

SOC

7130

SOC  
7130

HARVARD UNIVERSITY.



LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

167.  
Exchange.

February 22, 1887.





167  
Feb. 22, 1887



# MÉMOIRES

DE LA

## SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

### DE LIÈGE.

*Nec temere, nec timide.*

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XIII.

DÉPOTS :

LONDRES,  
chez WILLIAMS et NORGATE,  
Henrietta Str., 14.

PARIS,  
chez ROBERT, libraire,  
rue Hautefeuille, 10<sup>bis</sup>.

BERLIN,  
chez FRIEDLÄNDER et Sohn,  
Carlstrasse, 11.

BRUXELLES,

F. HATEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE,  
rue de Louvain, 108.

Sm  
DÉCEMBRE 1886.



**MÉMOIRES**

**DE LA**

**SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES**

**DE LIÈGE.**





# MÉMOIRES

DE LA

## SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÈGE.

---

*Nec temere, nec timide.*

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XIII.

---

DÉPOTS :

**LONDRES,**  
chez WILLIAMS et NORGATE,  
Henrietta Str., 14.

**PARIS,**  
chez RORET, libraire,  
rue Hautefeuille, 10<sup>bis</sup>.

**BERLIN,**  
chez FRIEDLÄNDER et Sohn,  
Carlstrasse, 11.

*A*  
**BRUXELLES,**

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE,  
rue de Louvain, 108.

DÉCEMBRE 1886.




# TABLE

DES

MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME XIII.

---

Mélanges mathématiques; par Eugène Catalan.



# LISTE

DES

# MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

AU 31 DÉCEMBRE 1886.

---

## Bureau.

<i>Président,</i>	M. CATALAN.
<i>Vice-Président,</i>	» RONKAR.
<i>Secrétaire général,</i>	» LE PAIGE.
<i>Trésorier,</i>	» NEUBERG.
<i>Bibliothécaire,</i>	» FRAIPONT.

## Membres effectifs.

1842 SELYS LONGCHAMPS (baron E. DE), membre de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.

TRASENSTER, L., ancien recteur de l'université de Liège.

1844 KUPFFERSCHLÄGER, Is., professeur émérite à l'université de Liège.

1847 DE CUYPER, A. C., professeur émérite à l'université de Liège.

1855 CANDÈZE, E., membre de l'Académie des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique, à Glain.

- 1855 PÂQUE, A., ancien professeur de mathématiques à l'athénée de Liège.
- 1855 DEWALQUE, G., professeur de minéralogie, de géologie et de paléontologie à l'université de Liège.  
BOURDON, J., docteur en sciences naturelles, à Liège.
- 1856 CATALAN, C. E., professeur émérite à l'université de Liège.
- 1860 GILLON, A., professeur de métallurgie à l'université de Liège.
- 1861 PERARD, L., professeur de physique à l'université de Liège.
- 1865 FOLIE, F., directeur de l'Observatoire royal de Bruxelles.
- 1868 GRAINDORGE, L. A. J., professeur à l'université de Liège.
- 1870 MASIUS, V., professeur de pathologie et de clinique à l'université de Liège.  
VANLAIR, C., professeur de pathologie et de thérapeutique à l'université de Liège.
- 1871 VAN BENEDEN, Éd., professeur de zoologie, de physiologie et d'anatomie comparées à l'université de Liège.
- 1874 FIRKET, Ad., chargé de cours à l'université de Liège.
- 1875 SPRING, W., professeur de chimie à l'université de Liège.  
SWAEN, A., professeur d'anatomie à l'université de Liège.
- 1876 DE KONINCK, Lucien, professeur de chimie analytique et de docimasia à l'université de Liège.
- 1878 LE PAIGE, professeur de géométrie supérieure à l'université de Liège.
- 1879 JORISSEN, docteur en sciences, à Liège.
- 1880 NEUBERG, J., professeur à l'université de Liège.
- 1881 FRAIPONT, J., professeur à l'université, à Liège.
- 1884 DERUYTS, J., docteur en sciences, assistant à l'université.  
RONKAR, Ém., chargé de cours à l'université.  
UBAGHS, P., répétiteur à l'École des mines.
- 1885 GRAVIS, A., professeur de botanique à l'université de Liège.

Membres correspondants.

- 1842 VAN BENEDEN, J. P., professeur à l'université de Louvain.  
LAGUESSE, ingénieur en chef des mines, à Mons.
- 1845 STAS, J. S., membre de l'Académie royale des sciences,  
des lettres et des beaux-arts de Belgique, à  
Bruxelles.  
KEYSERLING (comte A. DE), membre de l'Académie des  
sciences de Saint-Pétersbourg.  
REICHERT, professeur à l'université de Berlin.  
STEICHEN, membre de l'Académie, à Bruxelles.
- 1844 LECOINTE, professeur de mathématiques supérieures, à  
Anvers.
- 1845 MAUS, inspecteur général des ponts et chaussées, à Bruxelles.  
COQUILHAT, général d'artillerie, à Anvers.  
HAGEN, professeur à l'université de Cambridge (États-Unis).
- 1848 KLIPSTEIN (VON), professeur à l'université de Giessen.
- 1852 DANA, J. D., professeur de géologie et d'histoire naturelle,  
à New-Haven (États-Unis).  
ETTINGSHAUSEN (baron Constantin von), membre de  
l'Académie des sciences de Vienne, à Graz.
- 1855 WESTWOOD, professeur de zoologie à l'université d'Oxford  
(Angleterre).  
WATERHOUSE, conservateur au Musée Britannique, à  
Londres.
- BÈDE, Em., industriel, à Bruxelles.
- 1854 PETRINA, professeur de physique, à Prague (Bohême).  
KÖLLIKER (VON), professeur à l'université de Wurzburg  
(Bavière).  
DUTREUX, receveur général, à Luxembourg.  
DROUET, H., naturaliste, à Charleville (France).  
WEBER, professeur de physique à l'université de Göttingue  
(Prusse).

- 1854 STAMMER, docteur en médecine, à Dusseldorf (Prusse).  
ERLENMEYER, docteur en médecine, à Neuwied (Prusse).  
LUCAS, H., aide-naturaliste au Muséum d'histoire naturelle,  
à Paris.  
BLANCHARD, E., membre de l'Institut, à Paris.
- 1855 GEINITZ, H. B., professeur à l'École polytechnique, à  
Dresde.  
LIAIS, ancien directeur de l'Observatoire impérial de Rio  
de Janeiro, maire de Cherbourg.  
TCHÉBYCHEFF, P., membre de l'Académie des sciences, à  
Saint-Petersbourg.  
MICHOT (abbé), botaniste, à Mons.
- 1857 WRIGHT (D<sup>r</sup> Th.), membre de la Société royale de Lon-  
dres, à Cheltenham (Angleterre).
- 1858 CALIGNY (marquis DE), correspondant de l'Institut, à Ver-  
sailles (France).
- 1859 MARSEUL (abbé DE), entomologiste, à Paris.  
BEYRICH, professeur à l'université de Berlin.  
MARCOU, J., géologue, États-Unis.
- 1860 DU BOIS-REYMOND, professeur à l'université de Berlin.  
BRÜCKE, professeur à l'université de Vienne.  
STUDER, B., professeur émérite à l'université de Berne  
(Suisse).
- 1862 CASPARY, professeur de botanique à l'université de Königs-  
berg (Prusse).
- 1865 GOSSAGE, membre de la Société chimique, à Londres.
- 1864 THOMSON, J., membre de la Société entomologique de  
France, à Paris.  
BRÜNER DE WATTEVILLE, directeur général des télégra-  
phes, à Vienne.  
DURIEU DE MAISONNEUVE, directeur du Jardin Botanique,  
à Bordeaux (France).
- 1865 HUGUENY, professeur, à Strasbourg.  
TERSSEN, général d'artillerie, à Anvers.  
DE COLNET D'HUART, conseiller d'État, à Luxembourg.



- 1865 ZEIS, conservateur au Muséum royal d'histoire naturelle,  
à Dresde.  
DAUSSE, ingénieur en chef des ponts et chaussées,  
à Paris.  
LE JOLIS, archiviste perpétuel de la Société des sciences  
naturelles de Cherbourg (France).  
GODWIN AUSTEN, R. A. C., membre de la Société royale de  
Londres, Chilworth Manor, Guilford (Angle-  
terre).  
HAMILTON, membre de la Société géologique de Londres.  
DE BORRE, A., conservateur au Musée royal d'histoire  
naturelle, à Bruxelles.
- 1866 RODRIGUEZ, directeur du Musée zoologique de Guatémala.  
LEDENT, professeur au collège communal de Verviers.  
DESAINS, membre de l'Institut, à Paris.
- 1867 GOSSELET, J., professeur à la faculté des sciences de Lille  
(France).  
BARNARD, président de l'École des mines, à New-York  
(États-Unis).  
RADOSZKOFFSKI, président de la Société entomologique de  
Saint-Pétersbourg.  
BONCOMPAGNI (prince Balthasar), à Rome.
- 1868 RENARD (S. Ex. le chevalier), conseiller d'État, président  
de la Société impériale des naturalistes de  
Moscou.  
CLAUSIUS, R., professeur de physique à l'université de  
Bonn (Prusse).  
HELMHOLTZ (von), professeur de physique, à Berlin.  
CAILLETET, pharmacien et chimiste, à Charleville (France).
- 1869 MARIÉ DAVY, directeur de l'Observatoire météorologique  
de Montsouris.  
SCHLÖMILCH, professeur d'analyse à l'École polytechnique  
de Dresde.  
SIMON, E., naturaliste, à Paris.  
PISCO, professeur à l'École industrielle de Vienne.

- 1870 **TRAUTSCHOLD**, professeur à l'École d'agriculture à Pétrovskoï, près Moscou (Russie).  
**MALAISE, C.**, professeur à l'Institut agronomique de Gembloux.  
**BERTRAND, J. L. F.**, membre de l'Institut, à Paris.
- 1871 **VAN HOOREN**, docteur en sciences, à Tongres.  
**IMSCHENETSKI**, professeur à l'université de Karkoff (Russie).  
**MÜLLER (baron von)**, botaniste du gouvernement, à Melbourne (Australie).  
**HENRY, L.**, professeur à l'université de Louvain.  
**DURÉGE**, professeur à l'université de Prague (Bohême).  
**MAXWELL T. MASTERS**, membre de la Société royale, à Londres.  
**THOMSON, James**, vice-président de la Société géologique de Glasgow.  
**CAPELLINI (commandeur G.)**, professeur de géologie à l'université de Bologne.  
**LE BOULENGÉ, P.**, colonel d'artillerie.
- 1872 **VALLÈS**, inspecteur honoraire des ponts et chaussées, à Paris.  
**GARIBALDI**, professeur à l'université de Gènes (Italie).  
**FRADESSO DA SILVEIRA**, directeur de l'Observatoire, à Lisbonne.  
**KANITZ, D<sup>r</sup> Aug.**, professeur à l'université de Klausenbourg (Hongrie).
- 1873 **CLOS**, directeur du Jardin des Plantes, à Toulouse.  
**BATES, H.**, membre de la Société royale de Londres.  
**HERMITE**, membre de l'Institut, à Paris.  
**DARBOUX**, membre de l'Institut, à Paris.  
**HALL, James**, paléontologiste de l'État, à Albany (États-Unis).  
**WORTHEN, A. H.**, directeur du *Geological Survey* de l'Illinois (États-Unis).  
**WHITNEY, J. D.**, géologue de l'État, directeur du *Geological Survey* de Californie (États-Unis).

1875 GLAZIOU, botaniste, directeur des Jardins impériaux, à Rio de Janeiro.

LADISLAŮ NETTO, botaniste, directeur du Musée impérial de Rio de Janeiro.

DE CARVALHO (Pedro Alphonso), docteur en médecine, directeur de l'Hôpital de la Miséricorde, à Rio de Janeiro.

BURMEISTER, H., directeur du Musée national de Buenos-Ayres.

MORENO, F. P., paléontologiste, à Buenos-Ayres.

ARESCHOUG, professeur adjoint à l'université de Lund (Suède).

1874 WINKLER, D. C. J., conservateur du Musée de Harlem (Néerlande).

HAYDEN, géologue de l'État, à Washington.

VAN RYSELBERGHE, aide à l'Observatoire royal, à Bruxelles.

GEGENBAUER, professeur à l'université de Heidelberg.

HÄCKEL, professeur à l'université de Iéna.

WALDEYER, professeur à l'université de Strasbourg.

HUXLEY, professeur à l'école des mines, à Londres.

1875 MANSION, professeur à l'université de Gand.

MICHAELIS, O., captain, chief of Ordnance, à Saint-Paul, Minn., département de Dakota (États-Unis).

DEWALQUE, Fr., professeur à l'université de Louvain.

MARIE, M., examinateur à l'École polytechnique, à Paris.

MATHIEU, Em., membre de l'Académie des sciences (Nancy).

EYMER, professeur à l'université de Tubingue.

DE LA VALETTE SAINT-GEORGE, professeur à l'université de Bonn.

RAY-LANKESTER, professeur à l'université de Londres.

PACKARD, professeur à l'université de Salem (États-Unis).

FLEMMING, W., professeur à l'université de Prague.

PLATEAU, F., professeur à l'université de Gand.

RÖMER, F., professeur à l'université de Breslau.

- 1875 SAPORTA (Gaston marquis DE), correspondant de l'Institut de France, à Aix (France).
- 1876 BALFOUR, J. H., professeur de botanique à l'université d'Édimbourg.  
BALFOUR, Th. G. H., membre de la Société royale, à Londres.
- 1877 MAC LACHLAN, Rob., membre de la Société entomologique, à Londres.  
TISSANDIER, Gaston, rédacteur du journal *la Nature*, à Paris.
- 1878 HERTWIG, B., professeur à l'université de Königsberg.  
STRASBURGER, professeur à l'université de Iéna.  
BLUNTSCHLI, professeur à l'université de Heidelberg.  
BRONGNIART, Charles, à Paris.
- 1879 WETTERBY, professeur à l'université de Cincinnati.  
SYLVESTER, professeur à l'université d'Oxford.  
CZUBER, professeur, à Prague.
- 1880 CREMONA, directeur de l'École d'application, à Rome.  
WEYR, Ém., professeur à l'université de Vienne (Autriche).  
IBAÑEZ, général, directeur de l'Institut cartographique, à Madrid.  
BOLIVAR, I., professeur, à Madrid.  
RITSEMA, conservateur au Musée royal d'histoire naturelle, à Leyde.  
RENARD, conservateur au Musée royal d'histoire naturelle, à Bruxelles.  
STUDNIČKA, F., professeur de mathématiques à l'université de Prague.  
GENOCCHI, membre de l'Académie de Turin.  
VAN DER MENSBRUGGE, professeur à l'université de Gand.  
LIAGRE, général, secrétaire perpétuel de l'Académie royale des sciences, etc., de Bruxelles.  
DE TILLY, J., lieutenant-colonel, membre de l'Académie de Belgique.  
BONNET, membre de l'Institut, à Paris.
- 1881 SÉBERT, colonel d'artillerie de la marine française, à Paris.

- 1881 ANGOT, A., attaché au bureau central météorologique de France, à Paris.  
WIEDEMANN, G., professeur à l'université de Leipzig.  
PLANTÉ, G., à Paris.  
KOHLEAUSCH, directeur de l'Institut physique de Wurzburg.  
QUINCKE, professeur de physique, à Heidelberg.  
REY AXEL, professeur à l'École de médecine de Stockholm.  
RETZIUS, G., professeur à l'École de médecine de Stockholm.  
GIORDANO, inspecteur du corps des mines, à Rome.  
MENEHINI, professeur à l'université de Pise.  
GUISCARDI, professeur à l'université de Naples.  
TARAMELLI, professeur à l'université de Pavie.  
LAISANT, député, à Paris.  
BELTRAMI, professeur à l'université de Pavie.  
GESTRO, D<sup>r</sup> R., conservateur au Musée d'histoire naturelle de Gènes.  
SALVADORI (comte Th.), professeur à l'université de Turin.
- 1882 MASCART, membre de l'Institut, à Paris.  
BOUNIAKOWSKI, membre de l'Académie des sciences, à Saint-Pétersbourg.
- 1883 HULL, Edward, directeur du *Geological Survey* d'Irlande.  
SANDBERGER, Fridolin, professeur à l'université de Wurzburg.  
BREITHOF, N., professeur à l'université de Louvain.  
MITTAG-LEFFLER, G., professeur à l'université de Stockholm.  
GOMÈS TEIXEIRA, F., ancien professeur à l'université de Coïmbre.
- 1884 BIERENS DE HAAN, D., professeur à l'université de Leide.  
TRINCHESE, professeur à l'université de Naples.  
GERONO, C., rédacteur des *Nouvelles annales de mathématiques*, à Paris.  
DE HEEN, P., correspondant de l'Académie royale de Belgique, à Louvain.

- 1885 SCHUR, Fréd., professeur à l'université de Leipzig.  
HALPHEN, membre de l'Institut, à Paris.  
PICQUET, répétiteur à l'École polytechnique, à Paris.  
DE LONGCHAMPS (Gohierre), professeur au lycée Charlemagne, à Paris.  
VANĚČEK, J. S., professeur, à Jičín (Bohême).  
CESÀRO, E., professeur à l'université, à Palerme.
-

LISTE  
DES  
SOCIÉTÉS SAVANTES, REVUES, ETC.,

AVEC LESQUELLES

LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LIÈGE

échange ses publications.

---

BELGIQUE.

**Bruxelles.** — *Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*

*Observatoire royal.*

*Société entomologique de Belgique.*

*Société malacologique de Belgique.*

*Société royale belge de géographie.*

*Société belge de microscopie.*

*Musée royal d'histoire naturelle.*

**Liège.** — *Société géologique.*

**Mons.** — *Société des sciences, des lettres et des beaux-arts du Hainaut.*

ALLEMAGNE.

**Berlin.** — *Königliche Akademie der Wissenschaften.*

*Deutsche Geologische Gesellschaft.*

*Entomologischer Verein.*

*Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften.*

**Bonn.** — *Naturhistorischer Verein der Preussischen Rheinlande und Westphalens.*

- Breslau.** — *Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur.*
- Colmar.** — *Société d'histoire naturelle.*
- Erlangen.** — *Physikalisch-medicinische Societät.*
- Francfort.** — *Senckenbergische naturwissenschaftliche Gesellschaft.*
- Fribourg.** — *Naturforschende Gesellschaft.*
- Giessen.** — *Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*
- Görlitz.** — *Naturforschende Gesellschaft.*  
*Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften.*
- Göttingue.** — *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften und Georg-August-Universität.*
- Halle.** — *Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen.*  
*Naturforschende Gesellschaft.*  
*Kaiserliche Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher.*
- Kiel.** — *Naturwissenschaftlicher Verein.*
- Königsberg.** — *Königliche physikalisch-ökonomische Gesellschaft.*
- Landshut.** — *Botanischer Verein.*
- Leipzig.** — *Naturforschende Gesellschaft.*
- Metz.** — *Académie des lettres, sciences, arts et agriculture.*
- Munich.** — *Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften.*  
*Königliche Sternwarte.*
- Munster.** — *Westfälischer Provincial-Verein für Wissenschaften und Kunst.*
- Offenbach.** — *Offenbacher Verein für Naturkunde.*
- Stettin.** — *Entomologischer Verein.*
- Stuttgart.** — *Verein für vaterländische Naturkunde in Württemberg.*
- Wiesbaden.** — *Nassauischer Verein für Naturkunde.*
- Wurzbourg.** — *Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg.*
- Zwickau.** — *Verein für Naturkunde.*



## AUTRICHE-HONGRIE.

**Hermannstadt.** — *Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften.*

**Innsbruck.** — *Naturwissenschaftlich-medicinischer Verein.*

**Prague.** — *Königlich böhmische Gesellschaft der Wissenschaften  
Kaiserlich-Königliche Sternwarte.*

**Vienne.** — *Kaiserliche Akademie der Wissenschaften.  
Kaiserlich-Königliche zoologisch-botanische Gesellschaft.  
Kaiserlich-Königliche geologische Reichsanstalt.*

## ESPAGNE.

**Madrid.** — *Real Academia de Ciencias.*

## FRANCE.

**Béziers.** — *Société d'étude des sciences naturelles.*

**Bordeaux.** — *Académie des sciences, belles-lettres et arts.  
Société linnéenne.  
Société des sciences physiques et naturelles.*

**Caen.** — *Société linnéenne de Normandie.*

**Cherbourg.** — *Société des sciences naturelles.*

**Dijon.** — *Académie des sciences.*

**Lille.** — *Société des sciences, de l'agriculture et des arts.*

**Lyon.** — *Académie des sciences.  
Société d'agriculture.  
Société linnéenne.*

**Montpellier.** — *Académie des sciences et lettres.*

**Nancy.** — *Société des sciences (ancienne Société des sciences naturelles de Strasbourg).*

**Paris.** — *Société géologique de France.  
Société Philomatique.  
Muséum d'histoire naturelle.*

- Rouen.** — *Société des amis des sciences naturelles.*  
*Académie des sciences.*
- Toulouse.** — *Académie des sciences.*  
*Société des sciences physiques et naturelles.*
- Troyes.** — *Société académique de l'Aube.*
- Agen.** — *Société d'agriculture, sciences et arts.*

## GRANDE-BRETAGNE ET IRLANDE.

- Dublin.** — *Royal Irish Academy.*  
*Royal Society.*
- Édimbourg.** — *Geological Society.*
- Londres.** — *Geological Society.*  
*Linnean Society.*  
*Royal Society.*
- Glasgow.** — *Geological Society.*  
*Natural history Society.*  
*Philosophical Society.*
- Manchester.** — *Literary and philosophical Society.*

## ITALIE.

- Bologne.** — *Accademia delle Scienze.*
- Catane.** — *Accademia gioenia di scienze naturali.*
- Gênes.** — *Osservatorio della R. Università.*
- Modène.** — *Società dei naturalisti.*
- Naples.** — *Società Reale.*
- Palerme.** — *Istituto tecnico.*  
*Società di scienze naturali e economiche.*  
*Circolo matematico.*
- Pise.** — *Società di scienze naturali.*
- Rome.** — *Bullettino di bibliografia delle scienze matematiche,*  
publié par le prince B. BONCOMPAGNI.  
*Reale Accademia dei Lincei.*  
*Accademia pontificia de' Nuovi Lincei.*  
*R. Comitato geologico d'Italia.*

## LUXEMBOURG.

**Luxembourg.** — *Institut royal grand-ducal, section des sciences naturelles et mathématiques.*

## NÉERLANDE.

**Amsterdam.** — *Koninklijke Academie van wetenschappen.*

**Harlem.** — *Société hollandaise des sciences.*  
*Musée Teyler.*

**Rotterdam.** — *Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke wijsbegeerte.*

**Delft.** — *École polytechnique.*

## PORTUGAL.

**Coïmbre.** — *Journal des sciences mathématiques et astronomiques, rédacteur : M. GOMÈS TEIXEIRA.*

**Lisbonne.** — *Académie des sciences.*

## RUSSIE.

**Helsingfors.** — *Société des sciences de Finlande.*

**Moscou.** — *Société impériale des naturalistes.*

**Saint-Pétersbourg.** — *Académie impériale des sciences.*  
*Société d'archéologie et de numismatique.*  
*Société entomologique.*  
*Société impériale de minéralogie.*

## SUÈDE ET NORWÈGE.

**Bergen.** — *Museum.*

**Christiania.** — *Kongelige Frederiks Universitet.*

**Stockholm.** — *Académie royale des sciences.*  
*Nordist medicinskt Arkiv, directeur : D<sup>r</sup> AXEL KEY.*  
*Entomologiska föreningen.*  
*Acta mathematica, rédacteur : M. MITTAG-LEFFLER.*

## SUISSE.

- Berne.** — *Naturforschende Gesellschaft.*  
*Société helvétique des sciences naturelles.*
- Neuchâtel.** — *Société des sciences naturelles.*
- Schaffhouse.** — *Naturforschende Gesellschaft.*

## AMÉRIQUE.

### ÉTATS-UNIS.

- American Association for advancement of sciences.*
- Baltimore.** — *American Journal of mathematics.*  
*Johns Hopkins University.*
- Boston.** — *American Academy of arts and sciences.*  
*Society of natural History.*
- Cambridge.** — *Museum of comparative zoology.*
- Columbus.** — *Ohio State agricultural Society.*
- Madison.** — *Wisconsin Academy of sciences, letters and arts.*
- New-Haven.** — *Connecticut Academy of arts and sciences.*
- Newport.** — *Orleans County Society of natural sciences.*
- New-York.** — *Academy of sciences.*
- Philadelphie.** — *Academy of natural sciences.*  
*American philosophical Society.*  
*Wagner Free Institute of sciences.*
- Portland.** — *Natural History Society.*
- Salem.** — *The American Naturalist.*  
*Essex Institute.*  
*Peabody Academy of sciences.*
- San-Francisco.** — *Californian Academy of sciences.*
- Washington.** — *Smithsonian Institution.*

## GUATÉMALA.

- Guatémala.** — *Sociedad economica.*

MEXIQUE.

**Tacubaya.** — *Observatoire national.*

RÉPUBLIQUE ARGENTINE.

**Buenos-Ayres.** — *Universidad.*

ASIE.

—  
INDES ANGLAISES.

**Calcutta.** — *Asiatic Society of Bengal.*

INDES HOLLANDAISES.

**Batavia.** — *Koninklijke natuurkundige vereeniging in Nederlandsch Indië.*

AUSTRALIE.

**Hobart-Town.** — *Tasmanian Society of natural sciences.*

**Melbourne.** — *Observatoire.*

**Sydney.** — *Linnean Society.*

*Royal Society of New South Wales.*





# ALLOCUTION

PRONONCÉE

DANS LA SALLE ACADÉMIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE

LE 7 DÉCEMBRE 1884

---

MESDAMES, MESSIEURS,

L'émotion me rendrait absolument muet, si je n'avais eu la précaution de préparer, à l'avance, quelques paroles de remerciements pour les honneurs dont vous m'accablez. Elles sont loin de rendre ce que j'éprouve; mais vous connaissez la maxime : *Si la lettre tue, l'esprit vivifie.*

Je dois, avant tout, rendre grâce à ceux qui ont eu l'idée de cette manifestation, si glorieuse pour moi; et, en particulier, à M. Demaret, le jeune et zélé Président du Comité d'organisation. En second lieu, je prie mon illustre ami Tchébycheff, et MM. Folie, Mansion, Neuberg, Le Paige, ... mes savants Confrères, d'agréer l'expression de ma reconnaissance. Malheureusement, quelques-uns de ceux que j'aurais voulu voir ici n'y sont pas. M. Hermite, Président d'honneur, et le plus éminent des Géomètres français, aurait voulu assister à cette cérémonie : des devoirs impérieux le retiennent à Paris. M. le général Liagre, qui ne manque jamais de me prouver sa vive affection, m'avait promis de nous présider : des circonstances douloureuses l'empêchent de quitter Bruxelles. Ce matin même, j'ai reçu de mon vieux camarade Tresca, mon ami depuis plus de cinquante ans, une triste lettre : la maladie l'empêche de venir (\*). Enfin, M. Souillart, Professeur à la Faculté des sciences, de

(\*) Il est mort l'année dernière, après m'avoir, peut-être, sauvé la vie!  
(Décembre 1886.)

Lille, et délégué par la Société des sciences, est également retenu par une indisposition.

Vous avez devant vous, Messieurs, le chef-d'œuvre qui met le comble à la réputation dont jouit, si justement, M. Delpérée. L'habile artiste me permettra d'ajouter, à vos chaleureux applaudissements, mes plus vives félicitations.

Enfin, je vous remercie tous, amis connus ou inconnus, vous qui, après avoir rendu possible cette fête, en rehaussez l'éclat par votre présence !

Je serais coupable d'ingratitude si, dans cette rapide énumération, j'oubliais la Belgique, si hospitalière pour moi et pour tous les Français. Mais ce mauvais sentiment n'a jamais eu accès dans mon âme. D'ailleurs, comment pourrais-je oublier ce que je dois à votre pays ? Ne suis-je pas, pour vous, un *quasi*-compatriote ? Ne suis-je pas né à Bruges, comme mon savant Collègue et ami vient de le rappeler ? Aussi, en toutes circonstances, j'ai manifesté l'affection que j'éprouve pour ma seconde patrie (la première, suivant M. Mansion). Permettez-moi d'en donner une preuve.

Il y a quinze ans, je venais de lire, en séance publique de la Classe des sciences, le rapport sur le concours quinquennal. M. Quetelet voulut me présenter au Roi des Belges, présent à la séance.

Après qu'il m'eut adressé quelques félicitations, je lui lançai cette apostrophe, qui étonna peut-être un peu : « Sire, puisque » l'occasion s'en présente, je vous dirai que j'ai trouvé, en » Belgique, le bien-être et la sécurité qui me manquaient en » France. J'en remercie la Belgique et son Gouvernement. »

Aujourd'hui, Messieurs, la situation a changé : la France est libre, sinon heureuse ; mais ma reconnaissance envers la Belgique reste entière.

M. Mansion, dans son consciencieux et trop bienveillant Rapport, ne s'est pas contenté d'analyser, en excellents termes, des travaux bien arides : il a fait la biographie de l'Auteur. Permettez que celui-ci la complète en quelques points.

Si mes débuts dans la vie furent pénibles, j'ai été cependant,



je dois le dire, heureusement servi par les circonstances : les encouragements, surtout, ne m'ont jamais manqué. Tout à l'heure, M. Mansion citait Lefébure de Fourcy, à qui je dois d'être entré à l'École polytechnique; mais, dès 1827, de modestes savants avaient bien voulu s'intéresser à moi. Que ne puis-je évoquer ici les images de Lavit, de Douliot, mes excellents Professeurs à l'École gratuite de dessin ! Comme je les aimais ! Comme ils m'aimaient ! Mais je suis forcé d'abrégéer.

Encore *gamin de Paris* (bon gamin!), j'ai vu Legendre et j'ai connu Bouvart : parfois, je fus aide (bénévole) de Hachette et d'Ampère. Après ma sortie de l'École polytechnique, je suis devenu le disciple et l'ami de Liouville, de Sturm, de Lamé, d'Arago, de Chasles. Plus tard, Poisson, Cauchy, Dirichlet, Jacobi, Steiner, Poncelet m'ont accueilli avec une grande bienveillance (\*). De leurs savantes leçons, de leurs entretiens, il est resté quelque chose. Il n'en pouvait être autrement : depuis des siècles, l'influence des milieux est incontestable et incontestée. Le poète Saadi n'a-t-il pas fait parler ainsi une humble plante : « *Je ne suis pas la rose, mais j'ai vécu dans son voisinage* » ? Pour moi, ne pouvant m'élever au niveau de mes illustres maîtres, j'ai tâché, par reconnaissance, de ne pas rester trop au-dessous d'eux.

Deux passions, Messieurs, ont surtout rempli ma vie : la *Politique militante* et la *Mathématique*, comme on disait autrefois. Un discours sur la Politique serait de mauvais goût, serait déplacé dans cette enceinte. Puis, nous ne serions peut-être pas d'accord, vous et moi. Il n'en sera pas de même, j'en suis convaincu, si je soumetts à mes chers élèves, anciens et nouveaux, non une *Dissertation sur les délices des Mathématiques* (cela

(\*) Par suite d'un inexplicable oubli, cette liste ne contient pas le nom de L. B. *Françœur*, Professeur à la Sorbonne, dont les ouvrages et les leçons furent si utiles au futur Élève de l'École Polytechnique ! Vers la fin de sa carrière scientifique, cet excellent Maître me fit l'honneur et l'amitié de me désigner comme son suppléant : j'ai fait, en cette qualité, une leçon. Mais un célèbre *Agrégé de Faculté* vint se mettre à la traverse, et voulut suppléer M. *Françœur* malgré M. *Françœur*. L'honorable Professeur, justement blessé, acheva son cours; après quoi, il donna sa démission.

nous mènerait trop loin), mais quelques réflexions, bien simples, relatives au travail intellectuel.

Beaucoup de jeunes gens, surtout les aspirants à un diplôme, s'imaginent que, *pour arriver*, il suffit de faire, de temps en temps, un effort extraordinaire. Ils se trompent. Pour atteindre un but, même quand on l'aperçoit nettement, rien ne sert de marquer le pas : il faut marcher, marcher constamment. Ici, les exemples et les *autorités* abondent.

On demandait à Newton : « Comment avez-vous découvert la gravitation » ? — « En y pensant toujours », répondit le grand homme. Après avoir rapporté cette anecdote, Voltaire ajoute : « C'est le secret de toutes les grandes découvertes : le génie, » dans les sciences, ne dépend que de l'intensité et de la durée » de l'attention dont la tête d'un homme est susceptible ». C'est presque la pensée que l'on attribue à Buffon : « Le génie est une longue patience ». Enfin, Gauss, vous le savez, avait adopté cette devise : « *Pauca, sed bona* », qu'il appliquait à son travail quotidien. Il est vrai que Pascal, à l'âge de dix-sept ans, découvrait l'*hexagrammaticum mysticum*; mais, dans les sciences comme dans les lettres, Pascal a été un phénomène unique.

Si le travail modéré et continu est le plus sûr moyen de développer les facultés cérébrales, il a d'autres effets, plus importants : il est le grand consolateur ! Au risque d'être accusé du péché d'orgueil, je me citerai encore comme exemple. A diverses époques, j'ai éprouvé de cruels malheurs de famille, ou j'ai subi le contre-coup d'épouvantables catastrophes. Pour échapper à de tristes pensées, pour ne pas me laisser abattre par le chagrin, je me suis (passez-moi l'expression) *réfugié dans le travail*. Il a calmé mes douleurs de père, de citoyen et de patriote. Donc, mes jeunes amis, si les mauvais jours viennent, rappelez-vous que *la vie est un combat* ! En les attendant, travaillez avec ardeur ; et, si ce conseil de votre vieux Professeur est impuissant à vous déterminer, j'y ajouterai un vœu que vous agréerez : « Puisse-nous, longtemps encore, travailler ensemble ! »



# MÉLANGES

# MATHÉMATIQUES

PAR

**EUGÈNE-CHARLES CATALAN,**

Ancien élève de l'École polytechnique, Professeur émérite à l'Université de Liège;  
Associé de l'Académie de Belgique, de l'Académie des sciences de Toulouse  
et de la Société des sciences de Lille;  
Correspondant des Académies de St-Petersbourg, de Turin, des *Nuovi Lincei*;  
Membre de la Société des sciences de Liège,  
de la Société mathématique de France et de la Société philomathique de Paris;  
Correspondant de la Société mathématique d'Amsterdam,  
de l'Institut national génois, de la Société havraise d'études diverses  
et de la Société d'agriculture de la Marne.

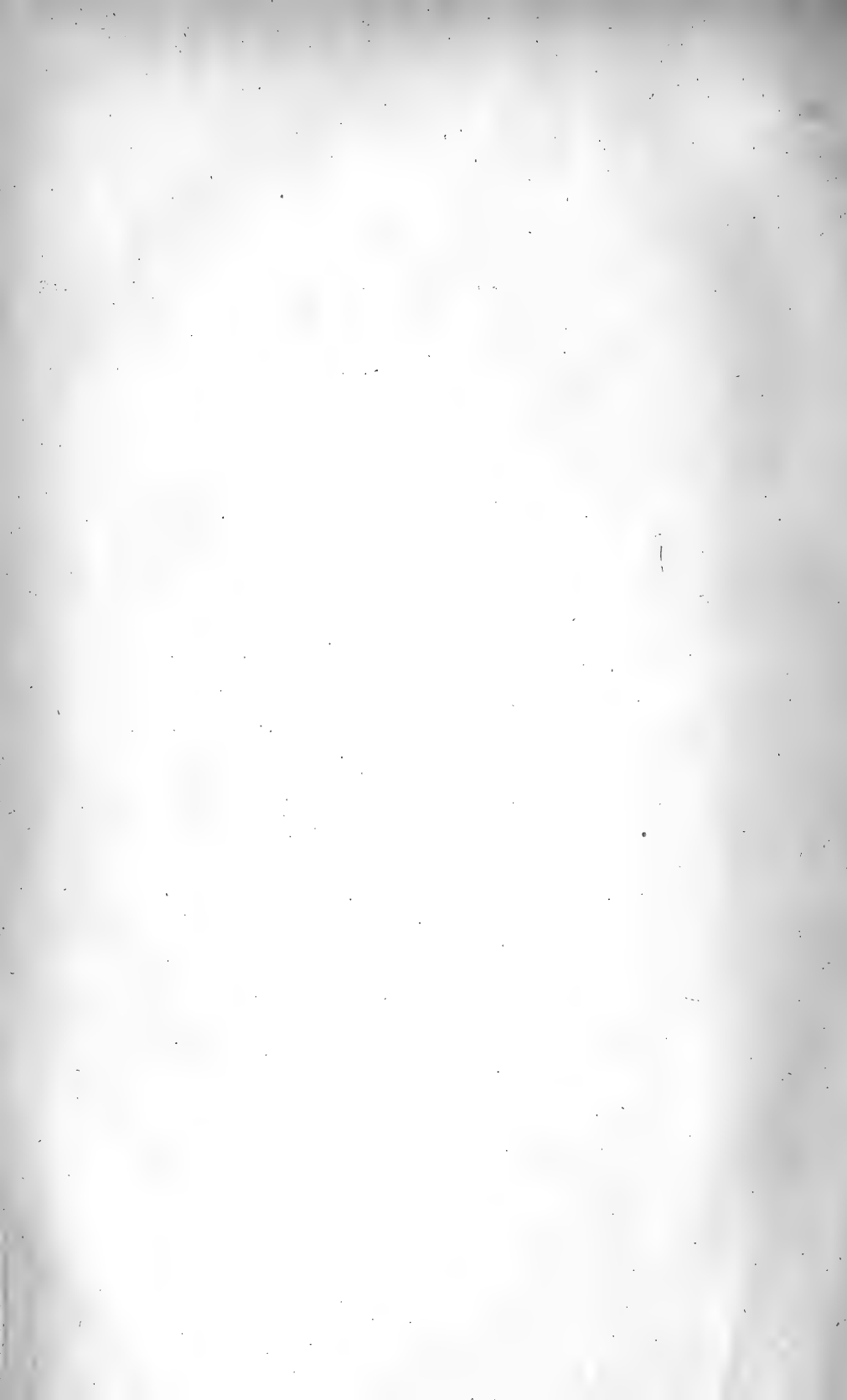
---

« Ceci est mon testament. »

---

TOME DEUXIÈME.

---



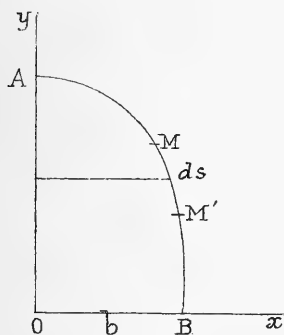
# MÉLANGES

## MATHÉMATIQUES.

### XCIV. — Problème proposé par M. Steiner.

(Juin 1841) (\*).

*On donne deux plans parallèles. Quelle doit être la figure d'un corps touchant les deux plans, et dont la surface a une aire donnée, pour que le volume de ce corps soit maximum?*



J'admets que cette surface est de révolution autour d'une perpendiculaire aux plans donnés, et qu'elle est symétrique par rapport au plan de symétrie de ces deux autres plans.

Soient  $O$  le centre de la courbe méridienne;  $Ox$ ,  $Oy$  les axes coordonnés,  $Oy$  étant l'axe de rotation.

On a

$$OA = a,$$

demi-distance des plans donnés.

L'aire de la surface est

$$2 \cdot 2\pi \int_0^b x ds = 4\pi \int_0^b x dx \sqrt{1 + y'^2} = 4\pi l^2;$$

$l$  représentant une longueur connue.

(\*) A cette époque, Steiner était à Paris, et m'honorait de sa bienveillance. C'est, probablement, dans une conversation particulière qu'il m'a proposé ce problème.

Le volume est donné par la formule

$$V = 2\pi \int_0^a x^2 dy = 2\pi \int_0^b x^2 y' dx.$$

$\lambda$  étant un facteur constant, on doit donc poser

$$\delta \int_0^b [\lambda x \sqrt{1 + y'^2} + x^2 y'] dx = 0. \tag{1}$$

Ainsi, avec les notations ordinaires :

$$\left. \begin{aligned} U &= \lambda x \sqrt{1 + y'^2} + x^2 y', & M &= \lambda \sqrt{1 + y'^2} + 2xy', \\ N &= 0, & P &= \frac{\lambda xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} + x^2. \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

L'équation

$$N - \frac{dP}{dx} = 0$$

se réduit à

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\lambda xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} + x^2 \right] = 0. \tag{5}$$

Il en résulte

$$\frac{\lambda xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} + x^2 = c^2;$$

puis

$$dy = \frac{c^2 - x^2}{\sqrt{\lambda^2 x^2 - (c^2 - x^2)^2}} dx. \tag{4}$$

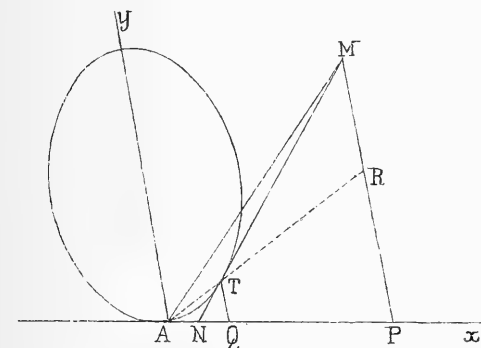
Telle est l'équation différentielle de la courbe méridienne.

..... (\*)

(\*) Je supprime les calculs suivants, devenus inutiles par suite des remarquables Notes de Delaunay et de Sturm, publiées dans le *Journal de Liouville* en cette même année 1841 (mais au mois d'août). D'après le théorème de mon infortuné Camarade, la courbe méridienne est engendrée par un foyer d'une certaine conique roulant sur une droite. (Mai 1885.)

**XCV. — Question proposée au Concours général de 1841.**

Par un point  $A$ , donné sur une courbe du second degré, on mène une tangente fixe  $AN$  et une sécante mobile  $AM$ . On trace aussi la bissectrice  $AT$  de l'angle  $MAN$  et la tangente  $MTN$ . Quel est le lieu des points  $M$  (\*)?



tangente en  $T$  est

$$xx' = m(y + y') + ny'y'. \quad (2)$$

Menons  $TQ$ ,  $MP$  parallèles au diamètre  $Ay$ ; soit  $R$  le point où  $AT$  coupe  $MP$ .

On a 
$$\frac{TQ}{AQ} = \frac{RP}{AP};$$

et, par la propriété de la bissectrice,

$$\frac{RP}{AP} = \frac{MP}{AM + AP}.$$

Donc

$$TQ(AM + AP) = AQ \cdot MP (**),$$

(\*) J'ignore si une solution de ce problème a été publiée.

(\*\*) Autrement dit :

$AD$  étant une bissectrice du triangle  $ABC$ ; soient  $CC'$ ,  $DD'$  deux droites parallèles, limitées au côté  $AB$ . On a

$$\frac{DD'}{AD'} = \frac{CC'}{AC + AC'}.$$

ou

$$(AM + x)y' = yx',$$

ou encore,  $\theta$  étant l'angle des axes :

$$y' \sqrt{x^2 + 2xy \cos \theta + y^2} = yx' - xy'.$$

Si l'on élève au carré, cette équation devient

$$y'^2(y + 2x \cos \theta) = yx'^2 - 2x'y'x. \quad (5)$$

Des équations (1), (2), on déduit

$$yx'^2 - 2y' \cdot xx' = (2my' + ny'^2)y - 2my'(y + y') - 2nyy'^2,$$

ou

$$yx'^2 - 2xx'y' = -(2m + ny)y'^2.$$

D'après l'égalité (5), le premier membre équivaut à  $y'^2(y + 2x \cos \theta)$ . L'équation du lieu est donc, après suppression de  $y'^2$ ,

$$(1 + n)y + 2x \cos \theta + 2m = 0. \quad (4)$$

Elle représente une droite.

*Addition.* — (Mai 1885.)

On simplifie les calculs précédents si l'on prend, pour axes, la tangente et la normale en A.

$x'$ ,  $y'$  étant les coordonnées du point T :

$$Ay'^2 + By' + x'^2 + Dy' = 0 (*). \quad (5)$$

L'équation de la tangente MN, *polaire* de T, est, par la règle connue :

$$(2Ay + Bx + D)y' + (By + 2x)x' + Dy = 0. \quad (6)$$

(\*) *Note* LII. Cette Note renferme une faute de signe : à partir de l'équation (2), on doit lire + D au lieu de - D.



Soit

$$\frac{y'}{x'} = k;$$

et, par conséquent,

$$\frac{y}{x} = \frac{2k}{1 - k^2}. \quad (7)$$

L'élimination de  $y'$  donne

$$x' = -\frac{Dk}{Ak^2 + Bk + 1} = -\frac{Dy}{(2Ay + Bx + 1)k + By + 2x};$$

puis

$$(Ay + Bx + D)k^2 + 2x \cdot k - y = 0. \quad (8)$$

D'ailleurs, par la formule (7) :

$$-k^2y - 2kx + y = 0.$$

Si l'on ajoute, on obtient donc, comme équation de la droite A, lieu du point M :

$$(A - 1)y + Bx + D = 0. \quad (9)$$

Cette équation prouve que la droite  $\Delta$  a une liaison remarquable avec le *point de Frégier* (\*).

En effet, le *point de Frégier* a pour coordonnées :

$$\alpha = 0, \quad \beta = -\frac{D}{A + 1} (**).$$

L'équation de la polaire de ce point est donc

$$\left(-2A \frac{D}{A + 1} + D\right)y - \frac{BD}{A + 1}x - \frac{D^2}{A + 1},$$

ou

$$(A - 1)y + Bx + D = 0. \quad (10)$$

Ainsi, la droite  $\Delta$  est la polaire du point de Frégier. C'est ce que l'on peut vérifier par de simples considérations géométriques.

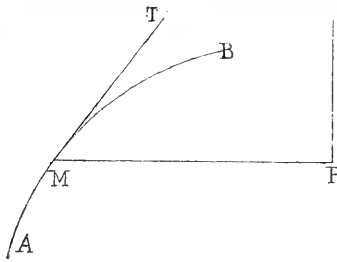
(\*) J'appelle ainsi le point fixe déterminé par le *Théorème de Frégier* (NOUVELLES ANNALES, t. II, p. 186. Voyez aussi la *Note LII*, déjà citée).

(\*\*) *Note LII*.

**XCVI. — Lignes de courbure d'une surface gauche.**

(Février 1864.)

I. AMB étant la directrice, soit MP une génératrice quelconque.



Désignons par  $a, b, c$  les coordonnées de  $M$ ; par  $l, m, n$  les cosinus directifs de cette droite; par  $v$  la distance  $MP$ . Il est clair que

$$\left. \begin{aligned} x &= a + lv, \\ y &= b + mv, \\ z &= c + nv. \end{aligned} \right\} (1)$$

Dans ces formules,  $a, b, c, l, m, n$  sont des fonctions, connues, d'une certaine variable  $u$  (\*).

Comme dans le Mémoire cité, nous représenterons, par des accents, les dérivées relatives à  $u$ , et nous emploierons les abréviations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} A &= \sum a'^2, & B &= \sum a'l', & C &= \sum l'^2, \\ U &= \sum la', & D^2 &= \sum (ny' - mz')^2, \end{aligned} \right\} (2)$$

$$M = \sum (mn' - nm')a', \quad N = \sum (ny' - mz')x'', \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} P &= \sum (nm' - mn'l''), & Q &= \sum (nm' - mn')a'' - \sum (nm'' - mn'')a', \\ R &= \sum (nb' - mc')a''. \end{aligned} \right\} (4)$$

II. Il existe, entre les quantités  $N, P, Q, R$ , une relation simple (\*\*) analogue à

$$D^2 = A + 2Bv + Cv^2 - U^2 (***) \quad (5)$$

(\*) *Recherches sur les surfaces gauches*, p. 5.

(\*\*) En 1865, je ne l'avais point remarquée. (Mai 1885.)

(\*\*\*) *Recherches sur les surfaces gauches*, pp. 6 et 67.

D'après les valeurs (1), il est clair que :

$$\begin{aligned} x' &= a' + l'v, & y' &= b' + m'v, & z' &= c' + n'v, \\ x'' &= a'' + l''v, & y'' &= b'' + m''v, & z'' &= c'' + n''v. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} (ny' - mz')x'' &= [n(b' + m'v) - m(c' + n'v)](a'' + l''v) \\ &= [(nb' - mc') + (nm' - mn'v)](a'' + l''v); \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} N &= \sum (nb' - mc')a'' + v \sum (nb' - mc')l'' + v \sum (nm' - mn')a'' \\ &\quad + v^2 \sum (mn' - mn'')l''. \end{aligned}$$

Dans le deuxième terme du second membre, le coefficient de  $v$  est

$$\begin{aligned} (nb' - mc')l'' + (lc' - na')m'' + (ma' - lb')n'' \\ = - \sum (nm'' - mn'')a''. \end{aligned}$$

Si l'on compare la valeur de  $N$  aux formules (4), on a donc la relation annoncée :

$$N = R + Qv + Pv^2. \quad (6)$$

III. Soient  $f, g, h$  les cosinus directifs de la normale  $PN$  à la surface  $S$ . On sait que (\*)

$$f = \frac{ny' - mz'}{D}, \quad g = \frac{lz' - nx'}{D}, \quad h = \frac{mx' - ly'}{D}. \quad (7)$$

D'un autre côté, les lignes de courbure qui se croisent en  $P$  sont représentées par les équations

$$\frac{dx}{df} = \frac{dy}{dg} = \frac{dz}{dh}. \quad (8)$$

Parmi les diverses combinaisons de ces formules, je choisirai celle-ci :

$$\frac{\sum ldx}{\sum ldf} = \frac{\sum x'dx}{\sum x'df}. \quad (9)$$

(\*) *Recherches sur les surfaces gauches*, p. 7.

La question se réduit à évaluer les quatre sommes indiquées.

$$1^{\circ} \quad \sum l dx = du \sum l u' + v du \sum l' + dv.$$

Le troisième terme est évidemment nul. Quant au deuxième, il représente le cosinus de l'angle TMP, si, comme on peut le supposer, la variable  $u$  est l'arc AM. Admettons, en outre, que la directrice AMB soit une trajectoire orthogonale des génératrices : alors

$$U = \sum l a' = 0, \quad \sum l x' = 0, \quad (10)$$

et

$$\sum l dx = dv. \quad (11)$$

$$2^{\circ} \quad \sum x' dx = \sum x' (x' du + l dv) = du \sum x'^2 \\ = du \sum (a' + l'v)^2 = (A + 2Bv + Cv^2) du;$$

ou, à cause de  $U = 0$  :

$$\sum x' dx = D^2 du. \quad (12)$$

3° L'angle MPN étant droit, on a  $\sum l f = 0$ ; et, par conséquent,

$$\sum l df = - \sum f dl = - du \sum f l'.$$

$$f l' = \frac{1}{D} (ny' - mx') l' = \frac{1}{D} [(nb' - mc') + (nm' - mn')v] l'.$$

Donc

$$\sum f l' = \frac{1}{D} \sum (nb' - mc') l' (*) = \frac{1}{D} \sum (mn' - nm') a' = \frac{M}{D};$$

puis

$$\sum l df = - \frac{M}{D} du. \quad (15)$$

(\*) Parce que

$$\sum (nm' - mn') l' = 0.$$

$$4^{\circ} \quad \sum x' df = d \sum fx' - du \sum fx'' - dv \sum fl'.$$

Dans le second membre, la première somme est nulle; la deuxième égale  $\frac{M}{D}$ . Ainsi déjà :

$$\sum x' df = - du \sum fx'' - \frac{M}{D} dv.$$

Par la formule (5),

$$\sum fx'' = \frac{N}{D}; \quad (14)$$

done

$$\sum x' df = - \frac{1}{D} [Ndu + Mdv]. \quad (15)$$

Rassemblant ces différents résultats, j'obtiens, au lieu de l'équation (9) :

$$\frac{dv}{Mdu} = \frac{D^2 du}{Ndu + Mdv},$$

ou

$$Mdv^2 + Ndu dv - MD^2 du^2 = 0. \quad (16)$$

Telle est l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface gauche.

IV. Admettons que les génératrices, supposées orthogonales à la directrice AMB (III, 1°), soient les normales principales de cette courbe. Alors les cosinus  $l, m, n$  sont proportionnels à  $a'', b'', c''$  (\*).

De là résulte que

$$R = \sum (nb' - mc')a'' = 0.$$

(\*) En effet, à cause de  $u = AM = s$ , les cosinus directs de la tangente MT sont  $a', b', c'$ ; les cosinus directs de la tangente voisine sont

$$a' + a''du, \quad b' + b''du, \quad c' + c''du.$$

Done les cosinus directs de la binormale sont proportionnels aux binômes

$$b'c'' - c'b'', \quad c'a'' - a'c'', \quad a'b'' - b'a'';$$

etc.

Cela posé, considérons les deux lignes de courbure MC, MC' qui se croisent en M. Pour ce point,  $v = 0$ ; donc

$$D^2 = A = 1 \text{ (*)}, \quad N = 0.$$

L'équation (16) se réduit à

$$dv^2 - du^2 = 0.$$

Celle-ci exprime le théorème suivant, qui n'a peut-être pas été remarqué :

*Les lignes de courbure de la surface gauche, lieu des normales principales d'une courbe C, rencontrent la directrice sous un angle de  $45^\circ$ .*

La réciproque est vraie :

*Si les lignes de courbure d'une surface gauche coupent, sous un angle de  $45^\circ$ , une trajectoire orthogonale des génératrices, ces droites sont les normales principales de la courbe.*

En effet,  $\pm 1$  étant les racines de l'équation (16) (\*\*), on doit avoir  $R = 0$ , ou

$$\sum (b'c'' - c'b'')l = 0.$$

D'ailleurs,

$$\sum a'l = 0.$$

Or, ces équations sont vérifiées par

$$l = ka'', \quad m = kb'', \quad n = kc''.$$

Done les cosinus directifs de MP sont proportionnels à  $a''$ ,  $b''$ ,  $c''$ .

*Addition.* — (Mai 1885.)

V. Lorsque  $v = 0$ ,  $N = R$ ,  $D = 1$ ; et l'équation (16) se réduit à

$$Mdv^2 + Rdu dv - Mdu^2 = 0. \quad (17)$$

(\*) A cause de

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1.$$

(\*\*) Il est visible que, pour  $v = 0$ ,  $\frac{dv}{du}$  représente la tangente de l'angle formé par la tangente MT et la ligne MC.

On en conclut

$$dv = -\frac{R \pm \sqrt{R^2 + 4M^2}}{2M} du. \quad (18)$$

R et M ne contiennent que  $u$ ; donc le second membre est une différentielle exacte.

Si l'on fait

$$R = -2M \cot \varphi,$$

on trouve

$$\frac{du}{dv} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi, \quad \frac{du}{dv} = -\cot \frac{1}{2} \varphi. \quad (19)$$

VI. Dans le Mémoire cité plusieurs fois, j'ai donné (p. 67), comme équation du lieu des points pour lesquels *la courbure moyenne est nulle* :

$$Pv^2 + Qv + R = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que AMB soit une de ces lignes, est donc  $R = 0$ . En conséquence (IV) :

*Toute courbe C est une ligne de courbure moyenne nulle, relativement à la surface engendrée par les normales principales de C (\*)*.

VII. *Remarque.* — Au moyen de cette proposition, le théorème démontré dans le paragraphe IV devient évident.

En effet, *la somme des courbures des sections principales en M, égale à la somme des sections normales dirigées suivant MT et suivant MP (\*\*), est nulle. Donc la formule d'Euler se réduit à*

$$\frac{1}{R_t} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0;$$

et il en résulte

$$\operatorname{tg} \theta = \pm 1 (**).$$

(\*) BERTRAND, *Journal de Liouville*, t. XV, p. 554.

(\*\*) D'après la formule d'Euler.

(\*\*\*) Cette démonstration est celle dont j'ai fait usage pour déterminer les lignes de courbure de l'hélicoïde à plan directeur (JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, 29<sup>e</sup> Cahier, p. 142). Par la considération de l'indicatrice, on peut encore abrégier.

**XCVII. — Lignes asymptotiques d'une surface gauche.**

( Mars 1864. )

I. L'équation de ces lignes est, généralement,

$$tdy^2 + 2sdx dy + rdx^2 = 0 (*). \quad (1)$$

A cause de

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy,$$

elle équivaut à

$$dpdx + dqdy = 0.$$

Or,

$$d^2z = pd^2x + qd^2y + dpdx + dqdy;$$

donc on peut prendre, au lieu de l'équation (1) :

$$d^2z = pd^2x + qd^2y. \quad (2)$$

II. Dans le cas où la surface est gauche :

$$p = \frac{ny' - mz'}{ly' - nz'}, \quad q = \frac{lz' - nx'}{ly' - nz'} (**);$$

et l'équation (2) devient

$$\sum (ny' - mz') d^2z = 0. \quad (3)$$

De

$$x = a + lv (***),$$

on tire

$$dx = x' du + l dv,$$

$$d^2x = x'' du^2 + 2l' du dv;$$

(\*) *Recherches sur les surfaces gauches*, p. 45.

(\*\*) *Ibid.*, p. 6.

(\*\*\*) Voir la Note précédente.



et, par conséquent,

$$\sum (ny' - mz')d^2x = du^2 \sum (ny' - mz')x'' + 2du dv \sum (ny' - mz')l'.$$

La première somme a pour valeur N. La seconde égale M (\*).  
Donc, après suppression du facteur du (\*\*), l'équation des lignes asymptotiques est

$$Ndu + 2Mdv = 0, \quad (4)$$

ou bien

$$(Pv^2 + Qv + R)du + 2Mdv = 0 \quad (***) \quad (5)$$

III. Pour simplifier celle-ci, posons

$$v = -\frac{Q}{2P} + w,$$

expression d'où résulte

$$dv = -\frac{1}{2} \left( \frac{Q}{P} \right)' du + dw,$$

puis, au lieu de l'équation (5) :

$$\left[ w^2 - \frac{Q^2}{4P^2} + \frac{R}{P} - \frac{M}{P} \left( \frac{Q}{P} \right)' \right] du + \frac{2M}{P} dw = 0. \quad (6)$$

IV. Si  $v = 0$ , l'équation se réduit à

$$Rdu + 2Mdv = 0. \quad (7)$$

Posons, comme ci-dessus (p. 11),  $R = -2M \cot \varphi$ . Alors,

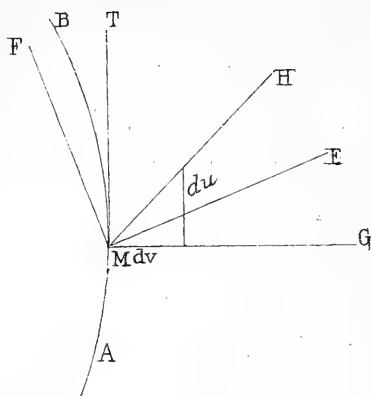
$$\frac{du}{dv} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (8)$$

AMB étant une *trajectoire orthogonale quelconque*, soit MG la génératrice qui passe en M. Considérons, dans le plan tangent

(\*) Page 6, formules (3).

(\*\*)  $du = 0$ , ou  $u = \text{const.}$ , représente une génératrice.

(\*\*\*) Cette équation (5) n'est pas généralement intégrable; mais on la ramène à une équation linéaire : 1° lorsque  $R = 0$ ; 2° quand on en connaît une intégrale particulière. (Mai 1885.)



GMT, la tangente MH à la seconde ligne asymptotique, et les tangentes ME, MF aux sections principales : ces deux dernières droites sont les bissectrices de GMH et de son supplément.

A l'inspection de la figure, et d'après la formule (8),  $HMG = \varphi$ .

Quand il s'agissait des sections principales, nous avons trouvé (p. 11) :

$$\frac{du}{dv} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi, \quad \frac{du}{dv} = - \cot \frac{1}{2} \varphi.$$

Il est clair que ces trois résultats s'accordent.

En résumé, la recherche des lignes de courbure de S se réduit à l'intégration de l'équation (5), beaucoup plus simple que l'équation (16) de la Note précédente.

### **XCVIII. — Détermination d'une constante. (1876) (\*).**

I. Dans son célèbre *Mémoire sur les intégrales définies eulériennes* (\*\*), Binet forme, très péniblement, l'équation

$$2 \zeta \cdot \Gamma(2x) = (-1 + 4x) \zeta \cdot (2x) + \zeta^2(2x) - 4x + 2\varpi(2x); \quad (1)$$

d'où il aurait pu conclure

$$\varpi \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \zeta \cdot 2. \quad (2)$$

M. Bertrand, par un procédé tout autre, a déterminé cette

(\*) Cette Note est tirée du Mémoire intitulé : *Recherches sur la constante G, et sur les intégrales eulériennes.*

(\*\*) *Journal de l'École polytechnique*, 27<sup>e</sup> Cahier, pp. 240 et 241.

valeur; mais sa méthode est un peu longue. Voici celle que j'expose dans mon cours (\*).

Soit, suivant une notation souvent employée,

$$\varphi(x) = \mathcal{L}^{\circ} \Gamma(x). \quad (5)$$

On a, par une formule connue, dont la vérification est facile :

$$\varphi'(x+1) = \mathcal{L}^{\circ} x + \frac{1}{2x} + \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{e^{\alpha} - 1} - \frac{1}{2} \right) e^{-\alpha x} d\alpha (**); \quad (4)$$

et, en conséquence,

$$\varphi(x+1) = k + x \mathcal{L}^{\circ} x - x + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{\circ} x + \varpi(x);$$

ou, plus simplement,

$$\varphi(x) = k + \left( x - \frac{1}{2} \right) \mathcal{L}^{\circ} x - x + \varpi(x); \quad (5)$$

$k$  est la constante d'intégration, qu'il s'agit de déterminer.

La formule de Legendre :

$$\frac{\Gamma(2x)}{\Gamma(x)} = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

équivaut à

$$\varphi(2x) - \varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{1}{2}\right) = (2x-1) \mathcal{L}^{\circ} 2 - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{\circ} \pi. \quad (6)$$

Or :

$$\varphi\left(x + \frac{1}{2}\right) = k + x \mathcal{L}^{\circ} \left(x + \frac{1}{2}\right) - x - \frac{1}{2} + \varpi\left(x + \frac{1}{2}\right),$$

$$\varphi(2x) = k + \left(2x - \frac{1}{2}\right) \mathcal{L}^{\circ} (2x) - 2x + \varpi(2x);$$

donc le premier membre de l'égalité (6) a pour valeur :

$$-k + \left(2x - \frac{1}{2}\right) \mathcal{L}^{\circ} 2 + x \mathcal{L}^{\circ} \frac{x}{x + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} + \varpi(2x) - \varpi(x) - \varpi\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

(\*) Plus exactement : que j'exposais.

(\*\*) A la page 17 du Mémoire cité, on a imprimé  $dx$  au lieu de  $d\alpha$ .

Après quelques réductions, cette égalité se transforme en

$$-k - x \zeta \left( 1 + \frac{1}{2x} \right) + \frac{1}{2} + \varpi(2x) - \varpi(x) - \varpi \left( x + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} \zeta(2\pi).$$

Si l'on fait croître  $x$  indéfiniment, le premier membre tend vers  $(-k)$  (\*).

Ainsi

$$k = \frac{1}{2} \zeta(2\pi);$$

et enfin, au lieu des égalités (1) et (5) :

$$\zeta \cdot \Gamma(x) = \varphi(x) = \frac{1}{2} \zeta(2\pi) + \left( x - \frac{1}{2} \right) \zeta \cdot x - x + \varpi(x). \quad (7)$$

II. *Remarque.* — Au moyen de cette formule, l'égalité (6) se transforme en

$$\varpi(2x) - \varpi(x) - \varpi \left( x + \frac{1}{2} \right) = x \zeta \left( 1 + \frac{1}{2x} \right) - \frac{1}{2} (**). \quad (8)$$

(\*) A cause de

$$x \zeta \left( 1 + \frac{1}{2x} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + \dots$$

(\*\*) A la page 224 du Mémoire de Binet, on lit :

$$\begin{aligned} & \ll 2^\mu \left( p + \frac{1}{2} \right) + 2^{\mu(p)} - 2^{\mu(2p)} = \\ & \frac{1}{2(2p+1)} + \frac{1}{2 \cdot 5(2p+1)^2} + \frac{1}{5 \cdot 4(2p+1)^3} + \text{etc.} \gg \end{aligned}$$

Avec notre notation, cette égalité devient

$$\varpi(2x) - \varpi(x) - \varpi \left( x + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2(2x+1)} + \frac{1}{2 \cdot 5(2x+1)^2} + \frac{1}{5 \cdot 4(2x+1)^3} + \dots \right].$$

La somme de la série est

$$1 + 2x \zeta \cdot \left( 1 - \frac{1}{2x+1} \right),$$

ou

$$1 - 2x \zeta \cdot \left( 1 + \frac{1}{2x} \right).$$

Donc, la formule (8) ne diffère pas, au fond, de celle de Binet.

Addition. — (Juin 1885.)

II. La formule (8), que Binet n'a pas formellement indiquée, est donc une *traduction* du théorème de Legendre. Si l'on remplace la fonction  $\varpi(x)$ , de Binet, par sa valeur :

$$2 \int_0^{\infty} \frac{d\beta}{e^{2\pi\beta} - 1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\beta}{x} \quad (*),$$

le premier membre de l'égalité (8) devient

$$2 \int_0^{\infty} \frac{d\beta}{e^{2\pi\beta} - 1} \left[ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2x} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\beta}{x} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\beta}{x + \frac{1}{2}} \right].$$

Au moyen d'une transformation bien connue, la quantité entre parenthèses se réduit à

$$- \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{(6x^2 + x + 2\beta^2)\beta}{4x^3 + 2x^2 + \beta^2}.$$

Conséquemment,

$$\int_0^{\infty} \frac{d\beta}{e^{2\pi\beta} - 1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{(6x^2 + x + 2\beta^2)\beta}{4x^3 + 2x^2 + \beta^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} x \mathcal{L} \left( 1 + \frac{1}{2x} \right); \quad (9)$$

relation qui ne diffère, qu'en apparence, du théorème de Legendre.

IV. Elle est en défaut pour  $x = 0$ . En effet, d'après cette hypothèse, on aurait (\*\*)

$$\int_0^{\infty} \frac{d\beta}{e^{2\pi\beta} - 1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (2\beta) = \frac{1}{4}.$$

(\*) *Recherches sur la constante G, et sur les intégrales eulériennes*, p. 16.

(\*\*) Si l'on fait  $x = \frac{1}{z}$ , le dernier terme devient

$$\frac{1}{2z} \mathcal{L} \left( 1 + \frac{z}{2} \right) = \frac{1}{4} \frac{\mathcal{L} \left( 1 + \frac{z}{2} \right)}{\frac{z}{2}};$$

et il est visible que la fraction tend vers zéro, quand  $z$  croît indéfiniment.

Or, le premier membre égale

$$\int_0^{\infty} \frac{d\beta}{e^{2\pi\beta} - 1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2\beta = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \mathfrak{L}^{\circ} \cdot 2.$$

Voici, je pense, la raison de cette anomalie.  $x$  étant supposé positif (\*), les formules

$$\varpi(x) = \varphi(x) - k - \left(x - \frac{1}{2}\right) \mathfrak{L}^{\circ} \cdot x + x, \quad (5)$$

$$\varpi(x) = 2 \int_0^{\infty} \frac{d\beta}{e^{2\pi\beta} - 1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\beta}{x} \quad (10)$$

sont *équivalentes*. Pour  $x = 0$ , elles donnent, l'une et l'autre,  $\varpi(x) = \infty$ . Néanmoins, *elles ne s'accordent plus*.

En effet, il résulte, de la première,

$$\varpi(x) - \varpi(2x) = \varphi(x) - \varphi(2x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \mathfrak{L}^{\circ} \cdot x + \left(2x - \frac{1}{2}\right) \mathfrak{L}^{\circ}(2x) - x;$$

puis

$$\begin{aligned} \lim [\varpi(x) - \varpi(2x)] &= \lim [\varphi(x) - \varphi(2x)] + x \mathfrak{L}^{\circ} \cdot x + \left(2x - \frac{1}{2}\right) \mathfrak{L}^{\circ} \cdot 2 - x \\ &= \lim [\varphi(x) - \varphi(2x)] - \frac{1}{2} \mathfrak{L}^{\circ} \cdot 2 \quad (**); \end{aligned}$$

ou, par la relation (6) :

$$\lim [\varpi(x) - \varpi(2x)] = \frac{1}{2} \mathfrak{L}^{\circ} \cdot \pi + \frac{1}{2} \mathfrak{L}^{\circ} \cdot 2 - \varphi\left(\frac{1}{2}\right).$$

D'ailleurs,

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \mathfrak{L}^{\circ} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \mathfrak{L}^{\circ} \cdot \pi;$$

donc enfin

$$\lim [\varpi(x) - \varpi(2x)] = \frac{1}{2} \mathfrak{L}^{\circ} \cdot 2. \quad (11)$$

(\*) Cette hypothèse est celle de Binet.

(\*\*)  $x \mathfrak{L}^{\circ} \cdot x = 0$  pour  $x = 0$ .

Prenons maintenant la formule (10). Elle donne

$$\varpi(x) - \varpi(2x) = \int_0^{+\infty} \frac{d\beta}{e^{2\pi\beta} - 1} \left( \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{x} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{2x} \right),$$

ou

$$\varpi(x) - \varpi(2x) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{d\beta}{e^{2\pi\beta} - 1} \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta x}{2x^2 + \beta^2};$$

et, par conséquent,

$$\lim [\varpi(x) - \varpi(2x)] = 0; \quad (12)$$

ce qui est contradictoire avec la valeur (11).

Si l'on adopte celle-ci, on trouve, au lieu de l'égalité (9), dans laquelle on ferait  $x = 0$  :

$$-\frac{1}{2} \zeta^2 \cdot 2 - \varpi\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2};$$

et ce résultat ne diffère pas de la formule (2) (\*).

(\*) Ce n'est pas tout. Pour passer de la première expression de  $\varpi(x)$  :

$$\int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{e^x - 1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \right) \frac{e^{-x\beta}}{\alpha} d\alpha,$$

à la seconde :

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{d\beta}{e^{2\pi\beta} - 1} \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{x},$$

Binet emploie, très heureusement, la formule

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{e^{2\pi\beta} - 1} d\beta = \frac{1}{4} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - \frac{1}{2x},$$

due à Poisson; après quoi il met  $\varpi(x)$  sous la forme d'une intégrale double; etc. Or, ces diverses transformations, légitimes tant que  $x$  est positif, n'ont plus de sens quand  $x = 0$ . Aussi, Binet a-t-il constamment écarté cette dernière hypothèse.

V (\*). D'après la relation connue

$$\varphi'(x) - \varphi'(1) = \int_0^x \frac{1-t^{x-1}}{1-t} dt,$$

il est clair que : si  $x$  est commensurable, la différence  $\varphi'(x) - \varphi'(1)$  est réductible à l'intégrale d'une différentielle rationnelle (\*\*).

### XCIX. — Sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde (\*\*).

(Août 1868.)

I. Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont les paramètres des hyperboloïdes homofocaux avec un ellipsoïde donné, les lignes de courbure de cette surface sont représentées par  $\lambda = \text{const.}$ ,  $\mu = \text{const.}$  Si donc l'on part d'une équation de ces lignes, ayant la forme

$$Adu^2 + Bdudv + Cdv^2 = 0, \quad (1)$$

et que l'on effectue le changement de variables, on devra trouver, comme transformée de l'équation (1),

$$d\lambda \cdot d\mu = 0. \quad (2)$$

II. Supposons, par exemple, que  $u$  soit le *rayon vecteur* et  $v$  la *distance du centre au plan tangent*. L'équation est alors (iv) :

$$u^2v^4du^2 - uv^5(a^2 + b^2 + c^2 - u^2)dudv + a^2b^2c^2dv^2 = 0. \quad (5)$$

(\*) *Supprimé*, en partie, dans le Mémoire de Saint-Petersbourg.

(\*\*) On lit, dans le *Calcul intégral* de Bertrand (p. 252) : « Gauss a montré » très élégamment que la fonction  $\varphi(x)$  peut se calculer sous forme finie » toutes les fois que  $x$  est un nombre rationnel ». La proposition énoncée est fautive. Quant à la démonstration de Gauss, elle est *longue, difficile et obscure*.

(\*\*\*) Complément des *Notes* LVIII et LXI.

(iv) Tome I, page 227.



De plus :

$$u^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \lambda^2 - \mu^2, \quad v = \frac{abc}{\lambda\mu} \quad (*) ; \quad (4)$$

et, par conséquent :

$$udu = -(\lambda d\lambda + \mu d\mu), \quad dv = -\frac{abc}{\lambda^2\mu^2}(\mu d\lambda + \lambda d\mu).$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation (3) devient

$$(\lambda d\lambda + \mu d\mu)^2 - \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\lambda\mu}(\lambda d\lambda + \mu d\mu)(\mu d\lambda + \lambda d\mu) + (\mu d\lambda + \lambda d\mu)^2 = 0,$$

ou, après quelques réductions,

$$(\lambda^2 - \mu^2)^2 d\lambda d\mu = 0 ; \quad (5)$$

conformément à la remarque ci-dessus (1).

III. L'élimination de  $\mu$ , entre les égalités (4), donne

$$u^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \lambda^2 - \frac{a^2 b^2 c^2}{\lambda^2 v^2}. \quad (6)$$

Telle est donc, inversement, l'intégrale de l'équation (5);  $\lambda$  étant la *constante arbitraire* (\*\*).

### C. — Problème de Géométrie.

(Juillet 1862.)

On donne une suite de courbes, AB, A'B', ..., représentées par

$$f(x, y) = c, \quad (1)$$

et l'on demande quel est le lieu du pied M de la normale MM' commune à deux de ces lignes, infiniment voisines.

(\*) Tome I, page 255. On a fait un changement de lettres.

(\*\*) Tome I, page 228.

I. *Solution.* — Soient  $x, y$  les coordonnées de  $M$ , et  $x' = x + \delta x, y' = y + \delta y$  les coordonnées de  $M'$ . On doit avoir :

$$\frac{dy}{dx} \delta y + \delta x = 0, \quad \frac{dy'}{dx'} \delta y + \delta x = 0. \quad (2)$$

Mais

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{d \cdot \frac{dy}{dx}}{dx} \delta x + \frac{d \cdot \frac{dx}{dy}}{dy} \delta y;$$

donc

$$\frac{d \cdot \frac{dy}{dx}}{dx} \delta x + \frac{d \cdot \frac{dx}{dy}}{dy} \delta y = 0; \quad (3)$$

puis

$$\left( \frac{d \cdot \frac{dy}{dx}}{dx} \right) dy = \left( \frac{d \cdot \frac{dx}{dy}}{dy} \right) dx. \quad (4)$$

Pour développer cette équation, observons que

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}};$$

et, par conséquent :

$$\frac{d \cdot \frac{dy}{dx}}{dx} = - \frac{\frac{df}{dy} \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{df}{dx} \frac{d^2 f}{dx dy}}{\left( \frac{df}{dy} \right)^2}, \quad \frac{d \cdot \frac{dx}{dy}}{dy} = - \frac{\frac{df}{dy} \frac{d^2 f}{dx dy} - \frac{df}{dx} \frac{d^2 f}{dy^2}}{\left( \frac{df}{dy} \right)^2}.$$

Au moyen de ces valeurs, l'égalité (4) devient

$$\frac{df}{dx} \left[ \frac{df}{dy} \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{df}{dx} \frac{d^2 f}{dx dy} \right] + \frac{df}{dy} \left[ \frac{df}{dy} \frac{d^2 f}{dx dy} - \frac{df}{dx} \frac{d^2 f}{dy^2} \right] = 0,$$

ou

$$\frac{df}{dx} \frac{df}{dy} \left[ \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{d^2 f}{dy^2} \right] = \frac{d^2 f}{dx dy} \left[ \left( \frac{df}{dx} \right)^2 - \left( \frac{df}{dy} \right)^2 \right]. \quad (5)$$

II. *Application.*  $x^5 - y^5 + 5a^2x = c^5$ .

Suppression faite du facteur 5 :

$$\frac{df}{dx} = x^2 + a^2, \quad \frac{df}{dy} = -y^2, \quad \frac{d^2f}{dx^2} = 2x, \quad \frac{d^2f}{dx dy} = 0, \quad \frac{d^2f}{dy^2} = -2y.$$

Done l'équation (5) se réduit à

$$y^2(x^2 + a^2)(x + y) = 0.$$

Celle-ci représente l'axe des abscisses et la bissectrice de l'angle  $yOx'$ . En effet, pour tous les points de la courbe donnée, situés sur  $Ox$ , la valeur de  $\frac{dy}{dx}$  est infinie ; et, d'un autre côté, la bissectrice dont il s'agit est un *axe* de la courbe (\*).

III. *Remarque.* — Si la quantité  $f(x, y)$  est *homogène*, l'équation (5) l'est pareillement ; et le lieu demandé se compose, comme dans le cas précédent, de droites passant à l'origine.

IV. *Autre remarque.* — Considérons la surface S représentée par

$$z = f(x, y). \quad (6)$$

Alors le problème peut être énoncé ainsi :

*Trouver, sur la surface S, le lieu C du pied M de la normale à deux lignes de niveau consécutives.*

La projection horizontale de C est donnée par l'équation (5), ou plutôt par celle-ci :

$$pq(r - t) = s(p^2 - q^2); \quad (7)$$

$p, q, r, s, t$  représentent, bien entendu, les dérivées partielles de  $z$ .

(\*) Faisant

$$x = (x' - y') \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad y = (x' + y') \sqrt{\frac{1}{2}},$$

on trouve, comme transformée,

$$x' \sqrt{2} \left[ x'^2 + y'^2 + \frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) \right] = c^5.$$

V. *Application.* — Soit

$$z = x^5 + y^5 - 5axy \text{ (*)}.$$

L'équation (7) est, dans ce cas,

$$2(x^2 - ay)(y^2 - ax)(x - y) + a(x^2 + y^2 - ay - ax)(x^2 - y^2 - ay + ax) = 0.$$

Elle se décompose en

$$x - y = 0, \quad (8)$$

$$2(x^2 - ay)(y^2 - ax) + a(x^2 + y^2 - ay - ax)(x + y + a) = 0. \quad (9)$$

L'équation (8) représente le plan bissecteur de l'angle formé par  $zOx$ ,  $zOy$  : solution évidente. Quant à l'équation (9), si l'on fait :

$$x = u \cos \omega, \quad y = u \sin \omega,$$

on la réduit à celle-ci :

$$\frac{1}{2} u^5 \sin^2 2\omega + au^2(\sin \omega + \cos \omega)(-1 + \sin 2\omega) - a^3(\sin \omega + \cos \omega) = 0, \quad (10)$$

dont la discussion paraît assez simple.

*Addition.* — (Juin 1885.)

VI. Si l'on fait

$$u = \frac{a^2}{v}, \quad \omega = \theta - \frac{\pi}{4},$$

l'équation (10) devient

$$v^5 - 2a^2v \cos^2 \theta - \frac{a^5}{2\sqrt{2}} \frac{\cos^2 2\theta}{\sin \theta} = 0. \quad (11)$$

Celle-ci représente une courbe, *réci-proque* de la précédente, et très facile à discuter.

(\*) Les lignes de niveau sont des variétés du *folium* de Descartes.

**CI. — Sur une équation différentielle.**

(Juin 1870.)

I. Soit

$$(x dx - y dy)^2 = a^2(dx^2 + dy^2). \quad (1)$$

Posant

$$x = (x' + y') \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad y = (x' - y') \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

on trouve

$$(x' dy' + y' dx')^2 = a^2(dx'^2 + dy'^2), \quad (5)$$

ou

$$(a^2 - x'^2) dy'^2 - 2x'y' dx' dy' + (a^2 - y'^2) dx'^2 = 0. \quad (4)$$

Soient, comme dans ma Note sur l'addition des fonctions elliptiques de première espèce (\*):

$$x' = a \cos u, \quad y' = a \cos v.$$

L'équation (4) devient

$$\sin^2 u \sin^2 v dv^2 - 2 \sin u \cos u \sin v \cos v dudv + \sin^2 v \sin^2 u du^2 = 0,$$

ou

$$\sin u \sin v (du^2 + dv^2) - 2 \cos u \cos v dudv = 0. \quad (5)$$

Soient encore (\*\*):

$$u + v = \theta, \quad u - v = \omega;$$

d'où :

$$\sin u \sin v = \frac{1}{2} (\cos \omega - \cos \theta), \quad \cos u \cos v = \frac{1}{2} (\cos \omega + \cos \theta),$$

$$du^2 + dv^2 = \frac{1}{2} (d\theta^2 + d\omega^2), \quad 2dudv = \frac{1}{2} (d\theta^2 - d\omega^2);$$

puis

$$\cos \theta \cdot d\theta^2 - \cos \omega d\omega^2 = 0,$$

ou

$$d\theta \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} \theta} \pm d\omega \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} \omega} = 0. \quad (6)$$

(\*) *Bulletin de l'Académie de Belgique*, 2<sup>e</sup> série, t. XXVII, p. 149.(\*\*) *Loc. cit.*, p. 146.

II. Si l'on pouvait trouver une intégrale algébrique de l'équation (1), on aurait donc, pour les fonctions de deuxième espèce (à module  $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ), un théorème analogue à celui d'Euler. Le problème, s'il est possible, paraît difficile.

III. L'équation (3) représente les trajectoires orthogonales des courbes (1). D'après la manière dont cette transformée a été obtenue, il s'ensuit que : *si l'on fait exécuter un huitième de révolution aux courbes (1), on obtient leurs trajectoires orthogonales.* Autrement dit : *les courbes (1) sont égales, respectivement, à leurs trajectoires orthogonales.*

*Addition. — (Novembre 1871.)*

IV. On tire, de l'équation (3) (en supprimant les accents) :

$$y = -px + a\sqrt{1+p^2}; \quad (7)$$

puis, en différenciant,

$$2pdx + xdp = a \frac{pdp}{\sqrt{1+p^2}},$$

ou

$$\frac{dx}{dp} + \frac{x}{2p} = \frac{a}{2} \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}. \quad (8)$$

L'intégrale de cette équation linéaire est

$$x = \frac{1}{\sqrt{p}} \left[ c + \frac{a}{2} \int dp \sqrt{\frac{p}{1+p^2}} \right]. \quad (9)$$

Je fais

$$p = \tan^2 \frac{1}{2} \varphi = \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi};$$

formule d'où résulte :

$$1 + p^2 = 2 \frac{1 + \cos^2 \varphi}{(1 + \cos \varphi)^2} = 4 \frac{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}{(1 + \cos \varphi)^2},$$

$$\frac{p}{1 + p^2} = \frac{\sin^2 \varphi}{4 \left( 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right)}, \quad dp = 2 \frac{\sin \varphi d\varphi}{(1 + \cos \varphi)^2};$$

puis

$$\int dp \sqrt{\frac{p}{1+p^2}} = \int \frac{(1 - \cos \varphi) d\varphi}{(1 + \cos \varphi) \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}. \quad (10)$$

Ainsi, la valeur (9), de  $x$ , est réductible aux intégrales elliptiques.

### CII. — Une application de la théorie des solutions singulières (\*).

(Avril 1870.)

I. Soit

$$a^2 + Pa + Q = 0 \quad (1)$$

une équation intégrale; P, Q étant des fonctions de  $x$  et de  $y$ . La solution singulière est

$$P^2 - 4Q = 0 (**). \quad (2)$$

Pour trouver l'équation différentielle, on élimine  $a$  entre la proposée et

$$adP + dQ = 0; \quad (5)$$

ce qui donne

$$dQ^2 - PdPdQ + QdP^2 = 0,$$

ou

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{dQ}{dx} + y' \frac{dQ}{dy} \right)^2 - P \left( \frac{dP}{dx} + y' \frac{dP}{dy} \right) \left( \frac{dQ}{dx} + y' \frac{dQ}{dy} \right) \\ + Q \left( \frac{dP}{dx} + y' \frac{dP}{dy} \right)^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(\*) Cette Note a paru, en partie, dans les *Comptes rendus* (t. LXXI, p. 30).

(\*\*) Proposition contestée par M. Darboux (*Comptes rendus*, t. LXX, p. 1351); mais les cas où elle est en défaut sont excessivement rares: je crois n'en avoir jamais rencontré.

Cette équation, ordonnée par rapport à  $y'$ , devient

$$Ay'^2 + By' + C = 0; \quad (5)$$

en supposant :

$$\left. \begin{aligned} A &= \left(\frac{dQ}{dy}\right)^2 - P \frac{dP}{dy} \frac{dQ}{dy} + Q \left(\frac{dP}{dy}\right)^2, \\ B &= 2 \left(\frac{dQ}{dx} \frac{dQ}{dy} + Q \frac{dP}{dx} \frac{dP}{dy}\right) - P \left(\frac{dP}{dx} \frac{dQ}{dy} + \frac{dP}{dy} \frac{dQ}{dx}\right), \\ C &= \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 - P \frac{dP}{dx} \frac{dQ}{dx} + P \left(\frac{dP}{dx}\right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

II. Au moyen de ces valeurs, on peut former le binôme  $B^2 - 4AC$ , qui entrerait dans l'expression de  $y'$ , tirée de l'équation (5) (\*).

Toutes réductions faites, on trouve

$$B^2 - 4AC = (P^2 - 4Q) \left(\frac{dP}{dx} \frac{dQ}{dy} - \frac{dP}{dy} \frac{dQ}{dx}\right)^2. \quad (7)$$

III. Au lieu des formules (6), écrivons

$$\left. \begin{aligned} A &= \beta'^2 - P\alpha'\beta' + Q\alpha'^2, \\ B &= 2(\beta\beta' + Q\alpha\alpha') - P(\alpha\beta' + \alpha'\beta), \\ C &= \beta^2 - P\alpha\beta + Q\alpha^2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

La relation (7) deviendra

$$B^2 - 4AC = (P^2 - 4Q)(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2. \quad (9)$$

(\*) Évidemment, il est plus court de résoudre l'équation (4), par rapport à

$$\frac{\frac{dQ}{dx} + y' \frac{dQ}{dy}}{\frac{dP}{dx} + y' \frac{dP}{dy}}.$$

Néanmoins, eu égard à l'objet que nous avons en vue, le premier procédé est préférable au second. (Juin 1885.)



Cette fois,  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$ ,  $\beta'$ ,  $P$ ,  $Q$  sont des quantités quelconques, numériques si l'on veut (\*).

IV. Soient  $\alpha$ ,  $\beta$  des entiers quelconques, positifs ou négatifs, mais premiers entre eux. Si l'on détermine  $\alpha'$ ,  $\beta'$  par la condition

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = \pm 1,$$

on aura

$$B^2 - 4AC = P^2 - 4Q. \quad (10)$$

Soient, par exemple,  $\alpha = 15$ ,  $\beta = 8$  : on peut prendre  $\alpha' = 5$ ,  $\beta' = 5$ . Les formules (8) donnent :

$$A = 9 - 15P + 25Q, \quad B = 48 - 79P + 150Q,$$

$$C = 64 - 104P + 169Q.$$

Donc, quelles que soient les quantités  $P$ ,  $Q$ , l'égalité (10) sera vérifiée.

*Addition.* — (Juin 1885.)

V. Si  $P^2 - 4Q = 1$ , la relation (9) se réduit à

$$B^2 - 4AC = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2. \quad (11)$$

Pour satisfaire, de la manière la plus générale, à la condition indiquée, il suffit de prendre

$$P = 2t + 1, \quad Q = t(t + 1). \quad (12)$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

*Si l'on fait :*

$$A = \alpha'^2 t^2 + (\alpha' - 2\beta')\alpha' t - (\alpha' - \beta')\beta',$$

$$B = 2\alpha\alpha' t^2 + 2(\alpha\alpha' - \alpha\beta' - \alpha'\beta)t + 2\beta\beta' - \alpha\beta' - \alpha'\beta,$$

$$C = \alpha^2 t^2 + (\alpha - 2\beta)\alpha t - (\alpha - \beta)\beta,$$

on aura

$$B^2 - 4AC = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2.$$

(\*) Ainsi, le rapport des deux FORMES semblables,  $B^2 - 4AC$ ,  $P^2 - 4Q$ , est un carré. (Juin 1885.)

VI. *Application.* — Soient, comme ci-dessus :

$$\alpha = 15, \quad \beta = 8, \quad \alpha' = 5, \quad \beta' = 5.$$

On doit trouver

$$(150t^2 - 28t - 51)^2 - 4(25t^2 - 5t - 6)(169t^2 - 59t - 40) = 1;$$

ce qui est exact (\*).

### CHH. — Enveloppe d'un cylindre de révolution (\*\*).

(Avril 1875.)

I. PROBLÈME. — Si l'axe MT d'un cylindre de révolution roule sur une courbe donnée, AMB, quelle est l'enveloppe de la surface cylindrique?

Par les considérations les plus élémentaires, on reconnaît que :

- 1° L'intersection de deux cylindres de révolution, égaux entre eux, et dont les axes se rencontrent, est composée de deux ellipses;
- 2° Si les axes viennent à coïncider, l'une des ellipses se réduit à la section droite; l'autre se transforme en deux génératrices, parallèles à l'axe commun, et passant par les extrémités du diamètre 2R de la section droite parallèle au plan des deux axes (\*\*).

Par conséquent, l'enveloppe cherchée se compose de deux parties :

- 1° Une surface-canal  $\Sigma$ , enveloppe d'une sphère inscrite au cylindre donné, et dont le centre décrirait AMB;

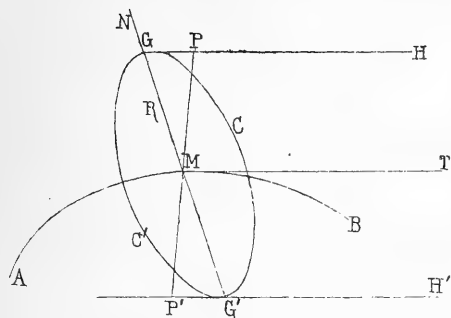
(\*) Les formules précédentes sont applicables à la résolution, en nombres entiers, de l'équation

$$X^2 - 4YZ = U^2;$$

mais il est clair que la solution directe (absolument évidente) est préférable à l'autre.

(\*\*) Reproduite, en partie, dans les *Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces* (MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DE BELGIQUE, collection in-8°, 1875).

(\*\*\*) Plus exactement, le diamètre dont il s'agit est la limite de cette perpendiculaire : dans le problème actuel, ce diamètre coïncide avec la binormale de AMB.



2° Une surface réglée  $S$ , dont on trouve deux génératrices  $GH$ ,  $G'H'$  en prenant, sur la binormale  $GMG'$ ,  $MG = M'G' = R$ , et menant, par les points  $G$ ,  $G'$ , des parallèles à  $MP$ .

II. Soient :

$x, y, z$  les coordonnées du point de contact  $M$  ;  
 $a, b, c$  les cosinus directifs de la tangente  $MT$  ;  
 $l, m, n$  les cosinus directifs de la binormale  $MN$  ;  
 $\rho, r$  les rayons de courbure et de torsion de la ligne  $AMB$ .

On a, par des formules connues (\*) :

$$\frac{l}{bc' - cb'} = \frac{m}{ca' - ac'} = \frac{n}{ab' - ba'} = \frac{1}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} = \rho, \quad (1)$$

$$\frac{l'}{a'} = \frac{m'}{b'} = \frac{n'}{c'} = -\frac{\rho}{r}, \quad (2)$$

$$al' + bm' + cn' = 0, \quad (3)$$

$$a'l' + b'm' + c'n' = -\frac{1}{r\rho}, \quad (4)$$

$$l'^2 + m'^2 + n'^2 = \frac{1}{r^2} (**). \quad (5)$$

Considérons, en particulier, le point  $G$ , dont les coordonnées

(\*) Voir, par exemple, notre *Théorie analytique des lignes à double courbure*.

(\*\*) Dans ces égalités, les accents désignent des dérivées relatives à l'arc  $AM = s$ , pris pour variable indépendante. Pour la discussion des signes, voir le travail cité.

sont  $x + Rl, y + Rm, z + Rn$ . La génératrice GH, passant en ce point, a pour équations

$$\frac{X - x - Rl}{a} = \frac{Y - y - Rm}{b} = \frac{Z - z - Rn}{c} = \varphi,$$

$\varphi$  étant une fonction de  $s$ , inconnue (\*).

Écrivons-les ainsi :

$$X - x - Rl = a\varphi, \quad Y - y - Rm = b\varphi, \quad Z - z - Rn = c\varphi. \quad (6)$$

III. Si la surface  $s$  est développable, on doit avoir, avec ces équations (6), les relations

$$\left. \begin{aligned} -a - Rl' &= a\varphi' + a'\varphi, \\ -b - Rm' &= b\varphi' + b'\varphi, \\ -c - Rn' &= c\varphi' + c'\varphi; \end{aligned} \right\} (7)$$

dérivées des premières.

Comme

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad aa' + bb' + cc' = 0,$$

on conclut, des équations (7) :

$$\begin{aligned} -1 - R \sum a l' &= \varphi', & -R \sum a l' &= \varphi \sum a'^2, \\ 1 + R^2 \sum l'^2 &= \varphi'^2 + \varphi^2 \sum a'^2; \end{aligned}$$

ou, à cause des relations (2) et (3) :

$$-1 = \varphi', \quad R \frac{\rho}{r} = \varphi, \quad 1 + \frac{R^2}{r^2} = \varphi'^2 + \frac{\varphi^2}{\rho^2}. \quad (8)$$

La troisième égalité est une conséquence des deux premières; donc deux génératrices consécutives se rencontrent; ou, ce qui est équivalent, la surface  $S$  est développable (\*\*).

(\*) Cette fonction représente la distance comprise entre le point G et le point où la génératrice GH touche son enveloppe, si la surface  $s$  est développable.

(\*\*) On arrive au même résultat, mais moins simplement, en considérant GH comme l'intersection du plan rectifiant avec un plan parallèle au plan osculateur.

IV. Soit P le point où la génératrice GH touche son enveloppe. D'après la valeur de  $\varphi$  (8) :

$$GP = R \frac{\rho}{r}, \quad \text{tg PMT} = \frac{r}{\rho}.$$

Or,  $\frac{r}{\rho}$  représente aussi la tangente de l'angle H formé par la tangente MT avec la rectifiante (\*); donc le point P est l'intersection de la rectifiante MR avec la génératrice GH.

V. PP'P'' ... étant l'arête de rebroussement de la surface S, soient PM, P'M', P''M'', ... les rectifiantes passant en P, P', P'', ... Si l'on développe la surface rectifiante, la courbe AMB devient une ligne droite amb (\*\*). Les rabattements des binormales MG, M'G', ... seront les droites mg, m'g', ... perpendiculaires à ab, et égales à R; donc la transformée de l'arête de rebroussement est une droite, parallèle à ab. Conséquemment, cette arête est une ligne géodésique de la surface rectifiante.

#### CIV. — Quelques identités.

(Mai 1872.)

I. Des expressions de  $\frac{1}{\rho^2}$ ,  $\frac{1}{r\rho}$ ,  $\frac{1}{r^2}$  (1), (4), (5) (\*\*\*) , on conclut

$$(a'^2 + b'^2 + c'^2)(l'^2 + m'^2 + n'^2) = (a'l' + b'm' + c'n')^2; \quad (9)$$

ou, par un changement de notation :

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) = (xx' + yy' + zz')^2. \quad (A)$$

Dans cette identité, les quantités x, y, z, sont proportionnelles à x', y', z'.

(\*) Théorie analytique des lignes à double courbure, p. 27.

(\*\*) C'est à cette propriété que la rectifiante doit son nom.

(\*\*\*) Voir la Note CIII.

Cette condition, évidemment suffisante, est *nécessaire*. En effet, l'égalité (A) peut être remplacée par

$$(yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2 = 0 \text{ (*)}$$

II. De

$$l\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2} = bc' - cb', \quad (1)$$

on déduit

$$l \frac{a'a'' + b'b'' + c'c''}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} + l' \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2} = bc'' - cb''; \quad (10)$$

puis, en prenant les deux autres relations de même forme que celle-ci, et faisant la somme des carrés :

$$(l'^2 + m'^2 + n'^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) = \sum (bc'' - cb'')^2 - \frac{(a'a'' + b'b'' + c'c'')^2}{a'^2 + b'^2 + c'^2}. \quad (11)$$

L'égalité (10) donne encore, en vertu de la condition

$$la' + mb' + nc' = 0,$$

conséquence des formules (1) :

$$\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2} \sum l'a' = \sum (bc'' - cb'')a' = - \sum (ab' - ba')c'',$$

ou

$$\sum l'a' = - \frac{\sum (ab' - ab')c''}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}. \quad (12)$$

Au moyen des valeurs (11) et (12), la relation (9) devient

$$[\sum a'^2] \sum (bc'' - cb'')^2 = [\sum a'a'']^2 + [\sum (bc'' - cb'')a']^2; \quad (15)$$

ou, par le changement de notation déjà employé :

$$\left. \begin{aligned} (x'^2 + y'^2 + z'^2)[(yz'' - zy'')^2 + (zx'' - xz'')^2 + (xy'' - yx'')^2] = \\ (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2 + [(yz'' - zy'')x' + (zx'' - xz'')y' + (xy'' - yx'')z']^2. \end{aligned} \right\} \text{(B)}$$

(\*) La relation (9) est une conséquence des *formules (2) de Frenet*. Inversement, si elle était connue *a priori*, ces formules en résulteraient. (Juin 1885.)

III. *Remarques.* — 1° Dans cette identité (B), les quantités  $x, y, z, x', \dots$  sont assujetties, seulement, aux conditions

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad xx' + yy' + zz' = 0. \quad (14)$$

Effectivement, si l'on fait passer tous les termes dans un seul membre, et qu'on ordonne suivant les puissances et les produits de  $x'', y'', z''$ ; on trouve, en ayant égard à ces deux conditions,

$$0 = 0.$$

2° La relation (B) permet, dans certains cas, de transformer, en une somme de deux carrés, le produit d'une somme de trois carrés par une somme de trois carrés.

