P/ Sci A

Akademie der Wissenschaften in Göttingen

(4)

Nachrichten

von der

(Königl.) Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

Aus dem Jahre 1889.

Nro. 1—21.

Göttingen,
Dieterichsche Verlags-Buchhandlung.
1889.

AS
182
G34
1889

Man bittet die Verzeichnisse der Accessionen zugleich als Empfangsanzeigen für die der Königl. Societät übersandten Werke betrachten zu wollen.

13 III
11/4/91
84 89
60

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und

der Georg-Augusts-Universität

aus dem Jahre 1889.

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

16. Januar. **№ 1.** 1889.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Weitere Untersuchungen über die Isomerie der Benzildioxime.

Von

Karl Auwers und **Victor Meyer.**

Einleitung.

Vor einiger Zeit [1]) theilten wir eine Reihe von Versuchen über die beiden isomeren Dioxime des Benzils mit, aus denen wir den Schluß zogen, daß die genannten beiden Körper die nämliche Constitution besitzen und nur durch die Art ihrer Configuration unterschieden sind, was wir durch die Symbole:

$$
\begin{array}{ccc}
\text{I.} & \qquad & \text{II.} \\
\begin{array}{l} C_6H_5 - C = N - OH \\ \qquad\quad | \\ C_6H_5 - C = N - OH \end{array} & \qquad & \begin{array}{l} C_6H_5 - C = N - OH \\ \qquad\qquad | \\ HO - N = C - C_6H_5 \end{array} \\
(\alpha\text{-Dioxim}) & \qquad & (\beta\text{-Dioxim})
\end{array}
$$

ausdrückten. Diese Formeln wurden aufgestellt, indem wir die van t' Hoff'schen Anschauungen durch die Annahme modificirten, daß die freie Rotation zweier Kohlenstoffatome um die Axe der verbindenden Valenz nicht ausschließlich durch den Eintritt

1) Nachrichten der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, 29. März 1888.

doppelter oder dreifacher Bindung zwischen denselben verhindert werde, sondern daß auch bei einfach gebundenen Kohlenstoffatomen unter gewissen Umständen diese freie Rotation aufgehoben, und so das Bestehen stereochemisch isomerer Körper ermöglicht werden kann.

Seit dem Erscheinen unserer Abhandlung hat sich eine erhebliche Anzahl von Fachgenossen — sowohl öffentliche wie in privaten Mittheilungen — über die von uns angeregte Frage geäußert. Zustimmung ist uns von verschiedenen Seiten zu Theil geworden, aber auch an Opposition hat es nicht gefehlt, die sich freilich weniger in wissenschaftlich begründetem Widerspruche als in einem gewissen zähen Widerstreben, das gewonnene Neue anzuerkennen, äußerte. Bei der Natur des in unserer Untersuchung behandelten Problems hat uns das nicht überrascht; wohl aber gewährt es uns einige Genugthuung, daß selbst diejenigen unserer Gegner, welche sic hunserer Anschauung gegenüber völlig ablehnend verhalten — A. Michael[1]) und R. Anschütz[2]) — keine Gründe gegen unsere Darlegungen ins Feld zu führen vermochten, die wir nicht schon selbst in eingehender Weise in unserer ersten Abhandlung discutirt und mit Argumenten widerlegt hatten, gegen welche auch jetzt unsere Angreifer Einwendungen von irgend welchem Gewichte nicht haben vorbringen können. —

Ehe wir zu der Beschreibung der seither von uns angestellten Versuche übergehen, mögen uns einige Bemerkungen allgemeiner Natur gestattet sein. Im Begriffe, einen erheblichen Theil unserer Arbeitskraft noch für längere Zeit dem Studium stereochemischer Fragen zu widmen, fühlen wir das Bedürfniß, uns über das Maaß der Berechtigung, welches die neue Richtung im gegenwärtigen Zeitpunkte beanspruchen darf, auszusprechen.

Im Großen und Ganzen theilen wir die Auffassung, welche Lothar Meyer[3]) kürzlich über diesen Gegenstand zum Ausdruck gebracht hat, ohne Demselben jedoch völlig beizupflichten. Er erkennt die Berechtigung der neuen Forschungsrichtung an — wie es für einen objectiven Kritiker angesichts der Existenz der isomeren Tolandichloride und -bromide nicht anders möglich ist; aber er warnt zugleich vor Ueberschätzung der stereochemischen Hypothesen, zumal vor dem frühzeitigen Hineinziehen noch nicht urtheilsfähiger Anfänger in die Discussion derartiger Fragen; und

1) Journ. f. prakt. Chemie 38, 35.
2) Ann. der Chem. und Pharm. 247, 118.
3) Ann. der Chem. und Pharm. 247, 254.

er drückt die Befürchtung aus, daß der neuen Richtung zur Zeit ein zu großer Werth beigelegt werde.

