & y doivent entrer de la même manière dans A^n; ainsi les deux fonctions arbitraires désignées par φ & ψ sont égales. On aura donc $A^n = X^n\, Y^n + \varphi : x + \varphi : y$. Si n est impair, & qu'on fasse $x = 0$, les quantités A^n & X^n s'évanouissant, on aura $\varphi : y + \varphi : 0 = 0$. Donc $\varphi : y$ est constant, il en est de même de $\varphi : x$; & puisque leur somme s'évanouit dans un cas particulier, on a toujours $A^n = X^n\, Y^n$.

Si n est pair, $\varphi : x$ sera une fonction paire de x, puisqu'il n'entre que des puissances paires de x dans A^n & X^n. On peut donc écrire $A^n = X^n\, Y^n + \psi : x^2 + \psi : y^2$. Mais dans le cas particulier où $y^2 = -1$, on a $A^n = X^n\ Y^n$. Donc $\psi : x^2 + \psi : -1 = 0$; donc les fonctions $\psi : x^2$, $\psi : y^2$ sont encore constantes, & puisque leur somme s'évanouit dans le cas particulier où $y^2 = -1$, elle s'évanouit toujours, & on a encore $A^n = X^n\ Y^n$.

Donc la décomposition de A^{n-1} entraîne nécessairement celle de A^n; & puisque la décomposition de A^n est évidente pour les premières valeurs de n, elle est donc vraie pour toutes les autres. C'est ce qu'il falloit démontrer.

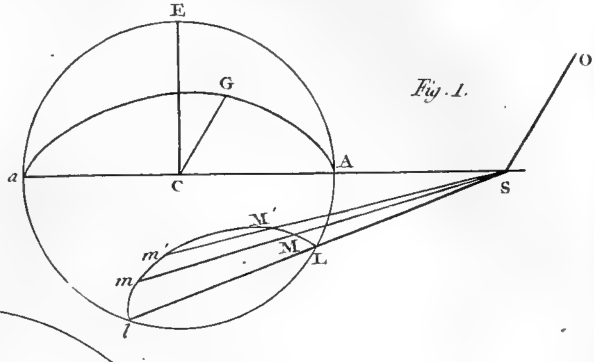


Fig. 1.

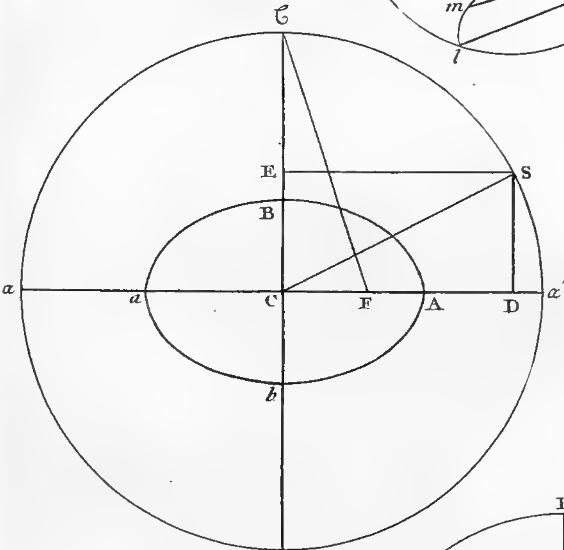


Fig. 2.

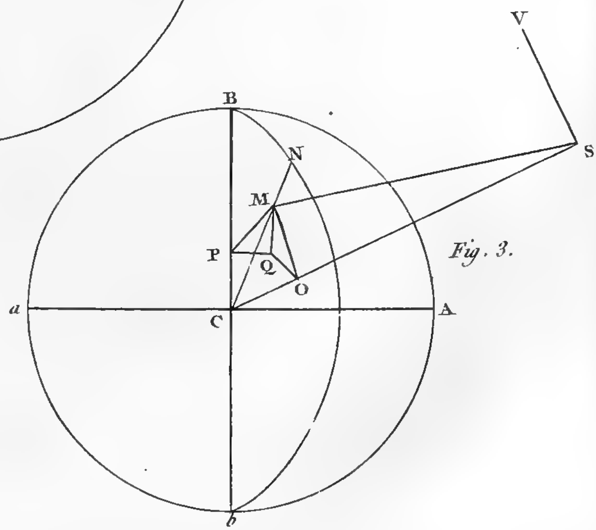


Fig. 3.

C.ne Haussard.

DESCRIPTION
DES
VOLCANS,

DÉCOUVERTS EN 1774, DANS LE BRISGAW,

Par M. le Baron DE DIETRICH, *Magiſtrat-Noble de la Ville de Strasbourg, Secrétaire général des Suiſſes & Griſons, &c. Correſpondant de l'Académie Royale des Sciences.*

PARMI les différens phénomènes que la Nature offre à ceux qui la contemplent, l'un des plus intéreſſans, ſans doute, eſt la vue des effets qu'ont produits les efforts impétueux des incendies ſouterrains.

Il n'y a plus que quelques parties de l'Europe qui renferment des Volcans encore enflammés; mais il n'y a preſque pas de provinces où l'on ne découvre des Volcans éteints.

M. Hermann, Profeſſeur d'Hiſtoire Naturelle à Strasbourg, poſſédoit, dans ſa collection de foſſilles, une pierre noire venant du côté du vieux Brisach en Brisgaw. Il supposa qu'elle pouvoit devoir son origine à un Volcan; il envoya un échantillon à un de ses Correspondans en Allemagne, en lui faisant part de ses idées sur l'origine de cette pierre. Je la vis chez cet ami, & cela me suffit pour me persuader que son opinion étoit fondée. De retour chez moi, je lui demandai des éclaircissemens à cet égard; il ne put rien ajouter à ce que je savois déjà, que cette pierre avoit été tirée des environs du vieux Brisach (*a*).

Le vieux Brisach même est situé sur les bords de la rive droite du Rhin, dans le Brisgaw; sa position est frappante : il est bâti sur une colline entièrement isolée, située à trois lieues à l'ouest des montagnes de la Forêt-noire, dont il est séparé par un pays plat & graveleux que le Rhin arrosoit autrefois, sans aucune apparence de liaison avec cette grande chaîne de montagnes.

Dès qu'on entre dans cette Ville, on ne sauroit douter qu'il n'y ait des Volcans dans la proximité. Les ruines de ses fortifications sont toutes formées de laves, & les maisons de la Ville sont généralement bâties de cette pierre volcanique; la lave est désignée dans le pays sous le nom de *pierre noire*, & personne ne se doute de son origine.

Le vieux Brisach est situé sur une colline médiocrement élevée, au midi de laquelle est une seconde colline moins haute, qui n'est séparée de la première que par une très-petite

(*a*) Depuis que la première partie de ce Mémoire a été lue à l'Académie Royale des Sciences, j'ai fait imprimer ma Traduction des Lettres de M. Ferber; j'ai parlé transitoirement, dans mes notes, de ma découverte des Volcans du Brisgaw; les amis de M. Hermann m'ont fait un crime de m'attribuer cette découverte. L'Auteur des Annonces Littéraires de Gottingue, au n.° 130, année 1776, me donne un démenti formel à ce sujet, & attribue, sans autre forme de procès, la découverte des Volcans du Brisgaw à M. Hermann. Je lui avois rendu, dans ce Mémoire, l'hommage que je lui devois; il tenoit de l'Architecte de notre Ville les morceaux de lave qui m'ont engagé à faire des recherches; il a soupçonné un Volcan; mais jusqu'à ce jour il ne connoît encore ces Volcans que par ce qu'il en a appris de moi, & il ne se doutoit pas que le Kayserstuhl, au pied duquel il avoit passé, fût volcanique. M. Hermann désapprouve lui-même ce zèle inconsidéré de ses amis.

étendue de terrein. Le Rhin coule aujourd'hui à leur pied. Ces deux monticules décrivent une demi-circonférence en forme d'amphithéâtre, qui fait face à l'oueſt & au Rhin. Elles peuvent avoir toutes deux une lieue de tour, ſont abſolument iſolées, & le terrein qui les environne eſt parfaitement plat.

En ſuivant le rivage de l'oueſt au ſud, j'eus la ſatisfaction de voir la coupe entière de la colline ſur laquelle eſt bâtie la Ville.

L'Impératrice Reine a fondé au Briſach un Couvent de Dames pour l'éducation des Demoiſelles de condition du Briſgaw; cette Maiſon Religieuſe eſt juſtement bâtie au ſommet de la partie du monticule qui eſt coupé à pic à une hauteur d'environ cent pieds.

Il n'y a du haut en bas qu'une ſeule maſſe de lave, dont on ne diſtingue les couches que par une légère variété de couleurs. Il y a dans cette maſſe des petites fentes perpendiculaires, ou peu inclinées, de deux à trois lignes d'épaiſſeur, refermées par du gyps ſtrié. Ces crevaſſes doivent ſans doute leur origine au refroidiſſement ou à la condenſation de la lave; le gyps qui s'y eſt logé, ne proviendroit-il pas du dépôt des eaux qui ont découlé des bâtimens qui ſont au deſſus de la lave, ces eaux ayant détaché des parties gypſeuſes, qui en ſe réuniſſant ont pu former des ſtries?

Une partie de cette lave eſt couverte à ſa ſuperficie d'une croûte blanche vitreuſe qui reſſemble à la calcédoine, qui provient vraiſemblablement d'une ſurabondance de ſchoerl blanc (*a*),

(*a*) Lorſque cette première partie de mon Mémoire fut lue à l'Académie, je traduiſois les Lettres de M. Ferber ſur l'Italie; j'adoptai de cet Ouvrage la dénomination de ſchoerl blanc pour cette ſubſtance blanche qui eſt ſi commune dans les laves. M. Deſmareſt a depuis lors trouvé que ſouvent cette ſubſtance eſt de la zéolite, que d'autres fois elle eſt calcaire. C'eſt chez ce Savant que M. Paſumot a vu la zéolite ſtriée dans la lave du Briſgaw : j'en ai trouvé d'après lui; mais il y a auſſi, parmi cette ſubſtance blanche, des parties ſimplement quartzeuſes; M. Lavoiſier & M. Sage en ont tous deux & ſéparément fait l'épreuve devant moi. Nous avons détaché des laves les grains blancs & vitreux qu'elles renfermoient; une partie de ces grains mis en digeſtion dans l'acide nitreux, y fut diſſoute, l'autre partie reſta intacte, & il ne ſe forma pas de gelée : ces grains étoient donc en partie calcaires & en partie quartzeux.

qui n'ayant pu se loger dans les pores de la lave, a été repoussé à sa superficie. Quelquefois cette croûte blanche est farineuse, ce qu'il faut attribuer à l'action de l'air qui a réduit en poudre ces parties qui étoient vitreuses.

En général ces laves sont des terres cuites plus ou moins vitrifiées, noirâtres, brunes, rougeâtres, grises, jaunes, verdâtres, blanches, plus ou moins poreuses, renfermant beaucoup de cristaux de schoerl noir, oblongs ou arrondis, applatis & hexagones, & du schoerl blanc (voyez la note) qui revêtit les parois de leurs pores, ou les remplit entièrement, sous la forme de cristaux, de petites boules, de points infiniment petits, ou d'une farine blanche. Elles sont toutes plus ou moins attirables à l'aimant; quelques-unes ont eu un degré de cuisson qui les met en état de faire feu avec l'acier. Mais il n'y en a point qui soit parvenue au degré de vitrification de cette espèce de lave que l'on nomme agate noire d'Islande, à moins qu'elle n'eût été décomposée par les acides qu'on trouve abondamment sur les Volcans encore enflammés ou nouvellement éteints. Quoique ces laves soient presque toutes poreuses, aucune n'approche de la légèreté de la pierre-ponce.

On y trouve aussi un tuf volcanique jaunâtre, attirable à l'aimant par les petits grains de schoerl noir qu'il renferme.

Il y a au pied de cette masse de lave, de petits jardins qui n'ont d'autre terre que de la cendre volcanique; ils sont d'une grande fertilité : au bas de ces jardins est le rivage du Rhin, sur lequel on trouve un mélange de gravier, de lave roulée & de cendres volcaniques.

Toute la colline méridionale du vieux Brisach, qui porte le nom d'*Eckardsberg*, est formée de cendres volcaniques, grises & jaunâtres. Il y a au sommet de la colline, des ruines d'un ancien château; le reste du terrein produit de très-beau grain; on n'y trouve d'autre lave que celle qui provient des décombres du château.

Les collines du vieux Brisach sont donc vraiment volcaniques; elles forment vraisemblablement une grande partie de la circonférence d'un ancien crater écroulé.

Les éruptions du *vieux Brisach* peuvent avoir contribué aux petites variations que le cours du Rhin a éprouvées; mais ce n'est point à ce Volcan que j'attribue ces grands changemens de lits; il y a des causes plus certaines, fondées sur l'état actuel du local, dont je ferai mention ci-dessous.

Le schoerl blanc, contenu dans plusieurs variétés de lave du vieux Brisach, a adopté la forme des pores dans lesquels il s'est niché. Ces pores n'étant pas tous régulièrement sphériques, le schoerl qui y est contenu, ne l'est pas non plus. Cette observation me prouve que la matière du schoerl blanc étoit en fusion dans la lave fluide, que les molécules de cette matière se sont rapprochées lors de la condensation de la lave, par la tendance des particules homogènes les unes vers les autres, & que cette matière s'est logée dans les cavités que l'air dilaté avoit produites; que si le schoerl blanc n'avoit point trouvé assez de pores, il auroit été repoussé jusqu'à la superficie de la lave, parce que la matière qui compose le corps de la lave, étoit plus considérable, & qu'elle a fait les mêmes efforts que celle du schoerl blanc, pour rapprocher ses parties en repoussant toute la matière hétérogène.

Bien convaincu que les collines du vieux Brisach étoient les débris d'un ancien crater, je résolus de reconnoître la montagne d'Yhryngen, d'où les habitans du vieux Brisach tirent la pierre noire avec laquelle ils bâtissent.

La plaine du vieux Brisach est terminée au nord par un chaînon de collines que j'avois déjà présumé n'être pas de première formation, puisque j'étois convaincu que le Rhin avoit eu son cours de ce côté-là, par les dépôts de graviers qu'il a laissés entre la Forêt-noire & le vieux Brisach, & par la tradition du pays même; ce qui eût été impossible, si ces montagnes avoient toujours existé. Mon opinion fut confirmée en apprenant au vieux Brisach que la pierre noire à bâtir se tiroit de ces collines.

Cette suite de monticuses est située au nord-est du vieux Brisach; elles se présentent sur une même ligne qui forme une sorte d'équerre avec la grande chaîne de la Forêt-noire, d'où cette ligne paroît commencer. Elle se porte de l'est à l'ouest presque jusqu'au Rhin. La ligne est interrompue par le vallon d'Yhryngen, qui, tout petit qu'il est, met une grande différence entre les collines qui sont au levant de ce vallon & celles qui leur sont opposées.

Les premières de ces monticules, au levant du vallon, sont calcaires, & tiennent aux autres collines de la même nature, qui devancent les hautes montagnes de la Forêt-noire; elles peuvent donc être regardées comme collines avancées de la Forêt-noire.

Les collines qui sont au couchant du vallon d'Yhryngen, sont d'une formation postérieure; elles sont entièrement volcaniques. C'est à elles que j'attribue la grande variation que le Rhin a éprouvée dans son cours. Je suppose avec vraisemblance que son lit a occupé la plaine dans laquelle se sont élevées les collines volcaniques, lesquelles ont formé une digue tout au travers de cette plaine, de manière que le Rhin a été forcé de prendre son cours à une forte lieue au couchant de sa première direction; on n'a qu'à remarquer le coude que ce fleuve décrit à la hauteur de ces collines volcaniques, pour en être convaincu.

Les collines volcaniques sont beaucoup plus élevées que les collines calcaires qui sont sur la même ligne; il y en a qui peuvent passer pour de hautes montagnes, elles ont au delà de six lieues d'étendue du sud au nord, sur près de deux de largeur de l'est à l'ouest. Ces collines doivent leur origine à des éruptions réitérées & des plus violentes; ce qui est prouvé par la quantité de croupes de montagnes qu'elles renferment.

Je passai, en sortant du vieux Brisach, par une plaine dont le le terrein eſt graveleux; cependant ce gravier eſt mêlé de cendres volcaniques; la terre végétale même paroiſſoit en être chargée, le chemin étoit rempli de morceaux de lave détachés, qui ont été roulés des collines voiſines, ou qui ont été répandus par les voitures qui mènent la pierre au vieux Briſach.

Je gagnai l'extrémité orientale des collines volcaniques qui ſe terminent au vallon d'Yhryngen; je donne ce nom à ce vallon, parce que le village d'Yhryngen eſt ſitué à ſon entrée. Ce village appartient à M. le Margraff de Baden.

La montagne qui termine, du côté du levant, les collines volcaniques, porte auſſi le nom de ce village. Cette montagne d'Yhryngen eſt à une petite demi-lieue au ſud du village, & à une lieue & demie du vieux Briſach. On y voit les marques les plus diſtinctes de bouleverſement. Sa pente méridionale eſt couverte de morceaux de lave détachés, qui, par leur mobilité, en rendent l'accès pénible; il n'y croît que des ronces, & par-ci par-là il y a des grands blocs de lave qui ſortent du corps de la colline; les autres côtés & le ſommet de la montagne ſont ſemés de grains & plantés en vigne, le terrein en eſt très-fertile; cette différence provient de ce que la côte méridionale eſt formée par pluſieurs maſſifs de lave qui ſont à nu, tandis que les autres parties de la ſuperficie de la montagne ſont recouvertes de cendres volcaniques, & cela à une très-grande hauteur; car en allant du ſud au nord de cette colline, on trouve des chemins creux très-profonds, où l'on ne voit que des cendres qui ont bien acquis un degré de fermeté, mais qui ſont bien éloignées d'être converties en tuf volcanique, car elles ſont encore friables; les montagnes volcaniques qui ſont au nord de celles d'Yhryngen, s'élèvent ſucceſſivement à une très-grande hauteur.

En ſuivant la pente méridionale des collines volcaniques de l'eſt à l'oueſt, on obſerve qu'elles décrivent ſucceſſivement le tiers, la moitié & juſqu'au trois quarts de la circonférence de pluſieurs cercles.

La partie de la côte méridionale attenant à la montagne d'Yhryngen, montre les laves à découvert, & n'eſt revêtue que de quelques ronces; mais en avançant vers l'oueſt, la côte eſt plantée de vignes. Ces laves ſervent à bâtir; elles ſont de la même nature que celles du vieux Briſach, à l'exception de quelques variétés, telle qu'une lave d'un rouge briqueté, remplie de grands pores dont les parois ſont revêtues d'une terre jaunâtre; on y trouve auſſi des laves qui renferment des criſtaux de ſchoerl jaunes & bruns, oblongs ou arrondis, qu'on ne voit pas dans les laves du vieux Briſach.

Il y a dans les collines de cendres, qui ſont derrière la montagne d'Yhryngen, des pierres arrondies, d'un gris blanchâtre, alkalines, d'un grain très-fin, qui ne ſont autre choſe qu'un tuf formé par l'endurciſſement des cendres volcaniques.

En s'enfonçant un peu vers le nord-oueſt dans le corps de ces collines volcaniques, on entre dans la banlieue du village d'*Achkarn;* on y voit conſtamment de hautes collines & montagnes volcaniques; on y diſtingue ſur-tout un très-grand crater évaſé. Les montagnes qui lui ſervent de mur, ſont toutes ſur pied; il eſt parfaitement entier, il n'a d'autre ouverture que le chemin creux par lequel on y entre. Le fond de ce crater forme aujourd'hui une belle plaine très-fertile; il y vient les plus beaux grains. Cette plaine eſt environnée de hautes montagnes plantées de pins, & d'autres arbres qui ne ſont formés que de laves & de cendres. On a ouvert ſur la côte de l'une de ces montagnes, une carrière de lave ſuperbe qui mérite d'être vue. La maſſe de lave qu'on y exploite, a près de 150 pieds de hauteur; on en tire des blocs prodigieux; elle ſert de pierres de taille. Elle n'offre que de légères variétés de celle du vieux Briſach & d'Yhryngen.

En allant d'*Achkarn*, vers le nord-nord-oueſt, on entre dans le ban du village de *Rothweil*, dans lequel eſt une montagne entièrement formée de lave, & les montagnes qui l'environnent, de cendres volcaniques. On a découvert tout le côté du levant de cette montagne, ſur une longueur de plus de ſix cents pas, pour en tirer la lave. Cette carrière eſt auſſi intéreſſante pour ſon étendue, que parce qu'on y voit la coupe de cette montagne de lave : il ne croît à ſon ſommet que des buiſſons; les arbres plus forts ne ſauroient y prendre racine, car il n'y a encore que très-peu de terre végétale par-deſſus la lave; il n'y a que des ronces ſur les côtés de cette montagne.

Les couches de lave s'y ſuccèdent, en commençant immédiatement ſous le gazon ; elles ſe diſtinguent par la couleur & la qualité de la lave; mais elles ne ſont ſéparées par aucunes couches de cendre ou de terre végétale : d'où il faut conclure qu'il n'y a pas eu de longs intervalles entre les éruptions qui ont produit ces différentes laves, car alors on trouveroit, comme à *Pompeïa* & à *Herculanum*, des couches intermédiaires non volcaniſées.

En allant au levant de *Rothweil*, par Bickernſol, on trouve ſur la liſière des collines volcaniques, le village de Waaſenweiler; il eſt ſitué à une forte demi-lieue au nord-eſt d'Yhryngen. Là le vallon qui ſépare les collines volcaniques d'avec les collines avancées de la Forêt-noire, s'élargit de plus en plus; la rivière de Treiſam baigne les pieds des collines volcaniques.

D'Yhryngen à Waaſenweiler, on paſſe devant des collines de cendres, toutes plantées de vignes. On fouille de la tourbe près de Waaſenweiler, au levant du chemin dans la vallée dont je viens de parler. On tire de la lave au deſſous de l'égliſe de Waaſenweiler.

On voit, à une portée de fuſil de Waaſenweiler, une maſſe de lave qui eſt exploitée en carrière, ſur environ cinquante pieds de hauteur; on y obſerve pluſieurs crevaſſes perpendiculaires & obliques, remplies d'une ſubſtance pierreuſe, alkaline & blanche, d'environ quatre lignes d'épaiſſeur, provenant ſans doute du dépôt des eaux qui ont filtré au travers de ces crevaſſes : ces eaux venant de collines volcaniques plus élevées, il eſt vraiſemblable qu'elles avoient entraîné les parties alkalines des cendres volcaniques, ſur leſquelles elles avoient coulé, en plus grande quantité que les autres parties qui forment cette production.

La lave qu'on retire de cette carrière, n'offre que peu de variétés de celles du vieux Briſach; je ne ferai mention que de celles qui ont quelques accidens particuliers.

La lave de Waaſenweiler a beaucoup de gerçures peu ſenſibles, au moyen deſquelles elle ſe rompt aiſément; la ſurface de cette lave, ſéparée par ces petites fentes, eſt communément revêtue d'une petite couche alkaline d'un gris blanc, ſur laquelle il y a par-ci par-là des petites arboriſations rouges, qui attirent l'aimant plus fortement que le corps de la lave. L'extérieur de cette lave eſt enduit de même d'une couche alkaline blanche, qui tire ſur le jaune & le vert, entremêlée & quelquefois recouverte de petites lames couleur de fer & gorge de pigeon, qui ont le brillant métallique, & qui attirent l'aimant.

On y trouve de la lave noire, formée de pluſieurs couches fortement unies, de quatre à cinq lignes d'épaiſſeur chacune, & ſéparées par autant de petites liſières ou feuilles métalliques à l'œil, & attirables à l'aimant; cette lave a le grain très-fin, fort ſerré; elle eſt exceſſivement dure, fait feu avec l'acier, renferme des criſtaux de ſchoerl noir, qui font corps avec cette lave, & grand nombre de petits points de ſchoerl brillant. Elle approche beaucoup, dans ſa fracture, du baſalte, elle attire généralement l'aimant; ſa couche ſupérieure devient brunâtre, & enfin griſe aux extrémités, & en général aux parties qui ont été en contact avec l'air.

Les crevaſſes de cette maſſe de lave ſont remplies par un tuf calcaire de quatre lignes d'épaiſſeur, revêtu de ſes deux liſières, qui font une eſpèce de croûte mêlée de parties alkalines & de lave décompoſée; ce qui eſt non ſeulement viſible à l'œil, mais encore prouvé par l'effet de cette liſière ſur l'aimant qu'elle attire quoique très-foiblement, tandis que le corps de la pierre ne l'attire point, à l'exception des endroits où ce tuf a enveloppé la matière de la lave en se formant.

De Waasenweiler, je côtoyai constamment des collines de cendres volcaniques, sans voir de lave à découvert jusqu'à Oberschaffhausen, gros village situé à une lieue au nord-est de Waasenweiler, dans l'intérieur & sur le penchant d'une colline volcanique. Il y a dans ce village des eaux minérales qu'on boit, & dans lesquelles on se baigne; elles sont vraisemblablement martiales & vitrioliques. J'ai fait l'impossible pour avoir un peu du sédiment qu'elles déposent; mais je n'ai pu m'en procurer, ayant fait ma course hors de la saison des bains, & après que les tuyaux & les cuves avoient été bien nettoyés.

Toute la colline septentrionale à laquelle un côté du village est adossé, n'est qu'une seule masse de lave, que l'on fouille dans le village même par deux carrières peu distantes l'une de l'autre. La lave s'étend & se voit à découvert jusqu'à une bonne distance au dessus du village sur le chemin de Vogsburg.

La lave de la carrière inférieure de ce village est d'un gris de cendre plus clair que celle de la carrière supérieure; elle est mêlée de petits points de schoerl noirs & blancs, mais ils ne sont pas suffisans pour la rendre attirable à l'aimant; elle n'est point poreuse, mais elle est dure & compacte, fait feu avec l'acier, & ressemble, au premier coup-d'œil, à un grès. Les blocs extérieurs de cette carrière sont revêtus d'une croûte alkaline jaunâtre, qui s'attache un peu à la langue.

En suivant cette montage de lave au dessus d'Oberscffhahausen, dans un chemin creux qui conduit à Vogsbourg, on trouve, à une petite distance d'Oberschaffhausen, à la droite du chemin, sous des rochers de lave grise, une argile brune, couleur de foie, que j'ai tirée d'une espèce d'enfoncement, à la base duquel les eaux de pluie se rassemblent. Elle s'attache à la langue, ne fait effervescence avec les acides qu'à sa surface, où elle est accidentellement couverte d'un peu de terre blanche alkaline. Ce produit volcanique est un des plus attirables à l'aimant de toute cette contrée. Son fond eſt rempli de petits points blancs & verts; il y a des morceaux qui renferment des petits criſtaux de ſchoerl vitreux & ſphériques, que l'eau-forte attaque ; mais l'échantillon le plus remarquable que j'en aye rapporté, renferme des criſtaux de ſchoerl hexagones, qui ont depuis deux juſqu'à cinq lignes de diamètre ; ils ſe détachent aiſément de la lave , & ſont revêtus d'une feuille brune foncée , luiſante , de la nature des hémathites de cette couleur; l'intérieur de ces criſtaux de ſchoerl eſt d'un noir verdâtre : vu à la loupe, on juge que c'eſt de la même matière que certaines laves noires. Ne pourroit-on pas penſer que les criſtaux de ſchoerl volcanique ſont effectivement de la même matière que les laves de la même couleur ; que cette matière eſt toujours diſpoſée à ſe criſtalliſer par le refroidiſſement; que, dès qu'elle trouve jour dans les petits vuides que l'air dilaté produit dans la maſſe en fuſion , elle adopte une forme régulière ; que de cette tendance provient l'immenſe quantité des criſtaux de ſchoerl noir dans les laves?

Le même échantillon d'argile qui donne lieu à ces réflexions, préſente, dans pluſieurs parties de ſon fond même, des ſurfaces planes , hexagones, comme ſi cette argile avoit la propriété de prendre cette forme en ſe rompant. Je croirois plus volontiers que cette forme eſt due à une empreinte de criſtaux de ſchoerl, qui ſe ſont détachés, ſi le centre de ces ſurfaces n'étoit pas occupé par un petit criſtal de ſchoerl noir élevé. Une couche martiale qui a la couleur & le luiſant de la poix , couvre la baſe de ce morceau, & de petites feuilles ferrugineuſes qui ont l'apparence métallique, en enduiſent le deſſus. Cette argile n'eſt vraiſemblablement qu'une décompoſition de la lave.

J'ai tiré du même enfoncement une terre également molle & friable, de la même conſiſtance que la précédente, graſſe & ſavonneuſe au toucher, s'attachant à la langue, attirant fortement l'aimant; l'acide nitreux ne l'attaque pas avec efferveſcence; ſon fond eſt d'un brun plus rouge que celui de la ſave décrite ci-deſſus ; elle eſt remplie d'une infinité de petites & grandes taches blanches & vertes farineuſes, qui occupent preſque autant d'étendue dans cette lave, que ſon fond. On découvre à la loupe, au milieu, des taches vertes, des particules de ſchoerl noir. Cette farine verte ne ſeroit-elle pas une diſſolution du ſchoerl noir, par l'acide vitriolique contenu dans les eaux qui ſéjournent dans cet enfoncement?

Ces terres ſe trouvent dans un tuf blanc, jaune & griſâtre qui s'attache à la langue, en même temps qu'il eſt alkalin.

Je quittai le chemin de Vogsbourg peu au deſſus d'Oberſchaffhauſen, & tirai vers le ſud-oueſt; j'atteignis, après une heure de marche, le ſommet du Kayſerſthul, en paſſant alternativement ſur des rochers de lave & de la cendre volcanique, ayant de droite & de gauche un grand nombre de croupes de montagnes & de bas fond. Quelques cantons du centre de ces volcans ſont aſſez garnis de bois; mais les environs de Vogsbourg, ceux de Rothweil & de Burcken ſont arides.

Le ſommet du Kayſerſthul eſt fort élevé ; pluſieurs motifs m'avoient déterminé à y monter; le déſir d'embraſſer, d'un ſeul coup-d'œil, toute cette étendue volcanique (que j'appellerai dorénavant le *Kayſerſthul*, ſuivant l'uſage du pays), & celui d'y découvrir quel pouvoit être le gouffre principal d'où étoient ſorties des éruptions auſſi conſidérables.

Au plus haut point du Kaiſerſthul ſont deux tilleuls (*a*) peu diſtans l'un de l'autre, célèbres dans le pays, à l'ombre deſquels

(*a*) M. Koch, Profeſſeur attaché à l'Univerſité de Strasbourg, & poſſeſſeur des Manuſcrits de feu M. Schœpflin, a eu la bonté de me communiquer une note de ce Savant, au ſujet du Kayſerſthul, une partie de laquelle je tranſcris ici.

Vulgare nomen montis eſt Kayſerſthul, *quod ſolium Cæſaris deſignat. Montem conſcendi, & in vertice ejus, qui in Betzingenſis vici finibus eſt, duas tilias prægrandes exiguo à ſe intervallo diſtantes conſpexi. Utraque ex una radice ſeptem altas projicit arbores. Ibidem rudera veteris Oratorii viſuntur, quod pridem deſtructum. Alius in eodem monte apex eſt, ferè ſimilis priori, & ab eo haud longè diſſitus*, in quo adhuc ſupereſt Capella. *Inferiores montis partes ab utraque parte vitibus conſitæ; at latus orientale, quod nigram ſilvam aſpicit, ob præſtantiam vini præfertur. Otto III, Imp. Sasbaci monaſterio S. Margarethæ ad Wald-Kircham privilegium dedit an.* 1094, *qui locus ad pedes montis ſitus eſt. Diceres Cæſarem juvenem, venationis avidum montis hoc conſcendiſſe faſtigium, nomenque montis inde prognatum.*

on découvre tout le cours du Rhin, depuis Bâle jusqu'à Strasbourg, & par conséquent une bonne partie de l'Alsace, du Brisgaw, & sur-tout toutes nos collines volcaniques.

Les gens du pays prétendent qu'il y avoit au sommet de cette montagne un grand palais, ou un monastère; leur imagination les porte même jusqu'à assurer que le son creux qu'on entend en y frappant du pied, décèle les voûtes de ces vastes constructions. On y trouve en effet quelques vestiges de maçonnerie, sans doute les débris de quelque petit ermitage (*a*). Mais ce son peut provenir de la formation intérieure de la montagne; car étant volcanique, elle a dû être produite par un bouleversement qui ne permet pas aux différentes parties de se rapprocher, & contenir des vuides qui peuvent donner lieu à cette espèce de résonnance, lorsqu'on frappe la terre avec véhémence. Il est probable que ce son creux ne s'entend qu'au sommet du Kayserſthul, & non dans les parties moins élevées, parce que dans les collines inférieures la masse s'est affaissée & rapprochée par le poids des collines supérieures, tandis que rien ne pouvoit comprimer le point le plus élevé de ces montagnes (*b*).

Le sommet du Kayserſthul, & celui de l'Eichel Spitz sont toujours environnés de vapeurs, ce que j'attribue à l'élévation de ces deux montagnes, & sur-tout aux bois qui environnent leur sommet. Les habitans regardent ce fait comme un phénomène. C'est sur-tout lorsque le temps doit se mettre à la pluie, que ces vapeurs sont plus sensibles, de manière que ces montagnes servent en quelque façon de baromètre.

Il est notable que j'ai trouvé des rochers de lave dans toute cette course, à toutes les hauteurs, & jusqu'aux parties les plus

(*a*) Voyez, dans la note précédente, la description du Kayserſthul.

(*b*) M. Desmarest m'a assuré qu'il avoit observé ce son creux dans les terreins crayeux de la Champagne, dont la gelée avoit soulevé la croûte supérieure; il en conclut avec raison que ce son creux n'est point propre aux terreins volcanisés. Il est néanmoins vrai de dire qu'on le remarque fréquemment, & sur-tout dans les endroits où il y a des sources chaudes, comme à la solfatare de Pouzzole & à la solfatare de Tivoli, &c.

élevées de toute l'enceinte du Kayſerſthul : j'en tirerai quelque conſéquence dans les réflexions générales qui ſuivront cette deſcription. J'ai rapporté du Kayſerſthul deux variétés de lave.

De la lave noire, très-dure, très-compacte, mêlée de beaucoup de petits & de grands criſtaux de ſchoerl noir, hexagones, arrondis & oblongs parallélipipèdes. Il y a de ces criſtaux qui ont au delà de trois lignes de longueur ; j'en ai examiné pluſieurs à la loupe dans leur fracture ; j'ai derechef trouvé qu'ils reſſemblent beaucoup au corps même de la lave que je décris : on auroit de la peine à les diſtinguer du fond de la lave, ſans le brillant qu'ils ont, tant ils lui ſont intimement unis. Cette lave ne fait point efferveſcence avec l'acide nitreux ; elle attire fortement l'aimant, fait feu avec le briquet, n'eſt point poreuſe, & ſon grain eſt ſerré. Elle avoit été priſe, par les gens du pays, pour du charbon de pierre, à cauſe de ſa couleur ; on la fouille à mi-côte du Kayſerſthul. Les morceaux détachés de la maſſe ſont couverts, ſur toute leur circonférence, d'une croûte de lave griſe d'une à deux lignes d'épaiſſeur, mêlée de petits points blancs, & dans laquelle on voit de combien de criſtaux de ſchoerl noir cette lave eſt remplie. La ſurface de cette lave ſeroit-elle griſe parce qu'elle étoit expoſée au contact de l'air lors de ſa fluidité qui l'auroit privée d'une partie de ſon principe inflammable, ou cette croûte ne proviendroit-elle pas plutôt d'une ſorte d'altération & même d'un commencement de décompoſition de la lave noire, due à la longueur des temps, à l'action réunie de l'air & de l'eau, comme je l'ai déjà conjecturé ? En effet, ſi cette croûte griſe ne provenoit que de la fuſion, pourquoi toute la circonférence de la lave en ſeroit-elle revêtue ? La ſurface ſupérieure ſeule devroit en être couverte, puiſqu'elle ſeule étoit alors en contact avec l'air.

Pourquoi trouve-t-on des morceaux détachés de lave, à une certaine diſtance de la maſſe de lave que je décris, dont l'intérieur eſt abſolument ſemblable à cette croûte extérieure, ſi bien qu'il n'eſt pas permis de douter que ces morceaux détachés ne proviennent de cette maſſe ? N'eſt-ce pas parce que ces morceaux plus éloignés, ſont depuis long-temps expoſés à l'action de l'air & de l'eau, & que ces diſſolvans les ont pénétrés de part en part?

On pourroit faire ici la réflexion, que ſi les criſtaux de ſchoerl noir étoient en effet de la même nature que la matière de la lave, ils devroient avoir été altérés ou décompoſés comme leur matrice. Cette objection eſt de peu de conſéquence. Qui eſt-ce qui ne ſait pas que les criſtaux réſiſtent infiniment plus à l'action des diſſolvans, que les maſſes informes de matières pareilles? Des criſtaux de ſpath calcaire réſiſtent quelquefois à l'acide nitreux peu concentré; caſſez-les, vous verrez une forte efferveſcence à l'endroit de la fracture, ſi vous y appliquez l'acide.

Le ſommet du Kayſerſthul proprement dit, eſt couvert de rochers, d'une lave dure, brune preſque noire. Sa ſurface eſt couverte, en quelques endroits, d'une feuille ferrugineuſe qui a l'aſpect métallique.

L'Eichelſpitz, montagne en pain de ſucre que j'ai déjà dit ci-deſſus être vis-à-vis & au nord du ſommet du Kayſerſthul, eſt remarquable par ſon élévation & les différentes carrières de lave qu'on y exploite. On m'avoit aſſuré que Madame la Margrave de Baden Dourlach en avoit tiré & fait polir du marbre; j'ai viſité ces carrières, & je puis aſſurer que je n'y ai pas trouvé de veſtiges d'une carrière de marbre : j'avoue que ma ſurpriſe auroit été grande d'en rencontrer une au centre de ces volcans.

Les carrières que j'y ai vues offrent peu de variétés de lave.

1°. De la lave griſe dure, d'un grain ſerré & compacte, faiſant feu avec l'acier, mêlée de beaucoup de petits points de ſchoerl, noirs & blancs; elle fait efferveſcence avec les acides, & elle n'eſt point attirable à l'aimant. On y voit quelques criſtaux de ſchoerl vitreux, réguliers & hexagones, parfaitement pellucides, les ſeuls que j'aye trouvés dans toute la circonférence du Kayserſthul. Les morceaux détachés depuis long-temps de la carrière, ſont environnés d'une croûte de lave griſe blanchâtre.

2°. Une lave (*a*) corrodée & réduite en pouſſière dans ſes couches ſupérieures qui ſont de la même matière, mais friables & poreuſes; cependant les parties qui touchent aux laves ſont encore pierreuſes; j'en conſerve un morceau dans lequel ces différens degrés d'altération ſe trouvent réunis.

La carrière entière qui eſt immédiatement ſous la terre végétale, eſt totalement recouverte d'une croûte criſtalliſée d'un doigt d'épaiſſeur, alkaline, & toute pénétrée d'ochre martiale jaune & brune.

Une autre de ces carrières fournit une lave d'un gris noir, mêlée d'un grand nombre de criſtaux de ſchoerl noirs, arrondis ou oblongs, hexagones, & de quelques criſtaux de ſchoerl blanc, farineux & vitreux. Cette lave ſe rompt aſſez facilement; cependant elle fait feu avec l'acier, elle attire fortement l'aimant. L'intérieur de cette lave ne fait point d'efferveſcence avec l'acide nitreux, mais bien la croûte extérieure des morceaux qui ont été long-temps expoſés à l'air.

Cette maſſe de lave eſt traverſée par une veine d'un pied de largeur, d'une terre blanche jaunâtre, aſſez ſemblable, à l'œil, à la pierre d'alun de la Tolfa.

Au village de Vogsbourg même, on trouve du ſpath calcaire, blanc, l'amelleux & criſtallin, qui renferme beaucoup de criſtaux de ſchoerl noirs & bruns, hexagones, arrondis ou oblongs, avec des feuilles ou mica de ſchoerl verdâtre, hexagones ou irrégulières, tels que les ſpaths du Véſuve, n°. 5 & 8, décrits par M. Ferber, p. 216 & 217.

Ce village, ceux de Kichelſperg & de Schelingen, ſont ſitués dans l'intérieur de nos collines volcaniques. Tous ſont

(*a*) Elle reſſemble aſſez au *peperino*, à l'exception que celui-ci a plus de conſiſtance.

bâtis & environnés de lave & de cendres volcaniques; ces deux derniers villages se servent des laves de l'Eichelspitz pour bâtir; les environs du village d'Amoltren, qui est situé plus au nord, n'offrent rien de particuliérement remarquable.

Telles ont été les observations que j'ai été à portée de faire dans ma seconde course.

Reprenons nos volcans au village d'Oberrothweil, & suivons-les du côté du couchant; nous nous trouverons bientôt sur leurs lisières occidentales; une suite de collines volcaniques nous conduira presque au bord du Rhin, dont nous étions à une lieue & demie.

Burcken, petite ville bâtie sur une de ces collines, domine agréablement ce fleuve; les collines des environs de Burcken sont généralement cultivées ou garnies de bois; ce qui fait qu'on ne voit que très-peu de masses de laves à découvert. Cependant le chemin de Burcken à Lisolen, où le Kaysersthul s'écarte derechef un peu du Rhin, est très-instructif. On y voit des laves éparses dans la cendre volcanique, & des terres cuites décomposées & friables immédiatement sous la terre végétale: elles sont blanches avec des taches pourpres & jaunes, attirent l'aimant, font effervescence avec les acides en même temps qu'elles s'attachent à la langue.

Les villages de Bischoffingen & de Kœnigschaffhausen sont au nord de Burcken. On longe constamment des collines de cendres & de laves, lesquelles s'étendent vers le nord, le long du Rhin, jusqu'à un quart de lieue de Saspach; elles décrivent, depuis Burcken jusqu'à ce dernier endroit, plusieurs grands demi-cercles. La côte occidentale du Kayserstbul se termine à un quart de lieue de Saspach. Là les collines volcaniques se tirent de l'ouest à l'est, pour former la côte septentrionale de ce chaînon.

Le village de Saspach est situé dans un bas-fond, terminé au sud-est par le Kayserstbul, au sud-ouest par le Rhin, au nord-est par une grande plaine de trois lieues de largeur, qui s'étend depuis le Rhin jusqu'aux collines avancées de la Forêt-noire; mais il ne communique avec cette plaine que par l'intervalle que laisse entre elle & le Kaysersthul, la montagne qui porte en même temps les noms de Lutzelberg & de Limbourg, qui borne ce bas-fond du côté du nord-ouest.

Cette montagne mérite une attention particulière; elle n'est plus comprise dans le Kaisersthul; elle forme une pointe dans le Rhin, qui a un quart de lieue de long, oppose sa pointe méridionale aux impétueux efforts de ce fleuve, & l'oblige de baigner la base de sa côte occidentale. La montagne est entièrement détachée; on conçoit cependant, en la voyant, qu'elle peut avoir été attenante autrefois au Kaysersthul.

Quoi qu'il en soit, cette montagne est divisée en deux parties; l'une, orientale & moins élevée, porte le nom de Lutzelberg; l'autre, occidentale & beaucoup plus haute, prend le nom du château de Limbourg, qui est bâti sur la côte occidentale, à l'extrémité de la pointe qu'elle forme. Ces deux parties décrivent aussi entre elles, & du côté méridional, une demi-circonférence; il est possible qu'elles doivent leur origine à un gouffre particulier.

Un pélerinage placé au haut du Lutzelberg, qui est en grande vénération dans le pays, est cause qu'il n'y a guère que les gens de Saspach qui distinguent les deux parties de cette montagne; les autres habitans des environs ne la connoissent que sous le nom de Lutzelberg.

En suivant la côte méridionale du Lutzelberg & du Limbourg le long du Rhin, on voit que leur base est composée de cendres volcaniques qui s'élèvent perpendiculairement à une grande hauteur, & qui sont remplies & surmontées de rochers menaçans de lave. Le sommet & le noyau de cette montagne ne forment qu'une seule masse de lave; on la découvre du côté de Saspach, environ à mi-côte, où il y a une carrière; mais elle s'étend dans toute la circonférence du Limbourg. J'entends maintenant ſous ce nom les deux parties réunies.

Le château de ce nom eſt une vieille maſure dont l'enceinte eſt aſſez vaſte; il eſt poſé ſur un rocher de lave à pic ſur le bord du Rhin, & totalement bâti de lave (*a*).

Le Limbourg eſt en général ſtérile, à l'exception de quelques petits arbres pins qui en garniſſent un peu la crête.

Le rivage du Rhin n'eſt compoſé que de cendres volcaniques & de graviers de lave; les gens de Saſpach font de ce mélange, qu'ils appellent ſable du Rhin, un mortier excellent.

Le Limbourg eſt une des montagnes volcaniques les plus intéreſſantes de cette contrée.

Quelqu'un qui ſeroit peu accoutumé à voir des volcans éteints, pourroit peut-être douter que toutes les collines volcaniques du Kayſerſthul fuſſent volcaniques, ſur-tout s'il ne parcouroit que certaines parties de ſes limites; il verroit une terre griſe, jaunâtre ou blanchâtre, & très-rarement ou point de lave. Mais s'il a commencé par aller au Limbourg, qu'il ait ſimplement une idée de ce que c'eſt que la lave, qu'il y voie cette terre griſe pulvérulente, remplie, mêlée & ſurmontée des laves qu'elle recouvre, il ne pourra plus douter que cette terre ne ſoit vraiment une production volcanique: convaincu de cette vérité, il ſera perſuadé que toutes les collines du Kayſerſthul, qui ſont formées de la même terre, ont eu la même origine.

On obſerve de plus au Limbourg, que les cendres ne peuvent avoir été lancées par cet ancien volcan, qu'après les laves, puiſqu'elles en couvrent la circonférence. Cette obſervation peut auſſi s'appliquer à une grande partie du Kayſerſthul; car

---

(*a*) L'Abbé Prince de Saint-Blaiſe, dans la Forêt noire, fit, en 1770, un voyage au château de Limbourg avec feu M. Schoepflin, & tomba d'accord avec ce Savant, que c'eſt le même château où les anciens Comtes de Habsbourg ont réſidé quelquefois, & où l'Empereur Rodolphe de Habsbourg, Fondateur de la Maiſon d'Autriche, eſt né.

Les Barons de Gerhardi tiennent aujourd'hui ce château en fief.

l'extérieur & la base des collines qui le composent, ne contient pas souvent de la lave.

Les habitans des environs du Limbourg le regardent avec raison comme une barrière invincible que la Nature a opposée aux ravages que feroit le Rhin; il est assez remarquable que la tête de cette étendue volcanique soit placée comme en vedette, sur le rivage du Rhin, & qu'à l'extrémité opposée, il en soit de même. Les collines de Burcken contiennent ce fleuve directement dans le milieu de la ligne droite, qu'on tireroit du vieux Brisach au Limbourg. Ces trois digues retiennent le Rhin dans le lit que les éruptions volcaniques lui ont fait prendre, & s'il gagne sur les terres à cette hauteur, ce ne peut être qu'aux dépens de l'Alsace. Il est remarquable que le Rhin se rejette du côté du levant tout de suite, au dessous du Limbourg; nouvelle preuve de ce que j'ai avancé au commencement de ce Mémoire.

Les laves du Limbourg diffèrent à la vûe de toutes celles du Kayserſthul, quoiqu'elles soient essentiellement composées des mêmes matières; elles font toutes plus ou moins facilement feu avec le briquet, & attirent fortement l'aimant. Elles sont singulièrement bigarrées par la proportion & la grandeur des substances dont elles sont composées.

Revenons maintenant à la côte septentrionale du Kayserſthul. Une suite de collines volcaniques conduit de Saspach à Endingen, petite ville impériale située à une lieue au levant de Saspach; elle est remarquable, relativement à nos volcans, par le sable noir, brillant & ferrugineux que les ruisseaux, qui coulent dans sa banlieue, charient avec plus d'abondance que les autres ruisseaux du Kayserſthul, quoique tous en fournissent. Ce sable attire fortement l'aimant, & ressemble parfaitement à celui qui est décrit dans les Lettres de Ferber, édition Françoise, p. 178, 303 & 366, & qu'on trouve dans tous les environs des volcans.

Le ban d'Endingen renferme aussi des carrières de lave; mais elles n'ont rien de particulier.

On compte encore une petite lieue d'Endingen juſqu'au village de Riegel, endroit placé à l'extrémité orientale de la côte ſeptentrionale du Kayſerſthul, qui eſt terminé par le mont Saint-Michel, colline au bas de laquelle Riegel eſt bâti.

En remontant de Riegel le long de la Treiſam, on ſuit la côte orientale des collines volcaniques du Kayſerſthul du nord au ſud; on traverſe ſucceſſivement les villages de Balingen à trois quarts de lieues de Riegel, celui d'Eichſtett qui eſt à une lieue & demie de Riegel; on paſſe enfin par Betzingen, & on retrouve Oberſchaffhauſen & Waaſenweiler dont j'ai parlé ci-deſſus.

On ne voit point de lave ſur toute cette côte; elle n'eſt formée extérieurement que de cendres entièrement pareilles à celles du Limbourg: les laves ſont au ſommet ou au revers de la côte; chacun des villages que j'ai nommés a ſa carrière de lave; tous ſont bâtis de cette matière: on ne rencontre point de maſſe entière de cendres endurcies; mais toutes ces collines ſont remplies de morceaux détachés d'un tuf alkalin, lequel donne, quand on le broie, une poudre parfaitement ſemblable à la cendre même; il n'eſt en effet autre choſe que de la cendre volcanique endurcie & ſans mélange. Les gens du pays donnent à cette pierre ſon véritable nom; ils l'appellent *tufſtein*, *pierre de tuf*.

J'ai rapporté de ces volcans une eſpèce de fritte blanche, mêlée de petits points rouges, noirs & jaunes, qui attirent l'aimant; mais il me ſeroit impoſſible de nommer l'endroit même où je l'ai priſe; cela m'afflige d'autant plus, que cet échantillon me paroît être une des productions les plus curieuſes de ces volcans.

J'ai dit au commencement de ce Mémoire, que la partie méridionale du Kayſerſthul eſt totalement ſéparée des collines avancées & calcaires des montagnes de la Forêt noire; il me reſte à faire voir que toutes les collines volcaniques que je viens de décrire, forment un chaînon iſolé, auquel on a donné le nom de *Kayſerſthul*, nom que ces collines volcaniques doivent

à

à la montagne de ce nom, qu'elles renferment dans leur ſein.

Il eſt important de commencer par établir les limites du Kayſerſthul; cela eſt facile, en rapprochant les différentes parties de ce Mémoire; mais il me ſeroit impoſſible de les décrire avec plus de préciſion que ne l'a fait feu M. Schœpflin dans la Note dont j'ai déjà donné un extrait ci-deſſus. M. Schœpflin ne ſe doutoit aſſurément pas qu'en traçant les bornes du Kayſerſthul, il indiquoit en même temps les limites que la Nature a preſcrites aux ravages d'un incendie ſouterrain. Je tranſcris cette Note mot à mot.

» In inferiori Briſgovia & vicinia Briſaci, mons quinque » leucarum (*) eſt in longum, ſeſqui leuca in latum extenſus, » inter Ihringam & Riegelam, cujus pes ad Rhenum uſque » hinc indè excurrit.

» Ad ortum ſiti ſunt vici Riegel, Baſingen, Eichſtett, Bet- » zingen, Oberſchaffhauſen, Waaſenweiler; ad occaſum, ſive » ad Rhenum, Bickernſol, Rothweil, Biſchoffingen, Liſolen » ſeu Leiſelheim, Kœnigſchaffhauſen, Endingen. Monti » incubant Amoltren, Ober & Niederbergen, Kichelsberg, » Schelingen, Vogsburg, aliaque molis exiguæ loca «.

D'après cette deſcription, il ſuffit de prendre la Carte du Briſgaw, pour voir que ce n'eſt que du côté du levant que le Kayſerſthul pourroit tenir à une chaîne de montagnes, étant borné au couchant par le Rhin & la plaine d'Alſace, & au ſeptentrion & au midi par les plaines que les collines avancées de la Forêt-noire laiſſent entre elles & le Rhin.

Rappelons-nous maintenant le vallon d'Ihryngen, qui commence à l'extrémité méridionale de la côte orientale du Kayſerſthul, où il n'y a plus de veſtiges de pierre calcaire dans cette partie. Ce vallon, aſſez reſſerré à la montagne d'Ihryngen, s'élargit ſucceſſivement du côté de Betzingen; les collines calcaires s'écartent beaucoup de la rive droite de la Treiſam; à Eichſtett

(a) Ces cinq lieues en valent bien ſix de France; mais il eſt vrai que les gens du pays n'en comptent pas davantage.

il occupe encore plus d'espace, & à la hauteur de Balingen il renferme tout le terrein contenu entre les rivières de Treisam & d'Eltz; si bien que tous les habitans de cette partie du Kayserstthul sont obligés de chercher leur pierre à chaux & la pierre de sable rouge qui leur sert de chambranle, du côté d'Emendingen, où les collines calcaires se rapprochent un peu de l'extrémité septentrionale du Kayserstthul; elles suivent le cours de la rive droite de la Bretten qui se jette dans la rivière d'Eltz au dessous de Riegel, s'étendent à une bonne demi-lieue de cet endroit derriere Malterdingen & Hechlingen, & c'est là où elles sont le moins éloignées des collines volcaniques, à l'exception du commencement du vallon d'Ihryngen qui n'a guère qu'une petite demi-lieue de largeur.

Non seulement j'ai visité toutes les carrières connues du Kayserstthul, mais j'ai promis une récompense pécuniaire à mes guides, capable de les tenter, s'ils m'indiquoient des pierres d'une nature différente de leur pierre noire. Le spath de Vogsburg a été la seule qu'ils m'aient montrée. Dans chaque village j'ai demandé d'où on tiroit la pierre à chaux & la pierre de sable; par-tout on m'a répondu qu'il falloit chercher la première à Mundingen, & la pierre de sable encore plus loin. Cependant le village de Nienbourg, qui est un peu en avant des collines calcaires, fournit aussi de la pierre à chaux aux habitans du Kayserstthul, qui en sont à portée.

Mais une observation toute particulière, c'est que la montagne de Saint-Michel, qui termine le Kayserstthul à Riegel, fournit de la pierre à chaux : elle a peu d'étendue, & n'est séparée d'une autre colline qui porte le nom de Durlenberg (dans laquelle on ne trouve plus de vestiges de pierre calcaire), que par un chemin creux; ces deux collines sont toutes deux volcaniques & formées de cendres, comme on le voit dans ce chemin; cependant le bourg de Riegel ne se sert pas d'autre pierre à chaux, que de celle du mont Saint-Michel. Un pied de neige couvroit la carrière de la pierre à chaux de Riegel lorsque j'y fus, je ne pus l'examiner; mais on m'assura qu'elle y étoit réellement en masse.

Le chemin creux dont je viens de parler, prouve cependant que cette colline eſt en partie volcanique. Comment cette pierre à chaux s'eſt-elle formée ? préexiſtoit-elle aux éruptions volcaniques, dans l'état où elle eſt aujourd'hui ? Je ne ſaurois le croire. Si ſon origine eſt plus moderne, il faut ſuppoſer que par l'éruption même, cette maſſe a été ainſi ſoulevée, puiſqu'il n'eſt pas douteux que les volcans du Kayſerſthul ſe ſoient fait jour à travers un terrein calcaire ; le voiſinage des collines calcaires de la Forêt-noire, dont les couches ſe prolongent ſous la plaine qui les devance, ce qui eſt prouvé par la pierre à chaux qu'on trouve à Nienbourg ; l'effervеſcence que les acides font avec les cendres, le tuf & une grande quantité des laves du Kayſerſthul, ſont autant d'argumens qui ne permettent guère d'en douter. Dès lors il eſt poſſible qu'en effet cette maſſe de pierre à chaux ait ainſi été ſoulevée, ſans avoir été conſidérablement bouleverſée, puiſque l'effort des éruptions devoit être bien moins violent à l'extrémité la plus reculée de ces volcans.

J'aurois peut-être été mieux en état de juger de l'origine de cette pierre à chaux, ſi je l'avois vue à découvert ; il m'étoit impoſſible d'attendre la fonte de la neige. Je ſaiſirai un autre moment plus favorable.

Peut-être qu'en voyant les couches inférieures & ſupérieures à cette maſſe calcaire, je pourrai tirer des conſéquences plus juſtes de ſon origine.

Au nord de Riegel, les collines calcaires avancées de la Forêt-noire ne ſont plus ſéparées du Rhin que par une belle plaine bien cultivée ; la grande route de Fribourg à Strasbourg paſſe conſtamment à leur pied ; de Hechlingen elles s'étendent derrière Kentzingen qui eſt à une forte lieue de Riegel ; on trouve enſuite Herbolsheim, Ettenheim, Kippenheim & Dinglingen, endroit qui n'eſt éloigné de la petite ville de Lohr que d'un quart de lieue. On longe conſtamment des collines calcaires, dont la pierre à chaux a une teinte rougeâtre martiale, & qui ſont dominées par des collines d'une pierre de ſable rouge, fort abondant dans toute cette partie ; car cette pierre eſt employée avec profusion sur toute la route, pour les ponts, les pierres, bornes, les chambranles & les bâtimens, &c. Ces dernières collines sont immédiatement appuyées aux hautes montagnes de la Forêt-noire.

A Dinglingen, la route abandonne les collines calcaires, & s'en écarte successivement de plus en plus; l'on traverse un sable rouge auquel succède, à *Kirtzel*, le gravier du Rhin que l'on ne quitte plus jusqu'à Kehl, où l'on passe le Rhin pour venir à Strasbourg.

Je terminerai ce Mémoire par quelques réflexions sur le Kaysersthul, & sur l'usage que l'on fait & que l'on pourroit faire de ces productions volcaniques.

Il est bien extraordinaire sans doute qu'on ait ignoré jusqu'aujourd'hui l'origine du Kaysersthul. Les laves sont connues dans le pays sous le nom de pierres noires; on est bien loin de soupçonner qu'elles doivent leur origine au feu. Les chroniques, les registres publics de Fribourg, de Brisach, &c. gardent le plus profond silence au sujet de ces volcans; les Auteurs les plus anciens n'en font aucune mention, à peine parlent-ils des petites variations que le cours du Rhin a éprouvées. Il n'est pas étonnnant qu'ils ne disent rien du grand changement du lit du Rhin, puisqu'il doit être arrivé lors des éruptions du Kaysersthul, dont il faut renvoyer l'époque dans l'antiquité la plus reculée, quoique la tradition vulgaire du pays puisse cependant faire penser que ces évènemens ne sont pas si anciens. Ces gens savent que le Rhin avoit autrefois son cours à une forte lieue au levant de son lit actuel; ils rendent même hommage aux collines volcaniques dont il baigne les pieds, de ce que ce fleuve ne les inquiète pas, non pas qu'ils croient que ces montagnes n'aient pas toujours existé, mais parce qu'ils voient qu'elles leur servent effectivement de digue. Ils assurent de plus au vieux Brisach, à Endingen, enfin dans tous les villages du Kaysersthul, qu'on avoit vu autrefois des *dragons ardens* sur ces montagnes. Cette tradition est aussi généralement reçue que la précédente; elle ne fixe point d'époque; de temps immémorial elle se communiqua de père en fils.

Ces prétendus dragons ardens ſont peut-être plus modernes que les grandes éruptions du Kayſerſthul ; quelques reſtes d'inflammation peuvent avoir donné lieu à cette tradition.

On lit dans le Collége expérimental de Muller, imprimé à Nuremberg en 1721, p. 237, que l'aiguille aimantée s'incline fortement ſur le mont Eckard (*a*), cette colline qui décrit avec le vieux Briſach la moitié d'une circonférence. Je n'étois pas muni d'inſtrumens néceſſaires pour vérifier cette aſſertion ; la barre aimantée que j'avois avec moi, y a été fortement agitée ; cela n'eſt point étonnant, puiſque toutes les laves du vieux Briſach ſont plus ou moins attirables à l'aimant.

On peut remarquer dans les différentes deſcriptions que j'ai données des laves, qu'en général les plus noires ſont celles qui attirent le plus fortement l'aimant ; que les laves brunes ont la même propriété, mais pas à un ſi haut degré ; que les laves rouges en ſont ſouvent entièrement privées, à moins qu'elles ne ſoient remplies de criſtaux de ſchoerl noirs. L'aimant eſt encore inſenſible à l'approche de pluſieus laves griſes blanchâtres. Les laves du Kayſerſthul ont ſur l'aimant le même pouvoir que celles du Véſuve. Voyez ma Traduction des Lettres de Ferber, p. 194.

La différence de leur vertu attractive provient de la portion de phlogiſtique qu'elles contiennent ; il eſt certain que les laves noires doivent en grande partie cette couleur à l'abondance du principe inflammable, & perſonne n'ignore que les ſubſtances ferrugineuſes bruniſſent & deviennent rouges à meſure que ce principe les abandonne ; il eſt donc naturel que les laves rouges faſſent moins d'effet ſur l'aimant que les noires.

Les criſtaux de ſchoerl volcaniques noirs agiſſent ſur l'aimant ; il eſt tout ſimple qu'ils communiquent cette propriété aux pierres qui les renferment, quand même elles ne l'auroient pas par elles-mêmes ; de là vient que pluſieurs laves rouges & quelques tufs ſont attirables à l'aimant.

(*a*) M. Schurer, Profeſſeur de Phyſique à l'Univerſité de Strasbourg, m'a communiqué cette obſervation. Il m'a promis de m'accompagner dans la première courſe que je ferai au Kayſerſthul, pour faire des expériences, de concert avec moi, à ce ſujet.

J'ai trouvé que c'eſt-là un caractère diſtinctif des ſchoerls noirs volcaniques ; on peut les reconnoître à cette propriété de ceux qui ne le ſont point. Aucuns des ſchoerls du mont Saint-Gothard, par exemple, n'agit ſur l'aimant. Les ſchoerls noirs renfermés dans un grand nombre de granits que j'ai eſſayés, ne font aucune impreſſion ſur la barre aimantée.

Nos laves, frottées l'une contre l'autre, exhalent, ainſi que celles du Véſuve, une forte odeur de ſoufre.

En vain j'ai cherché au Kayſerſthul l'agate noire d'Iſlande, la véritable pierre-ponce, le baſaltes en colonnes, & la pouzzolane proprement dite.

Il paroît que le volcan du vieux Briſach a formé un volcan ſéparé du Kayſerſthul, dont il eſt éloigné d'une lieue & demie.

La plaine qui ſépare le vieux Briſach de la côte méridionale de nos collines volcaniques, eſt vaſte. Il ſeroit preſque abſurde d'avancer que les collines du vieux Briſach faiſoient autrefois partie de la circonférence d'un crater, qui, en embraſſant toute cette plaine, eût eu une lieue de diamètre ; que ces collines, qui n'euſſent formé qu'un très-petit ſegment d'une auſſi vaſte circonférence, fuſſent ſeules reſtées ſur pied dans la partie méridionale, tandis que du côté du levant & du couchant il n'en exiſte plus de veſtiges. Je me perſuade qu'il y avoit au centre des deux collines du vieux Briſach, un crater particulier indépendant des volcans voiſins.

Les collines volcaniques qui forment le Kayſerſthul peuvent être comparées aux monts Euganiens du Padouan, & au mont Albano dans l'Etat Eccléſiaſtique. Plus on pénètre dans le corps de ces collines, plus elles s'élèvent : la plus haute en occupe le centre. Il eſt à préſumer que c'eſt de ce point que ſont ſorties les principales & les premières éruptions; mais qu'il s'eſt fait des éruptions dans différentes parties de ces collines, qui ont produit les goufres ſéparés, dont on voit encore quelques reſtes ; c'eſt ainſi qu'en petit, la lave ſe fit jour, il y a quelques années, au Véſuve par ſept endroits divers. Les bouches de feu devinrent autant de monticules, qui ſe convertirent, par l'écroulement de leur ſommet en eux-mêmes, en autant de craters, lorſque la grande affluence de lave eut épuiſé les antres ardens du Véſuve. C'eſt de la même manière que la bouche ſupérieure de l'Etna eſt environnée de quarante-quatre monticules volcaniques qui doivent leur exiſtence à autant de bouches de feu.

Les collines du Kayſerſthul ſont éloignées des montagnes de la Forêt-noire, comme le Véſuve l'eſt des Apennins. J'ai déjà dit qu'il paroît que nos volcans ſe ſont fait jour à travers des couches calcaires prolongées des collines calcaires voiſines, dans la plaine d'où ſont ſorties les éruptions. Les éruptions du Véſuve ont également traverſé les couches calcaires qui deſcendent des Apennins.

J'attribue ce volcan, ainſi que tous les autres volcans, à une cauſe locale; l'identité de leurs produits, leur proximité de la mer ou de grandes rivières, les montagnes calcaires qui les avoiſinent ne ſont-elles pas ſuffiſantes pour en tirer des conſéquences fondées? Toutes les laves contiennent du fer; les volcans encore enflammés abondent en vitriol & en ſoufre; ils rejettent de l'eau & de la pierre calcaire. Il faut donc admettre une effervеſcence ſouterraine occaſionnée par le mélange & la diſſolution des corps qui ont donné ces produits.

Les laves du vieux Briſach, du Kayſerſthul & du Limbourg ſont toutes formées de la même matière; mais elles diffèrent par leur couleur, leur dureté, leur poroſité, & par les proportions & la figure des parties dont elles ſont compoſées.

Elles ſont généralement bonnes pour bâtir; il y en a qui réuniſſent la dureté à la légèreté; elles s'uniſſent toutes avec force avec la chaux & les mortiers. La carrière d'Achkarn fournit des blocs immenſes de pierre de taille; ces blocs ſont ſans gerſures. On emploie auſſi les laves de la grande carrière de Rothweil, pour chambranles de portes & de fenêtres, comme on le voit dans tous les villages des environs; mais elles font un mauvais effet. Les laves du Limbourg donnent une bigarrure ſingulière & pittoreſque au château ruiné de ce nom.

Tous les villages du Kayſersthul, ceux qui ſont ſitués ſur ſes liſières & dans ſes environs, ſont bâtis de lave; ſon uſage s'étend auſſi loin le long du Rhin, que les habitans trouvent de l'économie, eu égard aux diſtances, de la préférer aux pierres de ſable des montagnesde la Forêt noire.

Une ſeconde utilité des laves du Kayſersthul eſt due à ſa ſolidité dans le feu.

Toutes les laves du Kayſersthul n'ont pas la même propriété; les unes ſe fondent facilement, les autres ſe gerſent. Il en eſt de même des laves d'Andernach dans le voiſinage de Cologne; on ne ſauroit employer le lapis molaris Rhenanus Cronſtedt, §. 294, ou la pierre de Mennich, *Mennicher Stein*, dans le feu; elle y éclate, & les incendies la détruiſent : on n'emploie cette pierre que pour les meules. Cet uſage fort ancien de la lave eſt peu ou point connu au Kayſersthul : je n'ai vu tailler dans aucune carrière des pierres à meules; je ne doute pas cependant qu'on ne trouvât ſon compte & de l'avantage à les préférer aux grès dont nous nous ſervons, ſur-tout lorſqu'il s'agit de moudre des matières qui doivent être bien pures; il ſe détache toujours des particules du ſable dont le grès eſt formé; & il eſt en général moins ſolide, s'uſe & ſe fend plus aiſément que de certaines laves. La carrière d'Achkarn fourniroit de très-bonnes pierres à meule.

La lave de Rothweil ſert au même uſage que la pierre de Bell, qu'on trouve à une lieue de Niedermennich dans le pays de Cologne. Toutes deux ont la propriété de réſiſter à un feu violent : elles portent chacune le nom de *Backofenſtein*, pierre à four; mais celle de Rothweil eſt ſupérieure à la pierre de Bell. Les Braſſeurs de Strasbourg ſe ſervoient autrefois pour la chauffe de leurs chaudières, de la pierre de Bell; ils préfèrent aujourd'hui de beaucoup la pierre à four de Rothweil. Ils s'en ſervirent pour la première fois en 1765, que l'un d'eux ſe trouvant dans les environs du Kayſersthul, reconnut une pierre qui avoit de la reſſemblance avec celle de Bell. Apprenant en même temps qu'on l'employoit pour les fours, il ſe détermina, avec trois

de

de ſes confrères, à en faire venir. Ils l'employèrent dès la même année; & ces chauffes, deux fois plus durables que les précédentes, ſont, malgré la révolution de 12 années, en état de ſervir encore nombre d'années, quoiqu'elles aient été expoſées à un feu continu ſix mois de chaque année. Le milieu ſeul de ces pierres, qui forme la baſe des chauffes, a été un peu excavé & brûlé; en les réparant, toute la baſe de la chauffe ſera comme neuve (*a*).

On devroit faire l'eſſai de la pierre de Rothweil dans les grands fourneaux de fuſion. On ſait combien il importe que les pierres dont leurs parois intérieurs ſont revêtus, ſoient à l'épreuve du feu & de longue durée. Les fourneaux de fuſion, qui ne ſont pas conſtamment en feu, pourroient ſervir à faire cet eſſai; je ne doute pas qu'ils réuſſiſſent; mais, ſuppoſé que je me trompe, cet eſſai ne couteroit que la pierre & la main-d'œuvre; on ne ſouffriroit point de chômage.

C'eſt pour les fourneaux dans leſquels on fond la mine de fer, qu'une pierre durable au feu eſt ſur-tout d'une grande utilité; malheureuſement les eſſais y ſont trop couteux, quand ils ne réuſſiſſent pas. Il ſeroit poſſible que la pierre de Rothweil réſiſtât parfaitement à un feu, tel que celui des fours, des chaudières, & qu'elle ne ſupportât pas le feu d'un fourneau de fonte. Qu'en réſulteroit-il? Il faudroit faire éteindre le fourneau, arracher la pierre, en remettre d'autre; la main-d'œuvre & le prix de la pierre ſont la moindre perte que cela cauſeroit; mais le chômage, la quantité de charbon qu'il en coute pour remettre un fourneau en feu, le temps néceſſaire pour qu'un fourneau ſoit derechef bien en train, ce ſont-là des raiſons qui effrayent. En revanche, quel avantage n'y auroit-il pas, ſi la pierre de Rothweil duroit deux fois plus que la pierre de ſable que nous employons en Alſace? Nous éviterions une répara-

(*a*) D'après un calcul de comparaiſon, que m'a remis un de nos plus fameux Braſſeurs, il y a une grande économie, indépendamment de celle que le bon uſage produit, à préférer les pierres de Rothweil à celles de Bell pour les chauffes des Braſſeries; car une chauffe conſtruite avec ces dernières revient à près de 200 livres, tandis qu'elle ne coute pas 120 liv. avec la pierre de Rothweil.

tion, & par conséquent toutes les pertes que je viens de détailler; il y auroit d'ailleurs une grande différence du produit de la mine & de la consommation du charbon; un fourneau, usé & élargi vers son foyer, produit bien moins de fer avec la même quantité de mines, & exige beaucoup plus de charbon.

En vain j'ai cherché de la véritable pouzzolane grènelée au Kayserſthul; je ne dirai pas décidément qu'il n'y en a pas, mais je n'en ai point vu à découvert. Faute de pouzzolane, la cendre volcanique y abonde. On lit à la page 307 de ma Traduction des Lettres de Ferber, que ces cendres rendent aux environs de Rome le même service que la pouzzolane; qu'on les conduit à Civita-Vecchia, pour être envoyées dans différentes parties de l'Europe où on les emploie pour maçonner dans l'eau.

La persuasion où j'étois que nos cendres du Kayserſthul devoient rendre le même service, m'a engagé à faire un grand nombre de mélanges avec de la chaux vive & éteinte, du sable, de la brique pilée, du laitier de fer, pour voir lequel de ces mélanges produiroit le meilleur ciment pour les eaux. Mais peu accoutumé à ces sortes de manipulations, & assisté d'Ouvriers peu intelligens, mes expériences n'ont pas eu le succès que je m'en promettois; il est cependant certain que les mortiers, dans lesquels j'avois mêlé des cendres du Kayserſthul, avoient plus de tenacité & résistoient plus long-temps à l'eau que les mortiers & cimens ordinaires que j'avois faits en même temps, & ils ne se gersoient point; mais ils n'avoient pas acquis un degré de dureté suffisant, quoique j'eusse employé pour objet de comparaison du trass, sorte de peperino, réduit en poudre, des environs de Cologne, qui ressemble absolument aux cendres volcaniques du Kayserſthul, & dont le bon usage pour la composition des mortiers pour murer dans les eaux, est aussi généralement reconnu que celui de la pouzzolane. Je désire que quelqu'un, plus habitué que moi à ces sortes d'expériences, veuille bien les entreprendre; j'offre de fournir autant de cendres volcaniques qu'on en voudra; je m'estimerai heureux si le succès répond à mon attente.

MÉTHODE

POUR TROUVER

LA SITUATION DE L'ÉQUATEUR D'UNE PLANÈTE,

ET

L'OBLIQUITÉ DE L'ÉCLIPTIQUE

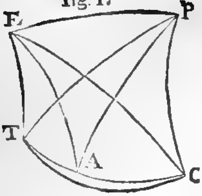
PAR RAPPORT A LA ROTATION DU SOLEIL ET DE LA LUNE;

PAR M. CAGNOLI DE VÉRONE.

Etant données trois longitudes & trois latitudes héliocentriques ou ſélenocentriques d'une tache, trouver l'inclinaiſon de l'Équateur ſolaire ou lunaire, le lieu de ſes nœuds, & la diſtance de la tache au pôle de rotation.

1. IL exiſte pluſieurs ſolutions de ce problême : j'en vais propoſer une qui me paroît auſſi ſimple que rigoureuſe, tirée de la Géométrie élémentaire.

fig. 1.



Soit E (*fig.* 1.) le point du globe solaire ou lunaire, qui répond au pôle de l'Écliptique; P, le pôle de la rotation de l'astre; T, A, C, les trois lieux de la tache observés.

On connoît, par l'observation, les trois distances TE, AE, CE de la tache au pôle de l'Écliptique, ainsi que les différences de longitude TEA, AEC.

2. Il s'agit de trouver la valeur de PE, distance des deux pôles; la longitude du pôle P qui est à 90° de celle des nœuds, & la distance TP = AP = CP de la tache à ce même pôle.

3. Dans le triangle sphérique TEA connoissant deux côtés ET, EA avec l'angle compris, on a, par la règle de Néper, cette analogie. Le *sinus* de la demi-somme des côtés donnés est au *sin.* de leur demi-différence, comme la *cotangente* du demi-angle compris est à la *tang.* de la demi-différ. des angles à la base; ou

$$\textit{sin.}\tfrac{1}{2}(EA+ET) : \textit{sin.}\tfrac{1}{2}(EA-ET) :: \textit{cot.}\tfrac{1}{2}TEA : \textit{tang.}\tfrac{1}{2}(ETA-EAT).$$

Mais $ETA - EAT = ETP + PTA - (PAT - EAP) = ETP + EAP$, à cause du triangle isocèle (2) où $PTA = PAT$. Donc, dans le dernier terme de l'analogie, on peut substituer, au lieu de la demi-différence des angles à la base, la demi-somme des angles de position adjacens aux côtés donnés, & on aura:

$$4.\quad \left.\begin{array}{r}\textit{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\text{ somme des angles de}\\ \text{position adjacens aux côtés donnés}\end{array}\right\} = \frac{\textit{sin.}\ \tfrac{1}{2}\text{ différ. de ces côtés} \times \textit{cot.}\ \tfrac{1}{2}\text{ angle compris}}{\textit{sin.}\ \tfrac{1}{2}\text{ somme des mêmes côtés}}.$$

5. Appliquant le même raisonnement, & la même formule aux deux triangles AEC, TEC; si l'on appelle, pour abréger, T, A, C les trois angles de position ETP, EAP, ECP, on trouvera successivement la valeur de $\frac{T+A}{2}$, $\frac{A+C}{2}$, $\frac{T+C}{2}$. On aura donc trois équations & trois inconnues; & la valeur de chacun des trois angles de position sera aisée à tirer. Car il est évident, par la seule inspection, que l'on a, par exemple, $T = \frac{T+A}{2} + \frac{T+C}{2} - \frac{A+C}{2}$. Donc en général

6. Chaque angle de position est égal aux deux demi-sommes où il se trouve, moins la demi-somme où il ne se trouve pas.

7. De même, pour connoître la demi-différence correspondante à une demi-somme quelconque (j'entends par demi-sommes & demi-différences *correspondantes*, celles qui sont exprimées par les mêmes lettres), on a, par exemple:

$$\frac{T-A}{2} = \frac{T+C}{2} - \frac{A+C}{2}, \text{ ou } \frac{A-T}{2} = \frac{A+C}{2} - \frac{T+C}{2}.$$

Donc, dans tous les cas,

8. Chaque demi-différence de deux angles de position est égale à la différence des deux demi-sommes, auxquelles cette demi-différence ne correspond pas.

9. Dans les triangles PTE, PAE, PCE, à cause du côté commun PE & des côtés égaux, PT, PA, PC, *les sinus des angles au pôle de l'Ecliptique sont proportionnels aux sinus des angles correspondans de position.*

10. Ainsi, en prenant deux triangles quelconques, par exemple,
PET, PEA, on aura *sin.* PET : *sin.* PEA : : *sin.* T : *sin.* A, d'où l'on tire (en faisant attention que . . . .
$\textit{sin.}\, T + \textit{sin.}\, A : \textit{sin.}\, T - \textit{sin.}\, A :: \textit{tang.}\, \frac{T+A}{2} : \textit{tang.}\, \frac{T-A}{2}$,
& que le premier rapport peut se transformer de même)

$$\textit{tang.}\tfrac{1}{2}(PET+PEA) : \textit{tang.}\tfrac{1}{2}(PET-PEA) :: \textit{tang.}\tfrac{1}{2}(T+A) : \textit{tang.}\tfrac{1}{2}(T-A).$$

Mais on vient de trouver (4) les demi-sommes, & (8) les demi-différences des angles de position; la demi-différence des angles au pôle est égale à la moitié de l'angle donné par l'observation; donc cette dernière analogie ne renfermant qu'un seul terme inconnu, fera connoître la valeur des angles au pôle de l'Écliptique PET, PEA. On aura donc

11. *Tangente* $\tfrac{1}{2}$ somme des angles au pôle de l'Ecliptique $= \dfrac{\textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}\text{ différ. des mêmes angl.} \times \textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}\text{ somme des angl. de position correspondans}}{\textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}\text{ différence des mêmes angles de position}}.$

12. Par le moyen de cette formule & de la précédente (4), on connoît, dans tel triangle que l'on veut, deux angles avec

le côté compris, c'est-à-dire, l'angle au pôle de l'Écliptique, celui de position correspondant, & la distance de la tache au même pôle donnée par l'observation; & on peut trouver à la fois les deux autres côtés que l'on cherche par le moyen des formules suivantes, données de même par Néper.

$$13.\ \left.\begin{matrix}\textit{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{différ.}\\ \text{des côtés cherchés}\end{matrix}\right\} = \frac{\textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{côté donné} \times \textit{sin.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{différence des angles adjacens à ce côté}}{\textit{sin.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{somme des mêmes angles}}.$$

$$\left.\begin{matrix}\textit{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{somme}\\ \text{des côtés cherchés}\end{matrix}\right\} = \frac{\textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{côté donné} \times \textit{cosin.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{différ. des angles adjacens à ce côté}}{\textit{cos.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{somme des mêmes angles}}.$$

14. Ainsi, dans le triangle PET, par exemple, on aura les analogies suivantes :

$$\textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}(PT-PE) : \textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}TE :: \textit{sin.}\ \tfrac{1}{2}(PET-T) : \textit{sin.}\ \tfrac{1}{2}(PET+T).$$

$$\textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}(PT+PE) : \textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}TE :: \textit{cos.}\ \tfrac{1}{2}(PET-T) : \textit{cos.}\ \tfrac{1}{2}(PET+T).$$

15. On aura donc, par quatre formules seulement, la déclinaison de la tache, l'obliquité de l'Ecliptique, & le lieu du nœud. La première formule (4) n'est que préparatoire, & donne les angles de position. Les deux dernières (13) font connoître la déclinaison de la tache, & l'obliquité de l'Écliptique; & l'on conclut de la seconde (11) le lieu du nœud, en ajoutant ou en retranchant d'une des longitudes observées, par exemple, en T, le complément de l'angle au pôle TEP, suivant qu'il est obtus ou aigu, si le pôle de l'Écliptique est à la gauche de celui de l'Équateur; & suivant qu'il est aigu ou obtus, si ce même pôle est à la droite de celui de l'Équateur.