IV. *Application.* — Soient :

$$x = \frac{9}{25}, \quad y = \frac{12}{25}, \quad z = \frac{20}{25}; \quad x' = \frac{24}{25}, \quad y' = \frac{7}{25}, \quad z' = -\frac{15}{25};$$

$$x'' = 2, \quad y'' = 1, \quad z'' = 5.$$

Les conditions énoncées étant remplies, on doit trouver

$$\begin{aligned} & \frac{24^2 + 7^2 + 15^2}{25^2} \left[ \left( \frac{16}{25} \right)^2 + \left( \frac{15}{25} \right)^2 + \left( \frac{15}{25} \right)^2 \right] \\ & = \left( \frac{10}{25} \right)^2 + \left[ \frac{16 \cdot 24}{25^2} + \frac{15 \cdot 7}{25^2} + \frac{15^2}{25^2} \right]^2, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & (24^2 + 7^2 + 15^2)(16^2 + 15^2 + 15^2) \\ & = 250^2 + (6 \cdot 24 + 15 \cdot 7 + 225)^2 = 250^2 + 700^2; \end{aligned}$$

ce qui est exact.

V. *Autre identité.* — Soient

$$\left. \begin{aligned} x &= y'\gamma - z'\beta, \\ y &= z'\alpha - x'\gamma, \\ z &= x'\beta - y'\alpha. \end{aligned} \right\} (15)$$

Soient  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$  trois quantités quelconques. On a, identiquement,

$$\left. \begin{aligned} (x'^2 + y'^2 + z'^2)[(yz'' - zy'')^2 + (zx'' - xz'')^2 + (xy'' - yx'')]^2 \\ = (x^2 + y^2 + z^2)(x'x'' + y'y'' + z'z'')^2 \\ + [x(y'z'' - z'y'') + y(z'x'' - x'z'') + z(x'y'' - yx'')]^2 (*) \end{aligned} \right\} \text{(C)}$$

Si, par exemple :

$$\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 5; \quad x' = 5, y' = 4, z' = 2; \quad x'' = 1, y'' = 1, z'' = 2;$$

puis

$$x = 8, \quad y = 7, \quad z = 2;$$

on doit trouver

$$(5^2 + 4^2 + 2^2)(15^2 + 16^2 + 14^2) = (8^2 + 7^2 + 4^2)11^2 + (48 + 28 - 2)^2,$$

ou

$$(5^2 + 4^2 + 2^2)(15^2 + 16^2 + 14^2) = 88^2 + 77^2 + 44^2 + 74^2.$$

C'est ce qui a lieu.

VI. *Remarque.* — L'identité (C) réduit, à une somme de quatre carrés, le produit d'une somme de trois carrés par une somme de trois carrés.

*Addition.* — (Mars 1878.)

VII. La solution d'un problème sur le triangle (\*\*\*) conduit à l'identité

$$\left. \begin{aligned} 4a^2b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = \\ (b^2 + c^2 - a^2)^2a^2 + (c^2 + a^2 - b^2)^2b^2 + (a^2 + b^2 - c^2)^2c^2, \end{aligned} \right\} \text{(D)}$$

(\*) Cette relation (C) ne diffère, qu'en apparence, de l'identité (A) démontrée à la page 22 de la *Théorie analytique des lignes à double courbure*. (Juin 1885.)

(\*\*) Évaluer, en fonction des côtés, la distance comprise entre le centre du cercle circonscrit et le point de concours des hauteurs (THÉORÈMES ET PROBLÈMES, p. 151).



dans laquelle le second membre est une somme de trois carrés, et dont la vérification est facile.

VIII. En voici deux autres, d'après lesquelles le cube d'une somme de trois carrés est, au moins de deux manières, une somme de neuf carrés :

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2)^3 &= (ab^2)^2 + (bc^2)^2 + (ca^2)^2 + [a(a^2 + b^2)]^2 + [c(a^2 + b^2)]^2 \\ &\quad + [b(b^2 + c^2)]^2 + [a(b^2 + c^2)]^2 + [c(c^2 + a^2)]^2 + [b(c^2 + a^2)]^2 \\ &= (ba^2)^2 + (cb^2)^2 + (ac^2)^2 + [b(b^2 + a^2)]^2 + [c(b^2 + a^2)]^2 + [a(a^2 + c^2)]^2 \\ &\quad + [b(a^2 + c^2)]^2 + [c(c^2 + b^2)]^2 + [a(c^2 + b^2)]^2 (*). \end{aligned} \quad (E)$$

Par exemple :

$$\begin{aligned} (1 + 4 + 16)^3 &= 4^2 + 52^2 + 4^2 + 5^2 + 20^2 + 40^2 + 20^2 + 68^2 + 54^2 \\ &= 2^2 + 16^2 + 16^2 + 10^2 + 20^2 + 17^2 + 54^2 + 80^2 + 20^2. \end{aligned}$$

IX. Décomposition en bi-carrés. — On a, identiquement,

$$\begin{aligned} (-x + y + z + u)^4 + (x - y + z + u)^4 + (x + y - z + u)^4 + (x + y + z - u)^4 \\ = 4 \left[ \sum x^4 + 6 \sum x^2 y^2 - 24xyzu \right]; \end{aligned}$$

et, si  $u = 0$  :

$$\begin{aligned} (-x + y + z)^4 + (x - y + z)^4 + (x + y - z)^4 + (x + y + z)^4 = \\ 4 \left[ \sum x^4 + 6 \sum x^2 y^2 \right]. \end{aligned}$$

On a aussi

$$4(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4 \left[ \sum x^4 + 2 \sum x^2 y^2 \right].$$

Donc, par soustraction,

$$\begin{aligned} (-x + y + z)^4 + (x - y + z)^4 + (x + y - z)^4 + (x + y + z)^4 \\ = 4(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 16 \sum x^2 y^2. \end{aligned}$$

Le second membre égale

$$(2x^2 + 2y^2 + 2z^2)^2 + (4xy)^2 + (4yz)^2 + (4zx)^2;$$

(\*) On sait que  $(a^2 + b^2 + c^2)^n$  est réductible à une somme de trois carrés (MÉMOIRE SUR CERTAINES DÉCOMPOSITIONS EN CARRÉS, p. 9).

en sorte que l'identité devient

$$\left. \begin{aligned} (-x + y + z)^4 + (x - y + z)^4 + (x + y - z)^4 + (x + y + z)^4 = \\ (2x^2 + 2y^2 + 2z^2)^2 + (4xy)^2 + (4yz)^2 + (4zx)^2. \end{aligned} \right\} \text{(F)}$$

Ainsi, la somme de quatre carrés peut être égale à la somme de quatre bi-carrés (\*).

X. Suite. — Soient

$$a = 2(x^2 + y^2 + z^2), \quad b = 4xy, \quad c = 4yz, \quad d = 4zx.$$

On tire, des trois dernières équations,

$$4x^2 = \frac{bd}{c}, \quad 4y^2 = \frac{bc}{d}, \quad 4z^2 = \frac{cd}{b};$$

puis, en substituant dans la première :

$$2abcd = b^2d^2 + b^2c^2 + c^2d^2.$$

Si donc cette condition est remplie, et que les fractions

$$\frac{bd}{c}, \quad \frac{bc}{d}, \quad \frac{cd}{b}$$

se réduisent à des carrés pairs, la quantité  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  est la somme de quatre bi-carrés.

Autre addition. — (Juin 1885.)

XI. Si l'on prend

$$\alpha = y'z'' - z'y'', \quad \beta = z'x'' - x'z'', \quad \gamma = x'y'' - y'x'',$$

les formules (15) donnent

$$\left. \begin{aligned} x &= x'(x'x'' + y'y'' + z'z'') - x''(x'^2 + y'^2 + z'^2), \\ y &= y'(x'x'' + y'y'' + z'z'') - y''(x'^2 + y'^2 + z'^2), \\ z &= z'(x'x'' + y'y'' + z'z'') - z''(x'^2 + y'^2 + z'^2); \end{aligned} \right\} \text{(16)}$$

(\*) On ne compte pas la solution insignifiante :

$$(a^2)^2 + (b^2)^2 + (c^2)^2 + (d^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + d^4.$$

et le déterminant

$$x(y'z'' - z'y'') + y(z'x'' - x'z'') + z(x'y'' - y'x'')$$

se réduit à zéro (\*).

Donc l'identité (C) devient

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2 + z^2)(x'x'' + y'y'' + z'z'')^2 \\ = & (x'^2 + y'^2 + z'^2)[(yz'' - zy'')^2 + (zx'' - xz'')^2 + (xy'' + yx'')^2]. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & (x^2 + y^2 + z^2)(x'x'' + y'y'' + z'z'')^2 \\ = & (x'^2 + y'^2 + z'^2)[(yz'' - zy'')^2 + (zx'' - xz'')^2 + (xy'' + yx'')^2]. \end{aligned}} \right\} \text{(G)}$$

Celle-ci réduit, à une somme de trois carrés, le produit de deux facteurs égaux, chacun, à une somme de trois carrés.

XII. Application. — Soient

$$x' = 1, \quad y' = 2, \quad z' = 5; \quad x'' = 2, \quad y'' = 5, \quad z'' = 1;$$

et, par conséquent :

$$x = -15, \quad y = -40, \quad z = 51.$$

On a, en supprimant un facteur commun,

$$(1^2 + 2^2 + 5^2)(1^2 + 15^2 + 5^2) = 15^2 + 40^2 + 51^2.$$

XIII. Autre identité. — Supposons

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 1. \quad (17)$$

Alors, en vertu des formules (16) :

$$\begin{aligned} x &= x' - x''(x'^2 + y'^2 + z'^2), & y &= y' - y''(x'^2 + y'^2 + z'^2), \\ z &= z' - z''(x'^2 + y'^2 + z'^2); \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x &= x' - x''(x'^2 + y'^2 + z'^2), \\ y &= y' - y''(x'^2 + y'^2 + z'^2), \\ z &= z' - z''(x'^2 + y'^2 + z'^2); \end{aligned}} \right\} \text{(18)}$$

puis, au lieu de (G) :

$$\begin{aligned} & (x'^2 + y'^2 + z'^2)[(yz'' - zy'')^2 + (zx'' - xz'')^2 + (xy'' - yx'')^2] \\ & = x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & (x'^2 + y'^2 + z'^2)[(yz'' - zy'')^2 + (zx'' - xz'')^2 + (xy'' - yx'')^2] \\ & = x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}} \right\} \text{(H)}$$

On peut donc, d'une infinité de manières, trouver un produit

(\*) A cause de

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

égal à une somme de trois carrés, et dont les deux facteurs soient égaux, chacun, à une somme de trois carrés.

Par exemple,

$$(1^2 + 2^2 + 3^2)(29^2 + 15^2 + 37^2) = 169^2 + 68^2 + 11^2.$$

XIV. *Remarques.* — 1° *Le premier facteur est arbitraire* (\*).

2° D'après les valeurs (18), on a

$$\begin{aligned} yz'' - zy'' &= y'z'' - z'y'', & zx'' - xz'' &= z'x'' - x'z'', \\ xy'' - yx'' &= x'y'' - y'x''; \end{aligned}$$

donc l'identité (H) est la même chose que

$$\left. \begin{aligned} (x'^2 + y'^2 + z'^2)[(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2] \\ = x^2 + y^2 + z^2 (**). \end{aligned} \right\} \text{(K)}$$

3° Celle-ci est, pour ainsi dire, *conjuguée* de la relation connue :

$$\begin{aligned} (x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) \\ = (y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2, \end{aligned}$$

laquelle suppose

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0.$$

(\*) Soient

$$x' = y' = z' = 1;$$

et, par conséquent,

$$z'' = 1 - (x'' + y'').$$

On trouve :

$$\begin{aligned} x &= 1 - 3x'', & y &= 1 - 3y'', & z &= -2 + 3(x'' + y''); \\ y'z'' - z'y'' &= 1 - x'' - 2y'', & z'x'' - x'z'' &= -1 + 2x'' + y'', \\ x'y'' - y'x'' &= y'' - x''; \end{aligned}$$

puis, en vertu de la seconde Remarque,

$$\begin{aligned} (1^2 + 1^2 + 1^2)[(1 - x'' - 2y'')^2 + (-1 + 2x'' + y'')^2 + (x'' - y'')^2] \\ = (1 - 3x'')^2 + (1 - 3y'')^2 + [-2 + 3(x'' + y'')]^2, \end{aligned}$$

quels que soient  $x''$ ,  $y''$ .

(\*\*) Cette petite transformation a pour effet de simplifier les calculs.

*Autre addition.* — (Mai 1886.)

XV. En discutant l'identité (F), on trouve ces deux-ci :

$$\begin{aligned} (a+b+c+d)^2 + (a+b-c-d)^2 + (a+c-b-d)^2 + (a+d-b-c)^2 \\ = 4(a^2+b^2+c^2+d^2), \\ (-a+b+c+d)^2 + (a-b+c+d)^2 + (a+b-c+d)^2 + (a+b+c-d)^2 \\ = 4(a^2+b^2+c^2+d^2), \end{aligned}$$

évidentes et connues (\*).

On en conclut les identités :

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2} \right)^2 + \left( \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2} \right)^2 + \left( \frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2} \right)^2 \\ + \left( \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2} \right)^2 = a^4+b^4+c^4+d^4, \end{aligned} \right\} \text{(L)}$$

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{-a^2+b^2+c^2+d^2}{2} \right)^2 + \left( \frac{a^2-b^2+c^2+d^2}{2} \right)^2 + \left( \frac{a^2+b^2-c^2+d^2}{2} \right)^2 \\ + \left( \frac{a^2+b^2+c^2-d^2}{2} \right)^2 = a^4+b^4+c^4+d^4, \end{aligned} \right\} \text{(M)}$$

qui permettent de décomposer, en carrés, une somme de deux, trois, quatre bi-carrés.

Soit, par exemple, le nombre  $N = 5\,108 = 1^4 + 5^4 + 5^4 + 7^4$ .

On trouve

$$N = 42^2 + 64^2 + 22^2 + 16^2 = 42^2 + 52^2 + 16^2 + 8^2.$$

XVI. Ce n'est pas tout : la relation (M) est un cas particulier de l'identité évidente :

$$\sum \left( \frac{2S_k}{n} - a^k \right)^2 = S_{2k},$$

dans laquelle

$$S_k = a^k + b^k + \dots + g^k,$$

$$S_{2k} = a^{2k} + b^{2k} + \dots + g^{2k}.$$

(\*) Réalis s'est servi de la première pour établir de remarquables théorèmes d'arithmétique (*Nouvelles Annales*, 1875, p. 219).

**CV. — Développement de l'intégrale elliptique  
de première espèce.**

(Mai 1872) (\*).

I. Pour transformer

$$F_1(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (1)$$

je pose

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{tg} \theta. \quad (2)$$

Cette formule donne

$$\sin^2 \varphi = \frac{\sin^2 \theta}{b \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}, \quad \cos^2 \varphi = \frac{b \cos^2 \theta}{b \cos^2 \theta + \sin^2 \theta},$$

$$1 - c^2 \sin^2 \varphi = b \frac{\cos^2 \theta + b \sin^2 \theta}{b \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}, \quad d\varphi = \sqrt{b} \frac{d\theta}{b \cos^2 \theta + \sin^2 \theta};$$

puis

$$F_1(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{[1 - (1 - b) \cos^2 \theta][1 - (1 - b) \sin^2 \theta]}} \quad (**). \quad (5)$$

On a, par la formule du binôme :

$$[1 - (1 - b) \cos^2 \theta]^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(2n + 1)}{4^n [\Gamma(n + 1)]^2} (1 - b)^n \cos^{2n} \theta,$$

$$[1 - (1 - b) \sin^2 \theta]^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(2p + 1)}{4^p [\Gamma(p + 1)]^2} (1 - b)^p \sin^{2p} \theta;$$

(\*) Un extrait de cette Note a été communiqué au Congrès du Havre, en 1877.

(\*\*) A cause de

$$\cos^2 \theta + b \sin^2 \theta = 1 - (1 - b) \sin^2 \theta, \quad b \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 - (1 - b) \cos^2 \theta.$$

donc

$$F_1(c) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{\Gamma[2n+1]\Gamma(2p+1)}{4^{n+p}[\Gamma(n+1)\Gamma(p+1)]^2} (1-b)^{n+p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \theta \sin^{2p} \theta d\theta.$$

La valeur de l'intégrale est

$$\frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+p+1)}.$$

Par conséquent,

$$F_1(c) = \frac{1}{2} \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{\Gamma(2n+1)\Gamma(2p+1)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}{[\Gamma(n+1)\Gamma(p+1)]^2 \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{1-b}{4}\right)^{n+p}. \quad (4)$$

II. La fraction

$$\frac{\Gamma(2n+1)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{[\Gamma(n+1)]^2}$$

égale

$$\begin{aligned} \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \dots 2n}{(1 \cdot 2 \cdot 5 \dots n)^2} \sqrt{\pi} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}{2 \cdot 2 \cdot 2} &= \frac{(n+1)(n+2) \dots 2n}{1 \cdot 2 \cdot 5 \dots n} \sqrt{\pi} \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \dots (4n-2)}{4^n} \\ &= \frac{\sqrt{\pi} [(n+1)(n+2) \dots 2n]^2}{4^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \dots n} \quad (*). \end{aligned}$$

De même,

$$\frac{\Gamma(2p+1)\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}{[\Gamma(p+1)]^2} = \frac{\sqrt{\pi} [(p+1)(p+2) \dots (2p)]^2}{4^p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \dots p}.$$

Donc, si l'on suppose  $n+p=s$ , et qu'on fasse

$$P_s = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 5 \dots s} \sum \frac{[(n+1)(n+2) \dots 2n \cdot (p+1)(p+2) \dots 2p]^2}{1 \cdot 2 \cdot 5 \dots n \cdot 1 \cdot 2 \dots p}, \quad (5)$$

(\*) *Cours d'Analyse de l'Université de Liège*, p. 56. La transformation précédente peut être effectuée de diverses manières; par exemple, au moyen de la formule de Legendre.

on aura, au lieu de la formule (4),

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2} \sum_0^{\infty} P_s \left( \frac{1-b}{46} \right)^s. \quad (6)$$

On verra, tout à l'heure, que  $P_s$  est un nombre entier (\*).

III. Le développement de  $F_1(c)$ , ordonné suivant les puissances du module, est

$$\frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 c^2 + \left( \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 4} \right)^2 c^4 + \left( \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 c^6 + \dots \right].$$

Si l'on fait  $1-b=2x$ , il devient

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2} \sum_0^{\infty} [C_{2n, n}]^2 \left[ \frac{x(1-x)}{4} \right]^{2n}. \quad (7)$$

Dans le développement de  $(1-x)^n$ , le coefficient de  $x^p$  est

$$(-1)^p C_{n, p}.$$

Donc si l'on suppose encore  $n+p=s$ , et que l'on fasse

$$Q_s = \sum_0^{\infty} [C_{2s-2p, s-p}]^2 C_{s-p, p} (-1)^p \left( \frac{1}{4} \right)^{s-p}, \quad \left( 0 \leq p \leq \frac{s}{2} \right) \quad (8)$$

on aura

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2} \sum_0^{\infty} Q_s x^s. \quad (9)$$

D'ailleurs, la formule (6) peut être écrite ainsi :

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2} \sum_0^{\infty} P_s \left( \frac{x}{8} \right)^s. \quad (10)$$

Conséquemment,

$$P_s = 2^s \cdot 4^s Q_s. \quad (11)$$

(\*) Cette propriété résulte, aussi, du théorème suivant :

$$\frac{(a+1)(a+2)\dots 2a \cdot (b+1)(b+2)\dots 2b}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (a+b)} = \text{entier},$$

si  $a$  et  $b$  sont des nombres entiers (Sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques. Seconde Note, p. 14.)



Et comme  $4^s Q_s$  est un nombre entier,  $P_s$  est aussi un nombre entier, divisible par  $2^s$ .

IV. Soit, pour abrégé,

$$F_1(c) = \sum_0^{\infty} A_n (1-b)^n; \quad (12)$$

et, par conséquent :

$$\frac{dF_1(c)}{dc} = \frac{c}{b} \sum_0^{\infty} n A_n (1-b)^{n-1} (*), \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 F_1(c)}{dc^2} &= \frac{c^2}{b^2} \sum_0^{\infty} n(n-1) A_n (1-b)^{n-2} \\ &+ \frac{1}{b^3} \sum_0^{\infty} n A_n (1-b)^{n-1} (**). \end{aligned} \right\} (14)$$

On sait que

$$b^2 \frac{d^2 F_1}{dc^2} + \frac{1-5c^2}{c} \frac{dF_1}{dc} - F_1 = 0 (***)$$

Cette relation devient, d'après les valeurs précédentes,

$$\begin{aligned} bc^2 \sum_0^{\infty} n(n-1) A_n (1-b)^{n-2} + (2-5c^2) \sum_0^{\infty} n A_n (1-b)^{n-1} \\ - b \sum_0^{\infty} A_n (1-b)^n = 0. \end{aligned}$$

Soit encore  $1-b=t$ ; et, par conséquent :

$$b = 1-t, \quad c^2 = (2-t)t, \quad 2-5c^2 = 2-6t+5t^2;$$

(\*) A cause de

$$\frac{db}{dc} = -\frac{c}{b}.$$

(\*\*) La dérivée de  $\frac{c}{b}$  est

$$\frac{b + \frac{c^2}{b}}{b^2} = \frac{1}{b^3}.$$

(\*\*\*) LEGENDRE, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 65.

puis, au lieu de la dernière égalité,

$$\left. \begin{aligned} (2 - 5t + t^2) \sum_0^\infty n(n-1) A_n t^{n-1} + (2 - 6t + 5t^2) \sum_0^\infty n A_n t^{n-1} \\ - (1-t) \sum_0^\infty A_n t^n = 0. \end{aligned} \right\} (15)$$

V. Dans le premier membre, qui doit être nul quelle que soit la valeur attribuée au nombre entier  $n$ , le coefficient de  $t^0$  est  $2A_1 - A_0$ ; le coefficient de  $t$  est

$$4A_2 + 4A_2 - 6A_1 - A_1 + A_0.$$

Donc

$$A_1 = \frac{1}{2} A_0, \quad A_2 = \frac{5}{16} A_0.$$

Dès que  $n$  surpasse 2, le coefficient  $A_n$  est donné par la loi de récurrence :

$$2n^2 A_n - (5n^2 - 5n + 1) A_{n-1} + (n-1)^2 A_{n-2} = 0. \quad (16)$$

La comparaison des formules (6), (12) donne

$$A_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{P_n}{46^n}.$$

Donc

$$n^2 P_n - 8(5n^2 - 5n + 1) P_{n-1} + 128(n-1)^2 P_{n-2} = 0. \quad (17)$$

Par la formule (5), on trouve

$$P_0 = 1, \quad P_1 = 8;$$

après quoi l'équation (17) donne, successivement :

$$P_2 = 80, \quad P_3 = 896, \quad P_4 = 10\,816, \dots$$

On a donc le théorème suivant, qu'il serait, croyons-nous, très difficile de démontrer directement :

*Soient une suite de nombres  $P_0, P_1, P_2, \dots$ , dont les deux*

premiers sont 1 et 8, et dont les autres, à partir de  $n = 2$ , sont déterminés par la formule :

$$P_n = \frac{8}{n^2} [(5n^2 - 5n + 1)P_{n-1} - 16(n-1)^2 P_{n-2}].$$

Tous ces nombres sont entiers (\*).

## VI. La comparaison des formules

$$Q_n = \sum [C_{2n-2p, n-p}]^2 C_{n-p, p} (-4)^p \left(\frac{1}{4}\right)^{n-p}, \quad (8)$$

$$P_n = 2^n \cdot 4^n Q_n \quad (11)$$

prouve que

$$P_n = 2^n \sum (-4)^p [C_{2n-2p, n-p}]^2 C_{n-p, p}, \quad \left(0 \leq p \leq \frac{n}{2}\right)$$

ou

$$\frac{P_n}{2^n} = [C_{2n, n}]^2 - 4 \cdot [C_{2n-2, n-1}]^2 C_{n-1, 1} + 4^2 [C_{2n-4, n-2}]^2 C_{n-2, 2} - 4^3 [C_{2n-6, n-3}]^2 C_{n-3, 3} + \dots \quad (18)$$

Nous avons ainsi l'expression générale de  $P_n$ , ou de l'intégrale

(\*) M. de Jonquières, à qui j'avais indiqué quelques-uns des résultats précédents, a eu la patience de calculer les valeurs de  $P_n$ , jusqu'à  $n = 17$ . Les voici :

$$P_1 = 2^5, \quad P_2 = 2^4 \cdot 5, \quad P_3 = 2^7 \cdot 7, \quad P_4 = 2^6 \cdot 169, \quad P_5 = 2^9 \cdot 269, \quad P_6 = 2^{10} \cdot 1781,$$

$$P_7 = 2^{15} \cdot 5055, \quad P_8 = 2^{10} \cdot 558577, \quad P_9 = 2^{15} \cdot 599569, \quad P_{10} = 2^{14} \cdot 4506645,$$

$$P_{11} = 2^{17} \cdot 7816893, \quad P_{12} = 2^{16} \cdot 229011025, \quad P_{13} = 2^{19} \cdot 412401883,$$

$$P_{14} = 2^{20} \cdot 5155675605, \quad P_{15} = 2^{25} \cdot 5850156227, \quad P_{16} = 2^{18} \cdot 2806908617417,$$

$$P_{17} = 2^{21} \cdot 5281845126105.$$

Les recherches de ce savant Géomètre sont l'objet d'une Note communiquée à l'Académie des sciences, et publiée dans les *Comptes rendus* (séance du 10 août 1885).

particulière de l'équation (17), relative à  $P_0 = 1$ ,  $P_1 = 8$ . Si, dans cette formule, on prend  $n = 4$ , on trouve

$$\begin{aligned} \frac{P_4}{16} &= \left( \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \right)^2 - 4 \cdot \left( \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right)^2 \cdot 5 + 16 \left( \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \right)^2 \\ &= 70^2 - 4 \cdot 20^2 \cdot 5 + 16 \cdot 6^2 = 4 \ 900 - 4 \ 800 + 576 = 676; \end{aligned}$$

puis  $P_4 = 10 \ 816$ , comme ci-dessus.

### VII. Le second membre de la formule

$$F_1(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{[1 - (1-b)\cos^2\theta][1 - (1-b)\sin^2\theta]}} \quad (3)$$

égale

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{b + (1-b)^2 \sin^2\theta \cos^2\theta}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{4b + (1-b)^2 \sin^2 2\theta}} \\ &= \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{4b + (1-b)^2 \sin^2 x}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1+b)^2 - (1-b)\cos^2 x}} \\ &= \frac{2}{1+b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-b}{1+b}\right)^2 \sin^2 \varphi}} \quad (*). \end{aligned}$$

Ainsi

$$F_1(c) = \frac{2}{1+b} F_1 \left( \frac{1-b}{1+b} \right); \quad (19)$$

relation connue (\*\*).

(\*) On fait

$$2\theta = x,$$

puis

$$x = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

(\*\*) LEGENDRE, t. 1, p. 79.

VIII. *Remarque.* — Si, dans la même formule (3), on change  $b$  en  $-b$ , on obtient, semble-t-il :

$$F_1(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{[1 - (1+b)\cos^2\theta][1 - (1+b)\sin^2\theta]}}.$$

Mais le second membre n'est réel que pour les valeurs de  $\theta$  satisfaisant aux conditions :

$$\cos^2\theta < \frac{1}{1+b}, \quad \sin^2\theta < \frac{1}{1+b}. \quad (20)$$

La première équivaut à

$$\sin^2\theta > \frac{b}{1+b}.$$

Par conséquent, si l'on fait

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{b}{1+b}}, \quad \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{1+b}},$$

on doit substituer, à l'égalité ci-dessus :

$$F_1(c) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\theta}{\sqrt{[1 - (1+b)\cos^2\theta][1 - (1+b)\sin^2\theta]}}. \quad (21)$$

Moyennant ce *changement de limites*, l'intégrale  $F_1(c)$  est développée suivant les puissances de  $1+b$  (\*).

(\*) Les conditions de convergence, relatives à la nouvelle série, sont celles qui viennent d'être écrites.

*Addition.* — (Juillet 1877.)

IX. Reprenons la formule

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{tg} \theta, \quad (2)$$

plus simple que celle de Lagrange :

$$\operatorname{tg} (\varphi_1 - \varphi) = b \operatorname{tg} \varphi.$$

En l'écrivant ainsi :

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \sqrt{b} \operatorname{tg} \varphi, \quad (22)$$

et en supposant

$$c_1 = \frac{1 - b}{1 + b}, \quad (23)$$

valeur d'où résulte, comme on sait,

$$b_1 = \frac{2\sqrt{b}}{1 + b}, \quad (24)$$

on trouve aisément

$$F_1(c_1) = \frac{\sqrt{b}}{b_1} F_1(c), \quad (25)$$

puis

$$F_1(c_n) = \frac{\sqrt{b}}{b_n} \sqrt{b_1 \cdot b_2 \dots b_{n-1}} F_1(c). \quad (26)$$

Quand  $n$  augmente indéfiniment, le premier membre tend vers  $\frac{\pi}{2}$ . La limite de  $b_n$  est 1. Donc

$$[F_1(c)]^2 = \frac{\pi^2}{4b} \lim (b_1 b_2 b_3 \dots). \quad (27)$$

X. Soit  $b = \frac{p}{q}$ . La formule (24) devient

$$b_1 = \frac{\sqrt{pq}}{\frac{1}{2}(p + q)}. \quad (28)$$

Faisons, comme Gauss :

$$p_1 = \sqrt{pq}, \quad q_1 = \frac{1}{2}(p + q), \quad p_2 = \sqrt{p_1 q_1}, \quad q_2 = \frac{1}{2}(p_1 + q_1). \quad (29)$$

De là résulte, au lieu de l'égalité (27),

$$4 \frac{p}{q} \left[ \frac{F_1(c)}{\pi} \right]^2 = \lim \left( \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{p_3}{q_3} \dots \right). \quad (30)$$

Les nombres  $p_n, q_n$ , toujours compris entre  $p$  et  $q$ , tendent, évidemment, vers une limite commune  $\lambda$ . Pour déterminer cette limite, trouvée par Gauss, écrivons ainsi les équations (29), de rang impair :

$$p_1^2 = pq, \quad p_2^2 = p_1 q_1, \quad p_n^2 = p_{n-1} q_{n-1}.$$

Il résulte, de celles-ci et de la relation (30) :

$$\lambda = \frac{q}{2} \frac{\pi}{F_1(c)}. \quad (31)$$

XI. Les valeurs de  $q_1, q_2, \dots, q_n$  (29) donnent, par un calcul aussi simple que le premier :

$$q_n = \frac{1}{2} [p + q + (p_1 - q_1) + (p_2 - q_2) + \dots + (p_{n-1} - q_{n-1})].$$

La limite du premier membre est  $\lambda$ ; donc

$$\lambda = \frac{1}{2} [p + q + (p_1 - q_1) + (p_2 - q_2) + \dots + (p_{n-1} - q_{n-1}) + \dots]. \quad (32)$$

Conséquemment :

La quantité  $\lambda$ , donnée par la formule (31), est la limite commune : 1° de  $p_n$ ; 2° de  $q_n$ ; 3° de  $\sqrt{pq} \sqrt{\frac{q_1}{p_1}} \sqrt{\frac{q_2}{p_2}} \dots$ ; 4° de  $\frac{1}{2} [p + q + (p_1 - q_1) + (p_2 - q_2) + \dots]$

XII. Des formules (31), (32), on conclut

$$\frac{\pi}{F_1(c)} = \frac{1}{q} [p + q + (p_1 - q_1) + (p_2 - q_2) + \dots]. \quad (33)$$

La fonction  $\frac{\pi}{F_1(c)}$ , déjà décomposée en produit indéfini (30), est donc développée en série. En outre, les deux termes des facteurs de ce produit, ou plutôt leurs carrés, sont les termes mêmes de la série; ce qui est assez remarquable (\*).

### CVI. — Sur la méthode des isopérimètres.

(Juillet 1877) (\*\*).

I. Des formules connues :

$$r_1 = \frac{1}{2}(r + R), \quad R_1 = \sqrt{Rr_1}, \quad r_2 = \frac{1}{2}(r_1 + R_1), \quad R_2 = \sqrt{R_1r_2}, \dots$$

$$r_n = \frac{1}{2}(r_{n-1} + R_{n-1}), \quad R_n = \sqrt{R_{n-1}r_n},$$

on conclut les deux systèmes :

$$2r_1 = R + R, \quad 2r_2 = r_1 + R_1, \dots, 2r_n = r_{n-1} + R_{n-1},$$

$$R_1^2 = Rr_1, \quad R_2^2 = R_1r_2, \dots, R_n^2 = R_{n-1}r_n;$$

puis

$$r_1 + r_2 + \dots + 2r_n = r + R_1 + \dots + R_{n-1},$$

$$R_1R_2 \dots R_{n-1} \cdot R_n^2 = Rr_1r_2 \dots r_{n-1}r_n;$$

ou

$$r_n = \frac{1}{2}(r + R) + \frac{1}{2}[(R_1 - r_1) + (R_2 - r_2) + \dots + (R_{n-1} - r_{n-1})], \quad (1)$$

$$R_n = R \cdot \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_2}{R_2} \dots \frac{r_n}{R_n}. \quad (2)$$

Si  $n$  croit indéfiniment, les rayons  $r_n, R_n$  tendent vers *le rayon d'une circonférence égale à 4* (\*\*\*) . Donc la série (1) et le pro-

(\*) Abstraction faite, bien entendu, des facteurs 2 et  $q$ .

(\*\*) Cette Note peut être considérée comme un complément de la précédente.

(\*\*\*) Pourvu que l'on suppose  $r=0, R=1$ . (*Éléments de Géométrie*, p. 184).



duit (2) ont une limite commune, dont la valeur est  $\frac{2}{\pi}$ . En d'autres termes :

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{4}(r + R) + \frac{1}{4}[(R_1 - r_1) + (R_2 - r_2) + \dots + (R_{n-1} - r_{n-1}) + \dots], \quad (5)$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2} R \frac{r_1}{R_1} \frac{r_2}{R_2} \dots \frac{r_n}{R_n} \dots \quad (*). \quad (4)$$

*Addition.* — (Mai 1886.)

II. Si l'on suppose toujours  $r = 0$ ,  $R = 1$ ;  $r_{n-1}$  et  $R_{n-1}$  sont l'apothème et le rayon d'un polygone régulier de  $2^n$  côtés, dont le périmètre égale 4. Soit  $c_{n-1}$  le côté de ce polygone; soit  $\alpha_{n-1}$  la demi-angle au centre. Il est visible que :

$$c_{n-1} = \frac{1}{2^{n-2}}, \quad \alpha_{n-1} = \frac{\pi}{2^n}, \quad r_{n-1} = \frac{\frac{1}{2} c_{n-1}}{\operatorname{tg} \alpha_{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2^n} \right)},$$

$$R_{n-1} = \frac{\frac{1}{2} c_{n-1}}{\sin \alpha_{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1} \sin \left( \frac{\pi}{2^n} \right)}.$$

Par conséquent,

$$R_{n-1} - r_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2^{n+1}} \right);$$

puis, au lieu de l'égalité (5) :

$$\frac{4}{\pi} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{\pi}{16} + \frac{1}{8} \operatorname{tg} \frac{\pi}{32} + \dots \quad (**). \quad (5)$$

(\*) On conclut, de cette égalité (4) :

$$\log \pi = \log \frac{2}{R} + \log \frac{R_1}{r_1} + \dots + \log \frac{R_n}{r_n} + \dots$$

(\*\*) Cette formule, peu connue, est un cas particulier de celle-ci :

$$\frac{1}{x} = \cot x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \operatorname{tg} \frac{x}{8} + \dots,$$

conséquence de celle d'Euler :

$$\frac{\sin x}{x} = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \dots$$

**CVII. — Sur les Nombres de Segner.**

(Juillet 1870.)

I. Divers Géomètres se sont occupés de ce problème : *De combien de manières un polygone convexe, de n côtés, peut-il être décomposé en triangles, au moyen de diagonales?* (\*) Soit  $T_n$  ce nombre de manières. On sait que

$$T_4 = 2, \quad T_5 = 5, \quad T_6 = 14, \quad T_7 = 42, \dots$$

Les nombres  $T_n$ , considérés par Segner (\*\*), satisfont aux relations suivantes :

$$T_{n+1} = T_2 T_n + T_3 T_{n-1} + \dots + T_{n-1} T_3 + T_n T_2 \quad (***) \quad (1)$$

$$T_{n+1} = \frac{4n-6}{n} T_n \quad (2)$$

D'après celle-ci,  $T_n$  est divisible par  $n$ , au moins quand  $n$  est premier avec 6.

De plus, comme l'a trouvé Binet (iv), la fonction génératrice de  $T_n$  est  $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ . En effet, dans le développement de cette quantité, le coefficient de  $x^n$  est

$$C_n = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots \overline{2n-1}}{4 \cdot 6 \cdot 8 \dots \overline{2n+2}} 4^n \quad (3)$$

Il résulte, de cette formule,

$$C_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2} C_n \quad (4)$$

La fraction ne diffère, de la précédente, que par le changement de  $n$  en  $n+2$ . Et comme  $T_5 = C_1 = 1$ , on a  $T_{n+1} = C_{n-1}$ .

(\*) *Journal de Liouville*, t. III et IV.

(\*\*) *Ibid.*, t. III, p. 505.

(\*\*\*) On suppose  $T_5 = 1$ .

(iv) *Journal de Liouville*, t. IV, p. 85.

En outre,

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = 1 + T_3x + T_4x^2 + \dots + T_{n+2}x^n + \dots; \quad (5)$$

conformément à la remarque de Binet.

II. On peut vérifier, directement, que  $C_n$  est un nombre entier.

En premier lieu, d'après la formule (5) :

$$C_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \dots \overline{4n-2}}{2 \cdot 5 \cdot 4 \dots \overline{n+1}}.$$

Or,

$$2 \cdot 6 \cdot 10 \dots \overline{4n-2} = (n+1)(n+2) \dots 2n \quad (*);$$

done

$$C_n = \frac{(n+1)(n+2) \dots 2n}{2 \cdot 5 \cdot 4 \dots \overline{n+1}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \dots 2n}{1 \cdot 2 \dots n \times 4 \cdot 2 \dots \overline{n+1}} = \text{entier} (**). \quad (6)$$

De plus,

$$T_{n+2} = \frac{1}{n+1} C_{2n, n},$$

ou

$$nT_{n+1} = C_{2n-2, n-1}. \quad (7)$$

III. D'après la génération des Nombres de Segner, ils doivent se rencontrer dans les développements qui proviennent de la formule du binôme. Par exemple, comme

$$\text{arc sin } x = \sum_0^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots \overline{2n-1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (***),$$

on peut écrire :

$$\text{arc sin } x = \sum_0^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} C_n \frac{x^{2n+1}}{4^n},$$

(\*) Voir ci-dessus, p. 45.

(\*\*) Cours d'Analyse de l'Université de Liège, p. 48.

(\*\*\*) Pour  $n=0$ , la fraction est remplacée par 1.

ou bien

$$\text{arc sin } x = \sum_0^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} T_{n+2} \frac{x^{2n+1}}{4^n} \quad (*) \quad (8)$$

IV. Dans l'égalité (5), changeons  $x$  en  $x^2$ , puis  $x$  en  $\frac{x}{2}$ . Nous aurons

$$2 \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} = \sum_0^{\infty} T_{n+2} \frac{x^{2n}}{4^n};$$

puis

$$\sqrt{1 - x^2} = 1 - \sum_0^{\infty} T_{n+2} \frac{x^{2n+2}}{2^{2n+1}}; \quad (9)$$

développement par lequel nous aurions pu commencer.

V. Soit

$$y = \sqrt{1 - x^2} \text{ arc sin } x; \quad (10)$$

et, par conséquent,

$$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ arc sin } x. \quad (11)$$

Il est très facile, non seulement de développer la fonction  $y$ , mais de découvrir de nouvelles relations entre les Nombres de Segner.

Posons, en effet :

$$y = \sum_0^{\infty} A_n x^{2n+1}, \quad y' = \sum_0^{\infty} (2n+1) A_n x^{2n}. \quad (12)$$

Des relations (9) et (10), on déduit

$$\frac{y}{y' - 1} = - \frac{1 - x^2}{x};$$

(\*) De même, la formule

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2} \sum_0^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \dots 2n} \right)^2 c^{2n}$$

peut être remplacée par celle-ci :

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2} \sum_0^{\infty} \left( \frac{c}{4} \right)^{2n} (n+1)^2 T_{n+2}^2.$$

(Août 1885.)

puis, à cause de  $A_0 = 1$  :

$$\begin{aligned} & x[x + A_1x^3 + A_2x^5 + A_3x^7 + \dots + A_nx^{2n+1} + \dots] \\ & + (1 - x^2)[3A_1x^3 + 5A_2x^5 + 7A_3x^7 + \dots \\ & + (2n + 1)A_nx^{2n} + \dots] = 0. \end{aligned}$$

Cette égalité donne, successivement :

$$A_1 = -\frac{1}{5}, \quad A_2 = -\frac{2}{5 \cdot 5}, \quad A_3 = -\frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 5 \cdot 7}, \dots;$$

et, en général,

$$A_n = -\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots \overline{2n-2}}{5 \cdot 5 \cdot 7 \dots \overline{2n+1}}. \quad (15)$$

La fraction

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots \overline{2n-2}}{5 \cdot 5 \cdot 7 \dots \overline{2n+1}} &= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \frac{(2 \cdot 4 \dots \overline{2n-2})^2}{1 \cdot 2 \cdot 5 \dots \overline{2n-2}} \\ &= \frac{4^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)} \frac{1}{C_{2n-2, n-1}}. \end{aligned}$$

Done, par les formules (7) et (2) :

$$A_n = -\frac{4^{n-1}}{n(2n-1)(2n+1)} \frac{1}{T_{n+1}} = -\frac{2^{2n-1}}{n(n+1)(2n+1)} \frac{1}{T_{n+2}}. \quad (14)$$

Dans le produit des fonctions (8), (9), le coefficient de  $x^{2n+1}$  est

$$\begin{aligned} & \frac{n+1}{(2n+1)4^n} T_{n+2} \\ & - \frac{1}{2^{2n-1}} \left[ T_2 T_{n+1} + \frac{2}{5} T_3 T_n + \frac{5}{5} T_4 T_{n-1} + \dots + \frac{n}{2n-1} T_{n+1} T_2 \right], \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & \frac{2n-1}{(2n+1)2^{2n-1}} T_{n+1} \\ & - \frac{1}{2^{2n-1}} \left[ T_2 T_{n+1} + \frac{2}{5} T_3 T_n + \frac{5}{5} T_4 T_{n-1} + \dots + \frac{n}{2n-1} T_{n+1} T_2 \right]. \end{aligned}$$

Ce coefficient égale aussi  $A_n$ . Conséquemment

$$\left. \begin{aligned} T_2 T_{n+1} + \frac{2}{5} T_3 T_n + \frac{5}{5} T_4 T_{n-1} + \dots + \frac{n}{2n-1} T_{n+1} T_2 \\ = \frac{2n-1}{2n+1} T_{n+1} + \frac{4^{2n-1}}{n(n+1)(2n+1)} \frac{1}{T_{n+2}} \end{aligned} \right\} (15)$$

Telle est la relation annoncée.

En la combinant avec l'égalité

$$T_2 T_{n+1} + T_3 T_n + T_4 T_{n+1} + \dots + T_n T_5 + T_{n+1} T_2 = \frac{4n-2}{n+1} T_{n+1}; \quad (1)$$

on trouve

$$\left. \begin{aligned} T_2 T_{n+1} + \frac{1}{5} T_3 T_n + \frac{1}{5} T_4 T_{n-1} + \dots + \frac{1}{2n-1} T_{n+1} T_2 \\ + \frac{2n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)} T_{n+1} = \frac{2^{2n-1}}{n(n+1)(2n+1)} \frac{1}{T_{n+2}}; \end{aligned} \right\} (16)$$

ce qui est un peu plus simple.

VI. La méthode précédente peut être généralisée. Soient  $u, v, y$  trois fonctions de  $x$ , telles que l'on ait

$$y = uv, \quad u' = \frac{du}{dx} = \frac{1}{v}, \quad (17)$$

$$u = \sum_0^{\infty} B_n x^n, \quad v = \sum_0^{\infty} C_n x^n. \quad (18)$$

A cause de

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v},$$

on a

$$\frac{y' - 1}{y} = \frac{v'}{v}. \quad (19)$$

Soit encore

$$y = \sum_0^{\infty} A_n x^n. \quad (20)$$

Si la quantité  $\frac{v'}{v}$  est algébrique, l'égalité (19) fera connaître, de la manière la plus simple, les coefficients  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ . En outre, si l'on fait varier la fonction  $v$ , on obtiendra des sommes, en nombre indéfini.

VII. Exemple :

$$v = \sqrt{1 - x^4}, \quad u' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}}, \quad u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

La formule du binôme donne

$$u = x + \frac{1}{2} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 4} \frac{x^9}{9} + \frac{1 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^{15}}{15} + \dots,$$

$$v = 1 - \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{2 \cdot 4} x^8 - \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^{12} - \frac{1 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^{16} - \dots$$

Soit maintenant

$$y = x + A_3 x^5 + A_9 x^9 + \dots + A_{4n+1} x^{4n+1} + \dots;$$

et, par conséquent,

$$\frac{y' - 1}{y} = \frac{5A_3 x^5 + 9A_9 x^9 + \dots + (4n+1)A_{4n+1} x^{4n+1} + \dots}{1 + A_3 x^4 + A_9 x^8 + \dots + A_{4n+1} x^{4n} + \dots}.$$

On a

$$\frac{v'}{v} = -\frac{2x^3}{1 - x^4};$$

donc l'équation (19) devient

$$(1 - x^4)[5A_3 + 9A_9 x^4 + 15A_{15} x^{12} + \dots + (4n+1)A_{4n+1} x^{4(n-1)} + \dots] \\ + 2[1 + A_3 x^4 + A_9 x^8 + \dots + A_{4n+1} x^{4n} + \dots] = 0.$$

Il résulte, de celle-ci :

$$5A_3 + 2 = 0, \quad 9A_9 - 5A_3 = 0, \quad 15A_{15} - 7A_9 = 0, \dots \\ (4n+1)A_{4n+1} - (4n-5)A_{4n-5} = 0, \dots;$$

puis

$$A_5 = -\frac{2}{5}, \quad A_9 = -\frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 9}, \quad A_{15} = -\frac{2 \cdot 5 \cdot 7}{5 \cdot 9 \cdot 15}, \dots$$

$$A_{4n+1} = -\frac{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \dots \overline{4n-5}}{5 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 17 \dots \overline{4n+1}}.$$

Par conséquent

$$y = \sqrt{1-x^4} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = x - \frac{2}{5} x^5 - 2 \sum_2^\infty \frac{5 \cdot 7 \cdot 11 \dots \overline{4n-5}}{5 \cdot 9 \cdot 15 \dots \overline{4n+1}} x^{4n+1}. \quad (21)$$

On trouve, de la même manière,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \int_0^x dx \sqrt{1-x^4} = x + \frac{2}{5} x^5 + 2 \sum_2^\infty \frac{7 \cdot 11 \cdot 15 \dots \overline{4n-1}}{5 \cdot 9 \cdot 15 \dots \overline{4n+1}} x^{4n+1}. \quad (22)$$

VIII. Développement d'une intégrale elliptique. — Considérons la fonction

$$z = \int_0^x dx \sqrt{1-x^4} \cdot \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

La dérivée est

$$z' = \sqrt{1-x^4} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \int_0^x dx \sqrt{1-x^4}.$$

Par les formules (21), (22) :

$$z' = 2x + 2 \sum_0^\infty \left[ \frac{7 \cdot 11 \cdot 15 \dots \overline{4n-1}}{5 \cdot 9 \cdot 15 \dots \overline{4n+1}} - \frac{5 \cdot 7 \cdot 11 \dots \overline{4n-5}}{5 \cdot 9 \cdot 15 \dots \overline{4n+1}} \right] x^{4n+1},$$

ou

$$z' = 2x + 2 \frac{4}{5 \cdot 9} x^9 + 2 \sum_3^\infty \frac{7 \cdot 11 \cdot 15 \dots \overline{4n-5}}{5 \cdot 9 \cdot 15 \dots \overline{4n+1}} (4n-4) x^{4n+1}.$$

Donc

$$z = x^2 + \frac{4}{5 \cdot 9} \frac{x^{10}}{5} + \sum_3^\infty \frac{7 \cdot 11 \cdot 15 \dots \overline{4n-5}}{5 \cdot 9 \cdot 15 \dots \overline{4n+1}} (4n-4) \frac{x^{4n+2}}{2n+1}; \quad (25)$$



et, en particulier,

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^1 dx \sqrt{1-x^4} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \\ &= 1 + \frac{1}{5} \frac{4}{9 \cdot 5} + \sum_5^{\infty} \frac{7 \cdot 11 \cdot 15 \dots \overline{4n-5} \cdot 4n-4}{5 \cdot 9 \cdot 15 \dots \overline{4n+1} \cdot 2n+1} \end{aligned} \right\} (24)$$

L'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \sqrt{1-x^4} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \\ & + \frac{1}{2} \left[ x \sqrt{1-x^4} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 dx \sqrt{1-x^4}; \end{aligned}$$

puis

$$\int_0^1 dx \sqrt{1-x^4} = \frac{2}{5} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Si l'on fait  $x = \cos \varphi$ , on a

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2-\sin^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} F_1 \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \right).$$

La relation (24) devient

$$\frac{1}{5} \left[ F_1 \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \right]^2 = 1 + \frac{1}{5} \frac{4}{9 \cdot 5} + \sum_5^{\infty} \frac{7 \cdot 11 \cdot 15 \dots \overline{4n-5} \cdot 4n-4}{5 \cdot 9 \cdot 15 \dots \overline{4n+1} \cdot 2n+1} \quad (25)$$

D'ailleurs,

$$F_1 \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \frac{1}{2} + \left( \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{1}{2^2} + \left( \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \frac{1}{2^5} + \dots \right]$$

Donc, finalement,

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\pi^2}{12} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \frac{1}{2} + \left( \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{1}{2^2} + \left( \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \frac{1}{2^5} + \dots \right]^2 = \\ & 1 + \frac{1}{5} \frac{4}{9 \cdot 5} + \sum_5^{\infty} \frac{7 \cdot 11 \cdot 15 \dots \overline{4n-5} \cdot 4n-4}{5 \cdot 9 \cdot 15 \dots \overline{4n+1} \cdot 2n+1} \end{aligned} \right\} (26)$$

*Addition.* — (Avril 1876.)

IX. D'après la formule de Lagrange, appliquée à l'équation

$$y = a + \frac{x}{y}, \quad (27)$$

$$y^{-k} = a^{-k} - \frac{k}{1} a^{-k-2} x + \frac{k(k+5)}{1 \cdot 2} a^{-k-4} x^2 - \frac{k(k+4)(k+5)}{1 \cdot 2 \cdot 5} a^{-k-6} x^3 + \dots (*) (28)$$

Si l'on suppose  $a = 2$ , et que l'on change  $x$  en  $-4x$ , on a, par l'équation (27) :

$$y = 1 + \sqrt{1-4x} (**), \quad \frac{1}{y} = 1 - \sqrt{1-4x}, \quad y^{-k} = \frac{1}{(2x)^k} \left( \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2} \right)^k;$$

puis, par la formule (5) :

$$y^{-k} = \frac{1}{(2x)^k} [x + T_3 x^2 + T_4 x^3 + T_5 x^4 + \dots]^k.$$

Le second membre de l'égalité (28) est, en vertu des hypothèses précédentes,

$$2^{-k} \left[ 1 + \frac{k}{1} x + \frac{k(k+5)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{k(k+4)(k+5)}{1 \cdot 2 \cdot 5} x^3 + \dots \right].$$

Par conséquent,

$$[T_2 x + T_3 x^2 + T_4 x^3 + T_5 x^4 + \dots]^k = x^k + \frac{k}{1} x^{k+1} + \frac{k(k+5)}{1 \cdot 2} x^{k+2} + \dots (29)$$

X. *Remarques.* — 1° Lorsque  $k = 2$ , le second membre se réduit à

$$x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 14x^5 + \dots = T_3 x^2 + T^4 x^3 + T_5 x^4 + \dots;$$

et l'on retrouve la relation (1).

(\*) BERTRAND, *Calcul différentiel*, p. 520.

(\*\*) On prend la racine qui donne

$$\lim (y^{-k}) = 2^{-k},$$

pour  $x = 0$ .

2° En général, le coefficient de  $x^{k+n}$ , dans le second membre, est

$$\frac{k(k+n+1)(k+n+2) \dots (k+2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n},$$

ou

$$C_{k+2n-1, n} - C_{k+2n-1, n-1}.$$

Dans cette expression,  $n$  est supposé positif. Si  $n = 0$ ,  $x^{n+t}$  devient  $x^k$ , terme dont le coefficient est 1.

XI. *Relation nouvelle entre les nombres T.* — Pour l'obtenir, prenons l'égalité

$$(a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots)^k = A_0 z^k + A_1 z^{k+1} + \dots + A_n z^{k+n} + \dots$$

Le premier membre est le produit de  $k$  facteurs, dont les termes généraux peuvent être représentés, respectivement, par

$$a_\alpha z^\alpha, \quad a_\beta z^\beta, \quad \dots \quad a_\lambda z^\lambda.$$

Par conséquent, si

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = k + n, \quad (50)$$

on a

$$A_n = \sum a_\alpha \cdot a_\beta \dots a_\lambda. \quad (51)$$

En particulier :

$$\sum T_{\alpha+1} \cdot T_{\beta+1} \dots T_{\lambda+1} = C_{k+2n-1, n} - C_{k+2n-1, n-1}. \quad (52)$$

Telle est la relation cherchée.

XII. *Remarque.* — Le nombre des termes, dans le premier membre, est celui des solutions, entières et positives, de l'équation (50), laquelle renferme  $k$  inconnues. On sait que ce nombre égale  $C_{k+n-1, n}$  (\*).

XIII. *Application.* — Soient  $k = 3$ ,  $n = 4$ . Si l'on développe, directement,

$$(x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 14x^5)^3,$$

(\*) Note I.

on trouve, comme coefficient de  $x^7$  :

$$\begin{aligned} & 14 \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \cdot 1 + 1 \cdot 14 \cdot 1 \\ & + 5 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \\ & + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 14 = 90. \end{aligned}$$

Le nombre des termes de cette somme est  $15 = C_{6,4}$ . D'un autre côté,

$$\begin{aligned} \sum T_{\alpha+1} T_{\beta+1} T_{\gamma+1} &= T_2 T_2 T_6 + T_2 T_3 T_5 + T_2 T_4 T_4 + T_2 T_5 T_3 + T_2 T_6 T_2 \\ &+ T_3 T_2 T_5 + T_3 T_3 T_4 + T_3 T_4 T_3 + T_3 T_5 T_2 + T_4 T_2 T_4 + T_4 T_5 T_3 \\ &+ T_4 T_4 T_2 + T_5 T_2 T_3 + T_5 T_3 T_2 + T_6 T_2 T_2 \\ &= 14 + 5 + 2 \cdot 2 + 5 + 14 + 5 + 2 + 2 + 5 + 2 \cdot 2 + 5 + 5 \\ &+ 14 = 90 = C_{10,4} - C_{10,5}. \end{aligned}$$

*Autre addition. — (Juillet 1885.)*

XIV. L'égalité (52) exprime ce théorème :

*La différence entre les nombres de combinaisons de  $k + 2n - 1$  lettres, prises  $n$  à  $n$ , puis  $n - 1$  à  $n - 1$ , est égale à la somme de produits composés de  $k$  facteurs, pris parmi les Nombres de Segner :*

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots$$

*Le nombre de ces produits est celui des combinaisons de  $k + n - 1$  lettres,  $n$  à  $n$ .*

XV. D'après les égalités

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = 1 + T_3 x + T_4 x^2 + T_5 x^3 + \dots \quad (5)$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{4x},$$

on a

$$T_2 x + T_3 x^2 + T_4 x^3 + \dots = \frac{2x}{y} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2},$$

quantité comprise entre 0 et  $\frac{1}{2}$ . Conséquemment,

$$1 + \frac{2x}{y} + \left(\frac{2x}{y}\right)^2 + \left(\frac{2x}{y}\right)^3 + \dots = \frac{1}{1 - \frac{2x}{y}} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

ou

$$1 + \frac{2x}{y} + \left(\frac{2x}{y}\right)^2 + \left(\frac{2x}{y}\right)^3 + \dots = 1 + T_3x + T_4x^2 + T_5x^3 + \dots$$

Si donc, dans le premier membre de l'égalité

$$[T_2x + T_3x^2 + T_4x^3 + T_5x^4 + \dots]^k = x^k + \frac{k}{1} x^{k+1} + \frac{k(k+5)}{1 \cdot 2} x^{k+2} + \dots, \quad (29)$$

on fait varier  $k$ , de zéro à l'infini, la limite de la somme est

$$1 + T_3x + T_4x^2 + T_5x^3 + \dots (*)$$

XVI. On a vu que, dans le second membre, le coefficient de  $x^{k+n}$  est  $C_{k+2n-1, n} - C_{k+2n-1, n-1}$ . Si donc  $k+n = s$ , la somme de tous ces binômes doit se réduire à  $T_{s+2}$ .

Autrement dit :

$$\sum_{k=0}^{k=s} C_{2s-k-1, s-1} - \sum_{k=0}^{k=s} C_{2s-k-1, s} = T_{s+2}. \quad (55)$$

En effet, la première somme égale  $C_{2s, s}$  (\*\*); la seconde est, pareillement,  $C_{2s, s+1} = C_{2s, s-1}$ ; en sorte que l'égalité précédente se réduit à

$$T_{s+2} = C_{2s, s} - C_{2s, s-1}; \quad (54)$$

relation connue, facile à vérifier.

XVII. Conséquences de la formule

$$T_{n+1} = \frac{4n-6}{n} T_n. \quad (2)$$

(\*) Cette propriété, que l'on n'a peut-être point remarquée, ne diffère pas, au fond, de celle qui est exprimée par la relation (1).

(\*\*) Cours d'Analyse, p. 46.

1° Si  $n$  est premier avec 6,  $T_n = \mathcal{N}(n)$  (\*).

2° On a

$$T_n = \frac{4n - 10}{n - 4} T_{n-1}.$$

Donc, si  $n - 1$  est premier avec 6,  $T_n = \mathcal{N}(4n - 10)$ .

3° Si  $T_n$  est divisible par un nombre premier  $p$ , supérieur à 5, sans que  $T_{n-1}$  le soit,  $p$  divise  $2n - 5$ .

4° La plus petite valeur de  $n$ , qui rende  $2n - 5$  divisible par  $p$ , est  $\frac{1}{2}(p + 5)$ .

5° Soit  $T_{n+k}$  le dernier des nombres  $T_n, T_{n+1}, \dots$  divisibles par  $p$ , de manière que  $T_{n+k+1}$  ne soit pas divisible par  $p$ . A cause de

$$T_{n+k+1} = \frac{4n + 4k - 6}{n + k} T_{n+k}, \quad (35)$$

$p$  divise  $n + k$ .

6° On a

$$T_p = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \dots \overline{4p - 10}}{2 \cdot 5 \cdot 4 \dots \overline{p - 1}} = \mathcal{N}p,$$

mais non  $\mathcal{N}(p^2)$ .

En effet, dans la suite

$$1, 5, 5, \dots, 2p - 5,$$

un seul terme est divisible par  $p$  : c'est le nombre  $p$ .

7° La plus petite valeur de  $n + k$  est  $p$ ; ainsi

$$k = p - n = p - \frac{1}{2}(p + 5) = \frac{1}{2}(p - 5). \quad (36)$$

8° On a donc ce théorème :

Soit  $p$  un nombre premier, supérieur à 5. Dans la suite

(\*) Remarque déjà faite (1).

$T_4, T_5, \dots T_n, \dots T_{n+k}$ , il y a toujours  $\frac{p-5}{2}$  termes consécutifs divisibles, une seule fois, par  $p$ . L'indice du premier de ces termes est  $\frac{1}{2}(p+5)$ ; l'indice du dernier est  $p$ .

Autrement dit :

$T_p$ , et les  $\frac{p-5}{2}$  termes qui précèdent  $T_p$ , sont divisibles par  $p$  (\*).

9° Les Nombres de Segner, prolongés suffisamment, contiennent, comme facteurs, tous les nombres premiers (\*\*).

10° Après  $T_p$ , le premier terme divisible par  $p$  est déterminé par l'équation

$$2n - 5 = 5p;$$

d'où

$$n = \frac{1}{2}(5p + 5).$$

11° Le groupe des multiples de  $p$ , commençant par  $T_{\frac{1}{2}(5p+5)}$ , est composé, comme le premier groupe, de  $\frac{p-5}{2}$  termes. Il se termine à  $T_{2p}$ .

Soit, par exemple,  $p = 11$ . Le premier groupe est

$$T_8, T_9, T_{10}, T_{11}.$$

Le deuxième :

$$T_{19}, T_{20}, T_{21}, T_{22}.$$

Le troisième groupe serait

$$T_{30}, T_{31}, T_{32}, T_{33};$$

etc.

(\*) Vérification :

$$\begin{aligned} T_5 &= 5, & T_6 &= 2.7, & T_7 &= 2.5.7, & T_8 &= 2^2.5.11, & T_9 &= 5.11.15, & T_{10} &= 2.5.11.15, \\ T_{11} &= 2.11.15.17, & T_{12} &= 2^2.15.17.19, & T_{13} &= 2.7.15.17.19, & T_{14} &= 2^2.7.17.19.25, \\ T_{15} &= 2^2.5^2.17.19.25, & T_{16} &= 2^3.5^2.5.17.19.25, & T_{17} &= 3^2.5.17.19.25.29, \\ T_{18} &= 2.5^2.5.19.25.29.51, & T_{19} &= 2.5.5.11.19.25.29.51, & T_{20} &= 2^2.5.5^2.7.11.25.29.51, \\ T_{21} &= 2.5.5.7.11.25.29.51.57, & T_{22} &= 2^2.5.5.11.15.25.29.51.57, \\ T_{23} &= 2^2.5^2.5^2.13.25.29.51.57, \dots \end{aligned}$$

(\*\*) On ne doit pas oublier que  $T_6 = \mathcal{N} 2$ , et que  $T_7 = \mathcal{N} 5$ .

**CVIII. — Problème de Géométrie analytique.**

(Décembre 1871.)

*Tracer, sur une sphère donnée, une courbe dont les tangentes fassent, avec une droite donnée, un angle de 45°.*

I. Si l'on prend pour unité le rayon de la sphère, l'équation du problème est

$$dx^2 + dy^2 = dz^2. \quad (1)$$

Soient :

$$x = \cos \varphi \cos \omega, \quad y = \cos \varphi \sin \omega, \quad z = \sin \varphi;$$

et, par conséquent :

$$dx = -\cos \varphi \sin \omega d\omega - \cos \omega \sin \varphi d\varphi,$$

$$dy = \cos \varphi \cos \omega d\omega - \sin \omega \sin \varphi d\varphi,$$

$$dz = \cos \varphi d\varphi.$$

L'équation devient

$$d\omega = \frac{\sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi} d\varphi. \quad (2)$$

L'intégrale de celle-ci est, comme on le trouve sans peine,

$$\omega - \alpha = \sqrt{2} \operatorname{arc} \sin (\sqrt{2} \sin \varphi) - \operatorname{arc} \sin (\operatorname{tg} \varphi). \quad (5)$$

II. *Remarque.* — Le second membre devient imaginaire si l'on suppose  $\varphi$  supérieur à 45°. Des considérations géométriques aboutissent à la même conclusion.



**CIX. — Une relation combinatoire.**

(Juillet 1881.)

Par la formule de Clausen (\*), ou par les propriétés des Nombres de Segner (\*\*), on a

$$\frac{\text{arc sin } x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_0^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{5 \cdot 5 \cdot 7 \dots 2n+1} x^{2n+1}. \quad (1)$$

Or :

$$\begin{aligned} \text{arc sin } x &= \text{arc tg } \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{5} \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)^5 + \dots, \end{aligned}$$

ou

$$\frac{\text{arc sin } x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{1-x^2} - \frac{1}{5} \frac{x^3}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{5} \frac{x^5}{(1-x^2)^3} - \dots \quad (2)$$

Le terme général du second membre a la forme

$$\pm \frac{1}{2k+1} \frac{x^{2k+1}}{(1-x^2)^{k+1}}.$$

Développé suivant les puissances ascendantes de  $x$ , il devient

$$\pm \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \left[ 1 + \frac{k+1}{1} x^2 + \frac{(k+1)(k+2)}{1 \cdot 2} x^4 + \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^6 + \dots \right].$$

Dans la parenthèse, le coefficient de  $x^{2n-2k}$  est

$$\frac{(k+1)(k+2) \dots n}{1 \cdot 2 \dots n-k} = C_{n, k}.$$

Par suite,

$$\frac{\text{arc sin } x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_0^{\infty} \left[ 1 - \frac{1}{5} C_{n,1} + \frac{1}{5} C_{n,2} - \dots \pm \frac{1}{2n-1} C_{n,1} \pm \frac{1}{2n+1} \right]. \quad (5)$$

(\*) *Traité élémentaire des séries*, p. 105.

(\*\*) Voir ci-dessus, p. 56.

La comparaison avec la formule (1) donne cette sommation :

$$1 - \frac{1}{5} C_{n,1} + \frac{1}{5} C_{n,2} - \frac{1}{7} C_{n,3} + \dots \pm \frac{1}{2n-1} C_{n,1} \mp \frac{1}{2n+1} \left. \vphantom{\frac{1}{5} C_{n,1}} \right\} \quad (4)$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{5 \cdot 5 \cdot 7 \dots 2n+1},$$

qu'il est facile de prouver directement.

*Addition.* — (Août 1885.)

II. Soit, en général,

$$A = \int_0^1 (1-x^k)^n dx,$$

$n$  étant un nombre entier.

Il est clair que

$$A = 1 - \frac{1}{k+1} C_{n,1} + \frac{1}{2k+1} C_{n,2} - \dots \pm \frac{1}{nk+1}. \quad (5)$$

Si l'on pose

$$x^k = \theta,$$

on trouve

$$A = \frac{1}{k} \int_0^1 (1-\theta)^n \theta^{\frac{1}{k}-1} d\theta,$$

c'est-à-dire

$$A = \frac{1}{k} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{k}\right)} = \frac{1}{k} \frac{\Gamma(n+1)}{\left(n+\frac{1}{k}\right)\left(n-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\right)\dots\left(1+\frac{1}{k}\right)\frac{1}{k}},$$

ou

$$A = k^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \dots n}{(1+k)(1+2k)\dots(1+nk)}. \quad (6)$$

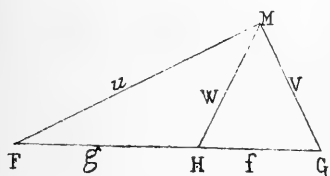
La comparaison avec la valeur (5) donne

$$1 - \frac{1}{k+1} C_{n,1} + \frac{1}{2k+1} C_{n,2} - \dots \pm \frac{1}{nk+1} = k^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \dots n}{(k+1)(2k+1)\dots(nk+1)}. \quad (7)$$

**CX. — Sur les ovales de Descartes.**

(Juin 1870.)

I. On doit, à M. Chasles, ce beau théorème : *au lieu de deux foyers seulement, elles en ont toujours trois.* (APERÇU HISTORIQUE.)  
Voici comment on peut le démontrer.



F, G étant les deux foyers connus, dont la distance est  $h$ , soit M un point de la courbe. Par définition :

$$\frac{u}{a} + \frac{v}{b} = 1. \quad (1)$$

S'il existe, sur FG, un troisième foyer H, l'équation de l'ovale, rapportée aux foyers G, H, sera

$$\frac{v}{a'} + \frac{w}{b'} = 1; \quad (2)$$

$a'$ ,  $b'$  étant des longueurs inconnues.

Soient  $f$ ,  $g$  les segments GH, FH de la droite FG. Par un théorème d'Euler :

$$fu^2 + gv^2 = h(w^2 + fg). \quad (3)$$

L'élimination de  $u$  et de  $w$ , entre les équations (1), (2), (3), conduit à celle-ci :

$$fa^2 \left(1 - \frac{v}{b}\right)^2 + gv^2 = hb'^2 \left(1 - \frac{v}{a'}\right)^2 + hfg, \quad (4)$$

laquelle doit être *identique*, si les inconnues  $f$ ,  $g$ ,  $a'$ ,  $b'$ , ont des valeurs convenables. Autrement dit, l'égalité (4) se décompose en

$$fa^2 = h(b'^2 + fg), \quad (5)$$

$$\frac{fa^2}{b} = h \frac{b'^2}{a'}, \quad (6)$$

$$\frac{fa^2}{b^2} + g = h \frac{b'^2}{a'^2}. \quad (7)$$

On tire, de l'équation (5),

$$b'^2 = \frac{f}{h}(a^2 - gh); \quad (8)$$

puis, de l'équation (6),

$$a' = \frac{b}{a^2}(a^2 - gh). \quad (9)$$

Ces valeurs, substituées dans la relation (7), donnent celle-ci :

$$\frac{f}{b^2} + \frac{g}{a^2} = \frac{1}{h}. \quad (10)$$

On en conclut

$$a^2 - gh = \frac{a^2}{b^2} f;$$

de sorte que les formules (9), (8) deviennent :

$$a' = \frac{fh}{b}, \quad (10)$$

$$b' = \pm \frac{a}{b} f (*). \quad (11)$$

Enfin, comme  $f + g = h$ , on a encore

$$f = \frac{b^2(a^2 - h^2)}{h(a^2 - b^2)}, \quad g = \frac{a^2(h^2 - b^2)}{h(a^2 - b^2)}. \quad (12)$$

Les valeurs de  $f, g, a', b'$  étant réelles et finies (\*\*), le théorème de M. Chasles est démontré.

II. *Remarque.* — Les calculs que nous venons de développer démontrent, en outre, la propriété suivante :

(\*) Pour fixer les idées, supposons  $a$  et  $b$  positifs. Alors, d'après l'équation (1), chacune des branches de l'ovale est une courbe fermée. Donc, dans l'équation (2),  $a'$  et  $b'$  doivent être positifs. Alors, si  $a$  surpasse  $b$ , le segment  $f$  est positif. Dès lors, dans la formule (11), on doit adopter le signe supérieur.

Nous omettons la discussion complète, un peu longue.

(\*\*) Excepté si  $a = \pm b$ ; mais alors la courbe donnée est une ellipse ou une hyperbole.

Étant donnés trois nombres  $a, b, h$ , on décompose le troisième en deux parties  $f, g$ , satisfaisant à la condition

$$\frac{f}{b^2} + \frac{g}{a^2} = h.$$

On fait, ensuite :

$$a' = \frac{fh}{b}, \quad b' = \pm \frac{af}{b}.$$

Cela posé, toutes les solutions des équations

$$\frac{u}{a} + \frac{v}{b} = 1, \quad \frac{v}{a'} + \frac{w}{b'} = 1,$$

rendent identique l'équation

$$fu^2 + gv^2 = h(w^2 + fg).$$

### CXI. — Intégration d'une équation.

(Octobre 1871.)

I. Soit l'équation homogène

$$x dy^2 + 2(x + y) dx dy + y dx^2 \quad (*) \quad (1)$$

$y = tx$  donne

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{-2t - 1 \pm \sqrt{t^2 + t + 1}} \quad (2)$$

(\*) On la rencontre en cherchant les surfaces orthogonales entre elles et orthogonales aux surfaces représentées par

$$xijz = c^2.$$

La proposée, dans laquelle  $x$  et  $y$  seraient remplacés par  $\alpha$  et  $\beta$ , exprime la condition d'orthogonalité des surfaces inconnues. Voyez le Mémoire intitulé : *Recherche des lignes de courbure de la surface...*, p. 8.

Le problème a été résolu, d'une autre manière, par M. Serret (*Journal de Liouville*, 1840).

Pour rendre la différentielle rationnelle, je pose

$$\sqrt{t^2 + t + 1} = t + \frac{1}{2}(u + 1); \quad (5)$$

ou

$$t = -\frac{u^2 + 2u - 5}{4u}. \quad (4)$$

Il résulte, de cette expression, la transformée :

$$-5 \frac{dx}{x} = \frac{(u^2 + 5)}{u(u^2 - 1)} du. \quad (5)$$

La fraction égale

$$-\frac{5}{u} + \frac{2}{u-1} + \frac{2}{u+1}.$$

L'intégrale de l'équation (5) est donc

$$\left(\frac{a}{x}\right)^5 = \frac{(u^2 - 1)^2}{u^5}; \quad (6)$$

ou, si l'on remplace  $u$  par sa valeur

$$2\sqrt{t^2 + t + 1} - 2t - 1 : \\ b^5(2R - 2y - x)^5 = x^2(R - y - x)^2(R - y)^2. \quad (7)$$

Dans cette équation,  $b^5$  remplace  $\frac{a^5}{16}$ , et

$$R = \sqrt{x^2 + xy + y^2}.$$

Il s'agit de la rendre rationnelle.

A cet effet, je multiplie les deux membres par

$$(2R + 2y + x)^5.$$

A cause de

$$4R^2 - (2y + x)^2 = 5x^2,$$

j'obtiens

$$b^5 x^4 = (R - y - x)^2 (R - y)^2 (2R + 2y + x)^5. \quad (8)$$

Le produit des deux carrés est, moyennant quelques réductions,

$$2x^4 + 9x^3y + 17x^2y^2 + 16xy^3 + 8y^4 - 2R(x^5 + 4x^2y + 6xy^2 + 4y^3).$$

D'autre part,

$$(2R + 2y + x)^5 = 15x^5 + 42x^2y + 48xy^2 + 52y^5 + 2R(7x^2 + 16xy + 16y^2).$$

L'intégrale (7) devient donc

$$b^5x^4 = \left. \begin{aligned} & (2x^4 + 9x^3y + 17x^2y^2 + 16xy^3 + 8y^4)(15x^5 + 42x^2y + 48xy^2 + 52y^5) \\ & - 4(x^2 + xy + y^2)(x^5 + 4x^2y + 6xy^2 + 4y^3)(7x^2 + 16xy + 16y^2) \\ & + 2R(2x^4 + 9x^3y + 17x^2y^2 + 16xy^3 + 8y^4)(7x^2 + 16xy + 16y^2) \\ & - 2R(15x^5 + 42x^2y + 48xy^2 + 52y^5)(x^5 + 4x^2y + 6xy^2 + 4y^3). \end{aligned} \right\} (9)$$

L'ensemble des deux premières parties du second membre étant représenté par  $P - 4P'$ , on a :

$$P = 26x^7 + 201x^6y + 695x^5y^2 + 1418x^4y^3 + 1880x^3y^4 + 1648x^2y^5 \\ + 896xy^6 + 256y^7,$$

$$P' = 7x^7 + 51x^6y + 175x^5y^2 + 554x^4y^3 + 470x^3y^4 + 412x^2y^5 + 224xy^6 \\ + 64y^7,$$

$$P - 4P' = -x^4(2x^3 + 5x^2y - 5xy^2 - 2y^3) = -x^4(x-y)(2x^2 + 5xy + 2y^2).$$

De même, les deux dernières lignes se réduisent à

$$2R(14x^6 + 95x^5y + 295x^4y^2 + 528x^3y^3 + 584x^2y^4 + 584xy^5 + 128y^6) \\ - 2R(15x^6 + 94x^5y + 294x^4y^2 + 528x^3y^3 + 584x^2y^4 + 584xy^5 + 128y^6) \\ = 2Rx^4(x^2 + xy + y^2).$$

Par suite, l'égalité (9) est transformée en

$$b^5 = - (x - y)(2x^2 + 5xy + 2y^2) + 2R(x^2 + xy + y^2),$$

ou

$$b^6 + 2b^5(2x^5 + 5x^2y - 5xy^2 - 2y^5) + (2x^3 + 5x^2y - 5xy^2 - 2y^3)^2 \left. \vphantom{b^6} \right\} (10) \\ = 4(x^2 + xy + y^2)^5.$$

On a :

$$4(x^2 + xy + y^2)^5 \\ = 4x^6 + 12x^5y + 24x^4y^2 + 28x^3y^3 + 24x^2y^4 + 12xy^5 + 4y^6, \\ (2x^3 + 5x^2y - 5xy^2 - 2y^3)^2 \\ = 4x^6 + 12x^5y - 5x^4y^2 - 26x^3y^3 - 5x^2y^4 + 12xy^5 + 4y^6;$$

donc

$$4(x^2 + xy + y^2)^5 - (2x^5 + 5x^2y - 5xy^2 - 2y^5)^2 = 27x^2y^2(x + y)^2; \quad (10)$$

et, finalement,

$$b^6 + 2b^3(x - y)(2x^2 + 5xy + 2y^2) = 27x^2y^2(x + y)^2. \quad (A)$$

Telle est l'intégrale de l'équation (1).

II. *Autre méthode* (\*). — Si l'on pose, suivant l'usage,  $\frac{dy}{dx} = p$ , l'équation

$$x dy^2 + 2(x + y) dx dy + y dx^2 = 0 \quad (1)$$

prend la forme

$$y = -\frac{p^2 + 2p}{2p + 1} x. \quad (12)$$

Celle-ci est un cas particulier de l'équation de Clairaut (\*\*). Il en résulte

$$5 \frac{dx}{x} + 2 \frac{p^2 + p + 1}{p(p + 1)(2p + 1)} dp = 0. \quad (15)$$

La fraction

$$\frac{p^2 + p + 1}{p(p + 1)(2p + 1)}$$

se décompose en

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p + 1} - \frac{5}{2p + 1}.$$

Donc l'intégrale de l'équation (15) est

$$\frac{x}{c} = (2p + 1)(p^2 + p)^{-\frac{2}{5}}, \quad (14)$$

et l'intégrale de l'équation (1) est le système des formules (12), (14).

(\*) On vient de voir que le procédé classique entraîne à des longueurs de calcul.

(\*\*) Il y a quelques années, M. Mansion, mon savant Confrère, a démontré ce beau théorème : *Toute équation du premier ordre est réductible à l'équation de Clairaut.* (Octobre 1885.)



On tire, de l'équation (12), ou de la proposée :

$$p = \frac{R - x - y}{x}, \quad p + 1 = \frac{R - y}{x}, \quad 2p + 1 = \frac{2R - x - 2y}{x},$$

$$p(p + 1) = \frac{x^2 + 2xy + 2y^2 - (x + 2y)R}{x^2}.$$

Par suite, l'équation (14) devient

$$x^5[x^2 + 2xy + 2y^2 - (x + 2y)R]^2 = c^5[2R - x - 2y]^5.$$

Multipliant les deux membres par  $(2R + x + 2y)^5$ , on trouve, successivement :

$$x^2(2R + x + 2y)[(x^2 + 2xy + 2y^2)(x + 2y) + x^2R - 2(x + 2y)R^2]^2 = 27c^5x^6,$$

$$(2R + x + 2y)(R - x - 2y)^2 = \text{const},$$

$$(2R + x + 2y)[2x^2 + 5xy + 5y^2 - 2(x + 2y)R] = \text{const},$$

$$(x + 2y)(-2x^2 + xy + y^2) + 2R^3 = \text{const},$$

$$k^5 + (y - x)(x + 2y)(y + 2x) = 2(x^2 + xy + y^2)^{\frac{5}{2}}. \quad (\text{B})$$

Cette intégrale (B) ne diffère, qu'en apparence, de l'intégrale (A).

III. Si, dans la proposée (1), on remplace  $x$  par  $\alpha$ ,  $y$  par  $\beta$ , puis que l'on fasse

$$\alpha = z^2 - y^2, \quad \beta = y^2 - x^2,$$

on trouve que le système triplement orthogonal, déterminé par l'équation donnée,

$$xyz = c^5, \quad (15)$$

se compose des surfaces représentées par cette équation, jointes à celles dont les équations seraient :

$$\left. \begin{aligned} a^6 + (2y^2 - z^2 - x^2)(2z^2 - x^2 - y^2)(2x^2 - y^2 - z^2) \\ - (x^4 + y^4 + z^4 - y^2z^2 - z^2x^2 - x^2y^2)^{\frac{5}{2}} = 0, \end{aligned} \right\} (16)$$

$$\left. \begin{aligned} b^6 + (2y^2 - z^2 - x^2)(2z^2 - x^2 - y^2)(2x^2 - y^2 - z^2) \\ + (x^4 + y^4 + z^4 - y^2z^2 - z^2x^2 - x^2y^2)^{\frac{5}{2}} = 0 (*). \end{aligned} \right\} (17)$$

(\*) SERRET, *Journal de Mathématiques*, t. XII, p. 249.

Addition. — (Octobre 1885.)

IV. L'équation (1) est un cas particulier de celle-ci :

$$(ax + by)dy^2 + 2(a'x + b'y)dxdy + (a''x + b''y)dx^2 = 0, \quad (18)$$

laquelle est *linéaire et homogène*. La transformation déjà employée donne

$$y = -\frac{ap^2 + 2a'p + a''}{bp^2 + 2b'p + b''}x;$$

ou, pour abrégér,

$$y = -Px. \quad (19)$$

Différenciant (\*), on trouve

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dP}{P + p},$$

ou

$$\frac{dx}{x} = -\frac{d(P + p)}{P + p} + \frac{dp}{P + p},$$

équation dont l'intégrale est

$$\int \frac{(P + p)x}{c} = \int \frac{dp}{P + p}. \quad (20)$$

Dans chaque cas particulier, la question se réduira donc à *former l'intégrale d'une différentielle rationnelle*.

(\*) C'est le procédé de Clairaut.

**CXII. — Une application numérique.**

(Juin 1871.)

**PROBLÈME.** — Décomposer, en une somme de deux carrés, le nombre  $N = 17^3 \cdot 75^3 = 10\ 185\ 000\ 756\ 409$ .

I. Je trouve :

$$N = 2\ 610\ 685^2 + 16 \cdot 458\ 895^2,$$

$$N = (75 \cdot 40\ 411)^2 + 16(75 \cdot 40\ 615)^2,$$

$$N = (75^2 \cdot 275)^2 + 16(75^2 \cdot 155)^2,$$

$$N = (17 \cdot 84\ 691)^2 + 16(17 \cdot 41\ 835)^2,$$

$$N = (17 \cdot 75 \cdot 655)^2 + 16(17 \cdot 75 \cdot 625)^2,$$

$$N = (17 \cdot 75^2 \cdot 29)^2 + 16(17 \cdot 75^2 \cdot 5)^2,$$

$$N = (17 \cdot 4\ 115)^2 + 16(17 \cdot 46\ 921)^2,$$

$$N = (17 \cdot 75 \cdot 1\ 755)^2 + 16(17 \cdot 75 \cdot 475)^2,$$

$$N = (17 \cdot 75^2 \cdot 55)^2 + 16(17 \cdot 75^2)^2,$$

$$N = 1\ 565\ 197^2 + 16 \cdot 695\ 585^2,$$

$$N = (75 \cdot 41\ 195)^2 + 16(5\ 659 \cdot 75)^2,$$

$$N = (75^2 \cdot 557)^2 + 16(75^2 \cdot 55)^2.$$

II. *Remarque.* — Les facteurs premiers de  $N$  ont la forme  $4\mu + 1$ .

D'après un beau théorème de Gauss (\*), le nombre des décompositions de  $N$  doit être  $\frac{1}{2} (3 + 1) (5 + 1) = 12$ . C'est ce qui a lieu.

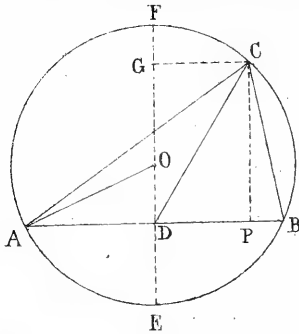
(\*) GENOCCHI (*Nouvelles Annales*, 1854, p. 158).

**CXIII. — Problème de Glenie (\*)**

(Janvier 1871.)

A un cercle donné, inscribe un triangle ABC, connaissant la base AB, et tel que l'on ait

$$\overline{AC}^5 + \overline{BC}^5 = 5\overline{AB}^5.$$



I. Soient :

$$AB = 2a, \quad AO = R,$$

$$OD = b, \quad AC = x,$$

$$BC = y.$$

Soit, en outre,  $z$  la hauteur CP.

Les équations du problème sont

$$x^5 + y^5 = 24a^5, \quad (1)$$

$$a^2 + b^2 = R^2, \quad (2)$$

$$xy = 2Rz. \quad (3)$$

Pour en obtenir une quatrième, qui soit simple, je m'appuie sur le lemme suivant, facile à démontrer :

*Le carré de la médiane CD égale le carré de la moitié de la base, plus (\*\*) deux fois le rectangle de la hauteur par la distance du centre à la base.*

On sait que

$$x^2 + y^2 = 2(\overline{CD}^2 + a^2);$$

(\*) *Scriptores logarithmici*, t. IV, pp. 555 à 412. Suivant *Maseres*, *Glenie* était, « en son vivant », Lieutenant au Corps des Ingénieurs. A la fin de sa longue dissertation, l'Éditeur des *Scriptores* annonce que le problème a été proposé, en 1794, dans *The Ladies' Diary*, et que la solution de *Glenie* a paru, dans le même journal, en 1795.

(\*\*) Il faudrait moins, si le sommet C et le centre O n'étaient pas du même côté de AB.

et l'on tire, des équations (3), (4) :

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= 4[a^2 + (R + b)z], \\ x^2 - xy + y^2 &= 2[2a^2 - (R - 2b)z].\end{aligned}$$

Donc l'équation (1) devient, après élévation au carré,

$$[a^2 + (R + b)z][2a^2 - (R - 2b)z]^2 = 56a^6. \quad (5)$$

Celle-ci est du troisième degré, complète, même quand on la simplifie au moyen de la relation (2).

II. La construction donnée par Glenie se rapporte au cas, très particulier, où l'on aurait

$$R = \frac{5}{3}a, \quad b = \frac{4}{3}a.$$

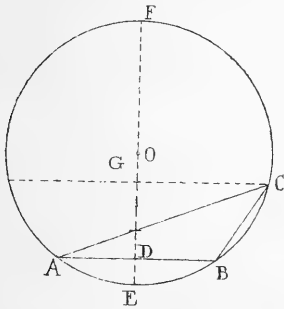
Quand il en est ainsi, l'équation (5) est vérifiée par  $z = a$ . Il résulte, de cette valeur,

$$x = a \left( 2 + \sqrt{\frac{2}{5}} \right), \quad y = a \left( 2 - \sqrt{\frac{2}{5}} \right);$$

puis la proposition suivante, qui résume les quatre premières pages de la Note de Maseres :

*On prend, sur le rayon OE, OG = ED =  $\frac{1}{5}$  OE. Par les points D, G, on mène, à ce rayon, les perpendiculaires GC, AB. Le triangle ACB satisfait à la condition*

$$\overline{AC}^5 + \overline{BC}^5 = 5\overline{AB}^5.$$



III. Si l'on veut un problème analogue à celui de Glenie, et conduisant à une équation du deuxième degré, on peut prendre celui-ci :

*A un cercle donné, inscrire un triangle ABC, connaissant la base AB, et tel que*

$$\overline{AC}^5 + \overline{BC}^5 = \overline{AB}^5.$$

Si, dans l'équation (5), on divise par 9 le second membre, on obtient celle-ci :

$$[a^2 + (b + R)z][2a^2 - (R - 2b)z]^2 = 4a^6, \quad (6)$$

laquelle est vérifiée par  $z = 0$ .

Suppression faite de cette racine, l'équation (6), développée, devient

$$(R + b)(R - 2b)^2 z^2 - 5a^2(R^2 - 4b^2)z + 12a^4b = 0. \quad (7)$$

Par suite,

$$z = \frac{a^2}{2(R + b)(R - 2b)} [5(R + 2b) \pm \sqrt{5(R - 2b)(5R + 2b)}]. \quad (8)$$

*Addition.* — (Octobre 1885.)

IV. A cause de  $a^2 = R^2 - b^2$ , la dernière formule se réduit à

$$z = \frac{R - b}{2(R - 2b)} [5(R + 2b) \pm \sqrt{5(R - 2b)(5R + 2b)}] (*). \quad (9)$$

Des équations

$$xy = 2Rz, \quad x^2 + y^2 = 4(a^2 + bz),$$

on conclut

$$x = \sqrt{a^2 + (R + b)z} + \sqrt{a^2 - (R - b)z},$$

$$y = \sqrt{a^2 + (R + b)z} - \sqrt{a^2 - (R - b)z};$$

(\*) Pour faire disparaître le radical, on peut faire

$$R - 2b = 5f^2, \quad 5R + 2b = g^2;$$

et, par conséquent,

$$R = \frac{1}{4}(5f^2 + g^2), \quad b = \frac{1}{8}(g^2 - 9f^2), \quad a^2 = \frac{5}{64}(g^2 - f^2)(15f^2 + g^2), \text{ etc.}$$

Mais la simplification est plus apparente que réelle.

ou, sous une forme un peu plus simple :

$$x = \sqrt{(R+b)(R-b+z)} + \sqrt{(R-b)(R+b-z)}, \quad (10)$$

$$y = \sqrt{(R+b)(R-b+z)} - \sqrt{(R-b)(R+b-z)}. \quad (11)$$

Dans chaque cas particulier, les formules (9), (10), (11) détermineront le triangle cherché.

V. *Application.* — Soient  $R=7$ ,  $b=1$  ; et, par conséquent,  $a=4\sqrt{5}$ .

On trouve

$$z = \frac{5}{5}(27 \pm \sqrt{545});$$

puis, en rejetant un système imaginaire :

$$x = \sqrt{\frac{6}{5}} \left[ 2 \sqrt{57 - \sqrt{545}} + \sqrt{-41 + 5\sqrt{545}} \right],$$

$$y = \sqrt{\frac{6}{5}} \left[ 2 \sqrt{57 - \sqrt{545}} - \sqrt{-41 + 5\sqrt{545}} \right].$$

La somme des cubes est

$$\begin{aligned} & \frac{12}{5} \sqrt{\frac{6}{5}} \sqrt{57 - \sqrt{545}} [8(57 - \sqrt{545}) + 6(-41 + 5\sqrt{545})] \\ &= 24 \sqrt{\frac{6}{5}} \sqrt{57 - \sqrt{545}} (5 + \sqrt{545}) \\ &= 24 \sqrt{12} \sqrt{57^2 - 545} = 48 \cdot 52 \cdot \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Elle doit éгалer  $8a^3 = 8 \cdot 48\sqrt{48}$  : c'est ce qui a lieu.

VI. *Remarque.* — Dans le cas traité par Glenie,

$$x + y = AC + BC = 4a = 2AB.$$

Conséquentment :

*Si une ellipse a pour foyers les milieux F, F' des demi-axes OA,*

OA', et que l'ordonnée d'un point M de la courbe soit égale à OF, on aura

$$\overline{FM}^5 + \overline{F'M}^5 = 5\overline{FF'}^5.$$

VII. Autre remarque. — Les formules (10), (11) donnent lieu à ce petit théorème de Géométrie :

Le triangle ABC étant inscrit à un cercle donné; soient EDF le diamètre perpendiculaire au côté AB, G la projection de C sur EDF :

1° La demi-somme des côtés AC, BC est moyenne proportionnelle entre les segments DF, EG ;

2° La demi-différence de ces côtés est moyenne proportionnelle entre les segments DE, FG.

#### CXIV. — Problème d'Arithmétique.

(Septembre 1871.)

Combien un nombre donné,  $n$ , admet-il de diviseurs ayant la forme  $4\mu - 1$  ?

I. Si  $n$  est divisible par  $2^\lambda$ , la réponse à la question est la même pour  $n$  et pour  $\frac{n}{2^\lambda}$  : on peut donc supposer  $n$  impair.

Cela étant, décomposons  $n$  en trois facteurs P, Q, R ; le premier, composé de facteurs premiers ayant la forme  $4\mu - 1$ , affectés d'exposants pairs (\*); le deuxième, composé de facteurs premiers, de cette même forme, affectés d'exposants impairs; le troisième, composé de facteurs premiers ayant la forme  $4\mu + 1$ .

II. Soit, pour fixer les idées,

$$P = a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta e^\varepsilon. \quad (1)$$

Désignons par  $F(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ , le nombre des diviseurs de P, ayant la forme  $4\mu - 1$ .

(\*) Par conséquent, P est un carré.



Soit

$$\Delta = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} e^{\varepsilon},$$

l'un de ces diviseurs : la somme  $\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' + \varepsilon'$  doit être *impaire*. Elle résulte d'une valeur *paire* de  $\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta'$ , jointe à une valeur *impaire* de  $\varepsilon'$ ; ou inversement.

Dans la suite

$$0, 1, 2, \dots, \varepsilon,$$

il y a  $\frac{\varepsilon}{2} + 1$  nombres *pairs* et  $\frac{\varepsilon}{2}$  nombres *impairs*.

Donc

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) &= F(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \left( \frac{\varepsilon}{2} + 1 \right) \\ &+ [(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)(\delta + 1) - F(\alpha, \beta, \gamma, \delta)] \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

ou

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = F(\alpha, \beta, \gamma, \delta) + \frac{1}{2}(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)(\delta + 1)\varepsilon. \quad (2)$$

De même,

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = F(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{1}{2}(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)\delta,$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = F(\alpha, \beta) + \frac{1}{2}(\alpha + 1)(\beta + 1)\gamma,$$

$$F(\alpha, \beta) = F(\alpha) + \frac{1}{2}(\alpha + 1)\beta.$$

D'ailleurs,

$$F(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha.$$

Donc

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) &= \frac{1}{2} [\alpha + (\alpha + 1)\beta + (\alpha + 1)(\beta + 1)\gamma \\ &+ (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)\delta + (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)(\delta + 1)\varepsilon]; \end{aligned}$$

ou

$$1 + 2F(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)(\delta + 1)(\varepsilon + 1),$$

ou enfin

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = \frac{1}{2}(N - 1); \quad (5)$$

N désignant le nombre des diviseurs de P.

III. Soit

$$Q = a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} d^{\delta'} e^{\varepsilon'}; \quad (4)$$

les exposants étant *impairs*.

Dans la suite

$$0, 1, 2, \dots, \varepsilon',$$

il y a  $\frac{\varepsilon'+1}{2}$  nombres *pairs*,  $\frac{\varepsilon'+1}{2}$  nombres *impairs*. La relation (5) est remplacée par celle-ci :

$$F(\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon') = \frac{1}{2} N'; \quad (5')$$

N' désignant le nombre des diviseurs de Q.

IV. D'après ce qui précède : 1° le nombre des diviseurs de P, ayant la forme  $4\mu + 1$ , est  $\frac{1}{2}(N + 1)$ ; 2° le nombre des diviseurs de Q, ayant cette même forme, est  $\frac{1}{2} N'$  (\*).

Donc :

3° Le nombre des diviseurs de PQ, ayant la forme  $4\mu - 1$ , est

$$\frac{1}{4} [(N - 1)N' + (N + 1)N'] = \frac{1}{2} NN';$$

4° Le nombre des autres diviseurs de n est  $\frac{1}{2} NN'$ .

V. Si nous appelons N'' le nombre des diviseurs de R, lesquels

(\*) Si, comme dans les *Recherches sur quelques produits indéfinis*, nous appelons  $\varepsilon_n$  l'excès du nombre des diviseurs de n, ayant cette forme, sur le nombre des diviseurs de n, ayant la forme  $4\mu - 1$ , il s'ensuit que

$$\varepsilon_P = 1, \quad \varepsilon_Q = 0.$$

(Octobre 1885.)

ont tous la forme  $4\mu + 1$ , la réponse à la question proposée est, en conséquence,

$$x = \frac{1}{2} NN'N'' \quad (6)$$

Ainsi, ordinairement, un nombre impair a autant de diviseurs ayant la forme  $4\mu - 1$ , que de diviseurs ayant la forme  $4\mu + 1$  (\*).

VI. Remarque. — Il y a exception si tous les facteurs premiers de  $n$ , ayant la première forme, sont affectés d'exposants pairs.

En effet, quand il en est ainsi,

$$x = \frac{1}{2} (N - 1)N''; \quad (7)$$

et le nombre des diviseurs de  $n$ , ayant la forme  $4\mu + 1$ , est

$$y = \frac{1}{2} (N + 1)N'' (**). \quad (8)$$

Addition. — (Octobre 1885.)

VII. La démonstration contenue dans le paragraphe II est trop longue : nous l'aurions supprimée, si elle ne se basait sur l'identité

$$\left. \begin{aligned} &\alpha + (\alpha + 1)\beta + (\alpha + 1)(\beta + 1)\gamma + (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)\delta \\ &\quad + (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)(\delta + 1)\varepsilon \\ &= (1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma)(1 + \delta)(1 + \varepsilon) - 1, \end{aligned} \right\} (9)$$

à laquelle nous reviendrons bientôt (\*\*\*) .

(\*) Par suite,

$$\varepsilon_n = 0.$$

(\*\*) Conséquemment,

$$\varepsilon_n = N''.$$

(\*\*\*) Cette identité, que je croyais nouvelle, est due à Euler. Mon illustre ami Genocchi l'a rattachée à une formule de Nicole. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, années 1867 et 1869.) — Voyez aussi, dans le *Journal de M. Hoppe* (t. LXI, 1876), les *Éclaircissements sur une Note relative à la fonction*  $\zeta^2 \Gamma(x)$ ; par M. Genocchi.

Si l'on fait abstraction des facteurs premiers ayant la forme  $4\mu + 1$ , il y a deux cas à distinguer.

1°  $n$  a la forme  $4\mu - 1$ . Alors, à chaque diviseur ayant cette forme, il en correspond un ayant la forme contraire. Donc  $\varepsilon_n = 0$ .

2°  $n$  a la forme  $4\mu + 1$ . Comme

$$n = a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \dots,$$

la somme des exposants est paire. Dans le produit qui sert à former les diviseurs de  $n$ ,

$$(1 + a + a^2 + \dots + a^\alpha)(1 + b + b^2 + \dots + b^\beta)(1 + c + c^2 + \dots + c^\gamma) \dots,$$

substituons, à chaque terme, son résidu par 4. Nous aurons

$$(1 - 1 + 1 - \dots \pm 1)(1 - 1 + 1 - \dots \pm 1)(1 - 1 + \dots \pm 1) \dots = 1.$$

Le produit a autant de termes égaux à  $+1$  que  $n$  admet de diviseurs ayant la forme  $4\mu + 1$ , et autant de termes égaux à  $-1$  que  $n$  admet de diviseurs ayant la forme contraire. Donc  $\varepsilon_n = 1$  (\*).

