SOC
7130

SOC
7130

HARVARD UNIVERSITY.

LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

167

Exchange.

October 9, 1908.

OCT 9 1908
167

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere, nec timide.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME I.

DÉPOTS :

LONDRES,	PARIS,	BERLIN,
chez Williams et Norgate,	chez Hermann, libraire,	chez Friedlander u. Sohn,
Henrietta Str., 14.	rue de la Sorbonne, 8.	Carlstrasse, 11.

BRUXELLES,

HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,
DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

Rue de Louvain, 112.

JUIN 1899.

OCT 3 1908

MEMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere, nec timide.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME I.

DÉPOTS :

LONDRES, chez WILLIAMS et NORGATE, Henrietta Str., 14.

PARIS, chez HERMANN, libraire, rue de la Sorbonne, 8.

BERLIN, chez FRIEDLANDER u. Sohn, Carlstrasse, 11.

BRUXELLES,

HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

Rue de Louvain, 112.

JUIN 1899.

TABLE

DES

MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME I.

1. Le Dr Ernest Candèze; par Julien Fraipont.

2. Le problème des Brachistochrones. — Essai historique; par Camille Compère.

3. Sur une transformation géométrique (transformation pseudo-newtonienne); par M.-H. Brocard.

4. Sur un développement de l'intégrale elliptique de première espèce en série trigonométrique; par J. Beaupain.

5. Contribution à l'étude anatomique des organes végétatifs et floraux chez *Carludovica plicata* Kl.; par Henri Micheels.

6. Les problèmes de géométrie résolus par le compas, sans la règle ; par G. Cesàro.

LISTE

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

(JUIN 1899)

Bureau.

Président,	M. J. Neuberg.
Vice-Président,	» Selys Longchamps (baron E. de).
Secrétaire général,	» C. le Paige.
Trésorier-Bibliothécaire,	» J. Deruyts.

Membres effectifs.

1842 Selys Longchamps (baron E. de), membre de l'Académie royale de Belgique.

1855 Dewalque, G., professeur à l'université de Liége, membre de l'Académie royale de Belgique.

1860 Gillon, A., professeur à l'université.

1870 Masius, V., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

Vanlair, C., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

1871 Van Beneden, Éd., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1874 Firket, Ad., chargé de cours à l'université, ingénieur en chef au corps des mines.

1878 le Paige, C., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1879 Jorissen, A., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

1880 Neuberg, J., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1881 Fraipont, J., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

1884 Deruyts, J., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

Ronkar, Ém., professeur à l'université.

Ubaghs, P., répétiteur à l'université.

1885 Gravis, A., professeur à l'université.

1887 Lohest, M., professeur à l'université.

Deruyts, Fr., chargé de cours à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

De Heen, P., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1890 Beaupain, J., docteur en sciences, ingénieur au corps des mines.

1897 Cesàro, G., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

1898 Hubert, H., chargé de cours à l'université, ingénieur en chef au corps des mines.

Micheels, H., docteur en sciences.

Membres correspondants.

I. — Sciences physiques et mathématiques.

1853 Bède, Em., industriel, à Bruxelles.
1853 Liais, ancien directeur de l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro, maire de Cherbourg.
1863 Gossage, membre de la Société chimique, à Londres.
1865 Hugueny, professeur, à Strasbourg.
De Colnet d'Huart, conseiller d'État, à Luxembourg.
Dausse, ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Paris.
Folie, F., directeur honoraire de l'Observatoire royal de Bruxelles.
1866 Ledent, professeur au collège communal de Verviers.
1867 Barnard, président de l'École des mines, à New-York.
1869 Marié Davy, directeur de l'Observatoire météorologique de Montsouris.
Schlömilch, professeur d'analyse à l'École polytechnique de Dresde.
1870 Bertrand, J. L. F., membre de l'Institut, à Paris.
1871 Henry, L., professeur à l'université de Louvain.
Durège, professeur à l'université de Prague.
Masters, Maxwell T., membre de la Société royale, à Londres.
Le Boulengé, P., général.
1872 Vallès, inspecteur honoraire des ponts et chaussées, à Paris.
Garibaldi, professeur à l'université de Gênes.
Kanitz, Dr Aug., professeur à l'université de Klausenbourg.
1875 Hermite, Ch., membre de l'Institut, à Paris.
Darboux, G., membre de l'Institut, à Paris.
1875 Mansion, P., professeur à l'université de Gand.

1875 Michaelis, O., captain, chief of Ordnance, à Saint-Paul, Minn., département de Dakota (États-Unis).

Dewalque, Fr., professeur à l'université de Louvain.

1876 Balfour, Th. G. H., membre de la Société royale, à Londres.

1877 Tissandier, Gaston, rédacteur du journal *la Nature*, à Paris.

1879 Czuber, professeur, à Prague.

1880 Cremona, Luigi, directeur de l'École d'application, à Rome.

Studnička, F., professeur de mathématiques à l'université de Prague.

Van der Mensbrugghe, Gustave, professeur à l'université de Gand.

De Tilly, J., lieutenant-général, membre de l'Académie royale de Belgique, à Bruxelles.

1881 Sébert, colonel d'artillerie de la marine française, à Paris.

Angot, A., attaché au bureau central météorologique de France, à Paris.

Wiedemann, G., professeur à l'université de Leipzig.

Kohlrausch, directeur de l'Institut physique de Wurzbourg.

Quincke, professeur de physique, à Heidelberg.

Guiscardi, professeur à l'université de Naples.

Laisant, C.-A., député, à Paris.

Beltrami, professeur à l'université de Pavie.

1882 Mascart, membre de l'Institut, à Paris.

1883 Breithof, N., professeur à l'université de Louvain.

Mittag-Leffler, G., professeur à l'université de Stockholm.

Gomès Teixeira, F., ancien professeur à l'université de Coïmbre.

1885 Schur, Fréd., professeur à l'université de Dorpat.

Picquet, répétiteur à l'École polytechnique, à Paris.

de Longchamps (Gohierre), professeur au lycée Charlemagne, à Paris.

Vaněček, J. S., professeur, à Jičin (Bohème).

1885 Cesàro, E., professeur à l'université, à Naples.
1887 Walras, L., professeur à l'Académie de Lausanne.
Guccia, docteur en sciences, à Palerme.
Wullner, professeur à l'École polytechnique d'Aix-la-Chapelle.
Paalzow, directeur de l'École technique de Berlin.
1888 Ocagne (Maurice d'), professeur à l'École des ponts et chaussées, à Paris.
1898 Gordan, P., professeur à l'université d'Erlangen.
Korteweg, D.-J., professeur à l'université d'Amsterdam.
Lampe, Em., directeur du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, professeur à Berlin.
Mathias, Em., professeur à l'université de Toulouse.
Brocard, H., ancien officier du génie, à Bar-le-Duc.

II. — Sciences naturelles.

1853 Waterhouse, Ch., conservateur au Musée britannique, à Londres.
1854 Drouët, H., naturaliste, à Dijon.
Lucas, H., aide-naturaliste au Muséum d'histoire naturelle, à Paris.
Blanchard, E., membre de l'Institut, à Paris.
1855 Geinitz, H. B., professeur à l'École polytechnique, à Dresde.
1864 Thomson, J., membre de la Société entomologique de France, à Paris.
Brüner de Watteville, directeur général des télégraphes, à Vienne.
1865 Le Jolis, archiviste perpétuel de la Société des sciences naturelles de Cherbourg.
Hamilton, membre de la Société géologique de Londres.
De Borre, A., ancien conservateur au Musée royal d'histoire naturelle de Bruxelles, à Genève.
1866 Rodriguez, directeur du Musée zoologique de Guatémala.

1867 Gosselet, J., professeur à la faculté des sciences de Lille.
Radoszkoffski, président de la Société entomologique de Saint-Pétersbourg.
1869 Simon, E., naturaliste, à Paris.
1870 Trautschold, professeur, à Carlsruhe.
Malaise, C., professeur émérite à l'Institut agronomique de Gembloux.
1871 Thomson, James, vice-président de la Société géologique de Glasgow.
Capellini (commandeur G.), professeur de géologie à l'université de Bologne.
1873 Clos, directeur du Jardin des Plantes, à Toulouse.
Hall, James, paléontologiste de l'État, à Albany.
Whitney, J. D., géologue de l'État, directeur du *Geological Survey* de Californie.
Glaziou, botaniste, directeur des Jardins impériaux à Rio de Janeiro.
De Carvalho (Pedro Alphonso), docteur en médecine, directeur de l'Hôpital de la Miséricorde, à Rio de Janeiro.
Moreno, F. P., paléontologiste, à Buenos-Ayres.
Areschoug, professeur adjoint à l'université de Lund.
1874 Gegenbauer, professeur à l'université de Heidelberg.
Häckel, professeur à l'université de Iéna.
Waldeyer, professeur à l'université de Berlin.
1875 Eimer, professeur à l'université de Tubingue.
De la Valette Saint-George, professeur à l'université de Bonn.
Ray-Lankester, professeur à l'université de Londres.
Packard, professeur à l'université de Salem.
Flemming, W., professeur à l'université de Kiel.
Plateau, F., professeur à l'université de Gand.
1876 Balfour, I. B., professeur de botanique à l'université, à Oxford.
1877 Mac Lachlan, Rob., membre de la Société entomologique, à Londres.

1878 HERTWIG, R., professeur à l'université de Munich.
STRASBURGER, professeur à l'université de Bonn.
BRONGNIART, Charles, à Paris.
1879 WETTERBY, professeur à l'université de Cincinnati.
BOLIVAR, I., professeur, à Madrid.
RITSEMA, conservateur au Musée royal d'histoire naturelle, à Leyde.
RENARD, Alphonse, professeur à l'université de Gand.
1881 KEY, AXEL, professeur à l'École de médecine de Stockholm.
RETZIUS, G., professeur à l'École de médecine de Stockholm.
TARAMELLI, professeur à l'université de Pavie.
GESTRO, Dr R., conservateur au Musée d'histoire naturelle de Gènes.
SALVADORI (comte Th.), professeur à l'université de Turin.
1883 HULL, Edward, directeur du *Geological Survey* d'Irlande.
SANDBERGER, Fridolin, professeur à l'université de Wurzbourg.
1884 TRINCHESE, professeur à l'université de Naples.
1898 CRÉPIN, Fr., membre de l'Académie royale de Belgique, à Bruxelles.
MILNE EDWARDS, Alph., directeur du Museum d'histoire naturelle, à Paris.
AGASSIZ, Alexandre, a Cambridge (Mass.).
BERTRAND, C.-E., professeur de botanique à la Faculté des sciences de Lille.
BLANCHARD, Raphaël, assistant au Museum d'histoire naturelle, à Paris.

LISTE

DES

SOCIÉTÉS SAVANTES, REVUES, ETC.,

AVEC LESQUELLES

LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LIÉGE

échange ses publications.

BELGIQUE.

Bruxelles. — *Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Observatoire royal.
Société entomologique de Belgique.
Société malacologique de Belgique.
Société royale belge de géographie.
Société belge de microscopie.
Musée royal d'histoire naturelle.

Liége. — *Société géologique.*

Mons. — *Société des sciences, des lettres et des beaux-arts du Hainaut.*

Gand. — *Mathesis*, directeurs : P. Mansion et J. Neuberg.

ALLEMAGNE.

Berlin. — *Königliche Akademie der Wissenschaften.*
Deutsche geologische Gesellschaft.
Entomologischer Verein.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, directeur : M. Lampe (Kurfürstenstr., 139).

Bonn. — *Naturhistorischer Verein der Preussischen Rheinlande und Westphalens.*

Breslau. — *Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur.*

Colmar. — *Société d'histoire naturelle.*

Erlangen. — *Physikalisch-medicinische Societät.*

Francfort. — *Senckenbergische naturwissenschaftliche Gesellschaft.*

Fribourg. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Giessen. — *Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*

Görlitz. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften.

Göttingue. — *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften und Georg-August-Universität.*

Halle. — *Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen.*
Naturforschende Gesellschaft.
Kaiserliche Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher.

Kiel. — *Naturwissenschaftlicher Verein.*

Königsberg. — *Königliche physikalisch-ökonomische Gesellschaft.*

Landshut. — *Botanischer Verein.*

Leipzig. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Metz. — *Académie des lettres, sciences, arts et agriculture.*

Munich. — *Königliche bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Königliche Sternwarte.

Munster. — *Westfälischer Provincial-Verein für Wissenschaften und Kunst.*

Offenbach. — *Offenbacher Verein für Naturkunde.*

Stettin. — *Entomologischer Verein.*

Stuttgart. — *Verein für vaterländische Naturkunde in Würtemberg.*

Wiesbaden. — *Nassauischer Verein für Naturkunde.*

Wurzbourg. — *Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg.*

Zwickau. — *Verein für Naturkunde.*

AUTRICHE-HONGRIE

Agram. — *Académie Sudo-Slave des sciences.*

Cracovie. — *Académie des sciences.*

Hermannstadt. — *Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften.*

Innspruck. — *Naturwissenschaftlich-medicinischer Verein.*

Prague. — *Königlich böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Kaiserlich-Königliche Sternwarte.
Ceske Akademie Cisare Frantiska Josepha.

Trieste. — *Società adriatica di Scienzi naturali.*

Vienne. — *Kaiserliche Akademie der Wissenschaften.*
Kaiserlich-Königliche zoologisch-botanische Gesellschaft.
Kaiserlich-Königliche geologische Reichsanstalt.
Monatshefte für Mathematik und Physik, rédacteurs : MM. Escherich et Gegenbauer, professeurs à l'université.

ESPAGNE.

Madrid. — *Real Academia de Ciencias.*

FRANCE.

Agen. — *Société d'agriculture, sciences et arts.*

Béziers. — *Société d'étude des sciences naturelles.*

Bordeaux. — *Académie des sciences, belles-lettres et arts.*
Société linnéenne.
Société des sciences physiques et naturelles.

Caen. — *Société linnéenne de Normandie.*

Cherbourg. — *Société des sciences naturelles.*

Dijon. — *Académie des sciences.*

Lille. — *Société des sciences, de l'agriculture et des arts.*

Lyon. — *Académie des sciences.*
Société d'agriculture.
Société linnéenne.
Université.

Marseille. — *Faculté des Sciences.*

Montpellier. — *Académie des sciences et lettres.*

Nancy. — *Société des sciences (ancienne Société des sciences naturelles de Strasbourg).*

Nantes. — *Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France.*

Paris. — *Société Philomatique.*
Muséum d'histoire naturelle.
Société mathématique de France.

Rouen. — *Société des amis des sciences naturelles.*
Académie des sciences.

Toulouse. — *Académie des sciences.*
Societé des sciences physiques et naturelles.
Faculté des Sciences.

Troyes. — *Société académique de l'Aube.*

GRANDE-BRETAGNE ET IRLANDE.

Dublin. — *Royal Irish Academy.*
Royal Society.

Édimbourg. — *Geological Society.*
Mathematical Society.

Glasgow. — *Geological Society.*
Natural history Society.
Philosophical Society.

Londres. — *Geological Society.*
Linnean Society.
Royal Society.

Manchester. — *Litterary and philosophical Society.*

ITALIE.

Bologne. — *Accademia delle Scienze.*

Catane. — *Accademia gioenia di scienze naturali.*

Florence. — *Institut supérieur.*

Gênes. — *Osservatorio della R. Universita.*

Modène. — *Societa dei naturalisti.*

Naples. — *Societa Reale.*

Palerme. — *Societa di scienze naturali e economiche.*
Circolo matematico.

Pise. — *Societa di scienze naturali.*
Nuovo Cimento, rédacteurs : MM. Felici, Batelli et Volterra.

Rome. — *Reale Accademia dei Lincei.*
Accademia pontificia de' Nuovi Lincei.
R. Comitato geologico d'Italia.

Turin. — *Reale Academia delle Scienze.*

LUXEMBOURG.

Luxembourg. — *Institut royal grand-ducal, section des sciences naturelles et mathématiques.*
Société botanique du grand-duché de Luxembourg.

NÉERLANDE.

Amsterdam. — *Koninklijke Academie van wetenschappen.*
Société mathématique.

Delft. — *École polytechnique.*

Harlem. — *Société hollandaise des sciences.*
Musée Teyler.

Rotterdam. — *Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke wijsbegeerte.*

PORTUGAL.

Coïmbre. — *Journal des sciences mathématiques et astronomiques*, rédacteur : M. Gomès Teixeira.

Lisbonne. — *Académie des sciences.*

RUSSIE.

Helsingfors. — *Société des sciences de Finlande.*

Kazan. — *Société physico-mathématique.*

Kharkoff. — *Société mathématique.*

Juriew. — *Université.*

Moscou. — *Société impériale des naturalistes.*

Saint-Pétersbourg. — *Académie impériale des sciences*
Archives des sciences biologiques.
Société d'archéologie et de numismatique.
Société entomologique.

SUÈDE ET NORVÈGE.

Bergen. — *Museum.*

Christiania. — *Kongelige Frederiks Universitet.*

Göteborg. — *Kongl. Vetenskaps och Vitterhetssamhälle.*

Stavanger. — *Museum.*

Stockholm. — *Académie royale des sciences.*
Nordist medicinskt Arkiv, directeur : Dr Axel Key.
Entomologiska föreningen, 94, Drottninggatan.
Acta mathematica, rédacteur : M. Mittag-Leffler

Throndbjem. — *K. Norske Videnskabers Selskabs.*

DANEMARK.

Copenhague. — *Tidskrift for Mathematik :* Drs Juel et Foldberg (Romersgade, 9).
Académie royale des sciences.

SUISSE.

Berne. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Société helvétique des sciences naturelles.

Neuchâtel. — *Societé des sciences naturelles.*

Schaffhouse. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Zurich. — *Naturforschende Gesellschaft.*

AMÉRIQUE.

ETATS-UNIS.

Austin. — *Texas Academy of sciences.*

Baltimore. — *American Journal of mathematics. (Johns Hopkins University.)*

Boston. — *American Academy of arts and sciences.*
Society of natural History.

Madison. — *Wisconsin Academy of sciences, letters and arts.*

New-Haven. — *Connecticut Academy of arts and sciences.*

New-York. — *Academy of sciences.*
Museum of natural history.
American Mathematical Society.

Philadelphie. — *Academy of natural sciences.*
American philosophical Society.
Wagner Free Institute of sciences.

Portland. — *Natural History Society.*

Rochester. — *Academy of sciences.*

Saint-Louis, Mo. — *Botanical Garden.*

Salem. — *Essex Institute.*
American Association for advancement of sciences.

San-Francisco. — *Californian Academy of sciences.*

Washington. — *Smithsonian Institution.*

CANADA.

Ottawa. — *Geological Survey of Canada.*
Commission de géologie et d'histoire naturelle du Canada.

Toronto. — *Canadian Institute.*

CHILI.

Santiago. — *Société scientifique du Chili.*

MEXIQUE.

Mexico. — *Société Antonio Alzate.*
Observatoire météorologique central.

Tacubaya. — *Observatoire national.*

RÉPUBLIQUE ARGENTINE.

Buenos-Ayres. — *Universidad.*

ASIE.

—

INDES ANGLAISES.

Calcutta. — *Asiatic Society of Bengal.*

INDES HOLLANDAISES.

Batavia. — *Koninklijke natuurkundige vereeniging in Nederlandsch Indië.*

SIBÉRIE.

Irkutsk. — *Ostsibirische Abtheilung der K. Russischen geographischen Gesellschaft.*

AUSTRALIE.

Adelaïde. — *Australian Association for advancement of science.*
Royal Society of South Australia.

Hobart-Town. — *Tasmanian Society of natural sciences.*

Melbourne. — *Observatoire.*

Sydney. — *Linnean Society.*
Royal Society of New South Wales.

LE

Dr ERNEST CANDÈZE

NÉ A LIÉGE LE 22 FÉVRIER 1827. DÉCÉDÉ A GLAIN LE 30 JUIN 1898

Par Julien **FRAIPONT**.

LE

Dr Ernest CANDÈZE

né à Liége le 22 février 1827, décédé à Glain le 30 juin 1898

Ernest-Charles-Auguste Candèze est né à Liége le 22 février 1827. Son père était Français, Auguste-Athanase Candèze, né à Versailles en 1789, et mort à Liége en 1836. Sa mère, Marie-Isabelle Antony, née en 1792 et morte en 1859, était liégeoise.

A l'âge de 12 ans, il fut mis en pension au collège Saint-Servais à Liége pour y faire ses humanités; il y demeura jusqu'en 1842.

Déjà alors s'était dessiné son goût pour l'entomologie. Il chassait les insectes avec l'un de ses maîtres, le P. Dufau, pendant les promenades et les excursions que faisaient les élèves, une ou deux fois par semaine, aux environs de Liége. Le souvenir de ces premières chasses de son enfance lui était resté très vif et il aimait à le rappeler.

En 1845, Ernest Candèze entrait à l'Université de Liége pour y entreprendre les études de médecine, qu'il devait poursuivre brillamment et qu'il terminait en 1852.

Il put se consacrer corps et âme aux sciences naturelles pendant ses premières années universitaires. Il eut l'illustre entomologiste Lacordaire comme professeur de zoologie; Charles Morren lui apprit la botanique; André Dumont l'initia à la minéralogie et à la géologie; Laurent de Koninck lui enseigna la chimie. Dès le début de ses études supérieures, Candèze se lia d'une vive amitié avec Félicien Chapuis, qui s'adonnait déjà avec une grande ardeur à l'étude des insectes, et que la science entomologique a trop tôt perdu. Sous la direction de Lacordaire, et encouragés par celui ci, nos deux jeunes naturalistes devinrent bientôt fort experts à chasser, à observer et à collectionner les insectes. Malgré les dures et absorbantes études de médecine, ils continuèrent à s'occuper d'entomologie et y consacrèrent tous leurs loisirs pendant leur séjour à l'Université.

A peine avaient-ils conquis leur diplôme de docteur, qu'ils publiaient en 1853 leur *Catalogue des larves de Coléoptères*.

La même année, les deux collaborateurs étaient reçus membres de la Société royale des sciences.

Deux ans plus tard, le 17 septembre 1855, Ernest Candèze épousa M^lle^ Thérèse-Guillemine-Élise Abry, la fille du directeur de la maison de santé de Glain. De ce mariage sont nés cinq enfants : trois filles aujourd'hui mariées et deux fils, mariés également, dont l'un, Léon, est aussi entomologiste et s'occupe spécialement des *Bombycides* En 1872, le D^r^ Candèze eut le malheur de perdre prématurément sa femme, pour laquelle il avait une véritable adoration et qui, d'ailleurs, était le modèle de toutes les vertus.

Il fut longtemps attaché à l'important établissement de M. Abry et, quoiqu'il ne professât pas la médecine d'une façon très active, il acquit une grande expérience et des connaissances très sûres des maladies mentales; il devint même une autorité souvent consultée en cette matière.

L'observation de la nature avait cependant pour lui bien plus d'attirance que celle des névroses de l'homme. A l'exemple de

son maître Lacordaire et comme son ami Chapuis, il se livra avec passion, pendant toute sa vie, à l'étude des Coléoptères.

Il avait déjà recueilli et classé une fort belle collection de *Lamellicornes* lorsque Lacordaire le pressa d'entreprendre la revision et le classement de la famille des *Élatérides*, alors fort mal connue. Le Docteur finit par accepter et, pendant dix ans, il travailla à sa *Monographie des Élatérides* qui a été son œuvre scientifique capitale. Il publia ce grand travail de 1856 à 1865, dans quatre tomes de notre Société. Il y a décrit plus de deux mille espèces, dont la moitié étaient nouvelles.

Cet ouvrage fut très bien accueilli dans le monde des entomologistes, et aujourd'hui encore il reste hautement apprécié des spécialistes. L'auteur y fait montre d'un véritable talent d'observation, d'une profonde connaissance de la matière et d'une méthode impeccable.

Le professeur Lameere a bien fait ressortir, dans la belle notice bibliographique (1) qu'il a consacrée au Dr Candèze, la valeur de cette œuvre :

« Les descriptions sont faites avec tout le soin désirable; l'ouvrage est empreint d'une clarté, d'une précision, voire d'une élégance de style peu ordinaires dans les travaux de ce genre.

» Pour la classification, le Dr Candèze ne touche pas à celle de Lacordaire; l'auteur du *Genera* avait déclaré s'être heurté à des difficultés excessives et peut-être insurmontables; il était peu satisfait du résultat auquel il était arrivé. Le Dr Candèze, à plusieurs reprises, s'est vu obligé de déclarer à son tour qu'il n'a pas été plus heureux que son maître; nous voyons, en effet, que dans la suite de ses travaux sur les *Élatérides*, il s'est borné à supprimer une tribu, celle des *Mélanactides*, formée d'éléments hétérogènes, et à élever les divisions des *Élatérides* vrais au même rang que les autres catégories primaires de la famille. Il

(1) Auguste Lameere, *Notice sur le Dr Candèze*, pp. 3 et 4. (Annales de la Société entomologique de Belgique, t. XLVI.) Bruxelles, 1898.

n'a pas été un réformateur, mais il a été le continuateur véritable et presque unique de Lacordaire : son œuvre, exceptionnellement belle et grande, démontre une fois de plus cette vérité proclamée par Dejean, que l'entomologie est avant tout une science de tradition.

. . . . . .

» La *Monographie des Élatérides* est une œuvre qui n'a guère sa pareille dans l'histoire entomologique : il n'est peut-être aucune monographie qui présente une telle étendue et bien peu nombreuses sont les familles qui ont été traitées dans leur ensemble. »

Dès que cet ouvrage fondamental eut paru, son auteur devint d'emblée le spécialiste attitré des *Élatérides*. Pendant quarante-cinq ans, il a été assailli d'envois de ces insectes à déterminer et à décrire, provenant de tous les points du monde, tant de la part des voyageurs et des marchands que des savants et des grands établissements publics. Comme son érudition n'avait d'égale que sa complaisance, ces envois étaient toujours les bienvenus et le Dr Candèze déterminait, déterminait toujours.

Quelque temps après la publication du dernier volume de sa *Monographie*, il en entreprit la revision, en présence de l'affluence des formes nouvelles qui lui avaient été soumises. Mais il n'avait pas fait de collection personnelle où auraient dû figurer les types de sa *Monographie*, et lui, le spécialiste, dut de nouveau avoir recours aux collections des autres. Il avait pu, une première fois, à grand'peine, obtenir que les principales d'entre elles lui fussent confiées. Il n'y réussit pas une seconde fois, et, après la publication du premier fascicule de sa *Revision*, en 1874, dans le tome IV (2e série) de nos *Mémoires*, il dut renoncer à cette entreprise.

Dès cette époque, le Dr Candèze commença à collectionner ces insectes. En vingt cinq ans, il parvint à réunir la plus belle, la plus riche et la mieux classée des collections d'Élatérides, surpassant celle du marquis de la Ferté-Senectère, aujourd'hui au *British Museum*, qui lui avait tant servi jadis, et celles des

plus importants musées publics. La famille comprend actuellement près de quatre mille espèces ; il arriva à en posséder trois mille quatre cents représentées par plus de dix mille individus.

Cette collection unique au monde vient d'être acquise par le Musée royal d'histoire naturelle de Belgique, à Bruxelles. Le Gouvernement belge a fait acte de patriotisme et a bien mérité de la science en s'assurant la possession de celle-ci. Nous devons aussi rendre grâce aux enfants du Dr Candèze, qui ont respecté pieusement le désir de leur père de voir sa collection rester en Belgique, alors qu'ils auraient pu tirer un grand profit de la vente publique de celle-ci. Les collectionneurs se seraient arraché ces types à prix d'or ; mais c'en était fait alors de cette collection qui eût été disséminée aux quatre vents !

De 1865 à 1892, le Dr Candèze a publié quarante-huit notices sur les Élatérides, décrivant à lui seul deux mille cinq cents espèces nouvelles de ces insectes, c'est-à-dire plus de la moitié de celles qui sont connues.

Il possédait aussi une fort belle collection de Lamellicornes, qu'il avait commencé à rassembler longtemps avant qu'il entreprît celle des Élatérides. Ce fut de tout temps le groupe de Coléoptères qu'il affectionna le plus. Il caressa longtemps aussi le projet d'en faire la monographie ; mais la venue incessante d'Élatérides ne le lui permit pas. Il avait encore une importante collection de Longicornes représentée par des exemplaires de tous les genres.

A partir de 1893 jusqu'à la fin de sa vie, il se mit à chasser et à collectionner avec frénésie les Diptères de Belgique qu'il était arrivé à fort bien connaître. Il en a laissé une très riche collection de treize cents espèces, qui, avec celle des Lamellicornes et des Longicornes, appartient également au Musée royal d'histoire naturelle de Belgique.

Indépendamment de quelques notes sur les Lamellicornes, Candèze a, de plus, publié diverses notices sur l'entomologie générale, notamment sur les insectes utiles et nuisibles, et un

fort beau discours académique sur *Les moyens d'attaque et de défense chez les insectes*.

Il a encore retracé de sa plume féconde la vie de Lacordaire et de Félicien Chapuis, dans l'*Annuaire* de l'Académie.

Mais notre regretté collègue n'a pas seulement brillé parmi les premiers entomologistes de la dernière moitié du siècle; il s'est acquis également une véritable réputation littéraire par ses articles satiriques sur l'invasion du *Doryphora* en Belgique et surtout par ses romans scientifiques : *Les aventures d'un Grillon, La Gileppe ou les infortunes d'une population d'insectes* et *Périnette ou histoire surprenante de cinq moineaux*. Ces trois livres, de bonne vulgarisation scientifique, édités par Hetzel à Paris, d'abord dans le « Magasin d'éducation et de récréation », eurent deux éditions françaises, l'une de luxe avec de belles illustrations de notre artiste liégeois Camille Renard, et l'autre de format courant. Ce fut un véritable succès de librairie et les deux premiers ouvrages eurent les honneurs de la traduction en plusieurs langues.

Son esprit affiné et plein de verve, empreint d'une philosophie aimablement sceptique, son imagination pleine d'humour s'y donnent libre carrière, sous une plume alerte et très littéraire, et montrent, à chaque page, qu'il connaissait aussi bien les hommes que les insectes et les insectes aussi bien que les hommes.

Le Dr Candèze fut encore, pendant de nombreuses années, un des adeptes les plus actifs et les plus autorisés de la photographie, alors que cette science était encore dans l'enfance. Il inventa même un des premiers appareils de voyage vraiment pratique, le *Scénographe*, qui fut une réelle révélation et qui eut, en son temps, une grande vogue. Il fonda en 1874 l'Association belge de photographie avec MM. François Dewalque, professeur à l'Université de Louvain, Davreux, ingénieur à Bruxelles, De Vylder, professeur à l'Université de Gand, Laoureux, industriel à Liége et Rommelaere, professeur à l'Université de Bruxelles; c'est aujourd'hui l'une des plus nombreuses et des

plus puissantes sociétés du pays. Il a publié plusieurs notices intéressantes sur ce sujet, telle : *La photographie en chemin de fer et en ballon* et *La photographie en voyage*.

Entomologiste, médecin aliéniste, littérateur, photographe, Candèze trouvait encore des loisirs à consacrer à la musique. Quoiqu'il n'ait jamais su en faire lui-même, il aimait à en entendre tous les jours. Lorsque ses filles, mariées, ne purent plus lui donner ce délassement quotidien, il acquit un « pianista », instrument que l'on adapte au clavier d'un piano et qui reproduit automatiquement des airs. Mais bientôt le répertoire des morceaux que l'on trouve dans le commerce pour cet appareil, devint trop limité pour lui et il se mit à en fabriquer. Chaque fois qu'il avait entendu une œuvre transcrite pour piano, qui lui avait plu, il se la procurait et la copiait à l'emporte-pièce. Il s'est fait ainsi une véritable bibliothèque musicale composée de plus de quatre cents morceaux de piano de toutes les écoles et de tous les maîtres. L'acquisition des modèles à copier était souvent la cause de scènes piquantes. Il me souvient d'avoir assisté à l'une d'elles. J'avais accompagné le Docteur, au sortir d'une séance de l'Académie, chez un des grands éditeurs de musique de Bruxelles. On lui demande si le morceau qu'il désire doit être d'une exécution facile ou présenter plus ou moins de difficultés techniques. Et Candèze de répondre de l'air railleur et bon enfant qui lui était familier : « La difficulté m'est fort indifférente, mais le morceau ne doit pas présenter de notes écrites au delà ou en deçà de telle portée. » L'instrument, en effet, ne pouvait exécuter que des notes comprises dans les limites de cinq octaves, tandis que les pianos modernes en comptent sept. Au premier abord, le marchand ahuri ne savait s'il devait se fâcher ou rire en présence d'une telle réponse. Mais le Docteur insistait, choisissait et payait, ce qui remettait toujours les choses au point.

Candèze eut longtemps une vraie passion pour les voyages.

A diverses reprises, il parcourut avec ses enfants la France, l'Allemagne, la Suisse, l'Italie, l'Espagne, la Suède et la Norvège et même l'Algérie.

Il aima aussi, jusque dans ces derniers jours, à battre le pays, le filet à la main, tantôt pour chasser des Coléoptères, tantôt pour capturer des Diptères. Les hautes Fagnes de l'Ardenne, le Hockay, la Baraque Michel, la forêt d'Hertogenwald, ou bien encore les vastes solitudes de la Campine, l'attiraient plus particulièrement. Il avait comme compagnons habituels de ces longues excursions MM. Gérard et Hamal, deux entomologistes liégeois très distingués, auxquels se joignaient quelquefois le professeur Léon Fredericq et l'auteur de cette notice. Que de bons souvenirs nous ont laissé ces courses champêtres avec le Docteur ! Il était infatigable, et oubliait volontiers ses soixante-dix ans pour courir par monts et par vaux à la poursuite de ses chères bestioles. Puis, à l'heure du déjeuner sur l'herbe, on l'entourait pour écouter ses mille anecdotes sur les gens et sur les bêtes, qu'il disait si bien avec tant d'esprit et tant de verve.

Candèze avait le grade d'officier dans l'Ordre de Léopold depuis 1892.

Il était un des plus anciens membres de notre Société. Élu le 25 novembre 1853, il devint secrétaire adjoint de Lacordaire en 1860 et remplit ces fonctions jusqu'au 16 novembre 1870. A cette date, il fut nommé secrétaire général et le demeura jusqu'au 26 octobre 1885. Nous aurions voulu qu'il conservât ce poste jusqu'à son dernier jour, mais il résista à nos instances, disant, avec raison, qu'il avait été assez longtemps sur la brèche et qu'il appartenait à un plus jeune de prendre le gouvernail de notre barque et la charge peu enviable de la direction matérielle de notre institution. En 1897, il accepta d'être notre président.

Dès 1858, l'Académie royale de Belgique lui ouvrait ses portes pour l'élire membre titulaire de la Classe des sciences en 1861, et directeur en 1874.

Il était membre de la Société entomologique de Belgique depuis de nombreuses années, et en fut le président en 1873 et en 1874.

La Société entomologique de France l'avait élu membre honoraire en 1882. Il était également membre de la Société entomologique de Berlin et de Londres.

Depuis longtemps, il avait été appelé à faire partie du conseil de surveillance du Musée royal d'histoire naturelle de Belgique.

Enfin, dans ces dernières années, il avait groupé autour de lui tous ceux qui s'intéressent à l'entomologie à Liége, en fondant le « Cercle des entomologistes liégeois », dont il eut la présidence jusqu'à sa mort.

Le Dr Candèze fut un philosophe quelque peu sceptique, nous l'avons dit, possédant une profonde connaissance des hommes. Une longue observation de toutes les nuances d'aberrations de l'esprit qu'il avait rencontrées pendant sa direction de la maison de santé de Glain, l'avait rendu très indulgent pour tous les travers de ses semblables. Il disait souvent, avec bonhomie : « Nous sommes tous un peu fous; il y a tous les degrés entre ce que l'on appelle l'homme sain et le maniaque, le mélancolique

et le furieux. Tel qui court les rues mériterait bien plus d'être enfermé chez moi que tel de mes pensionnaires. »

Quoique peu démonstratif dans ses sentiments, il était très accueillant et d'une amitié très sûre. Son obligeance envers tous les entomologistes, grands et petits, émules ou débutants, était inépuisable, car il fut toujours étranger à tout sentiment de jalousie.

Dans les dernières années de sa vie, il quittait rarement son cottage de Glain où il vivait au milieu de ses insectes, de ses livres et de ses fleurs, ayant comme compagnons de jour et de nuit deux superbes chiens de Poméranie, qui adoraient leur maître et dont lui-même était devenu un peu l'esclave. L'un se tenait en vedette, pendant tout le jour, à l'une des fenêtres et annonçait les visiteurs, l'autre allait les prendre à la porte. Quand vous étiez reçu de la sorte, c'est que le maître était à la maison. On le trouvait alors ou bien assis à un petit bureau, occupé à déterminer ou à ranger ses chers coléoptères, tout en fredonnant, ou bien lisant étendu sur sa chaise longue. Mais quelle que fût son occupation, il accueillait toujours le visiteur de la même façon cordiale, avec un bon sourire sur les lèvres.

Quoique le plus pacifique des hommes, il suivait avec un véritable intérêt les péripéties des expéditions guerrières; plus d'une fois nous l'avons surpris pointant sur une carte les positions des armées belligérantes comme l'eût fait un officier d'état-major.

Candèze avait beaucoup lu et beaucoup retenu ; il était un causeur très fin, très spirituel et très attrayant. Il s'intéressait à tous les domaines de l'activité humaine; il parlait sans passion et sans parti pris, et des hommes, et des choses, avec un grand esprit de tolérance.

Lui, si obligeant envers tous ceux qui l'approchaient, il avait une véritable crainte, qu'il m'exprimait souvent, de gagner dans ses vieux jours une infirmité quelconque, qui ne lui eût plus permis de se suffire à lui-même, et d'avoir besoin des soins des autres, fût-ce même de ceux de ses enfants, qui avaient cependant pour lui toutes les tendresses.

Cette horreur de devenir à charge à qui que ce fût, il n'a pas eu à la subir. Souffrant depuis quelque temps d'une angine de poitrine, il paraissait avoir échappé momentanément à ce mal, lorsque brusquement, le 30 juin 1898, une apoplexie l'enleva à notre affection, dans toute la plénitude de ses facultés physiques et intellectuelles.

Le nom du Dr Ernest Candèze restera dans les annales de l'entomologie, grâce surtout à sa belle *Monographie des Élatérides*, et son souvenir demeurera vivant chez tous ceux qui l'ont approché, parce qu'il était bon.

LISTE DES PUBLICATIONS DU Dr CANDÈZE (1).

I. — Sur les métamorphoses des Coléoptères.

Catalogue des larves des Coléoptères connues jusqu'à ce jour, avec la description de plusieurs espèces nouvelles (en collaboration avec F. Chapuis). — Mém. Soc. des Sciences de Liége, VIII, 1853.

Histoire des métamorphoses de quelques Coléoptères exotiques. — Mém. Soc. des Sciences de Liége, XVI, 1861.

II. — Sur les Élatérides.

Monographie des Élatérides. — Mém. de la Soc. des Sciences de Liége, XII, XIV, XV, XVII, 1856-1865.

Revision de la Monographie des Élatérides, t. I. — Mém. Soc. des Sciences de Liége, 2e série, IV, 1874.

Élatérides nouveaux, 1er fascicule. — Mém. Acad Belg., XVII, 1865.

— 2e fascicule. — Ann. Soc. Ent. Belg , C. R., XXI, 1878,

— 3e fascicule. — Mém. Soc. des Sciences de Liége, 2e série, IX, 1880.

— 4e fascicule. — Ann. Soc. Ent. Belg., XXXIII, 1889

— 5e fascicule. — Mém. Soc. des Sciences de Liége, 2e série, XVIII, 1892.

— 6e fascicule. — Mém. Soc. des Sciences de Liége, 2e série, XIX, 1896.

Liste des Élatérides décrits postérieurement au Catalogue de Munich. — Ann Soc. Ent. Belg., C. R., XXIII, 1880.

Catalogue méthodique des Élatérides connus en 1890. — Liége, Vaillant-Carmanne, 1891.

***

Élatérides du Japon. — Mém. Soc. des Sciences de Liége, 2e série, V, 1875.

*

(1) J'ai emprunté cette liste à la notice bibliographique du professeur Lameere, dont j'ai parlé plus haut (voir *Annales de la Soc. entomologique de Belgique*, t. XLII, 1898) de préférence à celle publiée par le Dr Candèze lui-même (*Notices biographiques et bibliographiques concernant les membres de l'Académie de Belgique*, 4e édition, Bruxelles, 1897), parce qu'elle est mieux ordonnée et plus complète.

Élatérides de l'Amur. — Deutsche entom. Zeitschr., 1879.

*

Relevé des Élatérides des îles Philippines, avec les diagnoses de quelques espèces inédites. — Ann. Soc. ent. Belg., XVIII, 1875.

*

Élatérides recueillis en Birmanie et au Ténassérim par M. L. Fea, pendant les années 1885-1887. — Ann. Mus. civ. de Sc. nat. de Genova, ser. 2, IV, 1888.

Élatérides recueillis en Birmanie, en 1888, par M. L. Fea. — Ann. Mus. civ. de Sc. nat. de Genova, ser. 2, X, 1891.

*

Note sur les Élatérides du Chota-Nagpore. — Ann. Soc. ent. Belg., C. R., XXXIV, 1890.

Deuxième note sur les Élatérides du Chota Nagpore. — Ann Soc. ent. Belg., XXXVI, 1892.

Addition aux Élatérides des Indes orientales. — Ann. Soc. ent. Belg., XXXVII, 1893.

**

Relevé des Élatérides recueillis dans les îles Malaises, à la Nouvelle-Guinée et au Cap York, par MM. Doria, Beccari et d'Albertis. — Ann. Mus. civ. de Sc. nat. de Genova, XII, 1878.

Addition au relevé des Élatérides malais. — Ann. Mus. civ. de Sc. nat. de Genova, XV, 1880.

Description of the new Elateridæ collected during the recent scientific Sumatra Expedition. — Notes from the Leyden Museum, II, 1880.

Description de trois espèces nouvelles d'Élatérides de l'Archipel indo-néerlandais. — Notes from the Leyden Museum, V, 1883.

Deux Élatérides nouveaux des îles de la Sonde. — Notes from the Leyden Museum, V, 1883.

Élatérides récoltés à Serdang (Sumatra oriental) par le Dr Hagen. — Notes from the Leyden Museum, V, 1883.

Deux espèces nouvelles d'Élatérides. — Notes from the Leyden Museum, VII, 1885.

Quatre espèces nouvelles d'Élatérides de l'île Sumatra. — Notes from the Leyden Museum, IX, 1887.

Description de neuf Élatérides nouveaux du Musée de Leyde. — Notes from the Leyden Museum, XIII, 1891.

Trois Élatérides nouveaux. — Notes from the Leyden Museum, XIV, 1892.

Cinq espèces nouvelles d'Élatérides de l'île de Java. — Notes from the Leyden Museum, XV, 1893.

Description de trois espèces d'Élatérides du Musée de Leyde. — Notes from the Leyden Museum, XVI, 1894.

Description de cinq espèces d'Élatérides nouveaux du Musée de Leyde. — Notes from the Leyden Museum, XVIII, 1896.

Élatérides recueillis par M. J. Deby, à Sumatra et Bornéo, en 1884. — Ann. Soc. ent. Belg., C. R., XXIX, 1885.

Élatérides recueillis à Bornéo par M. Platteeuw. — Ann. Soc. ent. Belg., C. R., XXXIV, 1890.

Élatérides recueillis par M. Modigliani dans l'île d'Engano, en mai et juin 1891. — Ann. Mus. civ. de Sc. nat. de Genova, ser. 2, XII, 1892.

Élatérides recueillis par M. le Dr Modigliani aux abords du lac de Toba, à Sumatra, de novembre 1890 à mars 1891. — Ann. Mus. civ. de Sc. nat. de Genova, ser. 2, XIV, 1894.

Espèces nouvelles des îles Mentawei, recueillies par M. le Dr Modigliani. — Ann. Mus. civ. de Sc. nat. de Genova, ser. 2, XVI, 1896.

Élatérides recueillis par M. L. Loria dans la Nouvelle-Guinée méridionale et régions voisines. — Ann. Mus. civ. de Sc. nat. de Genova, ser. 2, XII, 1892.

**

A new african species of the Coleoptera family of Elateridæ. — Notes from the Leyden Museum, IV, 1882.

Élatérides du Togo (Guinée). — Deutsche entom. Zeitschr., 1895.

*

Note sur un Élatéride de Madagascar, du groupe des Allotriites. — Cistula Entomologica, 1879.

Élatérides de Madagascar. — Ann. Soc. ent. Belg., XXXIX, 1895.

**

Description d'un Élatéride nouveau de l'Amérique méridionale. — Notes from the Leyden Museum, IX, 1887.

Note sur les Élatérides du genre Chalcolepidius *Eschs.* — Ann. Soc. ent. Belg., C. R., XXX, 1886.

Noté sur un Chalcolepidius *nouveau.* — Ann. Soc. ent. Belg., C. R., XXXIV, 1890.

Diagnoses de deux Élatérides du Gran Chaco. — Mém. Soc. zool. de France, 1891.

**

A new genus and four new species of Elateridæ from the collections of the Leyden Museum. — Notes from the Leyden Museum, II, 1880.

Description de trois Élatérides nouveaux du Musée de Leyde. — Notes from the Leyden Museum, XI, 1889.

**

Elater Pomonæ var. Gerardi. — Ann. Soc. ent. Belg., C. R., XXXIV, 1890.

Corymbites virens var. stramineus. — Ann. Soc. ent. Belg, XXXVI, 1892.

III. — Sur les Lamellicornes.

Diagnoses de quelques Rutélides. — Coleopterologische Hefte, V. Munich, 1869.

Sur la place systématique du genre Pantodinus. — Ann. Soc. ent. Belg., C. R., XVI, 1873.

Sur deux espèces de Mélolonthides. — Ann. Soc. ent. Belg., C R., XVI, 1873.

Note sur un genre nouveau de la tribu des Trogides. — Ann. Soc. ent. Belg., C. R., XIX, 1876.

IV. — Entomologie générale.

Des insectes nuisibles ou utiles (dans le Livre de la ferme et des maisons de campagne, t. II, chap. XXXVIII). — Paris, Masson, 1862.

*

Les moyens d'attaque et de défense chez les insectes; discours prononcé à la séance publique de la Classe des sciences de l'Académie, le 16 décembre 1874. — Bull. Acad. Belg., 2e série, XXXVIII, 1874.

Discours présidentiel à l'assemblée générale du 26 décembre 1876 de la Société entomologique de Belgique. — Ann. Soc. ent. Belg, C. R., XVI, 1873.

Discours présidentiel à l'assemblée générale du 26 décembre 1874 de la Société entomologique de Belgique. — Ann. Soc. ent. Belg., C. R., XVII, 1874.

*

Sur la Doryphora decemlineata. — Ann. Soc. ent. Belg., C. R., XVIII, 1875.

Sur une publication faite par le Ministère de l'Intérieur d'un travail de M. Riley sur la Doryphora decemlineata. — Ann. Soc. ent. Belg., C. R., XX, 1877.

La Doryphora en Belgique! (Anonyme.) — Liége, Léon de Thier, 1877.

*

Projet d'expérience pour l'étude de l'instinct d'orientation chez les Lépidoptères. — Ann. Soc. ent. Belg., C. R., XXI, 1878.

Sur l'organisation à Verviers de concours de bourdons voyageurs. — Ann. Soc. ent. Belg., C. R., XXV, 1881.

*

Coléoptères rencontrés à Verviers dans les laines de Buenos-Ayres. — Ann. Soc. ent. Belg., C. R., XI, 1868 et XIV, 1870.

Sur une excursion faite en Algérie. — Ann. Soc. ent. Belg., C. R., XXV, 1881.

Les premières chasses de M. Weyers à Sumatra. — Ann. Soc. ent. Belg., C. R., XXVIII, 1884.

*

Rapport sur le travail de M. F. Meunier : Contribution à la faune des Diptères fossiles de l'ambre tertiaire. — Bull. Acad. Belg., 3e série, XXVI, 1895.

V. — Romans.

Aventures d'un Grillon. — Magasin d'Éducation et de Récréation, Hetzel, Paris, 1877.

La Gileppe. Les infortunes d'une population d'insectes. — Magasin d'Éducation et de Récréation, Hetzel, Paris, 1879.

Périnette. Histoire surprenante de cinq moineaux. — Magasin d'Éducation et de Récréation, Hetzel, Paris, 1886.

VI. — Biographie.

Notice sur J.-Théodore Lacordaire. — Annuaire Acad. Belg., 1871.

Notice sur Félicien Chapuis. — Ann. Soc. ent. Belg., C. R., XXII, 1879. — Annuaire Acad. Belg., 1880.

VII. — Photographie.

Le Scénographe. — Paris, 1874.

La Photographie en chemin de fer et en ballon. — Bull. Acad. Belg., 3e série, III, 1882.

La Photographie en voyage. — Bull. du Club Alpin Belge, 1884.

LE

PROBLÈME DES BRACHISTOCHRONES

ESSAI HISTORIQUE

PAR

Camille COMPÈRE

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES

AVERTISSEMENT

Nous nous proposons, dans cette étude, de donner un aperçu historique du problème des brachistochrones. Nous ne nous faisons pas illusion sur la difficulté d'une étude complète d'une question qui a occupé, depuis deux siècles, un si grand nombre de géomètres éminents et qui a eu une si profonde influence sur les progrès de l'analyse. Aussi notre but est-il simplement de donner une idée sur son développement depuis son origine jusqu'à nos jours.

Avons-nous réussi dans la tâche, même ainsi circonscrite, que nous nous sommes imposée? Qu'il nous soit permis de nous appliquer ces quelques lignes empruntées à l'*Essai historique sur le problème des tautochrones*, par le Dr Ohrtmann : « Il faut » dépenser bien du temps pour parvenir à embrasser d'un seul » coup d'œil le développement historique d'un seul problème, » abstraction faite de l'impossibilité où se trouverait une seule » personne, de rassembler tous les écrits qui s'y rapportent. » Quand il s'agit de mathématiques, ces écrits sont presque » toujours disséminés dans les journaux et les publications des » sociétés savantes. D'ailleurs, des recueils ou d'autres ouvrages » plus considérables, renfermant à la fois la matière et l'indica-

» tion des sources, font entièrement défaut. » Elles nous serviront d'excuse, si le lecteur rencontre dans notre travail des lacunes ou des imperfections. Cependant nous avons l'espoir que les matériaux rassemblés dans ce mémoire pourront rendre quelques services.

LE

PROBLÈME DES BRACHISTOCHRONES

PREMIÈRE PARTIE

HISTORIQUE

1. Le problème des brachistochrones ou de la plus vite descente fut proposé par Jean Bernoulli, en juin 1696, dans les *Acta Eruditorum Lipsiæ,* sous la forme suivante :

Deux points qui ne sont ni sur la même verticale, ni sur la même horizontale, étant donnés, il s'agit de trouver la ligne le long de laquelle un corps roulant de l'un à l'autre, y emploierait le moins de temps possible.

Galilée, semble-t-il, avait déjà essayé ce problème (*). Il avait remarqué que la ligne jouissant de cette propriété devait être non une droite, mais une courbe; il prouva qu'un corps roulant le long d'un arc de cercle emploierait moins de temps dans sa chute qu'en suivant la corde de l'arc ou telle suite de cordes que l'on voudrait inscrire à cet arc. On lui attribua d'avoir tiré de là la conséquence que le cercle était la courbe de plus vite descente, mais c'est une méprise dont le justifie le Père Frisi dans l'éloge qu'il a publié de ce grand géomètre.

2. Jean Bernoulli a fait connaître deux solutions de son problème : l'une, indirecte, a paru dans les *Acta Eruditorum* de

(*) Voir *Liber de motu et mechanica,* dialogus II, propositio 36.

mai 1697; l'autre, directe, que, sur le conseil de Leibniz, il tenait encore cachée, n'a été publiée qu'en 1718, dans le second mémoire que Jean Bernoulli soumit à l'Académie des sciences de Paris.

3. Pendant les six premiers mois que Bernoulli accorda d'abord pour résoudre le problème, un seul géomètre parvint à en trouver la solution : ce fut Leibniz. Il le résolut le jour même qu'il en reçut l'énoncé et il en donna aussitôt avis à l'auteur (*). Le délai ayant été prolongé de six mois sur le conseil de Leibniz, on reçut encore trois solutions.

4. Newton, qui n'en eut connaissance qu'au commencement de 1697, y répondit aussitôt. Mais, de même que Leibniz, il ne laissa rien transpirer de son analyse; il se contenta d'annoncer que la courbe était une cycloïde et d'en indiquer la construction.

Sa solution parut anonyme dans les *Transactions philosophiques* de la Société royale de Londres; mais Jean Bernoulli en devina l'auteur, *tanquam*, dit-il, *ex ungue leonem*.

5. Jacques Bernoulli envoya également une solution. Voici un extrait de sa lettre au directeur des *Acta Eruditorum* (**) :

« ... Quoique je ne me crusse pas visé par la provocation de » mon frère, néanmoins, comme il s'y ajoutait la courtoise invi- » tation du très célèbre M. Leibniz, je ne pus me refuser à » entreprendre cette recherche. Après, en effet, qu'il m'eut appris » par une lettre du 13 septembre, qu'il avait résolu le problème » et désirait que d'autres le tentassent, j'entrepris, à sa demande, » une chose qu'autrement j'aurais laissée intacte et ce fut avec le » succès désiré, car j'étais maître de ma solution le 6 octobre et » je la montrai à mes amis.

» Je ne l'ai pas communiquée plus tôt au directeur des *Acta* » parce qu'ayant appris que le délai était reculé jusqu'à Pâques

(*) *Leibnizii et Johanni Bernoullii commercium epistolicum*, t. I, p. 172.
(**) *Acta eruditorum* pro mense Maji 1697.

» de la présente année, j'avais résolu, dans l'intervalle, de diriger » mes recherches sur d'autres problèmes (*) plus difficiles et que » je proposerai, en effet, tout à l'heure... »

On connaît la mésintelligence qui régnait entre Jacques et Jean Bernoulli. Cette question de la plus vite descente, suivie bientôt de celle des isopérimètres, l'accentua encore. Peu de temps après, Jacques adressa personnellement à son frère le défi de *trouver parmi toutes les cycloïdes partant du même point celle que devrait parcourir un mobile pesant pour aller, dans le moindre temps possible, rencontrer une verticale donnée.* Tous deux résolurent cette question et trouvèrent que la courbe cherchée devait couper à angle droit la verticale donnée.

6. Parmi les premières solutions du problème des brachistochrones, nous devons encore mentionner celle du marquis DE L'HOSPITAL. Nous verrons plus loin (seconde partie, chap. I, § c) qu'il se contenta d'indiquer la solution du problème tel que l'avait proposé Jean Bernoulli; il donna aussi l'équation de la courbe cherchée pour deux hypothèses particulières sur la loi de l'accélération des vitesses.

En 1699, Fatio de Duillier voulut aussi participer à la gloire de la solution de ce problème; mais comme on peut le voir dans les pièces qui ont rapport à la contestation qui s'éleva à ce sujet, il arrivait trop tard pour être fondé à se mettre sur les rangs.

Dans les *Mémoires de l'Académie de Paris* (1709), SAURIN publia une étude détaillée du cas proposé par Jacques Bernoulli, en remplaçant la verticale par une droite faisant avec l'horizontale un angle quelconque.

7. JACQUES HERMANN, dans les *Commentarii Academiae Petropolitanae* de 1727, reprend l'étude de la brachistochrone et en indique la construction pour différentes hypothèses sur les forces agissantes. Il essaya aussi de déterminer la courbe de plus

(*) Ce sont les problèmes sur les isopérimètres.

vite descente dans un milieu résistant; mais, ainsi qu'Euler le fit remarquer dans les mêmes *Commentaires*, la solution qu'il donna de ce problème était erronée. La mort empêcha Hermann de la corriger.

8. Vers la même époque, Euler, à son tour, fit paraître dans les *Acta Eruditorum* une solution succincte du problème qui nous occupe. Dans les *Comment. Acad. Petrop. annis 1734-35*, il en donna une étude plus étendue, où il établit un grand nombre de propriétés des brachistochrones dans le vide. C'est aussi dans le même article qu'il critiqua les recherches de Hermann. Dans sa *Mechanica, sive motus scientia*, publiée en 1736, il alla encore plus loin et étendit ses recherches au cas où le mobile se meut dans un milieu résistant.

En même temps, Euler engagea les jeunes géomètres à chercher une voie plus rationnelle que les artifices qui lui avaient servi pour arriver à l'équation de la brachistochrone.

9. Ce fut Lagrange qui, dans les *Miscellanea Taurinensia* de 1760, répondit à ce désir en créant le calcul de variations et en s'en servant pour trouver la brachistochrone non seulement dans les cas considérés avant lui, mais encore pour de nouvelles hypothèses sur les limites de la courbe.

Le calcul des variations est si intimement lié au problème de la plus vite descente, que nous croyons ne pas sortir du cadre de notre étude en nous attardant un peu sur ses origines.

Le premier problème, dans l'ordre chronologique, qui contribua à lui donner naissance est celui de la surface de moindre résistance, traité pour la première fois par Newton, qui l'énonce de la manière suivante :

Trouver la courbe qui, en tournant autour de l'axe des x, *produit la surface de révolution éprouvant la moindre résistance lorsqu'on la transporte dans un fluide le long de l'axe des* x. (Principia philosophiae naturalis mathematica.)

Le second est celui des brachistochrones, ou plutôt celui des isopérimètres dans lequel on faisait rentrer celui qui nous

occupe en ajoutant à la condition de plus vite descente celle d'un périmètre donné.

Bossut, dans son *Histoire des mathématiques*, établit un rapprochement entre le calcul des variations et la différenciation *de curva in curvam*, inventée par Leibniz pour résoudre une question de synchrone correspondant à la cycloïde du temps le plus court, question que Jean Bernoulli n'était pas parvenu à résoudre par les méthodes ordinaires.

Pour faire ressortir l'analogie entre ces deux méthodes, je citerai textuellement le passage de Bossut :

« L'analogie qu'a cette méthode (*des variations*) avec celle de » Leibniz pour différentier *de curva in curvam*, mérite d'être » remarquée et cela peut servir à bien faire comprendre ici » l'esprit et l'usage de l'une et de l'autre.

» Supposons que l'on ait sous le signe sommatoire une différentielle où l'on ne considère d'abord qu'une seule variable. » Cette intégrale indiquée peut être censée représenter l'aire » d'une courbe *donnée* dont la variable est l'abscisse; l'ordonnée » est une fonction de cette variable, de quantités constantes » quelconques et d'un *paramètre*. Si maintenant on différencie » l'intégrale en faisant varier non seulement l'abscisse, mais » encore le paramètre, pour passer de la courbe proposée à la » courbe de même nature infiniment voisine, on aura deux » termes, l'un qui est la différentielle primitive, l'autre où la » différentielle du paramètre affectera une seconde quadrature » ordinaire. Dans la méthode des variations, on a pareillement » sous le signe d'intégration une formule différentielle, mais » cette formule relative à une courbe *inconnue* est maintenant » composée de plusieurs variables, liées entre elles par la condition que l'intégrale doive être un maximum ou un minimum, » et le problème est de trouver la courbe qui satisfait à cette » condition. Il faut donc faire varier l'intégrale et égaler le » résultat à zéro. Le signe de variation doit être distingué du » signe de différentiation ordinaire, mais le calcul se fait de la » même manière... »

Au point de vue du problème qui nous occupe, la méthode

des variations permit de résoudre, d'une manière générale, les cas où les points de départ et d'arrivée de la courbe, au lieu d'être fixes, sont seulement assujettis à se trouver sur des lignes ou des surfaces données.

Les Bernoulli et Saurin, il est vrai, avaient résolu le cas où le point d'arrivée se trouvait sur une droite donnée de position, mais ils étaient obligés d'employer pour chaque cas des artifices particuliers et toujours assez longs.

L'invention du calcul des variations attira l'attention des contemporains de Lagrange.

Frappé des avantages de ce nouveau genre de calcul, Euler, supérieur à tous les petits mouvements d'amour-propre d'auteur, l'adopta pour les problèmes de maximum et minimum. Il le développa dans les *Commentaires de l'Académie de Saint-Pétersbourg* pour l'année 1764 et dans un appendice au tome III de son *Calcul intégral.*

Plus tard (mêmes *Commentaires,* 1767), il reprit cette étude et trouva le moyen de la ramener entièrement au calcul différentiel, sans employer de nouveaux signes; mais cela ne produisit aucun changement essentiel dans les principes, ni aucune abréviation dans les calculs. C'est ce géomètre qui lui donna le nom de *calcul des variations.*

Le chevalier de Borda, pensant avoir remarqué quelques irrégularités dans le calcul de Lagrange, essaya de le corriger. Comme on le verra dans la seconde partie, sa méthode, appliquée à la courbe de plus vite descente, ne diffère pas essentiellement de celle de Lagrange. Voici ce que de Borda dit du nouveau calcul, dans un article publié en 1767 (*Mémoires de l'Académie des sciences de Paris*) :

« Le problème du solide de moindre résistance, celui des » brachistochrones et des isopérimètres, tournèrent les vues des » géomètres du côté des recherches de maxima et minima; on » inventa quelques méthodes pour résoudre ces sortes de pro- » blèmes, mais elles ne s'étendaient encore qu'à des questions » particulières, lorsque M. Euler donna son livre intitulé : » *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprie-*

» *tate gaudentes.* Cet ouvrage, plein d'invention et de science » de calcul, répondit parfaitement à la grande célébrité de » l'auteur, mais la méthode qu'il contenait n'ayant pas paru » assez simple à M. de la Grange, celui-ci reprit la question et » en donna, dans le second volume des *Mémoires de l'Académie* » *de Turin,* une solution fondée sur les seuls principes du » calcul intégral qui s'appliquait avec une facilité étonnante à » tous les problèmes que M. Euler s'était proposés.

» Cette solution, que je regarde comme une des plus belles » productions analytiques de notre siècle, a été bientôt adoptée » par M. Euler lui-même, qui en a donné une explication » détaillée dans le volume de 1766 de l'Académie de Saint- » Pétersbourg ; cet illustre savant a même eu la générosité » d'élever la méthode de M. de la Grange bien au-dessus de la » sienne, en insistant particulièrement sur ce qu'elle fournit » certaines équations déterminées qui servent à résoudre les » problèmes d'une manière plus générale ; mais il faut avouer » que tous les savants ne sont pas sur cela du sentiment de » M. Euler; quelques-uns trouvent que l'usage de ces équations » n'est ni rigoureusement démontré ni suffisamment indiqué dans » la méthode de M. de la Grange et même un grand géomètre (*) » qui vient de lire à notre Académie un mémoire sur cette » matière, va beaucoup plus loin, puisqu'il prétend que ces » équations sont illusoires et n'appartiennent pas à la question. » Cette différence dans les jugements qu'on a portés sur cette » méthode m'ayant donné la curiosité de l'examiner, j'ai voulu » voir d'abord s'il ne serait pas possible d'avoir une autre solution » qui pût servir à décider de la question et enfin j'en ai trouvé » une qui est simple et incontestable, et qui renferme nécessai- » rement toutes les équations qui peuvent avoir rapport au pro- » blème. »

Nous rapportons plus loin la méthode du chevalier de Borda. Nous n'avons cité ce passage que pour montrer que le calcul des

(*) Fontaine. Nous parlerons de son mémoire en même temps que de celui de de Borda.

variations ne fut pas accepté tout de suite par les contemporains de Lagrange et ne fut pas non plus porté du premier coup au degré de perfection que nous lui connaissons.

Dans les *Miscellanea Taurinensia* de 1766-1769, Lagrange reprend son étude sur les variations; il répond aux critiques de Fontaine et de Borda, et donne encore quelques additions importantes à son premier mémoire.

Revenons maintenant au sujet de cette étude, le problème de la plus vite descente.

10. En 1742 parut le *Traité des Fluxions* de Mac Laurin, dans lequel on trouve une étude assez complète de la brachistochrone. Nous rapportons plus loin l'analyse qu'en a faite M. Paul Serret dans ses *Méthodes en Géométrie*.

Nous ne faisons que mentionner Lacroix, qui, dans son *Traité de calcul différentiel et intégral* (*), donne le problème de la plus vite descente comme exemple d'application du calcul des variations; sa méthode est, pour ainsi dire, identique à celle de Lagrange.

De 1769 à 1829, on ne s'occupa plus guère, d'une façon particulière du moins, de la recherche des brachistochrones. Les développements apportés par Euler et Lagrange paraissaient tellement complets que personne, semble-t-il, ne voulait reprendre cette étude.

11. En 1829, Poisson publia, dans les *Mémoires de l'Académie de Paris*, un travail sur les variations où il donne à ce calcul une forme plus convenable pour traiter, en général, toutes les questions de maximum et de minimum. Il l'appliqua dans sa *Mécanique* au problème de la plus vite descente et, par de simples remarques, en déduisit quelques-uns des cas particuliers étudiés avant lui.

Mais ce problème étant, comme il le dit dans cet ouvrage, « un problème de pure curiosité, il se borne à considérer le cas

(*) Publié en 1814. Voir cet ouvrage, tome II, page 729.

» le plus simple, celui où le mouvement a lieu dans le vide et » où les points extrêmes sont donnés. »

12. Roger publia dans le tome XIII du *Journal de Mathématiques* de Liouville (1848) une thèse sur les brachistochrones où il étudie plusieurs cas particuliers intéressants. Cette thèse se compose de deux parties. La première traite des brachistochrones dans le cas où le mobile n'est soumis qu'à la pesanteur. Il considère d'abord le mobile entièrement libre; il le suppose ensuite assujetti à se trouver sur un plan vertical ou sur une surface de révolution et examine particulièrement le cas où cette surface est un cylindre droit à axe vertical.