Ces formules au surplus sont commodes; car dans la seconde on n'a que deux logarithmes à chercher, les deux autres étant fournis par la première. Les analogies (14) qui répondent à la troisième & à la quatrième formule, ont aussi le second terme commun, & les deux derniers se trouvent sur la même ligne pour les deux analogies dans les Tables.

Ma méthode me paroît donc remédier à la fois & à l'inexactitude des approximations, & à la longueur des calculs; obstacles qui, réunis à l'imperfection des instrumens, se sont opposés jusqu'ici à ce que les élémens dont il s'agit fussent déterminés avec précision.

Je vais passer à l'application de ces formules dans les différens cas.

16. Lorsque quelqu'une des limites se trouve entre les longitudes observées, comme l'on voit dans les *fig.* 2 & 3, alors ETA−EAT n'est pas égal à ETP+EAP, comme nous l'avons trouvé dans la première *figure*; mais ETA−EAT (*fig.* 2.) = PTA−PTE−(PAT−PAE) = PAE−PTE, & de même (*fig.* 3.) . . . . ETA−EAT = PTE+PTA−(PAE+PAT) = PTE−PAE; c'est-à-dire, que, dans les deux cas représentés par ces *figures*, la première formule (4) donne la demi-différence des angles de position, au lieu de donner la demi-somme, & cela nécessairement dans deux triangles, comme TEC, TEA, ou TEC, AEC, si c'est par le dernier triangle que passe le cercle des limites.

fig. 2.

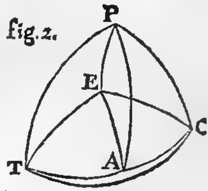
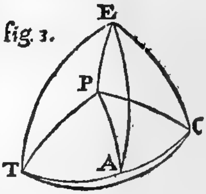


fig. 3.



17. La première formule donne donc nécessairement, ou trois demi-sommes des angles de position pris deux à deux, ou une demi-somme & deux demi-différences. Dans le second cas, on reconnoît immédiatement les demi-différences, parce que, sachant à peu près le lieu des nœuds, on voit par les longitudes observées quel est l'angle que traverse le cercle des limites, à moins cependant que les observations ne tombent aux environs du même cercle; mais alors, comme on a déjà vu (5) que $T = \frac{T+A}{2} + \frac{T+C}{2} - \frac{A+C}{2}$; toutes les fois que les trois valeurs données par la première formule ne pourront satisfaire à cette équation, mais qu'en appliquant aux deux plus petites valeurs les deux termes positifs du second membre, leur somme se trouvera moindre que le terme négatif, on sera sûr que ces deux plus petites valeurs sont les demi-différences, au lieu d'être les demi-sommes des angles de position.

18. Alors, pour avoir les demi-ſommes inconnues, je ſuppoſe, par exemple, que $\frac{A+C}{2}$ ſoit la ſeule demi-ſomme donnée par la première formule, & que l'on veuille connoître $\frac{T+C}{2}$, on aura $\frac{T+C}{2} = \frac{A+C}{2} + \frac{T-A}{2} = \frac{A+C}{2} - \frac{A-T}{2}$; c'eſt-à-dire, que, *lorſque la première formule donne deux demi-différences des angles de poſition, la demi-ſomme correſpondante à chacune des deux eſt égale à la ſomme, ou à la différence des deux autres valeurs trouvées par la même formule.* Ce ſera la *ſomme*, lorſque la demi-ſomme cherchée ſera la plus grande des trois demi-ſommes, c'eſt-à-dire, qu'elle renfermera les deux angles les plus éloignés de la ligne des limites, *la différence* dans les autres cas.

19. Car du rapport (9) entre les angles au pôle & ceux de poſition, il ſuit que *les angles de poſition vont toujours en augmentant, depuis les limites où ils ſont nuls, juſqu'aux nœuds où ils atteignent leur maximum.*

Il ſera bon de porter la préciſion juſqu'aux dixièmes de ſeconde, relativement aux angles de poſition, ſi l'on veut avoir avec exactitude les angles au pôle de l'Écliptique.

20. L'uſage de la ſeconde formule (11) exige auſſi quelques remarques particulières. Dans les deux cas de la deuxième & troiſième *figure*, on a toujours *tang.* $\frac{PET+PEA}{2}$ = *tang.* $\frac{TEA}{2}$. Donc lorſque la première formule (16) donnera deux demi-différences pour les angles de poſition, la deuxième formule donnera auſſi les demi-différences des angles au pôle pour les deux cas correſpondans. Car l'on vient de voir qu'alors l'angle connu n'eſt pas la différence, mais qu'il eſt la ſomme des angles au pôle; & par conſéquent il faudra renverſer la ſeconde formule comme il ſuit.

$$\left.\begin{array}{r}\textit{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{différence}\\ \text{des angles au pôle de}\\ \text{l'Ecliptique}\end{array}\right\} = \frac{\textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{angle connu} \times \textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{différ. des angles de poſition correſpondans}}{\textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ſomme des mêmes angles de poſition}}.$$

21.

21. Dans tous les cas, lorsqu'on connoît la demi-somme & la demi-différence de deux angles au pôle de l'Écliptique, il est encore nécessaire de savoir lequel des deux est le plus grand. Il ne peut y avoir aucune incertitude là-dessus, car (9) l'angle au pôle, qui correspond au plus grand angle de position, doit avoir le *sinus* le plus grand.

22. Il faut de plus connoître si la demi-somme des angles au pôle surpasse 90°. Or, comme dans la seconde formule (11) on considère ces angles pris deux à deux, combinaison qui présente trois cas différens; si l'on emploie la même formule dans ces trois cas successivement, il ne restera aucun doute sur ce point; & lors même qu'on ne l'emploiera que pour un ou deux de ces cas seulement, il y en aura encore rarement, pourvu que, pour se guider, l'on esquisse une figure, le lieu des nœuds étant connu d'avance à peu près, & par conséquent la situation de la ligne des limites. On observera de placer, dans cette figure, le pôle de l'Écliptique à la gauche de celui de l'Équateur, lorsque les distances au premier pôle observées vont en augmentant, *& vice versâ* dans le cas de diminution. Cette figure & la règle (21) indiqueront quel est l'angle le plus grand, & si la demi-somme trouvée surpasse 90°. Je résoudrai ce même cas dans un exemple ci-après.

23. On a cet avantage en calculant les observations trois à trois, que l'on peut s'appercevoir s'il y a quelque erreur sensible dans les observations mêmes, ou dans les calculs préparatoires. J'ai calculé quelques-unes des Observations de Mayer, détaillées dans son excellent Mémoire, imprimé à Nuremberg en 1750, où il a suppléé, par son génie, à l'imperfection de ses instrumens. Les erreurs qu'il ne pouvoit découvrir par sa Méthode, ont pu sans doute se compenser; mais elles ont pu aussi se multiplier dans le calcul proposé par ce grand Astronome, & dans lequel il réunit un nombre quelconque d'observations. Il paroît avoir été heureux dans la détermination de la latitude sélénographique de Manilius; mais peut-être les erreurs ont-elles affecté l'inclinaison & le nœud. J'ai calculé trois

obſervations faites avec de meilleurs inſtrumens, & avec le plus grand ſoin, par M. de la Lande (Aſtronom. vol. III, art. 3206.) Elles m'ont donné, pour l'inclinaiſon, 1° 42′ 43″, telle à peu près qu'elle ſe conclut des mêmes latitudes extrêmes de Mayer, tandis que ſa formule collective réduit cet élément à 1° 30′. J'ai trouvé, pour la déclinaiſon de Manilius, 14° 36′ 7″, & le nœud de l'Équateur lunaire plus avancé de 2° 51′ que celui de l'orbite ſelon l'ordre des ſignes.

Quand on aura calculé rigoureuſement trois à trois un aſſez grand nombre d'obſervations faites par des bons inſtrumens, & que l'on parviendra à n'avoir que des différences légères dans les réſultats, il me ſemble qu'un milieu entre ces calculs aura un degré de certitude que l'on ne peut eſpérer des méthodes d'approximation.

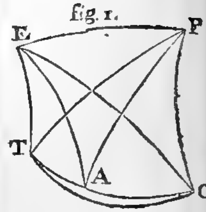
24. Je crois devoir terminer en donnant un exemple de ma Méthode. Pour cela, je choiſis les trois obſervations d'une tache du Soleil faites par M. de la Lande, & inſérées dans le IVᵉ vol. de ſon Aſtronomie, pag. 724; mais au lieu de la première longitude & de la première latitude rapportées par erreur dans cet article, j'emploie les élémens que m'a donnés M. de la Lande, & deſquels eſt effectivement déduit le calcul, qu'il donne au même endroit, de ces obſervations.

1.ère Longit. obſervée le 14 Juin 1775	7ˢ	8°	33′...		
				Différence... 57° 23′ = TEA.	
2.ᵉ Longit........ le 18	9	5	56...		
				Différence... 43 2 = AEC.	
3.ᵉ Longit........ le 21	10	18	58...		
				Diff. totale... 100 25 = TEC.	

1.ère Diſtance au pôle de l'Écliptique	90°	38′	= TE	
				Différence... 6° 53′ = AE—TE.
2.ᵉ Diſt..........................	97	31	= AE	
				Différence... 4 4 = CE—AE.
3.ᵉ Diſt..........................	101	35	= CE	
				Diff. totale... 10 57 = CE—TE.

On voit par ces données, que c'eſt le cas de la première *figure*; car les diſtances au pôle vont en augmentant; donc (22) le pôle de l'Écliptique doit être à gauche: le nœud eſt à 8ˢ 10° environ; donc la ligne des limites ne paſſe pas par les triangles, & la première formule (4) doit donner trois demi-ſommes des angles de poſition.

Fig. 1.



FORMULE I. (4)

cot. $\frac{1}{2}$ TEC	50°	12′	30″	9.9206044
sin $\frac{1}{2}$ (CE — TE)	5	28	30	8.9796004
ajoutant la première distance	90	38	0	.
comp. arithm. *sin.* $\frac{1}{2}$ (CE + TE)	96	6	30	0.0024727
tang. $\frac{1}{2}$ (C + T)	4	34	10, 6	8.9026775
cot. $\frac{1}{2}$ AEC	21	31		0.4042321
sin. $\frac{1}{2}$ (CE — AE)	2	2		8.5499948
ajoutant la deuxième distance	97	31		
comp. *sin.* $\frac{1}{2}$ (CE + AE)	99	33		0.0060609
tang. $\frac{1}{2}$ (C + A)	5	12	52, 0	8.9602878
cot. $\frac{1}{2}$ TEA	28	41	30	0.2617785
sin. $\frac{1}{2}$ (AE — TE)	3	26	30	8.7783850
ajoutant la première distance	90	38		
comp. *sin.* $\frac{1}{2}$ (AE + TE)	94	4	30	0.0010993
tang. $\frac{1}{2}$ (A + T)	6	16	31, 6	9.0412628
(8) $\frac{1}{2}$ (A — T)	0	38	41, 4	
(6) { A =	6	55	13, 0	
T =	5	37	50, 2	

FORMULE II. (11)

tang. $\frac{1}{2}$ (A + T)				9.0412628
cot. $\frac{1}{2}$ (A — T)				1.9486569
tang. $\frac{1}{2}$ TEA	28°	41′	30″	9.7382215
tang. $\frac{1}{2}$ (TEP + AEP)	79	24	27	0.7281412
Donc par la *figure* { TEP =	108	5	57	
AEP =	50	42	57	

Mais parce que A est plus grand que T, (21) *sin.* AEP doit être plus grand que *sin.* TEP. On ne peut concilier cette règle avec la *figure*, qu'en prenant (22) pour $\frac{TEP+AEP}{2}$, au lieu

de	79°	24′	27″
Le supplément	100	35	33
Ajoutant $\frac{1}{2}$ TEA	28	41	30
On a TEP	129	17	3
Retranchant (14) T	5	37	50
Différence	123	39	13
Et par conséquent $\frac{1}{2}$ (TEP — T)	61	49	36
Ajoutant T, l'on aura $\frac{1}{2}$ (TEP + T)	67	27	26

FORMULES III & IV. (13)

tang. $\frac{1}{2}$ TE	45° 19′	0.0048007			0.0048007
sin. $\frac{1}{2}$ (TEP — T)		9.9452338	*cos*		9.6740713
comp. *sin.* $\frac{1}{2}$ (TEP + T)		0.0345191	*comp. cos*		0.4163783
tang. $\frac{1}{2}$ (PT — PE)	43° 58′ 53″	9.9845536	*tang.* $\frac{1}{2}$ (PT + PE)	51° 14′ 0″	0.0952503
			$\frac{1}{2}$ PT — PE	43 58 53	
		Distance de la tache au pôle boréal du Soleil		95 12 53	
		Inclinaison de l'Equateur solaire sur l'Ecliptique		7 15 7	

Longitude, observée, du point T	7^s	8°	33′
Ajoutant (15) le complément de TEP	1	9	17
On trouve le lieu du nœud	8	17	50

Si l'on cherche les deux autres demi-sommes $\frac{AEP+CEP}{2}$, $\frac{TEP+CEP}{2}$, & que l'on résolve les deux autres triangl. AEP, CEP, on ne trouvera pas la moindre différ. dans les résultats.

25. Les calculs préparatoires, par lesquels on détermine les longitudes, & les latitudes vues du centre de l'astre, me paroissent pouvoir être abrégés. On cherche ordinairement, par les différences de longitude & de latitude observées, l'arc de distance, ainsi que l'angle au centre apparent de l'astre; puis on cherche l'angle au pôle de l'Écliptique. Mais l'angle au centre étant déjà trouvé dans l'opération que l'on fait pour convertir les différences d'ascension droite & de déclinaison en différences de longitude & de latitude, il seroit plus court d'employer la proportion, qui sert à trouver l'arc de distance, pour chercher, au lieu de cet arc, la différence de longitude vue du centre de l'astre. Cette différence est la même chose, quant au Soleil, que l'angle au pôle de l'Écliptique. Pour ce qui regarde la Lune, il faudra toujours tenir compte de sa latitude.

MÉMOIRE

SUR

LA COURBURE DES SURFACES,

Par M. MEUSNIER, Lieutenant en premier, Surnuméraire au Corps Royal du Génie, Correspondant de l'Académie.

LU A L'ACADÉMIE LES 14 ET 21 FÉVRIER 1776.

LA Théorie de la Courbure des lignes courbes est fondée sur cette propriété, que chacun de leurs élémens peut être regardé comme une portion de cercle, c'est-à-dire, comme engendré par la rotation d'un point. L'objet de ce Mémoire est d'assigner une génération qui convienne de même à tout élément de surface : on conçoit quelle facilité la solution de ce problême doit donner dans toutes les questions où il s'agira de connoître la forme d'un élément de surface, & par conséquent dans la question de la Courbure où on ne demande autre chose.

La marche que nous ſuivons dans cette recherche, eſt entièrement analogue à celle qu'on a ſuivie pour les lignes; en effet, voici comme on a dû raiſonner : La Courbure d'une ligne eſt évidemment ce qui fait que d'un point à un autre la tangente change de poſition, & plus ce changement eſt conſidérable, plus on peut dire que la Courbure eſt grande: donc, ſi l'on conçoit deux tangentes en deux points infiniment voiſins, l'angle formé par ces tangentes, meſure la Courbure de l'élément compris entre ces deux points, & l'expreſſion de cet angle contient toute la Théorie de la Courbure; mais on a obſervé que cette formule dépend uniquement des équations aux différences premières & ſecondes de l'élément dont il s'agit; d'où il ſuit qu'une Courbe tangente à cet élément, & ayant au contact la même équation aux différences ſecondes, aura auſſi la même Courbure. Or, il eſt toujours poſſible d'aſſigner un cercle qui ait cette propriété; on peut donc regarder tout élément de Courbe comme une portion d'un certain cercle.

De même, diſons-nous, la Courbure d'une ſurface conſiſte en ce que d'un point à un autre le plan tangent varie : ainſi la Courbure d'un élément de ſurface dépend de la formule qui exprime le changement du plan tangent dans l'étendue de cet élément; mais nous verrons bientôt que cette formule dépend elle-même des équations aux différences premières & ſecondes: donc une ſurface tangente à l'élément aura au contact la même Courbure que lui, ſi elle a la même équation aux différences ſecondes, & l'élément en queſtion pourra être regardé comme faiſant portion de cette ſurface. Ainſi notre problême ſe réduit à trouver une ſurface qui ait la propriété analytique que nous venons d'énoncer, & dont la génération ſoit connue & ſimple, parce qu'on pourra attribuer la même génération à l'élément dont il s'agit.

M. Euler a traité la même matière dans un fort beau Mémoire, imprimé en 1760 parmi ceux de l'Académie de Berlin. Cet illuſtre Géomètre enviſage la queſtion d'une manière différente de celle que nous venons d'expoſer; il fait dépendre la

Courbure d'un élément de ſurface, de celle des différentes ſections qu'on y peut faire en le coupant par des plans; c'eſt pourquoi il commence par déterminer le rayon de Courbure d'une ſection faite dans un élément de ſurface par un plan quelconque. Il reſtreint enſuite cette détermination au cas où le plan coupant eſt perpendiculaire ſur le plan tangent à l'élément qu'on conſidère, & découvre cette belle propriété : qu'entre tous les plans coupans qui ſont dans ce cas, celui qui donne la ſection de plus grande Courbure, fait, avec celui qui donne la ſection de moindre Courbure, un angle droit, quelle que ſoit la nature de la ſurface dont il s'agit. Il fait voir enfin que les rayons de Courbure de ces deux ſections ſuffiſent pour déterminer tous les autres; d'où il conclut qu'on connoîtra la Courbure d'un élément de ſurface, pourvu qu'on ait cette Courbure dans les deux ſens où elle eſt la moindre & la plus grande.

Il eſt clair que la queſtion de la Courbure eſt réſolue dans ce Mémoire; auſſi ne prétendons-nous ici que préſenter la même queſtion ſous un autre point de vue, en la faiſant dépendre d'une propriété intéreſſante; ſavoir, qu'il exiſte une génération qui convient à tout élément de ſurface : il manquoit d'ailleurs à cette Théorie pluſieurs réſultats importans, que nous donnons ici.

PROBLÊME PREMIER.

1. *Déterminer les différentes poſitions que peut avoir le plan tangent dans l'étendue d'un élément de ſurface?*

Solution. Soit en A (*fig.* 1.) l'élément dont il s'agit, & ſoient pris, dans le plan tangent à cet élément, deux axes AB, AC perpendiculaires entre eux; ſoit AD un troiſième axe perpendiculaire aux deux autres, & concevons la ſurface à laquelle appartient l'élément propoſé, repréſentée par une équation exprimée en coordonnées parallèles aux trois axes; ſoient pour un point N de cette ſurface AP, PM, MN ces FIGURE 1.

trois coordonnées que je nomme u, v, t reſpectivement, & ſuppoſons qu'on ait :
$dt = \mathrm{U}\,du + \mathrm{V}\,dv$; $d\mathrm{U} = \mathrm{U}'\,du + \mathrm{V}'\,dv$; $d\mathrm{V} = \mathrm{V}'\,du + \Upsilon\,dv$;
$\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{U}', \mathrm{V}', \Upsilon$ étant des fonctions de u & v.

Cela poſé, ſi l'on nomme u', v', t' les coordonnées du plan tangent en N, on ſait que l'équation de ce plan eſt :

$$t - \mathrm{U}u - \mathrm{V}v = t' - \mathrm{U}u' - \mathrm{V}v'.$$

Suppoſons maintenant que le point N devienne en V infiniment près du point A, & voyons ce que devient alors l'équation du plan tangent. Pour cela, nommons c, e, f reſpectivement les valeurs que prennent au point A les fonctions U', V', Υ ; de ſorte qu'en A on ait :

$$d\mathrm{U} = c\,du + e\,dv;\ d\mathrm{V} = e\,du + f\,dv.$$

Il eſt clair, d'après cela, que l'équation aux différences ſecondes, qui eſt généralement :
$ddt = \mathrm{U}\,ddu + \mathrm{V}\,ddv + \mathrm{U}'\,du^2 + 2\,\mathrm{V}'\,du\,dv + \Upsilon\,dv^2$
deviendra $ddt = c\,du^2 + 2\,e\,du\,dv + f\,dv^2$; (A)
parce que notre ſurface étant en A tangente au plan BAC, on a $\mathrm{U} = 0$, $\mathrm{V} = 0$.

Cela poſé, les coordonnées $\mathrm{A}\pi$, $\pi\mu$, $\mu\nu$ étant infiniment petites, on peut, dans l'équation du plan tangent, leur ſubſtituer leurs différences; alors le premier membre de cette équation devient $dt - \mathrm{U}\,du - \mathrm{V}\,dv$, & s'évanouit, puiſque généralement $dt = \mathrm{U}\,du + \mathrm{V}\,dv$: quant au ſecond membre, il faut remarquer que les quantités U, V, étant nulles en A, ſont en ν infiniment petites; on peut donc auſſi leur ſubſtituer leurs différences ; par ce moyen l'équation du plan tangent devient $t' = u\,[c\,du + e\,dv] + v'\,[e\,du + f\,dv]$, dans laquelle les différences du, dv expriment les coordonnées $\mathrm{A}\pi$, $\pi\mu$ du point ν auquel appartient le plan tangent dont il s'agit actuellement.

Les coëfficiens de u' & v' étant infiniment petits dans cette équation, il s'enſuit qu'à des coordonnées u', v', de grandeur finie, répond une ordonnée t' infiniment petite, c'eſt-à-dire, que

le

le plan tangent en v fait, avec le plan B A C, un angle infiniment petit.

Cet angle mesure de combien le plan tangent a varié de A en v; ainsi étant donnée l'expression de cet angle, quel que soit le point v, la Courbure de l'élément de surface sera déterminée dans tous les sens possibles. Or on sait qu'étant donnée l'équation d'un plan de la forme ci-dessus, le *sinus* de l'angle que fait ce plan avec celui des coordonnées horizontales, est la racine de la somme des carrés des coëfficiens de ces coordonnées dans l'équation du plan. Donc, à cause que l'angle que nous cherchons étant infiniment petit, on peut le prendre pour son *sinus*, nous aurons en le nommant ε: $\varepsilon = \sqrt{[c\,du + e\,dv]^2 + [e\,du + f\,dv]^2}$

C. Q. F. T.

Corollaire premier.

2. Si l'on conçoit une surface tangente en A au plan B A C, & ayant au contact la même équation (A) aux différences secondes, c'est-à-dire, pour laquelle les quantités c, e, f soient les mêmes qu'ici, il est clair que l'équation du plan tangent en v, & l'expression de l'angle ε seront les mêmes que pour l'élément dont il s'agit, quel que soit le point v; donc *toute surface tangente à l'élément proposé, & ayant au contact la même équation aux différences secondes, aura aussi la même Courbure.*

Corollaire II.

3. Donc la surface dont l'équation est:

$$t = \frac{c u^2 + 2 e u v + f v^2}{2} \quad (B).$$

a en A la même Courbure que l'élément proposé; car elle lui est tangente, & donne, étant différenciée, la même équation aux différences secondes. Donc tout élément de surface peut être regardé comme faisant portion de la surface dont l'équation est ci-dessus écrite.

Corollaire III.

4. Soit N un point de la surface que nous venons de

confidérer; qu'on mène dans le plan B A C une ligne quelconque A G, du point M soit menée M p perpendiculaire sur A G, & soit transformée l'équation (B) par rapport aux nouvelles coordonnées A p, pM; pour cela, prenons les dénominations suivantes: angl. C A G $= \varphi$; A $p = u'$; p M $= v'$, M N étant toujours nommée t; du point p soient menées $p\,q$, $p\,r$ parallèles aux axes A B, A C, les triangles A $p\,q$, $p\,r$ M donneront:

Aq=Ap $cos.$ C A G $= u'\,cos.\varphi$; $p\,q$ = Ap $sin.$ C A G $= u'\,sin.\,\varphi$; $p\,r$ = p M $sin.$ C A G $= v'\,sin.\,\varphi$; r M = p M $cos.$ C A G $= v'\,cos.\,\varphi$;

donc, à cause de Ap = A $q - p\,r$; PM $= p\,q + r$M, nous aurons $u = u'\,cos.\,\varphi - v'\,sin.\varphi$; $v = u'\,sin.\,\varphi + u'\,cos.\,\varphi$; mettant pour u, v, ces valeurs dans l'équation (B), elle devient:

$$t = \left\{\begin{array}{r} u'^2\left[\dfrac{c\,cos.\,\varphi^2 + 2\,e\,sin.\,\varphi\,cos.\,\varphi + f\,sin.\,\varphi^2}{2}\right] \\ + 2\,u'\,v'\left[\dfrac{e\,(cos.\,\varphi^2 - sin.\,\varphi^2) - (c-f)\,sin.\,\varphi\,cos.\,\varphi}{2}\right] \\ + v'^2\left[c\,sin.\,\varphi^2 - 2\,e\,sin.\,\varphi\,cos.\,\varphi + f\,cos.\,\varphi^2\right] \end{array}\right\}$$

faisons en sorte que le terme qui contient le produit $u'\,v'$ des coordonnées s'évanouisse; pour cela, posons $e\,(cos.\,\varphi^2 - sin.\,\varphi^2) - (c-f)\,sin.\,\varphi\,cos.\,\varphi = 0$, c'est-à-dire, $tang.\,2\,\varphi = \frac{2\,e}{c-f}$, & notre équation prend cette forme:

$$t = \left\{\begin{array}{r} u'^2\left[\dfrac{c\,cos.\,\varphi^2 + 2\,e\,sin.\,\varphi\,cos.\,h + f\,sin.\,\varphi^2}{2}\right] \\ + v'^2\left[\dfrac{c\,sin.\,\varphi^2 - 2\,e\,sin.\,\varphi\,cos.\,\varphi + f\,cos.\,\varphi^2}{2}\right] \end{array}\right\} \quad \text{(C)}$$

alors il est évident que la surface est symétrique de part & d'autre de l'axe A G, puisque, soit que v' soit positive ou négative, la valeur de t est la même.

5. Donc si l'on mène une ligne A G, telle que $tang.\,2\,\varphi = \frac{2\,e}{c-f}$, notre surface sera symétrique de part & d'autre de cette ligne; mais cette équation donne pour $2\,\varphi$ deux valeurs qui diffèrent entre elles de 180°, c'est-à-dire, qu'elle indique pour φ deux

valeurs différentes l'une de l'autre de 90°, ou, pour AG, deux positions perpendiculaires entre elles; il existe donc encore un axe IL perpendiculaire sur AG de part & d'autre, duquel notre surface est symétrique; & comme tout ce que nous disons de cette surface peut s'affirmer de l'élément dont il est ici question, il s'ensuit que *tout élément de surface est symétrique de manière à pouvoir être partagé en quatre parties semblables.*

6. Il est clair que la surface dont nous avons parlé jusqu'ici, aura la même équation aux différences secondes que l'élément de surface dont il s'agit, quels que soient les axes par rapport auxquels on prendra cette équation; si donc on différencie deux fois l'équation (C), & que l'on fasse $u' = 0$, $v' = 0$ l'équation suivante

$$ddt = \left\{ \begin{array}{l} du'^2 \, [c \, cos. \, \varphi^2 + 2 \, e \, sin. \, \varphi \, cos. \, \varphi + f \, sin \, \varphi^2] \\ + dv'^2 \, [c \, sin. \, \varphi^2 - 2 \, e \, sin. \, \varphi \, cos. \, \varphi + f \, cos. \, \varphi^2] \end{array} \right\} \quad (D)$$

à laquelle on arrivera par ce moyen, sera aussi l'équation aux différences secondes de notre élément de surface par rapport aux axes AG, IL.

THÉORÊME.

7. *Tout élément de surface peut être regardé comme engendré par la rotation d'un petit arc de cercle autour d'un axe parallèle au plan tangent à cet élément.*

Démonstration. Soit f EF (*fig.* 1.) un axe parallèle au plan BAC, coupant en E l'axe AD, & dont la projection tombe sur AG; soit k A h un arc de cercle tangent en A à la ligne AG, & dont le plan passe par EF; supposons que cet arc de cercle, en tournant autour de EF, engendre une surface de révolution, le théorême actuel sera démontré, si l'on fait voir qu'on peut assigner au rayon de l'arc k A h & à la distance EA des valeurs telles que la surface ainsi engendrée ait en A la même équation aux différences secondes que l'élément proposé; car il pourra être regardé comme faisant portion de cette surface, & par conséquent comme engendré de la même manière.

Soit donc le rayon de l'arc $k\,A\,h = r$; $E\,A = \rho$; cela posé; je dis que la surface engendrée par l'arc $k\,A\,h$ est évidemment symétrique de la manière énoncée ci-dessus : son équation aux différences secondes est donc de même forme que l'équation (D), c'est-à-dire, $d\,d\,t = A\,d\,u'^2 + B\,d\,v'^2$.

8. Pour déterminer A & B, remarquons que si nous coupons la surface de révolution dont il s'agit, par un plan vertical passant par A G, la section sera l'arc $k\,A\,h$; qu'ainsi faisant dans notre équation $d\,v' = 0$, elle doit devenir l'équation aux différences secondes de l'arc $k\,A\,h$, c'est-à-dire, $d\,d\,t = A\,d\,u'^2 = \frac{d\,u'^2}{r}$. Donc $A = \frac{1}{r}$; de même si on coupe la surface par un plan vertical passant par I L perpendiculaire sur A G, la section sera un arc $i\,A\,l$, dont le rayon est $E\,A = \rho$. Donc si l'on fait $d\,u' = 0$, l'équation ci-dessus doit devenir celle de cet arc, c'est-à-dire, $d\,d\,t = B\,d\,v'^2 = \frac{d\,v'^2}{\rho}$. Donc $B = \frac{1}{\rho}$; donc l'équation aux différences secondes de notre surface de révolution est $d\,d\,t = \frac{d\,u'^2}{r} + \frac{d\,v'^2}{\rho}$ (E).

9. Maintenant cette équation devant être la même que celle de notre élément, égalons-la terme à terme à l'équation (D), nous aurons :

$$\frac{1}{r} = c\,cos.\,\varphi^2 + 2\,e\,sin.\,\varphi\,cos.\,\varphi + f\,sin.\,\varphi^2 = \frac{c + f + 2\,e\,sin.\,2\,\varphi + (c - f)\,cos.\,2\,\varphi}{2},$$

$$\frac{1}{\rho} = c\,sin.\,\varphi^2 - 2\,e\,sin.\,\varphi\,cos.\,\varphi + f\,cos.\,\varphi^2 = \frac{c + f - 2\,e\,sin.\,2\,\varphi - (c - f)\,cos.\,2\,\varphi}{2}.$$

Mais l'équation $tang.\,2\,\varphi = \frac{2\,e}{c - f}$ donne

$$sin.\,2\,\varphi = \frac{\pm 2\,e}{\sqrt{(c-f)^2 + 4\,e^2}};\quad cos.\,2\,\varphi = \frac{\pm (c - f)}{\sqrt{(c-f)^2 + 4\,e^2}},$$

substituant ces valeurs, nous aurons

$$r = \frac{2}{c + f \pm \sqrt{(c-f)^2 + 4\,e^2}};\quad \rho = \frac{2}{c + f \mp \sqrt{(c-f)^2 + 4\,e^2}}.$$

Voilà donc quelles doivent être les quantités r & ρ, pour que la génération que nous avons énoncée puiſſe convenir à l'élément que nous conſidérons.

10. Qu'on remarque maintenant que le radical qui affecte les valeurs de r & ρ couvre la ſomme de deux carrés qui eſt néceſſairement poſitive, que les expreſſions de *ſin.* $2\,\varphi$ & *coſ.* $2\,\varphi$ ſont toujours renfermées entre les limites $+1$ & -1, on verra que jamais nos réſultats ne peuvent devenir imaginaires. Donc notre théorême eſt vrai dans tous les cas.

C. Q. F. D.

11. Il eſt clair que la poſition de l'axe de rotation eſt maintenant déterminée, puiſque ſa projection ſur le plan BAC′ eſt donnée par l'équation $tang.\ 2\,\varphi = \frac{2e}{c-f}$, & que nous avons l'expreſſion de EA ou de ſa diſtance au plan BAC; rien par conſéquent n'eſt plus aiſé que d'exprimer cette poſition par deux équations analogues à celles dont on ſe ſert pour repréſenter une Courbe tracée dans l'eſpace. Pour cela, ſoient u, v, t les coordonnées de chaque point de l'axe de rotation, on a évidemment, pour tous ſes points, $t = \text{E A} = \rho$; de plus $\frac{v}{u} = tang.\ \varphi$; mais $tang.\ \varphi = \frac{1 + ſin.\ 2\,\varphi - coſ.\ 2\,\varphi}{1 + ſin.\ 2\,\varphi + coſ.\ 2\,\varphi}$; mettant donc pour ρ, *ſin.* $2\,\varphi$, & *coſ.* $2\,\varphi$ leurs valeurs, on aura, pour l'axe de rotation, les équations ſuivantes :

$$t = \frac{2}{c+f \mp \sqrt{(c-f)^2 + 4\,e^2}}\,;\quad \frac{v}{u} = \frac{-(c-f) \pm \sqrt{(c-f)^2 + 4\,e^2}}{2\,e}.$$

12. Nous avons vu (5) qu'il y a pour φ deux valeurs qui ſatisfont également, c'eſt-à-dire, deux poſitions pour AG ou pour la projection de l'axe de rotation; il y a donc deux axes dont les projections ſont perpendiculaires entre elles, & qui conviennent l'un & l'autre à la génération de l'élément de ſurface. C'eſt ce que ſignifient les doubles ſignes qui affectent les valeurs de r & ρ, ainſi que les équations ci-deſſus, dans leſquelles, ſi le ſigne ſupérieur convient à l'axe EF, le ſigne inférieur conviendra à un autre axe $\varphi\ e\ \Phi$, coupant en e l'axe AD, de telle ſorte que Ae ſoit égale au rayon de l'arc kAh,

& autour duquel l'arc $i\,A\,l$, d'un rayon égal à EA, engendrera aussi, par sa rotation, l'élément de surface dont il est ici question.

13. Au reste, on remarquera que, quelque signe que l'on prenne, le système des quantités r & ρ ne change point; c'est pourquoi nous prendrons désormais le signe supérieur, & nous écrirons :

$$r = \frac{2}{c+f+\sqrt{(c-f)^2+4e^2}}\,;\quad \rho = \frac{2}{c+f-\sqrt{(c-f)^2+4e^2}}.$$

14. Telle est la génération propre à tout élément de surface que nous nous proposions de trouver; elle rend, comme on voit, la question de la Courbure bien simple, puisqu'elle fait dépendre la forme de tout élément de surface de deux quantités, savoir, r & ρ. Nous nommons à cause de cela ces quantités, *rayons de Courbure* des surfaces. Nous verrons dans la suite les différentes formes que peut avoir un élément de surface suivant les différentes valeurs de r & ρ.

Pour voir par quoi nos deux rayons de Courbure sont suppléés dans le Mémoire de M. Euler, & pour jeter en même temps plus de jour sur cette matière, résolvons le problême suivant.

PROBLÊME II.

15. *Déterminer le rayon de Courbure de la section faite dans un élément de surface par un plan quelconque donné de position.*

FIGURE 2. SOLUTION. Soient (*fig.* 2.) AL, AG, AD les mêmes axes que dans la *fig.* 1, c'est-à-dire, que l'élément de surface que nous considérons est symétrique de part & d'autre des axes AL, AG. Soit N un point de la surface à laquelle appartient l'élément, & soient AP, PM, MN les coordonnées de ce point.

Supposons que AQ soit l'intersection du plan LAG avec celui qui coupe l'élément, & soit AN la courbe suivant laquelle la surface est coupée, le problême que nous nous proposons ici consiste à trouver le rayon de Courbure de la courbe AN au point A.

Pour cela, du point N menons NQ perpendiculaire sur AQ, joignons les points Q & M par la droite QM, l'angle MQN mesurera l'inclinaison du plan coupant; regardons de plus AQ, QN comme des coordonnées de la courbe AN prises dans son plan; tout cela posé, gardons les dénominations: $AP = u'$; $PM = v'$; $MN = t$. Soit de plus: $AQ = x$; $QN = y$; angl. $QAG = \pi$; angl. $NQM = \omega$. Rappelons-nous que (8) l'équation aux différences secondes de l'élément dont il s'agit, peut être mise sous cette forme:

$$ddt = \frac{du'^2}{r} + \frac{dv'^2}{\rho} \text{ (E).}$$

Maintenant nous trouverons, par le moyen des triangles AqQ, QrM, & par le même procédé dont nous avons fait usage dans le corollaire troisième du problême premier.

$$\overline{AP} = \overline{AQ}.\ cos.\ QAG - \overline{QM}.\ sin.\ QAG$$
$$\overline{PM} = \overline{AQ}.\ sin.\ QAG + \overline{QM}.\ cos.\ QAG$$

de plus le triangle NQM donne:

$$\overline{QM} = \overline{QN}.\ cos.\ NQM = y.\ cos.\ \omega;\ \overline{MN}. = \overline{QN}\ sin.\ NQM = y.\ sin.\ \omega.$$

Mettant pour QM sa valeur dans les deux équations ci-dessus, & les traduisant suivant nos dénominations, ainsi que celle qui donne la valeur de MN, il viendra:

$$u' = x\ cos.\ \pi - y.\ cos.\ \omega.\ sin.\ \pi.$$
$$v' = x\ sin.\ \pi + y.\ cos.\ \omega.\ cos.\ \pi.$$
$$t = y.\ sin.\ \omega.$$

Différencions maintenant ces équations pour la portion infiniment petite de la courbe AN qui est en A, en observant de faire $dy = 0$; puisque la courbe AN est tangente en A à la droite AQ, nous aurons:

$d u' = d x. \cos. \pi$; $d v' = d x. \sin. \pi$; $d d t = d d y. \sin. \omega$.
Mettons ces valeurs de $d u'$, $d v'$, $d d t$, dans l'équation (E), elle deviendra :

$$d d y = d x^2 \left[\frac{r \sin. \pi^2 + \rho \cos. \pi^2}{r \rho \sin. \omega} \right],$$

équation aux différences secondes de la courbe A N au point A.

Cela posé, si nous nommons $d s$ l'élément de la courbe AN, R son rayon de Courbure en un point quelconque, on a généralement $R = \frac{d s^3}{d x d d y}$; $d x$ étant supposé constant, comme nous sommes maîtres de le faire ; mais au point A on a $d s = d x$. La valeur de R devient donc $R = \frac{d x^2}{d d y}$, ou mettant pour $d d y$ sa valeur, il vient

$$R = \frac{r \rho \sin. \omega.}{r \sin. \pi^2 + \rho \cos. \pi^2}, \text{ ou bien } R = \frac{2 r \rho \sin. \omega}{r + \rho - (r - \rho) \cos. 2 \pi}$$

C. Q. F. T.

16. Bornons-nous, comme fait M. Euler, au cas où le plan coupant est perpendiculaire sur le plan tangent, & cherchons pour lors le *maximum* & le *minimum* de R. Le *sinus* de l'angle ω étant $= 1$, la valeur de R devient : $R = \frac{2 r \rho}{r + \rho - (r - \rho) \cos. 2 \pi}$.

Le numérateur de cette expression étant constant, il suffit, pour avoir le *maximum* ou le *minimum*, d'égaler à zéro la différentielle du dénominateur, ce qui donne $\sin. 2 \pi = 0$. Donc $\cos. 2 \pi = \pm 1$, valeurs qui, mises l'une & l'autre dans celle de R, donnent $R = r$ ou $R = \rho$, l'une de ces deux expressions convenant au *maximum*, l'autre au *minimum*. Ce qui fait voir que *nos deux rayons de Courbure sont la même chose que le plus grand & le plus petit entre les rayons de Courbure des sections faites dans l'élément de surface par des plans qui lui soient perpendiculaires.*

17. Le résultat $\cos. 2 \pi = \pm 1$ donne $\pi = 0$, ou $\pi = 90°$. Ce qui démontre cette propriété donnée par M. Euler : que *les deux*

deux plans qui donnent la plus grande & la moindre Courbure sont perpendiculaires entre eux.

18. Au lieu de considérer les plans coupans perpendiculaires sur l'élément, c'est-à-dire, ceux qui passent tous par la normale, prenons ceux qui passent tous par une même ligne A Q prise dans le plan tangent. Pour tous ces plans, l'angle π est le même ; nous pouvons donc mettre l'expression générale du rayon de Courbure sous cette forme $R = H \sin. \omega$, H étant une constante. Entre tous ces plans, il en est un perpendiculaire sur le plan tangent, & pour lequel on a $\sin. \omega = 1$: donc, si l'on nomme R' le rayon de Courbure de la section faite par ce plan, on aura $R' = H$. Donc $R = R' \sin. \omega$, équation qui fait voir qu'étant donné le rayon de Courbure de la section faite par le plan perpendiculaire sur le plan tangent, tous les autres sont déterminés par une relation indépendante de la nature de la surface.

Si l'on imagine une sphère tangente en A au plan L A G, & qu'on nomme R'' son rayon, cette sphère étant coupée par les mêmes plans que notre élément de surface, & R étant le rayon de Courbure d'une section quelconque, il est évident qu'on aura comme ci-dessus $R = R'' \sin. \omega$, puisque le plan perpendiculaire sur le plan tangent coupe cette sphère suivant son grand cercle, dont le rayon est R''. Donc, si $R' = R''$, on aura, pour la sphère comme pour l'élément de surface, $R = R' \sin. \omega$. D'où suit cette propriété curieuse : *Si l'on coupe un élément de surface par un plan qui lui soit perpendiculaire, qu'on imagine une sphère qui lui soit tangente, & dont le rayon soit égal au rayon de Courbure de la section dont nous venons de parler ; qu'on fasse passer par l'intersection du plan coupant avec le plan tangent un autre plan quelconque, il fera, dans la sphère & dans l'élément de surface, des sections d'égale Courbure.*

Mais passons à l'examen des différentes formes que peut avoir une surface relativement à la Courbure, & donnons les caractères analytiques auxquels on peut les reconnoître.

19. Les expressions que nous avons trouvées pour les rayons de Courbure peuvent être tantôt positives, tantôt négatives; pour savoir ce qu'il en doit résulter pour la forme de l'élément auxquels ils appartiennent, reprenons la formule $R = \frac{2 r \rho \, sin. \, \omega}{r + \rho - (r - \rho) \, cos. \, 2 \pi}$ qui est celle du rayon de Courbure d'une section quelconque, & mettons-la sous cette forme $R = \frac{2 r \rho \, sin. \, \omega}{r (1 - cos. \, 2 \pi) + \rho (1 + cos. \, 2 \pi)}$.

Cela posé, ou r & ρ sont positifs, ou ils sont négatifs, ou ils sont de signe contraire.

20. Dans le premier cas, le dénominateur de R est toujours positif, puisque les coëfficiens de r & ρ le sont, quel que soit π; donc alors R lui-même est toujours positif; d'où il suit que, dans ce cas, on ne sauroit faire, dans l'élément dont il s'agit, que des sections concaves, c'est-à-dire, que l'élément lui-même est concave.

21. Si r & ρ sont négatifs, le numérateur de R n'en est pas moins positif; mais le dénominateur est négatif, puisque les coëfficiens de r & ρ sont toujours positifs; donc, dans ce cas, toutes les sections qu'on peut faire dans l'élément sont convexes, c'est-à-dire, que l'élément lui-même est convexe.

22. Reprenons les expressions de rayon de Courbure r & ρ que nous avons données (13), & transformons-les comme il suit:

$$r = \frac{2}{c + f + \sqrt{(c + f)^2 + 4(e^2 - cf)}},$$

$$\rho = \frac{2}{c + f - \sqrt{(c + f)^2 + 4(e^2 - cf)}},$$

& remarquons que leur produit est $r \rho = \frac{-1}{e^2 - cf}$.

Cela posé, dans les deux cas que nous venons de détailler, r & ρ étant de même signe, leur produit est positif, & par conséquent $e^2 - cf$ négative, c'est-à-dire : $e^2 - cf < 0$. Il est clair ensuite que si $c + f$ est positive, r & ρ seront positifs, & réciproquement; c'est-à-dire, que le symptôme de la concavité est $c + f > 0$, & celui de la convexité est $c + f < 0$, pourvu qu'on ait en même temps $e^2 - cf < 0$.

23. Il nous reste à examiner le cas où les deux rayons de Courbure sont de signe contraire. Il est d'abord évident que $r\rho$ doit être une quantité négative, qu'ainsi on doit avoir $e^2 - cf > 0$; de plus, quel que soit le signe de $c+f$, r sera toujours positif, & ρ négatif.

Maintenant écrivons ainsi la valeur de R :

$$R = \frac{\left(\frac{2 r \rho \, sin. \, \omega}{r-\rho}\right)}{\frac{r+\rho}{r-\rho} - cos. \, 2\pi},$$

dans le cas que nous traitons, r étant toujours positif & ρ négatif, $r-\rho$ est une quantité positive; par conséquent la fraction qui tient ici lieu de numérateur sera toujours négative, puisque $r\rho$ l'est. De plus, la quantité $\frac{r+\rho}{r-\rho}$ est évidemment contenue entre les limites $+1$ & -1, à cause de la différence des signes de r & ρ; donc, dans les différentes valeurs de l'angle π, on aura tantôt $cos. \, 2\pi > \frac{r+\rho}{r-\rho}$, & tantôt $cos. \, 2\pi < \frac{r+\rho}{r-\rho}$.

Dans le premier cas, R sera positif, & les sections faites dans l'élément seront concaves; dans le second, elles seront convexes; donc : *Quand les deux rayons de Courbure sont de signe contraire, les sections qu'on peut faire dans l'élément sont les unes concaves, les autres convexes.*

24. Dans le passage des sections concaves aux sections convexes, on a $cos. \, 2\pi = \frac{r+\rho}{r-\rho}$ ou $R = \infty$; il en résulte pour π deux valeurs que nous allons construire.

Soit (*fig.* 3.) A G, A L les axes perpendiculaires entre eux, qui partagent symétriquement l'élément de surface dont il s'agit; du centre A soit décrit le cercle I K G L dont le rayon soit $= 1$; soit pris $AH = \frac{r+\rho}{r-\rho}$, & soit menée F H E perpendiculaire sur A H, les deux valeurs qui conviennent à l'arc 2π sont G E & G L K F; car A H est également le *cosinus* de l'une & de l'autre, & par FIGURE 3.

conséquent l'équation $cos.\ 2\ \pi = \frac{r+\rho}{r-\rho}$ est satisfaite. Donc, si on partage ces arcs en deux également aux points N & R, GN & GLR seront les valeurs de π données par l'équation ci-dessus. Il suit de là, que si lon mène les diamètres NQ, RM, quelque plan qu'on fasse passer par ces diamètres, il sera dans l'élément des sections de nulle Courbure, puisqu'on a $R = \infty$. Donc : *Quand les deux rayons de Courbure sont de signe contraire, il y a dans l'élément de surface deux sens suivant lesquels la Courbure est nulle.*

25. Si on avoit $r = \infty$ ou $\rho = \infty$, c'est-à-dire, que l'élément de surface pût être regardé comme une portion de cylindre, on auroit $AH = \frac{r+\rho}{r-\rho} = \pm 1$. Ce qui signifie qu'alors les diamètres NQ, MR, suivant lesquels la Courbure est nulle, se confondroient l'un & l'autre, ou avec GK ou avec IL. Donc : *Quand un des rayons de Courbure est infini, il n'y a, dans l'élément de surface, qu'un sens suivant lequel la Courbure est nulle.*

26. Nous venons de voir (23) que si $cos.\ 2\ \pi > \frac{r+\rho}{r-\rho}$, c'est-à-dire, $cos.\ 2\ \pi > AH$, alors, quel que soit ω, la section faite dans l'élément est concave; mais $cos.\ 2\ \pi > AH$ donne $\pi < GN$ ou $\pi > GLR$, ce qui veut dire également, que dans ce cas, le plan coupant passe dans l'angle MAN & dans son opposé au sommet : c'est donc la partie de l'élément comprise dans ces deux angles, qui est susceptible de donner des sections concaves; nous prouverons de même que c'est la portion comprise dans l'angle NAR, & son opposé MAQ, qui est susceptible de donner des sections convexes.

27. Ainsi, dans cet état, l'élément de surface n'est ni concave ni convexe; mais si l'angle MAN est plus grand que l'angle NAR, alors la partie qui donne les sections concaves sera plus grande que celle qui donne les sections convexes, & on pourra dire, en quelque façon, que l'élément de surface est

plus concave que convexe, c'est pourquoi nous le nommons alors *convexo-concave*.

Si au contraire l'angle NAR est plus grand que l'angle MAN, la partie de l'élément qui donne les sections convexes, sera plus grande que celle qui donne les sections concaves, & nous le nommerons *concavo-convexe*.

Dans le premier cas, l'angle MAN est obtus; & comme cet angle a pour mesure un arc MN égal à GE, il s'ensuit que l'arc GE est plus grand que 90°, qu'ainsi AH est négative. Or $AH = \frac{r+\rho}{r-\rho}$; de plus $r - \rho$ est nécessairement une quantité positive, comme nous l'avons fait voir; donc $r+\rho$ est négative; or $r + \rho = -\frac{(c+f)}{e^2 - cf}$, expression qui ne sauroit être négative, à moins que $c+f$ ne soit positive, puisque nous avons vu que $e^2 - cf$ est positive dans le cas que nous traitons. Il faut donc, pour qu'un élément de surface soit convexo-concave, qu'on ait $c+f > 0$.

Dans le second cas, l'angle MAN est aigu, par conséquent l'arc GE moindre que 90°, c'est-à-dire, AH positive. Donc l'élément de surface est concavo-convexe, si on a $c+f < 0$, pourvu que, dans ces deux derniers cas, on ait $e^2 - cf > 0$.

Il suit de tout cela, qu'une surface est:

Concave	par-tout où l'on a	$e^2 - cf < 0$	&	$c+f > 0$.
Convexe	....	$e^2 - cf < 0$	&	$c+f < 0$.
Convexo-concave	....	$e^2 - cf > 0$	&	$c+f < 0$.
Concavo-convexe	....	$e^2 - cf > 0$	&	$c+f > 0$.

Voilà donc, pour les surfaces, quatre états de Courbure analogues aux deux qu'on distingue dans les lignes sous le nom de concavité & de convexité, & il est clair que tous les cas sont contenus dans cette division, pourvu qu'on y comprenne ceux où les quantités, dont le signe règle ces différens états, sont nulles ou infinies; mais il faut remarquer que la différence qu'il y a entre le troisième & le quatrième état, étant purement analytique, & ne pouvant être sensible aux yeux, la vue ne compte réellement, dans les surfaces, que trois états de Courbure.

Jusqu'ici nous avons toujours rapporté l'élément de surface que nous considérions au plan qui lui est tangent : cette méthode qui, comme on voit, est très-commode, tant qu'il ne s'agit que d'un seul élément, devient insuffisante dès qu'on veut en comparer plusieurs, & à plus forte raison quand on veut examiner une surface entière; c'est pourquoi, supposant l'élément dont nous nous occupons, rapporté à des axes quelconques, nous allons transformer nos formules par rapport à ces axes, en commençant par les quantités c, e, f dont elles dépendent toutes.

Transformation des quantités c, e, f.

FIGURE 4. 28. Soient OB, OC, OD (*fig.* 4.) trois axes perpendiculaires entre eux, auxquels est rapportée la surface à laquelle appartient l'élément que nous avons considéré jusqu'ici, & dont deux OB, OC sont horizontaux & le troisième vertical. Soit en A l'élément dont il s'agit; supposons que le plan qui lui est tangent vienne couper, suivant GH, le plan horizontal BOC; soit imaginé par le point A un plan vertical perpendiculaire à GH; soit U le point où il coupe cette ligne, & AU, UR les intersections de ce plan tangent & du plan BOC; l'angle AUR mesurera l'inclinaison du plan tangent.

Soit en N un autre point de la surface, duquel abaissons une perpendiculaire NM sur le plan tangent en A prolongé; par le point A, menons Ag parallèle à GH, & du point M soit MP perpendiculaire sur AG, je dis que AP, PM, MN sont trois coordonnées perpendiculaires entre elles, au moyen desquelles le point N est rapporté au plan tangent; nous pouvons donc les prendre pour celles dont nous nous sommes servis jusqu'ici, & leur donner les mêmes dénominations :

AP$=u$; PM$=v$, MN$=t$. Soit de plus OQ$=x$; QR$=y$, RA$=z$.
OS$=x'$; ST$=y'$; TN$=z'$; angl. OGH$=\pi$; angl. AUR$=\omega$.

Soit transportée l'origine en A; pour cela, soient par le point A les axes A b, A c, A d parallèles aux premiers; de sorte que les coordonnées du point quelconque N, par rapport à ces axes, sont A $s = x' - x$; $s t = y' - y$, t N $= z' - z$.

Du point P soit menée, dans le plan horizontal b A c, la droite P $t\,u$ qui peut être regardée comme la projection horizontale de PM; soient menées par le point M la verticale M u, & dans le plan vertical M P u l'horizontale M v. Par le point P soient menées P x, P y parallèles aux axes A c, A b, & soit prolongée $s\,t$ jusqu'à ce qu'elle rencontre en x la droite P x.

Tout cela posé, soit l'équation de notre surface $dz = p\,dx + q\,dy$, & supposons qu'on ait de plus $dp = m\,dx + n\,dy$; $dq = n\,dx + s\,dy$, on aura de même $dz' = p'\,dx' + q'\,dy'$; $dp' = m'\,dx' + n\,dy'$; $dq' = n'\,dx' + s'\,dy'$; par conséquent, si l'on suppose dx', dy' constans, on aura:

$$ddz' = m'\,dx'^2 + 2n'\,dy'\,dx' + s'\,dy'^2 \qquad (A').$$

Maintenant les triangles N M v, M P u donnent:

N v = M N $cos.$ M P $u = t\,cos.\,\omega$; M v = M N $sin.$ M P $u = t\,sin.\,\omega$;
M u = M P $sin.$ M P $u = v\,sin.\,\omega$; P u = M P $cos.$ M P $u = v\,cos.\,\omega$;
donc P t = P u — M $v = v\,cos.\,\omega - t\,sin.\,\omega$.

On a de plus par les triangles P $t\,x$, P A y;
P x = P t $sin.$ g A $c = [v\,cos.\,\omega - t\,sin.\,\omega]\,sin.\,\pi$;
$t\,x$ = P t $cos.$ g A $c = [v\,cos.\,\omega - t\,sin.\,\omega]\,cos.\,\pi$.
P y = A P $sin.$ g A $c = u\,sin.\,\pi$; A y = A P $cos.$ g A $c = u\,cos.\,\pi$;
donc, à cause de
N $t = z' - z$ = N v + M u; A $s = x' - x$ = P x + A y; $s\,t = y' - y = t\,x$ — P y,
on aura:

$$z' - z = t\,cos.\,\omega + u\,sin.\,\omega \qquad (F),$$
$$x' - x = [v\,cos.\,\omega - t\,sin.\,\omega]\,sin.\,\pi + u\,cos.\,\pi \qquad (G),$$
$$y' - y = [v\,cos.\,\omega - t\,sin.\,\omega]\,cos.\,\pi - u\,sin.\,\pi \qquad (H),$$

Différencions ces expressions en traitant x, y, z comme constantes, pour exprimer que nous regardons le point A comme fixe, & faisons en sorte que les équations que nous aurons n'appartiennent qu'à l'élément dont il s'agit ici, c'est-à-dire, aux points de notre surface qui sont aux environs du point A. Supposons pour cela le point N infiniment voisin du point A, &

faisons par conséquent $dt = 0$, $p' = p$, $q' = q$, $m' = m$, $n' = n$, $f' = f$, nous aurons :

$$dy' = dv\, cos.\, \omega\, cos.\, \pi - du\, sin.\, \pi,$$
$$dx' = dv\, cos.\, \omega\, sin.\, \pi + du\, cos.\, \pi,$$
$$ddz' = ddt\, cos.\, \omega + ddv\, sin.\, \omega,$$
$$ddx' = [ddv\, cos.\, \omega - ddt\, sin.\, \omega]\, sin.\, \pi + ddu\, cos.\, \pi;$$
$$ddy' = [ddv\, cos.\, \omega - ddt\, sin.\, \omega]\, cos.\, \pi - ddu\, sin.\, \pi;$$

mais dx' & dy' étant constans, on a $ddx' = 0$, $ddy' = 0$. Egalant donc à zéro leurs expressions, nous en tirerons $ddv\, cos.\, \omega - ddt\, sin.\, \omega = 0$, par conséquent $ddv = \frac{ddt\, sin.\, \omega}{cos.\, \omega}$, valeur qui, mise dans celle de ddz', donne $ddz' = \frac{ddt}{cos.\, \omega}$; mettant dans l'équation (A′) ces valeurs de ddz', dx', dy', elle devient :

$$ddt = \left\{ \begin{array}{c} du^2\, [m\, cos.\, \pi^2 - 2n\, sin.\, \pi\, cos.\, \pi + f.\, sin.\, \pi^2]\, cos.\, \omega \\ + 2\, du\, dv\, [n\, (cos.\, \pi^2 - sin.\, \pi^2) + (m - f)\, sin.\, \pi\, cos.\, \pi]\, cos.\, \omega^2 \\ + dv^2\, [m\, sin.\, \pi^2 + 2n\, sin.\, \pi\, cos.\, \pi + f\, cos.\, \pi^2]\, cos.\, \omega^3 \end{array} \right\}$$

équation qui, comparée avec l'équation (B)

$$ddt = c\, du^2 + 2\, e\, du\, dv + f\, dv^2,$$ donne

$$c = [m\, cos.\, \pi^2 - 2n\, sin.\, \pi\, cos.\, \pi + f\, sin.\, \pi^2]\, cos.\, \omega,$$
$$e = [n\, (cos.\, \pi^2 - sin.\, \pi^2) + (m - f)\, sin.\, \pi\, cos.\, \pi]\, cos.\, \omega^2;$$
$$f = [m\, sin.\, \pi^2 + 2n\, sin.\, \pi\, cos.\, \pi + f\, cos.\, \pi^2]\, cos.\, \omega^3.$$

Mais si l'on fait attention que les angles π & ω dépendant de la position du plan tangent, on a :

$$sin.\, \pi = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}};\ sin.\, \omega = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$
$$cos.\, \pi = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}};\ cos.\, \omega = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

les valeurs de c, e, f deviendront :

$$c = \frac{m\, q^2 - 2\, n\, p\, q + f\, p^2}{(p^2 + q^2)\sqrt{1 + p^2 + q^2}};$$
$$e = \frac{(m - f)\, p\, q - n\, (p^2 - q^2)}{(p^2 + q^2)(1 + p^2 + q^2)};$$
$$f = \frac{m\, p^2 + 2\, n\, p\, q + f\, q^2}{(p^2 + q^2)(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}};\qquad C.\ Q.\ F.\ T.$$

29.

29. Les valeurs que nous venons de trouver pour c, e, f, donnent :

$c+f=\frac{m(1+q^2)-2npq+f(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$; $e^2-cf=\frac{n^2-mf}{(1+p^2+q^2)^2}$;

soit fait pour abréger :

$m(1+q^2)-2npq+f(1+p^2)=\mathrm{U}$; $n^2-mf=\mathrm{V}$;

$\sqrt{1+p^2+q^2}=\mathrm{K}$, nous aurons $c+f=\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{K}^3}$; $e^2-cf=\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{K}^4}$. Mais les valeurs des rayons de Courbure sont :

$$r=\frac{2}{c+f+\sqrt{(c+f)^2+4(e^2-cf)}};$$

$$\rho=\frac{2}{c+f-\sqrt{(c+f)^2+4(e^2-cf)}};$$

ou, mettant pour $c+f$ & e^2-cf, ce que nous venons de trouver, il vient $r=\frac{2\mathrm{K}^3}{\mathrm{U}+\sqrt{\mathrm{U}^2+4\mathrm{V}\mathrm{K}^2}}$; $\rho=\frac{2\mathrm{K}^3}{\mathrm{U}-\sqrt{\mathrm{U}^2+4\mathrm{V}\mathrm{K}^2}}$.

30. Il se présente ici une ambiguité à lever : K est une quantité radicale, dont par conséquent le signe n'est pas décidé. Mais il est évident que cette quantité $\mathrm{K}=\sqrt{1+p^2+q^2}$ n'est entrée dans le calcul, que parce qu'elle entre dans l'expression de $cos.\ \omega=\frac{1}{\mathrm{K}}$; or il est aisé de voir que $cos.\ \omega$ doit toujours représenter une quantité positive. Car tant que le point N sera au dessus du plan tangent, ou, ce qui revient au même, tant que t sera positive, Nt sera plus grande que Mu, c'est-à-dire, que Nv qui est l'excès de Nt sur Mu, sera positive. De même quand t sera négative, Nt sera moindre que Mu, ou Nv sera négative; donc Nv est toujours de même signe que t. Mais nous avons écrit N$v=t\ cos.\ \omega$, $cos.\ \omega$ doit donc être toujours pris positivement dans cette équation; donc K doit l'être aussi.

31. Les expressions de nos rayons de Courbure étant maintenant transformées, il nous reste à faire la même opération sur les équations de l'axe de rotation que nous avons données (11). Pour cela, remarquons que si nous nommons x', y', z' les coordonnées de chaque point de cet axe par rapport aux axes

principaux OB, OC, OD, & u, v, t ſes coordonnées par rapport au plan tangent, les équations (F), (G), (H) ont lieu; mais ces équations donnent, après avoir mis pour les *ſinus* & *coſinus*, leurs valeurs

$$u = \frac{q(x'-x)-p(y'-y)}{\sqrt{p^2+q^2}};$$

$$v = \frac{(z'-z)(p^2+q^2)+p(x'-x)+q(y'-y)}{\sqrt{p^2+q^2}\ \sqrt{1+p^2+q^2}};$$

$$t = \frac{z'-z-p(x'-x)-q(y'-y)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Mettant ces expreſſions dans les équations de l'axe, ainſi que les valeurs transformées de c, e, f, on aura les équations ſuivantes pour déterminer la poſition des deux axes qui conviennent à un élément donné :

$$[z'-z-p(x'-x)-q(y'-y)][U\mp\sqrt{U^2+4VK^2}]=2K^3;$$

$$\frac{(z'-z)(p^2+q^2)+p(x'-x)+q(y'-y)}{q(x'-x)-p(y'-y)} = \frac{2[mp^2+2npq+fq^2]-(p^2+q^2)[U\mp\sqrt{U^2+4VK^2}]}{2(m-t)pq-n(p^2-q^2)};$$

dans leſquelles x, y, z ſont les coordonnées de l'élément auquel appartient l'axe dont il s'agit.

Au moyen de ces formules, on connoîtra la Courbure d'une ſurface en un point quelconque, en ſubſtituant pour p, q, m, n, t leurs valeurs données par l'équation de la ſurface & ſes différentielles; nous croyons inutile de multiplier les exemples; c'eſt pourquoi nous nous contenterons de celui qui ſuit.

EXEMPLE.

32. Appliquer les formules des rayons de Courbure à une ſurface de révolution.

FIGURE 5. Soient OB, OC, OD (*fig.* 5.) les trois axes des coordonnées, & ſuppoſons de plus que OD ſoit l'axe autour duquel eſt engendrée la ſurface que nous conſidérons. Soit N

le point dont il s'agit, dont nous nommons les coordonnées OQ, QR, RN, x, y, z respectivement. Cela posé, l'équation des surfaces de révolution est $z =$ fonct. $(x^2 + y^2)$, par conséquent on a $dz = P(xdx + ydy)$; $dP = Q(xdx + ydy)$; P & Q étant des fonctions de $(x^2 + y^2)$, on a par conséquent (28) $p = Px$; $q = Py$; $m = P + Qx^2$, $n = Qxy$; $s = P + Qy^2$; ainsi mettant dans U, V & K ces valeurs pour p, q, m, n, s, on auroit les expressions des rayons de Courbure. Mais, pour abréger, nous allons reprendre les valeurs :

$$r = \frac{2}{c + f + \sqrt{(c - f)^2 + 4e^2}}\,;\ \rho = \frac{2}{c + f - \sqrt{(c - f)^2 + 4e^2}},$$

& mettre dans c, e, f les valeurs que nous venons de trouver, il vient : $c = \frac{P}{\sqrt{1 + P^2(x^2 + y^2)}}$; $e = 0$; $f = \frac{P + Q(x^2 + y^2)}{[1 + P^2(x^2 + y^2)]^{\frac{3}{2}}}$;

ainsi : $r = \frac{1}{c} = \frac{\sqrt{1 + P^2(x^2 + y^2)}}{P}$; $\rho = \frac{1}{f} = \frac{[1 + P^2(x^2 + y^2)]^{\frac{3}{2}}}{P + Q(x^2 + y^2)}$;

expressions qui ne dépendent plus que de P & de Q, c'est-à-dire, de la nature de la courbe génératrice.

Soit coupée notre surface par un plan passant par l'axe & par le point N, la section XNV ne sera évidemment autre chose que la courbe génératrice, dont on pourra regarder OR, RM comme les coordonnées. Soit $OR = u$, par conséquent $x^2 + y^2 = u^2$, les équations $dz = P(xdx + ydy)$, $dP = Q(xdx + ydy)$ deviendront $dz = Pudu$; $dP = Qudu$, par conséquent $ddz = du^2(P + qu^2)$. (Nous traitons du comme constant, parce que tout le long de la ligne OR, on a $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, expression qui est constante, puisque dx & dy ont été supposés tels). Si on nomme ds l'élément de la courbe, on a $ds = du\sqrt{1 + P^2u^2}$. Tout cela nous donne : $P = \frac{dz}{udu}$; $P + Qu^2 = \frac{ddz}{du^2}$, & $\sqrt{1 + P^2u^2} = \frac{ds}{du}$, donc $r = \frac{\sqrt{1 + P^2u^2}}{P} = \frac{uds}{dz}$; & $\rho = \frac{[1 + P^2u^2]^{\frac{3}{2}}}{P + Qu^2} = \frac{ds^3}{duddz}$, mais $\frac{uds}{dz}$ est évidemment la normale NS, & $\frac{ds^3}{duddz}$ le rayon de Courbure de la courbe XY au point N; donc *les deux rayons de Courbure en un point quelconque d'une ſurface de révolution ſont, l'un le rayon de Courbure de la courbe génératrice au même point, l'autre la portion de la normale compriſe entre la courbe & l'axe de rotation.*

33. Les caractères analytiques des différens états des ſurfaces que nous avons donnés (27), ſont ſuſceptibles d'être auſſi transformés par rapport à des axes quelconques. Pour cela, remarquons que K étant une quantité poſitive, $c+f$ & U ſont toujours de même ſigne, ainſi que $e^2 - cf$ & V (29). Donc une ſurface eſt :

Concave........	par-tout où l'on a:........	$V < 0$ & $U > 0$.
Convexe........		$V < 0$ & $U < 0$.
Convexo-concave........		$V > 0$ & $U > 0$.
Concavo-convexe........		$V > 0$ & $U < 0$.

Paſſons maintenant à des applications de notre théorie, à la ſolution de pluſieurs problêmes.

Il eſt ſuffiſamment démontré par tout ce qui a précédé, qu'on ne peut pas dire généralement qu'un élément quelconque de ſurface peut être regardé comme une portion de ſphère, idée qui vient aſſez communément à ceux qui commencent à ſonger à cette matière; il faudroit, pour qu'elle fût vraie, que nos deux rayons de Courbure fuſſent toujours égaux, & il eſt évident que cela n'eſt pas; mais il eſt poſſible qu'il y ait une claſſe de ſurfaces qui jouiſſe de cette propriété, & il eſt intéreſſant de la connoître; c'eſt pourquoi nous allons réſoudre le problême ſuivant.

PROBLÊME III.

34. *Déterminer quelles ſont les ſurfaces pour leſquelles les deux rayons de Courbure ſont toujours égaux.*

Solution. Les expreſſions des deux rayons de Courbure ne diffèrent que par les ſignes qui affectent un même radical dans l'une & dans l'autre ; si donc ce radical étoit nul, ces expressions seroient égales : donc (29) $V^2 + 4\,V\,K^2 = 0$ est l'équation de la classe de surfaces que nous cherchons. Ainsi, développant U, V & K, & intégrant, s'il est possible, l'équation aux différences partielles qui en résulte, on aura la solution du problême proposé.

Mais une remarque fort simple va rendre cette recherche bien moins difficile. Rappelons-nous que le radical qui affecte les premières valeurs de r & ρ est (9) $\sqrt{(c-f)^2 + 4\,e^2}$, & qu'ainsi la condition demandée sera remplie si on fait $(c-f)^2 + 4\,e^2 = 0$. Or cette quantité est la somme de deux carrés ; ainsi elle ne sauroit être zéro, à moins que chacun d'eux ne le soit. Nous avons donc les deux équations $c = f$, $e = 0$, au lieu d'une. $e = 0$ donne (28) $(m - f)\,p\,q - n\,(p^2 - q^2) = 0$, d'où l'on tire $m = \frac{n\,(p^2 - q^2) + f\,p\,q}{p\,q}$, ou $f = \frac{m\,p\,q - n\,(p^2 - q^2)}{p\,q}$, valeurs qui, substituées successivement dans l'équation $c = f$, donnent : $\frac{n}{p} = \frac{f\,q}{1 + q^2}$; & $\frac{n}{q} = \frac{m\,p}{1 + p^2}$; mais souvenons-nous que $m = \left(\frac{d\,p}{d\,x}\right)$, $n = \left(\frac{d\,p}{d\,y}\right) = \left(\frac{d\,q}{d\,x}\right)$, $f = \left(\frac{d\,q}{d\,y}\right)$, nos équations deviendront : $\frac{d\,p}{p} = \frac{q\,d\,q}{1 + q^2}$; $\frac{d\,q}{q} = \frac{p\,d\,p}{1 + p^2}$, dans la première desquelles les différences $d\,p$, $d\,q$ sont prises en ne faisant varier que y, tandis que, dans la seconde, on ne fait varier que x ; nous pouvons donc intégrer ces équations comme à l'ordinaire, pourvu que nous complétions l'intégrale de la première par une fonction de x, & celle de la deuxième par une fonction de y. Nous aurons par ce moyen : $p^2\,X = 1 + q^2$; $q^2\,Y = 1 + p^2$, X étant une fonction de x, & Y une fonction de y. Nous tirons de là $p = \sqrt{\frac{Y + 1}{XY - 1}}$; $q = \sqrt{\frac{X + 1}{X\,Y - 1}}$: or $\left(\frac{d\,p}{d\,y}\right) = \left(\frac{d\,q}{d\,x}\right)$ effectuant les différenciations indiquées, & réduisant, il vient : $\frac{d\,X}{d\,x\,(X + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d\,Y}{d\,y\,(Y + 1)^{\frac{3}{2}}}$; dans cette égalité, les fonctions de x ne sont point mêlées avec les fonctions de y ; par conséquent elle ne sauroit avoir lieu, à moins que les deux membres ne soient égaux à une constante : soit 2 A cette constante, on aura donc $\frac{dX}{2(X+1)^{\frac{3}{2}}} = A\,d\,x$; $\frac{dY}{2(Y+1)^{\frac{3}{2}}} = A\,d\,y$; intégrant & tirant les valeurs de X & Y, on aura: $X = \frac{1-(Ax+B)^2}{(Ax+B)^2}$; $Y = \frac{1-(Ay+C)^2}{(Ay+C)^2}$, mettant ces valeurs dans celles de p & q, & nous rappelant que $dz = p\,dx + q\,dy$, il viendra $A\,d\,z = \frac{-(Ax+B)A\,dx-(Ay+C)A\,dy}{\sqrt{1-(Ax+B)^2-(Ay+C)^2}}$, intégrant, nous aurons $Az+D = \sqrt{1-(Ax+B)^2-(Ay+C)^2}$, ou bien $1 = (Ax+B)^2 + (Ay+c)^2 + (Az+D)^2$.

Cette équation est celle de la sphère; d'où il suit qu'*il n'y a que la sphère qui jouit de cette propriété, que les deux rayons de Courbure sont toujours égaux.*

PROBLÊME IV.

35. *Entre toutes les surfaces qu'on peut faire passer par un périmètre donné, formé par une courbe à double Courbure, trouver celle dont l'aire est la moindre.*

FIGURE 6. SOLUTION. Soit en A (*fig.* 6.) un élément de la surface demandée, F f l'axe de rotation qui convient à cet élément; soient menés deux plans infiniment voisins perpendiculaires l'un & l'autre à l'axe F f, & qui comprennent entre eux l'élément dont il s'agit. Supposons que H, K sont les deux points où ces plans coupent l'axe F f, & qu'ils font dans notre surface les sections U V, XY. Si l'on fait attention à la génération que nous avons démontrée propre à tout élément de surface, on verra que les portions infiniment petites A D, BE des courbes U V, XY, prises dans le voisinage du point A, peuvent être regardées comme deux élémens de cercle du même rayon; & ayant leurs centres en H & K, maintenant je dis qu'une portion quelconque de la zone comprise entre les courbes U V, X Y, doit être un *minimum*; donc si l'on mène par l'axe F f deux nouveaux plans infiniment voisins qui comprennent entre eux l'élément dont nous parlons, il

faut que la portion de surface renfermée entre ces deux plans & les Courbes AD, BE soit la moindre qu'il est possible.

Cela posé, soient ABHK, DEHK les portions des deux derniers plans qui sont comprises entre les premiers ; soit partagée HK en deux parties égales au point I, & soit menée IR parallèle à AH & BK, il existe (7) sur cette ligne un point C, d'où, comme centre décrivant un élément de cercle ArB, ce petit arc de cercle, en tournant autour de Ff, engendrera l'élément de surface dont il s'agit ; nous pouvons donc dire que notre élément de surface est égal au produit de l'arc ArB par le chemin que parcourroit son centre de gravité dans l'angle formé par les plans AK, DK. Ce produit doit donc être un *minimum* ; mais le chemin parcouru par le centre de gravité est proportionnel à sa distance à l'axe Ff ; ainsi soit g ce centre de gravité, on doit avoir $ArB \times gI =$ *minimum*. Cela posé, il est évident que rC rayon de l'arc générateur, & rI distance de cet arc à l'axe de rotation, sont les deux rayons de Courbure de l'élément dont il s'agit : nous prendrons donc $rC = r$, $rI = \rho$; soit de plus $BK = uI = a$, $Bu = \omega$, maintenant $ArB \times gI = ArB \times gC + ArB \times CI$; mais on sait, par les formules de statique, que $ArB \times gC = AB \times CR = 2r\omega$.

De plus, si l'on fait usage de la série par laquelle un arc de cercle est exprimé en valeur de l'ordonnée qui lui appartient, & qu'on n'en prenne que les deux premiers termes, à cause de l'infinie petitesse de ω (qui est ici l'ordonnée de l'arc rB, ru étant l'abscisse), on aura $rB = \omega + \frac{\omega^3}{6r^2}$; donc $ArB = 2\omega + \frac{\omega^3}{3r^2}$, de plus $CI = \rho - r$; donc $ArB \times gI = 2r\omega + (\rho - r)\left(2\omega + \frac{\omega^3}{3r^2}\right) = \omega\left[2\rho + \frac{(\rho - r)\omega^2}{3r^2}\right] =$ *minimum* ; donc $2d\rho + \frac{(d\rho - dr)r^2\omega^2 - 2r(\rho - r)\omega^2 dr}{3r^4} = 0$ ou $d\rho[6r^4 + r^2\omega^2] + \omega^2 dr[r^2 - 2r\rho] = 0$. Mais l'équation du cercle donne $ru = \frac{\omega^2}{2r}$; ainsi, à cause de $rI = BK + ru$, nous aurons $\rho = a + \frac{\omega^2}{2r}$, & par conséquent $d\rho = -\frac{\omega^2 dr}{2r^2}$, mettant pour

$d\rho$ cette valeur, & réduisant, nous avons $r+\rho=0$, ou $r=-\rho$. Donc, *la surface de moindre étendue entre ses limites a cette propriété, que chaque elément a ses deux rayons de Courbure de signe contraire & égaux.*

Mettant dans l'équation $r=-\rho$ pour r & ρ leurs valeurs, il vient $U=0$, ou $m(1+q^2)-2npq+f(1+p^2)=0$, équation demandée de la surface en question, qui, traduite ainsi en différences partielles

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)\left[1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]-2\left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)+\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]=0,$$

est la même que celle qu'on trouve par les méthodes ordinaires des *maxima* & *minima.*

36. On ne sait point intégrer cette équation, on ne connoît même, que je sache, qu'une seule surface qui y satisfasse, savoir, le plan, dans le cas où le périmètre par lequel doit passer la surface est une courbe plane. Je vais donner deux surfaces autres que le plan, qui jouissent de la propriété mentionnée.

37. Une de ces surfaces se trouve en supposant que l'équation $m(1+q^2)-2npq+f(1+p^2)=0$ provienne des deux suivantes $mq^2-2npq+fp^2=0$; $m+f=0$. On sait que la première de ces équations est celle qui appartient à toutes les surfaces engendrées par le mouvement d'une droite horizontale, comme l'a démontré M. Monge; ainsi la surface qui satisfait aux deux à la fois, est entre celles engendrées par le mouvement d'une droite horizontale, celle qui a de plus la propriété d'être de moindre étendue.

La deuxième équation donne $m=-f$ ou $f=-m$; substituant l'une & l'autre valeur dans la première équation, on obtient les suivantes : $f(p^2-q^2)-2npq=0$; & $m(q^2-p^2)-2npq=0$; qu'on peut mettre sous cette forme : $dq(p^2-q^2)-2pq\,dp=0$, & $dp(q^2-p^2)-2pq\,dq=0$, les différences dans la première étant prises, en ne faisant varier que y, & dans la seconde, en ne faisant varier que x.

Ces

Ces équations étant homogènes l'une & l'autre, s'intègrent fort simplement; complétant l'intégrale de la première par une fonction de x, celle de la deuxième par une fonction de y, on a $q\,X = p^2 + q^2$, & $p\,Y = p^2 + q^2$, ce qui donne $p = \frac{X^2\,Y}{X^2 + Y^2}$; $q = \frac{X\,Y^2}{X^2 + Y^2}$, valeurs qui, mises l'une & l'autre dans l'équation $d\,z = p\,d\,x + q\,d\,y$, la font devenir $d\,z = \frac{X^2\,Y\,dx + X\,Y^2\,dy}{X^2 + Y^2}$; mais on doit avoir $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$, ce qui donne, toute réduction faite, $-\frac{dX}{X^2\,dx} = \frac{d\,Y}{Y^2\,dy}$; équation dans laquelle les fonctions de x n'étant point mêlées avec celles de y, il s'ensuit que chaque membre est constant: on a donc $-\frac{dX}{X^2\,dx} = A$, $\frac{d\,Y}{Y^2\,dy} = A$; on tire de là $X^2\,d\,x = -\frac{d\,X}{A}$; $Y^2\,d\,y = \frac{d\,Y}{A}$ mettant ces valeurs dans celle de $d\,z$, elle devient $A\,d\,z = -\frac{Y\,dX + X\,dY}{X^2 + Y^2} = d.$ Arc. *tang.* $-\frac{X}{Y}$. On a de plus $-\frac{dX}{X^2} = A\,d\,x$; $\frac{dY}{Y^2} = A\,d\,y$, donc $\frac{1}{X} = A\,x + B$; $-\frac{1}{Y} = A\,y + C$, ainsi $-\frac{X}{Y} = \frac{A\,y + C}{A\,x + B}$, donc $A\,z = F +$ Arc. *tang.* $\frac{A\,y + C}{A\,x + B}$, équation de la surface dont il s'agit.