VIII. *Remarque.* — Soit, comme ci-dessus (1),

$$\Delta = a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \dots$$

un diviseur de  $n$ . Les facteurs premiers  $a, b, c, \dots$ , ayant tous la forme  $4\mu - 1$ ,  $\Delta$  aura cette forme, ou la forme contraire, selon que la somme

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \dots$$

sera *impaire* ou *paire*. D'après cela, on est conduit au Problème suivant :

*Soient les k suites*

$$0, 1, 2, \dots, \alpha;$$

$$0, 1, 2, \dots, \beta;$$

$$\dots$$

$$0, 1, 2, \dots, \theta.$$

(\*) Cette démonstration se trouve déjà, en partie, dans les *Recherches...*, pp. 75 et 76.

On forme les  $(\alpha + 1)(\beta + 1) \dots (\theta + 1)$  sommes contenant, chacune, un terme pris dans chacune des  $k$  lignes. Combien y aura-t-il de sommes impaires et de sommes paires?

En représentant par  $\varepsilon$  l'excès du premier nombre sur le second, on aura, d'après le paragraphe précédent,

$$\varepsilon = 1, \quad \varepsilon = 0,$$

selon que les nombres  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \theta$  sont, ou ne sont pas, tous pairs.

### CXV. — Comparaison entre deux séries.

(Octobre 1885.)

I. Posons :

$$u_n = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_{n-1}) \alpha_n, \quad (1)$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \quad (2)$$

$$P_n = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_n). \quad (5)$$

Il est visible que

$$S_n = P_n - 1 (*). \quad (4)$$

Par conséquent, la somme  $S_n$  converge ou diverge en même temps que le produit  $P_n$ ; ou, ce qui est équivalent :

La somme  $S_n$  converge ou diverge en même temps que  $\log. P_n$ .

II. Soient, d'après cela :

$$v_n = \mathcal{L}(1 + \alpha_n) (**), \quad (5)$$

$$S'_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n : \quad (6)$$

les sommes  $S_n, S'_n$  sont, simultanément, convergentes ou divergentes.

(\*) Voir l'identité (9), p. 87. Pour vérifier cette relation (4), évidente lorsque  $n = 1$ , il suffit d'ajouter  $u_{n+1}$  à chacun des deux membres.

(\*\*) Pour plus de simplicité, nous prenons des logarithmes népériens; mais les propositions sont indépendantes de ce choix.

Ainsi, les conditions de convergence de la série proposée :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

se réduisent à celles de la série auxiliaire :

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

Si les quantités  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$  sont positives, il en sera de même pour  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Les deux premières conditions nécessaires sont donc

$$\lim \zeta^n (1 + \alpha_n) = 0, \quad \lim [n \zeta^n (1 + \alpha_n)] = 0 \text{ (*)}.$$

La première équivaut à  $\lim \alpha_n = 0$  (\*\*). Pour satisfaire à la seconde, il suffit de prendre

$$\alpha_n = \frac{1}{n^{1+k}}, \quad (7)$$

$k$  étant une constante positive.

En effet,

$$n \zeta^n \left( 1 + \frac{1}{n^{1+k}} \right) \text{ est compris entre } \frac{1}{n^k} \text{ et } \frac{1}{n^k} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^{1+2k}}.$$

Ces deux conditions sont d'ailleurs suffisantes; car la série dont le terme général

$$v_n = \zeta^n \left( 1 + \frac{1}{n^{1+k}} \right),$$

est convergente (\*\*\*) .

En résumé : la série, déterminée par les formules (1), (7), est convergente.

III. Supposons, en second lieu, que les quantités  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , soient négatives, mais comprises entre 0 et  $-1$ . Posons

$$\alpha_n = -\beta_n;$$

(\*) *Traité élémentaire des séries*, pp. 5 et 17.

(\*\*) Condition évidente *a priori*.

(\*\*\*) Propriété connue, dont la démonstration résulte de la dernière remarque.

et, afin d'avoir encore des séries à termes positifs, prenons

$$u_n = (1 - \beta_1)(1 - \beta_2) \dots (1 - \beta_{n-1})\beta_n, \quad (8)$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \quad (9)$$

$$P_n = (1 - \beta_1)(1 - \beta_2) \dots (1 - \beta_{n-1})(1 - \beta_n), \quad (10)$$

$$-v_n = \zeta^n(1 - \beta_n). \quad (11)$$

Si l'on fait

$$\beta_n = \frac{1}{n^{1+k}}, \quad (12)$$

la série auxiliaire :

$$-v_1 - v_2 - \dots - v_n - \dots$$

sera convergente. En effet,

$$\begin{aligned} \zeta^n(1 - \beta_n) &= \zeta^n\left(1 - \frac{1}{n^{1+k}}\right) = \zeta^n\left(\frac{n^{1+k} - 1}{n^{1+k}}\right) = -\zeta^n\left(\frac{n^{1+k}}{n^{1+k} - 1}\right) \\ &= -\zeta^n\left(1 + \frac{1}{n^{1+k} - 1}\right); \end{aligned}$$

et cette dernière quantité est comprise entre

$$-\frac{1}{n^{1+k} - 1} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2(n^{1+k} - 1)^2}.$$

Etc. (\*).

IV. De tout ce qui précède résulte la proposition suivante :

1° Les séries ayant, comme termes généraux :

$$u_n = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_{n-1})\alpha_n,$$

$$v_n = \zeta^n(1 + \alpha_n)$$

sont, simultanément, convergentes ou divergentes ;

(\*) En général,

$$-\zeta^n(1 - x) = \zeta^n \frac{1}{1 - x} = \zeta^n\left(1 + \frac{1}{1 - x}\right);$$

donc, si  $x$  ne surpasse pas  $\frac{1}{2}$  :

$$-\zeta^n(1 - x) \text{ est compris entre } \frac{x}{1 - x} \quad \text{et} \quad \frac{x}{x - 1} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{(1 - x)^2}.$$

Je crois n'avoir vu, nulle part, cette remarque si simple et si utile.

2° Elles sont convergentes lorsque

$$\alpha_n = \pm \frac{1}{n^{4+k}},$$

$k$  étant une constante positive;

3° Elles sont divergentes si cette constante est nulle.

### CXVI. — Problème sur l'ellipse (\*).

(Mars 1854.)

*Parmi toutes les ellipses circonscrites à un quadrilatère, quelle est celle qui diffère, le moins possible, d'un cercle; c'est-à-dire :*

*Quelle est l'ellipse, passant par quatre points donnés, dans laquelle le rapport des axes soit maximum ou minimum?*

I. L'équation de toutes les coniques passant en A, B, C, D est  
 $2\lambda xy + ab(y - c)(y - d) + cd(x - a)(x - b) - abcd = 0$  (\*\*), (1)

$\lambda$  étant un paramètre arbitraire.

Si nous transportons l'origine au centre I, cette équation devient

$$2\lambda xy + aby^2 + cdx^2 = F. \quad (2)$$

Les équations du centre sont, comme on sait :

$$2\lambda\beta + cd(2\alpha - a - b) = 0, \quad 2\lambda\alpha + ab(2\beta - c - d) = 0. \quad (3)$$

La distance  $u$ , d'un point de la courbe, au centre I, est donnée par la formule

$$u^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta. \quad (4)$$

Pour exprimer que le rayon  $u$  est maximum ou minimum, on doit joindre, aux équations (2), (4), l'égalité

$$\frac{x + y \cos \theta}{\lambda y + cdx} = \frac{y + x \cos \theta}{\lambda x + aby}. \quad (5)$$

(\*) Proposé dans les *Annales de Gergonne* (t. XVII, p. 284); résolu par Steiner (*Journal de Crelle*, t. II, p. 125).

(\*\*) *Manuel des Candidats à l'École polytechnique*, t. I, p. 477.



Celle-ci représente deux droites, menées par l'origine, parallèlement aux axes principaux de la conique.

Chacun des rapports (5) égale

$$\frac{x^2 + 2xy \cos \theta + y^2}{2\lambda xy + cd x^2 + ab y^2} = \frac{u^2}{F}. \quad (6)$$

Donc

$$(F - u^2 cd)x = (u^2 \lambda - F \cos \theta)y, \quad (F - u^2 ab)y = (u^2 \lambda - F \cos \theta)x;$$

puis

$$(F - u^2 ab)(F - u^2 cd) = (u^2 \lambda - F \cos \theta)^2, \quad (7)$$

ou

$$(abcd - \lambda^2)u^4 - F(ab + cd - 2\lambda \cos \theta)u^2 + F^2 \sin^2 \theta = 0. \quad (8)$$

Telle est l'équation qui donne, pour chaque valeur de  $\lambda$ , les carrés des demi-axes de la conique correspondante.

II. Admettons que les deux valeurs de  $u^2$  soient positives; désignons par  $\mu$  la plus grande, par  $\nu$  la plus petite. Le rapport  $\frac{\mu}{\nu}$  devant être minimum, on doit avoir  $\nu\mu' - \mu\nu' = 0$ , ou

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\nu'}{\nu};$$

$\mu'$ ,  $\nu'$  désignant les dérivées relatives à  $\lambda$ .

On a

$$\mu + \nu = F \frac{ab + cd - 2\lambda \cos \theta}{abcd - \lambda^2}, \quad \mu\nu = \frac{F^2 \sin^2 \theta}{abcd - \lambda^2};$$

et, par conséquent,

$$\frac{(\mu + \nu)^2}{\mu\nu} = \frac{(ab + cd - 2\lambda \cos \theta)^2}{(abcd - \lambda^2) \sin^2 \theta},$$

ou

$$\frac{\mu}{\nu} + \frac{\nu}{\mu} = \frac{(ab + cd - 2\lambda \cos \theta)^2}{(abcd - \lambda^2) \sin^2 \theta}. \quad (9)$$

La dérivée du premier membre étant

$$\left( \frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\mu^2} \right) (\nu\mu' - \mu\nu') = 0,$$

il en est de même pour celle du second membre. Ainsi, après suppression du facteur  $ab + cd - 2\lambda \cos \theta$  (\*) :

$$\lambda = 2 \frac{abcd \cos \theta}{ab + cd}. \quad (10)$$

III. Quand l'angle  $\theta$  est droit, l'équation (1) devient, à cause de  $\lambda = 0$ ,

$$ab(y - c)(y - d) + cd(x - a)(x - b) - abcd = 0.$$

Le centre I est l'intersection de la perpendiculaire au milieu de AB, avec la perpendiculaire au milieu de CD.

Dans le cas général, la détermination de l'ellipse cherchée repose sur les remarques suivantes, dues, en grande partie, à l'illustre Steiner.

1° D'après les équations (5), le lieu des centres de toutes les coniques passant en A, B, C, D, est l'hyperbole H représentée par

$$\frac{y}{x} = \frac{cd(x - a - b)}{ab(y - c - d)}. \quad (11)$$

2° Les asymptotes de H sont déterminées, en direction, par la formule

$$\frac{y}{x} = \pm \sqrt{\frac{cd}{ab}}. \quad (12)$$

3° D'après (6), les carrés des demi-diamètres de l'ellipse E, parallèles, respectivement, à ces asymptotes, sont donnés, eux-mêmes, par cette autre formule :

$$\frac{u^2}{F} = \frac{cd \pm 2 \cos \theta \sqrt{abcd} + ab}{abcd \pm 4 \frac{abcd \cos \theta}{ab + cd} \sqrt{abcd} + abcd} = \frac{ab + cd}{2abcd}. \quad (13)$$

Ainsi, ces demi-diamètres sont égaux entre eux (\*\*).

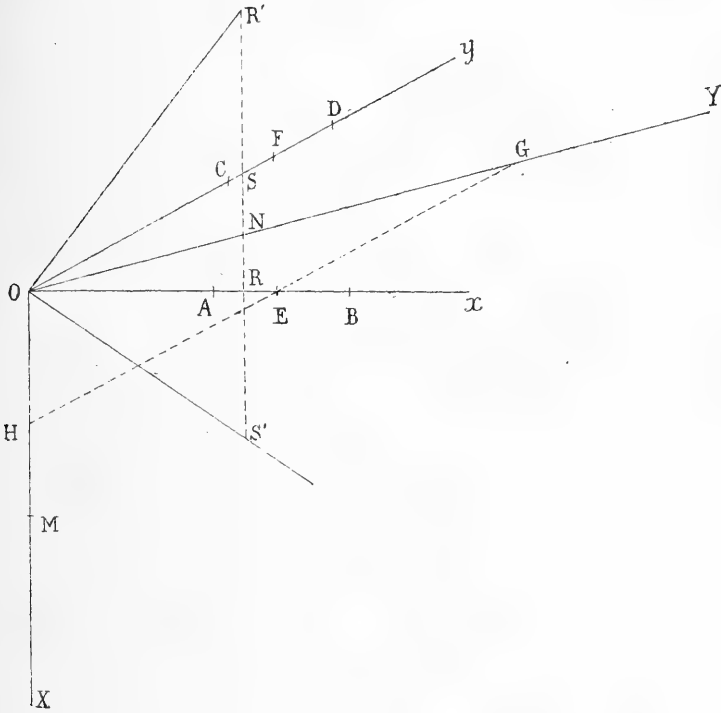
(\*) Ce facteur ne peut être supposé nul; car il résulterait, de cette hypothèse,

$$\mu^2 + \nu^2 = 0.$$

(\*\*) Théorème de Steiner (*Nouvelles Annales*, t. IV, p. 481).

4° Les axes de E sont parallèles aux bissectrices des angles formés par les asymptotes de H.

IV. De tout cela résulte la construction suivante, assez simple :



Soit pris, sur  $Ox$ ,  $OE = \sqrt{ab}$ ; et, sur  $Oy$ ,  $OF = \sqrt{cd}$ . Par le point E, on mène la parallèle à  $Oy$ ; on prend, sur cette droite,  $EG = EH = OF$ ; on trace  $OGY$ ,  $OHX$ ; et l'on prend arbitrairement, sur ces deux directions,  $ON = OM$ .

Sur la parallèle à  $OX$ , menée par le point N, et qui rencontre  $Ox$  en R,  $Oy$  en S, on prend  $NR' = \frac{ON^2}{NR}$ ,  $NS' = \frac{ON^2}{OS}$ .

Si, par le milieu de AB, on tire la parallèle à  $OR'$ ; et, par le milieu de CD, la parallèle à  $OS'$ , l'intersection de ces deux dernières droites est le centre de E.

V. *Remarque.* — D'après les formules (5), les équations de OR', OS' sont, respectivement :

$$2 \frac{ab \cos \theta}{ab + cd} y + x = 0, \quad 2 \frac{cd \cos \theta}{ab + cd} x + y = 0.$$

Ainsi, les coefficients angulaires de ces mêmes droites ont pour valeurs :

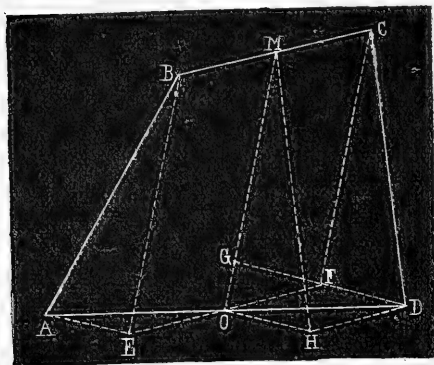
$$m = -\frac{ab + cd}{2ab \cos \theta}, \quad m' = -\frac{2cd \cos \theta}{ab + cd}.$$

La construction précédente détermine donc, graphiquement, deux droites dont les coefficients sont compliqués.

### CXVII. — Sur la courbe de Watt.

(Avril 1872.)

PROBLÈME. — Un quadrilatère ABCD, dont la base AD est fixe, et dans lequel



est fixe, et dans lequel les côtés AB, CD sont égaux, est articulé en A, B, C, D. Trouver l'équation du lieu décrit par le milieu M du quatrième côté.

I. LEMME (\*). — Si un quadrilatère a deux côtés opposés égaux :

1° ces côtés sont également inclinés sur la médiane des deux autres côtés; 2° la projection de chacun d'eux, sur la médiane, est égale à la médiane.

(\*) Énoncé et démontré dans le premier volume de la *Nouvelle Correspondance mathématique* (1874, pp. 51, 65, 161).

Menons les droites  $BE$ ,  $CF$  parallèles à la médiane  $MO$ . Par le point  $O$ , menons  $EOF$  parallèle à  $BC$ . Enfin, traçons les droites  $AE$ ,  $DF$ .

1° D'après la construction,  $BEOM$ ,  $MOFC$  sont des parallélogrammes ; donc  $BE = OM = CF$ ,  $OE = BM = MC = OF$ .

2° Les triangles  $AOE$ ,  $DOF$  sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun. Ainsi  $AE = DF$ . De plus, ces droites sont *parallèles* ; car les angles  $OAE$ ,  $ODF$ , *alternes-internes*, sont égaux.

Par suite, les triangles  $ABE$ ,  $DCF$  sont égaux, parce qu'ils ont les côtés égaux, chacun à chacun. Donc *angle*  $ABE = \text{angle } DCF$ .

5° Les angles égaux,  $AEB$ ,  $DFC$ , sont *supplémentaires*, à cause des situations respectives de leurs côtés. Donc *chacun d'eux est droit*. En même temps, les droites  $BE$ ,  $CF$ , égales à la médiane (1°), sont égales et parallèles aux projections, sur  $MO$ , de  $AB$ ,  $CD$ .

II. ÉQUATION DE LA COURBE. — Soient  $AO = OD = a$ ,  $AB = CD = b$ ,  $BM = CM = c$ . Soient, en outre,  $OM = u$ ,  $MOD = \omega$ .

A cause du triangle rectangle  $CFD$ ,

$$u^2 = b^2 - \overline{FD}^2.$$

Pour évaluer  $FD$ , prolongeons cette droite jusqu'à sa rencontre, en  $G$ , avec  $OM$ . Il est clair que :

$$FD = DG - FG = a \sin \omega - FG, \quad FG = \sqrt{c^2 - a^2 \cos^2 \omega}.$$

L'équation demandée est donc

$$u^2 = b^2 - [a \sin \omega - \sqrt{c^2 - a^2 \cos^2 \omega}]^2,$$

ou

$$u^2 + c^2 - b^2 = a^2 \cos 2\omega + 2a \sin \omega \sqrt{c^2 - a^2 \cos^2 \omega}. \quad (1)$$

*Addition.* — (Juin 1885.)

III. *Remarques.* — 1° Cette équation (1) peut encore être écrite sous les trois formes suivantes :

$$(u^2 + c^2 - a^2 - b^2)^2 = 4a^2(b^2 - u^2) \sin^2 \omega, \quad (2)$$

$$(b^2 - u^2)^2 - 2c^2(b^2 - u^2) + (a^2 - c^2)^2 + 2a^2(b^2 - u^2) \cos 2\omega = 0; \quad (3)$$

$$\operatorname{tg}^2 \omega = \frac{(u^2 + c^2 - a^2 - b^2)^2}{4a^2c^2 - (u^2 + a^2 + c^2 - b^2)^2}. \quad (4)$$

2° Considérons le parallélogramme MCDH, dans lequel MH = b, DH = c. Si nous menons la droite OH, elle est perpendiculaire à OM (I, 5°). De là résulte le *dispositif* suivant, probablement *connu* et *peu pratique* :

*La tige DH, qui tourne librement autour du point fixe D, est articulée, en H, avec une seconde tige HM. Si les côtés d'un angle droit HOM, dont le sommet est fixe, glissent dans des ouvertures placées en H, M, l'extrémité M de la tige HM décrira la courbe de Watt.*

*Autre addition.* — (Août 1885.)

IV. Dans le triangle DOH,

$$\overline{DH}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{OD}^2 - 2OH \cdot OD \sin \omega,$$

ou

$$c^2 = \overline{OH}^2 + a^2 - 2OH \cdot a \sin \omega,$$

ou

$$(\overline{OH}^2 + a^2 - c^2)^2 = 4\overline{OH}^2 a^2 \sin^2 \omega.$$

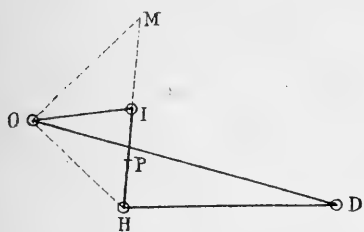
Et comme

$$\overline{OH}^2 = \overline{FD}^2 = b^2 - u^2,$$

on a, sans calcul, l'équation (2).

V. Soit I le milieu de l'hypoténuse du triangle HOM (III, 2°).

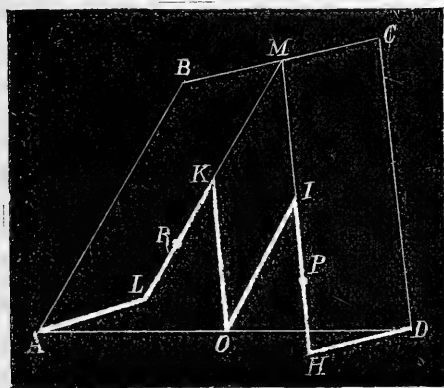
La droite  $OI = IH = \frac{1}{2}b$ . Par conséquent, le mécanisme indiqué ci-dessus peut être simplifié comme il suit :



en  $IM$ , de manière que  $IM = IH$ , le point  $M$  décrit la courbe de Watt (\*).

VI. Supposons  $OI = IH = HD$  (\*\*). Alors  $OIHD$  est un quadrilatère dans lequel deux côtés opposés sont égaux. Donc le point  $P$ , milieu de  $IH$ , décrit une courbe de Watt.

VII. Enfin, si l'on considère la figure formée de l'heptagone articulé  $AEKOIHD$  (\*\*\*) et du losange articulé  $OKMI$ , les points



$A, O, D$  étant fixes, on voit que le point  $M$ , et les milieux  $P, R$ , de  $IH, KL$ , décrivent des courbes de Watt. De plus, les deux dernières lignes, égales entre elles, sont semblables à la première.

En effet, pour passer de  $ABCD$  à chacun des quadrilatères

$ALKO, OIHD$ , il suffit de changer  $a$  en  $\frac{a}{2}$ ,  $b$  en  $\frac{b}{2}$ .

(\*) Contrairement à l'opinion émise dans le paragraphe III, M. Dwelshauwers, mon savant Collègue à l'Université de Liège, pense que ce petit mécanisme est *nouveau et utile*.

(\*\*) C'est-à-dire  $\frac{b}{2} = c$ .

(\*\*\*) Tous les côtés de cet heptagone, excepté  $AD$ , sont égaux.

**CXVIII. — Développées, et surfaces développables.**

(1871-1885.)

**I. THÉORÈME (\*).** — *Si les génératrices d'une développable  $\Sigma$  sont normales à la directrice, supposée plane,  $\Sigma$  est une surface à pente constante.*

On prouve aisément cette proposition, au moyen de la réduction à l'absurde.

On peut, aussi, la démontrer par le calcul suivant :

Le plan de la directrice étant pris pour celui de  $xy$ , une génératrice est représentée par les équations

$$x - \alpha = az, \quad y - \beta = bz, \quad (1)$$

dans lesquelles  $\beta = \varphi(\alpha)$ , et

$$b\varphi'(\alpha) + a = 0. \quad (2)$$

Les dérivées des équations (1) sont

$$-1 = a'z, \quad -\varphi'(\alpha) = b'z.$$

Done, pour que deux génératrices consécutives se rencontrent,

$$\varphi'(\alpha) = \frac{b'}{a'}; \quad (5)$$

ou, par l'équation (2)

$$bb' + aa' = 0;$$

puis

$$b^2 + a^2 = \text{const.} \quad (4)$$

Cette condition exprime que *la génératrice fait, avec le plan  $xy$ , un angle constant*; etc.

**II.** La généralisation du théorème précédent semble être celui-ci :

*Si les génératrices d'une développable  $\Sigma$  sont normales à la*

(\*) Réciproque d'un théorème connu.



directrice, elles font, avec les plans osculateurs correspondants, des angles constants.

Mais il n'en est rien.

Considérons, en effet, une courbe gauche  $AMB$  (\*), arête de rebroussement de  $\Sigma$ , et dont une développante soit  $BPC$  : la génératrice  $MP$  est normale, en  $P$ , à la directrice  $BPC$ . Soit  $PN$  la binormale à cette directrice. D'après un théorème connu (\*\*): la binormale  $PN$ , à la développante, est parallèle à la rectifiante  $MG$  de la développée. Or, l'angle  $GMP$  est variable; donc, etc.

III. Ce théorème ayant été peu remarqué (\*\*\*), nous allons en rappeler la démonstration.

Soit  $MP = u$ . D'après la définition de la développante,

$$\text{arc } AM + MP = \text{const.},$$

ou

$$s + u = \text{const.} \quad (5)$$

Donc,  $s$  étant prise pour variable indépendante,  $u' = -1$ .

Soient  $x, y, z$  les coordonnées de  $M$ ;  $X, Y, Z$  les coordonnées de  $P$ ;  $a, b, c$  les cosinus directifs de  $MP$ ; etc.

Nous aurons :

$$X = x + au, \quad Y = y + bu, \quad Z = z + cu; \quad (6)$$

$$X' = a'u, \quad Y' = b'u, \quad Z' = c'u; \quad (7)$$

$$X'' = a''u - a', \quad Y'' = b''u - b', \quad Z'' = c''u - c'; \quad (8)$$

$$\frac{Y'Z'' - Z'Y''}{b'c'' - c'b''} = \frac{Z'X'' - X'Z''}{c'a'' - a'c''} = \frac{X'Y'' - Y'X''}{a'b'' - b'a''} = u. \quad (9)$$

Les cosinus directifs de  $PN$  sont, comme on sait, proportionnels à

$$Y'Z'' - Z'Y'', \quad Z'X'' - X'Z'', \quad X'Y'' - Y'X''.$$

(\*) Le lecteur est prié de faire les figures.

(\*\*) *Théorie analytique des lignes à double courbure*, p. 65.

(\*\*\*) Il avait même, jusque dans ces derniers temps (octobre 1885); été oublié par l'Auteur.

Donc  $\lambda, \mu, \nu$  étant les angles formés, avec les trois axes, par la binormale :

$$\frac{\cos \lambda}{b'c'' - c'b''} = \frac{\cos \mu}{c'a'' - a'c''} = \frac{\cos \nu}{a'b'' - b'a''}. \quad (10)$$

Soit encore  $\theta$  l'angle MPN : chacun des trois rapports égale

$$\frac{\cos \theta}{\sum a(b'c'' - c'b'')}.$$

On sait que (\*) :

$$b'c'' - c'b'' = \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{a}{r} + \frac{l}{\rho} \right), \quad c'a'' - a'c'' = \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{b}{r} + \frac{m}{\rho} \right),$$

$$a'b'' - b'a'' = \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{c}{r} + \frac{n}{\rho} \right), \quad \sum a(b'c'' - c'b'') = \frac{1}{\rho^2 r}.$$

Conséquemment

$$\cos \lambda = \left( a + \frac{r}{\rho} l \right) \cos \theta, \quad \cos \mu = \left( b + \frac{r}{\rho} m \right) \cos \theta, \quad \cos \nu = \left( c + \frac{r}{\rho} n \right) \cos \theta. \quad (11)$$

Or, les premiers facteurs sont proportionnels aux cosinus directifs de la rectifiante (\*\*); donc le théorème est démontré.

IV. *Remarque.* — Il résulte, des dernières formules,

$$\cos^2 \theta = \frac{\rho^2}{r^2 + \rho^2}.$$

Si l'on veut que l'angle  $\theta$  soit constant, on doit avoir

$$\frac{\rho}{r} = \text{const}:$$

la développée est une hélice, et la développante est plane (\*\*\*) .

V. COROLLAIRE. — *AMB étant une courbe donnée, dont les développantes sont CPD, C'P'D', ...; les binormales PN, P'N', ... aux points situés sur une même tangente MPP'P'' ... à la première courbe, sont parallèles entre elles.*

(\*) *Théorie analytique...*, pp. 14 et 16.

(\*\*) *Loc. cit.*, p. 27.

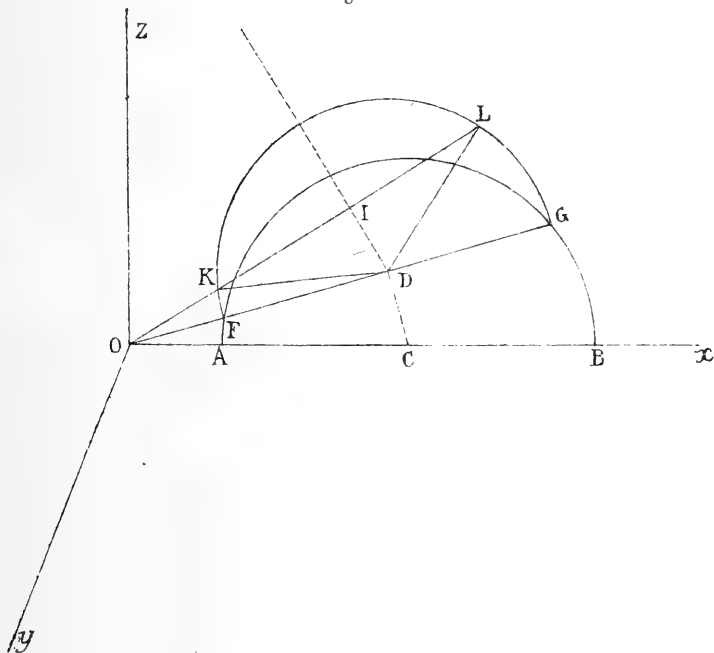
(\*\*\*) Voir les paragraphes IV et V du petit Mémoire intitulé : *Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces.*

**CXIX. — Discussion d'une surface.**

(Mars 1870.)

**PROBLÈME.** — Une sphère C est coupée, par un plan GFOy, sui-

Fig. 4.



vant une circonférence FG. Sur FG, prise comme circonférence de grand cercle, on construit une sphère D. Quelle est l'enveloppe (\*)?

I. Soient  $OC = b$ ,  $AC = a$ ,  $GOx = \theta$ . Les coordonnées du centre D sont

$$\alpha = b \cos^2 \theta, \quad \beta = 0, \quad \gamma = b \sin \theta \cos \theta. \quad (1)$$

(\*) La question a été traitée, en partie, par Houtain (*Des solutions singulières*. Bruxelles, 1854).

L'équation de la sphère variable est donc

$$(x - b \cos^2 \theta)^2 + y^2 + (z - b \sin \theta \cos \theta)^2 = a^2 - b^2 \sin^2 \theta,$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 - bx - b(x \cos 2\theta + z \sin 2\theta) + b^2 - a^2 = 0. \quad (2)$$

Prenant la dérivée, on a

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{z}{x}. \quad (3)$$

Ainsi, la surface enveloppe est engendrée par la circonférence **KL**, dont le plan **LOy** fait, avec **xOy**, l'angle  $2\theta$  (\*).

Si l'on écrit ainsi les équations (2), (3) :

$$\begin{aligned} b(x \cos 2\theta + z \sin 2\theta) &= x^2 + y^2 + z^2 - bx + b^2 - a^2, \\ b(x \sin 2\theta - z \cos 2\theta) &= 0, \end{aligned}$$

et que l'on fasse la somme des carrés, on trouve, comme équation de l'enveloppe,

$$(x^2 + y^2 + z^2 - bx + b^2 - a^2)^2 = b^2(x^2 + z^2). \quad (4)$$

**II. Les sections par les plans principaux  $xOy$ ,  $zOx$  ont pour équations :**

$$(x^2 + y^2 - bx + b^2 - a^2)^2 = b^2 x^2, \quad (5)$$

$$(x^2 + z^2 - bx + b^2 - a^2)^2 = b^2(x^2 + z^2) (**). \quad (6)$$

(\*) C'est ce que l'on vérifie en observant que :

1° **O** est le centre radical de la circonférence **C** et des circonférences consécutives **FG**, **F'G'**;

2° La corde commune, **KL**, est perpendiculaire à la ligne des centres, **DD'**;

3° Ces centres, **D**, **D'**, appartiennent à la circonférence décrite sur **OC** comme diamètre;

4° A la limite, **DD'** est tangente à cette circonférence;

5° Le rayon **DI**, parallèle à **LK**, fait, avec **Ox**, un angle double de **O**.

(\*\*) Au lieu de celle-ci, **Houtain** a trouvé :

$$(x^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2 = b^2(x^2 + z^2).$$

Ainsi, la section par le plan  $zx$  se composerait de deux circonférences ayant, pour centre commun, l'origine; résultat inadmissible.

La première, qui se décompose en

$$(x - b)^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 + b^2 - a^2 = 0,$$

représente la circonférence *horizontale* ACB, puis une circonférence *imaginaire*, si, comme le suppose la figure,  $b$  surpasse  $a$ .

L'équation (6), du quatrième degré, est irréductible (\*).

III. I étant le centre du cercle générateur LK (situé dans le plan LO $\eta$ ), on a

$$OI = OD \cos \theta = b \cos^2 \theta = \frac{b}{2}(1 + \cos 2\theta);$$

équation d'un *limaçon de Pascal*.

Donc, au lieu de la construction précédente, on peut employer celle-ci :

*Sur OC, comme diamètre, on décrit une circonférence, à laquelle on mène une tangente TT'; puis l'on abaisse OI perpendiculaire à TT' : I est le centre de la circonférence génératrice (\*\*).*

(\*) Au moyen des coordonnées polaires, elle devient

$$u^2 - b(1 \pm \cos \omega) u + b^2 - a^2 = 0.$$

Soient  $u_1, u_2$  les deux racines. A cause de  $u_1 u_2 = b^2 - a^2$ , la courbe ne diffère pas de sa réciproque : elle est donc une *anallagmatique*. La surface S en est également une. (Nov. 1883.)

(\*\*) On vient de voir que l'équation de la section principale est

$$u^2 - b(1 + \cos 2\theta) u + b^2 - a^2 = 0,$$

et que

$$v = OI = \frac{b}{2}(1 + \cos 2\theta).$$

Par conséquent, si l'on suppose

$$u = v \pm \rho,$$

on a

$$\rho^2 = v^2 - (b^2 - a^2).$$

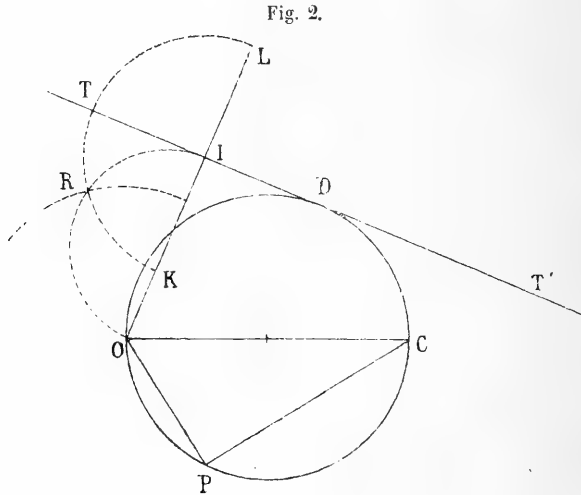
D'après cela, soit pris, dans la circonférence OC, la corde CP = a. Sur OI, comme diamètre, décrivez une demi-circonférence. Soit R le point où elle est

IV. La circonférence  $KL$  (fig. 1), caractéristique de la sphère  $D$ , est une ligne de courbure de  $S$ . Ainsi, le premier système de lignes de courbure se compose de cercles, dont les plans passent tous par la droite  $Oy$  (\*). Le cône de révolution  $KDL$  est normal à  $S$ , en tous les points de la circonférence  $KL$ . De plus, le lieu du sommet  $D$  est la circonférence décrite sur  $OC$  comme diamètre (\*\*).

V. On a trouvé  $OI = b \cos^2 \theta$ . D'ailleurs la figure 2 prouve que

$$\overline{IK}^2 = \overline{OI}^2 - (b^2 - a^2).$$

coupée par la circonférence décrite du point  $O$  comme centre, avec  $OP$  pour rayon. Si, du point  $I$  comme centre, vous tracez une dernière circonférence



passant en  $R$ , les points  $K, L$ , où elle coupe  $OI$ , appartiennent à la section principale cherchée.

De plus, la circonférence  $KRL$  est le rabattement, autour de son diamètre  $KL$ , de la génératrice. (Novembre 1885.)

(\*) Conformément à un théorème connu.

(\*\*) D'après la figure 2, la droite  $DI$  est tangente, en  $D$ , à cette circonférence, laquelle est, par conséquent, l'enveloppe des axes des cônes normaux. (Novembre 1885.)

Si l'on suppose que le cercle générateur, projeté suivant KL, soit rabattu autour de Oy, dans le plan Xy, l'équation du rabattement sera

$$(x - b \cos^2 \theta)^2 + y^2 = b^2 \cos^4 \theta + a^2 - b^2,$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2bx \cos^2 \theta = a^2 - b^2. \quad (7)$$

$x = 0$  donne  $y = \pm \sqrt{b^2 - a^2} \sqrt{-1}$ . Ainsi tous les cercles de courbure, après qu'ils ont été rabattus autour de Oy, passent par deux points fixes, imaginaires.

L'équation des cercles C', orthogonaux à ceux-ci, est

$$x^2 + y^2 + b\lambda y = b^2 - a^2 (*), \quad (8)$$

$\lambda$  étant un paramètre variable. Chacun de ces nouveaux cercles rencontre Ox en deux points fixes, déterminés par

$$y = 0, \quad x = \pm \sqrt{b^2 - a^2}.$$

Faisons tourner C' autour de Oy : il engendre une sphère, dont l'intersection avec S détermine une *trajectoire orthogonale des premières lignes de courbure* (\*\*), c'est-à-dire une ligne de courbure appartenant au second système. Celui-ci est donc composé de courbes sphériques (\*\*\*) .

VI. *Remarque.* — L'équation (4), étant écrite ainsi :

$$(x^2 + y^2 + z^2 - bx + c^2)^2 = b^2(x^2 + z^2), \quad (8)$$

a une grande analogie avec celle de la *Cyclide de Dupin* :

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 = 4(\alpha x + \beta \gamma)^2 + 4(\gamma^2 - a^2)z^2 (iv). \quad (9)$$

(\*) *Note sur la projection stéréographique* (JOURNAL DE LIOUVILLE, t. XIX, p. 155).

(\*\*) Voir, dans les *Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces*, le paragraphe VI, relatif aux *surfaces d'enroulement*.

(\*\*\*) Propriété connue.

(iv) Voir la *Note LXXXVI* (t. I, p. 572). Pour éviter toute confusion, nous avons fait un changement de lettres.

Mais la surface  $S$  n'est pas la Cyclide (\*). Pour le faire voir, changeons  $x$  en  $x + a$ , dans l'équation (8), et posons

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2.$$

En développant, on trouve les deux transformées :

$$\left. \begin{aligned} u^4 + 4a(a-b)x^2 + (a^2 + c^2)^2 - a^2b^2 + 2(2a-b)u^2x + 2(a^2 + c^2)u^2 \\ + 2[(2a-b)(a^2 + c^2) - ab^2]x - b^2z^2 = 0, \end{aligned} \right\} (8')$$

$$\left. \begin{aligned} u^4 - 4\gamma^2x^2 + (\gamma^2 - z^2 - \beta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2 + 2(\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2)u^2 \\ - 8\alpha\beta\gamma x - 4(\gamma^2 - \alpha^2)z^2 = 0; \end{aligned} \right\} (9')$$

puis, en identifiant :

$$\alpha = 0, \quad \gamma = 0, \quad a = 0, \quad b = 0, \quad c^2 = -\beta^2.$$

Pour ces valeurs, chacune des équations (8), (9) représente deux sphères égales, confondues.

### CXX. — Sur les lignes de courbure (\*\*).

(Novembre 1885.)

I. LEMME I. — *Si les lignes de courbure d'une surface  $S$ , appartenant à un même système, sont orthogonales à une surface  $\Sigma$ , l'intersection de  $S$  et de  $\Sigma$  est une ligne de courbure de  $S$ .*

Soient  $L, L', L'' \dots$  les premières lignes de courbure. Soit  $MM'M'' \dots$  l'intersection des deux surfaces. Menons  $MR$  tangente à  $L$ ,  $MT$  tangente à  $MM'M'' \dots$ . D'après l'hypothèse,  $MR$  est normale à  $\Sigma$ . Conséquemment, la droite  $MT$ , située dans

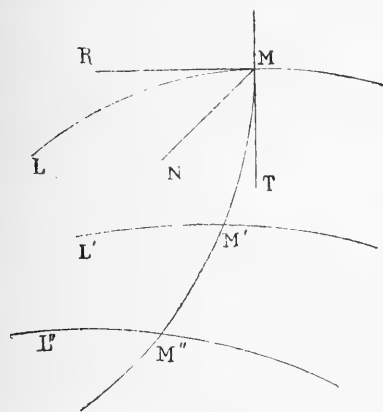
(\*) Cette proposition résulte, déjà, de l'équation (6), laquelle ne représente pas deux circonférences.

(\*\*) Note complétive de la précédente.



le plan tangent à  $\Sigma$ , est perpendiculaire à  $MR$ . Donc  $MM'M'' \dots$

*est une trajectoire orthogonale de  $L, L', L'' \dots$  ou une ligne de courbure appartenant au second système (\*).*



II. *Remarques.* — 1° Le plan  $RMT$  est tangent à  $S$ ; donc la normale  $MN$  à cette surface est perpendiculaire à  $RM$  : les deux surfaces sont orthogonales en tous les points de  $MM'M'' \dots$  Et comme cette

courbe de  $S$ , elle est aussi une ligne de courbure de  $\Sigma$ , conformément à un théorème connu.

2° Si les lignes  $L, L', L'', \dots$  sont planes, leurs plans enveloppent une développable  $\Delta$ . Pour avoir des surfaces  $\Sigma$ , il suffit de considérer les surfaces d'enroulement, engendrées par  $L, L', L'', \dots$  quand leurs plans roulent, sans glisser, sur  $\Delta$ ; puis les trajectoires orthogonales  $G, G', G'', \dots$  de ces lignes, après qu'elles sont venues se placer dans un même plan  $P$ , puis les surfaces d'enroulement engendrées par  $G, G', G'' \dots$  : ce sont les surfaces demandées (\*\*).

3° On peut adopter, comme surfaces  $\Sigma$ , les normales à  $S$ , passant par les secondes lignes de courbure.

III. LEMME II. — *Si une sphère  $\Sigma$  coupe, orthogonalement, un système de lignes  $L, L', L'', \dots$  tracées sur une surface  $S$ , l'intersection est une ligne de courbure de  $S$ .*

En effet, l'intersection est une ligne de courbure de la sphère, et les deux surfaces sont orthogonales en tous les points de cette ligne. (Lemme I.)

(\*) Cette démonstration sera, peut-être, jugée inutile; mais je crois qu'on ne saurait être trop clair.

(\*\*) *Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces*, p. 15.

IV. LEMME III. — *Étant donné un cercle C et une droite XY, on projette le centre C en O; puis l'on mène la tangente OA, et, d'un point quelconque M de XY, la tangente MT. Cela posé,*

$$\overline{MT}^2 - \overline{OA}^2 = \overline{OM}^2 \quad (*).$$

V. THÉORÈME I. — *Soit une surface S, engendrée par une circonférence C, dont le plan contient une droite donnée, XY, et dont le centre se meut dans un plan P, perpendiculaire à XY. Si cette circonférence, dans toutes ses positions, est orthogonale à une sphère donnée, Σ, dont le centre soit le point O où XY perce P :*

1° *Les circonférences C forment, relativement à S, un premier système de lignes de courbure;*

2° *Les secondes lignes de courbure sont déterminées par des sphères ayant leurs centres sur XY (\*\*).*

*Démonstration.* — 1° Représentons par R le rayon de la sphère Σ, par ρ le rayon (variable) de la circonférence C. La condition d'orthogonalité est, évidemment,

$$\rho^2 = \overline{OC}^2 - R^2;$$

C désignant le centre de la circonférence génératrice (\*\*\*) . Si, comme on le suppose, cette condition est remplie, l'intersection de S et de Σ est une ligne de courbure de S. (Lemme II.)

2° Soit Σ' une sphère ayant son centre M sur XY, et dont le rayon R' soit donné par la formule

$$R'^2 = R^2 + \overline{OM}^2.$$

D'après la réciproque du Lemme III, cette sphère Σ', dont le rayon ne varie qu'avec la position du centre, est orthogonale à toutes les circonférences C.

3° Les intersections de S, par les sphères Σ, Σ' ..., sont donc

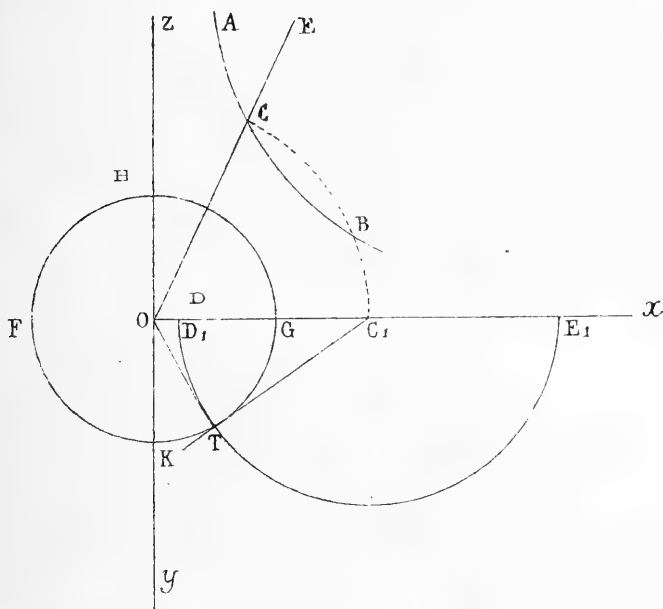
(\*) Cette fois, nous supprimons la démonstration.

(\*\*) Ce théorème renferme, comme cas particuliers, diverses propositions connues.

(\*\*\*) Ainsi, le lieu des centres est arbitraire.

les *secondes lignes de courbure* de  $S$ ; et, en conséquence, les *premières lignes de courbure* sont les *circonférences génératrices*.

VI. *Cercles orthogonaux*. — Soit, dans le plan *vertical*  $Zx$ ,  $ACB$  le lieu des centres des lignes de courbure circulaires, dont les plans contiennent l'*horizontale*  $Oy$  (\*). Soit  $FKGH$  la sphère donnée  $\Sigma$ , qui doit couper orthogonalement toutes ces lignes. Si



nous rabattons le centre  $C$  en  $C_1$ ; que nous menions la tangente  $C_1T$  au grand cercle  $O$ ; que, du point  $C_1$  comme centre, avec  $C_1T$  pour rayon, nous décrivions la circonférence  $D_1E_1$ , cette ligne est le rabattement de la ligne de courbure circulaire, projetée en  $DC$ ; etc.

Les rabattements des *cercles de courbure* sont donc les *cercles orthogonaux* à  $FHGK$ , ayant leurs centres sur  $Ox$ .

Les traces horizontales des sphères  $\Sigma'$ , orthogonales à ces

(\*) Dans cette petite épure,  $Ox$  est la *ligne de terre*.

lignes de courbure, sont, par ce qui précède, les cercles orthogonaux à  $C_1$ , et dont les centres sont situés sur  $Oy$ . Ces deux systèmes de cercles orthogonaux, situés sur le plan  $xy$ , déterminent donc, de la manière la plus simple, les deux systèmes de lignes de courbure.

VII. *Suite.* — Si l'on fait  $OC_1 = OC = \lambda$ , les cercles  $C_1$  sont représentés par

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + R^2 = 0. \quad (1)$$

Ceux qui les coupent orthogonalement ont pour équation

$$x^2 + y^2 - 2\mu y - R^2 = 0 (*). \quad (2)$$

Elle est vérifiée par  $y = 0$ ,  $x = \pm R$ . Donc toutes les sphères  $\Sigma'$  passent par la circonférence  $FGHK$ , située dans le plan vertical  $OZx$ .

VIII. *Remarque.* — Si l'on veut former l'équation différentielle qui caractérise les trajectoires orthogonales des cercles  $C$ , on doit éliminer  $\lambda$  entre la relation (1) et

$$\frac{x - \lambda}{y} = \frac{dx}{dy}.$$

Cette équation différentielle est, par conséquent,

$$(y^2 - x^2 + R^2) \frac{dy}{dx} + 2xy = 0. \quad (5)$$

L'équation (2), des cercles orthogonaux, satisfait à celle-ci. De plus, elle contient une constante arbitraire. Ainsi, l'équation (2) est l'intégrale générale de l'équation (5) (\*\*).

IX. *Une anallagmatique.* — La section principale de la surface  $S$ , ou le lieu des points  $D, E$ , est une anallagmatique.

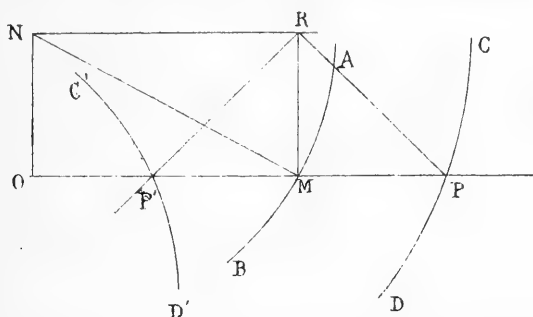
En effet,

$$OD \cdot OE = \overline{OC}^2 - \overline{CD}^2 = R^2 = \text{const.}$$

(\*) Page 109.

(\*\*) Dans ma *Note sur la projection stéréographique*, j'ai omis cette Remarque.

Soit, en général, un pôle  $O$ , et une courbe  $AMB$ , plane ou à



double courbure; puis l'anallagmatique  $CPD$ ,  $C'P'D'$ , déterminée par la condition

$$\overline{MP}^2 = \overline{OM}^2 - k^2.$$

D'après une propriété connue, les normales en  $P$ ,  $P'$  se coupent sur la perpendiculaire  $MR$  au rayon vecteur. On trouve aisément que,  $ON$  étant la *sous-normale polaire*, relative à la directrice  $AMB$ ,

$$MR = ON.$$

### CXXI (\*). — Maximum et minimum de la fonction

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} (**).$$

I. En supposant  $a'$  différent de zéro (\*\*\*) , on a

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{\left(b - \frac{ab'}{a'}\right)x + \left(c - \frac{ac'}{a'}\right)}{a'x^2 + b'x + c'};$$

(\*) Publiée dans *Mathesis* (janvier 1882).

(\*\*) Cette question, bien connue, a été traitée récemment dans divers recueils; mais avec des développements et des complications que le sujet ne comporte guère.

(\*\*\*) Lorsque  $a'$  est nul, on applique la discussion suivante à la fonction

$$\frac{1}{y} = \frac{b'x + c'}{ax^2 + bx + c}.$$

puis, si l'on fait, pour abrégér,

$$f = ba' - ab', \quad g = ca' - ac' : \quad (1)$$

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{fx + g}{a'(a'x^2 + b'x + c')} . \quad (2)$$

II. Si  $f$  est différent de zéro (\*), le nouveau numérateur prend la forme  $f(x - \alpha)$ , pourvu que

$$\alpha = -\frac{g}{f} = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} . \quad (5)$$

Soient alors :

$$y = \frac{a}{a'} + Y, \quad x = \alpha + X. \quad (4)$$

Au moyen de ces abréviations, l'égalité (2) devient

$$\frac{a'}{f} Y = \frac{X}{a'(X + \alpha)^2 + b'(X + \alpha) + c'} ,$$

ou

$$\frac{a'}{f} Y = \frac{X}{AX^2 + BX + C} ,$$

ou encore

$$\frac{f}{a'} \frac{1}{Y} = AX + \frac{C}{X} + B. \quad (5)$$

III. Il est visible que les maximums ou les minimums de  $y$  dépendent à ceux de  $Y$ , puis à ceux de  $\frac{1}{Y}$ ; etc. (\*\*). Le problème se réduit donc à la *détermination du maximum et du minimum de*

$$S = AX + \frac{C}{X}. \quad (6)$$

(\*) Dans le cas contraire, le problème se ramène à la discussion de

$$\frac{g}{a'x^2 + b'x + c'} .$$

(\*\*) Pour ne pas confondre un maximum avec un minimum, on pourrait désigner ces deux quantités, à la fois, sous le nom de *valeurs-limites*.

Le produit des deux parties de S est égal à AC. Donc :

1° Si A et C sont de même signe, on doit prendre (\*)

$$X = \pm \sqrt{\frac{C}{A}}; \quad (7)$$

en sorte que la fraction proposée a un maximum et un minimum (\*\*);

2° Si A et C sont de signes contraires, y n'a ni maximum ni minimum.

IV. Dans les formules (5), (6) :

$$\begin{aligned} A &= a', \quad C = a'(ac' - ca')^2 + b'(ac' - ca')(ba' - ab') + c'(ba' - ab')^2 \\ &= a'c[a'^2c + b'(ab' - ba')] + a'c'[a^2c' - b(ab' - ba')] - 2aa'^2cc'. \end{aligned}$$

Donc la relation  $\frac{C}{A} > 0$  devient

$$c^2a'^2 + c'^2a^2 - 2aa'cc' + (ab' - ba')(cb' - bc') > 0,$$

ou

$$(ac' - ca')^2 > (ab' - ba')(bc' - cb'). \quad (8)$$

Ainsi, quand la condition (8) est remplie, la fraction y a un maximum et un minimum.

V. Remarques. — 1° On ne peut pas supposer

$$(ac' - ca')^2 = (ab' - ba')(bc' - cb');$$

car alors, d'après une propriété connue, les équations

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

auraient une racine commune; et la fraction donnée serait réductible.

(\*) Si deux facteurs positifs forment un produit constant, leur somme est la plus petite possible quand ils sont égaux.

(\*\*) Il y a un cas exceptionnel, sur lequel nous allons revenir.

2° Si, dans la formule (7),  $C = \frac{B^2}{4A}$ , on trouve

$$X = \pm \frac{B}{2A}.$$

De ces deux valeurs, la seconde annule  $AX^2 + BX + \frac{B^2}{4A}$ ; et, par conséquent, rend infini  $Y$  (II) : elle ne correspond donc ni à un maximum ni à un minimum (\*). Dans ce cas, la formule (7) doit être remplacée par

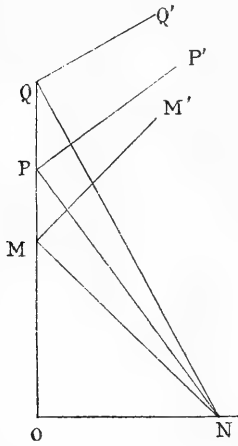
$$X = \frac{B}{2A}; \quad (7')$$

la fraction donnée, dont le dénominateur est un carré, a un maximum ou un minimum.

### CXXII. — Une propriété des surfaces conchoïdales (\*\*).

(Février 1872.)

I. O étant le pôle, soit OMPQ ... un rayon vecteur quelconque, rencontrant, en M, P, Q, ... des surfaces conchoïdales, déduites d'une surface directrice donnée. D'après un théorème connu (\*\*\*), les normales en M, P, Q, ... percent, en un même point N, le plan mené par le pôle, perpendiculairement au rayon vecteur.



Soient, sur le plan des normales, MM', PP', QQ', ... les traces des plans tangents. On sait que l'enveloppe de ces droites est une parabole ayant O pour sommet et N pour foyer. Donc l'enveloppe des plans tangents considérés est un cylindre parabolique.

(\*) Exception indiquée précédemment.

(\*\*) Omise dans le paragraphe IX des *Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces*.

(\*\*\*) *Loc. cit.*, p. 25.



II. *Remarques.* — 1° A chaque rayon vecteur correspond un cylindre parabolique ;

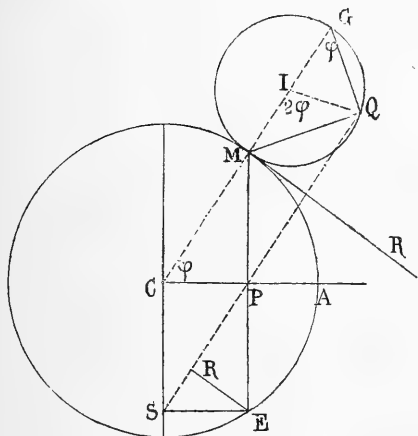
2° Le rayon vecteur est la podaire du cylindre, relativement au point N ;

3° L'antipodaire d'un cylindre parabolique, par rapport au foyer d'une section droite, est la génératrice située dans le plan principal.

### CXXIII. — Relation entre deux épicycloïdes.

(Janvier 1872.)

I. Soit la circonférence I, roulant sur la circonférence C, double de la première. Le point Q, d'abord situé en A, décrit une épicycloïde à deux rebroussements.



MG étant le diamètre de I, passant au point de contact M, menons l'ordonnée MP, la tangente commune MR, les cordes MQ, GQ.

Il est visible (et connu) que

$$\text{angle } MGQ = \frac{1}{2} \text{angle } MIQ = \text{angle } MCP = \varphi.$$

Donc les triangles rectangles CPM, GMQ sont égaux ; et  $MP = MQ$ .

D'après un théorème connu (\*), MQ est normale à l'épicycloïde.

Ainsi, la circonférence M, décrite du point M comme centre, avec MP pour rayon, touche, au point Q, l'épicycloïde. Par con-

(\*) Attribué à Descartes.

séquent, cette courbe est l'enveloppe de la circonférence  $M$ , variable de grandeur et de position.

II. La tangente  $MR$  est bissectrice de l'angle  $PMQ$ . Et comme  $MP = MQ$ , la droite  $PQ$  est perpendiculaire à  $MR$ , c'est-à-dire parallèle à  $CMG$ .

Prolongeons cette droite  $PQ$  jusqu'à sa rencontre, en  $S$ , avec le diamètre perpendiculaire à  $CA$ ; nous aurons  $PS = CM = a$ .

Ainsi :

*Pendant que la circonférence  $M$  enveloppe l'épicycloïde à deux rebroussements, la corde  $PQ$  enveloppe l'hypocycloïde, à quatre rebroussements, déterminée par une circonférence roulant à l'intérieur de la circonférence  $C$ .*

*Addition. — (Juin 1886.)*

III. Achevons le rectangle  $PCSE$ ; et, du sommet  $E$ , abaissons  $ER$  perpendiculaire à la diagonale  $AS$ . D'après la théorie des centres instantanés, le point  $R$  est celui où la droite  $AS$  touche l'hypocycloïde. Mais, d'après les constructions précédentes,  $PQ = 2PR$ . On a donc ce théorème :

*Soit une droite  $PS$ , de longueur donnée, glissant dans un angle droit. Si, à partir du point  $R$ , où cette droite touche son enveloppe, on prend  $RQ = 3RP$ , le lieu du point  $Q$  est une épicycloïde à deux rebroussements (\*).*

IV. *Remarque.* — Le point  $Q$  peut être pris de part et d'autre du point  $R$ .

(\*) Si l'on conserve les notations précédentes, on trouve que les coordonnées du point  $Q$  sont

$$x = \frac{a}{2} (3 \cos \varphi - \cos 3\varphi), \quad y = \frac{a}{2} (\sin 3\varphi - 3 \sin \varphi);$$

équations qui sont bien celles de l'épicycloïde.

**CXXIV. — Séries et intégrales elliptiques (\*)**1. Un développement de la fonction  $f(q)$ .

Soit, comme aux pages 75 à 75 du Mémoire cité :

$$f(q) = \frac{1}{4} \left( \frac{2\omega}{\pi} - 1 \right) = \frac{q}{1-q} - \frac{q^5}{1-q^5} + \frac{q^5}{1-q^5} - \dots = \sum_1^\infty \varepsilon_n q^n. \quad (1)$$

Dans la série

$$\frac{q}{1-q} - \frac{q^5}{1-q^5} + \frac{q^5}{1-q^5} - \dots,$$

chaque terme positif peut être représenté par  $\frac{q^a}{1-q^a}$ ,  $a$  ayant la forme  $4\mu + 1$ . De même, chaque terme négatif, pris en valeur absolue, peut être désigné par  $\frac{q^b}{1-q^b}$ ,  $b$  ayant la forme  $4\mu - 1$ .

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad \frac{q^a}{1-q^a} &= q^a + q^{2a} + q^{3a} + q^{4a} + q^{5a} + q^{6a} + q^{7a} + \dots \\ &= q^a + q^{2a} + (q^{3a} + q^{7a} + q^{11a} + q^{15a} + \dots) + S; \end{aligned}$$

$S$  est (abstraction faite de  $q^a + q^{2a}$ ) l'ensemble des termes dans lesquels les exposants de  $q$  n'ont pas la forme  $4\mu - 1$ .

La somme de la série entre parenthèses est  $\frac{q^{3a}}{1-q^{4a}}$ . Donc

$$S = \frac{q^a}{1-q^a} - q^a(1+q^a) - \frac{q^{3a}}{1-q^{4a}} = \frac{q^{4a} + q^{5a} + q^{6a}}{1-q^{4a}}. \quad (2)$$

2° Semblablement,

$$\frac{q^b}{1-q^b} = (q^b + q^{5b} + q^{9b} + q^{13b} + \dots) + S';$$

puis

$$S' = \frac{q^{2b} + q^{3b} + q^{4b}}{1-q^{4b}}. \quad (5)$$

(\*) Cette Note est un complément aux *Recherches sur quelques produits indéfinis*.

Si l'on fait  $a = 1, 5, 9, 13, \dots$   $b = 3, 7, 11, 15, \dots$  on trouve

$$f(q) = q + q^2 + q^5 + q^{10} + q^9 + q^{18} + q^{15} + q^{26} + \dots \\ + \frac{q^4 + q^5 + q^6}{1 - q^4} - \frac{q^6 + q^9 + q^{12}}{1 - q^{12}} + \frac{q^{20} + q^{25} + q^{30}}{1 - q^{20}} - \frac{q^{14} + q^{21} + q^{28}}{1 - q^{28}} \\ + \frac{q^{36} + q^{45} + q^{54}}{1 - q^{36}} - \frac{q^{22} + q^{33} + q^{44}}{1 - q^{44}} + \dots;$$

ou, plus simplement :

$$f(q) = \left. \begin{aligned} & \frac{q}{1 - q^4} + \frac{q^2}{1 - q^8} + \frac{q^4 + q^5 + q^6}{1 - q^4} - \frac{q^6 + q^9 + q^{12}}{1 - q^{12}} + \frac{q^{20} + q^{25} + q^{30}}{1 - q^{20}} \\ & - \frac{q^{14} + q^{21} + q^{28}}{1 - q^{28}} + \frac{q^{36} + q^{45} + q^{54}}{1 - q^{36}} - \dots \end{aligned} \right\} (4)$$

Tel est le développement, très convergent, de la quantité

$$\frac{1}{4} \left( \frac{2\omega}{\pi} - 1 \right).$$

II. *Remarque.* — Une considération bien simple permet d'abrégier le calcul précédent. Revenons à la double égalité

$$f(q) = \frac{q}{1 - q} - \frac{q^5}{1 - q^5} + \frac{q^5}{1 - q^5} - \dots = \sum_1^\infty \varepsilon_n q^n. \quad (1)$$

Si  $q = 4\mu - 1$ ,  $\varepsilon_n = 0$  (\*). Il est donc inutile de conserver, dans les développements des diverses fractions, les termes ayant la forme  $q^{4\mu-1}$ . Cette suppression faite, on a

$$\frac{q}{1 - q} = q + q^2 + (q^4 + q^5 + q^6) + (q^8 + q^9 + q^{10}) + (q^{12} + q^{15} + q^{14}) + \dots, \\ \frac{q^5}{1 - q^5} = (q^6 + q^9 + q^{12}) + (q^{18} + q^{21} + q^{24}) + (q^{30} + q^{35} + q^{36}) + \dots, \\ \frac{q^5}{1 - q^5} = q^5 + q^{10} + (q^{20} + q^{25} + q^{30}) + (q^{40} + q^{45} + q^{50}) + \dots,$$

(\*) *Recherches...*, p. 74.

$$\frac{q^7}{1 - q^7} = (q^{14} + q^{21} + q^{28}) + (q^{42} + q^{49} + q^{56}) + (q^{70} + q^{77} + q^{84}) + \dots,$$

$$\frac{q^9}{1 - q^9} = q^9 + q^{18} + (q^{36} + q^{45} + q^{54}) + (q^{72} + q^{81} + q^{90}) + \dots,$$

.....

ou

$$\frac{q}{1 - q} = q + q^2 + \frac{q^4 + q^5 + q^6}{1 - q^4}, \quad \frac{q^5}{1 - q^5} = \frac{q^6 + q^9 + q^{12}}{1 - q^{12}},$$

$$\frac{q^5}{1 - q^5} = q^5 + q^{10} + \frac{q^{20} + q^{25} + q^{30}}{1 - q^{20}}, \dots;$$

.....

puis, au moyen d'une réduction évidente,

$$f(q) = \frac{q}{1 - q^4} + \frac{q^2}{1 - q^8} + \frac{q^4 + q^5 + q^6}{1 - q^4} - \frac{q^6 + q^9 + q^{12}}{1 - q^{12}} \\ + \frac{q^{20} + q^{25} + q^{30}}{1 - q^{20}} - \frac{q^{14} + q^{21} + q^{28}}{1 - q^{28}} + \dots;$$

comme ci-dessus.

### III. Remarque. — Soit

$$\Sigma = \frac{q^4 + q^5 + q^6}{1 - q^4} - \frac{q^6 + q^9 + q^{12}}{1 - q^{12}} + \frac{q^{20} + q^{25} + q^{30}}{1 - q^{20}} - \frac{q^{14} + q^{21} + q^{28}}{1 - q^{28}} + \dots$$

A cause de

$$f(q) = \frac{1}{4} \left( \frac{2\omega}{\pi} - 1 \right) :$$

$$\Sigma = \frac{1}{4} \left( \frac{2\omega}{\pi} - 1 \right) - \frac{q}{1 - q^4} - \frac{q^2}{1 - q^8}. \tag{5}$$

### IV. Sommation par intégrale définie. — On sait que

$$\frac{2\omega}{\pi} = 1 + 4 \sum_1^\infty \frac{q^n}{1 + q^{2n}} (*), \tag{6}$$

(\*) *Fundamenta nova*, p. 105.

et que

$$\frac{1 - q^n}{1 + q^n} = -4 \int_0^\infty \frac{\sin n(\alpha \mathcal{L} \cdot q)}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} d\alpha \quad (*)$$

ou, par le changement de  $q$  en  $q^2$  :

$$-1 + \frac{2}{1 + q^{2n}} = -4 \int_0^\infty \frac{\sin n(2\alpha \mathcal{L} \cdot q)}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} d\alpha. \quad (7)$$

Cette dernière égalité donne

$$-\frac{q}{1-q} + 2 \sum_1^\infty \frac{q^n}{1+q^{2n}} = -4 \int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} \sum_1^\infty q^n \sin n(2\alpha \mathcal{L} \cdot q). \quad (8)$$

On a aussi

$$\sum_1^\infty q^n \sin n(2\alpha \mathcal{L} \cdot q) = \frac{q \sin(2\alpha \mathcal{L} \cdot q)}{1 - 2q \cos(2\alpha \mathcal{L} \cdot q) + q^2} \quad (**).$$

Par conséquent,

$$-\frac{q}{1-q} + 2 \sum_1^\infty \frac{q^n}{1+q^{2n}} = -4q \int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} \frac{\sin(2\alpha \mathcal{L} \cdot q)}{1 - 2q \cos(2\alpha \mathcal{L} \cdot q) + q^2};$$

puis, au lieu de la formule (6) :

$$\frac{2\omega}{\pi} = \frac{1+q}{1-q} - 8q \int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} \frac{\sin(2\alpha \mathcal{L} \cdot q)}{1 - 2q \cos(2\alpha \mathcal{L} \cdot q) + q^2}. \quad (9)$$

Ce développement de la fonction  $\frac{2\omega}{\pi}$  est un peu plus simple que celui qui se trouve à la page 125 des *Recherches*; savoir :

$$\left. \begin{aligned} \frac{2\omega}{\pi} &= 1 + 2 \frac{q}{1+q^2} - 4 \frac{\text{arc tg } q}{\mathcal{L} \cdot q} \\ &- 8q(1-q^2) \int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1} \frac{\sin(\alpha \mathcal{L} \cdot q)}{1 + 2q^2 \cos(2\alpha \mathcal{L} \cdot q) + q^4} \quad (***) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(\*) *Recherches...*, p. 123.

(\*\*) *Ibid.*, p. 121.

(\*\*\*) A la page 124 du *Mémoire*, le premier membre de l'égalité (452) doit être lu ainsi :

$$\frac{q}{1-q^2} + \frac{q^2}{1-q^4} + \frac{q^5}{1-q^6} + \dots + \frac{q^n}{1-q^{2n}} + \dots$$

V. *Identities remarquables.* — Les formules connues :

$$q^{\frac{1}{2}}(1 + q + q^5 + q^6 + \dots)^4 = \frac{k\omega^2}{\pi^2} (*),$$

$$\frac{q}{1 - q^2} + 2^5 \frac{q^2}{1 - q^4} + 3^5 \frac{q^5}{1 - q^6} + \dots = \frac{k^2\omega^4}{\pi^4} (**),$$

donnent :

$$q(1 + q + q^5 + q^6 + \dots)^8 = \frac{q}{1 - q^2} + 2^5 \frac{q^2}{1 - q^4} + 3^5 \frac{q^5}{1 - q^6} + \dots, \quad (11)$$

$$q(1 - q - q^5 + q^6 + \dots)^8 = \frac{q}{1 - q^2} - 2^5 \frac{q^2}{1 - q^4} + 3^5 \frac{q^5}{1 - q^6} - \dots \quad (12)$$

On conclut, de ces deux égalités :

$$\left. \begin{aligned} & q[(1 + q + q^5 + q^6 + \dots)^8 + (1 - q - q^5 + q^6 + \dots)^8] \\ & = 2 \left[ \frac{q}{1 - q^2} + 3^5 \frac{q^5}{1 - q^6} + 3^5 \frac{q^5}{1 - q^{10}} + \dots \right] (***) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

A cause de :

$$q(1 + q + q^5 + q^6 + \dots)^8 = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^4 k^2,$$

$$q(1 - q - q^5 + q^6 + \dots)^8 = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^4 k^2 k'^2 \text{ (iv)},$$

(\*) *Recherches...*, p. 2.

(\*\*) *Fundamenta...*, p. 111.

(\*\*\*) En passant, rappelons que :

$$(q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \dots)^8 = \left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^4 \left(\frac{1 - \sqrt{k'}}{4}\right)^8,$$

$$(q - q^9 - q^{25} + q^{49} + \dots)^8 =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\omega}{4\pi}\right)^4 (1 + \sqrt{k'})^2 \sqrt{1 + k'} \sqrt[4]{k'} \left[ \sqrt{1 + k'} - \sqrt{2\sqrt{k'}} \right]^2.$$

(*Recherches...*, p. 102.)

(iv) *Recherches...*, p. 2.

le premier membre a pour valeur

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^4 k^2(2 - k^2) = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^4 \frac{k^2}{2} [(1 + k')^2 + (1 - k')^2] \\ & = 2 \left(\frac{\omega k}{2\pi}\right)^2 \left[ \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 (1 + k')^2 + \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 (1 - k')^2 \right]. \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega k}{2\pi}\right)^2 &= q(1 + q^2 + q^6 + \dots)^4, \\ \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 (1 + k')^2 &= (1 + 2q^2 + 2q^8 + 2q^{18} + \dots)^4, \\ \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 (1 - k')^2 &= 16q^2(1 + q^4 + q^{12} + q^{24} + \dots)^4 (*). \end{aligned}$$

Donc l'égalité (13) devient

$$\begin{aligned} & \frac{q(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \dots)^4}{\left[ (1 + 2q^2 + 2q^8 + 2q^{18} + \dots)^4 + 16q^2(1 + q^4 + q^{12} + q^{24})^4 \right]} \\ & = \frac{q}{1 - q^2} + 5^5 \frac{q^5}{1 - q^6} + 5^5 \frac{q^5}{1 - q^{10}} + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

On sait que :

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad q(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \dots)^4 &= \frac{q}{1 - q^2} + 5 \frac{q^5}{1 - q^6} + 5 \frac{q^5}{1 - q^{10}} + \dots; \\ 2^\circ \quad (1 + 2q^2 + 2q^8 + 2q^{18} + \dots)^4 &= 1 + 8 \left[ \frac{q^2}{1 - q^2} + 2 \frac{q^4}{1 + q^4} + 5 \frac{q^6}{1 - q^6} + \dots \right]; \\ 3^\circ \quad 16q^2(1 + q^4 + q^{12} + \dots)^4 &= 16 \left[ \frac{q^2}{1 - q^4} + 5 \frac{q^6}{1 - q^{12}} + 5 \frac{q^{10}}{1 - q^{20}} + \dots (**). \right] \end{aligned}$$

Donc le premier membre de la relation (14) peut être remplacé par

$$A[1 + 8B + 16C],$$

en supposant

$$A = \frac{q}{1 - q^2} + 5 \frac{q^5}{1 - q^6} + 5 \frac{q^5}{1 - q^{10}} + \dots,$$

(\*) *Recherches...*, pp. 2 et 5.

(\*\*) *LEGENDRE*, pp. 153 et 154.



$$B = \frac{q^2}{1 - q^2} + 2 \frac{q^4}{1 + q^4} + 5 \frac{q^6}{1 - q^6} + 4 \frac{q^8}{1 + q^8} + \dots,$$

$$C = \frac{q^2}{1 - q^4} + 5 \frac{q^6}{1 - q^{12}} + 5 \frac{q^{10}}{1 - q^{20}} + 7 \frac{q^{14}}{1 - q^{28}} + \dots$$

Par suite,

$$8A(B + 2C) = (5^3 - 5) \frac{q^5}{1 - q^6} + (5^5 - 5) \frac{q^5}{1 - q^{10}} + (7^5 - 7) \frac{q^7}{1 - q^{14}} + \dots \quad (15)$$

Il reste à développer, suivant les puissances de  $q$ , chacun des deux membres.

Or, il est connu que (\*) :

$$A = \sum_1^{\infty} q^i \int i, \quad B = \sum_1^{\infty} (q^{2i} + 5q^{4i} + 5q^{8i} + 5q^{16i} + \dots) \int i,$$

$$C = \sum_1^{\infty} q^{2i} \int i;$$

donc

$$B + 2C = 5 \sum_1^{\infty} (q^{2i} + q^{4i} + q^{8i} + q^{16i} + \dots) \int i;$$

ou, plus simplement,

$$B + 2C = 5 \sum_1^{\infty} q^p \int i' (**).$$

Ainsi, au lieu de l'égalité (15), nous avons :

$$\left. \begin{aligned} & 24 \left( \sum_1^{\infty} q^i \int i \right) \cdot \left( \sum_1^{\infty} q^p \int i' \right) \\ & = (5^3 - 5) \frac{q^5}{1 - q^6} + (5^5 - 5) \frac{q^5}{1 - q^{10}} + (7^5 - 7) \frac{q^7}{1 - q^{14}} + \dots \end{aligned} \right\} (16)$$

Et comme le second membre a pour développement

$$\sum_1^{\infty} q^n [\zeta_5(n) - \zeta_1(n)] (***)$$

(\*) *Recherches...*, p. 79.

(\*\*) Dans cette nouvelle formule,  $p$  est supposé pair, et  $i'$  représente le plus grand diviseur impair de  $p$  (*Recherches...*, pp. 115 et suiv.).

(\*\*\*) *Recherches...*, p. 117.

l'équation *finale* cherchée est

$$24 \left( \sum_1^{\infty} q^i \int i \right) \cdot \left( \sum_1^{\infty} q^n \int i' \right) = \sum_1^{\infty} q^n [\zeta_5(n) - \zeta_1(n)], \quad (17)$$

$n$  étant *impair*.

En outre, la relation (15) peut être écrite ainsi :

$$\frac{1}{2} q [(1+q+q^3+q^6+\dots)^8 + (1-q-q^3+q^6+\dots)^8] = \sum_1^{\infty} q^n \zeta_5(n); \quad (18)$$

ou, par le changement de  $q$  en  $q^8$  :

$$\frac{1}{2} [(q+q^9+q^{25}+q^{49}+\dots)^8 + (q-q^9-q^{25}+q^{49}+\dots)^8] = \sum_1^{\infty} q^{8n} \zeta_5(n), \quad (19)$$

$n$  étant *impair*.

#### VI. Théorèmes d'Arithmétique (\*):

1° Tout multiple de 8 est la somme de huit carrés impairs (\*\*);

2° Si l'on fait  $n = di$ , le nombre des solutions de l'équation

$$i_1^2 + i_2^2 + \dots + i_8^2 = 8n$$

est égal à la somme des cubes des diviseurs  $d$  (\*\*\*);

3° Soit  $n = 2^x i + i'$ ,  $i$  et  $i'$  étant impairs. Soient  $\xi_1(n) = \int n$ ,  $\xi_5(n)$  la somme des cubes des diviseurs de  $n$ . On a

$$\sum_1^{\infty} [\zeta_1(i) \cdot \zeta_1(i')] = \frac{\zeta_5(n) - \zeta_1(n)}{24} \quad (v);$$

4° L'identité

$$\frac{q}{1+q} + 2 \frac{q^2}{1+q^2} + 5 \frac{q^5}{1+q^5} + \dots = \frac{q}{1-q} + 5 \frac{q^5}{1-q^5} + 5 \frac{q^5}{1-q^5} + \dots \quad (v) \quad (20)$$

(\*) Démontrés dans les *Recherches...*, pp. 100 et 117.

(\*\*) Résulte de l'identité (11).

(\*\*\*) Même identité (11).

(v) Identité (17).

(v) *Recherches...*, p. 79.

entraîne celle-ci :

$$\sum \frac{n}{i} - \sum \frac{n}{p} = \int i, \quad (21)$$

dans laquelle  $i$  est un diviseur *impair* de  $n$ , et  $p$  un diviseur *pair*. En conséquence :

*La somme des diviseurs d'un nombre entier  $n$ , qui donnent des quotients impairs, se compose de la somme des diviseurs impairs, augmentée de la somme des diviseurs qui donnent des quotients pairs ;*

proposition assez visible (\*).

VII. *Remarques.* — 1° Si l'on développe, suivant les puissances de  $q$ , chacune des fractions composant le premier membre de l'égalité (20), on trouve que ce premier membre équivaut à

$$\frac{q}{(1-q)^2} - \frac{q^2}{(1-q^2)^2} + \frac{q^5}{(1-q^3)^2} - \frac{q^4}{(1-q^4)^2} + \dots$$

Par suite,

$$\left. \begin{aligned} & \frac{q^2}{(1-q)^2} - \frac{2q^5 - 5q^6}{(1-q^5)^2} - \frac{4q^5 - 5q^{10}}{(1-q^5)^2} - \frac{6q^7 - 7q^{14}}{(1-q^7)^2} + \dots \\ & = \frac{q^2}{(1-q^2)^2} + \frac{q^4}{(1-q^4)^2} + \frac{q^6}{(1-q^6)^2} + \dots \end{aligned} \right\} (22)$$

2° Cette identité en donne une autre, assez remarquable. D'abord, on peut l'écrire sous la forme abrégée :

$$\frac{q^2}{(1-q)^2} = \sum_5^{\infty} \frac{(n-1)q^n - nq^{2n}}{(1-q^n)^2} + F(q^2),$$

$n$  étant *impair*.

Changeant  $q$  en  $-q$ , et retranchant, on a donc

$$4 \frac{q^5}{(1-q^2)^2} = \sum_5^{\infty} \left[ \frac{(n-1)q^n - nq^{2n}}{(1-q^n)^2} + \frac{(n-1)q^n + nq^{2n}}{(1+q^n)^2} \right],$$

(\*) Il n'en est pas de même du théorème 1°, implicitement contenu dans le *Traité de Legendre* (t. III, p. 155). La démonstration *directe*, si elle n'a pas été faite, est désirable.

ou

$$\frac{q^3}{(1-q^2)^2} = \sum_3^{\infty} \frac{\frac{n-1}{2}q^n - \frac{n+1}{2}q^{3n}}{(1-q^{2n})^2}.$$

Si l'on fait  $n = 3 + 2n'$ , et que l'on remplace  $q^2$  par  $q$ , on trouve, finalement,

$$\sum_0^{\infty} \frac{(n'+1)q^{n'} - (n'+2)q^{3(n'+1)}}{(1-q^{3+2n'})^2} = \frac{1}{(1-q)^2}. \quad (25)$$

Ainsi, la série

$$\frac{1-2q^5}{(1-q^5)^2} + \frac{2q-5q^6}{(1-q^5)^2} + \frac{5q^2-4q^9}{(1-q^7)^2} + \frac{4q^5-5q^{12}}{(1-q^9)^2} + \dots,$$

dont la génération est assez compliquée, a une limite fort simple.

En outre, le développement, suivant les puissances de  $q$ , est

$$1 + 2q + 5q^2 + 4q^3 + \dots$$

3° Par la transposition des termes négatifs, on a encore :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{(1-q^5)^2} + \frac{2q}{(1-q^5)^2} + \frac{5q^2}{(1-q^7)^2} + \frac{4q^5}{(1-q^9)^2} + \dots \\ & = \frac{1}{(1-q)^2} + \frac{2q^5}{(1-q^5)^2} + \frac{5q^6}{(1-q^5)^2} + \frac{4q^9}{(1-q^7)^2} + \dots \end{aligned} \right\} (24)$$

4° Cette égalité (24) présente une particularité curieuse. Si l'on développe les deux membres, suivant les puissances de  $q$ , les coefficients de  $q^n$  sont composés des *mêmes parties, disposées en ordres contraires*. Par exemple, dans le premier membre, le coefficient de  $q^{12}$  est  $5 + 4 \cdot 2 + 13$ ; et, dans le second,  $15 + 2 \cdot 4 + 5$ . On vérifie cette propriété en s'appuyant sur celle-ci, laquelle est presque évidente :

*Les valeurs entières et positives (ou nulles) de  $x, y$ , qui satisfont à l'équation*

$$(2x + 5)(2y + 4) = 2n + 5,$$

*satisfont à celle-ci :*

$$\sum (x - y + 1) = n + 1.$$

VIII. *Autre développement.* — 1° Reprenons la formule

$$f(q) = \frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^5} + \frac{q^5}{1-q^9} - \dots \quad (1)$$

Il en résulte :

$$\frac{1}{2} [f(q) - f(-q)] = \frac{q}{1-q^4} + \frac{q^5}{1-q^4} - \frac{q^9}{1-q^{12}} + \frac{q^{25}}{1-q^{20}} - \frac{q^{21}}{1-q^{28}} + \dots$$

Pour évaluer le premier membre, j'observe que l'on a, simultanément (\*) :

$$f(q) = (q + q^4 + q^9 + \dots)(1 + q + q^4 + q^9 + \dots)$$

$$q - q^4 + q^9 - \dots = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{2\omega k'}{\pi}} \right),$$

$$1 - q + q^4 - q^9 + \dots = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{2\omega k'}{\pi}} \right);$$

donc

$$f(-q) = \frac{1}{4} \left( -1 + \frac{2\omega k'}{\pi} \right);$$

puis

$$\frac{1}{2} [f(q) - f(-q)] = \frac{1}{4} \frac{\omega(1-k')}{\pi};$$

et, par conséquent,

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{\omega(1-k')}{\pi} &= \frac{q}{1-q^4} + \frac{q^5}{1-q^4} - \frac{q^9}{1-q^{12}} + \frac{q^{25}}{1-q^{20}} - \frac{q^{21}}{1-q^{28}} + \dots \\ &+ \frac{q^{45}}{1-q^{56}} + \frac{q^{55}}{1-q^{44}} + \dots (**). \end{aligned} \right\} (25)$$

IX. *Remarque.* — Il est connu que

$$\frac{1}{4} \frac{\omega(1-k')}{\pi} = \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^5}{1-q^6} + \frac{q^5}{1-q^{10}} + \dots (***)$$

(\*) *Recherches...*, pp. 2 et 74.

(\*\*) Les exposants 3, 23, 43, ...; 4, 20, 56, ...; 9, 21, 53, ...; 12, 28, 44, ...; forment quatre progressions.

(\*\*\*) LEGENDRE, t. III, p. 152.

On a donc cette *identité* :

$$\frac{q}{1-q^2} - \frac{q^5}{1-q^6} + \frac{q^9}{1-q^{10}} - \frac{q^{13}}{1-q^{14}} + \dots = \frac{q}{1-q^4} + \frac{q^5}{1-q^8} - \frac{q^9}{1-q^{12}},$$

réductible à

$$\left. \begin{aligned} \frac{q^5}{1-q^4} = & \frac{q^5}{1-q^4} - \frac{q^5}{1-q^{10}} + \frac{q^9}{1-q^{12}} - \frac{q^9}{1-q^{18}} + \frac{q^{25}}{1-q^{20}} - \frac{q^{15}}{1-q^{26}} \\ & + \frac{q^7}{1-q^{28}} - \frac{q^{17}}{1-q^{34}} + \frac{q^{45}}{1-q^{56}} - \dots (*) \end{aligned} \right\} (26)$$

X (\*\*). *Sur une formule d'Eisenstein.* — On doit à ce profond Géomètre, mort beaucoup trop tôt, la relation suivante, qui donne une transformation de la *série de Lambert* :

$$\left. \begin{aligned} E \left[ \frac{z}{1-z} + \frac{z^2}{1-z^2} + \frac{z^5}{1-z^5} + \dots \right] \\ = \frac{z}{1-z} - 2 \frac{z^5}{(1-z)(1-z^2)} + 5 \frac{z^6}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)} \\ - 4 \frac{z^{10}}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)} + \dots (***) \end{aligned} \right\} (27)$$

Dans le premier membre, E représente la remarquable fonction d'Euler :

$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4) \dots = 1 - z - z^2 + z^5 + z^7 - z^{12} - \dots$$

On peut écrire autrement le second membre. En général,

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2) \dots (1-z^p)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} F(n, p) z^n : \quad (28)$$

F(n, p) est le nombre des décompositions de n, en parties égales ou inégales, non supérieures à p<sup>(iv)</sup>. Donc

$$(-1)^{p-1} p \frac{z^{\frac{p(p+1)}{2}}}{(1-z)(1-z^2) \dots (1-z^p)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^{p-1} p F(n, p) z^{n + \frac{p(p+1)}{2}}. \quad (29)$$

(\*) Nous arrêtons ici cette Note, sauf à y revenir plus tard. Le sujet est inépuisable; mais il faut *savoir se borner*. (Décembre 1885.)

(\*\*) Extrait d'une lettre adressée à M. Hermité. (Juin 1886.)

(\*\*\*) *Journal de Crelle*, t. XXVII.

(iv) *Recherches...*, p. 47.

Soit

$$N = n + \frac{p(p+1)}{2},$$

ou

$$n = N - \frac{p(p+1)}{2}.$$

Alors

$$F(n, p) = F \left[ N - \frac{p(p+1)}{2}, p \right]$$

= nombre des décompositions de  $N$  en  $p$  parties inégales

=  $(N, p)$  (\*).

Ainsi, le coefficient de  $z^N$  est

$$(N, 1) - 2(N, 2) + 5(N, 5) - 4(N, 4) + \dots$$

Soit maintenant  $G(N)$  le nombre des diviseurs de  $N$ . Il est visible que, dans le premier membre de l'égalité (27), le coefficient de  $z^N$  est

$$G(N) - G(N-1) - G(N-2) + G(N-5) + G(N-7) - G(N-12) - \dots$$

On a donc cette relation entre deux fonctions numériques, bien différentes :

$$\left. \begin{aligned} &(N, 1) - 2(N, 2) + 5(N, 5) - 4(N, 4) + \dots \\ &= G(N) - G(N-1) - G(N-2) + G(N-5) + G(N-7) - G(N-12) - \dots \end{aligned} \right\} (50)$$

Est-elle connue ?

XI. Application. — Soit  $N = 19$ . On doit trouver

$$\begin{aligned} &(19, 1) - 2(19, 2) + 5(19, 5) - 4(19, 4) + \dots \\ &= G(19) - G(18) - G(17) + G(14) + G(12) - G(7) - G(4); \end{aligned}$$

ou (\*\*)

$$1 - 2 \cdot 9 + 5 \cdot 21 - 4 \cdot 18 + 5 \cdot 5 = 2 - 6 - 2 + 4 + 6 - 2 - 5;$$

ce qui est exact.

(\*) Introduction à l'Analyse, p. 245; Recherches..., p. 54.

(\*\*) Recherches..., Table I.

**CXXV. — Application de la Géométrie à l'Algèbre  
et à l'Arithmétique.**

(Mars 1877.)

I. On doit, à Liouville, un beau théorème dont un cas particulier peut être énoncé ainsi :

*Si l'on représente par  $\rho$  le rayon de courbure d'une courbe algébrique, en un de ses points d'intersection avec l'axe des abscisses, et par  $\alpha$  l'axe que la tangente en ce point fait avec le même axe, on aura*

$$\sum \frac{1}{\rho \sin^5 \alpha} = 0 \text{ (*)}; \quad (1)$$

*le signe sommatoire s'étendant à tous les points d'intersection, réels ou imaginaires.*

Au moyen des formules

$$\operatorname{tg} \alpha = y', \quad \rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{1}{y'' \cos^3 \alpha},$$

l'égalité (1) se transforme en celle-ci :

$$\sum \frac{y''}{y'^3} = 0. \quad (2)$$

On a donc ce curieux théorème d'Algèbre :

*Soit  $f(x, y) = 0$ ; soient  $y' = \frac{dy}{dx}$ ,  $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ : la somme des fractions  $\frac{y''}{y'^3}$ , étendue à toutes les racines de l'équation  $f(0, x) = 0$ , est nulle.*

*En particulier, la somme des fractions  $\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$ , étendue à toutes les racines (supposées inégales) de l'équation  $f(x) = 0$ , est nulle.*

(\*) Rapport sur un Mémoire de M. Émile Ghysens (BULLETIN DE L'ACADÉMIE, mai 1877).



II. Considérant d'abord ce dernier cas, supposons

$$f(x) = (x - a)(x - b) \dots (x - g)(x - h); \quad (5)$$

et, par conséquent :

$$f'(x) = f(x) \left[ \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \dots + \frac{1}{x-h} \right], \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} f''(x) &= f'(x) \left[ \frac{1}{x-a} + \dots + \frac{1}{x-h} \right] - f(x) \left[ \frac{1}{(x-a)^2} + \dots + \frac{1}{(x-h)^2} \right] \\ &= 2f'(x) \left[ \frac{1}{(x-a)(x-b)} + \dots + \frac{1}{(x-a)(x-h)} \right] \\ &\quad + \frac{1}{(x-b)(x-c)} + \dots + \frac{1}{(x-g)(x-h)}; \end{aligned} \right\} (5)$$

puis

$$f'(a) = (a-b)(a-c) \dots (a-h), \quad (6)$$

$$f''(a) = 2(a-b)(a-c) \dots (a-h) \left[ \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \dots + \frac{1}{a-h} \right], \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \frac{f''(a)}{[f'(a)]^2} = \frac{1}{[(a-b)(a-c) \dots (a-h)]^2} \left[ \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \dots + \frac{1}{a-h} \right]. \quad (8)$$

Le théorème énoncé ci-dessus peut donc l'être ainsi :

*a, b, c, ... h étant des quantités inégales, on a*

$$\sum \frac{1}{[(a-b)(a-c) \dots (a-h)]^2} \left[ \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \dots + \frac{1}{a-h} \right] = 0 (*).$$

III. *Exemple :*

$$a = 2, \quad b = 5, \quad c = 7, \quad d = 11.$$

On doit trouver :

$$\begin{aligned} &\left( -\frac{1}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) \frac{1}{(5 \cdot 5 \cdot 9)^2} + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) \frac{1}{(5 \cdot 2 \cdot 6)^2} \\ &+ \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{(5 \cdot 2 \cdot 4)^2} + \left( \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right) \frac{1}{(9 \cdot 6 \cdot 4)^2} = 0; \end{aligned}$$

(\*) *Nouvelles Annales* (1877, p. 555).

ou, successivement :

$$-\frac{29}{45} \cdot 4 \cdot 56 \cdot 16 - \frac{4}{5} \cdot 25 \cdot 81 \cdot 16 + \frac{9}{20} \cdot 81 \cdot 9 \cdot 56 + \frac{19}{56} \cdot 4 \cdot 25 \cdot 9 = 0,$$

$$-\frac{29}{5} \cdot 256 - 25 \cdot 27 \cdot 16 + \frac{9}{5} \cdot 81 \cdot 81 + 19 \cdot 25 = 0,$$

$$\frac{1}{5} (729 \cdot 81 - 29 \cdot 256) = 25 (27 \cdot 16 - 19),$$

$$51 \ 625 = 125 \cdot 415;$$

ce qui est exact.

IV. *Remarque.* — D'après les formules (7), (8) :

$$\frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \dots + \frac{1}{a-h}. \quad (9)$$

Soient  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \eta$  les racines de  $f'(a) = 0$ . On a

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \dots + \frac{1}{x-\eta};$$

et, pour  $x = a$  :

$$\frac{f''(a)}{f'(a)} = \frac{1}{a-\alpha} + \frac{1}{a-\beta} + \dots + \frac{1}{a-\eta}. \quad (10)$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \dots + \frac{1}{a-h} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{a-\alpha} + \frac{1}{a-\beta} + \dots + \frac{1}{a-\eta} \right]. \quad (11)$$

En d'autres termes :

*Si une courbe parabolique, représentée par*

$$y = (x-a)(x-b) \dots (x-h),$$

*rencontre en A, B, ... H l'axe des abscisses, et que A', B', ... G' soient les pieds des ordonnées des points pour lesquels la tangente est parallèle à cet axe, on a*

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \dots + \frac{1}{AH} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{AA'} + \frac{1}{AB'} + \dots + \frac{1}{AG'} \right].$$

V. *Autre remarque.* — De la relation (11), on déduit, par un changement de lettres et une sommation :

$$\left(\frac{1}{a-\alpha} + \frac{1}{a-\beta} + \dots + \frac{1}{a-\eta}\right) + \left(\frac{1}{b-\alpha} + \frac{1}{b-\beta} + \dots + \frac{1}{b-\eta}\right) + \dots = 0; \quad (12)$$

égalité presque évidente.

VI. Venons au théorème général (1), et prenons

$$f(x, y) = X_0 y^n + X_1 y^{n-1} + \dots + X_{m-2} y^2 + X_{m-1} y + X_m = 0. \quad (15)$$

Dans cette équation :  $X_0$  est une constante,  $X_1$  est un binôme, ...

$$X_m = (x - a)(x - b) \dots (x - g)(x - h).$$

Les valeurs de  $y'$ ,  $y''$ , répondant à  $y = 0$ , sont, évidemment, indépendantes de  $X_0$ ,  $X_1$ , ...  $X_{m-3}$ . Nous pouvons donc, à l'équation (15), substituer celle-ci :

$$X_{m-2} y^2 + X_{m-1} y + X_m = 0 (*). \quad (14)$$

Prenant les dérivées, on a

$$\begin{aligned} 2X_{m-2} y y' + X_{m-1} y' + X'_{m-2} y^2 + X'_{m-1} y + X'_m &= 0, \\ 2X_{m-2} (y y'' + y'^2) + X_{m-1} y'' + 2X'_{m-2} y y' + X'_{m-1} y' \\ + 2X'_{m-2} y y' + X'_{m-1} y' + X''_{m-2} y^2 + X''_{m-1} y + X''_m &= 0; \end{aligned}$$

(\*) De là résulte la proposition suivante :

Soient les courbes C, représentées par l'équation

$$X_m + X_{m-1} y + X_{m-2} y^2 + y^3 \varphi(x, y) = 0,$$

dans laquelle la fonction  $y^3 \varphi(x, y)$  est assujettie à la seule condition de s'annuler avec  $y$ .

Soit, d'autre part, la courbe D, représentée par

$$X_m + X_{m-1} y + X_{m-2} y^2 = 0.$$

1° Les courbes C et la courbe D ont les mêmes intersections avec l'axe des abscisses ;

2° En ces points d'intersection, les lignes C, D ont mêmes centres de courbure. (Novembre 1885.)

et, pour  $y = 0$  :

$$X_{m-1}y' + X'_m = 0, \quad (15)$$

$$X_{m-1}y'' + 2X_{m-2}y'^2 + 2X'_{m-1}y' + X''_m = 0. \quad (16)$$

On tire, de ces deux équations :

$$y' = -\frac{X'_m}{X_{m-1}}, \quad y'' = -\frac{2X_{m-2}(X'_m)^2 - 2X_{m-1}X'_mX'_{m-1} + (X_{m-1})^2X''_m}{(X_{m-1})^3},$$

$$\frac{y''}{y'^3} = \frac{2X_{m-2}(X'_m)^2 - 2X_{m-1}X'_mX'_{m-1} + (X_{m-1})^2X''_m}{(X'_m)^3}. \quad (17)$$

En conséquence :

*La somme des fractions (17), étendue aux  $m$  racines de  $X_m = 0$ , est nulle.*

VII. *Application.* — Soient :  $m = 5$ ,  $X_5 = x^5 - x$ ,  $X_2 = x^2$ ,  $X_1 = x + 1$ .

Au moyen de ces valeurs,

$$\frac{y''}{y'^3} = \frac{2(x+1)(5x^2-1)^2 - 4x^5(5x^2-1) + 6x^5}{(5x^2-1)^3}.$$

Les racines de  $X_5 = 0$  sont  $0$ ,  $+1$ ,  $-1$ . Ainsi :

$$\frac{2}{-1} + \frac{16-8+6}{8} + \frac{8-6}{8} = 0;$$

ce qui est exact.

**CXXXVI. — Sur la décomposition d'un cube  
en quatre cubes.**

(Février 1875) (\*).