Was den letzten Punct betrifft, so vermögen wir die gehegte Besorgniß nicht zu theilen. Die Chemiker stehen seit vielen Jahren so unverrückbar fest auf dem bequemen Boden der Structurlehre, daß eine sehr bedeutende Zahl von Thatsachen, die durch diese nicht erklärt wird, lange fast ganz unbeachtet liegen geblieben ist. Was Wunder, daß nun, nachdem durch die Arbeiten von v. Baeyer, von Wislicenus und von uns die van t'Hoff'schen Ideen der organisch-chemischen Forschung in erhöhtem Maaße nutzbar gemacht worden sind, man sich des lange vernachlässigten Gebiets mit doppeltem Eifer bemächtigt? Wenn dabei hie und da des Guten wirklich zu viel geschehen sollte, so möge man bedenken, daß ohne ein gut Theil Enthusiasmus eine neue Bewegung nicht in Fluß gebracht wird, und daß die Zeit rasch genug dasjenige, was etwa in unberechtigter Weise in das neue Arbeitsgebiet hineingezogen worden ist, wieder ausscheiden wird. — Viel mehr als ein »zuviel« scheint uns hier das Umgekehrte zu gelten. Daß, bei der enormen Zahl junger Kräfte, welche — nach Thematen begierig — das Gebiet der organischen Chemie bearbeiten, man sich bisher gleichsam grundsätzlich von Allem abwandte, das nicht durch die üblichen vier Valenzstriche bequem auf dem Papier zum Ausdruck gebracht werden konnte, das spricht ohne Frage für die Vorzüglichkeit des Fundaments, auf welchem man baute; aber es zeigt zugleich, daß das Gefühl der Sicherheit dieser Grundlage bei dem Gros der chemischen Forscher, trotz aller äußerlichen Betriebsamkeit, eine gewisse Trägheit im Weiterdenken hervorgerufen hat, welche veranlaßt, sich ängstlich an den sicheren Boden zu klammern und vor jedem Schritte in unbekanntes Nachbarland zurückzuschrecken. — Wir sind gewiß weit davon entfernt, R. Anschütz einen Vorwurf daraus zu machen, daß er den hoffnungslosen Kampf, die Fumar- und Maleïnsäure dem Bereiche der älteren Structurtheorie zu erhalten, unerschütterten Muthes durchkämpft. Hier, wo bivalente Sauerstoffatome im Spiele sind, ist ja durch die Annahme einer verschiedenartigen Verkettung derselben, die Möglichkeit der Aufstellung rettender Structurformeln — mögen sie auch der inneren Wahrscheinlichkeit entbehren — wenigstens auf dem Papiere noch vorhanden. Aber es giebt doch noch einfachere Fälle, bei denen es sich nur um einwerthige Gruppen handelt, wie die zuvor erwähnte Isomerie der Tolandichloride und -bromide u. a. m. Wenn trotz der Existenz dieser Verbindungen

1*

— die doch in unabweisbarer Art an unserm Causalitätsbedürfniß rütteln und für jeden vorurtheilslosen Denker eine Erweiterung unserer Theorien nothwendig machen — wenn trotzdem viele Chemiker diese Erweiterung verschmähen und es vorziehen, sich der entstehenden Schwierigkeit nach der altbewährten Methode des Vogel Strauß zu entziehen, dann ist es, so glauben wir, noch nicht an der Zeit, das von Lothar Meyer ausgesprochene »zu viel« den Chemikern zuzurufen. —

Durchaus beachtenswerth erscheint uns indessen sein Mahnruf, die des gereiften Urtheils noch entbehrende Jugend nicht auf unfertige Theorien schwören zu lassen. Aber sollte dergleichen wirklich von berufenen Lehrern geschehen? Wir möchten es kaum für glaublich halten. Der Eine von uns, welcher in seinen Vorlesungen über organische Chemie fast täglich Gelegenheit hätte, auf die neue Lehre einzugehen, hat derselben, wiewohl er unausgesetzt mit deren Ausbildung beschäftigt ist, in seinen Vorlesungen kaum eine Stunde im Semester eingeräumt; und er weiß, daß auch von den jüngeren Docenten seiner Umgebung, für welche in ihren Specialvorlesungen die Verlockung zu eingehenderen stereochemischen Betrachtungen noch näher liegt, in ähnlicher Weise vorgegangen wird. Daß man den vorgerückteren Schülern in Colloquien und theoretischen Vorlesungen Gelegenheit giebt, auch das Allerneueste in kritischer Beleuchtung kennen zu lernen, das andererseits erscheint uns als nothwendige Pflicht, der sich der Lehrer an einer Hochschule niemals wird entziehen dürfen. —

Noch eine Bemerkung möge hier Platz finden, zu der wir durch die Aeußerung veranlaßt werden, welche sich Michael (l. c. S. 35) über unsere Arbeit erlaubt hat.

Niemand erkennt freudiger als wir das hohe Verdienst an, welches sich Johannes Wislicenus um die Erweiterung unseres theoretischen Gesichtskreises durch seine bekannte Abhandlung über die räumliche Lagerung der Atome erworben hat. In eindringlichster Weise hat er die Fachgenossen auf ganz unbeachtet gebliebenen Goldgruben, welche schon durch die 10 Jahre alte Arbeit van t' Hoff's freigelegt waren, aufmerksam gemacht. Der mächtige Impuls, welcher von dieser Abhandlung ausging, kann von keinem objectiven Beobachter übersehen werden. Trotzdem ist es ein Verkennen der wahren Sachlage, wenn man die von verschiedenen Seiten völlig selbständig in Angriff genommenen stereochemischen Arbeiten mit denjenigen von Wislicenus identificirt oder sie, wie es Michael mit Bezug auf unsere Arbeit gethan hat, als eine Frucht derselben bezeichnet. Die

Publicationen des Einen von uns zeigen im Gegentheil, daß derselbe schon vor dem Erscheinen der Wislicenus'schen Abhandlung aufs eingehendste mit stereochemischen Arbeiten beschäftigt war[1]); und da zudem der wesentliche Inhalt unserer ersten Abhandlung in der Bekämpfung eines von van t' Hoff aufgestellten, von Wislicenus warm vertheidigten Satzes beruht, so müssen wir in der That Verwahrung dagegen einlegen, daß unsere Bestrebungen mit denen von Wislicenus identificirt werden, wenn wir es auch als hohe Ehre und Freude empfinden, unsere Arbeiten mit denen dieses ausgezeichneten Forschers zusammengestellt zu sehen.