Qu'on imagine cette surface coupée par un plan horizontal, c'est-à-dire, qu'on fasse z constant, on aura $\frac{A\,y + C}{A\,x + B}$ aussi constant; d'où il suit qu'alors la relation qu'il y a entre y & x est exprimée par une équation du premier degré; d'où il suit encore que la section faite dans cette surface, par un plan quelconque horizontal, est une ligne droite: ceci confirme ce que nous avons dit, que cette surface est de nature à être engendrée par le mouvement d'une droite horizontale.

Puisque la quantité $\frac{A\,y + C}{A\,x + B}$ est constante quand z est constant, nous pouvons supposer $\frac{A\,y + C}{A\,x + B} = Z$, Z étant fonction de z. Cela posé, considérons la ligne droite génératrice dans deux positions infiniment voisines, & cherchons le point où se coupent les projections de ces deux positions de la ligne génératrice. Pour cela, je remarque qu'au point où se fait cette intersection, z varie sans que x ni y varient. Je transforme donc ainsi l'équation ci-dessus $Ay + C = (Ax + B)Z$, & je la différencie en ne faisant varier que Z; il vient $o = (Ax + B)dZ$, ce qui ne sauroit être, à moins qu'on n'ait $Ax + B = o$: il suit de là qu'on a $Ay + C = o$; ainsi $x = -\frac{B}{A}$, $y = -\frac{C}{A}$ sont les coordonnées du point où se coupent les deux projections.

Ces coordonnées sont constantes; donc toutes les projections des différentes positions de la ligne génératrice se coupent en un même point.

FIGURE 7. Soit donc (*fig.* 7.) pris $OE = -\frac{B}{A}$, $EA = -\frac{C}{A}$, le point A est celui où se coupent toutes les projections. Si donc l'on élève au point A l'axe vertical AF, la ligne génératrice se meut de manière à couper toujours l'axe AF.

Transportons l'origine en A; pour cela, menons les axes Ab, Ac, les nouvelles coordonnées d'un point N de la surface seront Ap, pM : MN restant la même; soit $Ap = x'$, $pM = y'$, nous aurons évidemment AP, ou $x = x' - \frac{B}{A}$, PM ou $y = y' - \frac{C}{A}$; mettant ces valeurs de x & y, il viendra $Az = F + \text{Arc. } tang. \frac{y'}{x'}$.

Soit menée AM qui est la projection de la droite génératrice quand elle passe par N, & soit nommé u l'angle MAC; il est clair que $\text{Arc. } tang. \frac{y'}{x'} = u$; donc $Az = F + u$, équation polaire de notre surface.

Cela posé, il est évident que les accroissemens de z sont proportionnels à ceux de u; donc la droite génératrice s'élève le long de l'axe AF en même temps qu'elle tourne autour du même axe, de manière que son mouvement de rotation est proportionnel à son mouvement d'ascension.

Ainſi un point quelconque r de cette droite décrit une *hélice* $Grtx$, &c. qui eſt la même courbe que celle qui forme le filet d'une vis.

Quand la droite génératrice a fait un tour entier, elle s'eſt élevée d'une quantité $r\,x$, qu'on peut appeler le *pas* de l'hélice. Il eſt clair que z croît de cette quantité, quand l'accroiſſement de u eſt égal à la circonférence entière. Si donc on nomme P le pas, & π la circonférence, on aura $A(z+P) = F+u+\pi$, d'où ſouſtrayant $A\,z = F+u$, il vient $A = \frac{\pi}{P}$; d'où il ſuit que que la conſtante A dépend du pas de l'hélice. Quant à la conſtante F, il eſt évident qu'elle dépend du point G, où l'hélice ſort du plan horizontal.

Il ſuit de tout cela, que ſi l'on prend une portion quelconque de la ſurface que nous venons de trouver, elle eſt un *minimum* entre ſes limites.

37. Un autre exemple de la ſurface de moindre étendue, eſt quand elle eſt en même temps ſurface de révolution. Pour trouver fort ſimplement de quelle nature elle eſt, rappelons-nous que nous avons démontré que, dans une ſurface de révolution, les deux rayons de Courbure ſont l'un celui de la courbe génératrice au même point, l'autre la normale à cette courbe; mais la ſurface de moindre étendue doit avoir ſes deux rayons de Courbure égaux & de ſignes contraires ; il faut donc que la courbe génératrice tourne ſa convexité vers l'axe de rotation, & que ſon rayon de Courbure ſoit par-tout égal à la normale.

Soit donc (*fig.* 8.) AD l'axe de rotation, ſoit CME la courbe génératrice que nous demandons. Son rayon de Courbure en un point quelconque M doit être égal à la normale MQ. Ainſi faiſons $AP = x$; $PM = y$ l'élément de la courbe $= ds$, nous aurons le rayon de Courbure $RM = \frac{ds^3}{dx\,ddy}$, la normale $MQ = \frac{y\,ds}{dx}$; donc à cauſe de $RM = MQ$, on a FIGURE 8.

$\frac{ds^2}{ddy} = y$. Soit $dy = p\,dx$, nous aurons $ddy = dp\,dx$; ainsi notre équation devient $\frac{(1+p^2)\,dx}{dp} = y$, ou mettant pour dx sa valeur $\frac{dy}{p}$, il vient $\frac{dy}{y} = \frac{p\,dp}{1+p^2}$; donc intégrant & complétant l'intégrale, on aura $A^2\,y^2 = 1 + p^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dx^2}$, d'où suit l'équation $A\,dx = \pm \frac{A\,dy}{\sqrt{A^2\,y^2 - 1}}$, dont l'intégrale est

$$A\,x = B \pm \log.\left(A\,y + \sqrt{A^2\,y^2 - 1}\right).$$

Cette équation est celle de la chaînette rapportée à un axe horizontal, distant de son point le plus bas de la quantité $\frac{1}{A}$, c'est-à-dire, que la chaînette tournant autour de cet axe, engendre une surface de moindre étendue.

Si étant donnés deux cercles parallèles, & dont les centres soient sur un même axe perpendiculaire au plan de chacun, on propose de faire passer par les deux circonférences la moindre surface possible, la question se trouve résolue ici; il n'y a qu'à prendre B D égale à la distance qu'il y a entre les deux cercles B C, D E égales à leurs rayons, & déterminer les constantes A & B, de façon que la courbe que nous avons trouvée passe par les points C & E, la surface engendrée par la portion C M E de la courbe sera évidemment celle qu'on demande.

Il étoit aisé de prévoir que la courbe C M E devoit être la chaînette. Car cette courbe devant être entre toutes celles qui passent par les points C & E, celle qui engendre la moindre surface de révolution doit, à plus forte raison, jouir de cette propriété entre ses isopérimètres; or on sait que la chaînette est la courbe qui, entre ses isopérimètres, engendre la moindre surface de révolution : la courbe que nous cherchons devoit donc être une chaînette; mais il falloit résoudre le problême, comme nous avons fait, pour savoir particulièrement autour de quel axe une chaînette donnée devoit tourner, pour satisfaire à la question.

PROBLÊME V.

38. *Trouver l'équation générale des surfaces développables.*

Solution. Une surface développable peut être regardée comme engendrée par le mouvement d'une ligne droite, dont deux positions consécutives sont dans un même plan; soient donc (*fig. 9.*) MN, OP, QR trois positions infiniment voisines de la droite génératrice. Il est clair que, par un point quelconque A, on peut mener sur la surface une ligne droite, savoir, OP; il y a donc un sens suivant lequel la Courbure est nulle. J'ajoute qu'il n'y en a qu'un; car s'il y avoit un autre sens $x\,y$, dans lequel la Courbure fût nulle, c'est-à-dire, que les trois points voisins x A y fussent dans une même droite, il s'ensuivroit que, les trois droites MN, OP, QR seroient dans le même plan, qu'ainsi la surface engendrée seroit plane; donc généralement, dans toutes surfaces développables, il y a un sens unique, dans lequel la Courbure est nulle; donc un des rayons de Courbure est infini (25). Cette condition donne $V = 0$, ou $u^2 - m\int = 0$, ou $\left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right)^2 - \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = 0$, équation qui est précisément la même que celle que M. Monge a donnée le premier, dans un très-beau Mémoire sur les Ombres & les Pénombres, lu à l'Académie en 1775. FIGURE 9.

39. Ceci nous donne occasion de dire un mot des surfaces engendrées de même par le mouvement d'une ligne droite; mais deux positions infiniment voisines quelconques de cette droite n'étant pas dans un même plan, surface qu'on nomme surfaces *gauches*. Pour cette espèce de surfaces, je dis qu'il y a toujours, sur un élément quelconque, deux sens, dans lesquels la Courbure est nulle; il est évident d'abord que si l'on considère l'élément qui est en A, la Courbure est nulle dans le sens OP.

Maintenant qu'on imagine, par le point A, deux plans passant, l'un par la ligne MN, l'autre par la ligne QR; ces deux plans ſe coupent quelque part; car s'ils ne ſe coupoient pas, les droites infiniment voiſines MN, QR ſeroient dans un même plan, ce qui eſt contre la ſuppoſition Ils ne ſe coupent pas ſuivant PO, car alors les droites OP, MN ſeroient dans un même plan, ainſi que les droites OP, QR, ce qui eſt encore contre la ſuppoſition. Ils ſe coupent donc ſuivant une ligne $x\,y$ (que je fais paſſer par le point A, parce qu'il eſt commun aux deux plans); mais leur interſection $x\,y$ coupe évidemment les droites MN, RP, quelque part en x & y. Il exiſte donc ſur les trois droites MN, OP, QR trois points x, A, y en ligne droite; donc la Courbure eſt encore nulle dans le ſens $x\,y$. Or nous avons vu (22) que quand, dans un élément de ſurface, il y a deux ſens ſuivant leſquels la Courbure eſt nulle, alors les deux rayons de Courbure ſont de ſignes contraires; donc: *Dans toutes ſurfaces gauches, les deux rayons de Courbure ſont de ſignes contraires.*

On pourroit faire bien d'autres applications de cette Théorie; il y a entre autres une queſtion importante qui en dépend bien immédiatement, c'eſt celle des inflexions & des rebrouſſemens dans les ſurfaces courbes. Nous en réſervons la détermination pour un autre Mémoire; mais on peut remarquer en attendant, que les quantités U & V, qui compoſent preſque uniquement les expreſſions que nous avons données pour les rayons de Courbure, appartiennent auſſi aux équations des ſurfaces développables & de moindre étendue: d'où il ſuit que les propriétés de ces deux claſſes de ſurface ont, avec les réſultats relatifs à la Courbure des ſurfaces en général, des rapports qui ne peuvent qu'être intéreſſans à développer.

Fig. 1.

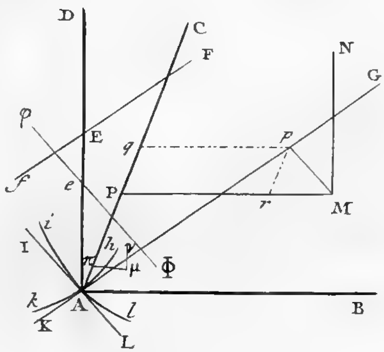


Fig. 2.

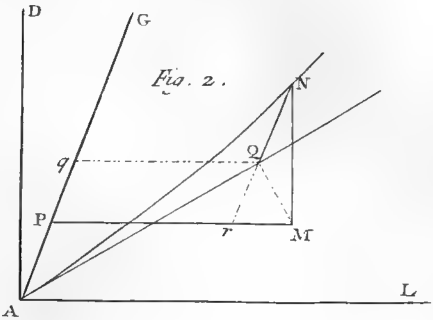


Fig. 3.

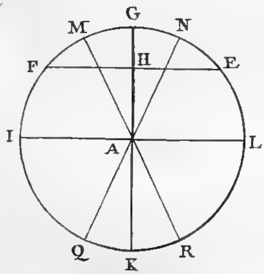


Fig. 4.

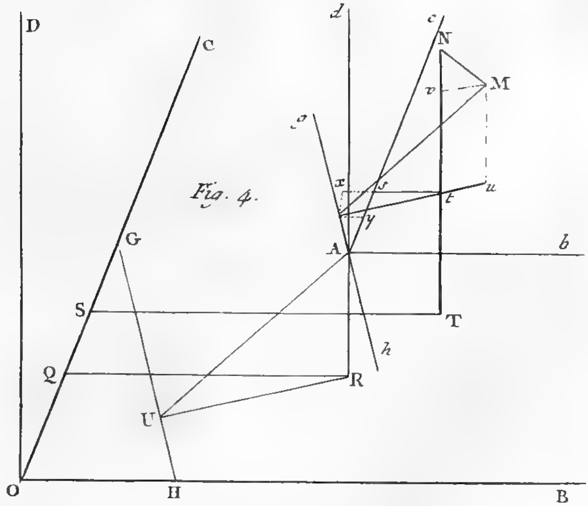
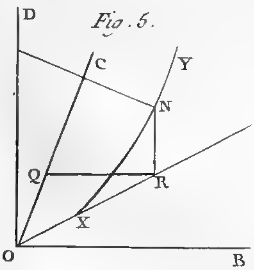


Fig. 5.



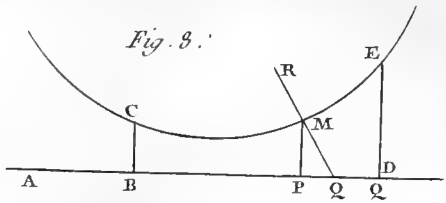


Fig. 8.

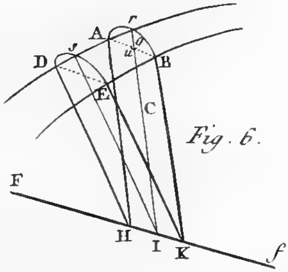


Fig. 6.

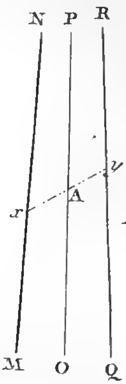


Fig. 9.

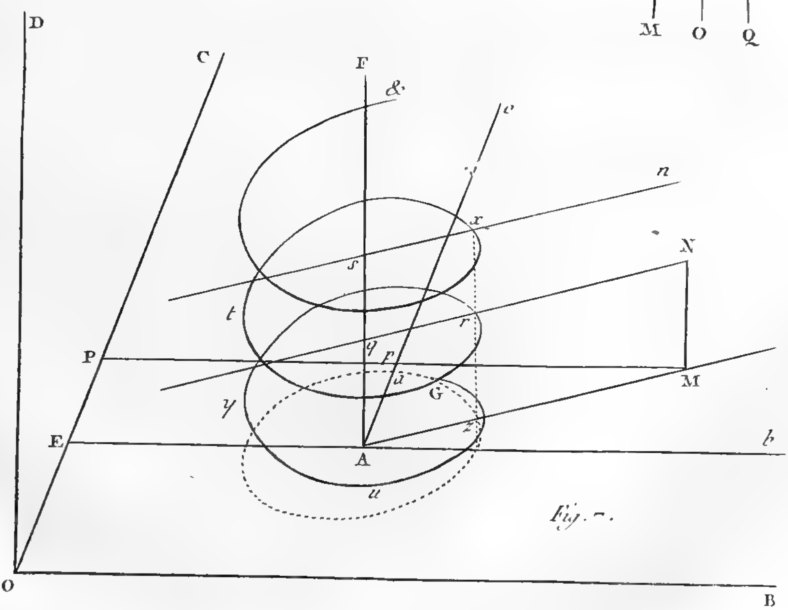


Fig. 7.

Cs Haussard Sculp.

MÉMOIRE

SUR

LES DÉVELOPPÉES, LES RAYONS DE COURBURE, ET LES DIFFÉRENS GENRES D'INFLEXIONS DES COURBES A DOUBLE COURBURE,

Ce Mémoire a été présenté à l'Académie en 1771.

Par M. MONGE, Professeur de l'École du Corps Royal du Génie, & Membre de l'Académie.

TOUT ce que l'on a fait jusqu'à présent sur les Développées des courbes en général, se réduit à avoir trouvé celles des courbes planes ; encore parmi le nombre infini de Développées que peut avoir une courbe plane, n'a-t-on considéré jusqu'ici que celle qui se trouve dans le même plan qu'elle : or je me propose de démontrer, dans ce Mémoire, qu'une courbe quelconque, plane ou à double courbure, a une infinité de

Développées, toutes à double courbure, à l'exception d'une ſeule pour chaque courbe plane, & de donner la manière de trouver les équations de telle de ces courbes qu'on voudra, étant données les équations de la développante. Tout ce qu'on connoît ſur les Développées n'eſt donc qu'un cas particulier de l'objet de ce Mémoire.

I.

Si l'on conçoit une droite menée par le centre d'un cercle perpendiculairement à ſon plan, & prolongée de part & d'autre à l'infini, tout le monde ſait que chacun des points de cette droite ſera à égales diſtances de tous les points de la circonférence; que par conſéquent cette circonférence ſera tout auſſi rigoureuſement décrite, ſi l'on imagine qu'une ſeconde droite, terminée d'une part à un des points de la circonférence, & de l'autre à un point quelconque de la perpendiculaire, tourne autour de cette perpendiculaire comme axe, en faiſant conſtamment le même angle avec elle, que ſi l'on eût fait tourner le rayon autour du centre & dans le plan du cercle. Cette dernière deſcription, qui n'eſt qu'un cas particulier de la première, eſt, à la vérité, plus propre que l'autre à donner idée de l'étendue du cercle, parce qu'alors il ſuffit de donner le rayon pour que le cercle ſoit connu; tandis que par l'autre il ne ſuffit pas de connoître la longueur de la ligne décrivante, il faut que l'on connoiſſe encore ou l'angle qu'elle forme avec l'axe, ou la partie de l'axe compriſe entre le pôle & le plan du cercle, ou enfin quelque choſe d'équivalent, ce qui comporte néceſſairement deux données. Mais tant qu'il ne ſera queſtion que de deſcription dans l'eſpace & non ſur un plan réſiſtant, celle des deux méthodes qui auroit quelque avantage ſur l'autre, ſeroit la générale; parce qu'en prenant ſur l'axe deux pôles placés de part & d'autre du plan du cercle, & menant par ces deux points deux droites qui ſe couperoient en un point de la circonférence, & faiſant enfin mouvoir le ſyſtême de ces deux droites autour de l'axe de manière que leur point d'interſection fût fixe ſur l'une & ſur l'autre, le point décriroit rigou-

reuſement

reusement la circonférence du cercle, sans qu'on eût eu besoin de connoître auparavant le plan dans lequel elle doit se trouver.

II.

Soit KAaD une courbe à double courbure quelconque tracée dans l'espace. Par un point A de cette courbe, soit mené un plan MNOP perpendiculaire à la tangente en A; par le point a infiniment proche, soit pareillement mené un plan mnOP perpendiculaire à la tangente en a, ces deux plans se couperont quelque part en une droite OP qui sera l'axe du cercle, dont le petit arc Aa de la courbe peut être censé faire partie; de manière que si des points A & a on abaisse deux perpendiculaires sur cette droite, ces perpendiculaires, égales entre elles, la rencontreront en un même point G qui sera le centre de ce cercle. Tous les autres points g, g.... &c. de cette droite seront chacun à égales distances de tous les points de l'arc infiniment petit Aa, & pourront par conséquent en être regardés comme les pôles. Ainsi, si d'un point quelconque g de cet axe on mène deux droites aux points A & a, les droites gA & ga seront égales entre elles, & formeront avec l'axe des angles AgO & agO égaux entre eux; en sorte que, 1°. si l'on vouloit définir la courbure de la courbe au point A, il faudroit donner la longueur du rayon AG du cercle osculateur; 2°. si l'on vouloit assigner le sens de la courbure, il faudroit donner la position du centre G dans l'espace. Mais s'il s'agissoit simplement de décrire le petit arc, il seroit également suffisant ou de faire tourner la droite Ag autour de l'axe, sans altérer l'angle AgO qu'elle fait avec lui, ou de faire tourner le rayon AG perpendiculairement à cet axe. FIGURE 1.

III.

Il suit de là, que la droite OP peut être regardée comme la ligne des pôles de l'élément Aa; que le centre G de courbure de cet élément est celui de ses pôles, dont la distance à l'élément est un *minimum*; enfin que son rayon de courbure eſt la perpendiculaire A G, abaiſſée de l'élément ſur la ligne des pôles.

IV.

FIGURE 2. Que l'on faſſe actuellement ſur tous les points de la courbe à double courbure la même opération que nous venons de faire ſur un de ſes élémens, c'eſt-à-dire, que par tous ſes points conſécutifs A, A′, A″, A‴.... l'on faſſe paſſer des plans M N O P, chacun perpendiculaire à la tangente de la courbe, au point dans lequel il la coupe, le premier de ces plans rencontrera le ſecond dans une droite O P, qui ſera le lieu géométrique des pôles de l'arc A A′; le ſecond rencontrera le troiſième dans la droite O′ P′, lieu des pôles de l'arc A′ A″; le troiſième rencontrera le quatrième dans la droite O″ P″, lieu des pôles de l'arc A″ A‴, & ainſi de ſuite. Il eſt évident que le ſyſtême de toutes ces droites d'interſections, ou la ſurface courbe qu'elles forment par leur aſſemblage, ſera le lieu géométrique des pôles de la courbe K A D; car cette courbe n'aura point de pôles qui ne ſe trouvent ſur cette ſurface, & la ſurface n'aura pas de point qui ne ſoit le pôle de quelqu'un des élémens de la courbe.

V.

Quoique la nature de cette ſurface courbe dépende abſolument de celle de la courbe K A D, cependant toutes les ſurfaces engendrées de cette manière jouiſſent d'un caractère général, & indépendant pour chacune d'elles de la courbe particulière qui a ſervi à la former. Ce caractère eſt de pouvoir être développées ſur un plan, comme les ſurfaces coniques & cylindriques à baſes quelconques, ſans duplicature, & ſans ſolution de continuité. En effet, les hedres O P P′ O′ dont eſt compoſée la ſurface de la *figure 2*, ſont des portions de plans infiniment étroites, infiniment longues, & qui ſe coupent conſécutivement ſuivant des lignes droites. Cela poſé, on peut toujours concevoir que la première hedre O P P′ O′ tourne autour de la droite O′ P′ comme charnière, juſqu'à ce qu'elle parvienne dans le plan de l'hedre ſuivante O′ P′ P″ O″ ; qu'enſuite leur ſyſtême tourne autour de O″ P″, & en ne faiſant qu'un même plan juſqu'à ce qu'il ſoit dans le plan de la troiſième O″ P″ P‴ O‴, & ainſi de ſuite ; d'où l'on voit que rien n'empêche que de cette manière tous les élémens de la ſurface ne viennent, ſans rupture, ſe ranger dans un même plan. Donc la ſurface des pôles d'une courbe à double courbure quelconque eſt toujours une ſurface développable.

VI.

THÉORÊME I.

Une courbe quelconque plane ou à double courbure, a une infinité de Développées, dont le lieu géométrique eſt auſſi la ſurface des pôles de cette courbe.

DÉMONSTRATION. Du point A de la courbe par lequel paſſe le premier plan normal MNOP, ſoit menée dans ce plan, & ſuivant une direction arbitraire, une droite A*g* juſqu'à ce qu'elle rencontre la ſection OP quelque part en un point *g* : par les points A′ & *g*, ſoit menée, dans le ſecond plan normal, la droite A′ *g*, prolongée juſqu'à ce qu'elle rencontre la ſection O′ P′ en un point *g*′ : ſoient pareillement menés A″ *g*′ *g*″, & ainſi de ſuite ; je dis que la courbe qui paſſe par tous les points *g g*′ *g*″.... eſt une des Développées de la courbe KAD : car, 1°. toutes les droites A*g*, A′*g*′, A″ *g*″.... ſont les tangentes de la courbe *g g*′ *g*″...., puiſqu'elles ſont les prolongemens des élémens de cette courbe. 2°. Si l'on conçoit que la première A*g* tourne autour du point *g* pour venir s'appliquer ſur la ſuivante A′ *g*, elle n'aura pas ceſſé d'être tangente à la courbe *g g*′ *g*″...., & ſon extrémité A, après avoir parcouru l'arc A A′, ſe confondra avec l'extrémité A′ de la ſeconde. Que l'on faſſe de même tourner la ſeconde ligne A′ *g*′ autour du point *g*′ pour qu'elle vienne s'appliquer ſur la troiſième A″ *g*′, elle ne ceſſera pas de toucher la courbe *g g*′ *g*″...., & ſon extrémité A′ ne ſortira pas de l'arc A′ A″, & ainſi de ſuite. Donc la FIGURE 2.

courbe $g\,g'\,g''$ ... eſt telle que ſi l'on conçoit qu'une de ſes tangentes tourne autour de cette courbe ſans jamais ceſſer de lui être tangente, & ſans avoir de mouvement dans le ſens de ſa longueur, un des points de cette tangente décrira la courbe K A D; donc elle eſt une de ſes Développées. Mais la direction de la première droite A g étoit arbitraire, & ſuivant quelque autre direction qu'on l'eût menée dans le plan normal, on auroit trouvé une autre courbe $g\,g'\,g''$.... qui auroit été pareillement une des Développées de la courbe K A D; donc une courbe quelconque a une infinité de Développées toutes compriſes ſur la ſurface développable qui eſt le lieu de ſes pôles: or cette ſurface renferme tous les pôles de la courbe, & eſt par conſéquent la ſeule qui en contienne les Développées; donc elle eſt leur lieu géométrique.

VII.

Remarquons que tous les plans MNOP étant tangens à la ſurface développable, puiſque chacun d'eux eſt le prolongement d'un de ſes élémens, la droite A g, qui, dans tous les inſtans de ſon mouvement, ſe trouve dans un de ces plans, eſt auſſi néceſſairement tangente à cette ſurface.

VIII.

Si du point A l'on abaiſſe ſur O P la perpendiculaire A G du point A' ſur O' P', la perpendiculaire A' G', du point A'' ſur O'' P'', la perpendiculaire A'' G'', & ainſi de ſuite, nous avons vu que les points G, G', G''.... ſeront les centres de courbure des élémens correſpondans de la courbe K A D; que par conſéquent la courbe qui paſſeroit par tous les points G, G', G''.... ſeroit le lieu géométrique de ces centres de courbure. Je dis que cette courbe ne peut être une des Développées de la propoſée, à moins que la propoſée ne ſoit plane, auquel cas elle devient la ſeule dont on ſe ſoit occupé juſqu'à préſent. En effet, lorſqu'une courbe eſt à double courbure, deux tangentes conſécutives, quelque part qu'on les prenne, ſont bien dans un même plan; mais trois tangentes priſes de ſuite ne peuvent plus s'y trouver : donc trois plans conſécutifs, chacun normal à la courbe, ne peuvent pas être perpendiculaires à un même plan, & par conſéquent l'interſection du premier & du ſecond ne ſauroit être parallèle à l'interſection du ſecond & du troiſième. Donc, pour une courbe à double courbure, les droites OP, $O'P'$, $O''P''$.... ne peuvent pas être parallèles.

Cela poſé, la droite AG étant perpendiculaire à OP, la droite $A'G$ lui ſera auſſi perpendiculaire, &, prolongée juſqu'en k, ne rencontrera pas $O'P'$ perpendiculairement; elle ſera par conſéquent diſtincte de la droite $A'G'$ abaiſſée perpendiculairement du point A' ſur $O'P'$. Donc les deux droites conſécutives AG & $A'G'$ ne rencontreront pas la droite OP dans le même point; mais deux droites conſidérées dans des plans différens, ne peuvent ſe rencontrer, à moins que ce ne ſoit ſur l'interſection des deux plans dans leſquels on les conſidère; donc les droites AG & $A'G'$ ne ſe rencontrent pas, & ne ſont par conſéquent pas dans un même plan. Il en eſt de même de la ſuite des droites $A'G'$, $A''G''$, $A'''G'''$.... priſes deux à deux conſécutivement; donc toutes ces droites ne peuvent pas être les tangentes conſécutives d'une même courbe. Il ſuit auſſi de là, que ſi, par deux points conſécutifs G & G', l'on conçoit une droite qui ſera tangente à la courbe $GG'G''$...., cette droite ne paſſera pas par le point A' : or en tant qu'elle eſt ſur le ſecond plan normal, elle ne pourroit couper la courbe KAD que dans le point A', où ce plan la coupe lui-même; donc la courbe $GG'G''$... eſt telle, qu'aucune de ſes tangentes prolongées ne rencontre la courbe KAD; donc elle ne peut être une de ſes Développées.

Si la courbe KAD étoit plane, toutes ſes droites OP, $O'P'$, $O''P''$.... ſeroient perpendiculaires au plan de la courbe, & par conſéquent parallèles entre elles. Les droites AG, $A'G'$, $A''G''$.... ſeroient toutes dans le plan de la courbe, & ſe rencontreroient conſécutivement dans la courbe $GG'G''$...., dont elles feroient les tangentes, & il est évident que cette courbe ne feroit alors autre chofe que ce qu'on a appelé jufqu'à préfent la Développée de la courbe K A D.

IX.

THÉOREME II.

On aura une des Développées d'une courbe quelconque, plane ou à double courbure, fi, par un de fes points, & fuivant une direction arbitraire, on mène une tangente à la furface développable qui eft le lieu de fes pôles, & fi l'on plie librement fur cette furface le prolongement de cette tangente.

FIGURE 2. DÉMONSTRATION. C'eft-à-dire, que la courbe $g\,g'\,g''$.... eft celle que formeroit fur la furface $OPP'''O''$ une droite pliée librement fur cette furface, & dirigée au premier inftant fuivant $A\,g$. Pour le démontrer, obfervons ce qui arrive à une droite, ou à un fil que l'on plie librement fur une furface. Ce fil peut être confidéré ou comme ayant une largeur infiniment petite, c'eft-à-dire, comme un ruban infiniment étroit, ou comme n'ayant aucune largeur. Soit (*fig.* 3 & 4) $OPP''O''$ deux élémens plans ou deux hedres confécutives d'une furface courbe, jointes par la droite infiniment petite $O'P'$. Soit pour le premier cas (*fig.* 3.) ABG un ruban infiniment étroit, appliqué fur un de ces élémens fuivant une direction quelconque; il eft clair que la partie BG ne peut pas fe rapprocher de l'élément fuivant pour s'appliquer fur lui, fans faire une partie de révolution autour de $B\,b$ ou de $O'P'$; & comme cette révolution doit fe faire librement, ce qui comporte que ce ruban doit, dans tous fes points, toucher la furface, l'angle $P'BG$ doit refter conftant; le ruban prendra donc une pofition BC telle que l'angle $P'BC$ fera égal à l'angle $O'BA$. Dans le fecond cas (*fig.* 4.), foit ABC un fil tendu fur l'arête commune $O'P'$ des deux élémens de la furface : comme ce fil n'a aucun mouvement, il doit être également tiré par fes deux extrémités, & l'on pourra prendre de part & d'autre du point B des droites égales BA,

BC pour repréſenter ces tenſions. L'on pourra décompoſer chacune de ces deux forces en deux autres, l'une parallèle & l'autre perpendiculaire à $O'P'$, & en abaiſſant des points A & C perpendiculaires ſur $O'P'$, ces quatre forces ſeront repréſentées par AD, BD, BE & CE; puiſque le fil eſt en équilibre, le point B n'a de mouvement ni vers O' ni vers P'; on aura donc $BD = BE$; donc on aura l'angle $EBC =$ l'angle ABD. De quelque manière donc que l'on conſidère la ligne que forme ſur une ſurface courbe une droite pliée librement, elle doit faire des angles égaux de part & d'autre avec chaque arête que l'on conſidère ſur la ſurface. Or la ligne $g\,g'\,g''$..... (*fig.* 2.) jouit de cette propriété; car on a l'angle $A'\,g'\,O' =$ l'angle $A''\,g'\,O' =$ l'angle $P'\,g'\,g''$; & ce que nous venons de dire par rapport à l'arête $O'P'$, doit auſſi ſe dire par rapport à toute autre arête : donc la courbe $g\,g'\,g''$.... eſt celle que formeroit ſur la ſurface $O\,P\,P'''\,O'''$ une droite pliée librement avec une direction $A\,g$ au premier inſtant. Donc, &c. *C. Q. F. D.*

X.

THÉOREME III.

La courbe que forme une droite pliée librement ſur une ſurface courbe, eſt la plus courte entre ſes extrémités que l'on puiſſe mener ſur cette ſurface.

DÉMONSTRATION. Pour le démontrer, il ſuffit de faire voir que la ligne ABC, ou la ſomme des deux droites $AB + BC$, eſt plus courte que la ſomme de deux autres droites quelconques $AM + MC$, menées par les deux points A & C. Pour cela ſoient $AD = a$, $DE = b$, $EC = c$, & $EM = x$, on aura $MC = \sqrt{c^2 + x^2}$, $AM = \sqrt{a^2 + (b - x)^2}$, & par conſéquent $AM + MC = \sqrt{c^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + (b - x)^2}$, dont la differentielle égalée à zéro, donne $(b - x) : \sqrt{a^2 + (b - x)^2} = x : \sqrt{c^2 - x^2}$: ce qui exprime que, dans le cas du *minimum*, l'angle AMD doit être égal à l'angle EMC; & que FIGURE 4.

réciproquement, lorſque ces angles ſont égaux, la ſomme $AB + BC$ eſt un *minimum*. Donc, &c. *C. Q. F. D.*

X I.

On auroit pu démontrer que chaque Développée eſt la plus courte entre ſes extrémités que l'on puiſſe mener ſur la ſurface développable, par une conſidération beaucoup plus ſimple : car, puiſque l'on a par-tout l'angle $g\,g'\,O' = P'\,g'\,g''$, l'angle $g'\,g''\,O'' = P''\,g''\,g'''$ & ainſi de ſuite, il eſt évident que ſi l'on développe la ſurface développable ſur un plan, la courbe $g\,g'\,g''$.... doit s'étendre en ligne droite; d'où il ſuit immédiatement qu'elle eſt la plus courte entre ſes extrémités qui puiſſe exiſter ſur la ſurface développable. Mais cette démonſtration ne peut avoir lieu que pour les ſurfaces développables; d'ailleurs, ce n'eſt pas là la propriété des Développées qu'il importoit de connoître. Il eſt bien plus utile, dans la pratique, de ſavoir qu'ayant conſtruit la ſurface développable, lieu géométrique des Développées d'une courbe quelconque à double courbure, on a mécaniquement une de ſes Développées, en menant, par un point de la courbe, un fil dans une direction quelconque tangent à cette ſurface, & pliant enſuite librement le fil ſur la ſurface, ce qui eſt ſimple, & ſuit immédiatement du Théorême II.

X I I.

Une courbe plane a donc une infinité de Développées qui ſe trouvent toutes ſur la ſurface du cylindre, qui a pour baſe celle de ces Développées qui eſt dans le plan de la courbe; & toutes ces Développées ſont à double courbure, à l'exception ſeulement de celle dont on s'eſt occupé juſqu'à préſent, & qui ſert de baſe à la ſurface cylindrique.

X I I I.

FIGURE 5. Réciproquement une ſurface cylindrique à baſe quelconque eſt le lieu des Développées d'une infinité de courbes, dont aucune ne peut être à double courbure. Soit en effet $B\,B'\,B''\,B'''$.... une courbe plane quelconque, & $O\,O'\,O''\,O'''$.... ſa Développée plane;

plane : par tous les points B, B′, B″.... &c. ſoient menés dans le plan de la courbe les rayons de Développée BO, B′O′, B″O″.... &c. qui ſe couperont conſécutivement dans la Développée OO′O″O‴.... à laquelle ils feront tangens. Par les points O, O′, O″, O‴.... &c. ſoient menés perpendiculairement au plan de la courbe les droites OP, O′P′, O″P″.... &c. dont l'aſſemblage formera une ſurface cylindrique qui, d'après l'article précédent, ſera le lieu de l'infinité de Développées de la courbe BB′B″B‴.... Par le point B, & ſuivant une inclinaiſon quelconque, ſoit menée ſur OP la droite BP : par les points B′ & P, ſoit menée la droite B′P, prolongée juſqu'à ce qu'elle rencontre O′P′ quelque part en P′ : de même ſoit menée B″P′, prolongée juſqu'à ce qu'elle rencontre O″P″ en P, & ainſi de ſuite ; ou, ce qui revient au même, par le point B′, & ſuivant une direction quelconque BP, ſoit menée une tangente à la ſurface cylindrique, & ſoit librement pliée cette droite ſur la ſurface en PP′P″P‴...., l'on aura une des Développées à double courbure de la courbe plane BB′B″B‴.... Cela poſé, la courbe PP′P″.... eſt bien à la vérité la Développée d'une infinité d'autres développantes que de BB′B″.... ; mais il eſt clair que toutes ces developpantes doivent être compriſes dans la ſurface courbe formée par les rayons de Développées BP, B′P′, B″P″...., & qu'on aura une de ces développantes en alongeant ou diminuant tous ces rayons d'une quantité conſtante B*b*; ainſi les courbes *bb′b″b‴*.... décrites par l'extrémité du rayon de Développée, augmenté ou diminué de la quantité B*b*, ont auſſi, pour une de leurs Développées, la courbe PP′P″P‴.... Or, ſi des points *b*, *b′*, *b″*, *b‴*.... &c. on abaiſſe des perpendiculaires ſur le plan de la courbe BB′B″B‴...., on aura autant de triangles rectangles B*bk*, B′*b′k′*.... &c. égaux entre eux & ſemblables, puiſque tous les rayons de Développées ſont également inclinés à ce plan; donc toutes les perpendiculaires *bk*, *b′k′*, *b″k″*.... ſeront égales : donc tous les points de chaque courbe *bb′b″b‴*.... ſeront à égales diſtances du plan de la première; donc ces courbes ſeront planes : ainſi la courbe PP′P″P‴.... ne peut être la Développée que de courbes planes. Mais ce que l'on vient de dire de la courbe $P P' P'' P'''$.... peut s'appliquer à toute autre décrite de la même manière sur la surface cylindrique; donc une surface cylindrique à base quelconque ne peut être le lieu des Développées que de courbes planes.

XIV.

Toute courbe tracée sur la surface d'une sphère, a pour lieu de ses Développées la surface d'un cône, dont le sommet est au centre de la sphère, & dont la base dépend de la nature de la courbe; car tous les plans perpendiculaires aux élémens de la courbe le sont aussi à la surface sphérique, & passent par conséquent par le centre.

XV.

Réciproquement une courbe quelconque, dont le lieu des Développées est la surface d'un cône à base quelconque, est sphérique, & a pour centre le sommet du cône; car, pour en trouver une Développée, il est indifférent de donnner telle direction qu'on voudra au rayon de Développée, pourvu qu'il soit normal, ou, ce qui revient au même, qu'il soit tangent à la surface conique : on peut donc le diriger au sommet du cône autour duquel il fera une infinité de révolutions sans s'alonger sensiblement, & le point décrivant restera toujours à la même distance de ce sommet.

XVI.

Donc une courbe, qui n'est ni plane ni sphérique, a pour lieu de ses Développées une surface développable, dont deux arêtes rectilignes consécutives se rencontrent bien quelque part, mais dont trois prises de suite ne se rencontrent pas dans un même point. La suite de ces points d'intersections forme une courbe qu'il est fort aisé de reconnoître pour ne devoir jamais être plane, parce qu'alors la surface développable, dont toutes les arêtes ne sont autre chose que les tangentes de cette courbe, seroit réduite à un plan.

XVII.

Donc, 1°. lorsque le lieu des Développées d'une courbe à double courbure aura deux arêtes conſécutives parallèles entre elles, la partie correſpondante de la courbe ſera plane, & réciproquement. 2°. Lorſque trois de ces arêtes conſécutives ſe rencontreront dans le même point, la partie correſpondante de la courbe ſera ſphérique, & ſon centre ſera au point de rencontre des trois arêtes.

Avant que d'aller plus loin, diſons quelque choſe des ſurfaces développables en général.

XVIII.

Il ſuit de tout ce qui précède, que les ſurfaces développables ſont toutes compoſées du ſyſtême d'une infinité de droites prolongées à l'infini, & qui, toutes priſes deux à deux conſécutivement, ſont dans un même plan. Il peut donc arriver ces trois cas, 1°. qu'elles ſoient toutes parallèles entre elles, & alors la ſurface développable eſt cylindrique à baſe quelconque: 2°. qu'elles ſe rencontrent toutes dans un même point; dans ce cas, la ſurface eſt celle d'un cône à baſe quelconque: 3°. enfin, que toutes ſes droites ſe rencontrent deux à deux conſécutivement dans une ſuite de points, dont le ſyſtême forme une courbe à double courbure, à laquelle toutes ces droites ſont tangentes, & c'eſt le cas général des ſurfaces développables. Cette courbe, pour chaque ſurface en particulier, eſt ſingulièrement remarquable, & jouit en général des propriétés ſuivantes.

1°. Cette courbe ſuffit pour déterminer la ſurface développable à laquelle elle appartient, puiſque cette ſurface n'eſt autre choſe que le lieu géométrique de ſes tangentes.

2°. Elle eſt la limite de la ſurface développable, puiſqu'aucune des droites, dont eſt compoſée la ſurface, ne peut paſſer du côté vers lequel cette courbe eſt concave. Ceci s'entendra mieux par un exemple. Que l'on conçoive que toutes les tangentes poſſibles de l'hélice d'une vis ſoient prolongées à l'infini, & forment, par leur ſyſtême, une ſurface développable, cette ſurface aura un nombre infini de *nappes*, & chacune de ces nappes sera d'une étendue infinie, comme les droites dont elle est composée; mais aucune d'elles n'entrera dans le cylindre sur la surface duquel est tracée l'hélice : elles viendront donc toutes se terminer à cette courbe, qui sera par conséquent leur limite.

3°. Cette courbe est, pour la surface développable, ce qu'un point de retroussement est pour une courbe ordinaire : car les tangentes d'une courbe peuvent également être prolongées dans les deux sens, chacune par rapport à son point de contact; or, leurs prolongemens, dans un sens, forment une nappe particulière; leurs prolongemens, dans l'autre sens, forment une nappe distincte de la première, tant que la courbe n'est pas plane, & néanmoins ces deux nappes passent à la fois par la courbe qui est leur limite commune. Cette courbe est donc, à proprement parler, l'*aréte de rebroussement* de la surface développable. C'est aussi le nom que je lui donnerai. J'appellerai donc désormais *aréte de rebroussement* d'une surface développable, la courbe touchée par toutes les droites dont cette surface est composée, ou, pour parler plus rigoureusement, la courbe constamment touchée par la droite qui, en se mouvant, engendre la surface.

Il ne s'agit plus actuellement que d'appliquer l'analyse à tout ce qui précède; & pour cela, établissons d'abord quelques déterminations géométriques qui nous seront nécessaires.

XIX.

PROBLÈME I.

Etant données, 1°. les équations d'une droite située d'une manière quelconque dans l'espace, & rapportées à trois plans rectangulaires, 2°. les trois coordonnées d'un point, trouver l'équation du plan mené par ce point perpendiculairement à la droite.

Solution. Soient $a x + b y + c z + d = 0$,
& $a' x + b' y + c' z + d' = 0$,

les équations données de la droite, & x', y' & z' les coordonnées du point donné. On aura les équations des trois projections de la droite sur les trois plans, en éliminant successivement une des trois variables x, y & z des deux équations précédentes ; ainsi ces trois équations seront

$$[ab' - a'b]y - [ca' - c'a]z + ad' - a'd = 0$$
$$[ca' - c'a]x - [bc' - b'c]y + cd' - c'd = 0$$
$$[bc' - b'c]z - [ab' - a'b]x + bd' - b'd = 0;$$

& si l'on fait, pour abréger,

$$ab' - a'b = \alpha \qquad ad' - a'd = \delta$$
$$ca' - c'a = \beta \qquad cd' - c'd = \varepsilon$$
$$bc' - b'c = \gamma \qquad bd' - b'd = \zeta,$$

elles deviendront

$$\alpha y - \beta z + \delta = 0$$
$$\beta x - \gamma y + \varepsilon = 0$$
$$\gamma z - \alpha x + \zeta = 0.$$

De ces trois équations, deux quelconques supposent la troisième, parce que deux projections d'une droite suffisent pour la déterminer dans l'espace; donc les six quantités α, β, γ, δ, ε & ζ ne sont pas indépendantes les unes des autres : elles doivent être telles que ces trois équations aient lieu à la fois; & on trouvera la relation qu'elles ont entre elles, en multipliant la première par γ, la seconde par α, la troisième par β; & ajoutant, ce qui donne

$$\alpha\varepsilon + \beta + \zeta\gamma\delta = 0;$$

équation qui est identique, & se vérifie par la substitution des valeurs de α, β, γ, δ, ε & ζ.

Cela posé, l'équation générale du plan est

$$Az + By + Cx + D = 0,$$

les quantités A, B, C & D étant des constantes qu'on doit déterminer d'après les conditions auxquelles doit satisfaire la position du plan. Or la première condition est que ce plan passe par le point dont les coordonnées sont x', y' & z', c'est-à-dire, que l'équation doit être telle, qu'en faisant $x = x'$, $y = y'$, elle donne $z = z'$; elle doit donc être

$$A[z - z'] + B[y - y'] + C[x - x'] = 0.$$

Quant aux coëfficiens A, B & C, il faut les déterminer d'après cette autre condition, que le plan soit perpendiculaire à la droite. Pour cela, imaginons, par l'origine, une parallèle à la droite donnée, & concevons que ce soit à cette parallèle que le plan doive être perpendiculaire, ce qui ne change rien à sa position. Les équations des trois projections de cette parallèle se trouveront en supprimant les termes constans de celles de la première droite, & seront par conséquent

$$\alpha y - \beta z = 0$$
$$\beta x - \gamma y = 0$$
$$\gamma z - \alpha x = 0.$$

Les *cosinus* des angles que fera cette droite avec les trois axes, seront

pour l'axe des x, $\gamma : \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$,
pour l'axe des y, $\beta : \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$,
& pour l'axe des z, $\alpha : \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$.

Soit m la distance de l'origine au point où la parallèle est coupée par le plan perpendiculaire, si de ce point on mène trois droites aux points où les trois axes sont coupés par le même plan, on aura trois triangles rectangles, dont les trois hypothénuses seront

$$\frac{m}{\gamma}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \quad \frac{m}{\beta}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \quad \frac{m}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

les constantes A, B & C doivent donc être telles,

qu'en faisant $y = 0$ & $z = 0$, on ait $x = \frac{m}{\gamma}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$,
qu'en faisant $x = 0$ & $y = 0$, on ait $z = \frac{m}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$,
& qu'en faisant $z = 0$ & $x = 0$, on ait $y = \frac{m}{\beta}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$.

Faisant en effet ces suppositions dans l'équation du plan, on trouve $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma}$. Donc le rapport des trois coëfficiens A, B & C est le même que celui des trois quantités α, β & γ. Donc l'équation du plan perpendiculaire est
$\alpha[z - z'] + \beta[y - y'] + \gamma[x - x'] = 0$. *C. Q. F. T.*

XX.

PROBLÊME II.

Etant données les trois coordonnées d'un point, & les equations d'une droite rapportée aux mêmes plans rectangulaires; trouver l'expression de la perpendiculaire abaissée du point sur la droite.

Solution. Soient, comme dans le problême précédent x', y' & z', les coordonnées du point donné, &

$$a x + b y + c z + d = 0$$
$$a' x + b' y + c' z + d' = 0,$$

les équations de la droite, de manière qu'en conservant les abréviations précédentes, les équations de ses trois projections soient

$$\alpha y - \beta z + \delta = 0$$
$$\beta x - \gamma y + \varepsilon = 0$$
$$\gamma z - \alpha x + \zeta = 0,$$

dans lesquelles l'équation de condition $\alpha \varepsilon + \beta \zeta + \gamma \delta = 0$ est nécessairement satisfaite.

Cela posé, si par le point donné on mène un plan perpendiculaire à la droite, ce plan la coupera dans un point qui sera le pied de la perpendiculaire demandée, en sorte que si les coordonnées de ce point sont x, y & z, la distance demandée sera

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

Il ne s'agit donc plus que de trouver ces coordonnées. Mais l'équation du plan perpendiculaire étant par le problême précédent $\alpha(z - z') + \beta(y - y') + \gamma(x - x') = 0$, on aura les coordonnées du point d'interfection, en éliminant entre cette équation & celles des projections de la droite, ce qui donne

$$x - x' = [\alpha(\gamma z' - \alpha x' + \varepsilon) - \beta(\beta x' - \gamma y' + \zeta)] : (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$
$$y - y' = [\gamma(\beta x' - \gamma y' + \zeta) - \alpha(\alpha y' - \beta z' + \delta)] : (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$
$$z - z' = [\beta(\alpha y' - \beta z' + \delta) - \gamma(\gamma z' - \alpha x' + \varepsilon)] : (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2);$$

faisons encore, pour abréger,

$$\alpha y' - \beta z' + \delta = \lambda$$
$$\beta x' - \gamma y' + \zeta = \mu$$
$$\gamma z' - \alpha x' + \varepsilon = \nu,$$

d'où l'on tire, en multipliant la première par γ, la seconde par α, la troisième par β, & ajoutant

$$\alpha\mu + \beta\nu + \gamma\lambda = 0,$$

& les trois expressions précédentes deviendront

$$x - x' = (\alpha\nu - \beta\mu) : (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$
$$y - x' = (\gamma\mu - \alpha\lambda) : (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$
$$z - z' = (\beta\lambda - \gamma\nu) : (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

par conséquent la somme des trois carrés $(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$ sera

$$[(\alpha\nu - \beta\mu)^2 + (\gamma\mu - \alpha\lambda)^2 + (\beta\lambda - \gamma\nu)^2] : (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2.$$

Mais si l'on développe le numérateur, on verra facilement qu'il peut être mis sous cette forme :

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - (\alpha\mu + \beta\nu + \gamma\lambda)^2,$$

dont le second terme est $= 0$ par une des équations ci-dessus; donc l'expression de la perpendiculaire demandée, sera

$$\sqrt{\frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}. \qquad C.\ Q.\ F.\ T.$$

Appliquons actuellement l'analyse à la théorie des Développées.

XXI.

XXI.

PROBLÊME III.

Etant données les équations d'une courbe à double courbure, rapportées à trois plans rectangulaires, trouver celle du plan normal mené par un point déterminé de la courbe.

Solution. Le plan normal étant perpendiculaire à la tangente de lacourbe au point où elle est coupée par ce plan, il suit du problême premier, qu'on aura facilement l'équation demandée, lorsqu'on aura celles des projections de cette tangente; or ces projections sont elles-mêmes les tangentes aux projections de la courbe dans des points qui correspondent à la même abscisse: la question est donc réduite à trouver les équations des tangentes des projections. Soient $y = \varphi\, x$ & $z = \psi\, x$ les équations des projections de la courbe, φ & ψ indiquant des fonctions quelconques: soit de plus x' l'abscisse du point déterminé de la courbe par lequel on doit mener le plan normal, & par conséquent $\varphi\, x'$ & $\psi\, x'$ les autres coordonnées de ce point; cela posé, cherchons d'abord l'équation de la tangente à la projection sur le plan des x & y.

Cette équation doit généralement être de cette forme $y = A x + B$, A étant la tangente de l'angle que fait cette droite avec l'axe des x; or cet angle est le même que celui que fait avec le même axe l'élément de la projection qui correspond aux coordonnées x' & $\varphi\, x'$; donc on aura $A = \frac{d.\, \varphi\, x'}{d\, x'} = \varphi'\, x'$. La tangente devant de plus passer par cet élément, il faut que la constante B soit telle qu'en faisant $x = x'$, on ait $y = \varphi\, x'$, l'équation de la tangente à la projection sur le plan des x & y sera donc:

$$y - \varphi\, x' = (x - x')\, \varphi'\, x'.$$

Par un semblable raisonnement, on trouvera que l'équation de la tangente à la projection sur le plan des x & z, pour la même abscisse de point de contact, est

$$z - \psi x' = (x - x') \psi' x'.$$

Ces deux équations sont celles des projections de la tangente de la courbe à double courbure; ainsi, pour appliquer ici les résultats du problême premier, on aura

$$\begin{array}{ll} x' = x' & \alpha = \psi' x' \\ y' = \varphi x' & \beta = \varphi' x' \\ z' = \psi x' & \gamma = 1 \end{array}$$

& l'équation demandée du plan normal sera

(A). $$[z - \psi x'] \psi' x' + [y - \varphi x'] \varphi' x' + x - x' = 0.$$

C. Q. F. T.

Corollaire.

Si, au lieu de représenter par x', $\varphi x'$ & $\psi x'$ les coordonnées du point de la courbe pour lequel on cherche le plan normal, on les exprime par x', y' & z', ce qui donne $\varphi' x' = \frac{dy'}{dx'}$ & $\psi' x' =, \frac{dz'}{dx'}$, l'équation du plan normal sera

$$[z - z'] dz' + [y - y'] dy' + [x - x'] dx' = 0,$$

de laquelle on chassera les quantités y' z', & leurs différentielles, par le moyen des équations données de la courbe.

XXII.

PROBLÊME IV.

Etant données les équations d'une courbe à double courbure rapportée à trois plans rectangulaires, trouver celle de la surface développable qui est le lieu géométrique de toutes ses Développées.

Solution. Soient, comme précédemment, $y = \varphi x$ & $z = \psi x$ les équations de la courbe proposée, de manière que celle du plan normal mené par le point de la courbe qui correſpond à l'abſciſſe x', ſoit en vertu du problême précédent

$$(A)\ [z - \psi x']\,\psi' x' + [y - \varphi x']\,\varphi' x' + x - x' = 0.$$

Si l'on prend encore ſur la courbe un point infiniment voiſin du premier, & correſpondant à l'abſciſſe $x' + dx'$, l'équation du plan normal mené par ce nouveau point, ſe trouvera en mettant, dans la précédente, $x' + dx'$ à la place de x', & ſera

$$(a)\left\{\begin{array}{l}[z - \psi(x'+dx')]\,\psi'(x'+dx') + [y - \varphi(x'+dx')]\,\varphi'(x'+dx') \\ \quad + x - (x'+dx')\end{array}\right\} = 0,$$

& ſi dans les deux équations (A) & (a), on fait les x, y & z de l'une égales reſpectivement aux x, y & z de l'autre, ces deux équations ſeront celles de la droite d'interſection des deux plans infiniment voiſins : ou bien retranchant (A) de (a), négligeant les infiniment petits du ſecond ordre, & diviſant par dx, on aura, pour cette droite d'interſection, les deux équations ſuivantes.

$$(A)\ [z - \psi x']\,\psi' x' + [y - \varphi x']\,\varphi' x' + x - x' = 0.$$

$$(B)\ [z - \psi x']\,\psi'' x' + [y - \varphi x']\,\varphi'' x' - [1 + (\varphi' x')^2 + (\psi' x')^2] = 0.$$

Or cette interſection ſe trouve tout entière (Théorême I.) ſur la ſurface des Développées, & renferme tous les pôles de l'élément de la courbe compris entre les limites x' & $x' + dx'$; donc, pour avoir entre x, y & z une relation qui convienne à tous les pôles de la courbe, indépendamment de l'abſciſſe x', on n'aura qu'à éliminer x' des deux équations (A) & (B), & l'équation qui réſultera, ſera celle de la ſurface demandée. *C. Q. F. T.*

Corollaire.

Si, au lieu de repréſenter par x', $\varphi x'$ & $\psi x'$ les coordonnées de la courbe, on les exprime par x', y' & z', ce qui donne $\varphi'' x' = \frac{ddy'}{dx'^2}$ & $\psi'' x' = \frac{ddz'}{dx'^2}$, faiſant enſuite, pour abréger, $ds' = \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$ = l'élément de la courbe, les deux équations (A) & (B) deviendront

$$[z - z']\,dz' + [y - y']\,dy' + [x - x']\,dx' = 0.$$

$$[z - z']\,ddz' + [y - y']\,ddy' - ds'^2 = 0,$$

desquelles on tirera l'équation de la surface développable en mettant, pour y', z' & leurs différentielles, leurs valeurs prises dans les équations de la courbe, & éliminant ensuite x'.

XXIII.

On auroit pu déduire immédiatement l'équation (B) de l'équation (A), en remarquant qu'elle est la différentielle de celle-ci prise en regardant x' comme seule variable. Donc, pour trouver l'équation de la surface développable, qui est le lieu géométrique des Développées d'une courbe à double courbure, il faut d'abord chercher l'équation du plan normal à la courbe, qui sera nécessairement de cette forme, $Az + By + Cx + D = 0$, & dans laquelle les constantes A, B, C & D sont des fonctions connues de l'abscisse x' correspondantes au point de la courbe par lequel passe le plan normal; différencier ensuite cette équation, en ne faisant varier que x', ce qui donnera une seconde équation qui servira à éliminer x' de celle du plan, & l'équation en x, y & z qu'on obtiendra, sera celle de la surface demandée.

XXIV.

PROBLÊME V.

*Etant données les équations d'une courbe à double courbure, trouver celles de l'*arête de rebroussement *de la surface développable qui est le lieu géométrique de ses Développées.*

Solution. Les deux équations du problême précédent étant celles de l'intersection des deux plans perpendiculaires à la courbe, menés par les points qui correspondent aux abscisses x', & $x' + dx'$, & par conséquent celles d'une des droites qui composent la surface des Développées, si l'on suppose que, dans ces deux équations, x' devienne $x' + dx'$, & que $x' + dx'$ devienne $x' + 2dx'$, ce qui donnera

$$(a)\left\{\begin{array}{l}[z-\psi(x'+dx')]\,\psi'(x'+dx')+[y-\varphi(x'+dx')]\,\varphi'(x'+dx')\\ \quad +x-(x'+dx')\end{array}\right\}=0$$

$$(b)\left\{\begin{array}{l}[z-\psi(x'+2dx')]\,\psi'(x'+2dx')+[y-\varphi(x'+2dx')]\,\varphi'(x'+2dx')\\ \quad +x-(x'+2dx')\end{array}\right\}=0.$$

Ces deux équations seront celles d'une droite qui se trouve encore sur la surface des Développées, infiniment près de la première; & si, dans les quatre équations (A), (B), (*a*) & (*b*), on fait les x, y, z de chacune d'elles égales aux x, y, z de toutes les autres, ces quatre équations seront celles de l'intersection de ces deux droites infiniment proches. Ou bien, remarquant que les équations (B) & (*a*) se comportent l'une l'autre, & retranchant ensuite (*a*) de (*b*), on aura, pour le point d'intersection des deux droites consécutives, les trois équations

$$(A)\quad [z-\psi x']\psi' x'+[y-\varphi x']\varphi' x'+x-x'=0$$
$$(B)\quad [z-\psi x']\psi'' x'+[y-\varphi x']\varphi'' x'-[1+(\varphi' x')^2+(\psi' x')^2]=0$$
$$(C)\quad [z-\psi x']\psi''' x'+[y-\varphi x']\varphi''' x'-3[\varphi' x'\varphi'' x'+\psi' x'\psi'' x']=0.$$

Or ce point d'intersection appartient à l'arête de rebroussement; il se trouve en même temps sur les trois plans perpendiculaires à la courbe proposée, menés par les points de cette courbe qui correspondent aux abscisses x', $x'+dx'$, $x'+2\,dx'$; sa position dépend donc de l'abscisse x'. Donc, si l'on veut avoir les équations qui conviennent à la suite des points ainsi déterminés, indépendamment de l'abscisse x', on n'aura qu'à éliminer x' des trois équations (A), (B) & (C), & les deux équations en x, y & z qu'on obtiendra, seront celles de l'arête de rebroussement demandée.

C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

Si, au lieu de représenter par x', $\varphi x'$ & $\psi x'$ les coordonnées de la proposée, on les exprime par x', y' & z', ce qui donne $\varphi''' x'=\frac{d^3 y'}{dx'^3}$ $\psi''' x'=\frac{d^3 z'}{dx'^3}$, les trois équations précédentes deviendront

$$[z-z']\,dz'+[y-y']\,dy'+[x-x']\,dx'=0$$
$$[z-z']\,ddz'+[y-y']\,ddy'-ds'^2=0$$
$$[z-z']\,d^3z'+[y-y']\,d^3y'-3\,ds'\,dds'=0;$$

desquelles on tirera les deux équations de l'arête de rebroussement, en mettant pour y', z' & leurs différentielles, leurs valeurs prises dans les équations de la proposée, & éliminant ensuite x'.

XXV.

On peut déduire immédiatement l'équation (C) de l'équation (B), en observant qu'elle est la différentielle de celle-ci prise en regardant x' comme seule variable, & par conséquent la différentielle seconde de (A) prise de la même manière. Donc, pour trouver les équations de l'arête de rebroussement de la surface développable, lieu géométrique des Développées d'une courbe à double courbure, il faut d'abord chercher l'équation du plan normal à la courbe qui sera de cette forme, $Az + By + Cx + D = 0$, A, B, C & D étant pour chaque plan normal des constantes, fonctions connues de l'abscisse déterminée x' qui correspond au point de la courbe par lequel passe le plan normal ; différencier ensuite deux fois cette équation en regardant x' comme seule variable, & dx' comme constant, ce qui produira deux nouvelles équations ; éliminer enfin de ces deux équations & de celle du plan l'indéterminée x' ; les deux équations en x, y & z qui resteront, seront celles de l'arête de rebroussement demandée.

XXVI.

Si des trois équations (A), (B) & (C) on tire les valeurs des trois variables x, y & z, on trouvera,

$$z = \psi x' + \left\{ \begin{matrix} \varphi''' x' [1 + (\varphi' x')^2 + (\psi' x')^2] \\ - 3 \varphi'' x' [\psi' x' \psi'' x' + \varphi' x' \varphi'' x'] \end{matrix} \right\} : (\psi'' x' \varphi''' x' - \psi''' x' \varphi'' x')$$

$$y = \varphi x' \quad \left\{ \begin{matrix} - \psi''' x' [1 + (\varphi' x')^2 + (\psi' x')^2] \\ + 3 \psi'' x' [\psi' x' \psi'' x' + \varphi' x' \varphi'' x'] \end{matrix} \right\} : [\psi'' x' \varphi''' x' - \psi''' x' \varphi'' x']$$

$$x = x' + \left\{ \begin{matrix} [\varphi' x' \psi''' x' - \varphi''' x' \psi' x'][1 + (\varphi' x')^2] + (\psi' x')^2 \\ - 3 [\varphi' x' \psi'' x' - \varphi'' x' \psi' x'][\psi' x' \psi'' x' + \varphi' x' \varphi'' x'] \end{matrix} \right\} : [\psi'' x' \varphi''' x' - \psi''' x' \varphi'' x']$$

ou bien, mettant y' & z' à la place de $\varphi x'$ & $\psi x'$, on aura pour valeurs de ces trois variables :

$$z = z' + \frac{d^3 y' \, ds'^2 - 3 \, ddy' \, ds' \, dds'}{ddz' \, d^3 y' - d^3 z' \, ddy'},$$

$$y - y' + \frac{d^3 z' \, ds'^2 - 3 \, ddz' \, ds' \, dds'}{ddz' \, d^3 y' - d^3 z' \, ddy'},$$

$$x = x' + \frac{[dy' \, d^3 z' - dz' \, d^3 y'] \, ds'^2 - 3 [dy' \, ddz' - dz' \, ddy'] \, ds' \, dds'}{ddz' \, d^3 y' - d^3 z' \, ddy'}.$$

Ces valeurs ſont celles des coordonnées du point dans lequel ſe rencontrent les deux droites conſécutives priſes ſur la ſurface développable, ou les trois plans conſécutifs perpendiculaires à la courbe, & menés par les élémens qui correſpondent aux abſciſſes x', $x' + dx'$, & $x' + 2\,dx'$. Ce point eſt à égales diſtances de ces trois élémens; car en tant qu'il ſe trouve dans l'interſection des deux premiers plans, il eſt à égales diſtances des deux premiers élémens, & en tant qu'il ſe trouve dans l'interſection du ſecond & troiſième plan, il eſt également éloigné des ſecond & troiſième élémens; donc les valeurs de x, y & z que nous venons de trouver, ſont celles des coordonnées d'un point également éloigné des trois élémens conſécutifs de la courbe, pris dans la partie de cette courbe qui correſpond à l'abſciſſe x'; or ces valeurs ſeront toujours réelles, tant que la branche de la propoſée ne ſera pas imaginaire, c'eſt-à-dire, tant que y' & z', ou $\varphi x'$ & $\psi x'$ ſeront réelles; donc, dans toute courbe à double courbure, trois élémens conſécutifs ſont toujours à égales diſtances d'un certain point, & peuvent par conſéquent être regardés comme placés ſur la ſurface d'une même ſphère dont ce point eſt le centre. La ſuite de tous ces centres forme l'arête de rebrouſſement de la ſurface des Développées de cette courbe; donc cette arête eſt le lieu géométrique des centres de courbure ſphérique de la courbe, ſans être une de ſes Développées, puiſqu'aucune de ſes tangentes ne rencontre la propoſée, & qu'elles ſont toutes ſur la ſurface développable.

Il eſt évident que ſi l'on vouloit avoir le rayon de courbure ſphérique d'une courbe à double courbure, pour le point de cette courbe qui correſpond à l'abſciſſe x', il n'y auroit qu'à ſubſtituer dans l'expreſſion

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - \varphi x')^2 + (z - \psi x')^2}$$

pour x, y & z les valeurs que nous venons de trouver.

Nous avons vu (Théorême II.) que la ſurface développable, lieu géométrique des Développées d'une courbe quelconque, étant construite, on auroit une de ces Développées en menant par un point de la courbe, & suivant une direction arbitraire, une tangente à cette surface, & en pliant ensuite librement cette tangente sur la surface. Nous avons déjà donné l'équation de la surface développable, il ne reste plus qu'à trouver les équations de la courbe que formeroit sur elle une droite pliée librement.

XXVII.

Lemme.

Si un angle n est la projection sur un plan d'un angle rectiligne m, dont les côtés fassent avec le plan de projection des angles p & q, on aura toujours

$$cos. m = cos. n. cos. p. cos. q - sin. p. sin. q.$$

XXVIII.

PROBLEME VI.

Trouver la courbe que forme une droite, ou un fil plié librement sur une surface.

FIGURE 6. Solution. Soient AH, AB & AD les trois axes rectangulaires auxquels est rapportée l'équation donnée de la surface, & A l'origine des coordonnées; soient FMS & fms deux sections infiniment proches, faites dans la surface par des plans perpendiculaires à l'axe AH, & dont les droites PF, PS, pf, ps soient les intersections avec les deux plans DAH & HAB; soit MmL une portion de la courbe demandée, coupée par les deux plans de section en deux points infiniment proches M & m, par lesquels soient abaissées sur le plan HAB les coordonnées perpendiculaires MQ & mq; soient GT & gt les tangentes des sections aux points M & m; soit mené l'élément Qq de la projection & sa parallèle Mn, de plus qQ′ parallèle à AP, Q′M′ parallèle à QM, & MN parallèle

parallèle à QQ'; soient enfin $AP = x$, $PQ = y$, & $Qm = z$. Cela posé, il est clair que l'on aura

$$Pp = Q'q = dx \qquad Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{ds^2 + dz^2}$$

$$QQ' = MN = dy \qquad M'N = \left(\frac{dz}{dy}\right) dy$$

$$Qq = Mn = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds \;\&\; M'M = dy\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

$$mn = dz:$$

or l'angle $Q'Qq$ est la projection de l'angle $M'Mm$, & les angles $M'MN$ & mMn sont ceux que forment les côtés $M'M$ & Mm avec le plan de projection; donc on aura (Lemme) *cos.* $[M'Mm] =$ *cos.* $[Q'Qq]$. *cos.* $[M'MN]$. *cos.* $[mMn]$ $+$ *sin.* $[M'MN]$. *sin.* $[mMn]$; par conséquent nommant v l'angle $M'Mm$, l'on aura

$$\cos. v = \left(\frac{dy}{ds}\right) \cdot \frac{dy}{dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}} \cdot \frac{ds}{\sqrt{ds^2 + dz^2}} + \frac{\left(\frac{dz}{dy}\right) dy}{dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{ds^2+dz^2}}.$$

Mais l'angle gmL devant être égal à Mmt, comme nous l'avons démontré (Théorême II), la différentielle de l'angle $M'Mm$ doit être égale à $M'Mm - Mmt$; de plus, ces deux derniers angles ne diffèrent entre eux qu'à cause de la différence d'inclinaison des tangentes GT & gt; ou, ce qui revient au même, si ces tangentes étoient parallèles, ces angles seroient égaux, & l'on auroit $dv = 0$. Donc l'expression de *cos.* v ne varie qu'en vertu de la variation de l'angle $M'MN$; donc la différentielle de cette expression, prise en regardant comme constans les *sinus* & *cosinus* de l'angle $M'MN$, doit être égalée à zéro; ce qui donne, en regardant ds comme constant,

$$[ds^2 + dz^2]\, ddy = \left[dy\, dz - ds^2\left(\frac{dy}{dz}\right)\right] ddz,$$

équation qui, si l'on met pour dz & ddz leurs valeurs prises dans l'équation de la surface, donnera en x, y & leurs différentielles l'équation de la courbe Qq de projection. *C. Q. F. T.*

Nous avons vu que la courbe Mm étoit la plus courte que l'on pût mener sur la surface courbe entre ses extrémités, & par conséquent la même que celle pour laquelle M. Jean Bernoulli, tome IV de ses Œuvres, donne l'équation suivante :

$$[ds^2 + dz^2]\, T\, ddy = [T\, dy\, dz - z\, ds^2]\, ddz.$$

Il est facile de ramener cette équation à la nôtre, car la lettre T exprime la sous-tangente QT de la section représentée par EMS dans notre *figure*, & l'on a QT & par conséquent $T = z : \left(\frac{dz}{dy}\right)$; d'où il suit que $\frac{z}{T}$ est $= \left(\frac{dz}{dy}\right)$, & que notre équation coïncide avec celle que M. Bernoulli a trouvée par une méthode bien différente.

XXIX.

Ainsi, tant que la surface sera quelconque, la détermination de la ligne la plus courte entre ses extrémités que l'on puisse mener sur cette surface, ou de celle que traceroit un fil plié librement, dépend de l'intégration d'une équation aux différences secondes, qui peut être plus ou moins difficile à traiter suivant la nature de la surface, & dans laquelle l'intégration introduira deux constantes arbitraires, par le moyen desquelles on pourra faire que la courbe satisfasse à deux conditions particulières : par exemple, si l'on cherche une Développée d'une courbe, on peut déterminer ces deux constantes de manière que la Développée passe par un point de la surface, & que sa tangente en ce point passe par la développante. Mais, dans la recherche des Développées, la surface n'est pas quelconque ; nous avons vu qu'elle étoit toujours développable. Cette particularité, introduite dans l'équation différentielle, la rend intégrable, du moins aux différences finies, indépendamment de la nature particulière de la surface développable. Néanmoins ce n'est pas là la marche que nous suivrons ; nous allons partir d'une considération qui est encore plus simple.

XXX.

PROBLEME VII.

Etant données les équations d'une courbe à double courbure quelconque, trouver celles de telle de ses Développées qu'on voudra.

Solution. Toutes les Développées d'une courbe étant sur une même surface développable, l'équation de cette surface est commune à toutes les Développées : or, nous avons donné (art. XXII.) la manière de trouver cette équation, & nous avons vu qu'elle étoit le résultat de l'élimination de la quantité x' des deux équations (A) & (B); il ne reste donc plus qu'à trouver pour chaque Développée une équation particulière qui la distingue de toutes les autres, & qui détermine sa manière d'exister sur la surface développable. Pour cela, considérons que chaque Développée doit être telle que le prolongement de sa tangente en un point quelconque coupe la développante dans le point dont les coordonnées sont x', $\varphi x'$ & $\psi x'$; ou, ce qui revient au même, que le prolongement de la tangente de sa projection passe par la projection du point de la développante dont les coordonnées sont x', $\varphi x'$ & $\psi x'$. On aura donc, par rapport à la projection sur le plan des z & y, (D) $\frac{dz}{dy} = \frac{z-\psi x'}{y-\varphi x'}$.

Si des trois équations

(A) $[z-\psi x']\psi' x' + [y-\varphi x']\varphi' x' + x - x' = 0$,

(B) $[z-\psi x']\psi'' x' + [y-\varphi x']\varphi'' x' - [1+(\varphi' x')^2 + (\psi' x')^2] = 0$;

(D) $[z-\psi x']dy = [y-\varphi x']dz$,

on élimine l'indéterminée x', les deux équations qu'on obtiendra en x, y & z, & dont l'une sera aux différences premières, seront les deux équations demandées. *C. Q. F. T.*

XXXI.

Au lieu d'employer, comme nous avons fait, la projection sur le plan des y & z, on peut se servir de la projection sur l'un quelconque des deux autres plans, & à la place de l'équation (D), on aura, dans le cas du plan des x & y, $[y-\phi x']dx=[x-x']dy$, & dans le cas du plan des x & z, $[z-\psi x']dx=[x-x']dz$. De ces trois équations différentielles, deux quelconques comportent généralement la troisième; mais si, comme dans le cas dont il s'agit, on suppose que les deux équations (A) & (B) aient lieu en même temps qu'elles, alors de ces trois équations différentielles, une quelconque comporte les deux autres, & il suffit d'employer celle qui présentera moins de difficulté dans l'intégration.

XXXII.

L'intégration de l'équation différentielle introduira dans le calcul une constante arbitraire, qui, par les différentes valeurs dont elle sera susceptible, pourra appartenir à telle Développée qu'on voudra, & dont la détermination dépendra de la condition à laquelle la Développée devra satisfaire. Par exemple, s'il s'agit de déterminer la constante de manière que la Développée passe par un certain point donné sur la surface développable, & dont les coordonnées, dans les sens des x, des y & des z, soient respectivement a, b & c, on substituera, dans les deux équations de la Développée, après l'intégration, à la place des quantités x, y & z, les valeurs correspondantes a, b, c; on éliminera de ces deux équations celle des trois coordonnées a, b, c qui sera perpendiculaire à la projection dont on aura fait usage, & il faudra que la constante satisfasse à l'équation résultante.

XXXIII.

Scholie.

J'ai donc démontré qu'une courbe quelconque, plane ou à double courbure, a une infinité de Développées toutes à double courbure, à l'exception d'une seule pour chaque courbe plane, & j'ai donné la manière de trouver les équations de toutes ces Développées, d'après celles de la développante, ce que je m'étois d'abord proposé dans ce Mémoire ; ainsi il n'y a point de courbe que l'on ne puisse engendrer par le développement d'une infinité d'autres. Mais comme il est difficile, dans la pratique, après avoir plié un fil sur une Développée, particulièrement si elle est à double courbure, de le développer de manière qu'à chaque instant du mouvement il soit bien exactement confondu avec la tangente de la Développée, lorsqu'on voudra construire par développement une courbe à double courbure $BB'B''B'''$.... on pourra, par un même point donné B de cette courbe, mener deux fils BO, BP tangens à la surface développable, les plier ensuite librement sur cette surface, l'un en $OO'O''O'''$.... l'autre en $PP'P''P'''$; ces fils, dans leur développement, se contre-balanceront, & empêcheront que leur point de réunion cesse d'être dans la développante ; ou bien, pour faire usage des formules précédentes, on donnera à l'indéterminée a ou b deux valeurs différentes, ce qui produira deux Développées distinctes $OO'O''O'''$.... & & $PP'P''P'''$.... qui jouiront de la même propriété. FIGURE 7.

XXXIV.

Il suit de là, qu'il seroit facile de faire osciller un pendule dans une courbe à double courbure quelconque, si cela étoit nécessaire, en supposant que cette courbe tourne sa convexité du côté du centre des forces qui agissent sur le pendule.

Du rayon de courbure, & des différens genres d'inflexions des courbes à double courbure.

XXXV.

On appelle *point d'inflexion*, dans une courbe plane, le point où cette ligne, après avoir été concave dans un sens, cesse de l'être pour devenir concave dans l'autre sens. Il est évident que, dans ce point, la courbe perd sa courbure, & que les deux élémens consécutifs sont en ligne droite. Mais une courbe à double courbure peut perdre chacune de ses courbures en particulier, ou les perdre toutes deux dans le même point; c'eſt-à-dire, qu'il peut arriver ou que trois élémens conſécutifs d'une même courbe à double courbure ſe trouvent dans un même plan, ou que deux de ces élémens ſoient en ligne droite. Il ſuit de là, que les courbes à double courbure peuvent avoir deux eſpèces d'inflexions; la première a lieu lorſque la courbe devient plane, & nous l'appellerons *ſimple inflexion :* la ſeconde, que nous appellerons *double inflexion*, a lieu lorſque la courbe devient droite dans un de ſes points.

XXXVI.

PROBLÊME VIII.

Trouver la formule qui donne les points de ſimple inflexion *des courbes à double courbure.*

Solution. Nous avons vu, art. XVII, que lorſqu'une courbe à double courbure a un point de ſimple inflexion, ou, ce qui revient au même, que lorſqu'elle devient plane, la partie correſpondante de la ſurface développable, qui eſt le lieu de ſes Développées, devient cylindrique, & que par conſéquent les deux arêtes conſécutives de cette partie de la ſurface ſont parallèles. Il ſuit donc de là, que le point de rencontre de ces deux arêtes eſt infiniment éloigné, ou que les coordonnées de ce point ſont infinies. Or nous avons donné, art. XXVI, les valeurs générales de ces coordonnées, qui ſont toutes trois rendues infinies en égalant à zéro le dénominateur commun: donc la formule, pour trouver les points de ſimple inflexion, eſt:

$$\psi'' x\, \varphi''' x - \varphi'' x\, \psi''' x = 0,$$

$$\text{ou } dd z\, d^3 y - dd y\, d^3 z = 0,$$

& la valeur de x, tirée de l'une ou de l'autre de ces deux formules, ſera celle de l'abſciſſe qui convient au point demandé.

C. Q. F. T.

XXXVII.

On auroit pu trouver cette formule par un raiſonnement beaucoup plus ſimple. En effet, puiſque, dans le point de ſimple inflexion, la courbe à double courbure devient plane, il faut que, dans ce point, les équations de la courbe ſatisfaſſent à l'équation générale du plan : or cette équation générale eſt

$$z = a x + b y + c.$$

Si donc on différencie trois fois cette équation à cauſe des trois conſtantes, ce qui donne

$$d z = a d x + b d y,$$
$$d d z = b d d y,$$
$$d^3 z = b d^3 y,$$

& qu'on élimine a & b de ces trois équations, on trouvera $d d y\, d^3 z - d d z\, d^3 y = 0$, équation de condition, qui doit être ſatisfaite pour que trois élémens conſécutifs d'une courbe à double courbure ſoient dans un même plan, & qui eſt la même que celle que nous venons de donner dans le Problême précédent.

XXXVIII.

PROBLÊME IX.

Trouver l'expreſſion du rayon de courbure d'une courbe à double courbure quelconque.

Solution. Dans tout ce qui précède, nous avons bien diſtingué les rayons de Développées d'une courbe à double courbure de ſon rayon de courbure. Nous avons vu que dans chaque point une courbe quelconque a une infinité de rayons de Développées, parce qu'elle a une infinité de Developpées différentes ; mais que dans chaque point elle n'avoit qu'un rayon de courbure, & qu'on trouvoit ce rayon en abaiſſant une perpendiculaire du point de la courbe ſur l'interſection du plan normal avec le plan normal infiniment voiſin.