Dans la seconde partie, il étudie les brachistochrones en général, en supposant le mobile soumis à un système donné de forces variables avec la position du mobile. C'est surtout cette partie qu'il a développée.

Le Père Jullien, dans ses *Problèmes de mécanique rationnelle*, publiés en 1855, considère la brachistochrone sur une surface quelconque et en particulier sur une surface de révolution. Sa méthode diffère peu de celle de Roger.

13. A peu près vers cette époque, M. Haton de la Goupillière communiqua à l'Académie des sciences de Paris un mémoire inséré dans le tome XXVII des *Mémoires des savants étrangers*. Il y étudie d'abord la brachistochrone dans l'hypothèse d'un frottement de glissement; il suppose ensuite que le milieu dans lequel doit se mouvoir le mobile, oppose une certaine résistance; enfin, dans la troisième partie, il réunit les deux hypothèses.

Mentionnons aussi un autre travail de M. Haton de la Goupillière qui a paru dans le tome XXVIII du même recueil. L'auteur traite le problème inverse des brachistochrones; voici comment il l'énonce :

Déterminer le système de forces sous l'influence duquel une courbe donnée serait la ligne de trajet le plus rapide.

Il convient peut-être de signaler aussi les solutions qu'ont publiées A. Meyer dans ses *Nouveaux éléments du calcul des*

variations et M. Laurent dans son *Traité de mécanique rationnelle* (*).

14. Dans *The quarterly Journal of pure and applied Mathematics* de 1877, on trouve un article de M. Towsend intitulé : *Sur plusieurs solutions particulières du mouvement d'un point libre déduites de la considération d'une courbe brachistochrone et réciproquement.* Malgré l'intérêt que présente cet article, nous avons dû nous contenter d'en rapporter simplement l'analyse faite par M. Darboux dans son *Bulletin des sciences mathématiques*, tome VI.

15. Despeyrous, dans son *Cours de mécanique* professé à l'Université de Toulouse et publié en 1884 par M. Darboux, résout le problème de la plus vite descente dans le cas de la pesanteur, par une méthode identique à celle de Poisson.

Il considère ensuite le cas où le point pesant se mouvant dans un plan est soumis à l'action d'un système de forces admettant une fonction des forces; il arrive ainsi à l'équation de la courbe sous la forme d'une équation différentielle du second ordre qu'il interprète d'une façon très simple. Il donne, comme application, la recherche de la brachistochrone dans le cas où la force agissante est constamment dirigée vers un centre fixe et ne dépend que de la distance du mobile à ce centre.

A la fin du même ouvrage se trouve une note de M. Darboux concernant la brachistochrone entre deux points donnés.

L'auteur y démontre qu'un mobile, en suivant la cycloïde, emploiera moins de temps pour passer d'un point à un autre qu'en parcourant toute autre courbe tracée dans le plan de la cycloïde ou que toute autre courbe de l'espace passant par les deux points donnés. La démonstration de cette dernière partie est due à Ossian Bonnet.

(*) L'ouvrage de Meyer a été publié en 1856, celui de Laurent en 1870. Nous citons encore Strauch, qui, dans son *Variation's Calcul*, résume les travaux d'Euler sur les brachistochrones.

16. Dans une note des *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris* de 1885, M. Andoyer réduit le problème de la plus vite descente aux équations canoniques, soit dans le cas d'un mobile libre, soit dans le cas où le mobile doit se mouvoir sur une surface.

Ossian Bonnet, dans ses leçons à la Sorbonne (*) sur la théorie de la réfraction astronomique, recherche les équations différentielles de la trajectoire lumineuse, que l'on sait être la même que celle du trajet le plus court d'un point pesant. Il énonce le problème comme il suit :

Rechercher le mouvement de la lumière émanée d'une étoile à travers l'atmosphère, dans le cas où la densité de celle-ci ne dépend que de la distance au centre de la Terre.

Il ne détermine pas complètement l'équation de la courbe.

Après avoir démontré que la trajectoire se trouve dans un plan vertical, il établit le changement de direction subi par le rayon lumineux, depuis le moment où il pénètre dans l'atmosphère jusqu'à celui où il parvient à la surface de la Terre. « Nous » terminerons là, ajoute-t-il, ce qui se rapporte à la recherche de » cette trajectoire lumineuse, la détermination complète de » cette trajectoire n'étant pas indispensable au but que nous » voulons atteindre. »

Nous trouvons ensuite dans le tome III du *Cours d'analyse* de Camille Jordan (1re édition, 1887) une étude très simple de la brachistochrone. L'auteur suppose le mobile animé d'une vitesse initiale donnée, le point de départ étant fixe et le point d'arrivée fixe ou assujetti à se trouver sur une courbe ou une surface quelconque.

M. Flamant, dans sa *Mécanique rationnelle*, traite le cas de la brachistochrone entre deux points. Il ramène d'abord le problème de l'espace à celui du plan vertical par la comparaison d'une courbe de l'espace et de sa projection sur le plan. Au moyen du théorème de Fermat (**), il arrive à l'équation différen-

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. VI, 1887.

(**) Voir l'énoncé de ce théorème, seconde partie, chapitre I, § *j*.

tielle de la courbe cherchée, équation qu'il intègre et à laquelle, par un changement d'origine, il donne la forme ordinaire de l'équation d'une cycloïde.

Dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (1890), M. Appell attire l'attention sur les simplifications qu'apporterait à la solution du problème qui nous occupe, l'application du théorème de MM. Tait et Thomson (*).

Dans un article sur le travail des moteurs employés au transport (**), M. Collignon cherche la brachistochrone sur une surface donnée. Il énonce ainsi le problème :

« On propose de tracer entre deux points sur une surface, » une ligne telle qu'un moteur développant par unité de temps » un travail constant le parcoure dans le moindre temps pos- » sible. On suppose connu le poids du moteur et de son » fardeau ainsi que l'angle du frottement moyen applicable à » l'ensemble. »

Il indique ensuite les conditions auxquelles doivent satisfaire les points donnés pour que le trajet direct ne force pas le moteur de monter, puis de descendre. Il termine ce qui concerne la brachistochrone en appliquant sa méthode au cas où la surface donnée est une sphère ou un ellipsoïde.

Dans son *Traité de mécanique* (***), M. Collignon avait déjà étudié le problème de la plus vite descente et l'avait résolu de deux manières, l'une géométrique très simple, l'autre analytique; il donne chaque fois une construction de la courbe.

Dans le chapitre relatif au mouvement d'un mobile dans un milieu résistant, il considère le cas où la résistance est proportionnelle à une fonction donnée de la vitesse ; il suit ici, en partie du moins, la méthode de Lagrange.

Les *Rendiconti del Circolo mathematico di Palermo* (1891) ren-

(*) Nous rapportons l'énoncé de ce théorème au § *b*, chapitre IV, troisième partie.

(**) Cet article a été publié dans les *Comptes rendus de l'Association française pour l'avancement des sciences*, 20e session, 1891.

(***) Publié en 1874.

ferment une note de M. G. Pennacchietti sur le mouvement brachistochrone. Cette note est précédée de quelques lignes qui lui servent d'introduction et la résument. Nous les traduirons ici le plus fidèlement possible :

« Si les composantes, selon trois axes orthogonaux, de la force » qui sollicite un point matériel, sont les dérivées partielles » d'une fonction des seules coordonnées, la réduction des » équations du mouvement à la forme canonique présuppose, » comme on sait, que le point matériel soit libre ou assujetti à se » trouver sur une surface ou sur une courbe donnée, fixe ou » variable avec le temps soit de forme ou simplement de posi- » tion. Faisant la même hypothèse de l'existence d'une fonction » potentielle et supposant que les conditions données soient telles » que le mouvement soit brachistochrone, je parviens, dans ce » travail, à une forme des équations ayant beaucoup d'analogie » avec le système de Hamilton. »

L'année suivante, dans le même recueil, M. Pennacchietti étudie un cas nouveau des brachistochrones. Il suppose un système de points soumis à l'action d'un système de forces admettant une fonction des forces, les liaisons entre les points étant données par des équations entre les seules coordonnées du système. Il cherche les équations d'un mouvement tel, que le temps employé pour passer d'une configuration à une autre soit le plus court possible. Il développe ensuite d'une façon détaillée les propriétés de ce mouvement pour différentes hypothèses.

M. Paul Haag, dans son *Cours de mécanique rationnelle* (1894), établit un rapprochement entre le problème de la plus vite descente et celui de la moindre action, et fait ressortir les analogies existant entre ces deux problèmes.

Enfin, M. Massau, dans son *Cours de mécanique*, tome II (édition 1896), identifie la recherche de la brachistochrone et celle de la courbe funiculaire. Il emploie dans ses calculs les principes de la géométrie vectorielle. Andoyer, dans sa note à l'Académie de Paris, avait déjà remarqué cette identité, mais ne s'en était servi que pour ramener le problème de la plus vite

descente aux équations canoniques, tandis que M. Massau résout complètement ce problème.

Telle est, d'après les documents que nous avons pu rassembler, l'histoire du problème des brachistochrones.

Nous allons maintenant rapporter les différentes méthodes qui ont été employées pour le résoudre.

SECONDE PARTIE

DIFFÉRENTES MÉTHODES EMPLOYÉES DANS LA RECHERCHE DES BRACHISTOCHRONES

Le nombre des auteurs qui ont traité la question étant suffisamment grand, nous subdiviserons cette partie en deux chapitres.

Dans le premier, nous analyserons les solutions indépendantes du calcul des variations; dans le second, celles qui emploient ce calcul. Nous ne considérerons ici que le cas le plus simple traité par chaque auteur, nous efforçant de le ramener au cas où la courbe cherchée est comprise entre deux points ou entre un point et une droite verticale donnés. Les autres cas seront rapportés dans la troisième partie.

CHAPITRE PREMIER.

MÉTHODES INDÉPENDANTES DU CALCUL DES VARIATIONS.

a) *Jean Bernoulli.*

1. Comme nous l'avons déjà dit, Jean Bernoulli a publié plusieurs solutions de son problème. La première, basée sur un théorème de Fermat (*), a paru en 1697 (*loc. cit.*). La traduction

(*) Voir *Epist. Cartesii lat.*, t. III, p. 147, ou *Fermatii Opera Math.*, p. 156.

que nous allons en donner, est empruntée, en grande partie, à l'*Histoire des sciences mathématiques et physiques*, par Maximilien Marie, t. VII, p. 171; pour des raisons faciles à comprendre, elle ne suit pas le texte latin pas à pas.

« Fermat, dans une lettre à De la Chambre, a établi qu'un » rayon lumineux passant d'un milieu dans un autre plus dense, » se réfracte vers la perpendiculaire, de façon à suivre le » chemin le plus court, eu égard au temps; il déduit de là que » le sinus de l'angle d'incidence est au sinus de l'angle de » réfraction dans la raison inverse des densités des deux milieux » ou dans la raison même des vitesses du rayon dans les deux » milieux. »

« Si nous considérons maintenant un milieu composé de » lamelles parallèles diaphanes infiniment minces, et dont la » densité varie suivant une certaine loi, il est clair que le rayon » y décrira une certaine courbe, comme l'avait déjà remarqué » Huyghens sans pouvoir déterminer cette courbe. Cette courbe » doit être telle que le globule (lumineux) qui la parcourt avec » une vitesse continuellement variable, selon le degré de rareté » du milieu, parvienne dans le moindre temps possible d'un » point à un autre.

» Il est évident aussi que, puisque les sinus des angles de » réfraction, en tous les points, sont respectivement comme les » vitesses du globule, la trajectoire a la propriété que les sinus » des angles de ses tangentes avec la normale commune aux » plans de séparation des lamelles, soient partout dans la même » raison que les vitesses.

» Cela étant, il n'est pas difficile de voir que la brachisto- » chrone est précisément la courbe que décrirait un rayon » traversant un milieu dont la rareté varierait selon la loi des » vitesses successives d'un corps grave.

» Les remarques que nous avons faites ci-dessus, nous per- » mettront de résoudre en même temps le problème de la plus » vite descente d'un corps pesant et celui de la trajectoire du » rayon lumineux dans le cas imaginé par Huyghens.

» A étant le point de départ du mobile (fig. 1), nous prenons » pour axe des x la verticale AD et pour axe des y l'horizon- » tale AG (située dans le plan » vertical qui passe par le point » d'arrivée B). Soient AMB la » courbe cherchée, AME la » courbe dont l'ordonnée HC » mesure la vitesse du mobile » en un point quelconque M » de la courbe, après une » chute de la hauteur AC. Les » coordonnées du point M » sont AC = x, CM = y.

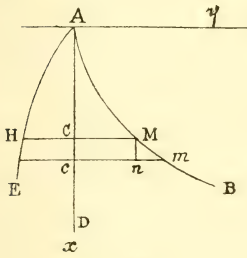


Fig. 1.

» Soit s l'arc AM et considérons les éléments

$$Cc = Mn = dx, \quad nm = dy, \quad Mm = ds;$$

» représentons HC par t et soit a une constante quelconque.

» $\frac{nm}{Mm}$ sera le sinus de l'inclinaison de la courbe sur la verti- » cale, et d'après le lemme, on aura

$$\frac{nm}{Mm} : HC = \text{constante} = a, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{t} = \frac{ds}{a},$$

» c'est-à-dire

$$a^2 dy^2 = t^2 (dx^2 + dy^2).$$

» Nous en concluons l'équation différentielle

$$dy = \frac{t dx}{\sqrt{a^2 - t^2}}.$$

» Lorsqu'il s'agit d'un corps soumis à la pesanteur, la » courbe AHE est une parabole, et l'on a $t = \sqrt{ax}$; donc » l'équation précédente devient

$$dy = dx \frac{x}{\sqrt{a - x}}. \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

» Elle représente la cycloïde décrite par le cercle de diamètre a,

» roulant sur l'horizontale AG à partir du point A. Il resterait » à déterminer la cycloïde qui aurait son sommet en A et pas- » serait par B. »

On pourrait reprocher à Jean Bernoulli d'avoir, sans explication aucune, employé la même constante pour représenter les deux rapports $\frac{nm}{Mm}$: HC et $\frac{t^2}{x}$. Il est vrai que si l'on écrivait $t = a\sqrt{\frac{x}{b}}$ au lieu de $t = \sqrt{ax}$, on obtiendrait l'équation (1) avec le changement de a en b.

2. Voici la solution analytique publiée en 1718.

« Soient (fig. 2) A le point de départ, B le point d'arrivée, » AMB la courbe cherchée, MK » son rayon de courbure en M, » Mm un arc de la courbe assez » petit pour qu'on puisse le con- » sidérer comme appartenant à » la circonférence de centre K » et de rayon KM, enfin ACB une » courbe infiniment voisine de » AMB, et Ce l'arc de cercle » décrit du même centre K entre » les côtés de l'angle MKm. Nous » sommes donc ramenés à cher- » cher de tous les arcs de cercle

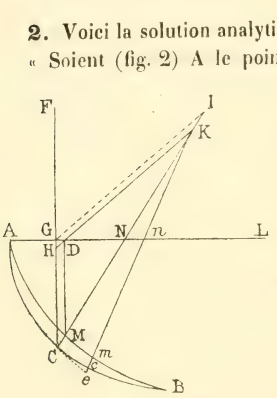


Fig. 2.

» Mm, Ce, celui que le mobile décrirait dans un temps » minimum.

» Représentons NK par a, MN par x, l'ordonnée MD par mx, » et l'arc Mm par n. MK ou $n(x + a)$. Les nombres m et n ne » varieront pas si l'on substitue la courbe ACB à la courbe AMB; » on doit donc les considérer comme des constantes.

» La vitesse du mobile en M étant proportionnelle à $\sqrt{MD}$ » ou à $\sqrt{mx}$, on peut écrire en désignant par $t.s$ le temps » employé à parcourir l'arc s :

$$t.\mathrm{M}m = \frac{\mathrm{M}m}{\sqrt{\mathrm{MD}}} = \frac{n(x+a)}{\sqrt{mx}};$$

» comme $t.Mm$ doit être minimum, sa différentielle doit être » nulle, ce qui donne la condition

$$\frac{x-a}{2\sqrt{x}}dx = 0, \quad \text{ou} \quad x = a.$$

» On voit par là que la courbe cherchée est telle que le rayon » de courbure MK est divisé en deux parties égales par l'hori- » zontale, propriété qui caractérise une cycloïde dont la base » est AL. »

A l'exemple de Maximilien Marie (*loc. cit.*, t. VII, p. 177), nous avons un peu modifié le texte primitif de la solution pour le rendre plus précis. Jean Bernoulli, dit cet auteur, n'a pas tort de trouver cette solution très remarquable, quoiqu'elle soit peut-être telle qu'on ne l'accepterait plus aujourd'hui.

3. Passons à la solution synthétique.

« Nous avons à démontrer (fig. 2) que le mobile emploie » moins de temps pour aller de A en B en suivant la cycloïde » AMB qu'en suivant toute autre courbe ACB.

» Soient MK et mK deux normales à la cycloïde en deux » points M et m infiniment voisins; elles se rencontrent en K » sur la développée de AMB et coupent en C et c la courbe ACB. » De K comme centre, décrivons l'arc de cercle Ce; abaissons » MD, CG perpendiculaires à AL et appelons H le point d'inter- » section de CG avec DK. Menons aussi GI parallèle à DK et » terminée en I à MK; enfin, portons sur le prolongement de » de CG la longueur

$$GF = \frac{\overline{CH}^2}{MD}.$$

» Puisque AMB est une cycloïde, on a MN = NK, d'où » CN = NI. Or

$$\overline{CN}^2 + \overline{NK}^2 > 2CN.NK;$$

» par conséquent

$$\overline{CN}^2 + \overline{NK}^2 + 2CN.NK > 4CN.NK,$$

» ce qui revient à

$$\overline{CK}^2 > CI.MK, \quad \text{ou} \quad \frac{CK}{CI} > \frac{MK}{CK} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

» Mais des triangles semblables CHK et MDK et de ce que » $GF = \frac{\overline{CH}^2}{MD}$, on conclut

$$\frac{MK}{CK} = \frac{MD}{CH} = \frac{CH}{GF}.$$

» De même, à cause des triangles semblables CKH et CIG, » on a

$$\frac{CK}{CI} = \frac{CH}{CG}.$$

» De ces proportions et de l'inégalité (1), il résulte

$$\frac{CH}{GF} < \frac{CH}{CG}, \quad \text{ou} \quad CG < GF.$$

» Observons maintenant que le mobile étant parti de A, le » temps employé à parcourir Mm est au temps nécessaire pour » parcourir Ce en raison composée des droites Mm et Ce, et » des inverses des racines carrées des hauteurs de chute MD » et CG, de sorte que

$$\frac{t.Mm}{t.Ce} = \frac{Mm}{\sqrt{MD}} : \frac{Ce}{\sqrt{CG}} = \frac{Mm}{Ce} : \sqrt{\frac{MD}{CG}}. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

» Mais, par construction,

$$\frac{Mm}{Ce} = \frac{KM}{KC} = \frac{MD}{CH} = \frac{CH}{GF};$$

» l'égalité (2) prend donc la forme

$$\frac{t.Mm}{t.Ce} = \frac{MD}{CH} : \sqrt{\frac{MD}{CG}} = \frac{\sqrt{MD.CG}}{CH}.$$

» ou, en remplaçant MD par la valeur $\frac{\overline{CH}^2}{GF}$,

$$\frac{t.Mm}{t\ Ce} = \frac{\sqrt{CG}}{\sqrt{GF}}.$$

» Or on a vu que $CG < GF$; donc $t.Mm < t.Ce$ et *a fortiori* » $< t.Cc$, car Ce est l'hypoténuse du triangle rectangle Ccе.

b) *Jacques Bernoulli.*

Jacques Bernoulli pose d'abord le lemme suivant :

« Si la courbe ACEDB (fig. 3) est telle que le corps en la » parcourant parvienne dans le temps le plus court de A en B,

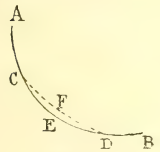


Fig. 3.

» je dis que la partie CED de la courbe » prise entre deux points quelconques C » et D jouit de la même propriété d'être » parcourue dans un temps plus court » que toute autre ligne joignant C et D (en » supposant, bien entendu, qu'il parte » de C avec la vitesse déjà acquise en » parcourant AC) (*). Car si nous supposons que le temps » soit moindre le long de CFD, le mobile mettrait moins de » temps à parcourir ACFDB que ACEDB, ce qui est contre » l'hypothèse.

» Soit donc (fig. 4) un plan quelconque (car il importe peu » que ce plan soit vertical) passant par les deux points donnés » A et B et représentons par AMB la courbe cherchée. Prenons » sur cette courbe deux points infiniment voisins C et D; menons » l'horizontale Ax, la perpendiculaire CH à cette ligne; puis » DF parallèle à Ax; E étant le milieu de CF, achevons le » parallélogramme EIDF. La question est de trouver sur EI un » point G, c'est-à-dire l'inclinaison mutuelle des éléments CG,

(*) Nous avons ajouté, comme l'a déjà fait M. Marie (*loc. cit.*, t. VII, p. 105), la partie comprise entre parenthèses.

» GD, telle que le temps employé pour parcourir CG, plus celui nécessaire pour parcourir GD soit minimum, bien entendu en supposant en C la vitesse due à la chute à partir de A.

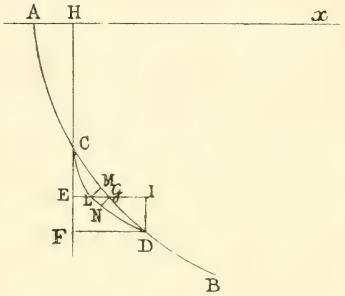


Fig. 4.

» A cet effet, prenons sur EI un point L tel que GL soit infiniment petit par rapport à EG et menons les droites CL et LD; décrivons aussi les arcs de cercle LM de centre C, et NG de centre D. D'après la nature du minimum, on aura

$$t.\mathrm{CL} + t.\mathrm{LD} = t.\mathrm{CG} + t.\mathrm{GD};$$

ou

$$t.\mathrm{CG} - t.\mathrm{CL} = t.\mathrm{LD} - t\ \mathrm{GD}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

» Des lois de la chute des graves on déduira, les vitesses variant infiniment peu dans les différents parcours considérés,

$$\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CG}} = \frac{t.\mathrm{CE}}{t.\mathrm{CG}}, \quad \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CL}} = \frac{t.\mathrm{CE}}{t.\mathrm{CL}},$$

$$\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{GD}} = \frac{t.\mathrm{EF}}{t\ \mathrm{GD}}, \quad \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{LD}} = \frac{t.\mathrm{EF}}{t.\mathrm{LD}}.$$

» Ces proportions donnent

$$\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CG} - \mathrm{CL}} = \frac{t.\mathrm{CE}}{t.\mathrm{CG} - t\ \mathrm{CL}}, \quad \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{LD} - \mathrm{GD}} = \frac{t.\mathrm{EF}}{t.\mathrm{LD} - t.\mathrm{GD}}. \quad (2)$$

» Or, à cause de la similitude des triangles MGL et EGC, LNG et GID, on a

$$\frac{\mathrm{MG}}{\mathrm{GL}} = \frac{\mathrm{EG}}{\mathrm{CG}}, \quad \frac{\mathrm{LN}}{\mathrm{LG}} = \frac{\mathrm{GI}}{\mathrm{GD}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Multiplions terme à terme les premières des proportions (2) et (3), ensuite les secondes; en observant que

$$CG - CL = MG, \quad LD - GD = LN, \quad EF = CE,$$

on obtient d'abord

$$\frac{CE}{GL} = \frac{EG}{CG}\,\frac{t.CE}{t.CG - t.CL},$$

$$\frac{CE}{LG} = \frac{GI}{GD}\,\frac{t.EF}{t.LD - t.GD};$$

puis en égalant les seconds membres de ces équations et ayant égard à la relation (1), il vient

$$\frac{EG}{GI}\,\frac{t.CE}{t.EF} = \frac{GC}{GD} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Mais, d'après les lois de la pesanteur,

$$\frac{EG \times t.CE}{GI \times t.EF} = \frac{EG}{\sqrt{HC}} : \frac{GI}{\sqrt{HE}};$$

l'équation (4) se réduit donc à

$$\frac{EG}{\sqrt{HC}} : \frac{GI}{\sqrt{HE}} = \frac{CG}{GD}.$$

EG et GI sont deux différentielles consécutives de l'abscisse, HC et HE sont les ordonnées correspondantes, enfin CG et GD sont les deux différentielles de l'arc de la courbe. La question est donc ramenée à déterminer la courbe dont les éléments consécutifs sont entre eux en raison composée de celle des éléments des abscisses et de la racine carrée de celle des ordonnées. Or Huyghens a trouvé que cette courbe est une cycloïde.

Cette démonstration, plus directe que celle de Jean Bernoulli, s'appuie sur ce que, à des infiniment petits d'ordre supérieur près, on peut considérer comme identiques la position de la courbe répondant à un maximum ou à un minimum, et celle de la courbe infiniment voisine.

Le lemme qui précède cette solution a été admis tacitement

par tous ceux qui ont traité la question. Le raisonnement de Jacques Bernoulli pour l'expliquer est le même que celui que l'on emploie pour les lignes géodésiques. Or ces deux cas sont différents. Dans le dernier, on ne considère que la longueur de la courbe et le raccordement des arcs importe peu; mais dans celui qui nous occupe, on doit tenir compte de la vitesse. En considérant, comme il aurait fallu, le raccordement au second ordre, il aurait encore été bon d'ajouter que les vitesses aux extrémités supérieures des deux arcs substitués l'un à l'autre ne dépendant que de la hauteur commune, se retrouveraient encore les mêmes au point de raccordement inférieur.

c) *Leibniz, Newton et L'Hospital.*

1. Voici la réponse de Leibniz au problème de Bernoulli; elle est précédée d'une page d'histoire présentant un très grand intérêt.

« ... Mais il est temps que j'expose ma solution. Comme elle » est conforme aux autres, je n'ai pas pris le temps de la déve- » lopper; je me contenterai donc de donner une réponse à la » question. Le calcul m'a révélé que la ligne cherchée AMB est » la courbe représentative des » segments circulaires. Autre- » ment dit, cette ligne est telle » que le rectangle de son or- » donnée CM et de la moitié » du rayon du cercle GLK » (fig. 5), compris entre son » point le plus bas K et » l'horizontale AG du point A, est constamment égal au seg- » ment de ce même cercle entre l'arc et la corde GL. Or cette » courbe représentative est la cycloïde ordinaire... »

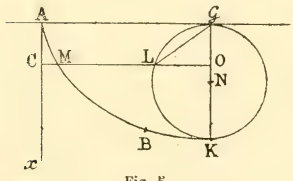


Fig. 5.

En effet, N étant le centre du cercle GLK, le segment circulaire compris entre l'arc GL et sa corde a pour expression

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{NG}(\text{arc LG} - \mathrm{LO});$$

on en tire

$$CM = \text{arc LG} - LO \quad \text{ou} \quad CM + LO = \text{arc LG}.$$

Cette égalité montre que M appartient à la cycloïde engendrée par un cercle de rayon NG, roulant sur AG ; le point de contact, à l'origine du mouvement, est supposé en A et confondu avec le point générateur.

2. Newton a fait connaître sa solution, dans les *Transactions philosophiques* de 1697, sous la forme suivante :

« Soient (fig. 6) A le point de départ, B le point d'arrivée; » par A menons l'horizontale APCZ. Décrivons sur cette droite

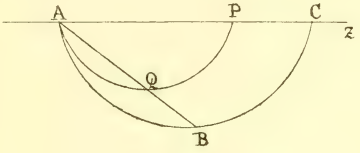


Fig. 6.

» une cycloïde quelconque AQP. La droite AB (prolongée au » besoin) rencontrera cette courbe en un point Q. La cycloïde » ABC dont la base et la hauteur sont avec la base et la hauteur » de la première dans le rapport AB : AQ, sera la courbe » cherchée. »

3. Le marquis de L'Hospital considère plusieurs hypothèses sur la vitesse du mobile. Voici la traduction de la réponse qu'il envoya aux *Acta Eruditorum*.

« Dans le cas proposé du problème, construisons sur l'hori- » zontale du point de départ une cycloïde passant par ce point » et par le point d'arrivée. La portion comprise entre les deux » points donnés sera la ligne demandée.

» Si la vitesse est proportionnelle à la hauteur de chute, la » ligne de plus vite descente sera l'arc de cercle passant par les

» deux points donnés et ayant son centre sur l'horizontale du » point de départ.

» Appelons x l'abscisse, y l'ordonnée d'un point de la courbe, » et supposons en général que la vitesse acquise par la chute de » la hauteur y est donnée par y^m; la courbe cherchée aura pour » équation :

$$dx = \frac{my^m}{\sqrt{1 - m^2 y^{2m}}}\, dy.$$

Comme on le voit, ces réponses contiennent seulement les résultats auxquels sont arrivés ces géomètres, sans rien indiquer de leur analyse.

d) *Saurin.*

En 1709, dans l'*Histoire de l'Académie des sciences de Paris*, Saurin étudie le problème suivant, proposé par Jacques Bernoulli :

Parmi une infinité de cycloïdes de même origine et de même base, déterminer celle dont l'arc compris entre l'origine et une droite donnée est parcouru dans le temps le plus court.

Nous indiquerons ici la marche suivie par ce géomètre lorsque la droite donnée est verticale.

« Considérons (fig. 7) une cycloïde AGB constante et suppo-

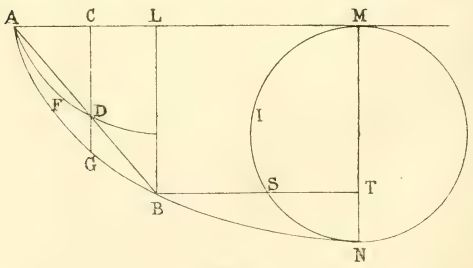


Fig. 7.

» sons que la cycloïde variable AFD réponde à la question.

» Menons la corde AD qui détermine deux arcs semblables » AFD, AGB. MSN étant le cercle générateur de AGB, appe- » lons a son diamètre et posons : AL $= x$, BL $= y$ et AC $= b$, » quantité donnée, puisque CD est la verticale donnée.

» Cela posé, on sait, par le théorème démontré par Huyghens, » que le temps employé à parcourir un arc quelconque AGB de » cycloïde est proportionnel à l'arc correspondant MIS du cercle » générateur, divisé par la racine carrée du diamètre.

» Or ici,

$$\text{arc MIS} = \text{AL} + \text{ST} = x + \sqrt{ay - y^2}.$$

» On aura donc pour expression de ce temps

$$\frac{x + \sqrt{ay - y^2}}{\sqrt{a}};$$

» comme il est au temps nécessaire pour parcourir l'arc sem- » blable AFD, dans le rapport

$$\frac{\sqrt{\text{BL}}}{\sqrt{\text{CD}}} = \frac{\sqrt{\text{AL}}}{\sqrt{\text{AC}}},$$

» on a

$$t.\text{AFD} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \cdot \frac{x + \sqrt{ay - y^2}}{\sqrt{x}}.$$

» Pour que cette quantité soit un minimum, sa différentielle » doit être nulle; ce qui donne

$$dx.x\sqrt{ay - y^2} + dy(ax - 2yx) - dx(ay - y^2) = 0.$$

» De la nature de la cycloïde, on tire

$$dx = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{a - y}}.$$

» L'équation précédente devient par cette substitution :

$$dy\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{a - y}} \cdot x\sqrt{ay - y^2} + dy(ax - 2yx) - dy\frac{\sqrt{y}(ay - y^2)}{\sqrt{a - y}} = 0.$$

» On en conclut

$$ax - yx = y\sqrt{ay - y^2}; \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

» en élevant au carré et ordonnant suivant les puissances » décroissantes de y, il vient

$$y^4 - ay^3 + x^2y^2 - 2ax^2y + a^2x^2 = 0.$$

» Cette équation est divisible par $y - a$; on a donc $y = a$, » ce qui fait voir que l'ordonnée BL doit être le diamètre du » cercle générateur et AGB une demi-cycloïde.

» Puisque AFD est semblable à AGB, AFD est aussi une » demi-cycloïde et le problème est résolu par la cycloïde qui » coupe la droite donnée CD à angle droit.

» La solution $y = a$ s'aperçoit immédiatement sur l'équa- » tion (1). »

Le cas considéré par Saurin est beaucoup moins général que le problème de Jean Bernoulli, en ce qu'il ne considère pas les arcs de courbes quelconques, mais seulement ceux de cycloïde compris entre le point et la droite donnés.

C'est un cas particulier d'un problème également proposé par Jacques Bernoulli, à savoir : « Chercher, parmi toutes les courbes » semblables, construites sur un même axe horizontal et ayant » même sommet, celle dont l'arc compris entre ce sommet et » une ligne donnée serait parcouru par un point pesant dans le » temps le plus court. »

e) *Hermann.*

Hermann a étudié la brachistochrone dans différents cas; nous analyserons ici seulement le cas où les points extrêmes sont donnés et où la seule force agissante est la pesanteur.

Hermann établit d'abord un lemme qui n'est autre que celui de Fermat, appliqué au cas où les milieux sont séparés par une circonférence de cercle. Voici comment il l'énonce :

« Soient donnés de position un cercle DBE de centre O

» (fig. 8) et deux points A et C, celui-ci dans la partie concave
» du cercle, celui-là dans la partie convexe; on mène à un point B de la
» circonférence deux droites AB et CB,
» suivant cette loi que le sinus de
» l'angle ABG soit au sinus de l'angle
» OBC dans le rapport M : N. Je dis
» que le mobile décrivant AB avec une
» vitesse proportionnelle à M, et ensuite
» BC avec une vitesse proportionnelle
» à N, parviendra de A en C dans un
» temps plus court que s'il parcourait
» (avec les mêmes vitesses respectives) deux autres lignes quelconques A*b* et *b*C. »

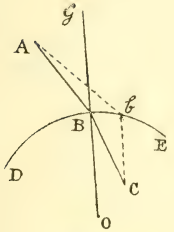


Fig. 8.

Il est inutile de rapporter la démonstration de ce lemme.

« Il faut trouver la courbe ABO (fig. 9) sur laquelle un

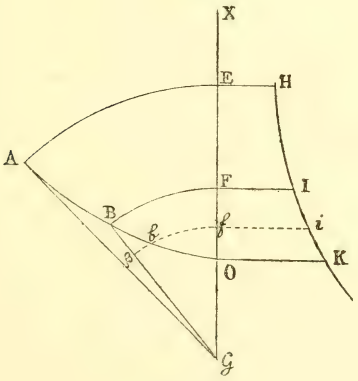


Fig. 9.

» corps, dans sa chute, parviendra du point A au point B dans
» un temps plus court que s'il suivait toute autre ligne. Dans la

» figure, HIK est l'échelle des vitesses; AE, BF, bf sont des » arcs de cercle décrits de G comme centre (*).

» On sait que la vitesse acquise par le mobile au point B » peut être représentée par le côté du carré équivalent au » double de l'aire EHHF; soit Q ce côté. D'autre part, d'après le » lemme précédent, cette vitesse est aussi proportionnelle au » sinus de l'angle $\beta B b$ que nous désignons par m; le cosinus » du même angle sera $n = \sqrt{1 - m^2}$ si le rayon trigonomé- » trique est 1. On aura donc (en désignant par a une constante) :

$$m = \frac{Q}{a}, \quad n = \sqrt{\frac{a^2 - Q^2}{a^2}},$$

« Posons $GA = GE = f$, $EO = e$, $GB = GF = z$, $B\beta = -dz$, » $b\beta = dy$ (l'arc βbf étant infiniment voisin de l'arc BF); nous » aurons

$$\frac{m}{n} = \frac{b\beta}{B\beta} = -\frac{dy}{dz}.$$

» Par conséquent,

$$dy = -\frac{Q dz}{\sqrt{a^2 - Q^2}}.$$

(Telle est l'équation différentielle de la courbe cherchée, Q étant une fonction connue de z, et les coordonnées d'un point B étant $GB = z$, angle $AGB = y$.)

« Dans le cas de la pesanteur uniforme, on a

$$FI = EH = g, \quad Q = \sqrt{2g(f - z)};$$

» par conséquent

$$dy = -\frac{\sqrt{2fg - 2gz}}{\sqrt{a^2 - 2fg + 2gz}}\, dz. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

(*) G représente le centre de la terre. Hermann suppose d'abord la pesanteur variable avec la distance du mobile à ce centre; il la suppose ensuite constante, mais admet toujours que son action est dirigée vers G.

L'ordonnée de la courbe HIK représente l'*accélération*; par suite, l'aire de cette courbe représente la vitesse.

» Pour intégrer l'équation (1), posons

$$\frac{2fg - 2gz}{a^2 - 2fg + 2gz} = s^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

» s étant une nouvelle variable; l'égalité (2) donne

$$2gz = \frac{(s^2 + h)(2fg - a^2)}{s^2 + 1}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

» où h désigne la constante $\frac{2fg}{2fg - a^2}$. Prenant la différentielle » (logarithmique) des deux membres de (3), on trouve

$$\frac{dz}{z} = -\frac{2sds}{s^2 + h} + \frac{2sds}{s^2 + 1}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

» Remplaçons dans la formule (1) la fraction par s et dz par la » valeur déduite de (4); nous aurons

$$\frac{dy}{z} = -\frac{2s^2ds}{s^2 + h} + \frac{2s^2ds}{s^2 + 1} = \frac{2hds}{s^2 + h} - \frac{2ds}{s^2 + 1}. \quad \ldots \quad (5)$$

» Posons encore

$$dA = \frac{\sqrt{h}ds}{s^2 + h}, \qquad dB = \frac{ds}{s^2 + 1},$$

» de sorte que (*)

$$A = \text{arc tg}\frac{s}{\sqrt{h}}, \qquad B = \text{arc tg}\, s,$$

$$\frac{dy}{z} = 2\sqrt{h}dA - 2dB. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

» Or $\frac{dy}{z}$ mesure l'angle BGb; donc, en intégrant l'équation (6) » entre les points O et B, on obtient

$$OGB = 2\sqrt{h}(A - A') - 2(B - B') \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

(*) Pour abréger, nous introduisons ici les notations modernes.

» Nous avons désigné par A′ et B′ les valeurs des quantités » A et B au point O, où

$$z = f - e, \quad s = \sqrt{\frac{2ge}{a^2 - 2ge}}.$$

» Pour construire le point de la courbe qui correspond à une » valeur donnée de z, portons sur les côtés d'un angle droit » ACB (fig. 10) les longueurs

$$CA = \sqrt{h}, \quad DC = 1, \quad BC = \sqrt{\frac{2ge}{a^2 - 2ge}}, \quad CF = \sqrt{\frac{2fg - 2gz}{a^2 - 2fg + 2gz}},$$

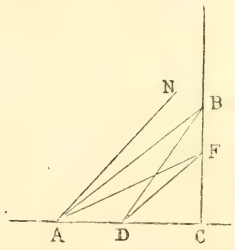


Fig. 10.

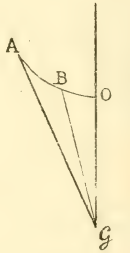


Fig. 11.

» puis menons les lignes AB, AF, DB, DF et faisons l'angle » NAF tel qu'il soit à BAF comme $\sqrt{h} : 1$. Cela fait, construisons » (fig. 11) l'angle BGO = 2 (BDF — NAF) et prenons GB = z; » B sera un point de la brachistochrone. »

On remarquera la grande analogie de cette solution avec celle de Jean Bernoulli quant à l'emploi du principe de Fermat; les différences proviennent de l'hypothèse faite sur la direction de l'action de la pesanteur, hypothèse qui se traduit plus facilement dans le système des coordonnées polaires.

f) *Euler.*

Dans la proposition 40 (*) du tome II de la *Mécanique*, Euler énonce le problème des brachistochrones en ces termes :

« *Trouver la loi générale suivant laquelle doit être construite* » *une courbe telle qu'un corps qui descend suivant cette ligne* » *parvienne le plus tôt possible à un point quelconque de la* » *courbe.* »

Voici sa solution ; elle ne fait aucune hypothèse particulière sur les forces motrices.

« Soit AMC (fig. 12) une telle courbe, sur laquelle le corps » parvienne de A en C en un temps plus court que sur toute » autre ligne passant par A et C. » Prenons sur cette ligne deux » points quelconques M et μ ; le » corps, en parcourant l'arc M$m\mu$ » pendant son mouvement sur AMC, » emploie un temps moindre que » pour parcourir tout autre arc » passant par M et μ. Supposons » maintenant les points M et μ infi- » niment voisins et considérons les » éléments Mm et $m\mu$ de la courbe ; » le temps employé pour parcourir » l'arc M$m\mu$ doit être un minimum, » c'est-à-dire, d'après les règles des » maxima et minima, ce temps est égal au temps qui corres- » pond à l'arc infiniment rapproché M$n\mu$. Si nous menons sur » l'axe AP les ordonnées MP, mp, $\mu\pi$, et si mp est équidistante » de MP, $\mu\pi$ et rencontre la seconde courbe en n, mn sera » infiniment petit par rapport aux éléments Mm, $m\mu$. Nous » avons donc l'équation

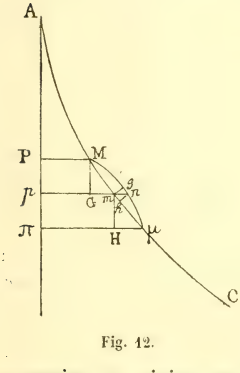


Fig. 12.

$$t.\mathrm{M}m + t.m\mu = t.\mathrm{M}n + t.n\mu. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

(*) Ces mêmes développements se trouvent déjà dans les *Commentarii Academiae Petropolitanae* de 1754.

» Représentons par $\sqrt{v}$ la vitesse du mobile sur les éléments
» Mm et Mn, par $\sqrt{v+du}$ sa vitesse sur $m\mu$, par $\sqrt{v+du+d^2w}$
» celle qu'il aurait sur $n\mu$; nous aurons l'équation

$$\frac{Mm}{\sqrt{v}}+\frac{m\mu}{\sqrt{v+du}}=\frac{Mn}{\sqrt{v}}+\frac{n\mu}{\sqrt{v+du+d^2w}} \quad . \quad . \quad (2)$$

» Mais on a

$$\frac{1}{\sqrt{v+du+d^2w}}=\frac{1}{\sqrt{v+du}}-\frac{d^2w}{2(v+du)\sqrt{v+du}}; \quad (3)$$

» par suite, si l'on décrit de M et μ comme centres les arcs
» infiniment petits mg et nh, on obtient

$$\frac{ng}{\sqrt{v}}=\frac{mh}{\sqrt{v+du}}+\frac{n\mu d^2w}{2(v+du)\sqrt{v+du}} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

» De plus,

$$\frac{1}{\sqrt{v+du}}=\frac{1}{\sqrt{v}}-\frac{du}{2v\sqrt{v}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\frac{1}{(v+du)\sqrt{v+du}}=\frac{1}{v\sqrt{v}}-\frac{3du}{2v^2\sqrt{v}}\,(*) \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

(*) du et d^2w représentent les accroissements infiniment petits de la quantité v au passage de M en m, et de la quantité $v+du$ au passage m en n.

L'égalité (5) équivaut à

$$\frac{1}{\sqrt{v+du+\delta(v+du)}}=\frac{1}{\sqrt{v+du}}+\delta\frac{1}{\sqrt{v+du}}=\frac{1}{\sqrt{v+du}}-\frac{\delta(v+du)}{2(v+du)^{\frac{3}{2}}},$$

où δ désigne une *variation*. Les relations (5) et (6) s'expliquent de la même manière :

$$\frac{1}{\sqrt{v+\delta v}}=\frac{1}{\sqrt{v}}+\delta\frac{1}{\sqrt{v}},$$

$$\frac{1}{(v+\delta v)\sqrt{v+\delta v}}=\frac{1}{v\sqrt{v}}+\delta\frac{1}{v\sqrt{v}}.$$

Pour passer de (2) à (4), on ajoute à (2) l'égalité (3) multipliée par $n\mu$, et l'on a égard aux relations

$$Mn-Mm=ng, \quad \mu m-\mu n=mh.$$

» Si l'on substitue ces valeurs dans (4) et qu'on néglige les » infiniment petits d'ordre supérieur, on trouve

$$2v(mh - ng) = mh.du - \mathrm{M}m\ d^2w.$$

» Les triangles nmg et $m\mathrm{MG}$, mnh et $m\mu\mathrm{H}$ étant semblables, » on a les proportions

$$\frac{ng}{mn} = \frac{m\mathrm{G}}{m\mathrm{M}}, \quad \frac{mh}{mn} = \frac{\mu\mathrm{H}}{m\mu};$$

» d'où

$$ng = \frac{m\mathrm{G}.mn}{\mathrm{M}m}, \quad mh = \frac{\mu\mathrm{H}.mn}{m\mu}.$$

» Par conséquent

$$2v\left(\frac{\mu\mathrm{H}}{m\mu} - \frac{m\mathrm{G}}{\mathrm{M}m}\right) = 2v\ \mathrm{diff.}\left(\frac{m\mathrm{G}}{\mathrm{M}m}\right) = \frac{m\mathrm{G}}{\mathrm{M}m}du - \frac{\mathrm{M}m}{mn}d^2w.$$

» Cette équation est homogène et détermine la nature de la » brachistochrone.

» Si l'on pose

$$\mathrm{MG} = m\mathrm{H} = dx, \quad m\mathrm{G} = dy, \quad \mathrm{M}m = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds,$$

» on aura

$$\mathrm{H}\mu = dy + d^2y, \quad m\mu = ds + d^2s.$$

» La substitution de ces valeurs donne

$$2vd\frac{dy}{ds} = \frac{dydu}{ds} - \frac{dsd^2w}{mn}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

» Si l'on détermine les quantités v, du, d^2w, au moyen des » forces agissant sur le mobile, l'équation (7) devient l'équation » différentielle de la brachistochrone. d^2w contiendra mn sous » une forme telle que mn disparaîtra des calculs. »

Euler fait remarquer que sa solution s'applique à des forces motrices quelconques et aussi à des résistances; que les solutions antérieures du problème de la brachistochrone supposent une

force de direction constante ou dirigée vers un centre fixe, ce qui entraîne $d^2w = 0$.

Dans la proposition 41 de la *Mécanique*, l'auteur achève la solution en soumettant le mobile à une force verticale P. On a alors

$$v = \int \mathrm{P}\,dx,$$

l'intégrale étant supposée nulle pour $x = 0$ si l'on fait partir le corps de A sans vitesse initiale. Il vient ainsi

$$du = \mathrm{P}\,dx = dv, \quad d^2w = 0,$$

car dx ne change pas quand on passe de m en n. L'équation (7) se réduit à

$$2v\,d\frac{dy}{ds} = \frac{dy\,dv}{ds}.$$

En intégrant, on trouve

$$2\log\frac{dy}{ds} = \log v - \log a, \quad \text{ou} \quad a\,dy^2 = v\,ds^2;$$

par conséquent

$$dx^2 \int \mathrm{P}\,dx = a\,dy^2 - dy^2 \int \mathrm{P}\,dx,$$

et la brachistochrone a pour équation

$$dy = \frac{dx\sqrt{\int \mathrm{P}\,dx}}{\sqrt{a - \int \mathrm{P}\,dx}}.$$

Si la force motrice est constante, on a $\mathrm{P} = g$; en écrivant gb au lieu de a, l'équation précédente devient

$$dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{b-x}}, \quad \text{ou} \quad ds = \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{b-x}}.$$

et on retrouve le résultat de Jean Bernoulli.

Euler traite encore d'autres cas particuliers et indique aussi la question inverse, savoir la détermination de la force pour laquelle une courbe donnée devient brachistochrone.

g) *Mac Laurin.*

Au § 574 du tome II du *Traité des Fluxions*, Mac Laurin reprend le problème tel que l'avait étudié Saurin. Il s'appuie sur le lemme suivant :

« *Étant donnés un point* M *et une droite* x'x (fig. 13), *la droite* MM' *que doit suivre un mobile allant du point* M *à la droite* x'x, *avec la vitesse donnée* v, *pour que le temps employé à la parcourir, diminué du temps employé à parcourir sa projection* mM' *avec la vitesse* v_1, *fournisse une différence minimum, satisfait à la condition que le sinus de l'angle d'incidence* mMM' *est égal au rapport* $\frac{v}{v_1}$ *des vitesses données.* »

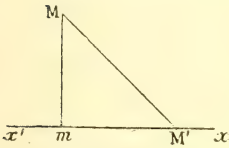


Fig. 13.

Cela posé, Mac Laurin aborde le problème suivant (*loc. cit.*, § 574) :

« *Trouver la ligne* DMH *sur laquelle doit se mouvoir un point matériel soumis à l'action de la pesanteur, pour aller d'un point donné* D *à une verticale donnée* vv', *dans un temps minimum* (fig. 14).

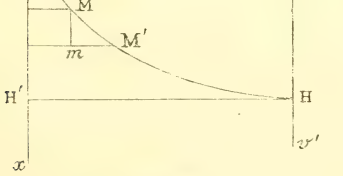


Fig. 14.

» Menons les horizontales Dv et HH' des points de départ et d'arrivée, ainsi que la verticale DH' du point de départ.

» Il est facile de reconnaître, *a priori*, que la courbe cher-
» chée ne saurait avoir aucun de ses points à gauche de la
» verticale DH′ ou au-dessous de l'horizontale HH′, et que,
» par suite, la brachistochrone sera comprise dans le rectangle
» DvHH′. Or, toutes les courbes qui joignent D au point (indé-
» terminé) H et qui sont comprises dans le rectangle DVHH′,
» ont la même projection horizontale HH′, et la vitesse acquise
» en H, par la chute sur l'une d'elles, a la même valeur v_1 pour
» toutes.

» Or si le temps employé par un mobile à parcourir la
» courbe DMM′H avec une vitesse variable est minimum, ce
» même temps diminué du temps nécessaire pour parcourir
» H′H avec la vitesse constante v_1, sera encore minimum; et si
» nous décomposons la courbe et la droite en un même nombre
» d'éléments correspondants MM′ et mM′, la différence des
» temps que l'on vient d'énoncer sera minimum, si l'on rend
» minimum cette différence élémentaire (*)

$$t.(\mathrm{MM}', v) - t.(m\mathrm{M}', v_1).$$

» Or, d'après le lemme, il suffit, en regardant MM′ comme
» rectiligne, que l'on ait

$$\sin m\mathrm{MM}' = \frac{v}{v_1}, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{ds} = \frac{v}{v_1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

» v désignant la vitesse acquise par le mobile à son arrivée en M,
» et les ordonnées étant parallèles à Dv.

» L'équation (1) est l'équation différentielle de la brachisto-
» chrone pour le cas où la pesanteur agit sur le mobile par des
» droites parallèles, l'intensité de la pesanteur étant ou con-
» stante, ou variable suivant une loi quelconque. On en déduit,
» en faisant successivement $v = v$ et $v = v_1$, que la courbe est
» tangente à la verticale DH′ et normale à la verticale vv'. Dans

(*) Nous désignons par $t.(s, v)$ le temps employé à parcourir la longueur s avec la vitesse v.

» le cas d'une pesanteur constante, on a $v = \sqrt{2gx}$, et l'équa-
» tion (1) caractérise une cycloïde (*). »

La méthode de Mac Laurin a quelque analogie avec la première de Jean Bernoulli. Dans le *Traité des Fluxions* (t. II, p. 574) se trouve aussi traitée, par le même procédé, la brachistochrone dans l'hypothèse d'une force centrale.

h) *Collignon.*

Pour trouver une nouvelle méthode indépendante du calcul des variations, nous devons passer immédiatement de 1742, année où parut le *Traité des Fluxions* de Mac Laurin, à 1874, année où Collignon publia son *Traité de Mécanique*. Voici comment ce géomètre traite le problème de la brachistochrone (t. III, p. 176) :

Soit (fig. 15) AmB la courbe cherchée. La fonction qui doit être minimum le long de cette courbe est la somme $\int \frac{ds}{v}$, prise entre A et B; mais $v = \sqrt{2gz}$, si l'on désigne par z la hauteur du point de départ A au-dessus du point où la vitesse est v.

La somme $\int \frac{ds}{\sqrt{z}}$ doit donc aussi être minimum. Menons entre les points A et B une infinité de plans horizontaux S, S', S'', ..., infiniment voisins; ce seront les surfaces de niveau du problème.

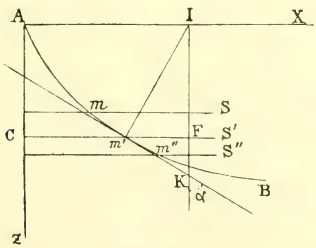


Fig. 15.

(*) Nous avons reproduit ici, en grande partie, l'analyse de M. Paul Serret dans ses *Méthodes en Géométrie* (pp. 115 et 116).

La condition du minimum se traduit géométriquement de la façon suivante :

Si l'on applique en un point quelconque m' pris sur la courbe à l'intersection du plan de niveau S' deux forces, l'une égale à $\frac{1}{\sqrt{z}}$ et dirigée suivant l'arc élémentaire $m'm$, l'autre égale à $\frac{1}{\sqrt{z+dz}}$ et dirigée suivant l'arc élémentaire $m'm''$, la résultante doit être normale à ce plan S'. Par conséquent : 1° la courbe est plane, car deux éléments consécutifs sont compris dans le même plan vertical ; 2° la projection horizontale de la force $\frac{1}{\sqrt{z}}$ est constante, puisqu'elle est détruite par la projection de force $\frac{1}{\sqrt{z+dz}}$ qui agit en sens contraire.

Appelons α l'angle de l'élément $m'm$ avec la verticale. La solution du problème sera donnée par la relation

$$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{z}} = \text{constante}.$$

Cette équation caractérise une cycloïde commençant au point A et qu'on obtiendra en faisant rouler un cercle au-dessous de la droite horizontale AX, menée dans le plan vertical passant par les deux point donnés.

Menons, en effet, au point m' la normale m'I à la courbe, et au point I, où elle coupe l'horizontale AX, élevons la perpendiculaire IK sur cette dernière droite, jusqu'à la rencontre en K avec la tangente m'K ; l'angle α = angle IKm' = angle Fm'I, IF = z. Nous aurons

$$\text{IF} = \text{I}m' \sin\alpha, \quad \text{I}m' = \text{IK}\sin\alpha;$$

donc

$$\text{IF} = \text{IK}\sin^2\alpha,$$

et par suite

$$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\text{IF}}} = \frac{1}{\sqrt{\text{IK}}}.$$

La quantité IK est donc constante tout le long de la courbe ; il est facile de reconnaître que cette propriété appartient à la cycloïde et à la cycloïde seule.

Cette solution, au premier abord, paraît plus simple et plus rapide que les précédentes; mais il convient de remarquer qu'il reste à démontrer que IK = constante définit une cycloïde. Jean Bernoulli, lui aussi, est arrivé à l'équation $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{z}} =$ constante, car l'équation $\frac{mn}{Mm}$: IC = constante (page 21) peut s'écrire $\frac{\sin\alpha}{y} =$ constante où $y = \sqrt{ax}$, ce qui conduit a $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{x}} =$ constante; mais il démontre l'interprétation géométrique de cette équation.

i) *Darboux.*

Voici, en résumé, la note de M. Darboux à la fin du *Cours de Mécanique* de Despeyrous.

Si l'on imagine une cycloïde ayant l'horizontale CD pour base et passant par les points A et B, le temps que mettra le point matériel pesant, placé primitivement en A, avec la même vitesse que s'il était tombé librement d'un point de CD, pour aller au point B, sera moindre quand on l'assujettira à parcourir la cycloïde AMB que s'il suivait toute autre courbe ANB située dans le plan vertical des points A et B. Pour le démontrer, menons (fig. 16) la normale à la cycloïde; cette normale enve-

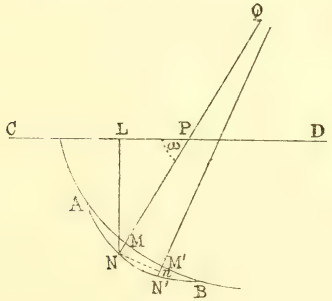


Fig. 16.

loppera, comme on sait, une autre cycloïde qu'elle touche au point Q tel que PQ = PM.

Si l'on désigne par ω l'angle CPM et par a le rayon du cercle générateur de la cycloïde, on a

$$PM = PQ = 2a \sin \omega.$$

Supposons que l'on définisse la courbe ANB par la longueur $\rho = PN$, cette longueur essentiellement positive pourra être plus grande ou plus petite que PM. Menons la normale à la cycloïde au point M', infiniment voisin de M et soit N' le point où elle coupe la courbe ANB. La vitesse que le point matériel pesant aura en N dans son mouvement sur ANB, aura évidemment pour expression

$$\sqrt{2g \cdot NL} = \sqrt{2g\rho \sin \omega},$$

NL étant la perpendiculaire abaissée sur CD; par conséquent, le temps que le point mobile mettra pour aller de A en B par ANB aura pour expression

$$\int_A^B \frac{NN'}{\sqrt{2g\rho \sin \omega}}.$$

Il nous reste à évaluer NN'. Abaissons de N la perpendiculaire Nn sur la normale M'N'; dans le triangle rectangle NN'n on aura, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$NN' = \frac{Nn}{\sin i},$$

i étant l'angle de MN avec la tangente en N à ANB.

D'autre part, comme les normales en M et M' font un angle égal à $d\omega$ et se coupent en un point très voisin de Q, on a, au degré d'approximation déjà indiqué,

$$Nn = (\rho + PQ)\, d\omega = (\rho + 2a \sin \omega)\, d\omega,$$

et l'on obtient pour expression définitive du temps :

$$\int_A^B \frac{\rho + 2a \sin \omega}{\sqrt{2g\rho \sin \omega}} \cdot \frac{d\omega}{\sin i}.$$

Il s'agit d'établir que cette intégrale est plus grande que celle qui correspond à la cycloïde AMB. Si nous supprimons sin i dans chaque élément, cette suppression ne peut que diminuer l'intégrale qui devient alors

$$\int_A^B \frac{(\rho + 2a\sin\omega)d\omega}{\sqrt{2g\rho\sin\omega}} = \int_A^B \left(\sqrt{\rho} + \frac{2a\sin\omega}{\sqrt{\rho}}\right)\frac{d\omega}{2g\sqrt{\sin\omega}}.$$

Chaque élément de l'intégrale, considéré comme fonction de ρ, est la somme de deux quantités dont le produit est constant. Chacun des éléments et, par suite, l'intégrale totale sera minimum lorsque $\rho = 2a\sin\omega$; or les deux hypothèses

$$\sin i = 1 \quad \rho = 2a\sin\omega$$

correspondent au mouvement sur la cycloïde AHB. La proposition que nous avions en vue est donc démontrée.

Cette démonstration suppose, comme il a été dit dans l'énoncé, que toutes les courbes considérées sont situées dans le plan vertical passant par les deux points donnés.

Pour généraliser le problème et l'étendre à toutes les courbes de l'espace, l'auteur rappelle cette remarque due à Ossian Bonnet : Projetant la courbe considérée dans l'espace sur le plan de la cycloïde, on reconnaît immédiatement que le temps mis par le mobile à parcourir la projection est moindre que celui employé pour parcourir la courbe de l'espace.

En effet, les éléments correspondants de deux courbes sont parcourus avec la même vitesse, mais l'élément de la projection est toujours inférieur ou tout au plus égal à celui de l'espace. La brachistochrone, parmi toutes les courbes de l'espace, est donc bien la cycloïde AMB.

j) *Flamant.*

La méthode de cet auteur s'inspire, comme on le verra aisément, des trois précédentes.

Voici comment il l'expose dans sa *Mécanique.*

Remarquons d'abord, dit il, que quelle que soit la forme de la trajectoire, la vitesse du point lorsqu'il arrivera à un plan S' (fig. 15), à une hauteur verticale AC au-dessus du point de départ, sera toujours la même. En effet, on doit toujours avoir

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \int_0^i g ds.$$

Le produit du second membre est toujours, quelle que soit la forme de la trajectoire Am' entre les points A et m', égal au produit de l'accélération g par la projection AC de l'espace parcouru.

Supposons la vitesse initiale nulle; nous aurons toujours

$$v^2 = 2g.\,AC.$$

Il en résulte d'abord que la courbe cherchée sera dans le plan vertical passant par les deux points donnés. On le démontre au moyen du raisonnement de Bonnet, rapporté plus haut.

Prenons donc le plan vertical mené par les points A et B pour le plan de la figure, l'origine des coordonnées au point A, l'axe des x horizontal, l'axe des z vertical et dirigé vers le bas.

Divisons la courbe par des horizontales équidistantes, dont l'intervalle sera dz; considérons trois points consécutifs m, m', m'' de la courbe cherchée, désignons par v la vitesse du point mobile dans le premier intervalle de m à m', par $v + dv$ cette vitesse dans le second de m' à m'' et par i et $i + di$ les angles formés par les éléments $m'm$ et $m'm''$ avec la verticale. D'après le théorème de Fermat, on doit avoir

$$\frac{\sin i}{v} = \frac{\sin(i + di)}{v + dv} = \text{constante},$$

ou bien, puisque $v = \sqrt{2gz}$ et $\sin i = \frac{dx}{ds}$,

$$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{1}{\sqrt{2gz}} = \text{constante} = \frac{1}{\sqrt{2ga}};$$

ou encore

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{\frac{z}{a}}.$$

Mais $dx = \sqrt{ds^2 - dz^2}$; cette équation peut donc s'écrire :

$$ds = \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{z}{a}}}.$$

On en tire par intégration et en remarquant, pour déterminer la constante, que s et z s'annulent en même temps,

$$s = 2a - 2\sqrt{a(a - z)},$$
$$(2a - s)^2 = 4a(a - z).$$

Si nous transportons l'origine au point $s = 2a$, $z = a$, on obtient

$$s^2 = 4az,$$

équation d'une cycloïde dont le cercle générateur a pour diamètre a. Pour déterminer a, on exprime que la courbe passe par le point donné B.

k) *Paul Haag.*

Pour démontrer que la courbe se trouve dans un plan vertical, Haag s'appuie sur une proposition qu'il a démontrée dans le cas général d'une force quelconque, à savoir que le plan osculateur de la trajectoire renferme la normale à la surface de niveau; donc, dans le cas de la pesanteur, ce plan osculateur est constamment vertical. On en conclut immédiatement la propriété énoncée.

Cela posé, traçons (fig. 17) dans le plan vertical deux axes m_1x et m_1z, le premier horizontal, le second vertical et dirigé vers le bas dans le sens de la pesanteur. Soit m_1mm_2 la courbe

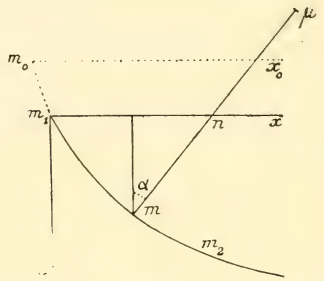


Fig. 17.

cherchée. La vitesse initiale étant nulle, en un point quelconque m la vitesse du point mobile sera $\sqrt{2gz}$. La composante normale de la résultante dirigée vers le rayon de courbure aura donc pour expression $\frac{2mgz}{\rho}$, ρ étant le rayon de courbure de la trajectoire. Mais cette composante doit être égale et opposée à la projection de mg sur la normale à la courbe ; on a donc, en valeur absolue,

$$\frac{2mgz}{\rho} = mg\cos\alpha,$$

d'où

$$\rho = \frac{2z}{\cos\alpha}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a).$$

La trajectoire cherchée est donc telle, que le rayon de courbure $m\mu$ doit être le double de la normale mn, ce qui caractérise une cycloïde renversée à base horizontale, dont le point de départ m_1 est un point de rebroussement.

Si la vitesse, au lieu d'être nulle au point de départ, avait une valeur v_0 de grandeur donnée, mais indéterminée en direction,

en désignant par h la hauteur de chute $\frac{v_0^2}{2g}$ correspondant à cette vitesse, l'équation (a) deviendrait

$$\rho = \frac{2(z+h)}{\cos\alpha}.$$

La courbe cherchée est encore une cycloïde, mais la droite de base de cette cycloïde au lieu d'être m_1x serait une parallèle m_0x_0 à cette horizontale menée à une hauteur h au-dessus de m. Le mouvement sur l'arc de cycloïde m_1m s'effectuerait d'ailleurs comme si le point mobile était parti d'un point de m_0x_0 sans vitesse initiale (*).

(*) La démonstration suivante, empruntée au *Cours de Mécanique* de M. Ronkar, combine les deux méthodes de Flamant et de Haag.

Soit (fig. 15) AmB la courbe cherchée ; la vitesse initiale étant nulle, on a au point m' : $v = \sqrt{2gz}$. Si l'on trace une infinité de plans horizontaux infiniment voisins, nous admettons qu'entre deux de ces plans la vitesse est constante et égale à v entre S et S', et à $v + dv$ entre S' et S''. Si le minimum a lieu, nous aurons en posant $i' = i + di$, $di = \varepsilon$, successivement :

$$v\sin i' = (v+dv)\sin i, \quad v(\sin i\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\cos i) = (v+dv)\sin i,$$

$$v(\sin i + \varepsilon\cos i) = v\sin i + \sin i dv;$$

d'où

$$v\varepsilon\cos i = dv\sin i,$$

ce qui donne

$$\operatorname{cotg} i \times \varepsilon = \frac{dv}{v} = \frac{dv}{dt} : \frac{v}{dt}$$

ou encore

$$\operatorname{cotg} i = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{vdi}{dt}} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{v^2}{\rho}} = \frac{m\frac{dv}{dt}}{m\frac{v^2}{\rho}} = \frac{T}{N},$$

T et N étant les composantes tangentielle et centripète de la force effective.