I. Au moyen de l'identité d'Euler :

$$a^5 - b^5 = \frac{a^5(a^5 - 2b^5)^3}{(a^5 + b^5)^5} + \frac{b^5(2a^5 - b^5)^3}{(a^5 + b^5)^5}, \quad (1)$$

l'identité de Le Besgue :

$$6(c-1)^2 = c^5 + (2-c)^5 - 1 - 1 (**)$$

devient

$$6(c-1)^2 = c^5 \left( \frac{c^2-2}{c^3+1} \right)^5 + \left( \frac{2c^3-1}{c^3+1} \right)^5 + (2-c)^5 - 1; \quad (5)$$

à cause de

$$c^5 - 1 = c^5 \left( \frac{c^5-2}{c^5+1} \right)^5 + \left( \frac{2c^5-1}{c^5+1} \right)^5.$$

II. Si l'on suppose  $c$  compris entre  $\sqrt[5]{2}$  et 2, les trois premiers termes du second membre, dans l'identité (5), sont positifs. Afin de remplacer, par une somme de deux cubes positifs, le binôme  $\left( \frac{2c^5-1}{c^5+1} \right)^5 - 1$ , prenons

$$a = \frac{2c^5-1}{c^5+1}, \quad b = 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} & \left( \frac{2c^5-1}{c^5+1} \right)^5 - 1 \\ = & \left( \frac{2c^5-1}{c^5+1} \right)^5 \left[ \frac{(2c^5-1)^5 - 2(c^5+1)^5}{[(2c^5-1)^5 + (c^5+1)^5]} \right]^5 + \left[ \frac{2(2c^5-1)^5 - (c^5+1)^5}{[(2c^5-1)^5 + (c^5+1)^5]} \right]^5; \end{aligned}$$

(\*) Note publiée, en partie, dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. IV et V).

(\*\*) *Exercices d'Analyse numérique*, p. 148.

ou, après quelques réductions,

$$\left(\frac{2c^5-1}{c^5+1}\right)^5 - 1 = \left[\frac{2c^5-1}{c^5+1} \frac{2c^9-6c^6-1}{5c^3(c^6-c^3+1)}\right]^5 + \left[\frac{5c^9-9c^6+5c^3-1}{5c^3(c^6-c^3+1)}\right]^5. \quad (4)$$

Par conséquent, l'identité (5) est transformée en

$$\left. \begin{aligned} & 6(c-1)^2 - c^5 \left(\frac{c^3-2}{c^5+1}\right)^5 - (2-c)^5 \\ & = \left[\frac{2c^5-1}{c^5+1} \frac{2c^9-6c^6-1}{5c^3(c^6-c^3+1)}\right]^5 + \left[\frac{5c^9-9c^6+5c^3-1}{5c^3(c^6-c^3+1)}\right]^5. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Chassant les dénominateurs, puis écrivant  $x$  au lieu de  $c$ , on trouve

$$\left. \begin{aligned} & 27x^{12}(x^3-2)^5(x^6-x^3+1)^5 + 27x^9(2-x)^5(x^9+1)^5 \\ & + (2x^5-1)^5(2x^9-6x^6-1)^5 + (5x^9-9x^6+5x^3-1)^5(x^5+1)^5 \\ & = 162(x-1)^2x^9(x^9+1)^5. \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

Dans cette nouvelle identité, tous les cubes sont positifs, dès que  $x$  est compris entre  $\sqrt[5]{5,1}$  et 2 (\*).

III. *Remarques.* — 1° Posant

$$A = (2x^5-1)(2x^9-6x^6-1), \quad B = (5x^9-9x^6+5x^3-1)(x^5+1),$$

on trouve

$$A^5 + B^5 = 27x^9(7x^{27} - 56x^{24} + 90x^{21} - 150x^{18} + 171x^{15} - 144x^{12} + 84x^9 - 56x^6 + 9x^5 - 2).$$

2° Le polynôme entre parenthèses doit être divisible par  $(x^6-x^3+1)^5$ ; ce qui a lieu. Le quotient est

$$(x^3-2)(7x^6-x^3+1).$$

3° Par conséquent, le premier membre de l'équation

$$7z^9 - 56z^8 + 90z^7 - 150z^6 + 171z^5 - 144z^4 + 84z^3 - 56z^2 + 9z - 2 = 0$$

égale

$$(z^2-z+1)^3(7z^2-z+1)(z-2).$$

(\*)  $\sqrt[5]{5,1}$  surpasse la racine positive de l'équation

$$2z^5 - 6z^2 - 1 = 0.$$

IV. D'après la deuxième Remarque,

$$(2x^5 - 1)^5(2x^9 - 6x^6 - 1)^5 + (5x^9 - 9x^6 + 5x^5 - 1)^5(x^5 + 1)^5 \\ = 27x^9(x^6 - x^5 + 1)^5(7x^9 - 15x^6 + 5x^5 - 2).$$

Le dernier facteur est la même chose que

$$(2x^5 - 1)^5 - (x^5 + 1)^5.$$

Changeant  $x^5$  en  $x$ , on a donc, *identiquement* :

$$(2x - 1)^5(2x^5 - 6x^2 - 1)^5 + (5x^5 - 9x^2 + 5x - 1)^5(x + 1)^5 \left. \vphantom{(2x - 1)^5} \right\} \text{(B)} \\ + 27x^5(x^2 - x + 1)^5(x + 1)^5 = 27x^5(x^2 - x + 1)^5(2x - 1)^5.$$

V. L'identité (B) permet de *trouver un cube égal à la somme de trois cubes*. On en conclut, par exemple, les décompositions suivantes :

$$6^5 = 5^5 + 4^5 + 5^5, \\ 564^5 = 275^5 + 40^5 + 505^5, \\ 40\,290^5 = 50\,810^5 + 2\,941^5 + 55\,059^5.$$

VI. Dans (A), tous les facteurs sont des cubes, excepté  $162(x - 1)^2 = 27 \cdot 6(x - 1)^2$ . Pour que cette quantité devienne un cube (entier ou fractionnaire), il suffit de prendre

$$x = 1 + 6 \left( \frac{p}{q} \right),$$

la fraction étant comprise entre des limites convenables. Si, par exemple,  $x = \frac{7}{4}$ , on trouve

$$N^5 = A^5 + B^5 + C^5 + D^5,$$

en supposant :

$$N = 18 \cdot 545 \cdot 40\,615\,751 = 250\,761\,646\,674, \\ A = 5 \cdot 215 \cdot 2\,401 \cdot 99\,795 = 154\,545\,950\,485, \\ B = 5 \cdot 545 \cdot 40\,615\,751 = 41\,795\,607\,779, \\ C = 8 \cdot 511 \cdot 55\,267\,854 = 87\,746\,420\,752, \\ D = 4 \cdot 407 \cdot 157\,954\,851 = 224\,590\,497\,428.$$

Vérification :

$$N^5 = 15\ 768\ 244\ 272\ 452\ 554\ 919\ 519\ 605\ 755\ 070\ 024.$$

$$A^5 = 5\ 694\ 400\ 414\ 566\ 556\ 611\ 789\ 117\ 416\ 854\ 125,$$

$$B^5 = 75\ 001\ 150\ 890\ 984\ 050\ 552\ 405\ 582\ 190\ 159,$$

$$C^5 = 675\ 597\ 806\ 447\ 545\ 172\ 824\ 655\ 512\ 299\ 008,$$

$$D^5 = 11\ 528\ 544\ 920\ 547\ 669\ 084\ 155\ 429\ 441\ 746\ 752.$$

$$\text{Somme :} = 15\ 768\ 244\ 272\ 452\ 554\ 919\ 519\ 605\ 755\ 070\ 024.$$

VII. Au moyen de la substitution indiquée, l'identité (A) devient

$$\left. \begin{aligned} & (6p^2q)^5 [(6p^5 + q^5)^5 + q^9]^5 + (q^5)^5 [(6p^5 + q^5)^5 + q^9]^5 \\ & = (6p^5 + q^5)^5 [(6p^5 + q^5)^5 - 2q^9]^5 + (q^5 - 6p^5)^5 [(6p^5 + q^5)^5 + q^9]^5 \\ & + (q^5)^5 [2(6p^5 + q^5)^5 - q^9]^5. \end{aligned} \right\} \text{(C)}$$

Celle-ci détermine une infinité de nombres égaux, chacun, à la somme de deux cubes et à la somme de trois cubes.

Par exemple :

$$2\ 442^5 + 1\ 628^5 = 1\ 505^5 + 407^5 + 2\ 488^5,$$

$$5\ 714\ 705^5 + 255\ 297^5 = 2\ 825\ 600^5 + 117\ 650^5 + 5\ 529\ 550^5.$$

Addition. — (Juillet 1878.)

VIII. Si, dans l'identité, à peu près évidente :

$$(a + b + c)^5 - (b + c - a)^5 - (c + a - b)^5 - (a + b - c)^5 = 24\ abc, \text{ (D)}$$

on fait

$$a = 5\alpha^5, \quad b = 5\beta^5, \quad c = \gamma^5,$$

elle devient

$$\left. \begin{aligned} & (5\alpha^5 + 5\beta^5 + \gamma^5)^5 = (5\beta^5 + \gamma^5 - 5\alpha^5)^5 + (\gamma^5 + 5\alpha^5 - 5\beta^5)^5 \\ & + (5\alpha^5 + 5\beta^5 - \gamma^5)^5 + (6\alpha\beta\gamma)^5. \end{aligned} \right\} \text{(D)}$$

De celle-ci, on tire une infinité de solutions de

$$t^5 = x^5 + y^5 + z^5 + u^5.$$



Soient, par exemple :

$$\alpha = 5, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 4;$$

alors :

$$x = 7, \quad y = 121, \quad z = 41, \quad u = 144, \quad t = 169.$$

En effet,

$$169^5 = 7^5 + 121^5 + 41^5 + 144^5.$$

### CXXVII. — Sur un déterminant.

(Février 1875.)

Dans le tome XIII du *Bulletin de l'Académie de Belgique* (\*), j'ai donné cette proposition :

$$\left. \begin{aligned} & \det(A + M, B + N, C + P, \dots) = \det(A, B, C, D, \dots) \\ & + \det(M, B, C, D, \dots) + \dots + \det(A, N, C, D, \dots) \\ & + \det(M, N, P, Q, \dots). \end{aligned} \right\} (1)$$

Soient, comme cas particulier :

$$M = 0, \quad N = -A, \quad P = -A, \quad Q = -A, \dots$$

A cause des déterminants nuls, l'égalité (1) se réduit à

$$\det(A, B - A, C - A, \dots) = \det(A, B, C, \dots) (**). \quad (2)$$

(\*) Vers 1850.

(\*\*) Le Mémoire intitulé : *Remarques sur la méthode des moindres carrés* contient diverses applications de ce théorème. (Décembre 1885.)

**CXXVIII. — Remarque sur une identité connue.**

(Août 1875.)

Cette identité, cas particulier de celle que l'on doit à Euler (\*), est

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) = (aa' + bb' + cc')^2 + (ab' - ba')^2 + (bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2.$$

Si les nombres  $a, b$  sont proportionnels aux nombres  $a', b'$ , le second membre est composé de trois termes seulement. Ainsi, dans ce cas, le produit d'une somme de trois carrés, par une somme de trois carrés, est une somme de trois carrés.

Par exemple,

$$(5^2 + 5^2 + 4^2)(6^2 + 10^2 + 7^2) = 96^2 + 5^2 + 5^2 = 9\ 250 (**).$$

(\*) Voir les *Nouvelles Annales*, 1874, p. 522.

(\*\*) Notre *Théorie analytique des lignes à double courbure* contient (p. 24) une identité plus générale que celle d'Euler; savoir :

$$\begin{aligned} & \sum a^2 \sum (b\gamma - c\beta)^2 \sum a'^2 \\ &= \left[ a \sum a'(b\gamma - c\beta) + (b\gamma - c\beta) \sum aa' \right]^2 \\ &+ \left[ b \sum a'(b\gamma - c\beta) + (c\alpha - a\gamma) \sum aa' \right]^2 \\ &+ \left[ c \sum a'(b\gamma - c\beta) + (a\beta - b\alpha) \sum aa' \right]^2 \\ &+ \left[ \sum aa' \sum a\alpha - \sum \alpha a' \sum a^2 \right]^2. \end{aligned}$$

Les neuf quantités  $a, b, c, a', b', c', \alpha, \beta, \gamma$  sont, par exemple, des nombres entiers quelconques.

Cette relation permet de décomposer, en quatre carrés, le produit de trois facteurs égaux, chacun, à la somme de trois carrés.

**CXXIX. — Sur les lignes de courbure planes.**

(Juillet 1875.)

I. Je rappellerai, d'abord, ce théorème général (\*) :

Soient  $ab, a'b', a''b'', \dots$  les sections faites, dans une surface  $S$ , par des plans  $P, P', P'', \dots$  ayant une enveloppe  $E$ . Soient  $AB, A'B' \dots$  ce que deviennent ces lignes lorsque les plans mobiles, ayant roulé sur  $E$ , viennent se confondre avec un même plan  $\pi$ , tangent à  $E$ . Soient enfin  $CD, C'D', C''D'', \dots$  les trajectoires orthogonales de  $AB, A'B', A''B'', \dots$ . Si le plan  $\pi$  s'enroule autour de  $E$ , de manière à prendre les positions  $P, P', P'', \dots$ , les SURFACES D'ENROULEMENT  $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \dots$ , engendrées par  $CD, C'D', C''D'', \dots$  coupent  $S$  suivant des lignes  $cd, c'd', c''d'', \dots$ , trajectoires orthogonales de  $ab, a'b', a''b'', \dots$

II. Supposons que les courbes planes  $ab, a'b', a''b'', \dots$  soient des lignes de courbure de  $S$ . Alors les secondes lignes de courbure sont les trajectoires  $cd, c'd', c''d'', \dots$ , dont il vient d'être question. Comme je l'ai fait observer dans le petit Mémoire cité, la détermination de ces nouvelles courbes se réduit à la recherche des lignes planes  $CD, C'D', C''D'', \dots$  : le premier problème, appartenant à la *Géométrie de l'espace*, est ramené à un problème de *Géométrie plane*.

Si l'équation différentielle des courbes  $AB, A'B', \dots$ , rabattements des premières lignes de courbure, dans le plan  $\pi$ , est

$$Mdx + Ndy = 0,$$

et que l'on puisse intégrer

$$Mdy - Ndx = 0,$$

les surfaces d'enroulement, contenant les secondes lignes de courbure, seront connues.

(\*) *Bulletin de l'Académie* (février 1872). Voir aussi les *Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces* (MÉM. in-8°, 1873).

*Addition. — (Janvier 1886.)*

III. *Remarque.* — La solution précédente est en défaut lorsque S est une *surface d'enroulement*. En effet, dans ce cas, les lignes de courbure  $-ab, a'b', \dots$ , égales entre elles (\*), ont pour rabattement, sur le plan  $\pi$ , une courbe *unique* AB.

Mais, quand il en est ainsi, les *secondes lignes de courbure*  $cd, c'd', \dots$ , sont des *trajectoires orthogonales des plans* P, P', P'', ... (\*\*).

IV. Supposons que l'enveloppe E se réduise à un cylindre. Alors *chacune des courbes*  $cd, cd', \dots$  est la *développante d'une section droite de ce cylindre*. Les plans de ces lignes, au lieu d'être tangents à un cylindre, sont *parallèles entre eux*, contrairement à un théorème connu.

V. *Une proposition de Monge.* — On lit, dans l'*Application de l'Analyse à la Géométrie* (\*\*\*) :

« Mais un plan ne peut être susceptible d'une seule série de » positions, et être mobile d'une manière plus générale que de » rouler sur une surface développable quelconque : donc il n'y » a point d'autre surface qui jouisse de la même propriété ; » donc la surface engendrée est définie d'une manière complète » lorsque l'on énonce qu'une de ses lignes de courbure est » constamment plane. »

Le sens naturel de la dernière phrase est, semble-t-il, celui-ci : *Toute surface qui admet un système de lignes de courbure planes est une surface d'enroulement*. Mais cette proposition est fautive. L'illustre auteur a-t-il supposé, tacitement, que les lignes de courbure considérées sont égales ? Alors son théorème équivaldrait à celui-ci, dont la démonstration, si elle est possible, est peut-être difficile :

*Toute surface qui admet un système de lignes de courbure planes, égales entre elles, est une surface d'enroulement.*

(\*) *Remarques sur la théorie...*, p. 15.

(\*\*) *Loc. cit.*

(\*\*\*) Édition de Liouville, p. 550. Il s'agit de la surface dont toutes les normales sont tangentes à une même développable, c'est-à-dire d'une surface d'enroulement.

**CXXX. — Sur l'Analyse indéterminée  
du second degré.**

(Avril 1875.)

I. En supposant

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad xx' + yy' + zz' = 0,$$

nous avons trouvé (\*) l'identité :

$$(x'^2 + y'^2 + z'^2)[(yz'' - zy'')^2 + (zx'' - xz'')^2 + (xy'' - yx'')^2] \\ = (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2 + [(yz'' - zy'')x' + (zx'' - xz'')y' + (xy'' - yx'')z']^2.$$

Afin qu'elle soit homogène, posons :

$$x = \frac{f}{k}, \quad y = \frac{g}{k}, \quad z = \frac{h}{k};$$

c'est-à-dire

$$f^2 + g^2 + h^2 = k^2; \tag{1}$$

puis, en changeant de notation :

$$ff' + gg' + hh' = 0, \tag{2}$$

$$\left. \begin{aligned} &(f'^2 + g'^2 + h'^2)[(gh'' - hg'')^2 + (hf'' - fh'')^2 + (fg'' - gf'')^2] \\ &= k^2(f'f'' + g'g'' + h'h'')^2 \\ &+ [f'(g'h'' - h'g'') + g'(h'f'' - f'h'') + h'(f'g'' - g'f'')]^2. \end{aligned} \right\} \tag{A}$$

De là résulte le théorème suivant :

*Lorsque dix quantités entières satisfont aux conditions (1), (2), elles rendent identique l'égalité (A), dans laquelle le produit d'une somme de trois carrés, par une somme de trois carrés, se réduit à la somme de deux carrés.*

Soient, par exemple :

$$f = 6, \quad g = 5, \quad h = 2, \quad k = 7, \quad f' = 1, \quad g' = 2, \quad h' = -6, \\ f'' = -5, \quad g'' = -5, \quad h'' = -1.$$

(\*) Page 54.

On doit avoir

$$(1^2 + 2^2 + 6^2)(5^2 + 5^2 + 4^2) = 55^2 + 15^2,$$

ou

$$41 \cdot 54 = 4 \cdot 225 + 169 = 4 \cdot 594;$$

ce qui est exact.

II. L'identité (A) a la forme

$$(f'^2 + g'^2 + h'^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) = U^2 + V^2. \quad (B)$$

D'après une proposition connue, si les nombres  $U, V$  sont premiers entre eux, chacun des trinômes  $f'^2 + g'^2 + h'^2$ ,  $X^2 + Y^2 + Z^2$  est une somme de deux carrés. Nous avons donc ce théorème remarquable :

Si sept entiers  $f, g, h, k, f', g', h'$  satisfont aux conditions :

$$f^2 + g^2 + h^2 = k^2, \quad ff' + gg' + hh' = 0,$$

le trinôme  $f'^2 + g'^2 + h'^2$  est, ordinairement, la somme de deux carrés (\*).

III. Dans ce qui va suivre, nous pouvons supposer  $f, g, h$  premiers entre eux, et  $f', g', h'$  également premiers entre eux.

En effet, si  $f, g, h$  ont un facteur commun, ce facteur doit diviser  $k$ ; et alors on peut remplacer  $f, g, h, k$  par des sous-multiples de ces nombres. De même pour  $f', g', h'$ , à cause de la condition (2).

IV. De l'équation (2), on tire, successivement :

$$\begin{aligned} g^2g'^2 + h^2h'^2 &= f^2f'^2 - 2ghg'h', \\ (g^2 + h^2)(g'^2 + h'^2) &= f^2f'^2 + (hg' - gh')^2, \\ (g^2 + h^2)P &= k^2f'^2 + (hg' - gh')^2; \end{aligned} \quad (C)$$

$P$  représentant  $f'^2 + g'^2 + h'^2$ .

(\*) On verra, tout à l'heure, que la propriété énoncée peut subsister, même quand  $U$  et  $V$  ont des facteurs communs.

Le premier théorème peut donc être remplacé par celui-ci :  
 $f'^2 + g'^2 + h'^2$  est une somme de deux carrés, au moins  
 lorsque  $kf'$  et  $hg' - gh'$  sont premiers entre eux (\*).

V. Remarques. — 1° On a, simultanément :

$$(g^2 + h^2)P = k^3f'^2 + (hg' - gh')^2,$$

$$(h^2 + f^2)P = k^2g'^2 + (fh' - hf')^2,$$

$$(f^2 + g^2)P = k^2h'^2 + (gf' - fg')^2.$$

Ainsi :

$P$  est une somme de deux carrés, au moins lorsque  $kg'$  et  
 $fh' - hf'$  sont premiers entre eux; etc.

2° Le théorème ci-dessus (II) peut encore être énoncé  
 comme il suit :

Soient six entiers,  $f, g, h, f', g', h'$  satisfaisant à la condition

$$ff' + gg' + hh' = 0.$$

Si l'une des sommes

$$f^2 + g^2 + h^2, \quad f'^2 + g'^2 + h'^2$$

est un carré, l'autre est, ordinairement, une somme de deux  
 carrés.

3° Pour satisfaire à la condition (2),  $f, g, h$  étant donnés, il  
 suffit, comme on sait, de prendre

$$f' = g\gamma - h\beta, \quad g' = h\alpha - f\gamma, \quad h' = f\beta - g\alpha; \quad (5)$$

$\alpha, \beta, \gamma$  étant des entiers quelconques.

(\*) Soient

$$f = -1, \quad g = 2, \quad h = 2, \quad k = 5,$$

$$f' = 2, \quad g' = 3, \quad h' = -2;$$

valeurs qui satisfont aux égalités (1), (2). Il en résulte

$$kf' = 6, \quad hg' - gh' = 10;$$

puis

$$8P = 6^2 + 10^2, \quad P = 17 = 4^2 + 1^2.$$

Ainsi, comme nous l'avons annoncé,  $P$  peut être une somme de deux carrés,  
 même quand  $hg' - gh'$  et  $kf'$  ont un facteur commun.

Il résulte, de ces formules,

$$P = k^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (f\alpha + g\beta + h\gamma)^2. \quad (D)$$

Ainsi, sauf les cas d'exception signalés (s'ils existent), le second membre, somme de trois carrés, est aussi une somme de deux carrés.

VI. *Interprétation géométrique.* — Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  les coordonnées rectangulaires d'un point  $M$ ;  $\frac{f}{k}, \frac{g}{k}, \frac{h}{k}$  les cosinus directs d'une droite  $OA$ , passant par l'origine  $O$ . Il est visible que

$$\frac{P}{k^2} = \overline{MP}^2,$$

$P$  étant la projection de  $M$  sur  $OA$ .

Soit  $P = A^2 + B^2$ , ou

$$\frac{P}{k^2} = \left(\frac{A}{k}\right)^2 + \left(\frac{B}{k}\right)^2,$$

puis

$$\overline{MP}^2 = \left(\frac{A}{k}\right)^2 + \left(\frac{B}{k}\right)^2. \quad (16)$$

Cette égalité, dans laquelle  $A, B, k$  sont des nombres entiers, exprime que :

*La distance  $MP$  est l'hypoténuse d'un triangle dont les côtés de l'angle droit sont rationnels.*

VII. *Applications :*

$$1^\circ \quad f = 45, \quad g = 46, \quad h = 2, \quad k = 65;$$

$$\alpha = 5, \quad \beta = 4, \quad \gamma = 1;$$

$$f' = 58, \quad g' = -55, \quad h' = -58.$$

$$P = 58^2 + 55^2 + 58^2 = 1\,144 + 1089 + 5564 = 5\,897.$$

Le nombre 5 897, qui est premier, a la forme  $4\mu + 1$  : il est dans la somme de deux carrés. On trouve  $P = 76^2 + 11^2$ ; puis, au moyen de la formule (16) :

$$\overline{MP}^2 = \left(\frac{76}{65}\right)^2 + \left(\frac{11}{65}\right)^2.$$



$$2^{\circ} \quad f = 45, \quad g = 46, \quad h = 2, \quad k = 65;$$

$$\alpha = -1, \quad \beta = 5, \quad \gamma = 2;$$

$$P = 65^2(1^2 + 5^2 + 2^2) - (-45 + 250 + 4)^2$$

$$= 65^2 \cdot 50 - 191^2 = 82\,589 = 15 \cdot 6555$$

$$= (5^2 + 2^2)(75^2 + 52^2) = 155^2 + 242^2 = 285^2 + 50^2;$$

$$\overline{MP}^2 = \left(\frac{155}{65}\right)^2 + \left(\frac{242}{65}\right)^2 = \left(\frac{285}{65}\right)^2 + \left(\frac{50}{65}\right)^2;$$

etc. (\*).

VIII. *Remarque.* — Les entiers  $f, g, h, f', g', h'$  étant supposés différents de zéro :

1° La quantité  $(hg' - gh')^2 + k^2f'^2$ , égale à

$$(f'^2 + g'^2 + h'^2)(g^2 + h^2),$$

est un nombre composé;

2° Ce nombre est une somme de quatre carrés :  $(hg' - gh')^2, (ff')^2, (gf')^2, (hf')^2$ ;

3° Il se réduit à une somme de trois carrés si  $\frac{g'}{g} = \frac{h'}{h}$ ;

4° Il est décomposable en six carrés.

IX. *Autre Remarque.* — Plus généralement :

Soient six entiers  $x, y, z, x', y', z'$ , satisfaisant à la condition  $xx' + yy' + zz' = 0$ .

1° Le nombre  $(zy' - yz')^2 + (x^2 + y^2 + z^2)x'^2$  est composé;

2° Ce nombre, égal à  $(x'^2 + y'^2 + z'^2)(y^2 + z^2)$ , est la somme de six carrés.

(\*) A chaque décomposition de  $P$ , en deux carrés, correspond un triangle rectangle.

*Addition. — (Octobre 1885.)*

*X. Théorèmes d'Arithmétique. — 1° L'identité*

$$(x + y + 1)^2 + (x - y)^2 + 4 = x^2 + (x + 1)^2 + y^2 + (y + 1)^2 \quad (\text{E})$$

prouve que :

*Si un nombre impair, n, est la somme de deux carrés non consécutifs, n + 1 est la somme de quatre carrés, consécutifs deux à deux.*

2° Si l'on suppose  $y = x + 2$ , cette identité devient

$$(2x + 5)^2 + 5 = x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 5)^2. \quad (\text{F})$$

Par conséquent :

*Tout carré impair (supérieur à 9), augmenté de 5, est la somme de quatre carrés consécutifs; et réciproquement (\*).*

(\*) Dans le petit Mémoire intitulé : *Sur un développement de l'intégrale elliptique de première espèce...* (1886), on trouve divers théorèmes sur les progressions. Par exemple, celui-ci :

*Dans toute progression arithmétique, la somme des carrés de cinq termes consécutifs est une somme de quatre carrés.*

**CXXXI. — Sur un produit indéfini.**

(Novembre 1875.)

I. Soit

$$y = (1-x)(1-x^2)(1-x^3) \dots (*) \quad (1)$$

ou :

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}. y &= -\mathcal{L}. (1-x) - \mathcal{L}. (1-x^2) - \mathcal{L}. (1-x^3) - \dots \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots \\ &+ x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^6 + \frac{1}{4}x^8 + \dots \\ &+ x^3 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{5}x^9 + \frac{1}{4}x^{12} + \dots \\ &+ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

ou encore, par la sommation des séries *verticales* :

$$-\mathcal{L}. y = \frac{x}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{1}{5} \frac{x^3}{1-x^5} + \frac{1}{4} \frac{x^4}{1-x^4} + \dots \quad (2)$$

On tire, de cette égalité (2), en prenant les dérivées :

$$-\frac{y'}{y} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{x}{(1-x^2)^2} + \frac{x^3}{(1-x^5)^2} + \frac{x^3}{(1-x^4)^2} + \dots \quad (5)$$

On a aussi

$$-\frac{y'}{y} = \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} + \frac{5x^2}{1-x^5} + \frac{4x^5}{1-x^4} + \dots \quad (4)$$

(\*) Ce produit, considéré par Euler, donne lieu, comme on sait, à la série, très remarquable,

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \dots,$$

développement de  $y$  (*Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 7). L'expression de cette série, rapportée dans le *Calcul différentiel* de M. Bertrand, est inexacte.

Conséquemment,

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} + \frac{5x^2}{1-x^3} + \frac{4x^3}{1-x^4} + \dots \\ & = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{x}{(1-x^2)^2} + \frac{x^2}{(1-x^3)^2} + \frac{x^3}{(1-x^4)^2} + \dots \end{aligned} \right\} (5)$$

ou, ce qui est équivalent :

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x(1-2x^2)}{(1-x^2)^2} + \frac{x^2(2-5x^3)}{(1-x^3)^2} + \frac{x^3(3-4x^4)}{(1-x^4)^2} + \dots (6)$$

Pour vérifier l'égalité (5), il suffit de remplacer chaque fraction par son développement en série.

*Addition.* — (Janvier 1886.)

II. Si l'on suppose, avec Jacobi,

$$x = q = e^{-\pi \frac{\omega'}{\omega}},$$

on trouve

$$-\frac{y'}{y} = \frac{1}{24} + \frac{2k^2\omega^2}{5\pi^2} + \frac{5k'^2\omega'^2}{6\pi^2} - \frac{E_1(k)\omega}{\pi^4} (*) (7)$$

III. L'identité (6) peut être remplacée par celle-ci :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1-2q^2}{(1+q)^2} + \frac{q(2-5q^3)}{(1+q+q^2)^2} + \frac{q^3(4-5q^3)}{(1+q+q^2+q^3)^2} \\ & + \frac{q^5(4-5q^3)}{(1+q+q^2+q^3+q^4)^2} + \dots = 1. \end{aligned} \right\} (8)$$

Soit  $u_n$  le terme général du premier membre ; savoir

$$\frac{q^{n-1}[n-(n+1)q^{n+1}]}{(1+q+q^2+\dots+q^n)^2}.$$

En le développant suivant les puissances de  $q$ , on parvient aisément à l'identité :

$$\sum_1^\infty \left\{ q^{n-1} + (n-1)q^{2n} + (n-2)q^{3n+1} + (n-3)q^{4n+2} + (n-4)q^{5n+3} + \dots \right\} (9)$$

$$= 1 + 2q + 5q^2 + 4q^3 + \dots$$

(\*) *Recherches sur quelques produits...*, p. 92.

IV. On vient de voir que

$$\frac{1 - 2q^2}{(1 - q^2)^2} + \frac{2q - 5q^4}{(1 - q^3)^2} + \frac{5q^2 - 4q^6}{(1 - q^4)^2} + \frac{4q^3 - 5q^8}{(1 - q^5)^2} + \dots = \frac{1}{(1 - q)^2}.$$

D'autre part (\*) :

$$\frac{1 - 2q^5}{(1 - q^5)^2} + \frac{2q - 5q^6}{(1 - q^5)^2} + \frac{5q^2 - 4q^9}{(1 - q^7)^2} + \frac{4q^3 - 5q^{12}}{(1 - q^9)^2} + \dots = \frac{1}{(1 - q)^2}.$$

Par conséquent, il y a équivalence entre les séries composant les premiers membres.

### CXXXII. — Deux leçons de Probabilités (1877) (\*\*).

I. Règle de la moyenne arithmétique. — Supposons que l'on ait mesuré deux fois, trois fois, ...  $n$  fois une longueur inconnue,  $x$ , et que les résultats obtenus,  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , soient *très peu différents les uns des autres* (\*\*\*). Si toutes ces mesures sont également probables, c'est-à-dire si l'on n'a aucune raison d'en préférer une aux autres, on doit prendre

$$x = \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_n}{n}. \quad (1)$$

Soit d'abord le cas de deux observations, et, pour fixer les idées,  $k_1 < k_2$ . L'hypothèse la plus naturelle est que  $x$  est comprise entre  $k_1$  et  $k_2$ , et également éloignée de ces limites. Ainsi  $k_2 - x = x - k_1$ ; d'où

$$x = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

(\*) Note CXXIV, p. 128.

(\*\*) Elles font partie d'un Traité inédit.

(\*\*\*) Cette condition préliminaire, sur laquelle les Auteurs n'insistent pas assez, est absolument indispensable. Si trois observations, par exemple, ont donné environ 1 mètre, et une quatrième observation, 2 mètres, celle-ci doit être *annulée*.

Si l'y a trois observations, on peut les combiner deux à deux, en prenant

$$x = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad x = \frac{k_2 + k_3}{2}, \quad x = \frac{k_3 + k_1}{2}.$$

Les erreurs correspondantes seront

$$\varepsilon_3 = x - \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \varepsilon_2 = x - \frac{k_3 + k_1}{2}, \quad \varepsilon_1 = x - \frac{k_2 + k_3}{2}.$$

Si l'on veut que la somme de ces erreurs soit nulle, on a l'équation

$$5x - (k_1 + k_2 + k_3) = 0,$$

ou

$$x = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{5};$$

etc.

En général, d'après la formule (1),

$$(x - k_1) + (x - k_2) + \dots + (x - k_n) = 0.$$

Ainsi, le principe de la moyenne suppose nulle la somme des erreurs.

II. *Remarque.* — Cette démonstration, très élémentaire, est peu rigoureuse. On l'acceptera, je l'espère, après l'énumération suivante :

1° Dans la *Théorie des moindres carrés* (\*), Gauss, avant de démontrer (?) la formule (1), s'énonce ainsi, à propos d'un Lemme préliminaire :

« Si l'on objecte que cette convention est arbitraire et ne » semble pas nécessaire, nous en convenons volontiers. La » question qui nous occupe a, dans sa nature même, quelque » chose de vague et ne peut être bien précisée que par un » principe jusqu'à un certain point arbitraire. La détermination » d'une grandeur par l'observation peut se comparer, avec

(\*) Traduction de M. Bertrand (1857) (pp. 6 et 7).

» quelque justesse, à un jeu dans lequel il y aurait une perte à craindre et aucun gain à espérer. » ... « Mais quelle perte doit-on assimiler à une erreur déterminée ? C'est ce qui n'est pas clair en soi ; cette détermination dépend en partie de notre volonté... »

« Laplace a considéré la question d'une manière analogue... Cette hypothèse (\*), si nous ne nous faisons pas illusion, n'est pas moins arbitraire que la nôtre » ; etc., etc. (\*\*).

Ce n'est pas tout. Gauss dit encore : « La moyenne arithmétique des valeurs observées est la valeur la plus probable de cette quantité ( $x$ ), sinon en toute rigueur, du moins avec une grande approximation, de telle sorte que *le plus sûr soit toujours de s'y arrêter* » (p. 118). Le Géomètre rigoureux par excellence admet donc, comme axiome, une proposition *fausse* dans certains cas !

2° Encke a fait, pour le cas de trois quantités, une tentative de démonstration ; mais elle suppose que la valeur la plus probable est la même que si, au lieu des mesures  $k_1, k_2, k_3$ , on avait pris  $\frac{1}{2}(k_1 + k_2), \frac{1}{2}(k_1 + k_2), k_3$ .

Comme le fait observer M. De Tilly (\*\*\*), *cette hypothèse est, au fond, un postulatum nouveau.*

3° Dans son *Traité élémentaire du calcul des erreurs* (iv), M. Faà de Bruno s'exprime en ces termes :

« La valeur la plus plausible... sera celle dont les différences avec les valeurs observées seront les plus petites. Si cela est, il faudra aussi que la somme de ces différences prises en valeur absolue soit la plus petite possible. Pour réaliser cette condition algébriquement, nous dirons (*sic*) que la somme des carrés des erreurs doit être un minimum. »

Autant de mots, autant ... d'erreurs.

(\*) Celle de Laplace.

(\*\*) Ces raisonnements font songer à ceux qu'emploie Sganarelle (*Le Médecin malgré lui* ; acte II, scène VI).

(\*\*\*) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. I, p. 145.

(iv) Page 15.

Soient, pour fixer les idées,  $OA = 5$ ,  $OB = 6$ ,  $OC = 8$ . Soit à déterminer le point  $M$  par la condition

$$AM + DM + CM = \min.;$$



les distances étant prises en *valeurs absolues*. A cause de  $BM + CM = BC = 2$ , le point  $M$ , *supposé situé entre B et C*, doit être le plus près possible de  $A$  : il doit se confondre avec  $B$ . La formule qui répond au problème de  $M$ . Faà est donc  $x = 6$ , et non  $x = \frac{5+6+8}{5}$ .

En outre, si l'on veut que  $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2$  soit un minimum, on trouve

$$(x - 5) + (x - 6) + (x - 8) = 0.$$

4° Meyer, mon savant prédécesseur, *admet* que « la valeur » la plus avantageuse (*sic*) du résultat d'un grand nombre d'observations est celle que l'on déduit de leur moyenne arithmétique (\*) ».

5° M. H. Laurent fait un véritable entassement d'intégrales (\*\*).

6° D'après M. De Tilly, excellent juge : « le principe de la » moyenne est établi ... lorsque le nombre des données est » *infini* et lorsqu'il est égal à deux ... il est impossible de » démontrer ... le principe de la moyenne entre trois quan- » tités (\*\*\*) ».

7° Une *Théorie analytique des moindres carrés*, due à M. Biver, est basée sur la proposition suivante, véritable non-sens :

La dérivée de  $\varphi(x^2 + y^2 + z^2 + \dots)$  est

$$\varphi'(x^2 + y^2 + z^2 + \dots) \times (2x + 2y + 2z + \dots) \text{ (iv)}.$$

(\*) *Calcul des probabilités*, publié par M. Folie, p. 215.

(\*\*) *Traité du calcul des probabilités*, pp. 144 et suiv.

(\*\*\*) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. I, p. 144.

(iv) *Journal de Liouville*, 1855, p. 177.



III. *Méthode des moindres carrés* (\*). — Soit P la probabilité du concours des erreurs  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_\mu$ . Après avoir démontré (?) la formule

$$P = A \cdot h^\mu \pi^{-\frac{\mu}{2}} e^{-h^2 \Sigma \Delta^2},$$

Gauss en déduit, comme il suit, la *règle des moindres carrés* :  
 « Il faut, pour que le produit P devienne maximum, que la »  
 » somme

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \dots$$

» devienne minimum. Donc le système de valeurs des inconnues,  
 » le plus probable, correspond au cas où les carrés des diffé-  
 » rences ... donnent la somme la plus petite possible, pourvu  
 » que toutes les observations soient également présumées pré-  
 » cises. » (*sic*) (\*\*)

Voici une autre manière, très simple, d'arriver à la même conclusion.

Supposons que des éléments inconnus,  $x, y, z, \dots$  soient liés, à des paramètres  $a, b, c, \dots p, a', b', c', \dots p', \dots$ , par des équations de la forme

$$V = ax + by + cz + \dots + p = 0.$$

Si les valeurs de ces paramètres étaient données exactement, les équations

$$V = 0, \quad V' = 0, \quad V'' = 0, \dots \quad (1)$$

en nombre égal à celui des inconnues  $x, y, z, \dots$  détermineraient celles-ci.

De plus, on pourrait remplacer le système (1) par l'équation *unique*

$$\sum V^2 = 0. \quad (2)$$

Au lieu de cela, et quelles que soient les valeurs adoptées pour  $x, y, z, \dots$ , les seconds membres des équations (1) sont

(\*) On devrait dire : *de la moindre somme des carrés*.

(\*\*) *Méthode...*, p. 121.

des quantités  $w, w', w'', \dots$ , très petites si les observations ont été bien faites : ces quantités sont les *erreurs* provenant des observations.

L'équation (2) est remplacée par

$$\sum V^2 = \sum w^2.$$

La quantité  $\sum w^2$  ne pouvant être nulle, il est *naturel* de disposer des valeurs de  $x, y, z, \dots$  de manière qu'elle soit la plus petite possible. On est ainsi conduit au principe de la *moindre somme des carrés des erreurs*, découvert, presque simultanément, par Legendre et par Gauss (\*).

### CXXXIII. — Sur les normales à certaines courbes.

(Novembre 1875.)

I. PROBLÈME (\*\*). — Sur la tangente MP à une courbe donnée, AMB, on prend  $MP = \varphi(s)$ ,  $s$  désignant l'arc AM, compté à partir d'un point fixe A. Le lieu du point P est une ligne PP'P''... On propose de construire la normale PN, située dans le plan osculateur à la courbe donnée.

$x, y, z$  étant les coordonnées de M, les coordonnées de P sont, avec les notations ordinaires :

$$x_1 = x + a\varphi, \quad y_1 = y + b\varphi, \quad z_1 = z + c\varphi. \quad (1)$$

Par suite :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{ds} &= a(1 + \varphi') + a'\varphi, \\ \frac{dy_1}{ds} &= b(1 + \varphi') + b'\varphi, \\ \frac{dz_1}{ds} &= c(1 + \varphi') + c'\varphi. \end{aligned} \right\} (2)$$

(\*) Pour les développements, voir nos *Remarques sur la méthode des moindres carrés*.

(\*\*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Les premiers membres sont *proportionnels* aux cosinus directs de la tangente PS; donc l'équation du plan normal, en P, à la courbe PP', est

$$\sum (X - x_1)[a(1 + \varphi') + a'\varphi] = 0. \quad (5)$$

Les équations de la *normale principale* MC, à la courbe donnée, sont (\*)

$$\frac{X - x}{a'} = \frac{Y - y}{b'} = \frac{Z - z}{c'}. \quad (4)$$

Les valeurs de X, Y, Z, satisfaisant aux équations (5), (4), sont les coordonnées du point N où la normale PN rencontre MC. Si l'on fait  $MN = p$ , on a, par les proportions (4) :

$$X - x = pa'_\rho, \quad Y - y = pb'_\rho, \quad Z - z = pc'_\rho (**). \quad (5)$$

On a aussi

$$X - x_1 = (X - x) - (x_1 - x) = pa'_\rho - a\varphi.$$

Donc l'équation (5) devient

$$\sum (pa'_\rho - a\varphi)[a(1 + \varphi') + a'\varphi] = 0,$$

ou

$$\frac{p\varphi}{\rho} - \varphi(1 + \varphi') = 0,$$

ou

$$p = \rho(1 + \varphi'). \quad (6)$$

II. Soit P<sub>1</sub> le point symétrique de P, relativement à M; soit p<sub>1</sub> la distance MN<sub>1</sub> :

$$p_1 = \rho(1 - \varphi').$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{2}(p + p_1) = \rho. \quad (7)$$

(\*) Voir notre *Théorie analytique des lignes à double courbure*, p. 9.

(\*\*) A cause de

$$MC = \rho = \frac{1}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

Ainsi, le centre de courbure,  $C$ , est le milieu du segment déterminé, sur la normale principale, par les normales  $MN$ ,  $MN_1$  (\*).

III. Supposons que la distance  $MP$  soit constante, auquel cas la courbe  $PP'P'' \dots$  est une sorte de *parallèle* à la courbe donnée (\*\*).

Alors  $\varphi' = 0$ , et

$$p = \rho. \quad (8)$$

Donc, si une droite  $MPQR$  glisse tangentiellement à une courbe donnée  $AMB$ , et que  $PP'$ ,  $QQ'$ ,  $RR'$ , ... soient les trajectoires de ses différents points, les plans normaux en  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , ... à toutes ces trajectoires, passent au centre de courbure  $C$ , de  $AMB$ . Autrement dit, ces plans normaux se coupent suivant la droite polaire  $CK$  (\*\*\*) .

IV. D'après les formules (2) et (6) :

$$\sum \left( \frac{dx_1}{ds} \right)^2 = (1 + \varphi')^2 + \frac{\varphi^2}{\rho^2} = \frac{p^2 + \varphi^2}{\rho^2} = \frac{n^2}{\rho^2}; \quad (9)$$

$n$  désignant la longueur du segment  $PN$  de la normale.

Les cosinus directifs de cette droite sont donc

$$\frac{\rho}{n} [a(1 + \varphi') + a'\varphi], \quad \frac{\rho}{n} [b(1 + \varphi') + b'\varphi], \quad \frac{\rho}{n} [c(1 + \varphi') + c'\varphi].$$

Par suite, si  $\theta$  est l'angle des deux tangentes :

$$\cos \theta = \frac{\rho}{n} (1 + \varphi'),$$

ou

$$\cos \theta = \frac{p}{n} = \cos MCP. \quad (10)$$

(\*) Dès 1857, M. Mannheim a trouvé, pour les courbes planes, des théorèmes analogues à celui-ci. (Voir les *Nouvelles Annales*, les *Annali matematica*, etc.)

(\*\*) Nous l'appellerons *pseudo-parallèle*.

(\*\*\*) Propriété connue, évidente par la théorie des axes instantanés.

En effet,  $PS$  est dans le plan osculateur  $PMC$  (\*), et les angles  $TPS$ ,  $MCP$  ont les côtés respectivement perpendiculaires.

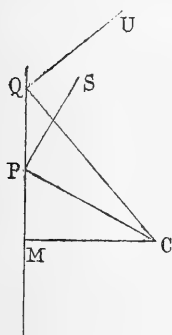
De plus, par la formule (9) :

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{n}{\rho}. \quad (11)$$

*Addition.* — (Janvier 1886.)

V. Considérons la développable  $S$ , ayant  $AMB$  pour arête de rebroussement. Le plan tangent en  $P$ , à  $S$ , contient la tangente  $PS$  à la courbe  $PP'$ . D'ailleurs ce plan est osculateur, en  $M$ , à l'arête de rebroussement. Donc celui-ci contient  $PS$ .

VI. En revenant au cas particulier de  $PM = \text{const.}$ , projetons la figure sur le plan osculateur  $PMC$ . Les tangentes  $PS$ ,  $QU$ , aux pseudo-parallèles, sont perpendiculaires, respectivement, à  $CP$ ,  $CQ$ , ... Donc, d'après un théorème connu, l'enveloppe de ces droites, c'est-à-dire l'antipodaire de  $MP$ , est la parabole qui a  $M$  pour sommet,  $C$  pour foyer.



VII. *Courbure de la pseudo-parallèle.* —

On a

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{ds_1^6} \sum (dx_1 d^2 y_1 - dy_1 d^2 x_1)^2, \quad (12)$$

quelle que soit la variable indépendante. Supposons que ce soit  $s$ . Alors, si nous désignons  $MP$  par  $k$  :

$$dx_1 = (a + a'k)ds, \quad dy_1 = (b + b'k)ds,$$

$$d^2 x_1 = (a'' + a''k)ds^2, \quad d^2 y_1 = (b'' + b''k)ds^2,$$

$$dx_1 d^2 y_1 - dy_1 d^2 x_1 = [(ab' - ba'') + (ab'' - ba'')k + (a'b'' - b'a'')k^2] ds^3.$$

(\*) Voir le paragraphe V.

A cause de  $\frac{ds}{ds_1} = \frac{\rho}{n}$ , la formule (12) devient

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \left(\frac{\rho}{n}\right)^6 S, \quad (15)$$

pourvu que l'on fasse

$$\begin{aligned} S = & \sum (ab' - ba')^2 + k^2 \sum (ab'' - ba'')^2 + k^4 \sum (a'b'' - b'a'')^2 \\ & + 2k \sum (ab' - ba')(ab'' - ba'') + 2k^2 \sum (ab' - ba')(a'b'' - b'a'') \\ & + 2k^5 \sum (ab'' - ba'')(a'b'' - b'a''). \end{aligned}$$

Or (\*) :

$$\sum (ab' - ba')^2 = \frac{1}{\rho^2}, \quad \sum (ab'' - ba'')^2 = \frac{1}{r^2 \rho^4} (\rho^2 + r^2 \rho'^2),$$

$$\sum (a'b'' - b'a'')^2 = \frac{1}{\rho^4} \left( \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2} \right),$$

$$\sum (ab' - ba')(ab'' - ba'') = - \sum \frac{n \rho h + nr \rho'}{\rho^2 r \rho^2} (**) = - \frac{\rho'}{\rho^3},$$

$$\sum (ab' - ba')(a'b'' - b'a'') = \sum \frac{n}{\rho} \cdot \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{c}{r} + \frac{n}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho^4},$$

$$\sum (ab'' - ba'')(a'b'' - b'a'') = - \sum \frac{\rho h + nr \rho'}{r \rho^2} \left( \frac{c}{r} + \frac{n}{\rho} \right) \frac{1}{\rho^2} = - \frac{\rho'}{\rho^5}.$$

Ainsi,

$$S = \frac{1}{\rho^2} - 2k \frac{\rho'}{\rho^5} + \frac{k^2}{\rho^4} \left( 2 + \frac{\rho^2}{r^2} + \rho'^2 \right) - 2 \frac{k^3 \rho'}{\rho^8} + \frac{k^4}{\rho^4} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2} \right);$$

ou, après quelques réductions faciles,

$$S = \frac{1}{\rho^6} \left[ (n^2 - k \rho \rho')^2 + \frac{k^2 n^2 \rho'^2}{r^2} \right].$$

La formule demandée est donc

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{n^6} \left[ (n^2 - k \rho \rho')^2 + \frac{k^2 n^2 \rho'^2}{r^2} \right]. \quad (14)$$

(\*) *Théorie analytique des lignes à double courbure*, pp. 15 et suiv.

(\*\*) Ici,  $n$  est un *cosinus directif*.

VIII. *Remarques.* — 1° Si l'on suppose  $r$  infini, auquel cas la courbe donnée est plane, la formule (14) se réduit à

$$\frac{1}{\rho_1} = \pm \frac{n^2 - k\rho\rho'}{n^3}. \quad (15)$$

2° Nous venons de rappeler que :

$$\sum (ab' - ba')^2 = \frac{1}{\rho^2}, \quad \sum (a'b'' - b'a'')^2 = \frac{1}{\rho^4} \left( \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2} \right).$$

D'un autre côté (\*) :

$$\sum (ab' - ba')c'' = \frac{1}{r\rho^2}.$$

Donc, par l'élimination de  $r$  et de  $\rho$  :

$$\sum (a'b'' - b'a'')^2 = \left[ \sum (ab' - ba')^2 \right]^3 + \left[ \sum (ab' - ba')c'' \right]^2. \quad (16)$$

Dans cette *identité*,  $a, b, c$  sont des fonctions d'une variable  $s$ , vérifiant la condition

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

5° Soit  $R$  le rayon de courbure, en  $C$ , de la *développée* de  $AMB$ . On sait que  $R = \rho\rho'$ . La formule (14), si l'on adopte le signe  $+$ , devient

$$\rho_1 = \frac{n^3}{n^2 - kR}.$$

On conclut, de celle-ci :

$$\frac{\rho_1}{\rho_1 - n} = \frac{\frac{n^2}{k}}{R},$$

puis l'élégante construction due à M. Nicolaïdès (*Nouvelles Annales*, 1866, p. 585).

(\*) *Théorie analytique...*, p. 16.

**CXXXIV. — Une intégrale d'équation.**

(Juin 1874) (\*).

Soit l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 1}} = 0, \quad (1)$$

dont l'intégrale *immédiate* est

$$\zeta^2(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \zeta^2(y + \sqrt{y^2 + 1}) = \zeta^2(\mu + \sqrt{\mu^2 + 1}),$$

ou

$$(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = \mu + \sqrt{\mu^2 + 1}. \quad (2)$$

Comme facteur *intégrant*, on peut prendre

$$\lambda = xy + \sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}. \quad (5)$$

En effet,

$$\frac{d\left(\frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)}{dy} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}} = \frac{d\left(\frac{\lambda}{\sqrt{y^2 + 1}}\right)}{dx}.$$

De plus, le premier membre de la proposée est une différentielle exacte. Donc, si l'on remplace  $\lambda$  par  $-c$ , et que l'on isole le radical, l'intégrale *médiate*, mise sous forme rationnelle, est

$$x^2 + y^2 + 2cxy + 1 - c^2 = 0. \quad (4)$$

(\*) Introduction au théorème d'Euler, sur l'intégrale *algébrique* de

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 x}} + \frac{dy}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 y}} = 0.$$



**CXXXV. — Sur les surfaces orthogonales.**

(Juin 1874) (\*).

I. PROBLÈME. — Déterminer toutes les surfaces  $\Sigma$  qui coupent orthogonalement, les surfaces  $S$  représentées par

$$F(x, y, z) = c. \quad (1)$$

Cherchons d'abord les trajectoires orthogonales des surfaces  $S$ .

Soit  $Pdx + Qdy + Rdz$  la différentielle de  $F(x, y, z)$ . Les équations différentielles du problème sont :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \quad (2)$$

Les surfaces  $S$ , se succédant d'une manière continue, admettent une infinité de trajectoires orthogonales : donc les équations simultanées (2) sont toujours intégrables. Si

$$f(x, y, z) = \alpha, \quad f_1(x, y, z) = \beta \quad (3)$$

en sont les intégrales, celles-ci représentent toutes les trajectoires cherchées, et

$$f(x, y, z) = \varphi[f_1(x, y, z)] \quad (4)$$

représente toutes les surfaces  $\Sigma$ ,  $\varphi$  étant une fonction arbitraire (\*\*).

(\*) Un extrait de cette Note a paru dans les *Comptes rendus* (séance du 6 juillet 1874). La méthode est celle dont j'ai fait usage dans le petit Mémoire intitulé : *Recherche des lignes de courbure de la surface lieu des points dont la somme des distances à deux droites qui se coupent est constante* (ACADÉMIE DE BELGIQUE, SAVANTS ÉTRANGERS, t. XXXII).

(\*\*) De là résulte que si, comme on l'a supposé,

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

est intégrable, l'intégration de

$$Pp + Qq = R$$

équivalait au problème proposé.

II. PROBLÈME. — 1° Reconnaître si les surfaces  $S$ , représentées par l'équation (1), appartiennent à un système orthogonal triple ;

2° Trouver, si elles existent, les surfaces  $\Sigma_1, \Sigma_2$  qui, avec les surfaces  $S$ , constituent le système.

Attribuons à la fonction  $\varphi$  deux formes particulières,  $\psi$  et  $\pi$  : si les surfaces correspondantes sont orthogonales, le problème sera résolu. La condition d'orthogonalité est

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2 - \left[\frac{df}{dx}\frac{df_1}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{df_1}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{df_1}{dz}\right](\psi' + \pi') \\ + \left[\left(\frac{df_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df_1}{dz}\right)^2\right]\psi'\pi' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Dans cette équation :

$$\psi' = \psi'[f_1(x, y, z)] = \psi'(\beta), \quad \pi' = \pi'[f_1(x, y, z)] = \pi'(\beta). \quad (6)$$

En chaque point des lignes de courbure de  $S$ , déterminées par les surfaces  $\Sigma$ , on a

$$f(x, y, z) = \psi(\beta), \quad f_1(x, y, z) = \beta. \quad (7)$$

Si donc, entre les équations (5) et (6), on élimine deux des trois variables  $x, y, z$ , l'équation résultante devra être *identique*. En exprimant les conditions nécessaires pour que la troisième variable disparaisse ainsi, en même temps que les deux autres, on obtiendra deux équations différentielles, entre  $\psi, \pi$  et  $\beta$  (\*).

III. PROBLÈME. — Quelles doivent être la forme d'une fonction  $F(a, b, x)$ , et les valeurs des paramètres  $a, b$ , pour que l'on ait, *identiquement*,

$$F(a, b, x) = 0 \text{ ? (**).}$$

1° La fonction  $F$ , nulle, quelles que soient les valeurs attri-

(\*) Ce qui précède est tiré du Mémoire. J'ai conclu, de cette méthode, divers systèmes orthogonaux.

(\*\*) Si l'on remplace  $a, b, x$  par  $x, y, z$ , le problème peut être énoncé ainsi : Trouver l'équation des surfaces qui contiennent des droites parallèles à l'axe  $Oz$ .

buées à  $x$ , doit, en particulier, être nulle pour  $x = 0$ . Ainsi, déjà, les paramètres satisfont à la condition

$$F(a, b, 0) = 0.$$

2° Soit

$$y = F(a, b, x) - F(a, b, 0).$$

Cette fonction  $y$ , *identiquement nulle* pour  $x = 0$ , doit être toujours nulle, c'est-à-dire *constante*. Comme le premier terme est variable et le second terme constant, la condition imposée est absurde, à moins que  $y$  ait la forme  $\varphi(a, b) X$ , et que les paramètres vérifient l'équation  $\varphi(a, b) = 0$  (\*).

3° De

$$F(a, b, x) - F(a, b, 0) = \varphi(a, b) X,$$

on conclut que

$$F(a, b, x) = A + \lambda X,$$

les quantités  $A$ ,  $\lambda$  étant indépendantes de  $x$ , et la fonction  $X$  n'étant pas infinie pour  $x = 0$ .

En outre, les valeurs des paramètres sont données par les équations

$$A = 0, \quad \lambda = 0.$$

IV. Revenons aux équations (3), (5); et supposons, comme précédemment, que les valeurs de  $x$ ,  $y$ , tirées des deux premières, soient substituées dans la troisième. Si le système orthogonal existe, on devra pouvoir disposer des fonctions  $\varphi$ ,  $\pi$ , de manière à faire disparaître  $z$ . D'après le dernier paragraphe, le résultat de la substitution a la forme  $A + \lambda Z$ . Et comme les quantités  $\psi' + \pi'$ ,  $\psi'\pi'$  sont indépendantes de  $z$ , on a, séparément :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2 &= A + \lambda Z, \\ \frac{df}{dx} \frac{df_1}{dx} + \frac{df}{dy} \frac{df_1}{dy} + \frac{df}{dz} \frac{df_1}{dz} &= B + \mu Z, \\ \left(\frac{df_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df_1}{dz}\right)^2 &= C + \nu Z. \end{aligned} \right\} (8)$$

(\*) La fonction  $X$  ne doit pas devenir infinie pour  $x = 0$ . Elle peut contenir  $a$  et  $b$ .

Nous croyons donc pouvoir énoncer ce théorème :

Soient

$$f(x, y, z) = \alpha, \quad f_1(x, y, z) = \beta$$

les équations d'une infinité de lignes, trajectoires orthogonales des surfaces  $S$  représentées par  $F(x, y, z) = c$ . Pour que ces surfaces puissent faire partie d'un système orthogonal triple, les dérivées partielles  $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \dots$  doivent, après l'élimination de  $x, y$ , satisfaire aux équations (8), dans lesquelles les quantités  $A, B, C, \lambda, \mu, \nu$  sont indépendantes de  $z$  (\*).

V. Au moyen des valeurs (8), l'équation (5) devient

$$(A + \lambda Z) - (B + \mu Z)(\psi' + \pi') + (C + \nu Z)\psi'\pi' = 0.$$

Cette équation de condition, devant avoir lieu quel que soit  $z$ , se décompose en

$$A - B(\psi' + \pi') + C\psi'\pi' = 0, \quad \lambda - \mu(\psi' + \pi') + \nu\psi'\pi' = 0.$$

Par conséquent,  $\psi'$  et  $\pi'$  sont les deux valeurs de  $\frac{dz}{d\beta}$ , satisfaisant à l'équation

$$(B\nu - C\mu) \left( \frac{dz}{d\beta} \right)^2 + (C\lambda - A\nu) \left( \frac{dz}{d\beta} \right) + A\mu - B\lambda = 0, \quad (9)$$

du premier ordre et du second degré. Une équation du premier ordre ayant toujours une intégrale, il s'ensuit que : Si les conditions (8) sont remplies, il existe deux séries de surfaces  $\Sigma_1, \Sigma_2$ , formant, avec les surfaces  $S$ , un système triplement orthogonal. Les conditions (8), nécessaires, sont donc suffisantes (\*\*).

(\*) Quand l'équation donnée a la forme

$$X + Y + Z = 0,$$

les égalités (8) conduisent, assez rapidement, aux conditions

$$X'X'' = 2(X'' - a)(X' - b), \quad Y'Y'' = 2(Y'' - a)(Y' - b), \\ Z'Z'' = 2(Z'' - a)(Z' - b),$$

trouvées par M. Serret (*Journal de Liouville*, t. XII).

(\*\*) Les doutes exprimés dans la Note insérée aux *Comptes rendus*

## VI. Application.

$$(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) = c \sin z,$$

ou

$$\mathcal{L} \cdot (e^x + e^{-x}) + \mathcal{L} \cdot (e^y + e^{-y}) - \mathcal{L} \cdot \sin z = \mathcal{L} \cdot (c). \quad (1)$$

Donc

$$P = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad Q = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}, \quad R = -\frac{\cos z}{\sin z};$$

puis

$$\frac{dx}{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)} = \frac{dy}{\left(\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}\right)} = -\frac{dz}{\left(\frac{\cos z}{\sin z}\right)}. \quad (2)$$

Les intégrales sont

$$\frac{e^x - e^{-x}}{\cos z} = \alpha, \quad \frac{e^y - e^{-y}}{\cos z} = \beta. \quad (5)$$

Par suite :

$$\frac{df}{dx} = \frac{e^x + e^{-x}}{\cos z}, \quad \frac{df}{dy} = 0, \quad \frac{fd}{dz} = \frac{(e^x - e^{-x}) \sin z}{\cos^2 z},$$

$$\frac{df_1}{dx} = 0, \quad \frac{df_1}{dy} = \frac{e^y + e^{-y}}{\cos y}, \quad \frac{df_1}{dz} = \frac{(e^y - e^{-y}) \sin z}{\cos^2 z};$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2(\cos^2 z - \sin^2 z)}{\cos^4 z}$$

$$= \frac{\alpha^2 \cos^2 z + 2(1 + \cos^2 z - \sin^2 z)}{\cos^4 z} = \frac{\alpha^2 + 4}{\cos^2 z},$$

$$\frac{df}{dx} \frac{df_1}{dx} + \frac{df}{dy} \frac{df_1}{dy} + \frac{df}{dz} \frac{df_1}{dz} = \frac{\alpha \beta \sin^2 z}{\cos^2 z},$$

$$\left(\frac{df_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df_1}{dz}\right)^2 = \frac{\beta^2 + 4}{\cos^2 z}.$$

(6 juillet 1874) subsistent encore (février 1886); et je suis loin d'être satisfait de la démonstration employée dans le paragraphe IV. Néanmoins, comme toutes les applications que j'ai essayées, du théorème énoncé, m'ont conduit à des résultats exacts, je le sou mets à l'appréciation des Géomètres.

Ces valeurs, comparées à

$$A + \lambda Z, \quad B + \mu Z, \quad C + \nu Z,$$

donnent :

$$A = \alpha^2 + 4, \quad \lambda = \alpha^2 + 4, \quad B = 0, \quad \mu = \alpha\beta, \quad C = \beta^2 + 4, \\ \nu = \beta^2 + 4, \quad Z = \operatorname{tg}^2 z.$$

L'équation (9) se réduit à

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 4}} = \pm \frac{d\beta}{\sqrt{\beta^2 + 4}}.$$

L'intégrale de celle-ci est (\*)

$$\alpha^2 + \beta^2 \pm h\alpha\beta + 4 - h^2 = 0.$$

Par conséquent, les surfaces  $\Sigma_1, \Sigma_2$  sont représentées par

$$(e^x - e^{-x})^2 + (e^y - e^{-y})^2 + h(e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y}) + (4 - h^2)\cos^2 z = 0, \\ (e^x - e^{-x})^2 + (e^y - e^{-y})^2 - g(e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y}) + (4 - g^2)\cos^2 z = 0.$$

Elles constituent, avec les surfaces données, un système triplement orthogonal.

VII. *Cas particulier remarquable.* Supposons que l'équation donnée ait la forme

$$F(x) + F(y) + F(z) = c (**). \quad (10)$$

Considérons la ligne (inconnue) dont les équations seraient

$$f(x) = f(y) = f(z), \quad (11)$$

puis les surfaces  $\Sigma$  contenant cette ligne. Leur équation est

$$f(x) - f(z) + \lambda[f(y) - f(z)] = 0. \quad (12)$$

(\*) Voir la *Note CXXXIV*, p. 164.

(\*\*) Chacune des surfaces  $S$ , représentée par cette équation, est située de la même manière relativement aux trois plans coordonnés. Si, par exemple,

$$F(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

$S$  est une surface de révolution autour de la droite isogonale.

La condition d'orthogonalité de  $S$  et de  $\Sigma$  est

$$F'(x)f'(x) + \lambda F'(y)f'(y) - (1 + \lambda)F'(z)f'(z) = 0.$$

Elle devient identique si l'on prend

$$f'(x) = \frac{1}{F'(x)}, \quad f'(y) = \frac{1}{F'(y)}, \quad f'(z) = \frac{1}{F'(z)},$$

ou

$$f(x) = \int \frac{dx}{F'(x)}, \quad f(y) = \int \frac{dy}{F'(y)}, \quad f(z) = \int \frac{dz}{F'(z)}.$$

Soient maintenant deux surfaces  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ , la première représentée par l'équation (12), la seconde par

$$f(x) - f(z) + \mu[f'(y) - f'(z)] = 0. \quad (15)$$

La condition d'orthogonalité est

$$[f'(x)]^2 + \lambda\mu[f'(y)]^2 + (1 + \lambda)(1 + \mu)[f'(z)]^2 = 0.$$

Elle se réduit à une identité, pour  $x = y = z$ , si les constantes  $\lambda$ ,  $\mu$  vérifient la relation

$$1 + \lambda\mu + (1 + \lambda)(1 + \mu) = 0. \quad (14)$$

En résumé :

*Par la droite isogonale passent une infinité de couples de surfaces  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ , orthogonales deux à deux (\*), et orthogonales à toutes les surfaces  $S$  (\*\*).*

VIII. *Suite.* — Dans l'équation (10), je prends

$$F(x) = \varrho \cdot \sin x, \quad (15)$$

de manière que les surfaces  $S$  sont représentées par

$$\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z = \sin c.$$

(\*) A chaque valeur de  $\lambda$  correspond une valeur de  $\mu$ .

(\*\*) Ce n'est donc point là un *système triplement orthogonal*, dans le sens habituel de l'expression.

Les équations (8) deviennent

$$\frac{dx}{\cot x} = \frac{dy}{\cot y} = \frac{dz}{\cot z}.$$

On déduit, de celles-ci :

$$\frac{\cos x}{\cos z} = \alpha, \quad \frac{\cos y}{\cos z} = \beta.$$

Donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 &= \frac{\sin^2 x \cos^2 z + \cos^2 x \sin^2 z}{\cos^4 z} = \frac{1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \cos^2 z}{\cos^2 z}, \\ \frac{d\alpha}{dx} \cdot \frac{d\beta}{dx} + \frac{d\alpha}{dy} \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\alpha}{dz} \cdot \frac{d\beta}{dz} &= \frac{\cos x \cos y \sin^2 z}{\cos^4 z} = \frac{\alpha\beta(1 - \cos^2 z)}{\cos^2 z}, \\ \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2 &= \frac{\sin^2 y \cos^2 z + \cos^2 y \sin^2 z}{\cos^4 z} = \frac{1 + \beta^2 - 2\beta^2 \cos^2 z}{\cos^2 z}; \end{aligned}$$

puis

$$A = -2\alpha^2, \quad \lambda = 1 + \alpha^2, \quad B = -\alpha\beta, \quad \mu = \alpha\beta,$$

$$C = -2\beta^2, \quad \nu = 1 + \beta^2, \quad Z = \frac{1}{\cos^2 z}.$$

L'équation (9) est, par suite,

$$\alpha\beta(\beta^2 - 1) \left(\frac{dx}{d\beta}\right)^2 + 2(\alpha^2 - \beta^2) \left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right) - \alpha\beta(\alpha^2 - 1) = 0.$$

Celle-ci n'est peut-être pas facilement intégrable ; mais *le système triple existe.*

IX. *Remarque.* — Soient, comme précédemment,

$$f(x, y, z) = \alpha, \quad f_1(x, y, z) = \beta \quad (5)$$

les intégrales des équations *simultanées* :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \quad (2)$$



Par la théorie connue :

$$P \frac{df}{dx} + Q \frac{df}{dy} + R \frac{df}{dz} = 0,$$

$$P \frac{df_1}{dx} + Q \frac{df_1}{dy} + R \frac{df_1}{dz} = 0;$$

puis

$$\frac{P}{\frac{df}{dy} \frac{df_1}{dz} - \frac{df}{dz} \frac{df_1}{dy}} = \frac{Q}{\frac{df}{dz} \frac{df_1}{dx} - \frac{df}{dx} \frac{df_1}{dz}} = \frac{R}{\frac{df}{dx} \frac{df_1}{dy} - \frac{df}{dy} \frac{df_1}{dx}} = \theta; \quad (16)$$

$\theta$  étant une fonction de  $x, y, z$ , ou une constante.

On conclut, de ces proportions :

$$P^2 + Q^2 + R^2 = \theta^2 \sum \left[ \left( \frac{df}{dy} \frac{df_1}{dz} - \frac{df}{dz} \frac{df_1}{dy} \right)^2 \right]. \quad (17)$$

La somme contenue dans le second membre est la même chose que

$$\left[ \left( \frac{df}{dx} \right)^2 + \left( \frac{df}{dy} \right)^2 + \left( \frac{df}{dz} \right)^2 \right] \left[ \left( \frac{df_1}{dx} \right)^2 + \left( \frac{df_1}{dy} \right)^2 + \left( \frac{df_1}{dz} \right)^2 \right] \\ - \left[ \frac{df}{dx} \frac{df_1}{dx} + \frac{df}{dy} \frac{df_1}{dy} + \frac{df}{dz} \frac{df_1}{dz} \right]^2;$$

c'est-à-dire, d'après les formules (8),

$$(A + \lambda Z)(C + \nu Z) - (B + \mu Z)^2.$$

Donc, finalement,

$$(A + \lambda Z)(C + \nu Z) - (B + \mu Z)^2 = \frac{P^2 + Q^2 + R^2}{\theta^2}. \quad (18)$$

X. Application. — Dans l'exemple ci-dessus (VIII) :

$$P = \cot x, \quad Q = \cot y, \quad R = \cot z,$$

$$\alpha = \frac{\cos x}{\cos z}, \quad \beta = \frac{\cos y}{\cos z},$$

$$A + \lambda Z = \frac{1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \cos^2 z}{\cos^2 z}, \quad B + \mu Z = \frac{\alpha\beta(1 - \cos^2 z)}{\cos^2 z},$$

$$C + \nu Z = \frac{1 + \beta^2 - 2\beta^2 \cos^2 z}{\cos^2 z}.$$

Donc

$$(A + \lambda Z)(C + \nu Z) - (B + \lambda\mu)^2 \\ = \frac{1}{\cos^4 z} [(1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \cos^2 z)(1 + \beta^2 - 2\beta^2 \cos^2 z) - \alpha^2 \beta^2 (1 - \cos^2 z)^2],$$

ou

$$(A + \lambda Z)(C + \nu Z) - (B + \lambda\mu)^2 \\ = \frac{1}{\cos^4 z} [1 + \alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2 \beta^2) \cos^2 z + 5\alpha^2 \beta^2 \cos^4 z].$$

D'un autre côté,

$$P^2 + Q^2 + R^2 = \frac{\alpha^2 \cos^2 z}{1 - \alpha^2 \cos^2 z} + \frac{\beta^2 \cos^2 z}{1 - \beta^2 \cos^2 z} + \frac{\cos^2 z}{\sin^2 z};$$

ou, après quelques réductions,

$$(1 - \alpha^2 \cos^2 z)(1 - \beta^2 \cos^2 z) \sin^2 z [P^2 + Q^2 + R^2] \\ = \cos^2 z [1 + \alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2 \beta^2) \cos^2 z + 5\alpha^2 \beta^2 \cos^4 z].$$

La comparaison avec la relation (18) donne

$$\theta^2 = \frac{\cos^6 z}{(1 - \alpha^2 \cos^2 z)(1 - \beta^2 \cos^2 z) \sin^2 z};$$

ou plutôt,

$$g^2 = \frac{\cos^6 z}{\sin^2 x \sin^2 y \sin^2 z};$$

expression qui s'accorde avec les égalités (16).

*Addition.* — (Février 1886.)

XI. *Une propriété numérique.* — L'équation (9) a la forme

$$(Bc - Cb)x^2 + (Ca - Ac)x + Ab - Ca = 0.$$

Celle-ci étant résolue par rapport à  $x$ , la quantité sous le radical est

$$(Ca - Ac)^2 - 4(Bc - Cb)(Ab - Ba).$$

Si on la multiple par  $C^2$ , et qu'on emploie la transformation ordinaire, on trouve l'identité

$$C^2[(Ca - Ac)^2 - 4(Bc - Cb)(Ab - Ba)] \\ = [C^2a + (2B^2 - AC)c - 2BCb]^2 - 4(B^2 - AC)(Bc - Cb)^2 \quad \left. \vphantom{C^2} \right\} \text{(A)}$$

Par conséquent :

$A, B, C, a, b, c, m$  étant des nombres entiers, la quantité

$$C^2[(Ca - Ac)^2 - 4(Bc - Cb)(Ab - Ba)]$$

est une somme de deux carrés, si  $B^2 - AC = -m^2$ .

XII. Suite. — D'après cette remarque, l'identité (A) prend la forme

$$NC^2 = X^2 + Y^2,$$

$X$  et  $Y$  étant des nombres entiers. De cette égalité, on conclut, facilement,

$$N = X'^2 + Y'^2,$$

même quand  $X$  et  $Y$  ont des facteurs communs. L'énoncé précédent peut donc être remplacé par celui-ci :

$A, B, C, a, b, c, m$  étant des nombres entiers, la quantité

$$N = (Ca - Ac)^2 - 4(Bc - Cb)(Ab - Ba)$$

est une somme de deux carrés, si  $B^2 - AC = -m^2$ .

XIII. Applications.

1°  $A = 2, B = 5, C = 17, a = 1, b = 5, c = 2, m = 5$ .

On a

$$N = 15^2 + 4 \cdot 41 = 535 = 18^2 + 5^2.$$

2°  $A = 2, B = 1, C = 15, a = 1, b = 2, c = 5, m = 5$ .

On trouve

$$N = 7^2 + 4 \cdot 25 \cdot 5 = 525 = 18^2 + 1^2 = 17^2 + 6^2 = 15^2 + 10^2.$$

**CXXXVI. — Sur une intégrale pseudo-elliptique (\*).**

I. Une lettre de Fuss à Condorcet, rappelée par M. Darboux (\*\*), contient le passage suivant :

« ... La formule intégrale

$$\int \frac{dx \sqrt{1+x^4}}{1-x^4},$$

» qu'il (Euler) observe pouvoir être rendue rationnelle (\*\*\*)  
 » moyennant la substitution singulière

$$x = \frac{\sqrt{1+p^2} + \sqrt{1-p^2}}{p\sqrt{2}}$$

» quoiqu'il ait cru autrefois qu'il soit impossible de la réduire  
 » à la rationalité par quelque substitution que ce soit, parce  
 » qu'il en pouvoit (iv) exprimer l'intégrale par des logarithmes  
 » et des arcs de cercles... »

Je vais montrer, dans cette courte Note, que la substitution employée par Euler, au lieu d'être *singulière*, est, pour ainsi dire, *forcée*, en ce sens qu'elle est la résultante de plusieurs transformations simples et connues.

II. Soit

$$dy = \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4} dx. \quad (1)$$

1° Si l'on fait

$$x = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi \text{ (v)}, \quad (2)$$

(\*) *Nouvelle Correspondance mathématique* (1880). A propos d'un travail de M. Hermite, publié dans le *Journal de Resal*, t. VI, p. 5.

(\*\*) *Bulletin des Sciences*, mai 1879, p. 226.

(\*\*\*) C'est, bien entendu, la *différentielle* qui peut être rendue rationnelle.

(iv) Plus loin, nous reviendrons sur ce mot.

(v) LEGENDRE, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 9.

on trouve :

$$dx = \frac{d\varphi}{1 + \cos \varphi}, \quad 1 - x^2 = 4 \frac{\cos \varphi}{(1 + \cos \varphi)^2}, \quad 1 + x^2 = 4 \frac{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}{(1 + \cos \varphi)^2},$$

$$dx \sqrt{1 + x^2} = 2 \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}{(1 + \cos \varphi)^2} d\varphi;$$

puis

$$dy = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi} d\varphi. \quad (5)$$

2° Faisons

$$\sin \varphi = z;$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{\cos \varphi d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{dz}{1 - z^2}.$$

L'équation (5) devient

$$dy = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2} z^2}}{1 - z^2} dz. \quad (5)$$

Ainsi,  $y$  n'est pas une intégrale elliptique (\*).

3° Pour faire disparaître le radical, on peut poser

$$\frac{z}{\sqrt{2}} = \sin \theta. \quad (6)$$

De là résulte, immédiatement,

$$dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos^2 \theta d\theta}{1 - 2 \sin^2 \theta}. \quad (7)$$

(\*) D'après cela, dans le fragment rapporté plus haut, ne doit-on pas lire *pourroit*, au lieu de *pouvoit*? Si, *a priori*, Euler regardait  $\frac{\sqrt{1+x^2}}{1-x^2} dx$  comme la différentielle d'une *intégrale elliptique*, il devait conclure, comme l'écrivit Fuss, à l'impossibilité de la rendre rationnelle.

4° Enfin, la transformation habituelle :

$$\operatorname{tg} \theta = t, \quad (8)$$

donne

$$dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dt}{(1-t^2)(1+t^2)}, \quad (9)$$

ou

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{dt}{1+t^2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \left( \frac{dt}{t+1} - \frac{dt}{t-1} \right).$$

5° L'intégrale est donc

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} t + \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{t+1}{t-1} + \operatorname{const.}$$

III. Des formules (2), (4), (6), (8), on tire, successivement :

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z} \\ &= \frac{1-\sqrt{1-2\sin^2\theta}}{\sqrt{2}\sin\theta} = \frac{1-\sqrt{1-\frac{2t^2}{1+t^2}}}{\sqrt{2}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}; \end{aligned}$$

et enfin

$$x = \frac{\sqrt{1+t^2} - \sqrt{1-t^2}}{t\sqrt{2}}; \quad (11)$$

ce qui, sauf une insignifiante différence de signes (\*), est la transformation employée par Euler. Celle-ci, comme je l'ai dit en commençant, était donc *forcée*.

(\*) Dans

$$x = \frac{\sqrt{1+p^2} + \sqrt{1-p^2}}{p\sqrt{2}},$$

on peut convenir de prendre négativement le second radical, afin que  $p=0$  donne  $x=0$ .

IV. L'équation (11) donne

$$t = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}.$$

On a donc, au lieu de l'intégrale (10),

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \mathcal{L} \cdot \frac{x\sqrt{2} + \sqrt{1+x^4}}{x\sqrt{2} - \sqrt{1+x^4}} + \operatorname{const.};$$

ou, sous une forme un peu plus simple,

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ \operatorname{arc\,sin} \frac{x\sqrt{2}}{1+x^2} + \frac{1}{2} \mathcal{L} \cdot \frac{x\sqrt{2} + \sqrt{1+x^4}}{x\sqrt{2} - \sqrt{1+x^4}} \right] + \operatorname{const.}$$

Si l'intégrale est comptée à partir de  $x = 0$ ,

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ \operatorname{arc\,sin} \frac{x\sqrt{2}}{1+x^2} + \frac{1}{2} \mathcal{L} \cdot \frac{\sqrt{1+x^4} + x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4} - x\sqrt{2}} \right],$$

ou enfin

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ \operatorname{arc\,sin} \frac{x\sqrt{2}}{1+x^2} + \mathcal{L} \cdot \frac{\sqrt{1+x^4} + x\sqrt{2}}{1-x^2} \right] \quad (*);$$

formule connue (\*).

(\*) *Cours d'Analyse*, p. 158.

**CXXXVII. — Sur les Élassoïdes (1872) (\*)**

**I. Transformation des formules.** — Aux formules (87) de mon ancien Mémoire (\*\*), on peut substituer celles-ci, dont la vérification est facile (\*\*\*) :

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi'(a) \sin a + \varphi''(a) \cos a + \psi'(b) \sin b + \psi''(b) \cos b, \\ y &= \varphi'(a) \cos a - \varphi''(a) \sin a + \psi'(b) \cos b - \psi''(b) \sin b, \\ z &= \sqrt{-1} [\varphi(a) + \varphi'(a) - \psi(b) - \psi''(b)]. \end{aligned} \right\} (1)$$

En particulier :

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi'(a) \sin a + \varphi''(a) \cos a + \varphi'(b) \sin b + \varphi''(b) \cos b, \\ y &= \varphi'(a) \cos a - \varphi''(a) \sin a + \varphi'(a) \cos b - \varphi''(b) \sin b, \\ z &= \sqrt{-1} [\varphi(a) + \varphi'(a) - \varphi(b) - \varphi''(b)] \text{ (iv)}. \end{aligned} \right\} (2)$$

**II. Élassoïdes algébriques.** — Pour en obtenir, il suffit de supposer que  $\varphi(a)$  soit fonction de  $\sin a$  ou de  $\cos a$ .

Prenons, par exemple,

$$\varphi(a) = \cos 2a, \quad (5)$$

auquel cas les formules (2) deviennent

$$\left. \begin{aligned} \cos^5 a + \cos^5 b &= -\frac{x}{4}, & \sin^5 a + \sin^5 b &= \frac{y}{4}, \\ \cos^2 a - \cos^2 b &= -\frac{z}{6} \sqrt{-1} \text{ (v)}. \end{aligned} \right\} (4)$$

(\*) *Surfaces à courbure moyenne nulle.* Cette dénomination d'*élassoïde* a été proposée par M. RIBACOUR, dans le beau Mémoire couronné, en 1880, par l'Académie de Belgique.

(\*\*) *Journal de l'École polytechnique*, 57<sup>e</sup> Cahier, p. 156.

(\*\*\*) Elle se fait comme on le voit à l'endroit cité.

(iv) Le système (2), ne renfermant qu'une fonction arbitraire, ne constitue pas l'*intégrale générale* de l'équation aux dérivées partielles :

$$(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r = 0.$$

(v) Nous supprimons le calcul, très simple.



Pour éviter les fractions, soient, généralement :

$$\cos^3 a + \cos^3 b = A, \quad \sin^3 a + \sin^3 b = B, \quad \cos^2 a - \cos^2 b = 2C, \quad (5)$$

puis l'équation *auxiliaire* :

$$\cos^2 a + \cos^2 b = 2\lambda. \quad (6)$$

Il résulte, des deux dernières :

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 a &= \lambda + C, & \cos^2 b &= \lambda - C, \\ \sin^2 a &= 1 - \lambda - C, & \sin^2 b &= 1 - \lambda + C. \end{aligned} \right\} (7)$$

De la première des équations (5), on tire

$$\cos^6 a = A^2 - 2A \cos^3 b + \cos^6 b,$$

puis

$$4A^2 \cos^6 b = (A^2 - \cos^6 a + \cos^6 b)^2,$$

c'est-à-dire, à cause des valeurs (7) :

$$4A^2(\lambda - C)^5 = [A^2 - 2C^5 - 6C\lambda^2]^2. \quad (8)$$

On trouve, semblablement,

$$4B^2(1 + C - \lambda)^5 = [B^2 + 2C^5 + 6C(1 - \lambda)^2]^2 (*). \quad (9)$$

Il resterait à éliminer  $\lambda$ , ce qui serait plus long que difficile. Mais il vaut mieux conserver les équations (8) et (9), en y regardant  $\lambda$  comme un paramètre variable : ces équations représentent la génératrice de l'*élassoïde* (\*\*).

III. *Remarque.* — Celui-ci est *réel*. En effet, soit  $z = 0$ , d'où  $C = 0$ . Les équations (8), (9) se réduisent à

$$4\lambda^5 = \frac{x^2}{16}, \quad 4(1 - \lambda)^5 = \frac{y^2}{16}.$$

(\*) L'égalité (8) étant connue, il suffit, pour former l'égalité (9), de changer  $A, C, \lambda$  en  $B, -C, 1 - \lambda$ .

(\*\*) On ne doit pas oublier que

$$A = -\frac{x}{4}, \quad B = \frac{y}{4}, \quad C = -\frac{z}{6}\sqrt{-1}.$$

Il résulte, de celles-ci,

$$x^{\frac{2}{5}} + y^{\frac{2}{5}} = 8^{\frac{1}{5}},$$

équation d'une *hypocycloïde à quatre rebroussements*.

IV. *Rayons principaux*. — Reprenons les formules rappelées ci-dessus (\*) :

$$\left. \begin{aligned} dx &= \varpi'(a) \sin ada + \pi'(b) \sin bdb, \\ dy &= \varpi'(a) \cos ada + \pi'(b) \cos bdb, \\ dz &= \sqrt{-1} [\varpi'(a) da - \pi'(b) db]; \end{aligned} \right\} (10)$$

puis les suivantes, qui s'en déduisent :

$$\left. \begin{aligned} p &= \sqrt{-1} \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}(a-b)}, & q &= -\sqrt{-1} \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}(a-b)}, \\ 1 + p^2 + q^2 &= -\cot^2 \frac{1}{2}(a-b). \end{aligned} \right\} (11)$$

L'équation qui donne les rayons principaux d'un élassoïde est

$$(s^2 - rt) R^2 = (1 + p^2 + q^2)^2. \quad (12)$$

Il s'agit de former  $s^2 - rt$ .

Or :

$$\begin{aligned} r \frac{dx}{da} + s \frac{dy}{da} &= \frac{dp}{da}, & r \frac{dx}{db} + s \frac{dy}{db} &= \frac{dp}{db}, \\ s \frac{dx}{da} + t \frac{dy}{da} &= \frac{dq}{da}, & s \frac{dx}{db} + t \frac{dy}{db} &= \frac{dq}{db}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{dp}{da} \frac{dq}{db} - \frac{dp}{db} \frac{dq}{da} &= \left( r \frac{dx}{da} + s \frac{dy}{da} \right) \left( s \frac{dx}{db} + t \frac{dy}{db} \right) - \left( r \frac{dx}{db} + s \frac{dy}{db} \right) \left( s \frac{dx}{da} + t \frac{dy}{da} \right) \\ &= (rt - s^2) \left( \frac{dx}{da} \frac{dy}{db} - \frac{dx}{db} \frac{dy}{da} \right), \end{aligned}$$

(\*) Ce sont les formules (87) du Mémoire.

ou

$$s^2 - rt = - \frac{\frac{dp}{da} \frac{dq}{db} - \frac{dp}{db} \frac{dq}{da}}{\frac{dx}{da} \frac{dy}{db} - \frac{dx}{db} \frac{dy}{da}}. \quad (13)$$

D'après les formules (10), la valeur du dénominateur est, évidemment,

$$\pi'(a) \pi'(b) \sin(a - b).$$

D'un autre côté, les relations (11) donnent :

$$\frac{dp}{da} = -\frac{1}{2} \sqrt{-1} \frac{\cos b}{\sin^2 \frac{1}{2}(a-b)}, \quad \frac{dq}{db} = -\frac{1}{2} \sqrt{-1} \frac{\sin a}{\sin^2 \frac{1}{2}(a-b)},$$

$$\frac{dp}{db} = \frac{1}{2} \sqrt{-1} \frac{\cos a}{\sin^2 \frac{1}{2}(a-b)}, \quad \frac{dq}{da} = \frac{1}{2} \sqrt{-1} \frac{\sin b}{\sin^2 \frac{1}{2}(a-b)}.$$

Ainsi

$$\frac{dp}{da} \frac{dq}{db} - \frac{dp}{db} \frac{dq}{da} = -\frac{1}{4} \frac{\sin(a-b)}{\sin^4 \frac{1}{2}(a-b)};$$

puis

$$s^2 - rt = \frac{1}{4\pi'(a)\pi'(b)\sin^4 \frac{1}{2}(a-b)}. \quad (14)$$

D'ailleurs (11),

$$(1 + p^2 + q^2)^2 = \frac{\cos^4 \frac{1}{2}(a-b)}{\sin^4 \frac{1}{2}(a-b)}.$$

Donc, finalement,

$$R^2 = 4\pi'(a)\pi'(b)\cos^4 \frac{1}{2}(a-b). \quad (15)$$

V. *Discussion d'un élassoïde.* — A la fin du Mémoire, nous avons donné les formules :

$$\left. \begin{aligned} -x &= (e^n + e^{-n}) \cos m + (e^n - e^{-n}) \sin m, \\ y &= (e^n + e^{-n}) \sin m - (e^n - e^{-n}) \cos m, \\ -z &= 2(m + n). \end{aligned} \right\} (16)$$

Il résulte, des deux premières :

$$x^2 + y^2 = 2(e^{2n} + e^{-2n}), \quad (17)$$

$$(x \cos m - y \sin m)^2 - (x \sin m + y \cos m)^2 = 4. \quad (18)$$

Soient :

$$x = u \cos \omega, \quad y = u \sin \omega.$$

L'équation (18) devient

$$u^2 [\cos^2(m + \omega) - \sin^2(m + \omega)] = 4,$$

puis

$$2m = -2\omega + \arccos \frac{4}{u^2}. \quad (19)$$

Quant à l'équation (17), elle donne

$$e^{-2n} = \frac{u^2 - \sqrt{u^2 - 16}}{4}. \quad (20)$$

L'équation de la surface est donc

$$z = 2\omega - \arccos \frac{4}{u^2} + \int \frac{u^2 - \sqrt{u^2 - 16}}{4}. \quad (21)$$

Celle-ci a la forme

$$z = k\omega + F(u).$$

Or, cette nouvelle équation appartient à la *surface d'une vis*, dont le *pas* est  $2k\pi$ , et dont le *profil* serait représenté par

$$z = F(x) (*).$$

VI. *Remarque.* — Si l'on éliminait seulement  $n$ , l'équation (21) serait remplacée par le système suivant, qui représente une génératrice quelconque de l'élassoïde :

$$u^2 \cos(2m + 2\omega) = 4, \quad (22)$$

$$z = -2m + \int \frac{u^2 - \sqrt{u^2 - 16}}{4}. \quad (23)$$

(\*) Mémoire, p. 20.

Cela posé :

1° L'équation (22) représente une infinité de *cylindres hyperboliques*, égaux à celui dont l'équation est

$$y^2 - x^2 = 4.$$

2° L'équation (22) représente des *surfaces de révolution*, égales entre elles.

Quand le cylindre tourne autour de l'axe  $Oz$ , la surface de révolution glisse le long de cet axe. On voit donc, de nouveau, que l'*élassoïde* considéré est une *surface de vis*.

*Addition.* — (Septembre 1880) (\*).

VII. A la fin de son *avant-propos*, l'Auteur du travail envoyé à l'Académie, s'énonce ainsi :

« M. Sophus Lie.... a montré que les surfaces à courbure » moyenne nulle sont, de deux façons, des *surfaces-moulures*. »

J'ai toujours *soupçonné*, sans pouvoir le démontrer, que les élassoïdes sont des *surfaces à génératrice* constante. Quant au théorème de M. Lie, il résulte assez simplement, si je le comprends bien, des formules :

$$x = \int \varpi'(a) \sin ada + \int \pi'(b) \sin bdb,$$

$$y = \int \varpi'(a) \cos ada + \int \pi'(b) \cos bdb,$$

$$z = \sqrt{-1} [\varpi(a) + \pi(b)].$$

Soient :

$$\int \varpi'(a) \sin ada = X, \quad \int \pi'(b) \sin bdb = X_1,$$

$$\int \varpi'(a) \cos ada = Y, \quad \int \pi'(b) \cos bdb = Y_1,$$

$$\sqrt{-1} \varpi(a) = Z, \quad \sqrt{-1} \pi(b) = Z_1;$$

(\*) Tirée du Rapport sur le Mémoire de M. Ribaucour.

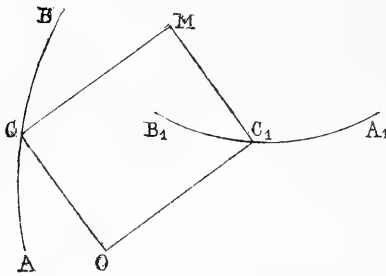
et, par conséquent :

$$x = X + X_1, \quad y = Y + Y_1, \quad z = Z + Z_1.$$

Il est clair que l'on a

$$X = f(Z), \quad Y = \varphi(Z); \quad X_1 = f_1(Z), \quad Y_1 = \varphi_1(Z_1).$$

Construisons les courbes  $AB$ ,  $A_1B_1$ , représentées par ces



équations; prenons un point  $C$  sur la première, et un point  $C_1$  sur la seconde.  $O$  étant l'origine, le sommet  $M$ , du parallélogramme construit sur  $OC$  et  $OC_1$ , appartient évidemment à la surface. De plus, si le point  $C_1$  est fixe,  $M$  décrit

une courbe égale et parallèle à  $ACB$ ; etc.

Dans le cas actuel, les profils  $AB$ ,  $A_1B_1$  sont imaginaires.

*Autre addition.* — (Mai 1885) (\*).

VIII. A la page 130 de mon ancien Mémoire, on trouve, sous la forme suivante, les équations d'un élassoïde :

$$\left. \begin{aligned} x &= \left[ e^\nu - \frac{1}{2} \nu (e^\nu - e^{-\nu}) \right] \cos \theta + \frac{1}{2} \theta (e^\nu + e^{-\nu}) \sin \theta, \\ y &= \left[ e^\nu - \frac{1}{2} \nu (e^\nu - e^{-\nu}) \right] \sin \theta - \frac{1}{2} \theta (e^\nu + e^{-\nu}) \cos \theta, \end{aligned} \right\} (24)$$

$$z = \theta(\nu - 1); \quad (25)$$

puis, en note :

« D'après la forme de ces expressions, il est probable que  
 » la surface peut être engendrée par le roulement d'une certaine  
 » courbe..... la trace, sur le plan des  $xy$ , est une développante  
 » de cercle. »

(\*) Tirée d'une leçon à l'Université de Liège.

Si l'on fait

$$A = e^{\nu} - \frac{1}{2}\nu(e^{\nu} - e^{-\nu}), \quad B = \frac{1}{2}(e^{\nu} + e^{-\nu}), \quad (26)$$

une génératrice de la surface est représentée par

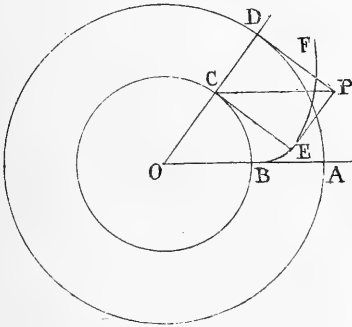
$$x = A \cos \theta + B \sin \theta, \quad y = A \sin \theta - B \cos \theta, \quad z = (\nu - 1) \theta.$$

Les deux premières formules étant écrites ainsi :

$$\left. \begin{aligned} x &= B(\cos \theta + \theta \sin \theta) + (A - B) \cos \theta, \\ y &= B(\sin \theta - \theta \cos \theta) + (A - B) \sin \theta, \end{aligned} \right\} (27)$$

on voit que  $x, y$  sont les coordonnées d'un point  $P$ , défini de la manière suivante.

Soient décrites les circonférences  $OA, OB$ , puis la *développante*  $BEF \dots$  du cercle  $OB$ . Menons la droite  $OCD$  faisant, avec  $OBA$ , l'angle arbitraire  $\theta$ ; puis construisons le rectangle  $DCEP$ .



Le lieu du point  $P$ , ou la projection horizontale de la génératrice, est donc une *pseudo-parallèle* à la *développante* variable

$BEF$ . On sait que la normale, en  $P$ , est la droite  $PC$  (\*).

IX. *Remarque.* — On a, par les formules ci-dessus, ou par l'inspection de la figure,

$$x^2 + y^2 = A^2 + B^2 \theta^2 = A^2 + B^2 \left( \frac{z}{\nu - 1} \right)^2,$$

ou

$$x^2 + y^2 - B^2 \frac{z^2}{(\nu - 1)^2} = A^2.$$

Ainsi la génératrice, projetée suivant  $APQ \dots$ , appartient à un *hyperboloïde de révolution*, à une *nappe*.

(\*) Voir page 160.

**CXXXVIII. — Quelques intégrales définies (\*).**

X. Dans un *Mémoire sur les Nombres de Bernoulli et d'Euler* (\*\*), j'ai donné les quatre formules :

$$P_{2q-1} = 8q \int_0^{\infty} \frac{\alpha^{2q-1} d\alpha}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} = \frac{q}{2^{2q-3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \omega \cos(2q-1)\omega}{e^{\frac{\pi}{2} \cot \omega} + e^{-\frac{\pi}{2} \cot \omega}} \frac{d\omega}{\sin^{2q+2} \omega} \quad (***)$$

$$E_{2q} = 4^{q+1} \int_0^{\infty} \frac{\alpha^{2q} d\alpha}{e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha}} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \omega \sin(2q-1)\omega}{e^{\frac{\pi}{2} \cot \omega} + 1} \frac{d\omega}{\sin^{2q+2} \omega}$$

Il en résulte :

$$4^q \int_0^{\infty} \frac{\alpha^{2q-1} d\alpha}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \omega \cos(2q-1)\omega}{e^{\frac{\pi}{2} \cot \omega} + e^{-\frac{\pi}{2} \cot \omega}} \frac{d\omega}{\sin^{2q+2} \omega}, \quad (48)$$

$$2^{2q+3} \int_0^{\infty} \frac{\alpha^{2q} d\alpha}{e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \omega \sin(2q-1)\omega}{e^{\frac{\pi}{2} \cot \omega} + 1} \frac{d\omega}{\sin^{2q+2} \omega} \quad (49)$$

Dans (48), je fais  $\alpha = \frac{1}{2} \cot \omega$  : le premier membre devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2q-1} \omega}{e^{\frac{\pi}{2} \cot \omega} - e^{-\frac{\pi}{2} \cot \omega}} \frac{d\omega}{\sin^{2q+1} \omega}$$

Donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2q-1} \omega}{e^{\frac{\pi}{2} \cot \omega} - e^{-\frac{\pi}{2} \cot \omega}} \frac{d\omega}{\sin^{2q+1} \omega} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \omega \cos(2q-1)\omega}{e^{\frac{\pi}{2} \cot \omega} + e^{-\frac{\pi}{2} \cot \omega}} \frac{d\omega}{\sin^{2q+2} \omega} \quad (50)$$

La même transformation, appliquée à l'égalité (49), donne

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2q} \omega}{e^{\frac{\pi}{2} \cot \omega} + e^{-\frac{\pi}{2} \cot \omega}} \frac{d\omega}{\sin^{2q+2} \omega} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \omega \sin(2q-1)\omega}{e^{\frac{\pi}{2} \cot \omega} + 1} \frac{d\omega}{\sin^{2q+2} \omega} \quad (51)$$

(\*) Suite de la *Note* XCIII.

(\*\*) *Académie de Belgique, Mémoires in-quarto.*

(\*\*\*) On ne doit pas oublier que  $P_{2q-1}$  est un nombre entier, impair. (*Note* XXXIV.)