Wir geben diese Erklärung ab, da wir nicht den Schein erwecken möchten, als ob wir den von Wislicenus gegebenen Einzeldarlegungen rückhaltlos zustimmten. Es ist das nicht der Fall; und wenn wir auch im Großen und Ganzen der von ihm befolgten Forschungsmethode vollen Beifall zollen, so müssen wir doch hervorheben, daß einzelne der von ihm gegebenen Erklärungen uns nicht zu befriedigen vermögen. Schweres Bedenken hat uns z. B. von Anfang an die Wislicenus'sche Erklärung für das gleichzeitige Entstehen der beiden Tolandibromide eingeflößt. Die Configuration dieser Körper ist ohne Frage von ihm richtig erkannt worden; allein die gleichzeitige Entstehung derselben durch die Annahme zu erklären, daß ein Theil des Dibromids sich mit Brom zu Tetrabromid vereinige, und daß letzteres 2 Bromatome an unangegriffenes Tolan abgebe, das erscheint uns, wie Michael, unzulässig, da experimentell festgestellt ist, daß das Tolandibromid sich in Wirklichkeit nicht weiter mit Brom zu verbinden vermag. Wenn uns aber auch in diesem besonderen Falle eine genügende Erklärung der Thatsachen noch zu fehlen scheint, so vermögen wir doch nicht, darin einen Vorwurf gegen das gesammte Lehrgebäude zu erkennen. Jedermann blickt heute mit Befriedigung auf die Erklärung, welche Kekulé für die Existenz der isomeren Ortho-, Meta- und Paraderivate des Toluols gegeben hat, ohne daß bis jetzt der Grund erkannt worden wäre, aus welchem sich gerade die Ortho- und Paraverbindungen, nicht aber die Metaderivate bei der directen Substitution des Toluols bilden. Wer aus Gründen, wie der oben erwähnte, die stereochemische Theorie verwirft, der muß sich auch consequenter Weise von der Kekulé'schen Lehre abwenden, weil sie die zuletzt angeführte Erschei-

1) R. Demuth und V. Meyer, Ber. d. D. chem. Ges. XXI, 264.

nung gegenwärtig in befriedigender Weise noch nicht zu erklären im Stande ist.

Experimenteller Theil.

Zur weiteren Begründung unserer Ansicht über die Isomerieverhältnisse der Benzildioxime, war es vor allem nöthig, diese beiden Körper möglichst eingehend nach den verschiedensten Richtungen zu untersuchen, um fernere Kriterien für ihre Structurgleichheit beizubringen. Die bisherigen Untersuchungen haben in ihrem Verlauf völlig unseren Erwartungen entsprochen, ja zum Theil dieselben noch übertroffen, indem nicht nur einfache Reactionen bei beiden Körpern in gleicher Weise verliefen und zu analogen Reactionsproducten führten, sondern auch solche Processe, die sich wider Erwarten höchst verwickelt gestalteten, trotz ihres complexen Verlaufs in allen Einzelheiten bei beiden sich in genau der gleichen Weise abspielten. Ein vorzügliches Beispiel der letzteren Art bietet die Methylirung der beiden Dioxime.

Methylirt man das α-Dioxim, so erhält man 4 Reactionsproducte:

1. den normalen Dimethyläther des α-Dioxims,
2. ein nicht ätherartiges Isomeres des letzteren (α_1),
3. eine Base von der Formel $C_{15}H_{14}N_2$,
4. Benzil.

Methylirt man das β-Dioxim, so erhält man gleichfalls 4 Reactionsproducte:

1. den normalen Dimethyläther des β-Dioxims,
2. ein neues nichtätherartiges Isomeres desselben (β_1), die Verbindung (α_1) läßt sich durch Erhitzen mit Salzsäure in (β_1) überführen,
3. dieselbe Base $C_{16}H_{14}N_2$, welche aus dem α-Dioxim entsteht,
4. Benzil.

Wie man sieht, entsprechen sich die beiden verschiedenen Reihen von Verbindungen aufs vollkommste.

Wir erblicken in dieser Thatsache ein schwerwiegendes Argument zu Gunsten unserer Anschauung; denn diese völlige Uebereinstimmung der beiderseitigen, in so eigenartiger Weise verlaufenden Reactionen läßt sich ungezwungen nur erklären, wenn man den Ausgangssubstanzen, d. h. den beiden Dioximen, die gleiche chemische Constitution zuschreibt.

Methylirung des α-Dioxims.

Die Untersuchung der durch Methylirung der Dioxime entstehenden Producte hat uns, ehe wir eine geeignete Trennungsmethode aufgefunden hatten, große Schwierigkeiten bereitet und einen bedeutenden Zeitaufwand erfordert. Im Folgenden soll das Verfahren, welches nunmehr die Reactionsproducte leicht zu isoliren gestattet, genau beschrieben werden.