Pour que le point soit libre, il faut ajouter la réaction normale R de la courbe. Le point est donc libre sous l'action de R et de mg, or

$$R = mg\sin i + \frac{mv^2}{\rho}$$

Les composantes de R et de mg donnent la force effective, de même

Nous avons dit (page 17) que Paul Haag avait rapproché autant que possible la solution de ce problème de celle du problème de la moindre action. Dans cette analyse, nous avons supprimé tout ce qui regarde ce dernier problème, comme ne rentrant pas dans le sujet de notre étude.

pour T et N. Projetant R, mg, T et N sur le rayon de courbure, on aura

$$mg \sin i + \frac{mv^2}{\rho} = N;$$

mais $N = T \operatorname{tang} i$, $T = mg \cos i$, donc

$$\frac{mv^2}{\rho} = mg \sin i \quad \text{ou} \quad \frac{2mgz}{\rho} = mg \sin i, \quad \frac{2z}{\rho} = \sin i.$$

Comme $m'l = \frac{z}{\sin i}$, on a $\rho = 2m'l$, ce qui montre que la courbe cherchée est une cycloïde dont A est un point de rebroussement.

CHAPITRE II.

MÉTHODES QUI DÉPENDENT DU CALCUL DES VARIATIONS.

L'introduction du calcul des variations marque un grand progrès dans les méthodes de recherche des maxima et minima d'une intégrale définie. Les règles de ce calcul permettent, en effet, d'étudier de telles questions d'une façon beaucoup plus générale. Pour notre problème, par exemple, aucune condition relative aux points extrêmes de la courbe n'arrête les recherches. Alors que les anciens procédés, pleins d'artifices particuliers à chaque question et parfois si pénibles, ne permettaient de laisser varier que le point d'arrivée du mobile, le nouveau calcul permet de faire sur les deux limites les hypothèses les plus diverses : on les assujettit à se trouver soit sur des courbes, soit sur des surfaces données, et toujours on arrive à la solution, d'une manière élégante et rapide. De plus, on obtient plus aisément la brachistochrone dans le cas où l'on suppose soit une résistance du milieu dans lequel s'effectue le mouvement, soit des forces quelconques agissant sur le mobile.

Aussi, pendant plus d'un siècle, on n'employa plus que les variations, et même après Collignon on ne traita plus par des méthodes se rapprochant de celles des Bernoulli que la brachistochrone entre deux points donnés, la pesanteur seule agissant sur le mobile.

a) *Lagrange.*

L'inventeur du calcul des variations ne manqua pas de traiter par sa méthode le problème qui occupa si fort les géomètres de la fin du XVII^{e} siècle, c'est-à-dire celui des brachistochrones. L'étude qu'il fit de cette question est une application des for-

mules générales relatives au maximum ou au minimum d'une intégrale définie.

« Si, dit-il, Z désigne une fonction déterminée des variables » x, y, z et de leurs différentielles premières, secondes, ..., il » faut trouver la relation qui doit exister entre les variables x, » y, z, pour que l'intégrale définie $\int Z$ soit un maximum ou » un minimum.

» On sait (*) qu'il faut différentier $\int Z$ en regardant comme » variables x, y, z et leurs dérivées, puis égaler cette différen- » tielle à 0.

» Si nous désignons par ∂ cette différentielle, la relation » demandée sera

$$\partial \int Z = 0,$$

» ou, ce qui est équivalent,

$$\int \partial Z = 0.$$

» ∂Z sera un polynôme en ∂x, ∂dx, ∂d^2x, ..., ∂y, ∂dy, ∂d^2y, » ..., ∂z, ∂dz, ∂d^2z, ...; remplaçons ∂dx, ... par $d\partial x$, ..., et » intégrons par parties; nous obtiendrons pour $\int \partial Z$ une expres- » sion composée de deux parties : l'une renfermant les quantités » sous le signe $\int$ et que nous désignerons par B, l'autre indé- » pendante du signe $\int$ que nous désignerons par C. La relation » demandée nous donnera alors deux égalités : l'une indéfinie, » $B = 0$; l'autre déterminée, $C = 0$.

» Les conditions auxquelles doivent satisfaire les variables, » nous seront données par la première égalité de la manière » suivante :

» On examine d'abord si, par la nature du problème, il n'y a » pas de relations entre les variations ∂x, ∂y, ∂z; puis, les ayant » réduites au plus petit nombre possible, on égalera à 0 leurs » coefficients : ce sont ces équations qui seront les relations » demandées.

(*) Nous ne donnons ici qu'une analyse très abrégée du mémoire de Lagrange.

» Pour le cas des brachistochrones, l'intégrale à rendre mini-
» mum est le temps donné par :

$$\int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{x}},$$

» l'axe des x étant vertical.

» Désignons par ds le numérateur de cette fraction ; la condi-
» tion de minimum s'écrira :

$$\delta \int \frac{ds}{\sqrt{x}} = \int \delta \frac{ds}{\sqrt{x}} = 0,$$

» ou

$$\int \left(\frac{dx\delta dx}{ds\sqrt{x}} + \frac{dy\delta dy}{ds\sqrt{x}} + \frac{dz\delta dz}{ds\sqrt{x}} - \frac{ds\delta x}{2x\sqrt{x}} \right) = 0,$$

» et en intégrant par parties :

$$\frac{dx}{ds\sqrt{x}}\delta x + \frac{dy}{ds\sqrt{x}}\delta y + \frac{dz}{ds\sqrt{x}}\delta z$$

$$-\int \left[\delta x \left(d\frac{dx}{ds\sqrt{x}} + \frac{ds}{2x\sqrt{x}} \right) + \delta y d\frac{dy}{ds\sqrt{x}} + \delta z d\frac{dz}{ds\sqrt{x}} \right] = 0.$$

» Nous devons donc avoir les trois relations

$$\frac{ds}{2x\sqrt{x}} + d\frac{dx}{ds\sqrt{x}} = 0, \quad d\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0, \quad d\frac{dz}{ds\sqrt{x}} = 0.$$

» Mais si nous multiplions la seconde de ces équations par $\frac{2dy}{ds\sqrt{x}}$,
» la troisième par $\frac{2dz}{ds\sqrt{x}}$, en additionnant et divisant par $\frac{2dx}{ds\sqrt{x}}$,
» nous retrouvons la première. Il suffit donc de considérer
» deux de ces équations. Intégrons les deux dernières ; nous
» aurons, a et b étant deux constantes :

$$\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad \frac{dz}{ds\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \quad \ldots \quad (1)$$

» ou, en divisant l'une par l'autre ces deux équations :

$$\frac{dy}{dz} = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

» La courbe cherchée est donc plane.

» Si on la rapporte à deux axes coordonnés pris dans son » plan, on aura (*)

$$dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}.$$

» La courbe est donc une cycloïde décrite sur une base hori- » zontale, par un cercle de diamètre a. »

Nous avons parlé, dans la première partie, des remarques du chevalier de Borda et des perfectionnements qu'il crut apporter à la nouvelle méthode. Dans un article des *Miscellanea Taurinensia* (1766-1769), Lagrange, en développant plus amplement sa théorie, montre que les critiques de de Borda sont peu fondées. Le peu de différence entre les deux méthodes nous dispense de rapporter ici la solution de de Borda.

Fontaine, en parlant de la nouvelle méthode, avait dit que *Lagrange s'était égaré dans la route qu'il avait prise, pour n'en avoir pas connu la vraie théorie,* et avait publié deux méthodes qu'il croyait *nouvelles et fort supérieures à toutes celles connues pour le même objet.*

Lagrange, dans l'article cité plus haut, émet l'avis que les deux méthodes de Fontaine ne sont l'une que celle d'Euler dans *Methodus inveniendi...* « *L'autre,* dit-il, *est la même quant* » *au fond, que ma méthode, dont elle ne diffère que par la manière* » *vague et imparfaite dont elle est présentée* ».

Nous ne rapportons pas plus les méthodes de Fontaine que la solution de de Borda.

(*) Il suffit de supposer $z = 0$, ce qui réduit la première des équations (1) à

$$\sqrt{a}\,dy = \sqrt{x}\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

b) *Poisson.*

Nous modifions quelque peu le passage de l'ouvrage de Poisson concernant la brachistochrome et séparons les cas particuliers qu'il considère.

A étant le point de départ et B le point d'arrivée du mobile, soient (x, y, z) les coordonnées rectangulaires du point M où se trouve le mobile au bout du temps t. Soit aussi s l'arc AM qu'il a parcouru. En supposant l'axe des x vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur, et désignant par α la valeur de x au point A, la vitesse acquise $\frac{ds}{dt}$ en M sera la vitesse due à la hauteur $x - \alpha$; en représentant la gravité par g, on aura donc

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(x-\alpha)};$$

en faisant

$$\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} = u, \quad \text{d'où} \quad ds = udx,$$

il en résulte

$$\sqrt{2g}\, dt = \frac{udx}{\sqrt{x-\alpha}}.$$

Donc en appelant β la valeur de x au point B, t' le temps que le mobile emploiera à aller de A en B, nous aurons

$$t'\sqrt{2g} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{udx}{\sqrt{x-\alpha}}.$$

Il faut donc déterminer la courbe pour laquelle cette intégrale est un minimum; mais pour plus de généralité, nous considérerons l'intégrale

$$U = \int_{\alpha}^{\beta} Xudx,$$

dans laquelle X est une fonction donnée de x, ce qui nous permettra de résoudre un autre problème du même genre.

Pour celui dont il s'agit ici, on prendra $(x-\alpha)^{-\frac{1}{2}} = X$.

Désignons par i une quantité constante et infiniment petite, par ∂y et ∂z deux fonctions arbitraires de x assujetties seulement à la condition d'être nulles pour $x = \alpha$ et $x = \beta$, et de ne pas devenir infinies pour des valeurs intermédiaires de x. Soient U′ et u' ce que deviennent U et u lorsqu'on y remplace y et z par $y + i\partial y$, $z + i\partial z$, de sorte que

$$U' = \int_{\alpha}^{\beta} X u' dx,$$

intégrale qui répondra à une autre courbe AM′B, passant comme la courbe cherchée par les deux points A et B et s'écartant infiniment peu de celle-ci. Nous aurons ainsi

$$U' - U = \int_{\alpha}^{\beta} X(u' - u)\, dx,$$

et d'après la propriété de AMB, il faut que cette différence soit plus grande que 0, quelles que soient les valeurs de ∂y et ∂z et quel que soit le signe de i. Or, en développant $(u' - u)$ suivant les puissances de i et en désignant par $i\partial u$ le premier terme de son développement, le premier terme de U′ — U sera

$$i \int_{\alpha}^{\beta} X \partial u dx;$$

d'où l'on conclut que l'on doit avoir

$$\int_{\alpha}^{\beta} X \partial u dx = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

sans quoi la différence U′ — U changerait de signe avec i. Cette condition est commune au maximum et au minimum ; il faudrait

donc encore, pour avoir un minimum, que le coefficient de i^2 fût positif. Mais il est évident que t' n'a pas de maximum; il suffit donc de satisfaire à (a) dans le problème de la brachistochrone.

La quantité $i\partial u$ n'est autre chose que la différentielle de u prise par rapport à y et z et dans laquelle les accroissements de y et z sont représentés par $i\partial y$ et $i\partial z$. En supprimant le facteur i commun à $i\partial u$ et à sa valeur, on aura donc

$$\partial u = \frac{1}{u}\frac{dy}{dx}\frac{d\partial y}{dx} + \frac{1}{u}\frac{dz}{dx}\frac{d\partial z}{dx},$$

en sorte que l'équation (a) deviendra

$$\int_\alpha^\beta \frac{X}{u}\frac{dy}{dx}\frac{d\partial y}{dx}\,dx + \int_\alpha^\beta \frac{X}{u}\frac{dz}{dx}\frac{d\partial z}{dx}\,dx = 0. \quad . \quad . \quad (b)$$

Mais en intégrant par parties et observant que ∂y et ∂z sont nulles, par hypothèse, aux deux limites $x = \alpha$, $x = \beta$, on a

$$\int_\alpha^\beta \frac{X}{u}\frac{dy}{dx}\frac{d\partial y}{dx}\,dx = -\int_\alpha^\beta \frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\partial y\,dx,$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{X}{u}\frac{dz}{dx}\frac{d\partial z}{dx}\,dx = -\int_\alpha^\beta \frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dz}{dx}\right)}{dx}\partial z\,dx,$$

ce qui change l'équation (b) en celle-ci :

$$\int_\alpha^\beta \left[\frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\partial y + \frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dz}{dx}\right)}{dx}\partial z\right] dx = 0.$$

Or ∂y et ∂z étant des fonctions arbitraires de x, cette intégrale

ne peut être nulle, à moins que la quantité comprise sous le signe $\int$ ne soit elle-même nulle; on aura donc

$$\frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\delta y + \frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dz}{dx}\right)}{dx}\delta z = 0.$$

Dans le cas considéré, δy et δz sont indépendantes entre elles; il faut donc que leurs coefficients soient séparément nuls, c'est-à-dire :

$$\frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = 0, \quad \frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dz}{dx}\right)}{dx} = 0.$$

En intégrant et désignant par a et a' deux constantes, nous aurons

$$\frac{X}{u}\frac{dy}{dx} = a, \quad \frac{X}{u}\frac{dz}{dx} = a'; \quad \ldots\ldots \quad (c)$$

par conséquent,

$$a'\frac{dy}{dx} - a\frac{dz}{dx} = 0.$$

Intégrant de nouveau et désignant par γ une troisième constante arbitraire, il vient

$$a'y - az = \gamma.$$

La courbe est donc plane et comprise dans un plan vertical.

Prenons ce plan comme plan des x, y; nous aurons

$$u = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

et il suffira de retenir la première équation (c), qui deviendra

$$X dy = a\sqrt{dx^2 + dy^2};$$

d'où

$$dy = \frac{a dx}{\sqrt{X^2 - a^2}}.$$

Pour le cas que nous considérons,

$$X = (x - \alpha)^{-\frac{1}{2}};$$

donc

$$dy = \frac{(x - \alpha)\, dx}{\sqrt{a(x - \alpha) - (x - \alpha)^2}},$$

en écrivant $\frac{1}{\sqrt{a}}$ au lieu de a.

Cette équation est l'équation différentielle d'une cycloïde dont la base est l'horizontale passant par A et dont le cercle générateur a un diamètre égal à a.

Roger, dans sa thèse, ne fait qu'indiquer à grands traits la marche suivie par ses prédécesseurs dans le cas considéré dans cette partie, à savoir celui où les points de départ et d'arrivée du mobile sont donnés. Nous verrons plus loin comment il traite la brachistochrone sur une surface donnée.

Nous laisserons aussi pour la troisième partie les recherches du Père Jullien et celles de M. Haton de la Goupillière.

c) *A. Meyer.*

Soient A, B deux points donnés, et (a, b, c), (α, β, γ) leurs coordonnées rectangulaires. Désignons par t le temps de la descente de A en B; t devra donc être minimum. Soient encore F la force normale qui retient le point sur sa trajectoire, g la gravité dirigée parallèlement à l'axe des y, enfin μ, ν, π les angles de la direction de F avec les axes des x, des y et des z; on aura

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F\cos\mu, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = F\cos\nu + g, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = F\cos\pi.$$

Multiplions la première de ces égalités par dx, la deuxième par dy, la troisième par dz et ajoutons; il vient

$$\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} = g\,dy + F(\cos\mu\,dx + \cos\nu\,dy + \cos\pi\,dz). \quad (1)$$

Puisque la force F est normale à la courbe, on a

$$\cos\mu\, dx + \cos\nu\, dy + \cos\pi\, dz = 0.$$

L'équation (1) se réduit donc à

$$\frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dt^2} = gdy. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Or

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2};$$

d'où, en différentiant,

$$vdv = \frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dt^2}.$$

L'équation (2) pourra donc s'écrire

$$vdv = gdy,$$

ou, en intégrant,

$$v^2 = 2gy + C.$$

Si nous supposons le point mobile sans vitesse initiale, on aura pour le point A : $2gb + C = 0$ ou $2gb = -C$; donc l'équation précédente prend la forme

$$v = \sqrt{2g(y-b)}.$$

Mais

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{dy\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2} + \frac{dz^2}{dy^2}}}{\sqrt{2g(y-b)}},$$

d'où

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_b^\beta \frac{dy\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2} + \frac{dz^2}{dy^2}}}{\sqrt{y-b}}.$$

Posons

$$p = \frac{dx}{dy}, \quad q = \frac{dz}{dy}, \quad w = \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad u = \sqrt{y - b};$$

pour que t soit minimum, on devra avoir

$$\sqrt{2g}\,\delta t = \left[\frac{p}{wu}\right]_\beta \delta x_\beta + \left[\frac{q}{wu}\right]_\beta \delta z_\beta - \left[\frac{p}{wu}\right]_b \delta x_b - \left[\frac{q}{wu}\right]_b \delta z_b$$
$$- \int_b^\beta \left\{ \delta x \frac{d\left(\frac{p}{wu}\right)}{dy} + \delta z \frac{d\left(\frac{q}{wu}\right)}{dy} \right\} dy = 0.$$

Cette équation se décompose en

$$\left[\frac{p}{wu}\right]_\beta \delta x_\beta + \left[\frac{q}{wu}\right]_\beta \delta z_\beta - \left[\frac{p}{wu}\right]_b \delta x_b - \left[\frac{q}{wu}\right]_b \delta z_b = 0,$$

$$\frac{d\left(\frac{p}{wu}\right)}{dy} = 0, \quad \frac{d\left(\frac{q}{wu}\right)}{dy} = 0.$$

En intégrant les deux dernières, on trouve

$$\frac{p}{wu} = A, \quad \frac{q}{wu} = B;$$

d'où

$$Aq - Bp = 0,$$

ou enfin

$$Az - Bx = C,$$

équation d'un plan perpendiculaire au plan des xz; la courbe cherchée se trouve donc dans ce plan.

Prenons le plan de la courbe pour plan des xy; on aura $q = 0$, donc

$$w = \sqrt{1 + p^2} = \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}},$$

$$p = Awu = A\sqrt{1 + p^2}\sqrt{y - b},$$

d'où

$$p = \frac{dx}{dy} = \frac{A(y-b)}{\sqrt{y-b-A^2(y-b)^2}},$$

ou, en posant $A = \frac{1}{\sqrt{C}}$,

$$dx = \frac{(y-b)\,dy}{\sqrt{C(y-b)-(y-b)^2}}.$$

Cette équation appartient à une cycloïde dont la base est une horizontale menée par le point de départ A du mobile, le cercle générateur ayant pour diamètre C.

Intégrant cette équation et représentant $(y-b)$ par u, on trouve

$$x-k = \int \frac{u\,du}{\sqrt{Cu-u^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{C\,du}{\sqrt{Cu-u^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{(C-2u)\,du}{\sqrt{Cu-u^2}};$$

posant encore $v = \frac{2u}{C}$, $w = Cu - u^2$, on obtient

$$x-k = \frac{1}{2}C\int \frac{dv}{\sqrt{2v-v^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{dw}{\sqrt{w}}.$$

De là, on conclut :

$$x-k = \frac{1}{2}C \arccos\frac{C-2(y-b)}{C} - \sqrt{C(y-b)-(y-b)^2}.$$

La constante C se détermine en exprimant que la courbe passe par les points A et B, ce qui donne $k = a$ et

$$\alpha - a = \frac{1}{2}C \arccos\frac{C-2(\beta-b)}{C} - \sqrt{C(\beta-b)-(\beta-b)^2},$$

d'où l'on peut tirer la valeur de C.

Laurent, dans son *Cours de mécanique*, suit à peu près la même méthode ; mais il suppose la brachistochrone située dans le plan vertical des deux points donnés. Il choisit d'abord pour axes de coordonnées une horizontale et une verticale passant par le point d'arrivée ; pour intégrer l'équation, il transporte les axes au point de départ.

d) *Jordan.*

Jordan étudie le problème dans l'espace et suppose le mobile animé d'une vitesse initiale v_0.

Prenant z comme variable indépendante et désignant par x', y' les dérivées $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, il obtient pour différentielle de l'arc de la courbe cherchée l'expression

$$\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}\, dz,$$

et pour la vitesse v en un point quelconque

$$\sqrt{v_0^2 - 2g(z - z_0)}.$$

La durée du trajet sera ainsi

$$\mathrm{I} = \int_{z_0}^{z_1} \frac{ds}{v} = \int_{z_0}^{z_1} \frac{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}}{\sqrt{v_0^2 - 2g(z - z_0)}}\, dz.$$

La condition du minimum est $\delta \mathrm{I} = 0$, c'est-à-dire

$$d\mathrm{I} = \mathrm{H} + \int_{z_0}^{z_1} [\mathrm{M}\delta x + \mathrm{N}\delta y]\, dz = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$\mathrm{H} = \left[\frac{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}}{\sqrt{v_0^2 - 2g(z - z_0)}}\, \delta z + \frac{x'\delta x + y'\delta y}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}\sqrt{v_0^2 - 2g(z - z_0)}} \right]_0^1$$

$$= \left[\frac{\delta z + x'(\delta x + x'\delta z) + y'(\delta y + y'\delta z)}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}\sqrt{v_0^2 - 2g(z - z_0)}} \right]_0^1,$$

$$\mathrm{M} = -\frac{d}{dz} \frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}\sqrt{v_0^2 - 2g(z - z_0)}},$$

$$\mathrm{N} = -\frac{d}{dz} \frac{y'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}\sqrt{v_0^2 - 2g(z - z_0)}}.$$

Les équations différentielles de la courbe seront donc

$$M = 0, \qquad N = 0;$$

elles donnent immédiatement par intégration :

$$\frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}\sqrt{v_0^2 - 2g(z - z_0)}} = C, \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}\sqrt{v_0^2 - 2g(z - z_0)}} = C_1$$

et, par suite,

$$y' = \frac{C}{C_1}x' \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{C}{C_1}x + C_2,$$

C, C_1, C_2 étant des constantes.

La courbe est donc dans un plan vertical. Si nous prenons ce plan pour le plan des xz, on a $y = 0$; l'équation de la courbe se réduit alors à (1), où l'on fait $y' = 0$. Posons, pour abréger,

$$z_0 + \frac{v_0^2}{2g} = a, \quad \frac{1}{2gC^2} - z_0 - \frac{v_0^2}{2g} = b;$$

nous aurons pour équation de la courbe

$$x' = \sqrt{\frac{a - z}{b + z}}.$$

Si l'on fait

$$z = \frac{a - b}{2} - \frac{a + b}{2}\cos t, \quad \ldots \quad (2)$$

il vient

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a + b}{2}\sin t \,.\, x' = \frac{a + b}{2}\sin t\sqrt{\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}}$$

$$= \frac{a + b}{2}(1 - \cos t) \ (^*),$$

(*) Nous reproduisons textuellement les calculs de l'auteur, sans corriger les erreurs de signe.

d'où

$$x = \frac{a+b}{2}(t - \sin t) + k, \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

k étant une constante. Les équations (2) et (5) peuvent s'écrire

$$z + b = \frac{a+b}{2}(1 - \cos t),$$

$$x - k = \frac{a+b}{2}(t - \sin t);$$

elles représentent une cycloïde dont la droite directrice est parallèle à l'axe des x. Si les points (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) sont supposés donnés, δx_0, δy_0, δz_0, δx_1, δy_1, δz_1 sont nuls et la quantité H s'évanouit d'elle-même. Mais les quatre constantes introduites par l'intégration des équations $M = 0$, $N = 0$ se détermineront en exprimant que la courbe passe par les deux points donnés.

e) *Massau.*

Dans le tome II du *Cours de Mécanique* (édition 1896) professé à l'Université de Gand par M. Massau, se trouve une étude intéressante de la brachistochrone. L'auteur n'emploie pas explicitement la méthode des variations; mais comme il s'appuie sur des propriétés résultant de cette méthode, nous plaçons ici sa solution.

M. Massau résout d'abord le problème suivant :

Chercher la courbe par laquelle il faut joindre le point A *au point* B *pour qu'un point matériel placé en* A *sans vitesse initiale arrive en* B *sous l'action d'une force donnée et en glissant sans frottement sur la courbe, dans le moindre temps possible.*

Nous supposons que la force dérive d'une fonction $U(x, y, z)$ et nous généralisons en disant que les points A et B sont des points inconnus de deux surfaces données. Si l'on connait l'énergie du point

$$\frac{mv_0^2}{2} - U(x_0, y_0, z_0) = h, \quad \frac{mv^2}{2} - U(x, y, z) = h,$$

le temps résulte de la formule

$$t = \int_{A}^{B} \frac{ds}{v}, \qquad \text{où} \qquad v = \sqrt{\frac{2h + 2U}{m}} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

La courbe cherchée est la courbe funiculaire pour laquelle $\frac{1}{v}$ est la tension et $-\frac{1}{v}$ la fonction des forces; on a

$$d\left(\frac{1}{v}\frac{d\bar{e}}{ds}\right) = \bar{D}\frac{1}{v}\,ds, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ou bien

$$d\left(\frac{1}{v}\frac{dx}{ds}\right) = \frac{\partial\frac{1}{v}}{\partial x}\,ds, \quad d\left(\frac{1}{v}\frac{dy}{ds}\right) = \frac{\partial\frac{1}{v}}{\partial y}\,ds, \quad d\left(\frac{1}{v}\frac{dz}{ds}\right) = \frac{\partial\frac{1}{v}}{\partial z}\,ds. \quad (3)$$

L'une de ces trois équations peut être remplacée par l'équation qui donne v.

On peut aussi écrire les équations intrinsèques (*) de la courbe funiculaire : F_t, F_n, F_b étant les composantes de la force F suivant la tangente, la normale principale ou la binormale en un point de la courbe, T désignant la tension, on a

$$dT = F_t ds, \quad \frac{T}{\rho} = F_n, \quad F_b = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

La première des équations (4) est inutile, car on sait que $T = \frac{1}{v}$; les deux autres définissent la courbe. Représentons par $\bar{u}_n$, $\bar{u}_b$ les vecteurs unitaires dirigés suivant la normale principale et la binormale; nous aurons

$$\frac{1}{v\rho} = \bar{D}\frac{1}{v}\cdot\bar{u}_n = -\frac{1}{v^2}\bar{D}v\cdot\bar{u}_n, \quad \bar{D}v = \bar{D}\sqrt{\frac{2h + 2U}{m}} = \frac{\bar{D}U}{mv},$$

$$F_b = \bar{D}\frac{1}{v}\cdot\bar{u}_b = -\frac{1}{v^2}\bar{D}v\cdot\bar{u}_b = 0;$$

(*) On appelle *équations intrinsèques d'un mouvement curviligne* les équations du mouvement obtenues en projetant la force sur la tangente, la normale principale et la binormale à la trajectoire du mobile.

par conséquent,

$$\frac{mv^2}{\rho} = -\overline{\mathrm{DU}} \cdot \overline{u}_n, \quad \overline{\mathrm{DU}} \cdot \overline{u}_b = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

On peut traduire les équations (5) en disant que la force est dans le plan osculateur de la courbe et que la composante normale $\overline{\mathrm{DU}} . \overline{u}_n$ est négative (ou centrifuge) et a pour valeur $\frac{mv^2}{\rho}$.

Pour appliquer cette méthode à un point pesant, nous prenons le point A pour origine des coordonnées; nous dirigeons l'axe des z suivant la verticale, l'axe des x suivant l'horizontale contenue dans le plan vertical mené par A et par B. Ces points étant donnés, nous satisfaisons à la seconde des équations (5) en traçant la courbe dans le plan des zx. La première de ces équations (5) donne

$$\frac{mv^2}{\rho} = mg \frac{dx}{ds},$$

ou, à cause de $v = \sqrt{2gz}$,

$$\rho \frac{dx}{ds} = 2z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

On reconnait facilement que toute cycloïde ayant Az pour base satisfait à l'équation (6) : elle correspond à l'intégrale générale, car elle dépend de deux constantes qui sont le rayon du cercle générateur et l'x du point de rebroussement.

TROISIÈME PARTIE

CAS PARTICULIERS DU PROBLÈME DE LA BRACHISTOCHRONE

Nous allons considérer les hypothèses qui ont été faites sur la courbe, sur ses extrémités ou sur les forces qui agissent sur le mobile.

Nous prendrons pour chaque cas particulier la méthode qui nous semblera la meilleure, soit au point de vue de la brièveté. soit au point de vue de la rigueur des calculs. Parfois nous combinerons les méthodes employées par les différents auteurs.

On peut grouper les cas particuliers en trois chapitres, comprenant :

Le premier, les cas relatifs aux différentes espèces de forces agissant sur le mobile : résistance du milieu, forces émanant d'un centre fixe, frottement, forces quelconques.

Le second, ceux où les extrémités de la courbe cherchée se trouvent sur des lignes ou des surfaces données.

Le troisième, l'étude des brachistochrones sur des surfaces données.

Un quatrième chapitre contiendra les remarques dont nous avons parlé dans l'historique (Andoyer, Appell, Towsend) et l'étude de Pennachietti sur le mouvement brachistochrone d'un système de points.

Nous dirons aussi quelques mots sur un lieu se rapportant à notre problème et sur le problème inverse de la brachistochrone.

CHAPITRE PREMIER.

a) Brachistochrone dans un milieu résistant.

Il nous semble utile, au point de vue historique, de rapporter la méthode d'Euler, qui est indépendante du calcul des variations. Lagrange (*) et Collignon (**) ont traité le problème par ce calcul.

1. Euler est le seul qui, avant l'invention du calcul des variations, ait traité ce cas d'une façon exacte. Dans sa *Mécanique*, il considère différentes hypothèses sur le mouvement du mobile. Nous ne donnerons ici que le cas le plus général, qu'il énonce ainsi (*Mécanique*, t. II, prop. 78) :

Dans un milieu résistant quelconque, trouver, quelles que soient les forces sollicitantes, la courbe AMB *suivant laquelle le mobile partant du point* A *parviendra le plus tôt possible au point* B.

Prenons pour origine des coordonnées le point A (fig. 18), pour axe des x une droite quelconque AP menée par A, et soient $AP = x$, $PM = y$ les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe, s l'arc AM. Appelons $V = v$ la vitesse du mobile en M, R la résistance dépendant de cette vitesse d'après une loi quelconque.

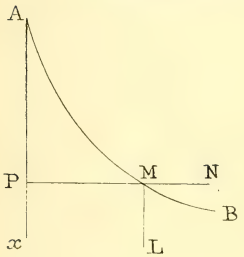


Fig. 18.

Quelles que soient les forces agissant sur le mobile, nous pouvons leur substituer deux autres forces, l'une dirigée suivant ML parallèle à Ax, l'autre suivant MN perpendiculaire à Ax; désignons par P, Q ces dernières forces.

(*) *Calcul des fonctions*, Leçon XXII.

(**) *Traité de Mécanique*, 3e partie, p. 209.

Comme $P\frac{dx}{ds} + Q\frac{dy}{ds}$ est la force tangentielle résultant des forces P et Q, on a

$$dv = Pdx + Qdy - Rds. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

D'autre part (*), on a vu (p. 39 et fig. 12) que toute brachistochrone satisfait à l'équation

$$2vd\frac{dy}{ds} = \frac{dydu}{ds} - \frac{dsd^2w}{mn} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

La courbe étant convexe vers l'axe des x, on a

$$r = + \frac{ds^3}{dxd^2y}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

or, dx étant constant, on a

$$d\frac{dy}{ds} = \frac{dsd^2y - dyd^2s}{ds^2} = \frac{dx^2d^2y}{ds^3},$$

et par suite

$$d\frac{dy}{ds} = \frac{dx}{r}.$$

L'équation (2) prend donc la forme

$$\frac{2vdx}{r} = \frac{dydu}{ds} - \frac{dsd^2w}{mn} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Mais lorsque le mobile passe de m en n (fig. 12), dy croît de mn, ds de ng, et comme $ng = \frac{dy.mn}{ds}$, on a

$$\frac{d^2w}{mn} = Q - R\frac{dy}{ds} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

(*) Les développements qui suivent sont empruntés à la *Mechanica*, t. II, prop. 40, cor. 2 et 3, et prop. 76.

Dans l'équation (3), remplaçons $\frac{d^2w}{mn}$ par la valeur (4) et du par la valeur (1) de dv; nous aurons

$$\frac{2v}{r} = \frac{\mathrm{P}dy - \mathrm{Q}dx}{ds}, \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

ou, en remplaçant r par la valeur (a),

$$v = \frac{(\mathrm{P}dy - \mathrm{Q}dx)\,ds^2}{2dxd^2y} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Il reste à éliminer v entre les équations (1) et (6). On obtient ainsi pour la brachistochrone une équation différentielle du troisième ordre. L'équation en termes finis de la courbe renfermera trois constantes, qu'on peut déterminer par les conditions que les quantités x, y, s, v s'annulent simultanément et que la courbe passe par un second point donné B.

2. Voici la solution de Collignon.

Soit O (fig. 19) le point de départ d'un mobile M, assujetti à suivre une courbe OB tracée dans le plan vertical, sous l'action de son poids P et de la résistance F d'un milieu, qui agit en sens contraire du mouvement, proportionnellement à une fonction donnée φ de la vitesse. On demande comment il faut tracer la courbe OB pour que le mobile partant de O arrive en B dans le temps le plus court.

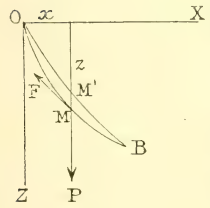


Fig. 19.

Rapportons la courbe à deux axes passant par le point O, l'un OX horizontal, l'autre OZ vertical et descendant. L'équation des forces vives appliquées au mobile, différentiée et divisée par la masse m, nous donnera

$$v\,dv = g\,dz - \varphi(v)\,ds \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Faisons $ds = dz\sqrt{1 + p^2}$ en désignant par p le quotient $\frac{dx}{dz}$.

Posons aussi $v^2 = u$ et remplaçons vdv par $\frac{1}{2}du$, et $\varphi(v)$ par $\psi(u)$. L'équation du mouvement devient

$$du - 2gdz + 2\psi(u)\sqrt{1+p^2}\,dz = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Imaginons qu'on altère infiniment peu le tracé de l'arc OB entre ses deux extrémités, et soit OM'B la nouvelle courbe que l'on obtient par cette altération. Le mouvement du mobile le long de cette courbe satisferait aussi à l'équation (2), dans laquelle on aurait remplacé u, p et z par leurs valeurs relatives à la courbe OM'B. Nous pouvons admettre qu'on passe de la première courbe à la seconde en conservant la même valeur de z et en donnant à u et à p des variations infiniment petites δu et δp. L'équation (2) s'appliquant au mouvement suivant la courbe altérée sera satisfaite quand on y remplacera u par $u + \delta u$ et p par $p + \delta p$; en retranchant, on aura

$$\delta du + 2\psi'(u)\sqrt{1+p^2}dz\delta u + 2\psi(u)\frac{p\delta p}{\sqrt{1+p^2}}dz = 0, \quad (3)$$

équation vraie pour tous les éléments correspondants des courbes OMB, OM'B.

La durée t du trajet de O en M est donnée par

$$t = \int_0^{z_B} \frac{ds}{v} = \int_0^{z_B} \frac{dz\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{u}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

et puisque t doit être minimum, on aura $\delta t = 0$, c'est-à-dire

$$\int_0^{z_B} \left(\frac{dz}{\sqrt{u}} \frac{p\delta p}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{dz\sqrt{1+p^2}}{2u\sqrt{u}}\delta u \right) = 0. \quad . \quad . \quad (5)$$

Cette équation est une équation unique, qui s'applique au parcours entier OB. L'équation (5) tient lieu, au contraire, d'une infinité d'équations particulières qui établissent une relation entre les éléments correspondants des deux courbes que l'on compare.

Multiplions (3) par une fonction indéterminée λ, ce qui revient à multiplier, par un coefficient indéterminé, chacune des équations dont cette relation (3) tient la place; puis faisons la somme de toutes les équations ainsi préparées, c'est-à-dire intégrons entre les points O et B; ajoutons enfin à l'équation (5), il viendra pour équation finale, tenant lieu, grâce à l'indétermination de λ, des équations (3) et (5),

$$\left.\begin{aligned}\int_0^B \Bigg[&\frac{dz}{\sqrt{u}}\frac{p\delta p}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{dz\sqrt{1+p^2}}{2u\sqrt{u}}\,\delta u + \lambda\delta du \\ &+ 2\lambda\psi(u)dz\,\frac{p\delta p}{\sqrt{1+p^2}} + 2\lambda\psi'(u)\sqrt{1+p^2}dz\,\delta u\Bigg] = 0.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Le terme $\int\lambda\delta du$ se ramène, au moyen de l'intégration par parties, à $\lambda\delta u - \int\delta u d\lambda$; et l'équation (6) prend la forme

$$\left.\begin{aligned}[\lambda\delta u]_0^B + \int_0^B \Bigg[&\left(\frac{pdz}{\sqrt{u}\sqrt{1+p^2}} + 2\lambda\psi(u)\,\frac{pdz}{\sqrt{1+p^2}}\right)\delta p \\ &- \left(\frac{dz\sqrt{1+p^2}}{2u\sqrt{u}} - 2\lambda\psi'(u)\sqrt{1+p^2}dz + d\lambda\right)\delta u\Bigg] = 0.\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Nous pouvons profiter de l'indétermination de λ pour annuler le coefficient de δu sous le signe $\int$; nous poserons pour cela

$$d\lambda - 2\lambda\psi'(u)\,dz\sqrt{1+p^2} + \frac{\sqrt{1+p^2}}{2u\sqrt{u}}\,dz = 0; \quad . \quad . \quad (8)$$

l'équation (7) deviendra alors

$$[\lambda\delta u]_0^B + \int_0^B \left[\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{u}} + 2\lambda\psi(u)\right)dz\delta p\right] = 0 \quad . \quad (9)$$

Observons que $p = \frac{dx}{dz}$, donc

$$\delta p = \delta\frac{dx}{dz} = \frac{\delta dx}{dz},$$

puisque pour nous dz est une constante. Donc $dz\delta p = \delta dx$.

Posons, pour abréger,

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{u}}+2\lambda\psi(u)\right)=\mathrm{V};$$

l'intégrale indiquée prendra la forme

$$\int_0^{\mathrm{B}}\mathrm{V}\partial dx=[\mathrm{V}\partial x]_0^{\mathrm{B}}-\int_0^{\mathrm{B}}\partial x d\mathrm{V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9')$$

Aux limites O et B, ∂x est nulle, puisque les extrémités de la courbe sont données; l'équation (9′) se réduit donc à

$$[\lambda\partial u]_0^{\mathrm{B}}-\int_0^{\mathrm{B}}\partial x d\mathrm{V}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Le mobile partant de 0 sans vitesse, on a en ce point $\partial u=0$ et par suite $[\lambda\partial u]_0=0$; pour que $[\lambda\partial u]$ s'annule en B, il suffit de faire en sorte que $\lambda=0$ au point B Or, λ étant assujetti à vérifier l'équation différentielle du premier ordre (8), sa valeur générale contient nécessairement une constante arbitraire que nous pourrons prendre de telle sorte que $\lambda=0$ au point B. L'équation de condition (10) se réduira ainsi à

$$\int_0^{\mathrm{B}}\partial x d\mathrm{V}=0;$$

et comme ∂x doit rester arbitraire, nous devrons avoir en tout point $d\mathrm{V}=0$ ou $\mathrm{V}=\mathrm{c^{te}}$. L'équation de la courbe est donc, outre l'équation (2) et l'équation (8),

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\left[\frac{1}{\sqrt{u}}+2\lambda\psi(u)\right]=\text{constante} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Nous pourrons tirer de cette équation λ en fonction de u de p, ce qui nous donnera $d\lambda$; substituant dans (8), nous aurons une équation qui contiendra les trois variables u, p, z et leurs diffé-

rentielles. Jointe à (2), cette équation définira à la fois la forme de la courbe et le mouvement du point.

Dans ces opérations, nous suivrons la marche adoptée par Lagrange dans la XXII^e^ leçon du *Calcul des fonctions*. Appelons $\frac{1}{\sqrt{a}}$ la constante du second membre de l'équation (11) et posons, pour abréger,

$$\frac{1}{\sqrt{u}} + 2\lambda\psi(u) = \mathrm{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

L'équation (11) devient

$$\frac{p\mathrm{H}}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

L'équation (12) différentiée nous donne

$$d\mathrm{H} = -\frac{du}{2u\sqrt{u}} + 2\lambda\psi'(u)\,du + 2\psi(u)\,d\lambda, \quad . \quad . \quad (14)$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1}{2u\sqrt{u}} - 2\lambda\psi'(u) = -\frac{d\mathrm{H} - 2\psi(u)\,d\lambda}{du}.$$

Substituons cette valeur dans (8), il viendra

$$d\lambda - \frac{d\mathrm{H} - 2\psi(u)\,d\lambda}{du}\,dz\sqrt{1+p^2} = 0,$$

ou bien

$$d\lambda du - [d\mathrm{H} - 2\psi(u)\,d\lambda]\,dz\sqrt{1+p^2} = 0; \quad . \quad . \quad (15)$$

ou, en supprimant le facteur commun dz après avoir remplacé du par sa valeur tirée de (2), et réduit les termes semblables,

$$2g\,d\lambda - d\mathrm{H}\sqrt{1+p^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Cette équation est intégrable. En intégrant par parties, on trouve

$$2g\lambda - \int dH\sqrt{1+p^2} = 2g\lambda - H\sqrt{1+p^2} + \int H d\sqrt{1+p^2}$$

$$= 2g\lambda - H\sqrt{1+p^2} + \int \frac{Hp}{\sqrt{1+p^2}}\,dp = c^{te}.$$

Ou, en vertu de (13), b désignant une nouvelle constante :

$$2g\lambda - H\sqrt{1+p^2} + \frac{p}{\sqrt{a}} = b;$$

remplaçant H par sa valeur tirée de (13), on trouvera pour déterminer λ, l'égalité

$$2g\lambda - \frac{1+p^2}{p\sqrt{a}} + \frac{p}{\sqrt{a}} = b, \quad \text{ou} \quad 2g\lambda - \frac{1}{p\sqrt{a}} = b. \quad . \quad (17)$$

Substituons dans (11) la valeur de λ déduite de (17); il viendra

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\left[\frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{1}{g}\left(b + \frac{1}{p\sqrt{a}}\right)\psi(u)\right] = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad . \quad (18)$$

équation qui ne contient plus que u et p et qui doit être jointe à l'équation (2). De (18), on tirera u en fonction de p, puis on exprimera du en fonction de dp et, substituant dans (2), on aura une équation différentielle du premier ordre entre les variables p et z, qui suffira pour définir la trajectoire. Il faudra bien se rappeler que la constante b n'est pas arbitraire, car elle doit se déterminer par la condition que $\lambda = 0$ au point B.

Terminons par cette remarque de Collignon :

On peut se proposer de déterminer la fonction $\psi(u)$ de manière que la brachistochrone correspondante soit une courbe d'espèce donnée, définie par une équation différentielle

$$dz = f(p)\,dp \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Pour résoudre cette question d'une manière générale, on devra tirer de l'équation (18) la valeur de p en fonction de u et de la fonction ψ; exprimer, au moyen de (19), dz en fonction des mêmes variables; puis substituer dans (2) les valeurs de p et de dz, exprimées en fonction de u, du, ψ, $d\psi$. L'équation résultante sera une équation différentielle du premier ordre, entre les variables u et ψ, et l'intégration de cette équation fera connaître ψ en fonction de u, avec une constante que l'on déterminera par la condition $\psi(u) = 0$ pour $u = 0$.

3. Haton de la Goupillière a traité cette question d'une façon détaillée et très rigoureuse. Il considère principalement le cas où la fonction $\varphi(v)$ a la forme Kv^m. Il indique la marche à suivre pour la résolution des équations, quel que soit m, et effectue les calculs pour $m = 2$.

L'équation de la brachistochrone est alors la suivante :

$$\frac{\left[\frac{B}{\rho} - 3k \sin\omega\,(A \sin\omega - B\cos\omega)\right]^3}{\left[\frac{B}{\rho} - 2k \sin\omega\,(A \sin\omega - B\cos\omega)\right]^2} = \frac{B^2 g}{\sin\omega}.$$

Les quantités A, B, g, K, ω, ρ sont définies dans l'article suivant, qui concerne la brachistochrone dans le cas où il existe un frottement de glissement.

b) Trouver la brachistochrone lorsque le mobile éprouve une résistance provenant d'un frottement de glissement.

Haton de la Goupillière seul a traité ce cas. On pourrait peut-être résumer son étude, mais nous avons craint de lui faire perdre, par ce fait, beaucoup de sa clarté. C'est pourquoi, malgré sa longueur, nous la donnons ici dans tous ses détails.

1. Nous prendrons comme variable indépendante l'arc s de la courbe; soient v la vitesse, t le temps; on a $v = \frac{ds}{dt}$, et l'in-

tégrale qu'il faut rendre minimum est $t = \int \frac{ds}{v}$. Nous supposons l'axe des x vertical et dirigé vers le bas, l'axe des y horizontal; nous désignerons par x', y', x'', ... les dérivées $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dx'}{ds}$, ...; x et y seront des fonctions inconnues de s, entre lesquelles on a identiquement

$$x'^2 + y'^2 - 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

En attribuant au mobile l'unité de masse et au frottement le coefficient f, on aura pour équations du mouvement

$$\frac{dv}{dt} = g\cos\omega - f\mathrm{N}, \quad \frac{v^2}{\rho} = \mathrm{N} - g\sin\omega;$$

d'où, en éliminant la réaction N,

$$\frac{dv}{dt} = g\cos\omega - f\left(\frac{v^2}{\rho} + g\sin\omega\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

On a d'ailleurs

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = vv'; \quad \cos\omega = x', \quad \sin\omega = y' \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{x'^2 + y'^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

ce qui permet d'écrire, au lieu de (2),

$$vv' + fv^2\sqrt{x'^2 + y'^2} + g(fy' - x') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

2. Nous aurons, d'après cela, à traiter par la méthode des variations l'expression $t = \int \mathrm{U}ds$, où

$$\mathrm{U} = \frac{1}{v} + \lambda(x'^2 + y'^2 - 1) + \mu[vv' + g(fy' - x') + fv^2\sqrt{x'^2 + y'^2}], \quad (6)$$

λ et μ étant des fonctions inconnues de s.

Nous devons donc déterminer cinq fonctions de s, savoir : x, y, v, λ, μ, et pour cela obtenir entre elles cinq relations. Si ensuite on conçoit l'élimination de s, v, λ, μ, il restera entre x et y l'équation de la brachistochrone.

Or nous avons déjà deux de ces relations : (1) et (5); il en faut par suite trois autres, que va nous fournir le calcul des variations.

Si à cet effet on représente, pour abréger, les dérivées *partielles* de la manière suivante :

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{dU}{dx} = P, & \dfrac{dU}{dx'} = P_1, & \dfrac{dU}{dx''} = P_2; \\ \dfrac{dU}{dy} = Q, & \dfrac{dU}{dy'} = Q_1, & \dfrac{dU}{dy''} = Q_2; \\ \dfrac{dU}{dv} = R, & \dfrac{dU}{dv'} = R_1, & \dfrac{dU}{dv''} = R_2, \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

les équations en question seront, avec des symboles de dérivées *totales*,

$$P - \frac{dP_1}{ds} + \frac{d^2P_2}{ds^2} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$Q - \frac{dQ_1}{ds} + \frac{d^2Q_2}{ds^2} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$R - \frac{dR_1}{ds} + \frac{d^2R_2}{ds^2} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

auxquelles on peut adjoindre la suivante :

$$\left.\begin{array}{l} U = C + P_1x' + Q_1y' + R_1v' + P_2x'' + Q_2y'' + R_2v'' \\ \qquad - x'\dfrac{dP_2}{ds} - y'\dfrac{dQ_2}{ds} - v'\dfrac{dR_2}{ds}, \end{array}\right\} \quad (11)$$

qui est d'un ordre moindre et qui en est une conséquence toutes les fois que, comme dans le calcul actuel, U ne renferme pas explicitement s.

3. Commençons par former le tableau des dérivées partielles, en ayant égard aux identités connues :

$$\rho x'' = -y', \quad \rho y'' = x'. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Il vient ainsi :

$$\left.\begin{aligned} &P = 0, && Q = 0, && R = -\frac{1}{v^2} + \mu\left(v' + \frac{2fv}{\rho}\right) \\ &P_1 = 2\lambda x' - \mu g, && Q_1 = 2\lambda y' + f\mu g, && R_1 = \mu v \\ &P_2 = \frac{2f\mu v^2 x''}{2\sqrt{x''^2 + y''^2}} = f\mu v^2 \rho x'' = -f\mu v^2 y', && Q_2 = f\mu v^2 x', && R_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Formons en premier lieu l'équation (11)

$$\frac{1}{v} = C + x'(2\lambda x' - \mu g) + y'(2\lambda y' + f\mu g) + \mu v v' - f\mu v^2 y' x'' + f\mu v^2 x' y'' + fx'\left[\mu v^2 y'' + y'\frac{d(\mu v^2)}{ds}\right] - fy'\left[\mu v^2 x'' + x'\frac{d(\mu v^2)}{ds}\right],$$

ou, en groupant les termes :

$$\frac{1}{v} = C + 2\lambda(x'^2 + y'^2) + \mu g(fy' - x') + \mu v v' + 2f\mu v^2(x'y'' - y'x'').$$

En ayant égard à l'identité (1) et à la suivante :

$$x'y'' - y'x'' = \frac{1}{\rho}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

il vient

$$\frac{1}{v} = C + 2\lambda + \mu\left[g(fy' - x') + vv' + f\frac{v^2}{\rho}\right] + f\frac{\mu v^2}{\rho}.$$

Mais l'expression entre crochets s'évanouit d'après l'équation du mouvement (5) ; il reste donc

$$\frac{1}{v} = C + 2\lambda + \frac{f\mu v^2}{\rho}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

4. La relation (8) devient, dans le cas actuel,

$$-\frac{dP_1}{ds} + \frac{d^2P_2}{ds^2} = 0,$$

d'où, en intégrant et désignant par A une constante arbitraire, et remplaçant P_1 et P_2 par leurs valeurs,

$$A - (2\lambda x' - \mu g) - f\left[\mu v^2 y'' + y' \frac{d(\mu v^2)}{ds}\right] = 0,$$

c'est-à-dire, à cause de (12),

$$A - 2\lambda x' + \mu g - f\frac{\mu v^2 x'}{\rho} - fy' \frac{d(\mu v^2)}{ds} = 0 \quad . \quad . \quad (16)$$

En partant de (9), on obtient par un calcul analogue,

$$B - 2\lambda y' - f\mu g - f\frac{\mu v^2 y'}{\rho} + fx' \frac{d(\mu v^2)}{ds} = 0 \quad . \quad . \quad (17)$$

Multiplions en premier lieu ces relations par x', y' et ajoutons les résultats

$$Ax' + By' - 2\lambda(x'^2 + y'^2) + \mu g(x' - fy') - f\frac{\mu v^2}{\rho}(x'^2 + y'^2) = 0,$$

ou, simplifiant au moyen de (1),

$$Ax' + By' - 2\lambda + \mu g(x' - fy') - f\frac{\mu v^2}{\rho} = 0.$$

En additionnant avec (15), il vient

$$\frac{1}{v} = Ax' + By' + C + \mu g(x' - fy'),$$

ce qui nous fournit l'expression de la fonction auxiliaire μ,

$$\mu g = \frac{Ax' + By' + C - \frac{1}{v}}{fy' - x'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Multiplions, en second lieu, ces mêmes relations (16) et (17) par x'', y'' et additionnons

$$Ax'' + By'' - 2\lambda(x'x'' + y'y'') + \mu g(x'' - fy'') - f\frac{\mu v^2}{\rho}(x'x'' + y'y'')$$
$$+ f(x'y'' - y'x'')\frac{d(\mu v^2)}{ds} = 0.$$

Mais en différentiant (1) on a identiquement,

$$x'x'' + y'y'' = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Si donc nous multiplions par ρ, eu égard aux équations (12), il viendra

$$-Ay' + Bx' - \mu g(y' + fx') + f(\mu' v^2 + 2\mu v v') = 0;$$

ou, en attribuant à vv' sa valeur (5),

$$-Ay' + Bx' - \mu\left[g(y' + fx') + \frac{2f^2v^2}{\rho} + 2fg(fy' - v')\right] + fv^2\mu' = 0,$$

et, en simplifiant,

$$Ay' - Bx' + \mu\left\{\frac{2f^2v^2}{\rho} + g[(2f^2 + 1)y' - fx']\right\} - fv^2\mu' = 0. \quad (20)$$

5. Quant à l'équation (10), elle se réduit à $R - \frac{dR_1}{ds} = 0$ ou

$$-\frac{1}{v^2} + \mu\left(v' + \frac{2fv}{\rho}\right) - (\mu v' + \mu' v) = 0, \quad \mu' = \frac{2f\mu}{\rho} - \frac{1}{v^3}.$$

Si nous substituons ce résultat dans la formule (20), elle donne

$$Ay' - Bx' + \mu\left\{\frac{2f^2v^2}{\rho} + g[(2f^2 + 1)y' - fx']\right\} - fv^2\left(\frac{2f\mu}{\rho} - \frac{1}{v^3}\right) = 0.$$

Il arrive que ρ disparaît de lui-même, et il reste

$$Ay' - Bx' + \mu g\,[(2f^2 + 1)\,y' - fx'] + \frac{f}{v} = 0.$$

Si donc nous rendons à μg sa valeur (18), il viendra

$$Ay' - Bx' + \frac{[(2f^2 + 1)\,y' - fx']\left(Ax' + By' + C - \frac{1}{v}\right)}{x' - fy'} + \frac{f}{v} = 0.$$

Cette équation, dans laquelle $\frac{1}{v}$ ne figure qu'au premier degré, va nous fournir l'expression de la vitesse. Elle donne pour cela successivement :

$$(Ay' - Bx')(x' - fy') - (Ax' + By' + C)[(2f^2 + 1)y' - fx']$$
$$+ \frac{1}{v}\{[(2f^2 + 1)y' - fx'] + f(x' - fy')\} = 0;$$

puis

$$v = \frac{(f^2 + 1)y'}{[Af + B(2f^2 + 1)]y'^2 + (B - Af)x'^2 - 2f(B - Af)x'y' + C[(2f^2 + 1)y' - fx']},$$

ou, d'après (3),

$$v = \frac{(f^2 + 1)\sin\omega}{[Af + B(2f^2 + 1)]\sin^2\omega + (B - Af)\cos^2\omega - 2f(B - Af)\sin\omega\cos\omega + C[(2f^2 + 1)\sin\omega - f\cos\omega]}. \quad (21)$$

6. Remarquons maintenant que l'équation du mouvement (2) ne renferme, en dehors de v et de sa dérivée, que ρ et ω. Or v vient d'être exprimé en fonction de ω. Il suffit donc de substituer son expression pour obtenir l'equation de la brachistochrone sous la forme d'une relation entre son angle de contingence et son rayon de courbure. Pour effectuer cette substitution, nous représentons pour un instant par Ω le dénominateur de v dans la formule (21) et par Ω' sa dérivée par rapport à ω (et non à s, comme l'indiquent jusqu'à présent les accents); il vient alors

$$v = \frac{(f^2 + 1)\sin\omega}{\Omega},$$

$$v' = \frac{dv}{ds} = \frac{dv}{d\omega}\frac{d\omega}{ds} = \frac{1}{\rho}\frac{dv}{d\omega},$$

$$\rho v' = \frac{dv}{d\omega} = (f^2 + 1)\frac{\Omega\cos\omega - \Omega'\sin\omega}{\Omega^2}.$$

Or l'équation (2) peut s'écrire

$$\rho v v' + fv^2 + g\rho(f\sin\omega - \cos\omega) = 0,$$

ou encore

$$\left(\frac{\rho v'}{f^2+1}\right)\frac{v}{f^2+1}+f\left(\frac{v}{f^2+1}\right)^2=\frac{g\rho}{(f^2+1)^2}(\cos\omega-f\sin\omega).$$

Si donc nous substituons les valeurs précédentes de v et $\rho v'$, nous aurons

$$\left(\frac{\Omega\cos\omega-\Omega'\sin\omega}{\Omega^2}\right)\frac{\sin\omega}{\Omega}+\frac{f\sin^2\omega}{\Omega^2}=\frac{g\rho}{(f^2+1)}(\cos\omega-f\sin\omega),$$

ou encore

$$\frac{g}{(f^2+1)^2}\left(\frac{\cos\omega-f\sin\omega}{\sin\omega}\right)\rho\Omega^3=\Omega(\cos\omega+f\sin\omega)-\Omega'\sin\omega,$$

ou, en remplaçant Ω par sa valeur,

$$\frac{g}{(f^2+1)^2}\frac{\cos\omega-f\sin\omega}{\sin\omega}\rho\Omega^3$$

$$=(\cos\omega+f\sin\omega)\left\{\begin{array}{c}(B-Af)(1-2f\sin\omega\cos\omega)+2f(A+Bf\sin^2\omega)\\+C[(2f^2+1)\sin\omega-f\cos\omega]\end{array}\right\}$$

$$-\sin\omega\left\{\begin{array}{c}4f(A+Bf)\sin\omega\cos\omega-2f(B-Af)(\cos^2\omega-\sin^2\omega)\\+C[(2f^2+1)\cos\omega+f\sin\omega]\end{array}\right\}$$

$$=(\cos\omega-f\sin\omega)\left\{\begin{array}{c}-2f(A+Bf)\sin^2\omega+(B-Af)(1+2f\sin\omega\cos\omega)\\+fC(\cos\omega+2f\sin\omega\end{array}\right\}.$$

On remarquera cette circonstance importante que le facteur $(\cos\omega-f\sin\omega)$ se trouve mis en évidence dans les deux membres. Elle permet de simplifier l'équation en le supprimant, car il ne saurait s'annuler. Si l'on posait en effet

$$\cos\omega-f\sin\omega=0,\quad \operatorname{cotg}\omega=f,$$

cette équation représenterait une ligne droite inclinée sur l'horizon sous l'angle du frottement, et sur laquelle le corps se tiendrait en équilibre ou glisserait uniformément en vertu d'une vitesse initiale arbitraire; ce qui ne peut constituer la brachis-

tochrone. Il reste donc, en rendant dans le premier membre à Ω sa valeur,

$$\frac{g}{(f^2+1)^2}\rho = \sin\omega \frac{(B-Af)(1+2f\sin\omega\cos\omega)-2f(A+Bf)\sin^2\omega+fC(\cos\omega+2f\sin\omega)}{\{(B-Af)(1-2f\sin\omega\cos\omega)+2f(A+Bf)\sin^2\omega+fC[(2f^2+1)\sin\omega-f\cos\omega]\}^3} \quad (22)$$

Telle est l'équation de la brachistochrone.

Comme vérification, nous pouvons supprimer le frottement f, et il vient par là $\rho = \frac{\sin\omega}{B^2 g}$, équation connue de la cycloïde.

Passons à la discussion de l'équation (22).

7. Si l'on fait, dans l'équation générale (22) de la brachistochrone, $\omega = 0$, il vient $\rho = 0$. Cette courbe présente donc toujours un rebroussement dont la tangente est verticale. Ce point jouit, en outre, de cette propriété importante, qu'il doit former l'origine du mouvement toutes les fois que celui-ci doit avoir lieu sans vitesse initiale. En effet, la valeur (21) montre que v ne peut s'annuler qu'avec $\sin\omega$ et, par suite, en même temps que ρ (22).

8. On peut revenir aux coordonnées cartésiennes à l'aide des formules

$$x = x_0 + \int \rho\cos\omega d\omega, \quad y = y_0 + \int \rho\sin\omega d\omega \quad . \quad . \quad (23)$$

Les signes d'intégration portent, après la substitution de ρ (22), sur des fonctions rationnelles de $\sin\omega$ et $\cos\omega$; celles-ci peuvent être ramenées, comme on le sait, à des expressions algébriques rationnelles, si l'on prend pour variable auxiliaire $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$. La représentation des deux coordonnées x et y peut donc être considérée comme obtenue en fonction d'un seul paramètre ω, au prix de semblables intégrations. Mais il reste à en déterminer les constantes arbitraires.

Nous supposerons, pour cela, que le mobile doit partir d'un point donné (x_1, y_1) avec une vitesse connue v_1 et aboutir dans le temps le plus court à un autre point également désigné (x_2, y_2). On écrira pour ces deux points les équations (23), ce qui fournira quatre conditions entre les données x_1, y_1, x_2, y_2, v, et les

inconnues A, B, C, x_0, y_0, ω_1, ω_2. On posera ensuite l'équation (21) en y attribuant à v la valeur v_1, ce qui fournira une cinquième relation entre A, B, C, ω_1. Les inconnues étant au nombre de sept, il faudra encore posséder entre elles deux équations. C'est à quoi vont précisément se réduire les équations de limites que fournit le calcul des variations. Elles semblent cependant, au premier abord, plus nombreuses : il faut en effet que les relations

$$P_2 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad R_2 = 0 \ldots\ldots \quad (24)$$

aient lieu en chacune des deux extrémités, ce qui représente, en apparence, six équations. Mais, d'abord, la fonction R_2 est, dans le problème, identiquement nulle (13); ce qui met hors cause la troisième équation (24).

Les deux autres expressions P_2 et Q_2 renferment le facteur f (13); si donc f était nul, elles s'évanouiraient à leur tour, et nos raisonnements devraient être modifiés. Mais comme le cas de l'absence de frottement est classique, il n'y a pas lieu de le développer ici. Nous pouvons donc supprimer le facteur f, qui n'est ni nul ni infini, et réduire les équations (24) à

$$\mu_1 v_1^2 y_1' = 0, \quad \mu_1 v_1^2 x_1' = 0, \quad \mu_2 v_2^2 y_2' = 0, \quad \mu_2 v_2^2 x_2' = 0. \quad (25)$$

Il est à remarquer que x' et y' ne peuvent s'annuler ensemble, d'après l'identité (1). Par suite, il est indispensable qu'à chacune des extrémités l'un des facteurs μ ou v s'annule. Supposons d'abord que la vitesse initiale et *a fortiori* la vitesse finale ne soient pas nulles. C'est alors de toute nécessité que l'on sera forcé de poser

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0, \ldots\ldots \quad (26)$$

ce qui suffit en même temps pour satisfaire aux quatre conditions (25). Telles sont les relations qui nous manquaient encore. Elles reviennent (18) à

$$A \cos \omega_1 + B \sin \omega_1 + C = \frac{1}{v_1}, \quad A \cos \omega_2 + B \sin \omega_2 + C = \frac{1}{v_2}.$$

Il est bien vrai que cette dernière formule introduit une huitième inconnue v_2, qui ne figurait pas encore jusqu'ici ; mais nous obtiendrons en même temps une huitième équation en écrivant la formule (21) pour le point d'arrivée. Le problème est donc complètement déterminé.

9. Pour étudier de plus près la forme de la courbe, nous nous bornerons, à cause de l'extrême complication, à l'hypothèse $C = 0$, qui réduit l'équation (22) à

$$\frac{g}{(f^2+1)^2}\rho = \sin\omega\,\frac{(B-Af)(1+2f\sin\omega\cos\omega)-2f(A+Bf)\sin^2\omega}{[(B-Af)(1-2f\sin\omega\cos\omega)+2f(A+Bf)\sin^2\omega]^2}.$$

Nous pouvons, pour plus de simplicité, remplacer les deux arbitraires A et B par deux nouveaux symboles a et b, en posant

$$a = (B-Af)\frac{\sqrt{g}}{f^2+1}, \quad b = -(A+Bf)\frac{\sqrt{g}}{f^2+1}.$$

L'équation prend la forme

$$\rho = \sin\omega\,\frac{a+2f\sin\omega(a\cos\omega+b\sin\omega)}{[a-2f\sin\omega(a\cos\omega-b\sin\omega)]^3}. \quad . \quad . \quad (27)$$

Désignons actuellement par 2α un angle dont le sinus et le cosinus soient proportionnels à a et b. Le numérateur de la fraction pourra s'écrire

$$\left.\begin{aligned} &a+2f\sin\omega(a\cos\omega+b\sin\omega)\\ &=\sqrt{a^2+b^2}\,[\sin 2\alpha+2f\sin\omega(\sin 2\alpha\cos\omega+\cos 2\alpha\sin\omega)]\\ &=\sqrt{a^2+b^2}\,[\sin 2\alpha+2f\sin\omega\sin(\omega+2\alpha)]. \end{aligned}\right\} (28)$$

Nous déplacerons maintenant l'origine des angles qui, jusqu'à présent, étaient comptés à partir de la verticale, et nous les évaluerons dorénavant par rapport à une droite inclinée de α sur la direction de la pesanteur.