Or nous avons donné, Problême II, l'expreſſion de la perpendiculaire abaiſſée d'un point donné ſur une droite dont on connoît les équations de projections ; de plus, nous avons trouvé, Problême IV, pour équations de l'interſection du plan normal avec celui qui le ſuit immédiatement,

$$[z-\psi x']\psi' x' + [y-\varphi x']\varphi' x' + x - x' = 0,$$
$$[z-\psi x']\psi'' x' + [y-\varphi x']\varphi'' x' + [1-(\varphi' x')^2 + (\psi' x')^2] = 0,$$

d'où l'on tire les trois équations ſuivantes, qui ſont celles des trois projections de cette droite,

$$y\varphi'' x' + z\psi'' x' - [1+(\varphi' x')^2 + (\psi' x')^2 + \psi x' \psi'' x' + \varphi x' \varphi'' x'] = 0;$$

$$\left.\begin{array}{l} -x\psi'' x' + y[\psi' x' \varphi'' x' - \varphi' x' \psi'' x'] - \psi' x'[1+(\varphi' x')^2 + (\psi' x')^2] \\ + x'\psi'' x' - \varphi x'[\psi' x' \varphi'' x' - \varphi' x' \psi'' x'] \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} -z[\psi' x' \varphi'' x' - \varphi' x' \psi'' x'] - x\varphi'' x' - \varphi' x'[1+(\varphi' x')^2 + (\psi' x')^2 \\ + x'\varphi'' x' - \psi x'[\psi' x' \varphi'' x' - \varphi' x' \psi'' x'] \end{array}\right\} = 0.$$

Si l'on compare actuellement ces trois équations avec celle de la droite donnée dans le Problême II, on a

$$\begin{array}{ll} x' = x' & \alpha = \varphi'' x' \\ y' = \varphi x' & \beta = -\psi'' x' \\ z' = \psi x' & \gamma = -[\psi' x' \varphi'' x' - \varphi' x' \psi'' x'] \end{array}$$

$$\delta = -[1+(\varphi' x')^2 + (\psi' x')^2 + \psi' x' \psi'' x' + \varphi' x' \varphi'' x'],$$
$$\varepsilon = -\{\psi' x'[1+(\varphi' x')^2 + (\psi' x')^2] - x'\psi'' x' + \varphi x'[\psi' x' \varphi'' x' - \varphi' x' \psi'' x']\};$$
$$\zeta = -\{\varphi' x'[1+(\varphi' x')^2 + (\psi' x')^2] - x'\varphi'' x' - \psi x'[\psi' x' \varphi'' x' - \varphi' x' \psi'' x']\};$$

d'où l'on tire

$$\lambda = -[1+(\varphi' x')^2 + (\psi' x')^2]$$
$$\mu = -[1+(\varphi' x')^2 + (\psi' x')^2]\psi' x'$$
$$\nu = -[1+(\varphi' x')^2 + (\psi' x')^2]\varphi' x'$$

or nous avons vu que l'expreſſion de la perpendiculaire abaiſſée du point ſur la droite étoit

$$\sqrt{\frac{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}.$$

Donc ſi l'on ſubſtitue les valeurs précédentes, on trouvera pour expreſſion du rayon de courbure d'une courbe à double courbure quelconque,

$$\frac{[1+(\varphi' x')^2 + (\psi' x')^2]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(\varphi'' x')^2 + (\psi'' x')^2 + [\psi' x' \varphi'' x' - \varphi' x' \psi'' x']^2}}.$$

C. Q. F. T.

COROLLAIRE

COROLLAIRE.

Si au lieu de représenter par x', $\varphi x'$ & $\psi x'$ les coordonnées de la courbe, on les exprime par x, y & z, la formule précédente, qui donne la valeur du rayon de courbure, deviendra

$$\frac{[dx^2+dy^2+dz^2]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{dx^2\,ddy^2+dx^2\,ddz^2+[dz\,ddy-dy\,ddz]^2}}.$$

XXXIX.

Nous avons aussi donné, Problême II, les expressions des coordonnées du pied de la perpendiculaire abaissée d'un point sur une droite; si l'on substitue encore, dans ces formules, les valeurs ci-dessus, on trouvera, pour coordonnées du centre de courbure d'une courbe quelconque dans le sens des x:

$$x-[1+(\varphi'x)^2+(\psi'x)^2]\frac{\varphi'x\,\varphi''x+\psi'x\,\psi''x}{(\varphi''x)^2+(\psi''x)^2+[\psi'x\,\varphi''x-\varphi'x\,\psi''x]^2};$$

dans le sens des y:

$$\varphi x+[1+(\varphi'x)^2+(\psi'x)^2]\frac{\varphi''x-\psi'x[\psi'x\,\varphi''x-\varphi'x\,\psi''x]}{(\varphi''x)^2+(\psi''x)^2+[\psi'x\,\varphi''x-\varphi'x\,\psi''x]^2};$$

& dans le sens des z:

$$\psi x+[1+(\varphi'x)^2+(\psi'x)^2]\frac{\psi''x-\varphi'x[\psi'x\,\varphi''x'-\varphi'x\,\psi''x]}{(\varphi''x)^2+(\psi''x)^2+[\psi'x\,\varphi''x-\varphi'x\,\psi''x]^2}.$$

De manière qu'à l'aide de toutes ces formules, on peut non seulement connoître la courbure d'un point quelconque d'une courbe à double courbure, mais encore assigner le sens de sa courbure, puisqu'on peut connoître, dans l'espace, la position de son centre de courbure.

XL.

PROBLEME X.

Trouver la formule qui donne les points de double inflexion *des courbes à double courbure.*

SOLUTION. Il suit de la définition que nous avons donnée, art. XXXV, de la double inflexion, que toutes les fois qu'elle aura lieu, le rayon de courbure sera $= 0$ ou $= \infty$; donc la formule, pour trouver ces sortes de points, est :

$$(\varphi'' x)^2 + (\psi'' x)^2 + [\psi' x \varphi'' x - \varphi' x \psi'' x]^2 = 0 \text{ ou } = \infty,$$

ou bien

$$dx^2 ddy^2 + dx^2 ddz^2 + [dz ddy - dy ddz]^2 = 0 \text{ ou } = \infty,$$

C. Q. F. T.

Il est inutile de remarquer que la même formule donne aussi les points de rebroussement.

Je finirai par exposer quelques propriétés des surfaces développables, analogues à l'objet de ce Mémoire.

XLI.

THÉORÈME IV.

Toute surface développable peut être engendrée par le développement d'une autre surface développable, qu'on doit par conséquent regarder comme sa Développée, & ces deux surfaces se coupent toujours dans l'arête de rebroussement de la surface développante.

Démonstration. Que l'on conçoive, par toutes les arêtes rectilignes d'une surface développable quelconque, des plans perpendiculaires chacun à l'élément correspondant de la surface, tous ces plans se rencontreront consécutivement deux à deux dans une ligne droite, & la suite de ces droites formera évidemment une seconde surface développable, puisque cette surface ne sera que la limite du système des plans perpendiculaires à la première. De plus, l'intersection de deux plans consécutifs quelconques passera nécessairement par le point d'intersection des deux arêtes rectilignes de la première surface par lesquelles sont menés les deux plans, puisque ce point est en même temps sur l'un & sur l'autre plan, & la droite d'intersection formera, avec ces deux arêtes rectilignes, des angles égaux ; donc, 1°. la seconde surface développable passera par l'arête de rebrouſſement de la première. Je dis actuellement que la ſeconde ſurface ſera la Développée de la première. Que l'on conçoive en effet un plan tangent à la ſeconde ſurface développable, ce plan, d'après notre conſtruction, ſera néceſſairement perpendiculaire à la première, la coupera dans une de ſes arêtes rectilignes, & cette arête rencontrera la droite de contact du plan avec la ſeconde ſurface dans un des points de l'arête de rebrouſſement de la première. Que ce plan tourne enſuite autour de ſa droite de contact juſqu'à ce qu'il ſoit tangent à l'élément ſuivant de la ſeconde ſurface, & qu'il entraîne avec lui, dans ſon mouvement, ſa droite d'interſection avec la première ſurface, il eſt évident que cette droite, pendant le mouvement, ne ſortira pas de la ſurface, puiſque l'angle que fait cette interſection avec la droite de contact (conſidérée pour un inſtant comme axe de rotation) ne changera pas : donc ſi l'on conçoit que le plan faſſe tout le tour de la ſeconde ſurface ſans ceſſer de lui être tangent, ſans gliſſer en aucune manière ſur elle, & entraîne avec lui la droite ſuivant laquelle il coupoit la première ſurface dans ſa première poſition, de manière que cette droite ſoit fixe dans le plan, cette droite engendrera, dans ſon mouvement, la première ſurface. Donc la ſeconde ſurface développable eſt la Développée de la première. Donc, &c. *C. Q. F. D.*

XLII.

Corollaires.

I. Il ſuit de là, qu'une ſurface développable quelconque peut auſſi être regardée comme compoſée d'une infinité d'élémens de ſurfaces coniques, conſécutivement tangentes les unes aux autres, dont les ſommets ſont conſécutivement placés ſur ſon arête de rebrouſſement, & dont les axes ſont les arêtes rectilignes de ſa Développée.

II. Donc une ſurface développable peut non ſeulement être regardée comme la limite d'une infinité de plans dont les poſitions différentes ſont liées entre elles par une loi, mais encore comme celle d'une infinité de ſurfaces coniques dont les natures & les poſitions ſont généralement telles que leurs ſommets ſont ſur l'arête de rebrouſſement de la ſurface, & leurs axes ſur une autre ſurface développable.

III. Toute ſurface conique à baſe quelconque a auſſi une ſurface conique pour Développée; car, par le théorême, toutes les arêtes rectilignes de la Développée doivent paſſer par l'arête de rebrouſſement de la développante : or, dans le cas de la ſurface conique à baſe quelconque, l'arête de rebrouſſement ſe réduit à un point unique, qui eſt le ſommet; donc, dans ce cas, toutes les arêtes rectilignes de ſa Développée doivent paſſer par le ſommet de la développante, qui ſera auſſi le ſommet de la Développée. Le réciproque n'a pas lieu.

IV. Une ſurface développable ne peut avoir qu'une Développée, & peut être la Développée d'une infinité du ſecond ordre d'autres ſurfaces développables; car elle peut être la Développée d'autant de ſurfaces développables différentes, qu'on peut mener de droites différentes dans ſon plan tangent, & on peut y en mener une infinité du ſecond ordre.

V. Que l'on conçoive une ſurface développable engendrée par le développement d'une autre, chaque point de la droite décrivante engendrera, par ſon mouvement, une courbe qui ſera par-tout perpendiculaire à la droite, & qui ſera dans la ſurface développante. Toutes ces courbes auront une ſeule Développée commune, qui ſera l'arête de rebrouſſement de la ſurface développante; toutes les autres Développées de toutes ces courbes ſeront ſur la même ſurface développée. Donc une ſurface développable, conſidérée comme développée d'une ſeule ſurface développante, eſt le lieu géométrique de toutes les Développées d'une infinité de courbes; or, elle peut être la Développée d'une infinité du ſecond ordre de ſurfaces développables différentes : donc une ſurface développable quelconque eſt le lieu géométrique des Développées d'une infinité du troiſième ordre de courbes à double courbure différentes.

XLIII.

Si toutes ces considérations étoient aussi importantes que curieuses, je donnerois les équations de la surface développée d'une surface développable quelconque, considérée comme développante; mais je me contenterai d'indiquer le procédé pour la trouver.

Si l'on cherche l'équation du plan mené par une des arêtes rectilignes d'une surface développable, proposée & perpendiculaire à cette surface, on la trouvera nécessairement de cette forme :

$$Az + By + Cx + D = 0;$$

dans laquelle les coëfficiens A, B, C & D sont des fonctions d'un certain paramètre x' constant pour chaque plan perpendiculaire, mais variable d'un plan à l'autre. Que l'on différencie cette équation en regardant x' comme seule variable, qu'on élimine ensuite x' de l'équation du plan, à l'aide de l'équation différencielle, l'équation résultante en x, y & z sera celle de la surface développée de la développante proposée.

XLIV.

THÉORÊME V.

Lorsqu'une surface développable est telle que sa Développée est une surface cylindrique à base quelconque, une portion quelconque de son aire est dans un rapport constant avec sa projection sur le plan de la base du cylindre, de manière que toutes les fois que cette projection sera carrable, la portion correspondante de l'aire de la surface le sera aussi.

Démonstration. Nous avons vu (Théorême précédent) que deux arêtes rectilignes consécutives d'une surface développable font toujours le même angle avec l'arête rectiligne correspondante de sa Développée : donc, lorsque cette Développée est cylindrique, que par conséquent toutes ses arêtes ſont parallèles, l'angle que forme l'arête de la développante avec l'arête de la Développée eſt conſtant; donc l'angle que forme cette arête avec le plan de la baſe du cylindre eſt auſſi conſtant; donc un élément quelconque de l'aire de ladéveloppante eſt à ſa projection ſur le plan, dans le rapport conſtant du rayon au *coſinus* de ce dernier angle; donc une ſomme quelconque de ces élémens eſt à ſa projection dans le même rapport : donc, &c. *C. Q. F. D.*

XLV.

Corollaire.

La Développée d'une ſurface conique droite à baſe circulaire eſt une ſurface cylindrique, car cette Développée ſe réduit à l'axe du cône; donc les ſurfaces coniques droites ſont dans le cas du Théorême précédent; donc *une portion quelconque de la ſurface d'un cône droit eſt à ſa projection ſur le plan de la baſe du cône, dans le rapport du rayon au coſinus de l'angle que fait le côté du cône avec le plan de la baſe.* Propoſition que M. l'Abbé Boſſut a démontrée le premier dans ſa Géométrie, & qui n'eſt qu'un cas particulier du Théorême précédent.

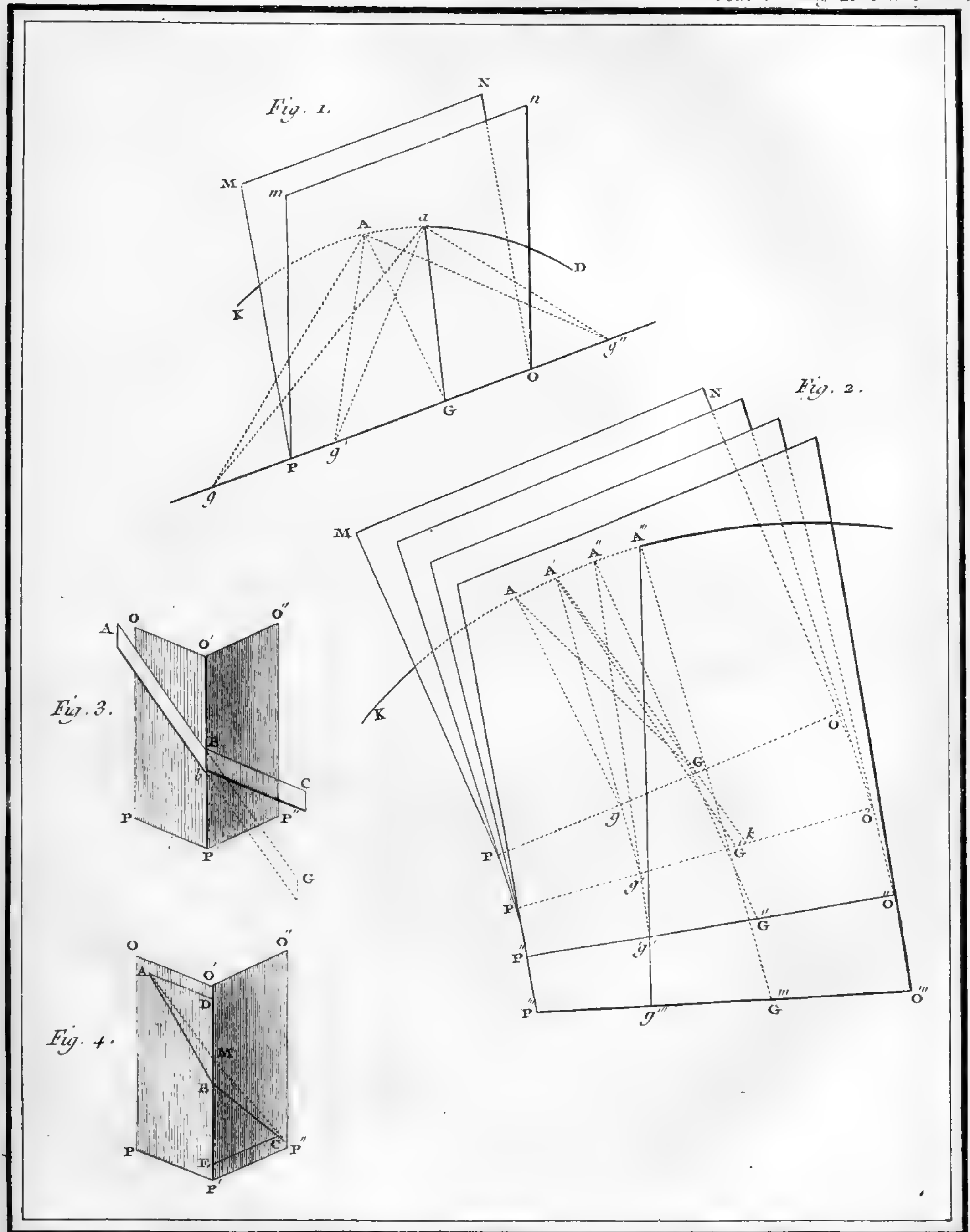
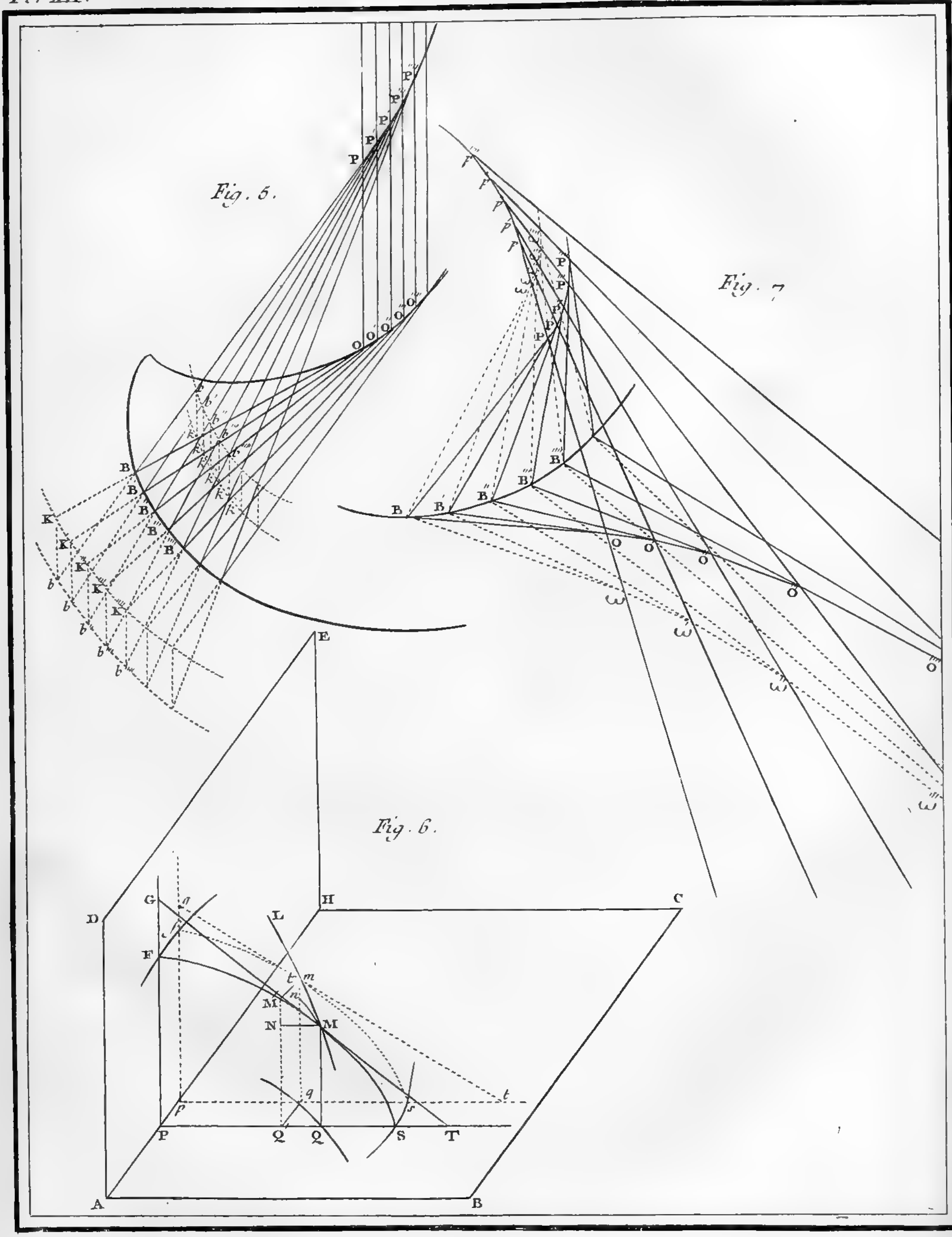


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.



Cne Haussard Sculp.

MÉMOIRE
SUR
LA FORMATION DU SOUFRE PAR LA VOIE HUMIDE.

Par M. LE VEILLARD. 1778.

IL n'y a point en Chimie d'expérience plus connue que le fameux procédé de Stahl pour faire du foie de Soufre avec du charbon en poudre, & du sel contenant l'acide vitriolique, qu'on met en fusion à l'aide d'un alkali fixe. L'acide, dit cet homme célèbre, s'unit au phlogistique du charbon, & il en résulte le Soufre minéral, lequel uni à la substance alkaline, base du sel vitriolique, ou ajoutée pour aider à sa fusion, forme du foie de Soufre, dont on le tire par le moyen d'un acide quelconque.

Glaubert, qui faisoit avant Stahl usage de ce procédé, se servoit de son sel, qu'il appeloit admirable; mais il ne prétendoit pas faire du Soufre, il croyoit seulement l'extraire des matériaux qu'il employoit.

Boile fait digérer enfemble de l'huile de térébenthine & de l'huile de vitriol; il diftille enfuite, & lorfque le mélange a pris une certaine confiftance, il obtient des fleurs de Soufre.

D'autres prétendent encore qu'à la fin de la diftillation de l'éther vitriolique, le réfidu, traité avec précaution, donne auffi le même produit.

Stahl, & la plupart des Chimiftes après lui, ont conclu de ces procédés, que le Soufre minéral n'étoit autre chofe que l'acide vitriolique uni au phlogiftique ou principe inflammable; ils ont penfé que, quoique l'acide vitriolique pût fe combiner avec ce principe, au moyen d'une fubftance quelconque qui le contient, puifque toutes donnent avec lui de l'acide fulfureux, ce produit particulier différoit du Soufre dans lequel les deux fubftances font différemment & plus intimement unies; & qu'il étoit néceffaire, pour l'obtenir, que l'une & l'autre fuffent dans un état de ficcité parfaite; de forte que le Soufre, formé par les mélanges liquides, ne fe produifoit que lorfqu'on les avoit parfaitement defféchées, & que l'acide vitriolique joint aux huiles, ne donnoit que des bitumes ou fubftances analogues, à moins que, dans le procédé, ces huiles ne fuffent réduites à l'état charbonneux : j'efpère que ce Mémoire détruira quelques-unes de ces affertions.

Les eaux fulfureufes que la nature donne en affez grande abondance, charient du Soufre en quantité, font accompagnées d'une forte odeur de foie de Soufre, & teignent, comme lui, les folutions métalliques; mais fi l'addition d'un acide augmente leur odeur, aucune cependant ne donne du lait de Soufre, ou, ce qui eft la même chofe, on n'obtient point de Soufre par la précipitation : on a même été long-temps fans pouvoir y démontrer cette fubftance; M. Monnet, qui nous a donné l'analyfe de plufieurs eaux de cette efpèce, ne l'y a point trouvé, même dans celles d'Aix-la-Chapelle qui le charient, & dans les regards defquelles il fe fublime en grande quantité; il donne même à cette occafion une théorie fort ingénieufe de fa formation.

M. Maquer, le P. Cotte de l'Oratoire, & moi, dans l'examen que nous avons fait séparément de la fontaine d'Anguien, nous n'en avons point trouvé dans cette eau très-sulfureuse, & dans le canal de laquelle on le recueille abondamment; cependant, depuis que cette fontaine est nettoyée, qu'on a pris la source de plus haut, l'eau puisée limpide, & qui se trouble quelque temps après, comme elle le faisoit auparavant, se charge d'une pellicule jaunâtre presque toute formée par du Soufre, & qui brûle comme lui; le dépôt qui se précipite ne paroît pas en contenir d'une manière sensible. MM. les Commissaires de la Faculté de Médecine, chargés de l'examen de cette fontaine, sont les premiers à qui cette expérience ait réussi. J'ai depuis obtenu ce produit; M. d'Eyeux a eu le même succès; & M. Roux, dont les Savans regretteront long-temps la perte, a trouvé le moyen, à l'aide du beurre d'arsenic, d'avoir pour précipité de véritable orpiment; mais personne, que je sache, n'a pu produire avec elle un lait de Soufre par le moyen d'un acide.

Tous les Chimistes qui se sont occupés de cette matière, ont cherché par quels moyens la Nature nous donnoit des eaux sulfureuses, à l'égard desquelles il faut remarquer que la plupart sont chaudes à un très-haut degré; mais que quelques-unes cependant, comme celles d'Anguien, sont froides; presque tous ces Savans ont attribué à des feux souterrains, des volcans, des décompositions de pyrites, des embrasemens de mines de charbon, la formation du foie de Soufre, sa combinaison avec l'eau, & la chaleur de cette dernière substance. A l'égard des eaux sulfureuses froides, on a pensé qu'éloignées du laboratoire où la Nature les avoit faites, & forcées de parcourir un long espace avant de paroître au jour, elles avoient eu le temps de se refroidir, & de prendre la température des lieux souterrains qui les avoient contenues en dernier lieu. Quelques-uns ont aussi soupçonné que ces eaux ayant été obligées de séjourner long-temps dans des cavités considérables, remplies de matières animales ou végétales, ou de ces deux espèces à la fois, macérées & putréfiées par un long espace de temps, le foie de

Soufre s'y étoit formé de lui-même, comme nous le voyons fréquemment dans les égoûts voisins des lieux habités. M. d'Eyeux, dans son Analyse de l'Eau d'Anguien, dit qu'il est probable que son foie de Soufre provient du dépôt de matières animales & végétales putréfiées, formé par les eaux de l'étang de Montmorency : on verra tout à l'heure, que le sentiment de ces Chimistes n'est nullement dépourvu d'apparence.

Les uns & les autres ont aussi pensé que le foie de Soufre de ces eaux étoit si bien fait, que, quoiqu'il contînt trop peu de Soufre pour en être précipité sensiblement par un acide, il donnoit pourtant une forte odeur de foie de Soufre, & qu'il en avoit toutes les autres propriétés.

Il est certain que nous rencontrons fréquemment dans les matières putréfiées une odeur très-distincte de foie de Soufre; les cloaques, sur-tout ceux qui reçoivent les eaux des blanchisseuses, les latrines, les ruisseaux même des rues, ne nous présentent que trop souvent des exhalaisons. M. Sage donne un procédé pour faire, à l'aide d'une eau de rivière ou séléniteuse, un véritable foie de Soufre; avec une dissolution de mercure par l'esprit de nitre, il en obtient un éthiops minéral qui donne du cinnabre par la sublimation; & je crois que la couleur noire des substances qu'on trouve immédiatement sous le pavé des rues, est due aux particules ferrugineuses détachées des roues & des fers des chevaux, & colorées par le foie de Soufre que produisent toujours les immondices des villes.

MM. Maquer & l'Abbé Nollet ont observé, dans les Mémoires de l'Académie, année 1724, que des assiettes d'argent, tirées des latrines du Château de Compiegne, s'étoient minéralisées par le Soufre au point de pouvoir l'y démontrer.

Pour moi, je vais plus loin, Messieurs; je crois que le Soufre & le foie de Soufre se forment même dans le corps des animaux, sur-tout dans l'homme. J'en juge par l'odeur très-distincte de foie de Soufre des vapeurs qui s'en exhalent, & par la teinture noire que donne constamment aux excrémens l'usage des eaux martiales, même lorsque ceux qui les boivent ne prennent que des substances animales, & des végétaux qui ne peuvent donner le suc astringent qui, comme on le sait, précipite le fer de ces eaux.

Il étoit naturel de penser que des eaux pourvues de presque toutes les propriétés du foie de Soufre, contenoient aussi du Soufre; & que, quoique personne ne l'en eût encore retiré en substance, il y existoit pourtant, & qu'apparemment la petite quantité qu'elles en contenoient s'opposoit seule à ce qu'on pût l'y appercevoir d'une manière palpable.

Il y a eu environ deux ans cette automne, qu'étant dans une maison du village de Boulogne, près Saint-Cloud, on m'avertit de prendre garde, si j'allois me promener, de tomber dans un égoût fort puant qui traversoit le jardin; il étoit ordinairement couvert de gazon, mais les madriers qui le soutenoient s'étant pourris, il s'étoit fait un enfoncement, & l'eau étoit à découvert : le hasard me conduisit près de cet endroit, & l'odeur décidée de foie de Soufre me dirigea pour trouver la partie découverte; il y en avoit à peu près une toise de long sur quatre pieds de large. Je fus très-étonné d'y voir surnager des pellicules assez épaisses, & semblables à celles que charie la fontaine d'Anguien; j'allai chercher une écumoire, & j'en ramassai une quantité considérable. J'emportai une bouteille de l'eau de l'égoût, & l'ayant essayée, elle ne donna point de lait de Soufre, mais les acides développèrent son odeur; elle précipita en un beau jaune le beurre d'arsenic, teignit en noir les solutions métalliques, & donna enfin tous les indices de foie de Soufre qu'on obtient des eaux sulfureuses; cet égoût servoit à des Blanchisseuses.

Je fis sécher les pellicules que j'avois recueillies; mises sur une pelle rouge, elles brulèrent avec une flamme bleue, & produisirent de l'acide sulfureux volatil; enfin la sublimation me donna de véritable Soufre.

D'après cette observation, il me parut démontré que le Soufre se formoit par la voie humide, & que les matériaux dont il est composé, se trouvant dans l'eau, le savon & les substances employées par les blanchisseuses, les huiles, graisses, & autres ordures enlevées des linges qu'elles nettoyoient, ils se combinoient au bout de quelque temps, & formoient le foie de Soufre, & le Soufre que j'avois retiré en nature.

Il est bon d'observer que la conduite dont je parle est couverte dans la longueur de plus de soixante toises, depuis son entrée dans le jardin jusqu'à sa sortie; & que, quoiqu'il soit d'une assez grande capacité, & qu'il m'ait paru très-plein dans sa partie découverte, il en sort très-peu dans la rigole extérieure destinée à conduire cette eau jusqu'à un cloaque situé entre le village & la Seine, peut-être parce que les terres absorbent une partie de l'humide.

J'ai depuis visité un assez grand nombre de cloaques, au Point du Jour, à Issy, au Gros-caillou; tous m'ont donné de forts indices de foie de Soufre, mais aucun, excepté celui du Monceau, de précipité, résidu ou pellicule inflammable. Ce dernier, qui reçoit toutes les immondices du hameau du Monceau, porte à sa surface une espèce de crême d'un vert jaunâtre: j'en ai ramassé le plus qu'il m'a été possible; desséchée, elle a brûlé sur la pelle, mais presque sans flamme; & son odeur, dans laquelle on démêloit celle de l'acide sulfureux, étoit encore composée d'une autre très-fétide: elle a donné, par la sublimation, du véritable Soufre brûlant avec flamme, & donnant l'acide sulfureux, mais en très-petite quantité, beaucoup moins que les pellicules épaisses de la conduite souterraine de Boulogne; l'eau filtrée & conservée dans un flacon bouché, a donné pendant long-temps toutes les marques de foie de Soufre; le flacon débouché, elle s'est bientôt troublée; soumise à l'évaporation, elle a donné un résidu brunâtre, d'une odeur fétide, qui donne une flamme comme celle du Soufre, & l'odeur d'acide sulfureux qui se mêle avec la première.

M. Darcet, chargé par la Société de Médecine d'examiner cette eau, avoit fait une partie de ces expériences avec beaucoup d'autres; & c'est lui qui, sachant que je m'occupois depuis long-temps de ce travail, m'a fait connoître le cloaque du Monceau.

Pourquoi la conduite souterraine de Boulogne fournit-elle une beaucoup plus grande quantité de Soufre, & sur-tout pourquoi trouve-t-on si communément du foie de Soufre dans les cloaques, les latrines & les égoûts, & si rarement du Soufre d'une manière sensible? Pour quelle raison enfin d'excellens Chimistes n'en trouvent-ils pas un atôme dans beaucoup de fontaines sulfureuses, qui cependant le charient en abondance?

Les terres calcaires & les alkalis se chargent avec la plus grande facilité du principe inflammable. Plusieurs Savans prétendent, non sans fondement, que la terre calcaire est susceptible de se changer en alkali fixe en s'unissant avec lui. M. Baumé donne un procédé pour se procurer artificiellement ce sel, en combinant, par la calcination, la chaux avec le phlogistique du charbon : la plupart même de ces Savans croient que c'est de la quantité de ce principe que dépend la fixité ou la volatilité des alkalis. En calcinant l'alkali fixe avec le sang de bœuf desséché pour obtenir la liqueur propre à faire le bleu de Prusse, il se dégage presque toujours des vapeurs très-sensibles d'alkali volatil à cause de la matière animale; mais, ce qu'on ignore peut-être, cette même lessive, long-temps gardée, se change souvent en entier en alkali volatil. Enfin M. Darcy fait disparoître avec la chaux l'odeur des eaux putréfiées; & M. Sage, avec un alkali fixe.

D'après cette propriété des substances alkalines, ne peut-on pas présumer que, dans le foie de Soufre, ce minéral est dans une espèce de décomposition; que son phlogistique combiné avec les alkalis, tient moins à son acide, & peut s'évaporer seul? On sait qu'en y versant un acide, son odeur s'exhale aussi-tôt, & ne tarde pas à se dissiper en entier. D'après cette opinion, que je crois raisonnable, je pense qu'il faut distinguer deux espèces de foie de Soufre, celui qu'on obtient par des moyens très-actifs, comme l'ébullition ou la calcination, & celui qui s'est formé par une opération longue & paisible, à l'aide d'une chaleur ordinaire. Il me paroît que le premier contient un excès de Soufre qu'on peut précipiter avec un acide, & que sa substance alkaline s'empare du principe inflammable de ce Soufre surabondant, à mesure qu'elle perd le sien par l'évaporation. Ce sentiment paroîtra presque certain, si l'on se rappelle qu'en chauffant avec précaution du foie de Soufre artificiel, on le change en entier en tartre vitriolé; l'autre foie de Soufre au contraire ne contient que le moins de Soufre possible, ce qui le rend incapable de donner un précipité par les acides.

D'un autre côté, l'odeur du foie de Soufre n'est ni celle du Soufre, ni celle de l'acide sulfureux, les terres calcaires & les alkalis fixes ne peuvent la donner; elle paroît donc provenir de la substance inflammable elle-même qui s'échappe continuellement, & dont la perte doit entraîner celle du Soufre; il n'est donc pas étonnant qu'on en obtienne si difficilement des eaux exposées à l'air libre. Et si l'on se rappelle que la fontaine d'Anguien, puisée plus bas que l'endroit où elle sort aujourd'hui, charioit du Soufre, mais n'en donnoit pas; & que presque tous les égoûts découverts ne donnent que du foie de Soufre, tandis que la fontaine d'Anguien, prise aujourd'hui plus haut, apparemment à l'endroit où elle commence à recevoir le contact de l'atmosphère, en donne sensiblement; & que la conduite souterraine de l'égoût de Boulogne en fournit abondamment (*a*), sans qu'on en trouve dans le cloaque où elle se rend : on soupçonnera que l'évaporation de ces eaux, dans lesquelles le foie de Soufre se forme incessamment, étant gênée, ou même réduite à rien dans les entrailles de la terre, ce foie de Soufre peut se décomposer, sans que son Soufre ou les matériaux qui le forment s'évaporent; qu'il vient alors nager en pellicule à la surface, & que les fontaines minérales ne charient que celui qui s'est ainsi rassemblé sous terre; au lieu qu'à l'air, elles le perdent par leurs exhalaisons, à mesure que le foie de Soufre se décompose : les expériences, subséquentes vont, je crois, donner à ce sentiment un nouveau degré de probabilité.

Vous avez sans doute déjà soupçonné, Messieurs, qu'ayant

(*a*) Depuis qu'on a couvert les égoûts de Paris, leur mauvaise odeur est centuplée; je ne doute point qu'on n'y trouvât du Soufre en nature.

pris ces soins pour examiner le procédé de la Nature, j'ai dû chercher à l'imiter; effectivement, dès le commencement de l'été de 1776, j'ai fait au moins cinquante mélanges différens des matières que j'ai crues les plus capables, par leur décomposition & recomposition, de former du Soufre, & j'ai aussi varié leur exposition; j'en ai mis à l'ombre, au soleil, dans l'intérieur, & même à la cave.

Comme le nombre des possibles à cet égard est prodigieux, on sent bien que je n'ai pas prétendu le remplir, & je ne rendrai même pas compte des mélanges qui n'ont rien produit, si ce n'est de quelques-uns dont on pourroit présumer que j'aurois obtenu du succès, & qu'on croiroit peut-être que j'aurois oubliés, si je ne les rapportois pas.

Je n'entrerai dans aucun détail sur le procédé de M. Sage pour obtenir du foie de Soufre par le moyen de l'eau de Seine ou d'une eau séléniteuse; cette dernière ne réussit que par l'addition d'une matière qui contienne du phlogistique : la suite va faire voir, comme il le dit, que les eaux qui contiennent des sels avec l'acide vitriolique, sont, plus qu'aucun autre, propres à former du Soufre.

Cinq pintes d'eau de pluie & douze onces de sang de bœuf, dans un vase en plein air négligemment fermé, ont, au bout de six semaines, donné une odeur très-fétide, dans laquelle on distinguoit celle de foie de Soufre. On remarquoit sur sa surface quelques grandes taches larges & blanchâtres; la liqueur a légèrement teint en brun la dissolution d'argent par l'esprit de nitre, & précipité en jaune éclatant le beurre d'arsenic; elle n'a donné pour lors & par la suite aucun autre indice sulfureux.

Cinq pintes d'eau très-séléniteuse avec douze onces de sang de bœuf, dans les mêmes circonstances, ont produit la même chose d'une manière un peu plus marquée.

Deux pintes & demie d'eau de rivière, trois onces de savon blanc, demi-livre de terre végétale n'ont donné, dans les mêmes circonstances, que de très-foibles marques de foie de Soufre.

Deux pintes de l'eau séléniteuse, trois onces de savon noir, demi-livre de terre végétale, placées de même à l'air libre & négligemment couvertes, ont produit la même chose.

Le même mélange avec du ſavon blanc, au lieu du noir, a fourni des indices de foie de Soufre un peu plus marqués.

Tous les autres mélanges pour leſquels j'avois employé des eaux de pluie, de rivière, & ſéléniteuſes, des alkalis, des ſels vitrioliques, des ſubſtances, & des graiſſes végétales & animales, &c. ſuivant les proportions & avec les circonſtances que je croyois devoir le mieux réuſſir, n'ont produit aucun indice de foie de Soufre.

Comme l'hiver approchoit, & que je courois riſque que la gelée ne me caſſât une partie des vaſes dans leſquels étoient mes mélanges, je les fis tous porter à la cave, ne déſeſpérant pas encore d'obtenir par leur moyen quelques produits ſatisfaiſans; je les ai tous fait remettre à leur place le printemps dernier. L'été ne m'a rien donné de nouveau; mais vers la mi-Octobre quelques-uns ont commencé à ſentir le foie de Soufre, & le premier Novembre je trouvai des apparences marquées de Soufre à la ſurface de pluſieurs; j'attendis encore juſqu'au 8; alors:

Un mélange de trois pintes d'eau de rivière, une once ſix gros d'alkali minéral, trois gros de ſel de Glauber, & une once d'huile de navette, me fournirent une liqueur ſentant fortement le foie de Soufre, teignant en noir les eaux martiales & les ſolutions métalliques, précipitant en jaune doré le beurre d'arſenic, & verdiſſant le ſirop de violette. L'addition d'un acide n'a point occaſionné de lait de Soufre; mais la liqueur filtrée s'eſt légèrement troublée : il s'eſt formé ſur la ſurface de petites pellicules jaunâtres en trop petite quantité pour être ſoumiſes à la ſublimation, mais qui cependant, ſéchées avec attention, brûloient ſur la pelle rouge comme du Soufre, & donnoient une odeur très-marquée d'acide ſulfureux.

Deux mélanges, un de trois pintes d'eau de rivière, une once ſix gros d'alkali de ſoude, une once de ſain-doux; le ſecond, de trois pintes d'eau de pluie, deux onces deux gros d'alkali d'alkali de soude, une once de sain-doux, & trois gros de sel de Glauber, m'ont donné les mêmes produits que le précédent.

Des feuilles & branches de tilleul, macérées dans plusieurs sceaux d'eau de pluie avec trois onces de sel de Glauber, ont donné l'odeur très-marquée de foie de Soufre, sans aucun autre indice; mais les mêmes matières végétales, macérées dans l'eau très-séléniteuse, m'ont donné du foie de Soufre aussi formé que celui des procédés que j'ai rapportés, & qui m'ont le mieux réussi, & même une plus grande apparence de Soufre à la surface.

Je n'ai point fait jeter tous ces mélanges, & le succès que j'ai obtenu de celui dont je vais rendre compte, me fait espérer qu'ils pourront me procurer du Soufre d'une manière encore plus décidée.

Trois pintes d'eau de pluie, cinq gros de sel de Glauber, quatre onces de savon noir, exposés, comme les précédens mélanges à l'air libre au commencement de l'été de 1776, & négligemment couverts, examinés le 10 Novembre dernier, m'ont donné tous les indices de foie de Soufre, excepté le lait de Soufre; la surface de la liqueur étoit en entier couverte d'une pellicule jaunâtre très-mince. Comme la terrine qui contenoit ce mélange n'étoit pas exactement couverte, je la vidai dans une autre plus petite, & je renversai dessus une beaucoup plus grande qui la fermoit assez bien; trois jours après, je retrouvai ma pellicule beaucoup plus épaisse, de sorte que je pus en recueillir une quantité, qui, desséchée, pesa seize grains : elle brûla comme le Soufre, & j'obtins d'une partie six grains par la sublimation.

Moitié de la liqueur évaporée laissa cristalliser du sel de Glauber, mais en proportion beaucoup moindre que ce qu'elle devoit contenir, s'il n'eût pas en partie souffert de décomposition; & le dernier résidu d'une saveur très-alkaline, teignant en vert le sirop de violette, fit une forte effervescence par l'addition de l'acide vitriolique.

Cette dernière expérience, Messieurs, me paroît décisive. Je n'examine point, pour le moment, à quelle ſubſtance le Soufre eſt uni dans les différentes productions d'hépar dont j'ai parlé ; il me ſuffit d'avoir prouvé, par toutes les obſervations rapportées dans ce Mémoire, que le Soufre peut ſe former par la voie humide & froide, c'eſt-à-dire, avec la ſeule température de l'atmoſphère, ou celle de l'intérieur de la terre, abſtraction faite d'aucune chaleur produite par des circonſtances particulières, comme volcans, pyrites enflammées, &c.

Je ne prétends aſſurément point comparer mon travail à celui de Stahl qui, ſi quelqu'un a fait du Soufre avant qu'il y penſât, a du moins eu le premier le deſſein d'en faire, & ſu qu'il en faiſoit; mais je crois pouvoir regarder mes expériences comme le complément de la ſienne : cependant, en confirmant ſa théorie, vous voyez qu'elles relèvent quelques erreurs dans leſquelles on tomboit en expliquant les détails de ſon procédé. Beaucoup de Chimiſtes croyoient qu'il étoit néceſſaire que l'acide vitriolique & la matière du feu fuſſent abſolument exempts d'humidité pour s'unir & former du Soufre, & que la combinaiſon de cet acide avec les ſubſtances huileuſes ne produiſoit, à moins qu'elles ne fuſſent réduites en charbon, que des bitumes. Il me paroît que j'ai démontré le contraire, & donné des moyens beaucoup plus ſimples que ceux qu'on imaginoit, d'expliquer l'origine de pluſieurs fontaines ſulfureuſes, de quelques amas de Soufre, & même celle d'un grand nombre de minéraliſation, ce qui ſera l'objet d'un autre Mémoire.

Enfin, dans une opération pour laquelle on emploie un feu très-vif, & qui produit en peu d'inſtans ce qu'on cherche, on ne connoît preſque que le réſultat : l'obſervateur le plus habile peut-il ſaiſir, au milieu d'un creuſet en incandeſcence, & dans lequel les matières ſont en fuſion, les différentes altérations qu'elles éprouvent, & la ſucceſſion de ces changemens? Il ſemble que les expériences que je viens de rapporter, moins brillantes que celles où l'on brûle beaucoup plus de charbon, mais pour leſquelles il faut une plus grande doſe de patience, n'employant pas un effort de l'art ſi conſidérable & ſi court, donnent des moyens plus faciles de ſuivre la chaîne des effets.

MÉMOIRE

SUR

LES ALBATROS.

PAR M. FORSTER.

LES premiers Navigateurs, depuis Amerigo Vespucci, ont vraisemblablement donné le nom d'*Albatros* ou d'*Alcatros* (*a*) à cette espèce d'oiseaux, car nous ne trouvons pas que les Anciens en aient eu la moindre connoissance. Cependant le Chevalier de *Linné* (*b*) appelle l'*Albatros* en latin, du nom d'un oiseau connu aux Anciens sous l'appellation de *Diomedea* (*c*). Si l'on considère tout ce qu'ils ont dit sur ce dernier oiseau, il paroît évidemment que c'étoit un oiseau aquatique, dont

(*a*) Dampier. Voy. vol. 2 (de l'édit. Angloise), l'appelle l'*Algatross*. Voyez le second Journal de Halley, pag. 29, 38, 40, où ces oiseaux sont appelés *Alcatross* & *Alcatrass*.

(*b*) *Diomedea exulans*. Linn. Syst. Nat. ed. XII, pag. 214.

(*c*) Aristot. de Mirabilis. Auscult. — Ovid. Metamorph. XIV, 507. — Plin. Hist. Natur. l. X, c. 44. Solin. Polyhist. c. 8. — August. de Civit. Dei, lib. XVIII, c. 16 & 18.

le plumage étoit blanc, le bec dentelé, & les yeux couleur de feu. Le Roi Juba, cité par Pline, nous enſeigne que la *Diomedea* étoit le même que le *Catarractes*, qui fondoit avec force ſur ſa proie dans la mer, ce que les Grecs exprimoient par Καταρασσειν; & par conſéquent on reconnoît très-aiſément ſous ces caractères le *Fou de Baſſan*. Il s'enſuivroit que le nom de *Diomedea* eſt très-mal appliqué à l'*Albatros*; mais le rejeter, après qu'il eſt déjà approprié à cet oiſeau, & généralement reçu, & en introduire un nouveau, ce ſeroit une pure affectation. Pour éviter donc l'air de ſingularité, nous adopterons en latin le nom de *Diomedea*, comme étant conſacré par l'uſage des plus célèbres Ornithologiſtes, & nous retiendrons celui d'*Albatros* pour le françois.

Tous les Ornithologiſtes & Voyageurs que nous connoiſſons, ne parlent que d'une ſeule eſpèce d'*Albatros* (*a*); nous avons vu celle qui étoit connue auparavant, & en même temps nous en avons découvert deux nouvelles eſpèces.

Tous les oiſeaux de cette claſſe, que nous avons vus, ſe trouvèrent au delà de la ligne équinoxiale. Environ au degré 26 ou 27 de latitude méridionale, nous avons rencontré les premiers *Albatros* dans la mer du Sud & dans l'Océan Atlantique, & nous n'en avons vu aucun au nord de ces parages. Nous en avons obſervé pluſieurs juſqu'au delà du cercle polaire antarctique; ce qui prouve aſſez, à ce que je m'imagine, que ce genre d'oiſeaux eſt particulier à l'hémiſphère auſtral. M. Pallas, Savant diſtingué & célèbre dans l'Hiſtoire Naturelle, nous aprend qu'il y a des *Albatros* dans la mer Septentrionale qui ſépare l'Amérique du Kamtchatka; mais j'ai quel-

(*a*) L'*Albatros*, Edward's Hiſt. des Oiſeaux, t. 2, pl. 88. — *Plantus Albatrus*, Klein Geſchichte der Vogel, p. — L'*Albatros*, Briſſon Ornithologie, tom. VI, p. 126. — Osbeck. Voyage to China (édit. Angloiſe), tom. I, p. 109. — *Diomedea Albatrus*. Pallas Spiril. Zool. Faſc. V, p. 28. — L'*Albatros* du cap de Bonne-Eſpérance, planches enluminées, pl. 237. — Albatroſs, Pennant's genera of Birds, *in*-8°. Edinburg, 1773, p. 55.

que ſoupçon que ce n'eſt peut-être qu'une grande eſpèce de *Procellaire*, appelée communément par les Eſpagnols *Queranta-hueſſos*, ou même, ſi c'eſt une véritable eſpèce d'*Albatros*, qu'elle eſt différente des trois eſpèces dont nous donnerons l'hiſtoire dansce Mémoire.

La forme ſingulière du bec, des narines, du palais & de la langue; la figure des pieds, la longueur des ailes & l'os du *ſternum* extrêmement court, conſtituent les principaux caractères de cette famille d'oiſeaux aquatiques palmipèdes.

Le corps de l'*Albatros* eſt de la grandeur d'une oie; mais celui de l'eſpèce commune l'excède pour l'ordinaire. Il nage bien, mais cependant il aime plutôt à planer dans l'air à la ſurface de la mer, qu'à s'y repoſer, ce qu'il ne fait que très-rarement. J'ai quelquefois ſuivi de mes yeux un de ces oiſeaux pendant pluſieurs heures, ſans le voir ſe rabattre ſur l'eau. Mais dès qu'un Goiland brun (*Larus catarractes*, *Linn.*) découvre un *Albatros*, il s'attache d'abord à lui, il tâche toujours de gagner le deſſous, & d'attaquer ſon ventre à coups de bec; probablement ayant trouvé que c'eſt l'endroit le moins couvert, *le ſternum* étant plus court dans ce genre que dans tous les autres oiſeaux. L'*Albatros*, quoique plus grand, & pourvu d'un bec extrêmement fort, dont il donne de grands coups, ſe ſent inférieur à ce combat; & après une très-courte chaſſe, il échappe à ſon ennemi, en ſe mettant à la nage en pleine mer, où le Goiland n'oſe plus l'attaquer.

L'*Albatros* traverſe des diſtances immenſes ſans prendre relâche à terre. Nous parcourûmes pendant notre voyage l'Océan, qui ſépare l'Amérique méridionale de la Nouvelle Zélande, quatre fois dans différentes latitudes; nous trouvâmes la diſtance de cette dernière terre juſqu'à la terre de Feu, de quinze cents lieues, ſans découvrir la moindre petite iſle dans toute la zone tempérée auſtrale : eſpace qui fourmille par-tout d'*Albatros*. Il leur faut donc faire du moins un trajet de ſept cent cinquante lieues, pour arriver à une de ces terres; mais leurs longues & fortes ailes leur donnent la facilité de faire ces longs voyages. En comparant leur vol à la marche de notre vaisseau quand nous avions un vent frais en pouppe, j'ai lieu de croire qu'ils parcourent du moins douze ou quinze lieues par heure; d'où on peut conclure que le trajet de l'Océan pacifique ne leur couteroit que cinq ou six jours en été, y compris le temps nécessaire pour se reposer & pour prendre de la nourriture; car, dans les hautes latitudes, il n'y a point de nuit pendant cette saison. Cependant, quoique leur vol soit si rapide, on ne les voit presque jamais battre des ailes, mais ils planent continuellement, se servant d'un mouvement uni, fort & rapide; & ils ont pour cet effet des ailes d'une longueur prodigieuse, car nous en trouvâmes plusieurs qui avoient au delà de dix pieds d'envergure.

La voracité de ces oiseaux est très grande, à en juger par les viandes trouvées dans leur estomac: car dès qu'ils furent blessés, ils dégorgèrent une bonne quantité de ce qu'ils avoient récemment avalé, & cependant nous trouvâmes encore des poissons entiers, des restes de crabes, différens mollusques, des os considérables d'oiseaux, & une bonne provision des becs ou des os de la *Sepia Loligo* de Linné. La Nature les a donc pourvus de longues & fortes ailes, pour qu'ils pussent chercher leur nourriture dans de grands espaces, & parcourir presque un Océan entier pour assouvir leur faim. Cela est d'autant plus nécessaire, que les animaux submarins, afin de se mettre à l'abri d'un orage, se tiennent à une distance considérable sous l'eau pendant un gros vent (*a*): par conséquent il devient plus difficile de suppléer aux besoins des *Albatros*. Nous fûmes convaincus de la vérité de cette observation, en voyant avec quelle avidité ces oiseaux fondoient sur toutes les immondices

(*a*) Marsigli, dans son *Histoire physique de la Mer*, observe qu'à quinze brasses la mer n'est plus agitée, quand même il feroit un gros temps. Mais *Boyle*, *de Fundo Maris*, sect. III, veut qu'à quatre brasses, sous la surface de la mer, l'agitation causée par un gros vent ne soit plus sensible.

jetées des vaiſſeaux dans la mer; & un jour, après un gros temps, nous en attrapâmes neuf à un hameçon, y ayant attaché un morceau de peau de mouton au lieu d'appât. Et comme toute la ſubſiſtance de cet oiſeau vient de la mer, dont les animaux ont la ſurface du corps très-gliſſante, l'*Albatros* a le bec extrêmement fort, & d'une configuration particulière, mais en même temps très-propre pour bien ſaiſir les différens objets qui lui ſervent de nourriture. La pointe en eſt crochue; elle lui ſert de défenſe contre ſes ennemis, & en même temps pour dépecer les grands objets qui ſe préſentent pour ſa ſubſiſtance. L'intérieur des mâchoires eſt pourvu preſque dans toute ſa longueur, & de chaque côté, d'un corps oſſeux tranchant, correſpondant à une cannelure de la mâchoire oppoſée : au palais & aux côtés de la mâchoire inférieure, il y a d'autres élévations muſculeuſes, mais couvertes d'une membrane épaiſſe, garnie de dentelures, ou de rangs de verrues, dont les pointes ſont dirigées en arrière. La langue, qui eſt charnue, de deux tiers plus courte que le bec, & d'une figure à peu près conique, eſt auſſi pourvue de chaque côté d'un rang de ces dentelures. On comprend aiſément que ce tout enſemble ſert à faciliter la capture, & la ſaiſie de ſujets ſubmarins qui ſervent de nourriture à l'*Albatros*, & à empêcher qu'aucun n'en échappe.

Les narines ſont faites en forme de tuyaux coniques à baſe ronde & ouverte; elles ſont logées dans une cannelure latérale près de la baſe du bec, & elles ſont, par cette ſituation, gardées contre des accidens imprévus, qui, d'ailleurs, doivent être multipliés dans les oiſeaux de proie.

Les pieds ſont dénués de plumes juſqu'au delà du genou; & par-tout couverts d'une membrane grenelée. L'*Albatros* n'a que trois doigts, qui ſont joints par une membrane : le doigt extérieur a cinq phalanges ou articulations, celui du milieu en a ſeulement quatre, & l'intérieur n'en a que trois; mais il eſt garni, dans toute ſa longueur, d'une membrane latérale comme le doigt extérieur. C'eſt probablement pour aider l'*Albatros* à mieux nager, que les pieds sont grands, & qu'ils présentent une grande surface à l'eau, par l'addition de cette membrane, qui lui est aussi nécessaire pour l'aider à s'élever des eaux en l'air; car il commence toujours le vol par une course à la surface de la mer, dont il bat les eaux avec ses pieds pour prendre l'essor. Lorsque l'*Albatros* se trouve à terre, sur une surface unie, il ne sauroit s'envoler; ce que nous avons observé, en ayant plusieurs sur le tillac de notre vaisseau, lesquels même ne voulurent pas essayer de s'élever en l'air. Mais lorsqu'ils se trouvent sur une hauteur, au bord d'un précipice, ils s'élancent facilement, & s'enfuient à l'aide de leurs grandes ailes, qui alors ont libre espace à se déployer.

Toutes les espèces d'*Albatros* connues n'ont que douze pennes à la queue. Nous n'avons jamais eu occasion de voir leurs nids, leurs œufs ou leurs petits; mais il est très-probable qu'ils se retirent à des isles désertes au temps de leur ponte. Dans un islot, auprès d'une isle d'environ quatre-vingts lieues de circuit, que nous trouvâmes au sud de l'Océan atlantique, au degré 54 de latitude australe, & que nous appelâmes la *Géorgie méridionale*, nous observâmes du vaisseau, au milieu de Janvier 1775, un grand nombre d'*Albàtros* assis parmi les touffes d'un gramen, & je ne doute point qu'ils ne fussent là sur leurs nids.

Leur voix est rauque, tremblante, & semblable au cri d'un âne. Lorsque nous en eûmes attrapé plusieurs, que nous laissâmes aller sur le tillac, ils commencèrent d'abord à se battre à coups de bec, & ils en lâchèrent quelques-uns aux pieds de nos Matelots.

Comme ils sont obligés de parcourir la mer d'un bout à l'autre, pour y chercher leur subsistance, nous les trouvâmes extrêmement curieux; car à peine avions-nous mis une chaloupe en mer, pour voir s'il y avoit des courans, ou pour essayer par le thermomètre quelle en étoit la température à une certaine

certaine profondeur, ou même pour nous procurer des provisions fraîches dont nous étions quelquefois privés pendant quatre mois, que les *Albatros* venoient d'abord reconnoître ce que c'étoit; mais ils payoient de leur vie cette curiosité : ce qui nous donna la satisfaction de faire des observations sur toute la famille de ces oiseaux marins, dont nous fîmes quelquefois très-ample provision; & en même temps, leur ayant tiré la peau avec les plumes, nous en fîmes des fricassées & des ragoûts que nous trouvâmes toujours préférables à nos provisions salées.

Nous trouvâmes sur les *Albatros* deux différentes espèces de poux. L'une étoit longue, étroite, noire, avec quatre longs pieds, & deux qui étoient extrêmement courts; l'un des sexes avoit des cornes, & l'autre des antennes à soie, avec des articulations globuleuses. La seconde espèce étoit moindre, noirâtre, d'une figure plus arrondie, & la tête en étoit ronde, & tronquée par-derrière.

Il y a trois différentes espèces d'*Albatros* La commune est la plus grande; elle se trouve en grand nombre dans les mers au sud & à l'ouest du cap de Bonne-Espérance. La seconde est plus petite, & son bec, qui est noir, est marqué en dessus d'une ligne dorée; les marges de la bouche sont aussi dorées : elle se trouve dans les mêmes parages avec la commune. La troisième espèce, qui est de la même grandeur que la seconde, est remarquable par ses paupières blanches, & nous l'observâmes vers le cinquantième degré de latitude australe, en allant au sud du cap de Bonne-Espérance.

1. L'*Albatros commun* (*Diomedea Albatrus.*) est de la grandeur d'un cygne. Lorsqu'il est en repos, sa figure est plus lourde que celle des autres oiseaux aquatiques. Le plumage en général est blanc; mais les plumes de la tête, du col, du dos, de la poitrine, avec les couvertures supérieures de l'aile, & les scapulaires, ont trois ou quatre lignes transversales,

ondoyantes & noires. Les pennes de l'aile ſont toutes noires ; mais les tiges en ſont d'un brun jaunâtre : au milieu du dos il y a quelques ſcapulaires noires, & les autres vers les ailes ſont blanches, avec des taches rouſſâtres, & des bandes tranſverſales noires. La queue eſt courte & droite, ou un peu arrondie, & de la même couleur que le reſte du corps. Le ventre eſt blanc, & n'a que par-ci par-là des bandes ondoyantes noires. L'oiſeau dont il s'agit, a dix pieds trois pouces d'envergure, & quatre pieds trois pouces de longueur, depuis le bout du bec juſqu'à l'extrémité des pieds.

Le bec, qui a ſept pouces de longueur, eſt d'une couleur de chair pâle, avec une légère teinte de bleuâtre. Les pieds ſont à-peu-près de la même couleur, mais encore plus pâle. Les ongles ſont blanchâtres, minces, & émouſſés par le bout. L'œil eſt médiocre, perçant, & tout à fait noir.

Sous les plumes ; le corps de ces oiſeaux eſt revêtu d'un duvet délicat & blanc, dont les habitans de la Nouvelle Zélande font une parure eſtimée, en tirant la peau de l'*Albatros*, & en ôtant toutes les plumes. Ils mettent des morceaux de cette peau garnie du duvet blanc, aux grands trous qu'ils ont aux oreilles, & ils les préſentent aux nouveaux-venus, en ſigne d'amitié.

Cette eſpèce d'*Albatros* a les mœurs & les habitudes que nous avons détaillées dans la ſection ci-deſſus, où nous parlions des *Albatros* en général (*a*) ; nous les trouvâmes au delà du vingt-ſixième degré de latitude auſtrale, dans toutes les mers du

---

(*a*) Séduit probablement par une fauſſe nomenclature d'*Albin*, le Chevalier de Linné (Syſt. Nat. ed. t. XIII, p. 214.) place les *Albatros* entre les tropiques, dans la Zone torride où il n'y en a aucuns ; il dit auſſi qu'ils ſont d'un vol très-haut, ce que nous n'avons jamais obſervé, car ils aiment à planer ſur la mer à une diſtance médiocre au deſſus de ſa ſurface ; il ajoute, qu'il ſubſiſte des hirondelles de mer, & d'autres poiſſons volans qui ne ſe trouvent que dans la Zone torride. C'eſt la frégate (Pelecanus Aquilus) qu'on reconnoît facilement à ces caractères, & non pas l'*Albatros*.

Sud, l'Océan atlantique, celui des Indes, & le Pacifique. Cependant ils ſont moins fréquens à meſure que nous approchons du cercle polaire antarctique.

2. L'*Albatros a bec doré* (*Diomedea chryſoſtoma*) eſt de la grandeur d'une oie, & ſa figure eſt à peu près la même que celle de l'*Albatros commun* : il a ſix pieds & huit pouces d'envergure, & deux pieds neuf pouces de longueur, depuis le bout du bec à l'extrémité des pieds.

Il eſt blanc; il a la tête cendrée, & au deſſus des yeux un peu noirâtre. Le dos, les ailes, & la queue qui eſt arrondie, ſont noirs. Les pennes ſont d'un noir un peu brunâtre. Les tiges des *primaires* ſont jaunâtres; celles des *ſecondaires* ſont blanches. Les yeux ſont d'une couleur de noiſette, & dans l'angle poſtérieur, on voit, ſous la paupière de chaque œil, une tache blanche. Le bec eſt noir, mais il eſt marqué en haut d'une bande jaune longitudinale, qui ne s'étend pas juſqu'au bout, & les marges des mâchoires ſont auſſi dorées. Les pieds ſont d'une couleur de cendre bleuâtre.

Au reſte, cette eſpèce eſt en tout conforme en mœurs & habitudes aux autres *Albatros*, & ſe trouve dans les mêmes parages que la commune : cependant nous obſervâmes qu'il n'y en avoit que très-peu dans le voiſinage du cercle polaire antarctique & dans l'Océan pacifique.

3. L'*Albatros à paupières blanches* (*Diomedea palpebrata*) eſt de la grandeur d'une oie. Sa figure eſt plus leſte que celle des deux autres *Albatros*. Il a ſix pieds & ſept pouces d'envergure, & deux pieds ſept pouces de longueur du bout du bec juſqu'à l'extrémité des pieds.

Son plumage eſt cendré, mais tirant ſur le brun; la tête eſt de couleur de ſuie, comme les pennes des ailes & de la queue, dont celles du milieu ſont les plus longues, & dont les tiges ſont blanches. Les couvertures des ailes ſont d'une couleur brune noirâtre.

Le bec eſt long de quatre pouces & noir : les pieds ſont d'une couleur de cendre foncée, & les yeux d'un jaune pâle, & la paupière d'en-haut, avec la moitié de celle d'en-bas, eſt blanche.

Cette eſpèce ſe trouve depuis le degré quarante-ſeptième de latitude auſtrale juſqu'au ſoixante-onzième & dix minutes, où, avant nous, aucun vaiſſeau n'avoit jamais pénétré.

George Forster del. Cne. Haussard Sculp.

L'Albatros commun.

George Forster del. El. Haussard Sculp.

L'Albatros à bec doré

George Forster del.

Elth Haussard Sculp.

L'Albatros a paupiere Blanches.

RECHERCHES
SUR
LES INTÉGRALES
DES ÉQUATIONS
AUX DIFFÉRENCES FINIES,
ET
SUR D'AUTRES SUJETS.

PAR M. CHARLES.

LE calcul des différences finies eſt actuellement l'objet des recherches des plus grands Géomètres; ils ont déjà intégré des équations aſſez générales appartenantes à ce calcul, & découvert pluſieurs théorêmes importans, qui en ont beaucoup reculé les bornes. M. le Marquis de Condorcet, ſur-tout, a ſingulièrement perfectionné cette branche importante de l'analyſe; entre autres choſes, il a le premier remarqué que la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les Intégrales des équations aux différences partielles, ſe réduiſoient généralement à l'intégration d'équations aux différences finies. Cette remarque, qui eſt une des plus brillantes découvertes analytiques de notre ſiècle, peut figurer dignement à côté de celle même du calcul des différences partielles qui y a donné lieu. Cependant, malgré tous les efforts faits juſqu'ici par ces hommes de mérite, le calcul des différences finies eſt encore hériſſé de difficultés, dont la ſolution coutera bien des veilles aux Géomètres.

Je ſuis préſentement trop éloigné de ces Meſſieurs, pour prendre rang parmi eux; mais je peux marcher en avant, & arracher quelques ronces qui, ſans les arrêter dans leurs courſes, pourroient néanmoins leur donner des diſtractions, toujours préjudiciables au progrès des connoiſſances.

J'entre donc en matière. Je pourrois expoſer à l'Académie ſynthétiquement, & d'une manière rapide, les théorêmes & les remarques qui forment le réſultat de ces Recherches. Cette marche conviendroit mieux ſans doute à mes Juges, accoutumés à tout entendre à demi-mot, qu'une analyſe ennuyeuſe qu'ils peuvent toujours ſuppléer; mais elle plairoit moins peut-être au plus grand nombre de mes Lecteurs. Ainſi j'expliquerai tout uniment la marche analytique que j'ai ſuivie; par ce moyen, les réſultats ſe préſenteront naturellement, & je ne ſupprimerai que les pas inutiles.

Définitions. Soit le produit de k facteurs, tels que $x(x-1)\ldots(x-k+1)$, je repréſenterai ce produit par $[x]^k$, comme M. Vandermonde; je repréſenterai encore fraction $\frac{1}{1.2\ldots k}$ par $[o]^{-k}$;

je ſuppoſerai $\left.\begin{matrix} {}^{\mu}x \\ {}^{\mu}y \end{matrix}\right\} = \begin{matrix} x+\mu\Delta x+[\mu]^2\,[o]^{2-}\,\Delta^2 x + \&c. \\ y+\mu\Delta x+[\mu]^2\,[o]^{-2}\,\Delta^2 y + \&c. \end{matrix}$

Problême. Soit l'équation ${}^{m}y=\delta\left[x, y, {}^{1}y\ldots{}^{m-1}y\right]$, & $x+\Delta x=\lambda[x]$, on propoſe de la conſtruire.

Solution. Menez les lignes AV & AT (*fig.* 7.) perpendiculaires entre elles, qui ſeront les axes des coordonnées y & x, & la ligne AZ qui diviſe l'angle droit en deux parties égales. Construisez sur l'axe A T la courbe ${}_{0}D\,{}_{1}D\,S$, telle que, pour une abscisse x, l'ordonnée correspondante soit $\lambda[x]$; prenez sur A T un point quelconque ${}_{0}A$, par lequel vous menerez l'ordonnée ${}_{0}A\,{}_{0}D$ à la courbe A S; par le point ${}_{0}D$, menez la parallèle à A T jusqu'à ce qu'elle rencontre A Z en ${}_{1}K$. Par ${}_{1}K$, menez la perpendiculaire ${}_{1}K\,{}_{1}D$ sur ${}_{1}K\,{}_{0}D$ jusqu'à la courbe ${}_{0}D\,S$; par le moyen de ce point ${}_{1}D$, vous déterminerez un point ${}_{2}K$, comme le point ${}_{1}K$ l'a été par le point ${}_{0}D$; & procédant toujours de la même manière, vous arriverez au point ${}_{m}K$ qui est ici ${}_{3}K$, (la figure n'étant faite que pour le troisième degré). Par ce point, abaissez la perpendiculaire ${}_{3}K\,{}_{3}A$ sur A T, & sur la portion ${}_{0}A\,{}_{3}A$, décrivez la génératrice quelconque ${}_{0}B\,{}_{3}B$, pourvu cependant que l'équation se vérifie au dernier point ${}_{3}B$. Ensuite ayant pris un point ${}_{0}P$ sur A T, axe des x, vous déterminerez les points ${}_{0}H$, ${}_{1}H$ .. ${}_{m}H$ (ici le dernier point est ${}_{3}H$) par le moyen du point ${}_{0}P$, comme les points K ont été déterminés par le moyen du point ${}_{0}A$, & vous menerez la perpendiculaire ${}_{3}H\,{}_{3}P$. Or comme les ordonnées ${}_{0}P\,{}_{0}M$, ${}_{1}P\,{}_{1}M$ & ${}_{2}P\,{}_{2}M$ sont données par la génératrice, & ${}_{3}y$ par la proposée, on portera cette valeur de ${}_{3}y$ sur la perpendiculaire ${}_{3}P\,{}_{3}H$ de ${}_{3}P$ en ${}_{3}M$, & le point ${}_{3}M$ sera à la courbe cherchée. Le point ${}_{0}P$ fournit aussi un point ${}_{-1}M$ à la gauche de la génératrice. Pour le déterminer, il faut d'abord mettre la proposée sous cette forme ${}^{m-1}y = \delta\left[{}^{-1}x, {}^{-1}y, y \,..\, {}^{m-2}y\right]$, d'où on tirera ${}^{-1}y$. Par le point ${}_{0}H$, on menera ${}_{0}H\,{}_{-1}D$ à la courbe ${}_{0}D\,S$, & par ce point ${}_{-1}D$ la perpendiculaire ${}_{-1}D\,{}_{-1}P$, sur laquelle on prendra ${}_{-1}P\,{}_{-1}M = {}_{-1}y$, & le point ${}_{-1}M$ appartiendra à la courbe qui précède la génératrice. On détermineroit de même tant d'autres points qu'on voudroit de la courbe cherchée.

Cette construction indique une méthode d'intégration. Il faut mettre la proposée sous la forme . . . . ${}^{m+\mu}y = \delta\left[{}^{\mu}x, {}^{\mu}y, {}^{\mu+1}y \,..\, {}^{m+\mu-1}y\right]$, & intégrer, en regardant μ comme la variable principale, & faiſant $\Delta\,\mu = 1$; enſuite prendre pour conſtantes, des fonctions arbitraires de x, qu'on pourra déterminer par le moyen de la génératrice.

Exemple. Soit ${}^{2}y = 2\,m\,{}^{1}y + n\,y$, on écrira . . . . . . ${}^{\mu+2}y = 2\,m\,{}^{\mu+1}y + n\,{}^{\mu}y$, & intégrant, on trouvera ${}^{\mu}y = \left(m + \sqrt{m^2 + n}\right)^{\mu} \psi\,[x] + \left(m - \sqrt{m^2 + n}\right)^{\mu} \psi^{1}\,[x]$, les lettres ψ déſignent des fonctions arbitraires.

Soit $y = \theta\,[x]$ l'équation de la génératrice, on aura $\psi\,[x] + \psi^{1}\,[x] = \theta\,[x]$, & . . . . $(m + \sqrt{m^2 + n})\,\psi\,[x] + (m - \sqrt{m^2 + n})\,\psi^{1}\,[x] = \theta\,[{}^{1}x]$; d'où on tirera les fonctions ψ & ψ^{1}. Maintenant, puiſque ${}^{1}x = \lambda\,[x]$ on a ${}^{\mu}x = \lambda^{\mu}\,[x]$, l'expoſant μ indique combien de fois on doit répéter le ſigne λ; on tire de là $x = \lambda^{-\mu}\left[{}^{\mu}x\right]$; ici l'expoſant $-\mu$ indique combien de fois on doit renverſer la fonction. Subſtituant & déſignant les coordonnées quelconques par $x\,y$, on aura . . . .

$$y = \left(m + \sqrt{m^2 + n}\right)^{\mu} \psi\left[\lambda^{-\mu}\,[x]\right] + \left(m - \sqrt{m^2 + n}\right)^{\mu} \psi^{1}\left[\lambda^{-\mu}\,[x]\right]$$

pour l'intégrale complette de la propoſée.

Il réſulte de la conſtruction, qu'on doit faire $\mu = 0$ quand $x =$ une valeur donnée g, & $\mu = k$ quand x eſt entre $\lambda^{k}\,[g]$ & $\lambda^{k+1}\,[g]$, y compris $\lambda^{k}\,[g]$.

Comme la valeur de $\lambda^{-\mu}\,[x]$ eſt toujours entre g & $\lambda\,[g]$, y compris g, il ſuit de là que les fonctions ψ & ψ^{1} doivent être données depuis l'abſciſſe g juſqu'à l'abſciſſe $\lambda\,[g]$. S'il arrive que ces fonctions ſoient diſcontinues, les courbes qui les repréſentent doivent être tracées. Les différentes formes de la fonction λ donnent lieu à différens cas, entre leſquels il y en a deux importans qu'il eſt utile de développer.

Premier Cas. La courbe ${}_{0}DS$ eſt toute au deſſus de la ligne A Z, & ne peut pas être coupée en plus d'un point par des

des parallèles à l'axe (*fig. 7.*). Il est évident que la génératrice $_0B\,_0M\,_1B$ étant une fois donnée, la courbe intégrale sera absolument déterminée. Dans ce cas, les fonctions ψ & ψ^1 qui entrent dans l'équation intégrale ou les courbes qui les représentent, si elles sont discontinues, sont constantes, parce qu'alors il n'y a point de valeur de x, pour laquelle on ne puisse trouver le nombre correspondant μ. Par conséquent, si l'équation intégrale devoit appartenir à un polygone, on ne pourroit pas donner un nombre d'angles de ce polygone plus grand que l'exposant de l'équation.

Second Cas. La courbe $_0DS$ coupe AZ en plusieurs points (*fig. 8*), & ne peut pas être coupée en plus d'un point par des parallèles à l'axe. Si des intersections, B, C, &c. on mène des perpendiculaires qui rencontrent l'axe des x aux points E, F, &c., & si, sur un des intervalles compris entre deux intersections consécutives, par exemple, EF, on construit une génératrice, comme dans la figure septième, il est clair que cette génératrice ne pourra donner aucun point de la courbe intégrale hors de l'espace EF, parce que tous les points $_0D$, $_1D$, $_2D$, &c. qu'on pourra former, seront tous entre E & F, fussent-ils en nombre infini. La courbe intégrale ne sera donc déterminée que sur l'étendue EF : ainsi il faudra se donner autant de génératrices qu'il y aura d'intervalles. De plus, s'il y a des portions infinies à droite & à gauche, il faudra aussi, pour chacune de ces portions, une génératrice ; de sorte que, si k est le nombre de ces intersections, $k+1$ sera le nombre des génératrices toutes indépendantes l'une de l'autre. Dans ce cas, les fonctions ψ & ψ^1 qui entrent dans l'équation intégrale, ou les courbes qui les représentent, si elles sont discontinues, ne sont pas constantes nécessairement, parce que la quantité g à laquelle correspond $\mu = 0$, étant une fois choisie, il y aura des valeurs de x pour lesquelles le nombre correspondant μ n'existera pas. Alors on doit résoudre l'équation $x = \lambda\,[x]$. Soient p, q, r les valeurs de x qui en résultent, rangées suivant leur ordre de grandeur, on fera

$\mu = 0$ quand $x = p$, & cette ſuppoſition ſervira depuis l'abſciſſe p juſqu'à l'abſciſſe q; comme la ſuppoſition de $\mu = 0$ pour l'abſciſſe g ſervoit pour toute la courbe dans le premier cas; les fonctions ψ & ψ^{1} ſeront conſtantes dans cet intervalle. On ſuppoſera enſuite $\mu = 0$ quand $x = q$, & cette ſuppoſition ſervira de q à r; on pourra prendre alors d'autres fonctions ψ & ψ^{1}, qui ſeront auſſi conſtantes de q à r, & ainſi de ſuite. La raiſon de cela, c'eſt que, pour qu'une équation A, entre x & y, ſoit l'intégrale d'une équation B, il ſuffit que l'équation B ſe vérifie entre une certaine fonction de pluſieurs y conſécutifs, & de x donnés par l'équation A. Or, dans l'hypothèſe préſente, ſi on prend un de ces y entre p & q, par exemple, tous les autres antécédens & ſuivans ſeront auſſi entre p & q, en ſituation (doit-on entendre) & non en quantité. Par conſequent, ſi l'équation intégrale appartenoit à un polygone, on pourroit ſe donner $(\mathrm{K}+1)\,n$ angles de ce polygone, K étant le nombre des interſections, & n le degré de l'équation. Mais on n'en doit pas donner plus de n dans chaque intervalle.

Remarque. Si la fonction $\lambda\,(x)$ contenoit un paramètre, dont le changement, la diminution, par exemple, rapprochât continuellement la courbe de la ligne AZ, & enfin la fît tomber totalement ſur cette ligne, dans le cas de ce paramètre $= 0$, on conçoit qu'alors la ligne DS devroit être cenſée couper la ligne AZ au même point où elle la coupoit avant de ſe confondre avec elle. Donc l'équation aux différences infiniment petites, dans laquelle ſe change alors l'équation aux différences finies, admettra auſſi $(\mathrm{K}+1)\,n$ conſtantes arbitraires aux mêmes conditions; ou, pour parler plus exactement, les n conſtantes, introduites dans l'intégration, pourront changer de valeur $\mathrm{K}+1$ fois. Ainſi, quand on aura à traiter une équation aux différences infiniment petites, il faudra régler le changement des conſtantes ſur l'équation aux différences finies, dont elle eſt limite, ſi une telle équation eſt donnée par le problême qui a conduit à l'équation différentielle. Si elle ne l'eſt pas, ce qui arrive preſque toujours, il faut la ſuppoſer la plus générale poſſible.

Par exemple, ſi on doit intégrer l'équation $ddy = 0$, ſans que l'équation aux différences finies ſoit donnée, on écrira $y = G[v] + xF[v]$, v étant un nombre entier qui change par ſaut d'une manière quelconque. Ceci me paroît être une concluſion aſſez naturelle de ce qui précède. Cependant, ſi mon Lecteur refuſe d'admettre ce réſultat, & ſoutient l'immutabilité des conſtantes, je lui déclare que mon intention n'eſt pas d'en diſputer, ni de l'excéder de diſcuſſions pointilleuſes. Dans ce cas, je me contenterai de remarquer que ces Intégrales ne donnent pas les ſolutions générales des problêmes qui les ont fournies; ce que je vais prouver par pluſieurs exemples.

Exemple premier. Soient tant de cercles qu'on voudra paſſant par A (*fig.* 1.), & ayant leur centre ſur la ligne A B, on demande la courbe qui coupe tous ces cercles à angles droits. En traitant ce problême convenablement, on arrive à une équation différentielle, dont l'Intégrale eſt $y.$ conſtante $= x^2 + y^2$, les coordonnées rectangles ſont x & y : or, ſi on conſerve à la conſtance l'immutabilité, on aura un cercle paſſant par A, & ayant ſon centre dans la perp. A D à A B; mais n'eſt-il pas évident que, ſi je prends les arcs A Q, R S, T V, &c. dont les prolongemens paſſent par A, & qui aient leurs centres ſur A D, ce ſyſtême d'arcs de différens cercles, qui n'eſt point un cercle, réſoudra le problême? Donc, &c.

Exemple second. On propoſe de trouver la courbe dont la ſous-tangente eſt double de l'abſciſſe. Le calcul intégral donne $y^2 = x.$ conſt. ce qui donne une parabole ſi la conſtante eſt fixe. Mais les lignes A Q, R S, T V (*fig.* 2.), arcs de parabole, dont le prolongement paſſe par A, réſolvent le problême; donc, &c.

Exemple troisième. On propoſe de faire paſſer par trois points, non en ligne droite, la ligne la plus courte; l'Intégrale de l'équation $ddy = 0$ ne pourra y ſatisfaire, en conſervant les conſtantes fixes.