XI. *Une rectification.* — Des fautes de calcul se sont glissées dans le paragraphe VI (\*). Il en résulte que les formules (30), (31) sont inexactes.

On peut, comme il suit, rétablir ce paragraphe (\*\*).

Dans la relation connue :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(2q+2)(2q+1)}{1 \cdot 2} B_{2q-1} + \frac{(2q+2) \cdot 2q+1)2q(2q-1)}{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4} B_{2q-5} + \dots \\ & + \frac{(2q+2)(2q+1)}{1 \cdot 2} B_1 = q \text{ (***)}, \end{aligned} \right\} (52)$$

remplaçons les Nombres de Bernoulli par leurs valeurs, exprimées en intégrales définies. Elle devient

$$\int_0^{\infty} \frac{Tdt}{e^{2\pi t} - 1} = \pm \frac{q}{4(q+1)} \text{ (iv)}, \quad (55)$$

en supposant

$$T = \frac{(2q+1)2q}{1 \cdot 2} t^{2q-1} - \frac{(2q+1)2q(2q-1)(2q-2)}{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4} t^{2q-5} + \dots \pm \frac{2q+1}{1} t.$$

Il est visible que

$$T = t^{2q+1} - \frac{(t + \sqrt{-1})^{2q+1} + (t - \sqrt{-1})^{2q+1}}{2}.$$

Nous avons donc, au lieu de la relation (53) :

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{t^{2q+1} dt}{e^{2\pi t} - 1} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} [(t + \sqrt{-1})^{2q+1} + (t - \sqrt{-1})^{2q+1}] \\ & = \pm \frac{q}{4(q+1)}, \end{aligned} \right\} (54)$$

(\*) Tome I, p. 596.

(\*\*) Ce nouveau calcul, plus simple que l'autre, date de 1874.

(\*\*\*) *Loc. cit.*

(iv) Le signe +, si  $q$  est impair.

ou

$$\left. \begin{aligned} \pm \frac{1}{4(q+1)} B^{2q+1} - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \left[ (t + \sqrt{-1})^{2q+1} + (t - \sqrt{-1})^{2q+1} \right] \\ = \pm \frac{q}{4(q+1)} (*) \end{aligned} \right\} (55)$$

Soit, dans la relation (54),  $t = \cot \varphi$ . Elle se réduit à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2q+1} \varphi - \cos(2q+1)\varphi}{e^{2\pi \cot \varphi} - 1} \frac{d\varphi}{\sin^{2q+3} \varphi} = \pm \frac{q}{4(q+1)} \quad (56)$$

On a aussi (\*\*)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2p\varphi \cdot \sin \varphi}{e^{2\pi \cot \varphi} - 1} \frac{d\varphi}{\sin^{2q+3} \varphi} = \pm \frac{2q-1}{4(2q+1)}$$

Donc, par soustraction,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2q+1} \varphi - \cos 2q\varphi \sin \varphi}{e^{2\pi \cot \varphi} - 1} \frac{d\varphi}{\sin^{2q+3} \varphi} = \pm \frac{1}{4(q+1)(2q+1)} \quad (57)$$

En outre,

$$B_{2q-1} = q-1 \mp 4q \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2q-1)\varphi}{e^{2\pi \cot \varphi} - 1} \frac{d\varphi}{\sin^{2q+1} \varphi} \quad (58)$$

XII (\*\*\*). Soit

$$A_{p,q} = \int_0^\pi \cos^p x \cos qx dx \quad (iv) \quad (59)$$

(\*) L'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{t^{2q+1} dt}{e^{2\pi t} - 1}$$

est essentiellement positive. Donc le premier terme de l'égalité doit être pris avec le signe *supérieur* ou le signe *inférieur*, selon que le nombre  $q$  est *pair* ou *impair*.

(\*\*) *Loc. cit.*

(\*\*\*) Ce paragraphe est tiré de mon deuxième *Mémoire sur les fonctions X<sub>n</sub>* (1882, p. 20).

(iv) On peut consulter, relativement à cette intégrale, la Note que nous avons publiée dans le *Journal de Liouville* (t. V, p. 115); et, dans le même Recueil (t. VIII), un remarquable Mémoire de Serret.

De

$$\cos qx = \cos(q-1)x \cos x - \sin(q-1)x \sin x,$$

on déduit

$$A_{p,q} = A_{p+1,q-1} - \int_0^{\pi} \cos^p x \sin(q-1)x \sin x dx.$$

L'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \cos^p x \sin(q-1)x \sin x dx \\ &= - \left[ \frac{\cos^{p+1} x \sin(q-1)x}{p+1} \right]_0^{\pi} + \frac{q-1}{q+1} A_{p+1,q-1}. \end{aligned}$$

Et comme le terme intégré est nul :

$$A_{p,q} = \frac{p-q+2}{p+1} A_{p+1,q-1}. \quad (60)$$

De cette relation, on conclut, facilement,

$$A_{p,q} = \frac{p-q+2}{p+1} \cdot \frac{p-q+4}{p+2} \dots \frac{p+q}{p+q} \int_0^{\pi} \cos_{p+q} x dx. \quad (61)$$

La nouvelle intégrale est nulle si  $p+q$  est *impair*. De plus, le second membre est nul, encore, dans les cas suivants :

$$q = p+2, \quad q = p+4, \quad q = p+6, \dots$$

Donc, pour que l'intégrale représentée par  $A_{p,q}$  ne soit pas nulle, on doit avoir

$$p-q = \mathfrak{N} \cdot 2.$$

Quand il en est ainsi,

$$\int_0^{\pi} \cos^{p+q} x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+q} x dx = \pi \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \overline{p+q-1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots \overline{p+q}};$$

et, en conséquence,

$$A_{p,q} = \pi \frac{(p-q+2)(p-q+4) \dots (p+q)}{(p+1)(p+2) \dots (p+q)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \overline{p+q-1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots \overline{p+q}};$$

Le second membre peut être considérablement simplifié.  
En premier lieu, la fraction

$$\frac{(p-q+2)(p-q+4)\dots(p+q)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (p+q)} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (p-q)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p-q}{2}} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \frac{p-q}{2}}$$

D'autre part,

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (p+q-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p+q}{2}} 2 \cdot 6 \cdot 10 \dots (2p+2q-2);$$

puis, par une transformation bien connue (\*),

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (p+q-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p+q}{2}} \left(\frac{p+q}{2} + 1\right) \left(\frac{p+q}{2} + 2\right) \dots (p+q).$$

Enfin,

$$\frac{\left(\frac{p+q}{2} + 1\right) \left(\frac{p+q}{2} + 2\right) \dots (p+q)}{(p+1)(p+2) \dots (p+q)} = \left(\frac{p+q}{2} + 1\right) \left(\frac{p+q}{2} + 2\right) \dots p.$$

On a donc

$$\begin{aligned} & \frac{(p-q+2)(p-q+4)\dots(p+q)}{(p+1)(p+2)\dots(p+q)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots p+q-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots p+q} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^p \frac{\left(\frac{p+q}{2} + 1\right) \left(\frac{p+q}{2} + 2\right) \dots p}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \frac{p-q}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^p C_{p, \frac{p-q}{2}}; \end{aligned}$$

puis

$$A_{p, q} = \frac{\pi}{2^p} C_{p, \frac{p-q}{2}},$$

ou

$$\int_0^{\pi} \cos^p x \cos qx dx = \frac{\pi}{2^p} C_{p, \frac{p-q}{2}}. \quad (62)$$

(\*) Voir pages 45, 55, ...

XIII. De la formule

$$\operatorname{tg} x = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{2\alpha x} - e^{-2\alpha x}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} d\alpha,$$

due à Poisson (\*), on déduit, par intégration,

$$- \int_0^{\infty} \cos x = \int_0^{\infty} \frac{(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})^2}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} \frac{d\alpha}{\alpha}; \quad (63)$$

et, par différenciation,

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 4 \int_0^{\infty} \frac{e^{2\alpha x} + e^{-2\alpha x}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} \alpha d\alpha \quad (64)$$

La combinaison de cette égalité, avec celle-ci :

$$\operatorname{tg}^2 x = 4 \int_0^{\infty} \frac{(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})^2}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} \alpha d\alpha (**),$$

donne ce résultat connu :

$$\frac{1}{8} = \int_0^{\infty} \frac{\alpha d\alpha}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}}.$$

XIV. *Suite.* — On a, en série convergente,

$$\frac{1}{\alpha} (e^{2\alpha x} + e^{-2\alpha x} - 2) = 2 \sum_1^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{\Gamma(2n+1)} \alpha^{2n-1}.$$

Donc, si l'on suppose le premier membre de l'égalité (65) développé suivant les puissances de  $x$ , le coefficient de  $x^{2n}$  doit être

$$\frac{2^{2n+1}}{\Gamma(2n+1)} \int_0^{\infty} \frac{\alpha^{2n-1} d\alpha}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}}.$$

(\*) Voir, sur d'autres conséquences de cette formule, la *Note XXXV.*

(\*\*) *Note XXXV.*

Or,

$$= \int_0^{\pi} \cos x \\ = (k-1)A_2 \frac{(2x)^2}{2} - (k^2-1)A_4 \frac{(2x)^4}{4} + \dots \pm (k^n-1)A_{2n} \frac{(2x)^{2n}}{2n} \mp \dots (*)$$

pourvu que l'on suppose

$$A_{2n} = \frac{B_{2n-1}}{\Gamma(2n+1)} (**).$$

Identifiant, nous avons donc

$$\int_0^{\infty} \frac{\alpha^{2n-1} d\alpha}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} = \pm \frac{k^n - 1}{4n} B_{2n-1}. \quad (65)$$

Cette formule ne diffère pas, au fond, de celle de Plana :

$$\int_0^{\infty} \frac{\alpha^{2n-1} d\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1} = \pm \frac{1}{4n} B_{2n-1} (***)$$

Autrement dit,

$$\int_0^{\infty} \frac{\alpha^{2n-1} d\alpha}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} = (k^n - 1) \int_0^{\infty} \frac{\alpha^{2n-1} d\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1}$$

En effet, cette égalité revient à celle-ci :

$$\int_0^{\infty} \frac{\alpha^{2n-1} d\alpha (e^{\pi\alpha} + 1)}{e^{2\pi\alpha} - 1} = k^n \int_0^{\infty} \frac{\alpha^{2n-1} d\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1};$$

puis à l'identité

$$\int_0^{\infty} \frac{\alpha^{2n-1} d\alpha}{e^{\pi\alpha} - 1} = k^n \int_0^{\infty} \frac{\zeta^{2n-1} d\zeta}{e^{2\pi\zeta} - 1}$$

(\*) Note LIX, p. 208.

(\*\*) Note XXXIII, p. 92.

(\*\*\*) *Ibid.*, p. 95.

XV. Comme on le vérifie aisément,

$$\int_0^x \cos 2x \operatorname{tg} \frac{1}{2} x dx = 2 \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{5}{2} - 2\mathcal{L} \left( \cos \frac{1}{2} x \right). \quad (66)$$

Done, en particulier,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \operatorname{tg} \frac{1}{2} x dx = -1 + \mathcal{L}.2. \quad (67)$$

La relation (66) va nous donner d'autres intégrales définies, assez intéressantes.

Soit X le second membre. Intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx \cos 2x \operatorname{tg} \frac{1}{2} x &= [Xx]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} X dx \\ &= \frac{\pi}{2} (-1 + \mathcal{L}.2) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ -2 \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{5}{2} + 2\mathcal{L} \left( \cos \frac{1}{2} x \right) \right] dx. \end{aligned}$$

La dernière intégrale se décompose en

$$-2 + \frac{5}{2} \frac{\pi}{2} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{L} \left( \cos \frac{1}{2} x \right) dx.$$

Ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx \cos 2x \operatorname{tg} \frac{1}{2} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \mathcal{L}.2 - 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{L} \left( \cos \frac{1}{2} x \right) dx.$$

Si l'on fait  $\frac{1}{2} x = \alpha$ , on a

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{L} \left( \cos \frac{1}{2} x \right) dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathcal{L}(\cos \alpha) d\alpha = -\pi \mathcal{L}.2 + 2G (*).$$

Par conséquent,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx \cos 2x \operatorname{tg} \frac{1}{2} x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \mathcal{L}.2 - 2 + 2G. \quad (68)$$

(\*) BIERENS DE HAAN, T. 286.

XVI. *Suite.* — Soit

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(2a+4)x - \sin(2a+2)x] \operatorname{tg} \frac{1}{2} x dx, \quad (69)$$

le paramètre  $a$  surpassant ( $-1$ ).

La quantité entre parenthèses équivaut à

$$2 \sin x \cos(2a+5)x = 4 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x \cos(2a+5)x;$$

donc

$$\begin{aligned} E &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{1}{2} x \cos(2a+5)x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x) \cos(2a+5)x dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2a+5)x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2a+2)x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2a+4)x dx, \end{aligned}$$

ou

$$E = 2 \frac{\sin(2a+5) \frac{\pi}{2}}{2a+5} - \frac{\sin(a+1)\pi}{2(a+1)} - \frac{\sin(a+2)\pi}{2(a+2)} \quad (*) \quad (70)$$

Prenant les dérivées des deux membres, on a

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx [\cos(2a+4)x - \cos(2a+2)x] \operatorname{tg} \frac{1}{2} x \\ &= 2 \left\{ \frac{\pi \cos(2a+5) \frac{\pi}{2}}{2a+5} - 4 \frac{\sin(2a+5) \frac{\pi}{2}}{(2a+5)^2} - \frac{\pi \cos(a+1)\pi}{2(a+1)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\sin(a+1)\pi}{2(a+1)^2} - \frac{\pi \cos(a+2)\pi}{2(a+2)} + \frac{\sin(a+2)\pi}{2(a+2)^2} \right\} \quad (71) \end{aligned}$$

Il y a, maintenant, deux cas à distinguer.

1° Si  $a$  est un nombre *pair*, le second membre se réduit à

$$\frac{4}{(2a+5)^2} + \frac{\pi}{2a+2} + \frac{\pi}{2a+4};$$

(\*) Si  $a$  est un nombre entier, le premier sinus égale  $\pm 1$ ; les deux autres termes sont nuls; en sorte que  $E = \pm \frac{2}{2a+5}$ . Ce résultat s'accorde avec celui que l'on trouve dans la *Note LIV*, formule (27).



2° Si  $a$  est *impair*, cette même quantité égale

$$-\frac{4}{(2a+5)^2} - \frac{\pi}{2a+2} - \frac{\pi}{2a+4}.$$

Supposant  $a = 0, 1, 2, 5, \dots, 2n$ , nous trouvons donc, successivement :

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx (\cos 4x - \cos 2x) \operatorname{tg} \frac{1}{2} x = \frac{4}{5^2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4},$$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx (\cos 6x - \cos 4x) \operatorname{tg} \frac{1}{2} x = -\frac{4}{5^2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6},$$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx (\cos 8x - \cos 6x) \operatorname{tg} \frac{1}{2} x = \frac{4}{7^2} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{8},$$

$$\dots$$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx (\cos \overline{4n+2}x - \cos \overline{4n}x) \operatorname{tg} \frac{1}{2} x = -\frac{4}{(4n+1)^2} - \frac{\pi}{4n} - \frac{\pi}{4n+2},$$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx (\cos \overline{4n+4}x - \cos \overline{4n+2}x) \operatorname{tg} \frac{1}{2} x$$

$$= \frac{4}{(4n+5)^2} + \frac{\pi}{4n+2} + \frac{\pi}{4n+4};$$

puis, par addition,

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx (\cos \overline{4n+4}x - \cos 2x) \operatorname{tg} \frac{1}{2} x$$

$$= 4 \left[ \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \dots + \frac{1}{(4n+5)^2} \right] + \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2n+2} \right]. \quad (72)$$

Pour  $n$  *infini*, cette égalité devient

$$2 \lim \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx \cos (4n+4)x \operatorname{tg} \frac{1}{2} x$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx \cos 2x \operatorname{tg} \frac{1}{2} x + 4(1-G) + \frac{\pi}{2};$$

c'est-à-dire, à cause de la formule (68) :

$$\lim \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx \cos (4n+4)x \operatorname{tg} \frac{1}{2} x = \frac{\pi}{2} (1 - \mathfrak{L} \cdot 2). \quad (75)$$

**CXXXIX. — Une intégration.**

(Juillet 1875.)

I. Soit l'équation

$$(ax^2 + by^2 + c)dy^2 + 2fxydx dy + gx^2dx^2 = 0 \quad (*), \quad (1)$$

ou

$$[agx^2 + (bg - f^2)y^2 + cg]dy^2 + [fydy + gxdx]^2 = 0. \quad (2)$$

On tire, de celle-ci,

$$dy = \pm \frac{fydy + gxdx}{\sqrt{(f^2 - bg)y^2 - agx^2 - cg}}.$$

Le second membre est une différentielle exacte si

$$\frac{f}{bg - f^2} = \frac{1}{a},$$

ou

$$f^2 - bg + af = 0; \quad (3)$$

et alors l'intégrale est

$$y - \beta = \mp \frac{1}{a} \sqrt{-afy^2 - agx^2 - cg},$$

ou

$$a^2(y - \beta)^2 + afy^2 + agx^2 + cg = 0 \quad (**). \quad (4)$$

(Addition. — Mars 1886.)

II. En général, posons

$$agx^2 + (bg - f^2)y^2 + cg = -a^2u^2, \quad (5)$$

de manière que

$$fydy + gxdx = \pm audy, \quad (6)$$

et

$$agxdx + (bg - f^2)ydy = -a^2udu. \quad (7)$$

(\*) On peut voir, dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. II, p. 21), le problème de Géométrie répondant à cette équation.(\*\*) *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. II, p. 82).

Éliminant  $gxdx$ , on a ces deux équations homogènes, du premier degré :

$$a^2u(du \pm dy) = (af + f^2 - bg)ydy;$$

ou, si l'on fait

$$af + f^2 - bg = a^2k :$$

$$u(du \pm dy) = kydy; \quad (8)$$

et le problème peut être considéré comme résolu.

III. *Application.* — L'intégrale de

$$(x^2 + y^2 + 1)dy^2 - 2xydx dy - 2x^2dx^2 = 0 \quad (9)$$

est

$$(u - y)(u + 2y)^2 = \lambda^3, \quad (10)$$

si l'on pose

$$u^2 = 2x^2 + 5y^2 + 2.$$

En effet, la différentielle de l'équation (10) est, suppression faite d'un facteur,

$$udu + (u - 2y)dy = 0,$$

ou

$$2xdx + ydy + dy\sqrt{2x^2 + 5y^2 + 2} = 0,$$

ou enfin

$$(x^2 + y^2 + 1)dy^2 - 2xydx dy - 2x^2dx^2 = 0. \quad (9)$$

### CXL. — Sur une formule de Jacobi.

(Octobre 1875.)

I. Cette formule, bien remarquable, se trouve dans une lettre de Jacobi à Legendre, reproduite par le *Journal de Crelle* (\*).

Elle consiste en :

$$\left. \begin{aligned} & \{ q - q^{5 \cdot 5} - q^{7 \cdot 7} + q^{11 \cdot 11} + q^{15 \cdot 15} - q^{17 \cdot 17} - \dots \}^5 \\ & = q^5 - 5 \cdot q^{5 \cdot 5 \cdot 5} + 5 q^{5 \cdot 5 \cdot 5} - 7 q^{5 \cdot 7 \cdot 7} + \dots \end{aligned} \right\} (1)$$

A l'inspection de cette identité, on ne peut savoir si, dans le premier membre, les exposants

$$1^2, 5^2, 7^2, 11^2, 15^2, 17^2, \dots$$

(\*) 1875, p. 240.

sont les carrés des nombres premiers impairs, autres que 5, ou les carrés des nombres impairs, non divisibles par 5 (\*).

Pour trancher la question, il suffit de lire, dans le tome VII du *Journal de Liouville*, le célèbre Mémoire de Jacobi, relatif à la formule, non moins célèbre :

$$[1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - \dots]^5 = 1 - 5x + 5x^5 - 7x^6 + \dots$$

En effet, à la page 92, on trouve l'identité

$$\left[ \sum \pm x^{na} \right]^5 = \sum (-1)^{\frac{b-1}{2}} b x^{5bb}, \quad (2)$$

dans laquelle  $a$  est un nombre impair non divisible par 5, et  $b$ , un nombre impair quelconque (\*\*).

Or, la formule (2) n'est que la formule (1), expliquée.

II. En 1877, j'ai proposé ce théorème empirique :

Le triple de tout carré impair, non divisible par 5, égale la somme des carrés de trois nombres premiers, autres que 2 et 5 (\*\*\*)

Si l'on supprimait la restriction : non divisible par 5, le théorème empirique ne différerait pas de celui qui résulte de l'égalité (1), mal interprétée. Mais on ne peut la supprimer.

En effet, le nombre  $6\ 075 = 5 \cdot 45^2$  n'est pas la somme des carrés de trois nombres premiers impairs (iv).

(\*) Pendant plusieurs années, j'ai admis la première hypothèse. (Mai 1886.)

(\*\*) On a imprimé  $x^{bb}$  au lieu de  $x^{5bb}$ .

(\*\*\*) Voir la Note LXXXVII.

(iv) Le carré de tout nombre premier impair, autre que 5, est terminé par 1 ou par 9. De là résulte que, dans l'équation supposée :

$$6\ 075 = p^2 + p'^2 + p''^2,$$

un des nombres  $p, p', p''$  égale 5. Soit  $p = 5$ .

Il vient

$$6\ 050 = p'^2 + p''^2,$$

puis

$$121 = x^2 + y^2;$$

équation impossible. (Mai 1886.)

**CXII. — Une intégrale triple.**

(Janvier 1876.)

I. Soit la relation connue (\*):

$$\left. \begin{aligned} C_{2n, n} + \frac{1}{5} C_{2n-2, n-1} \cdot C_{2, 1} + \frac{1}{5} C_{2n-4, n-2} \cdot C_{4, 2} + \dots + \frac{1}{2n+1} C_{2n, n} \\ = 4^n \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{5 \cdot 5 \cdot 7 \dots 2n+1} \end{aligned} \right\} (1)$$

En général,

$$\frac{\Gamma(2p+1)}{[\Gamma(p+1)]^2} = \frac{2^{2p+1}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{2p} \varphi d\varphi = \frac{4^p}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^{2p} \varphi d\varphi.$$

Le premier membre de l'égalité (1) est donc la même chose que

$$\frac{4^n}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi d\theta \left[ \cos^{2n} \varphi + \frac{1}{5} \cos^{2n-2} \varphi \cos^2 \theta + \dots + \frac{1}{2n+1} \cos^{2n} \theta \right].$$

Pour sommer la quantité entre parenthèses, je pose

$$y = x \cos^{2n} \varphi + \frac{x^3}{5} \cos^{2n-2} \varphi \cos^2 \theta + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cos^{2n} \theta;$$

d'où

$$y' = \cos^{2n} \varphi + x^2 \cos^{2n-2} \varphi \cos^2 \theta + \dots + x^{2n} \cos^{2n} \theta;$$

c'est-à-dire

$$y' = \frac{\cos^{2n+2} \varphi - x^{2n+2} \cos^{2n+2} \theta}{\cos^2 \varphi - x^2 \cos^2 \theta}.$$

La somme cherchée est donc

$$\int_n^1 \frac{\cos^{2n+2} \varphi - x^{2n+2} \cos^{2n+2} \theta}{\cos^2 \varphi - x^2 \cos^2 \theta} dx.$$

(\*) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. II, p. 159; t. III, p. 417; etc.  
Voir aussi la *Note LXXXVII*.

Par conséquent,

$$\int_0^\pi \int_0^\pi d\varphi d\theta \int_0^1 \frac{\cos^{2n+2}\varphi - x^{2n+2} \cos^{2n+2}\theta}{\cos^2\varphi - x^2 \cos^2\theta} dx = \frac{1}{\pi^2} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{5 \cdot 7 \dots 2n+1}. \quad (2)$$

II. *Remarque.* — La fraction

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{5 \cdot 7 \dots 2n+1} = \frac{[2^n \Gamma(n+1)]^2}{\Gamma(2n+2)} = 4^n \int_0^1 z^n (1-z)^n dz.$$

Donc la relation (2) peut être écrite ainsi :

$$\int_0^\pi \int_0^\pi d\varphi d\theta \int_0^1 \frac{\cos^{2n+2}\varphi - x^2 \cos^{2n+2}\theta}{\cos^2\varphi - x^2 \cos^2\theta} dx = \frac{4^n}{\pi^2} \int_0^1 z^n (1-z)^n dz. \quad (5)$$

### CXLII. — Une formule du binôme.

(Février 1876.)

I. La théorie de la décomposition des fractions rationnelles donne, comme cas particulier :

$$= \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^{n-p} C_{2n-p-1, n-1} \left[ \frac{1}{(a-b)^{2n-p}(x-a)^p} + \frac{1}{(b-a)^{2n-p}(x-b)^p} \right]. \quad (1)$$

Si  $x = 0$  (\*), cette relation devient

$$\frac{1}{(ab)^n} = \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^n C_{2n-p-1, n-1} \left[ \frac{1}{(a-b)^{2n-p} a^p} + \frac{1}{(b-a)^{2n-p} b^p} \right] (**). \quad (2)$$

Multiplications les deux membres par  $(a-b)^{2n} a^n b^n$ , et changeons  $b$  en  $-b$  :

$$(a+b)^{2n-1} = \sum_{p=1}^{p=n} C_{2n-p-1, n-1} (a+b)^{p-1} a^{n-p} b^{n-p} (a^p + b^p). \quad (A)$$

(\*) Les constantes  $a, b$  sont supposées inégales, et non nulles.

(\*\*) A cause de

$$(-1)^{n-p} : (-1)^p = (-1)^{n-2p} = (-1)^n.$$

Par exemple,

$$\begin{aligned}
(a + b)^{13} = & 924(ab)^6(a + b) + 462(a + b)(ab)^5(a^2 + b^2) \\
& + 210(a + b)^2(ab)^4(a^3 + b^3) + 84(a + b)^3(ab)^3(a^4 + b^4) \\
& + 28(a + b)^4(ab)^2(a^5 + b^5) \\
& + 7(a + b)^5(ab)(a^6 + b^6) + (a + b)^6(a^7 + b^7).
\end{aligned}$$

II. Si l'on fait  $b = ax$ , et qu'on change  $n$  en  $n + 1$ , on trouve

$$(1 + x)^{2n} = (1 + x)^{n-1}(1 + x^{n+1}) + C_{n+1,1}(1 + x)^{n-2}x(1 + x^n) \left. \begin{array}{l} \\ + C_{n+2,2}(1 + x)^{n-3}x^2(1 + x^{n-1}) + \dots + C_{2n,n}x^n. \end{array} \right\} \text{(B)}$$

Donc, en particulier,

$$\begin{aligned}
(1 + x)^8 = & (1 + x)^5(1 + x^3) + 5(1 + x)^2x(1 + x^4) + 15(1 + x)x^2(1 + x^5) \\
& + 55x^3(1 + x^2) + 70x^4.
\end{aligned}$$

(Addition. — Mars 1886.)

III. L'égalité (B) peut être écrite ainsi

$$\begin{aligned}
& (1 + x)^{2n} \\
= & (1 + x)^{n-1} + C_{n+1,1}(1 + x)^{n-2}x + C_{n+2,2}(1 + x)^{n-3}x^2 + \dots + Ax^{n-1} \left. \begin{array}{l} \\ + x^{n+1}[(1 + x)^{n-1} + C_{n+1,1}(1 + x)^{n-2} + C_{n+2,2}(1 + x)^{n-3} + \dots + A] \end{array} \right\} \text{(5)} \\
& + C_{2n,n}x^n \text{ (*)}.
\end{aligned}$$

On a, en série convergente,

$$\begin{aligned}
(1 + x - x)^{-(n+1)} = & (1 + x)^{-(n+1)} \\
\times \left[ 1 + C_{n+1,1} \left( \frac{x}{1+x} \right) + C_{n+2,2} \left( \frac{x}{1+x} \right)^2 + \dots + A \left( \frac{x}{1+x} \right)^{n-1} + B \left( \frac{x}{1+x} \right)^n + \dots \right],
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
& (1 + x)^{2n} \\
= & (1 + x)^{n-1} + C_{n+1,1}(1 + x)^{n-2}x + \dots + Ax^{n-1} + B \frac{x^n}{1 + x} \\
& + C \frac{x^{n+1}}{(1 + x)^2} + \dots \text{ (**)}
\end{aligned}$$

(\*)  $A = C_{2n-1, n}$ .

(\*\*)  $B = C_{2n, n}, C = C_{2n+1, n}, \dots$

De même,

$$(1+x)^{-(n+1)} = (1+x-1)^{-(n+1)} = \\ (1+x)^{-(n+1)} \left[ 1 + C_{n+1,1} \frac{1}{1+x} + \dots + A \frac{1}{(1+x)^{n-1}} + B \frac{1}{(1+x)^n} + \dots \right],$$

ou

$$(1+x)^{2n} \\ = x^{n+1} \left[ (1+x)^{n-1} + C_{n+1,1} (1+x)^{n-2} + \dots + A + B \frac{1}{1+x} + C \frac{1}{(1+x)^2} + \dots \right].$$

Par conséquent, l'égalité (3) devient

$$B \frac{x^n}{1+x} + C \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} + \dots \\ = (1+x)^{2n} - x^{n+1} \left[ B \frac{1}{1+x} + C \frac{1}{(1+x)^2} + \dots \right] + C_{2n,n} x^n,$$

ou

$$\frac{(1+x)^{2n}}{x^{n+1}} = C_{2n+1,n} \frac{1+x}{(1+x)^2} + C_{2n+2,n} \frac{1+x}{(1+x)^3} + C_{2n+3,n} \frac{1+x^2}{(1+x)^4} + \dots \quad (C)$$

On a ainsi un développement de

$$\frac{(1+x)^{2n}}{x^{n+1}},$$

en série convergente, du moins si la variable  $x$  est comprise entre 0 et 1 (\*).

Si  $x$  égale 1, la formule se réduit à

$$4^n = + \frac{1}{2} C_{2n+1,n} + \frac{1}{4} C_{2n+2,n} + \frac{1}{8} C_{2n+3,n} + \dots; \quad (4)$$

expression connue, facile à vérifier.

(\*) Cette relation (C) a quelque analogie avec une remarquable formule d'Euler, que j'ai démontrée en 1844 (*Journal de Liouville*, t. IX).



**CXLIII. — Sur une série de Legendre (\*)**

(Décembre 1875.)

I. Parmi les Notes que l'illustre Legendre a placées à la suite de sa *Géométrie*, la plus remarquable me paraît être celle qui donne, en fraction continue, le développement de

$$\psi(z) = \frac{1 + \frac{a}{z+1} + \frac{1}{1 \cdot 2(z+1)(z+2)} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3(z+1)(z+2)(z+3)} + \dots}{1 + \frac{a}{z} + \frac{1}{1 \cdot 2 z(z+1)} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 z(z+1)(z+2)} + \dots}; \quad (1)$$

savoir,

$$\psi(z) = \frac{a}{z + \frac{a}{z+1 + \frac{a}{z+2 + \frac{a}{z+3 + \dots}}}} \quad (2)$$

Ce développement résulte, d'ailleurs, des équations

$$\varphi(z) - \varphi(z+1) = \frac{a}{z(z+1)} \varphi(z+2), \quad (3)$$

$$\psi(z) = \frac{a \varphi(z+1)}{z \varphi(z)};$$

dans lesquelles

$$\varphi(z) = 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{1 \cdot 2 \cdot z(z+1)} + \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot z(z+1)(z+2)} + \dots (**). \quad (5)$$

(\*) Tirée, en partie, des *Notes d'Algèbre et d'Analyse*; en partie, du *Bulletin de l'Académie*. (Janvier 1876.)

(\*\*) La formule (4) est l'égalité (1), mise sous forme abrégée.

II. Changeant de notation, soit

$$\varphi(k) = y = 1 + \frac{x}{1 \cdot k} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot k(k+1)} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot k(k+1)(k+2)} + \dots \quad (6)$$

Pour évaluer  $y$ , ou sommer la série, prenons la dérivée de  $x^{k-1}y$  :

$$(x^{k-1}y)' = (k-1)x^{k-2} + x^{k-1} + \frac{x^k}{1 \cdot 2 \cdot k} + \frac{x^{k+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot k(k+1)} + \dots$$

Multiplions par  $x^{2-k}$  les deux membres de cette égalité, et prenons encore les dérivées ; nous aurons

$$[x^{2-k}(x^{k-1}y)']' = 1 + \frac{x}{1 \cdot k} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot k(k+1)} + \dots = y ;$$

ou

$$xy'' + ky' - y = 0. \quad (7)$$

Telle est l'équation qui, intégrée, ferait connaître  $y$ .

III. On tire, de l'équation (6) :

$$y' = \frac{1}{k} \left[ 1 + \frac{x}{1 \cdot (k+1)} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot (k+1)(k+2)} + \dots \right],$$

ou

$$y' = \frac{1}{k} \varphi(k+1). \quad (8)$$

La relation (4) devient donc, après le changement de notation,

$$\psi(k) = x \frac{y'}{y}; \quad (9)$$

ou, ce qui est équivalent,

$$k \frac{d \cdot \varphi(x, k)}{dx} = \varphi(x, k+1) (*). \quad (10)$$

IV. Lorsque  $k = \frac{1}{2}$ ,

$$\psi(k) = \sqrt{x} \frac{e^{2\sqrt{x}} - e^{-2\sqrt{x}}}{e^{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}}} (**).$$

(\*) Cette équation (10) se rattache au *Calcul des différences mêlées*, dont Biot, et d'autres Géomètres, se sont occupés au commencement du siècle.

(\*\*) LEGENDRE, *Éléments de Géométrie* (1825), p. 291.

L'équation (9) devient

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{e^{2\sqrt{x}} - e^{-2\sqrt{x}}}{e^{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}}}.$$

Le second membre est la dérivée de

$$e^{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}};$$

donc

$$y = y_1 = e^{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}}$$

doit satisfaire à l'équation

$$xy'' + \frac{1}{2}y' - y = 0. \quad (11)$$

C'est ce qui a lieu. Connaissant cette *intégrale particulière*, on trouve, sans peine, *l'intégrale générale* :

$$y = Ae^{2\sqrt{x}} + Be^{-2\sqrt{x}}. \quad (12)$$

V. Pour réduire, au premier ordre, l'équation

$$xy'' + ky' - y = 0, \quad (7)$$

il suffit d'employer la transformation connue :

$$y = e^{\int u dx}. \quad (13)$$

On trouve

$$x(u' + u^2) + ku - 1 = 0. \quad (14)$$

Supposons, pour un instant,

$$u'x + ku = 0;$$

d'où  $u = Cx^{-k}$ . Le principe de la *variation des constantes* donne, tout de suite,

$$\frac{dC}{dx} = x^{k-1} - x^{-k}C^2,$$

ou

$$\frac{dz}{dx} = x^{k-1} - x^{-k}z^2; \quad (15)$$

équation trouvée par M. Le Paige, au moyen d'une autre transformation (\*), et réductible à l'équation de *Riccati* :

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{1-k} \left[ x^{-\frac{2k-1}{k-1}} - v^2 \right]. \quad (16)$$

(\*) *Bulletin*, 1876, t. XLI, p. 1011.

VI. Par les formules (15) et (9) :

$$\frac{y'}{y} = u = \frac{1}{x} \psi(k).$$

Or, après le changement de  $a$  en  $x$ , la formule (2) donne

$$\psi(k) = \frac{x}{k + \frac{x}{k+1 + \frac{x}{k+2 + \dots}}}$$

Done

$$u = \frac{1}{k + \frac{x}{k+1 + \frac{x}{k+2 + \dots}}}$$

De plus,  $z = ux^k$ . Conséquemment, l'intégrale de l'équation (15) est, à une constante près, représentée par

$$z = \frac{x^k}{k + \frac{x}{k+1 + \frac{x}{k+2 + \dots}}} \quad (17)$$

Si, par exemple,  $k=1$ , l'équation

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{z^2}{x}$$

est vérifiée par

$$z = \frac{x}{1 + \frac{x}{2 + \frac{x}{3 + \dots}}} \quad (*).$$

(\*) Lorsque  $k=1$ , la sommation de la série (6) dépend de la quantité

$$\int_0^\pi e^{(1+x)\cos\theta} \cos(x \sin\theta) \cos(\sin\theta) d\theta.$$

**CXLIV. — Relations entre des sommes de carrés.**

(Avril 1876) (\*).

Parmi les innombrables identités relatives à ce sujet, a-t-on remarqué celle-ci :

$$\begin{aligned} & (a+b+c-d)^2 + (b+c+d-a')^2 + (c+d+a'-b')^2 + (d+a'+b'-c')^2 \\ & + (a'+b'+c'-d')^2 + (b'+c'+d'-a)^2 + (c'+d'+a-b)^2 + (d'+a+b-c)^2 \\ & = (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+d)^2 + (d+a')^2 + (a'+b')^2 + (b'+c')^2 \\ & + (c'+d')^2 + (d'+a)^2 + (a-d)^2 + (b-a')^2 + (c-b')^2 + (d-c')^2 \\ & + (a'-d')^2 + (b'-a)^2 + (c'-b)^2 + (d'-c)^2? \end{aligned}$$

Elle réduit, à une somme de huit carrés, une somme de seize carrés.

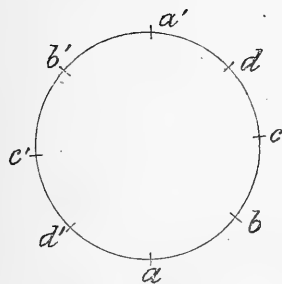
Par exemple :

$$\begin{aligned} & 2^2 + 5^2 + 8^2 + 8^2 + 10^2 + 19^2 + 14^2 + 8^2 \\ & = 5^2 + 5^2 + 7^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 15^2 + 9^2 \\ & + 5^2 + 4^2 + 2^2 + 5^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 + 5^2, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & 4 + 9 + 64 + 64 + 100 + 361 + 196 + 64 = 862 \\ & = 9 + 25 + 49 + 100 + 121 + 144 + 225 + 81 \\ & + 9 + 16 + 4 + 9 + 4 + 16 + 25 + 25. \end{aligned}$$

(Addition. — Mars 1886.)



II. Si l'on suppose les quantités  $a, b, c, d, a', b', c', d'$  disposées circulairement, on peut énoncer ainsi l'identité précédente :

*On ajoute deux termes consécutifs, et l'on élève au carré.*

*On retranche deux termes dont les rangs diffèrent de trois unités, et l'on élève au carré.*

(\*) Complément de la Note CIV.

On fait la somme de trois termes consécutifs; on en retranche le terme suivant; et l'on élève au carré.

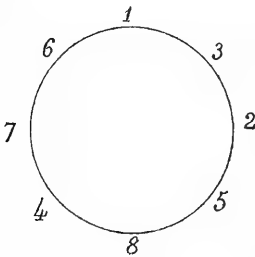
Cela posé, la somme des seize premiers carrés, ainsi formés, égale la somme des huit derniers.

En outre, le premier membre peut être remplacé par

$$(a+d'+c'-b')^2 + (d'+c'+b'-a')^2 + (c'+b'+a'-d)^2 + (b'+a'+d-c)^2 \\ + (a'+d+c-b)^2 + (d+c+b-a)^2 + (c+b+a-d')^2 + (b+a+d'-c')^2;$$

c'est-à-dire que l'on peut faire le tour de la figure, dans un sens ou dans l'autre.

### III. Application.



$$\begin{aligned} 1^\circ & 4^2 + 5^2 + 7^2 + 15^2 + 12^2 + 11^2 \\ & \quad + 15^2 + 7^2 = 742, \\ 2^\circ & 4^2 + 5^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 5^2 + 4^2 \\ & \quad + 4^2 = 94, \\ 3^\circ & 1^2 + 2^2 + 11^2 + 10^2 + 15^2 + 16^2 \\ & \quad + 11^2 + 8^2 = 856, \\ 4^\circ & 10^2 + 9^2 + 14^2 + 15^2 + 12^2 + 9^2 \\ & \quad + 0^2 + 5^2 = 856, \\ 5^\circ & 742 + 94 = 656. \end{aligned}$$

IV. Autre identité. — Si  $s$  et  $n$  désignent la somme et le nombre des quantités  $a, b, c, \dots$  on a

$$\sum (s - 2a)^2 = (n - 4)s^2 + \sum (2a)^2.$$

Lorsque  $n = 5$ , elle se réduit à

$$\sum (s - 2a)^2 = s^2 + \sum (2a)^2;$$

en sorte que la somme de cinq carrés est remplacée par la somme de six carrés.

Etc.

**CXLV. — Sur les développantes d'une hypocycloïde.**

( Juin 1856 ) (\*).

I. Soit l'hypocycloïde à quatre rebroussements, A, représentée par

$$\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Soit MP la tangente en M, faisant, avec AO, l'angle  $\varphi$ . On a :

$$\alpha = a \cos^3 \varphi,$$

$$\beta = a \sin^3 \varphi (**),$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\cos \varphi, \quad \frac{d\beta}{ds} = \sin \varphi, \quad s = \frac{5}{2} a \sin^2 \varphi.$$

Si AMP =  $l$ , les coordonnées du point P sont

$$x = \alpha - (l - s) \cos \varphi, \quad y = \beta + (l - s) \sin \varphi;$$

ou

$$x = a \cos^3 \varphi - \left( l - \frac{5}{2} a \sin^2 \varphi \right) \cos \varphi,$$

$$y = a \sin^3 \varphi + \left( l - \frac{5}{2} a \sin^2 \varphi \right) \sin \varphi.$$

Comme cas particulier, je suppose  $l = \frac{5}{4} a$  : la développante B, lieu du point P, passera par le sommet I de la développée A.

En vertu de cette hypothèse, les formules précédentes se réduisent à

$$x = \frac{1}{4} a (5 - 2 \cos^2 \varphi) \cos \varphi, \quad y = \frac{1}{4} a (5 - 2 \sin^2 \varphi) \sin \varphi. \quad (1)$$

(\*) Résumé d'une Note publiée dans les *Comptes rendus*, à propos de deux communications de Lord Brougham.

(\*\*) *Cours d'Analyse*, p. 494.

II. Celles-ci peuvent être écrites ainsi :

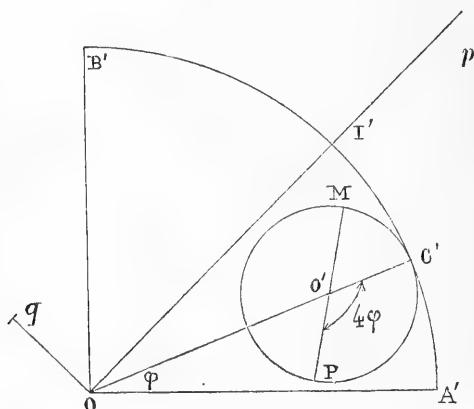
$$x = \frac{1}{8} a(5 \cos \varphi + 5 \cos \varphi - 4 \cos^3 \varphi) = \frac{1}{8} a(5 \cos \varphi - \cos 5\varphi),$$

$$y = \frac{1}{8} a(5 \sin \varphi + 5 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi) = \frac{1}{8} a(5 \sin \varphi + \sin 5\varphi);$$

ou plutôt de cette manière :

$$x = -\frac{a}{8} \cos 5\varphi + \frac{5a}{8} \cos \varphi, \quad y = \frac{a}{8} \sin 5\varphi + \frac{5a}{8} \sin \varphi (*). \quad (2)$$

Sous cette forme, il est aisé de reconnaître que la *développante* B est, comme la développée A, une *hypocycloïde*.



En effet, supposons qu'une circonférence  $O'$ , dont le rayon est  $R'$ , roule à l'intérieur d'une circonférence  $O$ , ayant pour rayon

$$R = 4R' = \frac{a}{2}.$$

$C'$  étant le point de contact, soient  $C'O'OA = \varphi$ ,  $C'O'P = 4\varphi$  : le lieu du point  $P$  est une hypocycloïde dont  $A'$  et  $B'$  sont deux rebroussements.

(\*) Par suite d'une faute de calcul ou d'une faute d'impression, les formules analogues à celles-ci, rapportées dans les *Comptes rendus*, sont inexactes; mais nos conclusions subsistent.



Un point quelconque de la circonférence  $O'$  décrit une hypocycloïde égale à la première. En particulier, le point  $M$ , diamétralement opposé à  $P$ , en décrit une qui passe au milieu  $I'$  de l'arc  $A'B'$ . Cela posé, si l'on appelle  $X, Y$  les coordonnées rectangulaires de  $M$ , on a :

$$\left. \begin{aligned} X &= 5R' \cos \varphi + R' \cos (\varphi + \pi - 4\varphi) = R' (5 \cos \varphi - \cos 5\varphi), \\ Y &= 5R' \sin \varphi + R' \sin (\varphi + \pi - 4\varphi) = R' (5 \sin \varphi + \sin 5\varphi); \end{aligned} \right\} (5)$$

ou, à cause de  $R' = \frac{a}{8}$  :

$$X = x, \quad Y = y.$$

III. Pour avoir l'équation de la développée, sous la forme  $F(X, Y) = 0$ , il faudrait éliminer  $\varphi$ , entre les formules (5). Nous allons effectuer, *indirectement*, cette élimination.

Prenons  $OI'$  pour nouvel axe des abscisses ; et appelons  $p, q$  les nouvelles coordonnées de  $M$ . D'après les formules évidentes

$$p = (X + Y) \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad q = (X - Y) \sqrt{\frac{1}{2}} : \quad (4)$$

$$p = R' \sqrt{\frac{1}{2}} [5(\cos \varphi + \sin \varphi) + (-\cos 5\varphi + \sin 5\varphi)],$$

$$q = R' \sqrt{\frac{1}{2}} [5(\cos \varphi - \sin \varphi) - (\cos 5\varphi + \sin 5\varphi)].$$

On a :

$$\sqrt{\frac{1}{2}} (\cos \varphi + \sin \varphi) = \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right),$$

$$- \sqrt{\frac{1}{2}} (\cos \varphi - \sin \varphi) = \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} (-\cos 5\varphi + \sin 5\varphi) = \cos \left( 5\varphi - 5 \frac{\pi}{4} \right),$$

$$- \sqrt{\frac{1}{2}} (\cos 5\varphi + \sin 5\varphi) = \sin \left( 5\varphi - 5 \frac{\pi}{4} \right);$$

donc

$$p = R' \left[ 5 \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left( 5\varphi - 5 \frac{\pi}{4} \right) = 4R' \cos^3 \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right],$$

$$q = R' \left[ -5 \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left( 5\varphi - 5 \frac{\pi}{4} \right) = 4R' \sin^3 \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right];$$

puis

$$p^{\frac{2}{3}} + q^{\frac{2}{3}} = (4R)^{\frac{2}{3}}; \quad (5)$$

puis encore, par les formules (4) :

$$(X + Y)^{\frac{2}{3}} + (X - Y)^{\frac{2}{3}} = 2\sqrt[3]{4R^{\frac{2}{3}}}; \quad (6)$$

ou, ce qui est équivalent,

$$(x + y)^{\frac{2}{3}} + (x - y)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} a^{\frac{2}{3}} (*). \quad (7)$$

Tel est le résultat cherché.

IV. La tangente T, à l'hypocloïde A, est représentée par

$$\frac{x}{\cos \varphi} + \frac{y}{\sin \varphi} = a. \quad (8)$$

Les développantes de A sont les trajectoires orthogonales de T.  
La condition d'orthogonalité est

$$-\frac{dy}{dx} \operatorname{tg} \varphi + 1 = 0.$$

Donc l'équation différentielle de ces trajectoires serait

$$\frac{x}{dy} + \frac{y}{dx} = \frac{a}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

ou

$$y = -x \frac{dx}{dy} + \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}}. \quad (9)$$

D'après la remarque faite dans la Note XX (t. I, p. 54) (\*\*),  
une intégrale de cette équation (9) est l'équation (7).

(\*) On conclut de cette équation, en élevant deux fois au cube :

$$[a^2 - 4(x^2 + y^2)]^3 = 108 a^2 (x^2 - y^2)^2.$$

(\*\*) Et, antérieurement, dans les *Comptes rendus*.

V. Nous pouvons résumer, comme il suit, les relations qui existent entre l'hypocycloïde A, ses parallèles, l'hypocycloïde B et ses parallèles :

1° De même que la courbe A, et ses parallèles, sont les enveloppes d'une série de droites parallèles entre elles, et dont l'une, ayant pour longueur a, glisse sur les côtés d'un angle droit; les développantes de ces courbes sont les enveloppes d'une seconde série de droites parallèles, dont l'une, ayant pour longueur  $\frac{a}{2}$ , glisse sur les bissectrices de l'angle droit;

2° A chaque courbe de la première série correspond, dans la seconde, une courbe semblable : le rapport de similitude est  $\frac{1}{2}$  (\*).

#### CXLVI. — Sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde et de la surface des ondes (\*\*).

I. Si l'on représente par  $l, m, n$  les cosinus directifs de la normale  $mn$  en un point  $m$  d'une surface  $s$ , et que l'on adopte les notations employées dans la Note LVIII, les lignes de courbure de  $s$  seront représentées par

$$\frac{dx}{dl} = \frac{dm}{dy} = \frac{dz}{dn} = \frac{udu}{dv}. \quad (1)$$

Soient, comme dans le *Mémoire sur une transformation géométrique et sur la surface des ondes*,  $\alpha, \beta, \gamma$  les cosinus directifs d'une droite OA, perpendiculaire au plan  $Omn$ . Posant

$$k = + \sqrt{u^2 - v^2}, \quad (2)$$

on trouve

$$\frac{\alpha}{ny - mz} = \frac{\beta}{lz - nx} = \frac{\gamma}{mx - ly} = \frac{1}{k}; \quad (5)$$

puis, au lieu des équations (1) :

$$\frac{\sum \alpha dx}{\sum \alpha dl} = \frac{udu}{dv}. \quad (4)$$

(\*) Voir la Note CXXIII.

(\*\*) Communiquée, en partie, au Congrès de Paris (24 août 1878).

II. *Ellipsoïde.* — Dans le cas où  $s$  est un ellipsoïde, on a

$$l = \frac{vx}{a^2}, \quad x^2 = a^4 \frac{u^2 + \frac{b^2 c^2}{v^2} - (b^2 + c^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \quad (*), \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{ny - mz}{k} = \frac{vyz}{k} \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right) \quad (**). \quad (6)$$

Donc :

$$\sum \alpha dx = \frac{vxyz}{k} \sum \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right) \frac{dx}{x} = \frac{xyz}{k} \sum \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right) \frac{uv^5 du - b^2 c^2 dv}{k^2 v^2 + (b^2 - v^2)(c^2 - v^2)},$$

$$\begin{aligned} \sum \alpha dl &= \frac{v}{k} \sum yz \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right) \frac{1}{a^2} (v dx + x dv) \\ &= \frac{vxyz}{k} \sum \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right) \frac{1}{a^2} \left( v \frac{dx}{x} + dv \right) \\ &= \frac{v^2 xyz}{k} \sum \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right) \frac{1}{a^2} \frac{dx}{x} \quad (***) \\ &= \frac{vxyz}{k} \sum \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right) \frac{1}{a^2} \frac{uv^5 du - b^2 c^2 dv}{k^2 v^2 + (b^2 - v^2)(c^2 - v^2)}; \end{aligned}$$

ou bien :

$$\sum \alpha dx = \frac{xyz}{a^2 b^2 c^2 k} \sum b^2 (b^2 - c^2) \frac{uv^5 du - b^2 c^2 dv}{k^2 v^2 + (b^2 - v^2)(c^2 - v^2)}, \quad (7)$$

$$\sum \alpha dl = \frac{vxyz}{a^2 b^2 c^2 k} \sum (b^2 - c^2) \frac{uv^5 du - b^2 c^2 dv}{k^2 v^2 + (b^2 - v^2)(c^2 - v^2)}. \quad (8)$$

Si l'on désigne par  $\varphi$  le premier membre de l'équation (4), on a

$$\left. \begin{aligned} v\varphi &= \\ \frac{\sum a^2 (b^2 - c^2) (uv^5 du - b^2 c^2 dv) [k^2 v^2 + (c^2 - v^2)(a^2 - v^2)] [k^2 v^2 + (a^2 - v^2)(b^2 - v^2)]}{\sum (b^2 - c^2) (uv^5 du - b^2 c^2 dv) [k^2 v^2 + (c^2 - v^2)(a^2 - v^2)] [k^2 v^2 + (a^2 - v^2)(b^2 - v^2)]} \end{aligned} \right\} (9)$$

(\*) Note LVIII.

(\*\*) *Mémoire...*, p. 5.

(\*\*\*) Le coefficient de  $dv$  est nul.

III. *Suite.* — Soient, pour abrégier :

$$\left. \begin{aligned} P &= \sum a^2(b^2 - c^2)[k^2v^2 + (c^2 - v^2)(a^2 - v^2)][k^2v^2 + (a^2 - v^2)(b^2 - v^2)], \\ Q &= \sum (b^2 - c^2)[k^2v^2 + (c^2 - v^2)(a^2 - v^2)][k^2v^2 + (a^2 - v^2)(b^2 - v^2)], \\ Q' &= \sum (b^2 - c^2)b^2c^2[k^2v^2 + (c^2 - v^2)(a^2 - v^2)][k^2v^2 + (a^2 - v^2)(b^2 - v^2)]; \end{aligned} \right\} (10)$$

alors l'égalité (9) prend la forme :

$$v\varphi = \frac{Puv^3du - a^2b^2c^2Qdv}{Quv^3du - Q'dv}. \quad (10)$$

Il s'agit d'évaluer les sommes P, Q, Q'.

Chacune est réductible à la forme

$$Ak^4 + Bk^2 + C.$$

Or, on trouve aisément les valeurs suivantes.

1° Pour P :

$$A = v^2 \sum (b^2 - c^2)a^2 = 0,$$

$$B = v^2 \sum (b^2 - c^2)a^2(a^2 - v^2)(b^2 + c^2 - 2v^2) = (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)v^4,$$

$$\begin{aligned} C &= (a^2 - v^2)(b^2 - v^2)(c^2 - v^2) \sum (b^2 - c^2)a^2(a^2 - v^2) \\ &= - (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - v^2)(b^2 - v^2)(c^2 - v^2); \end{aligned}$$

2° Pour Q :

$$A = v^2 \sum (b^2 - c^2) = 0,$$

$$B = v^2 \sum (b^2 - c^2)(a^2 - v^2)(b^2 + c^2 - 2v^2) = (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - v^2)v^2,$$

$$C = (a^2 - v^2)(b^2 - v^2)(c^2 - v^2) \sum (b^2 - c^2)(a^2 - v^2) = 0;$$

3° Pour Q' :

$$A = v^4 \sum (b^2 - c^2)b^2c^2 = - (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)v^4,$$

$$\begin{aligned} B &= v^2 \sum (b^2 - c^2)b^2c^2(a^2 - v^2)(b^2 + c^2 - 2v^2) \\ &= (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)v^4(a^2 + b^2 + c^2 - 2v^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (a^2 - v^2)(b^2 - v^2)(c^2 - v^2) \sum (b^2 - c^2)b^2c^2(a^2 - v^2) \\ &= (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - v^2)(b^2 - v^2)(c^2 - v^2). \end{aligned}$$

Conséquemment, si l'on fait abstraction du facteur

$$(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2),$$

on peut prendre :

$$\left. \begin{aligned} P &= k^2 v^4 - (a^2 - v^2)(b^2 - v^2)(c^2 - v^2), \\ Q &= k^2 v^2, \\ Q' &= [-k^4 v^2 + k^2(a^2 + b^2 + c^2 - 2v^2)v^2 + (a^2 - v^2)(b^2 - v^2)(c^2 - v^2)]v^2. \end{aligned} \right\} (12)$$

Par suite, après quelques réductions,

$$\varphi = \frac{u^2}{v} \cdot \frac{k^2 uv^5 du - (a^2 - v^2)(b^2 - v^2)(c^2 - v^2)uv du - k^2 a^2 b^2 c^2 dv}{k^2 u^5 v^5 du - (a^2 - u^2)(b^2 - u^2)(c^2 - u^2)v^2 dv - k^2 a^2 b^2 c^2 dv}. \quad (15)$$

Relativement aux coordonnées *podaires*  $u, v$ , l'équation différentielle des lignes de courbure est donc

$$\frac{k^2 uv^5 du - (a^2 - v^2)(b^2 - v^2)(c^2 - v^2)uv du - k^2 a^2 b^2 c^2 dv}{k^2 u^5 v^5 du - (a^2 - u^2)(b^2 - u^2)(c^2 - u^2)v^2 dv - k^2 a^2 b^2 c^2 dv} = \frac{v du}{u dv}. \quad (14)$$

Chassant le dénominateur, ordonnant, et supprimant un facteur, on trouve

$$u^2 v^4 du^2 + uv^5(u^2 - a^2 - b^2 - c^2)dudv + a^2 b^2 c^2 dv^2 = 0; \quad (15)$$

résultat connu (\*).

IV. *Surfaces conjuguées* (\*\*). — L'équation des lignes de courbure d'une surface  $s$  étant

$$\frac{\sum \alpha dx}{\sum \alpha dl} = \frac{u du}{dv}, \quad (4)$$

celle des lignes de courbure de la surface  $S$ , conjuguée de  $s$ , sera

$$\frac{\sum \alpha dX}{\sum \alpha dL} = \frac{u du}{dv}. \quad (16)$$

Or (\*\*\*) ,

$$X = \frac{vx - lu^2}{k}, \quad L = \frac{x - lv}{k}. \quad (17)$$

(\*) *Note* LVIII.

(\*\*) *Mémoire...*, p. 4.

(\*\*\*) *Mémoire...*, pp. 5 et 6.

Il résulte, de ces valeurs :

$$\left. \begin{aligned} k \sum \alpha dX &= v \sum \alpha dx - u^2 \sum \alpha dl \text{ (*),} \\ k \sum \alpha dL &= \sum \alpha dx - v \sum \alpha dl. \end{aligned} \right\} (18)$$

Désignons par  $\phi$  le premier membre de l'équation (16). D'après les deux dernières formules,

$$\phi = \frac{v\varphi - u^2}{\varphi - v},$$

ou

$$\phi\varphi - (\phi + \varphi)v + u^2 = 0. \quad (19)$$

D'un autre côté, l'équation (16) devenant

$$\frac{v\varphi - u^2}{\varphi - v} = \frac{u du}{dv},$$

il résulte, de celle-ci :

$$\varphi = u \frac{v du - u dv}{u du - v dv}. \quad (20)$$

On a donc ce théorème :

*La même fonction  $\varphi$ , égale à  $u \frac{du}{dv}$  pour les lignes de courbure de  $s$ , devient égale à  $u \frac{v du - u dv}{u du - v dv}$  pour les lignes de courbure de  $S$  ;*

(\*) On a

$$dX = \frac{k(vdx + xdv - u^2 dl - 2ludu) - (vx - lu^2) dk}{k^2};$$

donc

$$\begin{aligned} k^2 \sum \alpha dX &= \sum (ny - mz)(vdx + xdv - u^2 dl - 2ludu) \\ &\quad - \frac{dk}{k} \sum (ny - mz)(vx - lu^2); \end{aligned}$$

et, en négligeant les sommes évidemment nulles :

$$k^2 \sum \alpha dX = v \sum (ny - mz) dx - u^2 \sum (ny - mz) dl,$$

ou

$$k \sum \alpha dX = v \sum \alpha dx - u^2 \sum \alpha dl.$$

Ainsi  $u, v, k$  se comportent comme des constantes.

Le développement de  $k \sum \alpha dL$  donne lieu à la même remarque

ou, ce qui est équivalent :

La même fonction  $\varphi$ , égale à  $u \frac{du}{dv}$  pour les lignes de courbure de  $s$ , devient égale à  $u \frac{vdu - u dv}{udu - vdv}$  pour les transformées, sur  $s$ , des lignes de courbure de  $S$ .

En effet, un point  $M$  de  $S$ , et son conjugué  $m$ , ont mêmes coordonnées  $u, v$ .

V. *Remarque.* — L'équation (19) étant symétrique par rapport aux fonctions  $\varphi, \Phi$ , les lignes de courbure de  $s$  sont représentées, indifféremment, par

$$\varphi = \frac{udu}{dv}, \quad \Phi = u \frac{vdu - u dv}{udu - vdv},$$

et les lignes de courbure de  $S$ , par

$$\Phi = \frac{udu}{dv}, \quad \varphi = u \frac{vdu - u dv}{udu - vdv}.$$

VI. *Surface des ondes.* — Soient, pour abrégier :

$$U = (u^2 - a^2)(u^2 - b^2)(u^2 - c^2), \quad V = (v^2 - a^2)(v^2 - b^2)(v^2 - c^2). \quad (21)$$

Dans le cas où  $s$  est un ellipsoïde, nous avons trouvé (III) :

$$\varphi = \frac{u^2 k^2 uv^5 du + Vuv du - k^2 a^2 b^2 c^2 dv}{v k^2 u^5 v^5 du + Uv^2 dv - k^2 a^2 b^2 c^2 dv}.$$

Donc les lignes de courbure de la surface des ondes sont représentées par l'équation

$$\frac{u (k^2 v^4 + V) uv du - k^2 a^2 b^2 c^2 dv}{v k^2 u^5 v^5 du + (Uv^2 - k^2 a^2 b^2 c^2) dv} = \frac{v du - u dv}{udu - v dv},$$

que l'on peut réduire à

$$Vu^5 v du^2 - [(Uv^2 + Vu^2)v^2 + k^4(a^2 b^2 c^2 - u^2 v^4)] du dv + Uuv^5 dv^2 = 0. \quad (22)$$

Celle-ci, dont la forme est symétrique, paraît néanmoins difficile à intégrer, même quand l'ellipsoïde  $s$  se réduit à un *cylindre* ou à une *ellipse* (\*).

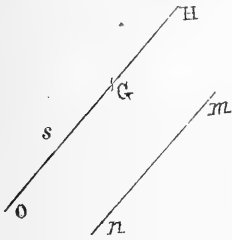
(\*) Dans ce second cas particulier, la surface  $S$ , représentée par

$$(a^2 x^2 + b^2 y^2)(x^2 + y^2 + z^2) - a^2 b^2 (x^2 + y^2) = 0,$$

est une *cyclotomique à directrice rectiligne*. (Note XLI.)



VII. PROBLÈME. — On mène, dans la surface des ondes,  $O$ , un demi-diamètre  $s$ , parallèle à une normale  $mn$  à l'ellipsoïde  $E$ , conjugué de  $O$ . Quelles sont les valeurs de  $s$  ?



Les coordonnées du point d'intersection,  $G$ , sont

$$ls = \frac{vx}{a^2} s,$$

$$ms = \frac{vy}{b^2} s,$$

$$ns = \frac{vz}{c^2} s;$$

done, à cause de la condition connue

$$\sum \frac{a^2 X^2}{s^2 - a^2} = 0 (*),$$

la quantité  $s^2$  est racine de l'équation

$$\sum \frac{x^2}{a^2(s^2 - a^2)} = 0,$$

que l'on peut remplacer par

$$\sum \frac{x^2}{a^2} + \sum \frac{x^2}{s^2 - a^2} = 0;$$

ou encore, par

$$1 + \sum \frac{x^2}{s^2 - a^2} = 0. \quad (25)$$

Le point  $m$  est situé sur l'hyperboloïde  $G$ , représenté par

$$\sum \frac{x^2}{a^2 - g^2} = 1;$$

(\*) Cette équation, jointe à

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = s^2,$$

représente la surface  $O$ .

donc l'équation (23) est vérifiée par  $s^2 = g^2$ ; et, conséquemment, par  $s^2 = h^2$ ,  $h$  étant le paramètre du second hyperboloïde  $H$ , homofocal à l'ellipsoïde  $E$ , et passant au point  $m$ . On a donc ce théorème :

*Soient  $m$  un point de l'ellipsoïde  $E$ , et  $g, h$  les paramètres des hyperboloïdes  $G, H$  qui se coupent en  $m$ , et constituent, avec  $E$ , un système triplement orthogonal. Si, par le centre  $O$ , on mène une parallèle à la normale, en  $m$ , à  $E$ , et que l'on prenne, sur cette parallèle,  $OG = g$ ,  $OH = h$ ; les points  $G, H$  appartiennent à la surface des ondes, conjuguée de  $E$ .*

VIII. COROLLAIRE. — *Si le point  $m$  décrit une ligne de courbure de  $E$ , représentée par  $g = \text{const.}$ , l'un des deux points correspondant à  $m$  décrit, sur  $O$ , une conique sphérique : le rayon de la sphère est  $g$ .*

En d'autres termes :

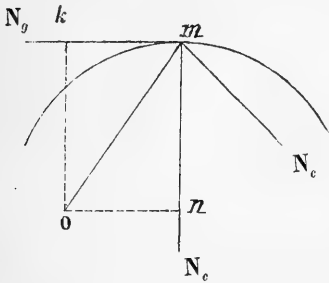
*Le cône  $C$ , dont les génératrices, passant par le pôle, sont parallèles aux normales à l'ellipsoïde  $E$ , menées en tous les points d'une ligne de courbure, coupe, suivant une ligne sphérique, l'une des nappes de la surface des ondes : le rayon de la sphère est le paramètre de l'hyperboloïde sur lequel la ligne de courbure est située (\*).*

IX. Considérons l'ellipsoïde  $E$ , l'hyperboloïde  $G$  et le cône  $C$  dont la directrice est la ligne de courbure  $L$ , intersection de  $E$  et de  $G$ . Les équations de ces surfaces sont, respectivement :

$$\sum \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad \sum \frac{x^2}{a^2 - g^2} = 1, \quad \sum \left( \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2 - g^2} \right) = 0.$$

(\*) Cette proposition complète, nous semble-t-il, un théorème de M. Mannheim : « Sur la surface de l'onde ( $S_0$ ) dérivant de  $E$ , la transformée » d'une ligne de courbure de cette surface est telle que les normales à ( $S_0$ ) » issues des différents points de cette ligne sont respectivement perpendi- » culaires à des diamètres de ( $S_0$ ) égaux entre eux. » (Congrès du Havre.)

Soient  $N_e, N_g, N_c$  les trois normales, au point  $m$ . En désignant par  $p$  la distance du centre au plan tangent, en  $m$ , à l'hyperboloïde, on trouve :



$$\cos(N_e, N_c) = \frac{p}{\sqrt{v^2 + p^2}},$$

$$\cos(N_e, N_g) = -\frac{v}{\sqrt{v^2 + p^2}}.$$

Prenons, pour plan de la figure, celui qui est normal, en  $m$ , à la ligne de courbure. Supposons le centre  $O$  projeté, en  $n$  et en  $k$ , sur les normales  $N_e, N_g$  :  $mm = v, mk = p$ . Si l'on achève le rectangle, on a

$$\cos Omk = \frac{p}{\sqrt{v^2 + p^2}}, \quad \cos Omn = \frac{v}{\sqrt{v^2 + p^2}};$$

donc la normale  $N_e$ , au cône, est perpendiculaire à  $Om$ .

Cette simple remarque donne lieu au théorème suivant, qui complète une proposition due à Lamarle (\*) :

1° Si, par le centre  $O$ , l'on mène des plans  $P$ , parallèles aux plans tangents à l'ellipsoïde  $E$ , en tous les points d'une ligne de courbure  $L$ , le cône  $C$ , enveloppe des plans  $P$ , coupe  $E$  suivant une ligne sphérique : le rayon de la sphère est le paramètre  $g$  de l'hyperboloïde sur lequel la ligne  $L$  est située ;

2° La génératrice de contact, entre le plan  $P$  et le cône, est parallèle à la normale  $N_g$  à l'hyperboloïde (\*\*).

(\*) Si du centre  $O$  de  $(E)$  on mène des plans tangents à cette surface menés  
 » des différents points d'une ligne de courbure  $(m)$ , ces plans enveloppent un  
 » cône du 2° degré qui coupe  $(E)$  suivant une ligne sphérique. (MANNHEIM,  
 Congrès du Havre.)

(\*\*) M. Mannheim a déduit son théorème de celui de Lamarle. Du reste, les deux propositions n'en font réellement qu'une, en vertu du Lemme suivant :

Soient une surface développable  $\Sigma$  et un cône  $\Sigma_1$ , ayant leurs génératrices respectivement parallèles. Soient, sur ces deux surfaces,  $L, L_1$  les trajectoires orthogonales des génératrices : les tangentes  $MP, M_1P_1$ , en deux points correspondants, sont parallèles.

**CXLVII. — Sur les surfaces enveloppes.**

(Février 1875.)

I. Soit

$$f(x, y, z, a, b) = 0 \quad (1)$$

l'équation d'une série de surfaces données;  $a, b$  étant des paramètres variables, indépendants l'un de l'autre. Pour trouver l'équation de l'enveloppe, on doit, suivant la règle ordinaire, éliminer ces paramètres entre l'équation (1) et les équations

$$\frac{df}{da} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{db}{df} = 0. \quad (3)$$

On peut opérer d'une manière un peu différente.

II. Si l'on éliminait  $a$  entre les équations (1) et (2), on trouverait une équation

$$F(x, y, z, b) = 0, \quad (4)$$

représentant (pour une même valeur de  $b$ ) une enveloppe des surfaces données; et, si l'on éliminait  $b$  entre cette équation (4) et  $\frac{dF}{db} = 0$ , on obtiendrait l'équation d'une surface  $\Sigma$ , *enveloppe d'enveloppes* : je dis que  $\Sigma$  est la surface cherchée.

Au lieu d'éliminer  $a$  entre (1) et (2), regardons  $a$  comme une fonction de  $b$ , définie par cette équation (1). L'équation (1) prend la forme

$$f[x, y, z, \varphi(b), b] = 0.$$

Par suite,  $\frac{dF}{db} = 0$  est la même chose que

$$\frac{df}{db} + \frac{df}{da} \frac{da}{db} = 0. \quad (5)$$

Cette équation (5) est une conséquence des équations (1), (2); donc les systèmes :

$$f = 0, \quad \frac{df}{da} = 0, \quad \frac{df}{db} = 0; \quad (A)$$

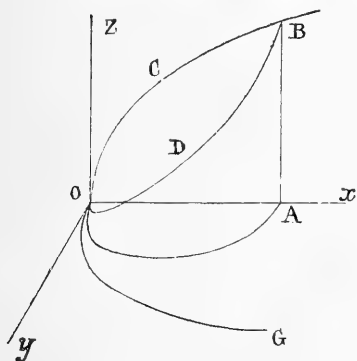
$$f = 0, \quad \frac{df}{da} = 0, \quad \frac{df}{db} + \frac{df}{da} \frac{da}{db} = 0; \quad (B)$$

sont équivalents.

**CXLVIII. — Problème de quadrature.**

(Juin 1875.)

On donne un parabolôide de révolution, représenté par



$$y^2 + z^2 = 2ax.$$

Sur le cercle osculateur, en  $O$ , à la section méridienne  $OG$ , on construit le cylindre  $OABz$ , dont l'équation est

$$y^2 = x(a - x).$$

Trouver l'aire  $A$  de la DEMI-FENÊTRE  $ODBC$  (\*).

1. En employant les notations habituelles, on trouve aisément

$$A = \int_0^a dx \sqrt{a^2 + 2ax} \int_0^{\sqrt{x(a-x)}} \frac{dy}{\sqrt{2ax - y^2}}. \quad (1)$$

L'intégrale relative à  $y$  est

$$\text{arc sin } \frac{y}{\sqrt{2ax}}.$$

Entre les limites données, elle devient  $\text{arc sin } \sqrt{\frac{a-x}{2a}}$ . Donc

$$A = \sqrt{a} \int_0^a dx \sqrt{a + 2x} \text{ arc sin } \sqrt{\frac{a-x}{2a}}. \quad (2)$$

(\*) Ce problème, analogue à celui de la *fenêtre de Viviani*, a été traité dans une leçon à l'Université de Liège.

Pour réduire aux intégrales elliptiques, je pose

$$x = a \left( 1 - \frac{5}{2} \sin^2 \theta \right) (*) \quad (5)$$

De là résulte

$$A = 5a^2 \sqrt{\frac{5}{3}} \int_0^\mu \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \operatorname{arc} \sin \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{3}} \sin \theta \right), \quad (4)$$

$$\sin \mu = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

II. L'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} & \int_0^\mu \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \operatorname{arc} \sin \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{3}} \sin \theta \right) \\ = & -\frac{1}{5} \left[ \cos^5 \theta \operatorname{arc} \sin \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{3}} \sin \theta \right) \right]_0^\mu + \frac{1}{2\sqrt{\frac{5}{3}}} \int_0^\mu \frac{\cos^4 \theta d\theta}{\sqrt{1 - \frac{5}{4} \sin^2 \theta}} \\ = & -\frac{\pi}{56\sqrt{\frac{5}{3}}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{5}{3}}} \int_0^\mu \frac{\cos^4 \theta d\theta}{\sqrt{1 - \frac{5}{4} \sin^2 \theta}}; \end{aligned}$$

puis

$$A = -\frac{\pi}{6} a^2 + \frac{a^2}{5} B, \quad (5)$$

en supposant

$$B = \int_0^\mu \frac{\cos^4 \theta d\theta}{\sqrt{1 - \frac{5}{4} \sin^2 \theta}}. \quad (6)$$

III. Soit, généralement,

$$\int \frac{\cos^4 \theta d\theta}{\Delta} = \alpha (\Delta \sin \theta \cos \theta) + \beta \int \frac{d\theta}{\Delta} + \gamma \int \Delta d\theta (**),$$

(\*) Résultante de deux transformations très simples.

(\*\*) Ceci est l'artifice de Legendre (*Fonctions elliptiques*, t. I, p. 11), un peu simplifié.

ou

$$1 - 2 \sin^2 \theta + \sin^4 \theta$$

$$= \alpha(1 - c^2 \sin^2 \theta)(1 - 2 \sin^2 \theta) - \alpha c^2 \sin^2 \theta(1 - \sin^2 \theta) + \beta + \gamma(1 - \sin^2 \theta).$$

En identifiant, on trouve

$$\alpha = \frac{1}{5c^2}, \quad \beta = \frac{(5c^2 - 2)(c^2 - 1)}{3c^4}, \quad \gamma = 2 \frac{2c^2 - 1}{3c^4};$$

et, si  $c^2 = \frac{5}{4}$  :

$$\alpha = \frac{4}{9}, \quad \beta = -\frac{1}{27}, \quad \gamma = \frac{16}{27}.$$

Ainsi

$$B = \frac{4}{9} \sin \mu \cos \mu \sqrt{1 - \frac{5}{4} \sin^2 \mu} - \frac{4}{27} F(\mu) + \frac{16}{27} E(\mu)$$

$$= \frac{4}{27} [4 + 16 E(\mu) - F(\mu)];$$

puis

$$A = -\frac{\pi}{6} a^2 + \frac{4}{81} a^2 + \frac{a^2}{81} [16 E(\mu) - F(\mu)]. \quad (7)$$

**CXLIX. — Sur les podaires.**

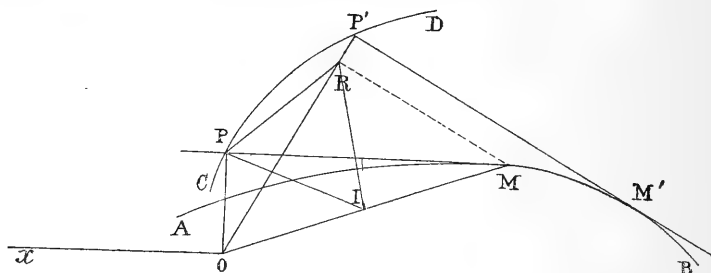
(Juin 1875.)

I. *Élément de la podaire.* — Soient, sur une courbe donnée, C, M, M' deux points infiniment voisins. Soient P, P' les points correspondant à M, M', sur la podaire CD de C, relativement à un pôle O. Désignons par  $u$  le rayon vecteur OM, par  $E$  l'angle de contingence en M, par  $d\sigma$  l'arc infiniment petit PP'.

Si l'on mène MR parallèle à la tangente M'T', la distance RP', entre ces deux droites, est un infiniment petit du deuxième ordre. Donc nous pouvons supposer  $d\sigma = PR$ .

Pour évaluer la longueur PR, j'observe que le quadrilatère

OPRM, ayant deux angles droits, en P et en R, est inscrit à la demi-circonférence décrite sur OM comme diamètre. Ainsi



$$PR = 2 \frac{u}{2} \sin \frac{PIR}{2} = u \sin \varepsilon ;$$

ou, en négligeant le troisième ordre,

$$PR = u\varepsilon.$$

La formule cherchée est donc

$$d\sigma = u\varepsilon ; \quad (1)$$

ou

$$d\sigma = u \frac{ds}{\rho}. \quad (2)$$

Celle-ci exprime que : *l'élément de la podaire est à l'élément de la courbe primitive, dans le rapport du rayon vecteur au rayon de courbure de celle-ci (\*)*.

*Addition. — (Novembre 1881.)*

II. Soit

$$p = f(\omega) \quad (5)$$

l'équation de la podaire. Legendre a donné cette formule remarquable

$$ds = (p + p'')d\omega (**), \quad (4)$$

(\*) *Traité des fonctions elliptiques*, t. III, p. 588.

(\*\*) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. II, p. 175.



dont la démonstration est facile (\*). D'ailleurs,  $d\omega = \varepsilon$ ; donc

$$\rho = p + p'' (**). \quad (5)$$

III. *Remarque.* — On doit, à M. GREEN, cette autre expression du rayon de courbure :

$$\rho = \frac{udu}{dp} (***). \quad (6)$$

Il est aisé de ramener l'une à l'autre. En effet, d'après une propriété connue, sur laquelle nous allons revenir :

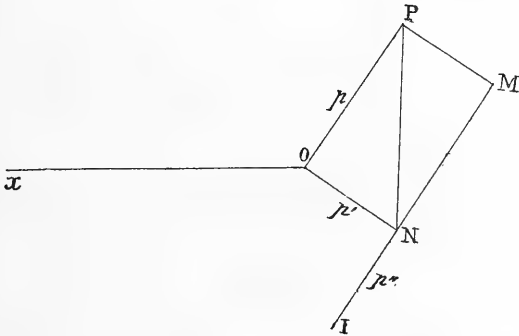
$$u^2 = p^2 + p'^2;$$

donc

$$udu = (pp' + p'p'')d\omega = (p + p'')dp;$$

etc.

IV. *Podaire de la développée.* — On sait que la normale PN, au point P de la podaire, est l'hypoténuse du triangle PON, dans



lequel  $ON = p'$ . En outre, cette normale est la diagonale du rectangle MPON (iv). Donc  $MP = p'$ . De plus, le lieu du point N,

(\*) Celle de Legendre est trop compliquée. De plus, l'illustre Géomètre ne semble pas avoir aperçu la relation (5).

(\*\*) *Bulletin de l'Académie*, février 1869.

(\*\*\*) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. II, p. 175.

(iv) *Cours d'Analyse*, p. 547.

projection de l'origine sur la normale à C, est la *podaire* de la développée de C.

V. *Centre de courbure.* — D'après la formule (5), il suffit, pour trouver le centre de courbure de C, de prendre  $NI = p''$  (\*).

VI. *Relation entre trois aires.* — Supposons que la courbe C soit fermée, convexe, et qu'elle renferme le pôle O. Appelons C, P, N les aires des trois courbes. Il est visible que

$$C = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p ds, \quad P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p^2 d\omega, \quad N = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p'^2 d\omega.$$

A cause de la valeur de  $ds$  (4) :

$$C - P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} pp'' d\omega = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p dp' = \left[ \frac{1}{2} pp' \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p'^2 d\omega.$$

Le terme intégré est nul; parce que  $p, p'$  ont mêmes valeurs aux deux limites (\*\*). De plus, le troisième terme égale ( $-N$ ).  
Donc

$$P = C + N.$$

Ainsi : la surface de la podaire équivaut à celle de la courbe primitive, augmentée de celle de la développée (\*\*\*) .

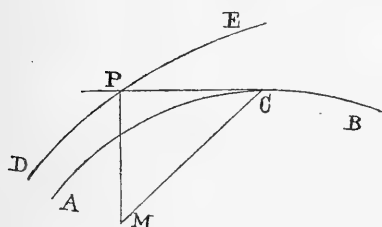
(\*) On peut observer que le lieu du point N est, à la développée, ce que la podaire est à la courbe primitive C. Donc, à cause de  $xON = \omega + \text{const.}$ , la relation  $MP = p'$  entraîne celle-ci :  $NI = p''$ . Cette démonstration de la formule (5) nous paraît fort simple.

(\*\*) Cette remarque a été faite, autrefois, par M. Ronkar, aujourd'hui Professeur à l'Université de Liège.

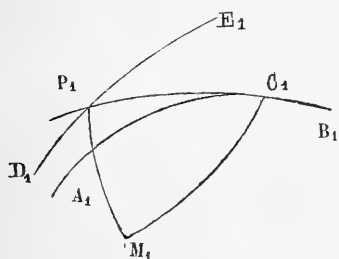
(\*\*\*) Autrement dit : la couronne comprise entre la courbe et sa podaire, est équivalente, en surface, à la podaire de la développée. Par exemple, la podaire de la développée de l'ellipse (l'un des foyers étant pris comme pôle) a pour mesure  $\pi a(a - b)$ . (Septembre 1886.)

Autre addition. — (Avril 1886.)

VII. *Transformée d'une podaire.* — Soient une courbe ACB et



sa podaire DPE, relativement à un pôle M. Enroulons la figure sur une surface développable  $\Sigma$ , de manière que ACB devienne  $A_1C_1B_1$ ; etc.



Les droites MC, CP, MP sont remplacées par des lignes géodésiques  $M_1C_1$ ,  $C_1P_1$ ,  $M_1P_1$ . MP est le plus court chemin de M à la tangente CP; donc  $M_1P_1$  est, sur  $\Sigma$ , le plus court chemin de  $M_1$  à  $C_1P_1$ ; et l'angle  $M_1P_1C_1$  est droit (\*). On a donc ce théorème :

*La transformée, sur une développable  $\Sigma$ , de la podaire d'une courbe plane ACB, relativement à un point donné M, est le lieu du sommet de l'angle droit d'un triangle  $M_1P_1C_1$  formé par trois lignes géodésiques, et dont le sommet  $M_1$  est fixe, tandis que le côté  $C_1P_1$  est tangent au côté  $A_1B_1$ , transformé de AB.*

VIII. *Remarque.* — Si AB est une ellipse, dont M soit un foyer, la courbe  $D_1P_1E_1$  est une transformée de circonférence (\*\*).

(\*) Cette proposition, à peu près évidente, est démontrée dans le *Calcul des variations*, de MOIGNO et LINDELÖF. Elle est d'autant plus remarquable que, dans la transformée plane d'une figure tracée sur une surface développable, les angles ne sont pas, généralement, égaux aux angles primitifs.

(\*\*) La question des transformées de podaires est liée à celle des développantes. On peut consulter, sur ce sujet, notre *Théorie analytique des lignes à double courbure*, pp. 64-65.

**CL. — Un théorème d'Ampère.**

(Septembre 1875.)

« Si l'on réunit toutes les fractions continues qui, réduites » sous la forme la plus simple, donnent  $s$  pour somme de leurs » quotients entiers, le nombre de ces fractions sera égal à  $2^{s-1}$ (\*) »

Le dernier quotient entier (ou incomplet) ne pouvant être 1 (\*\*), à moins que la fraction égale 1, la question ne diffère pas de celle-ci :

*Combien l'équation*

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = s$$

*admet-elle de solutions en nombres entiers, avec la condition que  $x_n$  surpasse 1 ?*

Soit  $A_s$  ce nombre de solutions.

1° Il est visible que  $A_2 = 1$ .

2° Des identités :

$$s = s = 1 + (s - 1) = 2 + (s - 2) = \dots = (s - 2) + 2,$$

on conclut la relation

$$A_s = 1 + A_{s-1} + A_{s-2} + \dots + A_2;$$

puis, de celle-ci :

$$A_{s-1} = 1 + A_{s-2} + \dots + A_2.$$

Donc, par soustraction,

$$A_s = 2A_{s-1}.$$

Ainsi, les nombres  $A_2, A_3, \dots, A_s$  forment une progression, dont la raison est 2. Et comme  $A_2 = 1$  :

$$A_s = 2^{s-2}.$$

(\*) *Correspondance mathématique de Quetelet*, t. IX, p. 145. Cet énoncé n'est pas très clair. Voici comment je l'interprète : *Combien y a-t-il de fractions continues (de la forme ordinaire) dans lesquelles la somme des quotients incomplets soit  $s$  ?*

(\*\*) En effet,

$$a + \frac{1}{b + \dots + \frac{1}{k + \frac{1}{1}}} = a + \frac{1}{b + \dots + \frac{1}{k + 1}}.$$

**CLI. — Sur les dérivées d'une fraction.**

(Février 1876.)

I. Soit

$$y = \frac{1}{(1-x^2)^k} = \frac{1}{(1+x)^k} \frac{1}{(1-x)^k}. \quad (1)$$

On a,  $k$  étant positif :

$$\frac{\Gamma(k)}{(1+x)^k} = \int_0^\infty e^{-(1+x)\alpha} \alpha^{k-1} d\alpha,$$

$$\frac{\Gamma(k)}{(1-x)^k} = \int_0^\infty e^{-(1-x)\beta} \beta^{k-1} d\beta;$$

donc

$$[\Gamma(k)]^2 y = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+\beta)} e^{(\beta-\alpha)x} \alpha^{k-1} \beta^{k-1} d\alpha d\beta, \quad (2)$$

et

$$[\Gamma(k)]^2 \frac{d^n y}{dx^n} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta)+( \beta-\alpha)x} (\beta-\alpha)^n \alpha^{k-1} \beta^{k-1} d\alpha d\beta. \quad (3)$$

Pour simplifier l'intégrale double, posons

$$\alpha = \frac{u}{1+x}, \quad \beta = \frac{v}{1-x}.$$

Il résulte, de ces valeurs :

$$(\alpha\beta)^{k-1} = \frac{(uv)^{k-1}}{(1-x^2)^{k-1}}, \quad d\alpha d\beta = \frac{dudv}{1-x^2}, \quad \beta - \alpha = \frac{v(1+x) - u(1-x)}{1-x^2};$$

puis, au lieu de la formule (3) :

$$[\Gamma(k)]^2 \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{(1-x^2)^{k+n}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u+v)} (uv)^{k-1} [v(1+x) - u(1-x)]^n dudv. \quad (4)$$

Le terme général de la puissance  $n^{\text{ième}}$  est

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(n-p+1)} (-1)^n u^p v^{n-p} (1-x)^p (1+x)^{n-p}.$$

Donc l'égalité (4) devient :

$$[\Gamma(k)]^2 \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(n+1)}{(1-x^2)^{k+n}} \sum_0^n (-1)^p \frac{(1-x)^p (1+x)^{n-p}}{\Gamma(p+1)\Gamma(n-p+1)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u+v)} u^{k+p-1} v^{k+n-p-1} dudv. \quad (5)$$

L'intégrale double, considérée comme le produit de deux intégrales simples, a pour valeur

$$\begin{aligned} \Gamma(k+p)\Gamma(k+n-p) &= \Gamma(2k+n) \int_0^1 (1-\theta)^{k+p-1} \theta^{k+n-p-1} d\theta \\ &= \Gamma(2k+n) \int_0^1 (\theta - \theta^2)^{k-1} (1-\theta)^p \theta^{n-p} d\theta. \end{aligned}$$

Nous avons donc, au lieu du second membre de la formule (5):

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(2k+n)}{(1-x^2)^{k+n}} \int_0^1 (\theta - \theta^2)^{k-1} d\theta \\ \times \sum_0^n &\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(n-p+1)} (-1)^p [(1+x)\theta]^{n-p} [(1-x)(1-\theta)]^p. \end{aligned}$$

La quantité  $\sum_0^n$  représente le développement de

$$[(1+x)\theta - (1-x)(1-\theta)]^n = (2\theta - 1 + x)^n.$$

Par conséquent,

$$[\Gamma(k)]^2 \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(2k+n)}{(1-x^2)^{k+n}} \int_0^1 (\theta - \theta^2)^{k-1} (2\theta - 1 + x)^n d\theta. \quad (6)$$

II. Posons

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{P_n}{(1-x^2)^{k+n}}; \quad (7)$$

$P_n$  est un *polynôme entier*, du degré  $n$ , déterminé par la formule

$$P_n = \frac{\Gamma(2k+n)}{[\Gamma(k)]^2} \int_0^1 (\theta - \theta^2)^{k-1} (2\theta - 1 + x)^n d\theta. \quad (8)$$

(\*) Très probablement, le calcul précédent peut être abrégé; mais peut-être, en l'abrégéant, le rendrait-on moins simple.

Pour la simplifier, soit fait

$$2\theta - 1 = \cos \varphi. \tag{9}$$

On trouve, par un calcul facile,

$$P_n = \frac{1}{2^{2k-1}} \frac{\Gamma(2k+n)}{[\Gamma(k)]^2} \int_0^\pi \sin^{2k-1} \varphi (x + \cos \varphi)^n d\varphi \text{ (*)} . \tag{10}$$

*Addition.* — (Avril 1886.)

III. Si l'on développe  $(x + \cos \varphi)^n$ , on a, en supprimant des intégrales nulles,

$$\int_0^\pi \sin^{2k-1} \varphi (x + \cos \varphi)^n d\varphi \\ = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-1} \varphi d\varphi [x^n + C_{n,2} x^{n-2} \cos^2 \varphi + C_{n,4} x^{n-4} \cos^4 \varphi + \dots].$$

En général,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p \varphi \cos^q \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2} + 1\right)}.$$

Donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-1} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \Gamma(k) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-1} \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \Gamma(k) \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right)}, \\ \dots \dots \dots ;$$

(\*) Lorsque  $k = \frac{1}{2}$ , cette égalité se réduit à

$$P_n = \frac{\Gamma(n+1)}{\pi} \int_0^\pi (x + \cos \varphi)^n d\varphi;$$

ce qui est exact. (*Notes d'Algèbre et d'Analyse*, p. 10.)

puis, à cause de  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$  :

$$= \frac{\Gamma(k) \sqrt{\pi}}{\Gamma(k + \frac{1}{2})} \int_0^\pi \sin^{2k-1} \varphi (x + \cos \varphi)^n d\varphi$$

$$\left[ x^n + C_{n,2} \frac{1}{k + \frac{1}{2}} x^{n-2} + C_{n,4} \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \frac{1}{k + \frac{3}{2}} x^{n-4} + \dots \right];$$

et enfin, au lieu de la formule (10) :

$$P_n = \frac{1}{2^{2k-1}} \frac{\Gamma(2k + n) \sqrt{\pi}}{\Gamma(k) \Gamma(k + \frac{1}{2})}$$

$$\times \left[ x^n + \frac{1}{2k + 1} C_{n,2} x^{n-2} + \frac{1 \cdot 5}{(2k + 1)(2k + 3)} C_{n,4} x^{n-4} + \dots \right] (*). \quad (11)$$

IV. *Remarque.* — Si  $k$  est un nombre entier, le second membre est rationnel; ce qui devait être.

Soit, par exemple,  $k = 1$ ; alors

$$P_n = \Gamma(n + 2) \left[ x^n + \frac{1}{5} C_{n,2} x^{n-2} + \frac{1}{5} C_{n,4} x^{n-4} + \dots \right];$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(n + 2)}{(1 - x^2)^{n+1}} \left[ x^n + \frac{1}{5} C_{n,2} x^{n-2} + \frac{1}{5} C_{n,4} x^{n-4} + \dots \right] (**).$$

(\*) Le dernier terme contient  $x^0$  ou  $x^1$ , selon que  $n$  est pair ou impair.

(\*\*) Si, après avoir décomposé  $y$  en

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right],$$

on forme directement  $\frac{d^n y}{dx^n}$ , on trouve le même résultat.



**CLII. — Une construction de l'hyperbole.**

(Mars 1876) (\*).

I. LEMME. — *Étant donné un triangle ABC, on décrit, du sommet C comme centre, une circonférence quelconque. Des points A, B, on mène des tangentes AD, BE, lesquelles se coupent en M. Le lieu du point M est la circonférence circonscrite au triangle ABC.*

II. *Construction de l'hyperbole.* — Soient A, A' les sommets réels; F, F' les foyers; Oy l'axe non transverse. Par F, F', on fait passer une circonférence quelconque : soit C l'un de ses points d'intersection avec Oy. On trace la corde CF, qui coupe, en D, la parallèle AB à Oy. Du point C comme centre, avec CD pour rayon, on trace une circonférence C'. Soient M, M' les points où elle coupe la première circonférence : les points M, M' appartiennent à l'hyperbole, laquelle touche, en ces points, la circonférence C'.

III. *Remarque.* — L'hyperbole est l'enveloppe de C'.

**CLIII. — Développement d'un radical.**

(Avril 1886.)

I. Soient

$$y = 1 + z + z^2 + \dots + z^p, \quad (1)$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{y}} = \sum_0^{\infty} A_n z^n (**); \quad (2)$$

(\*) Le lecteur est prié de faire les figures.

(\*\*) Lorsque  $p = 2$ , les coefficients  $A_n$  deviennent un cas particulier des fonctions de Legendre (*Deuxième Mémoire sur les fonctions  $X_n$* , p. 65).

et, par conséquent,

$$u \sqrt{y} = 1. \quad (3)$$

On déduit, de cette équation,

$$uy' + 2yu' = 0, \quad (4)$$

ou

$$u(1 + 2z + 5z^2 + \dots + pz^{p-1}) + 2u'(1 + z + z^2 + \dots + z^p) = 0. \quad (5)$$

A cette égalité, on peut adjoindre celle-ci :

$$u[1 - (p + 1)z^p + pz^{p+1}] + 2u'(1 - z)(1 - z^{p+1}) = 0, \quad (6)$$

résultant de ce que :

$$y = \frac{1 - z^{p+1}}{1 - z}, \quad (7)$$

$$y' = \frac{1 - (p + 1)z^p + pz^{p+1}}{(1 - z)^2} (*). \quad (8)$$

II. La relation (6) équivaut à

$$[1 - (p + 1)z^p + pz^{p+1}] \sum_0^\infty A_n z^n + 2(1 - z - z^{p+1} + z^{p+2}) \sum_1^\infty n A_n z^{n-1} = 0,$$

ou encore, à

$$\left. \begin{aligned} & [1 - (p + 1)z^p + pz^{p+1}] \sum_0^\infty A_n z^n \\ & + 2(1 - z - z^{p+1} + z^{p+2}) \sum_0^\infty (n + 1) A_{n+1} z^n = 0. \end{aligned} \right\} (9)$$

Le coefficient de  $z^{n-1}$  est

$$A_{n-1} - (p + 1) A_{n-p-1} + p A_{n-p-2} + 2[n A_n - (n-1) A_{n-1} - (n-p-1) A_{n-p-1} + (n-p-2) A_{n-p-2}] = 0, \quad (n \geq p+2)$$

ou

$$2n A_n - (2n-5) A_{n-1} - (2n-p-1) A_{n-p-1} + (2n-p-4) A_{n-p-2} = 0. \quad (10)$$

(\*) Les équations aux différences finies, déduites des égalités (5), (6), contiennent, respectivement,  $p + 1$  termes et quatre termes. A partir de  $p = 4$ , la seconde est donc plus simple que la première. En conséquence, dans ce qui va suivre, nous négligerons l'égalité (5).

III. L'ordre de cette équation (10), aux différences finies, est

$$n - (n - p - 2) = p + 2.$$

Donc, elle donnera, de proche en proche, un terme de rang quelconque, si l'on connaît, préalablement, les  $p + 1$  termes initiaux :  $A_0, A_1, \dots, A_p$ .

Évidemment,

$$A_0 = 1, \quad A_1 = -\frac{1}{2}.$$

Pour trouver  $A_2, A_3, \dots, A_p$ , et même le terme général,  $A_n$ , on peut appliquer l'une ou l'autre des méthodes suivantes :

1° D'après la formule

$$y = \frac{1 - z^{p+1}}{1 - z}, \quad (7)$$

on a

$$u = (1 - z)^{\frac{1}{2}} (1 - z^{p+1})^{-\frac{1}{2}} \quad (12)$$

Le développement du premier facteur est

$$1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2 \cdot 4}z^2 - \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}z^3 - \dots = 1 - \sum_0^{\infty} C_{2q, q} \frac{z^{q+1}}{4^{q+1} \cdot 2(q+1)}. \quad (13)$$

Le développement du second :

$$1 + \frac{1}{2}z^{p+1} + \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 4}z^{2(p+1)} + \dots = \sum_0^{\infty} C_{2q', q'} \frac{z^{(p+1)q'}}{4^{q'}}. \quad (14)$$

Faisant le produit, et le limitant à  $z^p$ , on aura donc les valeurs initiales demandées ; savoir :

$$A_2 = -\frac{1}{2 \cdot 4}, \quad A_3 = -\frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \quad \dots, \quad A_p = -\frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots 2p-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2p}.$$

2° De

$$u = \frac{1}{\sqrt{y}} = \sum_0^{\infty} A_n z^n, \quad (2)$$

on conclut

$$\frac{1-z}{1-z^{p+1}} = 1 + 2A_1z + \dots + (A_0A_n + A_1A_{n-1} + \dots + A_nA_0)z^n + \dots,$$

ou

$$\left. \begin{aligned} 1 - z + z^{p+1} - z^{p+2} + z^{2p+2} - z^{2p+3} + \dots \\ = 1 + 2A_1z + \sum_{\mathbb{Z}}^{\infty} (A_0A_n + A_1A_{n-1} + \dots + A_nA_0)z^n; \end{aligned} \right\} (15)$$

puis

$$A_0A_n + A_1A_{n-1} + \dots + A_nA_0 = \frac{+1}{0}, \quad (16)$$

selon la forme de  $n$ .

IV. Cette relation (16), inapplicable dès que l'indice  $n$  est un peu grand, pourrait servir à prouver la propriété suivante :

$$4^n A_n = \text{entier}. \quad (17)$$

Mais la démonstration est encore plus simple au moyen de la formule (12), jointe aux développements (13) et (14).