Posons

$$\theta = \omega + \alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

La dernière expression (28) deviendra

$$\sqrt{a^2 + b^2}\,[\sin 2\alpha + 2f \sin(\theta - \alpha)\sin(\theta + \alpha)$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2}\,[2 \sin\alpha \cos\alpha + 2f(\sin^2\theta - \sin^2\alpha)]$$
$$= 2\sqrt{a^2 + b^2}\,[\sin\alpha(\cos\alpha - f \sin\alpha) + f \sin^2\theta].$$

Si l'on désigne par φ l'angle de frottement, $f = \operatorname{tg}\varphi$, on pourra écrire cette expression sous la forme

$$2f\sqrt{a^2 + b^2}\left[\frac{\sin\alpha\cos(\alpha + \varphi)}{\sin\varphi} + \sin^2\theta\right].$$

D'ailleurs, comme nous ne devons conserver que deux arbitraires pour remplacer A et B, il nous faut encore chasser b. Nous avons pour cela

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{a}{b}, \quad b = a \operatorname{cotg} 2\alpha, \quad a^2 + b^2 = \frac{a^2}{\sin^2\alpha} \quad . \quad . \quad (30)$$

Ce qui donne enfin pour numérateur de la fraction (27)

$$\frac{fa}{\sin\alpha\cos\alpha}\left[\frac{\sin\alpha\cos(\alpha + \varphi)}{\sin\varphi} + \sin^2\theta\right].$$

Le dénominateur se transforme de même.
L'équation (27) de la courbe devient par là

$$\rho = \left(\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{fa}\right)^2 \sin(\theta - \alpha) \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos(\alpha + \varphi)}{\sin\varphi} + \sin^2\theta}{\left[\dfrac{\sin\alpha\cos(\alpha - \varphi)}{\sin\varphi} - \sin^2\theta\right]^3}.$$

Pour simplifier encore nous poserons

$$l = -\left(\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{fa}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Nous remarquerons en second lieu que α et φ sont deux arbitraires, à la vérité d'origines différentes; la première est une

constante d'intégration pure et simple, et φ est l'angle de frottement. Celui-ci, pour une expérience effective, faite avec certaines substances, serait déterminé; mais pour l'étude de la question au point de vue général, nous devons le laisser quelconque. Nous pouvons donc remplacer ces deux arbitraires α et φ par deux autres β et γ, qui leur soient reliées par les formules

$$\sin^2\beta = -\frac{\sin\alpha\cos(\alpha+\varphi)}{\sin\varphi}, \quad \sin^2\gamma = \frac{\sin\alpha\cos(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi}. \quad (52)$$

Il est inutile d'avertir, du reste, bien que $\sin^2\beta$ et $\sin^2\gamma$ soient toujours réels, que β et γ pourront devenir imaginaires suivant des circonstances que nous analyserons dans un instant. L'équation devient, par l'introduction de ces nouveaux paramètres,

$$\rho = l\sin(\theta-\alpha)\frac{\sin^2\theta-\sin^2\beta}{[\sin^2\theta-\sin^2\gamma]^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

ou enfin

$$\rho = l\frac{\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)\sin(\theta+\beta)}{\sin^3(\theta-\gamma)\sin^3(\theta+\gamma)} \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

10. Étudions avec soin les conditions dans lesquelles se trouvent placées ces diverses constantes. Je ferai remarquer d'abord que dans la formule (27), on peut toujours attribuer à a une valeur positive, en changeant au besoin les signes des deux termes de la fraction. Dès lors il y aura toujours une valeur de 2α comprise entre 0 et π, car cet angle est déterminé par la condition d'avoir son sinus et son cosinus proportionnels à a et b. On peut donc considérer α lui-même comme compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Pour que β et γ existent réellement, il faut en premier lieu que les valeurs (52) soient positives. C'est ce qui se vérifie immédiatement pour $\sin^2\gamma$, puisque α et φ sont positifs et aigus. Quant à $\sin^2\beta$, il exigera la condition

$$-\cos(\alpha+\varphi) > 0, \quad \alpha+\varphi > \frac{\pi}{2}, \quad \alpha > \frac{\pi}{2}-\varphi;$$

l'angle α doit donc être supérieur au complément de l'angle de frottement. Il faut, en second lieu, que ces valeurs soient plus

petites que 1. On aura, d'après cela, en commençant par $\sin^2\gamma$,

$$\frac{\sin\alpha\cos(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi}<1,$$

ou, puisque $\sin\varphi>0$,

$$\sin\alpha(\cos\alpha\cos\varphi+\sin\alpha\sin\varphi)<\sin\varphi,$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha\cos\varphi+2\sin^2\alpha\sin\varphi<2\sin\varphi,$$

ce qui conduira à

$$2\sin(\alpha-\varphi)\cos\alpha<0,$$

et comme α est dans le premier quadrant,

$$\sin(\alpha-\varphi)<0,\quad \alpha<\varphi.$$

L'angle α doit donc être compris entre l'angle de frottement et son complément, et, de plus, ce dernier doit être inférieur à l'angle lui-même, $\frac{\pi}{2}-\varphi<\varphi$, $\varphi>\frac{\pi}{4}$. Or cette condition n'est jamais remplie dans la pratique effective. Nous verrons tout à l'heure quelle conséquence essentielle il en résulte.

Nous disons actuellement que l'on a $\sin^2\beta<1$, car l'inégalité $-\frac{\sin\alpha\cos(\alpha+\varphi)}{\sin\varphi}<1$ conduit, par des calculs tout semblables, à $2\sin(\alpha+\varphi)\cos\alpha>0$, ce qui est satisfait puisque α et φ sont des angles aigus. Mais ceci ne prouve pas que β existera toujours, puisque pour cela il a déjà fallu un certain degré de frottement $\varphi>\frac{\pi}{2}-\alpha$; β cesse donc d'exister lorsque le frottement s'atténue suffisamment.

Enfin on aura nécessairement $\sin^2\beta<\sin^2\gamma$, car il vient par là, d'après les valeurs (32),

$$-\cos(\alpha+\varphi)<\cos(\alpha-\varphi),\quad \cos(\alpha+\varphi)+\cos(\alpha-\varphi)>0,$$

$$2\cos\alpha\cos\varphi>0,$$

ce qui est évident, puisque α et φ appartiennent au premier quadrant. D'ailleurs, lorsque β et γ existeront, les formules (32) leur attribueront toujours des valeurs comprises dans ce même quadrant, pour lesquelles on aura par suite $\beta<\gamma$.

11. Ceci posé, et en raisonnant dans l'hypothèse de la réalité de β et γ, on voit que le rayon de courbure commencera par s'annuler lorsque θ, en croissant en valeur absolue, atteindra les deux valeurs $\theta = \beta$, $\theta = -\beta$, ce qui indique l'existence de deux rebroussements, indépendamment du rebroussement vertical $\theta = \alpha$. Ces derniers ont leurs tangentes symétriquement inclinées sur l'axe de comparaison des angles θ.

La variable continuant à croître, ρ devient infini pour $\theta = \gamma$ et $\theta = -\gamma$, ce qui indique des points d'inflexion dont les tangentes sont elles-mêmes symétriquement inclinées; mais ces points sont à l'infini, car x et y deviennent alors à la fois infinis. En effet, quand on remet dans leurs expressions (23) la valeur (34) de ρ, le dénominateur devient du troisième ordre infinitésimal, lorsque θ s'approche de γ par des accroissements $d\theta$ du premier ordre.

Lors même que tous ces points singuliers auraient une existence réelle, il n'en résulterait aucun obstacle pour la question qui nous occupe, la courbe pouvant fonctionner comme brachistochrone par un arc fini et sans accidents de forme compris entre $\theta = \alpha$ et $\theta = \beta$. Du reste, nous avons reconnu que toutes ces formes singulières disparaissent, quand le frottement s'atténue suffisamment, sans pour cela que l'équation présente la moindre difficulté en la laissant sous la forme (33), puisque $\sin^2\beta$ et $\sin^2\gamma$ représentent toujours des valeurs réelles.

c) Trouver la brachistochrone en tenant compte de la résistance qu'éprouve le mouvement par le frottement de glissement et par la densité du milieu.

Ce cas a encore été considéré par M. Haton de la Goupillière.

Si l'on suppose réunies les deux résistances passives, à savoir : le frottement de glissement et la résistance du milieu ayant pour expression $\varphi(v)$, l'équation du mouvement prendra la forme

$$vv' + h\cos\omega + k\sin\omega + \frac{nv^2}{\rho} + \varphi(v) = 0. \quad . \quad . \quad (1)$$

Les constantes h, k, n auront pour valeurs $h = -g$, $k = fg$,

$n = f$; mais nous conserverons les symboles h, k, n, afin de comprendre en outre dans la même recherche le frottement de roulement.

Si l'on remplace, en effet, le point glissant par un corps rond, ayant pour rayon d'appui r, pour rayon de giration central r' et pour coefficient spécifique de la résistance au roulement δ, les théorèmes de la dynamique montreront facilement que l'équation du mouvement du centre de gravité conservera la forme (1) en prenant

$$h = -\frac{gr^2}{r^2 + r'^2}, \quad k = \frac{gr\delta}{r^2 + r'^2}, \quad n = \frac{r\delta}{r^2 + r'^2}.$$

La fonction U placée sous le signe d'intégration sera, dans cette nouvelle analyse,

$$\mathrm{U} = \frac{1}{v} + \lambda(x'^2 + y'^2 - 1) + \mu\left[vv' + \varphi(v) + n\frac{v^2}{\rho} + hx' + ky'\right].$$

Il suffira de lui appliquer une marche en tout semblable à celle développée dans le cas précédent. On parviendra ainsi à l'équation suivante, dont (21) (p. 85) est un cas particulier :

$$\left.\begin{aligned}
&(\mathrm{B}h - \mathrm{A}k - 2\mathrm{A}nh)\cos^2\omega + (\mathrm{B}h - \mathrm{A}k - 2\mathrm{B}nk)\sin^2\omega - 2n(\mathrm{A}k + \mathrm{B}h)\sin\omega\cos\omega \\
&+ [(nh + k)\cos\omega + (nk - h)\sin\omega]\frac{1}{v} - [(n\mathrm{A} - \mathrm{B})\cos\omega \\
&+ (n\mathrm{B} - \mathrm{A})\sin\omega]\varphi(v) + n(\mathrm{A}\cos\omega + \mathrm{B}\sin\omega)v\varphi'(v) \\
&+ \mathrm{C}[(h - 2nk)\sin\omega - (k + 2nh)\cos\omega] + n\{[v\varphi'(v) - \varphi(v)]\mathrm{C} - \varphi'(v)\} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Il ne reste plus, comme il a été expliqué ci-dessus (§ 6, p. 85), qu'à tirer de là v en fonction de ω et à le reporter ainsi que sa dérivée v' ou $\frac{1}{\rho}\frac{dv}{d\omega}$ dans l'équation du mouvement (1). En effectuant cette opération, lorsque la fonction $\varphi(v)$ sera spécifiée, on obtiendra entre ρ et ω l'équation de la brachistochrone.

Si l'on pose $\varphi(v) = kv^m$, cette dernière équation (2) devient tout à fait explicite. Elle est du degré $m + 1$. Elle sera donc du premier degré pour une résistance constante adjointe au frottement. Elle deviendra du second degré pour une résistance pro-

portionnelle à la vitesse. Si, enfin, on envisage le cas de la nature, c'est-à-dire $m = 2$, l'équation sera du troisième degré et permettra encore d'achever le calcul à l'aide de la formule de Cardan.

Il en serait même encore ainsi dans le cas où des recherches expérimentales ultérieures conduiraient quelque jour à substituer à la formule monôme Kv^2 admise jusqu'ici, quoique avec certaines réserves, pour la résistance de l'air, l'expression $\varphi(v) = K_1 v + K_2 v^2$, en raison de l'influence du frottement latéral du fluide par les parois du corps mobile, suivant la formule de Prony. Rien n'empêcherait donc, même alors, de formuler d'une manière explicite l'équation de la brachistochrone d'un corps pesant qui se meut dans l'air, quand on a égard au frottement de glissement et de roulement, c'est-à-dire dans les conditions réelles de l'expérience.

d) Trouver la brachistochrone lorsque le mobile est soumis a une force émanant d'un centre fixe.

Mac-Laurin a traité ce cas en supposant que le point de départ A du mobile est donné et que le point d'arrivée B doit se trouver sur une droite passant par le centre attirant C. Nous suivrons sa méthode, en la rajeunissant pour ainsi dire, comme l'a fait Paul Serret (*).

Soient AMB (fig. 20) la brachistochrone cherchée, et B le point inconnu où elle atteint la droite C*Bb*. Du point C comme centre, décrivons les arcs de cercle A*b* et B*a*, interceptés par l'angle ACB. Il est facile de démontrer *a priori* que la ligne est tout entière comprise dans le trapèze mixtiligne A*b*B*a*. Nous la chercherons donc parmi les lignes qui satisfont à cette condition et qui joignent le point A

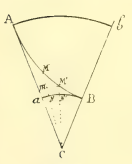


Fig. 20.

(*) *Loc. cit.*

au point indéterminé B. Or, toutes ces lignes projetées centralement, à partir du point C, sur la circonférence Ba, ont la même projection Ba; et la vitesse acquise en B par la chute sur l'une d'elles est la même pour toutes ; soit v cette vitesse. Dès lors, si le temps mis par le mobile à parcourir l'arc AMB avec la vitesse v, est minimum, on aura aussi

$$\mathrm{T(AMB},\, v) - \mathrm{T(arc}\, a\mathrm{B},\, v_1) = \text{minimum.}$$

Décomposons la courbe et l'arc en un même nombre d'éléments correspondants MM′ et NN′; alors la différence précédente sera minimum, si l'on rend minima les différences élémentaires telles que

$$\mathrm{T(MM'},\, v) - \mathrm{T(NN'},\, v_1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Désignons par r, r', r_1 les distances au centre attirant C des points M, M′, B, et décrivons le petit arc M′m semblable à N′N; on aura $\mathrm{NN'} = \mathrm{M'}m\,\frac{r_1}{r'}$, et, par suite,

$$\mathrm{T(NN'},\, v_1) = \frac{\mathrm{NN'}}{v_1} = \frac{\mathrm{M'}m}{v_1}\,\frac{r_1}{r'} = \frac{\mathrm{M'}m}{v_1\,\dfrac{r'}{r_1}}.$$

On voit donc que le temps employé à parcourir NN′ avec une vitesse v_1 est égal au temps employé à parcourir M′m, avec une vitesse égale à $\left(v_1\,\frac{r'}{r_1}\right)$. Donc, en substituant dans la différence (a), on aura à rendre minimum

$$\mathrm{T(MM'},\, v_1) - \mathrm{T}\left(\mathrm{M'}m,\, v_1\,\frac{r'}{r_1}\right).$$

Or, d'après le lemme (p. 41), pour que cette différence soit minimum, il suffit que l'on ait, en regardant les éléments MM′ et mM′ comme rectilignes,

$$\sin m\mathrm{MM'} = v : v_1\,\frac{r'}{r_1}.$$

Donc, en appelant MT la tangente en M et remplaçant r' par r, sin CMM′ par sin CMT, qui est égal à $r\frac{d\theta}{ds}$, il vient

$$\sin \text{CMT} = r\frac{d\theta}{ds} = \frac{v}{v_1}\cdot\frac{r_1}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Telle est l'équation différentielle de la courbe.

De ces équations on déduit :

1° Que la courbe est tangente au rayon passant par le point de départ, et normale au rayon auquel elle se termine ;

2° En écrivant (1) sous la forme $r \sin \text{CMT} = \frac{r_1}{v_1} v$, on a ce théorème, dû à Euler, que la vitesse en chaque point est proportionnelle à la distance du centre attirant à la tangente en ce point.

3° Si l'attraction exercée par le centre C est proportionnelle à la distance, le principe des forces vives donne

$$v^2 = (r_0^2 - r^2)\, k^2,$$

où $r_0 = \text{CA}$ pour $v = 0$. L'équation (1) devient alors

$$r\frac{d\theta}{ds} = \frac{\sqrt{r_0^2 - r^2}}{\sqrt{r_0^2 - r_1^2}}\cdot\frac{r_1}{r};$$

elle représente, comme on le sait, une épicycloïde engendrée par un point de la circonférence de diamètre $r_0 - r_1 = \text{A}a$, qui roulerait intérieurement sur la circonférence Ab.

e) Brachistochrone dans un plan, dans le cas où le mobile est soumis a une force quelconque admettant une fonction des forces.

Nous adopterons ici la méthode de Despeyrous.

Soient v la vitesse, mX et mY les composantes de la force exté-

rieure appliquée au mobile, x_0 et x_1 les abscisses des deux points donnés A et B; on aura

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad dt = \frac{ds}{v} = \frac{dx\sqrt{1+y'^2}}{v};$$

$$t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}\, dx, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

et, puisqu'il y a une fonction des forces,

$$\frac{vdv}{dx} = \mathrm{X}, \quad \frac{vdv}{dy} = \mathrm{Y}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

La variation de l'intégrale (a) doit être nulle; donc si l'on fait varier seulement y, on aura

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{v} \frac{y'\delta y'}{\sqrt{1+y'^2}} - \int_{x_0}^{x_1} dx\sqrt{1+y'^2}\,\frac{\delta v}{v^2} = 0 \, . \quad . \quad (2)$$

Comme on ne fait pas varier x, on a

$$\delta y' = \frac{d\delta y}{dx}, \quad \delta v = \frac{dv}{dy}\delta y = \frac{\mathrm{Y}}{v}\delta y,$$

et l'équation (2) devient

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2}}\, d\delta y - \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{Y}\,\frac{dx\sqrt{1+y'^2}}{v^3}\,\delta y = 0. \quad . \quad (3)$$

Une intégration par parties ramène le premier terme de (3) à

$$\left[\frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2}}\,\delta y\right]_0^1 - \int_{x_0}^{x_1} \delta y d\,\frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2}},$$

ou, puisque δy est nul aux deux limites, à

$$-\int_{x_0}^{x_1} \delta y d\,\frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2}},$$

de sorte que cette équation prend la forme

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[d\frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2}}+\frac{Y\sqrt{1+y'^2}}{v^3}dx\right]\delta y=0.$$

On en conclut la condition cherchée :

$$d\frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2}}+\frac{Y\sqrt{1+y'^2}}{v^3}dx=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

En effectuant les calculs et remarquant que

$$dv=\frac{dv}{dx}dx+\frac{dv}{dy}dy=\frac{1}{v}(Xdx+Ydy)=\frac{dx}{v}(X+Yy'),$$

on obtient, toutes réductions faites,

$$\frac{Y-Xy'}{\sqrt{1+y'^2}}+\frac{v^2y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

On peut encore écrire, en remplant v^2 par sa valeur,

$$Y-Xy'+\frac{2y''}{1+y'^2}\int(Xdx+Ydy)=0,$$

où l'intégrale $\int(Xdx+Ydx)$ désigne une fonction connue de x et y.

Cette équation différentielle du second ordre représente la brachistochrone; on déterminera les deux constantes introduites par l'intégration en faisant passer la courbe par les points A et B.

Au moyen des propriétés du rayon de courbure, on peut facilement déduire de ces équations que : *Dans les brachistochrones planes, la composante normale de la force extérieure est égale en grandeur et en signe à la force centrifuge* — ou bien encore : *Dans les brachistochrones planes, la pression exercée par le mobile sur la courbe est le double de la composante normale de la force agissante.*

C'est cette propriété caractéristique de la brachistochrone, dit Despeyrous, que l'on devra employer dans tous les cas, pour trouver rapidement leur équation.

Paul Haag arrive à cette propriété par une méthode indépendante des variations. Il ajoute qu'elle suffit pour déterminer dans bien des cas la nature de la brachistochrone.

CHAPITRE II.

BRACHISTOCHRONE DANS DIFFÉRENTES HYPOTHÈSES SUR LES POINTS EXTRÊMES.

a) *Brachistochrone entre un point et une droite donnés.*

Comme nous l'avons déjà dit (p. 7), Jacques et Jean Bernoulli ont déterminé la brachistochrone entre un point et une droite donnés. Le cas où cette droite est verticale a été traité par Saurin et par Maclaurin par des méthodes que nous avons rapportées ci-dessus (pp. 30 et 41). Le problème de la page 95 rentre aussi dans le présent chapitre.

Supposons la droite donnée quelconque; nous allons indiquer la solution de Saurin. Voici comment ce géomètre énonce le problème :

On demande la cycloïde dont l'arc AFD (fig. 21) *compris entre le point A et la droite donnée* CD *sera parcouru dans un plus court temps que l'arc de toute autre cycloïde comprise entre les mêmes limites.*

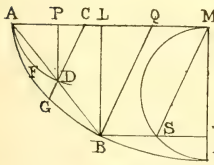


Fig. 21.

Prenons comme constante la cycloïde AGB et menons par le point B où elle est rencontrée par la droite AD, une parallèle BQ à CD et une verticale BL. Le rapport $\frac{BL}{LQ}$ est évidemment connu; nous le désignons par $\frac{m}{n}$. Si l'on pose

$$MN = a, \quad AC = b, \quad AL = x, \quad BL = y,$$

on aura

$$LQ = \frac{ny}{m}, \quad AQ = AL + LQ = \frac{mx + ny}{m}.$$

Soient t le temps que le mobile met à parcourir l'arc AFD, t' le temps qui correspond à l'arc AGB; nous aurons (voir p. 31)

$$\frac{t'}{t} = \frac{x + \sqrt{ay - y^2}}{t\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\overline{BL}}{\overline{DP}}} = \sqrt{\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}} = \sqrt{\frac{\overline{AQ}}{\overline{AC}}}$$

$$= \sqrt{\frac{mx + ny}{mb}},$$

d'où l'équation

$$t = \sqrt{\frac{bm}{a}} \frac{x + \sqrt{ay - y^2}}{\sqrt{mx + ny}}.$$

En égalant à zéro la différentielle dt et tenant compte de l'équation différentielle de la cycloïde AGB, on obtient

$$(my + nx)\sqrt{ay - y^2} = ny^2 + amx - mxy,$$

ou, sous forme rationnelle,

$$m^2y^4 - am^2y^3 + m^2x^2y^2 - 2am^2x^2y + n^2y^4 + n^2x^2y^2 - an^2x^2y + a^2m^2x^2 = 0,$$

ou encore

$$[am^2 - y(m^2 + n^2)][ax^2 - y(x^2 + y^2)] = 0.$$

On en conclut

$$y = \frac{am^2}{m^2 + n^2};$$

d'où la construction suivante : Menons dans le cercle générateur MSN la corde MS parallèle à CD, et TSB parallèle à AM et rencontrant la cycloïde AGB en B; menons encore la droite AB qui coupe CG en D et construisons l'arc AFD semblable à l'arc AGB, le rapport de similitude étant AD : AB.

On voit facilement que l'arc AFD est normal à CD, car la normale en B est parallèle à SM. Le diamètre du cercle générateur de la cycloïde cherché est égal à $MN\frac{CD}{MS}$.

b) *Brachistochrone entre un point et une surface.*

Reportons-nous à l'analyse de la méthode de Lagrange (p. 54). Nous avons vu que les conditions de maximum et de minimum de l'expression $\int Z$ se ramènent aux deux équations $B = 0$ et $C = 0$, dont la dernière est relative aux limites de l'intégrale. Si C_1 et C_2 désignent les valeurs de C au premier et au dernier point de l'intégrale, dans le cas considéré ici nous aurons identiquement $C_1 = 0$, puisque le point de départ est fixe. Le point d'arrivée sera donné par l'égalité $C_2 = 0$, qui, si x, y, z désignent les coordonnées du point d'arrivée, s'écrira :

$$\frac{dx}{ds\sqrt{x}}\delta x + \frac{dy}{ds\sqrt{x}}\delta y + \frac{dz}{ds\sqrt{x}}\delta z = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

1° Si le point final doit se trouver sur un plan horizontal, x est constant et $\delta x = 0$; l'équation (1) se décompose en

$$\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0, \quad \frac{dz}{ds\sqrt{x}} = 0,$$

c'est-à-dire que les constantes a et b que nous avons employées (p. 55) doivent être infinies; donc la ligne cherchée est une droite verticale.

2° Le plan donné est vertical et perpendiculaire à l'axe des y ou des z.

S'il est perpendiculaire à l'axe des y, on a $\delta y = 0$; donc

$$\frac{dx}{ds\sqrt{x}} = 0, \quad \frac{dz}{ds\sqrt{x}} = 0.$$

S'il est perpendiculaire à l'axe des z, on a $\delta z = 0$; donc

$$\frac{dx}{ds\sqrt{x}} = 0, \quad \frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0.$$

En déterminant a et b, on verra que la courbe cherchée est une cycloïde coupant le plan donné à angle droit.

3° Si la brachistochrone se termine à une surface définie par l'équation

$$dz = \mathrm{T}dx + \mathrm{V}dy,$$

on devra avoir

$$\delta z = \mathrm{T}\delta x + \mathrm{V}\delta y;$$

substituant cette valeur dans (1), nous aurons pour le point final

$$\left(\frac{dx}{ds\sqrt{x}} + \mathrm{T}\frac{dz}{ds\sqrt{x}}\right)\delta x + \left(\frac{dy}{ds\sqrt{x}} + \mathrm{V}\frac{dz}{ds\sqrt{x}}\right)\delta y = 0,$$

d'où l'on tire

$$dx + \mathrm{T}dz = 0, \quad dy + \mathrm{V}dz = 0,$$

équations qui montrent que la courbe cherchée coupe orthogonalement la surface donnée.

Si nous supposons, avec Jordan, que la surface a pour équation $\psi(x, y, z) = 0$, les variations relatives au point final, δx_2, δy_2, δz_2, sont liées par l'équation (*)

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_2 \delta z_2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_2 (\delta x_2 + x'_2\delta z_2) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_2 (\delta y_2 + y'_2\delta z_2) = 0. \quad (2)$$

Toutes les fois que cette condition sera remplie, la quantité H (p. 65), qui se réduit à

$$\frac{\delta z_2 + x'_2(\delta x_2 + x'_2\delta z_2) + y'_2(\delta y_2 + y'_2\delta z_2)}{\sqrt{1 + x'^2_2 + y'^2_2}\sqrt{v_0^2 - 2g(z_2 - z_1)}}$$

devra s'annuler; on aura donc pour équation de condition :

$$\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_2}{1} = \frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_2}{x'_2} = \frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_2}{y'_2}, \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

(*) Rappelons que Jordan prend pour variable indépendante z.

qui, jointes à $\psi = 0$ et aux équations qui expriment que la courbe passe par les points (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2), détermineront les constantes d'intégration et les coordonnées finales x_2, y_2, z_2.

Les équations (3) expriment que la tangente à la courbe cherchée au point (x_2, y_2, z_2) est normale à la surface $\psi = 0$.

c) *Brachistochrone entre un point donné et une courbe donnée.*

Le point final doit se trouver sur la courbe

$$\psi = 0, \quad \chi = 0.$$

Les variations δx_2, δy_2, δz_2 seront liées par des équations analogues à (2), l'une relative à la fonction ψ, l'autre à la fonction χ. L'équation de condition devient dans ce cas :

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)_2 & \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_2 & \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_2 \\ \left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)_2 & \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_2 & \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)_2 \\ 1 & x'_2 & y'_2 \end{vmatrix} = 0;$$

jointe à $\psi = 0$, $\chi = 0$ et aux équations qui expriment que la courbe passe par les points (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), elle déterminera toutes les inconnues du problème. Cette équation exprime que la courbe cherchée est normale à la courbe donnée.

d) *Brachistochrone entre deux courbes données.*

Dans les *Mémoires de Berlin* (1770), Lagrange, en étudiant ce cas, suppose les deux courbes données dans un même plan. Ce travail avait été publié pour rectifier une solution précédente où *Lagrange avait, en appliquant sa méthode à ce problème, omis de faire varier l'ordonnée du point de départ qui se trouve sous le*

signe d'intégration; pour cette raison, le résultat de son calcul ne s'accordait pas avec la solution connue de ce problème (*).

Nous ne reproduirons pas l'analyse de Lagrange. Il suffit d'appliquer aux deux points extrêmes de la courbe cherchée le calcul que nous venons d'appliquer au point final dans le cas précédent. Nous aurons ainsi, pour déterminer les coordonnées des points extrêmes et les constantes d'intégration, les équations suivantes :

1° Les équations des courbes données;

2° Pour chacun des points extrêmes, une relation analogue à l'équation (3) du paragraphe précédent;

3° Les équations qui expriment que la courbe cherchée passe par les points extrêmes.

(*) *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris*, 1829.

CHAPITRE III.

BRACHISTOCHRONE SUR UNE SURFACE.

Nous résumons ici la première partie de la *Thèse sur la brachistochrone*, par Roger; pour plus de clarté, nous ajoutons quelques mots d'explication sur la manière de trouver l'équation de condition.

a) *La surface est quelconque.*

Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface. L'axe des z étant vertical et le mobile partant du point (x_0, y_0, z_0) sans vitesse initiale, il s'agit de rendre minimum la quantité

$$I = \int_{z_0}^{z_1} \frac{ds}{\sqrt{z - z_0}}.$$

Si l'on fait varier seulement x, y de manière que $\delta z = 0$, on obtient, en observant que

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \quad \delta ds = \frac{dx}{ds}\delta dx + \frac{dy}{ds}\delta dy :$$

$$\delta I = \int_{z_0}^{z_1} \frac{dx}{ds\sqrt{z - z_0}} d\delta x + \int_{z_0}^{z_1} \frac{dy}{ds\sqrt{z - z_0}} d\delta y.$$

Une intégration par parties donne

$$\delta I = \left[\frac{dx}{ds\sqrt{z - z_0}} \delta x + \frac{dy}{ds\sqrt{z - z_0}} \delta y \right]_0^1$$

$$- \int_{z_0}^{z_1} \left\{ d\frac{dx}{ds\sqrt{z - z_0}} \cdot \delta x + d\frac{dy}{ds\sqrt{z - z_0}} \cdot \delta y \right\}.$$

Le minimum exige

$$\left[\frac{dx}{ds\sqrt{z-z_0}}\delta x + \frac{dy}{ds\sqrt{z-z_0}}\delta y\right]_0^1 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$d\frac{dx}{ds\sqrt{z-z_0}}\cdot\delta x + d\frac{dy}{ds\sqrt{z-z_0}}\delta y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Les variations δx, δy ne sont plus arbitraires, mais elles doivent vérifier l'égalité

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx}\delta x + \frac{d\mathrm{F}}{dy}\delta y = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Les équations (2) et (3) ayant lieu pour une infinité de valeurs du rapport $\frac{\delta y}{\delta x}$, on a nécessairement

$$\frac{d\dfrac{dx}{ds\sqrt{z-z_0}}}{\dfrac{d\mathrm{F}}{dx}} = \frac{d\dfrac{dy}{ds\sqrt{z-z_0}}}{\dfrac{d\mathrm{F}}{dy}} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Au moyen de l'équation $\mathrm{F}(x, y, z) = 0$, on pourra réduire l'équation (4) à une équation différentielle du second ordre entre deux variables. L'intégrale de cette équation contiendra deux constantes arbitraires qui permettront de se donner arbitrairement le point de départ et le point d'arrivée.

b) *La surface est de révolution autour de l'axe des* z.

On a dans ce cas

$$\mathrm{F} \equiv x^2 + y^2 - \varphi(z), \quad \frac{d\mathrm{F}}{dx} = 2x, \quad \frac{d\mathrm{F}}{dy} = 2y,$$

et l'équation (4) devient

$$y\,d\frac{dx}{ds\sqrt{z-z_0}} - x\,d\frac{dy}{ds\sqrt{z-z_0}} = 0;$$

d'où, en intégrant,

$$y\,dx - x\,dy = \mathrm{C}\,ds\sqrt{z - z_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Si l'on substitue à x et à y les coordonnées polaires r et θ, liées par les relations $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, il vient

$$r^2 d\theta = \mathrm{C}v^2 dt; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

car

$$y\,dx - x\,dy = r^2 d\theta, \quad v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(z - z_0)}.$$

L'équation (6) montre que *l'aire décrite à chaque instant par la projection du rayon vecteur est proportionnelle au carré de la vitesse du mobile.*

A l'origine du mouvement, la vitesse v étant nulle, le rapport $\frac{d\theta}{dt}$ est également nul; donc le mobile reste, pendant le premier instant, dans le plan vertical qui passe par le rayon vecteur. Il en résulte que *la brachistochrone est tangente au méridien qui passe par le point de départ.*

L'équation (5) peut se mettre sous la forme

$$d\frac{x}{y} = \mathrm{C}y^2 ds\sqrt{z - z_0},$$

et l'on voit que le second membre a toujours le signe de C. Si l'on suppose que le point d'arrivée (x_1, y_1, z_1) soit sur le méridien du point de départ (x_0, y_0, z_0), on aura $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_0}{y_0}$ et il faudra que la somme des accroissements du rapport $\frac{x}{y}$ soit nulle, c'est-à-dire que

$$\mathrm{C}\int_{z_0}^{z_1} y^2 ds\sqrt{z - z_0} = 0,$$

d'où $\mathrm{C} = 0$. Par suite,

$$d\frac{x}{y} = 0, \quad \frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_0}{y_0};$$

donc *la brachistochrone n'est autre chose que le méridien passant par le point de départ.*

L'intégrale de l'équation (5) peut toujours se ramener à une quadrature. En effet, de cette équation on tire

$$r^2 d\theta = C\sqrt{z - z_0}\, ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

On a d'ailleurs

$$r = \sqrt{\varphi(z)} = f(z), \quad dr = f'(z)dz,$$
$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 = dz^2[1 + f'^2(z)] + f^2(z)d\theta^2;$$

l'équation (7) se ramène donc à

$$d\theta = \frac{C dz}{f(z)} \sqrt{\frac{[1 + f'^2(z)](z - z_0)}{f^2(z) - C^2(z - z_0)}}.$$

Lorsque la surface est un cylindre de révolution, la réaction qu'elle exerce sur le mobile étant horizontale, n'a aucune influence sur la vitesse. Il en résulte que si on développe le cylindre sur un plan vertical, la brachistochrone sur le cylindre sera la brachistochrone sur le plan; ainsi donc la première courbe se développe suivant une cycloïde.

c) *La surface donnée est un plan.*

Nous n'avons à examiner ici que le cas où le plan fait avec l'horizon un angle θ différent de 90°.

Rapportons la courbe cherchée à un axe Ox, qui est une horizontale du plan donné, et à un axe OZ qui sera la ligne de plus grande pente du plan.

L'équation $F(x, y, z) = 0$ devient $z - y \operatorname{tg} \theta = 0$, de sorte que

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = -\operatorname{tg} \theta,$$

et l'équation (2) se réduit à

$$d\frac{dx}{ds\sqrt{z - z_0}} = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{ds\sqrt{z - z_0}} = C.$$

On a d'ailleurs les formules de transformation

$$y = Z\cos\theta, \quad z = Z\sin\theta;$$

donc l'équation de la courbe rapportée aux axes Ox, OZ sera

$$\frac{dX}{ds\sqrt{Z - Z_0}} = C.$$

Il en résulte que la brachistochrone reste toujours la même dans le plan incliné, lorsque celui-ci tourne autour de l'horizontale Ox, pourvu que les points de départ et d'arrivée gardent relativement la même position. On arrive à la même conclusion en décomposant la pesanteur en deux forces, l'une normale au plan et l'autre dirigée suivant la ligne de plus grande pente; le mobile est donc soumis à une force $g\sin\theta$, constante en grandeur et en direction.

d) *Brachistochrone de longueur donnée.*

Pour terminer, nous plaçons ici la méthode de Poisson pour trouver entre toutes les courbes planes de longueur donnée l et passant par deux points donnés, celle qui soit brachistochrone.

En reprenant les notations du bas de la page 60, nous aurons à chercher le minimum de l'expression

$$U = \int_{\alpha}^{\beta} X\,ds.$$

Si l'on remplace X par $X + c$, il vient

$$U = \int_{\alpha}^{\beta} X\,ds + c\int_{\alpha}^{\beta} ds.$$

Dans le problème actuel, le dernier terme étant constant

(égal à cl), on voit que pour le minimum de U il suffit de remplacer, dans l'équation

$$dy = \frac{a dx}{\sqrt{X^2 - a^2}},$$

trouvée ci-dessus, X par $X + c$. L'inconnue auxiliaire c se déduira de l'équation de condition

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\, dx = l.$$

CHAPITRE IV.

a) Réduction du problème des brachistochrones aux équations canoniques (*).

Soit M un point sollicité par un système de forces données, et l'on cherche une courbe passant par deux points A et B donnés, telle que le temps employé par le mobile pour aller de A en B soit minimum le long de cette courbe. La courbe peut d'ailleurs être assujettie à se trouver sur une surface donnée.

Nous supposerons l'existence d'une fonction des forces; alors la vitesse v du mobile est une fonction connue des coordonnées x, y, z. Il faut rendre minimum

$$\int_{A}^{B} \frac{ds}{v},$$

s désignant l'arc de la courbe.

La réduction de ce problème aux équations canoniques peut se faire de deux façons en réduisant le problème à la recherche soit d'un fil flexible et inextensible, soit de la trajectoire d'un point matériel. Ces deux méthodes ne sont pas essentiellement distinctes, car l'identité de ces deux derniers problèmes a été reconnue depuis longtemps.

1. Le calcul des variations conduit aux équations :

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{v}\frac{dx}{ds}\right) = \frac{\partial\left(\frac{1}{v}\right)}{\partial x}, \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{v}\frac{dy}{ds}\right) = \frac{\partial\left(\frac{1}{v}\right)}{\partial y}, \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{v}\frac{dz}{ds}\right) = \frac{\partial\left(\frac{1}{v}\right)}{\partial z}.$$

(*) Cette réduction a été faite par Andoyer dans une note présentée par M. Darboux à l'Académie des sciences de Paris (*Mémoires*, t. C, p. 1577).

Ce sont les équations d'équilibre d'un fil dont la tension serait $\frac{1}{v}$. En utilisant les résultats indiqués par Appell (*Comptes rendus de l'Académie de Paris,* tome XCVI, page 688), elles se ramènent aisément à un système d'équations canoniques intégrables par la méthode de Jacobi. La même chose a lieu si la courbe doit se trouver sur une surface donnée. Le nombre des variables indépendantes se réduit à deux.

2. Soit un second point matériel libre (ou assujetti à se trouver sur une surface donnée) dont la vitesse est à chaque instant $v' = \frac{1}{v}$. D'après le principe de la moindre action, la trajectoire qu'il suivra pour aller de A en B sera définie par l'équation :

$$\delta \int_A^B v' ds = 0 \quad \text{ou} \quad \delta \int_A^B \frac{1}{v} ds = 0;$$

ce sera donc la brachistochrone cherchée.

La réduction des équations à la forme canonique est alors immédiate.

L'un ou l'autre des théorèmes que nous venons d'énoncer permet de démontrer immédiatement la propriété des brachistochrones dans le cas où la courbe n'est pas assujettie à se trouver sur une surface donnée, savoir :

La force est dans le plan osculateur de la courbe;

La projection de la force sur la normale principale est égale à la force centrifuge.

Si, au contraire, la courbe est assujettie à se trouver sur une surface donnée, ces théorèmes sont remplacés par le suivant :

La projection de la force sur celle des normales à la courbe qui est située dans le plan tangent, a pour valeur $\frac{v^2}{\rho_g}$, ρ_g *étant le rayon de courbure géodésique de la surface.*

b) Remarque due a Appell (*).

On sait que parmi les courbes joignant deux points fixes A et B, celles qui rendent minimum une intégrale de la forme

$$I = \int_A^B \varphi(x, y, z)\, ds,$$

vérifient les équations différentielles

$$d\left(\varphi \frac{dx}{ds}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} ds = 0, \quad d\left(\varphi \frac{dy}{ds}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial y} ds = 0, \quad d\left(\varphi \frac{dz}{ds}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial z} ds = 0,$$

qui se réduisent à deux.

Appelons *courbes* C les courbes obtenues en intégrant ces équations, courbes qui dépendent de quatre constantes arbitraires et qui se réduisent à des droites quand $\varphi = 1$. Ces *courbes* C sont les trajectoires d'un point libre sollicité par une force dérivant de la fonction des forces

$$U = [\varphi(x, y, z)]^2,$$

ou les courbes brachistochrones pour une loi de force dérivant de la fonction des forces

$$U' = \left[\frac{1}{\varphi(x, y, z)}\right]^2,$$

la constante des forces vives étant *nulle* dans les deux cas.

On peut étendre aux *courbes* C les propriétés des lignes droites ou plus généralement des lignes géodésiques (**). Le point de

(*) *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1890-1891.

(**) Voir *Leçons de Géométrie par Darboux*, t. II.

départ de cette extension réside dans ce théorème de MM. Tait et Thomson :

Soient deux courbes C *infiniment voisines,* C *et* C_1, *ayant pour extrémités* A *et* B, A_1 *et* B_1; *la variation de l'intégrale* I *quand on passe de* C *à* C_1, *est*

$$-\overline{AA_1}\varphi(A)\cos BAA_1 - \overline{BB_1}\varphi(B)\cos ABB_1,$$

$\varphi(A)$ *et* $\varphi(B)$ *désignant les valeurs de* $\varphi(x, y, z)$ *aux points* A *et* B.

Les conséquences de ce théorème sont identiques à celles que l'on déduit du théorème analogue sur la ligne droite ($\varphi = 1$), relativement à la théorie des *surfaces parallèles* (théorème de Tait et Thomson), des *développées,* des *lignes de courbure,* etc., à condition de remplacer partout les longueurs des arcs de courbes par les valeurs correspondantes de l'intégrale I.

Nous voulons surtout attirer l'attention sur ce fait qui ne paraît pas avoir été remarqué, que si l'on interprète ces théorèmes *à l'aide des courbes brachistochrones,* on est conduit à des énoncés aussi simples que pour la théorie des développées, des lignes de courbure, etc., en remplaçant partout les arcs de courbes par le temps que met le mobile à les parcourir sans frottement, la constante des forces vives étant nulle.

c) Sur plusieurs solutions particulières du mouvement d'un point libre, déduites de la considération d'une courbe brachistochrone et réciproquement.

Ainsi que nous l'avons dit dans la première partie, nous ne pourrons donner ici que l'analyse de l'article que M. Towsend a publié dans *The quarterly Journal.* Cette analyse a été faite par Darboux (*Bulletin des sciences mathématiques,* t. VI).

Towsend remarque que dans le cas du mouvement du point libre, la force agissante se trouve dans le plan osculateur; la composante normale étant dirigée vers le centre de courbure est égale à $\frac{mv^2}{\rho}$, tandis que si un point est assujetti à se trouver sur une courbe, dans le cas où cette courbe est brachistochrone et

en supposant qu'il y ait une fonction des forces, la force sera encore dans le plan osculateur de la trajectoire, sa composante normale sera égale à $\frac{mv^2}{\rho}$, mais elle sera dirigée suivant le prolongement du rayon de courbure.

Il suit de là que si une courbe est la trajectoire d'un point libre, la vitesse étant une fonction déterminée de sa position, elle sera, pour la même loi de la vitesse, une courbe brachistochrone ; la force qui agit en chaque point étant la symétrique, par rapport à la tangente, de la force qui agit dans le premier cas.

Ainsi, une ellipse est la trajectoire d'un point libre soumis à l'action d'une force attractive émanant de l'un de ses foyers et agissant en raison inverse du carré de la distance; la vitesse devenant nulle analytiquement quand la distance à ce foyer est égale au grand axe, elle sera, en vertu du théorème, une courbe brachistochrone, avec la même loi de la vitesse pour une force répulsive émanant de l'autre foyer et agissant en raison inverse du carré de la distance du point au cercle directeur correspondant au second foyer.

Une parabole est la trajectoire d'un point libre soumis à l'action d'une force constante perpendiculaire à la directrice, la vitesse devenant nulle analytiquement lorsque le point matériel est sur la directrice. Elle sera, par conséquent, brachistochrone pour une force constante répulsive émanant de son foyer avec la même loi de vitesse que dans le cas précédent.

Towsend multiplie les applications du théorème général.

d) Chemin brachistochrone sur une surface (*).

Soient A et B deux points donnés sur une surface. On propose de trouver de A en B sur la surface une ligne ACB telle,

(*) Dans son article sur les moteurs, Collignon, ainsi que nous l'avons dit, étudie le chemin brachistochrone sur une surface. Nous n'avons pas rapporté son analyse dans le chapitre précédent, parce que la manière dont l'auteur envisage le problème ne le fait pas rentrer complètement dans celui que nous étudions. D'autre part, cet article nous a paru assez intéressant pour trouver place dans cette étude.

qu'un moteur développant un travail constant T la parcoure dans le moindre temps possible. On suppose connus le poids Q du moteur et de son fardeau et l'angle φ du frottement moyen applicable à l'ensemble.

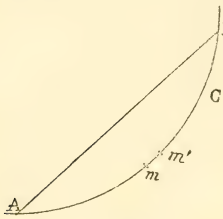


Fig. 22.

La vitesse du mobile dans le parcours d'un arc $mm' = ds$ est donnée par l'équation

$$T = Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi} v,$$

α étant l'angle que fait l'élément avec l'horizon.

Le temps du parcours est

$$\frac{ds}{v} = \frac{Q ds \sin(\alpha + \varphi)}{T \cos \varphi}.$$

Le minimum de $\int_A^B \frac{ds}{v}$ correspond à celui de $\int_A^B ds \sin(\alpha + \varphi)$, en laissant de côté les facteurs constants.

Or on a

$$\int_A^B ds \sin(\alpha + \varphi) = \cos \varphi \int_A^B ds \sin \alpha + \sin \varphi \int_A^B ds \cos \alpha,$$

et les deux intégrales du second membre s'interprètent séparément. La première est la différence $k = z_1 - z_0$ des cotes des points d'arrivée et de départ de la courbe; elle est connue dès que l'on donne ces points, et on ne peut par conséquent agir sur le premier terme. La seconde intégrale $\int_A^B ds \cos \alpha$ est la longueur de la route projetée sur le plan horizontal. On la rendra minimum en prenant pour cette projection celle de la droite AB qui joint les deux points. La ligne brachistochrone est donc l'intersection de la surface avec le plan vertical passant par les deux points donnés. Cette solution suppose que nulle part suivant cette intersection la pente n'est supérieure à la limite imposée, à

l'angle α; autrement il faudrait remplacer le tracé direct par des tracés détournés.

Collignon cherche ensuite à quelle condition doivent satisfaire les points A et B pour que le trajet ne force pas le moteur à monter, puis à descendre. Par un calcul qu'il nous semble inutile de rapporter ici, il démontre que le point B doit se trouver à l'intérieur de la courbe formée par les points de contact des tangentes menées par A à une suite de courbes intersections des plans horizontaux et de la surface donnée.

Soient $f(x,y,z) = 0$ l'équation de la surface, (α,β,γ) les coordonnées du point A; cette courbe limite aura pour équation

$$\frac{df}{dx}(\alpha - x) + \frac{df}{\partial y}(\beta - y) = 0.$$

Si la surface considérée est une sphère, la courbe limite sera l'intersection de la surface sphérique avec un cône de révolution ayant pour axe la verticale du point A et dont les génératrices feraient avec la verticale un angle de 45°.

Pour l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

on trouverait comme projection de la courbe limite

$$\frac{x(\alpha - x)}{a^2} + \frac{y(\beta - y)}{b^2} = 1,$$

c'est-à dire une ellipse semblable à l'ellipse principale située dans le plan horizontal des xy.

e) Brachistochrone d'un système de points matériels.

Nous résumerons autant que possible l'étude de G. Pennacchietti.

§ I.

On donne un système de n points. Soient m_i la masse d'un point et x_i, y_i, z_i ses coordonnées par rapport à un système

d'axes rectangulaires fixes dans l'espace. Supposons que la force agissante soit une fonction du potentiel U, dépendant des seules coordonnées, et appelons X_i, Y_i, Z_i les composantes suivant les axes; nous aurons :

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Supposons en outre que les liaisons du système soient données par k équations,

$$L_i(x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \quad . \quad (1)$$

entre les coordonnées des points mobiles.

Soient T l'énergie totale du système, h une constante arbitraire; le problème du mouvement donnera l'équation

$$T - U = h. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Imaginons les coordonnées de tous les points déterminées au moyen de l'une d'entre elles x_1, et désignons par t le temps employé par le système pour le passage en deux configurations distinctes, définies par les valeurs x_1^0 et x_1^1 de x_1. Si l'on pose

$$V = \sqrt{\frac{m_1(1 + y_1'^2 + z_1'^2) + m_2(x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2) + \cdots + m_n(x_n'^2 + y_n'^2 + z_n'^2)}{2(U + h)}},$$

où les lettres accentuées désignent les dérivées par rapport à x_1, on a

$$t = \int_{x_1^0}^{x_1^1} V dx_1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Si l_1, $l_2 \ldots$, l_k représentent des constantes à déterminer, on verra que pour rendre l'intégrale (3) minimum, on doit nécessairement avoir :

$$\left.\begin{aligned} X_j - \frac{d}{dx_1}\frac{\partial V}{\partial x_j} + l_1\frac{\partial L_1}{\partial x_j} + l_2\frac{\partial L_2}{\partial x_j} + \cdots + l_k\frac{\partial L_k}{\partial x_j} &= 0 \\ Y_i - \frac{d}{dx_1}\frac{\partial V}{\partial y_i} + l_1\frac{\partial L_1}{\partial y_i} + l_2\frac{\partial L_2}{\partial y_i} + \cdots + l_k\frac{\partial L_k}{\partial y_i} &= 0 \\ Z_i - \frac{d}{dx_1}\frac{\partial V}{\partial z_i} + l_1\frac{\partial L_1}{\partial z_i} + l_2\frac{\partial L_2}{\partial z_i} + \cdots + l_k\frac{\partial L_k}{\partial z_i} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

j variant de 2 à n, i variant de 1 à n.

Prenons t comme variable indépendante; le système (3) et (4) équivaut au suivant :

$$\left.\begin{aligned} m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} &= -\mathrm{X}_i + \frac{1}{\mathrm{T}}\frac{d\mathrm{T}}{dt}m_i\frac{dx_i}{dt} + l_1\frac{\partial \mathrm{L}_1}{\partial x_i} + \cdots + l_k\frac{\partial \mathrm{L}_k}{\partial x_i},\\ m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} &= -\mathrm{Y}_i + \frac{1}{\mathrm{T}}\frac{d\mathrm{T}}{dt}m_i\frac{dy_i}{dt} + l_1\frac{\partial \mathrm{L}_1}{\partial y_i} + \cdots + l_k\frac{\partial \mathrm{L}_k}{\partial y_i},\\ m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} &= -\mathrm{Z}_i + \frac{1}{\mathrm{T}}\frac{d\mathrm{T}}{dt}m_i\frac{dz_i}{dt} + l_1\frac{\partial \mathrm{L}_1}{\partial z_i} + \cdots + l_k\frac{\partial \mathrm{L}_k}{\partial z_i}, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Dans le cas où la force est nulle, c'est-à-dire lorsque $\mathrm{X}_i = 0$, $\mathrm{Y}_i = 0$, $\mathrm{Z}_i = 0$, ce système coïncidera avec les équations ordinaires du mouvement d'un système soumis aux équations de liaison (1), lequel se meut sans vitesse initiale.

Au moyen de (1), exprimons les coordonnées x_i, y_i, z_i en fonction de $3n - k = \mu$ paramètres $q_1, q_2, \ldots q_\mu$, tels que ces expressions substituées dans (1) rendent (1) identique.

Si l'on pose $q'_r = \frac{dq_r}{dt}$, on aura

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}(a_{11}q_1'^2 + a_{22}q_2'^2 + \cdots + 2a_{12}q'_1q'_2 + \cdots),$$

où les quantités a_{rs} sont des fonctions connues des q_r; le système (5) se transformera dans le suivant :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_r} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_r} = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_r} + \frac{1}{\mathrm{T}}\frac{d\mathrm{T}}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_r}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Il serait facile de voir que les équations du mouvement brachistochrone conservent la même forme (6) chaque fois que les composantes X_i, Y_i, Z_i de la force seront les dérivées d'une fonction des $3n$ variables x_i, y_i, z_i et que l'expression

$$\Sigma(\mathrm{X}_i dx_i + \mathrm{Y}_i dy_i + \mathrm{Z}_i dz_i)$$

sera la différentielle exacte d'une fonction U des variables q.

Posant

$$\frac{d\mathrm{T}}{dq'_r} : \mathrm{T} = p_r, \quad \mathrm{H} = \mathrm{T} - \mathrm{U}$$

et exprimant T au moyen de p_r, q_r, le système d'équations du mouvement brachistochrone prendra la forme

$$T\frac{dq_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad T\frac{dp_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_r}.$$

Les $(2\mu - 1)$ intégrales de ce système ne contiennent plus explicitement le temps et sont communes au système canonique

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}.$$

Si l'on fait

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = A,$$

on aura ainsi

$$T = \frac{-2A}{\begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ p_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Par conséquent, les équations aux différentielles partielles dont dépend la détermination des intégrales, ne contiennent plus explicitement le temps et

$$\begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ p_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ p_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} (U + h) + 2A = 0,$$

d'où

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial q_r}.$$

§ II.

Étudions maintenant quelques propriétés du mouvement brachistochrone d'un système rigide.

Soient ξ, η, ζ les coordonnées du barycentre, M la somme des masses du système, et $G_x, G_y, G_z, M_x, M_y, M_z$ les moments de la quantité de mouvement et de la force active par rapport aux axes coordonnés. De (5) § I on déduit

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2\xi}{dt^2} &= -\Sigma X_i + \frac{M}{T}\frac{dT}{dt}\frac{d\xi}{dt}, \\ M\frac{d^2\eta}{dt^2} &= -\Sigma Y_i + \frac{M}{T}\frac{dT}{dt}\frac{d\eta}{dt}, \\ M\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -\Sigma Z_i + \frac{M}{T}\frac{dT}{dt}\frac{d\zeta}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dG_x}{dt} - \frac{1}{T}\frac{dT}{dt}G_x &= -M_x, \\ \frac{dG_y}{dt} - \frac{1}{T}\frac{dT}{dt}G_y &= -M_y, \\ \frac{dG_z}{dt} - \frac{1}{T}\frac{dT}{dt}G_z &= -M_z. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Menons par le barycentre trois axes x'', y'', z'', respectivement parallèles aux axes (x, y, z), et trois autres x', y', z', simplement orthogonaux, mais fixes dans le corps. Soient $G_{x''}$, $G_{y''}$, $G_{z''}$ et $M_{x''}$, $M_{y''}$, $M_{z''}$ les moments des quantités de mouvement et des forces actives par rapport aux axes x'', y'', z''; on aura

$$G_{x''} = G_x + \left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right)M,$$

$$M_{x''} = M_x + \xi\Sigma Y - \eta\Sigma X,$$

et des formules analogues pour $G_{y''}$, $G_{z''}$, $M_{y''}$, $M_{z''}$.

Du système (2), on déduit

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dG_{x''}}{dt} - \frac{1}{T}\frac{dT}{dt}G_{x''} &= -M_{x''},\\
\frac{dG_{y''}}{dt} - \frac{1}{T}\frac{dT}{dt}G_{y''} &= -M_{y''},\\
\frac{dG_{z''}}{dt} - \frac{1}{T}\frac{dT}{dt}G_{z''} &= -M_{z''}.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Soient $G_{x''}$, $G_{y''}$, $G_{z''}$ les moments des quantités de mouvement par rapport aux axes x', y', z'; (a, b, c) les cosinus directifs de x' par rapport aux axes (x, y, z); (a', b', c') ceux de y', (a'', b'', c'') ceux de z'; on a

$$\left.\begin{aligned}
G_{x''} &= aG_{x'} + a'G_{y'} + a''G_{z'},\\
G_{y''} &= bG_{x'} + b'G_{y'} + b''G_{z'},\\
G_{z''} &= cG_{x'} + c'G_{y'} + c''G_{z'}.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Désignons par p, q, r les composantes par rapport aux axes x', y', z' de la vitesse angulaire ω autour de l'axe barycentrique de rotation, quand on imagine le mouvement infinitésimal du système décomposé en une translation caractérisée par la vitesse du barycentre et une rotation autour de l'axe instantané passant par le barycentre; nous aurons

$$\left.\begin{aligned}
p &= a''\frac{da'}{dt} + b''\frac{db'}{dt} + c''\frac{dc'}{dt},\\
q &= a\frac{da''}{dt} + b\frac{db''}{dt} + c\frac{dc''}{dt},\\
r &= a'\frac{da}{dt} + b'\frac{db}{dt} + c'\frac{dc}{dt}.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

De (3), (4) et (5) on déduit facilement

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dG_{x'}}{dt} + qG_{z'} - rG_{y'} - \frac{1}{T}\frac{dT}{dt}G_{x'} = -M_{x'},\\
&\frac{dG_{y'}}{dt} + rG_{x'} - pG_{z'} - \frac{1}{T}\frac{dT}{dt}G_{y'} = -M_{y'},\\
&\frac{dG_{z'}}{dt} + pG_{y'} - qG_{x'} - \frac{1}{T}\frac{dT}{dt}G_{z'} = -M_{z'}.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Posons

$$T_1 = \frac{1}{2}M\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right],$$

$$T_2 = \frac{1}{2}[Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq],$$

A, B, C, D, E, F étant les moments d'inertie, respectivement, par rapport aux axes x', y', z' et les produits d'inertie par rapport aux plans $y'z'$, $z'x'$, $x'y'$. T_1 et T_2 sont alors les énergies interne et externe du système et, l'on a

$$T = T_1 + T_2,$$

et, en outre

$$G_{x'} = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad G_{y'} = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad G_{z'} = \frac{\partial T}{\partial r}.$$

Supposons pour plus de simplicité que les axes x', y', z' soient principaux; alors $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$ et le système (6) devient

$$A\frac{dp}{dt} - (B - C)qr - \frac{1}{T}\frac{dT}{dt}Ap = -Mx',$$

$$B\frac{dq}{dt} - (C - A)rp - \frac{1}{T}\frac{dT}{dt}Bq = -My',$$

$$C\frac{dr}{dt} - (A - B)pq - \frac{1}{T}\frac{dT}{dt}Cr = -Mz'.$$

§ III.

Au moyen de ces équations, Pennacchietti étudie les cas suivants dont nous donnerons seulement les résultats :

1° Le moment de la force active par rapport à l'axe Ox est nul.

Si l'on désigne par g_1 une constante arbitraire et par $A_x^{(i)}$ l'aire décrite par la projection sur le plan des xy du rayon vecteur mené de l'origine O à un point m_i du système, on aura

$$\frac{dG_x}{dt} - \frac{1}{T}\frac{dT}{dt}G_x = 0, \quad G_x = Tg_1, \quad \Sigma m_i dA_x^{(i)} = \frac{1}{2}g_1 T dt.$$

2° Le moment de la force active par rapport à l'origine est nul.

Pendant le mouvement brachistochrone d'un système invariable, pour lequel le moment de la force active par rapport à un point fixe est nul, le moment géométrique de la quantité de mouvement a une direction constante et une grandeur proportionnelle à l'énergie cinétique. Le plan perpendiculaire au moment géométrique de la quantité de mouvement est celui dans lequel la somme des aires décrites dans un intervalle de temps donné par la projection du rayon vecteur multipliée par la masse du point mobile respectif, a une valeur maximum.

§ IV.

L'auteur établit dans ce paragraphe le théorème suivant :

Dans le mouvement brachistochrone d'un système rigide soumis à l'action de forces se réduisant à une seule résultante barycentrique, l'énergie cinétique totale est proportionnelle à la racine carrée de l'énergie cinétique interne; le moment géométrique de la quantité de mouvement est proportionnel à l'énergie cinétique totale et a une direction constante.

L'ellipsoïde de Poinsot glisse sur un plan ; ce plan est doué du seul mouvement de translation, la vitesse de chacun des points étant égale en grandeur, direction et sens à la vitesse barycentrique. L'axe barycentrique instantané de rotation est le demi-diamètre conduit par le point de contact de l'ellipsoïde avec ce plan. La vitesse angulaire de rotation instantanée varie en raison composée du demi-diamètre autour duquel elle a lieu et de l'énergie cinétique du système.

La composante, suivant l'axe instantané, du moment de la quantité de mouvement par rapport au barycentre, est proportionnelle à l'énergie cinétique.

Si le système, à un moment donné, tourne autour d'un de ses axes principaux, il continuera toujours à tourner autour de cet axe avec une vitesse proportionnelle à l'énergie totale du système.

f) Problèmes particuliers.

1° *Déterminer le lieu du point d'arrivée de la brachistochrone comprise entre un point et une droite donnés, lorsque cette droite tourne autour du point où elle coupe l'horizontale du point de départ.*

Saurin a résolu ce problème et trouvé une spirale pour le lieu demandé.

2° *Supposons sur une surface* $F(x, y, z) = 0$ *une série de brachistochrones issues du même point* A ; *soient* AM, AM', AM''... *des arcs parcourus dans le même temps. On demande le lieu des points* M, M', M''...

Roger a démontré que la courbe cherchée est une trajectoire orthogonale de toutes les brachistochrones.

3° Haton de la Goupillière, dans le tome XXVIII des *Mémoires de Savants étrangers* (Académie des Sciences de Paris), étudie le problème suivant :

Déterminer le système de forces sous l'influence duquel une courbe donnée serait celle du trajet le plus rapide.

Il termine en disant qu'il serait facile d'appliquer sa méthode aux *spirales sinusoïdes,* représentées en coordonnées polaires par l'équation $r^n = \sin n\omega$; les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

ORDRE de la courbe. (Valeur de n.)	NATURE de la courbe.	CENTRE d'action.	PUISSANCE de la distance suivant laquelle varie		LOI DE LA FORCE.
			la fonction de force.	la force.	
-2	Hyperbole équilatère.	Son centre.	-2	-3	En raison inverse du cube des distances.
-1	Ligne droite.	Un point quelconque.	0	-1	Nulle (l'exposant est -1, mais le coefficient est 0).
$-\frac{1}{2}$	Parabole.	Son foyer.	1	0	Constante.
0	Spirale logarithmique.	Son pôle.	2	1	En raison directe de la distance.
$\frac{1}{2}$	Limaçon de Pascal.	Son rebroussement.	3	2	En raison du carré de la distance.
1	Cercle.	Un point quelconque de la circonférence.	4	3	En raison du cube de la distance.
2	Lemniscate.	Son centre.	6	5	En raison de la cinquième puissance de la distance.

SUR

UNE TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE

(TRANSFORMATION PSEUDO-NEWTONIENNE)

PAR

M. H. BROCARD,

CORRESPONDANT DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÉGE

SUR

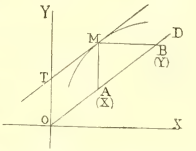
UNE TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE

(TRANSFORMATION PSEUDO-NEWTONIENNE)

M. l'ingénieur des mines Petit-Bois ayant eu l'obligeance de me signaler une transformation qui lui avait donné d'intéressants résultats, j'ai pensé à en reprendre l'étude systématique, pour la présenter à la Société royale des sciences de Liége, à l'occasion de la question 1182 proposée par notre honorable collègue dans le journal *Mathesis* (2), t. VIII (XVIII), p. 215; 1898.

La transformation dont il s'agit consiste dans la construction suivante :

Étant donnée une courbe C *rapportée à deux axes rectangulaires* OX, OY, *on mène par l'origine* O *une parallèle* OD *à la tangente* MT *au point* M *de la courbe.*



Trouver le lieu (X) *des points* A *et le lieu* (Y) *des points* B *d'intersection de cette droite* OD *avec les parallèles à* OY, OX, *menées par le point* M.

Les équations des droites OD, MA, MB étant respectivement

$$Y = y'X, \quad X = x, \quad Y = y,$$

les transformées (X), (Y) auront pour équation

$$(X) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y = xy',$$

si y' est exprimé en x;

(Y) . . . . . $y = xy'$,

si y' est exprimé en y.

En d'autres termes, pour avoir l'équation des transformées (X) et (Y), il suffira d'égaler à $\frac{y}{x}$ la dérivée de la fonction, pourvu que cette dérivée soit exprimée seulement en x ou en y.

D'une même courbe C, la construction indiquée fera dériver deux transformées que, pour abréger, nous avons désignées sous les noms de transformée (X), correspondant aux parallèles à OY ou conservant la *même abscisse*, et de transformée (Y), correspondant aux parallèles à OX ou conservant la *même ordonnée*.

Quelques remarques très simples peuvent être faites immédiatement.

La transformation exige que les tangentes aux points M soient distinctes et ne coïncident pas. Elle n'est donc pas applicable à la droite, contrairement à ce qui arrive, en général, pour les transformations habituellement étudiées en géométrie.

Une droite MN devient la parallèle menée par l'origine O; les deux transformées (X) et (Y) coïncident.

En raison de l'exception qui se rencontre dans ce cas particulier, il paraît nécessaire de donner un nom spécial à la transformation que nous avons en vue.

Newton a traité de la transformation

$$y = X, \quad \frac{y}{x} = Y.$$

L'analogie de ces formules avec celles de la transformation actuelle paraît motiver suffisamment la désignation de *transformation pseudo-newtonienne* que M. J. Neuberg a proposé de lui attribuer.

Application au cercle.

Si la courbe C est une *circonférence de rayon* a, *dont le centre est l'origine*, on a

$$(C) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x^2 + y^2 = a^2,$$

$$(D) \quad . \quad . \quad . \quad y' = -\frac{x}{y} = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y},$$

et par conséquent

$$(X) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \text{ou} \quad r = a \operatorname{tang} \theta, \qquad \textit{cappa;}$$

$$(Y) \quad . \quad . \quad . \quad y = \frac{x\sqrt{a^2 - y^2}}{y}, \quad \text{ou} \quad r = a \operatorname{cotg} \theta, \qquad \textit{cappa.}$$

Les deux transformées sont identiques, à l'orientation près, résultat qu'on pouvait prévoir.