EXEMPLE QUATRIÈME. Soit l'équation $dy = dx : \sqrt{1 - x^2}$, où y exprime l'arc dont le *ſin.* eſt x, intégrant en logarithmes imaginaires, on trouve $y\sqrt{-1} + \mathit{conſt.} = L(x\sqrt{-1} + \sqrt{1 - x^2})$. Juſqu'à préſent on a toujours ſuppoſé, pour déterminer la conſtante, que y & x s'évanouiſſoient en même temps; & par conſéquent on a regardé l'équation $y\sqrt{-1} = L(\mathit{coſ}\, y + \mathit{ſin.}\, y\sqrt{-1})$, comme exprimant la relation générale entre l'arc & le *ſinus*. Or cela n'eſt point exact, puiſque, ſi l'on ſuppoſe $y = 2n\pi$, n étant entier, on trouvera $2n\pi\sqrt{-1} = 0$; & ſi on ſuppoſe $y = (2n+1)\pi$, on trouvera $(2n+1)\pi\sqrt{-1} = L(-1)$, ce qui ne vaut pas mieux. Il faut, pour obtenir la véritable relation entre l'arc & le *ſinus*, faire la conſtante $= -2n\pi\sqrt{-1}$, tant que y eſt entre $2n\pi$ & $(2n+1)\pi$, & la faire $= L(-1) - (2n+1)\pi\sqrt{-1}$ quand y eſt entre $(2n+1)\pi$ & $2(n+1)\pi$; elle n'eſt donc pas fixe.

Ainſi, Lecteur, ſi vous ne convenez pas que les équations que je propoſe vérifient les différentielles, vous conviendrez du moins que, pour obtenir les ſolutions générales des problêmes, il faut rejeter les équations que vous appelez intégrales complettes, & y ſubſtituer celles que j'indique, auxquelles vous refuſez cette propriété.

COROLLAIRE. Puiſque la fonction $\lambda^{-\mu}[x]$ eſt la composante des fonctions arbitraires qui entrent dans l'équation intégrale précédente, il eſt bon de faire voir comment on pourra la déterminer dans quelque cas.

EXEMPLE PREMIER. Soit $\lambda[x] = a + px$, on aura $\lambda^{\mu+1}[x] = a + p\lambda^{\mu}[x]$ & $\frac{\lambda^{\mu+1}[x]}{p^{\mu+1}} - \frac{\lambda^{\mu}[x]}{p^{\mu}} = \frac{a}{p^{\mu+1}}$; donc en intégrant $\frac{\lambda^{\mu}[x]}{p^{\mu}} = \frac{a}{p^{\mu+1}\left(\frac{1}{p} - 1\right)} + \mathit{conſt.}$ faiſant $\mu = 0$, on aura *const.* $= x - \frac{a}{1-p}$, & par conséquent . . . .

$\lambda^{\mu}[x] = a\frac{1-p^{\mu}}{1-p} + p^{\mu}.\, x$. Donc $\lambda^{-\mu}[x] = \frac{x - a\frac{(1-p^{\mu})}{1-p}}{p^{\mu}}$.

Exemple second. $\lambda[x] = \frac{x^{n}}{a^{n-1}}$. On aura $\lambda^{\mu+1}[x] = \frac{\lambda^{\mu}[x]^{n}}{a^{n-1}}$.

Donc en prenant les logarithmes $L\,\lambda^{\mu+1}[x] = n\,L\,\lambda^{\mu}[x] - (n-1)\,L\,a$, divisant par $n^{\mu+1}$, intégrant & déterminant la constante, comme dans le premier exemple, on trouvera $L\,\lambda^{\mu}[x] = n^{\mu}\,L\,x + (1-n^{\mu})\,L\,a$. Donc $\lambda^{\mu}[x] = a\left(\frac{x}{a}\right)^{n^{\mu}}$, & $\lambda^{-\mu}[x] = a\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n^{\mu}}}$.

Exemple troisième. $\lambda[x] = a\,h^{\frac{x}{a}}$, on trouvera $\frac{x}{a} = L^{\mu}\,\lambda^{\mu}\left(\frac{x}{a}\right)$, & par conséquent $\lambda^{-\mu}[x] = a\,L^{\mu}\,\frac{x}{a}$; l'exposant μ indique combien le signe du logarithme doit être répété;

Le Lecteur pourra consulter sur cette matière les Mémoires présentés à l'Académie, volumes de 1773 & 1780 ou 1781.

Si la fonction δ étoit discontinue, on conçoit qu'il seroit impossible d'obtenir d'Intégrale; il y a plus, la construction aura quelquefois de grandes difficultés à raison du procédé graphique qui fera connoître cette fonction. Je vais donner, au moyen d'un exemple fort simple, quelque idée de la route qu'on pourra suivre dans ces circonstances.

Problême. Soit l'équation aux différences finies du second degré $\varphi[\Delta^{2} y, \Delta y] = \theta[x, y]$, la fonction φ est la troisième des coordonnées d'une surface connue, dont $\Delta^{2} y$ & Δy sont les premières : θ est la troisième des coordonnées d'une surface auſſi connue, dont x & y ſont les premières. On propoſe de conſtruire la courbe intégrale $\Delta\ x = a$; ces ſurfaces ne ſont pas analytiques.

Solution. On prendra de la ligne indéfinie A E (*fig.* 4.) une abſciſſe $A\ {}^2A = 2\ a$, ſur laquelle on conſtruira une génératrice $B\ M\ {}^2B$ analytique ou diſcontinue, pourvu que l'équation ſe vérifie à ſon dernier point ${}^2B$. On prendra une abſciſſe A P moindre que a qui ſera x ; on menera l'ordonnée correſpondante qui ſera y, & pour le point M, y & $\Delta\ y$ ſeront connus. Pour connoître $\Delta^2\ y$, on tranſportera la génératrice dans le plan des premières coordonnées de la ſurface θ, de manière que l'axe des y de la génératrice tombe ſur l'axe des y de la ſurface, & l'axe des x ſur l'axe des x ; par le point M, on menera la troiſième coordonnée à la ſurface θ, qui ſera connue. Par un point quelconque du plan des premières coordonnées de la ſurface φ, on menera une perpendiculaire = à la coordonnée qui vient d'être déterminée ; par l'extrémité de cette perpendiculaire, on menera un plan parallèle à celui des premières coordonnées, qui coupera la ſurface φ ſuivant une courbe qu'on projettera orthogonalement ſur le plan des premières coordonnées. Enfin, prenant la ſeconde coordonnée $\Delta\ y$, on menera l'ordonnée correſpondante de la projection, qui ſera $\Delta^2\ y$; enfin, prenant $P^2\ P = 2\ a$, on menera par ${}^2P$ la perpendiculaire ${}^2P\ {}^2M = y + 2\ \Delta\ y + \Delta^2\ y$, & le point ${}^2M$ ſera à la courbe cherchée. Pour avoir l'ordonnée ${}^{-1}y$, il faut donner cette forme à la propoſée $\varphi\ [{}^1y - 2\ y + {}^{-1}y,\ y - {}^{-1}y] = \theta\ ({}^{-1}x\ {}^{-1}y)$, & il n'y aura d'inconnues que ${}^{-1}y$ qu'il eſt queſtion de déterminer. Pour y parvenir, ſoient A E, A G (*figure* 5.) deux lignes perpendiculaires entre elles, qui repréſenteront le plan des premières coordonnées des ſurfaces θ & φ ; A G ſera l'axe des x pour la ſurface θ, & des $\Delta^2\ y$ pour la ſurface φ ; par conſéquent A E ſera l'axe des y pour la ſurface θ, & des $\Delta\ y$ pour la ſurface φ. On prendra $A\ G = {}^1y - y$; par le point G, on menera la ligne G E ſous 45°, qui ſera coupée par une perpendiculaire R D, menée ſur A G, à une diſtance $AD = {}^{-1}x$; on coupera la ſurface θ par un plan paſſant par R D, & perpendiculaire à E A G; on rapportera, ſur le plan de la figure, la courbe Y F qui en réſultera, & la ligne R D; on coupera la ſurface φ par un plan paſſant par R G, & auſſi perpendiculaire à EAG. On rapportera de même la courbe T V qui en réſultera, & la ligne R G ſur le plan de la figure. On prendra, ſur la ligne R D de la première courbe, une partie R Z, & ſur la ligne R G de la ſeconde, une portion $RL = ({}^{2\,1}y - {}^{3}y - {}^{2\,-1}x - RZ)\sqrt{2}$. Par le point L, on menera l'ordonnée L V à la courbe T V, & par Z on menera Z H perpendiculaire ſur R D & = L V; la courbe qui paſſera par tous les points H ainſi déterminés, coupera la ligne Y F en un point F, pour lequel il faudra mener l'ordonnée I F; portant enfin R I ſur R D, de R en X, X D ſera la valeur de ${}^{-1}y$.

Démonstration. Si on mène par X la troiſième coordonnée à la ſurface θ, cette coordonnée ſera égale à I F; enſuite, ſi on prend $RS = ({}^{2\,1}y - {}^{3}y - {}^{2\,-1}x - RX)\sqrt{2}$, & qu'on mène par S la troiſième coordonnée à la ſurface φ, cette coordonnée ſera auſſi égale à I F : ainſi, puiſque l'ordonnée en X a la ſurface $\theta =$, l'ordonnée en S a la ſurface φ. La queſtion ſe réduit à prouver que ſi du point S on abaiſſe la perpendiculaire S K, & ſi on prend enſuite $AB = {}^{1}y - {}^{2}y$, on aura B K = D X : or cela eſt clair, car puiſque $RS = ({}^{2\,1}y - {}^{3}y - {}^{2\,-1}x - RX)\sqrt{2}$, on a $DK = {}^{2\,1}y - {}^{3}y - {}^{2\,-1}x - RX$, & retranchant $DB = {}^{1}y - {}^{2}y - {}^{-1}x$, il reſte $BK = {}^{1}y - y - {}^{-1}x - RX$; $DG = {}^{1}y - y - {}^{-1}x$; donc $DX = {}^{1}y - y - {}^{-1}x - RX = BK$.

Il y a une autre eſpèce d'équations, qui ſe préſentent ſurtout dans la détermination des fonctions arbitraires, qui entrent dans les Intégrales des équations aux différences partielles; ce ſont les équations qui contiennent à la fois des différences infiniment petites, & des différences finies. Je n'ai à offrir à mes Lecteurs qu'un léger eſſai ſur cette matière ; il eſt contenu dans le problême ſuivant.

Problême. Etant donné l'équation $\Delta y = b\frac{dy}{dx}$, on propoſe d'en trouver l'Intégrale complette $\Delta x = a$.

Solution. On a ${}^1y = y + b\frac{dy}{dx}$; donc il eſt permis de ſuppoſer ${}^\mu y = y + F[\mu, 1]\frac{dy}{dx} + F[\mu, 2]\frac{ddy}{dx^2} .. + F[\mu, \nu]\frac{d^\nu y}{dx^\nu}$, $F[\mu, \nu]$ repréſentant une fonction de μ & de ν qu'il eſt queſtion de déterminer. Cela poſé, comme on a ${}^{\mu+1}y = {}^\mu y + b\frac{d^\mu y}{dx^\mu}$, ſi on met pour ${}^\mu y$ ſa valeur, on aura une expreſſion de ${}^{\mu+1}y$, dans laquelle le coëfficient de $\frac{d^\nu y}{dx^\nu}$ ſera $F[\mu, \nu] + bF[\mu, \nu - 1]$; il faudra faire ce coëfficient $= F[\mu + 1, \nu]$, & on aura en intégrant $F[\mu, \nu] = b^\nu[\mu]^\nu[0]^{-\nu}$. Par conſéquent ${}^\mu y = y + b[\mu^1][0]^{-1}\frac{dy}{dx} + b^2[\mu^2][0]^{-2}\frac{ddy}{dx^2} +$ &c. ce qui donne en multipliant & diviſant le ſecond membre de cette équation par $\frac{h^{\frac{x}{b}}}{b^\mu}$, ${}^\mu y = \frac{b^\mu}{h^{\frac{x}{b}}}\frac{d^\mu\left(h^{\frac{x}{b}}y\right)}{dx^\mu}$; maintenant, prenant x & y pour les coordonnées quelconques, on aura . . .
$$y = \frac{b^\mu}{h^{\frac{x - a\mu}{b}}}\frac{d^\mu(\psi[x - a\mu])}{dx^\mu};$$ quand μ ſera négatif, le ſigne de différentiation deviendra ſigne d'intégration, & on aura

aura $y = \dfrac{\int^{\mu} dx^{\mu}\, \psi[x - a\mu]}{b^{\mu}\, h^{\frac{a\mu - x}{b}}}$, h eſt le nombre dont le logarithme eſt 1.

Remarque. Il y a un problême très-connu des Géomètres, où ce calcul s'applique avec avantage ; c'eſt celui où on demanderoit le mouvement d'un nombre indéterminé de poids fixés à diſtances égales ſur une corde attachée en deux points, pourvu toutefois que ces corps ſoient peu éloignés de la ligne de jonction des points d'attache. L'équation de ce problême eſt ${}^{x}\Delta^{2} z = \dfrac{m\, dd(z + {}^{x}\Delta z)}{dy^{2}}$, x & z ſont les coordonnées d'un corps quelconque. Conſultez le premier volume des Mémoires de Turin. J'avois deſſein de donner ici l'intégrale de cette équation ; mais comme le calcul en eſt aſſez long, qu'on peut le faire facilement d'après ce qui précède, & que d'ailleurs le problême qui la produit eſt réſolu dans le Mémoire cité, par une méthode effectivement fort différente de celle que j'indique, j'aime mieux laiſſer à mes Lecteurs le plaiſir de faire cette application.

Fragment ſur les Fonctions diſcontinues.

Il en eſt des fonctions diſcontinues comme du haſard. Ces deux êtres, ou, pour parler plus exactement, cette manière d'être des objets & des évènemens nous eſt relative ; elle exprime ſeulement l'ignorance où nous ſommes des véritables cauſes. Quand je trace une courbe ſans deſſein, je dis qu'elle eſt diſcontinue, ce qui ne veut pas dire qu'il n'y a aucune loi de deſcription, mais ſimplement qu'elle n'eſt pas à ma connoiſſance. On conçoit que cette diſcontinuité ne ſauroit être exprimée par des formules analytiques : auſſi n'eſt-ce pas celle dont il eſt ici queſtion. Il y a une autre eſpèce de diſcontinuité, mais qui eſt ainſi nommée improprement ; c'eſt quand un effet, ayant ſuivi une loi pendant un certain temps ou le long d'une certaine abſciſſe, la quitte bruſquement pour en ſuivre une autre, comme feroit un corps qui décriroit un polygone. Mon intention eſt de prouver par des exemples, que quand les loix particulières ſont données en nombre quelconque, on peut toujours trouver la loi générale, & que l'algèbre, telle qu'elle eſt actuellement, ſuffit pour l'exprimer.

Exemple. Soit. . . . .

$$z = g + kx + \left(\frac{1}{1 + F\left[\frac{y}{a}\right]^{\frac{1-x}{a}}} + \frac{1}{1 + F\left[\frac{y}{a}\right]^{\frac{x-1}{b}}} \right) \sqrt{\overline{x-a}\,\overline{b-x}}$$

l'équation d'une ſurface, (je ſuppoſe les coordonnées perpendiculaires entre elles), a eſt $< b$. Si on fait $F\left(\frac{y}{a}\right) = 0$, & que, par la parallèle à l'axe des x donnée par cette équation, on faſſe paſſer un plan perpendiculaire aux x & y, il eſt clair que l'interſection de ce plan avec la ſurface, ſera une ligne droite qui commencera à l'abſciſſe a, & finira à l'abſciſſe b.

Soit l'équation d'une autre ſurface . . . .

$$z = g^1 + k^1 x + \left(\frac{1}{1 + F\left[\frac{y}{a}\right]^{\frac{1-x}{b}}} + \frac{1}{1 + F\left[\frac{y}{a}\right]^{\frac{x-1}{c}}} \right) \sqrt{(x-b)\,(c-x)}$$

c eſt $> b$. L'interſection du plan précédemment mené avec cette ſurface, ſera une ligne droite qui commencera à l'abſciſſe b, & s'arrêtera à l'abſciſſe c. Cette ligne fait avec la première un angle quelconque; elles ſe rencontreront, ſi $g - g^1 = (k^1 - k)\,b$. Si donc on multiplie ces équations entre elles, en mettant tout dans un membre, le lieu de l'équation produit ſera une nouvelle ſurface, dont la ſection, par le plan déjà conſidéré, ſera une ligne briſée, s'arrêtant de part & d'autre. Au reſte, non ſeulement on peut exprimer un ſyſtême de pluſieurs lignes par une formule unique, & par conſéquent regarder cette ligne comme unique; je dis de plus, qu'un ſyſtême compoſé de ſurfaces, de lignes & de points, peut encore être exprimé par une formule unique.

EXEMPLE. Soit l'équation $y = X + b \int \frac{x\pi}{a} . \sqrt{1 - \frac{x}{b}}$, π eſt la demi-circonférence; X ne peut pas devenir imaginaire. Le lieu de cette équation eſt une courbe étendue ſur les abſciſſes négatives à l'infini, & ſur les poſitives moindres que b, ſans ſolution de continuité. Mais, à compter de l'abſciſſe b, la courbe finit, & le lieu n'eſt plus qu'une ſuite de points iſolés, placés à des diſtances finies l'un de l'autre.

AUTRE EXEMPLE. Soit maintenant l'équation . . . .

$$z = \varphi[x, y] + \left(y - X - b \int \frac{x\pi}{a} . \sqrt{1 - \frac{x}{b}}\right) \left[\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\left[\frac{x}{g} - 1\right]\left[1 - \frac{x}{f}\right]\right)}\right],$$

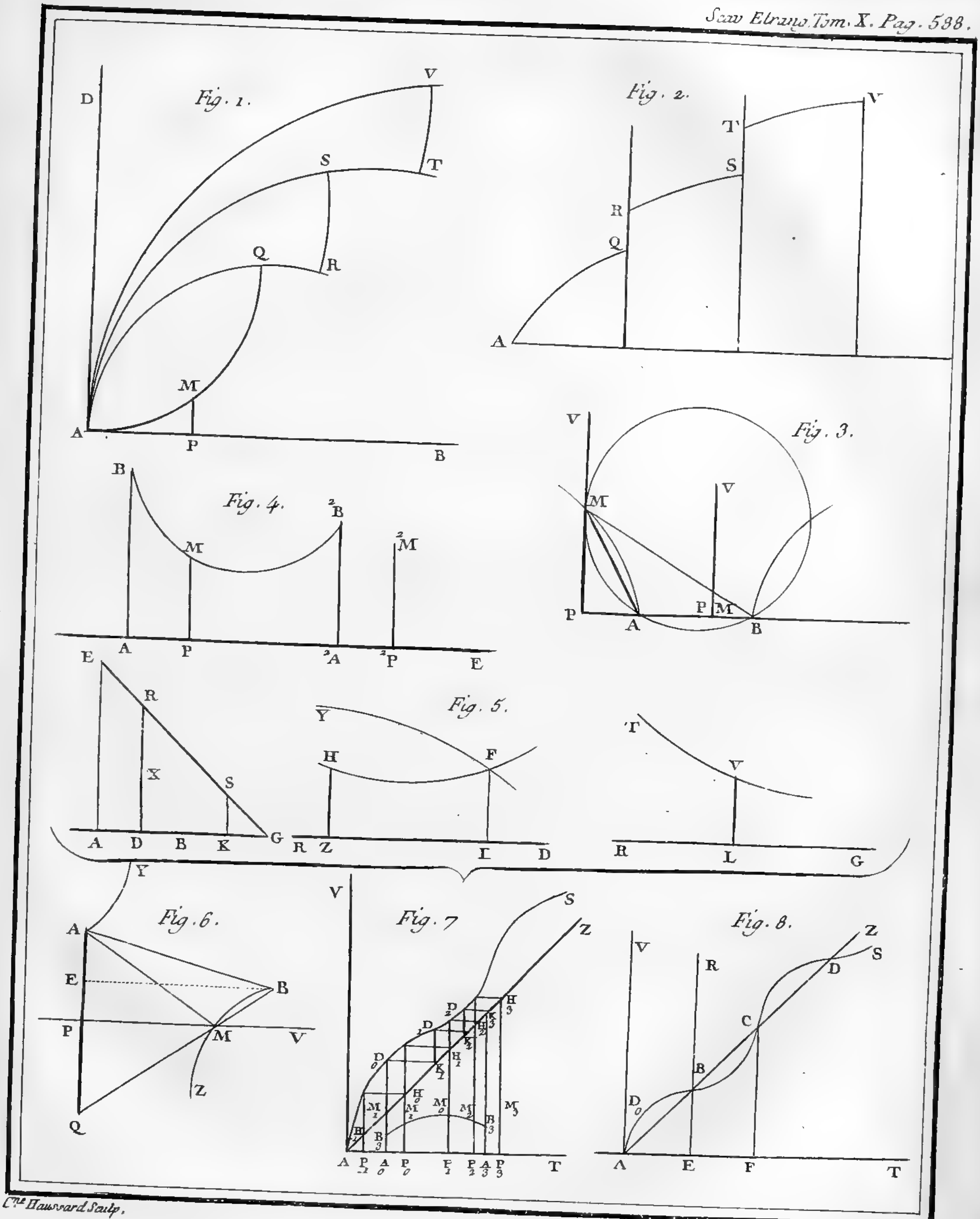
g eſt $< f$ & $f < b$, la fonction φ ne peut devenir imaginaire. Le lieu de cette équation eſt compoſé d'abord d'une ſurface courbe, compris entre deux plans perpendiculaires à la ligne des x, l'un répondant à l'abſciſſe g, & l'autre à l'abſciſſe f; enſuite d'une courbe à double courbure, qui s'étend, iſolée ſur les abſciſſes négatives quelconques, & poſitives juſqu'à g, où elle entre dans la ſurface pour en ſortir à l'abſciſſe f, & ſe continuer iſolée juſqu'à l'abſciſſe b. Là elle s'arrête. Cette courbe a pour projection $y = X + b \int \frac{x\pi}{a} \sqrt{1 - \frac{x}{b}}$. Après l'abſciſſe b, l'équation ne ſe vérifie plus que par des points iſolés, correſpondans aux points iſolés de la projection $y - X$ &c. $= 0$.

Mon Lecteur voit, par cet exemple, qu'une formule unique peut exprimer un mélange de ſurfaces de lignes & de points. De là il concluera les moyens de trouver cette formule, ſi les ſurfaces lignes & points étoient données.

Je terminerai cet article & ces Recherches par deux exemples, où l'on verra que des problêmes très-ſimples peuvent conduire à cette eſpèce de lignes diſcontinues, où la loi générale peut ſe décompoſer en pluſieurs loix particulières.

EXEMPLE PREMIER. Deux points A & B (*fig.* 3.) ſont donnés avec une perpendiculaire P V ſur cette ligne A B, & on propoſe de trouver le point M ſur la perpendiculaire, tel que l'angle AMB soit le plus grand possible. Tant que la perpendiculaire tombera entre les points A & B, le point M se confondra avec le point P, puisque l'angle est alors de 180°. Ainsi, en imaginant que la perpendiculaire se meut de B en A, le lieu de tous les points M est la droite AB; mais quand la perpendiculaire, en continuant à se mouvoir, tombe sur le prolongement de AB, il faut décrire un cercle qui passe par A & B, & touche la ligne PV; le point de contact M, est le point cherché. Ainsi on a hors de la ligne AB, $PM^2 = AP \times PB$; le lieu de tous les points M est donc composé de l'hyperbole équilatère, qui a pour axe AB, & de cet axe même, si c'étoit le *sinus* de l'angle qui dût être un *maximum*, le lieu seroit alors composé de l'hyperbole, & du cercle qui auroit AB pour diamètre.

Exemple second. Soient deux points A & B (*fig. 6.*) & une ligne PV; si on abaisse la perpendiculaire AP sur cette ligne, qu'on la prolonge d'une quantité PQ = à elle-même, & qu'on mène BQ, cette dernière ligne coupera PV en un point M tel que la somme des lignes AM, & BM sera moindre que pour tout autre point de la ligne PV. Maintenant, si on imagine que cette ligne PV se meut parallèlement à elle-même, on peut demander le lieu de tous ces points M. Menons par le point B la perpendiculaire BE sur AP, on aura la proportion $2AP - AE : EB = AP : PM$; donc $\left(AP - \frac{AE}{2}\right)\left(PM - \frac{EB}{2}\right) = \frac{AEEB}{4}$, ce qui indique une hyperbole qui a pour centre le milieu de AB, dont les asymptotes rectangles sont parallèles aux coordonnées AP & PM, & qui passe par A & B. Cependant, il est évident que tant que la ligne PV sera entre les points A & B, les points M tomberont tous sur AB. Donc le lieu complet du problême est composé des branches infinies d'hyperbole BZ & AY, & du diamètre AB.



Cl.e Haussard Sculp.

OBSERVATIONS THERMOMÉTRIQUES,

D'où l'on déduit le rapport des degrés des Thermomètres exposés en différens lieux.

PAR M. MARCORELLE.

LES Observations que renferme ce Mémoire, ne sont pas de l'espèce de celles que l'on fait pour connoître la température de l'air, le froid & le chaud de toute l'année, jusqu'à quels degrés ont été le plus grand chaud & le plus grand froid, s'ils ont été égaux chacun en leur saison, ou de combien l'un a surpassé l'autre, qu'elles sont les limites de leurs inégalités, pour avoir en un mot l'histoire physique du froid & du chaud de chaque année; elles ont pour objet de comparer les degrés des thermomètres exposés en divers lieux, & d'établir leur rapport.

Pour pouvoir faire cette comparaison, je ne négligeai rien pour que les thermomètres dont je me servois fussent semblables, & que leur construction fût telle, que la même chaleur fît monter & passer la liqueur par les mêmes degrés. Elle opéreroit indubitablement cet effet dans différens thermomètres, si le calibre de leurs tuyaux, qui contiennent la liqueur, étoit précisément le même, si leurs boules avoient des diamètres égaux, & si les tuyaux avoient toujours la même proportion avec la grosseur des boules; mais il est très-rare de trouver toutes ces choses dans les verres dont sont composés les thermomètres. Pour parer à l'inconvénient qui résulte de l'inégalité des verres, & faire en sorte que la même chaleur fasse monter également la liqueur dans les tuyaux des thermomètres, il est nécessaire de mettre à chacun d'eux une table particulière & proportionnée au tuyau; une table où il y ait la même quantité de degrés que dans une autre, mais de degrés qui soient d'autant plus grands ou d'autant plus petits, que la même chaleur fasse monter la liqueur dans son tuyau d'une manière beaucoup plus ou beaucoup moins sensible.

Pour trouver cette proportion entre la table d'un thermomètre & le tuyau où étoit contenue la liqueur, voici la méthode que j'employai : je fis choix de plusieurs thermomètres; je les plongeai dans la glace, pour faire descendre autant qu'il étoit possible le mercure renfermé dans leurs tuyaux, & je marquai l'endroit où la liqueur de chacun de ces thermomètres étoit descendue; ensuite je plongeai leurs boules dans un même vaisseau rempli d'eau chaude, & je marquai le lieu où le mercure étoit monté dans chaque thermomètre. Ces opérations faites, je partageai l'espace que la liqueur de chacun de ces thermomètres avoit parcouru, depuis le lieu de la descente jusqu'à celui de la montée, en suivant pour les uns la méthode de Lyon, & pour les autres celle de M. de Réaumur. Au moyen de cette division proportionnelle des tables de ces différens thermomètres, la même chaleur fit toujours monter & passer la liqueur par les mêmes degrés : c'est en me servant de ces instrumens, que j'ai fait les observations dont je vais exposer les tableaux.

ARTICLE PREMIER.

Observations pour établir le rapport de la chaleur directe des rayons du Soleil, à celle qu'on éprouve à l'ombre, pendant l'été, à Toulouse.

POUR connoître ce rapport, je pris deux des thermomètres dont je viens de parler; ils étoient chargés de mercure; leurs marches étoient uniformes ou proportionnelles, & l'espace, entre le terme de l'eau bouillante & celui de la congélation, étoit divisé en cent parties égales ; j'en exposai un à l'air extérieur, du côté du Nord, à couvert des rayons du Soleil, & à la hauteur de dix pieds au dessus de la surface de la terre. L'exposition de l'autre étoit au midi, & à la même hauteur ; je plaçois ce dernier, à douze heures précises du matin, à un poteau isolé, de manière que la liqueur ne recevoit que les rayons directs du Soleil, & n'en recevoit aucun réfléchi par des corps voisins. J'observai, pendant plusieurs beaux jours de l'été de 1747, ces deux thermomètres, depuis midi jusqu'à environ quatre heures du soir, terme auquel le Soleil cessoit de darder ses rayons sur celui qui lui étoit exposé. J'examinai de quart-d'heure en quart-d'heure le progrès de l'ascension, de la station & de la descente du mercure; il est tel que le détail de quelques-unes de ces observations que je vais rapporter, le fait connoître.

OBSERVATION du 8 Août 1747, par un vent de Nord.

HEURES ET MINUTES.	THERMOMÈTRE exposé A L'OMBRE.	THERMOMÈTRE exposé aux rayons DU SOLEIL, & placé à un poteau.
	D.	D.
A midi	28	
A midi $\frac{1}{4}$		35
A midi $\frac{1}{2}$	$28\frac{1}{2}$	$36\frac{1}{2}$
A midi $\frac{3}{4}$		37
A 1 heure	29	37
A 1 .... $\frac{1}{4}$		$37\frac{1}{2}$
A 1 .... $\frac{1}{2}$	$29\frac{1}{2}$	$37\frac{1}{2}$
A 1 .... $\frac{3}{4}$		$37\frac{1}{2}$
A 2	29	$37\frac{1}{2}$
A 2 .... $\frac{1}{4}$		37
A 2 .... $\frac{1}{2}$	$28\frac{1}{2}$	$36\frac{1}{2}$
A 2 .... $\frac{3}{4}$		$36\frac{1}{2}$
A 3	28	$36\frac{1}{2}$
A 3 .... $\frac{1}{4}$		36
A 3 .... $\frac{1}{2}$		35
A 3 .... $\frac{3}{4}$		$34\frac{1}{2}$

Le Thermomètre commença à n'être plus exposé aux rayons du Soleil vers les 4 heures.

OBSERVATION du 9 Août, par un vent de Nord.

HEURES ET MINUTES.	THERMOMÈTRE exposé A L'OMBRE. D.	THERMOMÈTRE exposé aux rayons DU SOLEIL, & placé à un poteau. D.
A midi	29 $\frac{1}{2}$	
A midi $\frac{1}{4}$		37
A midi $\frac{1}{2}$	30	37 $\frac{1}{2}$
A midi $\frac{3}{4}$		38
A 1 heure	30 $\frac{1}{4}$	38 $\frac{1}{2}$
A 1 .... $\frac{1}{4}$		39
A 1 .... $\frac{1}{2}$	30 $\frac{1}{2}$	39
A 1 .... $\frac{3}{4}$		39
A 2	30	38
A 2 .... $\frac{1}{4}$		38
A 2 .... $\frac{1}{2}$	29 $\frac{1}{2}$	38
A 2 .... $\frac{3}{4}$		37
A 3	29	37
A 3 .... $\frac{1}{4}$		37
A 3 .... $\frac{1}{2}$		37
A 3 .... $\frac{3}{4}$		36

OBSERVATION du 10 Août, par un vent de Sud-est.

HEURES ET MINUTES.	THERMOMÈTRE exposé A L'OMBRE. D.	THERMOMÈTRE exposé aux rayons DU SOLEIL, & placé à un poteau. D.
A midi	31	
A mi'l $\frac{1}{4}$		39 $\frac{1}{2}$
A midi $\frac{1}{2}$	31	40
A midi $\frac{3}{4}$		40 $\frac{1}{2}$
A 1 heure	31 $\frac{1}{2}$	40 $\frac{1}{2}$
A 1 .... $\frac{1}{4}$		41
A 1 .... $\frac{1}{2}$	32	41
A 1 .... $\frac{3}{4}$		41
A 2	32 $\frac{1}{2}$	40 $\frac{1}{2}$
A 2 .... $\frac{1}{4}$		40 $\frac{3}{4}$
A 2 .... $\frac{1}{2}$	32	40
A 2 .... $\frac{3}{4}$		39
A 3	32	39
A 3 .... $\frac{1}{4}$		38
A 3 .... $\frac{1}{2}$		38
A 3 .... $\frac{3}{4}$		37

Il résulte de ces obſervations : 1°. que le mercure du thermomètre expoſé au Soleil, monte environ huit à neuf degrés de plus que le mercure du thermomètre expoſé à l'ombre, à compter du terme de la congélation, & que le rapport de la chaleur directe des rayons du Soleil, eſt à celle qu'on éprouve à l'ombre, comme cinq eſt à quatre.

2°. Que la liqueur, ſoit du thermomètre expoſé à l'ombre, ſoit du thermomètre expoſé aux rayons du Soleil, parvient vers une heure & demie du ſoir à ſon plus haut degré dans la journée, & qu'elle reſte fixe au même point, environ trois quarts-d'heure, & quelquefois un peu plus, ſur-tout lorſque la chaleur eſt vive.

3°. Que la liqueur du thermomètre expoſé à l'ombre, parcourt en montant un degré & demi, depuis midi juſqu'à ce qu'elle ſoit parvenue à ſa plus grande hauteur; & que celle du thermomètre expoſé aux rayons du Soleil, en parcourt, dans le même temps, de neuf à dix degrés, de façon pourtant qu'elle parcourt environ huit degrés dans le premier quart-d'heure de l'expoſition du thermomètre aux rayons du Soleil, & que dans les autres ſuivans, qui précèdent le plus haut point de ſon aſcenſion, elle n'en parcourt à peu près que deux.

4°. Que le mercure du thermomètre expoſé à l'ombre, parcourt en deſcendant à peu près un degré ou un degré & demi, depuis le temps qu'il eſt parvenu à ſon plus haut point, juſqu'à trois heures; & que celui du thermomètre expoſé aux rayons du Soleil, en parcourt environ trois degrés, depuis le même terme de ſa plus grande aſcenſion, juſqu'à près de quatre heures, temps auquel il ceſſe d'être expoſé aux rayons du Soleil.

Suivant de ſemblables obſervations, faites à Montpellier avec un thermomètre à eſprit de vin, gradué ſelon la méthode de M. de Réaumur, le rapport de la chaleur directe des rayons du Soleil, à celle qu'on éprouve à l'ombre dans cette Ville, eſt comme un eſt à deux : ce rapport eſt bien différent de celui obſervé à Toulouſe, qui eſt comme cinq eſt à quatre.

Cette différence eſt trop grande, pour qu'elle puiſſe être occaſionnée par la température de l'air des différens climats, qui ne ſont pas fort éloignés les uns des autres; elle ne peut l'être non plus par l'inégalité des thermomètres, quoique l'eſprit de vin ſe dilate plus ou moins, eu égard à ce qu'il eſt plus ou moins bien rectifié, & qu'à raiſon de cette dilatation plus ou moins grande, il arrive ſouvent qu'il monte ſans meſure dans les grandes chaleurs, & qu'il ne monte guère dans celles qui ſont moindres; elle ne pourroit pas faire cependant cette dilatation, que la liqueur d'un thermomètre parcourût dans le même temps le double du degré marqué par un autre.

Cette différence doit donc être attribuée à une autre cauſe; quelle eſt-elle? Tout induit à penſer que c'eſt la différente expoſition des thermomètres. En effet, ſelon qu'ils ſont différemment expoſés à l'air, ils reçoivent différentes impreſſions, & la liqueur parcourt des chemins différens dans le même temps; elle monte plus ou moins vîte, ſelon que la chaleur du Soleil agit ſur elle avec plus ou moins de force. Il n'eſt pas douteux qu'elle n'agiſſe plus vivement ſur un thermomètre expoſé au midi, & placé, par exemple, à l'angle de deux murs, que ſur un thermomètre expoſé de même au Soleil, mais à l'air libre & à couvert de toute réverbération. Le Soleil n'agit ſur celui-ci que directement, au lieu qu'il agit ſur l'autre par ſon action directe & par une action réfléchie. Ce thermomètre eſt comme s'il étoit placé au foyer d'un miroir ardent, où toute l'action étant réunie, elle s'y exerce plus ſenſiblement: de là donc, que la liqueur du thermomètre expoſé au Soleil, eſt montée à Montpellier à une hauteur double de celle qu'un pareil thermomètre marquoit à l'ombre. On peut conjecturer, avec quelque fondement, que le premier étoit placé à un mur ou à quelque angle, & que le Soleil agiſſoit ſur lui, & par les rayons qu'il lui envoyoit directement, & par ceux qui étoient réfléchis par des corps voisins : des expériences répétées vérifient ces conjectures.

Dans le temps que je faisois les observations que j'ai rapportées, avec deux thermomètres, dont l'un étoit exposé au nord & à l'ombre, & l'autre étoit placé perpendiculairement à un poteau isolé, & exposé seulement aux rayons directs du Soleil, j'en eus un troisième, pareil aux autres, que je mis fort près de ce dernier, & à la même hauteur de dix pieds au dessus de la terre ; je l'exposai également à l'impression des rayons directs du Soleil ; mais il étoit placé de façon qu'il pouvoit recevoir de plus des rayons du Soleil réfléchis par les corps voisins. La liqueur de ce troisième thermomètre monta à une hauteur à peu près double de celle que marquoit le thermomètre qui étoit à l'ombre. Voici le détail de quelques-unes de ces observations, qui fortifie en même temps le résultat des premières.

OBSERVATION du 14 Août 1747, par un vent de Nord.

HEURES & MINUTES.	THERMOMÈTRE exposé A L'OMBRE.	THERMOMÈTRE exposé aux rayons DU SOLEIL, & placé à un poteau.	THERMOMÈTRE exposé aux rayons DU SOLEIL, à la réverbération.
	D.	D.	D.
A midi	30		
A midi ¼		37	55
A midi ½	30 ½	37 ½	60
A midi ¾		38	61 ½
A 1 heure	31	38	62
A 1 ¼		38 ½	62 ½
A 1 ½	31 ½	39	62 ½
A 1 ¾		39	62 ½
A 2	31 ½	39	62 ½
A 2 ¼		38 ½	62
A 2 ½	31	38 ½	61 ½
A 2 ¾		38	61
A 3	30 ½	37 ½	60
A 3 ¼		37	59
A 3 ½		36	à 3 h ½ le Soleil ne donnoit que foiblement sur le Thermomètre.
A 3 ¾		35	

OBSERVATION du 15 Août, par un vent de Nord-oueſt.

HEURES & MINUTES.	THERMOMÈTRE exposé A L'OMBRE.	THERMOMÈTRE exposé aux rayons DU SOLEIL, & placé à un poteau.	THERMOMÈTRE exposé aux rayons DU SOLEIL, à la réverbération.
	D.	*D.*	*D.*
A midi	30		
A midi $\frac{1}{4}$		37 $\frac{1}{2}$	57 $\frac{1}{2}$
A midi $\frac{1}{2}$	30 $\frac{1}{2}$	38 $\frac{1}{2}$	62
A midi $\frac{3}{4}$		38 $\frac{1}{2}$	62
A 1 heure	31	38 $\frac{1}{2}$	64
A 1 $\frac{1}{4}$		39	65
A 1 $\frac{1}{2}$	31 $\frac{1}{2}$	40	65
A 1 $\frac{3}{4}$		40	64 $\frac{1}{2}$
A 2	31 $\frac{1}{2}$	40	64
A 2 $\frac{1}{4}$		39 $\frac{1}{2}$	63 $\frac{1}{2}$
A 2 $\frac{1}{2}$	30 $\frac{1}{2}$	39 $\frac{1}{2}$	63 $\frac{1}{2}$
A 2 $\frac{3}{4}$		39	63
A 3	30	38 $\frac{1}{2}$	61
A 3 $\frac{1}{4}$		38	61
A 3 $\frac{1}{2}$		37	60

OBSERVATION du 16 Août, par un vent de Nord.

HEURES & MINUTES.	THERMOMÈTRE exposé A L'OMBRE.	THERMOMÈTRE exposé aux rayons DU SOLEIL, & placé à un poteau.	THERMOMÈTRE exposé aux rayons DU SOLEIL, à la réverbération.
	D.	*D.*	*D.*
A midi	32		
A midi $\frac{1}{4}$		40	57
A midi $\frac{1}{2}$	32	41	64 $\frac{1}{2}$
A midi $\frac{3}{4}$		41 $\frac{1}{2}$	65
A 1 heure	32 $\frac{1}{2}$	41 $\frac{1}{2}$	66 $\frac{1}{2}$
A 1 $\frac{1}{4}$		42	66 $\frac{1}{2}$
A 1 $\frac{1}{2}$	32 $\frac{1}{2}$	42 $\frac{1}{2}$	66 $\frac{1}{2}$
A 1 $\frac{3}{4}$		42 $\frac{1}{2}$	66 $\frac{1}{2}$
A 2	33 $\frac{1}{2}$	42 $\frac{1}{2}$	66
A 2 $\frac{1}{4}$		42 $\frac{1}{2}$	65
A 2 $\frac{1}{2}$	33	42	65
A 2 $\frac{3}{4}$		42	63 $\frac{1}{2}$
A 3	33	42	63
A 3 $\frac{1}{4}$		41 $\frac{1}{2}$	61
A 3 $\frac{1}{2}$		41 $\frac{1}{2}$	61
A 3 $\frac{3}{4}$		40 $\frac{1}{2}$	

On voit par ces observations, que le 14 Août, par un vent de Nord-ouest, le thermomètre à l'ombre marquoit, à une heure & demie du soir, 31 degrés $\frac{1}{2}$; celui qui étoit à un poteau isolé, 39 degrés, & le thermomètre exposé à la réverbération, 62 degrés $\frac{1}{2}$, qui est le double du degré que marquoit le thermomètre à l'ombre, un demi degré de moins seulement. Le 15 du même mois, par un vent du Nord-ouest, le thermomètre à l'ombre étoit, à une heure & demie du soir, à 31 degrés $\frac{1}{2}$; celui du poteau à 40 degrés, & le thermomètre de la réverbération à 65 degrés, qui est double du degré marqué par le thermomètre à l'ombre, & 2 degrés de plus. Le 16 Août, par un vent de Nord, le thermomètre à l'ombre marquoit, vers une heure & demie du soir, 32 degrés $\frac{1}{2}$; celui qui étoit exposé au poteau marquoit 42 degrés $\frac{1}{2}$, & le thermomètre placé à la réverbération, 66 degrés $\frac{1}{2}$, qui est le double du degré marqué par le thermomètre à l'ombre, moins un demi degré seulement.

Il paroît, suivant ces observations, que c'est à l'action des rayons directs du Soleil, & à celle des rayons réfléchis par les corps voisins, que l'on doit attribuer le double du chemin qu'a parcouru à Montpellier la liqueur du thermomètre exposé au Soleil, sur celle du thermomètre exposé à l'ombre; mais alors dans ce cas, & avec des observations de cette espèce, l'on ne sauroit estimer la chaleur directe du Soleil, parce qu'elle se trouve mêlée & confondue avec la chaleur réfléchie. On pourroit d'autant moins faire cette estimation, que la chaleur réfléchie est beaucoup plus grande que la chaleur directe. Le célèbre M. de Mairan, qui avoit pour moi l'amitié la plus tendre, & dont la mémoire me sera toujours chère, avoit fait une expérience qui en fournit une preuve; il trouva avec des miroirs plans, dont la lumière réfléchissoit sur des thermomètres, que la montée du mercure, à chaque nouvelle réflexion, ou la nouvelle chaleur communiquée au thermomètre, qui n'alloit guère qu'à deux, trois ou quatre degrés de plus par un simple miroir, étoit toujours proportionnelle au nombre des miroirs qui l'avoient produite, double ou triple; c'eſt-à-dire, que ſi un ſeul miroir fait monter la liqueur de trois degrés, deux miroirs réunis la font monter de ſix, & trois miroirs de neuf degrés. Des faits dont nous ſommes tous les jours les témoins, viennent à l'appui de cette preuve; il gèle ſur le ſommet des hautes montagnes, expoſé au Soleil, dans le temps qu'il fait une chaleur très-grande dans la plaine, & plus grande encore dans les vallons. La grêle ſe forme en l'air par la gelée des gouttes de pluie, quoiqu'elles ſoient expoſées aux rayons du Soleil, tandis qu'il fait un grand chaud au deſſous; il eſt donc certain que la chaleur du Soleil réfléchie, eſt plus grande que la chaleur directe, & que l'on ne ſauroit eſtimer celle-ci ſans la ſéparer entièrement de l'autre. Cette raiſon m'a déterminé à placer, lors de mes obſervations, le thermomètre expoſé au Soleil à un poteau iſolé & à couvert de toute ſorte de réverbération; & ce n'eſt, je penſe, qu'en employant ce moyen que l'on peut parvenir à connoître la chaleur directe des rayons du Soleil pendant l'été. Les variations & les changemens qui arrivent dans la température de l'air pendant les autres ſaiſons de l'année, ſont ſi fréquentes, que l'on ne ſauroit alors eſtimer régulièrement la chaleur directe des rayons du Soleil. Elle eſt beaucoup plus grande, principalement en hiver, par rapport à celle qu'on éprouve à l'ombre.

ARTICLE DEUXIÈME.

Obſervations faites pour connoître la diminution de la chaleur du Soleil, pendant les éclipſes de cet Aſtre.

CET article renferme les obſervations que j'ai faites pour connoître les différens degrés de chaleur du Soleil pendant ſes éclipſes des 25 Juillet 1748, & 8 Janvier 1750; je rapporterai les unes après les autres, & je donnerai à leur ſuite les réſultats. Je commence par celles qui ſont relatives à la première de ces éclipſes.

Pour remplir l'objet que j'avois en vue, je plaçai, le 25 Juillet 1748, jour de l'éclipse du Soleil, ainsi que les jours précédens & les jours suivans, à un poteau exposé en plein air, & à la surface de ce poteau, qui étoit éclairé des rayons du Soleil, depuis les sept heures & demie du matin, jusqu'à trois heures & demie du soir, un thermomètre chargé de mercure, & gradué de façon que l'espace entre le terme de l'eau bouillante & celui de la congélation, étoit divisé en cent parties égales. J'observai de quart-d'heure en quart-d'heure ce thermomètre ; on verra les progrès de l'ascension & de l'abaissement de la liqueur dans les tableaux suivans :

OBSERVATION du 22 Juillet 1748, par un vent de Sud.

HEURES & MINUTES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	ÉTAT DU CIEL.
	D.	
A 8 heures	25	
A 9	35	
A 9 ½	35 ½	
A 9 ¾	36	
A 10	36 ½	
A 10 ¼	36 ½	
A 10 ½	36 ½	serein.
A 10 ¾	36 ¾	
A 11	37	
A 11 ¼	37	
A 11 ½	37	
A 11 ¾	37 ¼	
A midi	37 ½	couvert.
A midi ¼	37 ½	
A midi ½	37 ¾	
A midi ¾	37 ¾	
A 1 heure	38	serein.
A 2	38	
A 3	37	

OBSERVATION du 23 Juillet, par un vent de Nord.

HEURES & MINUTES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	ÉTAT DU CIEL.
	D.	
A 8 heures	26	serein.
A 9	27	
A 9 ½	27	
A 9 ¾	27	
A 10	27	couvert.
A 10 ¼	27	
A 10 ½	27 ½	
A 10 ¾	28	
A 11	31 ½	serein.
A 11 ¼	31 ½	
A 11 ½	31 ½	
A 11 ¾	31 ½	
A midi	31 ½	
A midi ¼	31 ½	
A midi ½	31 ½	couvert.
A midi ¾	31 ½	
A 1 heure	31	
A 2	30 ½	
A 3	26 ½	

OBSERVATION du 24 Juillet, par un vent de Nord.

HEURES & MINUTES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	ÉTAT DU CIEL.
	D.	
A 8 heures	24	couvert.
A 9	28 ½	nuages.
A 9 ½	28 ½	couvert.
A 9 ¾	30	nuages.
A 10	35	
A 10 ¼	35	
A 10 ½	35	
A 10 ¾	35 ½	
A 11	36	serein.
A 11 ¼	36	
A 11 ½	36	
A 11 ¾	36	
A midi	36 ½	
A midi ¼	36 ½	
A midi ½	36 ½	nuages.
A midi ¾	37	
A 1 heure	38	serein.
A 2	37 ½	
A 3	33 ½	nuages.

OBSERVATION

OBSERVATION du 25 Juillet, jour de l'éclipſe, par un vent de Nord.

HEURES & MINUTES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	ÉTAT DU CIEL.
	D.	
A 8 heures	24	
A 9	32 ½	
A 9 ½	34	
A 9 ¾	33	
A 10	30 ½	
A 10 ¼	30 ½	
A 10 ½	30 ½	
A 10 ¾	30	ſerein.
A 11	30	
A 11 ¼	30	
A 11 ½	32 ½	
A 11 ¾	34	
A midi	35	
A midi ¼	35	
A midi ½	32 ½	couvert. Le vent a changé & s'eſt tourné au Sud.
A midi ¾	37 ½	ſerein
A 1 heure	36	nuages.
A 2	37 ½	ſerein.
A 3	36	

OBSERVATION du 26 Juillet, par un vent de Nord.

HEURES & MINUTES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	ÉTAT DU CIEL.
	D.	
A 8 heures	24	
A 9	23	
A 9 ½	23 ½	
A 9 ¾	24	
A 10	25 ½	
A 10 ¼	25 ½	
A 10 ½	25 ½	
A 10 ¾	25 ½	
A 11	26	
A 11 ¼	26	couvert.
A 11 ½	26	
A 11 ¾	26	
A midi	26	
A midi ¼	26	
A midi ½	26	
A midi ¾	26	
A 1 heure	26	
A 2	27	
A 3	26	

OBSERVATION du 27 Juillet, par un vent d'Est.

HEURES & MINUTES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	ÉTAT DU CIEL.
	D.	
A 8 heures	24	couvert.
A 9	26	couvert. Le vent a changé & s'est tourné au Sud.
A 9 ½	26	couvert.
A 9 ¾	26	
A 10	25	couvert. Le vent a changé & s'est tourné au Nord.
A 10 ¼	25	
A 10 ½	24	couvert.
A 10 ¾	23	
A 11	22 ½	
A 11 ¼	22 ½	
A 11 ½	22	
A 11 ¾	21	pluie.
A midi	19	
A midi ¼	19	
A midi ½	19	
A midi ¾	19	
A 1 heure	19 ½	couvert.
A 2	21	
A 3	22 ½	

OBSERVATION du 28 Juillet, par un vent de Nord.

HEURES & MINUTES.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	ÉTAT DU CIEL.
A 8 heures	20	
A 9	19	
A 9 ½	19	
A 9 ¾	20	
A 10	25	
A 10 ¼	24	
A 10 ½	23	
A 10 ¾	23	
A 11	22 ½	
A 11 ¼	22 ½	couvert.
A 11 ½	22 ½	
A 11 ¾	22 ½	
A midi	22 ½	
A midi ¼	22 ½	
A midi ½	22 ½	
A midi ¾	22 ½	
A 1 heure	22	
A 2	18	Le vent a changé & s'est tourné à l'Est.
A 3	18	

L'inſpection de ces tableaux fait voir que les variations de la chaleur, le 25, ont ſuivi le progrès de l'éclipſe, & qu'à onze heures, temps à peu près de la plus grande phaſe, & où la diminution de la chaleur a été la plus forte, le thermomètre a été d'environ ſept degrés plus bas que les 22 & 24 à la même heure, qui ſont les ſeuls jours voiſins de l'éclipſe où le Ciel a été ſerein; de ſorte que la ſeule occultation de trois quarts du Soleil, diminue la chaleur de cet aſtre, par rapport à nous, de ſept degrés. Il eſt inutile de comparer les degrés où le mercure du thermomètre eſt parvenu les autres jours, à la même heure, parce que le Ciel a toujours demeuré couvert, & que le temps étoit conſidérablement refroidi depuis l'éclipſe.

L'on préſenta au Soleil, au milieu de l'éclipſe, un verre ardent de cinq pouces de diamètre; les rayons réunis au foyer demeurèrent huit ſecondes à faire fumer du bois, & à la fin de l'éclipſe, il ne fallut que trois ſecondes à ce même verre pour faire fumer le même bois.

J'obſervai auſſi quelques variations dans le baromètre; le mercure étoit, le 25 Juillet, au commencement de l'éclipſe, à vingt-ſept pouces ſept lignes & demie; au milieu, à vingt-ſept pouces ſix lignes & demie; & à la fin, à vingt-ſept pouces ſix lignes: le vent qui étoit au Nord, changea & ſe tourna au Sud.

Tels ſont les réſultats des obſervations faites pour déterminer la diminution de la chaleur du Soleil, pendant ſon éclipſe du 25 Juillet 1748. Je vais rapporter préſentement ceux des obſervations faites pour connoître la diminution de la chaleur de cet aſtre, pendant l'éclipſe du 8 Janvier 1750: celle-là eſt arrivée au milieu de l'été, celle-ci au milieu de l'hiver.

Pour parvenir à l'éclairciſſement de ce fait, je me ſuis ſervi de deux thermomètres; l'un étoit chargé de mercure, & l'autre d'eſprit de vin; l'eſpace du premier, entre le terme de la congélation & celui de l'eau bouillante, étoit diviſé en cent parties égales; l'échelle du ſecond étoit ſuivant les principes de M. de Réaumur.

J'expoſai ces deux thermomètres au haut d'une tour; je les plaçai en dehors & à la face de cette tour, qui étoit éclairée des rayons du Soleil depuis ſon lever juſqu'à onze heures du matin; les variations & les changemens qui arrivent dans la température de l'air pendant l'hiver, & le grand froid qu'il faiſoit au commencement de l'hiver, me firent craindre que je ne pourrois pas faire les obſervations que j'avois en vue. Le 5, le thermomètre à mercure étoit à 9 degrés au deſſous du terme de la congélation, & celui à l'eſprit de vin à 8 degrés $\frac{1}{2}$ au deſſous du même terme; le 6, le temps s'étant adouci & fixé au beau, je commençai ces obſervations; je les continuai le 7, le 8, jour de l'éclipſe, & les 9 & 10 qui furent les jours qui ſuivirent celui de l'éclipſe; j'obſervai régulièrement, de quart-d'heure en quart-d'heure, les thermomètres : on verra le progrès de l'aſcenſion & de l'abaiſſement des liqueurs dans les tables ſuivantes.

OBSERVATION du 6 Janvier 1750, par un vent d'Eſt-Sud-Eſt.

HEURES & MINUTES.	THERMOMÈTRE à MERCURE.	THERMOMÈTRE à L'ESPRIT DE VIN.	ÉTAT du CIEL.
	D.	*D.*	
A 7 heures $\frac{1}{2}$	— 2	— 2	
A 7 ..... $\frac{3}{4}$	— 1	— 2	
A 8	× 1	× 0 $\frac{1}{2}$	
A 8 ..... $\frac{1}{4}$	× 2 $\frac{1}{2}$	× 1	
A 8 ..... $\frac{1}{2}$	× 3 $\frac{1}{2}$	× 2	
A 8 ..... $\frac{3}{4}$	× 4	× 3	
A 9	× 5	× 4	
A 9 ..... $\frac{1}{4}$	× 5	× 4 $\frac{1}{2}$	.... ſerein.
A 9 ..... $\frac{1}{2}$	× 6	× 5	
A 9 ..... $\frac{3}{4}$	× 6 $\frac{1}{2}$	× 5 $\frac{1}{2}$	
A 10	× 7	× 6	
A 10 ..... $\frac{1}{4}$	× 7 $\frac{1}{2}$	× 6 $\frac{1}{2}$	
A 10 ..... $\frac{1}{2}$	× 7 $\frac{1}{2}$	× 6 $\frac{1}{2}$	
A 10 ..... $\frac{3}{4}$	× 7 $\frac{1}{2}$	× 6 $\frac{1}{2}$	
A 11	× 8	× 7	

OBSERVATION du 7 Janvier, par un vent d'Est-Sud-Est.

HEURES & MINUTES.	THERMOMÈTRE à MERCURE.	THERMOMÈTRE à L'ESPRIT DE VIN.	ÉTAT du CIEL.
	D.	D.	
A 7 heures $\frac{1}{2}$	× 2	× 1	.... serein.
A 7 ..... $\frac{3}{4}$	× 2	× 1	
A 8	× 4	× 2	
A 8 ..... $\frac{1}{4}$	× 7 $\frac{1}{2}$	× 6	
A 8 ..... $\frac{1}{2}$	× 9	× 7	
A 8 ..... $\frac{3}{4}$	× 10 $\frac{1}{2}$	× 9	
A 9	× 11	× 9	
A 9 ..... $\frac{1}{4}$	× 11	× 9	
A 9 ..... $\frac{1}{2}$	× 11	× 9	
A 9 ..... $\frac{3}{4}$	× 11 $\frac{1}{2}$	× 9 $\frac{1}{2}$	
A 10	× 12	× 10	
A 10 ..... $\frac{1}{4}$	× 12	× 10	
A 10 ..... $\frac{1}{2}$	× 12	× 10	
A 10 ..... $\frac{3}{4}$	× 12 $\frac{1}{2}$	× 10 $\frac{1}{2}$	
A 11	× 12 $\frac{1}{2}$	× 10 $\frac{1}{2}$	

OBSERVATION du 8 Janvier, jour de l'éclipse du Soleil, par un vent d'Est-Sud-Est.

HEURES & MINUTES.	THERMOMÈTRE à MERCURE.	THERMOMÈTRE à L'ESPRIT DE VIN.	ÉTAT du CIEL.
	D.	D.	
A 7 heures $\frac{1}{2}$	× 2	× 1	.... serein.
A 7 ..... $\frac{3}{4}$	× 2	× 1	.... nuage.
A 8	× 3	× 2	.... serein.
A 8 ..... $\frac{1}{4}$	× 5 $\frac{1}{2}$	× 4 $\frac{1}{2}$	
A 8 ..... $\frac{1}{2}$	× 6 $\frac{1}{2}$	× 5	
A 8 ..... $\frac{3}{4}$	× 6	× 5	
A 9	× 6	× 5	
A 9 ..... $\frac{1}{4}$	× 6 $\frac{1}{2}$	× 5 $\frac{1}{2}$	
A 9 ..... $\frac{1}{2}$	× 7	× 6	
A 9 ..... $\frac{3}{4}$	× 9 $\frac{1}{2}$	× 8	
A 10	× 11	× 9 $\frac{1}{2}$	
A 10 ..... $\frac{1}{4}$	× 11	× 10	
A 10 ..... $\frac{1}{2}$	× 11 $\frac{1}{2}$	× 10	
A 10 ..... $\frac{3}{4}$	× 11 $\frac{1}{2}$	× 10 $\frac{1}{2}$	
A 11	× 12	× 10 $\frac{1}{2}$	

OBSERVATION du 9 Janvier, par un vent d'Est-Sud-Est.

HEURES & MINUTES.	THERMOMÈTRE à MERCURE.	THERMOMÈTRE à L'ESPRIT DE VIN.	ÉTAT du CIEL.
	D.	D.	
A 7 heures $\frac{1}{2}$	× 4	× 2 $\frac{1}{2}$	brouillards.
A 7 ..... $\frac{3}{4}$	× 4	× 2 $\frac{1}{2}$	
A 8	× 4	× 2 $\frac{1}{2}$	
A 8 ..... $\frac{1}{4}$	× 4	× 2 $\frac{1}{2}$	
A 8 ..... $\frac{1}{2}$	× 4	× 2 $\frac{1}{2}$	
A 8 ..... $\frac{3}{4}$	× 4 $\frac{1}{2}$	× 2 $\frac{1}{2}$	
A 9	× 5	× 3	
A 9 ..... $\frac{1}{4}$	× 5 $\frac{1}{2}$	× 3 $\frac{1}{2}$	
A 9 ..... $\frac{1}{2}$	× 6	× 4	
A 9 ..... $\frac{3}{4}$	× 6	× 4	
A 10	× 6	× 4	
A 10 ..... $\frac{1}{4}$	× 6	× 4 $\frac{1}{2}$	
A 10 ..... $\frac{1}{2}$	× 7	× 5	
A 10 ..... $\frac{3}{4}$	× 7	× 5	
A 11	× 8	× 6	

OBSERVATION du 10 Janvier, par un vent d'Est-Sud-Est.

HEURES & MINUTES.	THERMOMÈTRE à MERCURE.	THERMOMÈTRE à L'ESPRIT DE VIN.	ÉTAT du CIEL.
	D.	D.	
A 7 heures $\frac{1}{2}$	× 4	× 3	couvert.
A 7 ..... $\frac{3}{4}$	× 4	× 3	
A 8	× 4	× 3	
A 8 ..... $\frac{1}{4}$	× 4 $\frac{1}{2}$	× 3 $\frac{1}{2}$	
A 8 ..... $\frac{1}{2}$	× 5	× 3 $\frac{1}{2}$	
A 8 ..... $\frac{3}{4}$	× 5	× 3 $\frac{1}{2}$	
A 9	× 5 $\frac{1}{2}$	× 3 $\frac{1}{2}$	
A 9 ..... $\frac{1}{4}$	× 5 $\frac{1}{2}$	× 4	
A 9 ..... $\frac{1}{2}$	× 6	× 4	
A 9 ..... $\frac{3}{4}$	× 6	× 4	
A 10	× 6 $\frac{1}{2}$	× 4 $\frac{1}{2}$	
A 10 ..... $\frac{1}{4}$	× 7	× 5	
A 10 ..... $\frac{1}{2}$	× 8	× 6	
A 10 ..... $\frac{3}{4}$	× 8	× 6	
A 11	× 8 $\frac{1}{2}$	× 6	

Les variations de la chaleur, le 8, ont ſuivi les progrès de l'éclipſe, & vers les neuf heures du matin qu'arriva à peu près le milieu de l'éclipſe, la diminution de la chaleur fut la plus forte.

Cette plus forte diminution de la chaleur, cauſée par l'occultation de près des trois quarts du diſque du Soleil, fut de 5 degrés ſuivant le thermomètre à mercure, & de 4 degrés ſuivant le thermomètre à l'eſprit de vin. Le 8, à neuf heures du matin, la liqueur du premier ne parvint qu'au ſixième degré, & celle du ſecond au cinquième; tandis que le 7, à la même heure, qui eſt le jour le plus voiſin de celui de l'éclipſe qu'on puiſſe lui comparer, le mercure étoit monté à 11 degrés, & l'eſprit de vin à 9 degrés. Il paroît que cette différence n'a été occaſionnée que par l'éclipſe, & qu'elle ne provient pas de la température de l'air, puiſque les deux jours dont on compare les obſervations, étoient également ſereins, & que la liqueur des thermomètres ſe trouva, avant & après l'éclipſe, aux mêmes degrés.

L'obſervation du 13 ſert encore à le prouver: ce jour-là, qui étoit ſerein à neuf heures du matin, le mercure étoit à 11 degrés $\frac{1}{2}$, l'eſprit de vin à 10 degrés. Il eſt à remarquer que le 9, par un temps de brouillards & calme, la liqueur du thermomètre parvint, vers les neuf heures du matin, environ aux mêmes degrés qu'elle étoit parvenue le jour de l'éclipſe.

La hauteur du mercure, dans le baromètre, a été, le 6 Janvier, à vingt-ſept pouces onze lignes; les 7, 8 & 9, à vingt-ſept pouces huit lignes & demie, & le 10, à vingt-ſept pouces onze lignes & demie: le vent d'Eſt-Sud-Eſt ſouffla pendant ces jours.

Article troisième.

Observations pour établir le rapport des degrés du thermomètre exposé à l'air intérieur de différentes grottes, aux degrés du thermomètre exposé à l'air extérieur.

Malgré les grands progrès qu'a faits la Physique, elle n'a pas pu parvenir encore à détruire, dans le pays des grottes, une de ses anciennes chimères, la fameuse antipéristase. C'est à la prétendue chaleur des caves en hiver, & à leur froideur en été, qu'elle doit en partie sa naissance; trompés par leurs sensations, les habitans du pays des grottes continuent à croire qu'elles sont, ainsi que les caves, froides en été & chaudes en hiver, & ils soutiennent cette opinion avec d'autant plus de confiance, qu'elles leur paroissent telles; mais elles peuvent le leur paroître & pourtant ne l'être pas. Les grottes, quoique chaudes en hiver & froides en été, par rapport à nous, sont en effet plus froides en hiver qu'en été; la raison de cette contradiction apparente, est que les changemens alternatifs du froid & du chaud, n'étant ni aussi prompts ni aussi considérables dans les creux de la terre, que sur sa surface & dans l'atmosphère, ils sont plus chauds en hiver & plus froids en été que l'air extérieur; mais ils sont réellement plus chauds en été qu'en hiver, s'il y a dans leurs degrés de chaleur & de froideur quelque différence sensible en ces deux saisons.

Juger de la température des grottes & la comparer à celle de l'atmosphère, par le ministère des sens, c'est s'exposer à l'erreur, parce que le plus souvent ils en font des rapports infidèles. Le meilleur juge en cette matière, celui qui juge du chaud & du froid plus sainement que nos organes, est sans contredit le thermomètre; c'est cet instrument à l'esprit de vin, gradué selon la méthode de M. de Réaumur, que j'ai employé pour connoître la température de l'air de quelques grottes des Provinces méridionales de la France, dont j'ai

donné

donné la description dans d'autres Mémoires; & pour établir le rapport de cette température à celle de l'air extérieur, j'expose ici le tableau des observations faites à ce sujet.

NOMS des GROTTES.	JOURS, MOIS & ANNÉES.	THERMOMÈTRES dans LES GROTTES.		THERMOM. à L'AIR LIBRE.
			D.	D.
Roquefort en Rouergue.......	28 Septembre 1752.	Caves supérieures,	7	 14
		Caves inférieures,	5	
	9 Octobre.. 1753.	Caves supérieures,	6	 11
		Caves inférieures,	$4\frac{1}{2}$	
Lombrive en Foix...........	10 Septembre 1765.	Grottes supérieures,	12	 21
		Grottes inférieures,	9	
Bedeilhac en Foix...........	12 Mai..... 1765.	....	8	 20
Saint-Dominique en Languedoc.	15 Mars.... 1753.	....	6	 11
Minier des Isles en Roussillon..	8 Février... 1767.	....	4	 10
	12 Août..... 1767.	....	14	 29
	20 Août..... 1767.	....	18	 25
	9 Septembre 1767.	....	16	 21
Sournia en Languedoc........	17 Janvier.. 1769.	....	4	 8
	21 Février.. 1769.	....	3	 12
	17 Juin..... 1769.	....	11	 24
	28 Août..... 1769.	....	15	 28
Senones en Rouergue.........	10 Novembre 1754.	....	10	 13
	19 Décembre 1754.	....	6	 10
	11 Février... 1755.	....	$3\frac{1}{2}$	...... $11\frac{1}{2}$
	14 Mai..... 1755.	....	8	...... $19\frac{1}{2}$
Cotte-Rouge en Rouergue....	25 Avril.... 1753.	....	8	 18
	12 Juillet.... 1753.	....	11	 23
Labalme en Dauphiné.......	....	....	10	 18
			D.	D.
MOYENS.............	....	....	$8\frac{15}{23}$	...... $17\frac{7}{20}$

Ces observations font voir que la liqueur du thermomètre exposé dans les grottes, éprouve des variations comme celle du thermomètre exposé à l'air libre; il est vrai que ces variations ne ſont pas auſſi promptes ni auſſi conſidérables, parce que les changemens de la température de l'air, dans les grottes, n'y ſont pas, à beaucoup près, ſi grands; mais tels qu'ils ſont, ils ſuffiſent pour faire hauſſer ou baiſſer la liqueur du thermomètre qui y eſt expoſé; lorſque celle du thermomètre expoſé à l'air libre hauſſe ou baiſſe, pour la faire monter en été & deſcendre en hiver, comme dans les autres lieux, plus ou moins, ſelon que la communication entre l'air intérieur & l'air extérieur eſt plus ou moins grande.

Les mêmes obſervations font voir que les plus grandes élévations de la liqueur du thermomètre dans les grottes, ont été pendant les mois d'Août & Septembre, & les plus grands abaiſſemens pendant les mois de Janvier & Février; d'où l'on pourroit inférer, que le plus grand chaud des grottes eſt à la fin de l'été, & le plus grand froid à la fin de l'hiver. Il eſt d'autant plus naturel de le penſer, que les grottes ne s'échauffent & ne ſe refroidiſſent que lentement, à cauſe du peu de communication qu'il y a entre l'air intérieur & l'air extérieur. Si cette idée étoit vraie, la température moyenne de l'air, dans les grottes, ſeroit aux mois de Juin & de Novembre, parce que le chaud n'y a pas pénétré au mois de Juin, & que le froid n'y a pas pénétré non plus au mois de Novembre. Les obſervations du thermomètre dans les grottes, que j'ai rapportées, ſemblent favoriſer cette opinion.

Le plus ou moins de communication de l'air intérieur des grottes, avec l'air extérieur, fait qu'elles ſont plus ou moins chaudes, plus ou moins froides, ſelon que les grottes offrent plus ou moins d'ouvertures & d'iſſues à leur extérieur, & qu'elles ſont plus ou moins profondes. Il eſt certain que plus les grottes ſeront profondes, & plus les changemens du chaud & du froid y ſeront moindres. On peut même conjecturer qu'ils deviendront nuls à une certaine profondeur. Les caves de l'Obſervatoire, où le thermomètre de M. Amontons ſe ſoutient toujours au cinquante-quatrième degré, & celles des maiſons, dans les Provinces méridionales, qui sont un peu profondes, assez fermées, & dans lesquelles il règne en tout temps la même température de l'air, en fournissent la preuve.

D'après les observations exposées dans le tableau ci-dessus la température moyenne de l'air des grottes est de 8 degrés $\frac{15}{25}$ de degré, & celle de l'atmosphère de 17 degrés $\frac{7}{20}$ de degré; le rapport de ces moyens est comme celui de 9 degrés $\frac{95}{100}$, à 19 $\frac{95}{100}$, ou, pour le réduire à de plus petits termes, comme 1 est à peu près à 2. Il suit de là, que la chaleur de l'air extérieur est presque double de celle de l'air intérieur.

Mais pour fixer ce rapport d'une manière plus précise, il faut avoir plus d'observations que nous n'en avons; il est même nécessaire d'en avoir de plusieurs années, des différentes saisons, & des grottes des divers pays de la terre, parce que l'état de l'atmosphère éprouve chaque année différens changemens, & qu'il est diversement modifié dans chaque pays, dans chaque grotte. Quand on en aura une ample provision, on établira par leur comparaison le rapport qu'ont ensemble la constitution de l'air intérieur des grottes, & celle de l'air extérieur; si les grottes sont toujours plus chaudes ou plus froides que l'air du même nombre de degrés, ou de combien elles le sont plus en différens temps; quelles sont les limites de leurs inégalités, & quels effets peuvent produire les plus grands excès. Ces connoissances ne peuvent pas manquer d'être d'une grande utilité, sur-tout à ceux destinés aux travaux des mines, des carrières, des caves, des puits, enfin des lieux souterrains, d'où trop souvent il s'élève des vapeurs malignes qui leur sont si funestes. Elles serviront à déterminer le degré de communication entre l'air intérieur & l'air extérieur qu'il sera nécessaire d'établir pour dissiper ces vapeurs meurtrières, & empêcher leurs pernicieux effets.

J'ai fait encore des observations, pour connoître le rapport des degrés du thermomètre exposé à l'air, à ceux du thermomètre placé à différentes profondeurs de différentes terres, de terres graſſes, de terres ſablonneuſes, des terres argileuſes, des terres ſalées. Comme je me propoſe de les répéter, de les multiplier, & de les étendre à d'autres terres d'une qualité différente, je n'en rendrai compte que lorſque j'en aurai une certaine proviſion; alors un plus grand nombre de ces obſervations fournira un plus grand nombre de rapports, & aſſurera davantage les réſultats.

PREMIER MÉMOIRE

SUR

L'IMPRESSION EN LETTRES,

SUIVI

DE LA DESCRIPTION

D'UNE NOUVELLE PRESSE.

Par M. ANISSON le fils.

Lu à L'ACADÉMIE, *le 3 Mars 1783.*

L'ART de l'Imprimerie, ſans lequel toutes les productions de l'eſprit humain périſſent, cet Art le plus utile de tous, eſt encore au berceau : la vérité de cette propoſition perce tous les jours à travers les efforts de notre Nation & des Étrangers. Quel qu'en ſoit l'Auteur, je n'en admire pas moins la profondeur de ſon génie : il en falloit ſans doute bien plus pour créer cet Art, que pour le perfectionner. Mais pourquoi, au milieu du progrès de tous les autres, celui-ci ſeul reſteroit-il en arrière? Craignons d'être plus long-temps coupables en différant de ſuivre les traces qui ne nous ſont encore qu'indiquées; & puiſque ma Patrie ne peut diſputer à d'autres le titre incertain d'avoir donné naiſſance à cet Art ingénieux, qu'elle ne puiſſe du moins partager celui de l'avoir, la première, porté au plus haut point de perfection. Je ſens tout le fardeau de cette obligation; mais la faveur qui m'eſt accordée aujourd'hui me donne le courage de l'entreprendre. Je mettrai ſous les yeux de l'Académie le Journal exact de mes opérations; elle voudra bien m'aider dans mes travaux, rectifier mes erreurs, éclaircir mes doutes, favoriſer mes expériences, & me permettre d'en ſoumettre le réſultat à ſes lumières.

Examinons donc tout ce qui peut contribuer à la plus grande perfection typographique d'un Livre, telle qu'on la peut concevoir & déſirer, & ſuivons tous les différens degrés de ſon exécution.

LA MAIN-D'ŒUVRE LA PLUS PARFAITE DU TYPOGRAPHE. Sous cette dénomination technique & générale, ſont compriſes *la forme des lettres, la taille & la trempe des poinçons, la frappe des matrices, leur juſtification pour la ligne & l'approche, la conſtruction du moule, la préciſion minutieuſe à le remettre; la fonte des caractères, leur apprêtage;* LA COMPOSITION, L'IMPOSITION, LA CORRECTION; LE PAPIER, *ſon apprêt avant & après être imprimé;* L'ENCRE, & enfin L'IMPRESSION.

Tous ces différens articles contribuent enſemble & ſéparément à la perfection de l'Art, & peuvent former chacun la matière d'un Mémoire particulier; mais celui que je me propoſe de traiter ici, eſt *l'impreſſion* envisagée relativement à l'opération de la Preſſe.

Cet inſtrument, dont la première invention fait tant d'honneur à ſon Auteur, eſt vicieux preſque en tous points;

voilà ce que je me propoſe de démontrer. Croiroit-on que la Preſſe de nos jours eſt encore celle des premiers temps de l'Imprimerie ? Je ne chercherai pas à rappeler la deſcription de cette Preſſe ſi amplement & ſi vaguement décrite ailleurs. Lorſque j'ai voulu y puiſer les premières notions d'un Art que j'ai depuis ſi fort approfondi, je m'attendois à y voir développées les vûes de l'Inventeur, qui n'y ſont pas même preſſenties ; j'y ai cherché en vain l'analyſe des cauſes & des effets ; je n'y ai trouvé qu'une deſcription purement mécanique, & tout autre que celle qu'on devoit attendre d'un Dictionnaire raiſonné des Sciences & des Arts. Je ne parlerai donc de la Preſſe ancienne, que lorſque je ſerai obligé de comparer les rapports de ſes parties avec celles de la mienne, pour rendre raiſon de la différence des réſultats, tant du côté de la perfection, que de la promptitude de l'exécution ; effets l'une & l'autre de la conſtruction de la Preſſe que je vais décrire, & qui eſt diamétralement oppoſée à l'ancienne dans les choſes eſſentielles.

Produire l'impreſſion qui approche le plus de l'empreinte du poinçon enfumé.

Voilà le problême qui a dû faire l'objet des recherches de tous ceux qui ont approfondi l'Art de l'Imprimerie ; non réſolu par un chef-d'œuvre, fruit pénible & peu utile de ſoins laborieux & du temps. La gloire n'en doit-elle pas plutôt appartenir à celui qui, réuniſſant ces mêmes ſoins, a ſu trouver dans le mécaniſme de l'inſtrument, le moyen de perfectionner la main-d'œuvre, & d'en multiplier les réſultats au point de les mettre à la portée de tout le monde ?

La ſolution du problême énoncé ci-deſſus dépend de la réunion d'une infinité d'objets différens, qui concourroient en vain à la perfection générale, ſans la Preſſe qui peut ſeule la produire & l'anéantir. Auſſi je me ſuis attaché principalement à rendre ſon action & ſes mouvemens le plus indépendans qu'il m'a été poſſible, du maniement déréglé des Ouvriers auxquels elle eſt confiée.

La Presse qui fait depuis longues années l'objet de mes recherches & de mes travaux, imprime en un seul coup. On verra ci-après les différens avantages qui en résultent, ainsi que les motifs qui ont obligé jusqu'à présent à partager son opération. Mais quoique ce genre de construction, qui auroit dû être celui de la Presse, dès sa première invention, soit déjà commun à d'autres pour lesquelles il a été adopté avec succès : celle-ci en diffère principalement par les moyens faciles & précis dont on se sert pour régler la pression; par le parallélisme exact des pièces qui y concourent; par l'invariabilité absolue de la platine; par la justesse de toutes ses pièces, dont le mouvement est si doux, qu'il ne produit aucun bruit; & enfin par sa base assez solide, pour n'avoir besoin d'être soutenue par aucun étançon. La Presse ordinaire ne peut imprimer le papier dit *carré*, & le *grand raisin*, qui est la grandeur au dessus, qu'en deux fois; la mienne imprime le *carré*, le *grand raisin*, & le *grand Jésus* en un seul coup, avec deux fois moins de force; de là naît une expédition plus prompte du double, & la peine pour l'Ouvrier deux fois moindre.

L'opération de la Presse d'Imprimeur en lettres consiste à transporter sous une platine la forme ou châssis, ainsi que la feuille de papier, & à donner à celle-ci une empreinte égale des caractères composés & disposés en pages. Mais la hauteur des lettres ou caractères, ou, en termes de l'Art, ce que nous appellerons dorénavant la *hauteur en papier*, étant ou devant être toujours supposée uniforme, il falloit établir un parallélisme parfait entre les pièces qui concourent à la pression que reçoivent ces caractères. Or il n'est que trop prouvé que c'est par cette base fondamentale que pèche la Presse ordinaire; il est aisé d'en juger par l'inspection de celle qui passe pour la plus parfaite, par le vacillement sensible de la platine, & enfin par les *hausses* inévitées & inévitables sur le tympan & sur la frisquette. Ce terme est le terme sacré de l'Art de l'Imprimeur, c'est ce qui constitue son mérite. Tout Pressier qui sait bien mettre

mettre des hausses est habile Ouvrier, & c'est à peu près à cela que se réduit l'apprentissage d'un Art dans lequel on peut apprendre tous les jours. Mettre des hausses & des supports, n'est donc autre chose que de rétablir d'une manière toujours imparfaite, & à grande perte de temps, le parallélisme entre les pièces comprimantes & comprimées; & s'il y a des Ouvriers qui y réussissent, il y auroit cependant de l'injustice à leur refuser quelque mérite.

D'après ces données, il y avoit deux grandes difficultés à vaincre; conserver toujours un parallélisme parfait, & parer aux inconvéniens du jeu que peuvent acquérir des pièces qui se frottent & se compriment six mille fois par jour.

Je me suis efforcé, & je crois avoir réussi à donner à celles-ci la solidité & l'invariabilité que je pouvois désirer; j'en ai trouvé les moyens dans la dureté des matières, dans leur combinaison, dans la justesse & la perfection des pièces, dans leur bonne proportion.

L'objet de ce Mémoire étant de mettre sous les yeux de l'Académie les maux résultans des parties vicieuses de la Presse, avec la comparaison des moyens que j'ai employés pour y remédier, je pense que ce seroit abuser de l'indulgence & des momens précieux qu'elle veut bien m'accorder, que de détailler ici la description de l'un & l'autre instrument. Je crois pouvoir y suppléer en parlant seulement des pièces principales, de l'influence qu'elles ont sur la perfection de l'exécution, & de la différence de leur construction dans l'une & l'autre Presse.

Le *Sommier*, l'*Écrou*, la *Vis*, la *Platine*, le *Marbre*, sont les pièces essentielles de la Presse; ce sont cependant ces pièces dont la construction & les opérations tendent toutes à des résultats vicieux.