En effet, si  $q+1$  n'est pas multiple de  $p+1$ ,

$$A_n = - \sum C_{2q, q} \cdot C_{2q', q'} \frac{1}{4^{q+q'} 2(q+1)}; \quad (n = \overline{p+1} q' + q + 1)$$

et, dans le cas contraire,

$$A_n = \frac{1}{4^t} C_{2t, t} - \sum C_{2q, q} \cdot C_{2q', q'} \frac{1}{4^{q+q'} 2(q+1)}, \quad \left( t = \frac{n}{p+1} \right)$$

Or, d'après un théorème connu,

$$\frac{1}{q+1} C_{2q, q} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2q}{1 \cdot 2 \dots q \times 1 \cdot 2 \dots q + 1} = \text{entier};$$

et, d'un autre côté,  $4^{q+q'+\frac{1}{2}}$  divise  $4^{q+q'+pq'+1}$ .

V. En résumé : 1° Si l'on suppose

$$\left( 1 + z + z^2 + \dots + z^p \right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^{\infty} C_n \left( \frac{z}{4} \right)^n,$$

tous les coefficients  $C_n$  sont entiers.

2° Ces coefficients sont donnés par la formule

$$2nC_n = 4(2n-5)C_{n-1} + 4^{p+1}(2n-p-1)C_{n-p-1} - 4^{p+2}(2n-p-4)C_{n-p-2} \quad (18)$$

3° Ce multiple de  $4^n$  se réduit à zéro, si  $n = \mathfrak{N}(p+1)$ .

VI. Remarque. — Si  $p = 1$ , la formule (18) devient

$$nC_n - 2(2n-5)C_{n-1} - 16(n-1)C_{n-2} + 52(2n-5)C_{n-3} = 0. \quad (19)$$

Le calcul direct donne

$$C_1 = -2 = -C_{2,1}, \quad C_2 = 6 = C_{4,2}, \quad C_3 = -20 = -C_{6,3};$$

après quoi l'on vérifie, aisément, que

$$C_n = \mp C_{2n,n} \quad (*). \quad (20)$$

Par conséquent, il existe cette relation entre les nombres  $C_{2n,n}$  :

$$\left. \begin{aligned} nC_{2n,n} + 2(2n-5)C_{2n-2,n-1} - 16(n-1)C_{2n-4,n-2} \\ - 52(2n-5)C_{2n-6,n-3} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Il en résulte, si  $n$  est impair :

$$-5C_{2n-2,n-1} + 8C_{2n-4,n-2} + 80C_{2n-6,n-3} = \mathfrak{N}(n),$$

ou

$$5C_{2n,n} - 8C_{2n-2,n-1} - 80C_{2n-4,n-2} = \mathfrak{N}(n+1).$$

On sait que  $C_{2n,n} = \mathfrak{N}(n+1)$ ; donc, par le changement déjà effectué :

$$C_{2n,n} + 10C_{2n-2,n-1} = \mathfrak{N}(n+2).$$

Nous avons donc ce petit théorème :

Soit  $n$  un nombre impair. Si, au nombre des combinaisons de  $2n$  lettres,  $n$  à  $n$ , on ajoute 10 fois le nombre des combinaisons de  $2n-2$  lettres,  $n-1$  à  $n-1$ , le résultat est divisible par  $n+2$  (\*\*).

(\*) Ce résultat était évident *a priori*, à cause de

$$u = (1+z)^{-\frac{1}{2}}.$$

(\*\*) Pour le cas de  $n$  pair, je n'ai rien trouvé de semblable.

**CLIV. — Sur une équation algébrique.**

(Septembre 1876.)

**I. L'équation**

$$(x + 1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1 = 0$$

a été remarquée depuis longtemps, parce que ses *seules* racines réelles sont *toujours* 0,  $-\frac{1}{2}$ ,  $-1$  (\*).

Il est facile d'en former d'autres, jouissant de propriétés analogues à celle qui vient d'être rappelée. Par exemple :

*L'équation réciproque*

$$x^{4n+2} - (2n + 1)x^{2n+2} + (2n + 1)x^{2n} - 1 = 0 \quad (1)$$

a trois racines égales à  $+1$ , trois racines égales à  $-1$ , et  $4n - 4$  racines imaginaires.

La démonstration, que nous ne développerons pas, est extrêmement simple.

II. Si l'on supprime le facteur  $(x^2 - 1)^2$ , l'équation résultante peut être mise sous la forme

$$[x^{2n-4} + x^{2n-6} + \dots + x]^2 - (2n-4)x^{2n-2} - (2n-6)x^{2n-4} - \dots - 1 = 0, \quad (2)$$

puis sous celle-ci :

$$x^{4n-2} + 2x^{4n-4} + \dots + nx^{2n} - nx^{2n-2} - (n-1)x^{2n-4} - \dots - 1 = 0. \quad (5)$$

Il est évident que le premier membre de cette dernière équation est encore divisible par  $x^2 - 1$ .

*Addition.* — (Septembre 1886.)

**III. Le quotient est**

$$Q = x^{4n-4} + 5x^{4n-6} + 6x^{4n-8} + \dots + \frac{n(n+1)}{2} x^{2n-2} + \dots \\ + 6x^4 + 5x^2 + 1.$$

(\*) *Cours d'Analyse*, p. 505. On suppose  $n > 4$ . Je crois me rappeler que Waring s'en est occupé.

Ainsi, l'équation réciproque

$$\left. \begin{aligned} x^{4n} + 5x^{4n-2} + 6x^{4n-4} + \dots + \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^{2n} + \dots \\ + 6x^4 + 5x^2 + 1 = 0, \end{aligned} \right\} (4)$$

dans laquelle les coefficients sont les nombres triangulaires, n'a aucune racine réelle.

IV. Soit  $X_{4n}$  le polynôme formant le premier membre. Il est facile de voir que

$$X_{4n} = (x^{2n} + x^{2n-2} + \dots + x^2 + 1)^2 + x^2 X_{4n-4}. \quad (5)$$

En effet, le développement du carré est, comme on sait :

$$x^{4n} + 2x^{4n-2} + 5x^{4n-4} + 4x^{4n-6} + \dots + 5x^4 + 2x^2 + 1.$$

Donc, en identifiant les deux membres, on retrouve les égalités connues :

$$5 = 1 + 2, \quad 6 = 5 + 1, \quad 10 = 6 + 4, \quad 15 = 10 + 5, \dots$$

V. Si l'on part de

$$X_4 = x^4 + 5x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 + x^2,$$

on obtient, au moyen de la formule (5) :

$$\left. \begin{aligned} X_{4n} = (x^{2n} + x^{2n-2} + \dots + x^2 + 1)^2 \\ + x^2(x^{2n-2} + x^{2n-4} + \dots + x^2 + 1)^2 + \dots + x^{2n-2}(x^2 + 1)^2 + x^{2n}. \end{aligned} \right\} (6)$$

Ce polynôme, étant la somme de plusieurs carrés, ne peut s'annuler pour aucune valeur réelle de  $x$ . La proposition primitive est donc vérifiée (\*).

(\*) Au moyen de cette relation (6), et de l'équation (4), on pourrait démontrer la formule connue qui donne la somme des carrés des nombres naturels.

**CLV. — Une application de la formule du binôme.**

(Novembre 1861.)

$x$  étant positif, on a, en série convergente,

$$2^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{x(x-1) \dots (x-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} + \dots (*) \quad (1)$$

D'un autre côté,

$$2^x = 1 + \frac{x(\zeta \cdot 2)}{1} + \frac{x^2(\zeta \cdot 2)^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^5(\zeta \cdot 5)^5}{1 \cdot 2 \cdot 5} + \dots \quad (2)$$

Si, dans ces deux développements, on égale les coefficients de  $x^2$ , on trouve

$$\frac{1}{2}(\zeta \cdot 2)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) - \dots \quad (3)$$

Le second membre est la même chose que

$$\int_0^1 d\theta \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{5}(1+\theta) + \frac{1}{4}(1+\theta+\theta^2) - \frac{1}{5}(1+\theta+\theta^2+\theta^3) + \dots \right],$$

ou

$$\int_0^1 \frac{d\theta}{1-\theta} \left[ \frac{1}{2}(1-\theta) - \frac{1}{5}(1-\theta^2) + \frac{1}{4}(1-\theta^3) - \frac{1}{5}(1-\theta^4) + \dots \right],$$

ou encore :

$$\int_0^1 \frac{d\theta}{1-\theta} \left[ 1 - \zeta \cdot 2 + \frac{\zeta(1+\theta) - \theta}{\theta} \right].$$

Donc enfin,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)} [\zeta(1+x) - x \zeta \cdot 2] = \frac{1}{2}(\zeta \cdot 2)^2 (**). \quad (4)$$

(\*) *Comptes rendus*, t. XLV, p. 621.

(\*\*) Probablement, cette intégrale est connue; mais je ne l'ai pas trouvée dans le Recueil de M. Bierens de Haan.



**CLVI. — Sur la fonction E(x).**

(Mars 1877.)

Soit, avec la notation de Legendre,

$$E\left(\frac{N}{p}\right) + E\left(\frac{N}{p^2}\right) + E\left(\frac{N}{p^3}\right) + \dots = X; \quad (1)$$

N, p étant des nombres entiers.

Mettons N sous la forme :

$$ap^{n-1} + bp^{n-2} + \dots + kp + l;$$

a, b, c, ... k, l étant inférieurs à p (\*).

Il résulte, de cette décomposition,

$$X = a(p^{n-2} + \dots + p + 1) + b(p^{n-3} + \dots + p + 1) + \dots + k,$$

ou

$$X = a \frac{p^{n-1} - 1}{p - 1} + b \frac{p^{n-2} - 1}{p - 1} + \dots + k \frac{p - 1}{p - 1}. \quad (2)$$

On a aussi

$$N = a(p^{n-1} - 1) + \dots + k(p - 1) + a + b + \dots + k + l. \quad (5)$$

Donc le quotient entier de N par p — 1 est

$$Y = X + E\left(\frac{a + b + \dots + k + l}{p - 1}\right). \quad (4)$$

Le maximum du numérateur est n(p — 1).

Par conséquent :

*Le nombre X est compris entre Y et Y — n ;*

ou, ce qui revient au même :

*Si l'on suppose*

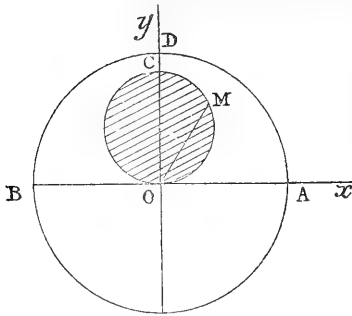
$$X = Y = E\left(\frac{N}{p - 1}\right),$$

*l'erreur commise est inférieure à n ; p<sup>n</sup> étant la première puissance de p qui surpasse N.*

(\*) Autrement dit, on suppose N écrit dans le système dont la base est p.

**CLVII. — Aire d'une figure sphérique.**

(Avril 1877.)

I. Le rayon OA étant pris pour unité, soit  $OC = c$ .

Sur OC, comme diamètre, décrivons une circonférence.

A désignant l'aire de la partie supérieure de la sphère, projetée à l'intérieur du cercle OC,

$$A = 2 \iint \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}; \quad (1)$$

 $x$  et  $y$  étant positifs.

Soient :

$$x = u \cos \varphi, \quad y = u \sin \varphi; \quad (2)$$

alors

$$A = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{c \sin \varphi} \frac{u du}{\sqrt{1 - u^2}}; \quad (3)$$

puis

$$A = \pi - 2E_1(c). \quad (4)$$

II. *Remarques.* — 1° Lorsque  $c = 1$ , la figure sphérique est la *fenêtre de Viviani* (\*\*).2° Dans le cas général, le quart de la sphère, dont la projection est ADBO, a pour mesure  $\pi$ . Donc

$$E_1(c) = \text{aire projetée suivant ADCMO.}$$

(\*) Parce que  $OM = OC \sin \varphi$ .(\*\*) Voir la *Note CXLVIII*.

**CLVIII. — Quelques théorèmes sur les coniques (\*).**

I. Si deux coniques ont leurs axes principaux respectivement parallèles, leurs quatre points d'intersection appartiennent à une même circonférence (\*\*).

II. RÉCIPROQUE. — Si deux coniques se coupent en quatre points situés sur une circonférence, leurs axes principaux sont, respectivement, parallèles.

III. COROLLAIRE. — Si deux angles ont leurs bissectrices parallèles, leurs côtés forment un quadrilatère inscritible.

IV. Dans l'ellipse, la somme des cordes passant par un foyer, et parallèles à deux diamètres conjugués, est constante (\*\*\*).

La somme dont il s'agit est, avec les notations habituelles :

$$s = 2p \left[ \frac{1}{1 - e^2 \cos^2 \omega} + \frac{1}{1 - e^2 \cos^2 \omega'} \right]. \quad (1)$$

Il faut vérifier que  $s$  est indépendante de  $\omega$  et de  $\omega'$ , si l'on a, entre ces variables, la relation

$$\operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \omega' = -\frac{b^2}{a^2}. \quad (2)$$

Soient  $t, t'$  les deux tangentes, de manière que

$$tt' = e^2 - 1. \quad (5)$$

La formule (1) peut être écrite ainsi :

$$s = 2p \left[ \frac{1 + t^2}{1 - e^2 + t^2} + \frac{t + t'^2}{1 - e^2 + t'^2} \right];$$

(\*) Trouvés à diverses époques. Je supprime les démonstrations de ceux qui sont *presque évidents*. (Avril 1886.)

(\*\*) Conséquence d'une propriété des surfaces du deuxième ordre, publiée en 1847 (*Nouvelles Annales*, p. 421).

(\*\*\*) *Manuel des Candidats*, t I, p. 469.

puis sous cette forme :

$$s = 2p \frac{2(1 - e^2) + (2 - e^2)(t^2 + t'^2) + 2t^2t'^2}{(1 - e^2)^2 + (1 - e^2)(t^2 + t'^2) + t^2t'^2}$$

Au moyen de la condition (5), la fraction devient

$$\frac{4 - 6e^2 + 2e^4 + (2 - e^2)(t^2 + t'^2)}{(1 - e^2)[2 - 2e^2 + t^2 + t'^2]} = \frac{2 - e^2}{1 - e^2}$$

Ainsi

$$s = 2p \frac{2 - e^2}{1 - e^2} = 2 \frac{a^2 + b^2}{a}. \quad (4)$$

V. Si, d'un point M d'une hyperbole, pris comme centre, on décrit une circonférence passant par un foyer, et qui coupe, en R, R', la directrice correspondante, l'angle RMR' est constant (\*).

VI. Soit une ellipse E ayant F, F' pour foyers. Sur FF' et DD' = 2b, comme diamètres conjugués, on construit une ellipse E'.

1° Les deux courbes sont doublement tangentes ;

2° La normale commune, en chacun des deux points de contact, est parallèle à DD'.

1° L'équation de E étant

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad (5)$$

on trouve, aisément, que E' est représentée par

$$c^2y^2 + b^2(x \sin \theta - y \cos \theta)^2 = b^2c^2 \sin^2 \theta. \quad (6)$$

Les deux courbes seront tangentes si l'on a, pour chacun de leurs points communs :

$$\frac{c^2y - b^2(x \sin \theta - y \cos \theta) \cos \theta}{a^2y} = \frac{b^2(x \sin \theta - y \cos \theta) \sin \theta}{b^2x} = \frac{b^2c^2 \sin^2 \theta}{a^2b^2} (**). \quad (7)$$

(\*) Autrement dit, le triangle isocèle RMR' est invariable de forme.

(\*\*) Par le théorème des fonctions homogènes.

Les équations (7) se réduisent à l'équation *unique* :

$$\frac{y}{x} = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \theta, \quad (8)$$

laquelle représente la corde de contact  $\mathbf{TT}'$  (\*).

2° Le diamètre  $\mathbf{GG}'$ , perpendiculaire à  $\mathbf{DD}'$ , a pour équation

$$\frac{y}{x} = -\cot \theta. \quad (9)$$

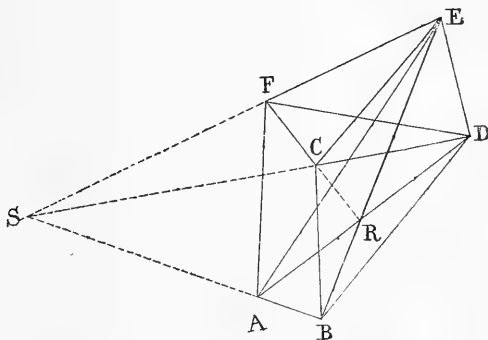
Le produit des coefficients angulaires de  $\mathbf{TT}'$  et de  $\mathbf{GG}'$  étant  $-\frac{b^2}{a^2}$ ,  $\mathbf{TT}'$  est conjuguée à  $\mathbf{GG}'$ ; ou, ce qui revient au même :

*La normale commune, en T, est parallèle au diamètre  $\mathbf{DD}'$ .*

VII. Soit une parabole P. Du point B, symétrique du sommet A, relativement à la directrice, on mène une transversale, qui coupe P aux points C, D. Les normales CM, DM, en ces points, se coupent sur P.

VIII. Remarque. — Si la transversale devient tangente, le point M appartient à la développée de P.

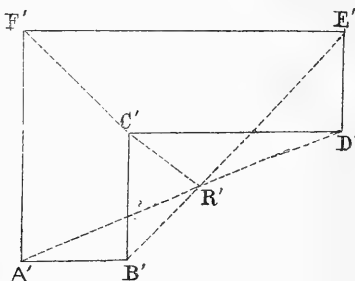
IX. Soit un hexagone ABCDEF, dans lequel trois côtés alternatifs concourent en un point S, et les trois diagonales, joignant



(\*) Si l'angle  $\theta$  varie, l'enveloppe de  $\mathbf{E}'$  est donc E (abstraction faite des deux foyers). (*Application de l'Algèbre à la Géométrie*, 1848, p. 556.)

les sommets opposés, concourent en un point R. Cela posé, les trois autres côtés concourent en un point T (\*).

Considérons un hexagone auxiliaire,  $A'B'C'D'E'F'$ , dont les côtés soient parallèles trois à trois. Il est très facile de vérifier



que les diagonales  $A'D'$ ,  $B'E'$ ,  $F'C'$  concourent en un point  $R'$ . *Mettant en perspective*, on a le théorème énoncé.

**X. Remarques.** — 1° D'après la seconde hypothèse, et la réciproque du théorème de Brianchon, l'hexagone  $ABCDEF$  est circonscrit à une conique  $C$ .

Pour la même raison, l'hexagone  $ADEBCF$ , dont les diagonales sont  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$ , est circonscrit à une conique  $C'$ .

De même encore, l'hexagone  $ABDFCE$ , dont les diagonales sont  $AF$ ,  $BC$ ,  $DE$ , est circonscrit à une conique  $C''$ . Le théorème peut donc être énoncé ainsi :

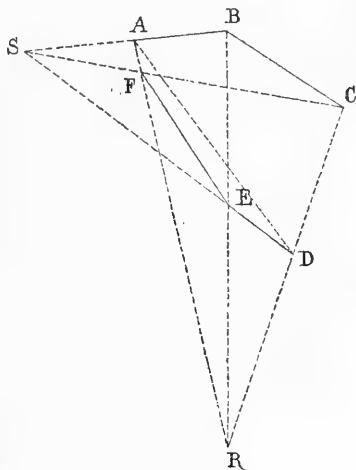
*Lorsque, avec six points donnés, pris comme sommets, on peut construire deux hexagones, respectivement circonscriptibles à deux coniques, on en peut construire un troisième, circonscriptible à une troisième conique.*

2° La théorie des polaires réciproques donne cet autre théorème, corrélatif du premier :

*Lorsque, avec six droites données, prises comme côtés, on peut construire deux hexagones, respectivement inscriptibles à deux coniques, on en peut construire un troisième, inscriptible à une troisième conique.*

(\*) Non marqué sur la figure.

3° Le premier énoncé peut encore être remplacé par celui-ci :  
 Lorsque, dans un hexagone  $ABCDEF$ , les côtés  $AB$ ,  $DE$  et la diagonale  $CF$  concourent en un point  $S$ ; que, de plus, les côtés



$CD$ ,  $AF$  et la diagonale  $BE$  concourent en un point  $R$ ; alors les côtés  $BC$ ,  $EF$  et la diagonale  $AD$  concourent en un point  $T$  (\*).

4° Dans la figure auxiliaire, les trois hexagones (\*\*)  
 seraient :

$$A'C'E'F'B'D', \quad A'C'E'B'D'F', \quad A'B'F'D'E'C'.$$

(\*) De là résulte un théorème corrélatif. Mais nous ne pouvons épuiser cette intéressante théorie.

(\*\*) Non tracés.

**CLIX. — Sur la somme des diviseurs de  $n$ .**

(Juillet 1877) (\*).

I. Soit la formule de Jacobi :

$$\left. \begin{aligned} & [(1-x)(1-x^2)(1-x^5)\dots]^5 \\ & = 1 - 5x + 5x^5 - 7x^6 + 9x^{10} - 11x^{15} + \dots (**). \end{aligned} \right\} (1)$$

Il en résulte, comme l'a remarqué M. Halphen :

$$\left. \begin{aligned} & x + 5x^2 + 4x^5 + \dots + x^n \int n + \dots \\ & = \frac{x - 5x^2 + 14x^6 - 50x^{10} + 55x^{15} - \dots}{1 - 5x + 5x^5 - 7x^6 + 9x^{10} - 11x^{15} + \dots} (***) \end{aligned} \right\} (2)$$

Supposons :

$$\frac{1}{1 - 5x + 5x^5 - 7x^6 + 9x^{10} - \dots} = 1 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n + \dots, (5)$$

de manière que les nombres entiers  $A_n$  sont donnés par la loi de récurrence :

$$A_n - 5A_{n-1} + 5A_{n-5} - 7A_{n-6} + 9A_{n-10} - \dots = 0. (4)$$

Alors, d'après l'égalité (2) :

$$\int n = A_{n-1} - 5A_{n-5} + 14A_{n-6} - 50A_{n-10} + 55A_{n-15} - \dots (A)$$

Ainsi, l'on peut trouver la somme des diviseurs de  $n$  sans connaître aucun de ces diviseurs, sans décomposer  $n$  en facteurs premiers, etc.(\*) A l'occasion d'une formule de M. Halphen (*Bulletin de la Société mathématique, Congrès du Havre*).(\*\*) Note CXL. Le second membre est décomposable en facteurs, d'au moins treize manières (*Recherches sur quelques produits indéfinis*).(\*\*\*) *Recherches sur quelques produits...*, pp. 59 et suiv. Il est visible que, dans le numérateur, le coefficient de  $x^{\frac{n(n+1)}{2}}$  est, en valeur absolue, la somme des carrés des  $n$  premiers nombres entiers.



II. J'ignore si l'on a fait attention que l'on peut ramener la recherche de  $f^n$ , au problème de la *décomposition d'un nombre entier, en parties entières, positives, égales ou inégales*. Pour arriver à ce résultat curieux, il suffit de modifier, légèrement, la méthode employée ci-dessus.

Soit la célèbre formule d'Euler :

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots = 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+\dots \quad (5)$$

On en conclut, comme Labey (\*) :

$$\left. \begin{aligned} & x + 5x^2 + 4x^3 + \dots + x^n \int n + \dots \\ & = \frac{x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - \dots}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \dots} \end{aligned} \right\} (6)$$

La fraction

$$\frac{1}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - \dots}$$

développée en série, devient

$$\sum_0^{\infty} \psi(n)x^n,$$

$\psi(n)$  représentant le nombre des décompositions dont il s'agit (\*\*).

Par conséquent,

$$\left. \begin{aligned} & \int n = \\ & \psi(n-1) + 2\psi(n-2) - 5\psi(n-5) - 7\psi(n-7) + 12\psi(n-12) + \dots \end{aligned} \right\} (B)$$

(\*) EULER, *Introduction à l'Analyse*, t. I, p. 557.

(\*\*) *Recherches...*, p. 11.

(\*\*\*) Les coefficients 1, + 2, - 5, - 7, ..., sont donnés par la formule

$$x_\lambda = (-1)^{\lambda-1} \frac{5\lambda^2 \mp \lambda}{2}.$$

**CLX. — Sur quelques produits indéfinis (\*)**

(Août 1877.)

I. Rappelons un certain nombre de définitions et de formules :

$$\alpha = (1 - q)(1 - q^3)(1 - q^5) \dots = 2^{\frac{1}{6}} k^{-\frac{1}{12}} k^{\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{24}}, \quad (5)$$

$$\alpha' = (1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6) \dots = 2^{\frac{1}{6}} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (kk')^{\frac{1}{6}} q^{-\frac{1}{12}}, \quad (4)$$

$$\beta = (1 + q)(1 + q^3)(1 + q^5) \dots = 2^{\frac{1}{6}} (kk')^{-\frac{1}{12}} q^{\frac{1}{24}}, \quad (5)$$

$$\beta' = (1 + q^2)(1 + q^4)(1 + q^6) \dots = 2^{-\frac{1}{3}} k^{\frac{1}{6}} (k'q)^{-\frac{1}{12}}, \quad (6)$$

$$\alpha\beta\beta' = 1, \quad (7)$$

$$\frac{2\omega}{\pi} = (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots)^2, \quad (18)$$

$$1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \dots = q^{-\frac{1}{8}} \sqrt{\frac{\omega}{\pi} \sqrt{k}} = \frac{\alpha'}{\alpha}, \quad (20)$$

$$1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - \dots = q^{-\frac{1}{8}} \sqrt{\frac{\omega}{\pi} \sqrt{kk'}} = \frac{\alpha'}{\beta}, \quad (21)$$

$$1 - 5q^2 + 5q^6 - 7q^{12} + \dots = \alpha'^3 = q^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{5}{2}} \sqrt{2kk'}, \quad (24)$$

$$\beta\beta' = \sum_0^{\infty} \varphi(n)q^n (**), \quad (52)$$

$$\beta = \sum_0^{\infty} \varphi_i(n)q^n, \quad (54)$$

$$\beta' = \sum_0^{\infty} \varphi_p(n)q^n, \quad (56)$$

(\*) Complément au Mémoire de 1871. Voir la Note CXXXI.

(\*\*)  $\varphi(n)$  est le nombre des décompositions de  $n$  en parties positives, entières, inégales;  $\varphi_i(n)$ , celui des décompositions en parties impaires, inégales; etc.

$$\frac{1}{\beta} = \alpha\beta' = \sum_0^{\infty} (-q)^n \varphi(n), \quad (75)$$

$$\alpha'\beta = 1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + q^{15} + q^{22} + q^{26} + q^{35} - \dots, \quad (79)$$

$$\left. \begin{aligned} & (1 - q^3 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \dots)^5 \\ & = (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots) \sum_0^{\infty} \varepsilon_{4n+1} (-q)^n. \end{aligned} \right\} (415)$$

II. *Décomposition de la série d'Euler* (\*). — Si l'on y change  $x$  en  $q^2$ , elle devient

$$1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \dots = \alpha'. \quad (52)$$

1° Pour la décomposer en *deux* facteurs, il suffit de prendre l'*identité* :

$$\alpha' = \frac{\alpha'}{\beta} \cdot \beta.$$

En effet, d'après les formules (21), (34) :

$$1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \dots = (1 - q - q^5 + q^6 + q^{10} - \dots) \sum_0^{\infty} \varphi_i(n) q^n. \quad (A)$$

2° Pour la décomposer en *trois* facteurs, on peut d'abord observer que les formules (18), (75) donnent

$$\alpha' = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \beta^{-\frac{1}{2}},$$

ou

$$\left. \begin{aligned} & 1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \dots \\ & = (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots) \left[ \sum_0^{\infty} (-q)^n \varphi(n) \right]^2. \end{aligned} \right\} (B)$$

3° Ce n'est pas tout. A cause de la relation (7), on a

$$\alpha' = \alpha'\beta \times \alpha \times \beta';$$

(\*) Voir page 255, formule (5).

puis, par le développement (79) :

$$\left. \begin{aligned} & 1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \dots \\ & = (1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - \dots) \sum_0^\infty \varphi_i(n) q^n \times \sum_0^\infty \varphi(n) q^{2n} \text{ (*)} . \end{aligned} \right\} \text{(C)}$$

III. *Autres décompositions.* — Reprenons la formule

$$\left. \begin{aligned} & 1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \dots \\ & = (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots) \left[ \sum_0^\infty (-q)^n \varphi(n) \right]^2 . \end{aligned} \right\} \text{(B)}$$

En la combinant avec celle-ci :

$$(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + \dots)^3 = (1 + 2q + 2q^4 + \dots) \sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1} (-q)^n, \quad (415)$$

on obtient

$$(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + \dots)^2 = \sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1} (-q)^n \times \beta^2,$$

ou

$$(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + \dots)^2 = \sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1} (-q)^n \left[ \sum_0^\infty \varphi_i(n) q^n \right]^2; \quad \text{(D)}$$

puis, à cause de la formule (75) :

$$\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1} (-q)^n = \left\{ (1 - q^2 - q^4 + q^{10} + \dots) \sum_0^\infty (-q)^n \varphi(n) \right\}^2. \quad \text{(E)}$$

Ainsi : 1° de même que la *série d'Euler est le produit d'une série par le carré d'une série*, (B), son carré est le produit d'une série par le carré d'une série, (D).

(\*) On a aussi

$$\alpha' = \alpha' \beta \times \alpha \beta';$$

et, par conséquent,

$$1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \dots = (1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - \dots) \sum_0^\infty \varphi(n) q^n;$$

puis

$$\sum_0^\infty \varphi(n) q^n = \sum_0^\infty \varphi_i(n) q^n \times \sum_0^\infty \varphi(n) q^{2n}.$$

(Mai 1886.)

2° La série

$$1 - \varepsilon_5 q + \varepsilon_9 q^2 - \varepsilon_{13} q^3 + \dots$$

est un carré (\*).

IV. Suite. — D'après les définitions (4), (5),

$$\frac{\alpha'}{\beta} = \frac{(1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6)(1 - q^8) \dots}{(1 + q)(1 + q^3)(1 + q^5) \dots}$$

Si l'on groupe convenablement les facteurs, la fraction devient

$$\begin{aligned} & (1 - q)(1 - q^3)(1 - q^5) \dots \times (1 - q^4)(1 - q^8)(1 - q^{12}) \dots \\ &= \alpha \times (1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \dots) \\ &= \sum_0^\infty \varphi_i(n) (-q^n) \times [1 - q^4 - q^8 + q^{20} + \dots]. \end{aligned}$$

La comparaison avec (E) donne donc, par le changement de  $q$  en  $(-q)$  :

$$\begin{aligned} & 1 + q + q^5 + q^6 + q^{10} + \dots \\ &= (1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{16} - \dots) \sum_0^\infty \varphi(n) q^n \\ &= (1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \dots) \sum_0^\infty \varphi_i(n) q^n. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & 1 + q + q^5 + q^6 + q^{10} + \dots \\ &= (1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{16} - \dots) \sum_0^\infty \varphi(n) q^n \\ &= (1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \dots) \sum_0^\infty \varphi_i(n) q^n. \end{aligned}} \right\} \text{(F)}$$

Enfin, si l'on élève au carré, on a, d'après la note précédente :

$$\begin{aligned} & \sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1} q^n = [(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{16} \dots) \sum_0^\infty \varphi(n) q^n]^2 \\ &= [(1 - q^4 - q^8 + q^{20} + q^{28} - \dots) \sum_0^\infty \varphi_i(n) q^n]^2. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1} q^n} \right\} \text{(G)}$$

Conséquemment :

La série

$$1 + \varepsilon_5 q + \varepsilon_9 q^2 + \varepsilon_{13} q^3 + \dots,$$

quotient de deux carrés, (D), est, au moins de deux manières, le produit de deux carrés.

(\*) En effet, le produit contenu dans le second membre de (E) est

$$\frac{\alpha'}{\beta} = 1 - q - q^5 + q^6 + q^{10} - \dots$$

**CLXI. — Sur une formule d'approximation (\*).**

(Septembre 1877.)

I. Dans la *Note XXXVI*, nous avons rappelé la solution de ce problème :

*De 1 à n (inclusivement), combien y a-t-il de nombres non divisibles par des nombres premiers donnés,  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ ?*

Le nombre cherché est

$$N = n - \sum \left( \frac{n}{\alpha} \right) + \sum \left( \frac{n}{\alpha\beta} \right) - \sum \left( \frac{n}{\alpha\beta\gamma} \right) + \dots (**). \quad (A)$$

Si l'on remplace cette formule par celle-ci :

$$N' = \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \left( 1 - \frac{1}{\beta} \right) \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \dots, \quad (A')$$

dont le calcul est très simple (\*\*\*), on commet une erreur

$$x = N' - N,$$

dont il serait fort utile de trouver des limites; mais, chose remarquable, la valeur de  $x$  est, assez souvent, fort petite. Autrement dit, l'approximation résultant de la formule (A') peut, dans certains cas, être très grande.

**II. Exemples :**

$$1^{\circ} \quad n = 1\,000\,000, \quad \alpha = 15, \quad \beta = 25, \quad \gamma = 149.$$

(\*) Addition à la *Note CLVI*.

(\*\*) Tome I, page 120. La première *Remarque* renferme une faute : au lieu de  $N = 1$ , on doit lire  $N = 2$ .

(\*\*\*) Surtout au moyen de la Table IX, de Legendre.

La formule (A) donne

$$\begin{aligned} N &= 1\,000\,000 - \left(\frac{1\,000\,000}{15}\right) - \left(\frac{1\,000\,000}{25}\right) - \left(\frac{1\,000\,000}{149}\right) \\ &+ \frac{1\,000\,000}{15 \cdot 25} + \left(\frac{1\,000\,000}{15 \cdot 149}\right) + \left(\frac{1\,000\,000}{25 \cdot 149}\right) - \left(\frac{1\,000\,000}{15 \cdot 25 \cdot 149}\right) \\ &= 1\,000\,000 - 76\,925 - 45\,478 - 6\,711 + 5\,544 + 516 \\ &+ 291 - 22 = 877\,017. \end{aligned}$$

D'après (A') :

$$N' = 1\,000\,000 \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{22}{25} \cdot \frac{148}{149} = \frac{59\,072\,000\,000}{44\,551} = 877\,017,0\dots$$

Ainsi,

$$x < 0,1.$$

$$2^\circ \quad n = 8\,541, \quad \alpha = 5, \quad \beta = 11, \quad \gamma = 19, \quad \delta = 51.$$

Un calcul tout semblable donne

$$N = 5\,695, \quad N' = 5\,694,8; \quad x < 0,2.$$

III. *Remarque.* — Si  $n$  est divisible par tous les nombres premiers donnés,  $N' = N$ .

### CLXII. — Un lieu géométrique.

(Octobre 1877.)

Par un des points d'intersection de deux circonférences, on mène la double corde commune  $ATT'$ . Par les points de contact  $T, T'$ , on mène les tangentes  $TM, T'M$ . Quel est le lieu du point  $M$  (\*) ?

Prenons  $AB$  pour axe des abscisses, le point  $A$  pour origine. Soient  $x, y$  les coordonnées de  $T$ ;  $x', y'$  les coordonnées de  $T'$ . Nous avons

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0, \quad (1)$$

$$x'^2 + y'^2 - 2\alpha x' - 2\beta' y' = 0. \quad (2)$$

(\*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Les équations des tangentes sont

$$(x - \alpha)X + (y - \beta)Y = \alpha x + \beta y,$$

$$(x' - \alpha)X + (y' - \beta')Y = \alpha x' + \beta' y';$$

ou, à cause de

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} = m : \quad (5)$$

$$(x - \alpha)X + (mx - \beta)Y = (\alpha + m\beta)x, \quad (4)$$

$$(x' - \alpha)X + (mx' - \beta')Y = (\alpha + m\beta')x'. \quad (5)$$

Les abscisses des points T, T' sont, par les relations (4), (5), (5) :

$$x = 2 \frac{\alpha + m\beta}{1 + m^2}, \quad x' = 2 \frac{\alpha + m\beta'}{1 + m^2}. \quad (6)$$

Il faut, entre les quatre dernières équations, éliminer  $x, x', m$ .

L'élimination de  $x$  et de  $x'$  donne

$$2(mY + X)(\alpha + m\beta) - (\beta Y + \alpha X)(m^2 + 1) - 2(\alpha + m\beta)^2 = 0, \quad (7)$$

$$2(mY + X)(\alpha + m\beta') - (\beta' Y + \alpha X)(m^2 + 1) - 2(\alpha + m\beta')^2 = 0. \quad (8)$$

Par soustraction, après suppression du facteur  $\beta - \beta'$ , on trouve

$$2(mY + X)m - Y(m^2 + 1) - 2m[2\alpha + m(\beta + \beta')] = 0. \quad (9)$$

D'autre part, si l'on multiplie par  $\beta'$ , par  $\beta$ , et qu'on retranche :

$$-2\alpha(mY + X) + (m^2 + 1)\alpha X + 2(\alpha^2 - m^2\beta\beta') = 0. \quad (10)$$

Ces équations se réduisent à celles-ci :

$$2mX + (m^2 - 1)Y - 2m[2\alpha + m(\beta + \beta')] = 0, \quad (9')$$

$$-(m^2 - 1)X + 2mY - 2\left[\alpha - m^2 \frac{\beta\beta'}{\alpha}\right] = 0, \quad (10')$$

lesquelles représentent *deux droites perpendiculaires entre elles*.



Écrivons-les ainsi :

$$[Y - 2(\beta + \beta')]m^2 + 2(X - 2\alpha)m - Y = 0, \quad (11)$$

$$\left(2\frac{\beta\beta'}{\alpha} - X\right)m^2 + 2Ym + (X - 2\alpha) = 0. \quad (12)$$

L'enveloppe de la première droite est la circonférence représentée par

$$(X - 2\alpha)^2 + Y^2 - 2(\beta + \beta')Y = 0. \quad (15)$$

L'enveloppe de la seconde a pour équation

$$Y^2 + (X - 2\alpha)\left(X - 2\frac{\beta\beta'}{\alpha}\right) = 0. \quad (14)$$

Par conséquent, *le point M est le sommet d'un angle droit, circonscrit à deux circonférences* : le problème est simplifié (\*).

(\*) Nous arrêtons ici cette Note, parce que de pures considérations géométriques prouvent que le lieu du point M est un *Limaçon de Pascal*. Voir, dans les *Nouvelles Annales* (t. XV), les curieux théorèmes énoncés par M. Mannheim; et, dans *Mathesis* (t. I), la démonstration, due à M. Clevers. Nous ferons, cependant, les remarques suivantes :

1° *Les circonférences, dont il vient d'être question, sont orthogonales;*

2° *D'après un théorème connu (Théorèmes et Problèmes, p. 50), l'angle M est celui sous lequel se coupent les circonférences données : il est constant;*

3° *Par conséquent, le lieu du point M se compose, généralement, de plusieurs Limaçons de Pascal (MANNHEIM);*

4° *Le lieu du sommet d'un angle donné, circonscrit à deux circonférences données, coïncide avec le lieu du sommet d'un angle droit, circonscrit à deux circonférences auxiliaires, orthogonales. (Mai 1886.)*

**CLXIII. — Théorèmes d'Arithmétique.**

(Novembre 1877.)

I. Soit  $b$  un nombre premier, non diviseur de  $a$ . La fraction

$$f = \frac{a(a+b)(a+2b) \dots (a + \overline{n-1}b)}{1.2.5 \dots n}$$

est réductible à

$$\frac{N}{b^k} \text{ (*)}$$

Soit  $p$  un diviseur premier de  $1.2.5 \dots n$ , différent de  $b$ . Prenons, dans le numérateur de  $f$ , les  $p$  premiers facteurs :

$$a, \quad a + b, \quad a + 2b, \quad \dots, \quad a + (p-1)b.$$

Parmi ces nombres, il y en a un, et un seul, divisible par  $p$  (\*\*). Soit  $pa'$  ce multiple de  $p$ .

Dans le numérateur de  $f$ , les seuls multiples de  $p$  sont, comme on le voit sans peine :

$$pa', \quad pa' + pb, \quad pa' + 2pb, \quad \dots, \quad pa' + \overline{n-1}pb;$$

$n'$  étant le quotient entier de  $n$  par  $p$ .

Dans le dénominateur, les seuls multiples de  $p$  sont

$$p, \quad 2p, \quad 5p, \quad \dots, \quad n'p.$$

Supprimant, aux deux termes,  $p^{n'}$ , nous avons à considérer la fraction *auxiliaire*

$$f' = \frac{a'(a'+b) \dots (a' + \overline{n'-1}b)}{1.2.5 \dots n'}$$

(\*) Ce théorème est dû, *peut-être*, à EISENSTEIN.

(\*\*) Propriété connue.

sur laquelle on peut répéter les mêmes raisonnements. Celle-ci conduirait à

$$f'' = \frac{a''(a'' + b) \dots (a'' + \overline{n'' - 1} b)}{1.2.3 \dots n''};$$

$n''$  étant le quotient entier de  $n'$  par  $p$ ; et ainsi de suite.

De cette manière, on fait disparaître, des deux termes de  $f$ , tous les facteurs premiers du dénominateur. Il n'y a exception que pour le facteur premier  $b$ .

D'ailleurs, par une propriété connue,

$$k = E\left(\frac{n}{b}\right) + E\left(\frac{n}{b^2}\right) + E\left(\frac{n}{b^3}\right) + \dots$$

II. *Remarques.* — 1° Si  $b$  est seulement premier avec  $a$ , la fraction  $f$  est réductible à

$$\frac{N}{p^k p'^k p''^k \dots},$$

$p, p', p'', \dots$  étant les facteurs premiers de  $b$ .

2° Si  $b$  surpasse  $n$ ,  $f$  est un nombre entier.

3° On peut énoncer le théorème suivant :

*a et b étant premiers entre eux, tout nombre entier N, premier avec b, divise une infinité de termes de la progression :*

$$a, a + b, a + 2b, \dots (*)$$

4° Soit  $\frac{a}{b} = m < 1$ . On a, en série convergente (\*\*):

$$\begin{aligned} 2^{-m} &= 1 - \frac{a}{1} \frac{1}{b} + \frac{a(a+b)}{1.2} \frac{1}{b^2} - \dots \\ &\pm \frac{a(a+b)(a+2b) \dots (a + \overline{n-1} b)}{1.2.3 \dots n} \frac{1}{b^n} \mp \dots \end{aligned}$$

(\*) Ce théorème, évident par la théorie de l'équation

$$a + bx = Ny,$$

est, pour ainsi dire, inverse de celui de Jacobi (*Note XXXVI*).

(\*\*) *Comptes rendus*, t. XLV.

D'après le théorème,

$$\frac{a(a+b) \dots (a + \overline{n-1} b)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = \frac{A_n}{b^n};$$

$A_n$  étant un nombre entier. Donc

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2^n}} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{A_n}{b^{n+k}}.$$

#### CLXIV. — Sur une série.

(Novembre 1877.)

Soit  $s_n$  la somme des  $n$  premiers termes de la série

$$1 - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} - \frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)} + \dots$$

On trouve :

$$s_1 = \frac{a}{a+1}, \quad s_2 = \frac{a+1}{a+2}, \quad s_3 = \frac{a^2 + 5a + 1}{(a+1)(a+5)} = \frac{N_2}{(a+1)(a+5)}, \dots$$

Supposons

$$s_n = \frac{N_{n-2}}{(a+1)(a+2) \dots (a+n-5)(a+n-4)}, \quad (1)$$

$N_{n-2}$  étant un polynôme du degré  $n-2$ .

D'après la loi de formation des termes :

$$\left. \begin{aligned} s_n &= \frac{N_{n-5}}{(a+1)(a+2) \dots (a+n-4)(a+n-2)} \\ &\mp \frac{1}{(a+1)(a+2) \dots (a+n-1)} (*) \end{aligned} \right\} (2)$$

(\*) Le signe —, si  $n$  est pair.

Conséquemment,

$$(a + n - 2)N_{n-2} = (a + n - 5)(a + n - 1)N_{n-3} \mp 1. \quad (5)$$

Dans cette identité, prenons  $a = -(n - 1)$ . Elle se réduit à

$$N_{n-2} = \pm 1 (*). \quad (4)$$

Ainsi, le polynôme  $N_{n-2}$  devient  $\pm 1$ , quand on y remplace  $a$  par  $1 - n$ . Cette loi, évidente pour

$$N_1 = a + 1, \quad N_2 = a^2 + 5a + 1, \quad N_3 = a^3 + 6a^2 + 9a + 5,$$

subsiste donc pour  $N_4, N_5, \dots, N_{n-5}, N_{n-2}$ .

Soit maintenant, d'après les formules (1), (2) :

$$s_{n+1} = \frac{N_{n-2}}{(a+1) \dots (a+n-5)(a+n-1)} \pm \frac{1}{(a+1)(a+2) \dots (a+n)},$$

ou

$$s_{n+1} = \frac{(a+n-2)(a+n)N_{n-2} \pm 1}{(a+1)(a+2) \dots (a+n)}. \quad (5)$$

Pour  $a = 1 - n$ , le numérateur devient

$$\mp 1 \pm 1 = 0;$$

donc il est divisible par  $a + n - 1$ ; et la dernière formule se réduit à

$$s_{n+1} = \frac{N_{n-1}}{(a+1)(a+2) \dots (a+n-2)(a+n)}.$$

C. Q. F. D.

(\*)  $+ 1$ , si  $n$  est pair.

**CLXV. — Une décomposition en facteurs.**

(Mars 1878) (\*).

**I. Pour résoudre l'équation**

$$x^4 + 2px^2 + q^2 = 0,$$

dans le cas où toutes les racines sont imaginaires, on peut (\*\*)  
faire usage de l'identité

$$x^4 + 2px^2 + q^2 = [x^2 + x\sqrt{2(q-p)} + q][x^2 - x\sqrt{2(q-p)} + q]. \quad (\text{A})$$

Si l'on suppose

$$q - p = r, \quad x = (2r)^{k+\frac{1}{2}},$$

elle devient

$$\begin{aligned} & (2r)^{4k+2} + 2(q-r)(2r)^{2k+1} + q^2 \\ & = [(2r)^{2k+1} + (2r)^{k+1} + q][(2r)^{2k+1} - (2r)^{k+1} + q]. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & (2r)^{4k+2} + 2(q-r)(2r)^{2k+1} + q^2 \\ & = [(2r)^{2k+1} + (2r)^{k+1} + q][(2r)^{2k+1} - (2r)^{k+1} + q]. \end{aligned}} \right\} (\text{B})$$

Celle-ci permet de décomposer, en deux *facteurs entiers*,  
certains nombres. Par exemple :

$$10^6 - 8 \cdot 10^3 + 1 = (10^3 + 10^2 + 1)(10^3 - 10^2 + 1),$$

$$4^6 + 2 \cdot 4^3 + 9 = (4^3 + 4^2 + 5)(4^3 - 4^2 + 3),$$

etc.

**II. Si  $r = q = 1$ , la relation (B) se réduit à**

$$2^{4k+2} + 1 = (2^{2k+1} + 2^{k+1} + 1)(2^{2k+1} - 2^{k+1} + 1), \quad (\text{C})$$

formule de M. Le Lasseur (\*\*\*)).

(\*) Communiqué, en partie, au *Congrès de Reims*.(\*\*) *Manuel des Candidats à l'École polytechnique*, t. I, p. 56.(\*\*\*) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. IV, p. 86. Ce simple rapprochement, que M. Le Lasseur a bien voulu admettre, a été l'objet, à Reims, d'une attaque aussi dépourvue de raison que de politesse. (Mai 1886.)

## III. Dans l'identité

$$x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + x\sqrt{5} + 1)(x^2 - x\sqrt{5} + 1),$$

faisons

$$x = 5^{k+\frac{1}{2}}.$$

Elle prend la forme

$$5^{6k+3} + 1 = (5^{2k+1} + 1)(5^{2k+1} + 5^{k+1} + 1)(5^{2k+1} - 5^{k+1} + 1). \quad (\text{D})$$

Ainsi, le cube de  $5^{2k+1}$ , augmenté de l'unité, est décomposé en trois facteurs entiers. Par exemple :

$$(27^3 + 1) = (27 + 1)(27 + 9 + 1)(27 - 9 + 1).$$

Il est clair que le nombre des relations, analogues à (B), (C), (D), est indéfini.

IV. Le premier membre de (C) étant une somme de deux carrés, chacun des facteurs du second membre doit être, également, une somme de deux carrés.

En effet :

$$2^{2k+1} + 2^{k+1} + 1 = (2^k + 1)^2 + (2^k)^2,$$

$$2^{2k+1} - 2^{k+1} + 1 = (2^k - 1)^2 + (2^k)^2.$$

V. Si, pour abrégér, on fait  $2^k = x$ , on a encore :

$$2^{2k+1} + 2^{k+1} + 1 = 2x^2 + 2x + 1 = \frac{1}{2}[(2x + 1)^2 + 1],$$

$$2^{2k+1} - 2^{k+1} + 1 = 2x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{2}[(2x - 1)^2 + 1];$$

puis

$$2^{4k+2} + 1 = \frac{1}{4}[(2x + 1)^2 + 1][(2x - 1)^2 + 1],$$

ou

$$4x^k + 1 = \frac{1}{4}[(2x + 1)^2 + 1][(2x - 1)^2 + 1]; \quad (\text{E})$$

identité évidente et connue (\*).

(\*) *Manuel des Candidats*, t. I, p. 51. Il en résulte que la recherche des facteurs premiers de  $2^{4k+2} + 1$ , se réduit à celle des facteurs premiers, soit de  $(2x + 1)^2 + 1$ , soit de  $(2x - 1)^2 + 1$ .

**CLXVI. — Sur une classe d'équations  
différentielles (\*).**

(Juin 1878.)

I. Si l'on élimine  $c$  entre l'équation

$$f(x, y) = c\varphi(x, y) + F(c) \quad (1)$$

et sa différentielle, on trouve l'équation du premier ordre :

$$f = \varphi \frac{df}{d\varphi} + F \left( \frac{df}{d\varphi} \right). \quad (2)$$

Donc, pour intégrer cette équation (2), il suffit d'y remplacer  $\frac{df}{d\varphi}$  par  $c$ , absolument comme si  $f$  et  $\varphi$  étaient les variables (\*\*).

II. Application. — Soient :

$$f = x^2 + 1, \quad \varphi = y^2 + 2y, \quad F(c) = \frac{c + 2}{c - 1}.$$

L'équation (2) devient

$$x^2 + 1 = (y^2 + 2y) \frac{xdx}{(y + 1)dy} + \frac{xdx + 2(y + 1)dy}{xdx - (y + 1)dy},$$

ou

$$\begin{aligned} & [(x^2 + 1)(y + 1)dy - x(y^2 + 2y)dx][xdx - (y + 1)dy] \\ & = (y + 1)[xdx + 2(y + 1)dy]dy. \end{aligned}$$

L'intégrale de celle-ci est donc

$$x^2 + 1 = c(y^2 + 2y) + \frac{c + 2}{c - 1}.$$

(\*) Note tirée, en partie, du *Bulletin de l'Académie*. (Février 1878.)

(\*\*) Relativement à  $f$  et  $\varphi$ , cette équation (2) est, en effet, une équation de Clairaut, conformément au beau théorème de M. Mansion. (Mai 1886.)



Addition. — (Mai 1886.)

III. Soit l'équation :

$$x^2 + y^2 = 2xy \frac{xdx + ydy}{xdy + ydx} + \left( \frac{xdx + ydy}{xdy + ydx} \right)^2, \quad (5)$$

ou

$$(y^2 - x^2)(ydx - xdy)(xdy + ydx) = (xdx + ydy)^2. \quad (4)$$

Il paraît difficile d'intégrer celle-ci, même au moyen d'un changement de variables. Mais comme l'équation (5) rentre dans la forme (2), l'intégrale cherchée est, tout simplement,

$$x^2 + y^2 = 2cxy + c^2. \quad (4)$$

IV. La méthode précédente, *indirecte*, nous paraît, néanmoins, assez remarquable : elle s'applique à certaines équations qui ne rentrent dans aucune classe connue. Ainsi, l'intégrale de

$$f = \varphi \frac{df}{d\varphi} + \sin \left( \frac{df}{d\varphi} \right)$$

est

$$f = c\varphi + \sin c,$$

quelles que soient les fonctions  $f$ ,  $\varphi$ .

V. *Exemple.* — L'équation

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y = \cos x \cos y \sin(x + y) \frac{\cos x + y' \cos y}{\cos^2 y + y' \cos^2 x} \\ + \sin \left\{ \cos^2 x \cos^2 y \frac{\cos x + y' \cos y}{\cos^2 y + y' \cos^2 x} \right\} \end{aligned}$$

a pour intégrale :

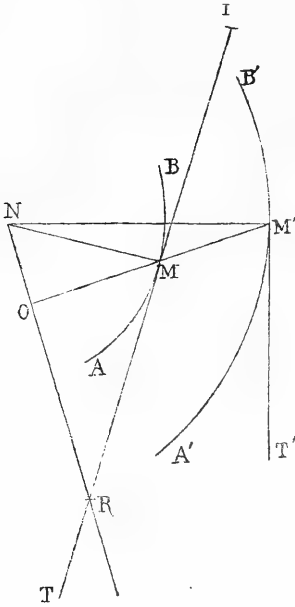
$$\sin x + \sin y = c \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cos y} + \sin c (*).$$

(\*) On contribuerait aux progrès de l'Analyse si l'on pouvait former un recueil des équations différentielles ayant des intégrales de formes données.

**CLXVII. — Conchoïdes et podaires.**

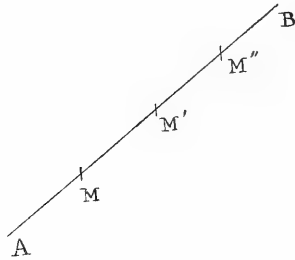
(Novembre 1878.)

I. Soient des conchoïdes  $AMB, A'M'B', \dots$  ayant le point  $O$  pour pôle. D'après un théorème connu, les normales aux points correspondants  $M, M', \dots$  concourent en un point  $N$ , situé sur la perpendiculaire au rayon  $OMM' \dots$ . Les tangentes  $MT, M'T', \dots$  sont donc les positions du second côté d'un angle droit, dont le sommet parcourt le rayon, et dont le premier côté passe en  $N$ . Conséquemment, l'enveloppe de ces droites est une parabole ayant  $N$  pour foyer,  $O$  pour sommet, et dont  $OMM' \dots$  est la tangente au sommet (\*). Si la tangente  $MT$  rencontre  $NO$  en  $R$ , on trouve le point  $I$ , où elle touche la parabole, en prenant  $MI = MR$ .



II. Remarque. — 1° Pour chaque rayon  $OMM' \dots$ , il y a une parabole, dont le sommet est le pôle  $O$ .

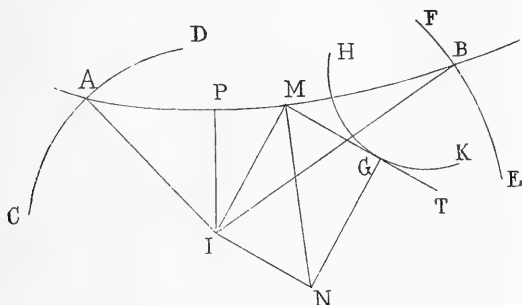
III. COROLLAIRE. — Si une droite  $AB$  se meut dans un plan, les tangentes en  $M, M', M'', \dots$  aux trajectoires de ces points, enveloppent une parabole (\*\*).



(\*) Propriété connue. La parabole est l'anti-podaire de  $OMM' \dots$ , relativement au foyer  $N$ .

(\*\*) Théorème connu. Voyez les *Mélanges de Géométrie pure*, par M. de Jonquières, p. 29.

IV. GÉNÉRALISATION. — Soit une courbe  $AB$ , s'appuyant sur deux directrices  $CD$ ,  $EF$ . Menons les normales  $AI$ ,  $BI$  à ces



directrices :  $I$  est le centre instantané de rotation ; donc  $MI$  est normale à la trajectoire du point quelconque  $M$ . Soient  $MT$  la tangente à cette trajectoire et  $HGK$  l'enveloppe de  $MT$ .

Relativement à  $HGK$ ,  $AB$  est une podaire ; donc  $HGK$  est l'anti-podaire de  $AB$  ; et, par conséquent :

*L'enveloppe des tangentes aux trajectoires des points  $M, M', \dots$ , est l'anti-podaire de  $AB$ , relativement au centre instantané  $I$ .*

Pour trouver le point de contact  $G$ , il suffit de tracer la normale  $MN$  à  $AB$ , puis d'achever le rectangle  $MING$ .

V. Remarque. — Si la ligne  $AMB$  est droite, et que les directrices  $CD$ ,  $EF$  soient circulaires, la trajectoire du point quelconque  $M$  est une courbe de Watt (\*), et le point  $I$  est fixe. Soit alors  $IP$  perpendiculaire à  $AB$  : le point  $P$  est celui où la droite mobile touche son enveloppe.

### CLXVIII. — Une propriété des nombres triangulaires.

( Décembre 1878. )

Il suffit de l'énoncer :

*La différence entre les carrés de deux nombres triangulaires consécutifs égale le cube de la différence entre ces nombres.*

(\*) Dans le cas le plus général. Voir la Note CXVII.

**CLXIX (\*) — Sur Phomologie.**

(Décembre 1878.)

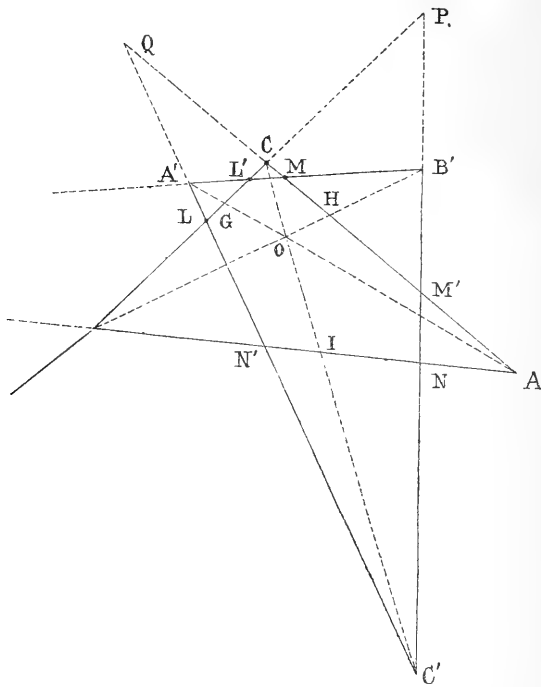
**I. PROBLÈME.** — Sur les côtés  $a, b, c$ , d'un triangle  $ABC$ , on prend

$$BL = \alpha, \quad BL' = \alpha', \quad CM = \beta, \quad CM' = \beta', \quad AN = \gamma, \quad AN' = \gamma',$$

de manière que

$$\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma' = (a - \alpha)(a - \alpha')(b - \beta)(b - \beta')(c - \gamma)(c - \gamma'):$$

l'hexagone  $LL'MM'NN'$  est inscrit à une conique (\*\*).



Prolongeant les cordes  $L'M, M'N, N'L$ , on obtient le triangle

(\*) Tirée, en partie, du *Bulletin de l'Académie*.

(\*\*) Théorème de Carnot.

$A', B', C'$ , homologique de  $ABC$ . Déterminer, en fonction des données, l'axe  $PQR$  d'homologie et le centre  $O$  d'homologie.

1° Considérant le triangle  $ABC$  et la transversale  $B'C'$ , on a

$$AN \cdot BP \cdot CM' = AM' \cdot BN \cdot CP,$$

ou

$$\frac{BP}{CP} = \frac{BN \cdot AM'}{AN \cdot CM'} = \frac{(c - \gamma)(b - \beta')}{\gamma\beta'}. \quad (1)$$

Une permutation tournante donne ensuite :

$$\frac{CQ}{AQ} = \frac{(a - \alpha)(c - \gamma')}{\alpha\gamma'}, \quad \frac{AR}{BR} = \frac{(b - \beta)(c - \alpha')}{\beta\alpha'}. \quad (2)$$

Ainsi l'axe  $PQR$  divise les côtés du triangle  $ABC$  dans des rapports simples et connus.

2° Des triangles  $BCH$ ,  $BAH$ , respectivement coupés par  $A'B'$ ,  $B'C'$ , on conclut :

$$\begin{aligned} BL' \cdot CM \cdot B'H &= BB' \cdot MH \cdot CL', \\ BN \cdot AM' \cdot B'H &= BB' \cdot M'H \cdot AN. \end{aligned}$$

Done

$$\frac{MH}{M'H} = \frac{AN \cdot BL' \cdot CM}{BN \cdot AM' \cdot CL'},$$

ou

$$\frac{MH}{M'H} = \frac{\beta\gamma\alpha'}{(a - \alpha')(b - \beta')(c - \gamma)}. \quad (5)$$

Et comme  $MM' = \beta' - \beta$ , on tire, de cette proportion :

$$MH = (\beta' - \beta) \frac{\beta\gamma\alpha'}{\beta\gamma\alpha' + (a - \alpha')(b - \beta')(c - \gamma)}, \quad (4)$$

$$M'H = (\beta' - \beta) \frac{(a - \alpha')(b - \beta')(c - \gamma)}{\beta\gamma\alpha' + (a - \alpha')(b - \beta')(c - \gamma)}. \quad (5)$$

3° On a

$$CH = \beta + MH, \quad AH = (b - \beta') + M'H;$$

puis, au moyen des valeurs précédentes :

$$\frac{CH}{AH} = \frac{\beta}{b - \beta'} \cdot \frac{\alpha'\beta'\gamma + (a - \alpha')(b - \beta')(c - \gamma)}{\alpha'\beta'\gamma + (a - \alpha')(b - \beta)(c - \gamma)}. \quad (6)$$

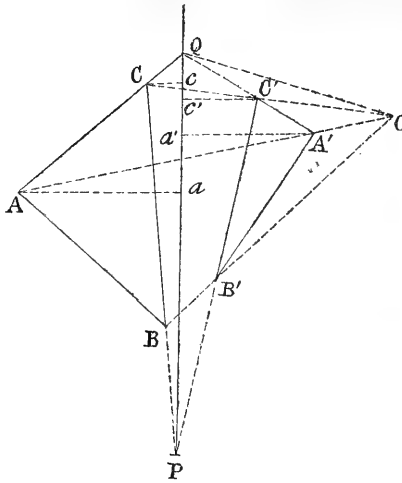
Une simple permutation donne ensuite :

$$\frac{AI}{BI} = \frac{\gamma}{c - \gamma'} \cdot \frac{\alpha\beta'\gamma' + (a - \alpha)(c - \gamma')(b - \beta')}{\beta'\gamma\alpha + (a - \alpha)(c - \gamma)(b - \beta')}, \quad (7)$$

$$\frac{BG}{CG} = \frac{\alpha}{a - \alpha'} \cdot \frac{\beta\gamma'\alpha' + (b - \beta)(a - \alpha')(c - \gamma')}{\gamma'\alpha\beta + (b - \beta)(a - \alpha)(c - \gamma')} (*). \quad (8)$$

II. THÉORÈME. — *Le rapport des distances des sommets A, A',*

*au centre O, est au rapport de leurs distances à l'axe PQ, dans une raison constante (\*\*).*



J'en ai trouvé, dans aucun ouvrage, la démonstration annoncée par Chasles (\*\*\*) . En voici une.

Soient Aa, A'a', Cc, C'c' perpendiculaires à PQ. On doit avoir

$$\frac{OA}{OA'} : \frac{Aa}{A'a'} = \frac{OC}{OC'} : \frac{Cc}{C'c'},$$

ou

$$\frac{OA \cdot A'a'}{OA' \cdot Aa} = \frac{OC \cdot C'c'}{OC' \cdot Cc}. \quad (9)$$

Or :

$$\frac{A'a'}{C'c'} = \frac{A'Q}{C'Q}, \quad \frac{Aa}{Cc} = \frac{AQ}{CQ};$$

donc l'égalité (9) devient

$$\frac{OA}{OA'} \cdot \frac{AQ}{A'Q} = \frac{OC}{OC'} \cdot \frac{C'Q}{CQ}. \quad (10)$$

(\*) On vérifie aisément (malgré la complication de ces valeurs) que le produit des seconds membres égale l'unité. C'est ce qui doit être; car

$$CH \cdot AI \cdot BG = AH \cdot BI \cdot CG.$$

(\*\*) *Aperçu historique*, seconde édition, p. 84.

(\*\*\*) A l'endroit cité.

Menons QO. D'après un théorème sur les transversales, trouvé autrefois (\*):

$$\frac{OA}{OA'} \cdot \frac{CQ}{C'Q} = \frac{OC}{OC'} \cdot \frac{AQ}{A'Q};$$

ce qui ne diffère pas de la relation (10).

III. *Remarque.* — La valeur commune des derniers rapports est  $\frac{AC}{A'C}$ .

*Addition.* — (Juin 1886.)

IV. Soient, pour abrégé :

$$AO = x, \quad BO = y, \quad CO = z;$$

$$BG = p, \quad CG = p', \quad CA = q, \quad AH = q', \quad AI = r, \quad BI = r';$$

de manière que

$$pqr = p'q'r'. \quad (11)$$

Du triangle AGC, coupé par BOH, on conclut

$$BC \cdot AH \cdot GO = BG \cdot CH \cdot AO,$$

ou

$$aq'GO = pqAO;$$

puis, par un calcul fort simple,

$$\frac{x}{AG} = \frac{(p + p')q'}{(p + p')q' + pq}; \quad (12)$$

(\*) Si trois droites, issues d'un même point O, rencontrent, en A, B, C et en A', B', C', deux transversales, on a

$$\frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{OA}{OA'} = \frac{CA}{C'A'} \cdot \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{OC}{OC'}.$$

(THÉORÈMES ET PROBLÈMES, p. 95.)

et par une permutation tournante :

$$\frac{y}{\text{BH}} = \frac{(q + q')r'}{(q + q')r' + qr}, \quad (13)$$

$$\frac{z}{\text{CT}} = \frac{(r + r')p'}{(r + r')p' + rp}. \quad (14)$$

Les droites AG, BP, CI sont connues (\*); donc les valeurs de  $x, y, z$  le sont également.

V. *Remarques.* — 1° La formule (13) peut être remplacée par une autre. Reprenons, en effet, la relation

$$\frac{x}{\text{AG}} = \frac{(p + p')q'}{(p + p')q' + pq}. \quad (12)$$

Dans le triangle ABC, on peut substituer le point G au point H, en changeant  $p$  en  $q'$ ,  $q$  en  $p'$ . Ainsi

$$\frac{y}{\text{BH}} = \frac{(q + q')p}{(p + p')p + p'q'} \quad (**). \quad (15)$$

2° Dans les formules (12), (15), les dénominateurs sont *identiques*; donc

$$\frac{x}{\text{AG}} + \frac{y}{\text{BH}} = 1 + \frac{pq'}{(p + p')q' + pq}.$$

Si l'on introduit les aires des triangles AOB, BOC, COA, ABC, on trouve, au lieu de la dernière relation,

$$\frac{\text{AOB}}{\text{ABC}} = \frac{pq'}{(p + q')p' + pq}. \quad (16)$$

(\*) Par exemple, au moyen d'un théorème d'Euler :

$$\overline{\text{AG}}^2 = \frac{1}{a}(b^2p + c^2p') - pp'.$$

(\*\*) Il est d'ailleurs visible que, d'après l'égalité (14) :

$$\frac{r'}{(q + q')r' + qr} = \frac{p}{(q + q')p + p'q'}.$$



Par conséquent :

Si les quantités  $p, q, r, p', q', r'$  satisfont à la condition  $pqr = p'q'r'$ , elles rendent identique l'égalité

$$1 = \frac{pq'}{pq + p'q' + pq'} + \frac{qr'}{qr + q'r' + qr'} + \frac{rp'}{rp + r'p' + rp'}. \quad (17)$$

3° La formule (12) donne, immédiatement, cette autre identité :

$$1 = \frac{pq}{pq + p'q' + pq'} + \frac{qr}{qr + q'r' + qr'} + \frac{rp}{rp + r'p' + rp'}. \quad (18)$$

4° Des deux dernières, résulte celle-ci :

$$1 = \frac{p'q'}{pq + p'q' + pq'} + \frac{q'r'}{qr + q'r' + qr'} + \frac{r'p'}{rq + r'p' + rp'}. \quad (*). \quad (19)$$

5° Si l'on simplifie, autant que possible, chacune de ces égalités, on trouve

$$(pqr - p'q'r')^2 = 0 \quad (**).$$

(\*) De simples échanges de lettres donnent encore trois autres relations, de même forme que les précédentes.

(\*\*) Par conséquent, la surface représentée par

$$1 = \sum \frac{xy}{xy + ab + bx},$$

est identique avec celle dont l'équation est

$$xyz = abc.$$

**CLXX. — Polaires réciproques.**

(Décembre 1878) (\*).

**I. THÉORÈME.** — Deux triangles  $T, T'$ , polaires réciproques relativement à une conique  $C$ , sont homologues (\*\*).

**RÉCIPROQUE.** — Deux triangles  $T, T'$ , homologues, sont polaires réciproques relativement à une certaine conique (\*\*\*) .

**II. Remarques.** — 1° Soient deux polygones  $P, P'$ , de  $n$  côtés chacun, polaires réciproques relativement à une conique  $C$ . Dans  $P$ , prenons trois côtés, indéfiniment prolongés : nous formons un triangle  $ABC$ , auquel correspond, dans  $P'$ , un triangle  $A'B'C'$ . Les droites  $AA', BB', CC'$  concourent en un centre d'homologie  $H$ . Le nombre de ces centres est

$$C_{n,5} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 5}.$$

2° Le nombre  $N$ , des triangles  $ABC$ , est celui des combinaisons trois à trois, de  $\frac{n(n-1)}{2}$  droites. On trouve

$$N = \frac{1}{48} (n+1)n(n-1)(n-2)(n^2-n-4).$$

Etc.

(\*) Complément à la Note CLIX.

(\*\*) Démonstration facile.

(\*\*\*) Cette réciproque a été démontrée par M. Neuberg, aussi bien que le théorème (*Nouvelle Correspondance mathématique*, t. V, p. 270). Mon savant Confrère a étendu ses recherches aux tétraèdres homologues.

**CLXXI. — Question d'analyse indéterminée.**

(Juin 1879.)

Trouver la loi de formation des nombres à la fois triangulaires et carrés (PHILIPPE BRETON) (\*).

I. L'équation du problème :

$$x^2 = \frac{1}{2} y(y + 1),$$

se transforme, immédiatement, en

$$(2y + 1)^2 - 2(2x)^2 = 1. \quad (1)$$

Si l'on développe  $\sqrt{2}$  en fraction continue, on trouve les réduites :

$$\frac{1}{1}, \frac{5}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \dots$$

Par conséquent :

$$2x = 2, \quad 12, \quad 70, \quad 408, \dots,$$

$$2y + 1 = 5, \quad 17, \quad 99, \quad 577, \dots;$$

ou

$$x = 1, \quad 6, \quad 55, \quad 204, \dots$$

$$y = 1, \quad 8, \quad 49, \quad 288, \dots$$

Ainsi, les valeurs de  $y$  sont, alternativement, le carré du numérateur d'une réduite de rang impair, et le double du carré du dénominateur d'une réduite de rang pair (\*\*).

(\*) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. V, p. 283. La question est traitée dans l'*Algèbre* d'Euler.

(\*\*) En outre, chacun de ces doubles, augmenté de 1, est un carré.

II. Les valeurs générales sont données par les formules connues :

$$x = \frac{1}{4\sqrt{2}} [(1 + \sqrt{2})^{2n} - (1 - \sqrt{2})^{2n}], \quad (2)$$

$$2y + 1 = \frac{1}{2} [(1 + \sqrt{2})^{2n} + (1 - \sqrt{2})^{2n}]; \quad (5)$$

ou par celles-ci, qui s'en déduisent :

$$x = \frac{1}{2} C_{2n,1} + C_{2n,3} + 2C_{2n,5} + 2^2 C_{2n,7} + \dots, \quad (4)$$

$$y = C_{2n,2} + 2C_{2n,4} + 2^2 C_{2n,6} + \dots \quad (5)$$

D'ailleurs

$$x^2 = \frac{1}{32} [(1 + \sqrt{2})^{4n} + (1 - \sqrt{2})^{4n} - 2];$$

c'est-à-dire :

$$x^2 = \frac{1}{8} [C_{4n,2} + 2C_{4n,4} + 2^2 C_{4n,6} + \dots]. \quad (6)$$

Ainsi, les nombres demandés résultent de la formule

$$N = \frac{1}{8} [C_{4n,2} + 2C_{4n,4} + 2^2 C_{4n,6} + \dots]; \quad (7)$$

*ils sont carrés et triangulaires.*

III. D'après la valeur de  $2y + 1$ , on a

$$y = \frac{1}{4} [(\sqrt{2} + 1)^n - (\sqrt{2} - 1)^n]^2.$$

Si  $n$  est pair, cette formule peut être écrite ainsi :

$$y = 2 [C_{n,1} + 2C_{n,3} + 2^2 C_{n,5} + \dots]^2; \quad (8)$$

et, si  $n$  est impair :

$$y = [1 + 2C_{n,2} + 2^2 C_{n,4} + \dots]^2. \quad (9)$$

Dans le second cas,  $y$  est un carré impair; et, dans le premier,  $y$  est le double d'un carré pair (\*).

(\*) Voir la fin du paragraphe II.

IV. *Remarques.* — 1°  $N = \frac{1}{2}y(y+1)$  est la somme des  $y$  premiers nombres entiers. Le problème peut donc être énoncé ainsi :

Déterminer  $y$ , de façon que la somme  $N$ , des  $y$  premiers nombres entiers, soit un carré.

2° Si l'on représente par  $\frac{u_n}{v_n}$  la réduite de rang  $n$ , on a

$$\left. \begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2} [(\sqrt{2} + 1)^n + (1 - \sqrt{2})^n], \\ v_n &= \frac{1}{2\sqrt{2}} [(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n]; \end{aligned} \right\} (10)$$

puis

$$u_n v_n = \frac{1}{4\sqrt{2}} [(1 + \sqrt{2})^{2n} - (1 - \sqrt{2})^{2n}] = x = N.$$

Les valeurs de  $N$  sont donc

$$1^2, (2 \cdot 5)^2, (5 \cdot 7)^2, (12 \cdot 17)^2, (29 \cdot 41)^2, (70 \cdot 99)^2, \dots (*)$$

*Addition.* — (Juin 1886.)

V. Dans l'expression de  $v_n$ , remplaçons  $n$  par  $2n - 1$ . Nous aurons :

$$v_{2n-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} [(\sqrt{2} + 1)^{2n-1} + (\sqrt{2} - 1)^{2n-1}]. \quad (11)$$

Soient

$$\sqrt{2} + 1 = \alpha, \quad 1 - \sqrt{2} = -\beta.$$

Ces deux quantités vérifient l'équation

$$t^2 - 2t - 1 = 0.$$

Donc, d'après un théorème connu (\*\*):

(\*) Cette propriété résulte aussi de la forme des valeurs de  $y$ .

(\*\*) *Mémoire sur certaines décompositions en carrés* (ATTI DE L'ACADÉMIE DES NUOVI LINCEI, 1884, p. 25).

*Chacun des dénominateurs*

1, 5, 29, 169, 985, 5 741, ..

est : 1° la somme de deux carrés ; 2° la somme de trois carrés (\*).

**CLXXII (\*\*). — Sur une classe d'équations différentielles.**

(Juillet 1879.)

I. Dans la première *Note sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques*, j'ai fait observer que l'intégrale générale de l'équation classique :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{y}{1-x^2} = 0, \tag{1}$$

est réductible à la forme

$$y = E(x) \left[ \lambda \int \frac{dx}{x [E(x)]^2} + \mu \right]. \tag{2}$$

Dans cette égalité,  $\lambda, \mu$  sont les constantes arbitraires, et

$$E(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi} = E_1(x).$$

(\*) Il y a, naturellement, exception pour les deux premiers. Quant aux autres, on trouve :

$$\begin{aligned} 29 &= 5^2 + 2^2 = 5^2 + 4^2 + 2^2, \\ 169 &= 12^2 + 5^2 = 12^2 + 5^2 + 4^2, \\ 985 &= 29^2 + 12^2 = 21^2 + 20^2 + 12^2, \\ 5\,741 &= 29^2 + 70^2 = 21^2 + 20^2 + 70^2, \\ &\dots \end{aligned}$$

On peut consulter, sur ce sujet, le travail intitulé : *Notes sur la théorie des fractions continues et sur certaines séries* (1885, p. 26).

(\*\*) Tirée du *Bulletin de l'Académie* (1886).

Il résulte, de la formule (2), que l'équation (1) peut être transformée d'une manière simple et remarquable.

Posons, en effet :

$$y = \frac{z}{\sqrt{x}}, \quad \sqrt{x} E(x) = X; \quad (5)$$

nous aurons

$$z = X \left[ \lambda \int \frac{dx}{X^2} + \mu \right]; \quad (4)$$

puis, en divisant par X et en différenciant deux fois :

$$\frac{z''}{z} = \frac{X''}{X} (*). \quad (5)$$

*Addition.* — (Juin 1886.)

II. *Remarques.* — 1° X étant une fonction *quelconque*, l'intégrale générale de l'équation (5) est donnée par la formule (4). On vérifie directement ce fait en observant qu'une intégrale particulière est

$$z_1 = X,$$

et en appliquant la méthode connue (\*\*).

2° Une seconde intégrale particulière est, évidemment,

$$z_2 = X \int \frac{dx}{X^2}.$$

III. Il n'est pas inutile de vérifier que

$$y = E(x) \left[ \lambda \int \frac{dx}{x[E(x)]^2} + \mu \right] \quad (2)$$

est l'intégrale générale de l'équation (1).

(\*) Dans le tome V de la *Nouvelle Correspondance mathématique* (p. 551), j'ai ramené, à cette forme, une équation assez complexe, proposée par M. Escary.

(\*\*) *Inventée*, ou du moins très heureusement employée par l'illustre Sturm, dans ses Mémoires sur la théorie de la Chaleur. Il en a déduit son célèbre théorème.

Pour plus de clarté dans le calcul, remplaçons, suivant l'usage,  $x$  par  $c$ , de manière que

$$\frac{y}{E(c)} = \lambda \int \frac{dc}{c[E(c)]^2} + \mu;$$

ou, sous forme abrégée :

$$\frac{y}{E} = \lambda \int \frac{dc}{cE^2} + \mu. \quad (6)$$

Les deux premières dérivées de cette équation sont

$$\begin{aligned} c(Ey' - yE') &= \lambda, \\ cEy'' + Ey' - (cE'' + E')y &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

On sait que

$$E' = \frac{1}{c}[E - F], \quad F' = \frac{E - b^2F}{b^2c} (*);$$

done

$$E'' = \frac{1}{c}[E' - F'] - \frac{1}{c^2}[E - F], \quad cE'' + E' = E' - F' = -\frac{c}{b^2}E.$$

La substitution dans (7) donne, après suppression du facteur commun  $E$  :

$$cy'' + y' + \frac{c}{b^2}y = 0;$$

ce qui ne diffère pas de l'équation (1).

IV. Si l'on veut, de la transformée (5), revenir à la proposée (1), on doit faire  $z = y\sqrt{x}$ . On trouve

$$\frac{4x^2y'' + 4xy' - y}{4x^2y} = \frac{X''}{X}. \quad (8)$$

A cause de  $X = \sqrt{x}E(x)$ , cette équation paraît contradictoire avec l'équation (1). Mais un calcul semblable au précédent donne

$$\frac{X''}{X} = -\frac{1 + 3x^2}{4(1 - x^2)x^2}; \quad (9)$$

(\*) LEGENDRE, t. I, pp. 66 et 67.



puis

$$4x^2(1-x^2)y'' + 4x(1-x^2)y' - (1-x^2)y + (1+5x^2)y = 0;$$

etc.

Ainsi, la fonction  $\frac{X''}{X}$ , au lieu d'être transcendante, est algébrique et rationnelle. Cela devait arriver; car deux équations différentielles ne peuvent avoir même intégrale générale.

V. Lorsque  $X = \sqrt{x} E(x)$ , l'équation (5) est donc

$$\frac{z''}{z} + \frac{1+5x^2}{4(1-x^2)x^2} = 0. \quad (10)$$

Cette transformée de l'équation (1), plus simple que celle-ci, a pour intégrale, comme on l'a vu :

$$z = X \left[ \lambda \int \frac{dx}{X^2} + \mu \right]. \quad (4)$$

VI. *Généralisation.* — L'équation (5) est comprise dans cette autre :

$$X^2 z'' + kXX'z' - [XX'' + kX'^2]z = 0; \quad (11)$$

$k$  désignant une constante donnée.

En l'écrivant ainsi :

$$\frac{Xz'' - X''z}{Xz' - X'z} + k \frac{X'}{X} = 0, \quad (12)$$

on reconnaît qu'une intégrale première est

$$(Xz' - Xz) X^k = A. \quad (15)$$

L'intégrale générale a donc pour expression

$$z = X \left[ A \int \frac{dx}{X^{k+2}} + B \right] (*). \quad (15)$$

(\*) On arrive à la même conclusion en observant que l'équation (11) est vérifiée par  $z = X$ .

VII. *Remarque.* — Sauf le cas où  $X$  est un monôme, la méthode précédente ne semble point applicable à l'équation

$$\frac{z^{(p)}}{z} = \frac{X^{(p)}}{X}, \quad (15)$$

$p$  surpassant 2.

Mais soit  $X = x^n$ ; et, par conséquent,

$$\frac{z^{(p)}}{z} = n(n-1) \cdots (n-p+1)x^{-p}. \quad (16)$$

Si l'on essaie

$$z = x^\lambda,$$

on trouve

$$\lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-p+1) = n(n-1) \cdots (n-p+1). \quad (17)$$

Cette équation *algébrique*, du degré  $p$ , dont la discussion est intéressante, est vérifiée par

$$\lambda = n \quad (*);$$

et, lorsque  $p$  est *pair*, par

$$\lambda = -(n-p+1).$$

L'intégrale générale de l'équation (15) (\*\*\*) est donc, si  $p$  est *pair* :

$$z = Ax^n + Bx^{p-n-1} + B_1x^\lambda + \cdots + A_{p-2}x^{\lambda-p+2}; \quad (18)$$

et, si  $p$  est *impair* :

$$z = Ax^n + A_1x^\lambda + \cdots + A_{p-1}x^{\lambda-p+1}. \quad (19)$$

VIII. *Application.* — Soient  $n = 5$ ,  $p = 4$ ; auquel cas l'équation (16) devient

$$\frac{z^{iv}}{z} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{x^4}. \quad (20)$$

(\*) L'existence de cette racine était évidente *a priori*.

(\*\*) Équation *linéaire*, à *coefficients constants*.

L'équation auxiliaire (17) est

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5) = 5024,$$

ou

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 11\lambda^2 - 6\lambda - 5024 = 0.$$

Elle a pour racines :

$$9, -6, \frac{1}{2}(5 + \sqrt{215}\sqrt{-1}), \frac{1}{2}(5 - \sqrt{215}\sqrt{-1}).$$

L'intégrale générale de l'équation (20) est donc

$$z = Ax^9 + Bx^{-6} + \left[ A_1 x^{\frac{\sqrt{215}\sqrt{-1}}{2}} + A_2 x^{-\frac{\sqrt{215}\sqrt{-1}}{2}} \right] x^{\frac{5}{2}};$$

ou, sous une forme un peu plus simple,

$$z = Ax^9 + Bx^{-6} + Cx^{\frac{5}{2}} \sin \left( \frac{\sqrt{215}}{2} \mathcal{L}. \alpha x \right) (*). \quad (21)$$

(\*) Si l'on pose, pour abrégier,

$$\frac{\sqrt{215}}{2} = m,$$

les quatre premières dérivées de

$$z_1 = x^{\frac{5}{2}} \sin (m \mathcal{L}. \alpha x)$$

sont :

$$z_1' = \frac{5}{2} x^{\frac{1}{2}} \sin (m \mathcal{L}. \alpha x) + m x^{\frac{1}{2}} \cos (m \mathcal{L}. \alpha x),$$

$$z_1'' = \left( \frac{5}{4} - m^2 \right) x^{-\frac{1}{2}} \sin (m \mathcal{L}. \alpha x) + 2m x^{-\frac{1}{2}} \cos (m \mathcal{L}. \alpha x),$$

$$z_1''' = -\left( \frac{5}{8} + \frac{5}{2} m^2 \right) x^{-\frac{5}{2}} \sin (m \mathcal{L}. \alpha x) - \left( \frac{1}{4} m + m^3 \right) x^{-\frac{5}{2}} \cos (m \mathcal{L}. \alpha x),$$

$$z_1^{IV} = \left( \frac{9}{16} + \frac{5}{2} m^2 + m^4 \right) x^{-\frac{9}{2}} \sin (m \mathcal{L}. \alpha x).$$

Égalant à

$$5024 x^{-\frac{5}{2}} \sin (m \mathcal{L}. \alpha x)$$

*Autre addition. — (Juillet 1886.)*

IX. M. De Tilly m'écrit (\*) qu'il sait intégrer

$$\frac{z^{(p)}}{z} = \Lambda x^m,$$

*m* étant *quelconque*. C'est là un très grand progrès. En effet, la méthode de Kummer (\*\*), fort ingénieuse, exige des transformations longues et pénibles; et, jusques dans ces derniers temps, j'ai cru que l'intégrale de la simple équation

$$\frac{z^{(p)}}{z} = x \tag{22}$$

ne pouvait être exprimée que par des intégrales définies. Voici, en peu de mots, le résultat auquel je suis parvenu, il y a quelques années.

Soit  $\theta_1$  une racine primitive de l'équation binôme  $x^{p+1} - 1 = 0$ . L'équation (22) est vérifiée par

$$z_1 = \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^{p+1}}{p+1}} (e^{\alpha x} + e^{\alpha \theta_1 x} + \dots + e^{\alpha \theta_1^p x}) d\alpha. \tag{25}$$

Donc, l'intégrale générale est la somme de  $p$  intégrales définies, respectivement multipliées par des constantes.

cette dernière expression, on a donc

$$m^4 + \frac{5}{2} m^2 - \frac{48\ 575}{16} = 0;$$

d'où, en négligeant les racines imaginaires,

$$m^2 = \frac{215}{4};$$

etc.

(\*) Lettre du 4 juillet.

(\*\*) *Journal de Liouville*, t. IV.

X. *Remarque.* — Soit  $p = 1$ . L'intégrale générale de

$$\frac{z'}{z} = x$$

serait donc

$$z = A \int_0^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}) d\alpha. \quad (24)$$

Or, cette intégrale est

$$z = C e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Ainsi, l'on doit avoir

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}) dx = k e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Si l'on fait  $x = 0$ , on trouve  $k = \sqrt{2\pi}$ . Par conséquent,

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}) d\alpha = \sqrt{2\pi} e^{\frac{x^2}{2}}; \quad (25)$$

formule connue.

Dans le cas général, la comparaison de la valeur de  $z$ , déduite de la formule (25), avec celle qui résulte de la méthode due à mon savant Confrère, fera connaître de nouvelles intégrales définies.

### CLXXIII. — Théorèmes d'Arithmétique (\*).

(Avril 1886.)

I. Soit  $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$ ,  $a, b, c, \dots$  étant des nombres premiers, inégaux. Soit  $x$  le plus grand des produits  $a\alpha, b\beta, c\gamma, \dots$  On a

$$1 \cdot 2 \cdot 5 \dots x = \mathcal{N}(N).$$

Supposons

$$x = u\alpha \supseteq b\beta \supseteq c\gamma \supseteq \dots$$

(\*) A propos de ma démonstration du *Théorème de Staudt et Clausen* (Note LXXVI).

Il suffit de démontrer que

$$1 \cdot 2 \cdot 5 \dots x = \mathfrak{M}(b^\beta) \quad (*)$$

Dans le premier membre, le nombre  $b$  est facteur autant de fois que l'indique l'expression

$$\lambda = \left(\frac{x}{b}\right) + \left(\frac{x}{b^2}\right) + \left(\frac{x}{b^3}\right) + \dots$$

Soit

$$x = b\beta + y,$$

$y$  étant nul ou positif. Il est clair que l'on a

$$\left(\frac{x}{b}\right) = \beta + \left(\frac{y}{b}\right),$$

puis

$$\lambda \geq \beta;$$

et, par conséquent,

$$1 \cdot 2 \cdot 5 \dots x = \mathfrak{M}(b^\beta).$$

II. Soient  $n$  un nombre pair, et  $p$  un nombre premier, supérieur à 2. On a

$$\Delta^{p-1}(1^{n-1}) = \mathfrak{M}(p).$$

Le premier membre égale

$$p^{n-1} - \frac{p-1}{1}(p-1)^{n-1} + \dots - \frac{p-1}{1}2^{n-1} + 1.$$

En négligeant des multiples de  $p$ , on le réduit à

$$(p-1)^{n-1} + (p-2)^{n-1} + (p-5)^{n-1} + \dots + 2^{n-1} + 1;$$

puis à

$$-1 - 2^{n-1} - 5^{n-1} - \dots + 5^{n-1} + 2^{n-1} + 1,$$

quantité nulle, parce qu'elle est composée de  $n$  termes, égaux et de signes contraires deux à deux.

(\*) En effet,

$$1 \cdot 2 \cdot 5 \dots ax = \mathfrak{M}(a^\alpha);$$

et, d'un autre côté, les facteurs  $a^\alpha$ ,  $b^\beta$ ,  $c^\gamma$ , ... sont premiers entre eux, deux à deux.

**CLXXIV. — Sur un théorème de M. Pépin.**

(Septembre 1880.)

I. Dans les *Comptes rendus* (séance du 16 août), on lit :

« Ainsi les deux nombres premiers 7 et 15 ne peuvent diviser  
 » la somme de trois cubes sans diviser l'un de ces cubes. »

$p$  étant un nombre premier, soit  $n = \frac{p-1}{2}$ .

D'après le théorème de Fermat, si  $p$  ne divise pas  $a$  :

$$a^n = \mathfrak{N}(p) \pm 1.$$

Donc,  $i$  étant impair :

$$a_1^n + a_2^n + \dots + a_i^n = \mathfrak{N}(p) + x,$$

en supposant

$$x = (\pm 1) + (\pm 1) + \dots$$

Le nombre des termes du second membre étant *impair*,  $x$  n'est pas nul. On a donc ce théorème :

Si  $p$  est un nombre premier, et que  $i$  soit impair, la somme des puissances  $\frac{p-1}{2}$ , de  $i$  nombres entiers, premiers avec  $p$ , n'est pas divisible par  $p$ .

*Addition.* — (Juin 1886.)

II. COROLLAIRE :

$$1^{\frac{p-1}{2}} + 2^{\frac{p-1}{2}} + \dots + (p-2)^{\frac{p-1}{2}}$$

n'est pas divisible par  $p$ .

III. *Remarque.* — Le théorème ci-dessus ne démontre pas la proposition relative au nombre 15, signalée par M. Pépin. Pour la vérifier, il suffit d'observer que les résidus, par 15, des nombres

1, 8, 27, 64, 125, 216, 545, 512, 729, 1 000, ...,

sont

+1, -5, +1, -1, -5, -5, +5, +5, +1, -1, ...;

c'est-à-dire  $\pm 1$ ,  $\pm 5$ . Donc la somme de trois d'entre eux ne peut être nulle.

**CLXXV. — Sur deux formules d'approximation.**

(Mars 1881.)

I. Suivant Euler (\*), on a, sensiblement,

$$\pi = \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{a} + 4a \left[ \frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{a^2 + 4} + \dots + \frac{1}{a^2 + a^2} \right]; \quad (1)$$

 $a$  étant un nombre entier (\*\*).

On sait que

$$\int_0^{\infty} e^{-mx} \sin x dx = \frac{1}{1 + m^2} \quad (***)$$

ou

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{m}{a}x} \sin x dx = \frac{a^2}{a^2 + m^2}.$$

Donc,

$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{a^2 + 4} + \dots + \frac{1}{a^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int_0^{\infty} \left( e^{-\frac{x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + \dots + e^{-\frac{ax}{a}} \right) \sin x dx. \quad (2)$$

La quantité entre parenthèses égale

$$e^{-\frac{x}{a}} \frac{1 - e^{-x}}{1 - e^{-\frac{x}{a}}}.$$

Par conséquent, si l'on appelle A le second membre de l'égalité (1) :

$$A = \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{a} + \frac{4}{a} \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{e^{\frac{x}{a}} - 1} \sin x dx;$$

et, pour  $a$  infini :

$$\lim A = 4 \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x} \sin x dx. \quad (5)$$

(\*) Correspondance avec Goldbach, p. 221.

(\*\*) Condition évidente, le dernier dénominateur étant  $a^2 + a^2$ .

(\*\*\*) Note LIII.



Or :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx (*) = \frac{\pi}{4}.$$

Donc

$$\lim A = \pi.$$

II. Si l'on fait  $a = 1, 2, 3$ , on trouve, par application de la formule (1) :

$$\pi = 5,16\ 666, \quad \pi = 5,14\ 166, \quad \pi = 5,141\ 595.$$

On voit que le second membre converge rapidement vers sa limite.

III. Dans le *Journal de M. G. de Longchamps* (février 1881), M. Geoffroy a donné une formule que l'on peut écrire ainsi :

$$\pi = \frac{4}{a} + 4a \left[ \frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{a^2 + 4} + \dots + \frac{1}{a^2 + a - 1^2} \right]. \quad (2)$$

En la comparant à la formule d'Euler, on voit que la différence des seconds membres est

$$\delta = \frac{1}{a} - \frac{1}{6a^2}.$$

Cette quantité, nulle à la limite, devient  $\frac{11}{24}$  pour  $a = 2$ . Ainsi, la formule (2) est moins approximative que celle d'Euler.

### CLXXVI. — Une surface d'intrados (\*\*).

(Juin 1881.)

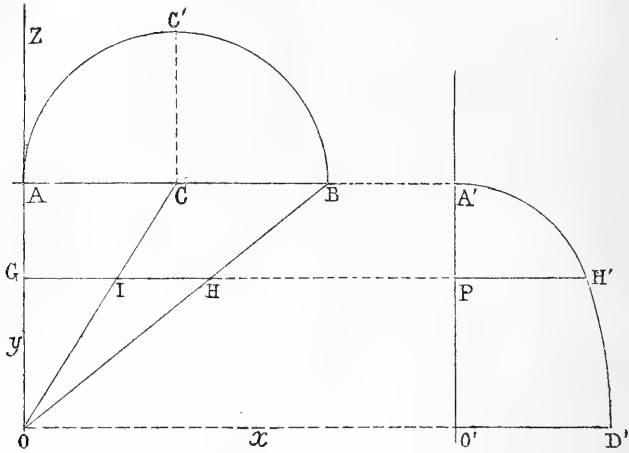
I. On donne, dans le plan vertical OA, une ellipse projetée, en vraie grandeur, suivant A'D' (\*\*\*) ; et, dans le plan vertical OB, une ellipse projetée, aussi, suivant A'D'. Une circonférence, dont le plan est perpendiculaire à OA, et dont le centre I est sur l'horizontale OC, rencontre les deux ellipses. Quelle est la surface ainsi engendrée ?

(\*) BIERENS DE HAAN, T. 565.

(\*\*) Université de Liège — Salles du second étage.

(\*\*\*) O'A' = AB = 2a, O'D' = AC = CB = a.

Soient  $G, H$  les projections horizontales des points où la géné-



ratrice coupe les directrices ; soit  $H'$  la projection verticale de ces deux points.

Il est visible que le rayon  $\rho$ , de la circonférence génératrice, est donné par la formule

$$\rho = \sqrt{IH^2 + PH'^2}.$$

Mais :

$$IH = \frac{1}{2} OG, \quad PH'^2 = \frac{1}{4} (4a^2 - O'P^2).$$

Donc, à cause de  $O'P = OG$ ,

$$\rho = a.$$

Ainsi, la surface d'intrados proposée appartient à un cylindre dont la base est la demi-circonférence  $AC'B$ , et dont les génératrices sont parallèles à l'horizontale  $OC$ .

II. Si l'on considère le corps limité par le plan horizontal, la surface cylindrique et les plans verticaux  $OA, OB, AB$ , on trouve aisément que le volume de ce corps est

$$v = \left( \pi - \frac{4}{3} \right) a^3. (*)$$

(\*) L'aire de la surface d'intrados est donnée par une intégrale elliptique, assez compliquée, et peu intéressante.

**CLXXVII. — Quelques séries numériques.**

(1857-1880.)

I. Dans la formule

$$\frac{\Gamma(l+l'+1)}{\Gamma(l+1)\Gamma(l'+1)} = 1 + \frac{l'l'}{1 \cdot 1} + \frac{l(l-1)l'(l'-1)}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} + \dots (*)$$

supposons  $l=1, l'=1$  : elle devient

$$\frac{2}{\pi} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 - 5 \left(\frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 - 7 \left(\frac{1 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 - \dots (**). (1)$$

Mais

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + \dots (***) (2)$$

Donc, par l'élimination de  $\frac{2}{\pi}$  :

$$1 = 5 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 7 \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 + 11 \left(\frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + 15 \left(\frac{1 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 + \dots (5)$$

résultat curieux (iv).

En combinant les égalités (1), (5), on trouve :

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 4}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + \dots (4)$$

II. La formule (5) peut être écrite autrement.

Le terme général de la série est, pour  $n > 0$  :

$$u_{n+1} = \frac{(4n+5)}{4} \left( \frac{1 \cdot 5 \cdot 5 \dots \overline{2n-1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots \overline{2n+2}} \right)^2$$

Soit, comme dans la Note CVII :

$$\frac{1 \cdot 5 \cdot 5 \dots \overline{2n-1}}{4 \cdot 6 \dots \overline{2n+2}} = \frac{1}{4^n} C_n = \frac{T_{n+2}}{4^n}$$

(\*) Tome I, page 141.

(\*\*) Cette égalité résulte aussi du développement de  $E_1(c)$  (LEGENDRE, t. I, p. 65), dans lequel on ferait  $c=1$ . (Août 1881.)

(\*\*\*) Tome I, page 140.

(iv) *Second Mémoire sur les fonctions  $X_n$*  (p. 6).

$T_{n+2}$  étant le  $(n + 2)^{\text{ième}}$  Nombre de Segner. Nous aurons

$$u_{n+1} = \frac{4n + 5}{4^{2n+2}} T_{n+2}^2;$$

puis, au lieu de la relation (3) :

$$1 = \frac{7}{16} T_3^2 + \frac{11}{16^2} T_4^2 + \frac{15}{16^3} T_5^2 + \dots \quad (3)$$

Voici donc encore une série remarquable, dans laquelle figurent les Nombres de Segner.