Um eine möglichst vollständige Methylirung zu erzielen, wurde die von Japp und Klingemann [1]) kürzlich angegebene Methode der Alkylirung benutzt. 10 g α-Dioxim werden mit ca 50 g Jodmethyl übergossen, und der Brei mit Methylalkohol verdünnt. Zu diesem Gemenge, welches auf dem Wasserbade am Rückflußkühler in gelindem Sieden erhalten wird, läßt man langsam im Verlauf mehrerer Stunden eine Lösung von 7,5 g Natrium in Methylalkohol tropfen. Das Reactionsproduct, eine röthliche Flüssigkeit, wird in Wasser gegossen, wobei sich ein hell grüngelbes Oel ausscheidet. Falls die Flüssigkeit nicht bereits alkalisch reagirt, setzt man etwas Alkali hinzu und schüttelt darauf mit Aether mehrfach aus. Hat man nicht zu viel Aether genommen, so bleibt bei dem erstmaligen Ausschütteln eine gewisse Menge weißer Krystalle ungelöst, die auf dem Wasser schwimmen und zweckmäßig für sich abfiltrirt werden. Säuert man nach beendigtem Ausschütteln die alkalische, wässerige Flüssigkeit an, so tritt kaum eine Trübung ein, ein Beweis dafür, daß bei dieser Art der Methylirung sich die gesammte Menge des Dioxims an der Reaction betheiligt, während bei anderen Methoden stets ein mehr oder minder großer Theil desselben unangegriffen bleibt.

Der ätherische Auszug hinterläßt nach dem Verdunsten einen zähen Syrup. Verreibt man denselben mit wenig starkem Alkohol, so bleiben weitere geringe Mengen der bereits erwähnten weißen Krystalle zurück. Dieselben stellen einen neutralen Körper dar, der sich nicht mit Säuren verbindet und vorläufig mit (α_1) bezeichnet werden möge. Man erhält die Verbindung durch einmaliges Umkrystallisiren aus heißem Alkohol, in dem sie schwer löslich ist, rein; ihr Schmelzpunct liegt bei 165—166°.

Nach Entfernung des Körpers (α_1) wird das alkoholische Filtrat eingedunstet, und der nun hinterbleibende Syrup mit stärkster wässeriger Salzsäure tropfenweise versetzt und verrieben. Nach wenigen Augenblicken beginnt die Masse fest zu werden; man fährt mit dem Zusatz von Salzsäure fort, bis die Krystalle sich nicht mehr vermehren und das Ganze zu einem gleichförmigen Brei erstarrt ist. Derselbe wird mit der Saugpumpe scharf ab-

1) Ann. der Chem. und Pharm. 247, 201.

gesaugt — Filtrat F_1 — mit concentrirter Salzsäure ausgewaschen — man darf nur ganz concentrirte Säure anwenden, weil die Krystalle durch Wasser zersetzt werden — und an der Luft getrocknet. Die so erhaltene Krystallmasse wird nun in einem Kölbchen wiederholt mit warmem Aether digerirt, wobei ein Theil in Lösung geht — Filtrat F_2 — die Hauptmenge jedoch rein weiß zurückbleibt. Uebergießt man darauf den feingepulverten Rückstand mit Natronlauge oder besser mit starkem wässerigem Ammoniak, so wird derselbe für einen Augenblick in einen zähen Syrup verwandelt, um gleich darauf wieder zu einer harten, krystallinischen Masse zu erstarren. Aus Aether wird die so gewonnene Verbindung — (α_2) — leicht völlig rein in prachtvollen Krystallen erhalten, welche bei 109—110° schmelzen.

Das ätherische Filtrat F_2 hinterläßt einen Syrup, der bald zum größten Theil zu einer Krystallmasse erstarrt. Befreit man die Substanz durch Waschen mit kaltem verdünnten Alkohol von den anhaftenden Schmieren und krystallisirt das Product aus Alkohol oder Aether um, so erhält man einen Körper, der sich durch seinen Schmelzpunct 95°, die charakterische Reaction mit alkoholischem Kali u. s. w. unzweideutig als Benzil zu erkennen giebt.

Es bleibt noch übrig, einige Worte über die Verarbeitung des oben erwähnten stark salzsauren Filtrates F_1 zu sagen. Verdünnt man dasselbe mit viel Wasser, so tritt eine Trübung ein, welche durch Ausschütteln mit Aether beseitigt wird. Uebersättigt man darauf die Flüssigkeit mit einem Alkali, so scheidet sich eine ölige Base aus, welche unter Wasser allmählich zum Theil erstarrt. Zweckmäßig schüttelt man die Substanz mit Aether aus, verdunstet, nimmt den rückständigen Syrup mit sehr verdünnter Salzsäure auf, entfernt das Ungelöste durch Schütteln mit Aether und fällt dann die Base von neuem mit Alkali, wobei sie sich als weißes Krystallpulver ausscheidet.

Nach einmaligem Unkrystallisiren aus Aether, in dem sie sich schwer löst, ist die Base rein und schmilzt dann constant bei 158—159°.