Dans la Presse ordinaire, la vis qui presse sur la platine, & celle-ci, qui y est attachée, font une révolution de dix lignes.

Cette grande révolution y eſt néceſſitée & opérée par l'effet du barreau que l'Ouvrier eſt obligé d'aller chercher contre la jumelle, où il doit s'en retourner, pour que le coffre puiſſe s'échapper de deſſous la platine, & que le tympan & la friſquette puiſſent ſe développer. Or l'Ouvrier, en amenant à lui le barreau, décrit un arc d'environ cent degrés, ce qui par conſéquent fait deſcendre, de dix lignes, la platine, ſur laquelle la vis appuie; mais la platine n'eſt éloignée de deſſus la forme, avant l'impreſſion, que de quatorze lignes; & les garnitures du tympan ayant une épaiſſeur que la preſſion peut diminuer, mais jamais anéantir, il faut donc que l'excédent de la deſcente de la vis, néceſſitée par la courſe du barreau, ſur l'eſpace compris entre la platine & la forme, abſtraction faite de l'épaiſſeur irréductible des étoffes, ſe diſtribue quelque part, ce qui ſe fait par la liberté qu'on a dû laiſſer au ſommier ou écrou de la vis de remonter; mais cette liberté a dû être reſtreinte, ſans quoi tout l'effort ſe ſeroit porté du côté où la réſiſtance auroit été nulle, & la platine n'auroit pas deſcendu ſuffiſamment pour imprimer. Pour cet effet, il a fallu contrarier l'aſcenſion du ſommier des deux côtés, par des corps élaſtiques, de la combinaiſon deſquels avec la réſiſtance des garnitures du tympan, il eſt par conſéquent viſible que dépend le plus ou le moins de foulage ou d'impreſſion, que la platine exerce ſur la forme. Mais ces corps élaſtiques le ſont inégalement; ce ſont des morceaux de feuilles de carton ou de chapeau, plus ou moins denſes & épais, & qui ne peuvent recevoir ou rendre une réſiſtance égale, que par l'effet du haſard. Premier vice donc de parallélisme dans le ſommier, qui faiſant incliner la vis, la fait appuyer inégalement ſur la platine, change par conſéquent le parallélisme de celle-ci, & fait ſouvent caſſer ou égrener le pivot. De plus, la tige d'en bas de la vis, qui preſſe par un pivot très-pointu ſur le ſoi-diſant centre de la platine, eſt fort longue; cette platine, autrefois attachée & maintenue par des cordes, ne l'eſt encore que par des chaînes ou des crampons; auſſi éprouve-t-elle, dans les Preſſes les mieux faites, une variation ſenſible au tact & même à l'œil,

& d'autant plus forte que nous avons vu ci-dessus que sa course ou révolution étoit fort étendue, & nécessitée par celle du barreau. Deuxième vice qui, procurant à la platine un mouvement rétrograde & multiplié, produit souvent des lettres doubles & frisées.

Dans ma Presse, j'ai évité ces deux inconvéniens, & voici les moyens dont je me suis servi. J'avois pour donnée indispensable l'arc que doit décrire le barreau, depuis la jumelle d'où il part, pour arriver au point de force de l'Ouvrier, & s'en retourner à la jumelle après la pression; mais cet arc, comme on l'a vu ci-dessus, faisant faire à la vis & à la platine une course fort étendue, j'avois en même temps une autre donnée absolument opposée, c'étoit de restreindre & de déterminer, à peu de chose près, la descente de la platine, à l'étendue nécessaire pour presser suffisamment. Pour y parvenir, j'ai imaginé une vis avec deux pas, l'un en haut & l'autre en bas, inclinés de manière que lorsque la vis descend de dix lignes, la platine qui y est attachée ne descende néanmoins que d'un peu plus de trois lignes; alors toute la descente que j'ai fixée à ma platine, tourne à ma volonté, au profit de la pression; d'autant plus que la platine n'est éloignée de la lettre, avant la pression, que de l'espace nécessaire pour y introduire le marbre, chargé de sa forme recouverte du tympan & de sa frisquette. Dans cette hypothèse, le sommier est immobile; car la mobilité du sommier n'ayant été imaginée que pour faire évanouir l'excédent du foulage ou de la pression, que la grande révolution de la vis & de la platine produisent dans la Presse ordinaire, où elles montent & descendent de dix lignes; cette mobilité ne peut avoir lieu ici, où la révolution de la platine est déterminée au degré juste & nécessaire pour opérer une pression suffisante. Pour fixer le sommier, on introduit dans les mortoises des jumelles, des semelles de bois qui portent sur les tenons du sommier, & sont eux-mêmes comprimés par la vis d'en-haut. Je me suis cependant réservé la faculté de pouvoir rendre le sommier mobile, ce qui peut être néceſſaire dans des ouvrages qui exigent plus ou moins de preſſion; mais pour remédier à l'irrégularité de denſité des corps qu'on eſt obligé d'employer, j'ai imaginé deux groſſes vis qui, traverſant les jumelles par le bout d'en-haut; compriment à volonté ces mêmes corps, en graduant leur denſité & réſiſtance à volonté : ainſi le ſommier conſerve toujours le parallèliſme le plus exact; & pour rendre ſes frottemens plus doux, ſes mortoiſes, ainſi que les arraſemens des jumelles, ſont armées de plaques de cuivre & d'acier.

Sommier ou Écrou d'en-haut.

J'ai briſé auſſi en deux parties le ſommier d'en-haut où eſt contenu l'écrou; ces deux parties s'aſſemblent, ſe lient & ſe reſſerrent par huit gros boulons, pour être aſſuré qu'il ne travaillera pas continuellement comme les autres qui finiſſent ſouvent par ſe gerſer, ſe fendre & s'éclater. C'eſt ainſi que je crois avoir paré aux inconvéniens qui peuvent réſulter du travail du bois, & du jeu qu'occaſionnent les frottemens réitérés.

Écrou d'en-bas.

L'écrou des pas de la vis d'en-bas eſt terminé par une baſe de huit pouces & demi en carré, aux quatre coins de laquelle eſt attachée, par de fortes vis, la platine. J'ai donc une preſſion opérée par une ſurface d'un demi-pied carré, au lieu d'un ſeul point, & il eſt aiſé de juger laquelle doit avoir la préférence. Cet écrou offre extérieurement quatre faces carrées, ſur leſquelles il eſt aſſujetti par une moiſe de bois, armée d'une boîte d'acier, ſur laquelle s'opèrent les frottemens; cette moiſe eſt briſée en deux & ſuſceptible d'être reſſerrée par quatre gros boulons à écrou, à meſure que les frottemens procureroient du jeu; elle butte des deux côtés contre les jumelles, par deux mentonnets dans un ſens, & y eſt aſſujettie dans l'autre par deux clefs. Par ce moyen, j'ai procuré à ma platine une invariabilité abſolue, & ſon parallèliſme, avec celui du ſommier, ſuppoſés parfaits, ne peuvent plus changer.

Il ne ſuffiſoit pas de proſcrire les hauſſes dont on a vu ci-deſſus l'uſage & les inconvéniens; il falloit encore bannir les ſupports, autre pratique non moins vicieuſe. Elle a toujours pour baſe le parallėliſme imparfait des pièces comprimées & comprimantes ; mais même, en ſuppoſant ces parties auſſi parfaitement parallèles qu'on le peut déſirer, les ſupports ont encore pour objet de diminuer le foulage exceſſif des lettres iſolées, & de remédier au porte-à-faux de la platine ; telles ſont les bordures des pages, les *folio*, *ſignatures*, *réclames*, *titres courans*, &c. Ce point de difficulté eſt la pierre de touche qui ſert à juger du talent de l'Ouvrier ; c'eſt cette grande difficulté qui juſqu'ici n'a été vaincue, excluſivement à tous autres, que par le ſeul & célèbre Artiſte de *Birmingham*; les autres, ceux mêmes qui tout récemment ſe ſont diſtingués par leurs efforts dans l'Art de l'Imprimerie, ont tous échoué à cet écueil. Les caractères ont ſur les garnitures qui les contiennent, une ſaillie ſuffiſante, pour que l'encre dont on les empreint n'en touche que l'œil ; cette ſaillie, d'environ deux lignes, a lieu dans les bordures des pages, dans les *alinea*, & dans tous les endroits où il y a des blancs. Juſqu'ici on n'eſt parvenu à remédier qu'à quelques-uns de ces défauts les plus apparens, & l'on en a cherché les moyens dans des ſupports que l'on a appliqués à la friſquette, aux endroits qui correſpondent aux vides : on en voit ſouvent des traces trop apparentes dans le bas des pages.

LA FRISQUETTE.

Le moyen que j'ai employé eſt bien ſimple, & j'en ai obtenu le ſuccès le plus complet ; ma friſquette porte, à peu de choſe près, l'épaiſſeur du vide que produit la ſaillie des caractères, & j'ai eu ſoin de rendre cette ſaillie uniforme, en réduiſant à une hauteur égale, les garnitures, eſpaces & quadrats employés pour les blancs. Par ce moyen, tout ce qui eſt vide eſt rempli pendant la preſſion, & ce qui eſt plus élevé eſt ſoutenu aſſez modérément pour donner lieu à tout le foulage que l'on peut déſirer.

LE COFFRE.

Le coffre des Preſſes ordinaires n'eſt autre choſe qu'un *marbre* de pierre enchaſſé dans un cadre de bois ; à ce coffre ſont adaptés huit, quelquefois dix crampons de cuivre, qui par leurs degrés différens de dureté, par leur épaisseur différente, ou n'ont jamais porté également, ou cessent bientôt de frotter à mesure qu'ils s'usent; ces crampons glissent sur deux tringles de fer poli, en dos d'âne; le tout roule assez légèrement, ce que l'on ne peut attribuer qu'à la légèreté du coffre, dont les matières & la construction, en soulageant l'Ouvrier, tournent au détriment de l'ouvrage. Mon coffre est composé d'un marbre de cuivre de dix lignes d'épaisseur, enchâssé dans un châssis de fer de vingt-six lignes de large. Au châssis sont adaptées trois bandes de cuivre recroui, dans lesquelles sont évidées trois portées pointues de neuf lignes de long, ce qui fait neuf points de frottement disposés en cône évidé, & qui glissent dans trois barres d'acier, qui ont la même forme en creux; mais de manière que les frottemens ne s'opèrent que dans le fond & nullement sur les parties latérales. Les tringles d'acier sont enchâssées & portées dans de fortes traverses de bois de toute leur longueur, qui sont elles-mêmes unies par une autre traverse, en sens contraire, & soutenues au centre & à une extrémité, par de fortes colonnes, & de l'autre bout sur la plate-forme.

Faux Tympan.

Les tympans sont ordinairement revêtus d'un parchemin collé, & servent à toute sorte d'ouvrages, jusqu'à ce que la vétusté les fasse supprimer; mais cette pratique est vicieuse, en ce que les pages & les lettres y font bientôt une telle impression, qu'on est obligé, lorsque l'on change de forme, d'en faire disparoître ce que les Ouvriers appellent le foulage. Pour y parvenir, on l'humecte jusqu'à ce qu'il redevienne uni; aussi conserve-t-il long-temps une fraîcheur excessive qu'il communique au papier, & il lui fait recevoir une teinte trop forte, disproportionnée avec celle de la veille; autre cause d'inégalité dans la teinte. Pour y remédier, j'ai imaginé un cadre d'une épaisseur égale à une frisquette mince; je le recouvre d'un vélin, & je le rends adhérent au cadre du tympan, par les mêmes boulons & vis qui lui sont nécessaires, & qui les traversent tous deux. Lorsque le foulage est trop fort, il est facile d'en changer, en ayant multiplié le nombre, ainſi que celui des friſquettes.

Grand Tympan.

Il ne me reſte plus à parler que du grand tympan, qui ne diffère des autres que par ſa charnière d'une ſeule pièce, prolongée d'un bout à l'autre dans la longueur de vingt-trois pouces. Tous les charnons en ont été pris dans la maſſe, & forés comme un canon de fuſil; par ce moyen, le tympan n'éprouve aucune eſpèce de variation. Il eſt facile de s'en convaincre par l'expérience d'une même feuille, tirée pluſieurs fois de ſuite impunément; tandis que ſur les autres Preſſes, la même feuille ne peut pas être imprimée une ſeconde fois ſans doubler. Une telle expérience prouve tellement la juſteſſe de l'inſtrument, que pour en obtenir le ſuccès, il faut que neuf à dix mille lettres ſe trouvent rigoureuſement recouvrir chacune ſon empreinte. Cette expérience, que je me propoſe de faire ſous les yeux des Commiſſaires que l'Académie voudra bien nommer, eſt un défi que je ne crains pas de propoſer à toutes les Preſſes d'Imprimerie qui exiſtent en ce moment.

La Charnière.

La charnière décrite précédemment eſt aſſujettie au coffre par cinq boulons, à l'aide deſquels je me ſuis ménagé la poſſibilité de la remonter ou de la deſcendre de deux lignes, n'ayant pas été certain que la ſituation où elle eſt fixée dans les autres Preſſes fût la meilleure. Dans celles-ci, les charnières du tympan ſont engagées dans les cornières du coffre, ou même en ſont tellement partie, qu'elles entraînent leur deſtruction ſi on veut y changer quelque choſe.

Je finirai en mettant ſous les yeux de l'Académie les premiers eſſais de cet inſtrument, exécutés ſur ce même papier vélin de France, qui lui a été préſenté il y a quelque temps par le ſieur Réveillon, & dont on doit la ſeule & première invention à ſes ſoins & à ſon intelligence. J'eſpère qu'elle voudra bien les accueillir avec indulgence, en faveur des efforts que j'ai faits pour mériter ſon ſuffrage. Le ſuccès de cet essai, qui a presque entièrement répondu à mon attente; me laisse encore, entre autres, à désirer la perfection de l'encre; sa composition étant bien moins du ressort de la partie des Sciences à laquelle je me suis appliqué, je supplie l'Académie de vouloir bien venir à mon secours pour cet objet, en recommandant à ceux de ses Membres qui s'occupent de la Chimie, la recherche d'une encre dont je donnerai les conditions, telle enfin que je la désire, & telle que l'ont employée autrefois les Aldes, les Badius, les Étiennes, & plus récemment les Foulis de Glascow.

Telle est la Presse dont je m'occupe depuis si long-temps, & dont je ne dois le succès qu'à beaucoup de travaux, d'erreurs & de dépenses. Si la description que je viens d'en présenter à l'Académie a pu l'intéresser, je désire qu'elle veuille bien nommer des Commissaires, qui, après l'avoir examinée, puissent lui en rendre compte. Son suffrage ne contribuera certainement pas peu à déterminer à ordonner d'en construire de pareilles; alors les seules Presses du Louvre cesseront de *gémir;* cette expression figurée de notre langue, deviendra bientôt aussi caduque que l'objet qui lui a donné naissance; & je m'applaudis d'avance que la confiance dont le Roi & le Ministre m'honorent, me mette à portée d'en consacrer les premiers travaux à propager & perpétuer plus dignement les véritables monumens des Sciences.

EXTRAIT DU RAPPORT fait à l'Académie Royale des Sciences, le 17 Mai 1783.

M. le Préſident de Saron, M. le Duc de la Rochefoucauld, & MM. de Fouchy, le Roy, l'Abbé Rochon & Deſmareſt, nommés par l'Académie Royale des Sciences, pour examiner la nouvelle Preſſe qui lui a été préſentée par M. Aniſſon le fils, Directeur de l'Imprimerie Royale, ont jugé que cet inſtrument mérite ſes éloges & ſon approbation, comme contribuant par des moyens nouveaux & ingénieux, à perfectionner l'Imprimerie.

Ces moyens ſont :

1.° Le ſyſtème ſuivi dans la conſtruction du ſommier & de l'écrou qu'il porte. Par cette conſtruction, la vis de la nouvelle Preſſe peut prendre & conſerver une ſituation verticale, conſtamment la même pendant ſa révolution.

2.° La vis qui, au lieu de ſe terminer en pointe par la partie inférieure, y porte des pas à trois filets, qui jouent dans un écrou fixé à la platine.

3.° La moiſe qui, s'oppoſant à tout déplacement latéral de la platine, dirige & maintient ſon mouvement dans la ligne verticale.

4.° Et c'eſt ici un des points de réforme qui paroît le plus important aux Commiſſaires, les vis & les ſupports, élaſtiques ou durs, qui aſſujettiſſent le ſommier, en règlent les effets à volonté, & par conſéquent conſervent toujours très-exactement ſon parallélisme, lorſqu'il deſcend & qu'il remonte.

5.° (Sans s'arrêter aux avantages qui peuvent naître, ſoit de la forme ou de la matière du marbre & de ſon châſſis, ſoit de la manière dont ils roulent), la ſtabilité du plan ſur lequel poſe le coffre au moment de la preſſion, & dont l'aſſiette eſt invariable ſous l'effort de la platine.

6.° La diſpoſition particulière du tympan, par laquelle on s'eſt ménagé la facilité d'en faire diſparoître le foulage ſans aucune perte de temps.

7.° Celle de la frisquette qui remplit l'espace des garnitures de la forme, de manière que la feuille de papier qu'on imprime soit soutenue également par-tout.

En exposant dans le plus grand détail ces différens moyens, les Commissaires en font continuellement la comparaison avec ceux qui les remplacent dans les anciennes Presses; il montrent tous les défauts de ces derniers, ainsi que l'impossibilité d'obtenir, en s'en servant, une impression parfaite. Ils terminent cette comparaison par celle des résultats que leur ont donnés quelques essais faits avec l'un & l'autre instrument. Si l'on réimprime avec les Presses ordinaires, une feuille qu'on vient d'imprimer, sans la détacher du tympan, les lettres sont doublées. Avec la nouvelle Presse, on a réimprimé la même feuille jusqu'à cinq & six fois, sans que les lettres aient doublé. Il faut remarquer qu'à chaque fois qu'on a réitéré l'impression, on a fait aller & venir le coffre; on a déployé & reployé le tympan & la frisquette, pour examiner l'effet de chaque coup de Presse; enfin on a encré. On a fait plus encore : pour s'assurer que la platine pressoit également dans toutes ses parties, & conservoit son parallélisme malgré le porte-à-faux que cause l'incomplet des pages de la forme, on a placé sur le marbre successivement à différens points, des paquets de composition, qui ne renfermoient que l'étendue d'une page; & on les a placés de manière qu'ils répondissent à différens angles de la platine; or dans toutes les positions qu'elles ont occupées sur le marbre, l'impression de ces pages s'est également bien faite, tant le parallélisme de la platine avec le marbre est invariablement maintenu.

Les Commissaires apprécient enfin l'avantage de la nouvelle Presse sur l'ancienne, quant à la célérité du travail : il en résulte qu'il est certain que la manœuvre se trouve abrégée de moitié dans la nouvelle Presse.

Je soussigné certifie le présent Extrait du rapport, conforme à l'original & au jugement de l'Académie. A Paris, le vingt-un Octobre mil sept cent quatre-vingt-trois.

Signé LE M.QUIS DE CONDORCET, *Secrétaire perpétuel.*

AVERTISSEMENT.

Les expériences faites en présence des Commissaires nommés par l'Académie Royale des Sciences, & consignées dans le rapport qui lui en a été fait le 17 *Mai* 1783, *ont prouvé* que cette Presse est plus expéditive d'un quart que les autres, en rendant en même-temps la main-d'œuvre moins pénible, & qu'elle procure à ses ouvrages un degré de perfection, indépendant du talent des Ouvriers.

D'après ces considérations, le Gouvernement s'est déterminé à faire publier une Description exacte & détaillée de cette machine, dont le succès étoit déjà assuré, par les expériences réitérées depuis plusieurs années à l'Imprimerie Royale; pour en faciliter la construction aux gens de l'Art, & leur faire trouver dans la simplification des procédés, les moyens d'en mettre les résultats à la portée de tout le monde.

Pour donner une Description exacte de toutes ses parties, on a cru devoir la rendre comparative & contradictoire avec celle de l'ancienne Presse, dans tous les points où elles peuvent différer entre elles; & rendre compte à mesure, de la différence des moyens & des résultats.

DESCRIPTION

OU

TABLEAU COMPARATIF

DES DIFFÉRENTES PIÈCES

DE LA NOUVELLE PRESSE,

AVEC CELLES DES ANCIENNES.

NOUVELLE PRESSE.	ANCIENNES PRESSES.
LE CHAPITEAU, indépendamment de la grace qu'il procure à la Presse en la couronnant, sert encore à lier & assembler les jumelles.	LE CHAPITEAU, dans presque toutes les Presses, ou n'existe pas, ou n'est qu'une planche clouée sur le haut de chaque jumelle, & ne sert que d'objet de décoration.
LES JUMELLES, d'une construction beaucoup plus forte, sont unies dans leur longueur par de fortes vis aux pièces *SS*, *FF*, *HH*, *NN*, *OO*. Les mortoises qui reçoivent les tenons du sommier sont armées en cuivre, & leurs surfaces extérieures, sur lesquelles doivent frotter les mentonnets du sommier pendant sa course, sont aussi armées de plaques de cuivre; celles-ci sont liées aux premières par des boulons ou vis à têtes fraizées & perdues; & de là il résulte que le sommier, dont toutes les parties correspondantes sont garnies d'acier, opère, sur & dedans les ju-	LES JUMELLES sont deux pièces de bois souvent mal écarries, qui n'ont d'autre union que celle que peuvent leur procurer deux seules traverses, qui n'y tenant que par leurs tenons, les emmanchent plus ou moins solidement; aussi sont-elles fortement étançonnées au plafond par des tringles de fer. Les mortoises qui reçoivent le sommier étant simplement formées & entaillées dans l'épaisseur, on voit fréquemment les bois se renfler ou se retirer, contraindre le sommier d'un côté & de l'autre, ou lui procurer beaucoup de jeu : il est aisé de comprendre les effets vicieux qui doivent

NOUVELLE PRESSE.

melles, un frottement fort doux, & qui ne peut jamais être contrarié par le gonflement des bois, auquel on a paré par ces mêmes précautions.

Elles ſont aſſemblées par en-bas dans des patins de 3 pieds de long ſur 1 pied de large, & 6 pouces d'épaiſſeur : ces patins ſont unis l'un à l'autre par deux traverſes. Cet aſſemblage eſt encore fortifié par deux boulons qui lient enſemble les jumelles, les patins, & les traverſes de devant & de derrière. Les Jumelles ſont ainſi aſſiſes ſur une baſe de près de 8 ½ pieds carrés, ce qui, joint à la maſſe des autres parties de la Preſſe, diſpenſe de tout étançon.

LES DEUX VIS DE PRESSION DES JUMELLES. Ces pièces ſont ici d'une invention abſolument nouvelle ; elles ont 1 pied de long, & 18 lignes de diamètre : elles traverſent le bout des jumelles pour entrer dans leur écrou, & deſcendre juſque ſur les garnitures du ſommier. Leur uſage eſt de conſerver toujours le parallélisme de cette pièce, en comprimant ſes garnitures, qui étant des corps plus ou moins élaſtiques, offrent une réſiſtance inégale de chaque côté ; de façon que pour charger également le ſommier, il n'y a qu'à faire deſcendre ou remonter les vis : c'eſt ainſi que l'on remédie à l'irrégularité inévitable des étoffes, avec leſquelles on eſt obligé de contraindre l'aſcenſion du ſommier, comme on le verra ci-après.

L'ENCRIER eſt taillé dans la maſſe d'un bloc de marbre noir de 18 pouces de long ſur 17 pouces de large, & de

ANCIENNES PRESSES.

en réſulter, puiſque c'eſt dans ce même ſommier ainſi contraint & qui ne peut plus être parallèle à la platine, que paſſe la vis ; celle-ci ceſſe d'être verticale, & c'eſt le principe de tous les vices que l'impreſſion peut éprouver.

Les jumelles les plus ſolides ſont aſſemblées dans des patins de 21 pouces de long ſur 6 pouces de large & 3 pouces ½ d'épaiſſeur, deſtitués de traverſes qui les uniſſent : elles préſentent une maſſe ſi chancelante, qu'on eſt obligé de les aſſujétir par bas au plancher, & de les étayer au plafond par des étançons multipliés & par des barres de fer.

L'ENCRIER eſt une aſſemblage de quatre planches de chêne, ſur leſquelles l'encre ſe broye avec un broyon de

NOUVELLE PRESSE.

6 pouces d'épaisseur; son broyon est de la même matière. Cette piece a sur les autres, l'avantage qu'on peut y broyer l'encre beaucoup plus parfaitement sans craindre le mélange d'aucun corps étranger; elle est recouverte d'un couvercle en carton, qui l'enveloppe en entier, sans cependant en suspendre l'usage.

LE SOMMIER, partagé en deux dans sa longueur, reçoit l'écrou, qui porte en-dessous deux oreilles pour servir à déterminer son aplomb dans le sommier: deux boulons traversent ces deux oreilles, le sommier, & une autre plaque de cuivre qui le recouvre & sur laquelle on les serre à mesure que le bois se comprime. Les deux parties du sommier sont réunies ensemble par huit fort boulons, qui portent chacun leur rondelle de cuivre; les quatre du milieu servent à serrer & maintenir l'écrou; ceux des extrémités compriment les mentonnets contre les jumelles, & contribuent à rendre le sommier fixe à volonté: ses tenons sont armés en dedans & en dehors de plaques d'acier, liées entre elles par des boulons à têtes fraizées & perdues; & pour s'assurer davantage de la justesse des frottemens, on a, pendant un long espace de temps, rodé & usé à l'éméri cette pièce, sur toutes les parties qui éprouvent le contact des jumelles.

En partageant le sommier en deux parties, on est parvenu à obvier aux inconvéniens que peut produire, en se déjetant, une pièce de bois aussi forte,

ANCIENNES PRESSES.

bois. Il s'en faut de beaucoup que l'objet utile qui devroit résulter de cette opération, soit rempli: l'encre, loin de se broyer, pénètre bientôt les pores du bois, & en détache des parcelles que les balles enlèvent & que les caractères ne tardent pas à recevoir. La plupart des encriers, ou ne sont couverts en aucun temps, ou ont des couvercles dont la construction ne permet pas l'usage pendant le travail.

LE SOMMIER est une pièce de bois d'un seul morceau, qui renferme l'écrou de la vis; elle entre de chaque côté dans les entailles des jumelles, & est le plus ordinairement maintenue sur chaque partie latérale par des mentonnets pris dans la masse: cette pièce est destinée, à chaque coup de pression, à remonter & descendre le long des jumelles. Pour opérer la pression, & pour régler ce qu'on appelle *le coup* de l'Ouvrier, c'est-à-dire, déterminer l'arc qu'il doit décrire en amenant à lui le barreau, il a fallu contraindre l'ascension du sommier par des garnitures de feutres, cartons ou autres corps élastiques; mais, comme on l'a vu précédemment, ces corps plus ou moins denses & épais, ne peuvent recevoir ou produire une résistance égale que par l'effet du hasard: le sommier est donc très-éloigné de conserver le parallélisme parfait qu'il ne devroit jamais perdre, & qui suppose que les tenons en aient, lors de sa construction, été proportionnés avec justesse aux mortoises des jumelles, ce qui arrive très-rarement: le renflement des bois de part ou d'autre, le contraint bientôt d'un côté;

NOUVELLE PRESSE.

& qui finit presque toujours par se gercer, se fendre & s'éclater.

ANCIENNES PRESSES.

il acquiert du jeu d'un autre; au point, que l'on voit des sommiers remonter & descendre sensiblement de travers en plusieurs temps. Le plus souvent, les Ouvriers qui n'ont d'autre moyen de le charger ou de le comprimer, que de diminuer d'un côté les garnitures, ou d'en introduire avec peine de nouvelles de l'autre, laissent le sommier dans cet état de délabrement, ou tâchent d'y remédier par des cales qu'ils introduisent avec force dans les entailles. Le sommier est donc très-éloigné d'être parallèle à la platine : la vis n'est plus verticale, la pression s'opère inégalement, & il ne faut atribuer qu'à cela l'égrènement du pivot de la vis.

L'ÉCROU D'EN-HAUT est une masse de cuivre de laiton suffisamment rendurci, dans laquelle on a taraudé les pas d'en-haut de la vis : ces pas sont très-exactement les mêmes que ceux de la vis, sur laquelle ils ont été taraudés, par le moyen d'un tarau ou fausse vis qui avoit été elle-même coupée sur le tour d'après ceux de la vis. Il en est résulté que l'intérieur de cet écrou offre des pas vifs, nets & sans soufflure. Lorsque la vis y est introduite, elle n'y a de jeu que ce qui est nécessaire pour y faire sa révolution : par ce moyen on a obtenu encore plus de justesse qu'avec un écrou fondu sur la vis, & on a évité les parties vitrifiées de la fonte, qui la détruisent souvent elle-même en peu de temps.

L'inclinaison des pas de cet écrou est à peu-près la même qu'aux écrous ordinaires; il seroit facile d'arriver au

L'ÉCROU est une portion de matière aigre, mêlée souvent de potin, fondue sur la vis, & qui en est dévêtie à grands coups de masse; de là, il résulte qu'étant impossible de lui restituer la même rondeur que le dévêtissement lui a nécessairement ôtée, la vis cesse de toucher dans tous les points les pas de l'écrou, elle y acquiert des mouvemens irréguliers, elle use inégalement l'écrou; & celui-ci, qui retient toujours de la fonte des parties vitrifiées, mange lui-même les pas de la vis : cet écrou est le plus souvent placé dans le sommier avec trop peu de précaution, pour en assurer la situation verticale; alors la vis cesse elle-même d'être perpendiculaire au sommier, la pression devient inégale, le pivot casse, & il en résulte les ravages que l'on verra ci-après.

LA

NOUVELLE PRESSE.

même but, par une inclinaiſon plus ou moins grande des pas d'en-haut de la vis ; mais ſon rapport avec celle des pas de l'écrou d'en-bas n'eſt pas indifférent, & c'eſt, comme on le verra dans la deſcription ſuivante, leur combinaiſon qui fait deſcendre & monter plus ou moins la platine. Un des ſoins les plus indiſpenſables à prendre dans la conſtruction d'une Preſſe, & ſur-tout de celle-ci, eſt de placer l'écrou dans ſon ſommier ſur une ligne qui lui ſoit parfaitement perpendiculaire; & on s'en eſt aſſuré ici par tous les moyens poſſibles.

LA VIS eſt une pièce d'acier, cylindrique, de la même longueur que les autres, dont la tête eſt renforcée d'un quart ; le haut porte quatre filets carrés, inclinés dans la proportion ordinaire, pris dans la maſſe, taillés ſur le tour, & diviſés avec tant de juſteſſe, que la vis peut entrer dans ſon écrou par tous les pas indifféremment : cette portion de la vis fait dans ſon écrou un peu plus d'un quart de révolution, & cette révolution eſt commune à toutes les Preſſes comme à la nouvelle ; elle eſt néceſſitée & opérée par l'effet du barreau que l'Ouvrier eſt obligé d'aller chercher contre la jumelle, où il doit s'en retourner pour que le coffre puiſſe s'échapper de deſſous la platine, & que le tympan & la friſquette puiſſent ſe développer : or l'Ouvrier, en amenant à lui le barreau, décrit un arc d'environ cent degrés ; & à raiſon de la deſcription néceſſaire de ce grand arc, la platine, obligée de ſuivre l'écrou d'en-bas auquel elle eſt attachée, ſubit, d'après cette hypothèſe, une deſcente de

ANCIENNES PRESSES.

LA VIS eſt un morceau de fer forgé, de la longueur de 22 pouces, dont les pas à quatre filets carrés, de 4 pouces de hauteur, ſont ordinairement braſés, c'eſt-à-dire rapportés ſur le corps de la vis; le bas eſt terminé en un pivot pointu, ſouvent d'une ſeule pièce, quelquefois tronqué vers ſon extrémité & ſe démontant à clavette, pour que ſon renouvellement qui arrive ſouvent, par les raiſons détaillées ci-deſſus, n'entraîne pas celui de toute la vis, & n'expoſe pas l'Ouvrier à l'entière ſuſpenſion de ſon travail : c'eſt ce point, qui n'a pas une demi-ligne d'étendue, qui eſt deſtiné à comprimer dans ſon centre une ſurface d'environ 17 pouces de long ſur 12 pouces de large. A la tête de la vis eſt quelquefois adaptée par un collet qui l'entoure, une traverſe de fer portant à chaque extrémité un T, par les branches duquel paſſent les crampons, chaînes ou cordes qui ſervent à maintenir la platine dans ſa deſcente, & à la remonter après la preſſion. C'eſt uniquement en ce point,

NOUVELLE PRESSE.

quatorze lignes, *première donnée.* Mais on avoit aussi une *autre donnée* diamétralement opposée; c'étoit de restreindre à une bien moindre étendue, & de déterminer, à peu de chose près, la descente de la platine à celle nécessaire pour presser suffisamment. Car moins la course de la platine peut avoir d'étendue, moins elle doit éprouver de variation. Sans ce motif, il eût été encore possible de laisser à la platine toute la révolution que l'inclinaison des pas de vis eût pu lui donner. On auroit aisément trouvé le moyen, comme dans les autres Presses, de remédier au trop de foulage par la plus grande élasticité du sommier, où se feroit perdu l'excédent de la descente de la platine. Celle-ci n'étant éloignée de dessus la forme, avant la pression, que de quatorze lignes, les garnitures du tympan ont une épaisseur que la pression peut diminuer, mais ne peut jamais anéantir: il faut donc que l'excédent de la descente de la vis, opérée par la course du barreau, sur l'espace compris entre la platine & la forme, eu égard à l'épaisseur irréductible des étoffes, se distribue quelque part; ce qui se fait par la liberté limitée qu'on laisse au sommier de remonter.

Pour accorder des données aussi opposées, on a imaginé de construire une vis qui eût, dans sa partie inférieure, des pas comme en haut, inclinés de manière que lorsque la vis descend de dix lignes, la platine ne descende que d'un peu plus de trois lignes; alors toute la descente fixée à la platine, tourne à volonté, à très-peu de chose près, au profit de la pression. Il résulte donc de l'inclinaison des pas d'en-bas, combinée avec

ANCIENNES PRESSES.

dans l'attache de la platine, qu'a varié jusqu'à présent la construction de la Presse; mais tous ces moyens peuvent être regardés comme vicieux, aucun ne tendant à descendre la platine sans variation & à la remonter de même.

NOUVELLE PRESSE. ANCIENNES PRESSES.

l'inclinaiſon de ceux d'en-haut, que les deux tiers de la deſcente produite par la révolution des pas d'en-haut ſont détruits par ceux d'en-bas; & c'eſt-là ce qui a le plus long-temps contrarié les efforts de l'Inventeur de cette Preſſe.

La preſſion s'opère par les pas d'en-bas de la vis ſur ceux de l'écrou, & c'eſt, comme on le verra dans la deſcription de l'article ſuivant, le ſeul principe de la Preſſe à un coup.

Chaque bout de la vis porte un pivot de 15 lignes de long, l'un deſquels entre par en-haut dans la plaque de cuivre qui ſurmonte le ſommier, & l'autre eſt engagé dans une chambre pratiquée au centre de la platine, & n'eſt pas aſſez long pour toucher au fond lorſque la vis eſt au bout de ſa révolution.

L'ÉCROU D'EN-BAS. Cet écrou eſt un morceau de cuivre de la même eſpèce que celui d'en-haut, & dont les pas ont été taraudés par le même procédé; ſa forme extérieure préſente quatre faces exactement carrées & polies; il eſt terminé par une baſe de huit pouces ſix lignes en carré; aux quatre coins de laquelle la platine eſt attachée par de fortes vis: on a donc une preſſion produite par une ſurface de plus d'un demi-pied carré au lieu d'un ſeul point. La preſſion s'opérant par les pas de la vis, celle-ci entraîne avec elle en deſcendant & ramène en montant ſon écrou d'en-bas, & par conſéquent la platine qui y eſt attachée: pendant cette révolution, qui eſt déterminée à quatre lignes & demie & n'excède jamais trois lignes, les quatre faces extérieures de l'écrou

NOUVELLE PRESSE.

qui suit ce mouvement, touchent dans tous leurs points celles de la boîte d'acier renfermée dans la moise. Ces frottemens & contacts ont été préparés & disposés en même temps que ceux du sommier, par de l'émeri fin, de la ponce pilée, & enfin du rouge d'Angleterre.

Il est absolument nécessaire que la surface de dessous de l'écrou qui porte sur la platine, offre un plan exactement parallèle à celui de la platine sur laquelle il pose.

LA MOISE est une tablette de bois de l'épaisseur de 2 pouces 7 lignes, & placée à 2 pouces ½ au-dessus de la platine; cette tablette, brisée en deux parties, se réunit en une par le moyen de quatre boulons; dans son milieu est pratiquée une ouverture pour le passage de l'écrou d'en-bas, & cette ouverture est une boîte d'acier de la même épaisseur que la moise; cette boîte est de même brisée en deux, d'angle en angle: chaque partie porte des deux côtés une oreille ou prolongement, que traverse de chaque côté un des quatre boulons: toutes ses surfaces disposées carrément avec le plus grand soin, ont été, comme on l'a vu ci-dessus, rodées & usées contre celles de l'écrou. Cette tablette, qui porte le nom de *moise* lorsqu'elle réunit sa boîte d'acier, contribue uniquement à assurer l'invariabilité de la platine; chaque bout embrasse les jumelles par un fort mentonnet, & ses deux parties sont forcées & contraintes en en-bas, dans les mortoises des jumelles, par une double clé de bois; il est donc impossible que cette pièce, ainsi assujettie

ANCIENNES PRESSES.

LA MOISE ou TABLETTE est une planche quelquefois d'une seule pièce, ordinairement divisée en deux parties qui se joignent ensemble; elle est attachée aux jumelles par deux mortoises en queue d'aronde: son usage paroît être destiné à maintenir la position verticale de la vis dans la boîte qui traverse cette pièce; mais cet objet est manqué, & la construction même de la Presse s'oppose à ce qu'il soit rempli.

NOUVELLE PRESSE. | ANCIENNES PRESSES.

dans les deux ſens oppoſés, laiſſe à l'écrou d'autre mouvement que celui qui ſe fait dans le ſens vertical : c'eſt-là la propriété eſſentielle de cette pièce importante, qui aſſure la ſituation perpendiculaire de la vis, & donne en même-temps à la platine une invariabilité inconnue juſqu'à préſent.

LA PLATINE, de cuivre fondu, porte 23 pouces de long ſur 19 pouces de large ; elle préſente quatre faces diſpoſées en talus ; la ſurface de deſſus eſt la même que la baſe de l'écrou, & eſt exactement recouverte par cette pièce : ſon épaiſſeur, au centre, eſt de 19 lignes, & ſur les extrémités de 9 lignes $\frac{1}{2}$. On a vu ci-deſſus quelle étoit ſa révolution, qu'elle ne faiſoit que celle qui eſt néceſſaire pour opérer une preſſion ſuffiſante, & ſeulement aux dépens des garnitures du tympan : ſon invariabilité abſolue eſt un des plus grands points de difficulté vaincue, que la conſtruction de cet inſtrument puiſſe préſenter.

LA PLATINE étoit anciennement en bois, mais maintenant l'uſage paroît avoir prévalu de la faire de cuivre ; ſa dimenſion la plus ordinaire eſt de 17 pouces de long ſur 12 de large : ſon épaiſſeur eſt communément de deux pouces, ſon centre eſt déterminé par une grenouillère on morceau de fer trempé, incruſté dans ſa maſſe, & ſur laquelle le pivot de la vis deſcend & opère la preſſion. La manière dont elle eſt attachée à la vis a quelquefois varié : il y a toujours aux quatre coins de cette pièce un fort crampon, où paſſoient autrefois des cordes qui alloient ſe rattacher au bas de la boîte qui enferme la vis ; maintenant ce ſont des anneaux en *S*, dont l'un paſſe dans les crampons de la platine, & les autres traverſent la tablette.

LE MARBRE eſt une plate-forme de cuivre dur, de l'épaiſſeur de 9 lignes, portant 18 pouces de large ſur 22 pouces $\frac{1}{2}$ de long ; il eſt enchâſſé dans un châſſis de fer avec lequel il a été corroyé de manière que leurs deux ſurfaces, parfaitement dreſſées & unies, n'en font qu'une. On a pratiqué, à moitié de ſon épaiſſeur, une feuillure de 4 lignes de large, ſur laquelle il porte dans le châſſis, ce qui l'empêche de taſſer

LE MARBRE eſt quelquefois une planche épaiſſe, mais le plus ordinairement une dalle de pierre de l'épaiſſeur de 2 pouces $\frac{1}{2}$, portant ſur un fond de bois, & encadrée dans ſon châſſis auſſi en bois : cette pierre, qui n'eſt jamais d'une épaiſſeur parfaitement égale, eſt calée dans ſon coffre, avec du ſon, pour en remplir, autant qu'il eſt poſſible, les porte-à-faux ; mais ſi l'on parvient à établir pour quelque temps cette pièce

NOUVELLE PRESSE.

au deſſous de la ſurface du châſſis, & de céder ſous l'effort de la preſſion.

Le ſommier étant ſuppoſé de niveau, la vis perpendiculaire, la platine auſſi de niveau & immobile, la preſſion ſeroit encore infidelle, ſi la baſe ſur laquelle elle s'opère pouvoit céder à ſes efforts, & ſi elle ne préſentoit pas une ſurface unie & un plan parallèle aux autres pièces.

ANCIENNES PRESSES.

de niveau, l'effort de la preſſion le lui fait bientôt perdre, les corps qui ont été introduits deſſous ſe taſſent promptement; le marbre, quelque épais qu'il ſoit, caſſe, & ſouvent on le laiſſe ſubſiſter dans cet état. Quelque dure que ſoit cette pierre, quelque fin que ſoit ſon grain, l'eau qui la mine, les coups de marteau qu'elle reçoit, le poids des châſſis que l'on y poſe toujours ſans précaution ſur les angles, ont bientôt tellement dégradé ſa ſurface, que les caractères qui y ſont poſés, ſe prêtent eux-mêmes à ſon irrégularité; alors les ſupports, les hauſſes, remèdes néceſſaires mais auſſi vicieux que le mal, ſont la reſſource de l'Ouvrier.

On a cherché quelquefois à éviter un de ces inconvéniens, en appliquant ſur un marbre de bois une feuille de cuivre, qui n'ayant pas aſſez d'épaiſſeur, & portant elle-même ſur une baſe infidelle, n'a pas produit de meilleurs effets.

NOUVELLE PRESSE.

LE CHÂSSIS, COFFRE & TRAIN, eſt composé d'un châſſis de fer de 2 pouces de large, à fleur duquel eſt le marbre, & qui ne forme avec celui-ci qu'une ſeule & même ſurface. Aux quatre coins ſont adaptées comme aux autres les quatre cornières: & ſur la partie de derrière, dans le prolongement de toute la largeur du châſſis, eſt appliquée la moitié de la charnière du grand tympan, qui y eſt attachée par cinq boulons: les trous ovales qui y ſont pratiqués, laiſſent la liberté à l'Ouvrier de la remonter ou deſcendre de 3 lignes. On a ménagé dans l'épaiſſeur de l'intérieur de ce châſſis, une feuillure de même profondeur que

ANCIENNES PRESSES.

LE CHÂSSIS OU COFFRE & TRAIN, eſt un cadre de bois auquel eſt adapté un fond dans lequel eſt encaiſſé le marbre; les quatre coins ſont armés de quatre cornières ou cantonnières en fer qui y ſont attachées par des vis, & dont l'uſage eſt d'aſſujettir avec des coins de bois la forme qui contient les caractères; c'eſt-là le *coffre* proprement dit: il porte par derrière un prolongement ſur lequel eſt monté le chevalet qui ſupporte le tympan. Au deſſous du coffre ſont adaptés huit, quelquefois dix crampons de cuivre, diſpoſés ſur deux lignes parallèles, qui ſervent à le faire gliſſer ſur deux tringles de fer poli en dos d'âne. Les crampons,

NOUVELLE PRESSE.

celle du marbre, pour le recevoir. Cette pièce, ainsi construite, peut prendre le nom de *coffre*, puisqu'elle en fait les fonctions; elle ne porte point avec elle le chevalet du tympan, qui est attaché à demeure sur le train, comme on le verra ci-après.

On a adapté au châssis trois bandes de cuivre récroui; chacune desquelles est évidée dans toute sa longueur, à la réserve de trois parties angulaires de neuf lignes de long; ce qui fait neuf points de frottement, qui glissent dans trois barres d'acier qui ont la même forme en creux, mais de manière que les frottemens ne s'opèrent que dans le fond & nullement sur les parties latérales, Aux deux bouts du châssis, devant & derrière, on a ajouté un cylindre à encliquetage, dont l'usage est de tendre les cordes qui mènent & ramènent le train, & de régler la position de la manivelle. Le châssis, ainsi garni du marbre, des tringles & du rouleau, prend le nom de *train* de la Presse.

LE GRAND TYMPAN est composé d'un châssis de bois, comme les tympans ordinaires, mais non recouvert de parchemin; sa traverse d'en-bas, nécessairement étroite, au lieu d'être en bois, est de cuivre pour lui donner plus de solidité, & dessus est appliquée l'autre partie de la charnière, qui y est liée par cinq boulons qui les traversent toutes deux : la charnière porte à chaque bout deux oreilles de huit pouces de long, qui s'appliquent à fleur du châssis, & y sont aussi liées chacune par trois autres boulons à oreilles. Sur ce châssis de bois on applique un cadre de fer ou même

ANCIENNES PRESSES.

d'une épaisseur & d'un degré de dureté toujours différens, ne portent presque jamais ensemble sur les tringles, ou bien cessent bientôt d'y frotter à mesure qu'ils s'usent. Le coffre, ainsi chargé de son marbre, muni de son chevalet & garni de ses crampons, retient le nom de *train;* il glisse assez légèrement sur son berceau, ce que l'on ne peut attribuer qu'à l'extrême légèreté du coffre, dont la matière & la construction, en soulageant l'Ouvrier, tournent au détriment de l'ouvrage. Les deux cornières de derrière portent une des parties des deux couplets ou charnières du tympan, & ne forment avec chaque couplet qu'une seule & même pièce; en sorte que la hauteur sur l'œil de la lettre, prise au derrière du tympan, une fois déterminée, ne peut plus changer à la volonté de l'Ouvrier, & ces couplets entraînent souvent la destruction des cornières & même du châssis, si elles se cassent ou qu'on veuille y changer quelque chose.

LE GRAND TYMPAN est un châssis de bois qui porte à sa traverse d'en-bas les deux autres parties de couplets ou charnières, qui se réunissent aux premières par une grosse goupille ou boulon: sa traverse d'en-haut est une bande de fer où est attachée une des parties des couplets de la frisquette. Ce cadre, revêtu d'une peau de parchemin, sert à recevoir en dehors la feuille de papier qui va être imprimée; & en dedans on introduit des étoffes pour garantir l'œil de la dureté du foulage, & qui sont maintenues en leur place par le *petit tympan*.

NOUVELLE PRESSE.

d'acier, de l'épaiſſeur d'une friſquette, & dont les quatre traverſes, qui ont 16 lignes de large, ſont percées tout au tour de quinze trous, pour recevoir autant de boulons qui paſſent au travers du châſſis de bois, & l'y rendent adhérent de manière à ne leur faire faire enſemble qu'un ſeul & même corps : pour ne pas trop multiplier les boulons, ceux qui attachent la charnière, & ceux des pointures, font partie des quinze boulons qui attachent le cadre dans tout ſon pourtour. Ce cadre, collé en vélin le plus beau & le plus uni, de la même manière qu'une friſquette, a été imaginé pour remédier aux inconvéniens qui réſultent des autres tympans : il eſt auſſi multiplié pour chaque Preſſe que le nombre des friſquettes, & lorſque le foulage, trop fort ou différent, peut cauſer quelque dommage à l'impreſſion, on ſubſtitue un autre cadre ou *faux-tympan* à l'ancien.

LE PETIT TYMPAN eſt un châſſis de fer abſolument pareil aux autres, & qui n'en diffère qu'en ce qu'il entre, par ſix queues d'aronde, dans le châſſis du grand tympan, & qu'étant aſſujetti par autant d'eſtoquiaux diſpoſés dans tout ſon pourtour, il comprime auſſi les étoffes plus également.

ANCIENNES PRESSES.

Le tympan, ainſi couvert de parchemin, reſte revêtu de la même peau juſqu'à ce que la vétuſté la faſſe ſupprimer; mais cette pratique eſt vicieuſe, en ce que ce même tympan ſervant pour des ouvrages de toutes ſortes de formats, les pages & les lettres y font bientôt une telle impreſſion, que l'on eſt obligé de temps en temps, & ſur-tout à chaque changement de forme, pour en faire diſparoître ce que les Ouvriers appellent le *foulage*, de l'humecter juſqu'à ce que le parchemin redevienne uni; mais le parchemin à qui il faut faire contracter une très-forte humidité, la retient long-temps, & la communiquant de même au papier, lui fait recevoir une teinte d'encre trop forte, & diſproportionnée à celle de la veille où le tympan étoit ſec. C'eſt une des principales cauſes de l'inégalité dans la teinte des feuilles.

LE PETIT TYMPAN eſt un petit châſſis de fer, recouvert d'un côté d'une feuille de parchemin, & deſtiné à comprimer les étoffes renfermées dans l'épaiſſeur du cadre du grand tympan, pour que le coffre puiſſe rouler & dérouler ſous la platine, ſans craindre de les déranger. Cette compreſſion ſe fait ſur la largeur en trois points ſeulement, dont deux en-devant ſous la tringle de fer du grand tympan, & un ſous l'eſtoquiau ſur la partie oppoſée du petit tympan; auſſi il réſulte de là que les étoffes n'étant pas comprimées dans leur largeur, bourſouflent & produiſent néceſſairement dans cette partie une épaiſſeur différente.

NOUVELLE PRESSE.

LA FRISQUETTE est un cadre de quatre bandes d'acier, d'une épaisseur parfaitement égale, & ayant les mêmes longueur & largeur que le grand tympan; les deux parties de ses couplets sont faites avec tant de justesse, qu'elle n'éprouve pas le moindre vacillement: elle est collée comme les autres avec deux feuilles de papier, entre lesquelles on a introduit un carton mince qui lui donne l'épaisseur de ses bandes, pour que cette épaisseur, combinée avec la hauteur des garnitures de la forme, remplisse, à peu de chose près, le vide que produit la saillie des caractères. On a eu soin de rendre cette saillie uniforme, en réduisant à une hauteur égale les garnitures, espaces & cadrats employés pour les blancs; par ce moyen, tout ce qui est vide est rempli pendant la pression, & ce qui est plus élevé, est soutenu assez mollement pour donner lieu à tout le foulage qu'on peut désirer.

Le nombre des frisquettes est assez multiplié pour pouvoir en changer à chaque ouvrage & même à chaque forme, lorsqu'elle diffère trop de la précédente.

LA CHARNIÈRE, de 23 pouces de long sur 15 lignes de diamètre, est absolument cylindrique: cette pièce, toute d'acier, occupe toute la largeur du coffre & du tympan; elle a été forée dans la masse comme un canon de fusil, & tous les charnons, au nombre de 19, en ont été divisés avec le plus grand soin: la partie d'en-haut porte de chaque côté un retour d'équerre de 8 pouces de long, par lequel elle est attachée au cadre du tympan & à sa traverse de cuivre,

ANCIENNES PRESSES.

LA FRISQUETTE est un cadre de quatre bandes de fer, de la largeur du grand tympan, & d'une grandeur indéterminée, portant à la bande d'en-bas l'autre partie de ses couplets, qui s'assemble avec celle qui est attachée à la pièce précédente: cette frisquette, d'une épaisseur peu exacte, est collée de plusieurs papiers, & ne sert qu'à couvrir la feuille de papier en se repliant sur le tympan; elle ne laisse que l'ouverture des pages de la forme qu'on veut imprimer, pour garantir de l'encre les marges du papier blanc: le vice de cette pièce consiste dans le jeu qu'elle a dans ses couplets, qui la fait vaciller sur la feuille de papier, fait friser celle-ci sur la forme; & dans la négligence des Ouvriers qui ne la renouvellent pas assez, & se contentent, en changeant de formats ou d'ouvrages, de recoller du papier par-dessus, ce qui produit encore sous la platine une pression inégale.

LA CHARNIÈRE OU LES COUPLETS DU TYMPAN, sont deux parties de charnières composées ordinairement chacune de cinq charnons, d'environ 15 lignes de diamètre: les deux d'en-haut sont attachées au grand tympan; celles d'en-bas, disposées en équerre, sont tellement engagées sous les cornières ou cantonnières du coffre, que non seulement il est impossible d'en changer la hauteur une fois déterminée, mais qu'elles entraînent la destruction

Nouvelle Presse.

auxquels elle eſt unie par onze boulons à oreilles. La partie d'en-bas, appliquée ſur la traverſe de derrière du châſſis du coffre, y eſt maintenue par cinq boulons à têtes larges, qui, en aſſurant ſon invariabilité, lui laiſſe la poſſibilité de remonter ou deſcendre à volonté de trois lignes.

L'expérience réitérée pluſieurs fois, en préſence de l'Académie Royale des Sciences, d'une même feuille tirée cinq à ſix fois de ſuite, & portée depuis à vingt-cinq fois, prouve d'une manière non équivoque la ſolidité & la préciſion de cette pièce.

Le Chevalet du Tympan eſt une traverſe de fer ſoutenue par deux colonnes de pareille matière, & qui portent à plomb ſur les deux colonnes du berceau : cette pièce ſert, comme dans les autres Preſſes, à ſupporter le tympan développé ; elle fait partie du berceau, & ne ſuit pas le mouvement du train.

Le Berceau conſiſte en trois fortes barres carrées d'acier, de 11 lignes, & évidées en V de la longueur de 4 pieds $\frac{1}{2}$ dans la moitié de leur épaiſſeur ; ces barres portent ſur le ſommier d'en-bas & la plaque de cuivre qui le recouvre ; elles y ſont aſſujetties par de fortes vis : l'autre moitié eſt enchâſſée dans trois traverſes, & les déſafleure de 2 lignes. Ces trois traverſes ſont elles-mêmes emmanchées d'un bout à doubles queues dans le ſommier d'en-bas, & de l'autre, dans la traverſe que ſupportent les colonnes : les trois barres d'acier ſont auſſi attachées par des vis ſur cette même

Anciennes Presses.

des cornières & même du coffre lorſqu'il faut les réparer : leurs charnons ſont ſouvent diſpoſés avec ſi peu de juſteſſe, que le tympan, en s'abaiſſant ſur la forme, & en ſe relevant, éprouve un vacillement ſenſible, & auquel il faut attribuer en grande partie le papillotage & quelquefois le doublage des caractères ſur le papier.

Le Chevalet du Tympan eſt une traverſe de bois qui aſſemble deux montans portés ſur le coffre de la Preſſe. Cette pièce ſert à ſupporter le tympan lorſqu'il eſt développé, & elle marche avec le train auquel elle eſt attachée.

Le Berceau n'eſt autre choſe qu'un plancher très-mince & étroit, emmanché d'un bout dans le ſommier d'en-bas, porté de l'autre ſur un pied extrêmement léger & placé à l'aplomb du chevalet du tympan : ſur ce plancher ſont poſées deux & quelquefois trois barres de fer poli, taillées en dos d'âne, & attachées à chaque bout du plancher par une vis. La conſtruction de cette pièce nuit & s'oppoſe même à la perfection de l'impreſſion, puiſqu'en ſuppoſant, comme on le verra ci-après, le ſommier d'en-bas mobile, quoique parallèle dans ſa longueur à la platine, le berceau cède ſous

NOUVELLE PRESSE.

traverse. Il n'y a donc pendant la preſſion aucune ceſſion, puiſque le berceau eſt ſoutenu des deux bouts & au milieu en trois points immobiles. Cette pièce une fois ſuppoſée parallèle, ne peut donc pas ceſſer de l'être.

LE SOMMIER D'EN-BAS eſt une plate-forme de bois, portant deux pieds de long ſur 2 pieds 9 pouces 4 lignes d'épaiſſeur, emmanchée ſolidement à queue dans chaque jumelle : cette pièce, exactement parallèle à la platine, eſt recouverte d'une plaque de cuivre de 4 lignes d'épaiſſeur, & préſentant une ſurface parfaitement unie; elle eſt attachée au ſommier d'en-bas par des boulons & vis diſtribués dans toute ſon étendue, & ſa ſurface eſt plus grande même que le coffre lorſqu'il la recouvre.

C'eſt ſur cette baſe ſolide, ſur laquelle eſt établi le berceau, que s'opère la preſſion, pendant laquelle il n'y a aucune eſpèce de ceſſion, les trois couliſſes d'acier étant aſſujetties ſur le ſommier, par d'autres vis taraudées dans la plaque de cuivre.

LE CONTRE-SOMMIER eſt une pièce de bois de bout de la longueur du ſommier d'en-bas, & de la largeur de 5 pouces; cette pièce placée au centre de la preſſion, eſt deſtinée à en ſupporter l'effort: elle ſoutient le ſommier d'en-bas, & porte elle-même ſur la plate-forme.

LA PLATE-FORME eſt une forte pièce de bois de la même dimenſion que le ſommier d'en-bas, & de l'épaiſſeur de 4 pou-

ANCIENNES PRESSES.

la preſſion par ſon extrémité qui porte ſur le ſommier, & il ne cède pas de l'autre, qui eſt ſupportée ſur un pied de bois de bout, comme on l'a vu ci-deſſus : le berceau, pendant la preſſion, ceſſe donc d'être parallèle à la platine.

LE SOMMIER D'EN-BAS eſt une pièce de bois encore moins forte que le ſommier d'en-haut, ſur laquelle porte le berceau; cette pièce eſt engagée dans les jumelles par ſes tenons, & loin d'offrir une réſiſtance abſolue à la preſſion, elle cède d'une manière ſenſible à chaque coup de barreau; il ſemble même qu'on ait voulu en faciliter la ceſſion, en garniſſant le deſſous de ſes tenons de quelques corps élaſtiques, comme au ſommier d'en-haut; mais cette conſtruction ne peut que tourner au grand détriment de l'impreſſion : en vain s'aſſureroit-on par tous les moyens poſſibles du parallèliſme des pièces ſupérieures avec la forme, la preſſion ſe fera toujours inégalement, ſi la baſe ſur laquelle elle s'opère ne leur eſt pas parallèle; or, la ceſſion de cette pièce détruit toute idée de parallèliſme.

ces 7 lignes ; elle s'assemble de même à queue dans chaque jumelle, elle sert à supporter le contre-sommier, & elle est elle-même soutenue par la pièce ci-après.

LE CONTRE-FORT est une grosse pièce de bois de bout, de la hauteur de 9 pouces 8 lignes, placée au centre de la pièce précédente, & portant sur le plancher. Son usage, relativement à la plate-forme, est le même que celui du contre-sommier. Cette pièce, ainsi que la plate-forme, le contre-sommier & le sommier, sont disposées de manière qu'elles ont un centre commun à celui de la platine, & par leur contre-fil alternatif, elles offrent à la pression une résistance absolue & d'autant plus indépendante de l'effet du bois, qu'elles sont toutes liées par un fort boulon qui les traverse.

VIS DE NIVEAU. Ces vis, au nombre de six, sont placées aux quatre coins des patins des jumelles, & aux deux bouts de celui du berceau : elles ont 1 pouce 10 lignes de diamètre ; leur pas, presque horizontal & de la profondeur de 1 ligne $\frac{1}{2}$, forme dans le bois un écrou naturel ; l'effort se fait sur une forte plaque de cuivre, dans laquelle le bout de la vis, réduit en un pivot de 8 lignes, entre librement.

L'usage de ces vis, dont la tête est percée de quatre trous pour pouvoir y introduire un levier, est de niveler la Presse, & de rétablir avec facilité le défaut de justesse que le mouvement du plancher sur lequel elle est assise peut lui procurer.

EXPLICATION DES FIGURES.

I, II, III, V	*A*	Assemblage du chapiteau avec les jumelles.
I, II, III, V	*B*	Point qui détermine jusqu'en *C* l'épaisseur du sommier *FF*.
I, II, III	*D*	Point qui détermine jusqu'en *E* l'épaisseur des patins des jumelles.
I, II, III, V	*E, F*	Angles des patins qui déterminent leur longueur & leur largeur.
I, II, XV, XIX	*G*	Godet ou entonnoir fermé par un couvercle, servant à introduire l'huile dans les pas de la vis; & par les oreilles duquel passent les deux boulons *n* qui maintiennent l'écrou dans le sommier.
I, II, III, XV, XVII, XVIII	*H*	Angles supérieurs du sommier d'en-haut.
I, II, III, XVI	*I*	Angles inférieurs du même sommier.
I, II, XXI	*K*	Barreau avec son manche.
I, II, XX	*L*	Tête de la vis où entre le barreau.
I, II, III, V, XXIV, XXV, XXVI.	*M*	Coins de la moise. Dans la *figure V* cette lettre indique seulement l'emplacement de la moise.
I, II, XXII	*N*	Angles supérieurs de l'écrou d'en-bas.
I, II, XXII, XXIII	*O*	Passages de la vis *m*, *fig. XXII* & *XXIII*, qui correspondent à autant de pareils trous dans la platine.
I, II, III	*P*	Chevilles de fer vissées dans la jumelle pour porter les balles.
I, II, III, VI	*Q*	Forte pièce de bois qui reçoit l'effort du coffre.

I, II, III, XXIII	*R*	Angles de la platine.
I, III, XXVII, XXIX	*S*	Châſſis de fer qui renferme le marbre.
I, XXVII, XXIX	*T*	Marbre en cuivre, vu en deſſus, *fig. I* & *XXVII*; & en deſſous, *fig. XXIX.*
I, III, VI	*U*	Manivelle avec ſa poignée.
I, III	*X*	Grand tympan.
I, III	*Y*	Friſquette.
I, III	*Z*	Colonne du chevalet du tympan.
I. XII	*AA, BB.*	Extrémités de la traverſe qui aſſemble celle *NN*, avec le patin *DD* du berceau.
I, III	*CC*	Traverſe du devant du berceau.
I, III, XIV	*DD*	Patin du bas du berceau.
I, III, VI	*EE*	Une des trois traverſes qui compoſent le berceau, & dans leſquelles ſont enchâſſées les couliſſes d'acier *z*.
VI	*FF*	Platine de cuivre de 6 lignes d'épaiſſeur, ſur laquelle portent les couliſſes *z*, & qui recouvre la plate-forme *FF**.
I, II, V, VII	*FF**	Sommier d'en-bas, vu de profil, *fig. I* & *II*, en deſſous dans la *fig. VII*; la *fig. V* n'en fait qu'indiquer la place.
I, II, VIII	*GG*	Contre-ſommier qui ſoutient le ſommier.
I, II, V, IX	*HH*	Plate-forme ſur laquelle poſe la pièce précédente.
I, II, V	*II*	Contre-fort en bois de bout, qui ſoutient le contre-ſommier & porte ſur le plancher.

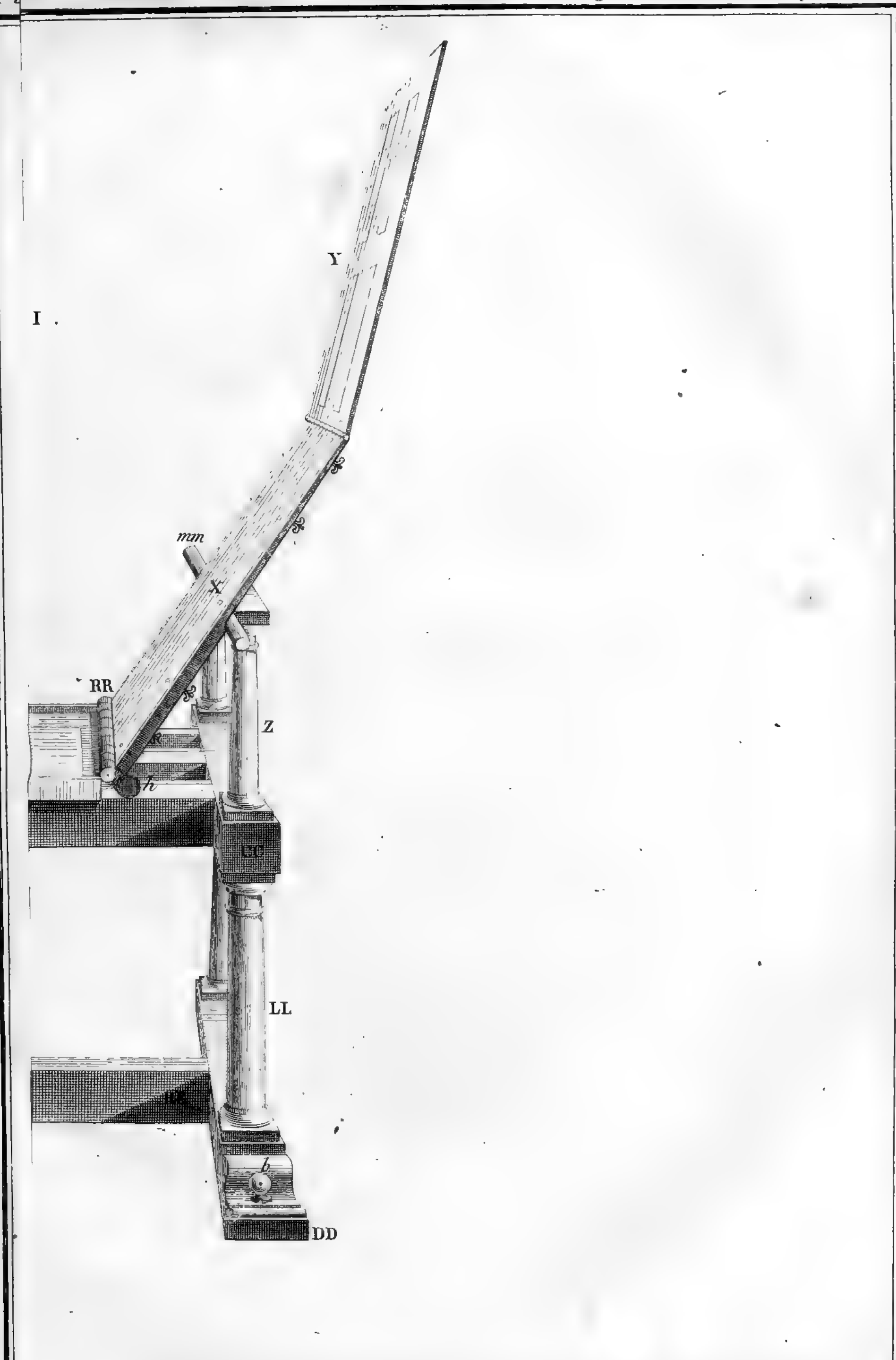
I, II	*K K*	Plancher de l'encrier avec ses consoles.
I, III	*L L*	Colonnes qui soutiennent la traverse *CC* du devant du berceau ; & emmanchées dans le patin *DD*.
I, III, XII	*M M*	Colonne qui soutient la traverse *ll*, où sont assemblées les traverses *EE*, pour les soutenir dans leur milieu, & qui s'emmanche, *fig. XII*, dans la pièce *AA*, *BB*.
I, II, V, X	*N N*	Traverse qui assemble par-devant les patins des jumelles.
V, XI	*O O*	Traverse qui assemble par-derrière les patins des jumelles ; dans la *fig. V*, on ne voit que la place de l'assemblage.
XVI, XIX	*P P*	Écrou d'en haut avec ses deux boulons *n*, & sa plaque portant le godet *G*, dans lequel est vissé le bout d'en-haut de la vis.
I	*Q Q*	Encrier avec sa molette ou broyon.
I, III, XXXI	*R R*	Charnière du grand tympan, & désassemblée dans la *fig. XXXI*, avec sa goupille *f*.
I, II, III, XIII	*S S*	Chapiteau qui couronne & qui assemble les jumelles, vu en dessous, *fig. XIII*.
XX	*T T*	Pas d'en-haut de la vis.
XX	*U U*	Pas d'en-bas de la même vis.
IV	*X X*	Faux tympan qui s'applique sur le grand tympan *X*, & qui y est lié par 15 boulons.
I, III	*a*	Plaque de fer verni, appliquée sur une des jumelles pour la préserver du contact des balles.

I, II, III, V	*b*.......	Vis de rappel ſervant à mettre la preſſe de niveau.
I, II, V	*c*.......	Clés de bois qui ſervent à ſerrer en contre-bas les deux parties de la moiſe ; on n'en voit que l'emplacement, *fig. V.*
I, II	*d*.......	Cheville pour retenir le barreau.
I, II, III, V	*e*.......	Vis de preſſion, qui traverſent les jumelles & ſervent ou à comprimer les corps élaſtiques du ſommier, ou à le rendre immobile.
I, V	*f*.......	Plaques de cuivre qui arment les mortoiſes des jumelles, qui reçoivent le ſommier.
I, V	*g*.......	Écrous des vis de preſſion *e*.
I, III, XXVII, XXVIII, XXIX...	*h*.......	Rouleaux à encliquetage, qui ſervent à bander les cordes qui mènent le coffre.
VI	*k**......	Cylindres traverſés par l'arbre *p* de la manivelle, & qu'entourent les cordes en ſens oppoſés.
I, III, XXVII, XXVIII, XXIX...	*l*.......	Cornières ou cantonnières ſervant à ſerrer & fixer la forme ſur le marbre.
I, II, XXII, XXIII	*m*......	Vis ſervant à attacher la platine à l'écrou d'en-bas, & dont on voit le paſſage, *fig. XXIII.*
I, II, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX.	*n*.......	Boulons qui paſſent dans les oreilles de l'écrou d'en-haut pour le maintenir dans le ſommier, & dont on voit le paſſage, *fig. XVII & XVIII.*
XXIV, XXV, XXVI	*o*.......	Une des deux parties de la boîte d'acier enchâſſée dans la moiſe, & réunie avec l'autre, *fig. XXIV.*
I, III, VI	*p*.......	Arbre de la manivelle.

XVII,

XVII, XVIII	*q*	Clés de bois qui assemblent les deux pièces du sommier ; & leurs mortoises, *fig. XVII.*
II, XV, XVI, XVII, XVIII	*r*	Boulons qui lient les deux parties du sommier, & dont on voit le passage, *fig. XVII* & *XVIII.*
I, II, XXIV, XXV, XXVI	*r**	Boulons qui assemblent les deux parties de la moise ; leur passage est indiqué, *fig. XXV* & *XXVI.*
XXXI	*s*	Goupille de la charnière du tympan.
I, III	*t*	Oreilles appliquées sur les traverses du berceau pour soutenir l'arbre du rouleau.
XXVIII, XXIX, XXX	*u*	Tringles de cuivre attachées sous le châssis *S*, évidées en *x*, & auxquelles on a conservé trois parties saillantes *y*, pour servir à les faire glisser dans les coulisses d'acier *z*.
VI	*z*	Coulisses d'acier faisant partie du berceau, & enchâssées dans les traverses *EE*, dans lesquelles glissent les parties saillantes *y* des tringles de cuivre *u*.
I, II, III	*a a*	Equerres de cuivre qui contribuent à maintenir l'assemblage des jumelles.
I, II, III	*b b*	Forts boulons à tête carrée, qui lient chaque jumelle à la plateforme *FF**.
I, III	*c c*	Boulons qui lient chaque jumelle avec le contre-sommier *HH.*
I, III	*d d*	Boulons qui lient chaque jumelle avec les patins.
VII	*e e*	Passage d'un grand boulon qui ne se voit pas, & qui lie ensemble les pièces *II*, *HH*, *FF.*

I, II	*ff*	Plaques de cuivre dont ſont armées les jumelles extérieurement, & liées aux plaques d'acier intérieures par des boulons à tête perdue.
I, II	*gg*	Plaques de cuivre qui arment le ſommier en dehors, & qui ſervent de rondelles aux boulons qui attachent les plaques d'acier ſur leſquelles s'opère le frottement du ſommier contre les jumelles.
I, III	*hh*	Boulons qui lient les jumelles avec le chapiteau.
I, V	*ii*	Talons de cuivre ſur leſquels appuient les vis de preſſion.
XXIII	*kk*	Trou pratiqué au centre de la platine, où s'introduit le pivot *UU* du bas de la vis.
VI	*ll*	Traverſe de bois qui aſſemble celles du berceau, & ſupportée dans ſon milieu par la colonne *MM*.
I, VI	*mm*	Chevalet qui ſupporte le grand tympan.
XXV, XXVI	*nn*	Clés de bois qui maintiennent les deux parties de la moiſe ; la *fig.* *XXV* en montre les mortoiſes.



Che Haussard Sculp.