### CLXXVIII. — Une équation aux différences.

(Aôût 1881.)

I. Soit

$$(2n - 1) u_{n+1} - 4n u_n + (2n + 1) u_{n-1} = 0, \quad (1)$$

cette équation (\*).

En l'écrivant ainsi

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{2n + 1} = \frac{u_n - u_{n-1}}{2n - 1}, \quad (2)$$

on trouve, immédiatement,

$$u_n = n^2 a + b; \quad (3)$$

$a, b$  étant des constantes.

II. La formule (3) donne

$$u_1 = a + b, \quad u_2 = 4a + b, \quad u_2 - u_1 = 3a.$$

Par conséquent, si les deux termes initiaux sont entiers, et que leur différence soit divisible par 3, les termes  $u_3, u_4, \dots$  seront entiers (\*\*).

(\*) Rencontrée en étudiant la fonction  $X_n$ .

(\*\*) Si la loi de récurrence est

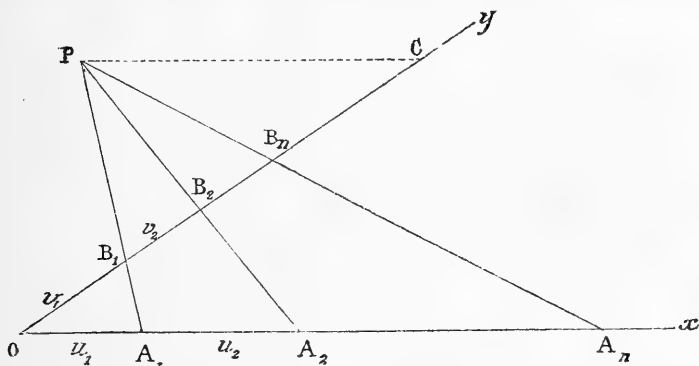
$$(n + 1) u_{n+1} - (2n + 1) u_n + n u_{n-1} = 0,$$

il est impossible que tous les termes soient entiers.

**CLXXIX. — Application de la Perspective aux séries.**

(Janvier 1882.)

I. Considérons la figure formée par un angle rectiligne et un système de parallèles. Si l'on en fait la *perspective*, sur un *tableau* parallèle à l'un des côtés de l'angle, on obtient, en général,



la figure ci-contre, dans laquelle P est le point de concours des droites  $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n, \dots$ , perspectives des parallèles données.

Soient :

$$OA_1 = u_1, \quad A_1A_2 = u_2, \dots; \quad OA_n = S_n;$$

$$OB_1 = v_1, \quad B_1B_2 = v_2, \dots; \quad OB_n = \Sigma_n.$$

Nous avons ainsi la représentation géométrique de deux séries :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots, \quad (1)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots, \quad (2)$$

à termes *positifs*. Si la première est *divergente*, la seconde sera *convergente*.

En effet, la position-*limite* de  $A_nB_n$  est PC, parallèle à Ox.

II. *Remarque.* — Toutes les séries convergentes (2) ont même limite, si les termes initiaux  $u_1, u_2, v_1, v_2$  sont constants.

Car la position du point P, et par suite celle du point C (l'angle  $\gamma O x$  étant donné), ne dépendent que de ces quatre termes.

III. Lorsque trois droites PA, PB, PC sont coupées par deux droites OABC, OA'B'C', on a

$$\frac{OA}{OC} \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{OA'}{OC'} \cdot \frac{B'C'}{A'B'} \quad (*)$$

Par conséquent

$$\frac{u_1}{S_n} \cdot \frac{S_n - u_1 - u_2}{u_2} = \frac{v_1 \Sigma_n - v_1 - v_2}{\Sigma_n v_2},$$

ou

$$u_1 v_2 (S_n - u_1 - u_2) \Sigma_n = v_1 u_2 (\Sigma_n - v_1 - v_2) S_n;$$

puis

$$\lim \Sigma_n = \Sigma = \frac{v_1 u_2 (v_1 + v_2)}{v_1 u_2 - u_1 v_2} \quad (**). \quad (5)$$

*Addition.* — (Juillet 1886.)

IV. *Exemples.* — 1° Soient

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n = 1; \quad v_1 = 1, \quad v_2 = \frac{2}{3}.$$

L'équation (1) se réduit à

$$\frac{2}{3} (n - 2) \Sigma_n = n \left( \Sigma_n - \frac{5}{3} \right).$$

Il en résulte :

$$\Sigma_n = \frac{5n}{n + 4}, \quad \Sigma = 5.$$

En outre,

$$v_n = 20 \left( \frac{1}{n + 5} - \frac{1}{n + 4} \right).$$

(\*) Voir ci-dessus, page 275.

(\*\*) Le second membre est fini et déterminé si, comme nous l'avons supposé, les droites  $A_1 B_1$ ,  $A_2 B_2$  sont concourantes.

$$2^\circ \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 2, \quad \dots, \quad u_n = 2^{n-1}, \quad S_n = 2^n - 1.$$

On trouve :

$$\Sigma_n = 2 \frac{2^n - 1}{2^{n-1} + 1}, \quad \Sigma = 4,$$

$$v_n = 5 \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1} + 1)(2^{n-2} + 1)} = \frac{6}{2^{n-2} + 1} - \frac{6}{2^{n-1} + 1}.$$

V. *Remarques.* — 1° Si l'on suppose

$$\sigma = \sum_1^\infty \frac{1}{2^n + 1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{17} + \dots, \quad (4)$$

on a :

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \dots,$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{4^4} + \dots,$$

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} - \frac{1}{8^4} + \dots,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots ;$$

puis, par la sommation des colonnes *verticales* :

$$\sigma = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{15} + \dots = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n - 1}. \quad (5)$$

Ainsi, les séries (4), (5) ont même limite.

2° Cette limite commune  $\sigma$  doit être une transcendante compliquée. Car la série (4) est un cas particulier de celle-ci :

$$\frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^5}{1+x^5} + \frac{x^4}{1+x^4} + \dots,$$

laquelle se rattache à la *série de Lambert*.

**CLXXX. — Sur les nombres combinatoires (\*).**

I. Les nombres  $C_{m,1}, C_{m,2}, \dots, C_{m,m}$  sont tous impairs, si  $m=2^k-1$ . Cette condition est nécessaire (\*\*).

II. Soient

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \theta = n,$$

$$N = \frac{1.2.5 \dots n}{1.2 \dots \alpha \times 1.2 \dots \beta \times \dots \times 1.2 \dots \theta}.$$

Si deux, au moins, des nombres  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \theta$  sont impairs, N est pair (\*\*).

III. Les mêmes notations subsistant, le nombre  $(n + 1) N$  est divisible par :

$$\begin{aligned} &\alpha + 1, && \beta + 1, && \dots && \theta + 1; \\ &\alpha + \beta + 1, && \alpha + \gamma + 1, && \dots && \sigma + \theta + 1; \\ &\alpha + \beta + \gamma + 1, && \alpha + \beta + \delta + 1, && \dots && \rho + \sigma + \theta + 1; \\ &\dots && \dots && \dots && \dots \end{aligned} \quad (***)$$

IV. Si p est un nombre premier,

$$C_{p-1,q} = \mathfrak{M}(p) \pm 1,$$

selon que q est pair ou impair (iv).

V. THÉORÈME. — Si a et b sont premiers entre eux,

$$\frac{1.2.5 \dots (a + b - 1)}{1.2.5 \dots a \times 1.2.5 \dots b} = \text{entier (v)}.$$

(\*) Nous rappelons ici les énoncés de théorèmes publiés dans divers recueils.

(\*\*) MATHESIS, t. I, p. 205.

(\*\*\*) IBID., t. III, p. 48.

(iv) Cette propriété, dont la démonstration n'offre aucune difficulté, est probablement connue. (Juillet 1886.)

(v) Sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques.



VI. Si  $a + b$  est un nombre premier,

$$\frac{1.2.5 \dots (a + b - 1)}{1.2.5 \dots a \times 1.2.5 \dots b} = \text{entier} (*).$$

$$\begin{aligned} \text{VII. } C_{2n, n} + \frac{1}{5} C_{2n-2, n-1} \cdot C_{2, 1} + \frac{1}{5} C_{2n-4, n-2} \cdot C_{4, 2} + \dots \\ + \frac{1}{2n+1} C_{2n, n} = 4^n \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{5 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} (**). \end{aligned}$$

VIII. THÉORÈME. — Si  $p$  est premier :

$$1 + \frac{1}{2} [C_{p-1, 1}]^2 + \frac{1}{5} [C_{p-1, 2}]^2 + \dots + \frac{1}{p-1} [C_{p-1, p-2}]^2 = \text{entier} (***) .$$

$$\begin{aligned} \text{IX. } C_{2n, n} + C_{2n-2, n-1} \cdot C_{2, 1} + C_{2n-4, n-2} \cdot C_{4, 2} + \dots + C_{2n, n} = 4^n \text{ (iv).} \\ (n-1) C_{2n, 2} + 2(n-2) C_{2n, 4} + 5(n-3) C_{2n, 6} + \dots + (n-1) C_{2n, 2} \\ = n(2n-1) 4^{n-2} \text{ (v).} \end{aligned}$$

$$\text{X. } 2^{n-1} - 2^{n-5} C_{n-2, 1} + 2^{n-5} C_{n-5, 2} - 2^{n-7} C_{n-4, 5} + \dots = n \text{ (vi).}$$

$$\text{XI. } 2^{n-3} - 2^{n-5} \frac{n-5}{2} + 2^{n-7} \frac{(n-4)(n-5)}{2 \cdot 5} - \dots = \frac{2^{n-1} - 1}{n} \text{ (vii).}$$

$$\text{XII. } 1 + \frac{1}{5} C_{n-1, 2} + \frac{1}{5} C_{n-1, 4} + \dots + \frac{1}{n-2} C_{n-1, n-5} = \frac{2^{n-1} - 1}{n} \text{ (viii). (A)}$$

$$\text{XIII. } \sum_0^s \frac{[C_{2p, p}]^2 [C_{2s-2p, s-p}]^2}{C_{s, p}} = 2^s \sum_0^s (-4)^p [C_{2s-2p, s-p}]^2 C_{s, p} \text{ (viiii).}$$

*Remarque.* — Dans les deux dernières égalités, chacun des termes est entier, si  $n$  est premier.

(\*) Corollaire du théorème.

(\*\*) *Notes d'Algèbre et d'Analyse*, p. 14.

(\*\*\*) *Ibid.*, p. 20.

(iv) *Journal de Liouville*, t. IV.

(v) *Notes d'Algèbre et d'Analyse*.

(vi) *Sur quelques développements de  $\sin nx$  et de  $\cos nx$  (Nouvelles Annales, 1885).*

(vii) Relation presque évidente.

(viii) *Sur un développement de l'intégrale elliptique...* (1885). Voir aussi Note CIX.

$$\text{XIV. } \sum_{p=0}^{p=n} C_{2n+1, 2+1} [1.5.5 \dots \overline{2p-1} . 1.5.5 \dots 2n-2p-1]^2 \\ = (2.4.6 \dots 2n)^2 \text{ (*)}$$

XV. THÉORÈME. —  $p$  étant un nombre premier, supérieur à 2 :

$$1 + 5^{p-2} + 5^{p-2} + \dots + (p-2)^{p-2} = \frac{2^{p-1} - 1}{p} + \mathcal{N}(p). \quad (\text{B})$$

Dans l'égalité (A) :

$$C_{p-1, 2} = ap + 1 = 5a', \quad C_{p-1, 4} = bp + 1 = 5b', \dots;$$

$a, a', b, b', \dots$  étant des nombres entiers.

Les équations

$$ap + 1 = 5a', \quad bp + 1 = 5b', \quad cp + 1 = 7c', \dots$$

sont vérifiées (d'après le théorème de Fermat) par :

$$a' = 5^{p-2} + \mathcal{N}(p), \quad b' = 5^{p-2} + \mathcal{N}(p), \quad c' = 7^{p-2} + \mathcal{N}(p), \dots$$

Donc cette égalité (A) devient

$$1 + 5^{p-2} + 5^{p-2} + \dots + (p-2)^{p-2} = \frac{2^{p-1} - 1}{p} + \mathcal{N}(p). \quad (\text{B})$$

XVI. COROLLAIRE. — Les nombres entiers

$$1 + 5^{p-2} + 5^{p-2} + \dots + (p-2)^{p-2}, \quad \frac{2^{p-1} - 1}{p}$$

sont, simultanément, divisibles ou non divisibles par  $p$  (\*\*).

$$\text{XVII. } \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} C_{p,1} + \frac{1}{n-1} C_{p,2} - \dots = (-)^p \frac{1}{(n+1)C_{n,p}}. \quad (\text{C})$$

(\*) *Mémoire sur certaines décompositions en carrés*, p. 64. Il résulte, de cette dernière relation, que

$$(2.4.6 \dots 2n)^2$$

est la somme de  $4^n$  carrés impairs.

(\*\*) M. Mansion s'est proposé ce problème :

Peut-on avoir  $2^{p-1} - 1 = \mathcal{N}(p^2)$ ? Au moyen du Corollaire, la question est ramenée à une autre, peut-être moins difficile. Suivant M. Ern. Cesàro, à qui je l'ai soumise, elle est impossible pour  $p \leq 45$ .

Le premier membre égale

$$\int_0^1 \left[ x^n - \frac{p}{1} x^{n-1} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} - \dots \pm x^{n-p} \right] dx$$

$$= \int_0^1 x^{n-p} (x-1)^p dx = (-1)^p B(p+1, n-p+1)$$

$$= (-1)^p \frac{\Gamma(p+1) \Gamma(n-p+2)}{\Gamma(n+2)} = (-1)^p \frac{1}{(n+1) C_{n,p}}$$

La relation (C) est donc démontrée.

*Remarque.* — Elle subsiste quand  $n$  et  $p$  sont remplacés par des nombres quelconques, pourvu que  $p$  ne surpasse pas  $n$ .

### CLXXXI. — Carrés magiques.

(Décembre 1885.)

I. Avec les nombres 1, 2, ..., 16, on peut former le *carré magique* suivant :

10	8	5	11
4	15	14	1
15	2	5	16
7	9	12	6

Il en résulte, immédiatement, une infinité de carrés magiques, représentés par

$x + 10y$	$x + 8y$	$x + 5y$	$x + 11y$
$x + 4y$	$x + 15y$	$x + 14y$	$x + y$
$x + 15y$	$x + 2y$	$x + 5y$	$x + 16y$
$x + 7y$	$x + 9y$	$x + 12y$	$x + 6y$

II. *Exemple* :  $x = 5, y = 5$ .

47	57	22	52
17	72	67	2
62	7	12	77
52	42	57	27

Il est clair que le procédé est général.

### CLXXXII. — Intégrales définies équivalentes.

(*Juin 1886*) (\*).

I. Un calcul direct, fort simple, donne

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = a. \quad (1)$$

Cette formule a cela de remarquable, qu'elle subsiste quand, dans le dénominateur, on remplace  $x$  par  $X = f(x)$ ,  $f(x)$  étant une fonction *impaire* (\*\*).

En effet,  $A$  étant la valeur cherchée,

$$A = \int_{-a}^{+a} \frac{dx(1+X-\sqrt{1+X^2})}{2X} = \frac{1}{2}2a + \int_{-a}^{+a} \frac{1-\sqrt{1+X^2}}{X} dx;$$

ou, en vertu de l'hypothèse faite sur  $X$  :

$$A = a.$$

(\*) Communication au Congrès de Nancy.

(\*\*) C'est-à-dire, satisfaisant à la condition

$$f(-x) = -f(x).$$

## II. Applications :

$$\begin{aligned}
 1^{\circ} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}} \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin^3 x+\sqrt{1+\sin^6 x}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{1+\sin x+\cos x} = \frac{\pi}{2} \quad (*) .
 \end{aligned}$$

2°  $X_n$  représentant un *polynôme de Legendre*, à indice *impair* :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+X_n+\sqrt{1+X_n^2}} = 1.$$

5° D'après la formule

$$\frac{1}{4} \frac{\omega(1-k')}{\pi} = \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^5}{1-q^6} + \frac{q^9}{1-q^{10}} - \dots \quad (**),$$

la transcendante  $\omega(1-k^2)$  est une *fonction impaire*, relativement à la variable  $q$ . Donc

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dq}{1+\omega(1-k')+\sqrt{1+\omega^2(1-k')^2}} = 1.$$

Etc., etc.

III. *Remarque.* — Toutes les courbes représentées par l'équation

$$y = \frac{1}{1+X+\sqrt{1+X^2}},$$

et limitées par  $x = \pm a$ , ont des aires égales.

(\*) Dans la deuxième intégrale,  $X = \sin x$ ; dans la troisième,  $X = \sin^3 x$ ; dans la quatrième,  $X = \operatorname{tg} x$ .

(\*\*) Note CXXIV, p. 429.

**CLXXXIII. — Sur les fonctions elliptiques  
de première espèce.**

(Mars 1877.)

I. PROBLÈME (\*). — *Trouver une courbe dont l'arc soit exprimé par l'intégrale elliptique de première espèce.*

De l'énoncé, on conclut

$$u^2 d\omega^2 + du^2 = \frac{k^4 du^2}{\sqrt{(f^2 - u^2)(u^2 - g^2)}}; \quad (1)$$

$f, g$  étant des constantes données, et  $k$  une indéterminée.

Ensuite,

$$u^2 d\omega^2 = \frac{du^2}{(f^2 - u^2)(u^2 - g^2)} [u^4 - (f^2 + g^2)u^2 + f^2g^2 + k^4].$$

Le trinôme entre parenthèses est un carré lorsque

$$k^2 = \frac{1}{2}(f^2 - g^2). \quad (5)$$

On a donc, s'il en est ainsi,

$$\pm d\omega = \frac{u^2 - \frac{f^2 + g^2}{2}}{u \sqrt{(f^2 - u^2)(u^2 - g^2)}} du,$$

ou

$$\pm d\omega = \frac{1}{2} \frac{du}{u} \left[ \sqrt{\frac{u^2 - g^2}{f^2 - u^2}} - \sqrt{\frac{f^2 - u^2}{u^2 - g^2}} \right]. \quad (5)$$

II. Pour simplifier le second membre, on peut faire, par exemple,

$$\frac{f^2 - u^2}{u^2 - g^2} = \operatorname{tg}^2 \varphi;$$

c'est-à-dire

$$u^2 = f^2 \cos^2 \varphi + g^2 \sin^2 \varphi. \quad (4)$$

(\*) Résolu par *Legendre* et *Serret*.

Il résulte, de cette relation,

$$\pm d\omega = \frac{1}{2}(g^2 - f^2) \frac{d\varphi}{f^2 \cos^2 \varphi + g^2 \sin^2 \varphi}; \quad (5)$$

puis, par une formule connue,

$$\pm (\omega - \alpha) = \frac{1}{2} \frac{g^2 - f^2}{fg} \operatorname{arctg} \left( \frac{g}{f} \operatorname{tg} \varphi \right). \quad (6)$$

III. Les courbes cherchées (toutes égales entre elles) sont représentées par le système des équations (4), (6), ou par la formule unique :

$$\pm \frac{g}{f} \sqrt{\frac{f^2 - u^2}{u^2 - g^2}} = \operatorname{tg} \left[ \frac{2fg}{g^2 - f^2} (\omega - \alpha) \right]. \quad (7)$$

IV. Si  $s$  est l'arc d'une de ces courbes, compté, par exemple, à partir de  $\omega = \alpha$ , on tire, de l'équation (4) :

$$ds = \frac{1}{2} (f^2 - g^2) \frac{du}{\sqrt{(f^2 - u^2)(u^2 - g^2)}};$$

ou, au moyen de la formule (4) :

$$ds = \frac{1}{2} \frac{f^2 - g^2}{\sqrt{f^2 - (f^2 - g^2) \sin^2 \varphi}} d\varphi. \quad (8)$$

Ainsi, conformément à l'énoncé, l'arc  $s$  égale le produit d'une longueur constante, par une intégrale de première espèce.

**CLXXXIV. — Sur l'Analyse indéterminée.**

PROBLÈME. — *Trouver des solutions entières de l'équation*

$$(x + y + z)^5 - (x^5 + y^5 + z^5) = u^5. \quad (1)$$

I. Le premier membre égale

$$3x^2(y + z) + 5y^2(z + x) + 5z^2(x + y) + 6xyz.$$

Ainsi,  $u^5$  doit être divisible par 27. Soit  $n^5$  le quotient :

$$(y + z)x^2 + (y + z)^2x + yz(y + z) = 9n^5,$$

ou

$$(y + z)(z + x)(x + y) = 9n^5. \quad (2)$$

Donc, si l'on décompose  $9n^5$  en  $abc$ , on a :

$$y + z = a, \quad z + x = b, \quad x + y = c;$$

puis, en supposant  $a + b + c = 2p$  :

$$x = p - a, \quad y = p - b, \quad z = p - c \quad (*), \quad u = 5n. \quad (5)$$

II. *Applications.* 1°  $n = 2$ ,  $9n^5 = 72$ .

On peut prendre :

$$a = 2, \quad b = 6, \quad c = 6.$$

On trouve :

$$x = 5, \quad y = 4, \quad z = 1, \quad u = 6.$$

En effet,

$$7^5 - (5^5 + 4^5 + 1^5) = 6^5,$$

ou

$$4^5 + 4^5 + 5^5 + 6^5 = 7^5.$$

2°  $n = 8$ ,  $9n^5 = 4\,608$ ;  $a = 16$ ,  $b = 16$ ,  $c = 18$ ,  $p = 25$ ;

$$x = 9, \quad y = 9, \quad z = 7, \quad u = 24.$$

On a

$$25^5 - 9^5 - 9^5 - 7^5 = 24^5,$$

ou

$$9^5 + 9^5 + 7^5 + 24^5 = 25^5.$$

(\*) Afin que  $x, y, z$  soient entiers,  $2p$  doit être un nombre pair.



III. *Remarque.* — Le premier membre de l'équation (1) est

$$p^3 - [(p - a)^3 + (p - b)^3 + (p - c)^3].$$

Cette quantité doit se réduire à  $27n^3$  si  $abc = 9n^3$ ; donc, en général, on a l'identité :

$$(a + b + c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3 - (a + b - c)^3 = 24abc; \quad (A)$$

ou, si l'on fait

$$a = 3\alpha^3, \quad b = 3\beta^3, \quad c = \gamma^3:$$

$$\left. \begin{aligned} & (3\beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha^3)^3 + (\gamma^3 + 3\alpha^3 - 3\beta^3)^3 + (3\alpha^3 + 3\beta^3 - \gamma^3)^3 + (6\alpha\beta\gamma)^3 \\ & = (3\alpha^3 + 3\beta^3 + \gamma^3)^3. \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

Cette seconde identité résout, d'une infinité de manières, l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = t^3 \quad (*). \quad (4)$$

IV. *Exemple.* — Prenons

$$\beta = 4, \quad \gamma = 1, \quad \alpha = 4.$$

Il résulte, de ces valeurs :

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 585, \quad u = 96, \quad t = 585;$$

puis

$$1^3 + 1^3 + 585^3 + 96^3 = 585^3.$$

### CLXXXV. — Une identité (\*\*).

(Mai 1877.)

On a, quelles que soient les quantités  $b, c$  :

$$\begin{aligned} & 4(10b^2 - 19bc + 10c^2)^3 + 216[bc(b - c)]^2 \\ & = 155[(5b^2 - 11bc + 5c^2)(b - c)]^2 + [(25b^2 - 49bc + 25c^2)(b + c)]^2. \end{aligned}$$

(\*) On peut comparer cette solution *incomplète* avec celle qui est développée dans la *Note CXXXVI*.

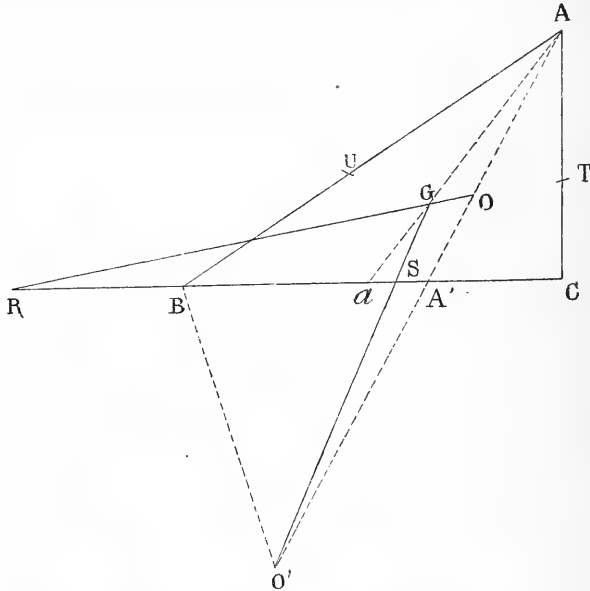
(\*\*) Trouvée en discutant l'équation

$$x^3 - 2(b + c)x^2 - (2b^2 - 9bc + 2c^2)x + (b + c)(b^2 - 5bc + c^2) = 0.$$

**CLXXXVI. — Généralisation d'un théorème  
de M. Laisant (\*).**

(Octobre 1876.)

**I. THÉORÈME.** — *La droite qui joint le centre G de gravité d'un triangle ABC, au centre O du cercle inscrit, divise le côté*



*moyen BC en deux segments BR, CR proportionnels aux différences entre ce côté et les deux autres.*

Le théorème de Ptolémée, appliqué au triangle  $AaA'$  et à la transversale  $OGR$ , donne

$$AG \cdot aR \cdot A'O = AO \cdot A'R \cdot aG.$$

Par des propriétés connues :

$$AG = 2aG, \quad \frac{A'O}{AO} = \frac{BA'}{BA}, \quad BA' = \frac{ac}{b+c};$$

(\*) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. II et III (Question 132).

done la relation précédente se réduit à

$$\frac{aR}{A'R} = \frac{b+c}{2a}. \quad (1)$$

Ainsi déjà :

*Les distances du point R, aux pieds de la médiane Aa et de la bissectrice AA', sont entre elles comme la demi-somme des côtés extrêmes est au côté moyen.*

Si l'on représente par  $x$ ,  $y$  les segments BR, CR, on peut écrire, sous les deux formes suivantes, la proportion (1) :

$$\frac{x + \frac{1}{2}a}{x + \frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{2a}, \quad \frac{y - \frac{1}{2}a}{y - \frac{ab}{b+c}} = \frac{b+c}{2a}.$$

La première équation donne

$$x = \frac{a(c-a)}{2a-b-c};$$

la seconde :

$$y = \frac{a(a-b)}{2a-b-c}.$$

Donc

$$\frac{x}{y} = \frac{c-a}{a-b},$$

ou

$$\frac{BR}{CR} = \frac{c-a}{a-b}. \quad (2)$$

C. Q. F. D.

II. O' étant le centre du cercle ex-inscrit à l'angle A; menons la droite GO'. Soit S le point où elle coupe BC. On trouve, de la même manière que précédemment :

$$\frac{aS}{A'S} = \frac{b+c}{2a} \quad (*); \quad (5)$$

puis

$$\frac{BS}{CS} = \frac{a+c}{a+b}. \quad (4)$$

(\*) D'après les proportions (1), (5), la droite aA' est partagée harmoniquement par les points R, S.

III.  $O''$ ,  $O'''$  étant les centres des deux derniers cercles ex-inscrits (\*); soient  $T$ ,  $U$  les points où les droites  $GO''$ ,  $GO'''$  rencontrent, respectivement,  $CA$ ,  $AB$ . Une permutation tournante, effectuée sur la proportion (4), donne

$$\frac{CT}{AT} = \frac{b+a}{b+c}, \quad \frac{AU}{BU} = \frac{c+a}{c+a};$$

et, par conséquent,

$$BS \cdot CT \cdot AU = CS \cdot AT \cdot BU. \quad (5)$$

Ainsi, les droites  $AS$ ,  $BT$ ,  $CU$  (\*\*) concourent en un point  $V$ .

### CLXXXVII. — Sur l'hexagone inscrit.

(Octobre 1878) (\*\*\*).

I. THÉORÈME. — Soient  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$ ,  $c$ ,  $c'$  les côtés consécutifs d'un hexagone inscrit; soient  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  les diagonales qui joignent les sommets opposés. On a, entre ces neuf éléments, les relations

$$\begin{aligned} (ab + a'\beta)(bc + b'\gamma)(ca + c'\alpha) &= (a'b' + b\alpha)(b'c' + c\beta)(c'a' + \gamma) \\ &= (\sigma\beta - ab')(\beta\gamma - bc')(\gamma\alpha - ca') \quad (v). \end{aligned}$$

1° Dans les quadrilatères inscrits  $CA'BC'$ ,  $A'BC'A$  (v) :

$$b'\gamma + bc = A'C' \cdot BC, \quad b\alpha + a'b' = A'B' \cdot AB;$$

et, par conséquent,

$$\frac{b'\gamma + bc}{b\alpha + a'b'} = \frac{BC}{AB}.$$

Une permutation tournante donne ensuite :

$$\frac{c'\alpha + ca}{c\beta + b'c'} = \frac{CA}{BC}, \quad \frac{a'\beta + ab}{a\gamma + c'a'} = \frac{AB}{CA}.$$

(\*) Non tracés sur la figure.

(\*\*) Non tracées.

(\*\*\*) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. V, p. 295.

(v) Prouhet en a donné une autre (*Nouvelles Annales*, 1858, p. 185).

(v) Le lecteur est prié de faire la figure.

Le produit des seconds membres égale l'unité; donc

$$(bc + b'\gamma)(ca + c'\alpha)(ab + a'\beta) = (b'e' + c\beta)(c'a' + a\gamma)(a'b' + ba). \quad (1)$$

2° Dans les quadrilatères inscrits CA'BA, ABCB' :

$$c \cdot AB + b' \cdot CA = \alpha \cdot BC, \quad c' \cdot AB + a \cdot BC = \beta \cdot CA;$$

ainsi, par l'élimination de CA :

$$(c\beta + b'c')AB = (\alpha\beta - ab')BC;$$

puis, au moyen d'une permutation tournante :

$$(\alpha\gamma + c'a')BC = (\beta\gamma - bc')CA,$$

$$(b\alpha + a'b')CA = (\gamma\alpha - ca')AB.$$

Conséquemment,

$$(c\beta + b'c')(\alpha\gamma + c'a')(b\alpha + a'b') = (\alpha\beta - ab')(\beta\gamma - bc')(\gamma\alpha - ca'). \quad (2)$$

II. Considérons les quadrilatères inscrits B'CA'B, B'AC'B. La formule connue :

$$R^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)(ab + cd)}{(a + b + c - d)(b + c + d - a)(c + d + a - b)(d + a + b - c)} \quad (*),$$

appliquée à chacune de ces deux figures, donne

$$R^2 = \frac{(b'e' + c\beta)(c'\beta + b'c)(b'\beta + cc')}{(\beta + b' + c - c')(b' + c + c' - \beta)(c + c' + \beta - b')(c' + \beta + b' - c)},$$

$$R^2 = \frac{(a'\beta + ab)(a\beta + a'b)(b\beta + aa')}{(\beta + b + a' - a)(a + a' + b - \beta)(a + a' + \beta - b)(\beta + a + b - a')},$$

R étant le rayon du cercle auquel l'hexagone est inscrit.

La diagonale  $\beta$  satisfait donc à l'équation

$$\frac{(c\beta + b'c')(c'\beta + cb')(b'\beta + cc')}{(\beta + b' + c - c')(b' + c + c' - \beta)(\beta + b' + c' - c)(-\beta + b' + c + c')} \\ = \frac{(a'\beta + ab)(a\beta + a'b)(b\beta + aa')}{(\beta + b + a' - a)(\beta + a + a' - b)(\beta + a + b - a')(-\beta + a + a' + b)} \quad (3)$$

laquelle paraît être du septième degré.

(\*) Voir, par exemple, la *Géométrie de Legendre*, Note V.

**CLXXXVIII. — Sur la partition des nombres.**

(Novembre 1878.)

**I. La formule**

$$- \zeta^3(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5} + \dots,$$

ou

$$\zeta^3(x + x^2 + x^5 + \dots) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5} + \dots,$$

équivalent à

$$x + x^2 + x^5 + \dots = e^x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{\frac{x^5}{5}} \dots \quad (1)$$

Développant chaque exponentielle, on trouve, comme terme général du produit,

$$\frac{x^a}{\Gamma(a+1)} \cdot \frac{x^{2b}}{2^b \Gamma(b+1)} \cdot \frac{x^{5c}}{5^c \Gamma(c+1)} \dots$$

Si donc

$$a + 2b + 5c + \dots = n, \quad (2)$$

le coefficient  $x^n$ , dans le second membre de l'égalité (1), sera

$$\sum \frac{1}{\Gamma(a+1) \cdot 2^b \Gamma(b+1) \cdot 5^c \Gamma(c+1) \dots},$$

le signe  $\sum$  s'étendant à toutes les solutions entières, non négatives, de l'équation (2). En conséquence, on a ce théorème d'Arithmétique :

*La somme de toutes les fractions*

$$\frac{1}{2^b \cdot 5^c \cdot 4^d \dots \Gamma(a+1) \Gamma(b+1) \Gamma(c+1) \dots}$$

est 1.

**II. Remarques.** — 1° Le nombre de ces solutions est le coefficient de  $q^n$ , dans le développement de

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^5) \dots},$$

c'est-à-dire  $\psi(n)$  (\*).

(\*) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 44.

2° Il y a autant de manières de décomposer  $n$  en parties entières, égales ou inégales (\*), qu'il y en a de décomposer  $n$  en un multiple de 1, augmenté d'un multiple de 2, augmenté d'un multiple de 3, etc.

Soit, par exemple,  $n = 5$ . Les décompositions indiquées sont

$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
5	0	0	0	0
1	2	0	0	0
5	1	0	0	0
2	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	0	0	0	1

D'après la proposition énoncée, on doit trouver

$$\frac{1}{120} + \frac{1}{2^2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = 1.$$

C'est ce qui a lieu.

III. L'identité

$$\sum \frac{1}{2^b \cdot 5^c \cdot 4^d \dots \Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\Gamma(c+1) \dots} = 1$$

peut être écrite ainsi :

$$\sum \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 5 \dots a \times 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2b \times 5 \cdot 6 \cdot 9 \dots 5c \times \dots} = 1.$$

(\*) Ce nombre est  $\psi(n)$ .

Par conséquent :

Si un nombre n est décomposé, de toutes les manières possibles, en parties  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , appartenant aux progressions

- 1, 2, 5, ...
- 2, 4, 6, ...
- 5, 6, 9, ...
- . . . . .

la somme des fractions  $\frac{1}{\alpha\beta\gamma\dots}$  égale l'unité (\*).

IV. Autre théorème. — Il est visible (et connu) que

$$-\mathcal{L}[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots] = x + \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \dots + \frac{1}{n} \int nx^n + \dots \quad (5)$$

Le premier membre égale

$$\mathcal{L} \cdot \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots} = \mathcal{L} [1 + x + \dots + \psi(n)x^n + \dots] \quad (**).$$

Donc l'égalité (5) devient

$$1 + x + \dots + \psi(n)x^n + \dots = e^{Ax} \cdot e^{A_2x^2} \dots e^{A_nx^n} \dots; \quad (4)$$

$A_n$  désignant  $\frac{1}{n} \int n$ .

Si donc (comme précédemment)

$$a + 2b + 5c + \dots = n, \quad (2)$$

la somme des fractions

$$\frac{(\int 2)^b \cdot (\int 5)^c \dots}{1 \cdot 2 \dots a \times 2 \cdot 4 \dots 2b \times 5 \cdot 6 \cdot 9 \dots 5c \times \dots}$$

égale  $\psi(n)$ .

V. Application. — Soit, comme ci-dessus,  $n = 5$ , d'où  $\psi(n) = 7$  (\*\*\*) .

(\*) Chaque progression ne doit pas renfermer plus d'une partie.  
 (\*\*) Recherches..., p. 11.  
 (\*\*\*) Ibid., p. 59.



Abstraction faite des zéros, les solutions de l'équation (2) sont :

$a = 5; a = 5, b = 1; a = 1, b = 2; a = 2, c = 1;$   
 $b = 1, c = 1; a = 1, d = 1; e = 1.$

De plus :

$$\int 2 = 5, \int 5 = 4, \int 4 = 7, \int 5 = 6.$$

Donc

$$\frac{1}{120} + \frac{5}{6.2} + \frac{9}{2.4} + \frac{4}{2.5} + \frac{5.4}{2.5} + \frac{7}{4} + \frac{6}{5} = 7;$$

ce qui est exact.

VI. *Remarque.* — Le nombre des fractions composant  $\psi(n)$  égale  $\psi(n)$ .

VII. *Généralisation d'une identité connue.* — On a, quel que soit le nombre entier p :

$$(1+x+x^2+\dots+x^{p-1})(1+x^p+x^{2p}+\dots+x^{(p-1)p})(1+x^{pp}+x^{2pp}+\dots+x^{(p-1)pp})\dots$$
$$= 1+x+x^2+x^3+\dots$$

En effet, si l'on multiplie par  $1 - x$ , on trouve  $1 = 1$  (\*).

De là résulte la propriété suivante :

*Tout nombre entier est décomposable, d'une seule manière, en parties appartenant, respectivement, aux progressions*

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 5, & \dots & p-1; \\ p, & 2p, & 5p, & \dots & (p-1)p; \\ p^2, & 2p^2, & 5p^2, & \dots & (p-1)p^2; \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

(\*\*).

VIII. *Exemple.* — Soit  $p = 5$  : les progressions sont, si l'on veut :

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 5, & 4; \\ 5, & 10, & 15, & 20; \\ 25, & 50, & 75, & 100; \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

(\*) Avons-nous besoin de dire que la série est supposée convergente?

(\*\*) Chaque progression ne contient qu'une partie, au plus.

On peut donc former tous les nombres, non supérieurs à 100, avec un terme de la première, un terme de la deuxième et un terme de la troisième. En particulier,  $67 = 2 + 15 + 50$ .

*Addition.* — (Décembre 1882.)

IX. Soit ce théorème connu :

Si  $n = i + i' = 2i''d$ ,

$$\sum \left[ \int i \times \int i' \right] = \sum d^5 (*).$$

Remplaçons  $n$  par  $2n$  :  $i''$  ne change pas et  $d$  devient  $2d$ .

Conséquemment :

$$\sum \left[ \int i \times \int (2n - i) \right] = 8 \sum \left[ \int i \times \int (n - i) \right]. \quad (A)$$

X. *Application.* — Lorsque  $n = 6$ , la relation est

$$\begin{aligned} & \int 1 \times \int 11 + \int 5 \times \int 9 + \int 5 \times \int 7 \\ &= 4 \left[ \int 1 \times \int 5 + \int 5 \times \int 5 + \int 5 \times \int 1 \right]; \end{aligned}$$

ou

$$1 \cdot 12 + 4 \cdot 15 + 6 \cdot 8 = 4 [1 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 1];$$

ce qui est exact (\*\*).

(\*) *Recherches...*, p. 100.

(\*\*) Dans le *Journal de Mathématiques*, Liouville a donné, avec ou sans démonstration, une foule de théorèmes analogues à celui qui est exprimé par l'égalité (A).

**CLXXXIX. — Sur la série de Lamé.**

(Octobre 1879) (\*).

**I. Sommmation. — Des égalités**

$$\begin{aligned}
u_3 &= u_2 + u_1, \\
u_4 &= u_3 + u_2, \\
. & . . . . . \\
u_n &= u_{n-1} + u_{n-2},
\end{aligned}$$

on déduit, par addition :

$$S_n - u_1 - u_2 = S_n - u_1 - u_n + S_n - u_{n-1} - u_n,$$

ou

$$S_n = 2u_n + u_{n-1} - u_2 = u_n + u_{n+1} - 2 (**),$$

ou enfin

$$S_n = u_{n+2} - 2; \tag{1}$$

formule connue.

**II. THÉORÈME.** — *On a, entre trois termes équidistants,  $u_{n-p}$ ,  $u_n$ ,  $u_{n+p}$ , et le terme  $u_{p-1}$ , la relation*

$$u_n^2 - u_{n-p}u_{n+p} = (-1)^{n-p+1}(u_{p-1})^2. \tag{2}$$

Si l'on fait

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

une formule connue donne

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}(a^{n+1} - b^{n+1}), & u_{n+p} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(a^{n+p+1} - b^{n+p+1}), \\
u_{n-p} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(a^{n-p+1} - b^{n-p+1}).
\end{aligned}$$

(\*) Voir, dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. V, p. 499), nos remarques sur l'histoire de cette série.

(\*\*) On ne doit pas oublier que les premiers termes de la série sont

- 1, 2, 5, 5, 8, 15, 21, ...

Donc

$$u_n^2 - u_{n-p}u_{n+p} = \frac{1}{5} [(a^{n+1} - b^{n+1})^2 - (a^{n+p+1} - b^{n+p+1})(a^{n-p+1} - b^{n-p+1})].$$

La quantité entre parenthèses est réductible à

$$(ab)^{n-p+1}(a^p - b^p)^2$$

D'ailleurs,  $ab = -1$ . Par suite,

$$u_n^2 - u_{n-p}u_{n+p} = \frac{1}{5} (-1)^{n-p+1} (\sqrt{5} \cdot u_{p-1})^2;$$

etc.

III. *Remarque.* — Selon que  $p = 1$  ou  $n$ , l'égalité (2) se réduit à

$$u_n^2 - u_{n-1} \cdot u_{n+1} = (-1)^n (*), \quad (5)$$

ou à

$$u_n^2 + u_{n-1}^2 = u_{2n}. \quad (4)$$

Celle-ci a été donnée par M. Édouard Lucas (\*\*).

IV. *Généralisation.* — Soit une série récurrente :

$$u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n, \dots$$

dans laquelle

$$u_n = \frac{2}{c} u_{n-1} + u_{n-2} (***) \quad (5)$$

Soient, conformément à la méthode connue :

$$a = \frac{1 + \sqrt{c^2 + 4}}{c}, \quad b = \frac{1 - \sqrt{c^2 + 4}}{c}.$$

(\*) On suppose  $u_0 = 1$ , afin que la formule (2) s'accorde avec les expressions :

$$2^2 - 5 = 1, \quad 5^2 - 2 \cdot 5 = -1, \dots$$

(\*\*) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. 1, p. 74. Nous avons déjà cité le beau Mémoire dans lequel notre savant Collègue a développé quelques-unes des propriétés dont jouit la *série de Fibonacci*, ou *série de Lamé*.

(\*\*\*) Lorsque  $c = 1$ , cette série est semblable à celle qui donne les *cosinus des multiples d'un arc x*.

Si les termes  $u_1, u_2$  sont tels que l'on ait, en général,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{c^2 + 1}} (a^{n+1} - b^{n+1}), \quad (5)$$

on trouve, comme dans la série de Lamé :

$$u_n^2 - u_{n-p}u_{n+p} = (-1)^{n-p+1}(u_{p-1})^2. \quad (2)$$

V. *Exemple.* — Soit  $c = \frac{1}{2}$ , de manière que

$$a = 2 + \sqrt{5}, \quad b = 2 - \sqrt{5}.$$

L'application de la formule (5) donne

$$u_1 = 16, \quad u_2 = 68;$$

après quoi l'on obtient, par la loi de récurrence (5) :

$$u_3 = 288, \quad u_4 = 1\ 220, \quad u_5 = 5\ 168, \quad u_6 = 21\ 982, \quad u_7 = 92\ 756, \dots$$

D'après ces valeurs,

$$u_4^2 - u_1u_7 = u_2^2,$$

ou

$$1\ 220^2 - 16 \cdot 92\ 756 = 68^2,$$

conformément à la relation (2).

*Addition.* — (Août 1886.)

VI. *Remarques.* — 1° Cette relation (2) exprime que :

*Dans toute série récurrente, de la forme indiquée, la somme ou la différence des carrés de deux termes quelconques est égale au produit de deux autres termes.*

2° *Si, dans la série de Lamé, on fait la somme des carrés de deux termes séparés par un nombre pair de termes, cette somme est un nombre composé (\*).*

(\*) Dans les *Notes sur la théorie des fractions continues et sur certaines séries* (1885), on trouvera d'autres propriétés de cette remarquable série.

**CXC. — Sur la formule du binôme.**

(Décembre 1879.)

I. Si, dans la formule principale de la Note LXVIII :

$$k^m + C_{m,1}k^{m-1} + \dots + C_{m,p}k^{m-p} = (p+1)C_{m,p+1}(1+k)^m \int_0^k \frac{t^{m-p-1}dt}{(1+t)^{m+1}}, \quad (1)$$

on change  $k$  en  $\frac{1}{x}$ , elle devient

$$1 + C_{m,1}x + \dots + C_{m,p}x^p = (p+1)C_{m,p+1}(1+x)^m \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{t^{m-p-1}dt}{(1+t)^{m+1}}; \quad (A)$$

et celle-ci, comme on le reconnaît facilement, équivaut à la formule de Poisson (\*).

II. Si l'on suppose  $x = 1$ , on obtient

$$1 + C_{m,1} + C_{m,2} + \dots + C_{m,p} = (p+1)C_{m,p+1} \cdot 2^m \int_0^1 \frac{t^{m-p-1}dt}{(1+t)^{m+1}}; \quad (B)$$

et, inversement,

$$\int_0^1 \frac{t^{m-p-1}dt}{(1+t)^{m+1}} = \frac{1}{(p+1)C_{m,p+1} \cdot 2^m} [1 + C_{m,1} + \dots + C_{m,p}]. \quad (C)$$

Ainsi, l'intégrale définie, contenue dans le premier membre, est la somme de  $p + 1$  fractions fort simples, ayant même dénominateur (\*\*).

(\*) Note LXVIII, équat. (1).

(\*\*) M. Bircens de Haan donne (T. IV), d'après Legendre :

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^b} = \left(\frac{1}{2}\right)^a \sum_0^\infty \binom{b-a-1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

le symbole  $\binom{b-a-1}{n}$  représentant le coefficient  $n^{\text{ième}}$  de la puissance  $(b-a-1)^{\text{ième}}$  du binôme (p. 22).

De là résulte, avec les notations habituelles,

$$\int_0^1 \frac{t^{m-p-1}dt}{(1+t)^{m+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-p} \sum_0^\infty C_{p,n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{m-p+n}.$$

Il ne m'a pas été possible de vérifier si cette formule est exacte. (Sept. 1886.)

III. *Remarque.* — Le développement en série, de  $(1+t)^{-(m+1)}$ , donne, au lieu de cette formule,

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^{m-p-2} dt}{(1+t)^{m+1}} &= \frac{1}{m-p} - C_{m+1,1} \frac{1}{m-p+1} \\ &+ C_{m+2,2} \frac{1}{m-p+2} - C_{m+3,3} \frac{1}{m-p+3} + \dots \end{aligned} \right\} (2)$$

Par conséquent, si  $p$  est entier positif, la série contenue dans le second membre est sommable, quoique peu convergente.

Exemple :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{6}{1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots = \frac{26}{2^7 \cdot 5}.$$

IV. Il semble, d'après la relation (A), que

$$1 - C_{m,1}x + C_{m,2}x^2 - \dots \pm C_{m,p}x^p = (\bar{p}+1) C_{m,p+1} (1-x)^m \int_0^{1-x} \frac{t^{m-p-1} dt}{(1+t)^{m+1}};$$

mais cette formule est *inadmissible*. En effet, si  $x$  est compris entre 0 et 1, l'intégrale contenue dans le second membre est, presque toujours, *infinie*. Il nous faut donc chercher, directement, la valeur du premier membre.

A cet effet, soit

$$y = [1 - C_{m,1}x + C_{m,2}x^2 - \dots \pm C_{m,p}x^p] (1-x)^{-m} (*) ; \quad (2)$$

d'où, par un calcul facile :

$$\frac{1}{m} (-x)^{m+1} y' = (1-x) [-1 + C_{m-1,1}x - C_{m-1,2}x^2 - \dots \pm C_{m-1,p-1}x^{p-1}] + [1 - C_{m,1}x + C_{m,2}x^2 - \dots \pm C_{m,p}x^p].$$

Le second membre égale

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} -1 + C_{m-1,1} & x - C_{m-1,2} & x^2 + \dots \pm C_{m-1,p-1} & x^{p-1} & x^p \\ + 1 & - C_{m-1,1} & + \dots \pm C_{m-1,p-2} & \mp C_{m-1,p-1} & \\ + 1 - C_{m,1} & + C_{m,2} & - \dots \mp C_{m,p} & \pm C_{m,p} & \end{array}$$

(\*) Les signes supérieurs, si  $p$  est pair.

ou, d'après la théorie des combinaisons (\*) :

$$\pm C_{m-1,p}x^p.$$

Ainsi

$$y' = \pm mC_{m-1,p-1} \frac{x^p}{(1-x)^{m+1}};$$

puis

$$y = 1 \pm mC_{m-1,p-1} \int_0^x \frac{x^p dx}{(1-x)^{m+1}} (**). \quad (5)$$

Par conséquent, la relation cherchée est

$$\left. \begin{aligned} & 1 - C_{m,1}x + C_{m,2}x^2 - \dots \pm C_{m,p}x^p \\ & = \left[ 1 \pm mC_{m-1,p} \int_0^x \frac{x^p dx}{(1-x)^{m+1}} \right] (1-x)^m. \end{aligned} \right\} (D)$$

V. *Remarques.* — 1° Inversement :

$$\int_0^x \frac{x^p dx}{(1-x)^{m+1}} = \pm \frac{1}{mC_{m-1,p}} \left\{ \frac{1 - C_{m,1}x + C_{m,2}x^2 - \dots \pm C_{m,p}x^p}{(1-x)^m} - 1 \right\}; (E)$$

et, si  $m$  est un nombre entier,

$$\int_0^x \frac{x^p dx}{(1-x)^{m+1}} = \frac{1}{mC_{m-1,p}} \frac{C_{m,p+1}x^{p+1} - C_{m,p+2}x^{p+2} + \dots \pm x^m}{(1-x)^m} (***) (F)$$

2° Si l'on suppose

$$(1-x)^m = 1 - C_{m,1}x + C_{m,2}x^2 - \dots \pm C_{m,p}x^p \mp R, \quad (4)$$

il résulte, de l'égalité (D) :

$$R = mC_{m-1,p}(1-x)^m \int_0^x \frac{x^p dx}{(1-x)^{m+1}}. \quad (5)$$

(\*) *Cours d'Analyse*, p. 44.

(\*\*) Si, dans la formule (2), on fait  $x = 0$ , on trouve  $y = 1$ .

(\*\*\*) Par exemple,

$$\int_0^x \frac{xdx}{(1-x)^4} = \frac{1}{6} \frac{5x^2 - x^3}{(1-x)^3}.$$



*Addition.* — (Août 1886.)

VI. La formule (D) est en défaut quand  $x=1$ . Mais, quand il en est ainsi, le premier membre se réduit à  $\pm C_{m-1,p}$  (\*). Conséquemment :  $x$  tendant vers 1,

$$C_{m-1,p} = m C_{m-1,p} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \int_0^x \frac{t^p dt}{(1-t)^{m+1}} (1-x)^m,$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow 1} \int_0^x \frac{t^p dt}{(1-t)^{m+1}} (1-x)^m = \frac{1}{m} (**). \quad (6)$$

Afin de vérifier ce résultat, j'observe que

$$\int_0^x \frac{t^p dt}{(1-t)^{m+1}} = \frac{1}{m} x^p (1-x)^{-m} - \frac{p}{m} \int_0^x \frac{t^{p-1} dt}{(1-t)^m};$$

puis

$$(1-x)^m \int_0^x \frac{t^p dt}{(1-t)^{m+1}} = \frac{1}{m} x^p - \frac{p}{m} \frac{\int_0^x t^{p-1} (1-t)^{-m} dt}{(1-x)^m}.$$

Si  $x=1$ , la fraction prend la forme  $\frac{\infty}{\infty}$ . Le rapport des dérivées des deux termes est, lorsque  $t=x$ :

$$\frac{1}{m} x^{p-1} (1-x).$$

Et comme cette quantité a pour limite zéro, la relation (6) est démontrée.

(\*) Théorème de M. Genocchi (*Nouvelles Annales*, 1869, p. 152).

(\*\*) Pour plus de clarté, nous avons substitué, dans la différentielle,  $t$  à  $x$ .

**CXCI. — Problème de probabilités (\*)**

(Mars 1882.)

I. Un bijoutier possède un diamant brut, dont la valeur est *a* francs. On lui annonce que ce diamant est brisé en *n* morceaux. Un amateur, qui ne les a pas pesés, propose de les acheter. Combien doit-il les payer?

Un raisonnement fort simple, développé dans le *Traité* de M. H. Laurent (\*\*), prouve que le prix demandé est donné par la formule

$$P = a \iiint \dots [(1 - y - z - \dots)^2 + y^2 + z^2 + \dots] dy dz \dots, \quad (1)$$

dans laquelle les  $n-1$  variables, positives, satisfont à la condition

$$y + z + \dots \leq 1. \quad (2)$$

V étant l'intégrale multiple qu'il s'agit d'évaluer, soient :

$$\left. \begin{aligned} A &= \iiint \dots dy dz, & B &= \iiint \dots y dy dz, \dots \\ C &= \iiint \dots y^2 dy dz \dots, & D &= \iiint \dots yz dy dz \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Il est visible que

$$V = A - 2(n-1)B + 2(n-1)C + (n-1)(n-2)D. \quad (4)$$

Mais, d'après la formule de Dirichlet :

$$\iiint \dots y^{b-1} z^{c-1} \dots dy dz \dots = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c)\dots}{\Gamma(1+b+c+\dots)}, \quad (5)$$

$$A = \frac{1}{\Gamma(n)}, \quad B = \frac{1}{\Gamma(n+1)}, \quad C = \frac{2}{\Gamma(n+2)}, \quad D = \frac{1}{\Gamma(n+2)}. \quad (6)$$

(\*) Extrait de mon Cours à l'Université de Liège. La même question a été traitée, dans le *Journal de Battaglini* (avril 1886), par M. Ernest Cesàro.

(\*\*) Page 154. C'est dans cet ouvrage que j'ai pris l'énoncé de la question.

Done

$$V = \frac{1}{\Gamma(n)} + \frac{2(n-1)}{\Gamma(n+1)} + \frac{4(n-1)}{\Gamma(n+2)} + \frac{(n-1)(n-2)}{\Gamma(n+2)};$$

et, après quelques réductions

$$V = \frac{2n}{\Gamma(n+2)}, \quad (7)$$

ou

$$P = \frac{2na}{\Gamma(n+2)}. \quad (8)$$

II. Si l'on fait  $n = 1, 2, 3, 4$ , on obtient, au moyen de cette formule :

$$P = \frac{2}{5}a, \quad P = \frac{1}{4}a \text{ (*),} \quad P = \frac{1}{15}a, \dots$$

III. *Remarque.* — D'après la formule (3), l'intégrale

$$\iint \dots (x^2 + y^2 + z^2 + \dots) dydz \dots = \frac{2n}{\Gamma(n+2)},$$

si la somme des  $n$  variables, positives, est un.

### CXCH. — Sur une formule d'Abel.

(Septembre 1886.)

I. On trouve, dans les *Œuvres* (\*\*) de l'illustre Géomètre norvégien, la relation, bien remarquable,

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} - \dots = \frac{1}{2a} + 2 \int_0^\infty \frac{t dt}{(a^2 + t^2)(e^{\pi t} - e^{-\pi t})}. \quad (1)$$

Il en résulte celle-ci :

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+2)^2} - \dots = \frac{1}{2a^2} + 4a \int_0^\infty \frac{t^2}{(a^2 + t^2)^2(e^{\pi t} - e^{-\pi t})}; \quad (A)$$

(\*) Au lieu de cette valeur, M. Laurent indique celle-ci :  $\frac{1}{4}$ .

(\*\*) Édition de Holmbœ, tome II, page 50.

puis, en supposant, successivement,  $a = 1$ ,  $a = \frac{1}{2}$  :

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{2} + 4 \int_0^{\infty} \frac{t dt}{(1+t^2)^2 (e^{\pi t} - e^{-\pi t})}, \quad (2)$$

$$G = \frac{1}{2} + 2 \int_0^{\infty} \frac{t dt}{(1+t^2)^2 \left( e^{\frac{\pi}{2}t} + e^{-\frac{\pi}{2}t} \right)} (*). \quad (3)$$

II. Dans (A), changeons  $a$  en  $a + 1$ , puis ajoutons. Le résultat est

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+1)^2} \right] &= a \int_0^{\infty} \frac{t dt}{(a^2+t^2)^2 (e^{\pi t} - e^{-\pi t})} \\ &+ (a+1) \int_0^{\infty} \frac{t dt}{[(a+1)^2+t^2] (e^{\pi t} - e^{-\pi t})}. \end{aligned} \right\} (4)$$

Le second membre peut être écrit ainsi :

$$\frac{1}{a} \int_0^{\infty} \frac{t dt}{(1+t^2)^2 (e^{\pi a t} - e^{-\pi a t})} + \frac{1}{a+1} \int_0^{\infty} \frac{t dt}{(1+t^2)^2 [e^{\pi(a+1)t} - e^{-\pi(a+1)t}]}$$

Par conséquent, l'égalité (4) devient

$$\frac{2a+1}{8a(a+1)} = \int_0^{\infty} \frac{t dt}{(1+t^2)^2} \left[ \frac{a+1}{e^{\pi a t} - e^{-\pi a t}} + \frac{a}{e^{\pi(a+2)t} - e^{-(a+2)t}} \right]. \quad (5)$$

Pour simplifier celle-ci, je suppose  $\frac{a+1}{a} = k + 1$ , c'est-à-dire  $a = \frac{1}{k}$ ,  $k$  étant un nombre entier. La quantité entre parenthèses se réduit à

$$a \left[ \frac{1 + (k+1) [e^{\pi k a t} + e^{\pi(k-2)a t} + \dots + e^{-\pi k a t}]}{e^{\pi(k+1)a t} - e^{-\pi(k+1)a t}} \right].$$

Le premier membre égale  $\frac{(k+2)k}{8(k+1)}$ . Donc enfin :

$$\frac{(k+2)k^2}{8(k+1)} = \int_0^{\infty} \frac{t dt}{(1+t^2)^2} \frac{1 + (k+1) [e^{\pi t} + e^{\pi(1-2a)t} + \dots + e^{-\pi t}]}{e^{\pi(1+a)t} - e^{-\pi(1+a)t}}. \quad (B)$$

(\*) Par le changement de  $t$  en  $\frac{t}{2}$ .

Voici donc une nouvelle suite d'intégrales définies, d'apparence très complexe, dont les valeurs sont fort simples.

Par exemple :

$$\int_0^{\infty} \frac{tdt}{(1+t^2)^2} \frac{2e^{\pi t} + 1 + 2e^{-\pi t}}{e^{2\pi t} - e^{-2\pi t}} = \frac{5}{16},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{tdt}{(1+t^2)^2} \frac{5e^{\pi t} + 4 + 5e^{-\pi t}}{e^{\frac{5}{2}\pi t} - e^{-\frac{5}{2}\pi t}} = \frac{2}{5},$$

etc.

### CXCIII. — Sur le théorème de Fermat.

(Septembre 1886.)

I. Si, dans la relation due à Fermat :

$$a^{p-1} - 1 = \mathfrak{N}(p) \quad (*), \quad (1)$$

$p$  ne divise pas  $a + 1$ , elle devient

$$a^{p-1} - 1 = \mathfrak{N}[p(a + 1)], \quad (2)$$

parce que le premier membre est divisible par  $a + 1$  (\*\*) et que  $a + 1$  est premier avec  $p$ .

De même, si  $p$  ne divise pas  $a - 1$  :

$$a^{p-1} - 1 = \mathfrak{N}[p(a - 1)]. \quad (5)$$

Enfin, si  $p$  ne divise ni  $a + 1$  ni  $a - 1$  (\*\*\*) :

$$a^{p-1} - 1 = \mathfrak{N}[p(a^2 - 1)]. \quad (A)$$

(\*) On admet, une fois pour toutes, que  $a$  est un nombre entier, non divisible par le nombre premier  $p$ , supérieur à 2.

(\*\*) En effet, ce premier membre s'annule quand on y remplace  $a$  par  $(-1)$ . D'ailleurs, on peut l'écrire ainsi :

$$(a + 1)^{p-1} - C_{p-1,1}(a + 1)^{p-2} + \dots + C_{p-1,1}(a + 1).$$

(\*\*\*) Les trois conditions sont remplies si  $p$  surpasse  $a + 1$ .

II. Le premier membre, divisé par  $a^2 - 1$ , donne le quotient

$$a^{p-5} + a^{p-6} + \dots + a^2 + 1.$$

Par conséquent,

$$1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{p-5} = \mathfrak{N}(p). \quad (\text{B})$$

III. *Remarque.* — L'équation indéterminée

$$1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{p-5} = p$$

est vérifiée par  $a = 2$ ,  $p = 5$ . Elle n'admet pas d'autre solution. En effet, si  $a = 2$  et que  $p$  surpasse 5, le terme  $2^{2-p}$  surpasse  $p$ . La même conclusion subsiste, à plus forte raison, si l'on suppose  $a$  supérieur à 2.

IV. Dans l'égalité

$$a^{p-1} - 1 = \mathfrak{N}[p(a+1)], \quad (2)$$

prenons  $a + 1$  égal à un nombre premier  $q$  (\*). Elle prend la forme

$$(q-1)^{p-1} - 1 = \mathfrak{N}(pq). \quad (4)$$

De même, si  $p$  ne divise pas  $q + 1$  :

$$(q+1)^{p-1} - 1 = \mathfrak{N}(pq). \quad (5)$$

Et si les trois conditions sont remplies :

$$(q+1)^{p-1} - (q-1)^{p-1} = \mathfrak{N}(pq). \quad (\text{C})$$

Nous avons donc ce théorème :

Soient  $p$ ,  $q$  deux nombres premiers, impairs et inégaux. Si  $p$  ne divise pas  $q^2 - 1$ , la quantité

$$(q+1)^{p-1} - (q-1)^{p-1}$$

est divisible par  $pq$ .

(\*) D'après les hypothèses précédentes,  $p$  ne divise ni  $q$  ni  $q - 1$ .

V. COROLLAIRE. — Si  $p$  ne divise pas  $q^2 - 1$ , et si  $q$  ne divise pas  $p^2 - 1$ , on a, simultanément :

$$(q + 1)^{p-1} - (q-1)^{p-1} = \mathfrak{N}(pq), \quad (p+1)^{q-1} - (p-1)^{q-1} = \mathfrak{N}(pq).$$

VI. Remarques. — 1° Le premier membre de (C) est décomposable en

$$\left[ (q+1)^{\frac{p-1}{2}} + (q-1)^{\frac{p-1}{2}} \right] \left[ (q+1)^{\frac{p-1}{2}} - (q-1)^{\frac{p-1}{2}} \right].$$

De plus,  $q+1$  et  $q-1$  sont des nombres pairs, premiers avec  $pq$ . Par conséquent,

$$\left[ \left( \frac{q+1}{2} \right)^{\frac{p-1}{2}} + \left( \frac{q-1}{2} \right)^{\frac{p-1}{2}} \right] \left[ \left( \frac{q+1}{2} \right)^{\frac{p-1}{2}} - \left( \frac{q-1}{2} \right)^{\frac{p-1}{2}} \right] = \mathfrak{N}(pq). \quad (D)$$

2° Ce premier membre égale aussi

$$2q [C_{p-1,1} \cdot q^{p-5} + C_{p-1,3} \cdot q^{p-5} + \dots + C_{p-1,p-2}].$$

Donc

$$C_{p-1,1} \cdot q^{p-5} + C_{p-1,3} \cdot q^{p-5} + \dots + C_{p-1,p-2} = \mathfrak{N}(p) \quad (*). \quad (E)$$

3° Il est visible (et connu) que :

$$C_{p-1,1} = \mathfrak{N}(p) - 1, \quad C_{p-1,3} = \mathfrak{N}(p) - 1, \dots$$

Donc la relation (E) se réduit à

$$q^{p-5} + q^{p-5} + \dots + q^2 + 1 = \mathfrak{N}(p);$$

en sorte qu'elle est un cas particulier de (B).

(\*) Par exemple,

$$C_{10,1} \cdot 7^5 + C_{10,3} \cdot 7^5 + C_{10,5} \cdot 7^4 + C_{10,7} \cdot 7^2 + C_{10,9} \cdot 1 = \mathfrak{N}(11),$$

ou

$$10 \cdot 7^5 + 120 \cdot 7^5 + 252 \cdot 7^4 + 120 \cdot 7^2 + 10 = \mathfrak{N}(11).$$

Si, rejetant des multiples de 11, on remplace  $7^2$  par 5,  $7^4$  par 5, etc.;

on a

$$10 \cdot 9 + 120 \cdot 4 + 252 \cdot 5 + 120 \cdot 5 + 10 = \mathfrak{N}(11),$$

ou enfin

$$1956 = \mathfrak{N}(11);$$

ce qui est vrai.

VII. *Résidus de puissances.* — Dans l'égalité

$$a^{p-1} - 1 = \mathfrak{N}(p), \quad (1)$$

supposons

$$p = 2^n - 1 \quad (*), \quad a = 2.$$

Alors,

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{p-2} = \mathfrak{N}(p). \quad (6)$$

Divisons, par  $p$ , chacun des termes du premier membre. Les  $n$  premiers restes, ou *résidus*, sont

$$1, \quad 2, \quad 2^2, \quad \dots, \quad 2^{n-1};$$

et ces *résidus*, dont la somme est  $p$ , se reproduisent dans le même ordre (\*\*).

Cela posé, remplaçons 2 par  $2^k$ ,  $k$  étant inférieur à  $n$ , et considérons les *dividendes* :

$$1, \quad 2^k, \quad 2^{2k}, \quad 2^{3k}, \quad \dots, \quad 2^{(n-1)k}. \quad (7)$$

Leurs *résidus* par  $p$  sont, dans un certain ordre, les termes de la ligne (7).

En effet, soit, s'il est possible,

$$2^{k\beta} - 2^{k\alpha} = \mathfrak{N}(p),$$

$\alpha, \beta$  étant inférieurs à  $n$  et inégaux. On tire, de cette égalité,

$$2^{k(\beta-\alpha)} - 1 = \mathfrak{N}(2^n - 1).$$

Ainsi, le P. G. C. D entre  $2^{k(\beta-\alpha)} - 1$  et  $2^n - 1$  serait  $2^n - 1$ . Mais, d'après une propriété connue, ce P. G. C. D est  $2^\Delta - 1$ ,  $\Delta$  étant le P. G. C. D entre les deux exposants : dans le cas actuel,  $\Delta = 1$ ; etc.

VIII. *Application.* — Soient  $n = 5$ ,  $p = 31$ . On trouve les *résidus* suivants :

$$a = 2 : 1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \quad 16;$$

$$a = 4 : 1, \quad 4, \quad 16, \quad 2, \quad 8;$$

$$a = 8 : 1, \quad 8, \quad 2, \quad 16, \quad 4;$$

$$a = 16 : 1, \quad 16, \quad 8, \quad 4, \quad 2.$$

(\*) D'après une propriété évidente et connue,  $n$  est premier.

(\*\*) En effet,

$$2^n = p + 1, \quad 2^{n+1} = \mathfrak{N}(p) + 2, \quad \text{etc.}$$



IX. *Remarque.* — La question que nous venons de traiter sommairement tient à la *théorie des nombres parfaits*. Si l'on suppose

$$n = 2, 3, 5, 15, \dots,$$

ou trouve

$$p = 3, 7, 31, 8491, \dots;$$

et ces nombres  $p$  sont facteurs des *nombres parfaits* :

$$6, 28, 8428, 55550556, \dots (*)$$

X. *Carrés magiques.* — Si, dans un *tableau de résidus* (analogue à celui qui précède), on fait abstraction de la première colonne, on obtient une sorte de *carré magique*, dans lequel les colonnes et les lignes sont composées des mêmes termes.

*Exemple (\*\*)* :

2	4	8	16	52	64
4	16	64	2	8	52
8	64	4	52	2	16
16	2	52	4	64	8
52	8	2	64	16	4
64	52	16	8	4	2

Dans la Note suivante, nous allons développer ce sujet.

(\*) TERQUEM, *Nouvelles Annales*, 1844, p. 218. Tout récemment, suivant M. Édouard Lucas, M. Seelhoff a trouvé un nouveau nombre parfait; savoir :

$$1\ 152\ 921\ 504\ 606\ 846\ 976 \times 2\ 505\ 845\ 009\ 215\ 695\ 951.$$

Voir *Mathesis* (Août 1886).

(\*\*) Répondant à  $p = 127$ .

**CXCIV. — Propriétés de résidus.**

(Septembre 1877.)

I. *Résidus de puissances.* — Dans ses admirables (\*) *Recherches arithmétiques*, Gauss a considéré les résidus, par un nombre premier  $p$ , des puissances successives d'un nombre entier  $a$  (\*\*); savoir

$$1, a, a^2, \dots a^n, a^{n+1}, \dots \quad (1)$$

donnant les résidus :

$$1, \rho_1, \rho_2, \dots \rho_n, 1, \rho_1, \dots \quad (2)$$

de manière que  $a^{n+1}$  soit, après 1, le premier terme qui, divisé par  $p$ , donne le résidu 1.

On sait, au moins depuis Gauss, que  $n + 1$  divise  $p - 1$  (\*\*\*) . Mais l'illustre Auteur n'a pas considéré le cas où  $n + 1$  est premier.

II. Supposons qu'il en soit ainsi; et, avec les dividendes

$$1, a, a^2, \dots a^n, \quad (5)$$

prenons

$$1, a^2, a^4, \dots a^{2n}, \quad (4)$$

$$1, a^3, a^6, \dots a^{3n}, \quad (5)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$1, a^k, a^{2k}, \dots a^{nk}; \quad (6)$$

$k$  étant inférieur à  $n + 1$ .

La ligne (4) est composée des termes de la ligne (1), pris de deux en deux; la ligne (5) est composée des termes de la ligne (1), pris de trois en trois; etc.

(\*) *Admirables*, sauf les dénominations et la notation. Pouillet-Delisle, traducteur de Gauss, dit qu'elles peuvent étonner. De son côté, Legendre s'est raillé des expressions incongrues, adoptées par le Géomètre de Brunswick (\*). Mais Legendre et Delisle avaient des oreilles françaises.

(\*\*) *Recherches arithmétiques*, p. 51. Je n'emploie ni la notation, ni les dénominations de Gauss.

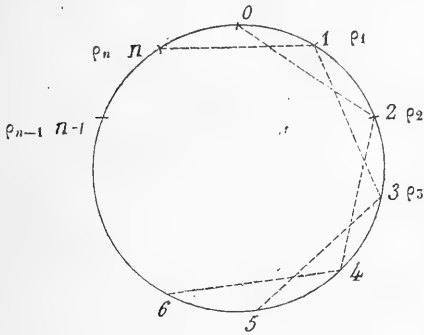
(\*\*\*) *Recherches*, p. 52. On peut consulter aussi une *Note sur les fractions décimales périodiques*, publiée, en 1842, dans les *Nouvelles Annales*.

(\*) *Recherches d'Analyse indéterminée*, p. 15 (1825).

Pour démontrer que toutes ces suites donnent lieu aux résidus

$$1, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n,$$

pris dans un certain ordre; remplaçons la ligne (2) par une



circconférence sur laquelle

soient placés les résidus

$1, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}, \rho_n$ ; puis,

partant du point  $O$ , qui

correspond à l'unité, joi-

gnons, de deux en deux, ... , etc.,

les points de division.

Chaque opération donne

lieu à un polygone fermé

(non convexe), dont les

sommets sont, dans un certain ordre, les points  $1, 2, 3, \dots, n \dots$  (\*).

III. Application. — Soient :  $p = 51, n + 1 = 5, a = 4$ . Les suites de résidus sont :

$$\begin{array}{l} 1, \quad 4, \quad 16, \quad 2, \quad 8; \\ 1, \quad 16, \quad 8, \quad 4, \quad 2; \\ 1, \quad 8, \quad 2, \quad 16, \quad 4; \\ 1, \quad 2, \quad 4, \quad 1, \quad 16. \end{array}$$

Si l'on supprime le résidu 1, on a le carré magique :

4	16	2	8
16	8	4	2
8	2	16	4
2	4	8	16

(\*) Ce tour de démonstration est bien connu. Il vient d'être employé, avec avantage, par M. Tarry, dans la solution d'un problème relatif au jeu de domino : De combien de manières peut-on placer, bout à bout, tous les dés, en observant la règle du jeu? (Les doubles sont supprimés.)

IV. *Généralisation.* — Si l'on remplace les résidus 1,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ , ...,  $\rho_n$ , par  $n + 1$  nombres entiers inégaux :

$$1, a, b, c, \dots, f, g;$$

$n + 1$  étant *premier*, puis qu'on les prenne de deux en deux, de trois en trois, ..., on formera de nouvelles lignes, composées des mêmes termes, lesquelles donneront lieu à des carrés magiques.

Soit, par exemple, la suite

$$1, 5, 7, 12, 9, 4, 5,$$

composée de 7 termes. Il en résulte les nouvelles suites :

$$1, 7, 9, 5, 5, 12, 4;$$

$$1, 12, 5, 7, 4, 5, 9;$$

$$1, 9, 5, 4, 7, 5, 12;$$

$$1, 4, 12, 5, 5, 9, 7;$$

$$1, 5, 4, 9, 12, 7, 5;$$

puis le carré suivant, au sujet duquel nous pourrions présenter diverses remarques (\*) :

5	7	12	9	4	5
7	9	5	5	12	4
12	5	7	4	5	9
9	5	4	7	5	12
4	12	5	5	9	7
5	4	9	12	7	5

(\*) Le lecteur voudra bien suppléer à ce que nous omettons, dans le dessein d'abrégé.

**CXCV. — Comparaison de deux séries (\*)**

(Février 1885.)

**I. THÉORÈME.** — Soient  $u_1, u_2, \dots, u_n$  des quantités positives, décroissantes. Soient  $v_1, v_2, \dots, v_n$  d'autres quantités positives, telles que l'on ait

$$k_0 > \frac{v_1}{u_1} > k_1 > \frac{v_2}{u_2} > \dots > k_{n-1} > \frac{v_n}{u_n} > k_n; \quad (1)$$

les limites  $k_0, k_1, \dots, k_n$  étant positives et décroissantes. Si l'on fait

$$S_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots \pm u_n, \quad (2)$$

$$\Sigma_n = v_1 - v_2 + v_3 - \dots \pm v_n, \quad (3)$$

on aura

$$\Sigma_n > k_n S_n, \quad (A)$$

$$\Sigma_n < k_n S_n + (k_0 - k_n) u_1. \quad (B)$$

1° Des inégalités (1), on déduit :

$$v_1 > k_1 u_1, \quad -v_2 > -k_1 u_2, \quad v_3 > k_2 u_3, \dots, v_n > k_{n-1} u_n (**);$$

puis

$$\Sigma_n > k_1(u_1 - u_2) + k_2(u_3 - u_4) + \dots + k_{n-2}(u_{n-2} - u_{n-1}) + k_n u_n.$$

Dans le second membre, tous les termes sont positifs. Donc, à plus forte raison,

$$\Sigma_n > k_n(u_1 - u_2 + u_3 - \dots + u_n),$$

ou

$$\Sigma_n > k_n S_n.$$

$$2^\circ, \quad v_1 < k_0 u_1, \quad -v_2 < -k_2 u_2, \quad v_3 < k_2 u_3, \dots, v_n < k_{n-1} u_n;$$

$$\Sigma_n < k_0 u_1 - k_2(u_2 - u_3) - \dots - k_{n-1}(u_{n-1} - u_n).$$

(\*) A propos d'un Mémoire de M. Mansion.

(\*\*) Pour fixer les idées, je suppose  $n$  impair.

Dans le second membre, le premier terme, seul, est positif.  
De plus, on a

$$\begin{aligned} & k_n[(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \dots + (u_{n-1} - u_n)] \\ & < k_2(u_2 - u_3) + k_4(u_4 - u_5) + \dots + k_{n-1}(u_{n-1} - u_n). \end{aligned}$$

Donc, par addition,

$$\Sigma_n + k_n(u_2 - u_3 + u_4 - \dots + u_{n-1} - u_n) < k_0 u_1,$$

ou

$$\Sigma_n + k_n(u_1 - S_n) < k_0 u_1,$$

ou enfin

$$\Sigma_n < k_n S_n + (k_0 - k_n) u_1. \quad (\text{B})$$

II. *Remarques.* — 1° La différence entre les deux limites de  $\Sigma_n$  est  $(k_0 - k_n) u_1$ .

2° Cette différence est d'autant plus petite que les nombres  $k$  décroissent plus lentement.

3° Les nombres  $v_1, v_2, \dots, v_n$  vont en diminuant.

4° Si la série

$$u_1 - u_2 + u_2 + \dots$$

est convergente, la série

$$v_1 - v_2 + v_3 - \dots$$

l'est également.

### CXCVI. — Sur la théorie des ombilics.

(Avril 1885.)

I. La condition d'égalité entre les rayons principaux d'une surface est, avec les notations habituelles,

$$[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]^2 + 4(s^2 - rt)(1 + p^2 + q^2) = 0; \quad (1)$$

relation dans laquelle on suppose

$$s^2 - rt < 0 \quad (*). \quad (2)$$

Poisson démontre que le premier membre est la somme de

(\*) Voir, par exemple, l'*Analyse appliquée*, de Leroy.

deux carrés (\*); mais la méthode qu'il emploie est *peu naturelle*. On peut la modifier comme il suit.

Regardons  $s$  comme une inconnue. Nous aurons

$$4As^2 + 4Bs + C = 0, \quad (5)$$

en posant :

$$A = (1 + p^2)(1 + q^2), \quad (4)$$

$$-B = pq[(1 + q^2)r + (1 + p^2)t], \quad (5)$$

$$C = \frac{B^2}{p^2q^2} - 4rt(1 + p^2 + q^2). \quad (6)$$

De l'équation (5), on tire

$$2s = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \quad (7)$$

Or,

$$\begin{aligned} B^2 - AC &= p^2q^2[(1 + q^2)^2r^2 + 2(1 + p^2)(1 + q^2)rt + (1 + p^2)^2t^2] \\ &\quad - (1 + p^2)(1 + q^2)[(1 + q^2)^2r^2 + 2(1 + p^2)(1 + q^2)rt \\ &\quad - 4(1 + p^2 + q^2)rt + (1 + p^2)^2t^2]; \end{aligned}$$

ou, après quelques réductions faciles,

$$B^2 - AC = -(1 + p^2 + q^2)[(1 + q^2)r - (1 + p^2)t]^2. \quad (8)$$

Cette expression étant négative (\*\*), le premier membre de l'équation (5) est la somme de deux carrés; etc. (\*\*\*)

II. *Une propriété numérique.* — Si l'on change de notation et que l'on fasse

$$N = (a^2 + c^2)f^2 - 2[(a^2 + b^2 + c^2)c^2 - a^2b^2]fg + (b^2 + c^2)^2g^2, \quad (9)$$

(\*) *Loc. cit.*, p. 550.

(\*\*) Excepté si

$$\frac{r}{1 + p^2} = \frac{t}{1 + q^2}.$$

(\*\*\*) Dès 1866, une démonstration, analogue à la précédente, a été donnée par MM. *Mister et Neuberg*, alors Professeurs au collège de Nivelles (*Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. V).

on a, *identiquement*,

$$(a^2 + c^2)^2 N = \left\{ [(a^2 + b^2 + c^2)c^2 - a^2 b^2]g - (a^2 + c^2)f \right\}^2 + 4a^2 b^2 c^2 (a^2 + b^2 + c^2)g^2. \quad (10)$$

Ainsi, le produit  $(a^2 + c^2)^2 N$  est une somme de quatre carrés.

III. *Exemple.*

$$a = 1, \quad b = 5, \quad c = 2, \quad f = 1, \quad g = 4.$$

On trouve :

$$N = 2\ 555, \quad 25N = 165^2 + 48^2 + 96^2 + 144^2,$$

ou

$$25 \cdot 2\ 555 = 26\ 569 + 2\ 504 + 9\ 216 + 20\ 756;$$

ce qui est exact.

### CXCVII. — Généralisation de propriétés de la cycloïde.

(Juin 1885.)

**THÉORÈME.** — Soit une courbe  $Amb$  (\*), rapportée à des axes rectangulaires  $Ax, Ay$ , sur lesquels  $b$  se projette en  $p, q$ . Soit  $mt$  la tangente en un point quelconque de cette ligne,  $t$  étant le point d'intersection avec  $Ax$ . Si l'on construit le parallélogramme  $mtAM$ , le lieu du sommet  $M$  est une courbe  $AMB$ , transformée de  $Amb$  (\*\*). Cela posé, si  $B$  est le point de  $AMB$ , correspondant au point  $b$  de  $Amb$  :

1° Les figures  $Ambq, AMBq$  sont équivalentes;

2° Si ces figures tournent autour de  $Ax$ , l'anneau engendré par la première équivaut à la moitié de l'anneau engendré par la seconde (\*\*\*) .

(\*) Le lecteur est prié de faire la figure.

(\*\*) On voit que la première courbe se déduit de la seconde, comme la cycloïde est déduite du cercle.

(\*\*\*) Démonstration facile. Voir MATHESIS, t. V, p. 185.



**CXCVIII. — Lignes géodésiques d'un paraboloidé.**

(Mai 1885.)

I. Soit le paraboloidé hyperbolique représenté par

$$z = xy. \quad (1)$$

En appliquant la méthode de *Joachimstal*, on trouve, comme équation différentielle des lignes géodésiques de cette surface :

$$\frac{d^2s}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dy} + \frac{xdx + ydy}{1 + x^2 + y^2}. \quad (2)$$

Une intégrale première est

$$ds^2 = c(1 + x^2 + y^2)dx dy;$$

ou, à cause de

$$ds^2 = (1 + y^2)dx^2 + 2xydx dy + (1 + x^2)dy^2 : \quad (3)$$

$$\frac{1 + y'^2 + (xy' + y)^2}{1 + x^2 + y^2}y' = c. \quad (4)$$

II. L'équation générale des lignes géodésiques :

$$(1 + p^2 + q^2) \frac{d^2y}{dx^2} + \left[ r + 2s \frac{dy}{dx} + t \frac{dy^2}{dx^2} \right] \left( q - p \frac{dy}{dx} \right) = 0 (*),$$

se réduit, dans le cas actuel, à

$$(1 + x^2 + y^2)y'' + 2(x - yy')y' = 0. \quad (5)$$

Cette équation (5) ne doit pas différer, au fond, de l'équation (2). Et puisque celle-ci admet l'intégrale (4), il en doit être de même pour l'équation (5).

En effet, si l'on différentie l'équation (4) et qu'on supprime le facteur

$$1 + y^2 - (1 + x^2)y'^2,$$

on trouve l'équation (5).

(\*) Suivant l'usage, la même lettre *s* représente un *arc* et une *dérivée partielle*. Mais aucune confusion n'est possible.

Conséquemment, le premier membre de celle-ci devient une dérivée exacte, quand on le multiplie par la quantité

$$\frac{1 + y^2 - (1 + x^2)y'^2}{(1 + x^2 + y^2)^2 y'^2}.$$

**CXCIX. — Problème d'Algèbre et d'Arithmétique.**

(Novembre 1881.)

I. Soit  $p$  un nombre premier, supérieur à 2. On forme la quantité

$$X = \frac{x^p - 1}{x - 1} - (x - 1)^{p-1},$$

réductible à  $Ppx$ ,  $P$  désignant un polynôme entier, à coefficients entiers. Dans quel cas  $P$  est-il un carré (\*) ?

Lorsque  $p = 5$ , on trouve  $P = 1$ ; et, lorsque  $p = 7$  :

$$P = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1 = (x^2 - x + 1)^2.$$

Soit, s'il est possible,  $P = Q^2$  une autre solution du problème, de manière que

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} - (x - 1)^{p-1} = pxQ^2. \quad (1)$$

Si, dans cette égalité (1), on fait  $x = 2$ , le polynôme  $Q$  devient un nombre entier  $N$ , et l'on a

$$2^p - 2 = 2pN^2,$$

ou

$$\frac{2^{p-1} - 1}{p} = N^2. \quad (2)$$

Or, cette équation (2) n'est vérifiée que par

$$p = 5, \quad N = 1; \quad p = 7, \quad N = 5 (**).$$

(\*) Cette question se rattache à la célèbre formule de Gauss :

$$4 \frac{x^p - 1}{x - 1} = Y^2 \pm pZ^2,$$

sur laquelle nous reviendrons.

(\*\*) *MATHEMATICS*, t. III, pp. 41 et 80.

Addition. — (Septembre 1886.)

II. Reprenons les égalités

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} - (x - 1)^{p-1} = Ppx, \quad (5)$$

$$4 \frac{x^p - 1}{x - 1} = Y^2 \pm pZ^2 \quad (*). \quad (4)$$

Il en résulte

$$4[(x - 1)^{p-1} + Ppx] = Y^2 \pm pZ^2,$$

ou

$$Y^2 - 4(x - 1)^{p-1} = p[4Px \mp Z^2], \quad (5)$$

ou encore :

$$\left[ Y + 2(x - 1)^{\frac{p-1}{2}} \right] \left[ Y - 2(x - 1)^{\frac{p-1}{2}} \right] = p[4Px \mp Z^2]. \quad (6)$$

Tous les termes du second facteur sont divisibles par  $p$  (\*\*).

Donc

$$\frac{Y - 2(x - 1)^{\frac{p-1}{2}}}{p} \text{ divise } 4Px \mp Z^2.$$

III. *Remarques.* — 1° Si  $p = 4\mu - 1$ ,  $Y$  est divisible par  $x - 1$  (\*\*\*).

Donc, d'après l'égalité (5),  $4Px - Z^2$  est divisible par  $(x - 1)^2$ .

2° Si  $p = 4\mu + 1$  et que l'on suppose  $x = 1$ , la même relation prend la forme

$$B^2 = p[4 + C^2].$$

Mais  $p = a^2 + b^2$ ; donc  $B$  est une somme de deux carrés, divisible par  $p$ . De plus,

$$4 + C^2 = N(p) \quad (iv).$$

(\*) On sait que le signe *supérieur* correspond au cas de  $p = 4\mu - 1$ .

(\*\*) Propriété connue. Voir la *Théorie des Nombres*, de Legendre, t. II, p. 194.

(\*\*\*) Propriété connue.

(iv) On peut consulter, relativement à cette question, le *Mémoire sur certaines décompositions en carrés*.

**CC. — Sur un théorème de M. Delbœuf.**

(Septembre 1886.)

I. Dans le dernier numéro de la *Revue scientifique*, le savant professeur à l'Université de Liège donne, sans démonstration, un *théorème sur la divisibilité des nombres*, que l'on peut énoncer ainsi :

*Étant donné un nombre entier N, on le décompose en deux parties aa', bb' telles, que les facteurs a, b soient premiers entre eux, et que les facteurs a', b' soient, aussi, premiers entre eux.*

*D'autre part, x, x' étant deux nombres entiers, pris arbitrairement, on cherche quatre nombres entiers, A, A', B, B', satisfaisant aux conditions*

$$Aa + Bb = Nx, \quad A'a' + A'b' = Nx'.$$

Cela posé, on a

$$AA' + BB' = \mathcal{M}(N).$$

Des relations

$$aa' + bb' = N, \quad Aa + Bb = Nx,$$

on déduit :

$$a(A - a'x) + b(B - b'x) = 0;$$

puis,

$$A = a'x + b\theta, \quad B = b'x - a\theta; \tag{1}$$

$\theta$  étant un entier quelconque, positif ou négatif.

De même,

$$A' = ax' + b'\theta', \quad B' = bx' - a'\theta'. \tag{2}$$

Par conséquent,

$$AA' + BB' = N(xx' + \theta\theta'). \tag{3}$$

II. *Remarque.* -- Si  $N = f^2 + g^2$  (\*), prenons,

$$x' = x, \quad \theta' = \theta.$$

(\*) Ce qui arrive, par exemple, lorsque N est un nombre premier  $4\mu + 1$ . Voir la Note précédente.

L'égalité (3) devient

$$AA' + BB' = (f^2 + g^2)(x^2 + \theta^2),$$

ou

$$AA' + BB' = (fx \pm g\theta)^2 + (f\theta \mp gx)^2. \quad (4)$$

Ainsi, dans ce cas particulier, la quantité  $AA' + BB'$ , multiple de  $N$ , est une somme de deux carrés.

III. Exemple.

$$N = 75, \quad a = 3, \quad b = 2, \quad a' = 5, \quad b' = 29, \quad x = 7.$$

On trouve :

$$A' = 21 + 29\theta, \quad B' = 14 - 5\theta, \quad A = 55 + 2\theta, \quad B = 205 - 5\theta;$$

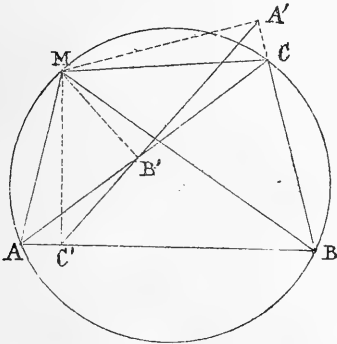
puis

$$AA' + BB' = 75(7^2 + \theta^2) = (56 \pm 5\theta)^2 + (21 \pm 8\theta)^2.$$

### CCI. — Sur la droite de Simson.

(Octobre 1880.)

I. Segments de la droite.



1° Dans la figure ci-jointe (\*), les triangles rectangles  $MAC'$ ,  $MCA'$  ont un angle aigu égal; donc ils sont semblables :

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MC'}{MA'}. \quad (1)$$

2° Les triangles  $AMC$ ,  $C'MA'$  ont un angle égal ( $\angle AMC = \angle C'MA'$ ), compris entre deux côtés proportionnels (1°); donc ils sont

semblables :

$$\frac{MA}{MC'} = \frac{MC}{MA'} = \frac{AC}{A'C'}. \quad (2)$$

(\*) Nous pensons qu'elle n'a pas besoin d'être expliquée.

5° Par un théorème connu,

$$MB \cdot MC = 2R \cdot MA',$$

ou

$$\frac{MC}{MA'} = \frac{2R}{MB};$$

R désignant le rayon.

4° La valeur commune des trois rapports (2) étant  $\frac{2R}{MB}$ , on a, en particulier,

$$A'C' = \frac{AC \cdot MB}{2R}. \quad (3)$$

Telle est l'expression de la *droite de Simson*, limitée aux points A', C'.

5° De même, par une simple permutation :

$$B'A' = \frac{BA \cdot MC}{2R}, \quad C'B' = \frac{CB \cdot MA}{2R}; \quad (4)$$

valeurs des *segments*.

II. *Remarque.* — Des égalités (3), (4), on conclut

$$AC \cdot MB = BA \cdot MC + CB \cdot MA;$$

propriété connue.

III. *Distance du point M à la droite de Simson.* — Soit MP cette distance (\*). La circonférence, décrite sur MC comme diamètre, passe en A' et en B'. Donc, par le théorème déjà rappelé :

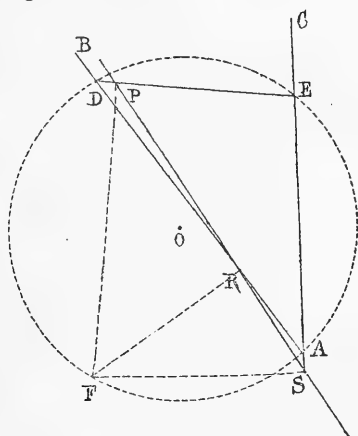
$$MP = \frac{MA' \cdot MB'}{MC} = \frac{MB' \cdot MC'}{MA} = \frac{MC' \cdot MA'}{MB}. \quad (5)$$

(\*) Non marquée sur la figure.

Addition. — (Février 1886.)

IV. THÉORÈME I. — On donne un angle  $BAC$  et un point  $F$ . Par les points  $F, A$ , on fait passer une circonférence  $FADE$ . Soit  $P$  la projection de  $F$  sur la corde  $DE$  déterminée par les côtés de l'angle. Soient, enfin,  $R, S$  les projections de  $F$  sur ces côtés. Le lieu du point  $P$  est la droite  $RS$ .

En effet, les points  $A, E, D, F$  appartiennent à la circonférence;  $ADE$  est un triangle inscrit; etc.



V. Remarques. — 1° La droite de Simson, lieu du point  $P$ , est déterminée par le point  $F$  et l'angle  $BAC$  : elle est indépendante de la circonférence  $ADE$ .

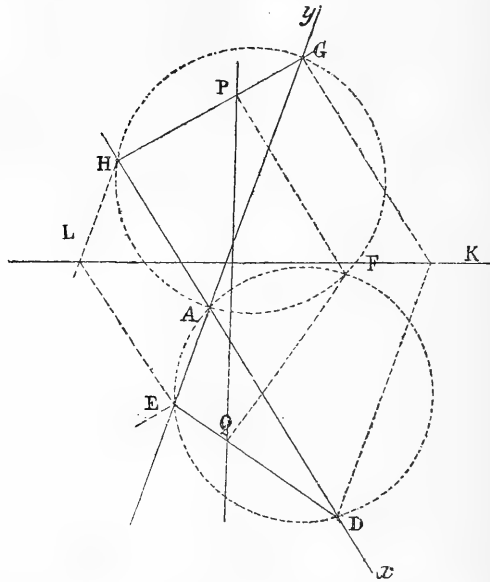
2° Considérons la parabole ayant pour foyer  $F$ , et, pour tangente au sommet, la droite  $RS$ . La corde  $DE$  est perpendiculaire, en  $P$ , à la droite  $FP$ . Donc cette corde est tangente à la parabole. Autrement dit : quand la circonférence  $AF$  varie, la corde  $DE$  enveloppe une parabole connue.

VI. THÉORÈME II. — Soient donnés un angle  $xAy$  et un point  $F$ . Soient  $AFGH, AFDE$  deux circonférences quelconques, passant en  $A$  et en  $F$ , et dont les cordes  $GH, DE$  déterminent  $PQ$ , droite de Simson (\*).

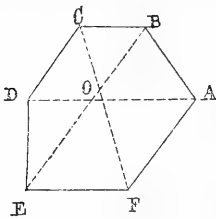
(\*) Voir le théorème I.

Si l'on construit les parallélogrammes  $GADK$ ,  $EAHL$ , et que l'on trace la droite  $KL$  :

- 1° Cette droite est perpendiculaire à  $PQ$ ;
- 2° Elle contient le point de concours des cordes  $DE$ ,  $GE$  (\*).



VII. *Remarque.* — L'hexagone  $GKDELH$  est décomposé en deux trapèzes  $GEDK$ ,  $GELH$ , et en deux trapèzes  $HDKG$ ,  $HDDL$ . Le théorème peut donc être énoncé ainsi :



Si un hexagone  $ABCDEF$  est décomposé, de deux manières, en deux trapèzes : 1° les côtés opposés  $AB$ ,  $DE$  se rencontrent sur la diagonale  $CF$ ; 2° cette diagonale est perpendiculaire à la droite de Simson déterminée par les circonférences circonscrites aux triangles  $AOB$ ,  $DOE$  (\*\*).

(\*) Pour abrégé, nous omettons la démonstration. Elle est fort simple si l'on prend, pour axes de coordonnées, les côtés de l'angle  $xAy$ .

(\*\*) Le 1° est un cas particulier du théorème démontré à la page 231.



**CCH. — Sur le quadrilatère inscrit.**

(Septembre 1885.)

I. THÉORÈME (\*). — Soit, dans un triangle ABC, CF la bissectrice intérieure, rencontrant, en D, la circonférence circonscrite. Soit CG la bissectrice extérieure, rencontrant, en E, la même circonférence. Soient A', B', D', F' les symétriques de A, B, D, F, relativement à CG. Soient A'', B'', E'', G'' les symétriques de A, B, E, G, relativement à CD. Les quatorze quadrilatères

DA'F'B, DAF'B', FA'BD', FAD'B', EA''G''B, EAF''B'', E''A''GB, E''AGB'', DEF'G, D'FFG, DE''P'G'', D'E''FG'', DF'EG, DFE'G

sont inscriptibles.

II. Remarque. — Si l'on opère de même sur les angles A, B, on aura donc quarante-deux quadrilatères inscriptibles, déduits du triangle ABC.

Addition. — (Septembre 1886.)

III. THÉORÈME. — Soit ABCD un quadrilatère inscrit. Si l'on projette un des sommets sur les côtés opposés à ce sommet, la distance des deux projections est constante.

Dans la première figure de la Note CCI, remplaçons M par D. L'équation (5) devient

$$D'D'' = \frac{AC \cdot BD}{2R};$$

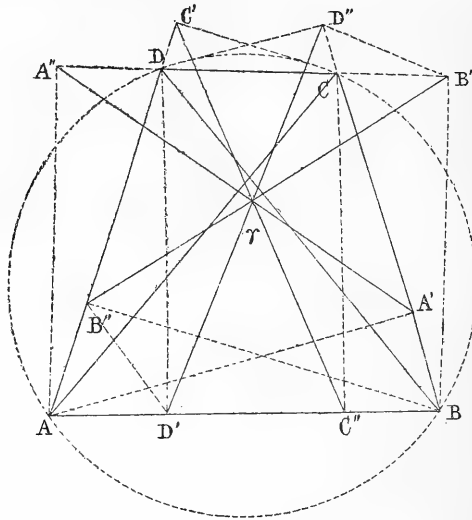
et celle-ci exprime le théorème énoncé; c'est-à-dire que

$$A'A'' = B'B'' = C'C'' = D'D''.$$

IV. REMARQUES. — 1° Chacune de ces quatre distances est une

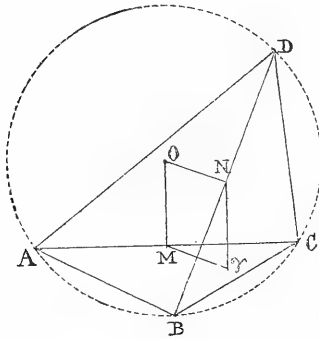
(\*) A peu près évident. Proposé dans *Mathesis*. Le lecteur est prié de faire la figure.

quatrième proportionnelle aux diagonales du quadrilatère et au diamètre du cercle circonscrit.