Si la courbe C est une *circonférence tangente en* O *à* OY, on a

$$(C) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x^2 + y^2 - 2ax = 0,$$

$$(D) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y' = \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y},$$

$$(X) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y = (a - x)\sqrt{\frac{x}{2a - x}}, \qquad \textit{strophoïde,}$$

$$(Y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y = \frac{x\sqrt{a^2 - y^2}}{y}, \qquad \textit{cappa.}$$

Plus généralement, pour un *cercle quelconque,* on a

$$(C) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=a^2,$$

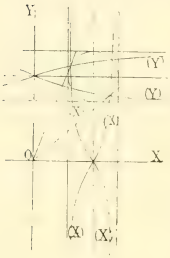
$$(D) \quad . \quad . \quad . \quad y'=\frac{x-\alpha}{\sqrt{a^2-(x-\alpha)^2}}=\frac{\sqrt{a^2-(y-\beta)^2}}{y-\beta},$$

$$(X) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y=\frac{x(x-\alpha)}{\sqrt{a^2-(x-\alpha^2)}},$$

$$(Y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x=\frac{y(y-\beta)}{\sqrt{a^2-(y-\beta)^2}}.$$

Les deux transformées (X), (Y) sont évidemment de même nature. On passe de l'une à l'autre par le changement de x en y et de y en x.

Ces courbes admettent pour asymptotes les tangentes au cercle parallèles à OX et à OY; pour points doubles, les points de OX et de OY où viennent passer les diamètres du cercle parallèles à OX et à OY. Elles rencontrent la circonférence aux points de contact des tangentes issues de l'origine.



Pour chacune d'elles, l'origine est un *point isolé.*

Cas particuliers. — D'une vérification immédiate, notamment pour $\alpha=0$, $\beta=0$, ou $\alpha=a$, $\beta=a$.

* * *

On peut donner des transformées du cercle désignées par (X) et (Y) une autre définition qui nous sera très utile pour la construction de la normale en A ou B.

En effet, la courbe (X), par exemple, est le lieu géométrique du sommet A d'un angle droit OAC′ dont un côté indéfini OA passe par le point fixe O et dont l'autre côté AC′, de longueur

constante et égal au rayon MC ou a du cercle C, s'appuie à son extrémité C′ sur une droite fixe CC′.

En désignant par θ l'angle AOX, on a entre les coordonnées du point A les relations

$$x + a \sin \theta = \alpha, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tang} \theta.$$

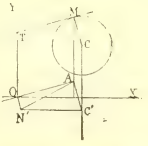
L'élimination de θ donne immédiatement

$$y = \frac{x(x - \alpha)}{\sqrt{a^2 - (x - \alpha)^2}},$$

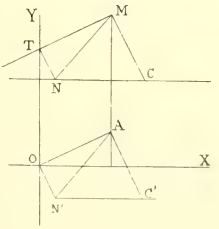
c'est-à-dire précisément l'équation (X).

Ainsi les transformées du cercle font partie des *courbes mécaniques* engendrées par le déplacement d'un angle droit, ce qui explique le fait de l'existence, parmi ces courbes, du *cappa* et de la *strophoïde*, qui admettent ce mode de génération signalé depuis longtemps.

D'après cela, le centre instantané de rotation de l'angle droit OAC′ sera au point N′ de rencontre de ON′ perpendiculaire en O à OA et de C′N′ perpendiculaire à CC′ en C. AN′ sera donc la normale en A à la transformée (X).



Si le point M se meut sur une courbe quelconque, il suffira de considérer cette courbe, dans le voisinage du point M, comme un arc du cercle de courbure en M; par conséquent, la normale en A s'obtiendra par la même construction.



Pour tracer le moins de lignes possible, observons que la normale en M′ sera parallèle à la droite MN obtenue en menant CN parallèle à OX et TN perpendiculaire à TM, et joignant M à l'intersection N de CN et de TN.

Le point N est alors déterminé par les équations

$$Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad Y - (y - xy') = -\frac{1}{y'}X,$$

où $y - xy'$ désigne OT.

Donc MN a pour coefficient d'inclinaison

$$-\frac{1}{p_1} = \frac{Y - y}{X - x} = \frac{\dfrac{1 + y^2}{y''}}{-y'\dfrac{1 + y'^2}{y''} - y'^2 x - x} = -\frac{1}{xy'' + y'},$$

Or c'est ce qui résulterait aussi de la transformation analytique, car la courbe transformée ayant pour équation

$$y = xf',$$

la normale au point A aura pour équation

$$Y - y = -\frac{1}{f' + xf''}(X - x),$$

ou

$$Y - y = -\frac{1}{y' + xy''}(X - x),$$

ce qui est bien l'expression obtenue ci-dessus.

Ainsi, la tangente en M ayant pour coefficient d'inclinaison

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

la tangente en A aura pour coefficient d'inclinaison

$$y' + xy'' = \frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Nota. — Les normales à la courbe (X), issues de l'origine, sont parallèles aux tangentes au cercle, issues du point de OY situé à une distance de l'origine O égale à l'ordonnée du centre du cercle.

Même remarque pour les normales à la courbe Y issues de l'origine.

La normale en B s'obtiendra donc en joignant B au point où le rayon du cercle en M, prolongé s'il est nécessaire, rencontrera OX. Dans cette construction, la normale en M à la courbe remplacera la tangente en M, qui avait été utilisée dans la précédente construction.

Application a des courbes algébriques.

Le cas du cercle a été traité ci-dessus avec les détails voulus.

Parabole. — On a

(C) . . . . . $y^2 = 2ax,$

(D) . . . . . $y' = \frac{a}{y} = \sqrt{\frac{a}{2x}}.$

(X) . . . . . $y = \frac{ax}{y}$ ou $y^2 = ax,$ *parabole.*

(Y) . . . . . $y = \sqrt{\frac{ax}{2}}$ ou $y^2 = \frac{ax}{2},$ *parabole.*

Les transformées sont deux paraboles homothétiques à la proposée par rapport à l'origine qui est leur sommet commun.

Huit. — On a

(C) . . . . . $y^4 = a^2(y^2 - x^2),$

(D) $y' = \frac{a^2x}{a^2y - 2y^3} = \frac{a^2\sqrt{a^2 - y^2}}{a^2 - 2y^2} = \frac{2x}{\sqrt{a^2 - 4x^2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4x^2})}$

(X) . . . . $y = \frac{2x^2}{\sqrt{a^2 - 4x^2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4x^2})},$

(Y) . . . . . $x = \frac{y(a^2 - 2y^2)}{a^2\sqrt{a^2 - y^2}}.$

Folium de Descartes. — La courbe étant rapportée à son point double et à son axe de symétrie, on a

$$(C) \quad \ldots\ldots \quad y = x\sqrt{\frac{a-x}{a+3x}},$$

$$(D) \quad \ldots\ldots \quad y' = \frac{(a^2 + ax - 4x^2)}{(a+3x)\sqrt{a^2+2ax-3x^2}},$$

$$(X) \quad \ldots\ldots \quad y = \frac{(a^2 + ax - 4x^2)x}{(a+3x)\sqrt{a^2+2ax-3x^2}}.$$

Les résultats seraient analogues pour la *trisectrice de Mac-Laurin*, dont une des projections orthogonales est le folium de Descartes.

Note. — En réalité, il y a peu de courbes algébriques dont les transformées (X) ou (Y) soient des courbes simples, mais la transformation s'applique avec beaucoup de succès à la plupart des courbes transcendantes, comme le lecteur va pouvoir en juger.

Application a des courbes transcendantes représentées par des équations en termes finis.

Logarithmique. — On a

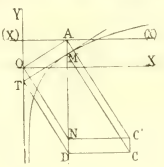
$$(C) \quad \ldots\ldots \quad y = lx,$$

$$(D) \quad \ldots\ldots \quad y' = \frac{1}{x} = e^{-y},$$

$$(X) \quad \ldots\ldots \quad y = 1, \qquad \textit{droite parallèle à } OX,$$

$$(Y) \quad \ldots\ldots \quad x = ye^{y}.$$

Le fait de l'existence de la droite $y = 1$ s'explique par la propriété caractéristique de la logarithmique, d'avoir pour centre de courbure en M le point C obtenu par la construction donnée ci-dessus, lorsque le point N est sur l'ordonnée MD.



Exponentielle. — On a

(C) . . . . . $y = e^x$.

(D) . . . . . $y' = e^x = y$,

(X) . . . . . $y = xe^x$,

(Y) . . . . . $x = 1$, *droite parallèle à* OY,

comme cela a lieu pour la logarithmique, symétrique de l'exponentielle par rapport à la bissectrice de l'angle YOX.

Note. — Les résultats relatifs à l'exponentielle et à la logarithmique sont les mêmes, parce qu'ils reviennent au changement de x en y et de y en x.

Cycloïde — On a

(C) . . . $x = a \arccos \dfrac{a - y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$,

(D) . . . . . $y' = \sqrt{\dfrac{2a - y}{y}}$,

(X) . . . . . Pour mémoire,

(Y) . . . . . $x = y\sqrt{\dfrac{y}{2a - y}}$, *cissoïde.*

Sinusoïde. — On a

(C) . . . . . $y = \sin x$,

(D) . . . . . $y' = \cos x = \sqrt{1 - y^2}$,

(X) . . . . . Pour mémoire,

(Y) . . . . . $y = x\sqrt{1 - y^2}$, *kohlenspitzencurve.*

L'équation (Y) peut s'écrire aussi

$$\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} = 1,$$

qui représente la *kreuzcurve* déduite de l'hyperbole équilatère.

Cette transformée a reçu de M. P.-H. Schoute le nom de *kohlenspitzencurve.*

Tangentoïde. — On a

(C) . . . . . $y = \text{tang } x,$

(D) . . . . . $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + y^2,$

(X) . . . . . Pour mémoire,

(Y) . . . . . $x = \dfrac{y}{1 + y^2}$ *serpentine.*

On reconnaît l'équation de la serpentine, qui est du type

$$y = \frac{abx}{a^2 + x^2}.$$

Sécantoïde. — On a

(C) . . . . . $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x},$

(D) . . . . . $y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = y\sqrt{y^2 - 1},$

(X) . . . . . Pour mémoire,

(Y) . . . $x = \dfrac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$ ou $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}.$

Chaînette. — On a

(C) . . . . . $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$,

(D) . . . . . $y' = \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a}$,

(X) . . Pour mémoire (une courbe transcendante),

(Y) . . . . . $y = \frac{ax}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ *kreuzcurve.*

L'équation (Y) peut s'écrire aussi

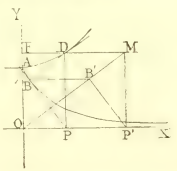
$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}.$$

La transformée (Y) est donc la *kreuzcurve* déduite du cercle

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Cette relation entre la chaînette et la *kreuzcurve* résulte d'ailleurs de la construction bien connue des points de la tractrice, développante de la chaînette.

En effet, D étant un point de la chaînette, DB la tangente, DP l'ordonnée, B la projection de P sur DB, on sait que $PB = OA = a$. Or la construction du point M revient à transporter le triangle rectangle DPB en MP'B'. Mais P'B' est la distance de l'origine O à la seconde diagonale P'F du rectangle MFOP'. La droite P'F est donc tangente au cercle O de rayon a, et le lieu des points M est la *kreuzcurve* déduite de ce cercle.



Tractrice. — On a

(C) . . . $x = -\sqrt{a^2 - y^2} + al\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$,

(D) . . . . . $y' = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$,

(X) . . . . . Pour mémoire,

(Y) . . . $y = \frac{xy}{\sqrt{a^2 - y^2}}$, ou $x^2 + y^2 = a^2$, *circonférence.*

La transformée (Y) est donc une circonférence ayant l'origine pour centre et a pour rayon, comme cela résulte immédiatement de la construction des points de la transformée en question.

APPLICATION A DES COURBES TRANSCENDANTES NON REPRÉSENTÉES PAR DES ÉQUATIONS EN TERMES FINIS, MAIS DONT LA DÉRIVÉE EST UNE FONCTION ALGÉBRIQUE EXPRIMÉE EN x OU EN y SEULEMENT.

Courbe où la sous-tangente et la sous-normale ajoutées donnent une longueur constante a.

On a

(C) . . . . . Pour mémoire,

(D) . . . . . $y' = \dfrac{a\sqrt{a^2 - 4y^2}}{2y}$,

(X) . . . . . Pour mémoire,

(Y) $y = \dfrac{x}{2y}(a + \sqrt{a^2 - 4y^2})$, ou $x^2 + y^2 - ax = 0$, *circonférence.*

La transformée (Y) est donc une circonférence de rayon $\frac{a}{2}$, tangente à OY à l'origine.

L'intégration de l'équation (D) n'est pas possible; cependant on peut acquérir quelques notions de la forme de la courbe C.

Cette courbe est composée d'une infinité d'arcs égaux, limités aux droites

$$y = \frac{a}{2}, \qquad y = -\frac{a}{2},$$

rencontrant ces droites sous un angle de 45° et recoupant l'axe des X à angle droit.

La circonférence (Y) n'est que partiellement obtenue par la construction (A).

Courbe où le rayon de courbure est inversement proportionnel à l'abscisse.

(C) . . . . . Pour mémoire,

(D) . . . . . $y' = \dfrac{x^2 + c^2}{\sqrt{a^4 - (x^2 + c^2)^2}}$.

C'est l'équation différentielle de la *courbe élastique*.

On en déduit

(X) . . . . . $y = \dfrac{x(x^2 + c^2)}{\sqrt{a^4 - (x^2 + c^2)^2}}$.

Courbe où le rayon de courbure MC *est égal au segment* MD *de l'ordonnée* MP *compris entre le point* M *et la perpendiculaire à la tangente menée par son point de rencontre avec* OY.

(C) . . . . . Pour mémoire,

(D) . . . . . $y' = \dfrac{2ax}{a^2 - x^2}$,

(X) . . . . . $y = \dfrac{2ax^2}{a^2 - x^2}$.

APPLICATION A DES COURBES TRANSCENDANTES NON REPRÉSENTÉES PAR DES ÉQUATIONS EN TERMES FINIS ET DONT LA DÉRIVÉE EST AUSSI UNE FONCTION TRANSCENDANTE.

Courbe où le rayon de courbure est égal à la somme de la sous-tangente et de la sous-normale.

(C) . . . . . $y^2 = A + Be^{\frac{x}{a}}$,

(D) . . . . . $y' = \dfrac{Be^{\frac{x}{a}}}{2a\sqrt{A + Be^{\frac{x}{a}}}}$,

(X) . . . . . $y = \dfrac{Bxe^{\frac{x}{a}}}{2a\sqrt{A + Be^{\frac{x}{a}}}}$.

Courbe où la projection du rayon de courbure sur **OY** *est égale à la somme de la sous-tangente et de la sous-normale.*

Autrement dit, courbe où le rayon de courbure MC′ s'obtient en achevant le triangle rectangle C′FM formé par la sous-tangente et la sous-normale et par la droite FT (égale et parallèle à la normale MN).

On a

(C) . . . . . Pour mémoire,

(D) . . . . . $y' = l\frac{y}{a}$,

(Y) . . . . . $y = xl\frac{y}{a}$ ou $x = \frac{y}{l\frac{y}{a}}$.

Courbe où la projection du rayon de courbure sur **OX** *est constante.*

On a

(C) . . . . . Pour mémoire,

(D) . . . . . $y' = \operatorname{tang}\frac{y-c}{a}$,

(Y) . . . . . $x = y\operatorname{cotg}\frac{y-c}{a}$.

Application aux coordonnées polaires.

La transformation proposée peut se traiter pareillement par les coordonnées polaires. C'est ainsi que l'on aura les formules

(C) . . . . . $r = f(\theta)$,

(D) . . . . . $\operatorname{tang}(\theta - \omega) = \frac{r}{r'}$,

(X) . . . . . $\rho = \frac{r\cos\theta}{\cos\omega}$,

(Y) . . . . . $\rho = \frac{r\sin\theta}{\sin\omega}$.

Appliquée à la spirale d'Archimède et à quelques autres courbes transcendantes à équations d'une simplicité analogue, cette méthode conduit à des équations entre lesquelles l'élimination de θ est possible, mais donne cependant des résultats trop compliqués pour être mentionnés ici.

Problème inverse.

Inversement, on peut se proposer de déterminer la courbe dont la transformée X ou Y est une ligne donnée.

Méthode. — L'équation de la courbe X étant sous la forme

$$(X) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = f(x),$$

on l'écrira

$$\frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x},$$

et l'on aura à intégrer l'équation différentielle

$$(D) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y' = \frac{f(x)}{x}.$$

Applications. — Voici quelques exemples :

I. *La ligne* X *est une droite*

$$(X) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = ax + b.$$

On aura donc

$$(D) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y' = a + \frac{b}{x},$$

d'où

$$(C) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = ax + blx + c,$$

équation qui comprend comme cas particuliers la *ligne droite,*

$$y = ax + c,$$

résultat évident, et la *logarithmique,*

$$y = blx,$$

propriété rencontrée ci-dessus.

**

II. *La courbe* X *est la serpentine*, qui a pour équation

$$(X) \quad \ldots \ldots \quad y = \frac{abx}{a^2 + x^2}.$$

On aura

$$(D) \quad \ldots \ldots \quad y' = \frac{ab}{a^2 + x^2} = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}},$$

d'où

$$(C) \quad \ldots \ldots \quad y = b \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{a}, \qquad \textit{tangentoïde}.$$

On retrouve ainsi la tangentoïde, comme cela a déjà été signalé.

III. *La courbe* X *est le trident de Newton*, qui a pour équation

$$(X) \quad \ldots \ldots \quad y = \frac{a[(x-\alpha)^2 + \beta^2]}{\beta(x-a)}.$$

On aura

$$(D) \quad \ldots \quad y' = \frac{(x-\alpha)^2 + \beta^2}{\beta(x-\alpha)} = \frac{x-\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{x-\alpha},$$

donc

$$(C) \quad \ldots \ldots \quad y = \frac{(x-\alpha)^2}{2\beta} + \beta l(x-\alpha).$$

L'ordonnée de la courbe C résulte de l'addition de l'ordonnée d'une parabole $y = Ax^2$ et de l'ordonnée d'une logarithmique $y = Blx$.

On remarquera que la courbe C n'existe pas du côté des x négatifs; cependant la courbe X est composée de deux branches, dont une, du côté des x positifs, correspond à la courbe C; l'autre, du côté des x négatifs, correspond à la partie imaginaire de la courbe C.

IV. *La courbe* X *est la cubique d'Agnesi*, qui a pour équation

$$(X) \quad \ldots \ldots \quad y = \frac{2a^3}{a^2 + x^2},$$

d'où

$$(D) \quad \ldots \quad y' = \frac{2a^3}{x(a^2 + x^2)} = \frac{2a}{x} - \frac{2ax}{a^2 + x^2}.$$

$$(C) \quad \ldots \quad y = al\,\frac{x^2}{a^2 + x^2}.$$

Remarque. — La génération des *kreuzcurves* circulaire ou équilatère et l'analogie de la construction de ces courbes et de la transformation ici considérée, donnent assez naturellement l'idée d'une corrélation possible entre la transformation pseudo-newtonienne et la transformation qui produit les *kreuzcurves*.

Pour le reconnaître, il suffira d'appliquer la transformation de la *kreuzcurve* à la courbe exponentielle

$$(C) \quad \ldots \quad y = e^x.$$

On aura ainsi

$$\alpha = x - 1,$$
$$\beta = y - xy,$$

et par suite

$$\beta = -\alpha e^{1+\alpha} = -e\alpha e^{\alpha},$$

c'est-à-dire une courbe homothétique à la courbe X déduite de C.

Questions diverses.

La transformation pseudo-newtonienne imaginée et étudiée par M. Petit-Bois ne peut manquer de fournir au lecteur attentif le sujet d'une foule de questions plus ou moins difficiles, parmi lesquelles nous ferons un choix d'après les indications que l'auteur nous a obligeamment signalées.

Nous pensons avec lui que la géométrie des courbes viendra s'enrichir ainsi d'un chapitre intéressant.

En effet, les courbes (C), (X), (Y) forment un groupe de lignes associées, et, après avoir étudié les relations qui existent entre les tangentes ou les normales aux points correspondants de la courbe (C) et de ses transformées (X) ou (Y), on peut se

demander très naturellement s'il existe aussi des relations analogues entre les rayons de courbure, les développées, les aires, etc.

Incidemment, voici une remarque évidente, mais qui peut avoir son utilité :

Si la courbe (C) rencontre m fois l'axe OY (*ou l'axe* OX), la transformée (X) [*ou* (Y)] passe m fois par l'origine des coordonnées ou possède en ce pôle un point multiple d'ordre m.

Il est bien évident aussi que les tangentes à la courbe (C), parallèles à OY (*ou à* OX), sont les asymptotes de la transformée (X) [*ou de la transformée* (Y)].

Si l'on veut déterminer la courbe (C) pour laquelle la transformée (X) reproduise la courbe fondamentale, on aura la condition

$$\frac{y}{x} = y' + xy'',$$

ou l'équation différentielle

$$x^2y'' + xy' - y = 0,$$

qui admet, comme on sait, la fonction

$$y = \frac{1}{x}$$

pour intégrale particulière.

La fonction

$$y = x$$

est également une intégrale de l'équation; mais, comme $y'' = 0$, on voit que c'est en réalité une intégrale singulière.

D'ailleurs, l'intégrale générale s'obtient en essayant la solution

$$y = Ax^\alpha;$$

α est alors déterminée par l'équation

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - 1 = 0,$$

qui admet pour racines réelles

$$\alpha = 1, \qquad \alpha = -1.$$

L'intégrale générale demandée est donc

$$y = Ax + \frac{B}{x},$$

A et B désignant deux constantes arbitraires.

Cette équation représente une famille d'hyperboles asymptotes à l'axe des y; le cas de l'hyperbole équilatère correspond à $A = 0$.

Le cas singulier de la droite correspond à $B = 0$.

On peut demander encore qu'il existe un rapport donné m entre les coefficients d'inclinaison des tangentes en deux points correspondants des courbes (C) et (X). On aura donc l'équation différentielle

$$y' = m(y' + xy''),$$

ou

$$mxy'' + (m - 1)y' = 0.$$

Mais sur la première forme l'intégration est immédiate et donne

$$y + C = mxy',$$

intégrale première, puis

$$y + C = C_1 x^{\frac{1}{m}},$$

intégrale générale, représentant les paraboles d'ordre m.

Note. — Le cas de $m = 2$ ou de $m = \frac{1}{2}$ correspond aux paraboles du second degré. On a vu ci-dessus précisément que la parabole a pour transformée deux autres paraboles homothétiques à la proposée. La relation entre les tangentes s'en déduit, car la sous-tangente est double de l'abscisse, et, dans le cas général, elle est m fois la longueur de l'abscisse.

NOTE DE M. PETIT-BOIS.

Dans la transformation pseudo-newtonienne, on obtient, en considérant la tangente, les transformées X, Y.

Si nous considérons la normale à la courbe, nous obtiendrons deux nouvelles transformées X′, Y′. Il est facile de voir que l'équation

$$y = -\frac{x}{y'}$$

représente la première transformée si y' est exprimé en fonction de x, et la seconde si y' est exprimé en fonction de y.

Applications. — 1° Considérons une circonférence touchant l'axe des y à l'origine. Son équation étant $y = \sqrt{2Rx - x^2}$, on trouve pour ses transformées

$$(X') \quad \ldots \ldots \quad y = \frac{x\sqrt{2Rx - x^2}}{R - x},$$

$$(Y') \quad \ldots \ldots \quad y = \frac{xy}{\sqrt{R^2 - y^2}}, \text{ ou } x^2 + y^2 = R^2.$$

La première courbe est une conchoïde cuspidale du diamètre du cercle perpendiculaire à OX; la seconde est une circonférence égale à la courbe primitive. Ces deux résultats s'expliquent facilement par la construction.

2° Soit donnée la parabole $x^2 = 2py$. On a

$$(X') \quad \ldots \ldots \quad x = -p,$$

$$(Y') \quad \ldots \ldots \quad y^3 = \frac{p}{2}x^2.$$

Le premier résultat est évident, la sous-normale de la parabole étant égale à p.

3° L'hyperbole équilatère $xy = 1$ conduit aux transformées

(X′) . . . . . $y = x^3$,

(Y′) . . . . . $y = x^{\frac{1}{3}}$.

4° Considérons l'hyperbole équilatère $y = \sqrt{a^2 + x^2}$. On trouve

(X′) . . . . . $y = -\sqrt{a^2 + x^2}$,

(Y′) . . . $y = -\dfrac{xy}{\sqrt{y^2 - a^2}}$, ou $y = \sqrt{a^2 + x^2}$.

Ainsi, les deux branches de l'hyperbole se changent l'une dans l'autre par la transformation (X′), et chaque branche se reproduit elle-même par la transformation (Y′).

Pour se rendre compte de ces résultats, il suffit de remarquer que la normale en un point M de l'hyperbole équilatère et le diamètre mené par M ont des directions symétriques par rapport à l'axe de la courbe.

5° La logarithmique $y = lx$ a pour transformées

(X′) . . . . . $y = -x^2$,

(Y′) . . . . . $y = -xe^y$.

6° La cycloïde ayant pour équation différentielle

$$y' = \sqrt{\frac{2a - y}{y}},$$

la transformée (Y′) est représentée par

$$y = a \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

C'est donc le cercle générateur pris à l'origine du roulement. Cette propriété se déduit immédiatement de la construction de la normale.

Relation entre les aires. — Soient M, M′ deux points quelconques d'une courbe Δ; N, N′ les points correspondants de sa transformée (X); P, P′ les pieds des ordonnées des points M, M′.

On a

$$\begin{aligned} 2 \text{ secteur } OMM' &= \int (y\,dx - x\,dy) = \int y\,dx - \int xy'\,dx \\ &= MPP'M' - NPP'N' = MNN'M'. \end{aligned}$$

SUR

UN DÉVELOPPEMENT DE L'INTÉGRALE ELLIPTIQUE

DE PREMIÈRE ESPÈCE

EN SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE

PAR

J. BEAUPAIN

INGÉNIEUR PRINCIPAL AU CORPS DES MINES

DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES

AVANT-PROPOS.

On connait plusieurs développements de l'intégrale elliptique de première espèce. Jacobi (*) a donné le suivant :

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = y + \mathrm{R}_1 y^3 + \mathrm{R}_2 y^5 + \mathrm{R}_3 y^7 + \cdots,$$

où, si l'on fait,

$$r = \frac{1+k^2}{2k},$$

$$(2m+1)\,\mathrm{R}_m = \frac{k^m d^m (r^2-1)^m}{2^m . 1 . 2 \ldots m dr^m}.$$

Comme on le voit et comme l'a d'ailleurs fait remarquer l'illustre géomètre, les polynômes R sont, à un facteur près, ceux de Legendre. On arrive très simplement à ce résultat en observant que l'on a, identiquement,

$$(1-y^2)(1-k^2y^2) = 1 - 2\left(\frac{1+k^2}{2k}\right) ky^2 + k^2y^4.$$

Pour toutes les valeurs de y, dont le module est inférieur à l'unité, on a donc, en série uniformément convergente,

$$\frac{1}{\sqrt{(1-y^2)\,1-k^2y^2)}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{X}_n \left(\frac{1+k^2}{2k}\right) k^n y^{2n},$$

X_n désignant, suivant l'usage, les fonctions de Legendre.

(*) Jacobi, *Fundamenta nova*, p. 127.

Par suite,

$$(1)\qquad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n \left(\frac{1+k^2}{2k}\right) k^n \frac{y^{2n+1}}{2n+1}.$$

De son côté, M. Catalan (*) a trouvé les développements :

$$(2)\qquad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha\sin^2\varphi}} = 2\sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(\cos\alpha)\frac{\operatorname{tg}^{2n+1}\frac{\varphi}{2}}{2n+1},$$

$$(3)\qquad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = y + \frac{N_1}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{N_2}{2.4}\frac{y^5}{5} + \ldots + \frac{N_p}{2.4\ldots 2p}\frac{y^{2p+1}}{2p+1} + \ldots.$$

N_p est un polynôme entier en k, de degré $2p$, lequel a pour expression, sous forme d'intégrale définie,

$$N_p = \frac{2^{p+1}}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta)^p\, d\theta.$$

La comparaison des formules (1) et (3) conduit à l'identité

$$(4)\qquad \frac{N_p}{2.4\ldots 2p} = k^p X_p\left(\frac{1+k^2}{2k}\right),$$

ou

$$X_p\left(\frac{1+k^2}{2k}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(k\sin^2\theta + \frac{1}{k}\cos^2\theta\right)^p d\theta.$$

Posons

$$k + \frac{1}{k} = 2z,$$

z étant une quantité supérieure à l'unité.

De cette égalité, on déduit

$$k = z - \sqrt{z^2-1}, \quad \frac{1}{k} = z + \sqrt{z^2-1}.$$

(*) Catalan, *Sur les fonctions* X_n *de Legendre* (deuxième mémoire).

En conséquence,

$$X_p(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(z + \sqrt{z^2 - 1}\cos\omega\right)^p d\omega.$$

Généralement, on écrit la formule de Laplace avec le radical précédé du signe moins. Le signe est d'ailleurs indifférent, puisque les puissances impaires du radical doivent disparaître, X_p étant un polynôme entier en z. Il résulte de cette analyse que les polynômes N ne sont pas distincts, au fond, des fonctions X de Legendre. On peut encore vérifier directement l'identité (4).

D'après une formule de la théorie des fonctions sphériques (*),

$$k^p X_p\left(\frac{1+k^2}{2k}\right) = \frac{1.3.5\ldots 2p-1}{2.4\ldots 2p} F\left(\frac{1}{2}, -p; \frac{1}{2} - p; k^2\right),$$

la caractéristique $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ désignant une fonction de Gauss. La relation (4) devient

$$N_p = 1.3\ldots(2p-1)\, F\left(\frac{1}{2}, -p; \frac{1}{2} - p; k^2\right),$$

c'est-à-dire

$$N_p = \sum_{i=0}^{i=p} C_{p,i}\, 1.3\ldots(2i-1) \times 1.3\ldots(2p-2i-1) k^{2i}.$$

Ce résultat est conforme à celui de M. Catalan (**). Sans parler d'autres développements, en quelque sorte classiques, je citerai encore celui de Heine (***)

Dans cette note, nous nous proposons de chercher pour l'intégrale de première espèce un développement procédant

(*) Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*, p. 18.

(**) Catalan, *Sur les fonctions* X_n *de Legendre*. (Mémoires de l'Académie de Belgique, in-4°, t. XXXI.)

(***) Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*, t. II, p. 100.

suivant les sinus des multiples d'un arc φ, entre lequel et l'amplitude ψ existe la relation simple

$$\sin \varphi = k \sin \psi.$$

Nous montrerons en outre que l'intégrale complète de première espèce est égale à la somme d'une série trigonométrique, analogue à celle qui représente la valeur du nombre $\frac{\pi}{4}$. Ici les limites de l'angle arbitraire sont $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$, au lieu de $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$. Cependant il est possible d'exprimer la valeur de cette intégrale par une série trigonométrique, dans laquelle les limites de l'angle arbitraire sont moins resserrées. D'impérieux devoirs administratifs nous obligent à ajourner momentanément l'étude complète de cette question.

Avant d'aborder le sujet qui fait l'objet de ce mémoire, il ne sera pas inutile d'étudier une série bien connue dans les éléments et dont la considération m'a suggéré l'idée de ce travail.

SUR

UN DÉVELOPPEMENT DE L'INTÉGRALE ELLIPTIQUE

DE PREMIÈRE ESPÈCE

EN SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE

CHAPITRE PREMIER.

1. Si l'angle θ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ exclusivement, on sait que

$$\frac{\pi}{4} = \cos\theta - \frac{1}{3}\cos 3\theta + \frac{1}{5}\cos 5\theta - \frac{1}{7}\cos 7\theta + \cdots.$$

Cette série peut être obtenue par un procédé différent de celui dont il est fait usage dans les éléments.

Soit un contour simple formé par la partie OA de l'axe des x positifs, la droite OB faisant avec cet axe un angle aigu, et l'arc de cercle AB, dont le rayon est quelconque. La fonction $\frac{1}{1+z^2}$ est uniforme dans tout le plan; elle ne devient discontinue qu'aux points M et M′, dont les affixes sont $\pm i$.

Ceci posé, en vertu d'un théorème bien connu dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire,

$$(OA) + (AB) = (OB).$$

Si le module de la variable est supérieur à l'unité, le développement de $\frac{1}{1+z^2}$, suivant les puissances entières et décroissantes de z, commence pour un terme en $\frac{1}{z^2}$; il en résulte que

l'intégrale AB tend indéfiniment vers zéro quand le rayon OA croit au delà de toute limite.

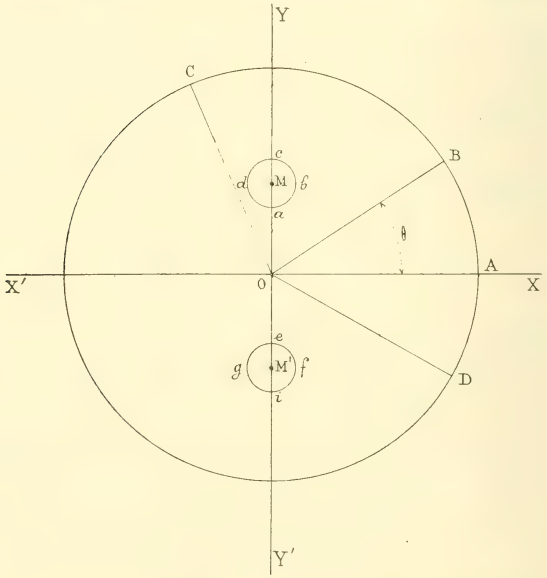
En conséquence,

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{1+z^2} = \int_0^{\infty e^{i\theta}} \frac{dz}{1+z^2} = \int_0^{\infty e^{i\theta}} \frac{dz}{1+z^2} + \int_0^{\infty e^{-i\theta}} \frac{dz}{1+z^2},$$

ou

$$(5). \quad \frac{\pi}{4} = \cos\theta - \frac{1}{3}\cos 3\theta + \frac{1}{5}\cos 5\theta - \frac{1}{7}\cos 7\theta + \cdots.$$

En second lieu, supposons que la droite OB, franchissant l'axe



des y, prend la position OC; entourons le point M d'un cercle très petit et considérons l'aire connexe OABC*abcd*. On aura

$$(OA) + (AC) = (OC) + (abcd).$$

Si nous appelons ρ le rayon du lacet (M) et que nous posions

$$z = i + \rho e^{i\psi},$$

$$(abcd) = i\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2i + \rho e^{i\psi}} = \pi,$$

quand le rayon ρ décroit indéfiniment.

Par suite,

$$-\frac{\pi}{4} = \cos\theta - \frac{1}{3}\cos 3\theta + \frac{1}{5}\cos 5\theta - \frac{1}{7}\cos 7\theta + \cdots.$$

Ainsi, lorsque la droite OB franchit l'axe des y, la somme de la série change de signe.

Si la ligne OB vient coïncider avec le rayon OD,

$$(OA) + (ACD) + (abcd) + (efig) = (OD).$$

Or,

$$(abcd) + (efig) = 0,$$

puisque le résidu des pôles i et $-i$ sont égaux et de signe contraire ; donc

$$\frac{\pi}{4} = \cos\theta - \frac{1}{3}\cos 3\theta + \frac{1}{5}\cos 5\theta - \frac{1}{7}\cos 7\theta + \cdots.$$

La somme de la série change de nouveau de signe et reprend sa valeur initiale. Généralement, pour toutes les valeurs de l'angle θ, comprises dans la formule $2n\pi \pm \theta$, θ étant inférieur à $\frac{\pi}{2}$, la série représente $\frac{\pi}{4}$; et, pour les valeurs de la forme $(4n+1)\frac{\pi}{2} + \theta$, θ variant de 0 à π, la somme de la série est égale à $-\frac{\pi}{4}$. La fonction définie par cette série trigonométrique admet l'axe des y comme coupure.

Je ne m'arrêterai pas plus longuement à la considération de séries analogues à celle-ci, et j'aborde immédiatement l'étude de l'intégrale elliptique de première espèce.

2. Considérons l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 + 2xz^2 + z^4}},$$

x étant une quantité positive, inférieure à l'unité.

Le trinôme sous le radical est égal au produit

$$\left(z^2 + x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\left(z^2 + x - \sqrt{x^2 - 1}\right);$$

les points de ramification de la fonction auront pour affixes

$$e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)},\ e^{-i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)},\ e^{i\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)},\ e^{-i\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)},$$

si

$$x = \cos\theta,$$

θ étant, d'après nos hypothèses, un angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Traçons deux axes rectangulaires et décrivons de l'origine, comme centre, un cercle dont le rayon OA est égal à l'unité : les points M, M', N, N' seront les points critiques. Dans le contour simple OAB, la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 2xz^2 + z^4}}$$

est holomorphe, et l'on a

$$(OA) + (AB) = (OB).$$

Si l'on pose

$$z = e^{i\psi},$$

$$(AB) = i\int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{2(x + \cos 2\psi)}}.$$

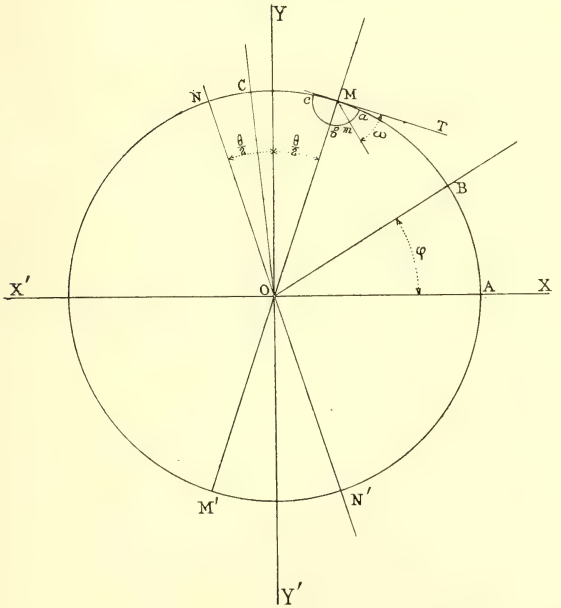
D'autre part,

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 2xz^2 + z^4}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n (-x)\, z^{2n}.$$

En conséquence, par la séparation de la partie réelle de la partie imaginaire,

$$(6)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\rho} \frac{dz}{\sqrt{1+2xz^2+z^4}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\,\frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1} \\ \displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{2(x+\cos 2\psi)}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\,\frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1}. \end{cases} \left(\frac{\pi-\vartheta}{2} > \varphi > -\frac{\pi-\vartheta}{2}\right).$$

Si la ligne OB, franchissant la coupure MM', se confond avec la droite OC, nous éviterons le point critique M, dont l'affixe



est α, par exemple, par la partie abc du cercle décrit du point M comme centre avec le rayon ρ.

Appelons ω l'angle que la droite Mm fait avec la tangente MT au cercle, dont le rayon est égal à l'unité; il est facile de voir que l'affixe du point m est $\alpha + \rho e^{-i\left(\omega+\frac{\theta}{2}\right)}$.

Donc

$$\sqrt{z-\alpha} = +\sqrt{\rho}e^{-i\left(\omega+\frac{\theta}{4}\right)},$$

et, si $\omega = \pi$,

$$\sqrt{z-\alpha} = -i\sqrt{\rho}e^{-i\frac{\theta}{4}}.$$

Quand on est arrivé au point c, le radical est multiplié par $-i$ et son inverse par i.

Si nous posons encore

$$z = e^{i\psi},$$

l'intégrale aura respectivement, sur l'arc Aa, la forme

$$i\int \frac{d\psi}{\sqrt{2(x+\cos 2\psi)}},$$

et, sur l'arc cC,

$$-\int \frac{d\psi}{\sqrt{2(-x-\cos 2\psi)}}.$$

On sait d'ailleurs que l'intégrale (abc) tend indéfiniment vers zéro avec le rayon ρ. En conséquence, à la limite,

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1+2xz^2+z^4}} + i\int_0^{\frac{\pi-\theta}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{2(x+\cos 2\psi)}} - \int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{-2(x+\cos 2\psi)}} = \int_0^{e^{i\varphi}} \frac{dz}{\sqrt{1+2xz^2+z}};$$

ou bien,

$$(7)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1+2xz^2+z^4}} - \int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{-2(x+\cos 2\psi)}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1}, \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi-\theta}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{2(x+\cos 2\psi)}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1}, \end{cases}$$

les valeurs de φ restant comprises entre $\frac{\pi-\theta}{2}$ et $\frac{\pi+\theta}{2}$.

3. On aurait pu trouver ces formules par un procédé plus élémentaire, mais moins rigoureux. Si, avec Dirichlet, nous admettons que la relation

$$\frac{1}{\sqrt{1+2xz^2+z^4}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\,z^{2n}$$

subsiste encore pour les valeurs de z dont le module est égal à l'unité, nous aurons

$$\frac{1}{\sqrt{2(x+\cos 2\psi)}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\cos(2n+1)\psi,$$

$$0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\sin(2n+1)\psi,$$

les valeurs de ψ étant égales ou inférieures à $\frac{\pi-\theta}{2}$.

Par intégration,

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{2(x+\cos 2\psi)}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1},$$

$$C = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1}.$$

On trouve facilement que

$$C = \int_0^{t} \frac{dz}{\sqrt{1+2xz^2+z^4}}.$$

Nous retombons ainsi sur les formules précédentes.

Pour les valeurs de ψ, supérieures à $\frac{\pi-\theta}{2}$ mais inférieures à $\frac{\pi+\theta}{2}$, le binôme $x+\cos 2\psi$ est négatif; il devient positif pour les valeurs de ψ comprises entre $\frac{\pi+\theta}{2}$ et $\frac{3\pi-\theta}{2}$; ψ variant de $\frac{3\pi-\theta}{2}$ à $\frac{3\pi+\theta}{2}$, cette quantité change de nouveau de signe et, de $\frac{3\pi+\theta}{2}$ à $\frac{5\pi-\theta}{2}$, elle reprend le signe $+$, qu'elle conserve pendant cet intervalle; et ainsi de suite. Nous retrouvons les deux coupures MM', NN'.

Pour fixer les idées, supposons ψ compris entre $\frac{\pi-\theta}{2}$ et $\frac{\pi+\theta}{2}$; alors

$$0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\frac{\cos(2n+1)\psi}{2n+1},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2(-x-\cos 2\psi)}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\sin(2n+1)\psi.$$

Nous choisissons le signe + pour le radical, parce que, pour $\psi = \frac{\pi}{2}$, on doit avoir

$$\frac{1}{\sqrt{2(1-x)}} = 1 + X_1 + X_2 + X_3 + \cdots.$$

L'intégration donne

$$(\alpha)\quad \begin{cases} C = \displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1}, \\ \displaystyle\int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{-2(x+\cos 2\psi)}} = -\sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1} \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(x)\frac{\sin(2n+1)\frac{\theta}{2}}{2n+1}. \end{cases}$$

Ici la constante C égale

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-2xz^2+z^4}}.$$

Nous montrerons tantôt que les relations (7) et (α) sont identiques.

CHAPITRE II.

Réduction des intégrales elliptiques a la forme canonique.

4. Réduction de l'intégrale $\int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{1+2xz^2+z^4}}$.

Soient

$$z = \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - x^2}}{x}, \quad \frac{1}{z} = \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - x^2}}{x};$$

d'où

$$z + \frac{1}{z} = \frac{2\xi}{x}, \quad z - \frac{1}{z} = \frac{-2\sqrt{\xi^2 - x^2}}{x} \quad \text{et} \quad dz = -\frac{z}{\sqrt{\xi^2 - x^2}}\, d\xi.$$

Les limites de z étant 0 et 1, celles de ξ seront respectivement $+\infty$ et x. D'autre part,

$$z^4 + 2xz^2 + 1 = \frac{z^2}{2}\left[(1-x)\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 + (1+x)\left(z + \frac{1}{z}\right)\right],$$

et

$$\sqrt{1 + 2xz^2 + z^4} = \frac{2z}{x}\sqrt{\xi^2 - \left(\frac{1-x}{2}\right)x^2};$$

par suite,

$$\int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{1 + 2xz^2 + z^4}} = -\frac{x}{2}\int_\infty^x \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - x^2)\left(\xi^2 - \left(\frac{1-x}{2}\right)x^2\right)}}.$$

Puis, par une transformation simple,

$$(8) \qquad \int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{1+2xz^2+z^4}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)\left(1 - \left(\frac{1-x}{2}\right)\xi^2\right)}}.$$

Semblablement,

$$(9) \qquad \int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{1-2xz^2+z^4}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)\left(1 - \left(\frac{1-x}{2}\right)\xi^2\right)}}.$$

5. Réduction de l'intégrale $\int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{2(x+\cos 2\psi)}}$

Soit

$$u = \operatorname{tg} \psi,$$

d'où l'on tire

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{2(x+\cos 2\psi)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{(1+u^2)(\alpha-\beta u^2)}},$$

si, pour abréger, nous faisons

$$\alpha = 1 + x, \quad \beta = 1 - x.$$

Posons maintenant

$$u = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}};$$

u variant de 0 à $\operatorname{tg} \varphi$, ξ variera de ∞ à $\frac{1}{\sin \varphi}$.

Ensuite,

$$du = -\frac{\xi d\xi}{(\xi^2-1)\sqrt{\xi^2-1}};$$

en conséquence,

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{2(x+\cos 2\psi)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{1}{\sin\varphi}}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)\left(1-\left(\frac{1+x}{2}\right)\xi^2\right)}}.$$

Par la substitution,

$$\xi = \sqrt{\frac{2}{1+x}}\frac{1}{z},$$

on ramène cette intégrale à

$$(10) \qquad \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{2(x+\cos 2\psi)}} = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\frac{2}{1+x}}\sin\varphi} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1-\left(\frac{1+x}{2}\right)z^2\right)}}.$$

De même,

$$(11) \qquad \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{2(\cos 2\psi - x)}} = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\frac{2}{1-x}}\sin\varphi} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1-\left(\frac{1-x}{2}\right)z^2\right)}}.$$

CHAPITRE III.

6. Si nous remplaçons par leur transformée les intégrales contenues dans les relations (6), ces formules deviennent

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1-\left(\frac{1-x}{2}\right)z^2\right)}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1},$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{2}{1+x}}\sin\varphi} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1-\left(\frac{1+x}{2}\right)z^2\right)}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1}.$$

Faisons

$$\frac{1-x}{2} = \sin^2\frac{\theta}{2} = k^2, \quad \frac{1+x}{2} = k'^2 = \cos^2\frac{\theta}{2},$$

et désignons avec Legendre par la lettre F l'intégrale de première espèce; il viendra

$$(12). \quad . \quad . \quad F_1(k) = 2\sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(k^2-k'^2)\frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1},$$

$$(13). \quad . \quad F\left(k', \frac{\sin\varphi}{k'}\right) = 2\sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(k^2-k'^2)\frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1}.$$

Dans cette dernière formule, remplaçons k' par k, k par k' et posons

$$\sin\varphi = k\sin\psi;$$

on aura finalement

$$(14) \quad F(k,\psi) = 2\sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(k'^2-k^2)\frac{\sin[(2n+1)\arcsin(k\sin\psi)]}{2n+1}.$$

Nous allons montrer maintenant que les relations (7) et (α) conduisent à des développements qui ne sont pas distincts, au fond, des précédents. On a, identiquement,

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}}^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{-2(x+\cos 2\psi)}} = \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{-2(x+\cos 2\psi)}} - \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{-2(x+\cos 2\psi)}}.$$

Si l'on pose

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \omega,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{-2(x+\cos 2\psi)}} = \int_{0}^{\frac{\theta}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{2(\cos 2\omega - x)}},$$

$$\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{-2(x+\cos 2\psi)}} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{2(\cos 2\omega - x)}}.$$

Maintenant, en vertu des formules (10), (11) et (14),

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{2(\cos 2\omega + x)}} = \frac{1}{2} F_1(k'),$$

$$\int_{0}^{\frac{\theta}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{2(\cos 2\omega - x)}} = \frac{1}{2} F_1(k),$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}-\varphi} \frac{d\omega}{\sqrt{2(\cos 2\omega - x)}} = \frac{1}{2} F\left(k, \frac{\cos\varphi}{k}\right),$$

$$F_1(k) = 2 \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n (k'^2 - k^2) \frac{\sin(2n+1)\frac{\theta}{2}}{2n+1};$$

la substitution de ces valeurs dans les relations (7) et (α) donne

$$(15)\quad \begin{cases} F_1(k') = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n (k^2 - k'^2) \dfrac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1}, \\ F\left(k, \cos\varphi\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n (k^2 - k'^2) \dfrac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1}. \end{cases} \quad \left(\frac{\pi+\theta}{2} > \varphi > \frac{\pi-\theta}{2}\right).$$

Si, dans ces formules, on remplace k par k', k' par k et φ par $\frac{\pi}{2} - \varphi$, on retombe sur les équations (12) et (14). Ainsi les conditions d'existence de ces dernières doivent seules nous intéresser.

x variant de 0 à 1, k et k' passeront respectivement par toutes les valeurs comprises entre 0 et $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 1 ; et comme l'angle φ doit rester dans l'intervalle $\left(\frac{\pi-\theta}{2}, -\frac{\pi-\theta}{2}\right)$, la formule (12) est vraie pour toutes les valeurs de la variable, comprises entre $-\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{4}$. Si nous donnons à x des valeurs négatives, mais toujours inférieures à l'unité, en valeur absolue, l'angle θ sera supérieur à $\frac{\pi}{2}$ et la variable φ aura encore pour intervalle $\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$. Mais, x variant de 0 à -1, k et k' varieront de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à 1, et de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à 0. En conséquence, cette formule existe pour toutes les valeurs de k et de k' comprises entre 0 et 1, et pour les valeurs de φ, situées dans l'intervalle $\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$. Maintenant, substituer dans la formule (15) k à k' et vice versa revient à remplacer θ par $\frac{\pi-\theta}{2}$; les limites de φ seront donc $-\frac{\theta}{2}$ et $+\frac{\theta}{2}$ et les valeurs de ψ seront comprises dans l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

7. On peut mettre sous d'autres formes les formules précédentes. On sait que

$$X_n(\cos\theta) = (-1)^n F\left(n+1, -n; 1; \cos^2\frac{1}{2}\theta\right) (*).$$

Changeons successivement $\cos\theta$ en x et x en $2k^2 - 1$; on a

$$X_n(2k^2 - 1) = (-1)^n F(n+1, -n; 1; k^2),$$

(*) Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*, t. I, p. 18.

et

$$(15)\quad F_1(k) = 2\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n F(n+1,\ -n;\ 1;\ k^2)\frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1}.$$

On pourrait encore remplacer la fonction $X_n(2k^2-1)$ par une somme de produits de polynômes X_n, dont la variable serait k. A cet effet, j'observe que l'on a, identiquement,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2(2k^2-1)z^2+z^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-2kz+z^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+2kz+z^2}};$$

donc

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(2k^2-1)\,z^{2n} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}(-1)^\mu X_\mu z^\mu \times \sum_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty} X_\upsilon z^\upsilon.$$

Identifions les coefficients des mêmes puissances de z :

$$(a)\qquad X_n(2k^2-1) = 2\left[X_{2n}X_0 - X_{2n-1}X_1 + X_{2n-2}X_2 \ldots + (-1)^n\frac{1}{2}X_n^2\right].$$

En particulier,

$$X_2(2k^2-1) = 2\left[X_4X_0 - X_3X_1 + \frac{1}{2}X_2^2\right];$$

ou

$$6k^4-6k^2+1 = 2\left[\frac{35}{8}\left(k^4-\frac{6}{7}k^2+\frac{3}{35}\right)-\frac{5}{2}\left(k^3-\frac{3}{5}\right)k+\frac{9}{8}\left(k^2-\frac{1}{3}\right)^2\right],$$

ce qui est exact.

8. On vérifie très facilement la formule (12), que nous pouvons écrire

$$F_1\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) = 2\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n X_n(\cos\theta)\frac{\cos(2n+1)\frac{\varphi}{2}}{2n+1},$$

l'angle φ variant maintenant entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

D'après une formule de Dirichlet, modifiée par Mehler (*),

$$X_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{\cos(2n+1)\frac{\psi}{2}\,d\psi}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\theta)}};$$

(*) Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen.*

donc

$$F_1\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\theta} \frac{d\psi}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\theta)}}\left[\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{3\psi}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\varphi}{2}\cos\frac{5\psi}{2} \cdots\right].$$

Mais

$$\frac{\pi}{4} = \cos\omega - \frac{1}{3}\cos 3\omega + \frac{1}{5}\cos 5\omega - \frac{1}{7}\cos 7\omega + \cdots;$$

remplaçons successivement ω par $\frac{\psi+\varphi}{2}$ et $\frac{\psi-\varphi}{2}$ et ajoutons, terme à terme, les deux séries résultantes; il viendra

$$\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{3\psi}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\varphi}{2}\cos\frac{5\psi}{2} - \cdots,$$

φ et ψ satisfaisant, en valeur absolue, aux inégalités

$$\varphi \pm \psi < \pi$$

φ et ψ sont des angles compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; cette condition est donc constamment remplie. Par suite,

$$F_1\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) = \int_0^{\theta} \frac{d\psi}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\theta)}}.$$

Si l'on remplace, dans la formule (11), x par $\cos\theta$ et 2φ par θ, on trouve que

$$\int_0^{\theta} \frac{d\psi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\theta)}} = F_1\left(\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Nous avons donc ainsi vérifié la formule (12).

9. *Cas particuliers.* — L'hypothèse de $k = 0$, auquel cas $k' = 1$, nous conduit à des formules connues : F_1 est égal à $\frac{\pi}{2}$ et les formules (12) et (13) se réduisent à

$$\frac{\pi}{4} = \cos\varphi - \frac{1}{3}\cos 3\varphi + \frac{1}{5}\cos 5\varphi - \frac{1}{7}\cos 7\varphi + \cdots,$$

$$\frac{1}{4}\log\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} = \sin\varphi - \frac{1}{3}\sin 3\varphi + \frac{1}{5}\sin 5\varphi - \cdots.$$

Par une transformation facile, cette dernière devient

$$\frac{1}{2}\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)=\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin 3\varphi+\frac{1}{5}\sin 5\varphi\ldots,$$

ou encore, par le changement de φ en $\frac{\pi}{2}-\varphi$,

$$\frac{1}{2}\log \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}=\cos\varphi+\frac{1}{3}\cos 3\varphi+\frac{1}{5}\cos 5\varphi+\ldots,$$

formules connues.

CONTRIBUTION

A

L'ÉTUDE ANATOMIQUE

DES

ORGANES VÉGÉTATIFS ET FLORAUX

chez CARLUDOVICA PLICATA Kl.

PAR

Henri MICHEELS,

DOCTEUR EN SCIENCES NATURELLES

INTRODUCTION

Le genre *Carludovica*, créé par Ruiz et Pavon, appartient à la petite (1) famille des Cyclanthacées, du groupe des Monocotylées spadiciflores, entièrement localisée dans l'Amérique tropicale.

Au sujet des affinités naturelles de cette famille, les auteurs ont émis des opinions divergentes.

D'après E. Le Maout et J. Decaisne (**29**, p. 623), les Cyclanthacées, « étroitement liées aux Pandanées et aux Freycinétiées, se rapprochent également des Aroïdées et des Palmiers ».

C'est avec les Aroïdées et les Pandanacées que G. Bentham et J. D. Hooker (**2**, p. 932) leur trouvent le plus de rapports.

Pour Ph. Van Tieghem (**51**, p. 1499), la famille des Cyclanthacées est « très voisine des Aroïdées et des Typhacées ».

Enfin, O. Drude (**10**, p. 98), qui en est le principal monographe, estime que des doutes peuvent surgir sur le point de savoir si cette famille est plus proche des Palmiers que des Aroïdées ou des Pandanacées. Pour ce qui regarde les organes végétatifs, dit-il, il ne peut être question que des Palmiers en première ligne; les Aroïdées ne viennent qu'en second rang.

Antérieurement, dans un travail concernant le seul genre

(1) Si l'on s'en rapporte à l'étude que O. Drude (**10**) lui a consacrée, elle ne comprendrait que six genres avec quarante-quatre espèces. Ce sont les nombres que renseigne aussi Th. Durand (**11**).

Carludovica, le même auteur avait été amené à supposer que ce genre constituait le chaînon rattachant les Palmiers aux Pandanacées (**9**, p. 594).

Les botanistes divisent la famille des Cyclanthacées en deux tribus : 1° celle des Carludovicées, caractérisée par ses fleurs mâles à pédicelles isolés, groupées par quatre, ainsi que par ses fleurs femelles à quatre très longs staminodes filamenteux; 2° celle des Cyclanthées, où les fleurs mâles et les fleurs femelles forment des anneaux ou des spirales alternants, suivant lesquels les fleurs d'un même sexe ne sont pas nettement séparées les unes des autres. Dans cette dernière tribu, les fleurs femelles portent une couronne de staminodes plus courts que l'enveloppe florale (**10**, p. 98).

La tribu des Carludovicées (1), d'après O. Drude (**10**, p. 99), comprend les cinq genres :

Carludovica R. et P.,
Evodianthus Oerst.,
Stelestylis Dr.,
Sarcinanthus Oerst.,
Ludovia Brongn.

Celle des Cyclanthées est formée du seul genre *Cyclanthus* Poit. (*Cyclosanthes* Pöpp., *Discanthus* Spre.). D'après H. Baillon (**1**, p. 417), on ne connaît que trois ou quatre *Cyclanthus*.

Les trente-quatre espèces (2) du genre *Carludovica* R. et P. peuvent être rangées en trois sections.

(1) G. Bentham et J.-D. Hooker (**2**, p. 952) ne lui attribuent que les genres *Stelestylis*, *Carludovica* et *Ludovia*.

(2) Id. (**2**, p. 952) en indiquent trente-cinq, et ils ajoutent : « sed multae imperfecte cognitae ».

Dans la première de ces sections (*Palmatae*), les plantes ont des feuilles découpées en éventail avec quatre divisions principales, dont les deux moyennes ont conservé plus d'adhérence entre elles. Parmi les *Palmatae*, on trouve *C. palmata* R. et P., dont les feuilles, « fendues en lanières étroites, séchées et blanchies, servent à fabriquer les chapeaux de paille dits de Panama » (**51**, p. 1499). C'est une plante du Brésil occidental ainsi que des portions limitrophes du Pérou, et dont l'aire de dispersion s'étend, à travers l'Équateur et la Colombie, jusqu'à l'Amérique centrale (**10**, p. 99). *C. Drudei* fait de même partie de la section des *Palmatae*.

On réunit dans la seconde section (*Bifidae*) les *Carludovica* à feuilles découpées en deux. Il faut citer ici *C. plicata* Kl., qui se rencontre depuis la Guyane jusque Bahia (**10**, p. 99). Avec celle de *C. plicata*, Klotzsch (**27**, p. 468) a donné la description de *C. palmaefolia* Hort. Il considère la dernière plante comme une variété horticole de la première et il leur attribue à toutes deux la Colombie comme patrie d'origine. L'*Index Kewensis* (**24**, p. 442) fournit pour *C. plicata* Kl. la même indication de provenance. Parmi les *Bifidae* se trouvent aussi deux espèces du Pérou (*C. humilis* Pöpp. et *C. latifolia* R. et P.).

Dans ce genre *Carludovica* R. et P., on observe, en outre, des plantes vivant à la façon des lianes, comme c'est le cas, par exemple, pour *C. heterophylla* Mart. du Brésil. Elles composent la troisième section, celle des *Anomalae*.

A part quelques espèces du genre *Carludovica* et *Cyclanthus bipartitus* Poit., on ne cultive que très exceptionnellement des Cyclanthacées dans les Jardins botaniques d'Europe. Avec *Carludovica palmata* R. et P. et *C. palmaefolia* Hort., *C. plicata* Kl. compte parmi les moins rares de nos serres.

Dans cette famille si peu étudiée des Cyclanthacées, l'examen d'une espèce quelconque me paraissait devoir donner des indications utiles. Il m'a permis, en effet, chez *Carludovica plicata* Kl., de relever des particularités structurales intéressantes et m'a procuré, dans certains organes, des documents importants pour la discussion de leur valeur morphologique.

Le présent travail est partagé en deux parties : l'une est consacrée aux organes végétatifs ; l'autre, aux organes floraux.

Dans la première, la feuille, la tige et la racine font successivement l'objet des trois chapitres qu'elle comprend. La seconde aborde l'étude de la hampe florale, des spathes et des fleurs.

A certaines de ces divisions sont joints les exposés bibliographiques qu'elles comportent, résumant les connaissances actuellement acquises sur l'organe examiné, soit chez un *Carludovica*, soit chez une autre Cyclanthacée, soit encore chez une autre Monocotylée voisine.

Les matériaux qui m'ont servi pour cette étude proviennent de l'Institut botanique de l'Université de Liége. Ils ont été mis gracieusement à ma disposition par M. le professeur Gravis, qui a bien voulu m'aider de ses conseils et auquel je me fais un devoir d'exprimer publiquement ma vive et sincère gratitude.

CONTRIBUTION

A

L'ÉTUDE ANATOMIQUE

DES

ORGANES VÉGÉTATIFS ET FLORAUX

chez CARLUDOVICA PLICATA Kl.

PREMIÈRE PARTIE.

ORGANES VÉGÉTATIFS.

CHAPITRE PREMIER.

LA FEUILLE.

A. *Son organogénie.*

1. Résumé bibliographique. — La plupart des Monocotylées possèdent des feuilles à limbe indivis. Si l'on en excepte les Palmiers, chez les autres, à limbe divisé, l'organogénie foliaire n'a guère tenté les recherches. Cette remarque s'applique notamment aux *Carludovica*, qui nous offrent des exemples intéressants de Monocotylées à limbe segmenté.

Attribuant avec raison les découpures limbaires observées à des déchirures naturelles, les auteurs qui ont eu l'occasion de

suivre chez des Cyclanthacées la croissance des feuilles, s'accordent à reconnaître à ces organes le même mode de formation que chez les Palmiers et plus spécialement chez les Palmiers à feuilles palmées.

L'étude des feuilles de Palmiers, au point de vue de leur formation, remonte déjà loin. Dès 1827, en effet, dans son *Organographie végétale*, A.-P. de Candolle avait su préciser l'origine des découpures que l'on remarque dans le limbe chez l'immense majorité des Palmiers. A cette époque, ces mêmes feuilles montraient les seuls exemples connus de limbes se déchirant suivant des règles déterminées pour acquérir leur forme définitive. « Elles répondaient, comme le faisait remarquer l'illustre savant de Genève (**7**, p. 505), à l'idée qu'on s'était formée avant tout examen des découpures des feuilles ». C'est ainsi que Meneghini, d'après de Candolle, avait admis que la feuille croissait sous forme d'entonnoir fermé, qui était déchiré ensuite par la pression des feuilles suivantes naissant à l'intérieur.

Remarquons, en passant, que la même manière de voir s'est retrouvée plus tard dans les travaux de de Mirbel.

En caractérisant la formation qu'il appelle *parallèle* et qui, d'après lui, appartiendrait à beaucoup de Monocotylées, Trécul fait mention, dans un mémoire paru en 1853 (**45**, p. 278), de l'évolution des feuilles chez *Carludovica palmata*, qui rattacherait cette formation *parallèle* à celle que le même botaniste dénomme *basipète digitée*.

L'absence de toute autre indication concernant la plante citée, la seule Cyclanthacée dont il s'occupe, me dispense d'analyser le travail de Trécul, qui ne m'a pas fourni, d'ailleurs, de renseignement utile.

Plus tard, dans ses *Vermischte Schriften* (p. 176), Hugo von Mohl montre que les feuilles de Palmiers naissent sous forme de petits mamelons émoussés. D'après ce savant, les segments foliaires se produiraient par suite d'une apparition de fentes dans le limbe, primitivement entier et massif.

Il convient de remarquer que cette interprétation fut partagée

par H. Karsten (**25**, p. 78), C. Göbel (**18**) et A.-W. Eichler (**15**).

Ce dernier, en 1885, à l'occasion de son travail sur le développement des feuilles de Palmiers (**15**), s'est quelque peu occupé aussi des Cyclanthacées.

Dans les limites de ses recherches, A.-W. Eichler (**15**, p. 21) constate que, seules, les feuilles des plantes rangées dans le genre *Carludovica* possèdent un mode de formation semblable à celui qu'il a décrit chez les Palmiers. Les Cyclanthacées ont d'ailleurs avec ces derniers d'étroits rapports de parenté. Les feuilles de *Carludovica* ressemblent à celles des Palmiers à feuilles palmées, et, par l'étude de *C. rotundifolia*, le savant allemand a pu s'assurer qu'elles se forment d'une façon analogue. Le mode d'origine des feuilles chez cette Cyclanthacée serait même fort semblable à celui de *Livistona*. A.-W. Eichler remarque, en outre, que les *Cyclanthus*, bien qu'ils appartiennent à la même famille que les *Carludovica*, en diffèrent cependant au point de vue du développement foliaire. Chez *Cyclanthus*, les feuilles sont encore indivises à leur sortie du bourgeon ; elles peuvent ou persister dans cet état, ou se diviser en deux de haut en bas. Leur découpure provient aussi d'une véritable déchirure dans un tissu vivant.

A.-W. Eichler a figuré (**15**, pl. V, fig. 73) le mode de préfoliation du *Cyclanthus* qu'il a examiné.

Dans des considérations générales qu'il formule au sujet de Monocotylées à limbe découpé, appartenant à d'autres familles, A.-W. Eichler (**15**, p. 21) rappelle que, chez les Aroïdées et plus particulièrement chez celles du groupe des Monstérées (*Monstera deliciosa* Liebm., *Philodendron pertusum* Hort.), on constate une division du limbe en segments pennés, amenée par une nécrose précoce de diverses parties histologiques (1).