Was die Mengenverhältnisse betrifft, in denen die erwähnten vier Reactionsproducte auftreten, so entstehen, in Procenten des angewandten α-Dioxims ausgedrückt, etwa 6—7 % Körper (α_1), 25 % Körper (α_2), 3 % Base und 13—14 % Benzil, zusammen gegen 50 % des Ausgangsmaterials. Der Rest bleibt bei der complicirten Trennung der Körper in den Mutterlaugen, aus denen indessen keine faßbaren Producte mehr zu erhalten sind.

Bevor wir auf die einzelnen Körper näher eingehen, wollen wir den Verlauf der

Methylirung des β-Dioxims

beschreiben. Dieselbe wurde in der nämlichen Weise ausgeführt wie die des α-Dioxims, zur Verarbeitung des Reactionsproductes wurde jedoch ein etwas anderer Weg eingeschlagen, der dem erst beschriebenen vorzuziehen ist.

Nachdem man das Product der Methylirung in Wasser gegossen, Alkali zugesetzt und das ausgeschiedene Oel in Aether aufgenommen hat, schüttelt man den ätherischen Auszug mehrfach mit sehr verdünnter Salzsäure durch. Es ist darauf zu achten, daß der salzsaure Auszug sich hierbei kaum schwachgelblich färbt; nimmt er eine deutliche Gelbfärbung an, so muß man die Salzsäure noch stärker verdünnen. Die ätherische Schicht wird abgehoben, und die salzsaure Flüssigkeit mit Wasser verdünnt. Falls hierbei eine Trübung eintritt, wird dieselbe durch Ausäthern beseitigt, darauf die Flüssigkeit alkalisch gemacht und von neuem ausgeäthert. Aus dem ätherischen Auszuge scheiden sich sogleich beim freiwilligen Verdunsten nahezu völlig reine Krystalle einer Base ab, welche ohne weitere Reinigung bei 157—158^0 schmolzen und sich auch im übrigen als identisch mit der aus α-Dioxim gewonnenen Base erwiesen.

Den ursprünglich erhaltenen ätherischen Auszug, der noch alle Producte der Reaction außer der Base enthält, trocknet man mit Chlorcalcium und leitet darauf sehr langsam trocknes Salzsäuregas ein. Zuerst scheiden sich geringe Mengen von Schmieren aus, von denen man den Aether abgießt; darauf größere Mengen gelblich gefärbter Krystalle, während zum Schluß völlig farblose, glänzende Prismen ausfallen. Sobald keine Krystalle mehr ausgeschieden werden, und die Flüssigkeit, die sich anfangs getrübt hatte, wieder völlig klar geworden ist, unterbricht man das Einleiten der Salzsäure, filtrirt von den Krystallen ab und läßt den salzsäurehaltigen Aether freiwillig verdunsten. Hierbei bleibt eine gelblich gefärbte Krystallmasse K zurück.

Aus den durch Salzsäure gefällten Krystallen, welche die lockere Salzsäureverbindung eines Körpers (β_2) darstellen, läßt sich die freie Verbindung weit weniger leicht im Zustande der Reinheit gewinnen, als die entsprechende Substanz (α_2) aus ihrer Salzsäureverbindung. Am besten zersetzt man die reineren Krystallmengen durch Wasser oder Ammoniak, nimmt das entstandene Harz in Aether auf, schüttelt denselben mehrfach mit stark verdünnter Salzsäure aus, um etwa noch beigemengte basische Substanz zu entfernen, trocknet den Aether und fällt von neuem mit Salzsäuregas; nöthigenfalls wiederholt man den Reinigungsproceß nochmals. Auf diese Weise gelangt man zu einem Product, aus dem durch Ammoniak ein Harz in Freiheit gesetzt wird, welches durch Reiben mit einem Glasstabe ziemlich rasch in eine krystallinische Masse übergeführt wird. Durch wiederholtes Umkrystallisiren aus Aether oder stark verdünntem Alkohol reinigt man den Körper völlig; er schmilzt alsdann constant bei 88—89°.

Die oben erwähnte Krystallmasse K, welche aus den Reactionsproducten, die sich nicht mit Salzsäure verbinden, besteht, ist ein Gemenge eines Körpers (β_1), der in seinen Eigenschaften genau dem Körper (α_1) entspricht, mit wenig Benzil. Die Hauptmenge der neuen Verbindung befreit man durch wiederholtes Umkrystallisiren aus heißem Alkohol von dem beigemengten Benzil. Um aus den Mutterlaugen weitere Mengen des reinen Körpers zu gewinnen, digerirt man dieselben zweckmäßig kurze Zeit mit salzsaurem Hydroxylamin: von dem entstandenen, in Alkohol sehr leicht löslichen Monoxim des Benzils läßt sich dann der schwerer lösliche Körper (β_1) leicht trennen. Schmelzpunct: 72—73°.

Der Proceß der Methylirung verläuft also, wie schon eingangs bemerkt, beim β-Dioxim in genau der gleichen Weise wie beim α-Dioxim, nur die Mengenverhältnisse, in denen die entsprechenden Producte entstehen, sind etwas andere. Es wurden nämlich im Durchschnitt etwa 35 % Körper (β_1) und nur wenig Benzil gewonnen, während der Körper (β_2) und die Base sich ungefähr ebenso reichlich bildeten wie die entsprechenden Körper aus dem α-Dioxim. Im ganzen wurden gegen 70 % des Ausgangsmaterials an krystallisirten Producten erhalten. —

Die nähere Untersuchung der einzelnen Producte hat zu dem überraschenden Ergebniß geführt, daß die vier, mit (α_1), (α_2), (β_1) und (β_2) bezeichneten Körper sämmtlich dieselbe procentische Zusammensetzung besitzen, und zwar die von Dimethyläthern der Dioxime. Wie sich indessen aus weiter unten mitgetheilten Versuchen ergiebt, sind nur die schwach basischen Körper (α_2) und (β_2) wahre Dimethyläther der beiden Dioxime, während die beiden neutralen Isomeren (α_1) und (β_1) eine andere Constitution besitzen.