2°  $A'A''$  est la droite de Simson, relative au sommet A et au triangle BCD. De même pour  $B'B''$ ,  $C'C''$ ,  $D'D''$ .

V. Un point remarquable. — ABCD étant un quadrilatère



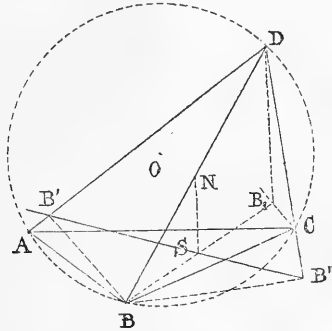
inscrit; soient  $M\gamma$  la perpendiculaire à  $BD$ , menée par le milieu  $M$  de  $AC$ , et  $N\gamma$  la perpendiculaire à  $AC$ , menée par le milieu  $N$  de  $BD$ . Le point  $\gamma$ , où se coupent ces deux perpendiculaires(\*), jouit de quelques propriétés intéressantes.

1° Le point  $\gamma$  est le centre de symétrie du quadrilatère ABCD et du quadrilatère  $A_1B_1C_1D_1$

(\*) Autrement dit, le point  $\gamma$  est le quatrième sommet du parallélogramme déterminé par le centre  $O$  et les distances  $OM$ ,  $ON$ . De là résulte que, pour tous les quadrilatères ayant même centre  $O$  et mêmes directions

ayant pour sommets les ORTHOCENTRES des triangles  $BCD$ ,  $ACD$ ,  $ABD$ ,  $ABC$  (\*).

$B_1$  étant l'orthocentre de  $ACD$ , soit  $S$  le centre de symétrie dont il s'agit : il est le milieu de  $BB_1$ . La droite  $NS$  est parallèle à  $BB_1$  et égale à la moitié de  $BB_1$ . Mais cette dernière droite est,



par hypothèse, perpendiculaire à la diagonale  $AC$ ; donc  $NS$  est perpendiculaire à cette diagonale. Comme le centre  $S$  est unique, il coïncide avec  $\gamma$ .

2° Le point  $\gamma$  est l'intersection commune des droites  $A'A''$ ,  $B'B''$ ,  $C'C''$ ,  $D'D''$ , déterminées par les projections de  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  sur les côtés du quadrilatère (\*\*).

Considérons la droite  $B'B''$ . Relativement au point  $B$  et au triangle  $ADC$ , elle est la droite de Simson. D'après un théorème connu (\*\*\*) , cette droite  $B'B''$  contient le milieu de  $BB_1$ ; c'est-à-dire le point  $\gamma$ .

3° Le point  $\gamma$  est le centre commun de deux circonférences sur lesquelles sont situées, quatre à quatre, les huit projections  $A', A'', B', \dots$

de diagonales, le point  $\gamma$  est invariable. En outre, d'après la première définition, le point  $\gamma$  est invariable, aussi, pour toutes les coniques circonscrites à un quadrilatère donné.

(\*) *Théorèmes et Problèmes*, p. 40.

(\*\*) Voir page 549. Cette propriété a été signalée par M. Émile Lemoine, en 1869 (*Nouvelles Annales*, p. 47).

(\*\*\*) *Théorèmes et Problèmes*, p. 57.

Dans la première figure de la page 550, les points  $B'$ ,  $D''$ ,  $B''$ ,  $D'$  appartiennent à la circonférence décrite sur  $BD$  comme diamètre (\*). Traçons  $B'D''$ ,  $B''D'$ . Nous aurons

$$CB' \cdot CD = CD'' \cdot CB, \quad AB'' \cdot AD = AD' \cdot AB,$$

ou

$$\frac{CB'}{CB} = \frac{CD''}{CD} = \frac{B'D''}{BD}, \quad \frac{AB''}{AB} = \frac{AD'}{AD} = \frac{B''D'}{BD}.$$

Donc

$$B'D'' = -BD \cos C, \quad B''D' = BD \cdot \cos A = B'D''.$$

Le quadrilatère  $B'D''B''D'$  ayant deux côtés opposés égaux et les diagonales égales, il s'ensuit que

$$\gamma B'' = \gamma D'', \quad \gamma D' = \gamma B' (**).$$

VI. *Remarque.* — Toutes les coniques inscrites au quadrilatère  $ABCD$  admettent une droite invariable, lieu des centres de ces lignes (\*\*\*) : c'est la droite  $MN$ . Toutes les coniques circonscrites à ce quadrilatère admettent un point invariable : c'est le point  $\gamma$  (iv).

### CCIII. — Sur un théorème de Gauss (v).

(Janvier 1885.)

I. Dans l'égalité

$$4 \frac{x^p - 1}{x - 1} = Y^2 \pm pZ^2, \quad (1)$$

qui exprime ce beau théorème, changeons  $x$  en  $x^q$ ,  $q$  étant un

(\*) A cause des quatre angles droits.

(\*\*) Pour achever la démonstration, on peut, par exemple, considérer la circonférence passant par les sommets  $B'$ ,  $D''$ ,  $B''$ , et employer la réduction à l'absurde.

(\*\*\*) Théorème de Newton.

(iv) On pourra, peut-être, utiliser ce rapprochement, sur lequel nous n'insistons pas.

(v) Complément à la Note CXCIX.

nombre premier impair, différent de  $p$ . Soient  $Y_1, Z_1$  les résultats de la substitution dans  $Y, Z$ . Nous avons

$$4 \frac{x^{p^q} - 1}{x^q - 1} = Y_1^2 \pm pZ_1^2; \quad (2)$$

puis, par division,

$$\frac{(x-1)(x^{p^q}-1)}{(x^p-1)(x^q-1)} = \frac{Y_1^2 \pm pZ_1^2}{Y^2 \pm pZ^2}. \quad (5)$$

Dans la Note intitulée : *Remarques sur l'équation  $x^m - 1 = 0$*  (\*), j'ai démontré que le premier membre est un polynôme entier  $X$ , dont les coefficients sont  $+1, -1$  ou  $0$  (\*\*). Donc

$$\frac{Y_1^2 \pm pZ^2}{Y^2 \pm pZ^2} = X; \quad (4)$$

et aussi :

$$\frac{Y_1^2 - XY^2}{Z_1^2 - XZ^2} = \mp p. \quad (5)$$

Ainsi : 1° quelle que soit la valeur attribuée à  $x$  (\*\*\*), le premier membre se réduit à  $-p$  ou à  $+p$ ; 2° tous les coefficients du polynôme

$$Y_1^2 - XY^2$$

sont divisibles par  $p$ ; 3° si l'on fait la division, ce polynôme devient  $\pm (Z_1^2 - XZ^2)$ .

(\*) *Bulletin de l'Académie*, mars 1870.

(\*\*) La formation de  $X$  est fort simple. Voir la Note citée. Pour abrégé, nous ne faisons pas d'applications. Le lecteur pourra, par exemple, supposer

$$p = 7, \quad q = 5;$$

valeurs d'où résulte

$$X = x^{24} - x^{25} + x^{19} - x^{18} + x^{17} - x^{16} + x^{14} - x^{15} + x^{12} \\ - x^{11} + x^{10} - x^8 + x^7 - x^6 + x^5 - x + 1.$$

(*Loc. cit.*).

(\*\*\*) Il y a exception pour  $x = 1$  : la fraction prend la forme  $\frac{0}{0}$ .

*Addition.* — (Octobre 1886.)

II. Par analogie avec l'égalité (1), prenons

$$4 \frac{x^q - 1}{x - 1} = U^2 \pm qV^2. \quad (6)$$

Soient  $U_1, V_1$  ce que deviennent les polynômes  $U, V$  quand on y remplace  $x$  par  $x^p$ . Nous aurons l'équation *conjuguée* de (2) :

$$4 \frac{x^{pq} - 1}{x^p - 1} = U_1^2 \pm qV_1^2; \quad (7)$$

puis, au lieu de l'égalité (4) :

$$\frac{Y_1^2 \pm pZ_1^2}{Y^2 \pm pZ^2} = \frac{U_1^2 \pm qV_1^2}{U^2 \pm qV^2} = X. \quad (8)$$

Ainsi, les deux fractions sont réductibles à un même polynôme entier (\*).

#### CCIV. — Sur une suite de fractions.

(Juillet 1881.)

*Problème (\*\*).* — Au moyen de deux fractions  $\frac{a}{a'}$ ,  $\frac{b}{b'}$ , on forme celles-ci :

$$\frac{c}{c'} = \frac{a + b}{a' + b'}, \quad \frac{d}{d'} = \frac{b + c}{b' + c'}, \dots$$

Vers quelle limite tendent-elles?

$\frac{u_n}{v_n}$  étant la  $n^{\text{ième}}$  fraction, on a

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \quad v_n = v_{n-1} + v_{n-2}.$$

(\*) Dans chacune de ces fractions, on prend le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que le nombre premier correspondant a la forme  $4\mu - 1$  ou la forme  $4\mu + 1$  (LEGENBRE, *Théorie des Nombres*, t. II, p. 195).

(\*\*) Proposé par mon Collègue E. Morren, en 1868. La question, paraît-il, se rencontre en Botanique.

La méthode connue donne

$$u_n = A \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} + B \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1},$$

$$v_n = A' \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} + B' \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}.$$

Par conséquent,

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{A}{A'}.$$

Or :

$$A + B = a, \quad A + B + (A - B)\sqrt{5} = 2b,$$

$$A' + B' = a', \quad A' + B' + (A' - B')\sqrt{5} = 2b'.$$

Done :

$$2A\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 1)a + 2b, \quad 2A'\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 1)a' + 2b';$$

et enfin :

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{(\sqrt{5} - 1)a + 2b}{(\sqrt{5} - 1)a' + 2b'}.$$

### CCV. — Trigonométrie sphérique. (1862.)

**THÉORÈME.** — *Si un angle trièdre a pour faces un carré, un hexagone régulier et un décagone régulier, la somme des angles dièdres égale cinq angles droits (\*).*

(\*) Ce théorème, ou plutôt cette remarque, provient du *Mémoire sur la théorie des polyèdres* (JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, 41<sup>e</sup> Cahier).

**CCVI. — Une application des déterminants.**

(Juin 1881.)

I. THÉORÈME I. — Soient :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & \dots, & a_n, \\ b_1, & b_2, & \dots, & b_n, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_1, & l_2, & \dots, & l_n \end{vmatrix}, \quad (1)$$

$$\Lambda = \sum a^2, \quad B = \sum b^2, \dots, \quad L = \sum l^2. \quad (2)$$

*S'il existe, entre les  $n^2$  quantités*

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_n, \quad b_1, \quad b_2, \quad \dots, \quad b_n, \quad \dots, \quad l_1, \quad l_2, \quad \dots, \quad l_n,$$

*les  $\frac{n(n-1)}{2}$  relations*

$$\sum ab = 0, \quad \sum ac = 0, \quad \dots, \quad \sum bc = 0, \quad \dots, \quad (3)$$

*le carré du déterminant  $\Delta$  est donné par la formule :*

$$\Delta^2 = ABC \dots L. \quad (4)$$

Cette proposition, que j'ai démontrée il y a quarante-sept ans (\*) peut l'être, assez simplement, au moyen du théorème de Cauchy, sur le produit de deux déterminants (\*\*).

II. PROBLÈME I. — *Trouver un carré égal au produit de  $n$  sommes de  $n$  carrés.*

(\*) *Mémoire sur la transformation des variables...* (ACAD. DE BRUXELLES, Mémoires couronnés, 1840, p. 17).

(\*\*) Voir, par exemple, la *Théorie des déterminants*, par M. Dostor, p. 74. Le savant Professeur développe les valeurs générales de  $\Delta^2$ , relatives aux cas de  $n = 2$  et de  $n = 3$ ; mais, chose singulière, il n'a pas songé, semble-t-il, à la réduction remarquable qu'éprouvent ces valeurs, lorsque les conditions (3) sont remplies. Autrement dit, M. Dostor ne signale pas la formule (4).



La solution résulte, *spontanément*, du Théorème I. Il suffira, dans chaque cas particulier, de trouver des *entiers, positifs ou négatifs*, satisfaisant aux équations (5), lesquelles, à partir de  $n = 5$ , sont en nombre supérieur à celui des inconnues (\*).

III. *Application.* — Soit  $n = 5$ . Les équations à résoudre sont

$$\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 &= 0, & a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 &= 0, \\ b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Après quelques tâtonnements, on trouve qu'elles sont vérifiées par :

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, & a_2 &= 5, & a_3 &= -2, & b_1 &= 2, & b_2 &= 4, & b_3 &= 7, \\ c_1 &= -29, & c_2 &= 11, & c_3 &= 2. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= (1^2 + 5^2 + 2^2)(2^2 + 4^2 + 7^2)(29^2 + 11^2 + 2^2) \\ &= 14 \cdot 69 \cdot 966. \end{aligned}$$

En effet :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & 5, & -2 \\ 2, & 4, & 7 \\ -29, & 11, & 2 \end{vmatrix} = 1(8-77) + 2(-22-6) - 29(21+8) \\ = -966;$$

puis

$$966^2 = 14 \cdot 69 \cdot 966.$$

*Addition.* — (Octobre 1886.)

IV. *Autre application.* — Soit  $n = 4$ , auquel cas les équations (5) sont

$$\sum ab = 0, \quad \sum ac = 0, \quad \sum ad = 0, \quad \sum bc = 0, \quad \sum bd = 0, \quad \sum cd = 0.$$

(\*) Les calculs nécessités par cette question incidente nous semblent plus longs que difficiles.

Dans les trois premières, je prends, arbitrairement :

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad b_1 = 5, \quad b_2 = 1, \quad c_1 = 2, \quad c_2 = -1. \quad (5)$$

Elles deviennent

$$a_3b_3 + a_4b_4 = -5, \quad b_3c_3 + b_4c_4 = -5, \quad a_3c_3 + a_4c_4 = 0;$$

puis, si

$$a_5 = 0, \quad c_4 = 0: \quad (6)$$

$$a_4b_4 = -5, \quad b_3c_3 = -5.$$

On satisfait à ces deux-ci par ces valeurs simples :

$$a_4 = 5, \quad b_4 = -1, \quad b_3 = -5, \quad c_3 = 1. \quad (7)$$

Cela fait, on doit résoudre les équations

$$\begin{aligned} d_1 + 2d_2 + 5d_4 &= 0, & 5d_1 + d_2 - 5d_3 - d_4 &= 0, \\ 2d_1 - d_2 + d_3 &= 0. \end{aligned}$$

On en conclut :

$$16d_1 + 7d_2 - 25d_3 = 0, \quad 50d_1 - 18d_3 = 0;$$

puis, par exemple :

$$d_1 = 5, \quad d_2 = 11, \quad d_3 = 5, \quad d_4 = -5. \quad (8)$$

D'après les systèmes (5), (6), (7), (8) :

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= (1^2 + 2^2 + 5^2)(5^2 + 1^2 + 5^2 + 1^2)(2^2 + 1^2 + 1^2)(5^2 + 11^2 + 5^2 + 5^2) \\ &= 50 \cdot 56 \cdot 6 \cdot 180 = 180^2 \cdot 6^2 = 1\,080^2. \end{aligned}$$

D'un autre côté :

$$\pm \Delta = \begin{vmatrix} 0, & 5, & 1, & 2 \\ -5, & -1, & 5, & 1 \\ 1, & 0, & 2, & -1 \\ 5, & -5, & 5, & 11 \end{vmatrix} = 5\Delta_2 + \Delta_3 - 5\Delta_4;$$

en supposant :

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= 5(22 + 5) - 5(-1 - 4) = 150, \\ \Delta_3 &= 5 \cdot 50 - (6 - 11) - 5(1 - 6) = 180, \\ \Delta_4 &= 5(-5) - 5 = -50. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\pm \Delta = 750 + 180 + 150 = 1\ 080.$$

V. THÉORÈME II. — *Les mêmes choses étant posées que dans le Théorème I; si l'on fait*

$$\begin{aligned} \Delta &= a_1 D_1 + a_2 D_2 + \dots + a_n D_n \text{ (*),} \\ \text{on a} \quad \Delta^2 &= A(D_1^2 + D_2^2 + \dots + D_n^2) \text{ (**).} \end{aligned} \quad (9)$$

VI. PROBLÈME II. — *Trouver un carré égal au produit d'une somme de n carrés par une somme de n carrés.*

La solution est contenue dans l'égalité (9). Soient, par exemple, comme au paragraphe IV :

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, & a_2 &= 2, & a_3 &= 0, & a_4 &= 5, \\ b_1 &= 3, & b_2 &= 1, & b_3 &= -5, & b_4 &= -1, \\ c_1 &= 2, & c_2 &= -1, & c_3 &= 1, & c_4 &= 0, \\ d_1 &= 5, & d_2 &= 11, & d_3 &= 5, & d_4 &= -5. \end{aligned}$$

On trouve :

$$D_1 = 56, \quad D_2 = 72, \quad D_3 = 0, \quad D_4 = 180.$$

Conséquemment,

$$1080^2 = (1^2 + 2^2 + 5^2)(56^2 + 72^2 + 180^2) = 50 \cdot 58\ 880;$$

ce qui a lieu.

(\*) Les déterminants  $D_1, D_2, \dots, D_n$  sont ceux qui entrent, en *numérateur*, dans les formules de Cramer.

(\*\*) Cette relation est une conséquence immédiate des formules

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= ABC \dots L, \\ D_1^2 + D_2^2 + \dots + D_n^2 &= BC \dots L, \end{aligned}$$

données à l'endroit cité. En 1859, je ne m'en étais pas aperçu !

**CCVII. — Sur un article de M. Perott (\*)**

(Juillet 1881.)

I. L'Auteur cherche, en premier lieu,  $\sum_1^N \varphi(k)$ . A cet effet, par des considérations un peu détournées, il trouve l'égalité

$$2 \sum_1^N \varphi(k) = 1 + \sum_1^N \varphi(N, k), \quad (1)$$

dans laquelle  $\varphi(N, k)$  est la *quotité des nombres premiers à k et non supérieurs à N*. On peut l'établir comme il suit.

Prenons, successivement, les nombres premiers à  $k$  et non supérieurs à 12.

Nous formerons le tableau ci-dessous.

$k$		$\varphi(k)$
1	1	1
2	1	1
3	1, 2	2
4	1, 3	2
5	1, 2, 3, 4	4
6	1, 5	2
7	1, 2, 3, 4, 5, 6	6
8	1, 3, 5, 7	4
9	1, 2, 4, 5, 7, 8	6
10	1, 3, 7, 9	4
11	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	10
12	1, 5, 7, 11	4

(\*) *Bulletin de Darboux*, 1881, p. 57.

Considérons, pour fixer les idées, le nombre 5, qui est premier avec 6, 7, 8, 9, 11 et 12. Si, avec ces six nombres, on prend 1, 2, 3, 4, on aura tous les nombres premiers à 5, et non supérieurs à 12; c'est-à-dire que l'on a écrit autant de termes que l'indique  $\varphi(12, 5)$ . Et comme  $4 = \varphi(5)$ , le tableau contient 5, un nombre de fois égal à

$$\varphi(12, 5) - \varphi(5).$$

En général, le nombre  $k$ , inférieur à 12, est écrit autant de fois que l'indique

$$\varphi(12, k) - \varphi(k).$$

Le nombre total des termes du tableau, ou  $\sum_1^{12} \varphi(k)$ , est donc

$$\sum_1^{12} \varphi(12, k) - \sum_1^{12} \varphi(k).$$

Mais il y a exception pour le terme 1.

Conséquemment,

$$2 \sum_1^{12} \varphi(k) = 1 + \sum_1^{12} \varphi(12, k);$$

etc.

II. M. Perott écrit la relation connue :

$$\varphi(N, k) = N - \sum \left( \frac{N}{a} \right) + \sum \left( \frac{N}{ab} \right) - \sum \left( \frac{N}{abc} \right) + \dots, \quad (2)$$

dans laquelle  $a, b, c, \dots$  sont les facteurs premiers de  $k$  (\*).

Il trouve ensuite cette formule remarquable :

$$2 \sum_1^N \varphi(k) = 1 + N^2 - \sum \left[ \left( \frac{N}{a} \right) \right]^2 + \sum \left[ \left( \frac{N}{ab} \right) \right]^2 - \dots; \quad (5)$$

$a, b, c, \dots$  étant, cette fois, les nombres premiers qui ne surpassent pas  $N$  (\*\*).

(\*) *Mélanges mathématiques*, 1<sup>re</sup> édition (1868), p. 154. J'ai changé les notations de l'Auteur.

(\*\*) Comme d'habitude, on ne compte pas l'unité.

Divisant par  $N^2$ , et faisant croître  $N$  indéfiniment, on a

$$2 \lim \frac{\sum_1^N \varphi(k)}{N^2} = 1 - \sum \left[ \frac{1}{a} \right]^2 + \sum \left[ \frac{1}{ab} \right]^2 - \sum \left[ \frac{1}{abc} \right]^2 + \dots,$$

ou

$$\lim = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{a^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{b^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{c^2} \right) \dots; \quad (4)$$

$a, b, c, \dots$  étant tous les nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, ...

Euler (non cité par l'Auteur), a prouvé que

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49} \dots = \frac{6}{\pi^2} (*);$$

donc enfin

$$\lim \frac{\sum_1^N \varphi(k)}{N^2} = \frac{5}{\pi^2}; \quad (5)$$

formule de M. Perott.

### CCVIII. — Représentation nouvelle de la surface des ondes.

(Décembre 1880) (\*\*).

I. D'après le *théorème de Sedley Taylor*, les demi-axes d'une section diamétrale de l'ellipsoïde  $s$ , sont les racines positives de l'équation

$$a^2 e^2 (p^2 - b^2)(p^2 - c^2) + b^2 f^2 (p^2 - c^2)(p^2 - a^2) + c^2 g^2 (p^2 - a^2)(p^2 - b^2) = 0 (***), (1)$$

dans laquelle  $e, f, g$  représentent les cosinus directs de la normale au plan sécant. Si  $p$  est l'une de ces racines, et que  $q$  soit l'autre :

$$a^2 e^2 (q^2 - b^2)(q^2 - c^2) + b^2 f^2 (q^2 - c^2)(q^2 - a^2) + c^2 g^2 (q^2 - a^2)(q^2 - b^2) = 0. (2)$$

(\*) *Introduction à l'Analyse*, t. I, p. 214.

(\*\*) Supplément à la *Note CXLVI*.

(\*\*\*) *Mémoire sur une transformation géométrique...*, p. 41. Nous avons changé la notation, afin d'éviter toute erreur.

Lorsque  $p$  et  $q$  sont donnés, les équations (1), (2) déterminent  $e, f, g$  (\*).

II. On tire, de ces équations :

$$\frac{e^2}{b^2c^2(p^2 - a^2)(q^2 - a^2)[(p^2 - c^2)(q^2 - b^2) - (p^2 - b^2)(q^2 - c^2)]} = \text{const.},$$

ou

$$\frac{e^2}{b^2c^2(p^2 - a^2)(q^2 - a^2)(q^2 - p^2)(b^2 - c^2)} = \text{const.},$$

ou

$$\frac{e^2}{b^2c^2(b^2 - c^2)(p^2 - a^2)(q^2 - a^2)} = \frac{1}{\sum b^2c^2(b^2 - c^2)(p^2 - a^2)(q^2 - a^2)} \quad (**). \quad (3)$$

Un calcul fort simple donne

$$\sum b^2c^2(b^2 - c^2)(p^2 - a^2)(q^2 - a^2) = -(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)p^2q^2; \quad (4)$$

done

$$\frac{e^2}{b^2c^2(p^2 - a^2)(q^2 - a^2)} = \frac{1}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)p^2q^2}. \quad (5)$$

III. Si l'on porte, sur la normale au plan, un demi-diamètre égal à  $p$  ou à  $q$ , chacun des points ainsi déterminés appartient à la surface des ondes. Cette surface  $S$  est donc représentée par le système des formules :

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= \frac{b^2c^2(p^2 - a^2)(q^2 - a^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)q^2}, \\ y^2 &= \frac{c^2a^2(p^2 - b^2)(q^2 - b^2)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)q^2}, \\ z^2 &= \frac{a^2b^2(p^2 - c^2)(q^2 - c^2)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)q^2}; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$p, q$  étant deux paramètres (\*\*\*) :

(\*) Le problème revient à celui-ci : *Couper un ellipsoïde par un plan diamétral, de manière que la section soit une ellipse donnée.*

(\*\*) A cause de

$$e^2 + f^2 + g^2 = 1.$$

(\*\*\*) Il en résulte les relations connues :

$$\sum x^2 = p^2, \quad \sum \frac{a^2x^2}{p^2 - a^2} = 0, \text{ etc.}$$

IV. *Remarque.* — Dans le *Mémoire*, on trouve (\*) :

$$x^2 = \frac{bc(p^2 - a^2)(bc - aw)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}; \quad (7)$$

$w$  étant une fonction du rayon vecteur  $p$  et de la distance  $v$  du centre au plan tangent (\*\*). La comparaison des deux formes de  $x^2$  donne cette relation très simple :

$$q^2 w = abc. \quad (8)$$

Ainsi, la quantité  $w$  varie en raison inverse du carré de la distance  $q$ .

### CCIX. — Sur les lignes de courbure.

(Décembre 1880.)

I. *Équation de ces lignes.* — Supposons qu'une surface  $S$  soit représentée par les formules

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \varpi(u, v), \quad z = \psi(u, v), \quad (1)$$

d'où résultent celles-ci :

$$dx = fdu + ldv, \quad dy = gdu + mdv, \quad dz = hdu + ndv \quad (***) \quad (2)$$

Si  $\lambda, \mu, \nu$  sont les cosinus directifs de la normale à la surface, les lignes de courbure de celle-ci ont pour équations, comme on sait :

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{d\mu}{dy} = \frac{d\nu}{dz}. \quad (3)$$

Pour les transformer, je considère les courbes coordonnées,

(\*) Page 47.

$$(**) \quad \frac{v^2}{p^2 - v^2} = \frac{abc(abc - p^2 w)}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)(p^2 - c^2)}.$$

(*Mémoire...*, p. 48.)

(\*\*\*) Les lettres  $f, l, g, \dots$  désignent, bien entendu,  $\frac{dx}{du}, \frac{dx}{dv}, \frac{dy}{du}, \dots$



passant au point  $(x, y, z)$ , et représentées, respectivement, par

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.} \quad (4)$$

Les cosinus directifs de la tangente à la première sont proportionnels à  $f, g, h$ . De même, les cosinus directifs de la tangente à la seconde courbe sont proportionnels à  $l, m, n$ . Conséquemment (les axes étant supposés rectangulaires) :

$$f\lambda + g\mu + h\nu = 0, \quad l\lambda + m\mu + n\nu = 0;$$

puis

$$\frac{\lambda}{gn - hm} = \frac{\mu}{hl - fn} = \frac{\nu}{fm - gl}. \quad (4)$$

Soient encore, pour abrégier :

$$gn - hm = A, \quad hl - fn = B, \quad fm - gl = C, \quad (5)$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = V^2. \quad (6)$$

Alors :

$$\lambda = \frac{A}{V}, \quad \mu = \frac{B}{V}, \quad \nu = \frac{C}{V}; \quad (7)$$

et, au lieu des équations (5) :

$$\frac{VdA - AdV}{dx} = \frac{VdB - BdV}{dy} = \frac{VdC - CdV}{dz}. \quad (8)$$

On a, identiquement,

$$\sum (VdA - AdV)(BdC - CdB) = 0 (*). \quad (9)$$

Done les deux équations (5) entraînent celle-ci :

$$(BdC - CdB)dx + (CdA - AdC)dy + (AdB - BdA)dz = 0; \quad (A)$$

ou, ce qui revient au même,

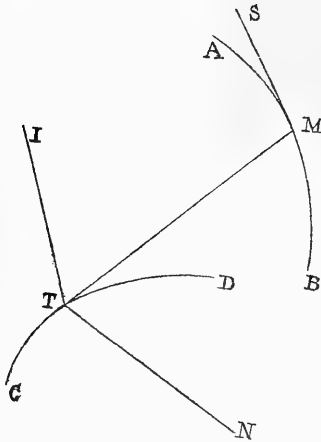
$$\sum (BdC - CdB)(fdu + ldv) = 0. \quad (B)$$

(\*) A cause de la relation connue :

$$\sum (bc' - cb')a = 0.$$

Les lignes de courbure sont donc représentées par cette équation (B), *du premier ordre et du second degré* ; ce qui devait être.

II. *Interprétation géométrique.* — AB étant une ligne de courbure, ayant MS pour tangente;



soit CD l'arête de rebroussement de la *normalie* dont MT est une génératrice. Les cosinus directifs de MT sont proportionnels à A, B, C (\*). Si donc TN est la *binormale* à CD, les cosinus directifs de cette droite sont proportionnels à

$$\begin{aligned} BdC - CdB, \quad CdA - AdC, \\ AdB - BdA. \end{aligned}$$

L'équation (A) exprime que les droites MS, TN sont perpendiculaires l'une à l'autre. Et comme MS est perpendiculaire à MT, la tangente MS, à la ligne de courbure, est perpendiculaire au plan rectifiant MTN ; ou, ce qui est équivalent :

La tangente MS, à la ligne de courbure AB, est parallèle à la normale principale TI de la courbe CD, arête de rebroussement de la *normalie* déterminée par AB (\*\*).

(\*) Formules (7).

(\*\*) Le *Calcul différentiel*, de M. Bertrand, ne signale point cette propriété. Dans celui de Serret, on lit (p. 487, 1868) : « Ainsi, pour qu'une courbe donnée, tracée sur une surface, soit ligne de courbure de cette surface, il faut et il suffit que la tangente de la courbe en chaque point soit parallèle à la droite qui fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels aux différentielles

$$» d \cos \alpha', \quad d \cos \beta', \quad d \cos \gamma',$$

»  $\alpha', \beta', \gamma'$  étant les angles formés avec les axes par la normale à la surface. » L'Auteur ne semble point s'être aperçu que la droite en question est NI. (Octobre 1886.)

III. *Remarque.* —  $\lambda, \mu, \nu$  étant les cosinus directifs de MT, ceux de TI sont, comme on sait, proportionnels à  $d\lambda, d\mu, d\nu$ . Donc les proportions (5) expriment le parallélisme des droites MS, TI; et, réciproquement, ce parallélisme donne lieu aux proportions (5).

IV. *Autre remarque.* — Si A, B, C sont des quantités proportionnelles aux cosinus directifs de MT, les cosinus directifs de TN sont, comme nous l'avons supposé, proportionnels aux quantités

$$BdC - CdB, \quad CdA - AdC, \quad AdB - BdA;$$

mais les cosinus directifs de TI ne sont point proportionnels à  $dA, dB, dC$ .

1° La première proposition résulte des identités :

$$\sum A(BdC - CdB) = 0, \quad \sum (A + dA)(BdC - CdB) = 0.$$

2° Nous avons trouvé, ci-dessus,

$$\sum (VdA - AdV)(BdC - CdB) = 0. \quad (9)$$

D'ailleurs,

$$\sum A(VdA - AdV) = 0.$$

Par conséquent, les cosinus directifs de la normale principale TI sont proportionnels aux quantités

$$VdA - AdV, \quad VdB - BdV, \quad VdC - CdV.$$

### CCX. — Sommation d'une série.

(Décembre 1885.)

I. Soit

$$S = 1 + \frac{1}{2 \cdot 5} x + \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 5} x^2 + \dots + \frac{1 \cdot 2 \dots n}{(n+1)(n+2) \dots (2n+1)} x^n + \dots \quad (1)$$

On a

$$\frac{1 \cdot 2 \dots n}{(n+1)(n+2) \dots (2n+1)} = \frac{[\Gamma(n+1)]^2}{\Gamma(2n+2)} = B(n+1, n+1) = \int_0^1 (\theta - \theta^2)^n d\theta.$$

Donc

$$S = \int_0^1 d\theta \sum_0^\infty (\theta - \theta^2)^n x^n = \int_0^1 \frac{d\theta}{1 - (\theta - \theta^2)x},$$

ou

$$S = \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{d\theta}{\theta^2 - \theta + \frac{1}{x}}. \quad (2)$$

L'intégrale indéfinie est

$$2 \sqrt{\frac{x}{4-x}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{(2\theta-1)\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}}.$$

Entre les limites 0 et 1, elle se réduit à

$$4 \sqrt{\frac{x}{4-x}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{x}{4-x}}.$$

Conséquemment,

$$S = \frac{4}{\sqrt{x(4-x)}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{x}{4-x}}. \quad (5)$$

Telle est la somme demandée.

II. Pour  $x=1$  et  $x=2$ , on obtient ces résultats particuliers :

$$\frac{2\pi}{5\sqrt{5}} = 1 + \frac{1}{2.5} + \frac{1.2}{3.4.5} + \frac{1.2.5}{4.5.6.7} + \frac{1.2.5.4}{5.6.7.8.9} + \dots,$$

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{2}{2.5} + \frac{2.4}{5.4.5} + \frac{2.4.6}{4.5.6.7} + \frac{2.4.6.8}{5.6.7.8.9} + \dots$$

III. Si l'on change  $x$  en  $4x^2$ ; la série (1) devient

$$1 + \frac{4}{2.5} x^2 + \frac{4.8}{5.4.5} x^4 + \frac{4.8.12}{4.5.6.7} x^{12} + \dots;$$

et la formule (5) :

$$S = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

ou, sous une forme plus simple :

$$S = \frac{\text{arc sin } x}{x \sqrt{1-x^2}}. \quad (4)$$

IV. Nous avons donc cette autre égalité :

$$\frac{\text{arc sin } x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{4}{2 \cdot 5} x^3 + \frac{4 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \frac{4 \cdot 8 \cdot 12}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \dots \quad (5)$$

Celle-ci, qui est connue (\*), est une conséquence de la formule de Clausen :

$$(\text{arc sin } x)^2 = x^2 + \frac{2}{5} \frac{x^4}{2} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \frac{x^6}{5} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{5 \cdot 5 \cdot 7} \frac{x^8}{4} + \dots \quad (**).$$

### CCXI. — Une transformation de la formule du binôme.

( *J u i n* 1 8 8 5 . )

I. Si, dans l'expression

$$\frac{(a + \sqrt{a^2-1})^n - (a - \sqrt{a^2-1})^n}{2\sqrt{a^2-1}},$$

on fait  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3$ , ..., on est conduit à supposer que :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(a + \sqrt{a^2-1})^n - (a - \sqrt{a^2-1})^n}{2\sqrt{a^2-1}} \\ & = (2a)^{n-1} - C_{n-2,1}(2a)^{n-5} + C_{n-3,2}(2a)^{n-5} - \dots \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

Pour essayer de démontrer cette relation remarquable, faisons  $a = \cos \varphi$ . Elle devient

$$\begin{aligned} & \frac{(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)^n - (\cos \varphi - \sqrt{-1} \sin \varphi)^n}{2\sqrt{-1} \sin \varphi} \\ & = (2 \cos \varphi)^{n-1} - C_{n-2,1}(2 \cos \varphi)^{n-5} + C_{n-3,2}(2 \cos \varphi)^{n-5} - \dots, \end{aligned}$$

(\*) *Mémoire sur certaines décompositions en carrés*, p. 60.

(\*\*) *Traité élémentaire des séries*, p. 402.

ou

$$\frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi} = (2 \cos \varphi)^{n-1} - C_{n-2,1}(2 \cos \varphi)^{n-3} + C_{n-3,2}(2 \cos \varphi)^{n-5} - \dots \quad (1)$$

Or, cette formule est connue (\*). La relation (A) est donc vérifiée.

II. *Une identité.* — Si l'on développe, par la formule du binôme, chacune des quantités  $(a + \sqrt{a^2 - 1})^n$ ,  $(a - \sqrt{a^2 - 1})^n$ , on trouve, comme expression du premier membre de (A) :

$$C_{n,1}a^{n-1} + C_{n,3}a^{n-3}(a^2 - 1) + C_{n,5}a^{n-5}(a^2 - 1)^2 + \dots$$

Conséquemment :

$$\left. \begin{aligned} & C_{n,1}a^{n-1} + C_{n,3}a^{n-3}(a^2 - 1) + C_{n,5}a^{n-5}(a^2 - 1)^2 + \dots \\ & = (2a)^{n-1} - C_{n-2,1}(2a)^{n-3} + C_{n-3,2}(2a)^{n-5} - \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Si, par exemple,  $n = 9$ ,  $a = \sqrt{2}$  :

$$\begin{aligned} & 9 \cdot 16 + 84 \cdot 8 + 126 \cdot 4 + 56 \cdot 2 + 1 \\ & = 4\,096 - 7 \cdot 512 + 15 \cdot 64 - 10 \cdot 8 + 1, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & 144 + 672 + 504 + 72 + 1 = 4\,096 - 5\,584 + 960 - 80 + 1 \\ & = 1\,595. \end{aligned}$$

III. *Généralisation.* — Si, dans l'égalité (A), on remplace  $a$  par  $\frac{a}{b}\sqrt{-1}$ , on obtient cette transformée :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(a + \sqrt{a^2 + b^2})^n - (a - \sqrt{a^2 + b^2})^n}{2\sqrt{a^2 + b^2}} \\ & = (2a)^{n-1} + C_{n-2,1}(2a)^{n-3}b^2 + C_{n-3,2}(2a)^{n-5}b^4 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

En même temps, l'identité (5) devient

$$\left. \begin{aligned} & C_{n,1}a^{n-1} + C_{n,3}a^{n-3}(a^2 + b^2) + C_{n,5}a^{n-5}(a^2 + b^2)^2 + \dots \\ & = (2a)^{n-1} + C_{n-2,1}(2a)^{n-3}b^2 + C_{n-3,2}(2a)^{n-5}b^4 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (C)$$

(\*) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. VI, p. 104.

Celle-ci donne une relation assez simple entre des nombres combinatoires ; savoir :

$$C_{n,1} + 2C_{n,3} + 2^2C_{n,5} + \dots = 2^{n-1} + 2^{n-5}C_{n-2,1} + 2^{n-5}C_{n-3,2} + \dots \quad (D)$$

IV. *Autres développements.* — Soit

$$(a + \sqrt{a^2 + b^2})^n + (a - \sqrt{a^2 + b^2})^2 = Aa^n + Ba^{n-2}b^2 + Ca^{n-4}b^4 + \dots \quad (5)$$

On voit d'abord (en supposant  $b = 0$ ), que  $A = 2^{n-1}$ .

En second lieu, si l'on prend les dérivées relatives à  $b$ , on a

$$\begin{aligned} & n \frac{(a + \sqrt{a^2 + b^2})^{n-1} - (a - \sqrt{a^2 + b^2})^{n-1}}{2\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= 2Ba^{n-2} + 4Ca^{n-4}b^2 + 6Da^{n-6}b^4 + \dots \end{aligned}$$

D'après (B), le développement du premier membre est

$$n[(2a)^{n-2} + C_{n-3,1}(2a)^{n-4}b^2 + C_{n-4,2}(2a)^{n-6}b^4 + \dots].$$

Par conséquent :

$$B = n2^{n-3}, \quad C = \frac{n}{2} C_{n-3,1} 2^{n-5}, \quad D = \frac{n}{5} C_{n-4,2} 2^{n-7}, \dots;$$

puis

$$\left. \begin{aligned} & (a + \sqrt{a^2 + b^2})^n + (a - \sqrt{a^2 + b^2})^n = 2^n a^n \\ & + n \left[ 2^{n-2} a^{n-2} b^2 + \frac{1}{2} C_{n-3,1} 2^{n-4} a^{n-4} b^4 + \frac{1}{5} C_{n-4,2} 2^{n-6} a^{n-6} b^6 + \dots \right]; \end{aligned} \right\} \quad (E)$$

et, en particulier :

$$\left. \begin{aligned} & (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \\ &= 2^n + n \left[ 2^{n-2} + \frac{1}{2} C_{n-3,1} 2^{n-4} + \frac{1}{5} C_{n-4,2} 2^{n-6} + \dots \right]. \end{aligned} \right\} \quad (F)$$

V. *Suite.* — Soient, pour abréger :

$$(2a)^{n-1} + C_{n-2,1}(2a)^{n-3}b^2 + C_{n-3,2}(2a)^{n-5}b^4 + \dots = P,$$

$$2^{n-1}a^n + n \left[ 2^{n-3}a^{n-3}b^2 + \frac{1}{2} C_{n-3,1} 2^{n-5}a^{n-5}b^4 + \frac{1}{5} C_{n-4,2} 2^{n-7}a^{n-7}b^6 + \dots \right] = Q.$$

Il est clair que :

$$\left. \begin{aligned} (a + \sqrt{a^2 + b^2})^n &= P\sqrt{a^2 + b^2} + Q, \\ (a - \sqrt{a^2 + b^2})^n &= -P\sqrt{a^2 + b^2} + Q. \end{aligned} \right\} \text{(G)}$$

Par exemple :

$$(1 + \sqrt{2})^7 = 169\sqrt{2} + 259, \quad (1 - \sqrt{2})^7 = -169\sqrt{2} + 259.$$

VI. *Remarques.* — 1°  $(-b^2)^n = Q^2 - P^2(a^2 + b^2)$ .

Donc, si  $n$  est pair,  $Q^2$  est la somme de trois carrés; et, si  $n$  est impair,  $P^2$  est le quotient d'une somme de deux carrés par une somme de deux carrés.

2° On a, identiquement :

$$\begin{aligned} & 2 \left[ (a + \sqrt{a^2 + b^2})^n + (a - \sqrt{a^2 + b^2})^n \right] \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= (a + \sqrt{a^2 + b^2})^{n+1} - (a - \sqrt{a^2 + b^2})^{n+1} \\ &+ b^2 \left[ (a + \sqrt{a^2 + b^2})^{n-1} - (a - \sqrt{a^2 + b^2})^{n-1} \right] \text{ (*)}. \end{aligned}$$

Par conséquent :

Si  $n$  est pair (supérieur à 2), et que  $a, b$  soient des nombres entiers, la quantité

$$(a + \sqrt{a^2 + b^2})^n + (-a + \sqrt{a^2 + b^2})^n$$

est une somme de quatre carrés, dont deux sont égaux entre eux (\*\*).

Par exemple,

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{15})^6 + (-2 + \sqrt{15})^6 &= 2(2^6 + 15 \cdot 2^4 \cdot 15 + 15 \cdot 2^2 \cdot 15^2 + 15^3) \\ &= 51\,042 = 156^2 + 73^2 + 75^2 + 56^2. \end{aligned}$$

(\*) Vérification facile.

(\*\*) *Mémoire sur certaines décompositions en carrés*, p. 50.



## CCXII. — Sur quelques formules de Poisson.

(Décembre 1885) (\*).

I. Dans la deuxième partie de son célèbre *Mémoire sur les intégrales définies* (\*\*), Poisson adopte, comme point de départ, la formule

$$= 2 \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{p}{[(2i-1)\pi - \theta]^2 + p^2} + 2 \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{p}{[(2i-1)\pi + \theta]^2 + p^2}, \quad (1)$$

conséquence immédiate de cette autre formule, due à Euler :

$$= \prod_{i=1}^{i=\infty} \left[ 1 + \frac{p^2}{[(2i-1)\pi - \theta]^2} \right] \left[ 1 + \frac{p^2}{[(2i-1)\pi + \theta]^2} \right] \quad (***), \quad (2)$$

Mais l'établissement de celle-ci est un peu long. Au contraire, il est très facile de démontrer *directement*, ou plutôt de *vérifier*, la formule (1).

D'abord, si l'on change  $p$  en  $p\sqrt{-1}$ , elle devient

$$\frac{1}{2p} \frac{\sin p}{\cos p + \cos \theta} = \sum_1^{\infty} \left\{ \frac{1}{[(2i-1)\pi - \theta]^2 - p^2} + \frac{1}{[(2i-1)\pi + \theta]^2 - p^2} \right\}. \quad (5)$$

On a :

$$\frac{1}{[(2i-1)\pi - \theta]^2 - p^2} = \frac{1}{2p} \left[ \frac{1}{(2i-1)\pi - \theta - p} - \frac{1}{(2i-1)\pi - \theta + p} \right],$$

$$\frac{1}{[(2i-1)\pi + \theta]^2 - p^2} = \frac{1}{2p} \left[ \frac{1}{(2i-1)\pi + \theta - p} - \frac{1}{(2i-1)\pi + \theta + p} \right]^2;$$

(\*) Fragment d'une leçon à l'Université de Liège.

(\*\*) *Journal de l'École polytechnique*, 18<sup>e</sup> Cahier, pp. 295, 296.

(\*\*\*) *Introduction à l'Analyse*, t. I, p. 420.

donc la somme des deux fractions est

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2p} \left[ \frac{1}{(2i-1)\pi - (\theta + p)} - \frac{1}{(2i-1)\pi + (\theta + p)} \right] \\ & - \frac{1}{2p} \left[ \frac{1}{(2i-1)\pi - (\theta - p)} - \frac{1}{(2i-1)\pi + (\theta - p)} \right] \\ & = \frac{\theta + p}{p} \frac{1}{(2i-1)^2\pi^2 - (\theta + p)^2} - \frac{\theta - p}{p} \frac{1}{(2i-1)^2\pi^2 - (\theta - p)^2} \end{aligned}$$

Soient, pour abrégier :

$$\theta + p = a\pi, \quad \theta - p = b\pi.$$

Alors l'égalité (5) se réduit à

$$\frac{1}{2} \frac{\sin p}{\cos p + \cos \theta} = \frac{a}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^2 - a^2} - \frac{b}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^2 - b^2}. \quad (4)$$

La première série représente  $\frac{\pi}{4a} \operatorname{tg} \frac{a\pi}{2}$  (\*); la seconde,  $\frac{\pi}{4b} \operatorname{tg} \frac{b\pi}{2}$ . Donc

$$2 \frac{\sin p}{\cos p + \cos \theta} = \operatorname{tg} \frac{a\pi}{2} - \operatorname{tg} \frac{b\pi}{2} = \frac{\sin(a-b) \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{a\pi}{2} \cos \frac{b\pi}{2}};$$

etc. (\*\*).

II. Dans le même Mémoire, Poisson donne l'importante formule

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{(\frac{\pi}{2}-p)x} + e^{-(\frac{\pi}{2}-p)x}}{e^{\frac{\pi}{2}x} + e^{-\frac{\pi}{2}x}} dx = \frac{1}{\sin p}. \quad (5)$$

On peut, comme il suit, la rattacher aux intégrales eulériennes. Soient :

$$p = \alpha\pi, \quad e^x = z^{-\frac{1}{2\alpha\pi}}; \quad (\alpha < 1)$$

(\*) *Traité élémentaire des séries*, p. 416; formules 65 et 64.

(\*\*) Partant de cette identité, et renversant l'ordre des calculs, on trouvera donc la formule (2).

Un calcul très simple donne, au lieu de l'égalité précédente,

$$\int_0^1 \frac{z^{\frac{1-2\alpha}{4\alpha}} + z^{-\frac{1-2\alpha}{4\alpha}}}{z^{\frac{1}{4\alpha}} + z^{-\frac{1}{4\alpha}}} \frac{dz}{z} = \frac{2\pi\alpha}{\sin \pi\alpha}. \quad (6)$$

Soit encore  $z = u^{4\alpha}$ ; et, par conséquent,

$$\int_0^1 \frac{u^{1-2\alpha} + u^{-(1-2\alpha)}}{1 + u^2} du = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}. \quad (7)$$

Le second membre égale  $\frac{1}{2} B(\alpha, 1 - \alpha)$ . Pour vérifier qu'il égale le premier, je pose

$$u = \operatorname{tg} \varphi.$$

J'obtiens

$$B(\alpha, 1 - \alpha) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ \left( \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right)^{1-2\alpha} + \left( \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \right)^{1-2\alpha} \right] d\varphi.$$

L'intégrale est la moitié de

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \left( \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right)^{1-2\alpha} + \left( \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \right)^{1-2\alpha} \right] d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right)^{1-2\alpha} d\varphi \\ &= \int_0^1 \left( \frac{\theta}{1-\theta} \right)^{\frac{1}{2}-\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} = \int_0^1 \theta^{-\alpha} (1-\theta)^{\alpha-1} d\theta. \end{aligned}$$

Done enfin

$$B(\alpha, 1 - \alpha) = \int_0^1 \theta^{-\alpha} (1 - \theta)^{\alpha-1} d\theta; \quad (8)$$

ce qui est identique.

Ainsi, en partant de cette égalité connue, et en transformant le second membre, on peut parvenir à la formule (5).

III. Soit enfin la relation

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{2px} - e^{-2px}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg} p, \quad (9)$$

également due à Poisson (\*), et dont nous avons parlé autre part (\*\*).

Si l'on pose :

$$p = \frac{1}{2} \alpha \pi, \quad e^x = u^{-\frac{1}{\pi}},$$

elle devient

$$\int_0^1 \frac{u^{-\alpha} - u^\alpha}{1 - u^2} du = \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \alpha \pi. \quad (10)$$

Celle-ci a été considérée par Svanberg et M. Hermite (\*\*\*). Il est facile de la démontrer directement.

### CCXIII. — Équations différentielles totales.

(Mai 1884) (iv).

Il y a quelques années, M. Joseph Bertrand a fait connaître une ingénieuse méthode, qui permet d'intégrer l'équation

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0, \quad (1)$$

quand la condition

$$X \left( \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \right) + Y \left( \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \right) + Z \left( \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \right) = 0. \quad (2)$$

est remplie (v). Je me propose de simplifier et de généraliser le procédé en question (vi).

(\*) *Journal de l'École polytechnique*, 18<sup>e</sup> Cahier, p. 298.

(\*\*) *Sur les Nombres de Bernoulli et d'Euler* (1867), p. 18.

(\*\*\*) *Sur l'intégrale...*; par M. Charles Hermite (ACADÉMIE DE TURIN, 1878).

(iv) Leçons à l'Université de Liège.

(v) *Comptes rendus*, 18 décembre 1876. On verra, plus loin, pourquoi nous avons modifié les notations adoptées par M. Bertrand.

(vi) Il ressemble beaucoup à celui dont j'ai fait usage dans le *Mémoire intitulé: Recherche des lignes de courbure de la surface...* (ACADÉMIE DE BELGIQUE, 1864).

I. *Exposé de la méthode.* — L'équation (1) est, en vertu de la relation (2), une conséquence du système *auxiliaire* :

$$\frac{\frac{dx}{dZ} \frac{dY}{dz}}{\frac{dy}{dz} \frac{dX}{dx}} = \frac{\frac{dy}{dZ} \frac{dX}{dz}}{\frac{dz}{dz} \frac{dZ}{dx}} = \frac{\frac{dz}{dY} \frac{dX}{dy}}{\frac{dx}{dx} \frac{dX}{dy}}. \quad (5)$$

Soient

$$\varphi(x, y, z) = \alpha, \quad \psi(x, y, z) = \beta \quad (4)$$

deux intégrales de ce système. D'après un théorème connu, toute autre intégrale est réductible à

$$F(\alpha, \beta) = C. \quad (5)$$

En particulier, *l'intégrale de la proposée (1) est réductible à cette forme (5)*. Conséquemment, *si l'on prend  $\alpha, \beta$  pour variables, l'équation (1) sera transformée en*

$$M d\alpha + N d\beta = 0; \quad (6)$$

M, N étant, bien entendu, des fonctions de  $\alpha, \beta$  (\*).

II. *Remarques.* — 1° Si, des équations (4), on tire les valeurs de  $x, y$ , pour les substituer dans la proposée, la variable  $z$  devra disparaître (\*\*). Donc, *pour abrégier le calcul*, on peut supposer  $dz = 0$ , et même  $z = 0$ , si aucune des fonctions X, Y, Z ne devient infinie par suite de cette hypothèse.

2° D'après cela, l'équation (1) peut être réduite à

$$X dx + Y dy = 0. \quad (7)$$

Et comme on déduit, des équations (5), (4), en faisant  $z = 0$  :

$$\frac{dx}{dx} dx + \frac{d\alpha}{dy} dy = d\alpha, \quad \frac{d\beta}{dx} dx + \frac{d\beta}{dy} dy = d\beta;$$

(\*) A part les applications, la Note de M. Bertrand se réduit à ce qui précède.

(\*\*) Propriété connue.

on peut prendre, dans la *transformée* (6) :

$$M = X \frac{d\beta}{dy} - Y \frac{d\beta}{dx}, \quad N = Y \frac{d\alpha}{dx} - X \frac{d\alpha}{dy} \quad (*) \quad (8)$$

5° Si, au lieu de  $z = 0$ , on faisait  $x = 0$  ou  $y = 0$ , on trouverait, soit :

$$M = Y \frac{d\beta}{dz} - Z \frac{d\beta}{dy}, \quad N = Z \frac{d\alpha}{dy} - Y \frac{d\alpha}{dz}; \quad (9)$$

soit :

$$M = Z \frac{d\beta}{dx} - X \frac{d\beta}{dz}, \quad N = X \frac{d\alpha}{dz} - Z \frac{d\alpha}{dx}. \quad (10)$$

4° Les trois valeurs de M, et les trois valeurs de N, ne sont pas nécessairement *identiques* : il suffit qu'elles soient *proportionnelles*, afin que l'équation (6) ne change pas. On a donc la relation suivante, à laquelle satisfont X, Y, Z :

$$\frac{X \frac{d\beta}{dy} - Y \frac{d\beta}{dx}}{Y \frac{d\beta}{dz} - Z \frac{d\beta}{dy}} = \frac{Y \frac{d\alpha}{dx} - X \frac{d\alpha}{dy}}{Z \frac{d\alpha}{dy} - Y \frac{d\alpha}{dx}}$$

5° Après quelques simplifications, elle devient

$$\left. \begin{aligned} & X \left( \frac{d\alpha}{dy} \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\alpha}{dz} \frac{d\beta}{dy} \right) + Y \left( \frac{d\alpha}{dz} \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dx} \frac{d\beta}{dz} \right) \\ & + Z \left( \frac{d\alpha}{dx} \frac{d\beta}{dy} - \frac{d\alpha}{dy} \frac{d\beta}{dx} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

6° Au fond, cette *identité* ne diffère pas de la *condition d'intégrabilité* (2). En effet, les différentielles des équations (4) étant

$$\frac{d\alpha}{dx} dx + \frac{d\alpha}{dy} dy + \frac{d\alpha}{dz} dz = 0, \quad \frac{d\beta}{dx} dx + \frac{d\beta}{dy} dy + \frac{d\beta}{dz} dz = 0,$$

(\*) A cause de

$$\frac{dx}{Y} = -\frac{dy}{X}, \quad (7)$$

ces valeurs rendent identique l'équation (6).

on a

$$\frac{\frac{dx}{d\alpha} \frac{d\beta}{dz} - \frac{dx}{dz} \frac{d\beta}{d\alpha}}{\frac{dy}{dz} \frac{d\beta}{dx} - \frac{dy}{dx} \frac{d\beta}{dz}} = \frac{\frac{dy}{d\alpha} \frac{d\beta}{dz} - \frac{dy}{dz} \frac{d\beta}{d\alpha}}{\frac{dz}{d\alpha} \frac{d\beta}{dx} - \frac{dz}{dx} \frac{d\beta}{d\alpha}} = \frac{\frac{dz}{d\alpha} \frac{d\beta}{dy} - \frac{dz}{dy} \frac{d\beta}{d\alpha}}{\frac{d\alpha}{dx} \frac{d\beta}{dy} - \frac{d\alpha}{dy} \frac{d\beta}{dx}};$$

et, pour que ces équations simultanées s'accordent avec le système (4), on doit avoir

$$\frac{\frac{dZ}{dy} \frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dz} \frac{dY}{dy}}{\frac{d\alpha}{dy} \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\alpha}{dz} \frac{d\beta}{dy}} = \frac{\frac{dX}{dz} \frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dx} \frac{dZ}{dz}}{\frac{d\alpha}{dz} \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dx} \frac{d\beta}{dz}} = \frac{\frac{dY}{dx} \frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dy} \frac{dX}{dx}}{\frac{d\alpha}{dx} \frac{d\beta}{dy} - \frac{d\alpha}{dy} \frac{d\beta}{dx}};$$

etc.

III. *Application.* — Soit pris, comme dans la Note de M. Bertrand, l'exemple classique :

$$(y^2 + yz + z^2)dx + (z^2 + zx + x^2)dy + (x^2 + xy + y^2)dz = 0;$$

de manière que

$$X = y^2 + yz + z^2, \quad Y = z^2 + zx + x^2, \quad Z = x^2 + xy + y^2.$$

Le système

$$\frac{dx}{z - y} = \frac{dy}{x - z} = \frac{dz}{x - y}$$

a pour intégrales

$$x + y + z = \alpha, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \beta.$$

Si l'on suppose  $z = 0$ , on trouve, par les formules (8) :

$$M = 2(y^3 - x^3), \quad N = x^2 - y^2;$$

ou, en supprimant un facteur :

$$M = -2(x^2 + xy + y^2), \quad N = x + y;$$

ou encore :

$$M = -(\alpha^2 + \beta), \quad N = \alpha.$$

L'équation auxiliaire (6) est donc

$$-(\alpha^2 + \beta) d\alpha + \alpha d\beta = 0 \text{ (*)}.$$

L'intégrale de celle-ci étant

$$\alpha - \frac{\beta}{\alpha} = C,$$

on a, comme intégrale de la proposée,

$$\frac{yz + zx + xy}{x + y + z} = C;$$

résultat connu (\*\*).

IV. *Équations homogènes.* — Si l'équation (1) est homogène, il est clair que

$$x = \alpha z, \quad y = \beta z \quad (11)$$

la transforme en

$$A(\alpha dz + z d\alpha) + B(\beta dz + z d\beta) + C dz = 0; \quad (12)$$

A, B, C ne contenant que  $\alpha$  et  $\beta$ . Cette nouvelle équation étant écrite ainsi :

$$\frac{dz}{z} + \frac{A d\alpha + B d\beta}{A\alpha + B\beta + C} = 0, \quad (15)$$

on voit qu'elle sera intégrable si  $\frac{A d\alpha + B d\beta}{A\alpha + B\beta + C}$  est une différentielle exacte (\*\*\*). La condition est

$$\frac{d \cdot \frac{A}{A\alpha + B\beta + C}}{d\beta} = \frac{d \cdot \frac{B}{A\alpha + B\beta + C}}{d\alpha}.$$

(\*) Dans la Note citée, M. Bertrand, qui ne fait point usage des formules (8), (9), (10), n'explique pas comment il parvient à la dernière équation.

(\*\*) On peut comparer le calcul précédent avec celui que donne Lacroix (t. II, p. 508).

(\*\*\*) Suivant M. Houël, dans cette équation (15), les variables sont séparées (Cours de Calcul infinitésimal, t. III, p. 144).



## V. Application.

$$(y^2 + z^2)zdx + (x^2 + z^2)zdy - 2(x + y)xydz = 0 \quad (*).$$

On a :

$$A = \beta^2 + 1, \quad B = \alpha^2 + 1, \quad C = -2(\alpha + \beta)\alpha\beta,$$

$$A\alpha + B\beta + C = (\alpha + \beta)(1 - \alpha\beta);$$

puis

$$\frac{dz}{z} + \frac{(\beta^2 + 1)d\alpha + (\alpha^2 + 1)d\beta}{(\alpha + \beta)(1 - \alpha\beta)} = 0.$$

La seconde fraction égale

$$\frac{\beta d\alpha + \alpha d\beta}{1 - \alpha\beta} + \frac{d\alpha + d\beta}{\alpha + \beta}.$$

Donc

$$\int z + \int (\alpha + \beta) - \int (1 - \alpha\beta) = \int k,$$

ou

$$\frac{z(\alpha + \beta)}{1 - \alpha\beta} = k.$$

Conséquemment, l'intégrale de la proposée est

$$\frac{z^2(x + y)}{z^2 - xy} = k.$$

## VI. Remarque. — La condition

$$X \left( \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \right) + Y \left( \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \right) + Z \left( \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \right) = 0 \quad (2)$$

est susceptible d'une *interprétation géométrique* assez simple.

L'équation

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0, \quad (1)$$

si elle est intégrable, représente une infinité de surfaces S, ayant pour équation

$$f(X, Y, Z) = 0.$$

(\*) *Imité* de l'Exercice 24 de M. Houël (t. III, p. 254). Dans celui-ci, le premier terme est  $(y^2 + x^2)zdz$  : la condition d'intégrabilité n'est pas remplie.

Les équations (3), ou leurs intégrales (4), représentent deux séries de lignes L : ces lignes sont situées sur les surfaces S, c'est-à-dire qu'elles en sont les génératrices.

En effet, les cosinus directifs de la tangente T, à L, au point  $(x, y, z)$ , sont, d'après les équations (3), proportionnels aux binômes

$$\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \quad \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}.$$

D'autre part, les cosinus directifs de la normale N, à S, sont proportionnels à X, Y, Z. Or, l'équation (4) prouve que ces deux droites sont orthogonales. En d'autres termes, la tangente T est située dans le plan tangent à S.

*Addition.* — (Octobre 1886.)

VII. *Conditions d'intégrabilité.* — Soit l'équation à quatre variables :

$$Tdt + Xdt + Ydy + Zdz = 0. \quad (14)$$

Si l'on exprime que le produit du premier membre, par un facteur  $\lambda$ , est une différentielle exacte, on trouve les conditions connues :

$$T \left( \frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} \right) + Y \left( \frac{dZ}{dt} - \frac{dT}{dz} \right) + Z \left( \frac{dT}{dy} - \frac{dY}{dt} \right) = 0, \quad (15)$$

$$X \left( \frac{dZ}{dt} - \frac{dT}{dz} \right) + Z \left( \frac{dT}{dx} - \frac{dX}{dt} \right) + T \left( \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \right) = 0, \quad (16)$$

$$Y \left( \frac{dT}{dx} - \frac{dX}{dt} \right) + T \left( \frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} \right) + X \left( \frac{dY}{dt} - \frac{dT}{dy} \right) = 0 (*). \quad (17)$$

VIII. *Remarques.* — 1° Les équations précédentes se déduisent les unes des autres, par une *permutation tournante*. Si l'on continue cette permutation, on trouve une *quatrième condition* (surabondante) :

$$Z \left( \frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} \right) + X \left( \frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} \right) + Y \left( \frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz} \right) = 0. \quad (18)$$

(\*) Dans son grand Traité (t. II, p. 316), Lacroix donne les équations (15), (17), (18); mais non l'équation (16).

Du reste, il est facile de vérifier que celle-ci est une conséquence des trois autres. En effet, si l'on divise par  $TYZ$ , par  $XZT$ , etc.; on peut, pour abrégér, écrire ainsi ces quatre équations :

$$a + b + c = 0, \quad b + d + e = 0, \quad d + f - c = 0, \quad f + a - e = 0.$$

Done

$$(a + b + c) - (b + d + e) + (d + f - c) - (f + a - e) = 0,$$

ou

$$0 = 0.$$

2° L'équation (18) ne diffère pas de l'équation (2). Ainsi, pour que l'équation

$$Tdt + Xdx + Ydy + Zdz = 0 \quad (11)$$

soit intégrable, l'équation auxiliaire

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \quad (1)$$

le doit être (\*).

IX. *Intégration.* — Pour fixer les idées, prenons l'équation (18), écrite ainsi :

$$0 \cdot T + X \left( \frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} \right) + Y \left( \frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dy} \right) + Z \left( \frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} \right) = 0. \quad (19)$$

La proposée (14) est, en vertu de cette condition (19), une conséquence du système auxiliaire (\*\*):

$$\frac{dt}{0} = \frac{dx}{-\frac{dY}{dz} + \frac{dZ}{dy}} = \frac{dy}{-\frac{dZ}{dx} + \frac{dX}{dy}} = \frac{dz}{-\frac{dY}{dx} + \frac{dX}{dy}}. \quad (20)$$

Celui-ci suppose  $t = \text{const.} = \gamma$ .

(\*) Celle-ci suppose  $t = \text{const.}$

(\*\*) A chacune des quatre conditions d'intégrabilité correspond un système auxiliaire; par conséquent quatre systèmes, entre lesquels on pourra choisir.

Si, comme dans le paragraphe I, les intégrales des deux autres équations sont

$$\varphi(x, y, z) = \alpha, \quad \psi(x, y, z) = \beta; \quad (4)$$

on tirera, de ces égalités, les valeurs de  $x, y$  (en faisant varier  $t$ ), pour les substituer dans la proposée :  $z$  disparaîtra, et l'on aura une équation différentielle entre  $\alpha, \beta$  et  $t$ . Supposons que l'intégrale soit

$$F(\alpha, \beta, t) = C; \quad (21)$$

alors l'intégrale de l'équation (14) sera

$$F[\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), t] = C. \quad (22)$$

X. *Autre méthode.*— Elle résulte de la seconde Remarque (VIII). Soit,

$$f(t, x, y, z) = \theta \quad (25)$$

l'intégrale de l'équation (1),  $t$  étant supposé *constante*. Pour en déduire l'intégrale de l'équation (14), il suffit de remplacer la constante arbitraire  $\theta$  par une fonction de  $t$ , convenablement choisie. A ce point de vue, on a

$$\frac{dt}{dt} dt + \left( \frac{dt}{dx} dx + \frac{dt}{dy} dy + \frac{dt}{dz} dz \right) = d\theta.$$

La quantité entre parenthèses est égale au trinôme  $Xdx + Ydy + Zdz$ , multiplié, s'il le faut, par un facteur  $\lambda$ . En conséquence,

$$d\theta = \left( \frac{dt}{dt} - \lambda T \right) dt. \quad (24)$$

D'après ce que nous venons de dire, le second membre doit être indépendant de  $x, y, z$ , soit *actuellement*, soit en vertu de l'intégrale (25) (\*).

(\*) Cette méthode n'est pas nouvelle; mais nous croyons en avoir simplifié l'exposé.

XI. *Application.* — Soit l'équation connue (\*) :

$$y(y+z)dt + z(y+z)dx + z(t-x)dy - y(t-x)dz = 0. \quad (25)$$

L'équation auxiliaire est

$$z(y+z)dx + z(t-x)dy - y(t-x)dz = 0. \quad (26)$$

Pour intégrer celle-ci, prenons, préalablement,

$$(y+z)dx + (t-x)dz = 0,$$

ou

$$\frac{dx}{t-x} + \frac{dy}{y+z} = 0, \quad (27)$$

dont l'intégrale est

$$\frac{y+z}{t-x} = \gamma. \quad (28)$$

Cette formule représentera l'intégrale de l'équation (16), si  $\gamma$  est une fonction de  $z$ , convenablement choisie.

Différentiant, on a

$$(t-x)(dy+dz) + (y+z)dx = (t-x)^2 d\gamma;$$

puis, eu égard à la relation (16) :

$$(y+z)dz = z(t-x)d\gamma;$$

ou bien

$$\frac{dz}{z} = \frac{d\gamma}{\gamma};$$

ou encore :

$$\gamma = z\theta.$$

Ainsi, l'intégrale de l'équation (26) est

$$\frac{y+z}{z(t-x)} = \theta. \quad (29)$$

Différentiant de nouveau (en faisant tout varier), on a

$$z(t-x)(dy+dz) - (y+z)(t-x)dz - z(y+z)(dt-dz) = z^2(t-x)^2 d\theta;$$

ou, en vertu de la proposée,

$$-(y+z)^2 dt = z^2(t-x)^2 d\theta,$$

(\*) MOISNO, *Calcul intégral*, p. 511.

ou :

$$dt = -\frac{d\theta}{\theta^2}.$$

L'intégrale est

$$t - C = \frac{1}{\theta}.$$

Par conséquent, la formule (19) devient

$$\frac{y - z}{z(t - x)} - \frac{1}{t - C} = 0;$$

ou enfin

$$\frac{ty + zx}{y + z} = C. \quad (50)$$

Telle est l'intégrale de l'équation proposée.

XII. *Remarque.* — Si, au lieu de l'équation (27), nous avons pris

$$z(t - x)dy - y(t - x)dz = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

le calcul eût été abrégé.

#### CCXIV. — Théorème d'Arithmétique (\*).

(Décembre 1885.)

*n* et *p* étant des nombres entiers, la fraction

$$f = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \overline{2p-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \overline{2n-2p-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

est réductible à la forme

$$\frac{N}{2^k},$$

*N* étant impair.

(\*) Extrait du *Mémoire sur certaines décompositions en carrés.*

I. On a

$$f = \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \dots 2p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \dots \overline{2n - 2p}}{1 \cdot 2 \cdot 5 \dots n \cdot 2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \dots p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \dots \overline{n - p}}$$

Or, d'après un théorème connu (\*),

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \dots 2p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \dots \overline{2n - 2p}}{1 \cdot 2 \cdot 5 \dots n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \dots p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \dots \overline{n - p}} = \text{entier.}$$

II. *Remarque.* — Le numérateur de  $f$  étant *impair*, l'exposant

$$k = \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots (**).$$

### CCXV. — Sur le dernier théorème de Fermat.

(Mars 1884.)

M. de Jonquières vient de publier, sous ce titre (\*\*\*) , une très intéressante Note, contenant les remarquables théorèmes suivants :

*Soient trois nombres entiers, a, b, c, vérifiant l'équation*

$$a^n + b^n = c^n \text{ (iv).}$$

1° a et b ne peuvent être, simultanément, premiers ;

2° Si a, supposé inférieur à b, est premier,  $c = b + 1$ .

En suivant la voie indiquée par M. de Jonquières, on peut trouver d'autres contributions au théorème de Fermat.

I. *Préliminaires* (v).

$$1^\circ \quad a^n - 1 = \mathfrak{M}(nb). \quad (1)$$

(\*) *Seconde Note sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques.*

(\*\*) Voir, dans la Note CLXIII, le théorème d'Eisenstein.

(\*\*\*) *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei* (20 janvier 1884; Rome).

(iv) Je suppose, une fois pour toutes, l'exposant n premier, et supérieur à 5. (Voir la Note XLVII.)

(v) Dans les deux premiers paragraphes, le nombre a est premier.

D'après le second théorème de M. de Jonquières,

$$\frac{a^n - 1}{b} = \frac{n}{1} b^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} b^{n-3} + \dots + \frac{n}{1}. \quad (2)$$

$n$  étant premier, tous les coefficients, dans le second membre, sont divisibles par  $n$  (\*). Ainsi

$$a^n - 1 = b \mathfrak{N}(n) = \mathfrak{N}(nb). \quad (5)$$

$$2^\circ \quad a - 1 = \mathfrak{N}(n). \quad (4)$$

$n$  ne divise pas  $a$  (1). Donc, par le premier théorème de Fermat :

$$(a^{n-1} - 1)a = \mathfrak{N}(n).$$

Et comme

$$a^n - 1 = \mathfrak{N}(n), \quad (5)$$

on a l'égalité (4).

5° Tout diviseur premier, de  $c - a$ , divise  $a - 1$ .

On a

$$b^n = (b + 1)^n - a^n = (b + 1 - a)E,$$

$E$  étant un nombre entier. Soit  $p$  un nombre premier qui divise  $b + 1 - a$ . D'après un théorème connu,  $p$  divise  $b$ ; donc il divise

$$b - (b + 1 - a) = a - 1.$$

4°  $a + b$  et  $c - a$  sont premiers entre eux.

Soient, s'il est possible :

$$a + b = \mathfrak{N}(p), \quad c - a = \mathfrak{N}(p).$$

A cause de  $c = b + 1$ , on aurait donc

$$2a - 1 = \mathfrak{N}(p).$$

On vient de voir que

$$a - 1 = \mathfrak{N}(p).$$

Or, ces égalités sont contradictoires; car leurs premiers membres sont premiers entre eux (\*\*).

(\*) Propriété connue.

(\*\*) Si  $p$  divisait  $2a - 1$  et  $a - 1$ , il diviserait  $2a - 1 - 2(a - 1) = 1$ .



3°  $2a - 1$  et  $2b + 1$  sont premiers entre eux.

Les nombres  $a + b$ ,  $b + 1 - a$  n'ayant aucun facteur commun, il en est de même pour leur somme  $2b + 1$  et leur différence  $2a - 1$ .

II. Inégalités. — 1° Le nombre premier,  $a$ , est compris entre

$$\sqrt[n]{nb^{n-1}} \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{n(b+1)^{n-1}}.$$

Reprenons l'égalité

$$a^n = (b+1)^n - b^n. \quad (2)$$

Le second membre, divisé par  $(b+1) - b$ , devient

$$(b+1)^{n-1} + (b+1)^{n-2}b + \dots + b^{n-1}.$$

Ce quotient est compris entre  $nb^{n-1}$  et  $n(b+1)^{n-1}$ . Ainsi

$$n(b+1)^{n-1} > a^n > nb^{n-1}. \quad (5)$$

$$2^\circ \quad b > n. \quad (6)$$

D'après M. de Jonquières,  $b$  surpasse  $a$ . Donc

$$b^n > a^n > nb^{n-1},$$

puis

$$b^n > nb^{n-1};$$

etc.

3° Le nombre  $b$ , qui satisfait à l'égalité

$$(b+1)^n - b^n = a^n, \quad (2)$$

est compris entre

$$a \sqrt[n-1]{\frac{a}{n}} \quad \text{et} \quad -1 + a \sqrt[n-1]{\frac{a}{n}}.$$

III. Remarques. — 1° Soit  $b$  un nombre entier, supérieur au nombre entier  $n$ . Entre  $\sqrt[n]{nb^{n-1}}$  et  $\sqrt[n]{n(b+1)^{n-1}}$ , il y a, tout au plus, un nombre entier.

Supposons qu'il puisse y en avoir deux,  $a_1$  et  $a_2$ ; de manière que,  $a_2$  étant le plus grand, on ait :

$$\sqrt[n]{nb^{n-1}} < a_1 < a_2 < \sqrt[n]{n(b+1)^{n-1}},$$

ou

$$b < a_1 \sqrt[n-1]{\frac{a_1}{n}}, \quad a_2 \sqrt[n-1]{\frac{a_2}{n}} < b + 1.$$

On conclut, de ces deux inégalités,

$$a_2 \sqrt[n-1]{\frac{a_2}{n}} - a_1 \sqrt[n-1]{\frac{a_1}{n}} < 1,$$

et, à plus forte raison :

$$(a_2 - a_1) \sqrt[n-1]{\frac{a_1}{n}} < 1.$$

Celle-ci est absurde; car le premier facteur est, au moins, égal à 1; et le second surpasse 1 (\*).

2° *Le nombre c est compris entre a + b et  $\frac{1}{2}(a + b)$ .*

Soit a le plus grand des nombres a, b. Alors :

$$a > \frac{a + b}{2},$$

$$a^n > \left(\frac{a + b}{2}\right)^n;$$

et, à plus forte raison,

$$c^n > \left(\frac{a + b}{2}\right)^n;$$

ou

$$c > \frac{a + b}{2}.$$

*Addition.* — (Octobre 1886.)

IV. THÉORÈME I. — *Si des nombres entiers a, b, c, premiers entre eux deux à deux, vérifient l'équation*

$$a^n + b^n = c^n, \tag{7}$$

*la somme a + b ne peut être un nombre premier.*

(\*) A cause de

$$b > n, \quad a_1 > \sqrt[n]{nb^{n-1}}.$$

Soit, s'il est possible,  $a + b = p$ . Le nombre premier  $p$ , divisant  $c^n$ , doit diviser  $c$ . Ainsi  $c = pc'$ .

L'équation (7) devient, par l'élimination de  $b$ ,

$$p^n - \frac{n}{1} ap^{n-1} + \dots + \frac{n}{1} a^{n-1}p = p^n c'^n. \quad (8)$$

Tous les termes, sauf  $na^{n-1}p$ , sont divisibles par  $p^2$ ; donc

$$na^{n-1} = \mathfrak{N}(p).$$

Cette relation exige que  $p$  divise  $a$  ou  $n$ . Mais  $p$  surpasse  $a$ ; donc  $p$  divise  $n$ ; ou, plutôt,  $p = n$ . Conséquemment,

$$(a + b)^n = n^n.$$

Or,  $(a + b)^n$  surpasse  $a^n + b^n$ . Ainsi

$$n^n > n^n c'^n;$$

conclusion absurde.

V. THÉORÈME II. — *Si la somme  $a + b$  est divisible par  $n$ , elle est divisible par  $n^{n-1}$ .*

Pour fixer les idées, et abréger, prenons  $n = 5$ ; et soit, s'il est possible,

$$a + b = 5q; \quad (9)$$

puis, par conséquent,

$$c = 5c'. \quad (10)$$

L'équation

$$(5q - a)^5 + a^5 = (5c')^5,$$

ou

$$(5q)^5 - 5(5q)^4 a + 10(5q)^3 a^2 - 10(5q)^2 a^3 + 5(5q)a^4 = 5^5 c'^5, \quad (11)$$

est réductible à la forme

$$5^5 Aq^2 + 5^2 qa^4 = 5^5 c'^5,$$

c'est-à-dire à celle-ci :

$$5Aq^2 + qa^4 = 5^5 c'^5.$$

$a$  ne pouvant être divisible par 5 (\*), on doit avoir

$$q = 5q'.$$

(\*) A cause des relations (9), (10).

Par suite,

$$5^2 Bq'^2 + q'a^4 = 5^2 c'^5.$$

Cette équation exige que

$$q' = 5q'' \text{ (*)}.$$

Donc

$$5^5 Cq''^2 + q''a^4 = 5c'^5;$$

puis

$$q'' = 5q''',$$

et enfin

$$a + b = 5^4 q''''.$$

**VI. THÉORÈME III.** — *Si la somme  $a + b$  est divisible par un nombre premier  $p$ , différent de  $n$ , elle est divisible par  $p^n$ .*

Prenons encore  $n = 5$ , et supposons

$$a + b = pq,$$

hypothèse d'où résulte

$$c = pc'.$$

L'équation (11) est remplacée par

$$(pq)^5 - 5(pq)^4 a + 10(pq)^5 a^2 - 10(pq)^2 a^3 + 5(pq)a^4 = p^5 c'^5,$$

laquelle peut être écrite ainsi :

$$Apq^2 + 5qa^4 = p^4 c'^5.$$

Opérant comme ci-dessus, on trouve :

$$q = pq', \quad q' = pq'', \quad q'' = pq''', \quad q''' = pq'''';$$

puis

$$a + b = p^5 q''''.$$

**VII. THÉORÈME IV.** — *Si la somme  $a + b$  est divisible par une puissance de  $n$ , supérieure à  $n^{n-1}$ , elle est divisible par  $n^{2n-1}$ .*

Prenant encore  $n = 5$ , supposons

$$a + b = 5^5 q;$$

(\*) On pourrait écrire, tout de suite,

$$q' = 5^2 q'''';$$

mais nous croyons rendre la démonstration plus claire en divisant, successivement, par  $q$ .

et, par conséquent,

$$c = 5^3 c'.$$

De là résulte, sous forme abrégée, l'équation

$$5^6 A q^2 + 5 q a^4 = c'^5.$$

Celle-ci exige que

$$c' = 5c'', \quad q = 5^4 q'.$$

Donc

$$a + b = 5^9 q'.$$

VIII. THÉORÈME V. — *Si la somme  $a + b$  est divisible par une puissance du nombre premier  $p$  (différent de  $n$ ), supérieure à  $p^n$ , elle est divisible par  $p^{2n}$ .*

Même démonstration.

IX. THÉORÈME VI. — *La somme  $a + b$  a la forme  $\frac{1}{n} P^n$ , ou la forme  $P^n$ , selon qu'elle est divisible ou non divisible par  $n$ .*

Cette proposition est un simple corollaire de celles qui précèdent.

X. THÉORÈME VII. — *La différence  $c - a$  ne peut être un nombre premier autre que  $n$  (\*).*

Si, dans l'équation de Fermat, on change  $c$  en  $-c$ , elle devient

$$a^n + b^n + c^n = 0.$$

A cause de cette forme symétrique, employée par Legendre, toutes les propriétés relatives à la somme  $a + b$  subsistent pour  $a + c$  et  $b + c$ ; c'est-à-dire, en reprenant la notation primitive, pour  $c - a$  et  $c - b$ . Le Théorème I, seul, peut faire exception.

En effet, si l'on suppose  $c - a = p$ , et que l'on répète les raisonnements employés ci-dessus (IV), on trouve  $p = n$ ,  $b = nb'$ ; puis

$$n^n < n^n b'^n;$$

inégalité évidente (\*\*).

(\*) De même pour  $c - b$ .

(\*\*) On ne peut supposer  $b' = 1$ ; car cette hypothèse donne

$$a^n + n^n = (a + n)^n.$$

Ce cas d'exception étant mis de côté (\*), nous pouvons nous contenter d'énoncer la proposition suivante.

XI. THÉORÈME VIII. — *Chacune des différences  $c - a$ ,  $c - b$  a la forme  $\frac{1}{n}P^n$ , ou la forme  $P^n$ .*

XII. COROLLAIRE. — *Aucun des nombres  $a + b$ ,  $c - a$ ,  $c - b$  n'est premier.*

XIII. Suite. — Soient, s'il est possible :

$$a + b = c^n, \quad c - a = b^n, \quad c - b = a^n. \quad (12)$$

On tire, de ces équations :

$$a = \frac{1}{2}(a^n - b^n + c^n), \quad b = \frac{1}{2}(b^n - a^n + c^n), \quad c = \frac{1}{2}(a^n + b^n + c^n); \quad (13)$$

puis

$$a + b - c = \frac{1}{2}(-a^n - b^n + c^n). \quad (14)$$

La relation (7) devient donc

$$(a^n + c^n - b^n)^n + (b^n + c^n - a^n)^n = (a^n + b^n + c^n)^n. \quad (15)$$

Dans les développements de

$$(a' + b' + c')^n, \quad (b' + c' - a')^n, \quad (c' + a' - b')^n,$$

tous les termes, sauf  $\pm a'^n$ ,  $\pm b'^n$ ,  $\pm c'^n$ , sont divisibles par  $n$  (\*\*).

Ainsi

$$-a'^n - b'^n + c'^n = \mathfrak{N}(n);$$

ou, par l'égalité (14) :

$$a + b - c = \mathfrak{N}(n).$$

(\*) On va voir qu'il n'existe pas.

(\*\*) En effet,

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 2 \dots \alpha \times 1 \cdot 2 \dots \beta \times 1 \cdot 2 \dots (n - \alpha - \beta)} = \mathfrak{N}(n),$$

si  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $n - \alpha - \beta$  sont différents de  $n$ .

## XIV. THÉORÈME IX.

$$\begin{aligned}
 1^\circ \quad & (x + y)^n - x^n - y^n = nxy(x + y)P, \\
 & P = H_1x^{n-5} + H_2x^{n-4}y + \dots + H_1y^{n-5}.
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 1^\circ \\ P = \dots \end{aligned}} \right\} (15)$$

2° Les coefficients sont donnés par la formule

$$H_p = \frac{1}{n} [C_{n-1,p} \pm 1],$$

le signe + répondant au cas où p est impair.

3° Le polynôme P est divisible par  $x^2 + xy + y^2$  (\*).

1° n étant premier, impair, la première partie est évidente.

2° Pour établir la deuxième, il suffit d'observer que

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{n} [(x + y)^{n-1} - (x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + y^{n-1})], \\
 &= \frac{1}{nxy} [(C_{n-1,1} + 1)x^{n-5} + (C_{n-1,2} - 1)x^{n-4} + \dots + (C_{n-1,n-1} + 1)y^{n-5}].
 \end{aligned}$$

3° Enfin, si l'on fait  $y = zx$ , l'équation  $P = 0$  entraîne celle-ci :

$$(z + 1)^n - z^n - 1 = 0,$$

laquelle est vérifiée par

$$z = \cos \frac{2\pi}{5} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi}{5},$$

comme on le reconnaît aisément. En outre, chacune de ces expressions est racine de l'équation dérivée :

$$(z + 1)^{n-1} - z^{n-1} = 0,$$

quand n a la forme  $6\mu + 1$  (\*\*).

(\*) Et même par  $(x^2 + xy + y^2)^2$ , si  $n = 2\mathcal{N}(6) + 1$  (CAUCHY, *Journal de Liouville*, t. V, p. 215).

(\*\*) Ce procédé, plus simple que celui de Cauchy, est dû, je pense, à M. Stern.

XV. *Remarques.* — 1° Si

$$n = 7, \quad P = (x^2 + xy + y^2)^2 (*).$$

$$2^\circ \quad H_p + H_{p+1} = \frac{1}{n} (C_{n-1, p} + C_{n-1, p+1}) = \frac{1}{n} C_{n, p+1},$$

ou

$$H_p + H_{p+1} = \frac{(n-1)(n-2) \dots (n-p)}{2 \cdot 5 \dots (p+1)}.$$

3°  $H_1 = 1$  ; donc

$$H_2 = \frac{n-1}{2} - 1, \quad H_3 = \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 5} - \frac{n-1}{2} + 1,$$

$$H_4 = \frac{(n-1)(n-2)(n-5)}{2 \cdot 5 \cdot 4} - \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 5} + \frac{n-1}{2} + 1 ;$$

etc.

4° Si l'on fait  $y = x$ , l'égalité (14) se réduit à

$$\frac{2^{n-1} - 1}{n} = H_1 + H_2 + H_3 + \dots + H_5 + H_2 + H_1 (**). \quad (15)$$

Voici donc une décomposition du nombre  $\frac{2^{n-1} - 1}{n}$ , en parties entières, additives, différente de celle qui est exprimée par la formule (à peu près évidente) :

$$\frac{2^{n-1} - 1}{n} = 1 + \frac{1}{5} C_{n-1, 2} + \frac{1}{5} C_{n-1, 4} + \dots + \frac{1}{n-2} C_{n-1, n-5} (***)$$

(\*) *Nouvelles Annales*, 1885, p. 520.

(\*\*) Par exemple,

$$\frac{2^{10} - 1}{11} = 95 = 1 + 4 + 11 + 19 + 25 + 19 + 11 + 4 + 1.$$

(\*\*\*) Voir ci-dessus, p. 501. Dans la Note intitulée : *Sur quelques développements de sin nx et de cos nx*, on trouve cette autre décomposition :

$$\frac{2^{n-1} - 1}{n} = 1 - \frac{1}{n} [1 - C_{n-2, 1} \cdot 2^{n-5} + C_{n-3, 2} \cdot 2^{n-5} + \dots].$$

Mais elle doit être attribuée à M. *Bachr* (*Nouvelles Annales*, 1869, p. 562).



XVI. THÉORÈME X. — La différence entre les puissances  $n^{\text{ièmes}}$  de deux nombres entiers consécutifs,  $a$ ,  $a + 1$ , étant diminuée de l'unité, est divisible par  $na(a + 1)(a^2 + a + 1)$  (\*).

Conséquence immédiate du Théorème IX.

XVII. COROLLAIRE. — Si, dans l'équation de Fermat, le nombre  $a$  est premier,

$$a^n - 1 = \mathcal{N} [nb(b + 1)(b^2 + b + 1)] (**).$$

XVIII. Soit, dans cette même équation (7),

$$c = a + b - \gamma.$$

Elle devient

$$\frac{n}{1}(a + b)^{n-1}\gamma - \dots + \gamma^n = (a + b)^n - a^n - b^n;$$

ou, par les formules (15) :

$$\frac{n}{1}(a + b)^{n-1}\gamma - \dots + \gamma^n = nab(a + b)P, \quad (16)$$

P représentant la quantité

$$H_1 a^{n-3} + H_2 a^{n-4}b + \dots + H_1 b^{n-3}.$$

Le premier membre est divisible par  $\gamma$ . Ainsi :

Le nombre  $\gamma$  (s'il existe), compris entre zéro et  $\frac{1}{2}(a + b)$  (\*\*\*), divise  $nab(a + b)P$  (iv).

(\*) Ce théorème suppose  $n > 3$ . Les facteurs  $a$ ,  $a + 1$ ,  $a^2 + a + 1$  sont premiers entre eux, deux à deux. En outre, le troisième égale le produit des deux autres, augmenté de 1.

(\*\*) Par le théorème de M. de Jonquières.

(\*\*\*) A cause de

$$c > \frac{1}{2}(a + b).$$

(iv) J'essaierai de revenir sur cette question. (Décembre 1886.)

NOTE POUR LA PAGE 552.

On sait : 1° que le lieu des centres des coniques circonscrites au quadrilatère  $ABCD$  est une conique  $H$  (\*); 2° que le centre  $I$ , de  $H$ , est le milieu de  $MN$ .

Cela posé :  $\gamma$  est le point de l'hyperbole  $H$ , diamétralement opposé au centre  $O$  du cercle  $ABCD$ ; ou encore : le point  $\gamma$  est le centre de la circonférence circonscrite au quadrilatère  $A'B'C'D'$ , symétrique de  $ABCD$ , relativement au milieu  $I$  de  $MN$ .

(\*) Une hyperbole, dans le cas où les données ont la disposition actuelle.

## ERRATA DU TOME I.

---

Page 24 La première note doit être rectifiée ainsi :

J'ai publié ce théorème en 1844, dans le *Cours de Mathématiques*, d'Auguste Blum. Dans les *Nouvelles Annales* (1858), il est attribué à M. Hermite. D'après une Note de M. de Longchamps (*Journal*, janvier 1886), il est dû à *Paoli*. Mais Le Besgue, cité par mon honorable Collègue et ami, attribue, au Géomètre italien, un théorème différent de celui dont il s'agit.

Page 205, paragraphe VIII, au lieu de  $\frac{1}{50}$ , lisez  $\frac{1}{50}$ .

---

## ERRATA DU TOME II.

---

Page 59, ligne 6, au lieu de  $(xy'' + yx'')^2$ , lisez  $(xy'' - yx'')^2$ .

— 41, paragraphe XV, au lieu de  $N = 42^2 + 64^2 + 22^2 + 16^2$ , lisez  
 $N = 41^2 + 55^2 + 17^2 + 7^2$ .

— 62, ligne 7, au lieu de  $\frac{1}{y} = 1 - \sqrt{1 - 4x}$ , lisez  $\frac{1}{y} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{4x}$ .

— 67, — avant-dernière. Le facteur 57 doit être suivi de 41.

— 91, — 4, en remontant, au lieu de  $\mathcal{L}^2 \left( 1 + \frac{1}{1-x} \right)$ , lisez  $\mathcal{L}^2 \left( 1 + \frac{x}{1-x} \right)$ .

— — — 2, — — —  $\frac{x}{x-1}$ , lisez  $\frac{x}{1-x}$ .

— 129, — 4, — — —  $\frac{q^5}{1-q^{10}} +$ , lisez  $\frac{q^5}{1-q^{10}} -$ .

---



## TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
Allocution prononcée, dans la Salle académique de l'Université de Liège, le 7 décembre 1884 . . . . .	1
XCIV. — Problème proposé par M. Steiner . . . . .	1
XCv. — Question proposée au Concours général de 1844 . . . . .	5
XCvI. — Lignes de courbure d'une surface gauche . . . . .	6
XCvII. — Lignes asymptotiques d'une surface gauche . . . . .	12
XCvIII. — Détermination d'une constante . . . . .	14
XCIX. — Sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde . . . . .	20
C. — Problème de Géométrie . . . . .	21
CI. — Sur une équation différentielle. . . . .	28
CII. — Une application de la théorie des solutions singulières . . . . .	27
CIII. — Enveloppe d'un cylindre de révolution . . . . .	30
CIV. — Quelques identités . . . . .	35
CV. — Développements de l'intégrale elliptique de première espèce . . . . .	42
CVI. — Sur la méthode des isopérimètres. . . . .	52
CVII. — Sur les Nombres de Segner. . . . .	54
CVIII. — Problème de Géométrie analytique . . . . .	68
CIX. — Une relation combinatoire . . . . .	69
CX. — Sur les ovales de Descartes. . . . .	71
CXI. — Intégration d'une équation. . . . .	75
CXII. — Une application numérique. . . . .	79
CXIII. — Problème de Glenie . . . . .	80
CXIV. — Problème d'Arithmétique . . . . .	84
CXV. — Comparaison entre deux séries . . . . .	89
CXVI. — Problème sur l'ellipse . . . . .	92
CXVII. — Sur la courbe de Watt . . . . .	96
CXVIII. — Développées, et surfaces développables . . . . .	100
CXIX. — Discussion d'une surface . . . . .	105
CXX. — Sur les lignes de courbure . . . . .	108
CXXI. — Maximum et minimum de la fonction $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ . . . . .	115

	Pages.
CXXII. — Une propriété des surfaces conchoïdales . . . . .	116
CXXIII. — Relation entre deux épicycloïdes . . . . .	117
CXXIV. — Séries et intégrales elliptiques. . . . .	119
CXXV. — Application de la Géométrie à l'Algèbre et à l'Arith- métique . . . . .	152
CXXVI. — Sur la décomposition d'un cube en quatre cubes. . .	157
CXXVII. — Sur un déterminant . . . . .	141
CXXVIII. — Remarque sur une identité connue . . . . .	142
CXXIX. — Sur les lignes de courbure planes . . . . .	145
CXXX. — Sur l'Analyse indéterminée du second degré . . . .	145
CXXXI. — Sur un produit indéfini. . . . .	151
CXXXII. — Deux leçons de Probabilités . . . . .	153
CXXXIII. — Sur les normales à certaines courbes . . . . .	158
CXXXIV. — Une intégrale d'équation . . . . .	164
CXXXV. — Sur les surfaces orthogonales . . . . .	165
CXXXVI. — Sur une intégrale pseudo-elliptique . . . . .	176
CXXXVII. — Sur les Élassoïdes . . . . .	180
CXXXVIII. — Quelques intégrales définies . . . . .	188
CXXXIX. — Une intégration . . . . .	198
CXL. — Sur une formule de Jacobi. . . . .	199
CXLI. — Une intégrale triple . . . . .	201
CXLII. — Une formule du binôme. . . . .	202
CXLIII. — Sur une série de Legendre. . . . .	205
CXLIV. — Relations entre des sommes de carrés . . . . .	209
CXLV. — Sur les développantes d'une hypocycloïde. . . . .	211
CXLVI. — Sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde et de la surface des ondes . . . . .	215
CXLVII. — Sur les surfaces enveloppes . . . . .	224
CXLVIII. — Problème de quadrature . . . . .	225
CXLIX. — Sur les podaires . . . . .	227
CL. — Un théorème d'Ampère. . . . .	252
CLI. — Sur les dérivées d'une fraction . . . . .	253
CLII. — Une construction de l'hyperbole . . . . .	257
CLIII. — Développement d'un radical . . . . .	257
CLIV. — Sur une équation algébrique . . . . .	242
CLV. — Une application de la formule du binôme . . . . .	244
CLVI. — Sur la fonction $E(x)$ . . . . .	245
CLVII. — Aire d'une figure sphérique . . . . .	246
CLVIII. — Quelques théorèmes sur les coniques . . . . .	247
CLIX. — Sur la somme des diviseurs de $n$ . . . . .	252
CLX. — Sur quelques produits indéfinis . . . . .	254

CLXI.	— Sur une formule d'approximation . . . . .	258
CLXII.	— Un lieu géométrique . . . . .	259
CLXIII.	— Théorèmes d'Arithmétique . . . . .	262
CLXIV.	— Sur une série . . . . .	264
CLXV.	— Une décomposition en facteurs . . . . .	266
CLXVI.	— Sur une classe d'équations différentielles. . . . .	268
CLXVII.	— Conchoïdes et podaires . . . . .	270
CLXVIII.	— Une propriété des nombres triangulaires. . . . .	271
CLXIX.	— Sur l'homologie. . . . .	272
CLXX.	— Polaires réciproques . . . . .	278
CLXXI.	— Question d'Analyse indéterminée . . . . .	279
CLXXII.	— Sur une classe d'équations différentielles. . . . .	282
CLXXIII.	— Théorèmes d'Arithmétique . . . . .	289
CLXXIV.	— Sur un théorème de M. Pépin . . . . .	291
CLXXV.	— Sur deux formules d'approximation . . . . .	292
CLXXVI.	— Une surface d'intrados . . . . .	295
CLXXVII.	— Quelques séries numériques. . . . .	295
CLXXVIII.	— Une équation aux différences . . . . .	296
CLXXIX.	— Application de la Perspective aux séries. . . . .	297
CLXXX.	— Sur les nombres combinatoires . . . . .	500
CLXXXI.	— Carrés magiques . . . . .	505
CLXXXII.	— Intégrales définies équivalentes. . . . .	504
CLXXXIII.	— Sur les fonctions elliptiques de première espèce . . . . .	506
CLXXXIV.	— Sur l'Analyse indéterminée . . . . .	508
CLXXXV.	— Une identité. . . . .	508
CLXXXVI.	— Généralisation d'un théorème de M. Laisant. . . . .	510
CLXXXVII.	— Sur l'hexagone inscrit. . . . .	512
CLXXXVIII.	— Sur la partition des nombres . . . . .	514
CLXXXIX.	— Sur la série de Lamé . . . . .	519
CXC.	— Sur la formule du binôme . . . . .	522
CXCI.	— Problème de probabilités. . . . .	526
CXCII.	— Sur une formule d'Abel . . . . .	527
CXCIII.	— Sur le théorème de Fermat . . . . .	529
CXCIV.	— Propriétés de résidus . . . . .	534
CXCV.	— Comparaison de deux séries. . . . .	537
CXCVI.	— Sur la théorie des ombilics . . . . .	538
CXCVII.	— Généralisation de propriétés de la cycloïde . . . . .	540
CXCVIII.	— Lignes géodésiques d'un paraboloidé . . . . .	541
CXCIX.	— Problème d'Algèbre et d'Arithmétique . . . . .	542
CC.	— Sur un théorème de M. Delbœuf . . . . .	544
CCI.	— Sur la droite de Simson . . . . .	545

	Pages.
CCH. — Sur le quadrilatère inscrit . . . . .	349
CCIII. — Sur un théorème de Gauss . . . . .	352
CCIV. — Sur une suite de fractions . . . . .	354
CCV. — Trigonométrie sphérique . . . . .	358
CCVI. — Une application des déterminants. . . . .	356
CCVII. — Sur un article de M. Perott. . . . .	360
CCVIII. — Représentation nouvelle de la surface des ondes . . . . .	362
CCIX. — Sur les lignes de courbure . . . . .	364
CCX. — Sommutation d'une série . . . . .	367
CCXI. — Une transformation de la formule du binôme . . . . .	369
CCXII. — Sur quelques formules de Poisson . . . . .	375
CCXIII. — Équations différentielles. . . . .	376
CCXIV. — Théorème d'Arithmétique . . . . .	386
CCXV. — Sur le dernier théorème de Fermat . . . . .	387
ERRATA . . . . .	399















3 2044 106 293 483