D'après A.-W. Eichler, l'interprétation d'une perforation (*Durchlöcherung*) du limbe conviendrait mieux, dans ces divers

(1) D'après les travaux de Schwartz (*Monatsber. d. k. Akad. d Wiss. zu Wien*, 1872) et de Engler (dans de Candolle, *Monographiae phanerogam.*, vol. II, p. 20).

cas, que celle d'une découpure en stries (*streifenweise Zerlegung*). Une perforation du même genre se rencontre aussi, d'ailleurs, chez *Ouvirandra fenestralis*.

Nous aurions là, toujours d'après ce botaniste (**15**, p. 22), les derniers types qui pourraient, dans une certaine mesure, être encore comparés, quant à leur mode de segmentation, avec les feuilles de Palmiers, car les brisures de forme pennée produites, sous l'action du vent, dans les feuilles de *Musa* et la découpure en lanières des feuilles âgées de *Welwitschia*, ne peuvent être considérées comme des phénomènes d'organogénie.

Dans un travail consacré aussi aux Palmiers et publié en 1887 (**35**), A. Naumann a eu le mérite de découvrir le plus grand nombre des faits jusqu'ici connus au sujet du développement foliaire dans le genre *Carludovica*. Ses recherches ont porté sur trois espèces : *C. palmata*, *C. rotundifolia* et *C. Moritziana*.

Par le mode de développement de leurs feuilles, c'est du genre *Hyophorbe* que ces Cyclanthacées se rapprocheraient le plus.

A. Naumann choisit *Carludovica palmata* comme type, et il lui compare les deux autres espèces. Chez la première, des sections transversales au voisinage du sommet végétatif de la tige lui montrent que la très jeune feuille présente la même apparence que chez les Palmiers. Au bourrelet presque circulaire, initial, s'ajoute bientôt une portion limbaire (**35**, fig. 23). La gaine qui, chez les Palmiers, dans les premiers stades du développement, n'est pas fermée, croît ici de telle sorte que ses marges (**35**, fig. 24, t_1 et t_2) chevauchent l'une sur l'autre.

Une coupe de la gaine d'une feuille adulte montre des cellules fortement collenchymateuses dans le bord marginal recouvrant, afin que la feuille suivante, dit l'auteur, puisse être conservée plissée jusqu'à sa sortie de la gaine qui l'enserre.

A. Naumann a figuré deux très jeunes feuilles de *Carludovica palmata* (**35**, fig. 23 *a* et 25). La première est encore lisse, la seconde possède un limbe parcouru par des sillons et des renflements longitudinaux, qui s'arrêtent avant d'avoir atteint le bord supérieur de l'organe.

L auteur allemand montre, enfin, que la segmentation lim-

baire chez les *Carludovica*, comme chez les Palmiers, est le résultat d'une production simultanée de renflements et de plis longitudinaux, suivie de nécrose, sur la partie de la jeune feuille qui deviendra le limbe.

II. Observations. — Chez *Carludovica plicata* Kl., le mamelon qui constitue la feuille primordiale, offre bientôt l'apparence d'un bourrelet presque circulaire, entourant incomplètement la tige, et dont la croissance longitudinale est d'autant plus rapide que l'on se rapproche davantage du plan médian de l'organe.

Primitivement, les deux surfaces de la feuille sont lisses, mais bientôt se dessinent, dans la partie supérieure, des boursouflures ou renflements qui donnent naissance aux plissements longitudinaux. Ces boursouflures, qui font saillie aussi bien à la face externe qu'à la face interne, se montrent en alternance régulière sur ces deux faces. Elles s'arrêtent à une certaine distance du bord supérieur libre, laissant ainsi une marge mince et étroite; elles ne se terminent pas inférieurement dans le même plan horizontal, mais suivant une ligne courbe à convexité tournée vers le haut (pl. I, fig. 1).

Sous cette partie plissée, qui deviendra le limbe, on voit une portion lisse dont les bords minces et peu élevés entourent le sommet végétatif de la tige. Cette partie formera la gaine.

La feuille primordiale est dès lors différenciée. Elle présente deux parties bien distinctes, superposées (1).

(1) A.-W. Eichler (**14**) appelle : base de la feuille (*Blattgrund*) la portion inférieure de l'organe qui donne la gaine de la feuille ou bien la base du pétiole avec les stipules; portion supérieure (*Oberblatt*), celle dont proviennent le limbe et le pétiole.

« M. Bower (**4**) a modifié cette terminologie, dit J. Massart (**32**, p. 210): il appelle phyllopode tout l'axe de la feuille, depuis la base jusqu'au sommet; la partie inférieure (*Blattgrund* d'Eichler) est appelée hypopode; la partie qui donne le pétiole est nommée mésopode; enfin, la portion qui supporte directement les ramifications est l'épipode. »

C'est l'axe de la feuille, à l'exclusion de ses ramifications, comme le fait encore remarquer J. Massart (**32**, p. 211), qui est désigné sous le nom de phyllopode Et de l'avis du savant belge, c'est dans cette distinction entre l'axe et ses ramifications que réside le progrès réalisé par cette nouvelle terminologie de M. Bower,

On peut appliquer à l'exemple que présentent les *Carludovica* cette remarque faite par C. Göbel (**18**, p. 218), au sujet du développement des feuilles chez *Glyceria spectabilis*, que l'organogénie foliaire ne peut être envisagée ainsi que le voulait Trécul (**45**). Il n'est pas possible, en effet, d'admettre avec cet auteur que la gaine se développe toujours la première dans les feuilles engainantes. Le limbe ne se forme pas de la gaine ; ces deux parties ne se différencient que dans le cours du développement.

Le nombre des plissements naissants chez *Carludovica plicata* Kl. va en augmentant à mesure que l'organe croît, et les sillons, laissés entre eux, s'approfondissent progressivement.

La disposition des plissements se montre analogue à celle exposée d'une façon détaillée, par A. Naumann, pour *Hyophorbe* (**35**, p. 241) et à laquelle il faut rattacher, d'après lui, tous les Palmiers appartenant à son type II de plissement ainsi que les *Carludovica*.

Au stade qui nous occupe, on constate aussi que la région médiane du futur limbe croît en s'incurvant légèrement vers l'intérieur à sa partie supérieure libre, pour donner ainsi à l'ensemble l'aspect d'un capuchon Cette forme est due, comme c'est le cas pour les feuilles d'*Iris*, d'après les recherches d'organogénie effectuées sur cette dernière plante par C. Göbel (**18**, p. 219, fig. 43), à une croissance plus rapide de la face externe de l'organe dans sa région médiane.

Bientôt les plis occupent toute la partie interne du capuchon, et la base de celui-ci forme le toit d'une logette où se cachent les feuilles plus jeunes, protégées latéralement par la gaine (pl. I, fig. 2).

Les marges de cette dernière se rapprochent de plus en plus et finissent par se recouvrir (pl. I, fig. 3). Celle de droite chevauche sur celle de gauche dans les plantes dextres, tandis que le contraire s'observe chez les pieds sénestres (1).

(1) La feuille est l'appendice de la tige Il faut donc supposer l'observateur, placé au centre de la tige, se tournant successivement vers les diverses feuilles

Suivant A. Naumann (**35**), ce chevauchement différencierait les *Carludovica* d'avec les Palmiers.

Chez les sujets examinés, j'ai trouvé un nombre à peu près égal de dextres et de sénestres.

Dans certaines feuilles de Graminées, les bords de la partie engainante présentent une disposition analogue à celle qui vient d'être décrite chez *Carludovica plicata* Kl. Hofmeister (**23**, p. 589) a montré que le sens de l'enroulement des marges est régi par l'action de la pesanteur, et que l'on peut mesurer et modifier à volonté l'effet de cette force, à cet égard, en faisant intervenir la force centrifuge. Si, placées dans des conditions déterminées, les plantules en germination sont soumises à un mouvement gyratoire, au moyen d'un dispositif particulier, les feuilles qui se formeront dans le cours de l'expérience verront leur bord de gauche chevaucher sur celui de droite, alors que le contraire s'observait chez les feuilles déjà enroulées avant l'expérience (1).

Hofmeister (**23**, p. 590) fait remarquer, en outre, que l'enroulement des feuilles des Graminées correspond complètement à celui des stipules de *Trifolium* et d'autres Papilionacées à folioles disposées sur deux rangs.

Mais revenons-en à *Carludovica plicata* Kl.

A un stade plus avancé, le limbe, fortement plissé, se présente sous la forme d'une masse pyramydale allongée. La portion qui correspond à la gaine paraît rester à peu près sta-

disposées autour de lui. Sur une tige dextre, cet observateur constatera que la spire phyllotaxique se dirige dans le même sens que les aiguilles d'une montre; elle suit une marche inverse dans le cas d'une tige sénestre.

(1) Ce physiologiste représente (**23**, fig. 177) une section transversale pratiquée dans un bourgeon foliaire d'une plantule de *Zea Mays*, en germination depuis vingt-quatre jours, fixée sur un cylindre vertical de 15 centimètres de rayon et soumise à un mouvement de rotation s'effectuant à raison de trois tours par seconde. A l'intérieur de l'anneau qui, sur cette section, représente le cotylédon, se voient quatre feuilles. Dans les deux premières, déjà enroulées avant la germination, le chevauchement s'est fait de gauche à droite; dans les deux autres, développées dans le cours de l'expérience, l'enroulement s'est effectué en sens contraire. Le plan médian de ces deux dernières feuilles est à peu près perpendiculaire au rayon de rotation, par l'effet d'une torsion d'entrenœuds entre les feuilles.

tionnaire ; sa longueur équivaut à la soixantième partie environ de celle du limbe (1).

Les deux bords de cette gaine se limitent alors vers le haut par deux saillies qui s'accentuent et deviennent deux oreillettes, dont j'aurai soin plus loin de discuter la valeur morphologique. Ces oreillettes se dessèchent tôt et disparaissent.

Par suite d'une croissance longitudinale inégale, les oreillettes ont des dimensions différentes. La hauteur de l'une l'emporte toujours sur celle de l'autre, mais leur largeur est à peu près équivalente (pl. III, fig. 40 ; pl. IV, fig. 42 et 43).

A.-W. Eichler (**15**, pl. II, fig. 26) a figuré des oreillettes du même genre dans la portion basale de la très jeune feuille chez *Chamaerops humilis* L.

Dans la Cyclanthacée qui fait l'objet du présent travail, une jeune feuille mesurant 37 millimètres ne possède qu'une gaine et un limbe. Celui-ci est rendu presque bifide par un sinus médian, s'arrêtant à une certaine distance de la base de l'organe et ne se prolongeant pas jusqu'à son sommet.

Ce sinus est produit par nécrose. Et, comme on le verra plus loin, il s'agit bien d'une déchirure normale, et non d'une déchirure provoquée par une cause accidentelle.

Chez l'immense majorité des Angiospermes, la segmentation du limbe provient, comme on le sait, d'une véritable ramification des bords de la très jeune feuille. En fait d'exceptions à cette règle, J. Massart (**32**, p. 217) ne cite que les Palmiers et quelques Aroïdées. Il nous faut donc y joindre des Cyclanthacées (*Carludovica palmata*, *C. rotundifolia* et *C. Moritziana*, étudiés par A. Naumann (**35**), ainsi que *C. plicata* Kl.).

Pour les distinguer des autres, les feuilles dont le limbe se

(1) C. Göbel (**18**, p. 217) a montré, pour la jeune feuille chez *Glyceria spectabilis*, combien les rapports de longueur de la gaine et du limbe peuvent se modifier dans le cours du développement.

Voici les chiffres qu'il indique pour cette Graminée :

a) Gaine mesurant $0^{mm},5$ pour un limbe de 30 millimètres;

b) Gaine mesurant $0^{mm},1$ pour un limbe de 4 millimètres.

Dans le premier exemple (*a*), nous voyons un rapport équivalent à celui trouvé chez *Carludovica plicata* Kl

déchire suivant certaines directions prédéterminées, devraient, me semble-t-il, recevoir des dénominations particulières. Le mode d'origine des divisions du limbe adulte pourrait être rappelé par la terminologie. Aux désinences : *dentée*, *lobée*, *partite* et *séquée*, qui mettent en évidence les divers degrés de ramification dans les feuilles ordinaires, on substituerait la désinence *tomée* dans les termes qui serviraient à qualifier les feuilles divisées par déchirures. Cette désinence serait ajoutée aux préfixes *penni* ou *palmi*, qui indiquent le mode de nervation. Je propose, en conséquence, d'appeler désormais *penni-* et *palmitomées* les feuilles à limbe *penni-* ou *palminervié*, dont les divisions proviennent de déchirures naturelles. On nommerait *tomes* ce qui correspond aux découpures des autres feuilles. Et de même qu'une feuille, dont les découpures (1) proviennent de ramifications, peut présenter des *lobes*, par exemple, celle découpée par déchirure naturelle, possède des *tomes*. Pour indiquer le nombre des segments limbaires, on pourrait se servir des expressions : *bi-*, *tri-*, ... ou *polytomée*. On dirait, par exemple, que la feuille est *tétratomée* chez *Carludovica palmata*, *tritomée* chez *C. rotundifolia*, *bitomée* chez *C. Moritziana* et *C. plicata* Kl. (2).

Dans le limbe encore à peu près complètement caché par les gaines des feuilles précédentes, le sinus est situé beaucoup plus bas relativement que dans les feuilles déjà libérées de leurs enveloppes, mais cependant non encore étalées. La partie située sous le sinus possède, à un moment donné, une vitesse de développement intercalaire beaucoup plus considérable que le reste

(1) Dents, lobes, etc.

(2) Dans une note qui figure dans son *Organographie végétale* (p. 301), A.-P. de Candolle rappelle que « L.-C. Richard avait proposé de nommer feuilles polytomes toutes celles qui ont des segments, c'est-à-dire celles dont les lobes sont séparés jusqu'au pétiole ou à la côte moyenne, mais non articulés comme dans les feuilles composées ». A.-P. de Candolle n'admettait pas ce terme, « soit parce qu'il n'était pas susceptible de former des termes composés symétriques avec ceux qui sont en usage, soit parce que, dans son étymologie, il convienne mieux aux feuilles composées qu'aux feuilles disséquées ». Je ferai remarquer,

du limbe. La différenciation histologique est aussi plus avancée vers le sommet que vers la base de l'organe.

Le limbe atteint presque toute sa longueur définitive avant de s'étaler.

La préfoliation des trois *Carludovica : palmata, rotundifolia* et *Moritziana* a été étudiée par A. Naumann (**35**), qui a distingué trois modes de préfoliation chez les Palmiers (1). Les *Carludovica* examinés appartiennent à son type II, qu'il définit de la façon suivante :

« Les plis ont deux directions différentes et sont placés symétriquement aux deux côtés du rachis. Les faisceaux libéro-ligneux principaux sont disposés sur une même rangée (**35**, fig. 32 *b*.).

» Il faut placer ici les Palmiers à feuilles palmées dont la nervure médiane fait saillie à la partie supérieure de la feuille. On peut rattacher aussi les *Carludovica* à ce type, mais en tenant compte de certaines particularités. On ne doit pas considérer comme différence essentielle qu'aux endroits z_1, z_2 (fig. 27 *b*) il n'existe point de faisceaux libéro-ligneux. »

La préfoliation chez *Carludovica plicata* Kl. ne diffère pas sensiblement de celle trouvée par A. Naumann chez d'autres *Carludovica* (pl. II, fig. 18).

En même temps que le limbe tend à se déployer se montre une portion pétiolaire, de plus en plus longue, ayant la forme d'un prisme triangulaire à arêtes mousses et parcouru à sa surface interne par un sillon médian. Par suite de son étirement, provoqué par une croissance intercalaire, cette région pétiolaire

d'une part, que les mots composés dont je propose l'emploi, échappent tout à fait aux critiques formulées par A.-P. de Candolle contre le terme polytome, et, d'autre part, que l'expression tomée semble beaucoup mieux appropriée aux feuilles partagées par des déchirures naturelles que celles, actuellement employées, de lobée, etc., appliquées indistinctement aux feuilles des deux catégories, alors même que dans son étymologie cette expression paraîtrait mieux convenir aux feuilles composées.

(1) J'ai montré naguère (**33**, p. 102), à propos d'un *Desmoncus* brésilien, que tous les Palmiers ne pouvaient être rapportés aux trois types établis par A. Naumann.

va porter le limbe à une hauteur convenable pour que ce dernier trouve l'espace nécessaire à son déploiement.

Non étalé, le limbe, ayant à peu près atteint ses dimensions définitives, affecte alors l'apparence d'une pyramide triangulaire, allongée, à arêtes mousses, qui serait formée par deux éventails fermés, dont les plis diminuent de longueur et de largeur à mesure de leur écartement du plan médian de l'organe. Ces éventails, terminés supérieurement en pointe, sont placés en face l'un de l'autre, les plis de l'un se trouvant vis-à-vis des plis de l'autre.

En se dépliant, les deux éventails s'écartent l'un de l'autre en effectuant, de l'intérieur vers l'extérieur, un mouvement de rotation d'un quart de circonférence, et étalent ainsi le limbe dans un même plan perpendiculaire au plan médian. Les deux tomes, jusqu'au bas du sinus, s'écartent ensuite l'un de l'autre.

Les pointes desséchées de ces tomes provoquent, par leur chute, les déchirures que l'on remarque chez les feuilles adultes à la partie supérieure libre de ces tomes.

B. *Son organographie.*

Dans la feuille adulte, il convient de distinguer trois parties : une engainante, une pétiolaire et une limbaire.

La forme et les dimensions de la première varient nécessairement avec l'âge et le rang d'insertion de la feuille, c'est-à-dire avec la position qu'elle occupe sur la tige. Nous avons vu que les marges chevauchent d'abord l'une sur l'autre. A mesure que l'organe avance en âge, la portion engainante s'ouvre par la pression des feuilles qu'elle protégeait en les cachant. Elle paraît ainsi s'amincir et, en même temps, sa forme générale, qui était primitivement celle d'un prisme triangulaire, tend à devenir cylindrique, tandis que les bords se disjoignent de plus en plus. Une fois écartées, ces marges se dessèchent, se désorganisent et, finalement, disparaissent.

Le pétiole se continue insensiblement dans la partie épaisse de la gaine. A aucun moment, d'ailleurs, le pétiole n'est nettement limité inférieurement. Il offre l'aspect d'un prisme triangu-

laire à arêtes mousses. Sur sa face interne se trouve une gouttière longitudinale, dont la profondeur va en diminuant vers le haut, où elle n'est plus représentée que par une simple ligne.

Les limites du pétiole et du limbe ne sont pas nettes non plus. On observe toutes les transitions entre ces deux parties de la feuille.

Chez *Carludovica plicata* Kl., le limbe rappelle par sa forme celui des Palmiers du groupe des Géonémées. Il a l'apparence d'un long triangle isocèle, qui serait fixé par son sommet au pétiole, et dont le côté supérieur, libre, aurait subi une profonde entaille suivant le plan médian.

Le limbe est parcouru par des côtes faisant saillie alternativement sur la face externe et sur la face interne, et dont la médiane, plus forte, vient aboutir au fond de l'entaille. De part et d'autre de cette côte médiane partent d'autres côtes se dirigeant vers les sommets, alors disparus, des deux tomes.

Le nombre total des nervures latérales semble assez constant. Il varie entre 19 et 22.

En raison de la forme de leur limbe, *Carludovica plicata* Kl., ainsi que *C. palmaefolia* Hort. ont été rangés, comme on l'a vu (p. 5), dans la section des *Bifidae* (c'est-à-dire à feuilles bitomées).

Chez ces deux plantes, les feuilles sont disposées suivant une ligne spirale.

A l'aisselle des feuilles, on remarque la présence d'un bourgeon axillaire, aléniforme, plus ou moins développé.

Il est formé d'une préfeuille protégeant à la fois, au début, une jeune pousse feuillée et une inflorescence.

Lorsque la spire phyllotaxique est dextre, la pousse feuillée se trouve à droite, et l'inflorescenee, à gauche de l'observateur, supposé au centre de la tige et tourné vers le bourgeon. On constate la disposition contraire dans le cas où la spire phyllotaxique est sénestre.

La préfeuille forme un organe engainant et protecteur, fermé à sa partie supérieure, limitant à son intérieure une chambre conique. Sur sa face postérieure, par rapport à l'observateur

placé ainsi qu'il a été indiqué, elle montre deux bords chevauchant comme dans les gaines.

C. *Sa structure.*

L'étude de la structure d'une feuille nécessite la recherche des variations qu'amènent l'âge, le niveau, la hauteur et les conditions biologiques. Dans ses magistrales *Recherches anatomiques sur les organes végétatifs de l'*Urtica dioica *L.* (**20**), A. Gravis a su en même temps, à propos de la feuille, notamment, montrer l'existence et dégager l'importance proportionnelle de ces divers facteurs. Ceux-ci, en dernière analyse, ainsi que le dit cet auteur, peuvent d'ailleurs être réduits à deux, le temps et l'espace, « les indications du niveau, de la hauteur et du milieu ne servant, en définitive, qu'à préciser le point de l'espace considéré » (**20**, p. 4).

Avec la plante dont l'étude fait l'objet du présent travail, il ne pouvait être question d'un examen d'ordre aussi approfondi. Les Cyclanthacées sont peu communes dans les serres d'Europe. D'autre part, les variations dans la structure de ces plantes, dues aux conditions biologiques, ne me paraissent pouvoir être étudiées avec fruit que dans la patrie d'origine ou d'adoption de ces végétaux.

J'ai suivi, en le repérant, l'ordre chronologique, choisissant arbitrairement cinq stades, que j'ai pris soin de caractériser, par l'étude successive desquels on peut se rendre compte de la différenciation histologique, c'est-à-dire des variations de la structure suivant l'âge.

A chacun de ces stades, j'ai examiné la section vers le milieu de la gaine, vers le milieu du pétiole et vers le milieu du limbe, afin d'avoir des niveaux comparables. Lorsque la nécessité s'en faisait sentir, j'ai pris soin néanmoins de montrer les variations qu'amènent des différences de niveau.

STADE I.

La très jeune feuille a dépassé la période primordiale, mais elle ne montre qu'un limbe, encore entier, et une gaine. Celle-ci, très courte, fait corps à sa base avec le sommet végétatif de la tige (pl. I, fig. 4). La feuille offre l'aspect d'une pyramide de base triangulaire.

Gaîne. — La coupe transversale moyenne laisse apercevoir un dermatogène externe, un dermatogène interne ainsi qu'un méristème primitif. Ce dernier est parcouru par des cordons de procambium, disposés sur deux rangs dans la partie la plus épaisse de l'organe, c'est-à-dire vers l'extérieur (pl. I, fig. 4).

Limbe. — Dans la partie inférieure du limbe, la coupe d'ensemble a la forme d'un triangle à angles mousses, sur un des côtés duquel s'aperçoit une fente médiane à contours sinueux. Ce côté représente la face interne de l'organe. La fente qui en part va s'arrêter à quelque distance du sommet opposé à cette face interne. De part et d'autre du plan médian se trouvent des cordons de procambium (pl. I, fig. 5), plongés dans un méristème primitif limité extérieurement par le dermatogène.

Plus haut, les coupes transversales ont l'apparence d'un V plus ou moins ouvert (pl. I, fig. 6 et 7), dont les branches constituantes ont des contours d'autant moins sinueux qu'on se rapproche davantage du sommet du limbe.

Au niveau que représente, comme ensemble, la fig. 6, les sinuosités, en alternance sur les deux faces, sont presque contiguës; elles ne sont guère séparées que par de petits étranglements.

Les sections pratiquées plus haut (pl. I, fig. 7) laissent apercevoir, près du sommet de l'angle formé par les branches du V, une région non encore boursouflée. Sur les coupes suivantes, les sinuosités disparaissent progressivement.

Les sinuosités du contour sont produites par des boursouflures qui, ainsi que nous l'avons vu (p. 11), amènent les plissements

du limbe. Dans ces boursouflures, la section transversale (pl. I, fig. 9) rencontre, outre le dermatogène externe et le dermatogène interne, un méristème primitif assez abondant, dans lequel commence à se dessiner un cordon de procambium.

Au sommet des branches du V, c'est-à-dire dans le plan médian de l'organe à ce niveau, le cordon procambial est plus nettement accusé (pl. I, fig. 10).

Là où les boursouflures sont suffisamment écartées les unes des autres pour permettre l'examen des portions limbaires qui les séparent, on voit que ces dernières sont constituées par trois assises d'éléments que limitent, vers l'intérieur et vers l'extérieur, le dermatogène interne et le dermatogène externe (pl. I, fig. 11). Nous aurons l'occasion de voir plus loin qu'à chacune de ces assises cellulaires est dévolu un rôle spécial.

A proximité du sommet du limbe, les coupes offrent de nouveau l'apparence d'un triangle à angles mousses, mais plein cette fois et dépourvu de cordons procambiaux (pl. I, fig. 8).

A ce stade I, on observe la présence de poils dans la région médiane externe du limbe, à l'endroit où se produira la disjonction des tomes. Ces poils augmentent en nombre et en longueur vers le sommet.

A. Naumann (**35**, p. 233, fig. 28, *a*, *b*, *c*) signale aussi chez *Carludovica palmata* une touffe pileuse à la partie externe des isthmes de rupture des tomes.

Chez *Carludovica plicata* Kl., ces poils épidermiques sont acuminés, pluricellulaires, moniliformes. Ils sont généralement composés de 4-5 cellules superposées, à parois minces. La cellule apicale présente la forme d'un cône à sommet émoussé (pl. I, fig. 15). Elle possède souvent seule un contenu jaunâtre. Les figures 12-15 (pl. I) montrent divers stades du développement des poils. La cellule basale, dans les figures 13 et 14, s'est divisée perpendiculairement à la surface.

Ces poils me paraissent avoir pour mission de venir feutrer les espaces laissés libres entre les feuilles successives, vraisemblablement dans le but de diminuer, aux insectes, les facilités d'accès. On peut poser en principe que leur nombre et leur

longueur sont proportionnels aux rapports des dimensions, dans le plan horizontal, de l'organe engainant et de la feuille enveloppée. Ils sont les plus abondants et les plus longs aux niveaux où les dimensions intérieures de l'organe engainant l'emportent le plus sur les dimensions extérieures de la feuille enveloppée, c'est-à-dire où l'espace laissé libre entre ces deux organes est le plus grand. Il en résulte que les poils doivent être plus nombreux et plus longs vers le sommet de la feuille enveloppée que vers sa base; ce qui a été observé et indiqué dans les lignes précédentes.

La face interne de l'organe enveloppant présente aussi des poils dont le nombre et les dimensions sont régis par le même principe. Ils contribuent à la formation d'un feutrage protecteur du sommet du jeune limbe.

Ces poils se retrouvent plus tard en certains points sur la feuille pétiolée, mais non encore déployée. Extrêmement abondants sur le pétiole, ils sont alors beaucoup moins nombreux sur les autres parties de la feuille qui ont été plus étroitement serrées par la gaine enveloppante. Comme les plis du limbe sont étroitement appliqués les uns contre les autres, on ne rencontre de poils qu'à l'entrée des espaces intervallaires. La longueur des poils varie beaucoup sur cette feuille avec la place qu'ils y occupent. C'est ainsi que sur le pétiole, dont la face interne est concave, on trouve les plus longs suivant le plan médian de cette face.

STADE II.

La feuille, non encore pétiolée, possède cependant déjà une gaine à bords marginaux chevauchant l'un sur l'autre, ainsi qu'un limbe qui se découpe en deux tomes.

Gaine. — La section transversale que représente la figure 16 (pl. II) a été pratiquée à la limite supérieure de la gaine. Nous avons là à peu près un pétiole. Seules, les lames marginales nous permettent de considérer encore comme une gaine cette partie de la feuille. Elles protègent le sommet de la feuille suivante.

La coupe transversale moyenne de la gaine n'offre aucune particularité notable de structure.

Limbe. — A la base du limbe, nous avons une région qui participe à la fois du pétiole et du limbe.

Au fur et à mesure que nous nous éloignons de sa base, le nombre des plis du limbe va en augmentant (pl. II, fig. 17). Il atteint un maximum au niveau où s'effectue la déchirure en deux tomes (pl. II, fig. 18). A ce niveau, la différenciation histologique est assez peu avancée, ainsi que l'indique la figure 19 (pl. II), qui représente un cordon de procambium au fond d'un pli. On ne distingue que quelques éléments ligneux et libériens. L'épiderme, au dos des plis du limbe, porte des poils plus ou moins développés.

Dans cette jeune feuille, les coupes successives du limbe nous montrent qu'à la partie complètement plissée (pl. II, fig. 18) fait suite, vers le sommet, une autre dont le nombre des plis va en diminuant jusqu'à devenir nul. Les dernières sections pratiquées dans la portion non plissée offrent les aspects que représentent les figures 20-26 (pl. II). Quand on se rapproche du sommet de l'organe, on voit les faisceaux se réunir en groupes de moins en moins nombreux.

La figure 27 (pl. II) nous montre la structure d'une des masses libéro-ligneuses ainsi produites, que rencontre une coupe transversale dans la région où les sections d'ensemble ont la forme d'un V (pl. II, fig. 21), aux extrémités libres des branches duquel se trouvent des poils. La masse libéro-ligneuse laisse apercevoir une série de vaisseaux polygonaux, à parois épaisses, disposés en éventail (pl. II, fig. 27).

Aux sections en V succèdent d'autres qui possèdent la forme d'un anneau aplati (pl. II, fig. 22, 23 et 24), dans lesquelles on voit l'union progressive des masses libéro-ligneuses et leur fusion en une couronne irrégulière (pl. II, fig. 24).

Finalement, l'anneau se comble de plus en plus; à mesure que son diamètre diminue, la couronne libéro-ligneuse ne laisse plus distinguer les groupes qui l'ont formée (pl. II, fig. 25).

L'anneau étant comblé, la couronne libéro-ligneuse se transforme bientôt en une masse elliptique (pl. II, fig. 26) qui finit, à son tour, par disparaître.

Comme on le voit, à ce stade II, le limbe possède encore le capuchon, dont la présence a été signalée dans la partie de ce travail ayant trait à l'organogénie foliaire.

Dans les feuilles plus âgées, ce capuchon se dessèche, puis se scinde longitudinalement en deux, suivant le prolongement de la déchirure produite dans le limbe.

C'est dans la feuille arrivée à cet état de développement que débute, en effet, la déchirure médiane du limbe, dont il a été question plus haut (voir p. 14). Chez *Carludovica plicata* Kl., elle est le résultat d'une nécrose qui s'effectue dans la région du limbe, restée mince, au-dessus du sommet de la côte médiane. Celle-ci ne s'étend donc pas d'une extrémité à l'autre du limbe.

Il y a lieu de remarquer que la nécrose amenant la séparation des deux tomes se propage en sens basifuge. C'est le contraire de ce qui se passerait chez *Pritchardia filifera*, d'après A. W. Eichler (**15**, p. 6).

A la base de la portion apicale, à peu près sans plis du limbe, au niveau où s'arrête la nécrose qui détermine la segmentation, le faisceau médian n'est plus représenté que par un mince cordon procambial (pl. II, fig. 28). C'est là une preuve de la déchirure naturelle et prédéterminée.

Il en est une autre encore que je crois devoir indiquer.

Si, par une cause quelconque, la déchirure naturelle est prolongée au-dessous de sa limite inférieure normale, les deux lèvres produites par la déchirure accidentelle montrent en regard l'une de l'autre des cellules présentant la série des réactions cicatricielles. Elles se sont agrandies vers la surface lésée et se sont ensuite segmentées. Les cloisons nouvelles sont parallèles à la surface de lésion.

La figure 38 (pl. V) représente une coupe pratiquée, au-dessous de la limite inférieure du sinus normal de la feuille adulte, dans une région accidentellement déchirée suivant le prolongement de ce sinus (1).

(1) Sur la figure 38, la partie mortifiée d'un des bords de la déchirure est limitée extérieurement par un pointillé, intérieurement à la fois par un pointillé et la série des cellules recloisonnées.

Ces réactions cicatricielles ne s'observent pas dans la région médiane du limbe, déchirée de façon naturelle à la suite d'une nécrose. Cette partie du limbe, nous venons de le voir, reste fort mince; elle ne comprend que quelques assises cellulaires. Après la séparation des tomes, il n'est plus possible de reconnaître, sur les bords en regard, les cellules épidermiques vraies, tant les autres sont peu nombreuses et ressemblent aux premières.

Il me faut placer ici des particularités histogéniques intéressantes, relevées dans la jeune feuille arrivée au même état de développement que celle décrite pour le stade II, mais appartenant à un bourgeon axillaire, et encore cachée par une préfeuille. Dans la partie engainante de cette jeune feuille, le nombre des rangées cellulaires du mésophylle va graduellement en diminuant à mesure qu'on s'éloigne de la région médiane pour se diriger vers les bords marginaux. Le mésophylle peut y être réduit à une assise unique d'éléments (pl. II, fig. 30). La coupe que représente la figure 29 (pl. II), montre trois rangées de cellules entre les épidermes externe et interne. Chacune de ces assises mésophylliennes constitue un histogène particulier. C'est A. Gravis qui a attiré l'attention sur l'évolution différente de ces trois catégories d'éléments, qui constituent, d'après sa terminologie, les mésophylles externe, interne et moyen [1].

Les deux premiers donnent du parenchyme, dont certaines cellules, en se divisant un grand nombre de fois, forment des groupes d'éléments de diamètre beaucoup plus petit. Ceux-ci épaissiront plus tard leurs parois et constitueront des massifs scléreux.

Par une multiplication active, les cellules du mésophylle moyen donnent, elles, naissance aux cordons de procambium.

[1] A. Gravis, *Recherches anatomiques et physiologiques sur le* Tradescantia virginica *L., au point de vue de l'organisation générale des* Monocotylées *et du type* Commélinées *en particulier.* (Mémoires in-4° de l'Académie royale des sciences de Belgique, t. LVII, 1898)

STADE III.

La jeune feuille pétiolée est encore partiellement protégée par la gaine de la feuille précédente. Cette gaine (*G*) n'est dépassée, en effet, que de 2 à 3 centimètres par le sommet du limbe (*Li*) de la feuille étudiée (pl. III, fig. 31).

Gaine. — Dans la gaine, dont la figure 32 (pl. III) représente la coupe d'ensemble, les éléments épidermiques ont leur cloison externe légèrement sclérifiée (pl. III, fig. 33 et 34). Le parenchyme mésophyllien se compose de cellules polygonales ou ovales en coupe transversale ; ces dernières sont souvent étirées dans le sens du rayon près de la surface externe, tangentiellement près de la surface interne de l'organe (1). Elles laissent entre elles des méats plus ou moins grands. Au voisinage des surfaces de l'organe, on aperçoit un grand nombre de massifs cellulaires, formés de petits éléments à section polygonale et à parois minces. Ces massifs, dont les parois cellulaires seront sclérifiées plus tard, proviennent de la division plusieurs fois répétée de cellules du parenchyme, dont ils ont pris la place. Dans les faisceaux libéro-ligneux, outre les trachées étroites, on remarque la présence de quelques vaisseaux ayant épaissi leurs parois (pl. III, fig. 37). On constate souvent aussi la présence d'une lacune antérieure, contre les trachées vers le centre de l'organe. C'est là une particularité que l'on trouve chez diverses Monocotylées aquatiques ou de marécages. D'après Westermaier (**37**, p. 1107), elle se rencontre dans le pétiole chez *Sagittaria sagittaefolia*, et chez *Alisma Plantago*, dans la hampe florale chez *Heleocharis palustris* et chez *Scirpus silvaticus*, etc. Firtsch (**17**, p. 347) l'a montrée aussi dans les faisceaux du pétiole cotylédonaire chez *Phœnix dactylifera* L. Avec certaines autres particularités de

(1) On y observe aussi la présence d'un grand nombre de cellules cristalligènes (c. c.), généralement plus volumineuses, à raphides courtes (pl. III, fig. 33 et 34).

structure, elle fournit à cet auteur la preuve que le Dattier réclame un sol très humide.

La gaine montre des canaux gommeux, assez étroits, dont la section est circulaire ou elliptique (pl. III, fig. 35 et 36).

La formation de ces canaux gommeux répond à la définition donnée par Tschirch (**47**, p. 477) du mode schizo-lysigène (1). Après une séparation d'éléments, provoquant un élargissement d'espace intercellulaire, il y a résorption, par gélification, des membranes cellulaires, et production d'un canal dont la cavité devient de plus en plus grande.

Dans le mésophylle s'aperçoivent toutes les transitions entre les cellules de bordure du canal, beaucoup plus petites, et les éléments ordinaires.

A en juger par la description et les dessins qu'en donne Ph. Van Tieghem (**47**, p. 123, pl. III, fig. 10), les canaux sécréteurs de la tige chez *Aglaeonema Marantaefolia* seraient fort semblables à ceux de *Carludovica plicata* Kl.

En suivant le trajet des canaux gommeux chez cette dernière plante, on les voit se diviser, se réunir ou s'interrompre.

Leur nombre et leurs dimensions vont en augmentant avec l'âge de l'organe.

Pétiole. — Le pétiole, encore très court, offre en section transversale la forme d'un triangle à angles mousses, dont le côté interne présente une découpure. L'épiderme ne diffère pas sensiblement de celui de la gaine. La cloison externe des cellules est presque plane et n'est pas encore sclérifiée. Dans le mésophylle, les massifs, beaucoup plus nombreux, de petites cellules

(1) J. Briquet (**5**, p. 515) a démontré que les poches à huile des Myoporacées appartiennent aussi à cette catégorie des schizo-lysigènes. Il rappelle que les travaux de Tschirch et de Sieck établissent l'existence de phénomènes très semblables et parfois identiques à ceux qu'il a observés, dans plusieurs groupes très différents de Dicotylées (Aurantiées, Anacardiacées, Diptérocarpées, Hamamélidées, etc.). « Le processus schizo-lysigène, ajoute-t-il, paraît dès lors être très généralement répandu, et les idées régnantes sur les derniers développements et le mode de fonctionnement des poches sécrétrices devoir se modifier sensiblement. »

polygonales à parois minces, forment une couronne à peu près continue (pl. III, fig. 38). Dans les faisceaux libéro-ligneux (pl. III, fig. 39), on trouve un petit groupe de trachées, suivi d'une série radiale de vaisseaux n'ayant pas encore épaissi leurs parois. On observe aussi des cellules grillagées. Les canaux gommeux ne diffèrent pas de ceux rencontrés dans la gaine.

Limbe. — Le limbe, au stade qui nous occupe, ne possède pas de particularité histologique intéressante à relever.

STADE IV.

La feuille n'a pas encore déployé son limbe. Sa gaine, auriculée, est fermée (1).

Gaine. — La structure de la gaine présente des modifications importantes suivant la hauteur. Des sections transversales successives nous montrent, en effet, que cette structure, dans la partie supérieure de l'organe, est nettement différente de celle que l'on trouve dans sa portion inférieure. On passe graduellement des caractères de l'adulte, qui se montrent dans le haut, à ceux qui s'observent dans la partie basilaire, encore protégée par les diverses gaines successives, emboîtées les unes dans les autres, des feuilles plus âgées. Nous voyons par là que la différenciation histologique suit une marche basipète.

Dans le voisinage de son plan d'insertion, la gaine est parcourue par des faisceaux libéro-ligneux, qui possèdent la structure dont la figure 41 (pl. IV) montre les caractères ordinaires en section transversale. On y voit un croissant de cellules épaississant leurs parois, adossé extérieurement à une plaque, étirée tangentiellement, de liber resté mince.

La structure, à un niveau plus élevé dans la même gaine, est celle qui sera décrite à propos de la feuille adulte.

Les oreillettes de la gaine, dont l'existence a été signalée dans la partie du présent travail consacrée à l'organogénie foliaire,

(1) Sur la planche III, figure 40, elle est représentée étalée.

ne durent que peu de temps, comme on l'a vu. Il me paraît intéressant de décrire le trajet des faisceaux libéro-ligneux dans les marges de la gaine et dans les oreillettes, à raison des discussions soulevées au sujet de la valeur morphologique de la gaine et des stipules.

Constatons d'abord que dans la gaine, de part et d'autre du prolongement du pétiole, s'observent des faisceaux, dont les uns se rendent dans cette portion plus épaisse de la gaine, tandis que les autres en sont isolés (pl. IV, fig. 42 et 43).

Dans un premier exemple, fourni par une feuille qui provient d'un bourgeon terminal à spire phyllotaxique dextre, la marge droite (1), plus petite, est appliquée sur la marge gauche de la gaine. La marge droite montre six faisceaux libéro-ligneux; la marge gauche n'en a que cinq (pl. IV, fig. 42). Dans chacune d'elles, le faisceau le plus proche du plan médian de l'organe entre dans le pétiole prolongé. Les faisceaux qui en restent écartés, s'incurvent à leur partie supérieure, forment un crochet parallèle à l'extrémité supérieure libre des oreillettes, et se terminent à faux dans le mésophylle. Dans les deux marges, ce sont les faisceaux les plus éloignés du plan médian de l'organe qui sont les plus gros.

Le second exemple provient d'un bourgeon terminal à spire sénestre. Ici la marge gauche, qui est la plus grande, recouvre la marge droite. Cette dernière est parcourue par huit faisceaux, tandis que l'autre n'en possède que six (pl. IV, fig. 43). Dans l'une comme dans l'autre, ce sont les deux faisceaux les plus voisins du plan médian de l'organe qui vont se perdre dans le prolongement du pétiole. A l'exception de celui de la marge gauche, qui est le plus loin du plan médian de la feuille, les autres faisceaux, dans chacune des deux marges, s'unissent dans leur partie supérieure par des anastomoses obliques, formant dans les oreillettes un réticulum à mailles irrégulières et serrées, dans lequel on remarque certains faisceaux plus gros.

(1) Dans les figures 41 (pl. III), 42 et 43 (pl. IV), les marges ont été étalées.

Les deux exemples décrits sont d'âges différents. Celui que représente la figure 43 (pl. IV) est le plus âgé.

Pétiole et limbe. — La structure du pétiole et du limbe est semblable à celle de ces organes à l'état adulte.

Comparaison de la gaine des Monocotylées avec les stipules des Dicotylées.

Il y a lieu de discuter la valeur morphologique de l'organe engainant qui vient d'être décrit.

« Beaucoup de gaines, dit C. Göbel (**18**, p. 35), ne sont autre chose que des modifications particulières des *stipulae adnatae*, mais beaucoup aussi n'ont rien de commun avec la formation des stipules; c'est le cas, par exemple, pour les gaines de Monocotylées. Schleiden, ajoute encore C. Göbel, pensait, il est vrai, qu'elles avaient toutes une origine commune et que la distinction entre *vagina petiolaris* et *vagina stipularis* reposait sur une erreur dans l'observation de leur développement. »

Pour se faire une opinion dans le cas qui nous occupe, il faut évidemment être renseigné, d'une part, sur le mode de formation de l'organe, d'autre part, sur sa structure.

Je rappellerai d'abord que c'est la partie basale (selon Eichler) de la très jeune feuille, c'est-à-dire l'hypopode (d'après la terminologie de Bower), qui devient la gaine dans toute feuille adulte engainante.

Il convient de remarquer également que l'origine des stipules n'est pas aussi nettement déterminée. En se posant la question de savoir : « Que représentent phylogéniquement les stipules? » J. Massart (**32**, p. 213) constate, en effet, qu'il n'est pas possible de fournir une réponse décisive à cause de leur diversité d'origine : ces organes pouvant naître de l'hypopode, du mésopode ou de l'épipode (suivant la terminologie de Bower).

C'est là, il faut le remarquer, une notion en contradiction avec les idées de Ph. Van Tieghem (**51**, p. 292) sur ce sujet, car pour ce botaniste les stipules « doivent être considérées comme

une ramification très précoce du pétiole ou du limbe à sa base et dans son plan ».

Chez *Carludovica plicata* Kl., l'origine hypopodique des oreillettes ne fournit donc pas un critérium.

Pour ce qui concerne la structure comparée des stipules et des gaines, nous trouvons des données générales dans certains ouvrages. Voici comment on peut, me semble-t-il, par le raisonnement, établir une distinction dans l'organisation des unes et des autres.

La gaine n'est par définition que « la base dilatée par où la feuille s'attache au pourtour du nœud » (**51**, p. 282). Ses faisceaux doivent donc nécessairement provenir de la tige. Or, pour les stipules, tel n'est point le cas : « les nervures des stipules, dit Ph. Van Tieghem (**51**, p. 293), vont toujours s'attacher à peu de distance au-dessus de la surface de la tige, aux nervures du pétiole ou du limbe primaire, dont elles ne sont que des ramifications ».

Chez *Carludovica plicata* Kl., dans les expansions de forme auriculée, les faisceaux proviennent de la tige. C'est ce qui pourrait les faire considérer comme appartenant à une gaine que l'on appellerait auriculée. Mais il ne faut cependant pas perdre de vue que Ph. Van Tieghem (**51**) réserve le nom de stipules aux seules ramifications du pétiole et du limbe, tandis que J. Massart (**32**), élargissant la définition, admet des stipules naissant de l'hypopode.

Quoi qu'il en soit, les gaines auriculées vascularisées ne sont guère éloignées, comme structure, des stipules. On ne peut, me semble-t-il, établir de différence radicale entre ces deux sortes d'organes. Il y a lieu de supposer que l'absence des stipules (suivant Ph. Van Tieghem) est due à une surface d'insertion plus grande sur la tige, et que leur présence est l'effet d'un rétrécissement dans cette même surface d'insertion. Dans le premier cas, réalisé chez la plupart des Monocotylées, les faisceaux proviendront tous de la tige; dans le second cas, que l'on trouve chez un grand nombre de Dicotylées, certains faisceaux stipulaires se sont détachés du pétiole.

Il est regrettable que C. Göbel (**18**) n'ait pas cru devoir indiquer la différence qu'il trouve entre les gaines des Monocotylées et les stipules, adnés ou autres, au point de vue de leur formation. Il n'est cependant pas possible d'admettre, comme on vient de le voir, qu'il n'y ait rien de commun entre les unes et les autres. Rien ne prouve non plus qu'il n'existe pas de Monocotylée possédant des stipules, comme cet auteur l'a affirmé (1).

En résumé, l'existence d'une gaine auriculée chez *Carludovica plicata* Kl. me paraît constituer un argument de plus en faveur de l'homologie de la gaine des Monocotylées et des stipules des Dicotylées, homologie soutenue par Schleiden (voir p. 30) et aussi par Trécul (**45**, p. 288).

Les observations de A. Mansion (**31**, p. 58) sur l'anatomie des feuilles dans le genre *Thalictrum* l'ont conduit à des conclusions analogues.

État adulte.

Nous sommes en présence de la feuille adulte, dont nous allons relever successivement les particularités structurales de la gaine, du pétiole et du limbe.

Gaine. — Une section transversale pratiquée vers le milieu de la gaine présente : un épiderme externe, un épiderme interne ainsi qu'un mésophylle. Celui-ci est parcouru à la fois par des faisceaux libéro-ligneux, des massifs scléreux et des canaux gommeux.

Les cellules de l'épiderme externe ne diffèrent guère de celles de l'épiderme interne ; les premières sont légèrement plus petites et relativement moins aplaties (pl. IV, fig. 44 et 46). Les unes et les autres sont quadrilatérales, à paroi externe assez for-

(1) Les vrilles chez *Smilax* ont été considérées comme des stipules non développées, par divers botanistes (H. von Mohl, de Mirbel, Trécul, A. Braun, etc.), tandis que d'autres, de Candolle notamment, les ont supposées des folioles non développées. Je dois rappeler également ici une note de D. Cauvet, *Probabilité de la présence des stipules dans quelques Monocotylédones* (Bull. Soc. bot. de France, vol. XII, 1865).

tement épaissie et un peu bombée. Vues de face, les cellules épidermiques de la surface externe montrent leur protoplasme concrétionné en anneau entre les parois radiales et transversales (pl. IV, fig. 47). La cuticule est lisse.

Les cellules stomatiques de la gaine, du pétiole et du limbe ne présentent pas de différence saillante. Elles sont représentées : vues de face par la figure 49 (pl. IV); en section transversale par la figure 50 (pl. IV).

Le parenchyme mésophyllien est composé de cellules de plus en plus grandes à mesure qu'elles s'éloignent des surfaces de l'organe. Dans ce tissu, on distingue trois régions successives (1). L'externe (pl. IV, fig. 44) est formée de cellules polygonales à peu près isodiamétriques, à méats fort petits. On rencontre dans cette région beaucoup de cellules plus grandes et plus ou moins arrondies, renfermant des paquets de raphides courtes. On y trouve aussi des massifs scléreux, constitués par un petit nombre d'éléments polygonaux à parois assez épaisses. Les cellules de la région moyenne sont plus développées (pl. IV, fig. 45). Elles laissent entre elles des méats de dimensions souvent considérables. Ces éléments sont ronds ou ovales. Ils ont des parois minces et sont parfois étirés tangentiellement. Cette région moyenne est parcourue par les faisceaux libéro-ligneux et les canaux gommeux. Les coupes longitudinales, à la base de la gaine, y montrent l'existence de canaux aérifères, dont certains grands méats représentent la section sur la coupe figurée (pl. IV, fig. 45). Les éléments de la région interne sont plus étirés et séparés par des méats beaucoup plus petits. Dans cette région s'aperçoivent des massifs scléreux ainsi que des sclérites isolées (pl. IV, fig. 46). La présence de grands méats dans sa région moyenne et leur absence dans les deux autres, nous permet de considérer comme centrique le mésophylle de cette gaine.

Les faisceaux libéro-ligneux sont disposés sur plusieurs rangées sensiblement concentriques. Ils ne montrent pas toujours un

(1) Chez *C. palmata*, on trouverait, d'après A. Naumann (35), du collenchyme dans la gaine adulte (voir p. 10). Ce n'est point le cas chez *C. plicata* Kl.

fourreau scléreux complet. Souvent la partie libérienne seule est entourée d'un croissant d'éléments polygonaux à parois assez épaisses. Le liber mou forme deux massifs bien distincts de cellules plus petites, l'un à droite, l'autre à gauche, de part et d'autre du groupe des plus grands vaisseaux. Ces deux massifs se trouvent aux extrémités d'une bande incurvée de tissu à parois minces, dans la concavité de laquelle se trouve logé le bois et sur la convexité de laquelle est appliqué le croissant scléreux. Le bois montre un petit nombre de vaisseaux polygonaux d'assez grand diamètre. A l'extrémité interne de ce bois se remarque une lacune antérieure.

Dans la feuille adulte, c'est la gaine qui possède le plus grand nombre de canaux gommeux. C'est aussi dans cette partie de la feuille qu'on trouve les canaux les plus larges.

Pétiole. — Sur une section transversale moyenne, le pétiole a la forme d'un triangle à angles mousses.

L'épiderme est constitué par des cellules quadrilatérales ou pentagonales, plutôt allongées perpendiculairement à la surface de l'organe, et dont la cloison externe, assez épaissie, est légèrement incurvée. Vues de face, ces cellules sont hexagonales ou pentagonales, allongées dans le sens de la croissance de l'organe et d'autant plus étirées qu'on s'éloigne de la base du pétiole.

Dans le mésophylle s'aperçoivent deux régions. L'une périphérique, formant une bande annulaire fort étroite, est composée de cellules plus exiguës, polygonales, laissant entre elles des méats plus petits. Dans la région centrale, les éléments ont une forme ovale ou arrondie et les méats sont parfois assez grands. Tout le tissu mésophyllien est parsemé de cellules cristalligènes, plus larges, étirées longitudinalement, renfermant des raphides courtes. Au voisinage de la surface, dans la région périphérique, on remarque la présence de nombreux massifs scléreux, formés d'éléments polygonaux à parois fort épaissies.

Le nombre des faisceaux libéro-ligneux varie entre 30 et 62. Leur disposition se modifie avec le niveau auxquel la coupe est pratiquée. Au fur et à mesure qu'on se rapproche du sommet, les faisceaux tendent à prendre position, de part et

d'autre du plan médian, sur une série de courbes perpendiculairement auxquelles se trouvent les plis dans le limbe fermé.

Dans le bois, on remarque un ou deux vaisseaux de diamètre fort prédominant. On y observe aussi la présence d'une lacune antérieure.

Au point de vue histologique, le faisceau offre ici cette particularité d'avoir un liber à parois épaissies, qui affecte la forme d'un croissant à chaque pointe duquel se voit un îlot de cellules à parois minces. A l'intérieur de ce croissant, on aperçoit aussi quelques cellules à parois minces (pl. V, fig. 52), les unes isolées, les autres groupées par deux, disposées à proximité du bois (1).

Dans son *Anatomie de l'écorce*, J. Vesque (**52**, p. 178) a signalé chez le Bouleau un liber dont tous les éléments peuvent subir la sclérification. Il en serait de même, d'après Schacht (**39**) et Russow (**38**), pour le liber chez *Alisma Plantago* L. et *Plectogyne variegata* Lk. Chez *Carludovica plicata* Kl., la sclérification n'est pas, par conséquent, poussée aussi loin.

Traitées par le chlorure de zinc iodé, les cellules à parois épaissies du liber se colorent en jaune. Elles prennent une couleur rouge intense après l'action successive de l'acide chlorhydrique et de la phloroglucine.

L. Kny (**28**) a étudié les modifications que présente le liber mou dans les faisceaux des Monocotylées. Il rappelle (**28**, p. 95) que d'autres anatomistes avaient eu, avant lui, l'attention attirée sur les dispositions affectées par le liber mou. C'est ainsi que H. von Mohl (**55**, pp. x et xiii ; **56**, pp. 140 et 146) avait signalé, chez les Monocotylées, l'existence de faisceaux dont la structure s'écartait de celle qu'offre le faisceau collatéral typique. Le massif de liber mou qui, dans ce dernier, est entier et placé dans le plan médian du faisceau, se trouve, chez d'autres faisceaux, découpé en deux groupes par une bande médiane scléreuchymateuse, se détachant de la gaine. Si H. von Mohl n'a mentionné ce fait qu'au sujet du genre *Calamus*, il n'en est pas

(1) On peut se demander si des éléments grillagés n'ont pas épaissi leurs parois.

moins vrai que cet auteur a représenté la même particularité chez *Acrocomia sclerocarpa* Masrt., *Sagus Raffia* Jacq. et *Chamaerops humilis* L.

Une semblable anomalie, toujours d'après L. Kny, aurait été figurée aussi par H. Karsten (**25**, pl. II, fig. 8 et 9), pour le pétiole, chez *Oenocarpus utilis;* par Schacht (**39**, vol. I, pp. 320 et 327), chez les genres *Calamus* et *Bactris;* par Dippel (**8**, vol. II, p. 128), chez *Calamus Rotang* L.; par Russow (**38**, pp. 9 et 36), chez *Calamus Rotang* L. et *Latania*, ainsi que dans d'autres familles de Monocotylées, chez *Xanthorrhea australis* R. Br., *Ophiopogon spicatus* Gawl. et *O. japanicus* Gawl.; par de Bary (**6**, p. 341) chez *Calamus* et chez *Rhapis flabelliformis.*

A la suite d'observations personnelles, L. Kny a retrouvé cette disposition nettement accusée chez trente autres espèces de Palmiers, dont il fournit la liste (**28**, p. 96). Il l'a rencontrée aussi chez *Xanthorrhea hastile* Smith et *Dasylirion acrostichum* Zucc.

Mais L. Kny a montré également que la division du liber mou pouvait être poussée plus loin. Dans les faisceaux du pétiole chez *Chamaerops humilis* L., il peut y avoir trois groupes libériens. Cette division en trois serait même de règle chez *Rhapis flabelliformis* L.

Les plus petits faisceaux, dans les feuilles, chez *Gynerium argenteum* N. ab. C., ont souvent dans leur liber mou des cellules scléreuses distribuées à peu près sans ordre. Cette structure se rencontre encore chez *Dasylirion longifolium* Zucc. Des cellules scléreuses isolées se montrent aussi chez *Astelia Banksii.*

Chez *Ophiopogon Jaburan, O. spicatus, O. spiralis* et *O. graminifolius,* le liber mou des feuilles, suivant L. Kny, est réduit à un nombre relativement petit de cellules à parois minces, qui sont, les unes isolées, les autres réunies par deux ou plus, et éparpillées dans le tissu scléreux externe.

Nous avons donc chez *Carludovica plicata* Kl. une structure intermédiaire entre celle que présentent, d'une part, les *Ophiopogon* que je viens de citer en dernier lieu, et celle qu'offrent, d'autre part, toutes les autres plantes énumérées en analysant le

travail de L. Kny. Chez *Carludovica palmaefolia* Hort., le nombre des cellules à parois minces, isolées ou groupées par deux, est plus grand que chez *C. plicata* Kl.

L. Kny (**28**, p. 105) s'est demandé quel rôle il fallait attribuer à cette division du liber mou en groupes plus ou moins nombreux dans les faisceaux.

D'après cet auteur, deux hypothèses se présentent à l'esprit

On peut se poser la question de savoir si le transport des matières élaborées n'est pas facilité par suite de cette multiplication des groupes de liber mou, qui augmenterait le nombre des voies. Mais rien non plus n'empêche de supposer que l'intercalation de sclérenchyme ne soit, avant tout, un moyen employé par la plante pour augmenter sa résistance à la flexion, et pour assurer, par la même occasion, une protection plus efficace aux éléments chargés du transport des matières élaborées.

Les observations anatomiques sur les feuilles étudiées par cet auteur l'amènent à conclure que la seconde hypothèse est la plus plausible.

Le nombre des canaux gommeux dans le pétiole adulte diminue vers le milieu de sa longueur. Un fait du même genre, d'après Ph. Van Tieghem (**48**, p. 164), s'observe chez *Anthurium crassinervium*. A mi-hauteur du pétiole, chez cette plante, on constate la disparition de tous les fascicules fibreux, épars dans le parenchyme interne, ainsi que des canaux gommeux.

Limbe. — La section transversale d'ensemble offre la forme d'un zig-zag. A chaque pli correspond une côte (pl. V, fig. 53). Cette dernière proémine alternativement à la face externe et à la face interne de l'organe.

Les épidermes externe et interne ne présentent pas de différence saillante. On trouve cependant plus de stomates à la face externe. Les cellules épidermiques ont leur paroi externe légèrement bombée et pourvue d'une assez forte cuticule.

Le limbe adulte ne montre pas de poils, mais sur les côtes on aperçoit, de-ci, de-là, les vestiges laissés par ces productions épidermiques. On remarque que certaines cellules y ont des dimensions fort différentes. Non seulement elles sont plus

grandes, mais ces cellules ont un aspect particulier. Leur paroi externe, fort incurvée, surplombe parfois (pl. IV, fig. 51).

Dans les intervalles séparant les côtes, le mésophylle ainsi que les faisceaux libéro-ligneux et les massifs scléreux qui le parcourent, ne fournissent à l'examen aucune particularité intéressante.

Des canaux gommeux ne s'observent qu'à la base du limbe dans la côte médiane.

Au fond des plis du limbe encore fermé, l'épiderme ainsi que les couches sous-jacentes mésophylliennes ne présentent pas de différence avec ces mêmes tissus dans l'intervalle entre deux côtes. Il n'en est plus de même lorsque le limbe s'est déployé. Dans celui-ci, ces assises cellulaires prennent des caractères spéciaux. Au moment où le limbe s'étale, leurs éléments croissent plus rapidement que les autres dans le plan perpendiculaire à la surface de l'organe. Si l'on compare la coupe pratiquée dans l'intervalle entre deux côtes (pl. V, fig. 54 et 55) avec celle faite au fond d'un pli (pl. V, fig. 56), représentées toutes deux sous le même grossissement, on verra combien la différence de croissance est grande (1). Sur la face opposée à celle du fond du pli s'aperçoit sous l'épiderme un massif scléreux occupant toute la largeur de la côte (pl. V, fig. 57).

Cette particularité de structure du limbe ouvert me paraît pouvoir être rapprochée, à certains égards, de celle, devenue classique, que présente la feuille chez les Graminées. On sait que cet organe montre, chez ces dernières plantes, des mouvements périodiques de déploiement et de repliement. C'est pour cette raison que l'aspect de certaines Graminées, les matins brumeux, est différent de celui qu'elles offrent au soleil de midi. L'humidité amène le déploiement du limbe, tandis que la sécheresse provoque sa fermeture. Ces mouvements ont pour objet de protéger ces plantes contre les effets d'une transpiration trop active. En effet, à l'inverse de ce qui se remarque dans la plupart des autres plantes, les stomates du limbe des Graminées se trouvent

(1) H. von Mohl (55, pl. K, fig. 1 et 7) a représenté la même particularité au fond du pli du limbe chez *Chamaerops humilis* L. Les cellules mésophylliennes agrandies ont été appelées par lui *cellulae hyalinae*.

sur sa face interne. Non seulement la face externe est dépourvue de ces ouvertures (*Sesleria tenuifolia* [1], etc.), mais ses cellules épidermiques possèdent une épaisse cuticule. La production de ces mouvements est due à la présence, au fond des plis qui sillonnent longitudinalement le limbe, d'un certain nombre de cellules spéciales disposées sur une ou plusieurs rangées (*Festuca punctoria*), et que Duval-Jouve (**13**) a désignées sous le nom de *cellules bulliformes*. Celles-ci ne possèdent pas de chlorophylle et sont étirées perpendiculairement à la surface; leurs parois sont élastiques [2].

Chez *Carludovica plicata* Kl., le déploiement ne constitue pas un phénomène périodique. Il est produit par des cellules qui ne diffèrent des autres que par la faculté qu'elles possèdent de croître plus rapidement dans certaines directions. Ces cellules épidermiques et mésophylliennes forment par leur ensemble des cordons longitudinaux jouant le rôle de charnières au moment du déploiement. Dans ces cordons, comme le montre la figure 56 (pl. V), on trouve des massifs scléreux. La présence des faisceaux libéro-ligneux et d'un talon scléreux dans le prolongement du fond des plis (pl. V, fig. 55), assure à l'organe la rigidité nécessaire pour permettre l'écartement des lanières que représentent les portions limbaires dans l'intervalle entre deux côtes, et qui étaient primitivement appliquées les unes contre les autres dans la feuille fermée [3].

[1] D'après Kerner von Marilaun (**26**, p. 514).

[2] Kerner von Marilaun (**26**) fait remarquer que les phénomènes d'ouverture et de fermeture périodiques des feuilles de Graminées, possèdent le même processus que ceux qui s'observent chez les Mousses, notamment chez toutes les espèces du genre *Polytrichum* et chez quelques-unes du genre *Barbula*.

[3] Dans un travail sur les jeunes Palmiers (**33**, p. 29, et pl. I, fig. 7), j'avais donné le nom de *tissu de charnière* à un semblable groupement de cellules destinées aussi à produire le déploiement par le même processus. Je dois reconnaître que cette appellation de *tissu de charnière* s'approprie mieux aux cellules *bulliformes* des Graminées qu'aux éléments épidermiques et mésophylliens chez *Carludovica* et chez certains Palmiers. Si on l'applique à ces plantes, c'est avec cette restriction qu'il s'agit ici d'une charnière qui, une fois ouverte, ne se ferme plus.

Ce même groupe d'éléments, chez les Palmiers, avait été dénommé *tissu de gonflement (Schwellgewebe)* par A. Naumann (**35**, p. 250). Cet auteur avait parfaitement reconnu le rôle de ces cordons de cellules spécialisées.

Au sujet de la distribution des faisceaux libéro-ligneux et des massifs scléreux dans le limbe, je ferai remarquer que H. Schwendener (**42**, p. 77) a distingué trois catégories de supports destinés à assurer, chez les organes végétaux à symétrie bilatérale, la résistance à la flexion. Chez *Carludovica plicata* Kl., comme chez C. *palmæfolia* Hort., nous avons ce que l'illustre professeur de Berlin appelle des supports mixtes, du genre de ceux que G. Haberlandt (**21**, p. 158) signale chez divers Palmiers. Les plus grands faisceaux sont immergés à mi-distance entre les épidermes. Les côtes, soit donc alternativement à la face externe et à la face interne du limbe, possèdent sous l'épiderme une couche plus ou moins épaisse, découpée ou non, de tissu mécanique, constituant ainsi pour l'organe des poutrelles de tissu résistant, adjointes aux colonnes que forment les faisceaux, décrits à propos du pétiole, et que l'on retrouve avec les mêmes caractères dans le limbe.

Préfeuille. — Dans les bourgeons axillaires, les très jeunes feuilles sont protégées par une préfeuille. Celle-ci possède la structure que l'on rencontre dans la gaine d'une jeune feuille.

Cette préfeuille représente morphologiquement une feuille primordiale qui s'est accrue, en se différenciant histologiquement, mais sans plus former de gaine que de pétiole ou de limbe. Car si l'on ne peut admettre que le pétiole et le limbe procèdent de la gaine et que celle-ci soit antérieure à ceux-là, on ne peut pas non plus concevoir qu'une gaine se développe seule ou qu'une feuille puisse être réduite à sa gaine, ce qui revient au même.

Dans cette préfeuille, on trouve des cordons procambiaux en voie de différenciation. Les uns ont déjà une lacune antérieure, tandis que les autres n'en possèdent pas encore (pl. V, fig. 65).

Les figures 59 à 63 (pl. V) représentent une succession de coupes pratiquées dans un bourgeon axillaire, du sommet jusqu'au milieu de sa longueur. Elles montrent aussi la distribution des canaux gommeux. La figure 64 (pl. V) indique, de plus, la disposition relative des canaux gommeux et des faisceaux libéro-ligneux.

CHAPITRE II.

LA TIGE [1].