Wir lassen die Beschreibung der einzelnen Körper folgen.

Nicht ätherartiges Isomeres des α-Benzildioxim-Dimethyläthers.

[Körper (α_1)].

Kleine, glänzende, schiefwinklige Prismen (aus Alkohol). Schmelzpunct 165—166°. Unlöslich in kaltem Wasser; sehr schwer löslich in Ligroïn; schwer in Alkohol, Aether und Eisessig; leicht löslich in Benzol, Chloroform und Schwefelkohlenstoff.

I. 0,15175 g Substanz gaben bei der Verbrennung mit Kupferoxyd 0,3991 g Kohlensäure und 0,0874 g Wasser.

II. 0,1156 g Substanz gaben 11,0 cc feuchten Stickstoff bei 26° und 751 mm Druck.

	Berechnet	Gefunden	
	für $C_{16}H_{16}N_2O_2$	I	II
C	71,64	71,74	—
H	5,97	6,40	—
N	10,45	—	10,43.

α-Benzildioxim-Dimethyläther.

[Körper (α_2)].

Derbe, allseitig ausgebildete, trikline Prismen von starkem Glanz und sehr großer Dispersion (aus ätherischer Lösung durch freiwilliges Verdunsten gewonnen). Schmelzpunct: 109—110°. Unlöslich in kaltem Wasser; schwer löslich in Ligroïn; mäßig in Alkohol und Aether; sehr leicht in Benzol, Chloroform, Schwefelkohlenstoff und Eisessig.

I. 0,1933 g Substanz gaben bei der Verbrennung mit Kupferoxyd 0,5071 g Kohlensäure und 0,1094 g Wasser.

II. 0,1977 g Substanz gaben 18,5 cc feuchten Stickstoff bei 19°,5 und 744 mm Druck.

	Berechnet	Gefunden	
	für $C_{16}H_{16}N_2O_2$	I	II
C	71,64	71,55	—
H	5,97	6,29	—
N	10,45	—	10,50.

Der Körper vereinigt sich mit 1 Mol. Salzsäure zu einer lockeren Verbindung, die bereits in der Kälte durch Wasser in ihre Bestandtheile zerlegt wird, aber an der Luft und bei 100° beständig ist. Dieselbe krystallisirt in glänzenden, kurzen Prismen, welche bei 157—158° unter Gasentwicklung schmelzen.

Zur Bestimmung des Chlorgehalts wurde eine gewogene Menge der Verbindung durch überschüssiges Ammoniak zersetzt, und im

Filtrat nach dem Ansäuern mit Salpetersäure das Chlor durch Silbernitrat gefällt.

0,2095 g Substanz gaben 0,0805 g Chlorsilber und 0,0112 g Silber.

	Berechnet für $C_{16}H_{16}N_2O_2 . HCl$	Gefunden
Cl	11,66	11,27.

Nicht ätherartiges Isomeres des β-Benzildioxim-Dimethyläthers.

[Körper (β_1)].

Flache, glänzende Nadeln (aus Alkohol). Schmelzpunct: 72—73°. Unlöslich in kaltem Wasser; mäßig löslich in Alkohol; leicht in Eisessig und Ligroïn; sehr leicht in Aether, Benzol, Chloroform und Schwefelkohlenstoff.

I. 0,1808 g Substanz gaben bei der Verbrennung mit Kupferoxyd 0,4727 g Kohlensäure und 0,1032 g Wasser.

II. 0,1220 g Substanz gaben 11,6 cc feuchten Stickstoff bei 19°,5 und 743 mm Druck.

	Berechnet für $C_{16}H_{16}N_2O_2$	Gefunden I	Gefunden II
C	71,64	71,32	—
H	5,97	6,34	—
N	10,45	—	10,65

β-Benzildioxim-Dimethyläther.

[Körper (β_2)].

Feine, weiße, zu Rosetten gruppirte Nädelchen oder derbe, kurze Prismen (aus Aether beim langsamen Verdunsten). Schmelzpunct: 88—89°. Unlöslich in kaltem Wasser; schwer löslich in Ligroïn; leicht in Alkohol und Aether; sehr leicht in Benzol, Chloroform, Schwefelkohlenstoff und Eisessig.

I. 0,1522 g Substanz gaben bei der Verbrennung mit Kupferoxyd 0,3990 g Kohlensäure und 0,0891 g Wasser.

II. 0,1533 g Substanz gaben 14,7 cc feuchten Stickstoff bei 23° und 748 mm Druck.

	Berechnet für $C_{16}H_{16}N_2O_2$	Gefunden I	Gefunden II
C	71,64	71,52	—
H	5,97	6,50	—
N	10,45	—	10,63.

Mit Salzsäure geht die Substanz eine Verbindung ein, die der entsprechenden des Körpers (α_2) in jeder Beziehung täuschend ähnlich ist; nur der Schmelzpunct liegt bedeutend tiefer, ungefähr bei 130°.