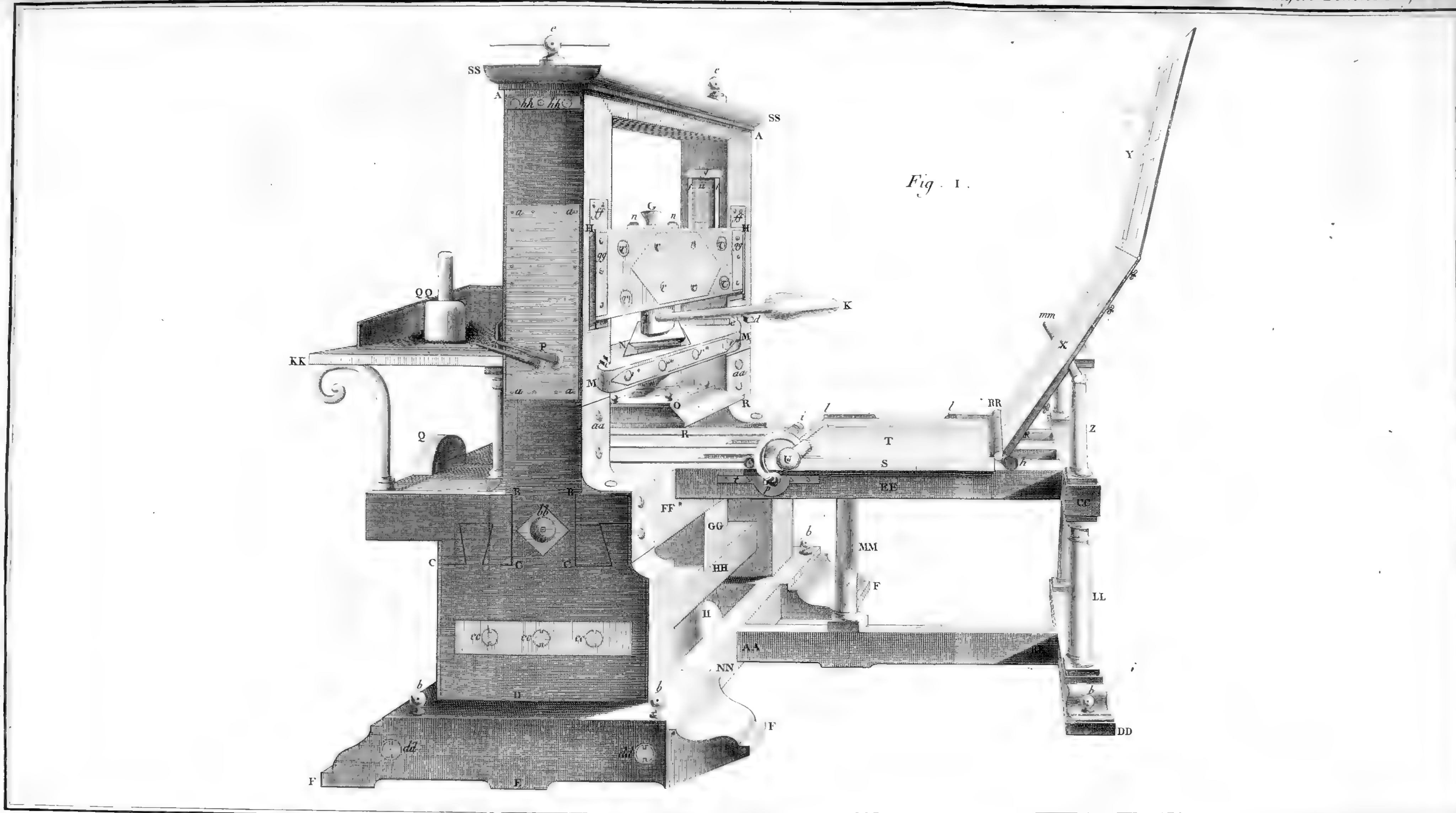
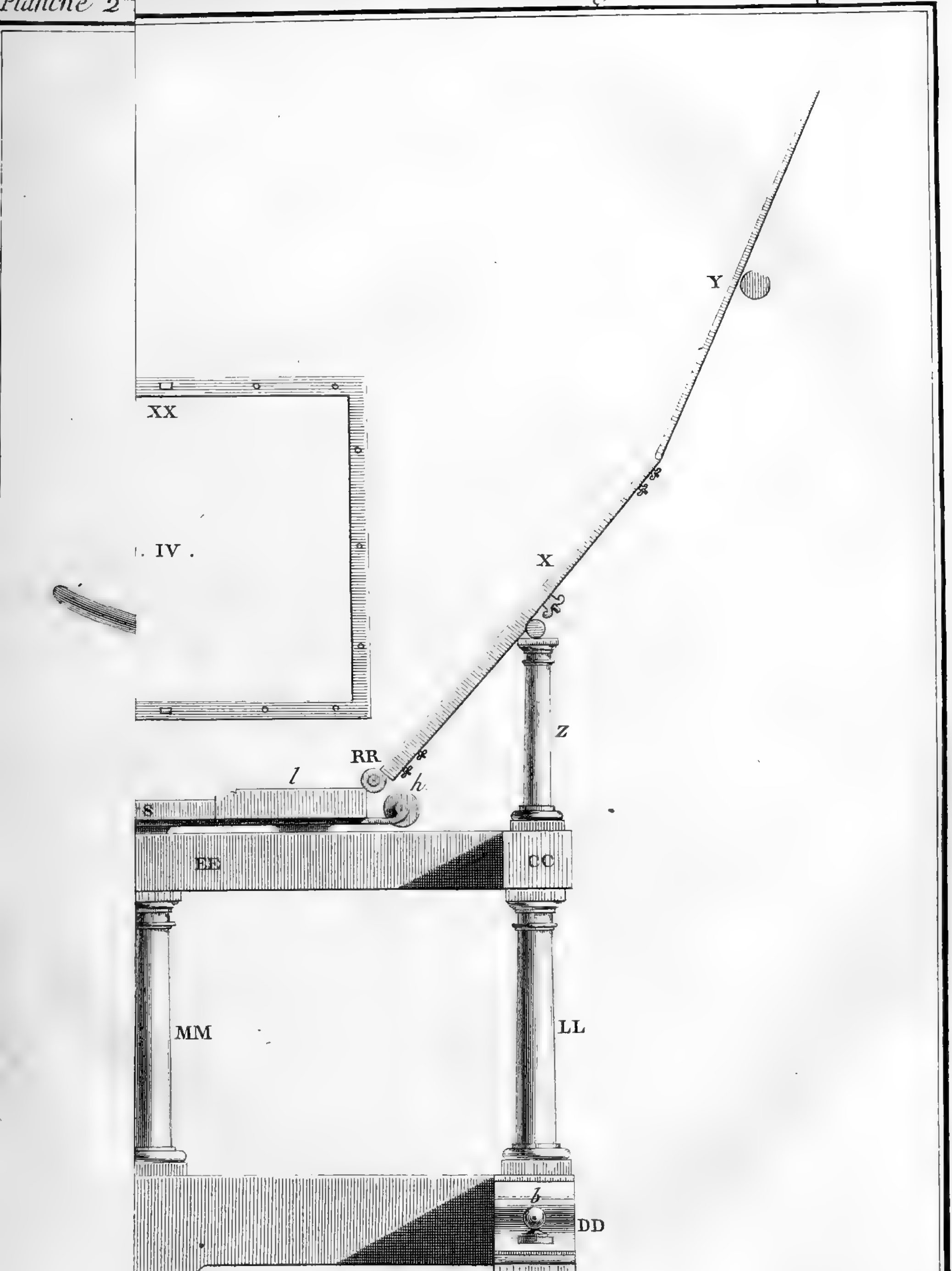
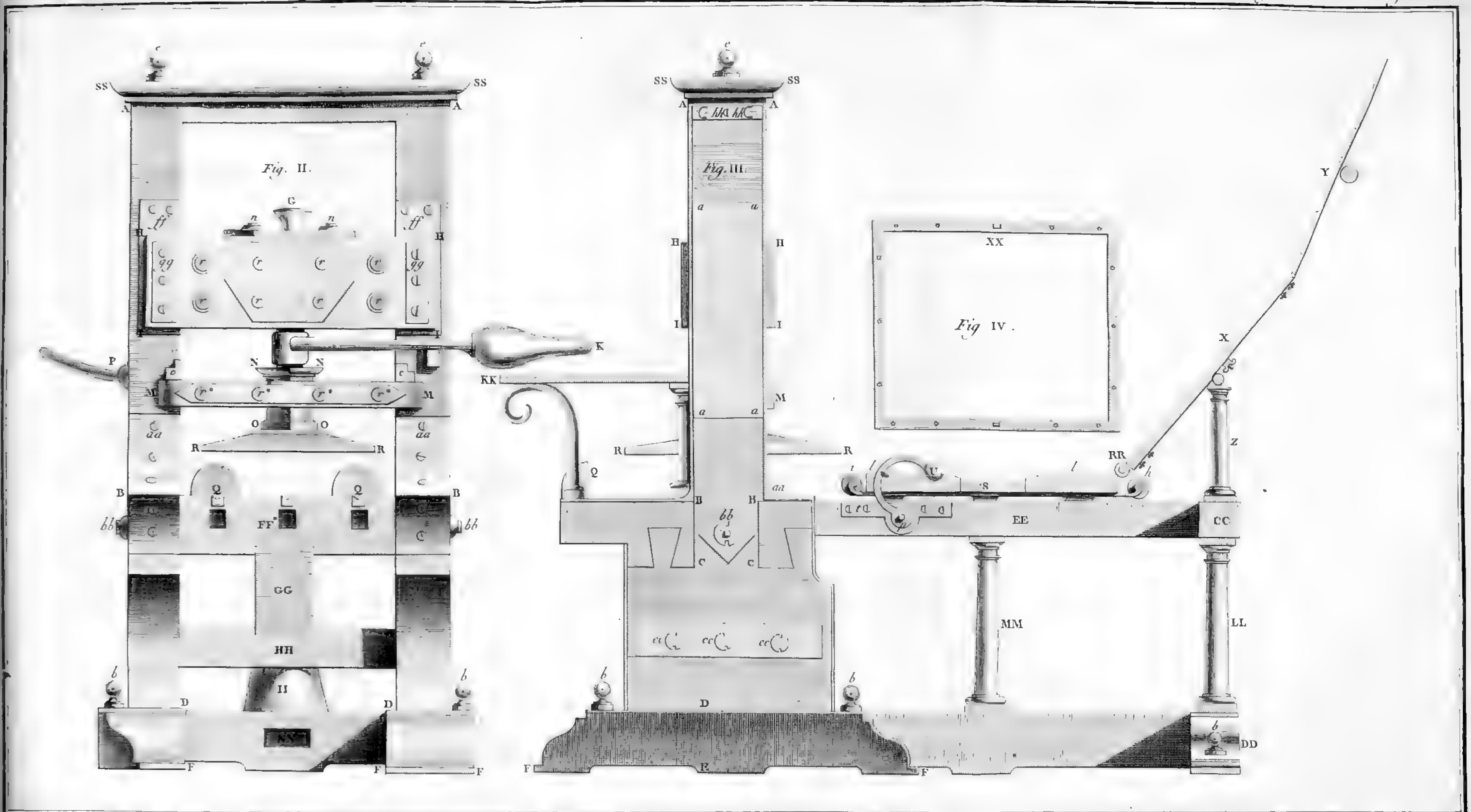


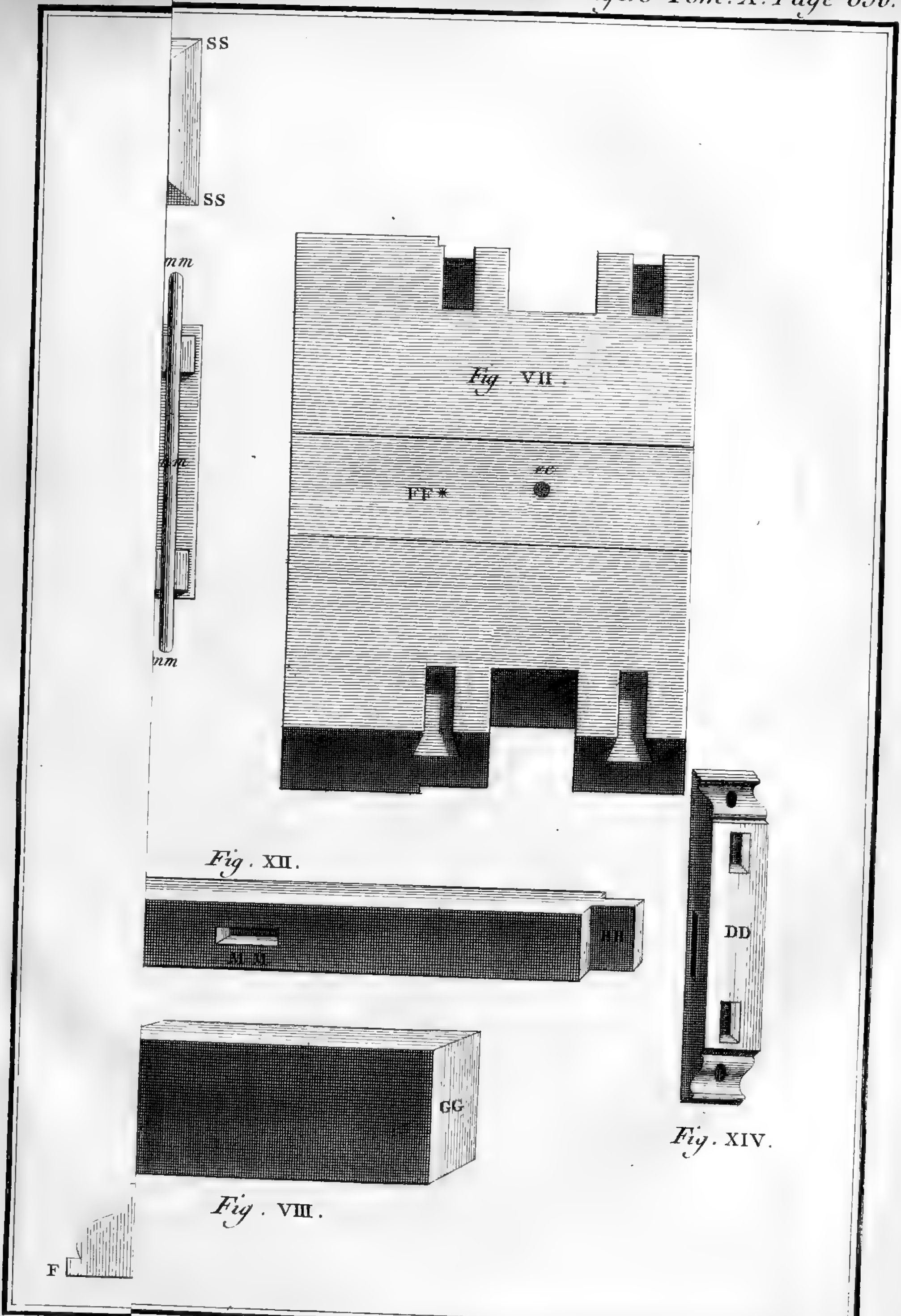
Fig. I.
SS
A
hh
SS
A
G
n
n
ff
ff
H
H
gg
gg
QQ
K
d
KK
P
mm
X
Y
M
N
M
aa
aa
M
R
O
R
aa
R
T
S
RR
Z
Q
B
B
bb
EE
FF
CC
GG
C
C
C
HH
b
MM
F
LL
H
cc
cc
cc
AA
NN
b
b
D
b
F
DD
dd
dd
F
E



E^hte Haussard Sculp.



E^{ne} Haussard Sculp.



Ch.es Haussard Sculp.

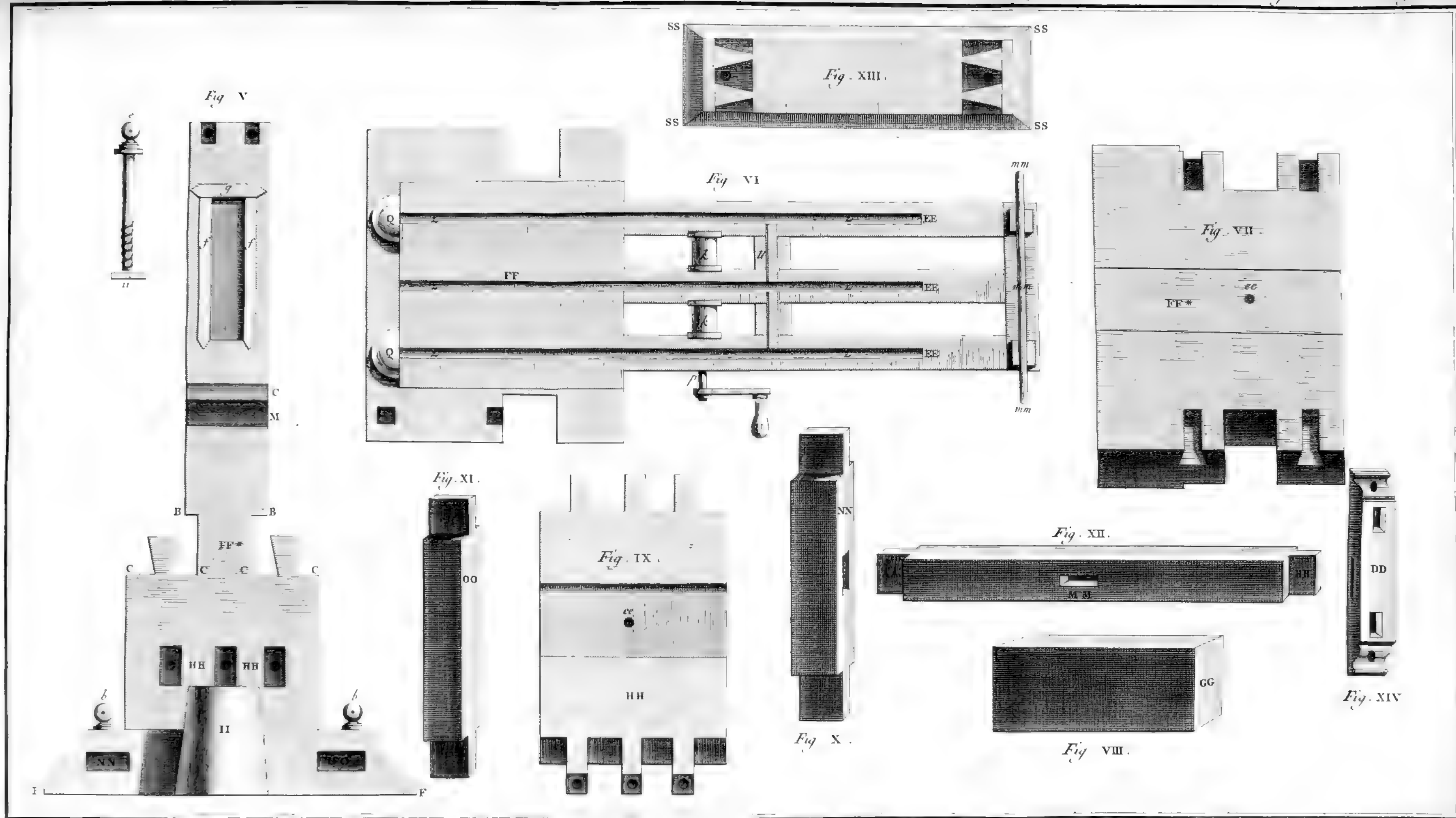
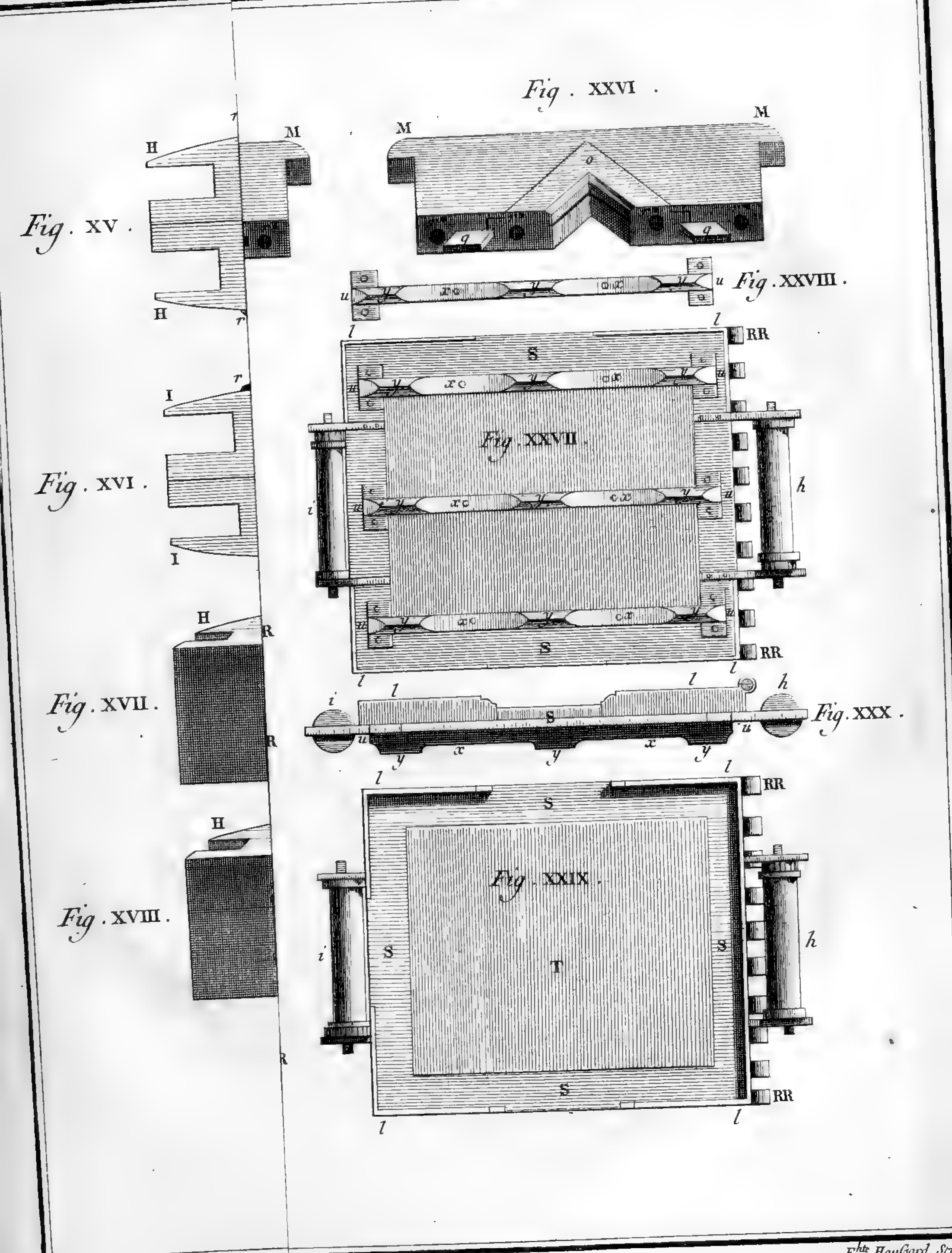


Fig. V
Fig. VI
Fig. VII
Fig. VIII
Fig. IX
Fig. X
Fig. XI
Fig. XII
Fig. XIII
Fig. XIV
SS
EE
FF
FF*
HH
II
NN
OO
MM
GG
DD
mm
ee
C
M
B
I
F



Ehte Haussard Sc

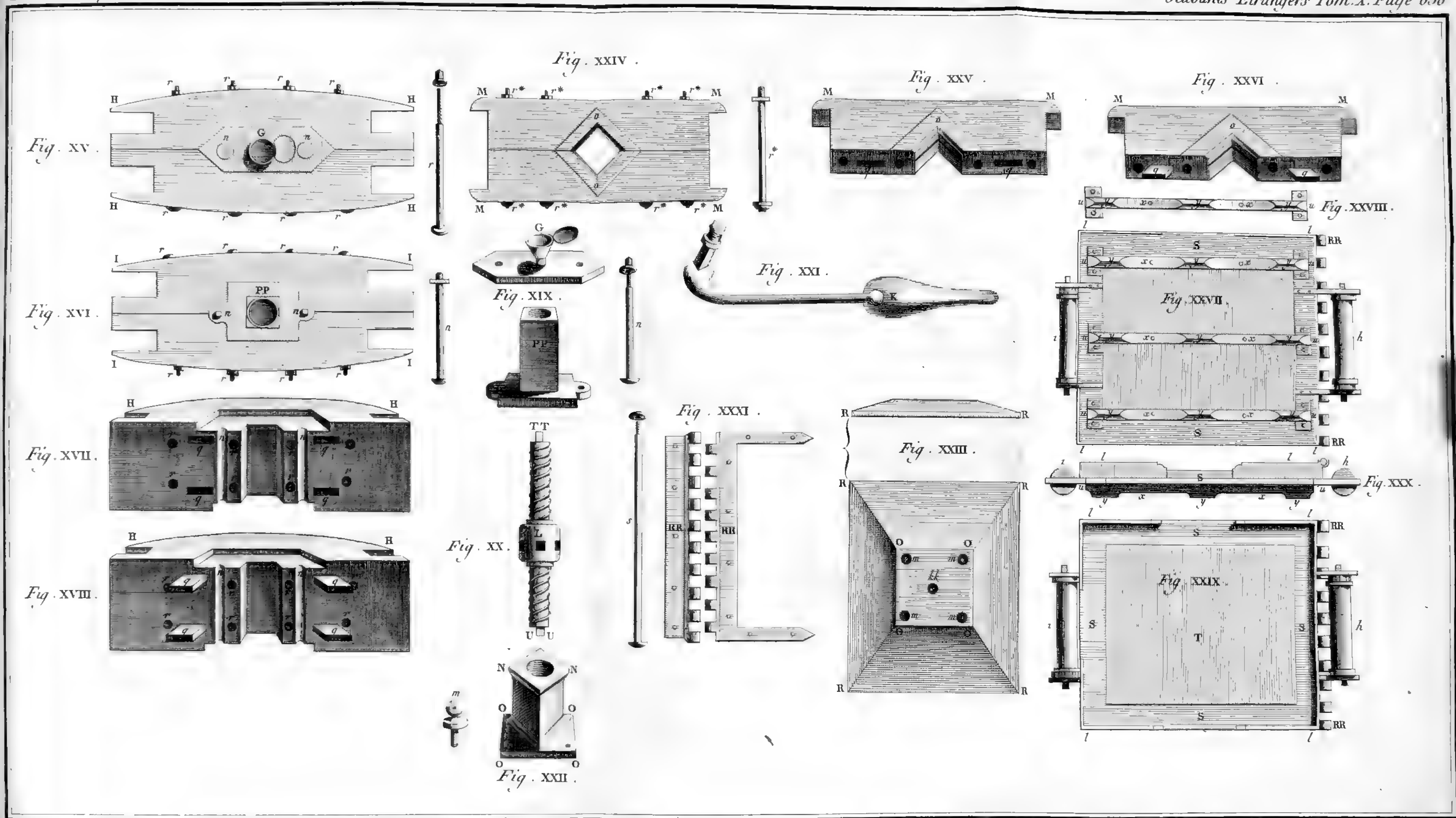


Fig. XV.
Fig. XVI.
Fig. XVII.
Fig. XVIII.
Fig. XIX.
Fig. XX.
Fig. XXI.
Fig. XXII.
Fig. XXIII.
Fig. XXIV.
Fig. XXV.
Fig. XXVI.
Fig. XXVII.
Fig. XXVIII.
Fig. XXIX.
Fig. XXX.
Fig. XXXI.

MÉMOIRE

SUR UN NOUVEAU GAS,

OBTENU

PAR L'ACTION DES SUBSTANCES ALKALINES,

SUR

LE PHOSPHORE DE KUNCKEL.

PAR M. GENGEMBRE.

Lu à l'ACADÉMIE, le 3 Mai 1783.

COMME le phoſphore de Kunckel eſt une ſubſtance dont la découverte n'eſt pas très-ancienne, ſes différentes combinaiſons avec les autres corps, & les altérations qu'il peut en recevoir, ſont encore peu connues: mais ce qu'on ſait ſur cette matière combuſtible, ſuffit pour faire voir que ſes propriétés ont un grand rapport avec celles du ſoufre.

En effet, le phoſphore comme le ſoufre donne par ſa combuſtion un acide qui lui eſt particulier.

Il a, comme lui, deux ſortes de combuſtion, l'une tranquille & lente, l'autre rapide & avec décrépitation.

Lorſqu'il brûle lentement, on obtient un acide différent de celui qui provient de ſa combuſtion rapide, & qui paroît être à ce dernier, ce que l'acide ſulfureux eſt à l'acide vitriolique: car cet acide, lorſqu'il eſt récent, eſt encore lumineux dans l'obſcurité, & retient une légère odeur d'ail.

Quand on l'expoſe à l'air, il paſſe, au bout d'un temps plus ou moins long, à l'état d'acide phoſphorique proprement dit; & ſi, au lieu de le laiſſer à la ſimple température de l'atmoſphère, on lui applique une plus forte chaleur dans un vaiſſeau ouvert, il s'en élève de temps en temps de petites flammes, qui ſont probablement dues à ce que le phoſphore n'eſt point entièrement brûlé. Ces propriétés peuvent ſe comparer à celles de l'acide ſulfureux.

Le phoſphore s'unit auſſi à quelques ſubſtances métalliques, d'après les expériences de *M. Margraf*, à l'arſenic, au zinc, & au cuivre; & s'il refuſe de ſe combiner aux autres, c'eſt peut-être à cauſe de ſa grande volatilité & de ſon extrême facilité à s'enflammer.

Enfin, le procédé par lequel on le retire de la ſubſtance qui le contient, eſt ſemblable à celui qu'on emploie pour obtenir le ſoufre artificiel.

Tous ces faits, qui indiquent entre le ſoufre & le phoſphore une analogie aſſez marquée, m'ont donné l'idée d'examiner ſi elle ſe ſoutiendroit dans la combinaiſon du phoſphore avec les alkalis, & s'il ne pourroit pas en réſulter des eſpèces de foie de phoſphore. Voici le détail de mes expériences.

J'ai mis de l'alkali fixe végétal cauſtique en digeſtion ſur du phoſphore; au bout de quelques heures, j'ai apperçu une multitude de bulles, très-petites, qui adhéroient à la surface du phosphore : alors j'ai exposé le tout à une chaleur de 35 à 40 degrés, pour accélérer l'action de l'alkali. A peine le phosphore a-t-il été fondu, qu'il s'est dégagé une odeur insupportable de poisson pourri, & une quantité assez considérable d'un gas particulier, qui s'enflammoit de lui-même & avec explosion, aussi-tôt qu'il avoit le contact de l'air.

Cette première épreuve m'a rendu certain que l'alkali agissoit d'une manière quelconque sur le phosphore ; mais pour connoître cette action & la nature du gas qui se dégageoit, il étoit nécessaire de répéter cette expérience sur des quantités déterminées, & avec un appareil propre à recueillir les fluides aériformes.

Pour cet effet, j'ai pris 1 gros 6,5 grains de phosphore, que j'ai mis dans un petit matras, dont le col avoit été recourbé à la lampe d'Émailleur; j'y ai ajouté 2 onces 7 gros 28,3 grains d'alkali végétal caustique en liqueur, qui, sur 12 onces d'eau distillée, contenoit 3 onces 6 gros d'alkali concret.

J'ai chauffé très-doucement ce mélange avec une lampe à esprit de vin; il s'est fait une légère effervescence, l'alkali a pris une couleur plus foncée, & le gas a commencé à passer, d'abord avec l'odeur putride dont j'ai déjà fait mention, & sans s'enflammer; mais bientôt après, chaque bulle qui s'échappoit du bec du matras, s'enflammoit avec bruit & produisoit une fumée blanche, qui prenoit la forme d'un anneau exactement rond, bien terminé, & dont le diamètre augmentoit à mesure qu'il s'élevoit dans l'air. Ce singulier phénomène dépend sans doute de la résistance uniforme de l'air. J'en ignore l'explication; mais je l'avois déjà observé plusieurs fois dans la fumée des pièces d'artillerie.

Dans cette opération, qui a duré environ onze heures & demie, j'ai obtenu 80 pouces cubiques de gas, que j'ai reçus au dessus du mercure, dans cinq cloches différentes.

J'ai fait paſſer de l'eau diſtillée dans la première & la cinquième portion; à l'inſtant où l'eau a été en contact avec le gas, il s'eſt élevé dans les cloches un nuage blanc, qui a ſubſiſté pendant deux ou trois minutes; l'abſorption par l'eau a été d'environ un cinquante-ſixième du volume du gas.

J'ai introduit enſuite, ſous les deux mêmes cloches, quelques bulles d'air commun; à chaque bulle qui venoit crever à la ſurface du mercure, le gas s'enflammoit ſpontanément, & il ſe formoit des vapeurs jaunâtres, qui ſe condenſoient ſur les parois des vaiſſeaux & dans l'eau qu'on y avoit fait paſſer (*). Les mêmes phénomènes ont eu lieu avec l'air vital, & d'une manière beaucoup plus marquée. J'ai été curieux de voir combien il faudroit ajouter d'air vital pour faire brûler ſpontanément toute la portion du gas qui en étoit ſuſceptible; car il en reſtoit toujours une grande quantité qui ne s'enflammoit plus d'elle-même. J'ai donc introduit ſous une cloche près de ſix pouces cubiques du gaz dont il s'agit, & j'y ai mêlé peu à peu de l'air vital, juſqu'à ce qu'il n'y ait plus eu d'inflammation ſpontanée. Le volume de l'air employé s'eſt trouvé de 300 lignes cubiques, & celui du gas a été diminué d'environ 100 lignes cubiques; diminution qui eſt aux 300 lignes d'air vital, comme une quantité donnée de phoſphore eſt à celle de l'air qu'il abſorbe pendant ſa combuſtion.

En effet, on verra dans ce Mémoire, que le gas dont nous nous occupons pèſe à peu près le double de l'air vital; les 100 lignes équivalent donc à 200. Ainſi le rapport des deux airs conſommés eſt celui de 2 à 3, le même que les Chimiſtes ont reconnu dans la proportion de l'air que le phoſphore abſorbe en brûlant.

Le gas, qui ne s'enflammoit plus de lui-même, a cependant fait une vive exploſion, accompagnée d'une flamme & d'une

---

(*) Cette expérience n'eſt pas ſans danger; il faut avoir ſoin de la faire dans des vaſes très-épais; ſans cette précaution, leur rupture eſt inévitable.

fumée blanches, lorſque j'ai préſenté à l'orifice du vaſe qui le contenoit, un papier blanc allumé; mais tout le gas ne s'eſt point conſumé à la fois, il en eſt reſté au fond du vaſe une portion qui a continué de brûler tranquillement, avec une flamme verte, de même que le papier avec lequel on l'avoit allumé.

Ce gas répandoit, en brûlant, l'odeur du phoſphore en déflagration, & laiſſoit après ſa combuſtion une matière jaunâtre, ſemblable à celle qui avoit été produite par l'inflammation ſpontanée. Cette matière étoit en partie lumineuſe dans l'obſcurité & à l'air libre, ce qui prouve qu'elle contenoit un peu de phoſphore.

L'eau, qui en avoit diſſous une certaine quantité, étoit manifeſtement acide au goût, & rougiſſoit le papier bleu; mais elle ne précipitoit pas ſenſiblement l'eau de chaux, quoique le gas, reſtant après l'inflammation ſpontanée, la précipitât un peu ſans diminuer de volume.

Comme on s'eſt aidé de la chaleur, dans l'opération précédente; il pourroit paroître douteux que ce gas (que j'appellerai *gas phoſphorique inflammable*) fût produit par l'action de l'alkali; mais on obtient à froid un gas ſemblable à celui que je viens de faire connoître, à l'exception qu'il s'enflamme plus difficilement de lui-même, qu'il perd cette propriété au bout d'un eſpace de temps aſſez court, & que les premières portions en ſont totalement privées; mais cette différence même n'eſt pas très-conſidérable, car le gas phoſphorique, obtenu à l'aide de la chaleur, devient auſſi peu à peu moins capable de s'enflammer ſpontanément, à meſure qu'il ſe condenſe du phoſphore ſur les parois des vaiſſeaux. Il paroît d'ailleurs que les premières portions contiennent moins de matière inflammable d'elle-même que les autres, puiſque plus d'un mois après l'opération, celles-ci prenoient encore feu très-facilement, auſſi-tôt qu'elles étoient mêlées à l'air; tandis que celles là ne jouiſſoient déjà plus de cette propriété:

peut-être cela dépend-il de la pureté du gas phoſphorique; qui ſe trouve mélangé lorſqu'il commence à ſe dégager d'une plus ou moins grande quantité d'acide crayeux dû à l'alkali: car on ne ſauroit ſe flatter d'avoir un alkali fixe ſi cauſtique, qu'il ne retienne encore une quantité conſidérable de cet acide, ſur-tout lorſqu'il eſt auſſi concentré que celui dont je me ſuis ſervi.

Après avoir examiné les propriétés du gas phoſphorique, j'ai peſé la combinaiſon qui étoit dans le matras; elle avoit perdu 66,3 grains de ſon poids, ce qui donne pour peſanteur ſpécifique du gaz, environ 0,8 de grain le pouce cubique: mais il faut remarquer que cette peſanteur doit être bien moins conſidérable, car la chaleur avoit volatiliſé un peu d'eau, & même un peu de phoſphore, puiſque l'intérieur des cloches en étoit tapiſſé.

Pour ſavoir ſi l'alkali étoit décompoſé, ou s'il tenoit du phoſphore en diſſolution, je l'ai ſaturé d'acide vitriolique médiocrement concentré. Il s'eſt précipité une poudre noirâtre, mais en ſi petite quantité, qu'il m'a été impoſſible de la peſer exactement. Jetée ſur un morceau de fer rouge, elle a brûlé avec la flamme & l'odeur du phoſphore.

Il a fallu, pour arriver au point de ſaturation, 1 once 1 gros 13,2 grains d'acide; ce qui eſt, à 1,7 grains près, la quantité d'acide néceſſaire pour ſaturer une doſe d'alkali égale à celle que j'avois employée; erreur trop petite pour qu'on puiſſe en répondre.

Il me ſemble qu'on peut conclure de ce dernier fait, que le gas phoſphorique eſt entièrement dû au phoſphore, s'il n'eſt peut-être le phoſphore lui-même, à l'état de fluide élaſtique ou diſſous dans un autre gas; au moins l'odeur qu'il fait ſentir en brûlant, & l'acidité manifeſte de ſon réſidu, paroiſſent indiquer la néceſſité de choiſir entre ces deux opinions. Quelques faits particuliers, qui ne ſont point encore ſuffiſamment éclaircis, me ſont pencher pour la dernière.

L'alkali

L'alkali minéral présente absolument les mêmes phénomènes avec le phosphore.

L'alkali volatil ne l'attaque que très-foiblement; car si l'on fait digérer de l'alkali volatil sur du phosphore, on n'a que du gas alkalin, qui à la vérité retient une légère odeur phosphorique; mais il est absorbable en entier par l'eau, & n'est point inflammable.

Le lait de chaux a aussi donné du gas phosphorique par son mélange avec le phosphore; & il m'a paru que ce gas, quoiqu'en plus petite quantité que dans l'opération où j'avois employé de l'alkali, contenoit proportionnellement plus de matière inflammable d'elle-même.

Tout ce qui précède est très-comparable à la manière dont le soufre se comporte avec les substances alkalines.

1°. On a beaucoup plus de peine à combiner le soufre avec l'alkali volatil, qu'avec les deux alkalis fixes, & on est obligé, pour y parvenir, d'employer des procédés particuliers. Peut-être par les mêmes opérations réussiroit-on à faire agir l'alkali volatil sur le phosphore.

2°. Le gas hépatique est évidemment, à l'égard du soufre, ce que le gas phosphorique est à l'égard du phosphore; tous deux ont une odeur singulièrement fétide, tant qu'ils ne sont point enflammés, mais qui se change, lorsqu'ils brûlent, en une odeur toute différente & semblable à celle de l'acide que chacune des matières dont ils sont tirés, fournit par sa combustion lente.

3°. Enfin, non seulement le gas hépatique répand en brûlant l'odeur vive & pénétrante de l'acide sulfureux; mais il dépose même, pendant sa combustion, une poudre jaune qui, lavée par l'eau, lui donne des caractères d'acidité, & dont l'identité avec le soufre est prouvée par la flamme bleuâtre &

l'odeur sulfureuse qui s'en exhalent, lorsqu'on la jette sur des charbons ardens.

Il reste maintenant à connoître plus particulièrement l'état de la combinaison qui s'est formée pendant le dégagement du gas phosphorique, & à déterminer si ce gas est une dissolution de phosphore dans un autre gas, & quelle est la nature de ce dernier. C'est ce que je me propose d'examiner dans un autre Mémoire.

FIN du Tome X des Savans Étrangers.

PLANISPHÈRE CÉLESTE, CHINOIS.

PAR M. DEGUIGNES le fils.

J'AI dreſſé ce Planiſphère céleſte d'après un Ouvrage Chinois, intitulé : FANG-SING-TOU-KIAI, ou *Explication de la Table de toutes les Étoiles*, fait à la Chine en 1711, par le P. Grimaldy. Ce Miſſionnaire, comme le P. Pardies, a diviſé tout le ciel en ſix Cartes, deux pour les deux poles, & les quatre autres pour les étoiles placées des deux côtés de l'équateur. Il y a tracé l'équateur, l'écliptique, les deux tropiques, les colures & des degrés, ce que les Chinois ne font point ſur leurs Cartes. Cet Ouvrage, bon pour un Chinois, parce qu'il y reconnoît toutes ſes conſtellations rangées dans le même ordre qu'il les voit au ciel, n'eſt d'aucune utilité pour nous autres Européens qui ignorons la forme & les noms que les Chinois leur donnent, parce que ces Cartes céleſtes ne repréſentent aucunes de nos figures, de nos ſignes & de nos conſtellations. J'avois d'abord copié, avec la plus grande exactitude, les Cartes du P. Pardies ; mais, pour me conformer au déſir de l'Académie, j'ai adopté celles de M. de la Hire, en deux feuilles, ſur leſquelles j'ai appliqué mon travail ; ainſi,

ANNÉE 1781.

ſur toutes nos figures, on trouvera celles que les Chinois donnent à leurs conſtellations, en quoi le P. Grimaldy m'a été d'un grand ſecours. Aucune de ces conſtellations ne ſe rapporte aux nôtres; elles ſont plus ou moins étendues, en ſorte qu'une partie, par exemple, eſt dans un de nos ſignes, & le reſte dans un autre. J'ai conſervé les formes chinoiſes de ces conſtellations, & comme les Chinois, j'ai réuni chaque groupe par des lignes; mais j'ai marqué par des lignes doubles celles qui forment leur Zodiaque, qui ſont au nombre de vingt-huit conſtellations. Il eſt bon d'obſerver qu'ils donnent à leur Zodiaque plus de largeur que nous n'en donnons au nôtre. Toutes les autres conſtellations ſont tracées en lignes ſimples. J'ai appliqué les noms à toutes celles qui en portent, ſoit que ces noms appartiennent à une conſtellation en général, ſoit qu'ils ſervent à déſigner chacune des étoiles d'une conſtellation; car quelquefois les Chinois ont ainſi déſigné, par un nom particulier, chaque étoile d'une conſtellation; mais ils ne l'ont pas toujours fait. Ces noms ont rapport au Gouvernement entier de la Chine, c'eſt-à-dire que les Chinois ont mis dans le ciel l'Empereur, le Prince héritier, les femmes de l'Empereur, ſes fils, ſes enfans, les titres de dignités de l'Empire & des Tribunaux, les Tribunaux eux-mêmes; ils ont auſſi donné aux étoiles des noms de royaumes, de provinces, de fleuves, de lacs, de villes, de places, &c.; des noms d'animaux, tels que le loup, le bœuf, le chien; des noms de grands Hommes, des noms d'étendards, de tambours, de différens inſtrumens, tels que l'aune, le boiſſeau, le panier, le croc, &c. J'ai employé partout les lettres grecques de Bayer; mais pour les étoiles où il ne les a pas miſes, je me ſuis ſervi du Planiſphère de M. l'Abbé de la Caille. Il y a d'autres étoiles auxquelles je n'ai pu mettre de lettres, parce qu'elles ne ſont pas ſur nos Planiſphères, comme il y en a des nôtres qui n'exiſtent pas dans les Planiſphères chinois; de même auſſi chez eux, il y a des étoiles auxquelles ils n'ont point aſſigné de nom, & qui ne tiennent à aucunes de leurs conſtellations; je les ai conſervées cependant ſur la Carte que je préſente.

On ſera ſans doute ſurpris de trouver au pole auſtral pluſieurs des noms qui ne ſont qu'une traduction de ceux que ces mêmes étoiles portent ſur nos Planiſphères. Les Chinois ne pouvant voir ces étoiles de chez eux, ne les ont point déſignées, ce qui a déterminé le P. Verbieſt à remettre ſur leurs Planiſphères nos conſtellations méridionales, & les noms que nous leur avons aſſignés, & les Chinois les ont adoptées depuis ; telles ſont :

Ho-niao, *oiſeau de feu*, le phœnix.
Ho, *oiſeau des bords de la mer, qui mange les poiſſons & les ſerpens*, la grue.
Niao-hoei, *bec d'oiſeau* qui répond au bec du toucart.
Che-cheu, *tête de ſerpent* qui répond à la tête de l'hydre.
Che-fo, *ventre de ſerpent* qui répond au ventre de l'hydre.
Che-ouey, *queue de ſerpent* qui répond à la queue de l'hydre.
Kin-yu, *poiſſon d'or* qui répond à la dorade.
Fy-yu, *poiſſon volant* qui répond au poiſſon volant.
Ma-fo, *ventre de cheval* qui répond au ventre du centaure.
Ma-ouey, *queue de cheval* qui répond à la queue du centaure.
Che-tsu-kia, *ſigne de la croix* qui répond à la croix.
Mie-fung, *abeille* qui répond à notre abeille.
San-kio-hing, *figure des trois cornes*, le triangle auſtrale.
Y-tsio, *petit oiſeau admirable* qui répond à l'apus *ou* avis indica.
Kung-tsio, *paon*, c'eſt la conſtellation du paon.
Po-su, *le Perſan* qui répond à l'Indien, &c.

J'ai joint à mon Planiſphère la Table des vingt-quatre Tsie-ky par leſquels les Chinois diviſent leur Zodiaque ; ces diviſions de quinze en quinze degrés ſemblent déſigner plutôt la température de l'air que des conſtellations, de plus, les douze ſignes céleſtes qui ſont chacun de trente degrés : j'y ai ajouté auſſi le cycle de 60 qui ſert à compter les jours & les années. Les Chinois, dans leurs obſervations, indiquent le jour par ce cycle ; ainſi ils diſent : Telle comète parut à la première Lune au jour Kia-tse, c'eſt-à-dire, au 1 du cycle. Parmi le grand nombre des conſtellations chinoiſes, il y en a quelques-unes qui s'accordent assez bien avec les nôtres, c'est-à-dire qu'elles ont la même situation & la même dénomination ; telles sont celles du Scorpion. Les Chinois ont appelé depuis très-long-temps SIN ou le *cœur* les trois étoiles du dos du Scorpion que nous nommons aussi le *cœur* ; de même la queue est désignée par le mot OUEY, qui, dans leur Langue, signifie également la *queue*. Par quel hasard ces Peuples si éloignés ont-ils appliqué à ces deux groupes les mêmes noms que nous leur donnons ?

Pour rendre ce Planisphère plus utile, j'y ai joint une Table alphabétique des noms de toutes les constellations & étoiles chinoises, & les lettres qui indiquent la place qu'elles occupent dans nos Planisphères. On y trouvera donc non seulement les noms de chaque groupe ou signe, mais encore ceux de chaque étoile en particulier, lorsque les Chinois leur en ont assigné, selon l'ordre alphabétique.

L'Ouvrage du P. Grimaldy est à la Bibliotheque du Roi, ainsi que celui du P. Noël qui a donné un Catalogue de toutes les étoiles chinoises, avec différentes observations Astronomiques. J'ai comparé mon Catalogue, auquel j'ai ajouté quelques autres étoiles dont il est fait mention dans différens Livres chinois, avec celui du P. Noël. J'ai vu par-là que plusieurs constellations que j'avois, manquoient dans ce dernier; qu'il y avoit des fautes d'impression dans les noms de plusieurs; je les ai corrigées : mais afin que ceux qui se sont servi du P. Noël pussent reconnoître les étoiles, j'ai conservé dans ma Table les fautes de ce dernier, en renvoyant à la vraie leçon. Le P. Noël, pour indiquer les étoiles chinoises, a adopté l'ordre de nos constellations, & par-là il s'est trouvé obligé de couper celles des Chinois, parce que plusieurs de celles-ci entrent dans deux & même dans trois de nos constellations : par ce moyen, dans son Catalogue, il semble les avoir multipliées, & on est incertain si c'est la même ou une autre constellation, ce qui ôte la facilité de connoître exactement le vrai systême chinois; on le trouvera tout entier & sans cet inconvénient dans mon Planisphère, auquel se rapporte la Table alphabétique. Pour me conformer au désir de l'Académie, j'ai joint aux constellations & aux étoiles la traduction que le P. Noël en a donnée. On trouve encore à la Bibliotheque du Roi un autre Planisphère d'une grandeur prodigieuse, également dressé par nos Missionnaires, mais si mal imprimé qu'on a beaucoup de peine à reconnoître les noms & le nombre des étoiles de chaque constellation.

C'est à l'instigation de M. le Monnier que j'ai entrepris ce travail, & j'espère qu'il pourra être utile à tous les Astronomes qui voudront se servir des anciennes observations faites à la Chine ; la difficulté de reconnoître les noms des étoiles, & la place qu'elles occupent par rapport aux nôtres, a été jusqu'à présent un obstacle presque insurmontable.

TABLE des vingt-quatre TSIE-KY.

1	LY-TCHUN.....	*Commencement du printemps*, correspond au	15^e d.	du Verseau.
2	YU-CHOUI.....	*Eau de pluie*, ...	1^er d.	des Poissons.
3	KING-TCHE....	*Mouvement des reptiles*, ...	15^e d.	des Poissons.
4	TCHUN-FUEN...	*Equinoxe du printemps*, ...	1^er d.	du Belier.
5	TSING-MING...	*Clarté pure*, ...	15^e d.	du Belier.
6	KO-YU........	*Pluie fructifiante*, ...	1^er d.	du Taureau.
7	LY-HIA.......	*Commencement de l'été*, ...	15^e d.	du Taureau.
8	SIAO-MUON....	*Petite abondance*, ...	1^er d.	des Gemeaux.
9	MANG-TCHONG.	*Semence du froment & du riz*, ...	15^e d.	des Gemeaux.
10	HIA-TCHI.....	*Solstice d'été*, ...	1^er d.	de l'Écrevisse.
11	SIAO-TCHU....	*Petite chaleur*, ...	15^e d.	de l'Écrevisse.
12	TA-TCHU......	*Grande chaleur*, ...	1^er d.	du Lion.
13	LY-TSIEOU....	*Commencement de l'automne*, ...	15^e d.	du Lion.
14	TCHU-TCHU...	*Fin de la chaleur*, ...	1^er d.	de la Vierge.
15	PE-LOU........	*Rosée blanche*, ...	15^e d.	de la Vierge.
16	TSIEOU-FUEN...	*Equinoxe d'automne*, ...	1^er d.	de la Balance.
17	HAN-LOU......	*Rosée froide*, ...	15^e d.	de la Balance.
18	LOU-KIANG....	*Bruine tombante*, ...	1^er d.	du Scorpion.
19	LY-TONG......	*Commencement de l'hiver*, ...	15^e d.	du Scorpion.
20	SIAO-SIUE....	*Petite neige*, ...	1^er d.	du Sagittaire.
21	TA-SIUE......	*Grande neige*, ...	15^e d.	du Sagittaire.
22	TONG-TCHI....	*Solstice d'hiver*, ...	1^er d.	du Capricorne.
23	SIAO-HAN.....	*Petit froid*, ...	15^e d.	du Capricorne.
24	TA-HAN.......	*Grand froid*, ...	1^er d.	du Verseau.

LES DOUZE SIGNES CÉLESTES DES CHINOIS.

Ces Signes ont, comme les nôtres, chacun trente degrés.

		Les douze Signes du Zodiaque du temps des Han, tirés du P. Gaubil.	
Hai-kong... correſpond	aux Poiſſons.	Kiang-leou	au Belier.
Su-kong	au Belier.	Ta-leang.	au Taureau.
Yeou-kong.	au Taureau.	Chestchin.	aux Gemeaux.
Chin-kong.	aux Gemeaux.	Chun-cheou	à l'Ecreviſſe.
Oui-kong.	à l'Ecreviſſe.	Chun-ho.	au Lion.
Ou-kong.	au Lion.	Chun-ouei.	à la Vierge.
Su-kong.	à la Vierge.	Cheou-sing.	à la Balance.
Chin-kong.	à la Balance.	Ta-ho.	au Scorpion.
Mao-kong.	au Scorpion.	Si-mou.	au Sagittaire.
Yn-kong.	au Sagittaire.	Sing-ki.	au Capricorne.
Cheou-kong.	au Capricorne.	Hiuen-hiao.	au Verſeau.
Tse-kong.	au Verſeau.	Tsiu-tsu *ou* Tseou-tse.	aux Poiſſons.

Les Chinois diviſent encore le ciel en quatre régions ou parties, dans chacune deſquelles ils mettent ſept conſtellations; ainſi dans ce qu'ils appellent la région Orientale du ciel, ſont les conſtellations Kio, Kang, Ty, Fang, Sin, Ouei, Ki.

La partie Septentrionale comprend les conſtellations Teou *ou* Nan-teou, Nieou, Niu, Hiu, Goey, Che, Pie.

La partie Occidentale comprend les conſtellationsKuey, Leou, Guey, Mao, Py, Tsu & Tsan.

La partie Méridionale comprend les conſtellations Tsing, Kuey, Lieou, Sing, Tchang, Ye, Tchin.

LE CYCLE de 60, dont les Chinois ſe ſervent pour compter les années & les jours.

1 KIA-TSE.	11 KIA-SU.	21 KIA-CHIN.	31 KIA-OU.	41 KIA-CHIN.	51 KIA-IN.
2 Y-TCHEOU.	12 Y-HAY.	22 Y-YEOU.	32 Y-OUI.	42 Y-SE.	52 Y-MAO.
3 PING-IN.	13 PING-TSE.	23 PING-SU.	33 PING-CHIN.	43 PING-OU.	53 PING-CHIN.
4 TING-MAO.	14 TING-TCHEOU.	24 TING-HAI.	34 TING-YEOU.	44 TING-OUI.	54 TING-SE.
5 VOU-CHIN.	15 YOU-IN.	25 VOU-TSE.	35 VOU-SU.	45 VOU-CHIN.	55 VOU-OU.
6 KY-SE.	16 KI-MAO.	26 KI-TCHEOU.	36 KI-HAI.	46 KI-YEOU.	56 KI-OUI.
7 KENG-OU.	17 KENG-CHIN.	27 KENG-YN.	37 KENG-TSE.	47 KENG-SU.	57 KENG-CHIN.
8 SIN-OUI.	18 SIN-SE.	28 SIN-MAO.	38 TSIN-TCHEOU.	48 SIN-HAY.	58 SIN-YEOU.
9 GIN-CHIN.	19 GIN-OU.	29 GIN-CHIN.	39 GIN-IN.	49 GIN-TSE.	59 GIN-SU.
10 KUEY-YEU.	20 KUEY-OUI.	30 KUEY-SE.	40 KUEY-MAO.	50 KUEY-TCHEOU.	60 KUEY-HAI.

OBSERVATIONS sur l'Orthographe Chinoise.

Ç doit se prononcer comme TS.

Ch doit se prononcer comme TCH ; en conséquence, j'ai rangé sous le *Ç* le TS & TCH ; par exemple, *çan*, lisez TSAN ; *çao*, lisez TSAO ; *chang*, lisez TCHANG ; *chu*, lisez TCHU ; *chong*, lisez TCHONG.

Ch de nos Missionnaires François doit être prononcé sans T comme dans *chameau*, il est rangé dans l'*x*.

I ou *Y*. Les Chinois n'ont qu'un *i*, ainsi ces deux lettres sont placées ensemble.

K est le même que *Q* ; quelques Missionnaires se sont servi de *Q* comme QUANG, QUON ; on trouve ces mots dans le *K*, KUANG, KUON.

M à la fin des mots est la même chose que *ng* ; ainsi *mim* est le même que MING ; de même *mam* ou MANG, *vam* ou VANG.

T, le TS & le TCH des Missionnaires François sont placés sous le *Ç* & le *Ch*.

V & *u* est souvent prononcé OU.

X. Les Missionnaires Portugais & Espagnols se sont servi de cette lettre pour exprimer le *ch* prononcé comme dans *chameau*, *cheval*, *&c*. Ce *ch* doit être par conséquent distingué du *ch* qui est prononcé TCH ; en conséquence, je l'ai placé dans l'*x* ; ainsi *xang*, voyez CHANG ; *xy*, voyez CHI ; *xe*, voyez CHE ; *xouy*, voyez CHOUI.

TABLE

TABLE

De toutes les Constellations et Etoiles Chinoises.

Ç ou *Ts.*

TSAN, *trois*, une des vingt-huit conſtellations, compoſée de dix étoiles α, γ, ξ, ϵ, δ, κ, β, ι, θ, C d'Orion.

TSAN-KY, *drapeau peint de dragons qu'on met dans les chars*, conſtellation compoſée de neuf étoiles, 1 & 2 de O, G, 1 & 2 de π, 1 & 2 de ζ, & deux autres petites d'Orion.

TSAO-FU, *nom d'homme*, conſtellation compoſée de ſix étoiles, μ, ξ, ϵ, δ, λ, ν, de la tête de Céphée.

TSE, *livre*, étoile γ de Caſſiopée.

TSE-OUEY-KONG, *palais*, le même que TSU VI-KONG.

TSY, *pays*, étoile du rameau d'Hercule.

TSY, *pays*, étoile ω du Capricorne.

TSIE, *amas*, deux étoiles devant le front du Scorpion ſur l'écliptique. Cette conſtellation du P. Noël n'eſt pas dans le Planiſphere du P. Grimaldy.

TSIE-CHI, *amas de cadavres*, étoile π de la tête de Méduſe.

TSIE-CHI-KY, *vapeurs que répandent les cadavres*, étoile ϵ ou nébuleuſe du Cancer.

TSIE-CHOUI, *amas d'eau*, étoile A de Perſée.

TSIE KONG, *les ſept Princes*, conſtellation compoſée de ſept étoiles τ, φ, χ, ψ une petite d'Hercule, & μ, χ du Bouvier.

TSIE-SIN, *assemblage de bois*, étoile $\varkappa$ des Gemeaux.

TSIE-SO, *soldats assemblés*, deux étoiles μ, ν du Loup.

TSIEN, *monnoie de cuivre*, étoile qui est dans le pied de devant des Gemeaux. Cette étoile n'est pas dans le Planisphere du P. Grimaldy.

TSIEN-TAY, *nom d'une tour*, constellation composée de quatre étoiles ι, δ, γ, β de la Lire.

TSIEOU-KI, *vase à mettre du vin*, constellation composée de trois étoiles ψ, ξ, ω du Lion.

TSIN, *pays*, étoile δ du Serpentaire.

TSIN, *pays*, $\varkappa$ d'Hercule.

TSIN, *pays*, β du Capricorne.

TSIN, *pays*, θ du Capricorne.

TSIN-HIEN, *produire un sage*, k de la Vierge.

TSING, *puits*, une des vingt-huit constellations, composée de huit étoiles ε, D, ξ, λ, μ, ν, ζ, η des Gemeaux.

TSING-KIEOU, *colline d'azur*, constellation composée de trois étoiles β, ξ, o de l'Hydre femelle.

TSO-CHI-FA, *Président du Tribunal de la gauche*, étoile η de la Vierge.

TSO-HIA, *crochet de la gauche que l'on met à l'essieu*, étoile η du Corbeau.

TSO-KENG, *soldats de la veille de la gauche*, constellation composée de cinq étoiles ν, μ, π, σ, o du Belier.

TSO-KY, *étendard de la gauche*, constellation composée de huit étoiles dont α, β, γ, δ, ζ, χ, y de la Fleche, & ρ de l'Aigle.

TSO-KY, *étendard du trône*, conſtellation compoſée de quatre étoiles dans le fouet du Cocher.

TSO-TCHE-TI *ou* TSO-NIE-TI, *levée de la gauche*, conſtellation compoſée de trois étoiles o, π, ζ du Bouvier.

TSO-TCHU, *gond des portes de la gauche*, étoile ι du Dragon.

TSONG-JIN, *homme honorable*, conſtellation compoſée de quatre étoiles P, O, N, K près le bras du Serpentaire.

TSONG-KUON, *Préfet ſubalterne*, petite étoile du Lion.

TSONG-KUON, *les Aſſeſſeurs des Magiſtrats*, conſtellation compoſée de deux étoiles λ, γ du Loup.

TSONG-SING, *étoile de l'Empereur Tſong*, conſtellation compoſée de deux etoiles du rameau d'Hercule.

TSONG-TCHING, *le Préſident de la Cour de l'Empereur*, conſtellation compoſée de deux étoiles β, γ du Serpentaire.

TSU, *pays*, étoile A de la conſtellation du Capricorne.

TSU, *cornes de Hibou*, le même que TSUY. Le P. Noël a traduit *Levres*.

TSU, *fils*, conſtellation compoſée de β, γ de la Colombe.

TSU, *latrine*, conſtellation compoſée de quatre étoiles α, β, δ, γ de la conſtellation du Lievre.

TSU, *pays* ε du Serpentaire.

TSU-SIANG, *le ſecond Conſeiller de l'Empereur*, étoile δ de la Vierge.

TSU-SIANG, *le ſecond Conſeiller*, étoile θ du Lion.

TSU-TCHOUY, le même que TSUY.

TSU-TSAO, *nattes*, conſtellation compoſée de ſix étoiles σ, ε, ρ, deux petites de la Baleine, & σ de l'Eridan.

TSU-TSIANG, *le ſecond Géneral*, ε de la Vierge.

TSU-TSIANG, *le ſecond Géneral*, ι du Lion.

TSU-KONG-YUEN, *murailles du palais Tſu.* Ce ſont quinze étoiles qui entourent ce palais; d'un côté α, $\varkappa$, λ du Dragon, & trois autres dans la Giraffle; de l'autre côté, ι, θ, η, ζ, χ du Dragon $\varkappa$, γ de Céphée, & une petite dans la Renne.

TSU-VI-KONG, *palais Tſu-vi*, le même que TSE-OUEI-KONG. Ce palais eſt déterminé par le cercle de perpétuelle apparition des étoiles, ainſi les étoiles de ce palais ne ſe couchent pas. Il contient la grande & la petite Ourſe, la Renne, une partie de Céphée, de Caſſiopée, de la Giraffle & du Bouvier.

TSUY *ou* TSU, *les levres*, une des vingt-huit conſtellations, compoſée de trois étoiles χ & 1 & 2 de φ d'Orion.

CH OU TCH.

TCHANG, *ouverture*, une des vingt-huit conſtellations, compoſée de ſix étoiles φ, μ, λ, $\varkappa$, & deux petites de l'Hydre femelle.

TCHANG-CHA, *nom de ville*, ζ du Corbeau.

TCHANG-GIN, *ſoldat*, conſtellation compoſée de α, ε de la Colombe.

TCHANG-YUEN, *grand mur*, conſtellation compoſée de quatre étoiles K, L, & deux petites du Lion.

TCHANG-TCHIN, *Préfet du palais*, conſtellation compoſée de trois étoiles dans les Chiens de chaſſe.

TCHAO, *pays*, petite étoile du Capricorne.

TCHAO, *pays*, étoile λ d'Hercule.

TCHAO-YAO, *qui appelle avec la main*, étoile γ du Bouvier.

TCHE-FU, *lieu où l'on met les chars*, conſtellation compoſée de quatre étoiles ξ, ρ, A, G de la queue du Cygne & d'une petite du Lézard marin.

TCHE-KI, *les cavaliers des chars*, conſtellation compoſée de trois étoiles ξ, ρ, β du Loup.

TCHE-NIU, *la fileuſe*, conſtellation compoſée de trois étoiles α, ε, ζ du Vautour tombant.

TCHE-SU, *ſuite de chars*, conſtellation compoſée de deux étoiles o, ν du Serpent, appelée par le P. Noël KIU-SU.

TCHE-TI, *voyez* TSO-TCHE-TI & YEU-TCHE-TI.

TCHE-TAO, *voie rouge*, l'Equateur.

TCHEOU *ou* TCHEU, *pays*, étoile η du Capricorne.

TCHEOU, *pays*, étoile β du Serpent.

TCHEOU-TING, *trépied des Teheou*, conſtellation compoſée de trois étoiles de la chevelure de Bérénice.

TCHIN, *timon*, une des vingt-huit conſtellations, compoſée de quatre étoiles β, γ, δ, ε du Corbeau.

TCHIN-KIU, *chars de guerre*, trois étoiles du Scorpion; elles n'exiſtent pas dans le P. Grimaldy.

TCHIN-TCHE, *voie des Chariots* γ du Scorpion.

TCHING, *pays*, γ du Serpent.

TCHING, *pays*, petite étoile du Capricorne.

TCHO, le même que PI *ou* PIE, Taureau.

TCHONG-CHAN, *pays* o d'Hercule.

TCHONG-TAY, *Préſident du milieu*, étoile λ, μ de la grande Ourſe.

TCHU *ou* TCHOU, *colonne*, constellation composée de trois étoiles *o* L, & une du Centaure.

TCHU, *colonne*, constellation composée de G, K, I du Centaure.

TCHU, *colonne*, constellation composée de η, σ, ζ du Loup.

TCHU, *colonne*, constellation composée de trois étoiles χ, N, & une petite du Centaure.

TCHU, *colonne*, constellation composée de $\varkappa$, ι, τ du Loup.

TCHU, *pilon*, étoile π de Pégase.

TCHU, *colonne*, constellation composée de ν, τ, υ du Cocher.

TCHU, *colonne*, constellation composée de χ & deux petites du Cocher.

TCHU, *colonne*, constellation composée de ε, η, ζ du Cocher.

TCHU, *pilon*, constellation composée de α, σ de l'Autel.

TCHU-SU, *l'Historiographe de l'Empereur*, φ du Dragon.

TCHU-VANG, *tous les Rois*, constellation composée de six étoiles, dont trois entre la jambe gauche du Cocher & l'Ecliptique, τ & deux petites sur le front du Taureau.

TCHUEN-CHE, *les demeures des Coureurs*, constellation composée de cinq étoiles; les deux premières 1 & 2 de A de Cassiopée; la troisième ω de Cassiopée; la quatrième entre le pied de Cassiopée & le bras de Persée; la cinquième dans la Giraffle.

F.

FA, *punir*, constellation composée de φ, χ & une petite du Scorpion.

FA, faute dans le P. Noël, *voyez* TAY.

FA, *armes offensives*, constellation faisant partie de la grande constellation TSAN, l'une des vingt-huit, composée de C, θ, ι d'Orion.

FANG, *maiſon*, l'une des vingt-huit conſtellations, composée de quatre étoiles β, δ, π, ρ du Scorpion.

FI-YU, *poiſſon volant*, conſtellation composée de ſept étoiles α, β, γ, δ, ε, ζ, η du Poiſſon volant.

FU-YUE, *nom d'homme*, nébuleuſe proche la queue du Scorpion.

FU-YUE, *hache*, trois conſtellations composées chacune de trois étoiles; la première 1, & 2 de A & I; la ſeconde 1, 2, 3 de B; la troiſième 1, 2, 3 de G du Verſeau.

FU-KUANG, *porteur de paniers*, conſtellation composée de cinq étoiles B, C, D, o, & une petite du Dragon.

FU-LOU, *chemin*, étoile ζ de Caſſiopée.

FU-PE, *blancheur attachée*, conſtellation composée de deux étoiles ν de l'Hydre de M. de la Caille, & γ de la Montagne de la Table, ou l'Hydre de M. de la Hire.

FU-SING, *étoile qui ſecoure*, G de la grande Ourſe.

FU-TCHE, *hache*, conſtellation composée de cinq étoiles ſur le ventre de la Baleine.

FU-ULH, *attaché à l'oreille*, σ du Taureau.

FUEN-MU, *ſépulcre*, conſtellation composée de γ, η, ζ, π du Verſeau.

G ou *J*.

GE, *le Soleil*, étoile λ de la Balance.

GIN-SING, *l'étoile de l'homme*, conſtellation composée de trois étoiles E, F, G, au deſſus du petit Cheval.

GOEY, *pays*, étoile δ d'Hercule.

GOEY, *pays*, étoile χ du Capricorne.

GOEY, *danger*, l'une des vingt-huit conſtellations, composée de trois étoiles α du Verſeau, & θ, ε de Pégaſe.

GOEY, *l'eſtomac*, une des vingt-huit conſtellations, compoſée de trois étoiles de la Fleur-de-lis.

H.

HAI-CHAN, *montagne maritime*, conſtellation compoſée de ſix étoiles dans le Rocher.

HAI-CHE, *Rocher de la mer*, conſtellation compoſée de cinq étoiles dans le Rocher, au bas du vaiſſeau.

HAN, *pays*, étoile φ du Capricorne.

HAN, *pays*, étoile ζ du Serpentaire.

HENG, *Balance*, conſtellation compoſée de quatre étoiles τ, υ, φ, M du Centaure.

HEU *ou* HEOU, *dignité*, étoile α du Serpentaire.

HEU-KONG, *palais de la Reine*, B de la petite Ourſe.

HI-TCHONG, *nom d'homme*, conſtellation compoſée de quatre étoiles θ, ι, $\varkappa$, ω du Cygne.

HIA-KIAI, étoile ſupérieure, ou ν de HIA-TAY.

HIA-TAY, *le troiſième Préſident*, étoile ν, ξ de la conſtellation de la grande Ourſe.

HIEN-YUEN, *nom d'homme*, conſtellation compoſée de ſeize étoiles ρ, α, o, ζ, η, γ, λ, μ, ε, M, $\varkappa$ du Lion F, & une petite du petit Lion, & quatre autres du Linx.

HING-TCHIN, *faveur des Miniſtres*, petite étoile de la queue du Lion.

HIU, *vuide*, l'une des vingt-huit conſtellations, compoſée de deux étoiles α du petit Cheval, & β du Verſeau.

HIU-LEANG, *porte ouverte de la cataracte*, conſtellation compoſée de quatre étoiles de $\varkappa$ du Verſeau.

HIUEN-

HIUEN-KO, *lance bleue*, étoile λ du Bouvier.

HO, *oiſeau qui mange les ſerpens & les poiſſons*, conſtellation composée de onze étoiles α, β, δ, ε, ξ, θ, ι, κ, μ, π de la Grue, & γ du Toucan.

HO, *eſpece de meſure*, conſtellation compoſée de trois étoiles, dont I, K de la maſſue d'Hercule & κ du Serpentaire.

HO-CHU, nom des étoiles NAN-HO & PE-HO.

HO-KIEN, *nom de ville*, étoile γ d'Hercule.

HO-KU, *tambour du fleuve Hoang-Ho*, conſtellation compoſée de trois étoiles α, β, γ de l'Aigle.

HO-NIAO, *oiſeau de feu*, conſtellation compoſée de dix étoiles β, ρ, 1 & 2 de λ, μ, κ, ε, θ, ι du Phœnix, & β du Sculpteur.

HO-TCHONG, *fleuve du milieu*, β d'Hercule.

HOA-KAI, *paraſol*, *belle couverture*, conſtellation compoſée de quatre étoiles dans la Renne.

HOAN-TCHE, *Eunuque*, conſtellation compoſée de quatre étoiles L d'Hercule E, F, & une petite du Serpentaire.

HOANG-TAO, *voie jaune*, l'Ecliptique.

HU-CHE *ou* HOU-CHE, *qui tire des fleches*, conſtellation compoſée de dix étoiles ι, ξ, o, κ, λ, γ du Vaiſſeau, & η, δ, ε, κ de Syrius.

HU-FEN, *gardes de l'Empereur*, étoile du petit Lion.

HU-KUA, *concombre*, conſtellation compoſée des quatre étoiles α, β, γ, δ du Dauphin.

HU-KUON, *ſouverain chaſſeur*, faute dans le P. Noël, voyez HU-FEN.

I ou *Y*.

Y-TSIO, *oiſeau admirable*, conſtellation compoſée de dix étoiles, deſquelles ζ, ι, β, α, ε, η de l'Apus, & ρ, π, $\varkappa$, δ de l'Octans.

YANG-MOEN, *porte du Yang*, conſtellation compoſée de deux étoiles π, ρ du Centaure.

YAO-KUANG, *agitation de la lumière*, étoile η de la conſtellation de la grande Ourſe.

YE, *aile*, une des vingt-huit conſtellations, compoſée de vingt-deux étoiles α, β, δ, ε, ζ, η, θ, ι, λ, ν, cinq autres petites étoiles de la coupe χ du corps de l'Hydre femelle, & cinq autres en dehors.

YE-KY, *faiſan*, conſtellation compoſée de cinq étoiles β, ν, ξ, deux petites de Syrius.

YE-TCHE, *hôte qui viſite*, étoile C de la Vierge.

YEN, *pays*, étoile ζ du Capricorne.

YEN, *pays*, étoile ν du Serpentaire.

YEU-CHI-FA, *règle des conditions de la droite*, (*eſpece de tribunal*) étoile β de la Vierge.

YEU-HIA, *crochet de la droite que l'on met à l'eſſieu*, étoile α du Corbeau.

YEU-KENG, *ſoldats de la veille de la droite*, conſtellation compoſée de cinq étoiles ρ, η, π, o, & d'une petite des liens des Poiſſons.

YEU-KY, *étendard de la droite*, conſtellation compoſée des ſept étoiles δ, μ, ν de l'Aigle, & ι, $\varkappa$, σ, F d'Antinoüs.

YEU-TCHE-TI *ou* YEU-NIE-TI, *levée de la droite*, conſtellation compoſée des trois étoiles η, τ, υ du Bouvier.

YEU-TCHU, *le gond des portes de la droite*, étoile α de la conſtellation du Dragon.

YN-TE, *repos de la vertu*, deux petites étoiles proche la queue du Dragon.

ING-CHE, le même que CHE, voyez CHE.

YO-HENG, *tube pour regarder les Aſtres*, ε de la grande Ourſe.

YO-HENG, voyez CHO du PE-TEU.

YO-TSING, *puits des pierres précieuſes*, conſtellation de quatre étoiles β, ψ de l'Eridon, & *de* τ, λ d'Orion.

YU, *poiſſon*, étoile du pied du Serpentaire.

YU-LIN-KIUN, *l'armée d'Yu-lin*, conſtellation compoſée de quatre étoiles χ, & 1, 2, 3 de ψ du Verſeau.

YU-NIU, *fille impériale*, étoile π du Lion.

YU-SING, faute dans le P. Noël, voyez KIEN-SING.

YUE, *pays*, étoile ψ du Capricorne.

YUE, *la Lune*, étoile A du Taureau.

YUE, *la hache*, étoile η des Gemeaux.

YUN-YU, *les nues & la pluie*, conſtellation compoſée de quatre étoiles λ, κ des poiſſons, & de deux autres petites ſur l'Ecliptique.

K ou *Q*.

KAY-YANG, *l'ouverture du Yang*, ζ de la grande Ourſe.

KAY-OUO, *qui couvre les maiſons*, étoile o de la conſtellation du Verſeau.

KANG, *paille*, étoile proche le γ du Sagittaire.

KANG, *cour antérieure*, une des vingt-huit conſtellations, compoſée de quatre étoiles υ, ι, $\varkappa$, λ de la Vierge.

KANG-PI, voyez KANG du Sagittaire.

KANG-TCHI, *étang profond*, conſtellation compoſée des quatre petites étoiles au deſſus du TA-KIO du Bouvier.

KE-SING, *étoile des trois hôtes*, étoile nouvelle qui parut en 1572, dans Caſſiopée.

KENG-HO, *le fleuve Keng*, conſtellation compoſée de trois étoiles ρ, σ, ε du Bouvier.

KEU, *chien*, conſtellation compoſée de deux étoiles χ, H du Sagittaire.

KEU-KOUE, *royaume de Keu*, conſtellation compoſée de quatre étoiles A, B, C, ω du Sagittaire.

KEU-LING, *ſonnette du Harpon*, étoile ω du Scorpion.

KEU-TCHIN, *nom de femme*, conſtellation compoſée de ſix étoiles, dont η, ε, δ, α de la petite Ourſe, une autre dans la Renne, & l'autre dans la jambe de Céphée.

KY, *crible*, une des vingt-huit conſtellations, compoſée de quatre étoiles δ, γ, ε, η du Sagittaire.

KY-KUON, *le Préfet de la Cavalerie*, conſtellation compoſée de trois étoiles θ, π, o du Loup.

KY-TCHIN-TSIANG-KIUN, *le Général de la Cavalerie*, étoile σ du Loup.

KIA-PE, *blancheur reſſerrée*, conſtellation compoſée de deux étoiles η, β du grand Nuage.

KIE, *ſon*, conſtellation compoſée de θ, & d'une petite du Verſeau.

KIEN-PI, *Serrurier*, étoile ν du Scorpion.

KIEN-SING, *étoile du Tambour céleste*, constellation composée de six étoiles υ, ρ, D, o, π, ξ du Sagittaire.

KIEU, *mortier*, constellation composée de trois étoiles ι, $\varkappa$, μ du Pégase.

KIEU-HO, *nom de fleuve*, étoile μ d'Hercule.

KIEU-YEU, *gland des drapeaux des Vice-Rois*, constellation composée de huit étoiles μ, ω, & d'une petite de l'Eridan, plus cinq autres plus bas.

KIEU-KAN, *les neuf Kan*, constellation composée de quatre étoiles dans le Microscope.

KIEU-KING, *les six Tribunaux de la Cour suprême*, constellation composée de trois étoiles ρ, 1 & 2 de D de la Vierge.

KIEU-TCHEU-TCHU-YU, *les limites des provinces*, constellation composée de cinq étoiles υ, ξ, A, & d'une petite de l'Eridan.

KIN-YU, *poisson d'or*, constellation composée de quatre étoiles α, β, δ, ν de la Dorade.

KIO, *la corne*, une des vingt-huit constellations, composée de deux étoiles α, ζ, de la Vierge.

KIO de la gauche est le TIEN-TIEN.

KIU-KI, voyez TCHE-KI.

KIU-SU, le même que TCHE-SU.

KIUE-KIEU, faute dans le P. Noël, lisez KIUE-PING.

KIUE-PING, *soldats des passages*, constellation composée de deux petites étoiles sur le col de la Licorne.

KIUEN-CHE, *langue embarrassée*, constellation composée de six étoiles ν, ε, ξ, ζ, o, O de la constellation de Persée.

KIUN-CHI, *marché du camp*, β du Syrius.

KIUN-NAN-MOEN, *le Général de l'armée du Midi*, étoile φ d'Andromede.

KIUN-TSING, *puits des camps*, constellation composée de quatre étoiles ν, ι, $\varkappa$, λ du Lievre.

KO, *pleurs*, constellation composée de deux étoiles E du Verseau, & μ du Capricorne.

KO-TAO, *nom d'un Tribunal*, constellation composée de sept étoiles ι, ε, δ, φ, μ, ν, o de Cassiopée.

KONG-TSIO, *paon*, constellation composée de dix étoiles α, γ, ε, ξ, η, π, ν, λ, $\varkappa$, δ, υ du Paon.

KOU-LEU, *aire du magasin*, constellation composée de huit étoiles θ, ψ, $\varkappa$, λ, μ, O, G, P du Centaure.

KUEY du PE-TEU, les quatre premières étoiles α, β, γ, δ de la grande Ourse.

KUEY, *fondement*, une des vingt-huit constellations, composée de seize étoiles β, μ, ν, π, δ, ε, ζ, η, I d'Andromede, la deuxième de σ, G, L, υ, φ, ψ, & la première de ψ des Poissons.

KUEY, *tortue*, constellation composée de trois étoiles β, γ, ζ de l'Autel.

KUEY, *fantôme*, une des vingt-huit constellations, composée de quatre étoiles γ, η, θ, δ du Cancer.

KUON, *fanal*, constellation composée de quatre étoiles ψ des Gemeaux, & φ, λ, ω du Cancer.

KUON-SO, *collier*, constellation composée de neuf étoiles ρ, ι, δ, ε, γ, α, β, θ, & d'une petite de la Couronne boréale.

L.

LANG-GOEY, *une dignité*, conſtellation compoſée de neuf étoiles A, B, C, E, F, 2 de G, H, K de la chevelure de Bérénice.

LANG-SING, *étoile du Loup*, α de Syrius.

LANG-TSIANG, *Général de la Milice*, étoile de la chevelure de Bérénice.

LAY-PE, faute dans le P. Noël, voyez KIA-PE.

LAO-JIN, *l'homme vieux*, étoile α de l'Argo.

LEANG, *pays*, étoile δ du Serpent.

LEOU, *récolte des fruits*, une des vingt-huit conſtellations, compoſée de trois étoiles α, β, γ du Belier.

LY-CHE, *pierre de côs*, conſtellation compoſée de quatre étoiles ψ, χ, P, & d'une petite du Taureau.

LY-YU, *lyre de pierre précieuſe*, conſtellation compoſée de deux étoiles du Microſcope.

LY-KUNG, *palais ſéparés*, trois conſtellations compoſées chacune de deux étoiles; la première η, ο ſur la jambe gauche de Pégaſe; la ſeconde λ, μ ſur ſa cuiſſe droite; la troiſième υ, τ ſur le poitrail.

LIE-SU, *marchandiſes arrangées*, conſtellation compoſée de deux étoiles λ d'Hercule, & σ du Serpent.

LIEN-TAO, *voie des chars*, conſtellation compoſée de quatre étoiles π, η, θ, & d'une petite du Vautour.

LIEU, *ſaule*, une des vingt-huit conſtellations, compoſée de huit étoiles θ, ω, ζ, ε, δ, η, ρ, σ de l'Hydre femelle.

LING-TAY, *tour de l'intelligence*, constellation composée de trois étoiles X, C, D du Lion.

LO-YEN, *cataracte du fleuve Lo*, constellation composée de deux étoiles τ, υ du Capricorne.

LO-KIA, *les six kia du cycle*, étoile dans la Girafle.

LUY-PIE-TCHIN, *enceinte du camp*, constellation composée de douze étoiles γ, δ, ε, $\varkappa$ du Capricorne, ι, σ, λ, φ du Verseau, & de quatre autres petites.

LUY-TIEN, *éclair*, constellation composée de six étoiles ζ, ξ, σ, trois de Q, de Pégase.

M.

MA-FO, *ventre de cheval*, constellation composée de trois étoiles B, γ, δ du Centaure.

MA-OUEY, *queue de cheval*, constellation composée de quatre étoiles β, n, E, D du Centaure.

MAO, *soutien des choses de la nature*, une des vingt-huit constellations, composée de sept étoiles des Pléïades.

MAO-TEU, le même que MAO, les Pléïades.

MIE-FUNG, *abeille*, constellation composée de quatre étoiles α, β, γ, δ de l'Abeille ou de la Mouche.

MING-TANG, *cour de l'Empereur, qui servoit autrefois à recevoir les Vice-Rois*, constellation composée de trois étoiles τ, υ, E du Lion.

NAN-HAY,

N.

NAN-HAY, *mer méridionale*, étoile ξ du Serpent.

NAN-HO, *fleuve du Midi*, conſtellation compoſée de deux étoiles α, β de Procyon.

NAN-MOEN, *porte du Midi*, conſtellation compoſée de α, & A du Centaure.

NAN-TCHUEN, *vaiſſeau auſtral*, conſtellation compoſée de cinq étoiles β, ω, θ, P, p du chêne de Charles II, *ou* conſtellation dans le Rocher.

NAN-TEU, voyez TEU dans le Sagittaire.

NIAO-HOEY, *bec d'oiſeau*, conſtellation compoſée de ſix étoiles du Toucan α, δ, η, β, ξ, & d'une petite.

NIAO-TCHO, faute dans le P. Noël, liſez NIAO-HOEY.

NIEN-TAO, faute dans le P. Noël, liſez LIEN-TAO.

NIEU, *bœuf*, l'une des vingt-huit conſtellations, compoſée de cinq étoiles α, ξ, β, ρ, π du Capricorne.

NIU, *la Vierge*, l'une des vingt-huit conſtellations, compoſée de quatre étoiles μ, ε du Verſeau, & de deux autres dans la fleche d'Antinoüs.

NIU-SU, *fille qui écrit l'Hiſtoire*, étoile ψ de la conſtellation du Dragon.

NIU-TCHOUANG, *le lit d'une fille*, conſtellation compoſée de trois étoiles ρ, π, E d'Hercule.

NUY-KIAY, *degrés intérieurs*, conſtellation compoſée de ſix étoiles A, π, τ, B, C, o de la grande Ourſe.

NUY-OU-TCHU-HEU, cinq étoiles à l'occident de KIEU-KING;

dans la Vierge. Cette constellation ne se trouve ni dans le P. Noël, ni dans le P. Grimaldy.

NUY-PING, *mur qui est devant la porte du palais*, constellation composée de quatre étoiles o, π, ν, ξ de la Vierge.

NUY-PING, *paix intérieure*, constellation composée de quatre étoiles dans la tête du petit Lion.

O.

OU, faute dans le P. Noël, lisez OU-YUE.

OU-YUE, *pays*, étoile ζ de l'Aigle.

OU-TCHE, *les cinq chars*, constellation composée de six étoiles; les cinq premières sont α, β, θ, ι, une petite du Cocher; la sixième est β du Taureau.

OU-TCHOU-HEU, *les cinq vassaux*, constellation composée de cinq étoiles θ, τ, ι, o, φ des Gemeaux.

OU-TI-TSO, *le trône des cinq Empereurs*, constellation composée de cinq étoiles β, o, & de trois petites de la queue du Lion.

OUEY, *la queue*, l'une des vingt-huit constellations, composée de neuf étoiles ε, μ, ζ, η, θ, ι, $\varkappa$, λ, υ du Scorpion.

P.

PA, *pays*, étoile ε du Serpent.

PA-KO, *huit espèces de fruits*, constellation composée de neuf étoiles ξ, δ du Cocher, deux dans les cornes de la Chevre, une dans la Girafle, & quatre autres petites.

PAY-KIEOU, *qui renverse les mortiers*, constellation composée de deux étoiles λ, γ de la Grue.

PAY-KOUA, *qui disperse les concombres*, constellation composée de quatre étoiles η, θ, ι, $\varkappa$ du Dauphin.

PE-HO, *fleuve du Nord*, constellation composée de trois étoiles α, β, ρ des Gemeaux.

PE-KI ou PE-KIE ou PE-TCHIN, *pole boréal*, nom des cinq étoiles γ, β, A, B, de la petite Ourse, & d'une petite dans la Girafle.

PE-LOU-SE-MOEN, *Prefet des armes de la contrée boréale*, étoile α du Poisson du Midi.

PE-TEOU, *boisseau du Nord*, nom des sept étoiles α, β, γ, δ, ε, ζ, η de la grande Ourse.

PE-TOU, *mesure pour les marchandises*, constellation composée de deux étoiles du Rameau.

PIE, *petit filet avec un long manche*, l'une des vingt-huit constellations, composée de neuf étoiles λ, γ, δ, ε, θ, α, σ, & de deux petites du Taureau.

PIE, *muraille*, une des vingt-huit constellations, composée de l'étoile α d'Andromede, & de γ de Pégase.

PIE, *tortue*, constellation composée de quatorze étoiles μ, ν, ι, $\varkappa$, λ, α, ε, ζ, β, η, ξ, θ, γ, δ de la Couronne australe.