A. *Son organographie.*

Chez les *Carludovica,* on rencontre d'assez grands végétaux herbacés à rhizomes, ou des plantes épiphytes à tige molle vivant à la façon des lianes et pouvant atteindre une longueur assez considérable, ou encore des plantes buissonnantes à tige ligneuse courte portant une couronne de feuilles. C'est à cette dernière catégorie qu'appartient *C. plicata* Kl. Chez un exemplaire de cette plante, cultivé dans les serres du Jardin botanique de l'Université de Liége, la tige a une longueur de 60 centimètres [2] et une largeur moyenne de 3 centimètres. D'autres pieds, dans les mêmes serres, possèdent des tiges mesurant respectivement 44, 38, 22, 16, etc., centimètres de longueur.

La tige est un organe cylindrique, couvert, jusqu'à sa couronne de feuilles, de cicatrices foliaires embrassantes. Dans chacune de celles-ci, la hauteur va en diminuant de la partie médiane vers les extrémités marginales.

B. *Sa structure* [3].

Au sommet végétatif se trouve un méristème primitif formé de cellules nettement hexagonales sur une coupe transversale. Celle-

(1) Dans la littérature scientifique, je n'ai pas rencontré de travaux spéciaux concernant les tiges de Cyclanthacées. Mes recherches bibliographiques dans les traités généraux ne m'ont pas fourni non plus d'indications sur ces organes.

(2) Au sujet de la longueur de cette tige, on trouve dans la monographie de Drude (**10**, p. 94) les renseignements suivants : « Die Stämme der aufrecht wachsenden Arten werden selten über fusshoch (*Carludovica plicata* in botanischen Gärten) und armesdick.. ».

(3) Il eût été trop malaisé de réunir les matériaux nécessaires pour aborder l'étude anatomique complète de la tige, c'est-à-dire à tous les âges et à tous les niveaux. Je me bornerai donc à donner un court aperçu des particularités histologiques de cet organe.

ci montre en même temps un dermatogène constitué par des cellules vaguement pentagonales, à cloison externe presque plane.

La figure 66 (pl. VI) représente une coupe d'ensemble rencontrant cinq feuilles successives entourant le sommet végétatif d'une tige. A l'aisselle de la première et de la troisième feuille se remarque un bourgeon axillaire.

Chacune des portions foliaires rencontrées par la coupe présente un maximum d'épaisseur dans son plan médian. La disposition de ces parties, cependant, est telle que le sommet végétatif est protégé par un rempart foliaire d'épaisseur assez uniforme.

La figure 67 (pl. VI) représente une tige encore fort courte avec son bourgeon terminal. Celui-ci montre des feuilles peu développées, non encore pétiolées.

La section transversale d'ensemble au milieu d'un entrenœud possède une forme elliptique. On y voit deux régions fort distinctes (pl. VI, fig. 68). L'intérieure a la même forme que l'organe.

La région extérieure ou corticale est entourée, sur cette coupe transversale, d'un épiderme composé de cellules quadrilatérales ou pentagonales, légèrement allongées perpendiculairement à la surface, à cloison externe un peu bombée, à cuticule présentant de petites aspérités pointues (pl. VI, fig. 69). Vus de face, ces éléments se montrent allongés dans le sens de la croissance de l'organe, et la cuticule est parcourue par des stries longitudinales qui se prolongent d'une cellule à l'autre par-dessus les cloisons transversales (1). Sur ces stries s'observent, en

(1) J. Sachs (voir Van Tieghem, **51**, p. 598, fig. 407) a figuré des stries analogues sur l'épiderme de la nervure médiane de la feuille du Houx (*Ilex aquifolium*). Au sujet du rôle de ces stries, il me paraît intéressant de rappeler ici l'idée émise par J. Vesque (**53**, p. 34) : « Il serait bien difficile, dit cet auteur, de déterminer par l'expérience le rôle de ces dessins cuticulaires ; mais étant donnée cette circonstance singulière que les épidermes plans en sont ordinairement dépourvus, tandis que les parties convexes en présentent presque toujours, il est permis d'émettre une hypothèse à mes yeux fort plausible. Chaque cellule convexe représente, en effet, une lentille convergente qui, malgré

nombre fort considérable, de très fines perles cuticulaires (pl. VI, fig. 70).

Les assises sous-jacentes à l'épiderme, généralement les trois premières, sont légèrement collenchymateuses (pl. VI, fig. 69). Elles ne montrent pas des grains d'amidon.

Sauf la plus intérieure, les autres couches de la région corticale sont constituées par des cellules elliptiques remplies de grains ovalaires d'amidon et laissant entre elles des méats assez grands. Vers la limite intérieure de cette région, les cellules sont disposées en séries rayonnantes.

On trouve, dans ce parenchyme cortical, quelques faisceaux, dont certains sont réduits à un petit nombre d'éléments à parois épaissies, ainsi que de larges canaux gommeux en relation avec ceux des feuilles, et des cellules cristalligènes à raphides disposées parallèlement à l'axe de la tige.

Cette région est limitée intérieurement par un phlœoterme (1) dont les éléments à parois minces sont étirés tangentiellement et montrent des plissements sur les faces radiales (pl. VI, fig. 71).

Le cylindre central (2) débute par une ou deux couches de

ses faibles dimensions, peut, surtout dans les pays chauds, notablement surélever la température en un point déterminé de la cellule épidermique ; il est donc important, dans ce cas, de remplacer la vitre lisse par une vitre cannelée qui a pour effet de disperser, d'égaliser la lumière incidente; de cette manière, on comprend pourquoi, dans un grand nombre de cas, les cellules convexes qui avoisinent les stomates ou les poils enfoncés au-dessous du niveau de l'épiderme et celles qui se relèvent en petites saillies autour de la base des poils sont striées, tandis que les autres ne le sont pas ».

(1) C'est E. Strasburger (**44**, p. 484) qui a donné le nom de phlœoterme à la couche la plus interne de l'écorce (endoderme de Ph. Van Tieghem). Le botaniste allemand fait remarquer que le terme dont il préconise l'emploi présente l'avantage de pouvoir être appliqué, même dans les cas où la limite de l'écorce n'est pas différenciée d'une manière spéciale. Il réserve le mot endoderme pour les couches cellulaires à faces radiales cutinisées

(2) Pour le cylindre central des Monocotylées, E Strasburger (**44**, p 545) a proposé le nom de stèle (*). A la région corticale, formée par les portions basales des gaines embrassantes, on pourrait, dit ce savant, appliquer le terme de stèlolemme.

(*) Employé aussi par L. Errera dans son très remarquable *Sommaire du cours d'éléments de botanique pour la candidature en sciences naturelles.* (Bruxelles, 1898.).

cellules à parois minces, auxquelles viennent s'adosser des faisceaux libéro-ligneux. Sauf entre ces faisceaux, où elles sont étirées suivant le rayon, les autres cellules parenchymateuses du cylindre central (*tissu conjonctif* de Ph. Van Tieghem) ont les mêmes caractères que celles rencontrées dans la région corticale.

Pour ce qui concerne les faisceaux libéro-ligneux, on remarque que chez certains d'entre eux les vaisseaux (1) sont disposés en V ou en U entourant un liber mou (pl. VI, fig. 72); chez la plupart, cependant, les vaisseaux se réunissent en un anneau à peu près complet autour du liber mou (pl. VI, fig. 73).

Ces faisceaux peuvent être rangés parmi ceux que E. Strasburger (**44**, p. 348) appelle « amphivasale Gefässbündeln » (2), par opposition à ses « amphicribale Gefässbündeln » dans lesquels le bois est, au contraire, entouré du liber. E. Strasburger a eu soin d'indiquer aussi que les premiers se rencontrent surtout dans les rhizomes des Monocotylées (3).

Dans les tiges plus âgées, la structure ne présente guère de différences notables. Si nous examinons cet organe sur des coupes transversales, lorsqu'il a atteint 18 à 20 millimètres de diamètre, on voit, par exemple, que la région corticale est circonscrite par un épiderme fréquemment interrompu, composé de cellules quadrilatérales ou pentagonales, allongées tangentiellement.

L'assise corticale la plus externe forme un périderme exfoliant l'épiderme par places. Ce périderme, par des recloisonnements tangentiels, produit une couronne de liège.

L'apparence histologique générale de cette tige rappelle beaucoup celle des gros rhizomes. On sait, en effet, que dans les

(1) Il y a des faisceaux dans lesquels les vaisseaux n'ont pas épaissi leurs parois.

(2) Faisceaux concentriques.

(3) Chez *Acorus Calamus* L., de Bary (**6**, p. 329, fig. 147 et 148, et p. 352) a montré que le même faisceau pouvait être collatéral dans sa partie supérieure et concentrique inférieurement.

Ph. van Tieghem (**51**, p. 132) a indiqué, chez des Aroïdées, les différences histologiques que présentent des faisceaux en passant de la tige dans la feuille.

organes souterrains, racines et rhizomes, le système mécanique est édifié de façon à assurer à l'organe un maximum de résistance à la pression. C'est dans ce but que ce système mécanique est alors localisé dans la partie centrale. Dans la tige qui nous occupe, comme c'est le cas aussi dans les rhizomes, la résistance cherchée est obtenue par une agglomération de faisceaux dans le cylindre central. Ces faisceaux, eux-mêmes, présentent d'ailleurs des particularités que l'on est habitué à ne rencontrer que dans les rhizomes, et qui me les ont fait ranger dans la catégorie des « amphivasale Gefässbündeln » de E. Strasburger ou faisceaux concentriques des auteurs français.

Il ne sera pas inutile, me semble-t-il, d'attirer l'attention sur ce fait mentionné par O. Drude (**10**, p. 94), leur principal monographe, que la plupart des *Carludovica* possèdent un rhizome. La structure rhizomoïde de la tige chez *Carludovica plicata Kl.* est peut-être explicable par voie historique?

CHAPITRE III.

LA RACINE.

A. *Son organographie.*

Nous avons vu que Klotzsch (**27**, p. 468) considère *Carludovica palmaefolia* Hort. comme une variété de *C. plicata* Kl.

Ces deux plantes présentent cependant des différences assez importantes. C'est ainsi, notamment, que la première possède des racines aériennes, tandis que l'autre n'en a pas. Ces racines aériennes se dirigent vers le sol où elles s'implantent rapidement.

Au point de vue organographique, les racines souterraines, tant chez *Carludovica plicata* Kl. que chez *C. palmaefolia* Hort., ne montrent aucune particularité saillante.

B. *Sa structure.*

I. Résumé bibliographique. — On sait que, chez les Monocotylées, le cylindre central d'une racine commence par une assise périphérique de cellules (péricycle) alternant avec les éléments endodermiques. Contre cette assise périphérique et à des distances égales viennent s'appuyer un certain nombre de massifs ligneux qui alternent aussi avec autant de massifs libériens. Les premiers forment des lames rayonnantes, triangulaires ou cunéiformes en section transversale, à sommet externe, se dirigeant de la périphérie vers le centre. Les massifs libériens se projettent moins près du centre que les ligneux, et ils sont plus élargis tangentiellement.

Dans cette classe des Monocotylées, on trouve aussi des espèces dont le cylindre central de la racine présente des modifications intéressantes. C'est ainsi, notamment, que les files vasculaires peuvent montrer, en section transversale, divers genres de convergences et des découpures, plus ou moins nombreuses, que Ph. Van Tieghem (**49**) attribue à un développement beaucoup plus considérable de certains de ces massifs dans le sens du rayon. « Il est clair, dit le savant professeur du Muséum, que les fais-

ceaux (ligneux) du cylindre ne peuvent pas tous être disjoints, ni l'être tous au même degré. Aussi observe-t-on alors une alternance assez régulière entre les faisceaux moins développés, qui sont continus, et les faisceaux plus développés, qui sont disjoints à divers degrés. Les massifs libériens peuvent aussi se disjoindre « si le nombre des tubes (criblés) augmente au delà d'une certaine limite » (**49**).

Les racines de Monocotylées dans lesquelles s'observent les particularités qui viennent d'être signalées, ont été appelées « racines anormales ». A ce titre, elles ont fait, à diverses reprises, l'objet d'études spéciales que je ne crois pas devoir résumer.

Je rappellerai seulement que c'est C. Nägeli (**34**. p. 20) qui a le premier attiré l'attention sur les racines possédant des » *Cambiformsträngen* (1) » disposés sur plusieurs rangs (2). Il donna la description du faisceau multipolaire de la racine chez *Chamaedorea Schiedeana*.

Carludovica plicata Kl. appartient à cette catégorie de Monocotylées possédant des racines dites anormales.

On n'a rencontré jusqu'à présent cette sorte de racines que chez certaines espèces des familles suivantes :

Musacées,
Cyclanthacées,
Aroïdées,
Palmiers,
Pandanacées,
Amaryllidacées (*Agave*),
Orchidées,
Commélynées (*Spironoma*),
Liliacées (*Dracaena*).

(1) C'est le nom sous lequel les massifs libériens étaient désignés dans son travail.

(2) Antérieurement, H. von Mohl (**56**) avait cependant relevé la découpure des files vasculaires du faisceau de la racine chez *Iriartea*. En effet, lorsqu'il décrivit cet organe, l'illustre anatomiste allemand fit remarquer que les vaisseaux étaient entourés d'une ou de deux rangées de « cellules parenchymateuses ».

Dans les trois dernières familles, l'anomalie réside en une simple dislocation, plus ou moins accentuée, dans le massif ligneux, où le vaisseau terminal peut être séparé du reste du massif par une ou plusieurs assises de cellules.

Il convient de remarquer, pour ce qui concerne la disposition des massifs libériens périphériques par rapport à ceux qui sont plus rapprochés du centre, que C. Nägeli avait cru reconnaître une intercalation d'ilôts grillagés entre les groupes trachéens et les grands vaisseaux chez *Chamaedorea Schiedeana* (**34**, p. 20).

Depuis lors, P. Falkenberg (**16**, p. 96 et pl. III, fig. 7) a montré que les ilots internes de liber se trouvent chez cette plante sur les rayons qui rencontrent les massifs périphériques.

L'observation de P. Falkenberg a été reconnue pouvoir être appliquée aussi à diverses autres espèces de *Chamaedorea*, à *Cocos reflexa* et à *Cocos flexuosa* (1) par M. O. Reinhardt (**37**).

Dans un travail sur les jeunes Palmiers (**33**, p. 50), j'ai eu l'occasion de signaler dans le faisceau de la racine chez *Latania Loddigesii* M., en germination, des massifs libériens divisés en deux ilots situés sur le même rayon.

Ph. Van Tieghem, dans son mémoire sur la structure des Aroïdées, a insisté sur le parallèlisme de structure des lames libériennes et des lames vasculaires alternes chez ces plantes, et il montre que « ces deux sortes de faisceaux ont souvent la même forme compacte ou disjointe » (**48**, p. 38).

La racine de *Cyclanthus bipartitus* a été étudiée par Ph. Van Thieghem dans un travail ultérieur. Cette racine ne différerait de celle de *Pandanus*, décrite par cet auteur (**49**, pp. 156 et 157), que par des fibres brillantes plus larges, moins épaissies et disséminées par groupes de deux ou de trois seulement dans le parenchyme cortical et dans le parenchyme conjonctif qui sépare les gaines fibreuses dans le cylindre central.

En 1884, dans une dissertation inaugurale présentée à l'Université de Berlin et relative au tissu conducteur des racines à

(1) Mes recherches sur des germinations de *Cocos flexuosa* (**33**, p. 57) ne m'ont pas montré de racine dite anormale.

structure anormale des Monocotylées, M. O. Reinhardt (**37**, p. 344) s'est occupé de certaines racines de Cyclanthacées. Ses recherches ont été effectuées sur *Carludovica Hookeri, C. Moritziana* et *Cyclanthus* sp.

D'après cet auteur, les racines des Cyclanthacées ont une structure analogue à celles des Musacées. En les comparant les unes aux autres, il ne décèle, en effet, que des différences de peu d'importance, portant surtout sur les dimensions et le nombre des vaisseaux et des tubes criblés. Il montre aussi les dispositions affectées par les vaisseaux écartés des massifs ligneux périphériques. Chez les Cyclanthacées, d'après M. O. Reinhardt, ces vaisseaux ne sont jamais complètement isolés, comme c'est le cas chez les Musacées; ils se réunissent en groupes offrant, en section transversale, la forme de courbes irrégulières. L'image que présentent ces groupes sur les coupes de la racine varie beaucoup, parce que des vaisseaux se détachent parfois d'un groupe pour s'unir à un autre groupe, parcourant isolément un certain trajet. De plus, il arrive aussi que certains groupes entiers se réunissent à d'autres ou que des disjonctions s'observent dans le même groupe. M. O. Reinhardt a examiné de même les massifs libériens périphériques et intérieurs; il a indiqué les formes qu'ils peuvent prendre suivant leur position entre les groupes vasculaires. Entre les vaisseaux les plus rapprochés du centre, rangés en anneau fermé, cet auteur signale l'absence de massifs libériens. Le nombre de ceux-ci irait en augmentant jusqu'à la périphérie où ils alternent avec les groupes vasculaires.

Enfin, assez récemment, Ph. Van Tieghem et H. Douillot (**50**, p. 302) ont étudié le mode d'origine des radicelles chez *Cyclanthus bipartitus*.

II. Observations. — Dans la description histologique qui va être faite de la racine latérale chez *Carludovica plicata* Kl., j'établirai, à l'occasion, des comparaisons avec la structure de la racine souterraine chez *C. palmaefolia* Hort.

Je donnerai ensuite un court aperçu des caractères structuraux les plus importants de la racine aérienne que l'on trouve dans la variété horticole.

Chez *Carludovica plicata* Kl., la coiffe, dans sa structure, ne présente rien de particulier. Elle est constituée par de grandes cellules vides qui, par suite de la gélification de leur membrane, s'isolent en provoquant son émiettement. Vues de face, les cellules, non encore affaissées, se montrent pentagonales ou hexagonales.

Dans l'assise pilifère, les cellules prolongées en poils sont fort rares. Presque tous les éléments, sur la coupe transversale, sont pentagonaux ou ovalaires, étirés tangentiellement. Leur paroi externe est plus ou moins fortement bombée. La plupart de ces éléments ont leur membrane épaissie. Des cellules à parois minces sont entremêlées aux autres. C'est là un cas intéressant d'adaptation de l'assise pilifère, qui joue ainsi à la fois le rôle d'organe protecteur et celui d'organe absorbant (pl. VII, fig. 74).

L'absence presque complète de poils radicaux a été signalée dans diverses catégories de plantes.

Il résulte des importantes recherches de Frank Schwarz (**41**, p. 166), que l'on peut admettre la superfluité de ces poils lorsque se trouve réalisée l'une ou l'autre des conditions que voici :

« En premier lieu, l'absorption de l'eau et des matières nutritives se trouve fort facilitée par un emploi beaucoup moins grand (en d'autres termes, vis-à-vis d'un excès d'eau et de matières nutritives). C'est ce qui se rencontre chez les plantes aquatiques et celles des marécages.

« En second lieu, l'emploi ainsi que le besoin d'eau et de matières nutritives sont moindres sans qu'il y ait connexité avec une difficulté particulière de leur absorption (ce qui se passe chez les Conifères, les plantes à tubercules et en partie aussi chez les parasites). »

D'après Frank Schwarz (**41**, p. 168), l'absence de poils radicaux chez les *Agave* et les Palmiers est provoquée par la même cause que chez les Conifères. Elle résulterait de ce que les feuilles, dans ces diverses plantes, sont entourées d'une cuticule épaisse, qui diminue leur transpiration, et de ce que ces végétaux ont généralement un système radical très développé.

Il convient, me semble-t-il, de faire remarquer aussi que, parmi d'autres caractères histologiques, G. Firtsch (**17**, p. 352) cite l'absence de poils radicaux chez *Phoenix dactylifera* L. pour démontrer que ce Palmier, de par son organisation, réclame un sol très humide.

Je n'ai pas trouvé d'indications sur la station de *Carludovica plicata* Kl. dans l'Amérique tropicale. L'absence presque complète de poils radicaux, jointe à certaines autres particularités de structure, me fait cependant supposer que cette plante croît dans des endroits d'ordinaire humides.

L'assise sous-pilifère est constituée par des cellules à parois minces, de forme pentagonale ou hexagonale en coupe transversale. Ces éléments sont en général plus grands que ceux qui composent l'assise précédente.

A proximité du sommet de la racine, le parenchyme cortical est formé de cellules assez petites, sans méats.

Une coupe pratiquée dans une racine adulte, vers le milieu de sa longueur, montre dans ce tissu trois régions annulaires nettement distinctes.

Dans l'anneau extérieur, sauf les deux premières assises qui sont formées d'éléments collenchymateux, les cellules possèdent des parois minces et renferment des grains ovalaires d'amidon.

L'anneau moyen (G. Sel., pl. VII, fig. 75) constitue une gaine mécanique assez épaisse d'éléments à parois transversales minces, mais à cloisons radiales et internes sclérifiées, portant de petites ponctuations et se colorant en jaune par le chlorure de zinc iodé.

Enfin, l'anneau intérieur est reconnaissable à ses rangées, rayonnantes près de l'endoderme, de cellules de forme arrondie et bondées de grains d'amidon. Ces éléments laissent entre eux plus que des méats, de véritables lacunes. La présence de ces canaux aérifères semble encore indiquer pour *Carludovica plicata* Kl. une station humide.

Dans la racine souterraine chez *Carludovica palmaefolia* Hort., la première assise du parenchyme cortical est constituée par des groupes de cellules possédant des épaississements en U intéres-

sant les faces radiales et internes, qui alternent avec des groupes d'éléments à parois minces. Nous avons là une gaine mécanique coupée par des *Durchgangszellen*. Des cellules sclérifiées, isolées ou groupées par deux sur la coupe transversale, sont disséminées, en outre, dans le parenchyme sous-jacent.

Près du sommet de la racine, l'endoderme, chez *Carludovica plicata* Kl., est représenté par des éléments à parois minces, dont les faces radiales montrent les plissements caractéristiques (pl. VII, fig. 76).

Dans la coupe à mi-longueur de l'organe adulte, l'endoderme présente une alternance de cellules à parois épaissies (1) et d'éléments restés minces : les premiers vis-à-vis des massifs libériens de la périphérie du faisceau, les autres vis-à-vis des pôles ligneux (pl. VII, fig. 78).

Sur la coupe près du sommet, le péricycle est composé de cellules à parois minces, étirées tangentiellement (pl. VII, fig. 76 et 77).

A mi-distance de la base, dans la racine adulte (2), les cellules péricycliques ont épaissi leurs parois (pl. VII, fig. 78), légèrement vis-à-vis des massifs libériens périphériques, plus fortement entre ceux-ci et les pôles ligneux.

Sur des sections transversales successives, pratiquées du

(1) Schwendener (**43**, p. 34) cite les *Carludovica* parmi les plantes dont les cellules de la gaine (endodermique) de la racine ont, de même que les éléments voisins de l'écorce, épaissi leurs parois (catégorie C). Il ajoute même que « *Carludovica* schliesst sich in dieser Hinsicht den Palmen an, welche durchgehends mit porös-verdickten Scheiden versehen sind ». Je n'ai point remarqué chez *Carludovica plicata* Kl d'épaississement dans les assises corticales adjacentes à l'endoderme. Les cellules y conservent des parois minces, mais il n'en est plus ainsi à l'intérieur de la gaine (endodermique), où certaines cellules péricycliques épaississent légèrement leurs parois et où la plupart des fibres primitives épaississent fortement leurs parois. *Carludovica plicata* Kl. me paraît donc devoir être rangé dans la catégorie D, établie par Schwendener pour les racines dont l'endoderme et les couches voisines du faisceau sont constitués par des éléments épaissis.

(2) D'après M. O. Reinhardt (**37**, p. 562), le « péricambium » possède des parois épaissies chez les *Carludovica* qu'il a étudiés, tandis qu'il conserve des parois minces chez les *Cyclanthus*.

sommet vers la base, dans la racine, on observe les modifications de structure que voici :

Sous la coiffe, tout le faisceau est à l'état procambial.

Les premières trachées ne se montrent que plus loin (pl. VII, fig. 76, *t'*); mais sur les coupes intermédiaires, on distingue cependant déjà des éléments plus larges, à parois minces, offrant les caractères des vaisseaux.

En s'éloignant encore du sommet, on voit d'abord des massifs libériens et des files vasculaires entourés de fibres primitives à parois minces (pl. VII, fig. 77), puis des groupes d'éléments libériens, séparés pas des fibres primitives à parois épaissies (pl. VII, fig. 78 et 81). Le nombre de ces groupes va progressivement en augmentant avec l'âge et le niveau (pl. VII, fig. 79 et 80). Le bois est formé de trachées et de vaisseaux rayés ou scalariformes (1). Les fibres primitives, sur les sections longitudinales, sont alors allongées, pointues ou non à leur extrémité. Elles portent des ponctuations elliptiques assez grandes. Si on les soumet à l'action successive de l'acide sulfurique concentré et de la solution aqueuse d'iode ioduré, on remarque que les couches d'épaississement gonflent au point d'obturer leur cavité interne; la lamelle moyenne se colore en bleu.

La figure 79 (pl. VII) représente un faisceau en coupe transversale, possédant quatorze pôles ligneux; la figure 80 en montre un autre qui en a vingt-sept. Entre les files vasculaires, dans les deux coupes, s'observent de nombreuses convergences ainsi que des dislocations très accentuées. Dans la figure 80, les vaisseaux les plus rapprochés du centre ne peuvent plus être rapportés aux groupes trachéens périphériques.

Par la comparaison des figures 79 et 80 (pl. VII), on voit aussi combien peuvent varier le nombre et la disposition des massifs libériens, tant périphériques qu'intérieurs. Même au début de la différenciation libéro-ligneuse, je n'ai pu constater d'alternance ni d'opposition entre les périphériques et les autres (2). Ces der-

(1) Ces vaisseaux ont un diamètre assez grand.

(2) Voir p. 48.

niers, d'abord disposés sur une seule rangée plus ou moins circulaire, se trouvent plus tard sur plusieurs.

La figure 81 (pl. VII) représente un massif libérien intérieur entouré de fibres primitives épaissies.

Chez *Carludovica palmaefolia* Hort., le faisceau de la racine souterraine possède des massifs libériens à éléments plus larges, mais moins nombreux.

Dans le faisceau multipolaire à fibres primitives épaissies, chez *Carludovica plicata* Kl., se remarque, à la base de la racine, une région où les cellules ont conservé des parois minces (pl. VII, fig. 80). Cette région, plus ou moins centrale et plus ou moins longue, va en diminuant de largeur vers le sommet et finit par disparaître complètement (pl. VII, fig. 79). D'après M. O. Reinhardt (**37**), chez *Carludovica Hookeri* et *C. Moritziana*, l'ensemble de ces cellules forme un cône dont le diamètre équivaudrait à un cinquième ou à un sixième du cylindre central, et dont la longueur mesurerait quelques centimètres.

Enfin, je crois devoir noter, tant pour la racine de *Carludovica plicata* Kl. que pour celles de *C. palmaefolia* Hort., une absence complète de canaux gommeux, alors que ceux-ci existent dans tous les autres organes chez ces plantes.

La racine aérienne, chez *Carludovica palmaefolia* Hort., possède un voile constitué par une assise pilifère multiple, dans laquelle on compte quatre ou cinq assises de cellules. Certaines de ces cellules, dans la couche la plus externe, se prolongent en poils. Ce voile ne montre pas d'éléments munis d'épaississements.

L'assise sous-pilifère ne diffère pas de celle rencontrée dans la racine souterraine.

La première assise du parenchyme cortical ne forme pas de gaine mécanique. L'endoderme conserve des parois minces.

Il en est de même du péricycle.

Dans le faisceau ne se voient ni fibres primitives épaissies, ni vaisseaux à parois épaissies. Ceux-ci sont représentés par des cellules qui ne se distinguent des fibres primitives, dont elles sont enveloppées, que par un diamètre quelque peu plus grand.

D'autres *Carludovica* possèdent aussi deux sortes de racines,

mais les unes fixatrices (*Haftwurzeln*), les autres nourricières ou absorbantes (*Nährwurzeln*). C'est le cas pour *C. Plumieri*, plante épiphyte atteignant parfois plusieurs mètres de hauteur, croissant en la République Dominicaine, sur des troncs d'arbres de la forêt vierge.

A.-F.-W. Schimper (**40**, p. 54) a relevé les différences de structure que l'on remarque dans ces deux espèces de racines.

Le faisceau dans les racines nutritives ou absorbantes est fort gros et montre de très nombreux groupes libériens et des massifs de larges vaisseaux. Les uns et les autres alternent à la périphérie, tandis qu'à l'intérieur ils sont disséminés sans ordre les uns parmi les autres. Le tissu conjonctif [1] est constitué par des cellules fibreuses sclérifiées.

La section transversale des racines fixatrices est toute différente. Le faisceau est mince et consiste principalement en cellules fibreuses très épaissies. Les groupes libériens et les lames vasculaires, à éléments étroits et peu nombreux, sont localisés à la périphérie.

Par ces indications sur *Carludovica Plumieri* ainsi que par les observations que je viens de relater sur *C. plicata* Kl. et *C. palmaefolia* Hort., on voit combien le cylindre central des racines est soumis à l'épharmonie.

[1] *Zwischengewebe* (*loc. cit.*, p. 55).

SECONDE PARTIE.

ORGANES FLORAUX.

CHAPITRE PREMIER.

LA HAMPE FLORALE ET LES SPATHES.

A. *Leur organographie.*

L'inflorescence est un spadice monoïque.

Sa hampe présente deux parties bien distinctes.

L'inférieure, beaucoup plus longue, est composée de quatre entrenœuds (1), dont le premier, très développé, affecte la forme d'un cône allongé et renversé; les autres entrenœuds restent très courts (pl. VIII, fig. 82). A chaque nœud est insérée une spathe caduque, parallélinerviée, qui, lors de l'épanouissement, se renverse le long de la hampe avant de se détacher (pl. VIII, fig. 83 et 84). Les trois spathes sont atténuées en pointe à leur sommet. Leurs plans médians font entre eux un angle de 120°. La plus inférieure et la plus élevée sont respectivement la plus grande et la plus petite.

La partie supérieure de la hampe constitue une masse ovoïdale, sur laquelle les fleurs mâles et les fleurs femelles sont placées suivant des cercles superposés.

Entre la dernière spathe et le premier cercle se trouve un espace annulaire nu.

Chaque inflorescence naît d'une bourgeon axillaire, comprenant à la fois un axe végétatif et une inflorescence, entouré d'une préfeuille. L'axe végétatif avorte dans certains cas, et l'inflores-

(1) Chez *Carludovica palmaefolia* Hort., on trouve six entrenœuds et cinq spathes beaucoup plus grands.

cence, d'abord cachée dans l'aisselle d'une feuille adulte, ne devient visible que par suite d'un fort allongement de l'entre-nœud inférieur.

B. *Leur structure.*

Examinons la structure de la hampe, puis celle des spathes.

Sur une grande partie de sa longueur, le premier entrenœud possède un épiderme dont les cellules, en certaines régions, ont leur cloison externe relevée en forme de mamelon verruqueux (pl. VIII, fig. 87). Rencontrées par des coupes transversales (pl. VIII, fig. 86), ces verrucosités ou grosses perles cuticulaires montrent intérieurement une tache ovale réfringente. Les éléments épidermiques présentent, vus de face, un contour hexagonal. Les stomates de cet épiderme ne diffèrent pas de ceux rencontrés sur la feuille.

Dans la région périphérique du parenchyme se remarquent, sur des coupes transversales, de nombreux massifs scléreux dont les cellules, à parois assez épaisses, sont polygonales. Quelques-uns d'entre eux, contigus à l'épiderme, occupent la place d'un élément de ce parenchyme. On rencontre aussi dans le même tissu des cellules cristalligènes, en général plus grandes, les unes à raphides courtes, les autres à raphides longues.

Les coupes successives pratiquées dans la hampe, d'une extrémité à l'autre, montrent que les canaux gommeux du premier entrenœud peuvent présenter des interruptions, des divisions et des confluences. Leur nombre diminue assez brusquement à la limite supérieure de ce premier entrenœud.

Les faisceaux libéro-ligneux manifestent une tendance centripète d'autant plus accusée qu'ils sont plus rapprochés du sommet de l'entrenœud. Quelques faisceaux sont soudés deux à deux (pl. VIII, fig. 85).

Dans les faisceaux, on remarque que le bois présente un ou plusieurs vaisseaux très larges à section arrondie ou polygonale. Certains d'entre ces faisceaux montrent une lacune antérieure. Dans le liber, beaucoup d'éléments sont épaissis et ne se distinguent pas des cellules du fourreau scléreux externe.

La structure varie de la base au sommet de l'entrenœud considéré.

Dans le voisinage de la première spathe, sur des coupes transversales, l'épiderme se montre exclusivement formé de cellules tabulaires à paroi externe presque plane et peu épaissie (pl. VIII, fig. 89). Les massifs scléreux à parois fort épaisses font défaut, mais on trouve des groupes de cellules polygonales plus petites à parois minces (pl. VIII, fig. 90). Dans les faisceaux, seuls les trachées et les vaisseaux ont leurs parois épaissies. Le fourreau scléreux a disparu et les vaisseaux sont d'un calibre moins grand (pl. VIII, fig. 91). Le diamètre de la section transversale d'ensemble a augmenté dans le rapport du simple au double.

Les autres entrenœuds ne présentent pas de particularité saillante. On constate, cependant, que le nombre des canaux gommeux, très faible dans le second, augmente légèrement dans le troisième.

La région basale, cylindrique, nue, que l'on trouve dans la partie supérieure de la hampe, ne nous offre pas, non plus, de différence dans sa structure. On remarque seulement, dans la portion libérienne des faisceaux, une légère sclérification des éléments qui se montrent si fortement épaissis à la base du premier entrenœud. Dans cette région, on trouve des canaux gommeux très volumineux et plus nombreux.

Les sections transversales dans les trois spathes sont fort semblables entre elles. Les faisceaux libéro-ligneux possèdent un liber à parois minces, et leur bois montre un grand nombre de vaisseaux ronds ou polygonaux de petit diamètre ainsi qu'une lacune antérieure (pl. VIII, fig. 92). Dans le voisinage des épidermes, on trouve de nombreux canaux gommeux. Ces canaux gommeux se trouvent dans la région moyenne du mésophylle. Entre deux faisceaux consécutifs, on en rencontre un ou deux. Dans la nervure médiane, ils sont souvent très nombreux.

CHAPITRE II.

LA FLEUR FEMELLE.

A. *Son organographie.*

Les fleurs femelles ont un périanthe de quatre folioles, dont deux latérales, une supérieure et une inférieure (pl. VIII, fig. 94). Ces folioles, réduites à des bourrelets obtus, se réunissent inférieurement. En dedans et en face de chacune d'elles s'aperçoit un long staminode filiforme qui lui est adné partiellement par sa base. D'abord replié un certain nombre de fois sur lui-même, chaque staminode se redresse ensuite perpendiculairement à la surface libre de la fleur lorsque les spathes protectrices se sont écartées pour l'épanouissement. Les staminodes portent à leur sommet un rudiment d'anthère introrse (1). Ils ont une longueur de 55 à 60 millimètres et un diamètre de 1 à 1.5 millimètre.

La fleur femelle est non seulement sessile, mais elle a une cavité ovarienne se prolongeant dans la partie charnue périphérique de l'axe de l'inflorescence (pl. VIII, fig. 100). L'ovaire est surmonté de quatre lobes stigmatifères radiants (pl. VIII, fig. 94). Ceux-ci, épais et sessiles, alternent avec les quatre staminodes et sont parcourus par un sillon médian. A ces lobes se réduisent donc les seules parties du gynécée, visibles extérieurement. On les trouve disposés suivant les diagonales d'un carré dont les pièces périanthales forment les côtés. Les placentas pariétaux de l'ovaire uniloculaire sont charnus et portent un nombre indéfini d'ovules anatropes, pourvus d'un court funicule (pl. VIII, fig. 95). Ils n'alternent pas avec les staminodes comme le représente à tort le diagramme de la fleur femelle, donné par E. Le Maout et J. Decaisne (**29**, p. 622), et ils ne répondent pas, par conséquent,

(1) Ce rudiment d'anthère s'incurve vers l'extérieur. O. Drude (**10**, p. 95, fig. 66 B) l'a figuré sous la forme d'un crochet.

aux lobes stigmatifères, ainsi que ces auteurs l'ont indiqué. Ils se rencontrent, au contraire, sous les staminodes (pl. VIII, fig. 93).

On remarque chez les *Carludovica* que le diagramme de la fleur femelle présente trois verticilles tétramères : le premier composé de quatre pièces formant le périanthe; le second, des quatre staminodes; le troisième, enfin, des quatre carpelles (pl. VIII, fig. 94). Il y a opposition entre le premier et le second verticille, alternance entre le deuxième et le troisième. Cette disposition pourrait faire supposer l'absence d'un périanthe tétramère interne qui rétablirait la loi d'alternance régulière.

Le fruit composé constitue un syncarpe presque sphérique. Dans la pulpe se voient des graines ellipsoïdiques (pl. VIII, fig. 97) renfermant un grand embryon conique au sein d'un albumen oléo-amylifère (pl. VIII, fig. 96 et 98).

B. *Sa structure.*

J'examinerai successivement le périanthe, les staminodes et le pistil.

Périanthe. — Dans les pièces périanthales, l'épiderme est composé de cellules à cloison externe assez bombée et peu épaissie. Dans le parenchyme (ou mésophylle), on trouve un grand nombre de sclérites (pl. VIII, fig. 99) isolées ou réunies en petits groupes. Ce sont des éléments allongés et étroits, à parois fortement épaissies et aréolées. Ils sont disposés perpendiculairement à la surface. On rencontre aussi dans le même tissu de nombreuses cellules cristalligènes à raphides courtes.

Chacune des folioles est parcourue par sept cordons libéro-ligneux, dont un médian. Sur la section transversale de l'inflorescence, comme sur celle de la fleur femelle, on remarque que ces cordons sont plus rapprochés de la surface interne que de la surface externe de la foliole (pl. IX, fig. 100 et 112).

La section radiale d'ensemble pratiquée dans l'inflorescence, et que représente la fig. 100 (pl. IX), laisse voir l'union d'un cordon libéro-ligneux médian d'une pièce périanthale avec celui d'un staminode opposé et adné par sa base à cette pièce.

Staminode. — Dans un staminode, il faut distinguer deux régions : 1° celle du filet et 2° celle du rudiment d'anthère (pl. IX, fig. 101).

1° *Filet.* — En section transversale, les cellules épidermiques sont carrées ou pentagonales, à paroi externe légèrement bombée, à cuticule peu épaisse (pl. IX, fig. 102, 103, 104). Dans certains groupes de cellules épidermiques, on constate des modifications remarquables. Ces cellules se dilatent fortement dans une direction perpendiculaire à la surface de l'organe, par suite d'une abondante sécrétion (pl. IX, fig. 102, 103 et 104).

L'écartement trop considérable consécutif des cloisons externe et interne, provoque la déchirure des parois latérales et, ainsi, la fusion en une masse unique, ayant l'apparence d'une lentille biconvexe, de la substance sécrétée par toutes les cellules d'un groupe. Ces formations épidermiques ou loupes glanduleuses proéminent à la surface (pl. IX, fig. 104) et refoulent devant elles le parenchyme sous-jacent. Vues de face, les cellules épidermiques constituant ces loupes sont fortement étirées tangentiellement et de forme polygonale (pl. IX, fig. 105).

Le parenchyme est formé de cellules arrondies en section transversale. Certaines d'entre elles, plus volumineuses, possèdent un contenu ayant le même aspect que celui des éléments épidermiques glanduleux. Sauf au voisinage du cordon libéro-ligneux, qui est central, les cellules du parenchyme renferment en grande quantité des grains ovalaires d'amidon. On observe aussi, dans ce tissu, des cellules cristalligènes à raphides courtes ainsi que deux ou trois canaux gommeux.

Le cordon libéro-ligneux a été représenté pl. IX (fig. 107).

La comparaison des fig. 104 et 106 (pl. IX) met en évidence les différences existantes entre un filet staminodique et un filet staminal.

2° *Anthère rudimentaire.* — Par des coupes pratiquées, à proximité du sommet du staminode, dans le rudiment d'anthère, on voit que ce dernier est constitué par deux sacs polliniques ordinaires (pl. IX, fig. 108) renfermant même des grains de

pollen(1). A la place occupée, dans les anthères des groupes androcéens ou phalanges, par les deux autres sacs se remarquent ici des organes ressemblant extérieurement à des sacs, mais d'une structure bien différente. On n'y trouve pas, en effet, de tissu sous-épidermique à bandes d'épaississement. L'épiderme et le parenchyme présentent les mêmes caractères que ceux relevés dans ces tissus pour le filet staminodique, et non ceux qui seront indiqués pour l'anthère chez la fleur mâle. J'ajouterai que le parenchyme, dans chacun de ces pseudo-sacs polliniques, est parcouru dans sa longueur par un canal gommeux qui poursuit sa course jusqu'à la base du staminode.

Pistil. — Sur les coupes transversales et radiales de l'inflorescence, déjà sous un faible grossissement, on voit que la ligne foncée que l'on remarque sur chacun des lobes stigmatifères, correspond à un chenal ou sillon qui va en s'approfondissant vers le milieu de la fleur où il communique par un étroit conduit avec la cavité ovarienne (pl. IX, fig. 109). Les berges du chenal sont couvertes d'un fouillis de poils collecteurs, unicellulaires, débordant à l'extérieur du chenal sur les bords.

La structure des lobes stigmatifères est fort analogue à celle

(1) Dans un travail publié en 1880, A. Gravis (**19**, p. 39 du tiré à part) a démontré, après discussion des vues des auteurs sur la nature morphologique de l'anthère, que « l'étamine est un organe de nature variable renfermant des amas de pollen ou sacs polliniques dont le nombre, la forme, les rapports, varient extrêmement, mais dont la genèse est toujours due à une différenciation du tissu profond de l'organe qui les porte ». La présence de sacs polliniques dans les organes appelés ici staminodes par les auteurs, n'est-elle pas de nature à nous faire plutôt considérer ces organes comme des étamines vraies? La réponse à cette question me paraît devoir être affirmative si l'on s'en rapporte à la définition, donnée par Ph. Van Tieghem (**51**), des staminodes. Ceux-ci, en effet, d'après le botaniste français, sont des étamines où *les sacs polliniques ont avorté* et où le filet et le limbe ont subi en même temps une déformation, tantôt pour diminuer, tantôt au contraire pour augmenter de grandeur. La différence dans la structure générale des étamines des fleurs mâles chez *Carludovica plicata* Kl. et des pièces pollinifères de la fleur dite femelle me détermine à conserver le nom de staminodes à ces derniers organes, malgré la présence de sacs polliniques.

des pièces du périanthe. On y trouve aussi en grande quantité des paquets de raphides courtes et des sclérites isolées ou groupées.

Dans la paroi ovarienne, on observe de vastes lacunes gommeuses se réunissant pour former une enveloppe gommeuse, presque continue, qui n'est séparée de la cavité de l'ovaire que par quelques assises de cellules.

Cette cavité est remplie d'un tissu au sein duquel semblent plongés les ovules, puis les graines, qui sont ainsi entourés d'une sorte de pulpe. A la surface des graines se voit un tissu formé de cellules brunes polygonales (pl. IX, fig. 110).

Dans les ovules (pl. VIII, fig. 95), on distingue nettement la primine, la secondine et un grand sac embryonnaire.

CHAPITRE III.

LA FLEUR MALE.

A. *Son organographie.*

Avec chaque fleur femelle de l'inflorescence se montre, en alternance régulière, un groupe dont je discuterai plus loin la valeur morphologique. Il se compose de quatre branches principales affectant chacune la forme d'une pyramide triangulaire, à arêtes mousses, qui va en s'élargissant vers le haut. Au niveau où ces branches se séparent les unes des autres s'aperçoit une petite proéminence centrale s'insinuant entre les branches (pl. X, fig. 113, 113bis, 113ter et 114; pl. IX, fig. 112). Celles-ci sont fortement pressées les unes contre les autres dans leur partie supérieure (1), terminée par une sorte de plateau dont le bord fait saillie vers l'extérieur du groupe. Par suite de leur étroit rapprochement, les quatre plateaux pris ensemble simulent, vus de face, un unique plateau nettement hexagonal.

A la surface des plateaux (pl. X, fig. 113) se voient de nombreuses étamines, dont les filets présentent deux parties distinctes : l'une, supérieure, étroite, aplatie en lame; l'autre, inférieure, beaucoup plus large, en forme de mamelon (pl. IX, fig. 111). Les anthères sont didymes. Dans leur région basilaire, les deux moitiés de l'anthère, réniformes, sont fixées à droite et à gauche d'un connectif assez large et aplati, qu'elles dépassent en haut à partir des deux tiers environ de leur longueur. La déhiscence, longitudinale, s'opère sur les côtés.

Au-dessous de la surface des plateaux et au bord extérieur de ceux-ci, c'est-à-dire dans la région la plus éloignée de la proéminence centrale dont il a été question, se détachent quelques écailles, généralement quatre, assez épaisses, se présentant sous

(1) La figure 113 (pl. X) montre deux branches anthérifères écartées l'une de l'autre. Cet écartement a été provoqué par l'action du rasoir.

forme de dents plus ou moins aiguës à l'œil nu (pl. X, fig. 115). Celles-ci sont glanduleuses.

La section transversale à la base du groupe rencontre la proéminence centrale qui, comprimée entre les branches, possède une forme triangulaire (pl. IX, fig. 112).

L'inflorescence est nettement protogyne. Sa fécondation doit forcément s'opérer par l'intermédiaire d'insectes, attirés, d'une part, par le produit que sécrètent les staminodes, d'autre part, par celui que donnent les écailles glanduleuses.

O. Drude (9) a observé qu'après deux jours les fleurs femelles, chez les *Carludovica* qu'il a étudiés, avaient déjà perdu leur aptitude à la fécondation. Ce court laps de temps écoulé, les longs staminodes pendaient brunis et flétris. Les anthères, elles, ne s'ouvraient qu'après le second ou le troisième jour, afin de ne permettre que la seule fécondation croisée entre fleurs appartenant à des inflorescences différentes.

Le même savant a montré le lien que, d'après lui, l'observation de phénomènes de ce genre peut établir entre certaines familles naturelles. Il a pu observer une alternance analogue chez les Aroïdées, avec cette différence, cependant, d'un développement plus rapide, chez ces dernières plantes, de la fleur mâle dont la floraison n'est suivie parfois qu'après plusieurs mois de celle de la fleur femelle.

B. *Sa structure.*

La forme que présente la section transversale d'ensemble d'une anthère mure, varie avec le niveau où la coupe a été pratiquée. Au-dessus de la limite supérieure du connectif, elle montre deux croissants libres tournant l'un vers l'autre leur convexité (pl. X, fig. 115). Vers la base de l'anthère, les deux croissants sont réunis par le connectif dont la forme, sur la coupe, est celle d'un quadrilatère aplati (pl. X, fig. 116).

Si on examine la section transversale de l'anthère mure, on voit que sa paroi comprend un épiderme composé de longues cellules ovales, aplaties, dont la face externe montre une cuticule

épaisse, couverte d'aspérités (pl. X, fig. 118). Vus de face, ces éléments sont polygonaux, parcourus par des stries à la fois ondulées et crénelées, courant dans le sens de la longueur.

L'assise sous-épidermique est constituée par des cellules très grandes, à parois minces, mais garnies de grosses bandes simples d'épaississement, disposées horizontalement. On remarque, sur une coupe moyenne de l'anthère, que ces éléments à bandes s'étendent sur les deux faces du connectif. A ce niveau, sur le connectif, les bandes d'épaississement peuvent être verticales ou tangentielles, tandis que sur les valves les bandes conservent une direction radiale. Le connectif contient, en outre, un parenchyme traversé suivant sa longueur par un petit cordon libéro-ligneux. Celui-ci comprend quelques trachées et des cellules grillagées, réunies par des fibres primitives (pl. X, fig. 117).

On aperçoit, dans les sacs polliniques, des grains de pollen ovoïdes ou réniformes à surface chagrinée.

Sur la section transversale pratiquée dans la partie supérieure, aplatie, du filet, l'épiderme se montre formé de cellules assez grandes, quadrilatérales ou pentagonales, dont la cloison externe est fortement bombée et pourvue d'une cuticule couverte d'aspérités (pl. X, fig. 119). Vues de face, ces cellules sont très allongées, polygonales et parcourues par des stries ondulées et crénelées, disposées dans le sens de la longueur du filet. Le parenchyme conserve des parois minces. Il présente des cellules cristalligènes à raphides longues. Le cordon libéro-ligneux qui le parcourt reste fort rudimentaire.

Dans la portion inférieure du filet, on remarque, sur la coupe transversale, un accroissement du parenchyme et une diminution dans la longueur des cellules épidermiques. On trouve, dans cette région, des stomates affleurant à la surface interne des autres cellules de l'épiderme (pl. X, fig. 122). La structure du cordon libéro-ligneux offre une particularité intéressante. Il est entouré partiellement (pl. XI, fig. 123) ou complètement (pl. XI, fig. 124) de cellules spéciales, présentant, à l'intérieur, des bandes d'épais-

sissement spiralées, du genre de celles signalées ou étudiées par Meyen (*Physiologie*), Schleiden (*Grundzüge*), Trécul (**46**, p. 153), Duval-Jouve (**12**), L. Mangin (**30**), J. Vesque (**53** et **54**), Heinricher (**22**), etc. Ces éléments, appelés par Duval-Jouve cellules *aérifères*, par J. Vesque *réservoirs vasiformes*, et par Heinricher *Speichertracheiden*, ont pour rôle d'emmagasiner de l'eau à distribuer ensuite aux tissus chlorophylliens. Ils proviennent de cellules parenchymateuses qui, au contact du faisceau, se sont adaptées à une fonction spéciale par la production de spires d'épaississement rendant leurs parois rigides. Ces cellules *vasiformes* se distinguent facilement des trachées du même faisceau. Elles sont beaucoup plus courtes, mais en même temps plus larges. Les figures 120 et 121 (pl. X) mettent en évidence ces différences de dimensions, en représentant en section longitudinale, sous le même grossissement, les unes et les autres. Sur la coupe transversale, ces cellules *vasiformes* sont séparées du groupe des trachées par des fibres primitives à parois minces (pl. XI, fig. 124). Parfois cette coupe, en rencontrant plus ou moins obliquement les cellules *vasiformes*, montre déjà leurs bandes d'épaississement (pl. XI, fig. 124).

Comprimées de plus en plus les unes contre les autres, les portions basales des filets présentent d'abord, sur des coupes transversales, un contour arrondi (pl. XI, fig. 125). Un peu plus bas, elles prennent une forme hexagonale. Plus bas encore, au niveau du plateau, les délimitations des filets disparaissent progressivement (pl. XI, fig. 126), puis la section d'ensemble devient vaguement triangulaire.

A ce niveau, la structure n'offre guère de modifications. On constate cependant que l'épiderme ne montre plus d'aspérités, mais des stomates très nombreux.

En continuant à descendre dans les branches anthérifères, on observe l'insertion des écailles dont il a été question plus haut (voir p. 65). Chaque écaille présente deux régions. La région supérieure est épaisse et aiguë; la région inférieure est plus étroite et, en même temps, aplatie en lame. Dans la première

s'aperçoivent des particularités à signaler. La face externe de l'organe porte un épiderme glanduleux (pl. XI, fig. 129), composé de cellules étroites, très allongées perpendiculairement à la surface et qui, vues de face, se montrent hexagonales. Elles sont remplies d'une substance de couleur jaunâtre, dont l'excrétion paraît pouvoir s'opérer par suite du soulèvement de la cuticule restée assez mince. La cuticule, en effet, se détache facilement sous l'effort du rasoir, et on obtient une image analogue à celle que G. Bonnier (**3**, pl. I, fig. 3) a donnée au sujet d'un épiderme glanduleux, laissant ainsi sortir son contenu, et représentant une coupe longitudinale pratiquée dans un nectaire cotylédonaire chez *Ricinus communis*. A la face interne de l'organe qui nous occupe se trouve un épiderme ordinaire, c'est-à-dire formé de cellules qui ne sont pas allongées perpendiculairement à la surface. Sur la coupe longitudinale radiale, celles-ci se montrent pentagonales, quadrilatérales ou rectangulaires, à cloison externe presque plane, à cuticule peu épaisse. Aucun de ces épidermes ne laisse voir de stomate. Sauf vers les bords et près du sommet, où se montrent quelques cellules à parois minces, tout l'espace compris entre les épidermes est rempli d'une agglomération de petits éléments de forme polygonale, à épaississement spiralé, ressemblant à ceux qui ont été rencontrés autour du cordon libéro-ligneux dans le filet staminal. Cette accumulation de cellules *vasiformes* se montre à l'endroit où s'opère l'étalement en éventail de la portion ligneuse du faisceau qui traverse le milieu de l'organe [1].

Dans la région inférieure de l'écaille, on trouve du parenchyme que parcourt un mince faisceau libéro-ligneux et qu'entourent des épidermes ordinaires.

Au-dessous de l'insertion des écailles, les sections transversales montrent que le nombre des faisceaux libéro-ligneux se réduit de plus en plus (pl. XI, fig. 127), de telle façon que, près

[1] G. Bonnier (**3**) a figuré la coupe longitudinale d'un nectaire cotylédonaire chez *Ricinus communis* (**3**, fig. 3) et d'une étamine transformée en tissu nectarifère chez *Collinsia bicolor* (**3**, fig. 41), où s'aperçoivent aussi des pinceaux de trachées.

de la base, il n'existe plus qu'un seul cordon libéro-ligneux (pl. XI, fig. 128). Après avoir examiné cette série de coupes transversales pratiquées du haut vers le bas dans une branche anthérifère, jetons un coup d'œil sur les sections longitudinales, radiales ou tangentielles. Elles confirment que les faisceaux libéro-ligneux descendant des étamines ainsi que des écailles ou dents périphériques, se réunissent en un seul cordon libéro-ligneux central vers la base de la branche anthérifère.

Valeur morphologique des branches anthérifères ou phalanges.

La présence d'un cordon libéro-ligneux unique dans les organes que nous avons appelés jusqu'ici branches anthérifères, mérite de fixer l'attention, car elle permet, me semble-t-il, par la combinaison de ce caractère avec d'autres, d'étayer une opinion au sujet de la valeur morphologique de pièces florales auxquelles les auteurs n'accordent pas la même signification.

Deux interprétations sont ici en présence.

Le Maout et Decaisne (**29**, p. 621) admettent que la fleur mâle se compose d'étamines groupées en 4 « phalanges », et ils entendent par ce mot les organes qui ont été dénommés branches anthérifères dans les pages qui précèdent du présent travail.

O. Drude (**10**, p. 96), au contraire, voit dans chacune de ces phalanges une fleur mâle, et il base cette idée sur la présence des organes glanduleux de la face externe, qui représentent pour lui une enveloppe florale incomplète.

Pour ce qui concerne la première manière de voir, il convient de constater que ni Le Maout et Decaisne ni d'autres auteurs n'ont produit, que je sache, des arguments à l'appui de leur façon d'envisager la fleur mâle chez *Carludovica*.

L'unicité de la fleur mâle, selon les vues de Le Maout et Decaisne, me paraît cependant facilement légitimable. Il s'agirait uniquement, en l'occurence, d'établir que la fleur mâle chez *Carludovica* se compose, notamment, de quatre étamines ramifiées.

Dans les traités généraux, — je crois devoir le rappeler, — on

distingue deux modes de ramifications staminales, appelés respectivement hétérogène et homogène. Dans le premier, on a affaire à une étamine portant diverses sortes d'appendices; dans le second, à une étamine composée, et chaque branche se compose d'un filet portant une anthère. Parmi les étamines composées, il en est de différentes sortes. En effet, la ramification peut être latérale (étamine composée pennée) ou bien terminale. Les feuilles staminales, dans ces deux cas, ont un pétiole commun. Si toutes les branches partent d'un même plan et atteignent la même longueur, la ramification a lieu en une ombelle; si elles se détachent à des niveaux différents, la ramification simule une grappe, etc.; seulement, chaque feuille staminale nous apparaîtra comme un faisceau d'étamines indépendantes, insérées côte à côte sur un réceptacle commun. Mais, comme l'a fait remarquer Ph. Van Tieghem (**51**), la vraie nature de ces étamines ne peut être mise en évidence que par l'étude de leur développement ou par l'étude de leur structure. Faute de matériaux, la première ne peut guère être entreprise dans nos cultures européennes pour les Cyclanthacées, seule la dernière a été faite. Or, celle-ci nous donne de précieuses indications.

« Quand l'étamine est composée, dit encore Ph. Van Tieghem (**51**), chaque filet secondaire reçoit une branche du faisceau libéro-ligneux primaire. » La réunion des faisceaux des filets, chez *Carludovica,* nous permet donc, sans recourir à l'organogénie, de considérer les quatre branches anthérifères comme des étamines ramifiées. Chacune des quatre branches ou phalanges est une étamine ramifiée, dont les ramifications sont concrescentes jusqu'au niveau du plateau au-dessus duquel les filets se montrent distincts.

La présence, dans la fleur femelle, de quatre staminodes, parcourus eux aussi par un unique cordon libéro-ligneux, me paraît constituer encore un argument de la plus grande importance en faveur de la théorie de l'unicité. Dans les fleurs unisexuées, les staminodes observés représentent dans la fleur femelle des vestiges d'organes mâles. Or, chez les *Carludovica,* il y a quatre staminodes qui doivent représenter, dans la fleur femelle, un nombre égal de phalanges de la fleur mâle.

Pour rejeter la thèse que je cherche à faire prévaloir, il faudrait admettre que la fleur mâle, constituée par une seule des branches anthérifères ou phalanges, serait dénuée de tout vestige d'organe gynécéen. Ne convient-il pas plutôt, au contraire, de regarder comme tel le léger exhaussement de surface en mamelon, dont j'ai signalé la présence, et qui s'insinue au centre du groupe des quatre phalanges?

Enfin, il n'est pas jusqu'à l'objection formulée par O. Drude (10) contre l'unicité qui ne puisse me servir! En effet, l'hypothèse de l'enveloppe florale incomplète me semble aller à l'encontre du but que cet auteur s'était proposé. Si, avec O. Drude, il faut voir dans les organes glanduleux des vestiges du périanthe qui existe dans la fleur femelle, la présence de ces organes, à la seule face externe des quatre phalanges et à un niveau autre que celui des filets staminaux libres, doit encore venir constituer un argument en faveur de l'interprétation donnée, au sujet des branches anthérifères ou phalanges, par Le Maout et Decaisne, en permettant d'établir un parallèle plus complet entre la fleur mâle et la fleur femelle : ce qui présente l'avantage, non contestable, de rattacher les fleurs de *Carludovica* à celles que l'on rencontre chez l'immense majorité des Angiospermes. L'ensemble des écailles de la face externe de chacune des quatre phalanges aurait donc la même valeur morphologique que chacune des pièces du périanthe de la fleur femelle. Même en l'absence d'autres caractères, celui qui nous est fourni par l'insertion des écailles à la périphérie du groupe formé par les quatre pièces florales en discussion, me paraîtrait suffisant pour croire plutôt à l'unicité de la fleur mâle.

Je pense devoir admettre aussi l'existence d'une concrescence entre le périanthe, représenté par quelques écailles, et l'androcée chez la fleur mâle, tout comme on observe une concrescence du périanthe de la fleur femelle avec les vestiges de son androcée représenté par des staminodes. Dans la fleur mâle, on ne trouverait que des vestiges du périanthe, mais il existe des étamines; dans la femelle, on n'aperçoit que des étamines incomplètes, mais on a un périanthe nettement marqué.

Les pièces du périanthe peuvent être découpées en dents ou écailles chez la fleur mâle, alors qu'elles restent entières chez la femelle, sans que l'interprétation que je défends puisse être entamée. Les pièces périanthales peuvent même subir des divisions plus nombreuses et montrer des dents sur plusieurs rangs, sans qu'il faille pour cela rejeter la théorie de l'unicité.

L'existence d'un cordon libéro-ligneux unique à la base de la phalange n'est pas non plus de nature à faire écarter l'idée de concrescence entre le périgone et l'androcée. Ph. Van Tieghem (**51**) dit, en effet, qu'il n'est pas rare de trouver les faisceaux des filets confondus, dans la région inférieure, avec les faisceaux médians ou latéraux des sépales ou des pétales. Et le savant botaniste français cite à l'appui de son assertion l'exemple des Protéacées, des Primulacées, des Rhamnées, des Rosacées, etc.

Enfin, la structure particulière des pièces, qui sont envisagées par tous les auteurs comme périanthales, de la fleur mâle et qui sont pourvues d'un épiderme glanduleux, ne peut être non plus invoquée contre la nature morphologique que je leur attribue, car Poulsen (**36**), d'après G. Bonnier (**3**, p. 99), a décrit un tissu nectarifère vers la face externe des sépales chez plusieurs Malpighiacées, chez *Hibiscus cannabinus*, chez *Tecoma radicans*, dans la fleur femelle chez *Laffa* et chez *Trichosanthes*.

En résumé, la fleur mâle chez *Carludovica plicata* Kl. est tétramère comme la fleur femelle et elle se compose d'un périanthe à divisions ramifiées, que représentent les organes glanduleux, de quatre étamines ramifiées aussi et adhérentes au périanthe et enfin d'un pistil rudimentaire. La figure 113bis est un schéma tracé pour faire ressortir cette interprétation; on reconnaîtra qu'il répond à la coupe que rend fidèlement la figure 113. La figure 113ter est un diagramme construit en s'inspirant des mêmes idées; on y remarquera que les quatre phalanges sont opposées aux quatre pièces ramifiées du périanthe, comme dans la fleur femelle les quatre staminodes sont opposés aux quatre pièces restées entières du périanthe.

RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS.

Organogénie foliaire. — Dans la feuille primordiale, chez *Carludovica plicata* Kl., le limbe se différencie par la production de boursouflures ou renflements en alternance sur ses deux faces, tandis que la gaine reste lisse.

L'incurvation de sa partie médiane donne ensuite au limbe l'apparence d'un capuchon. Les marges de la gaine, par suite de leur croissance, chevauchent l'une sur l'autre. Le bord droit recouvre le gauche dans les plantes dextres. Le contraire s'observe chez les sénestres.

La longueur de la gaine reste longtemps stationnaire. Cette partie de la feuille porte deux oreillettes inégales qui se dessèchent et tombent lorsque la feuille devient adulte.

Dans le limbe s'effectue une déchirure médiane naturelle produisant deux tomes. Les feuilles montrant cette particularité devraient recevoir des dénominations spéciales. Celles-ci seraient formées en ajoutant la désinence *-tomée* aux préfixes *penni-* et *palmi-* qui servent à qualifier le mode de nervation. Le nombre des segments limbaires serait, de même, indiqué par une des expressions *mono-*, *bi-*, *tri-* ou *polytomée*. Le sinus médian ne s'étend d'abord ni jusqu'au sommet, ni jusqu'à la base du limbe.

Pour sa préfoliation, *Carludovica plicata* Kl. appartient au type II établi par A. Naumann pour les Palmiers et le genre *Carludovica*.

Le pétiole se développe en dernier lieu et porte le limbe à une hauteur convenable pour que ce dernier trouve l'espace nécessaire à son déploiement.

Structure de la feuille. — L'histoire de la différenciation histologique de la feuille peut être ramenée à l'étude de quatre stades qui ont été caractérisés.

Stade I. — Le plissement du limbe dérive du développement des boursouflures ou renflements. Il en résulte que l'origine de ce plissement est la même chez *Carludovica plicata* Kl. que celle trouvée par A. Naumann chez les Palmiers ainsi que chez *C. palmata*, *C. rotundifolia* et *C. Moritziana*. On ne peut admettre les vues émises à ce sujet par H. von Mohl, H. Karsten et A. W. Eichler.

Les espaces laissés libres entre les feuilles successives sont remplis d'un feutrage protecteur, dû à la croissance de poils acuminés, pluricellulaires, moniliformes, dont le nombre et la longueur sont proportionnels aux différences des dimensions intérieures de la gaine enveloppante et des dimensions extérieures de la feuille enveloppée.

Stade II. — La structure du limbe varie avec le niveau. Au-dessous du sinus, les faisceaux sont représentés par des cordons procambiaux dans lesquels on ne distingue que quelques éléments ligneux et libériens. Au-dessus de ce sinus, les masses libéro-ligneuses qui résultent de l'union de certains faisceaux, laissent apercevoir des vaisseaux à parois épaissies disposés en éventail sur la coupe transversale.

Le capuchon apical existe toujours ; mais, plus tard, il se dessèche, se scinde longitudinalement en deux, puis disparaît.

La déchirure naturelle et prédéterminée du limbe est prouvée anatomiquement : 1° par l'arrêt de développement du faisceau médian dans la région du sinus, restée mince ; 2° par les réactions cicatricielles qui s'observent au-dessous du sinus normal, dans les feuilles présentant une déchirure accidentelle suivant le prolongement de ce sinus.

Le limbe montre les histogènes découverts par A. Gravis, et dénommés par lui mésophylles externe, moyen et interne.

Stade III. — Dans le mésophylle, on trouve des éléments qui se sont divisés en formant des groupes de petites cellules à section polygonale, qui deviendront plus tard des massifs scléreux.

Des faisceaux libéro-ligneux montrent une lacune antérieure, particularité que présentent certaines Monocotylées aquatiques et de marécages dans divers organes.

On remarque des canaux gommeux schizo-lysigènes.

Stade IV. — La structure de la gaine varie avec le niveau. La différenciation histologique est basipète. La partie supérieure de la gaine ainsi que le pétiole et le limbe offrent les caractères de la feuille adulte, tandis que la partie basilaire de la gaine présente ceux de l'organe à l'état jeune.

Les oreillettes montrent des faisceaux qui, par des anastomoses obliques, finissent par former un réticulum.