Die Chlorbestimmung wurde in derselben Weise ausgeführt, wie bei der α-Verbindung angegeben ist.

0,0729 g Substanz gaben 0,0264 g Chlorsilber und 0,0066 g Silber.

	Berechnet für $C_{16}H_{16}N_2O_2 . HCl$	Gefunden
Cl	11,66	11,95.

Base $C_{16}H_{14}N_2$.

Die Base, welche als Nebenproduct der Methylirung sowohl des α-, wie des β-Dioxims entsteht, krystallisirt aus verdünntem Alkohol in langen, feinen, seideglänzenden Nadeln oder dünnen, perlmutterglänzenden Blättchen, aus ätherischen Lösungen scheidet sie sich dagegen in kleinen, stark glänzenden, gut ausgebildeten Krystallen von rhombischen Aussehen ab. Der Körper ist unlöslich in Wasser, schwer löslich in Aether und Ligroïn, leicht in Alkohol, Benzol und Schwefelkohlenstoff; sehr leicht in Chloroform.

Nach den Ergebnissen der Analyse — es wurden Proben verschiedener Darstellungen analysirt — besitzt die Base die Formel $C_{16}H_{14}N_2$.

I. 0,1820 g Substanz gaben bei der Verbrennung mit Kupferoxyd 0,5481 g Kohlensäure und 0,1056 g Wasser.

II. 0,1207 g Substanz gaben 12,9 cc feuchten Stickstoff bei 21° und 746 mm Druck.

III. 0,1214 g Substanz gaben 13,0 cc feuchten Stickstoff bei 22° und 746 mm Druck.

IV. 0,1222 g Substanz gaben 13,65 cc feuchten Stickstoff bei 22° und 738 mm Druck.

	Berechnet für $C_{16}H_{14}N_2$	Gefunden I	II	III	IV
C	82,06	82,13	—	—	—
H	5,98	6,44	—	—	—
N	11,97	—	11,93	11,90	12,28

Charakteristisch für die Base ist das schwer lösliche Nitrat derselben. Gießt man eine heiße, verdünnte salzsaure Lösung der Base und eine heiße Lösung von Salpeter zusammen, so scheidet sich das Nitrat beim Erkalten in derben, flachen Nadeln ab. Fügt man zu einer verdünnten kalten Lösung dieses Salzes eine Auflösung von Natriumnitrit, so wird keine Nitrosoverbindung gebildet, sondern die freie Base wieder ausgefällt.

Die Base ist einsäurig; dies zeigt die Analyse ihres Platindoppelsalzes, welches man in Form von goldgelben, glänzenden Blättchen erhält, wenn man zu einer heißen, mäßig verdünnten salzsauren Lösung der Base Platinchlorid fügt. Das im Vacuum getrocknete Salz verliert bei 100° nicht an Gewicht.

0,2619 g bei 100° getrockneter Substanz hinterließen beim Glühen 0,0587 g Platin.

Berechnet für $[C_{16}H_{14}N_2 . HCl]_2 . PtCl_4$		Gefunden
Pt (197)	22,39	22,42

Es sind bereits zwei Basen bekannt, welche dieselbe Zusammensetzung besitzen und zugleich Abkömmlinge des Benzils sind. Die eine ist das Methyldiphenylglyoxalin.

$$\left.\begin{array}{l} C_6H_5-C=N \\ \qquad\quad | \\ C_6H_5-C=N \end{array}\right\} CH-CH_3,$$

welches Japp und Wynne[1]) aus Benzil, Acetaldehyd und Ammoniak darstellten. Diese Verbindung ist von der unseren durchaus verschieden, da sie erst bei 225° schmilzt. Das andere Isomere ist das „Diphenyldihydropyragin“

$$\begin{array}{l} C_6H_5-C=N-CH_2 \\ \qquad\quad |\qquad\quad | \\ C_6H_5-C=N-CH_2, \end{array}$$

von Mason[2]), welches durch Condensation von Aethylendiamin mit Benzil gewonnen wird. Diese Base hat nach den Angaben des Entdeckers fast genau denselben Schmelzpunct wie die unsrige, nämlich 160—161°, ist aber leicht löslich in Aether und wird (höchst auffallenderweise) durch Säuren beim Erhitzen sofort in ihre Componenten gespalten, während unsere Base vollkommen beständig ist. Welche Constitution unserer Base zukommt, läßt sich vorläufig nicht entscheiden; diese Frage interessirt uns auch im Augenblick weniger als die Thatsache, daß dieselbe Base aus beiden Dioximen entsteht.

Reduction der vier Isomeren.

Um Aufschluß über die Natur der vier isomeren Körper von

1) Chem. Soc. 1886. I, 462; Ber. d. D. chem. Ges. XXI, R. 600.

2) Ber. d. D. chem. Ges. XX, 268.

der Zusammensetzung der Dioxim-Dimethyläther zu gewinnen, unterwarfen wir sie zunächst der Reduction mit Jodwasserstoffsäure und Phosphor. Das Verfahren und der Verlauf der Reaction waren in allen Fällen gleich. 0,8—0,9 g des betreffenden Körpers wurden mit der gleichen Gewichtsmenge amorphen Phosphors und dem fünffachen Gewicht an Jodwasserstoffsäure (1,7 sp. G.) 8—10 Stunden im Rohr auf 190—230° erhitzt. Aus allen Reactionsproducten ließ sich leicht in reichlicher Ausbeute Dibenzyl isoliren, welches durch den Schmelzpunct 52°, die Krystallform, das Dinitroderivat vom Schmelzpunct 178° u. s. w. erkannt und mit aller Sicherheit identificirt wurde. Hieraus ergiebt sich, daß alle vier Körper noch wahre Abkömmlinge des Benzils sind, d. h. die Kette $C_6H_5 - C - C - C_6H_5$ — enthalten. Die Bekmann'sche Umlagerung oder eine der Benzilsäurebildung analoge Reaction ist also bei der Entstehung keines der vier Körper eingetreten.