PIE-LIE, *la foudre*, constellation composée de cinq étoiles β, γ, θ, ι, ω des Poissons.

PIE-TCHIN-LOUI, voyez LOUI-PIE-TCHIN.

PING-SING, *mur en face de la porte*, constellation composée de deux étoiles μ, ε du Lievre.

PING-SING, *étoile de la paix*, constellation composée de deux étoiles γ, π de l'Hydre femelle.

PING-TAO, *voie droite*, constellation composée de deux étoiles M, θ de la Vierge.

Po-su, *le Persan*, constellation composée de onze étoiles α, λ, θ, δ, μ, ι, η, & trois autres petites, de la constellation de l'Indien.

S.

San-kio-hing, *figure des trois cornes*, constellation composée de trois étoiles α, β, γ du Triangle austral.

San-kong, *les trois Rois*, constellation composée de trois petites étoiles sur le sein de la Vierge.

San-kong, *les trois Rois*, trois petites étoiles dans la tête des Lévriers.

San-su *ou* San-se, *les trois Présidens*, constellation composée de trois étoiles D, σ, ρ de la grande Ourse.

San-tay, *les trois Tay*, voyez Chang-tay, Tchong-tay, & Hia-tay. On les appelle encore Tay-kiai ou Tien-kiai.

Si-hien, *colline de l'Occident*, constellation composée de quatre étoiles η, θ, ψ de la Balance, & ξ du Scorpion.

Siang, *Ministre*, constellation composée de trois petites étoiles au dessous de ε de la grande Ourse.

Siao-teou, *petit boisseau*, constellation composée de huit étoiles β, ε, δ, γ, ζ, η, θ, α du Caméléon.

Sin, *le cœur*, une des vingt-huit constellations, composée de trois étoiles α, σ, τ du Scorpion.

Sin-tchin, voyez Hing-tchin.

Sing, *étoile*, une des vingt-huit constellations, composée de sept étoiles ι, 1 & 2 de τ, α, & trois autres petites de l'Hydre femelle.

Siu, *nom d'une ville*, étoile θ du Serpent.

Siuen-ky, voyez Kuey du Pe-teou.

Song, *pays*, η du Serpentaire.

Su-fi *ou* Se-fy, *qui veille contre les vices*, constellation composée de deux étoiles δ, γ du petit Cheval.

Su-fo, *les quatre Conseillers*, constellation composée de quatre étoiles dans la Girafle.

Su-goei, *qui préside aux malheurs*, constellation composée de β du petit Cheval.

Su-kuay, *qui préside aux cas extraordinaires*, constellation composée de quatre étoiles 1 & 2 de χ de la massûe d'Orion, & de deux autres petites étoiles au dessus.

Su-lo *ou* Se-lou, *qui préside aux dignités*, constellation composée de deux étoiles du Verseau D, & une petite.

Su-ming, *qui préside à la vie*, constellation composée de deux étoiles du Verseau.

Su-to, *les quatre fleuves*, constellation composée de quatre étoiles E des Gemeaux, & de trois autres étoiles du Monoceros.

Sun, *neveu*, constellation composée de deux étoiles κ, θ de la Colombe.

T.

Ta-chin, le même que Sin.

Ta-kio, *la grande corne*, étoile α du Bouvier.

Tay, *pays*, ι du Capricorne.

Tay-y, *première unité*, petite étoile entre α & κ du Dragon.

Tay-yang-cheou, *le Gouverneur de la ville Tay-yang*, étoile χ de la grande Ourse.

TAY-LING, *colline pour la sépulture des Empereurs*, constellation composée de huit étoiles; les quatre premières sont χ, τ, ι, $\varkappa$ de Persée; les quatre autres β, ρ, P, Q de la tête de Méduse.

TAY-OUEI-KONG-YUEN, *muraille du palais Tay-ouei*, dix étoiles, d'un côté, δ, θ, ι, σ, β du Lion; de l'autre côté, η, γ, δ, ε, & une petite de la Vierge.

TAI-OUEI-KONG, le même que TAY-VI-KONG. Ce palais est renfermé entre TSE-OUEI & l'Equateur; il contient les pattes de derrière, la queue & le dos du Lion, la partie orientale du petit Lion, les chiens de chasse, la chevelure de Bérénice, une partie du Bouvier, & la plus grande partie de la Vierge.

TAY-TSU, *le Prince héritier de l'Empire*, étoile γ de la petite Ourse.

TAY-TSU, *Prince héritier de l'Empire*, petite étoile du Lion.

TAY-TSUN, *grand vase*, étoile ψ de la grande Ourse.

TAY-VI-KONG, *palais*, voyez TAI-OUEI-KONG.

TE-YN suivant le P. Noël, voyez YN-TE.

TENG-CHE, *serpent qui provoque les nuées*, constellation composée de seize étoiles, dont trois σ, ρ, τ de Cassiopée, une autre petite proche le bras de Céphée, sept autres proche la queue du Cygne, plus une autre petite dans le Lézard marin, & quatre autres étoiles λ, ψ, N ι dans la main d'Andromede.

TEU, *boisseau*, constellation composée de cinq étoiles ω, P, H, O, N de la massue d'Hercule.

TEU, *boisseau*, une des vingt-huit constellations, composée de six étoiles ζ, τ, σ, φ, λ, μ du Sagittaire. On l'appelle aussi NAN-TEU, *boisseau méridional*.

TY, suivant le P. Noël, voyez TY-VANG.

TY, *fin*, une des vingt-huit constellations, composée de quatre étoiles α, β, γ, ι de la Balance.

TI-TSO, *le trône de l'Empereur*, étoile α d'Hercule.

TI-VANG, *Roi des Empereurs*, β de la petite Ourse.

TIE-SO, faute dans le P. Noël, lisez FU-TCHE.

TIE-TSIEN, faute du P. Noël, lisez FU-YUE.

TIEN-CHE, *rocher de la mer*, mal traduit dans le P. Noël, lisez *autel du ciel*, constellation composée de six étoiles dans l'Argo.

TIEN-CHE *ou* TIEN-CHI, *marché céleste*. Ce marché est borné au Nord par le Palais TSE-OUÉI, & au Sud par l'Equateur: de l'Ouest à l'Est il s'étend depuis le palais TAY-OUEI jusque vers le colure des Solstices, renferme la Couronne boréale, presque tout Hercule, & la partie boréale du Serpentaire & du Serpent.

TIEN-CHI-YUEN, *murailles du Tien-chi*, vingt-quatre étoiles; d'un côté ζ, ν, ϵ, δ du Serpentaire ϵ, α, δ, β, ν du Serpent $\varkappa$, ν, β d'Hercule; de l'autre côté δ, λ, μ, ξ, o, & une petite d'Hercule; ζ de l'Aigle; θ, d, η du Serpent; τ, υ du Serpentaire; ξ du Serpent, & η du Serpentaire.

TIEN-FEU, *bâton du ciel pour frapper les tambours*, constellation composée de deux étoiles η, θ d'Antinoüs.

TIEN-FÈU, suivant le P. Noël, lisez TIEN-PANG.

TIEN-FO, *axe du ciel*, constellation composée de deux étoiles δ, ϵ de la constellation du Loup.

TIEN-HAN, *le fleuve Han du ciel*, la voie lactée.

TIEN-HO, *fleuve céleste*, la voie lactée.

TIEN-HOANG, *étang du ciel*, constellation composée de quatre étoiles ρ, λ, μ, σ, & une petite du Cocher.

TIEN-HOANG-TA-TI, *le ſouverain Empereur du ciel*, étoile de la conſtellation de Céphée.

TIEN-HOEN, faute dans le P. Noël, liſez TIEN-KIUN.

TIEN-HOEN, *latrines du ciel*, conſtellation compoſée de quatre étoiles de φ de la Baleine.

TIEN-Y, *le premier ciel*, étoile ι du Dragon.

TIEN-YN, *repos du ciel*, conſtellation compoſée de cinq étoiles ζ, δ, τ du Belier, & de deux autres petites étoiles.

TIEN-JU, *lait du ciel*, étoile A de la conſtellation du Serpent.

TIEN-YU, *meſure céleſte*, conſtellation compoſée de trois étoiles dans le Fourneau.

TIEN-YUEN, *étang du ciel*, conſtellation compoſée de quatre étoiles α, β, θ, ι du Sagittaire.

TIEN-YUEN, *ménagerie du ciel*, conſtellation compoſée de treize étoiles 1 & 2 de υ, ξ, D, G, F, H, θ, S, $\varkappa$, φ, χ de l'Eridan, & δ du Phœnix.

TIEN-YUEN, *ménagerie du ciel*, conſtellation compoſée de dix-ſept étoiles π, τ de la Baleine, γ, π, δ, ε, ζ, η, K, L, M, N, & de quatre autres petites dans l'Eridan.

TIEN-KANG, *filet du ciel*, δ de la tête du Poiſſon du Midi. (Le P. Noël a mal lu TIEN-VANG).

TIEN-KAO, *hauteur du ciel*, conſtellation compoſée de quatre étoiles N, L, I, ι du Taureau.

TIEN-KEOU, *chien du ciel*, conſtellation compoſée de ſept étoiles dans l'Argo.

TIEN-KEOU, *croc du ciel*, conſtellation compoſée de quatre étoiles η, α, ι, o de Céphée.

TIEN-KI, *pierre précieuſe du ciel*, γ de la grande Ourſe.

TIEN-KI, *période du ciel*, étoile dans le Vaiſſeau.

TIEN-KI,

TIEN-KI, *annales du ciel*, constellation composée de cinq étoiles θ, w, υ, ε, ξ, & de quatre autres d'Hercule.

TIEN-KI, *poule du ciel*, constellation composée de deux étoiles E, F du Sagittaire.

TIEN-KIAI, *place du ciel*, constellation composée de deux étoiles $\varkappa$, ω du Taureau.

TIEN-KIANG, *fleuve du ciel*, constellation composée de trois étoiles B, π, A du Serpentaire.

TIEN-KIEOU, *étable du ciel*, constellation composée de trois étoiles θ, ρ, σ du bras droit d'Andromede.

TIEN-KIUN, *grenier du ciel*, constellation composée de treize étoiles G, λ, μ, ξ, ν, δ, α, γ, o, & quatre autres étoiles de la Baleine.

TIEN-KIUEN, *le poids de la balance du ciel*, étoile δ de la grande Ourse.

TIEN-KUAN, *défilé du ciel*, étoile ζ du Taureau.

TIEN-LAO, *prison du ciel*, étoile ω de la grande Ourse.

TIEN-LANG, *loup du ciel*, voyez LANG-SING.

TIEN-LY, *raison du ciel*, constellation composée de quatre étoiles sur le dos de la grande Ourse.

TIEN-LIN, *grenier du ciel*, constellation composée de quatre étoiles F, S, ξ, o du Taureau.

TIEN-LOUI-TCHING, *murailles du ciel*, constellation composée de cinq étoiles ξ du Verseau, 1 & 2 de C, & 1 & 2 de λ du Capricorne.

TIEN-MUEN, *porte du ciel*, constellation composée de deux petites étoiles au dessous de α de la Vierge.

TIEN-O, *faveur du ciel*, étoile près la Fleur-de-lis.

TIEN-PANG, *ſouet du ciel*, conſtellation composée de cinq étoiles; la première ι dans la conſtellation d'Hercule; les quatre autres ſont γ, β, ν, ξ du Dragon.

TIEN-PIEN, *chapeau du ciel*, conſtellation composée de neuf étoiles G, H, λ I d'Antinoüs, K, L, N, M, O de l'écu de Sobiesky.

TIEN-SIANG, *ſecours du ciel*, conſtellation composée de trois étoiles dans le Sextant.

TIEN-SIUEN, *pierre précieuſe du ciel*, β de la grande Ourſe.

TIEN-TA-TSIANG-KIUN, *le ſuprême Général du ciel*, conſtellation composée de onze étoiles; les ſept premières ſont C, A, χ, υ, H, τ, & une petite d'Andromede; les trois autres ſont β, γ, δ du Triangle boréal.

TIEN-TCHU, *axe du ciel*, α de la grande Ourſe.

TIEN-TCHU, *axe du ciel*, étoile dans la Girafle; c'eſt la polaire chez les Chinois.

TIEN-TCHU, *cuiſine du ciel*, conſtellation composée de quatre étoiles π, δ, ς, ρ du Dragon.

TIEN-TCHUEN, *vaiſſeau du ciel*, conſtellation composée de neuf étoiles η, α, γ, δ, C, μ, B de Perſée, plus une petite dans la Girafle.

TIEN TIEN, *champs du ciel*, conſtellation composée de deux étoiles τ, o de la Vierge.

TIEN-TSAN, *colère du ciel*, étoile N de Perſée.

TIEN-TSANG, *grenier du ciel*, conſtellation composée de ſept étoiles υ, τ, ζ, θ, η, ι, & d'une petite de la Baleine.

TIEN-TSIANG, *lance du ciel*, conſtellation composée de trois étoiles θ, ι, $\varkappa$ du Bouvier.

TIEN-TSIE, *ordre du ciel*, conſtellation composée de ſept étoiles ρ, π, H, B, C, D, R du Taureau

TIEN-TSIEN, *monnoie du ciel*, conſtellation composée de quatre étoiles ι, θ, η, μ du poiſſon du Midi.

TIEN-TSIN, *pont du ciel*, conſtellation composée de neuf étoiles du Cygne α, δ, ν, o, υ, ζ, ε, η, & d'une petite.

TIEN-TSUN, *vaſe du ciel*, conſtellation composée de trois étoiles A, δ, ω des Gemeaux.

TIEN-VANG, voyez TIEN-KANG.

TONG-HAY, *pays*, η du Serpent.

TONG-HIEN, *colline de l'Orient*, conſtellation composée de quatre étoiles φ, χ, ψ, ρ du Serpentaire.

TU-KONG, *le kong de la Terre*, conſtellation composée de deux étoiles D, c des Poiſſons.

TU-KONG-LI, le même que TU-KONG-SU, *l'Officier du kong de la Terre*, étoile de Pégaſe.

TU-SU, *boucherie*, conſtellation composée de deux étoiles dans le Rameau.

TU-SU-KONG, *l'Officier qui veille aux ouvrages publics*, étoile β de la Baleine.

TUN-HANG, *armes déſenſives*, conſtellation composée de α, & d'une petite du Loup.

TUN-VAN, faute dans le P. Noël, voyez TUN-HANG.

TUON-MOEN, c'eſt l'eſpace entre TSO-CHI-FA & YEU-CHI-FA.

V U, le même que *O U*.

VAY-PING, *face extérieure du mur qui eſt opposé aux portes*, conſtellation composée de ſept étoiles α, ξ, ν, μ, ζ, ε, δ des liens des Poiſſons.

VAY-TCHU, *cuisine extérieure*, constellation composée de cinq étoiles, deux dans la croupe de la Licorne, & trois au dessus.

VANG-LEANG, *Roi bon*, constellation composée de cinq étoiles β, λ, α, η, $\varkappa$ de la constellation de Cassiopée.

VEN-TCHANG, *composition élégante*, constellation composée de six étoiles H, υ, φ, θ, F, E de la constellation de la grande Ourse.

VY, prononcez OUEI, la sixième étoile des vingt-huit constellations.

X ou CH.

CHANG-CHOU, *le Président du suprême Tribunal*, constellation composée de cinq étoiles G, F, H, A, & d'une petite, du Dragon.

CHANG-FU, *le grand Président de la Cour*, étoile λ du Dragon.

CHANG-GOEI, *celui qui est chargé des appartemens de l'Empereur*, étoile dans la Giraffe.

CHANG-GOEI, *celui qui est chargé du soin des appartemens de l'Empereur*, étoile $\varkappa$ de Cephée.

CHANG-KIAI, étoile supérieure ou ι de CHANG-TAY.

CHANG-PIE, *premier Ministre de l'Empereur*, étoile ζ du Dragon.

CHANG-SIANG, *le premier Colao*, étoile δ de la constellation du Lion.

CHANG-SIANG, *le premier Ministre*, étoile γ de la Vierge.

CHANG-TAY, *le souverain Président des troupes*, étoiles ι, $\varkappa$ de la grande Ourse.

CHANG-TSAY, *le Gouverneur de la Cour*, étoile θ de la constellation du Dragon.

CHANG-TSIANG, *le grand Genéral des Troupes*, étoile au dessus de la Vierge.

CHANG-TSIANG, *le grand Général de l'armée*, étoile σ de la constellation du Lion.

CHANG-TCHING, *le premier Préfet de la Cour*, étoile dans la Girafle.

CHAO-FU, *l'Adjudant du grand Préfet de la Cour*, étoile près la queue de la constellation du Dragon.

CHAO-GOEY, *celui qui a le soin des appartemens de l'Empereur*, étoile γ de Cephée.

CHAO-GOEY, *l'Adjudant du Président de la Cour*, étoile κ du Dragon.

CHAO-GOEY, *celui qui soigne les appartemens de l'Empereur*, étoile dans la Girafle.

CHAO-PIE, *le second Ministre de l'Empereur*, étoile χ dans le Dragon.

CHAO-TCHING, *le second Préfet de la Cour*, étoile dans la constellation de la Renne.

CHAO-TSAY, *l'Adjudant du Gouverneur de la Cour*, étoile η de la constellation du Dragon.

CHAO-VI, *le second Maître du Prince héritier*, constellation composée de quatre étoiles, une sur le dos du Lion, & trois dans le petit Lion.

CHE, *chambre*, constellation, l'une des vingt-huit, composée de deux étoiles α, β de la constellation de Pégase.

CHE-CHEU, *la tête du serpent*, étoile α de l'Hydre, γ de l'horloge de M. l'Abbé de la Caille, ζ, ε, π de l'Hydre.

CHE-FO, *ventre de serpent*, une petite étoile du Toucan; & L, β de la constellation de l'Hydre.

CHE-VY *ou* CHE-OUEI, *queue de ſerpent*, étoiles β de l'Hydre; plus ν, α, μ, λ, υ, τ de l'Octant de M. l'Abbé de la Caille.

CHE-TSU-KIA, *ſigne de la Croix*, conſtellation compoſée de quatre étoiles λ, δ, ι, η de la Croix.

CHI, *ordure*, étoile λ de la conſtellation de la Colombe.

CHI-LEU, *maiſon où l'on met des marchandiſes*, étoile μ du Serpentaire.

CHIN-KONG, *le Palais par excellence*, étoile ζ du Scorpion.

CHO-du-PE-TEU, les trois dernières étoiles ε, ζ, η de la grande Ourſe.

CHO, *pays*, étoile α de la conſtellation du Serpent.

CHU-TSU *ou* CHOU-TSOU, *fils de la ſeconde femme*, étoile A de la conſtellation de la petite Ourſe.

CHUI-FOU *ou* CHOUI-FU, *piſcine*, conſtellation compoſée de quatre étoiles 1 & de 2 F, ν, ξ de la conſtellation d'Orion.

CHOUI-GOEI *ou* CHUI-GOEI, *lieu où il y a de l'eau*, conſtellation compoſée de quatre étoiles ζ du Cancer, & de trois autres petites étoiles au deſſus de la conſtellation de Procyon.

CHOUI-GOEI *ou* CHUI-GOEI, *fontaine d'eau*, conſtellation compoſée de α de l'Eridan, & de η, ζ de la conſtellation du Phénix.

CATALOGUE DES COMETES

CONNUES ET OBSERVÉES PAR LES CHINOIS.

TOUTES les Comètes que je rapporte dans ce Mémoire, sont tirées de l'Ouvrage Chinois de MA-TUON-LIN, intitulé VEN-HIEN-TONG-KAO. Cet Ecrivain les a rassemblées toutes dans le deux cent quatre-vingt-sixième Livre avec beaucoup de soin, d'après les différens Auteurs ou Historiens de sa Nation qui les ont décrites. Je n'ai pu descendre plus bas que l'an 1222 de J. C., parce que c'est le temps où vivoit cet Ecrivain.

DYNASTIE DES TCHEOU.

613 ans avant J. C.

La quatorzième année du règne de VEN-KONG, Prince de LOU, dans l'automne, à la septième lune, il y eut une comète qui entre dans le PE-TEOU.

532.

La dixième année de TCHAO-KONG, Prince de LOU, dans l'hiver, il y eut une comète dans TA-CHIN.

482.

La treizième année de GNAY-KONG, dans l'hiver, à la onzième lune, il y eut une comète dans la partie orientale. Ces trois comètes sont tirées du TCHUN-TSIEOU de Confucius.

467.

La deuxième année de TCHING-TING-VANG, on vit une comète.

433.

La huitième année de KAO-VANG, on vit une comète.

305 *avant J. C.*

La dixième année de Nan-vang, on vit une comète.

303.

La douzième année du même Prince, on vit une comète.

296.

La dix-neuvième année du même Prince, on vit une comète.

DYNASTIE DES TSIN.

240.

La ſeptième année de Chi-hoang-ti, une comète ſortit de la partie orientale; elle parut dans la contrée ſeptentrionale: à la cinquième lune, on la vit dans la contrée occidentale pendant ſeize jours.

238.

La neuvième année, il parut une étoile à l'horizon; à la quatrième lune, elle parut dans la partie occidentale, enſuite on la vit dans la partie ſeptentrionale: elle employa quatre-vingts jours à venir depuis le Teou juſqu'au Midi.

234.

La treizième année, à la première lune, il parut une comète dans la partie orientale.

214.

La trente-troiſième année du même Prince, il parut une étoile qui ſortit de la partie occidentale.

DYNASTIE DES HAN.

204.

La troiſième année de Kao-ti, à la ſeptième lune, il y eut une comète dans Ta-kio: ſa durée fut d'environ 10 jours, enſuite elle diſparut.

La

157 *ans avant J. C.*

La ſeptième des années Heu de Ven-ti, il y eut une comète dans la partie occidentale; ſa baſe étoit à l'extrémité d'Ouei & de Ki, tendant vers Hiu & Goey : elle avoit pluſieurs Tchang (meſure de 10 pieds), elle parvint dans le Tien-han; au bout de ſeize jours on ne la vit plus.

155.

La deuxième année de Hiao-king-ti, il parut une comète qui ſortit du ſud-oueſt.

148.

La troiſième des années Tchong, à la troiſième lune, au jour Ting-yeou, 34 *du cycle*, une comète parut au nord oueſt: ſa couleur étoit blanche, ſa longueur d'un Tchang (meſure de 10 pieds), elle étoit dans Tsu-choui; elle s'éloigna un peu, & après quinze jours on ne la vit plus.

138.

La troiſième des années Kien-yuen de Hiao-vou-ti, à la deuxième lune, il y eut une comète dans le fond de Tchang; elle traverſa le Tay-ouey, vint au Tse-kong, & parvint enſuite juſqu'à Tien-han.

La troiſième année du même Prince, à la quatrième lune, il y eut une comète dans le Tien-ky, qui vint juſqu'a Tche-niu.

135.

La ſixième année, à la ſixième lune, il y eut une comète dans la partie occidentale.

A la huitième lune, il y eut une grande étoile qui parut dans la partie orientale; ſa longueur terminoit le ciel; au bout de trente jours elle s'en alla.

119 ans avant J. C.

La quatrième des années Yuen-cheu, à la quatrième lune, une grande étoile sortit du nord-ouest.

110.

La première des années Yuen-fong, à la cinquième lune; une comète parut dans le Tsing oriental; on en vit une autre aussi dans le San-tay.

109.

La deuxième des années Yuen-fong, une comète parut dans Ho-chou.

103, 102.

Au milieu des années Tay-tso (Tay-tso commence l'an 104, dure quatre ans, c'est-à-dire 104, 103, 102, 101), une comète parut dans Tchao-yao.

69.

La première des années Ty-tsie de Siuen-ti, à la première lune, il y eut une comète dans la partie occidentale; elle n'étoit éloignée de Tay-pe que de deux Tchang.

44.

La cinquième des années Tso-yuen de Yuen-ti, une comète sortit vers le nord-ouest; elle étoit d'une couleur rouge-jaune, sa longueur de huit Che (pied chinois); après plusieurs jours elle devint longue de plusieurs Tchang, se dirigeant vers le nord-est, & occupoit une portion de Tsan.

32.

La première des années Kien-chi de Tching-ti, à la première lune, il y eut une comète dans Ing-che; sa couleur étoit bleuâtre, sa longueur de six à sept Tchang, sa largeur de plusieurs pieds.

12 ans avant J. C.

La première des années YUEN-YEN, à la ſeptième lune, au jour Sin-oui, 8 *du cycle*, il y eut une comète dans le TSING oriental; elle traverſa les OU-TCHOU-HEOU, ſortit de HO-CHOU, dirigea ſa courſe vers le nord, & alla dans HIEN-YUEN & TAY-OUEI. Le jour ſuivant, elle s'étoit avancée de 6 degrés; le matin elle ſe leva dans la contrée orientale: le treizième jour au ſoir, elle parut dans la contrée occidentale.

5.

La deuxième des années KIEN-PING de NGAI-TI, à la deuxième lune, une comète parut dans KIEN-NIEOU *ou* NIEOU pendant ſoixante-dix jours.

22 ans après J. C.

La troiſième des années TY-HOANG de l'Empereur VANG-MANG, à la onzième lune, il y eut une comète dans TCHANG: elle alla vers le ſud-eſt; après cinq jours on ne la vit plus.

39.

La quinzième des années KIEN-VOU de KUANG-VOU-TI, à la première lune, au jour Ting-oui, 44 *du cycle*, il y eut une comète dans MAO; elle tourna peu à peu vers le nord-oueſt, & entra dans CHE. Elle s'approcha de LY-KONG; à la troiſième lune, au jour Y-oui, 32 *du cycle*, la comète vint dans PIE où elle périt; elle fut viſible pendant quarante-neuf jours.

54.

La trentième année, à la lune intercalaire, au jour Kia-ou, 31 *du cycle*, l'étoile de Mercure étant au vingtième degré du TSING oriental, il parut une vapeur blanche qui alloit vers l'orient. Elle étoit enflammée, & longue de cinq Che (pieds), c'étoit une comète; elle s'avança enſuite vers le nord-eſt, parvint juſqu'au deſſus des limites occidentales du TSE-KONG : au jour Kia-tſe, 1 *du cycle*, elle ne parut plus; cette comète fut viſible pendant trente-un jours.

60 ans après J. C.

La troiſième des années YUNG-PING de HIAO-MING-TI, à la ſixième lune, au jour Ting-mao, 4 *du cycle*, il parut une comète au nord de TIEN-CHUEN; elle étoit longue de deux Che. La comète tourna peu à peu vers le nord, & parvint au midi de KANG; elle fut viſible pendant cent trente-cinq jours, & diſparut.

65.

La huitième année, à la ſixième lune, une grande étoile ſortit de LIEOU, & du trente-ſeptième degré de TCHANG; elle s'approcha de HIEN-YUEN, traverſa le TIEN-TCHUEN, & parvint au TAY-OUEI : cette vapeur dura en tout cinquante-ſix jours.

75.

La dix-huitième année, à la ſixième lune, au jour Ki-oui, 56 *du cycle*, il parut une comète dans TCHANG, longue de trois Che. Elle alla de là au midi de LANG-TSIANG, & entra dans le TAY-OUEI.

76.

La première des années KIEN-TCHANG de HIAO-TCHANG-TI, à la huitième lune, au jour Keng-yn, 27 *du cycle*, il parut une comète dans le TIEN-CHI, longue de deux Che. Sa marche étoit lente; elle entra dans le troiſième degré de KIEN-NIEU : cette comète ſubſiſta pendant quarante jours, & diſparut.

A la douzième lune, au jour Vou-in, 15 *du cycle*, une comète ſortit dans le troiſième degré de LEOU. Elle étoit longue de huit à neuf Che; peu à peu la comète entra dans le TSE-KONG; elle avoit paru pendant cent ſix jours.

109 *ans après J. C.*

La troisième des années YONG-TSO de HIAO-NGAN-TI, à la douzième lune, il s'éleva une comète au midi de TIEN-YUEN : elle alloit vers le nord-est; sa longueur étoit de six à sept Che.

132.

La sixième des années YONG-KIEN de HIAO-CHUN-TI, il sortit une comète dans le TEOU & le KIEN-NIEOU ; elle s'éteignit dans HIU & GOEY.

A la deuxième lune, au jour Ting-se, 54 *du cycle*, il parut une comète dans la contrée orientale, longue de six à sept Che. Elle indiquoit le sud-ouest de ING-CHE, & parvint à FUEN-MU. Au jour Ting-tcheou, 14 *du cycle*, une comète ou la comète (l'Auteur Chinois ne dit pas si c'est la même) étoit au premier degré de KUEY ; elle étoit longue de six à sept Che. Au jour Kuey-oui, 20 *du cycle*, le soir la comète parut aller vers le nord-ouest ; elle traversa MAO & PI. Au jour Kia-chin, 21 *du cycle*, la comète étoit dans TSING, ensuite elle traversa HIEU, SING & TCHANG ; elle étoit très-enflammée, elle vint au SAN-TAY, & s'avança au milieu d'HIEN-YUEN où elle périt.

147, 149 *suivant les Annales Chinoises.*

La première des années KIEN-HO de HIAO-HUON-TI, à la huitième lune, au jour Y-tcheou, 2 *du cycle*, il y eut une comète chevelue, longue de cinq Che. Elle parut au milieu du TIEN-CHI, allant vers le sud-est; sa couleur étoit jaunâtre. A la neuvième lune, au jour Vou-chin, 5 *du cycle*, elle disparut.

161.

La quatrième des années YEN-HI, à la cinquième lune, au jour Sin-yeou, 58 *du cycle*, il y eut une étoile hôte dans ING-CHE ; elle tendoit vers l'occident ; ses rayons étoient longs de cinq Che; parvenue au premier degré de SIN, elle devint comète.

178 ans après J. C.

La première des années KUANG-HO d'HIAO-LING-TI, à la huitième lune, il y eut une comète au nord de KANG; elle entra au milieu du TIEN-CHI; elle étoit longue de quelques Che; elle s'étendit ensuite jusqu'à cinq ou six Tchang, elle étoit rouge; la comète traversa dix constellations, & après quatre-vingts jours, elle s'éteignit peu à peu au milieu de TIEN-YUEN.

180.

La troisième année, dans l'hiver, une comète sortit à l'orient de LANG & de HOU-CHE; elle parvint jusqu'à TCHANG où elle disparut.

A la septième lune, il y eut une comète qui sortit au bas du SAN-TAY; elle alloit vers l'orient, elle entra ensuite dans le palais TAY-OUEY, parvint au TAY-TSU & HING-TCHIN; au bout de vingt jours elle s'éteignit.

182.

La cinquième des années KUANG-HO, à la deuxième lune, une comète sortit de KUEY, elle tendoit vers l'orient. La comète entra dans le palais TSE-OUEI, d'où elle sortit après trois jours, & au bout de soixante jours elle s'éteignit.

192.

La troisième des années TSO-PING, d'HIEN-TI, à la neuvième lune, l'étendard de TCHI-YEU (grande comète) parut long de plus de dix Tchang : sa couleur étoit blanche; il sortit au midi de KIO & de KANG.

193.

La quatrième année, à la dixième lune, il parut une comète entre les deux KIO, allant vers le nord-est; elle entra au milieu du TIEN-CHI où elle disparut

200 *ans après J. C.*

La cinquième des années KIEN-NGAN, à la dixième lune, au jour Sin-hay, 48 *du cycle*, une comète parut dans TA-LEANG.

204.

La neuvième année, à la onzième lune (les Annales mettent dixième lune), il y eut une comète dans le TSING oriental & le YU-KUEY; elle entra dans HIEN-YUEN & le TAY-OUEY.

206.

La onzième année, à la première lune, il y eut une comète dans le PE-TEOU. Sa tête étoit au milieu du PE-TEOU, sa queue remplissoit le palais TSE-OUEI; elle parvint jusqu'au PE-TCHIN.

207.

La douzième année, à la dixième lune, au jour Sin-mao, 8 *du cycle*, il y eut une comète dans CHUN-OUEI.

212.

La dix-septième année, à la douzième lune, il y eut une comète dans OU-TCHU-HEOU.

218.

La vingt-troisième année, à la troisième lune, il y eut une comète qui parut dans la contrée orientale. Au bout de vingt jours, le soir, elle sortit de la contrée occidentale, passa près d'OU-TCHE, du TSING oriental, d'OU-TCHU-HEOU, de VEN-TCHANG, d'HIEN-YUEN, & du palais TSE-OUEY; sa pointe étoit enflammée : elle parut ensuite au TI-TSO.

DYNASTIE DES GUEY.

225.

La sixième des années HOANG-TSO de VEN-TI, à la dixième lune, au jour Y-oui, 32 *du cycle*, il y eut une comète dans CHAO-OUEI; elle traversa HIEN-YUEN.

232 ans après J. C.

La ſixième des années TAY-HO de MING-TI, à la onzième lune, au jour Ping-in, 3 *du cycle*, il y eut une comète dans YE; elle s'approcha de TAY-OUEY & de CHANG-TSIANG.

236.

La quatrième des années TSING-LUNG, à la dixième lune, au jour Kia-chin, 21 *du cycle*, il y eut une comète dans le TA-CHIN; elle étoit longue de trois Che.

Au jour Y-yeou, 22 *du cycle*, il y eut une comète dans la partie orientale.

A la onzième lune, au jour Y-hay, 12 *du cycle*, une comète parut; elle s'approcha d'HOAN-TCHE & de TIEN-KY.

238.

La deuxième des années KING-TSO, à la huitième lune, une comète parut dans TCHANG. Sa longueur étoit de trois Che; elle alloit vers l'orient : au bout de quarante-un jours elle diſparut.

240.

La première des années TCHING-CHY de CHAO-TI, à la dixième lune, au jour Y-yeou, 22 *du cycle*, une comète parut dans la contrée occidentale; elle étoit dans OUEY, ſa longueur de deux Tchang : elle paſſa par NIEOU, s'approcha de TAY-PE (Vénus). A la onzième lune, au jour Kia-tſe, 1 *du cycle*, la comète s'approcha d'YU-LIN.

245.

La ſixième année, à la huitième lune, au jour Vou-ou, 55 *du cycle*, une comète parut dans les TIE-SING; elle étoit longue de deux Che, elle étoit blanche; elle s'avança vers TCHANG, & après vingt-trois jours elle fut détruite.

La

246 *après J. C.*

La ſeptième année, à la onzième lune, au jour Kuey-hay, 60 *du cycle*, il y eut une comète dans Tchin; elle étoit longue d'un Che : après cinquante-ſix jours elle diſparut.

248.

La neuvième année, à la troiſième lune, une comète parut dans Mao; elle étoit longue de ſix Che, ſa couleur étoit d'un violet pâle, ſes rayons tendoient vers le ſud-oueſt. A la ſeptième lune, la comète parut dans Ye; elle étoit longue de deux Che : elle s'avança juſqu'à Tchin, ſubſiſta pendant quarante-deux jours, & fut détruite.

251.

La troiſième des années Kia-ping, à la onzième lune, au jour Kuey-hay, 60 *du cycle*, il y eut une comète dans Yng-che, elle alloit à l'oueſt; après quatre-vingt-dix jours elle diſparut.

252.

La quatrième année, à la deuxième lune, au jour Ting-yeou, 34 *du cycle*, une comète parut dans la contrée occidentale, étant dans Guey, longue de cinq ou ſix Tchang; elle étoit blanche, ſes rayons tendoient vers le midi : elle traverſa Tsan, & après vingt jours elle diſparut.

253.

La cinquième année, à la onzième lune, il y eut une comète dans Tchin; elle étoit longue de cinq Tchang : la comète étoit dans le Tay-ouey & Tso-chi-fa, elle tendoit vers le ſud-oueſt; après cent quatre-vingt-dix jours elle diſparut.

254.

La premiere des années Tching-yuen de Kao-Kuey-yang-kong, à la onzième lune, une vapeur blanche ſortit à côté du NANTEOU ; elle étoit large de plusieurs Tchang, s'étendant à l'horizon. VANG-SO dit que c'est l'étendard de TCHI-YEOU.

255 ans après J. C.

La deuxième année, à la première lune, une comète parut au nord-ouest; elle étoit à l'horizon.

257.

La deuxième des années KAN-LOU, à la onzième lune, une comète parut dans KIO ; elle étoit blanche.

262.

La troisième des années KING-YUEN de YUEN-TI, à la onzième lune, au jour Gin-in, 39 *du cycle*, une comète parut dans KANG; elle étoit blanche, & longue de cinq Tsun (Tsun = 0, 1 du pied chinois), elle tendoit vers le nord; après quarante-cinq jours elle disparut.

265.

La deuxième des années HIEN-HI, à la cinquième lune, il parut une comète dans VANG-LEANG, longue d'un Tchang; ellle étoit blanche, elle tendoit vers le sud-est; après douze jours elle disparut.

DYNASTIE DES TÇIN.

268.

La quatrième des années TAY-CHY de VOU-TI, à la première lune, au jour Ping-su, 23 *du cycle*, une comète parut dans TCHIN; elle étoit d'une couleur bien pâle, elle alloit vers le nord, ensuite elle tourna vers l'est.

269.

La cinquième année, à la neuvième lune, il y eut une comète dans le TSU-KONG.

274 ans après J. C.

La dixième année, à la douzième lune, il y eut une comète dans TCHIN.

276.

La deuxième des années HIEN-NING, à la ſixième lune, au jour Kia-ſu, 11 *du cycle*, une comète parut dans TY.

A la ſeptième lune, une comète parut dans TA-KIO.

A la huitième lune, une comète parut dans le TAY-OUEI; elle parvint à la conſtellation YE, au PE-TEOU, & au SAN-TAI.

277.

La troiſième année à la première lune, il y eut une comète dans la partie occidentale.

A la troiſième lune, il y eut une comète dans GOEY.

A la quatrième lune, une comète parut dans YU-NIU.

A la cinquième lune, il y eut une comète dans la partie orientale.

A la ſeptième lune, il parut une comète dans le TSE-KONG.

278.

La quatrième année, à la quatrième lune, l'étendard de TCHI-YEU, parut dans le TSING oriental; après l'année elle fut détruite.

279.

La cinquième année, à la troiſième lune, une comète parut dans LIEOU.

A la quatrième lune, il y eut une comète dans YU-NIU: à la ſeptième lune, la comète ou une comète étoit dans le TSE-OUEY.

281.

La deuxième des années, TAY-KANG, à la huitième lune, il y eut une comète dans TCHANG.

A la cinquième lune, il y eut une comète dans HIEN-YUEN.

283 ans après J. C.

La quatrième année, à la troisième lune, au jour Vou-chin, 45 *du cycle*, il y eut une comète dans le sud-ouest.

287.

La huitième année, à la neuvième lune, il y eut une comète dans le NAN-TEOU, longue de dix Tchang; après dix jours elle disparut.

290.

La première des années TAI-HI, à la quatrième lune, une étoile hôte parut dans le TSE-KONG.

295.

La cinquième des années de YUEN-KANG de HOEY-TI, à la quatrième lune, une comète parut dans KUEY; elle parvint au HIEN-YUEN & au TAI-OUEY, traversa les étoiles SAN-TAY & TA-LING.

300.

La première des années YUNG-KANG, à la douzième lune, une comète sortit à l'ouest de NIEOU, elle tendoit vers le TIEN-CHI.

301.

La deuxième année, à la quatrième lune, une comète parut dans une partie de TSY.

302.

La deuxième des années, TAY-NGAN, à la quatrième lune, une comète parut le matin.

303.

La deuxième année, à la troisième lune, une comète parut dans la contrée orientale; elle indiquoit le SAN-TAY.

305 *ans après J. C.*

La deuxième des années YUNG-HING, à la huitième lune, une comète parut dans MAO & PI.

A la dixième lune, au jour Ting-tcheou, 14 *du cycle*, il y eut une comète dans le SIUEN-KI du PE-TEOU.

329.

La quatrième des années HIEN-HO de TCHING-TI, à la septième lune, il y eut une comète au nord-oueſt; elle s'approcha de TEOU : au bout de vingt-trois jours elle diſparut.

336.

La deuxième des années HIEN-KANG, à la deuxième lune, au jour Sin-ſe, 18 *du cycle*, le ſoir, il parut une comète dans la contrée occidentale, étant dans KUEY (les Annales ajoutent LEOU).

340.

La ſixième année, à la deuxième lune, au jour King-chin, 17 *du cycle*, il y eut une comète dans le TAY-OUEI.

343.

La première des années KIEN-YUEN de KANG-TI, à la onzième lune, le ſixième jour, une comète parut dans KANG; elle étoit longue de ſept Che, & de couleur blanche.

349.

La cinquième des années YUNG-HO de MO-TI, à la onzième lune, au jour Y-mao, 52 *du cycle*, une comète parut dans KANG; ſa chevelure terminoit l'oueſt, étoit blanche, & longue d'un Tchang.

350.

La ſixième année, à la première lune, au jour Ting-tcheou, 14 *du cycle*, une comète parut dans KANG.

358 *ans après J. C.*

La deuxième des années TSING-PING, à la cinquième lune, au jour Ting-hai, 24 *du cycle*, une comète parut; elle sortit de TIEN-TCHUEN, & s'arrêta dans GOEY.

363.

La première des années HING-NING de NGAY-TI, à la huitième lune, il y eut une comète dans KIO & KANG; elle entra ensuite dans le TIEN-CHI.

373.

La première des années NING-KANG de HIAO-VOU-TI, à la première lune, au jour Ting-se, 54 *du cycle*, il y eut une comète dans NIU & HIU; elle traversa les constellations TY, KANG, KIO, TCHIN, YE, TCHANG.

A la deuxième lune, au jour Ping-su, 23 *du cycle*, une comète parut dans TY.

A la neuvième lune, au jour Ting-tcheou, 14 *du cycle*, il y eut une comète dans le TIEN-CHI.

390.

La quinzième des années TAY-YUEN, à la septième lune, au jour Gin-chin, 9 *du cycle*, il y eut une comète dans PE-HO: après avoir traversé le TAY-OUEI, les SAN-TAY & VEN-TCHANG, elle entra dans le PE-TEOU; elle étoit blanche, longue de dix Tchang. A la huitième lune au jour Vou-su, 35 *du cycle*, la comète entra dans le TSE-OUEY, ensuite elle disparut.

400.

La quatrième des années LONG-GAN de GAN-TI, à la deuxième lune, au jour Ki-tcheou, 26 *du cycle*, une comète parut dans KUEY; elle étoit longue de trois Tchang. La comète monta dans KO-TAO & la partie occidentale du TSE-KONG, entra dans le KUEY du PE-TEOU, & parvint aux SAN-TAY. A la troisième lune, la comète se dirigea vers le TAY-OUEI, l'OU-TI-TSO & le TUON-MOEN.

A la douzième lune, au jour Vou-in 15 *du cycle*, il y eut une comète dans KUON-SO, le TIEN-CHI & le TIEN-TSIN.

415 *ans après J. C.*

La onzième des années Y-HY, à la cinquième lune, au jour Kia-chin, 21 *du cycle*, il y eut deux comètes qui sortirent du TIENCHI; elles passèrent par TI-TSO, & s'arrêtèrent au nord de FANG & de SIN.

416.

La première des années TAY-TCHANG de MING-YUEN-TI des HEU-GOEY, à la cinquième lune, au jour Kia-chin, 21 *du cycle*, deux comètes parurent.

418.

La quatorzième année, à la cinquième lune, au jour Keng-se, 37 *du cycle*, il y eut une comète au milieu du KUEY du PE-TEOU.

A la septième lune, au jour Kuey-hay, il sortit une comète à l'ouest du TAY-OUEI, elle se leva au dessous de l'étoile CHANG-SIANG. Sa chevelure, petite d'abord, s'accrut jusqu'à la longueur de plus de dix Tchang; elle passa par le PE-TEOU, le TSE-OUEI & le TCHONG-TAY.

419.

La première des années YUEN-Y de KONG-TI, à la première lune, au jour Vou-su 35 *du cycle*, il parut une comète dans le TAY-OUEI, à l'ouest.

DYNASTIE DES SONG.

422 *ans après J. C.*

La troisième des années YONG-TSO de VOU-TI, à la deuxième lune, au jour Ping-su, 23 *du cycle*, une comète parut dans HIU & GOEI.

A la onzième lune, au jour Vou-ou, 55 *du cycle*, il y eut une comète dans YNG-CHE.

423.

La première des années KING-PING de CHAO-TI (ou TCHOU-Y-FOU, ou YNG-YANG-VANG), à la onzième lune, au jour Y-mao, 52 *du cycle*, il y eut une comète dans TONG-PIE.

La dixième lune, au jour Ki-oui, 56 *du cycle*, il y eut une comète dans TY.

432.

La première des années YEN-HO de TAY-VOU-TI des YUEN-GOEI, il parut une comète dans HIEN-YUEN; elle entra dans TAY-OUEI, & parvint jusqu'au TA-KIO, où elle périt.

442.

La dix-neuvième des années YUEN-KIA de VEN-TI, à la neuvième lune, au jour Ping-chin, 53 *du cycle*, il y eut une étoile hôte dans le PE-TEOU; elle devint comète, entra dans VEN-TCHANG, traversa OU-TCHE, TIEN-TSIE, TIEN-YUEN, & disparut dans l'hiver.

449.

La vingt-sixième année, à la dixième lune, au jour Kuey-mao, 40 *du cycle*, une comète parut dans le TAY-OUEY.

451.

La vingt-huitième année, à la quatrième lune, au jour Y-mao, 52 *du cycle*, une comète parut dans MAO. A la sixième lune,

lune, au jour Gin-tse, 49 *du cycle*; elle parut au milieu de TAY-OUEI en opposition avec TI-TSO.

DYNASTIE DES TSY.

500 & 501 *ans après J. C.*

La troisième des années YONG-YUEN de TONG-HOEN-HEOU, à la première lune, au jour Y-se, 42 *du cycle*, une grande étoile parut à l'horizon.

A la deuxième lune, au jour Gin-su, 59 *du cycle*, l'étendard de TCHI-YEU parut.

501.

La première des années TCHONG-HING de HO-TI, à la troisième lune, au jour Y-se, 42 *du cycle*, une comète parut à l'horizon.

DYNASTIE DES LEANG.

533.

La cinquième des années TCHONG-TA-TONG de VOUTI, à la première lune, au jour Ky-yeou, 46 *du cycle*, une grande étoile parut.

539.

La cinquième des années TA-TONG, à la dixième lune, au jour Sin-tcheou, 38 *du cycle*, une comète sortit du NAN-TEOU; elle étoit longue d'un Che, & tendoit vers la partie méridionale; peu à peu elle devint longue d'un Tchang. A la onzième lune, au jour Y-mao, 52 *du cycle*, la comète parvint à LEOU, & elle disparut.

DYNASTIE DES TCHIN.

560.

La première des années TIEN-KIA de VEN-TI, à la neuvième lune, au jour Kuey-tcheou, 50 *du cycle*, une comète parut ; elle étoit longue de quatre Che ; sa chevelure tendoit vers le sud-ouest.

565 ans après J. C.

La quatrième des années HO-TSING de VOU-TCHING-TI des PE-TSY, à la troisième lune, il parut une comète.

La cinquième des années PAO-TING de VOU-TI, à la sixième lune, au jour King-chin, 57 *du cycle*, une comète sortit du SAN-TAY, entra dans VEN-TCHANG, fut en opposition avec TU-TSIANG; elle traversa ensuite les murailles occidentales du TSE-OUEI, & entra dans GOEY. La comète étoit grande d'un Tchang, elle indiquoit CHE & PI. Après cent jours & plus, sa longueur se réduisit à deux Che cinq pouces ; elle vint jusqu'à HIU & GOEY où elle périt.

La sixième des années TIEN-KIA de VEN-TI des TCHIN, au jour Sin-Yeou, 58 *du cycle*, il y eut une comète longue de plusieurs Tchang, qui parut dans le CHANG-TAY.

La première des années TIEN-TONG de HEOU-TCHOU des TCHIN, à la sixième lune, au jour Gin-su, 59 *du cycle*, une comète sortit au nord-est de VEN-TCHANG ; elle étoit longue de la main, & parvint ensuite jusqu'à plusieurs Tchang ; au bout de cent jours la comète disparut.

568.

La quatrième des années TIEN-TONG de HEOU-TCHOU des TCHIN, une comète parut dans le TSING oriental.

La troisième des années TIEN-HO de VOU-TI des TCHEOU, à la sixième lune, au jour Kia-su, 11 *du cycle*, il y eut une comète dans le TSING oriental, longue d'un Tchang; en haut, elle étoit blanche; dans la partie inférieure, elle étoit de couleur de chair. La comète étoit brillante & alloit vers l'orient : parvenue à la septième lune, au jour Kuey-mao, 40 *du cycle*, elle s'arrêta à huit pouces au nord de KUEY, ensuite elle disparut.

La deuxième des années KUANG-TA de FY-TI des TCHIN, à la ſixième lune, au jour Ting-hay, 24 *du cycle*, il y eut une comète.

574 *ans après J. C.*

La troiſième des années KIEN-TE de VOU-TI des TCHEOU, à la quatrième lune, au jour Y-mao, 52 *du cycle*, il y eut une comète hors des murailles du TSEKONG; elle étoit groſſe comme le poing, elle étoit rougeâtre, indiquoit l'OU-TI-TSO, tendant peu à peu vers le ſud-eſt: elle s'accrut enſuite juſqu'à un Tchang cinq Che. A la cinquième lune, au jour Kia-tſe, 1 *du cycle*, la comète s'arrêta au nord de CHANG-TAY, & diſparut.

575.

La ſeptième des années TA-KIEN de SIUEN-TI des TCHIN, à la quatrième lune, au jour Ping-ſu, 23 *du cycle*, une comète parut dans TA-KIO.

580.

La douzième des années TA-KIEN de SIUEN-TI des TCHIN, à la douzième lune, au jour Sin-ſe, 18 *du cycle*, une comète parut au ſud-oueſt.

DYNASTIE DES SOUY.

588.

La huitième des années KAY-HOANG de VEN-TI, à la dixième lune, au jour KIA-TSE, 1 *du cycle*, il y eut une comète dans NIEOU.

594.

La quatorzième année, à la onzième lune, au jour Kuey-oui, 20 *du cycle*, il y eut une comète dans HIU & GOEY; elle parvint enſuite à KUEY & LEOU.

607 ans après J. C.

La troisième des années TA-NIE de YANG-TI, à la deuxième lune, au jour Ki-tcheou, *26 du cycle*, il y eut une comète qui parut dans le TSING oriental, & VEN-TCHANG; elle traversa TAY-LING, OU-TCHE, PE-HO, entra dans le TAY-OUEI, & passa par l'étoile TI-TSO. Après cent jours elle s'arrêta.

A la troisième lune, au jour Sin-hay, 48 *du cycle*, une grande étoile parut à l'horizon dans la contrée occidentale; elle traversa KUEY, LEOU, KIO, KANG, & disparut. A la neuvième lune, au jour Sin-oui, 8 *du cycle*, elle reparut dans la contrée méridionale à l'horizon; elle vint dans KIO & KANG, passa par le TAY-OUEI & TI-TSO. La comète s'approcha de plusieurs constellations; seulement elle ne vint pas jusqu'à TSAN & TSING, elle passa à côté de SOUY (Jupiter), & disparut.

608.

La quatrième année, il sortit une comète de OU-TCHE; elle traversa VEN-TCHANG, parvint jusqu'à FANG, où elle disparut.

615.

La onzième année, à la sixième lune, il y eut une comète au sud-est de VEN-TCHANG; elle étoit longue de cinq ou six pouces, d'une couleur noire & pointue. Pendant la nuit elle étoit beaucoup agitée; elle tendit pendant plusieurs jours vers le nord-ouest, parvint à VEN-TCHANG, s'approcha du palais sans y entrer, ensuite elle rétrograda, & périt.

617.

La treizième année, à la sixième lune, une comète parut dans le TAY-OUI & OU-TI-TSO; elle étoit jaunâtre, longue de trois ou quatre Che: après plusieurs jours elle périt.

A la neuvième lune, il parut une comète dans YNG-CHE.

DYNASTIE DES TANG.

626 ans après J. C.

La neuvième des années VOU-TE de KAO-TSU, à la deuxième lune, au jour Gin-ou, 19 *du cycle*, il y eut une comète entre GOEY & MAO, au jour Ting-hai, 24 *du cycle*; elle étoit dans KIUEN-CHE.

634.

La huitième des années TCHIN-KUON de TAY-TSONG, à la huitième lune, au jour Kia-tſe, 1 *du cycle*, il y eut une comète dans HIU & GOEY; elle paſſa par HIUEN-HIAO: au jour Y-hay, 12 *du cycle*, elle ne parut plus.

639.

La treizième année, à la troiſième lune, au jour Y-tcheou, 2 *du cycle*, il y eut une comète dans MAO & PI.

641.

La quinzième année, à la ſixième lune, au jour Ky-yeou, 46 *du cycle*, il y eut une comète dans le TAY-OUEI; elle s'approcha de LANG-GOEI: à la ſeptième lune, au jour Kia-ſu, 11 *du cycle*, elle ne parut plus.

663.

La troiſième des années LONG-SO de KAO-TSONG, à la huitième lune, au jour Kuey-mao, 40 *du cycle*, il y eut une comète dans TSO-NIE-TI; elle étoit longue de deux Che; au jour Y-ſe, 42 *du cycle*, on ne la vit plus.

667.

La deuxième des années KIEN-FONG, à la quatrième lune, au jour Ping-chin, 53 *du cycle*, il y eut une comète au nord-est ; elle étoit dans OU-TCHE, entre MAO & PI : au jour Y-hai, 12 *du cycle*, elle disparut.

675 ans après J. C.

La deuxième des années CHANG-YUEN, à la douzième lune; au jour Gin-ou, 19 *du cycle*, il y eut une comète dans le midi de KIO & de KANG ; sa longueur de cinq Che.

676.

La troisième année, à la septième lune, au jour Ting hay ; 24 *du cycle*, il y eut une comète dans TSING ; elle indiquoit PE-HO, elle avoit trois Tchang de long. La comète alloit vers le nord-est ; sa chevelure étoit brillante, & alloit en augmentant, sa longueur trois Tchang ; elle indiquoit TCHONG-TAY & VEN-TCHANG : à la neuvième lune, au jour Y-yeou, 22 *du cycle*, on ne la vit plus.

681.

La première des années KAY-YAO, à la neuvième lune, au jour Ping-chin, 23 *du cycle*, il y eut une comète au milieu du TIEN-CHI ; elle étoit longue de cinq Tchang, & tendoit vers l'orient. La comète parvint jusqu'à HO-KOU : au jour Kuei-tcheou, 50 *du cycle*, elle disparut.

683.

La deuxième des années YONG-TCHONG, à la troisième lune, au jour Ping-ou, 43 *du cycle*, il y eut une comète dans le nord de OU-TCHE : à la quatrième lune, au jour Sin-oui, 8 *du cycle*, on ne la vit plus.

684.

La première des années KUANG-TSE de TCHONG-TSONG, à la neuvième lune, au jour Ting-tcheou, 14 *du cycle* ; il y eut une étoile qui ressembloit à une demi-lune ; elle parut dans la contrée occidentale.

La première des années VEN-MING, à la septième lune, au jour Sin-oui, 8 *du cycle*, il y eut le ſoir une comète dans la contrée occidentale; elle étoit longue d'un Tchang : à la huitième lune, au jour Kia-chin, 41 *du cycle*, on ne la vit plus.

707 ans après J. C.

La première des années KING-LONG, à la dixième lune, au jour Gin-ou, 19 *du cycle*, il y eut une comète dans la contrée occidentale : à la onzième lune, au jour Kia-in, 51 *du cycle*, on ne la vit plus.

708.

La deuxième année, à la deuxième lune, au jour Ting-yeou, 34 *du cycle*, il y eut une comète entre MAO & GOEY.

A la huitième lune, au jour Gin-chin, 29 *du cycle*, il y eut une comète dans le TSE-KONG.

730.

La dix-huitième des années KAY-YUEN de HIUEN-TSONG, à la ſixième lune, au jour Kia-tſe, 1 *du cycle*, il y eut une comète dans OU-TCHE.

Au jour Kuey-yeou, 10 *du cycle*, il y eut une comète dans PI & MAO.

738.

La vingt-ſixième année, à la troiſième lune, au jour Ping-tſe, 13 *du cycle*, il y eut une comète dans les murailles du TSE-OUEI; elle traverſa le KUEY de PE-TEOU : au bout de dix jours & plus, les nuages empêchèrent de la voir.

760.

La troiſième des années KIEN-YUEN de SO-TSONG, à la quatrième lune, au jour Ting-ſe, 54 *du cycle*, il y eut une comète dans la contrée orientale; elle étoit entre GOEY & LEOU : ſa couleur étoit blanche, longue de quatre Che.

Elle alloit avec vîtesse vers la contrée orientale, traversa MAO, PI, TSOUI, TSAN, TSING, KUEY, LIEOU, HIEN-YUEN, parvint à l'ouest d'YEU-CHI-FA; après cinquante jours on ne la vit plus.

Au jour Sin-yeou, 58 *du cycle*, premier de la lune intercalaire, il y eut une comète dans la contrée occidentale, sa longueur de plusieurs Tchang; parvenue à la cinquième lune, elle disparut.

766 ans après J. C.

La première des années TA-LIE de TAY-TSONG, à la douzième lune, au jour Ki-hai, 36 *du cycle*, il y eut une comète dans PAY-KUA, sa longueur d'un Che : après vingt jours elle périt.

770.

La cinquième année, à la quatrième lune, au jour Ki-oui, 56 *du cycle*, il y eut une comète dans OU-TCHE; sa chevelure étoit brillante, & longue de trois Tchang.

A la cinquième lune, au jour Ki-mao, 16 *du cycle*, il y eut une comète qui parut dans la contrée septentrionale; elle étoit blanche. Au jour Kuei-oui, 20 *du cycle*, la comète alloit vers l'est; elle s'approcha de PA-KO. A la sixième lune, au jour KUEI-MAO, 40 *du cycle*, elle fut près des SAN-KONG : au jour Ki-oui, 56 *du cycle*, on ne la vit plus.

772.

La septième année, à la douzième lune, au jour Ping-in, 3 *du cycle*, il y eut une grande étoile au bas de TSAN.

815.

La dixième des années YUEN-HO de HIEN-TSONG, à la troisième lune, il y eut une grande étoile au bas du TAY-OUEI; elle parvint jusqu'à HIEN-YUEN.

La

817 *ans après J. C.*

La douzième année, à la première lune, au jour Vou-tſe, 25 *du cycle*, il y eut une comète dans Pie.

821.

La première des années Chang-king de Mo-tsong, à la première lune, au jour Ki-oui, 56 *du cycle*, il y eut une comète dans Ye. A la deuxième lune, au jour Ting-mao, 4 *du cycle*, la comète étoit à l'oueſt de Tay-ouei-kong, dans Chang-tsiang.

A la ſixième lune, il y eut une comète dans Mao; elle étoit longue d'un Tchang : après dix jours, on ne la vit plus.

828.

La deuxième des années Tay-ho de Ven-tsong, à la ſeptième lune, au jour Kia-chin, 41 *du cycle*, il y eut une comète dans le ſud de Yeu-tche-ty; elle étoit longue de deux Che.

834.

La huitième année, à la neuvième lune, au jour Sin-hay, 48 *du cycle*, il y eut une comète dans le Tay-ouei, ſa longueur étoit d'un Tchang; elle alloit au nord-oueſt. Elle alla au delà de Lang-goei : le jour Keng-chin, 17 *du cycle*, on ne la vit plus.

837.

La deuxième des années Kay-tching, à la troiſième lune, au jour Ping-ou, 43 *du cycle*, il y eut une comète dans Goey, longue de ſept Che; elle indiquoit l'oueſt du Nan-teou : au jour Vou-chin, 45 *du cycle*, elle étoit au ſud-oueſt de Goey; ſa chevelure étoit très-brillante : au jour Kuei-tcheou, 50 *du cycle*, la comète étoit dans Hiu : au jour Siu-yeou, 58 *du cycle*, elle avoit un Tchang de longueur, elle alloit lentement vers l'oueſt, indiquant le ſud : au jour Gin-ſu, 59 *du cycle*, elle étoit dans Niu; elle avoit alors deux Tchang de long, & trois Che de large : au jour Kuei-hai, 60 *du cycle*, ſa longueur alloit toujours en augmentant : à la troiſième lune, au jour Kia-tſe, 1 *du cycle*, la comète étoit dans le NAN-TEOU : au jour Y-tcheou, 2 *du cycle*, elle étoit longue de cinq Tchang, ſon extrémité ſe partageoit en deux ; l'une indiquoit TY, l'autre couvroit FANG : au jour Ping-in, 3 *du cycle*, elle étoit longue de ſix Tchang ; elle n'étoit plus partagée, elle indiquoit le nord, & étoit au ſeptième degré de KANG : au jour Ting-mao, 4 *du cycle*, la comète alloit au nord-oueſt, indiquant l'eſt : au jour Ky-ſe, cinq *du cycle*, ſa longueur de huit Tchang ; elle étoit dans TCHANG : au jour Kuei-oui, 20 *du cycle*, ſa longueur trois Che ; elle étoit à la droite d'HIEN-YUEN ; alors on ne la vit plus.

A la huitième lune, au jour Ting-yeou, 34 *du cycle*, il y eut une comète dans HIU & GOEY.

838 *ans après J. C.*

La troiſième année, à la dixième lune, au jour Y-ſe, 42 *du cycle*, il y eut une comète dans la principale étoile de TCHIN ; elle étoit longue de deux Tchang ; peu à peu elle indiquoit l'oueſt.

A la onzième lune, au jour Y-mao, 52 *du cycle*, il y eut une comète dans la contrée orientale ; elle étoit dans KY & OUEY, elle s'étendoit dans le ciel eſt & oueſt : à la douzième lune, au jour Gin-tchin, 29 *du cycle*, on ne la vit plus.

839.

La quatrième année, à la première lune, au jour Kuey-yeou, 10 *du cycle*, il y eut une comète dans YU-LIN.

A la lune intercalaire, au jour Ping-ou, 43 *du cycle*, il y eut une comète au nord-oueſt de KIUEN-CHE : à la deuxième lune, au jour Ki-mao, 16 *du cycle*, on ne la vit plus.

840.

La cinquième année, à la deuxième lune, au jour Keng-chin, 57 *du cycle*, il y eut une comète entre Ing-che & Tung-pi; après vingt jours elle disparut.

A la onzième lune, au jour Vou-in, 15 *du cycle*, il y eut une comète dans la contrée orientale.

841 *ans après J. C.*

La première des années Hoei-tchang de Vou-tsong, à la septième lune, il y eut une comète dans Yu-lin, entre Yng-che & Tung-py.

A la onzième lune, au jour Gin-in, 39 *du cycle*, il y eut une comète dans Pe-lou-se-moen; elle étoit dans Yng-che, elle entra dans le Tse-ouei : à la douzième lune, au jour Sin-mao, 28 *du cycle*, on ne la vit plus.

852.

La sixième des années Ta-tchong de Siuen-tsong, à la troisième lune, il y eut une comète dans Tsouy & Tsan.

857.

La onzième année, à la neuvième lune, au jour Y-oui, 32 *du cycle*, il y eut une comète dans Fang; elle étoit longue de trois Che.

864.

La cinquième des années Hien-tong de Hi-tsong, à la cinquième lune, au jour Ky-hai, 36 *du cycle*, pendant la nuit, le Leou (clepsydre) n'avoit pas encore rempli un Ke (Ke 0, 01 de jour); une comète sortit de la contrée orientale; elle étoit jaunâtre, longue de trois Che, & étoit dans Leou.

868.

La neuvième année, à la première lune, il y eut une comète dans Leou & Guey.

869.

La dixième année, à la huitième lune, il y eut une comète dans Ta-ling; elle alloit vers le nord-est.

877 ans après J. C.

La quatrième des années KIEN-FU de HY-TSONG, à la cinquième lune, il y eut une comète.

885.

La première des années KOUANG-KY, il y eut une comète entre TSIE-CHOUI & TSIE-SIN.

886.

La deuxième année, à la cinquième lune, au jour Ping-ſu, 23 *du cycle*, il y eut une comète dans OUEI & KY; elle traverſa le PE-TEOU & le NIE-TI.

891.

La deuxième des années TA-CHUN de TCHAO-TSONG, à la quatrième lune, au jour Keng-chin, 17 *du cycle*, il y eut une comète dans SAN-TAY; elle alloit vers l'eſt, entra dans le TAY-OUEI, traverſa TA-KIO & le TIEN-CHI; elle étoit longue de dix Tchang : à la cinquième lune, au jour Kia-ſu, 11 *du cycle*, on ne la vit plus.

892.

La première des années KING-FO, à la cinquième lune, l'étendard de TCHI-YEU parut. Il avoit la figure d'une comète blanche, ſemblable à une chevelure; il étoit long de deux Che.

A la onzième lune, il y eut une comète dans TEOU & NIEOU.

A la douzième lune, au jour Ping-tſe, 13 *du cycle*, une comète appelée TIEN-TSAN, ſortit du ſud-oueſt. Au jour Ki-mao, 16 *du cycle*, le temps couvert ne permit plus de l'obſerver.

893.

La deuxième année, à la troiſième lune, le temps fut couvert juſqu'à la quatrième lune : au jour Y-yeou, 22 *du cycle*, les nuages ſe diſſipèrent peu à peu pendant la nuit ; on vit alors une comète dans CHANG-TAY, longue de dix Tchang ; elle alloit vers l'orient, & entra dans le TAY-OUEI. La comète traverſa TA-KIO, entra dans le TIEN-CHI, & dura trente-ſept jours : ſa grandeur alla juſqu'à vingt Tchang ; mais les nuages l'ayant cachée, on ne la vit plus.

894 *ans après J. C.*

La première des années KIEN-NING, à la première lune, il y eut une comète dans CHUN-CHEOU.

905.

La deuxième des années TIEN-YEU, à la quatrième lune, au jour Kia-chin, 41 *du cycle*, une comète parut au nord du fleuve ; elle traverſa VEN-TCHANG, ſa longueur de trois Tchang. La comète alla au delà TCHUNG-TAY & de HIA-TAY : à la cinquième lune, au jour Y-tcheou, 2 *du cycle*, elle ſortit pendant la nuit d'HIEN-YUEN & du KIO de la gauche, & parvint aux murailles occidentales du TIEN-CHI ; ſa chevelure étoit brillante, elle avoit l'air irrité ; ſa longueur s'étendoit dans le ciel : au jour Ping-in, 3 *du cycle*, les nuages l'obſcurcirent : au jour Sin-oui, 8 *du cycle*, les nuages s'étant diſſipés, on ne la vit plus.

DYNASTIE DES LEANG.

912.

La deuxième des années KIEN-HOA de TAY-TSU, à la quatrième lune, au jour Gin-chin, 9 *du cycle*, une comète ſortit de TCHANG.

Au jour Kia-ſu, 11 *du cycle*, une comète ſortit de LING-TAY.

DYNASTIE DES HEU-TANG.

928.

La troiſième des années TIEN-TCHING de MING-TSONG, à la dixième lune, au jour Keng-ou, 7 *du cycle*, une comète ſortit du ſud-oueſt ; elle étoit longue d'un Tchang, & indiquoit le ſud-eſt. La comète étoit à cinq degrés de NIEOU : après trois ſoirées, on ne la vit plus.

936 ans après J. C.

La troiſième des années TSING-TAI de MOU-VANG, à la neuvième lune, au jour Ki-tcheou, 26 *du cycle*, une comète ſortit de HIU & de GOEY, ſa longueur d'un Che ; ſa figure étoit mince, elle traverſa TIEN-LOUY-TCHING & KO.

DYNASTIE DES HEU-TSIN.

941.

La ſixième des années TIEN-FO de KAO-TSU, à la neuvième lune, au jour Gin-tſe, 49 *du cycle*, une comète ſortit de la contrée occidentale ; elle parcourut les murailles du TIEN-CHI ; elle étoit longue d'un Tchang.

943.

La huitième année, à la dixième lune, au jour Keng-ſu, 47 *du cycle*, une comète parut dans la contrée orientale ; elle indiquoit l'oueſt : le veſtige de ſa queue étoit long d'un Che. La comète étoit à 9 degrés de KIO.

DYNASTIE DES TCHEOU.

956.

La troiſième des années HIEN-TE de CHI-TSONG, à la première lune, au jour Gin-ſu, 59 *du cycle*, il y eut pendant la nuit une comète dans TSAN ; ſa chevelure indiquoit le ſud-eſt.

DYNASTIE DES SONG.

975.

La huitième des années KAY-PAO de TAY-TSU-HOANG-TI, à la ſixième lune, au jour Kia-tſe, 1 *du cycle*, une comète ſortit de LIEOU, longue de quatre Tchang : le matin, elle parut dans la contrée orientale; elle indiquoit le ſud-oueſt. La comète paſſa par YU-KUEY, & parvint juſqu'à TONG-PIE, ce qui fait onze CHE (conſtellations); après quatre-vingt-trois jours elle diſparut.

989 *ans après J. C.*

La deuxième des années TUON-KONG de TAI-TSONG, à la ſixième lune (les Annales mettent à la ſeptième lune), au jour Vou-tſe, 25 *du cycle*, une comète ſortit du TSING oriental, à l'oueſt de TSIE-CHOUI; elle étoit bleuâtre, elle avoit une chevelure brillante qui s'agrandiſſoit peu à peu. Le matin, la comète parut au nord-eſt; au bout de dix jours, le ſoir, elle parut au nord-oueſt, traverſa YEU-TCHE-TI: après trente jours, elle vint à KANG, où elle périt

998.

La première des années HIEN-PING de TCHIN-TSONG, à la première lune, au jour KIA-CHIN, 21 *du cycle*, une comète ſortit au nord de YNG-CHE; ſa chevelure étoit brillante, & longue d'un Che: parvenue au jour Ting-yeou, 34 *du cycle*, au bout de quatorze jours elle diſparut.

1003.

La ſixième année, à la onzième lune, au jour Sin-hai, 48 *du cycle*, l'étoile MAO-TEOU fut en oppoſition avec YU-KUEY.

Au jour Kia-in, 51 *du cycle*, il y eut une comète dans TSING & KUEY; elle étoit grande comme un vaſe, d'une couleur bleuâtre; elle avoit une chevelure brillante, longue de quatre Che. La comète s'approcha de très-près de OU-TCHU-HEOU, paſſa par OU-TCHE, & entra dans TSAN; après trente jours elle diſparut.

1018.

La deuxième des années TIEN-HY, à la ſixième lune, au jour Sin-hay, 48 *du cycle*, une comète ſortit au nord-eſt de la ſeconde étoile du KUEY du PE-TEOU; elle étoit longue de trois Che, elle alloit vers le nord avec la première étoile du PE-TEOU. La comète traverſa TIEN-LAO, VEN-TCHANG, ſa longueur trois Tchang; elle paſſa par le TSE-OUEI, les SAN-TAY & HIEN-YUEN: elle alla enſuite, en s'éloignant vers l'oueſt, juſqu'à TSIE-SING; après trente-ſept jours elle diſparut.

1033 *ans après J. C.*

La deuxième des années MING-TAO de GIN-SONG, à la deuxième lune, au jour Vou-ſu, 35 *du cycle*, l'étoile HAN-YU (comète) parut à l'eſt de la contrée ſeptentrionale; elle étoit d'une couleur rougeâtre, avoit une chevelure brillante, longue de deux Che.

1035.

La deuxième des années KING-YEOU, à la huitième lune, au jour Gin-ſu, 59 *du cycle*, il y eut une comète dans TCHANG & YE; elle étoit longue de ſept Che, cinq Tſun (pouces); au bout de douze jours elle diſparut.

A la douzième lune, au jour Ki-oui, 56 *du cycle*, il y eut une étoile qui ſortit pendant la nuit de VAY-PING; elle avoit une chevelure très-foible.

1049.

La première des années HOANG-YEOU, à la deuxième lune, au jour Ting-mao, 4 *du cycle*, une comète ſortit de HIU. Le matin elle parut dans la contrée orientale, indiquant le ſud-oueſt; elle traverſa le TSE-OUEI, parvint juſqu'à LEOU, & après cent quatorze jours elle diſparut.

1056.

La première des années KIA-YEOU, à la ſeptième lune, une comète ſortit du TSE-OUEI, & traverſa les TSIE-TSING; elle étoit blanche, & longue d'un Tchang: parvenue à la huitième lune, au jour Kuey-hay, 60 *du cycle*, elle périt.

1066.

La troiſième des années TCHI-PING de YNG-TSONG, à la troiſième

sième lune, au jour Ky-oui, 56 *du cycle*, une comète sortit de YNG-CHE. Le matin elle parut dans la contrée orientale, sa longueur de sept Che; elle indiquoit le sud-ouest, étant entre GOEY & FUEN-MOU. Peu à peu elle s'éloigna en allant vers l'orient, s'approcha du soleil qui la cacha : parvenue au jour Sin se, 8 *du cycle*, le soir, elle parut dans le nord-ouest; il y eut une étoile sans chevelure. La comète alloit vers l'orient; il y eut aussi une vapeur blanche, longue de trois Che : elle traversa le haut du palais de TSE-OUEI; l'étoile étoit dans FANG. Sa tête & sa queue entrèrent dans PI; elle alloit vers l'est, elle traversa VEN-TCHANG, PE-TEOU, elle traversa OUEI : parvenue au jour Gin-ou, 19 *du cycle*, l'étoile eut de nouveau une chevelure; la comète, longue d'un Tchang trois Che, indiquant le nord-est, elle traversa OU-TCHE. La vapeur blanche étoit divisée & en travers du ciel; elle traversa PE-HO, OU-TCHU-HEOU, HIEN-YUEN, le TAY-OUEI, OU-TI-TSO, NOUY-OU-TCHU-HEOU, & vint dans KIO, KANG, TY, FANG. Au jour Kuey-oui, 20 *du cycle*, la comète étoit longue d'un Tchang cinq Che, elle étoit comme un boisseau; elle traversa ING-CHE, & vint jusqu'au nord de TCHANG, ce qui fait quatorze constellations : au bout de soixante-sept jours, l'étoile & la comète furent détruites.

1075 *ans après J. C.*

La huitième des années HY-NING, à la dixième lune, au jour Y-oui, 32 *du cycle*, une étoile sortit du sud-est, au milieu de TCHING; elle ressembloit à celle de Saturne, elle étoit d'un bleu pâle : au jour Ping-chin, 33 *du cycle*, il lui naquit des cornes brillantes, longues de trois Che. La comète étoit inclinée, & indiquoit TCHIN : au jour Ting-yeou, 34 *du cycle*, la comète avoit des cornes très-brillantes, longues de cinq Che : au jour Vou-su, 35 *du cycle*, elles étoient longues de sept Che; la comète étoit inclinée, & indiquoit l'étoile TSO-HIA : parvenue au jour Ting-oui, 44 *du cycle*, elle entra dans TCHO, & ne parut plus.

1080 *ans après J. C.*

La troisième des années Yuen-fong de Chin-tsong, à la septième lune, au jour Kuey-oui, 20 *du cycle*, une comète sortit au nord-ouest des murailles du Tay-ouei, au midi de Lang-goei. C'étoit une vapeur blanche, longue d'un Tchang; elle étoit inclinée, & indiquoit le sud-est : la comète étoit au milieu de Tchin. Au jour Ping-su, 23 *du cycle*, elle tendoit au devant de l'ouest de la contrée septentrionale ; elle étoit au milieu de Ye. Au jour Vou-su, 25 *du cycle*; sa longueur trois Che; elle étoit inclinée, & elle pénétra dans Lang-goei. Au jour Kuey-mao, 40 *du cycle*, la comète passa très-près d'Hien-yuen : au jour Ting-yeou, 34 *du cycle*, elle entra dans Tcho, & disparut : au jour King-tse, 37 *du cycle*, le matin elle reparut au milieu de Tchang jusqu'au jour Vou-ou, 55 *du cycle*, en tout trente-six jours, & elle disparut.

1097.

La quatrième des années Chao-ching de Tche-tsong, à la huitième lune, au jour Ki-yeou, 46 *du cycle*, une comète sortit au milieu des degrés de Ty; elle ressembloit à Saturne; elle avoit une chevelure, sa couleur étoit brillante; c'étoit une vapeur blanche, longue de trois Che : elle étoit inclinée, & regardoit les murailles du Tien-chi. A la neuvième lune, au jour Gin-tse, 49 *du cycle*, elle avoit une chevelure brillante, longue de cinq Che; elle entra dans les murailles du Tien-chi. Au jour Ki-oui, 56 *du cycle*, elle s'approcha de très-près du Tien-chi : au jour Keng-chin, 57 *du cycle*, elle passa très-près de Ti-tso & des murailles du Tien-chi: au jour Vou-chin, 5 *du cycle*, on ne la vit plus.

1106

La cinquième des années Tsong-ning de Ouei-tsong, à la première lune, au jour Vou-su, 35 *du cycle*, une comète sortit de la contrée occidentale; elle ressembloit à la bouche d'un petit vase; sa chevelure étoit brillante & éparse; elle ſortit comme SUY-SING (eſpèce de comète); elle avoit ſix Tchang trois Che de long : au commencement elle indiquoit le nord-eſt ; depuis KUEY elle traverſa LEOU, GOEY, MAO & PI. Après être entrée dans TCHO, on ne la vit plus.

1110 *ans après J. C.*

La quatrième des années TA-KUON, à la cinquième lune, au jour Ting-oui, 44 *du cycle*, une comète ſortit de KUEY & de LEOU ; elle avoit une chevelure brillante, longue de ſix Che. La comète alloit au nord ; elle entra dans les murailles du TSE-OUEI : parvenue au nord-oueſt, elle entra dans TCHO, & diſparut.

1126.

La première des années TSING-KANG de KIN-TSONG, à la ſixième lune, au jour Gin-ſu, 59 *du cycle*, une comète ſortit des murailles du TSE-OUEI.

A la onzième lune intercalaire, on vit une comète à l'horizon.

1131.

La première des années CHAO-HING de KAO-TSONG, à la neuvième lune, une grande étoile parut.

A la douzième lune, au jour Vou-in, 15 *du cycle*, il parut une comète.

1132.

La deuxième année, à la huitième lune, au jour Kia-in, 51 *du cycle*, une comète parut dans GUEY : parvenue à la neuvième lune, au jour Kia-ſu, 11 *du cycle*, elle diſparut.

1145.

La quinzième année, à la quatrième lune, au jour Vou-in, 15 *du cycle*, une comète ſortit au milieu des conſtellations de la contrée orientale, & après cinquante jours elle diſparut : au jour Ping-chin, 33 *du cycle*, elle reparut dans TSAN ; après quinze jours elle périt.

A la cinquième lune, au jour Ting-ſe, 54 *du cycle*, il parut une comète ; c'étoit une étoile hôte ; elle étoit d'une couleur bleuâtre.

1146 *ans après J. C.*

La ſeizième année, à la douzième lune, au jour Vou-ſu, 35 *du cycle*, une comète ſortit au ſud-oueſt, de GOEY.

1147.

La dix-ſeptième année, à la première lune, au jour Y-hai, 12 *du cycle*, il ſortit une comète au nord-eſt, de NIU : le deuxième jour de la deuxième lune elle diſparut.

1152.

La vingt-deuxième année, à la ſeptième lune, au jour Ping-ou, 43 *du cycle*, une comète parut au nord-eſt, au milieu de TSING : au jour Ting-oui, 44 *du cycle*, elle reſſembloit à Jupiter ; elle avoit une chevelure longue de deux Che.

Au jour Kuey-tcheou, 50 *du cycle*, pendant la nuit, une comète s'approcha très-près de OU-TCHU-HEOU.

1174.

La deuxième des années CHONG-HY de HIAO-TSONG, à la ſeptième lune, au jour Sin-tcheou, 38 *du cycle*, une petite étoile étoit au dehors des murailles du TSE-OUEI, au deſſus des étoiles TSIE-KONG ; elle étoit petite comme Mars.

1222.

La quinzième des années KIA-TING de NING-TSONG à la huitième lune, au jour Kia-ou, 31 *du cycle*, une comète ſortit de YEU-TCHE-TI ; ſa chevelure étoit brillante d'environ trois Tchang. La comète étoit petite comme Jupiter ; elle ſubſiſta pendant deux mois, traverſa TY, FANG, SIN, & elle périt.

FIN.