L'existence d'une gaine auriculée, chez *Carludovica plicata* Kl., paraît constituer un argument de plus en faveur de l'homologie de la gaine des Monocotylées et des stipules des Dicotylées.

État adulte. — Dans la gaine, le mésophylle est centrique. Le bois, dans les faisceaux, montre une lacune antérieure, et le liber y forme, à la base de l'organe, une bande incurvée de tissu à parois minces. Les canaux gommeux y sont plus nombreux et plus larges que dans les autres parties de la feuille.

Le pétiole est parcouru par des faisceaux, à lacune antérieure, dont le liber n'a plus que quelques éléments à parois minces ; tous les autres sont épaissis. Kny s'est occupé des faisceaux dont le liber possède ce caractère. A en juger par le travail qu'il leur a consacré, on a ici une structure intermédiaire entre celles que présentent, d'une part, les *Ophiopogon*, d'autre part, toutes les autres plantes qu'il a étudiées. Le nombre des canaux gommeux diminue vers le milieu de la longueur du pétiole.

Sur la face externe du limbe, on n'aperçoit pas de stomate. Certaines côtes laissent apercevoir des vestiges des poils qui les recouvraient. Les canaux gommeux ne se rencontrent qu'à la base du limbe dans la côte médiane. Le déploiement de l'organe est dû à une croissance plus grande, dans deux directions de l'espace, des cellules du fond des plis, les unes épidermiques, les autres mésophylliennes.

Dans la préfeuille, qui est une feuille primordiale fortement accrue, on remarque une différenciation histologique peu avancée. Certains faisceaux ont une lacune antérieure. On y rencontre des canaux gommeux.

Tige. — En section transversale, la tige montre deux régions. La périphérique ou corticale, dans l'organe jeune, est limitée extérieurement par un épiderme dont la cuticule présente des stries avec de fines perles. Les premières couches sous-jacentes sont collenchymateuses. Dans les tiges âgées, on constate l'apparition d'un périderme donnant naissance à une couronne de liège. La couche corticale la plus profonde constitue un phlœoterme.

Les faisceaux de la région centrale peuvent être rangés parmi les *Amphivasale Gefässbündeln* de E. Strasburger (faisceaux concentriques) que l'on trouve surtout dans les rhizomes des Monocotylées.

L'apparence histologique générale est, d'ailleurs, celle des rhizomes.

Racine. — Dans l'assise pilifère d'une racine latérale, des cellules à parois épaisses sont entremêlées à d'autres, possédant des parois minces. On n'y trouve que quelques éléments prolongés en poils. La nécessité d'un sol humide pour *Carludovica plicata* Kl. semble indiquée par cette absence presque complète de papilles, ainsi que par la présence de lacunes dans la région profonde du parenchyme cortical.

La coupe moyenne de la racine adulte montre que l'endoderme et le péricycle épaississent leurs parois vis-à-vis des massifs libériens périphériques.

Le faisceau multipolaire doit faire ranger *Carludovica plicata* Kl. parmi les plantes dont la racine est appelée anomale par certains auteurs Il y a dislocation des lames ligneuses, et les massifs libériens sont disposés sur plusieurs rangs. Je n'ai pu constater ni alternance ni opposition des massifs libériens périphériques avec les intérieurs.

Hampe florale et spathes. — La structure varie de la base au sommet du premier entrenœud de la hampe. Dans la partie inférieure de la hampe, l'épiderme montre, en certaines régions, des cellules à cloisons externes relevées et formant des mamelons verruqueux. Dans le voisinage de la première spathe, au contraire, l'épiderme est uniquement composé de cellules à cloison externe plane sans perles cuticulaires. Les massifs scléreux de la partie basale de la hampe sont remplacés par des groupes de petites cellules à parois minces, près du sommet du premier entrenœud. Les faisceaux montrent une tendance centripète d'autant plus accentuée qu'ils sont plus rapprochés de la première spathe. On constate aussi des différences dans leur structure suivant le niveau. Les canaux gommeux sont beaucoup moins nombreux au voisinage du sommet du premier entrenœud.

Les faisceaux des spathes montrent une différenciation peu avancée. Entre deux faisceaux, on trouve un ou deux canaux gommeux.

Fleur femelle. — Les pièces périanthales possèdent, dans leur parenchyme, de nombreuses sclérites courtes, isolées, ou réunies en petits groupes, ainsi que sept cordons libéro-ligneux, dont un médian, plus rapprochés de la surface interne que de l'externe. Le cordon médian est uni à celui du staminode.

Le filet du staminode présente un épiderme glanduleux dont certaines cellules, en fusionnant leur contenu, forment des groupes lenticulaires faisant saillie à la surface. L'organe est parcouru longitudinalement par un cordon libéro-ligneux central et unique. L'anthère montre deux sacs polliniques pouvant contenir du pollen.

La ligne foncée radiante, qui se remarque à l'œil nu sur chacun des lobes du stigmate, représente un chenal en communication avec l'ovaire et dont les berges sont couvertes de poils collecteurs unicellulaires. Dans la paroi ovarienne existent de vastes lacunes gommeuses confluentes.

L'inflorescence est protogyne.

Fleur male. — Entre les quatre phalanges, qui sont quatre etamines ramifiées, se trouve une proéminence centrale qui représente un pistil rudimentaire.

L'épiderme des anthères est composé de cellules ovales, aplaties, dont la cuticule est parcourue par des stries ondulées. L'assise sous-épidermique est formée d'éléments très grands à bandes d'épaississement.

Dans la portion inférieure élargie du filet, on trouve des stomates affleurant à la surface interne des autres cellules épidermiques. Le cordon libéro-ligneux est entouré complètement ou partiellement, suivant le niveau, de cellules spéciales, vasiformes, à bandes d'épaississement spiralées, provenant d'éléments parenchymateux adaptés à une fonction spéciale. Ces cellules sont séparées des trachées par des fibres primitives.

Les écailles ou dents aiguës de la partie externe des branches anthérifères présentent deux régions : l'une inférieure, l'autre supérieure. Dans la première, on aperçoit, à la face interne, un épiderme glanduleux à cellules étroites, allongées perpendiculairement à la surface. Presque tout l'espace compris entre les épidermes, dans cette portion de l'organe, est occupé par une agglomération de cellules du genre de celles rencontrées autour du cordon libéro-ligneux à la base des filets staminaux.

Les étamines, libres à leur partie supérieure, se réunissent en un organe unique, ne possédant plus à sa base qu'un seul cordon libéro-ligneux.

Chez *Carludovica plicata* Kl., il y a alternance d'une fleur mâle avec une fleur femelle. La première se compose de quatre étamines ramifiées dont les ramifications sont concrescentes avec les pièces périanthales.

La diagnose, donnée par la plupart des auteurs (Bentham et Hooker, Baillon, etc.) pour le genre *Carludovica* R. et P. n'est pas applicable, en ce qui concerne la fleur mâle, à *Carludovica plicata* Kl.

ABRÉVIATIONS.

Ass. pil.	Assise pilifère.
C. c.	Cellule cristalligène.
C. g.	Canal gommeux.
C. l.	Cordon libéro-ligneux.
Em.	Embryon.
End.	Endoderme.
Ép. e.	Épiderme externe.
Ép. i.	Épiderme interne.
Et.	Étamine.
G.	Gaine foliaire.
G. scl.	Gaine scléreuse.
L. a.	Lacune antérieure.
Li.	Limbe.
Mé.	Mésophylle.
M. s.	Massif scléreux.
Nuc.	Nucelle.
Or. gl.	Organe glanduleux.
Pér.	Périanthe.
Péric.	Péricycle.
Pét.	Pétiole.
Ph.	Phalange.
Phlt.	Phlœoterme.
Pist.	Pistil.
Plt.	Plateau.
Pol.	Pollen.
Pr.	Primine.
Pr. c.	Proéminence centrale.
Proc.	Procambium.
Sc. e.	Sac embryonnaire.
Sec.	Secondine.
Std.	Staminode.
Stg.	Stigmate.
S. v.	Sommet végétatif.
t^1.	Trachée initiale.
T. c.	Tissu de charnière.

BIBLIOGRAPHIE.

1. Baillon, H., Histoire des plantes. Paris, 1895, t. XIII.

2. Bentham, G., et Hooker, J.-D., Genera plantarum. Londres, 1885, vol. III, pars II.

3. Bonnier, G., Les Nectaires, étude critique, anatomique et physiologique. (*Ann. des sc. nat.* [Botanique], 6e série, t. VIII, 1879.)

4. Bower, F.-O., On the comparative Morphology of the leaf in the vascular Cryptogames and Gymnosperms. (*Phil. Trans.*, 1884.)

5. Briquet, J., Sur les poches schizo-lysigènes des Myoporacées. (*Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*, t. CXXIII, 1896.)

6. de Bary, A., Vergleichende Anatomie der Vegetationsorgane der Phanerogamen und Farne. Leipzig, 1877.

7. de Candolle, A.-P., Organogénie végétale. Paris, 1827.

8. Dippel, Das Mikroskop. 1869.

9. Drude, O., Ueber den Bau und die systematische Stellung der Gattung *Carludovica*. (*Bot. Zeitg.*, 1877.)

10. Idem, Cyclanthaceen (dans Engler und Prantl, *Die natürlichen Pflanzenfamilien*. Leipzig, 5. Lief., pp. 93-96; 9. Lief., pp. 97-101; 1887.)

11. Durand, Th., Index generum phanerogamorum. Bruxelles, 1888.

12. Duval-Jouve, Observations anatomiques et morphologiques sur les *Salicornia* de l'Hérault. (*Bull. Soc. bot. de France*, t. XV, 1868.)

13. Idem, Étude anatomique de quelques Graminées et en particulier des *Agropyrum* de l'Hérault Paris, 1870.

14. Eichler, A.-W., Zur Entwickelungsgeschichte des Blattes Marburg, 1861.

15. Idem, Zur Entwickelungsgeschichte der Palmenblätter. (*Abhandl. d. k. Preuss. Akad. d. Wiss. zu Berlin*, 1885.)

16. Falkenberg, P., Vergleichende Untersuchungen über den Bau der Vegetationsorgane der Monokotyledonen. Stuttgart, 1876.

17. Firtsch, Anatomisch-physiologische Untersuchungen über die Keimpflanze der Dattelpalme. (*Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. zu Wien*, vol. XXXIX, 1886.)

18. Göbel, C., Vergleichende Entwickelungsgeschichte der Pflanzenorgane (dans *Schenk's Handbuch der Botanik*, 3e vol., Breslau, 1884).

19. Gravis, A., Les anomalies florales du Poirier et la nature morphologique de l'anthère. (*Bull. de la Soc. roy. de bot. de Belgique*, t. XIX, 1880.)

20. Idem, Recherches anatomiques sur les organes végétatifs de l'*Urtica dioïca* L. (*Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers*, publiés par l'Acad. roy. de Belgique, in-4°, t. XLVII, 1884.)

21. Haberlandt, G., Physiologische Pflanzenanatomie. II. Aufl. Leipzig, 1896.

22. Heinricher, Ueber einige im Laube dikotyler Pflanzen trockenen Standortes auftretende Einrichtungen, welche muthmaasslich eine ausreichende Wasserversorgung des Blattmesophylls bezwecken. (*Bot. Centralbl.*, t. XIII, 1885.)

23. Hofmeister, Allgemeine Morphologie der Gewächse. Leipzig, 1868.

24. Hooker et Jackson, Index Kewensis. Oxford, 1895.

25. Karsten, H., Die Vegetationsorgane der Palmen. (*Abhandl. d. k. Preuss. Akad. d. Wiss. zu Berlin*, 1847.)

26. Kerner von Marilaun, A., Pflanzenleben. Leipzig und Wien, 1890.

27. Klotzsch, J.-F., Beiträge zu einer Flora der Aequinoctial-Gegenden der neuen Welt. Linnaea, vol. XX, 1847.

28. Kny, L., Ueber einige Abweichungen im Bau des Leitbündels der Monokotyledonen. (Sonderabdruck aus den *Verhandl. des botan. Vereins der Provinz Brandenburg*, 1881.)

29. Le Maout, E., et Decaisne, J., Traité de botanique descriptive et analytique. Paris, 1868.

30. Mangin, L., Sur le développement des cellules spiralées. (*Ann. des sc. nat.* [Botanique], 6e série, t. XIII, 1882.)

31. Mansion, A., Contribution à l'anatomie des Renonculacées. Le genre *Thalictrum*. (*Arch. de l'Inst. bot. de l'Univ. de Liége*, vol. I.)

32. Massart, J., La récapitulation et l'innovation en embryologie végétale. (*Bull. de la Soc. roy. de bot. de Belgique*, 1894.)

33. Micheels, H., Recherches sur les jeunes Palmiers. (*Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers*, publiés par l'Acad. roy. de Belgique, t. LI, 1889.)

34. Nägeli, C., Das Wachsthum des Stammes und der Wurzel bei den Gefässpflanzen und die Anordnung der Gefässsträngen. (*Beiträge zur wissensch. Bot.*, I. Heft, 1858.)

35. Naumann, A., Beiträge zur Entwickelungsgeschichte der Palmenblätter. (*Flora*, 1887.)

36. Poulsen, Om nogle Trikomer ag Nectarier. (*Videnskabe meddelelser fra den natur. For. i Kjöbenh.*, 1875.)

37. Reinhardt, M.-O., Das leitende Gewebe einiger anomal gebauten Monocotylenwürzeln. (*Pringsheim's Jahrb. für wissensch. Bot.*, XVI. Bd., III. Heft, p. 336.)

38. Russow, Betrachtungen über das Leitbündel- und Grundgewebe. 1875.

39. Schacht, H., Lehrbuch der Anatomie und Physiologie der Gewächse. Berlin, 1856.

40. Schimper, A.-F.-W., Die epiphytische Vegetation Amerikas. Iena, 1888.

41. Schwarz, Die Wurzelhaare der Pflanzen. (*Untersuch. aus dem botanisch. Institut zu Tübingen*, I. Bd., II. Heft, 1883.)

42. Schwendener, Das mechanische Princip im anatomischen Bau der Monocotylen. Leipzig, 1874.

43. Idem, Die Schutzscheiden und ihre Verstärkungen. (*Abhandl. d. k. Akad. d. Wiss. zu Berlin*, 1882.)

44. Strasburger, E., Ueber den Bau und die Verrichtungen der Leitungsbahnen in den Pflanzen. Iena, 1891.

45. Trécul, A., Mémoire sur la formation des feuilles. (*Ann des sc. nat.* [Botanique], 5e série, t. XX, 1855.)

46. Idem, Formations spirales dans des cellules que renferment les feuilles de certaines Orchidées. (*Bull. de la Soc. bot. de France*, t. II, 1855.)

47. Tschirch, Angewandte Pflanzenanatomie. Wien und Leipzig, 1889.

48. Van Tieghem, Ph., Recherches sur la structure des Aroïdées. (*Ann. des sc. nat.* [Botanique], 5e série, t. VI, 1866.)

49. Idem, Recherches sur la symétrie de structure des plantes vasculaires. (*Ann. des sc. nat.* [Botanique], 5e série, t. XIII, 1870-1871.)

50. Van Tieghem, Ph., et Douillot, H., Recherches comparatives sur l'origine des membres endogènes dans les plantes vasculaires. Paris, 1889.

51. Van Tieghem, Ph., Traité de botanique. 2e édit. Paris, 1891.

52. Vesque, J., Anatomie de l'écorce. (*Ann. des sc. nat.* [Botanique], 6e série, t. II.)

53. Idem, L'espèce végétale considérée au point de vue de l'anatomie comparée. (*Ann. des sc. nat.* [Botanique], 6e série, t. XIII, 1882.)

54. Idem, Essai d'une monographie anatomique et descriptive de la tribu des Capparées. (*Ann. des sc. nat.* [Botanique], 6e série, t. XIII, 1882.)

55. von Mohl, H., De Palmarum structura (dans Martius, *Historia naturalis palmarum*. Munich, 1823).

56. Idem, Vermischte Schriften. 1845.

57. Westermaier, Untersuchungen über die Bedeutung todter Röhren, etc. (*Sitzungsber. d. k. Akad. der Wiss. zu Berlin*, 1884.)

PLANCHES.

PLANCHE I.

EXPLICATION DE LA PLANCHE I (*).

ORGANOGÉNIE FOLIAIRE.

Fig. 1. — Jeune feuille pendant la différenciation de son limbe et de sa gaine.

Fig. 2. — Stade plus avancé.

Fig. 3. — Chevauchement des marges de la gaine.

Stade I.

Fig. 4. — Coupe d'ensemble de la gaine.

Fig. 5, 6, 7 et 8. — Coupes successives d'ensemble du limbe.

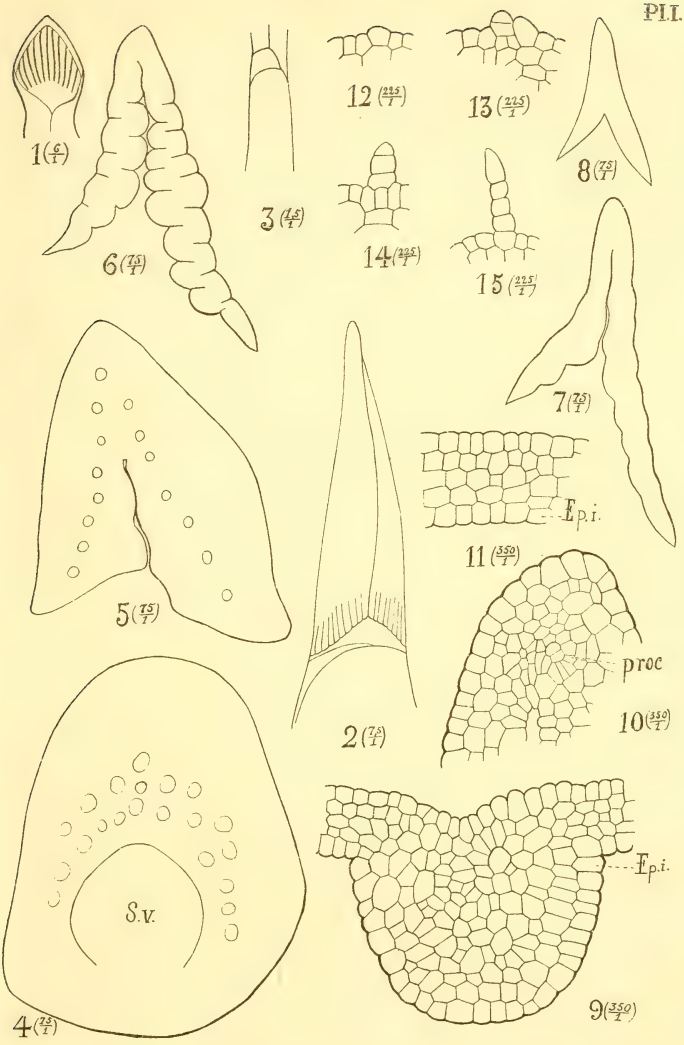
Fig. 9. — Coupe d'une boursouflure limbaire.

Fig. 10. — Coupe rencontrant le plan médian du limbe.

Fig. 11. — Coupe du limbe entre deux boursouflures.

Fig. 12, 13, 14 et 15. — Divers états de développement des poils.

(*) Afin de les distinguer des faisceaux libéro-ligneux, les canaux gommeux ont leur contour figuré par un pointillé. Dans les cellules cristalligènes, on a intercalé les lettres *c. c.*



Dr Henri Micheels, ad nat. del.

CARLUDOVICA PLICATA KL.

Fig. 1 à 3: Organogénie foliaire.

Fig. 4 à 15: Structure de la feuille au stade I.

PLANCHE II.

EXPLICATION DE LA PLANCHE II.

Stade II.

Fig. 16. — Coupe d'ensemble à la limite supérieure de la gaine.

Fig. 17. — Coupe d'ensemble à la base du limbe.

Fig. 18. — Coupe d'ensemble au niveau où s'effectue la déchirure du limbe en deux lomes.

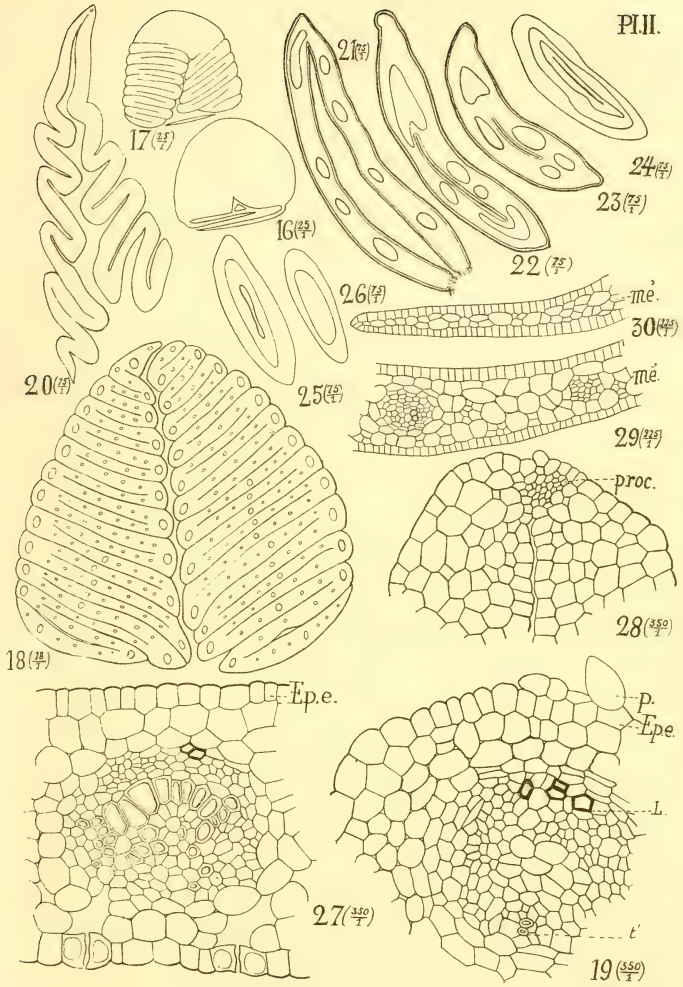
Fig. 19. — Portion de la coupe précédente.

Fig. 20, 21, 22, 23, 24, 25 et 26. — Coupes successives d'ensemble dans la portion terminale du limbe.

Fig. 27. — Portion de la coupe représentée par la figure 21.

Fig. 28. — Cordon procambial médian de la coupe représentée par la figure 20.

Fig. 29 et 30. — Coupes du bord marginal de la jeune gaine.



Dr Henri Micheels, ad nat. del.

CARLUDOVICA PLICATA KL.

Structure de la feuille au stade II.

PLANCHE III.

EXPLICATION DE LA PLANCHE III.

Stade III.

Fig. 31. — Jeune feuille sortant son limbe (Li) de la gaine enveloppante (G).

Fig. 32. — Coupe d'ensemble de la gaine.

Fig. 33 et 34. — Portions de la coupe précédente.

Fig. 35 et 36 — Canaux gommeux en section transversale.

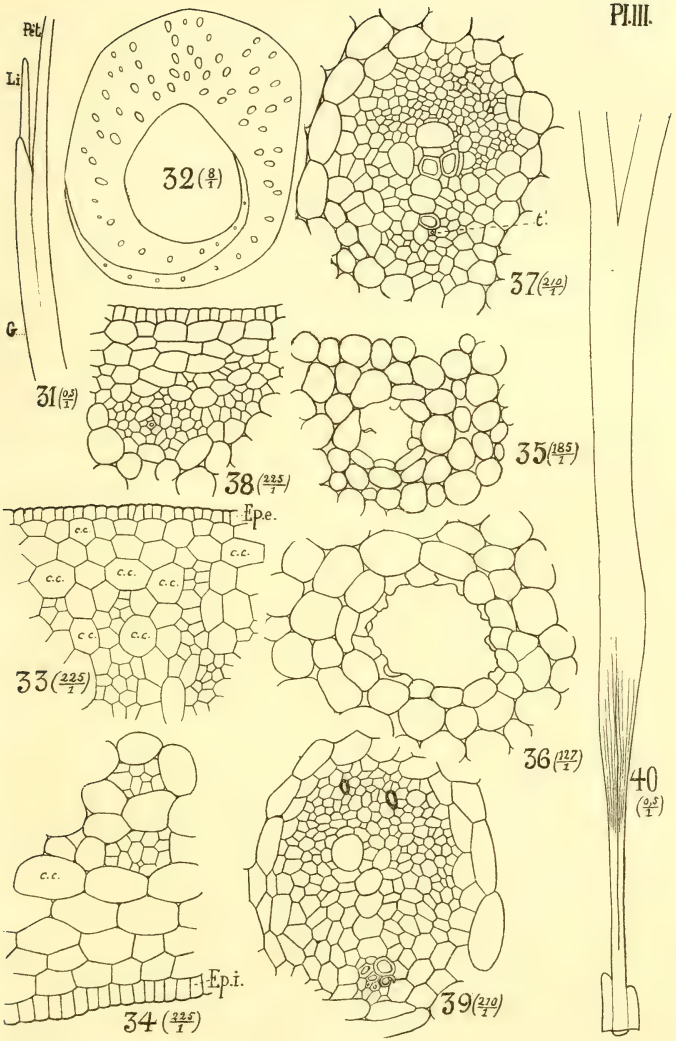
Fig. 37. — Faisceau libéro-ligneux de la gaine.

Fig. 38. — Portion de la coupe du pétiole.

Fig. 39. — Faisceau libéro-ligneux du pétiole.

Stade IV.

Fig. 40. — Feuille pétiolée dont le limbe commence à se déployer.



Dr Henri Micheels, ad nat. del.

CARLUDOVICA PLICATA KL.

Fig. 31 à 39: Structure de la feuille au stade III.

Fig. 40: La feuille au stade IV.

PLANCHE IV.

EXPLICATION DE LA PLANCHE IV.

Stade IV.

Fig. 41. — Faisceau libéro-ligneux à la base de la gaine.

Fig. 42 et 43. — Gaines auriculées étalées.

État adulte.

Fig. 44, 45 et 46. — Coupes dans la gaine.

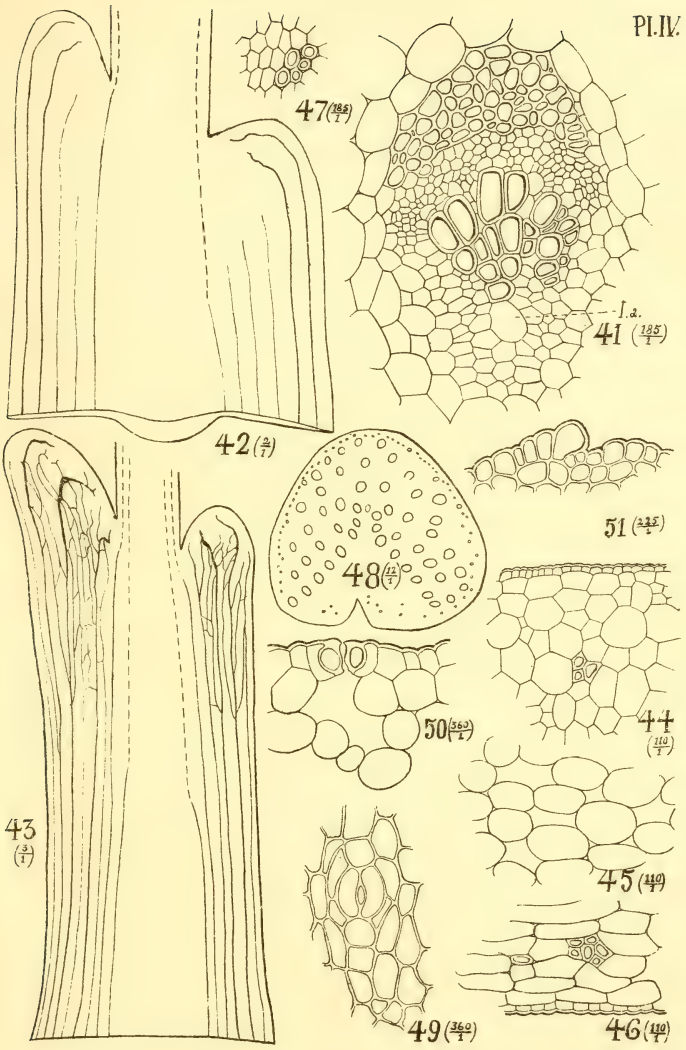
Fig. 47. — Cellules de l'épiderme externe de la gaine, vues de face.

Fig. 48. — Coupe moyenne du pétiole.

Fig. 49. — Stomate vu de face.

Fig. 50. — Stomate en section transversale.

Fig. 51. — Vestiges laissés par les poils sur une côte du limbe adulte.



Dr Henri Micheels, ad nat. del.

CARLUDOVICA PLICATA KL.

Fig. 41 à 43: Structure de la feuille au stade IV.

Fig. 44 à 51: Structure de la feuille adulte.

PLANCHE V.

EXPLICATION DE LA PLANCHE V.

État adulte.

Fig. 52. — Faisceau libéro-ligneux du pétiole.

Fig. 53. — Fragment d'une coupe d'ensemble du limbe.

Fig. 54 et 55. — Coupes dans l'intervalle entre deux côtes.

Fig. 56 et 57. — Coupes dans un pli et dans une côte.

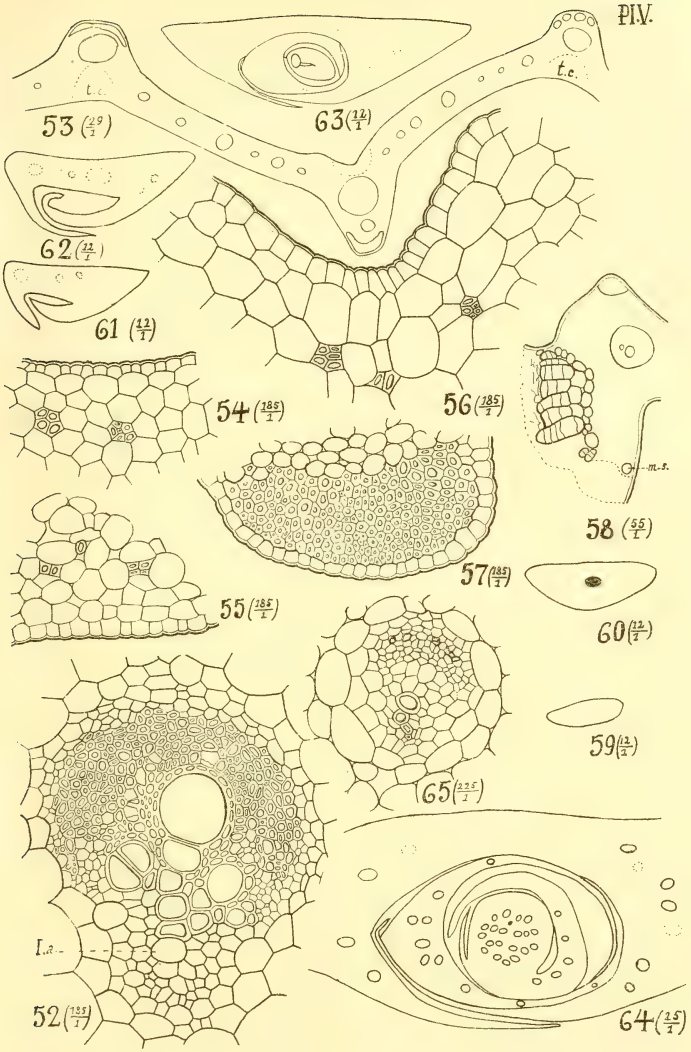
Fig. 58. — Bord d'une déchirure accidentelle du limbe au-dessous du sinus.

Fig. 59, 60, 61, 62 et 63. — Coupes successives d'ensemble dans un bourgeon axillaire protégé par une préfeuille (*).

Fig. 64. — Coupe d'ensemble de ce bourgeon, montrant en même temps les faisceaux libéro-ligneux et les canaux gommeux.

Fig. 65. — Faisceau libéro-ligneux de la préfeuille.

(*) J'ai figuré le contour des canaux gommeux par un pointillé.



Dr Henri Micheels, ad nat. del.

CARLUDOVICA PLICATA KL.

Structure de la feuille

PLANCHE VI.

EXPLICATION DE LA PLANCHE VI.

TIGE.

Fig. 66. — Coupe d'ensemble dans un bourgeon terminal.

Fig. 67. — Tige, encore fort courte, avec son bourgeon terminal.

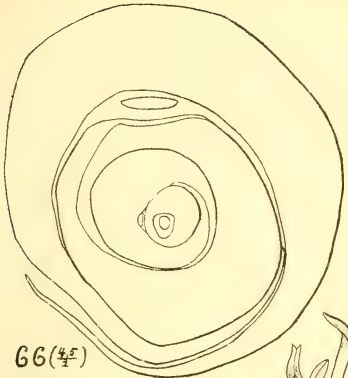
Fig. 68. — Coupe moyenne d'ensemble de cette tige.

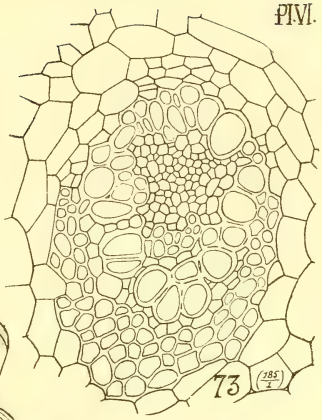
Fig. 69. — Portion de la coupe précédente.

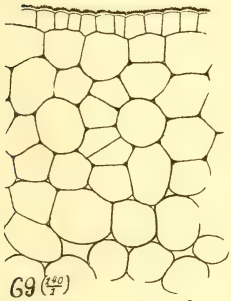
Fig. 70. — Cellules épidermiques vues de face.

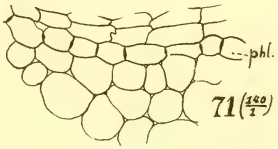
Fig. 71. — Coupe montrant le phlœoterme.

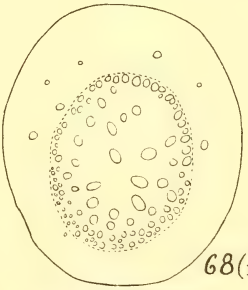
Fig. 72 et 73. — Faisceaux libéro-ligneux.

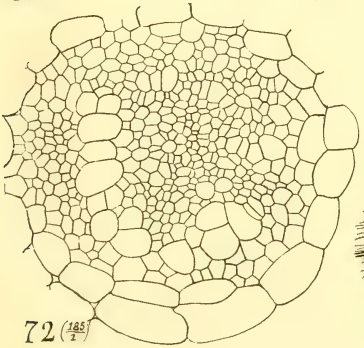


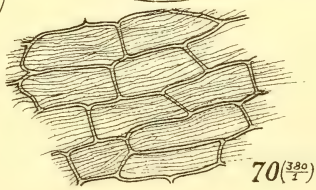












Dr Henri Micheels, ad nat. del.

CARLUDOVICA PLICATA KL.

La tige.

PLANCHE VII.

EXPLICATION DE LA PLANCHE VII.

RACINE.

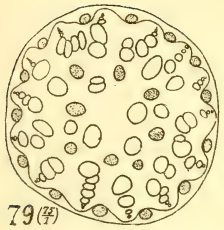
Fig. 74. — Coupe montrant la région corticale à sa périphérie.

Fig. 75. — Coupe d'ensemble.

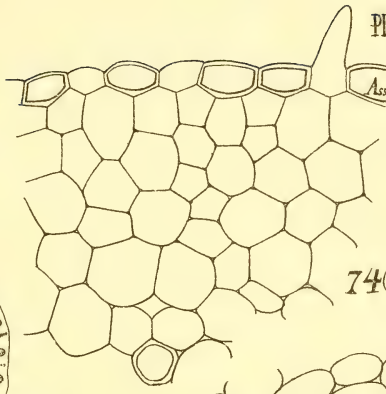
Fig. 76, 77 et 78. — Coupes du cylindre central

Fig 79 et 80. — Coupes d'ensemble du faisceau libéro-ligneux

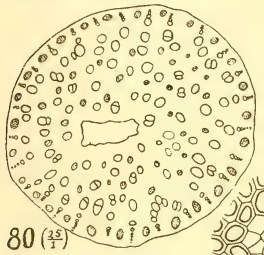
Fig. 81. — Massif libérien intérieur.



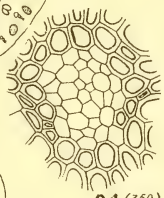
79 $(\frac{25}{1})$



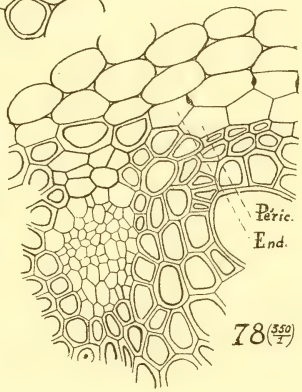
74 $(\frac{350}{1})$



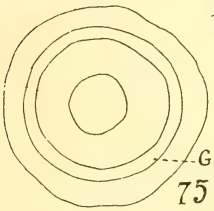
80 $(\frac{25}{1})$



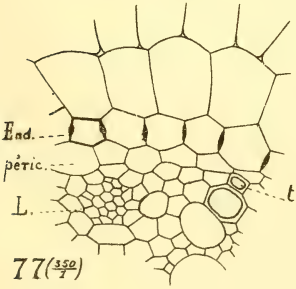
81 $(\frac{350}{1})$



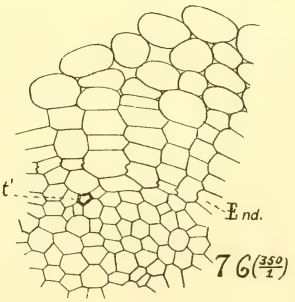
78 $(\frac{350}{1})$



75 $(\frac{8}{1})$



77 $(\frac{350}{1})$



76 $(\frac{350}{1})$

Dr Henri Micheels, ad nat. del.

CARLUDOVICA PLICATA KL.

Structure de la racine.

PLANCHE VIII.

EXPLICATION DE LA PLANCHE VIII.

ORGANES FLORAUX.

Fig. 82. — Hampe florale débarrassée de ses spathes.

Fig 83. — Spathe dressée.

Fig. 84. — Spathe renversée.

Fig. 85 — Coupe d'ensemble de la hampe près de sa base (*).

Fig. 86 — Portion de la coupe précédente.

Fig. 87 — Epiderme de la hampe vu de face.

Fig. 88. — Faisceau libéro-ligneux à la base de la hampe.

Fig. 89 et 90. — Coupes dans la hampe près de la limite supérieure du premier entrenœud.

Fig. 91. — Faisceau libéro-ligneux dans la même région.

Fig. 92. — Faisceau libéro-ligneux d'une spathe.

Fig. 93. — Diagramme de la fleur femelle.

Fig. 94. — La fleur femelle vue de dessus.

Fig. 95 — Ovule.

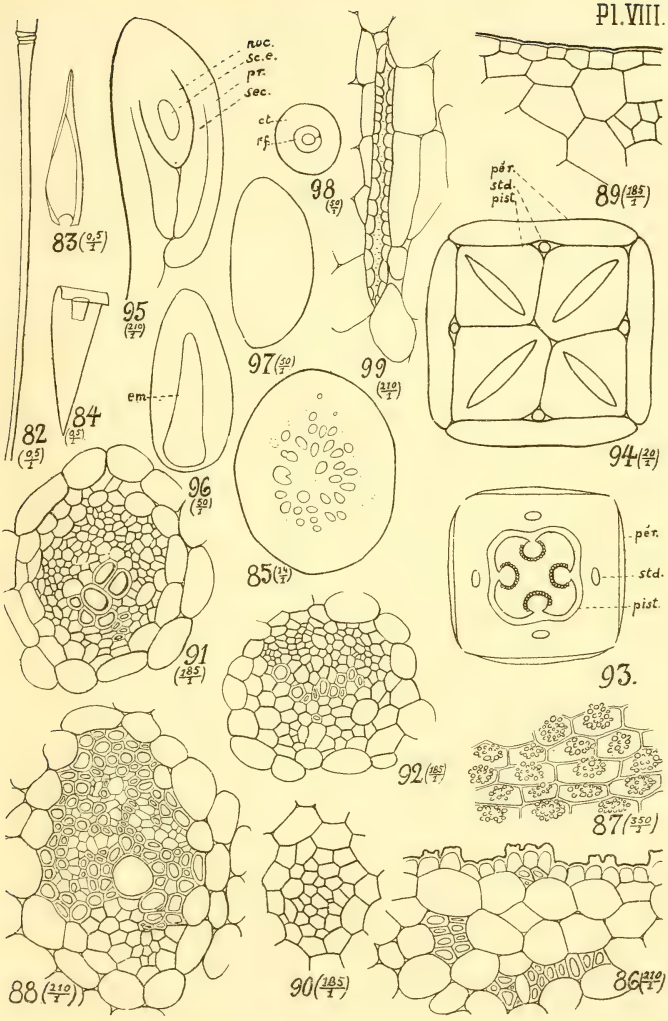
Fig 96. — Coupe longitudinale de la graine.

Fig 97. — Graine.

Fig. 98. — Coupe de la graine.

Fig. 99. — Sclérite.

* J'ai figuré le contour des canaux gommeux par un pointillé.



Dr. Henri Micheels, ad nat. del.

CARLUDOVICA PLICATA KL.

Organes floraux.

PLANCHE IX.

EXPLICATION DE LA PLANCHE IX.

ORGANES FLORAUX.

Fig. 100. — Coupe radiale de la fleur femelle.

Fig 101. — Staminode.

Fig. 102, 103 et 104. — Coupes dans le filet staminodique.

Fig. 105. — Cellules épidermiques des loupes glanduleuses, vues de face.

Fig. 106. — Coupe du filet staminal dans sa partie basilaire élargie.

Fig 107. — Cordon libéro-ligneux du staminode.

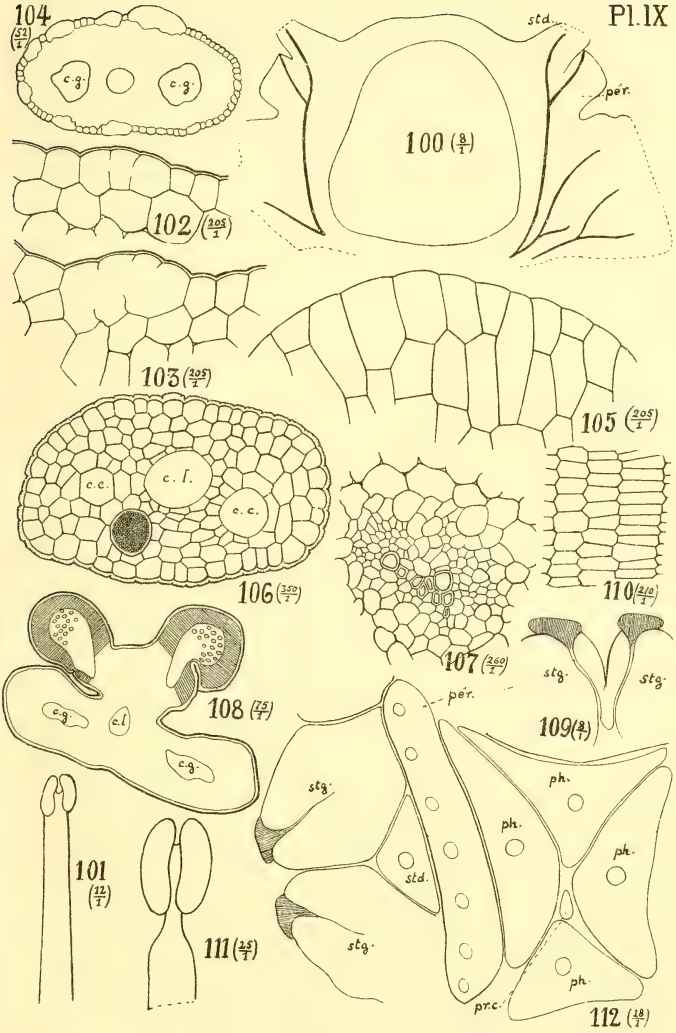
Fig. 108 — Coupe dans l'anthère rudimentaire du staminode.

Fig. 109. — Communications entre la cavité ovarienne et les sillons des lobes stigmatifères.

Fig. 110. — Portion de la graine vue de face.

Fig. 111. — Partie libre d'une étamine.

Fig. 112. — Coupe d'ensemble dans la moitié d'une fleur femelle et dans les branches anthérifères.



Dr Henri Micheels, ad nat. del.

CARLUDOVICA PLICATA KL.

Organes floraux.

PLANCHE X.

EXPLICATION DE LA PLANCHE X.

ORGANES FLORAUX

Fig. 113. — Coupe longitudinale d'ensemble, rencontrant deux branches anthérifères.

Fig. 113bis. — Schéma de la coupe longitudinale d'une fleur mâle.

Fig. 113ter. — Diagramme de la fleur mâle.

Fig. 114 — Coupe longitudinale du mamelon central.

Fig. 115 et 116. — Coupes d'ensemble dans l'anthère.

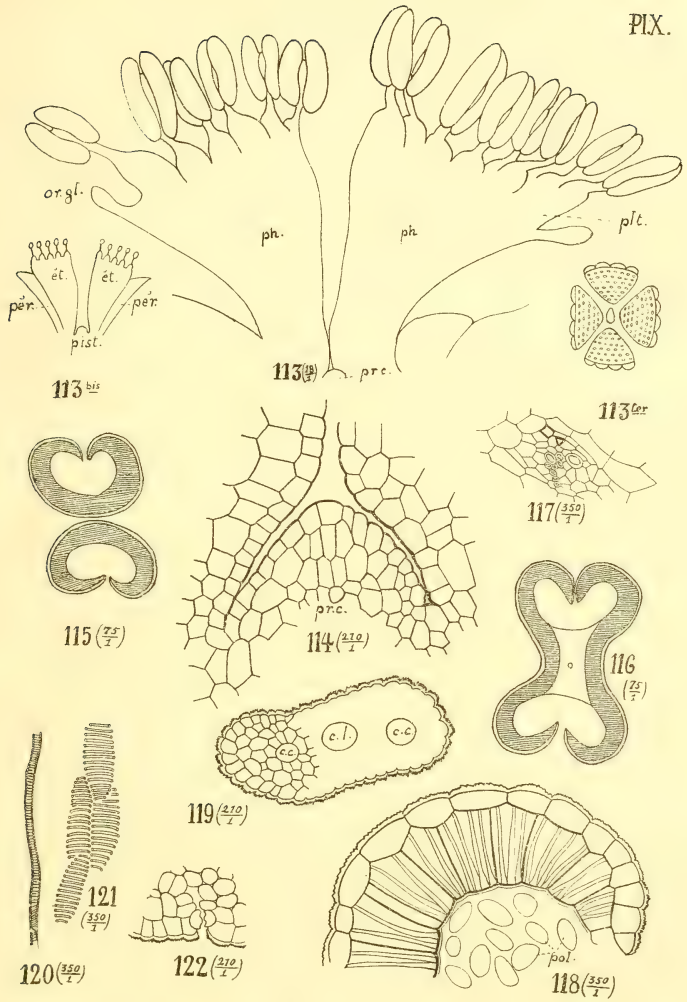
Fig. 117. — Cordon libéro-ligneux du connectif.

Fig. 118. — Coupe dans l'anthère.

Fig. 119 — Coupe dans la partie supérieure du filet staminal.

Fig. 120 et 121. — Trachée et cellules vasiformes parcourant la région inférieure du filet staminal.

Fig. 122. — Section transversale d'un stomate dans la partie basilaire élargie du filet staminal.



Dr Henri Micheels, ad nat. del.

CARLUDOVICA PLICATA KL.

Organes floraux.

PLANCHE XI.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XI.

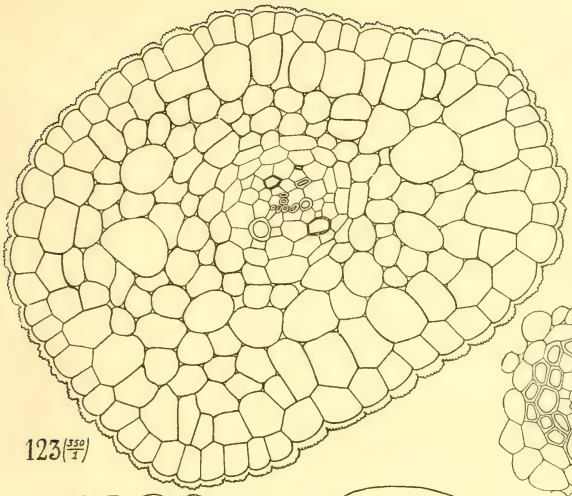
ORGANES FLORAUX.

Fig. 123. — Coupe dans la partie basilaire élargie d'un filet staminal

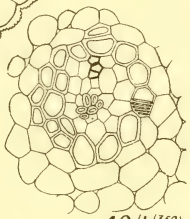
Fig. 124. — Cordon libéro-ligneux isolé de la même région.

Fig. 125, 126, 127 et 128. — Fusion des parties basilaires des filets staminaux en un organe unique.

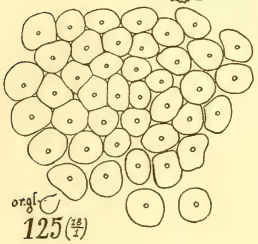
Fig. 129. — Coupe longitudinale d'une écaille de la fleur mâle.



123 (350/1)

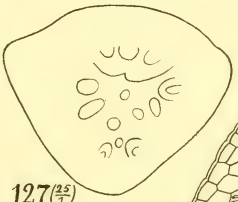


124 (350/1)

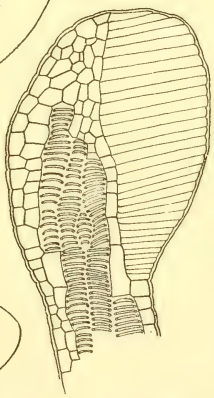


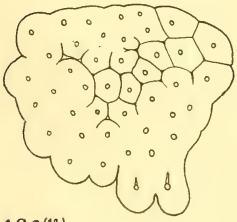
orgl.

125 (18/1)

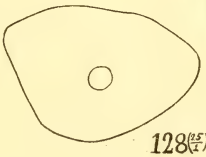


127 (25/1)





126 (18/1)



128 (25/1)

129 (350/1)

Dr Henri Micheels, ad nat. del.

CARLUDOVICA PLICATA KL.

Organes floraux.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION 3

PREMIÈRE PARTIE.

ORGANES VÉGÉTATIFS.

CHAPITRE I. — LA FEUILLE.

A. *Son organogénie :*

I. Résumé bibliographique 7

II. Observations 11

B. *Son organographie* 17

C. *Sa structure* 19

Stade I 20

Stade II 22

Stade III 26

Stade IV 28

Comparaison de la gaine des Monocotylées et des stipules des Dicotylées 30

État adulte 32

CHAPITRE II. — LA TIGE.

A. *Son organographie* 41

B. *Sa structure* 41

CHAPITRE III. — La racine.

Pages.

A. *Son organographie* 46

B. *Sa structure :*

I. Résumé bibliographique 46

II. Observations 49

SECONDE PARTIE.

ORGANES FLORAUX.

CHAPITRE I. — La hampe florale et les spathes.

A. *Leur organographie* 57

B. *Leur structure* 58

CHAPITRE II. — La fleur femelle.

A. *Son organographie* 60

B. *Sa structure* 61

CHAPITRE III. — La fleur male.

A. *Son organographie* 65

B. *Sa structure* 66

Valeur morphologique des branches anthérifères ou phalanges 70

RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS 75

Abréviations 81

Bibliographie 83

Explication des planches 89

LES

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE

RÉSOLUS

PAR LE COMPAS, SANS LA RÈGLE

PAR

G. CESÀRO

LES

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE

RÉSOLUS

PAR LE COMPAS, SANS LA RÈGLE

En traçant les épures relatives à un travail, que je viens d'achever, sur la « Résolution graphique des cristaux », je me suis aperçu que la plupart des erreurs proviennent de l'imperfection des règles employées, ce qui, d'ailleurs, se comprend aisément, la règle étant un instrument empirique qui doit être aussi difficile à construire qu'à définir (*).

J'ai été amené par là à me demander si, théoriquement, il était possible, dans la résolution des problèmes graphiques, de se passer de la règle et de n'employer que le compas (**).

Cette note a pour but de montrer que la réponse à la question posée ci-dessus est affirmative.

Dans ce qui suit, la droite est *donnée* par deux points.

(*) En particulier, l'erreur est sensible lorsqu'il s'agit d'obtenir l'intersection d'une ligne avec une droite donnée par deux points très écartés du point cherché. Je pense qu'il y a avantage, dans ce cas, à remplacer les points qui déterminent la droite par deux points plus rapprochés situés de part et d'autre du point inconnu, puis de joindre ces points à l'aide d'une petite règle dont on a vérifié l'exactitude.

(**) Le compas est un instrument théorique et non empirique comme la règle.

Voici d'abord quatre problèmes dont la solution est immédiate :

a) Mener par un point la parallèle à une droite donnée.

b) Chercher le symétrique d'un point par rapport à une droite donnée.

c) Étant donné deux points, A, B, construire une suite de points de la droite AB.

d) Chercher les points d'intersection d'une circonférence, de centre C et de rayon *r*, avec une droite *ne passant pas* par C.

Soit C′ le symétrique de C par rapport à la droite; la circonférence décrite de C′ comme centre, avec *r* comme rayon, coupera la circonférence donnée aux points demandés.

Problème I.

Étant donné deux points, A *et* B, *chercher le point* A′ *symétrique de* A *par rapport à* B.

Dans la circonférence décrite de B comme centre avec AB comme rayon, inscrivons l'hexagone régulier ayant un sommet en A; nous obtiendrons ainsi le point A′ diamétralement opposé à A (*).

Observation. — Ce procédé permet, étant donné *a*, de construire $2a$, $3a$, $4a$... et $a\sqrt{3}$.

Problème II.

Par un point donné sur une droite lui mener la perpendiculaire.

(*) Voici une autre solution : Traçons une droite A_1B_1 égale et parallèle à AB; de B et B_1 comme centres traçons des arcs de cercle ayant respectivement pour rayon AB et A_1B; leur intersection donnera A′.

Soit à mener (fig. 1) du point B la perpendiculaire à AB. Construisons A′ symétrique de A par rapport à B; de A et A′

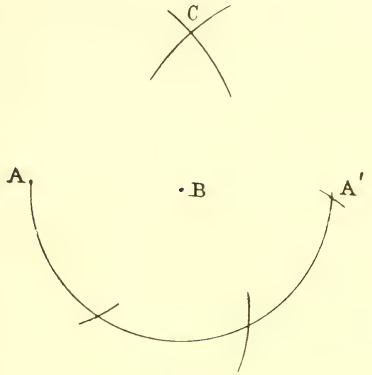


Fig. 1.

comme centres décrivons des arcs ayant même rayon; leur point d'intersection C appartiendra à la perpendiculaire demandée.

Observation. — En prenant AB $= b$ et CA $=$ CA′ $= a$, la construction précédente permet d'obtenir $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Problème III.

Étant donné a *et* b, *construire* $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Supposons $a > b$. On a

$$\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = (2a)^2 - \left(\sqrt{3a^2 - b^2}\right)^2 ;$$

le problème se trouve ainsi ramené à la construction de deux expressions de la forme $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Soit (fig. 2) AB $= a$. Dans le cercle décrit de B comme centre avec a comme rayon, nous avons AC $= 2a$, CE $= a\sqrt{3}$. Prenons, dans une direction quelconque, CD $= b$ et construisons, d'après le problème précédent, le triangle rectangle CDH ayant pour côté b et pour hypoténuse $a\sqrt{3}$; on aura DH $= \sqrt{3a^2 - b^2}$.

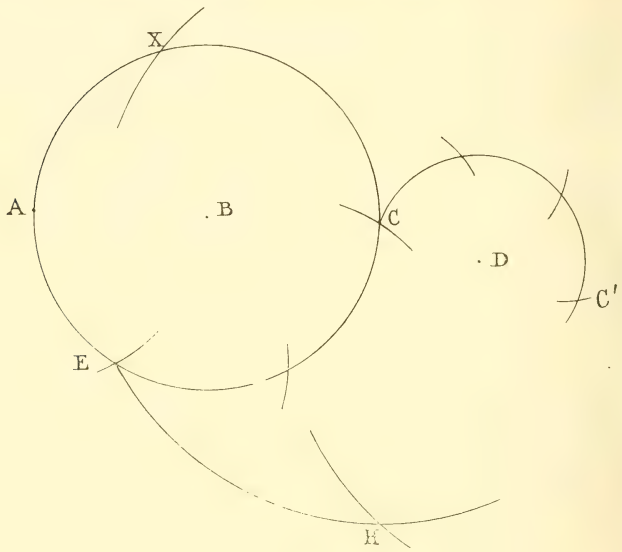


Fig. 2.

Décrivons ensuite un arc de centre C et de rayon DH, qui coupe en X la circonférence AEC; dans le triangle rectangle AXC l'hypoténuse est $2a$ et un côté a pour longueur $\sqrt{3a^2 - b^2}$; donc

$$AX = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Problème IV.

Étant donné a *et* b, *construire* a + b *et* a — b.

Considérons (fig. 3) un triangle dans lequel la hauteur déter-

mine sur la base des segments a et b; si le côté adjacent à b est $a\sqrt{3}$, l'autre côté sera $\sqrt{4a^2 - b^2}$.

Après avoir construit le triangle rectangle ABE, d'après le problème II, il suffira donc de décrire des points B et E comme centres des arcs ayant respectivement pour rayon b et $a\sqrt{3}$, pour obtenir le point Y sur le prolongement de AB, et par conséquent $a + b$ (*).

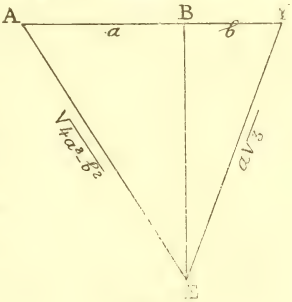


Fig. 3.

Soit (fig. 4) AB $= a$, C le symétrique de A par rapport à B, CD $= b$ et, par conséquent, AD $= \sqrt{4a^2 - b^2}$.

Deux arcs de cercle décrits des points A et C comme centres avec le rayon AD donneront

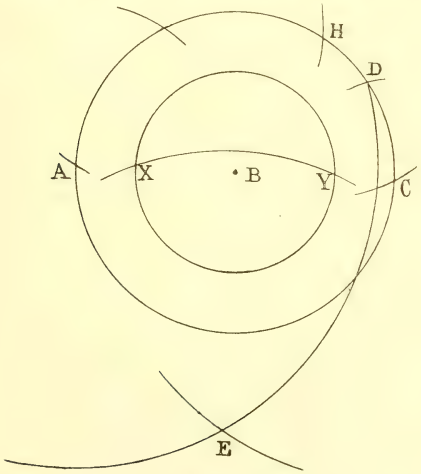


Fig. 4.

(*) Ces deux arcs se coupent en un second point qui donne $a - b$.

le sommet E du triangle rectangle ABE. Enfin, les arcs décrits, l'un avec le rayon $AH = a\sqrt{3}$ du centre E, l'autre avec le rayon b du centre B, donneront les points X et Y ; on a alors

$$AY = a + b \quad \text{et} \quad AX = a - b.$$

Corollaire. — *Chercher l'intersection d'un cercle avec une droite passant par son centre.*

Problème V.

Construire le point milieu d'une droite.

Première solution. — On s'appuye sur la propriété suivante (fig. 5) :

« Si, dans un trapèze isoscèle, une base et les diagonales valent $2a$ et les côtés $a\sqrt{3}$, l'autre base a pour longueur $\frac{a}{2}$. »

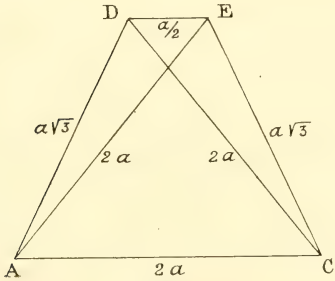


Fig. 5.

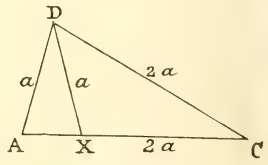


Fig. 7.

Soit (fig. 6) $AB = a$ la droite à diviser en deux parties égales; AC est une des bases du trapèze; le sommet E s'obtient en décrivant de C un arc avec $CH = a\sqrt{3}$ comme rayon, et de A un arc avec AC comme rayon ; l'autre sommet D s'obtient de même. Pour porter la distance $DE = \frac{a}{2}$ sur AB, on décrira, par exemple, de B un arc de rayon DE et de E un arc avec un rayon DA; on obtient ainsi le point X milieu de AB.

Seconde solution. — Si l'on considère (fig. 7) un triangle

isoscèle de base a et de côté $2a$ et que du sommet D avec a comme rayon on décrive un arc coupant AC en X, le triangle ADX, semblable au premier, donnera

$$AX = \frac{a}{2} \text{ (*)}.$$

Soit (fig. 8) $AB = a$ la droite à diviser en deux parties égales, $AC = 2a$, D le point obtenu en faisant $AD = a$, $CD = 2a$, et soit D′ le symétrique de D par rapport à AB; en décrivant de D et D′ des arcs de rayon a, on obtiendra le point X demandé.

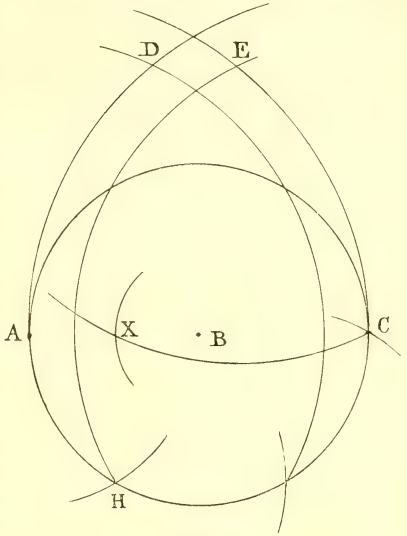


Fig. 6.

Corollaire. — *Chercher le pied de la perpendiculaire menée à une droite par un point extérieur* A.

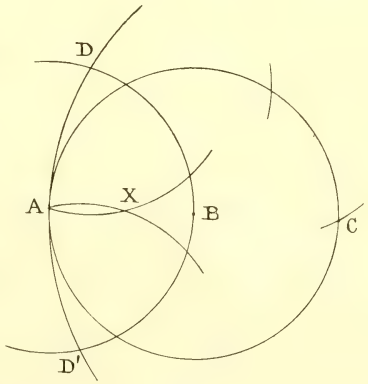


Fig. 8

(*) Je ne suis parvenu à cette solution, qui cependant paraît intuitive, qu'en transformant, pour la rendre pratique, la solution que voici :

« Si l'on considère un triangle isoscèle de base a et de côté $2a$, la droite qui joint les points milieu des côtés vaut $\frac{a}{2}$; or, ces milieux sont connus, vu que a est donné. » Seulement chaque milieu se trouve mal déterminé par le contact de deux circonférences tangentes.

On construit A′ symétrique de A par rapport à la droite, puis on détermine le point milieu de AA′.

Problème VI.

Chercher le point d'intersection de deux droites.

Soit à chercher le point d'intersection des droites AB, CD

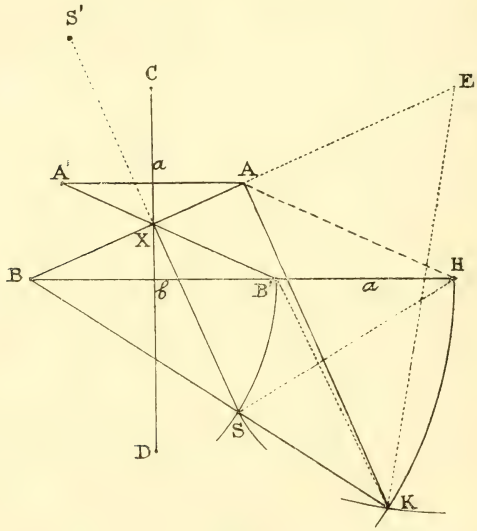


Fig. 9.

(fig. 9). Je remplace la seconde droite par A′B′ symétrique de AB par rapport à CD. Si l'on pose $AA' = a$, $BB' = b$, on a

$$\frac{AX}{BX} = \frac{a}{b},$$

c'est-à-dire que le problème revient à partager la droite AB en

segments proportionnels à a et b (*). Pour porter a à la suite de b sur la droite BB', décrivons de A un arc de rayon A'B' et de B' un arc de rayon a; on obtient ainsi le point H, tel que $BH = a + b$ (**). Construisons un triangle rectangle ABK ayant AB comme côté et $a + b$ comme hypoténuse (Probl. II). Prenons sur BK une longueur $BS = b$; à cet effet, il suffira de décrire un arc de H comme centre avec un rayon B'K et de B un arc de rayon b. Si l'on traçait SX, cette droite, évidemment parallèle à AK, serait normale à AB; donc, le point inconnu X est le pied de la perpendiculaire menée du point connu S à la droite AB, ou, si S' est le symétrique de S par rapport à AB, X est le milieu de SS'.

Observation.

Il est facile de voir que tous les autres problèmes peuvent se ramener à ceux qui précèdent.

(*) La construction ordinaire ne peut être employée parce qu'elle détermine le point inconnu par l'intersection de deux droites. Le corollaire du problème V nous permet de *chercher le point d'intersection de deux droites perpendiculaires entre elles*, et c'est le remplacement de deux droites quelconques par deux droites perpendiculaires qui est exécuté par la construction qui va suivre.

(**) Chaque fois que les longueurs à ajouter sont *données* sur des droites parallèles, on pourra employer cette construction simple; autrement, il faudra se reporter au problème IV.

3 2044 106 293 343