Einwirkung von Alkohol bei hoher Temperatur auf die Körper der α-Reihe.

Versuche, nach Analogie mit dem Verhalten des freien α-Dioxims die beiden α-Derivate durch Erhitzen mit Alkohol in die entsprechenden β-Derivate umzuwandeln, waren erfolglos. Der Körper (α_1) wird von Alkohol nicht im geringsten angegriffen, selbst wenn man beide Substanzen mehrere Stunden zusammen auf 240—250° erhitzt. Läßt man dagegen Alkohol auf die Verbindung (α_2) einige Stunden bei 170—180° einwirken, so findet je nach der Dauer des Versuchs eine mehr oder minder starke Zersetzung statt, die sich durch Dunkelfärbung der Lösung kund giebt. β-Derivate ließen sich in dem Reactionsproduct, welches gewöhnlich noch unveränderte Ausgangssubstanz enthielt, in keinem Falle nachweisen.

Einwirkung von Salzsäure auf die vier Isomeren bei höherer Temperatur.

Gegenüber der Einwirkung concentrirter Salzsäure in der Hitze zeigen die Isomeren ein sehr bemerkenswerthes verschiedenes Verhalten. Erhitzt man (α_2) oder (β_2) etwa 10 Stunden lang mit concentrirter wässeriger Salzsäure auf 100°, so entsteht in beiden Fällen ein gelber Syrup, in dem sich leicht Benzil nachweisen und in Substanz isoliren läßt (Schmelzpunkt 95°), während die salzsaure Flüssigkeit einen Körper enthält, der die Kupferreaction des Hydroxylamins zeigt. Die Reaction verläuft also bei diesen beiden Substanzen genau so wie bei den freien Dioximen (welche bekanntlich durch Salzsäure in Hydroxylamin und Benzil gespalten werden), nur weniger glatt. Die Körper werden in Benzil und Methylhydroxylamin zerlegt, welch letzteres aber beim Erhitzen mit conc. Salzsäure z. Th. weitere Zersetzungen erleidet (Ann. der Chem. und Pharm. 182, 225; Ber. d. D. chem. Ges. 16, 827). Die Verbindungen (α_2) und (β_2) erweisen sich also als die wahren Dimethyläther der beiden Dioxime, womit auch ihre Fähigkeit, lockere salzsaure Salze zu bilden, im Einklang steht.

Ganz anders die beiden andern Isomeren (α_1) und (β_1). Unter denselben Bedingungen mit Salzsäure erhitzt, liefert (α_1) gleichfalls einen gelben Syrup; isolirt man denselben aber und verreibt ihn mit wenig kaltem Alkohol, so erstarrt er zu einer weißen Krystallmasse, welche nach einmaligem Umkrystallisiren aus Alkohol alle Eigenschaften des Körpers (β_1) besitzt. Diese Umwandlung von (α_1) in (β_1) verläuft nahezu quantitativ, nur ganz geringe Mengen harziger Nebenproducte treten dabei auf, jedoch keine Spur Benzil.

(β_1) wird, wie schon aus diesem Verlauf hervorgeht, bei 100° überhaupt nicht von Salzsäure angegriffen, selbst bei 150° wird es durch stundenlanges Erhitzen mit Salzsäure kaum verändert. Erst bei etwa 170° findet eine energische Einwirkung der Salzsäure statt: der Körper (β_1) wird glatt in Benzoësäure übergeführt; Benzil wird nicht gebildet, und in der salzsauren Flüssigkeit läßt sich nur Ammoniak nachweisen.

Diese Versuche zeigen deutlich, daß die beiden Körper (α_1) und (β_1) nicht die Dimethyläther der Dioxime sind. Welches die Constitution dieser eigenthümlichen Verbindungen ist, bleibt noch zu ermitteln, doch sei schon hier daran erinnert, daß mehrfach bei Einwirkung von Jodmethyl auf organische Substanzen nicht einfache Methylirung stattfindet, sondern der Rest des Jodmethyls sich als Methylen in vorhandenen Kohlenstoffketten einschiebt. So entstehen nach den Beobachtungen von E. Fischer und Steche[1]) bei der Methylirung von Indolen Hydrochinoline, und analog nach den Versuchen von Ciamician und Anderlini[2]) aus Pyrrolderivaten Abkömmlinge des Hydropyridins. Ob ähnliche oder andersartige abnorme Vorgänge sich bei der Bildung der nicht ätherartigen Isomeren abspielen, läßt sich zur

1) Ber. d. D. chem. Ges. XX, 818.
2) Ber. d. D. chem. Ges. XXI, 2855.

Zeit noch nicht entscheiden, nur ist der Eintritt von Kohlenstoffatomen in die Hauptkette $C_6H_5—C—C—C_6H_5$ — ausgeschlossen, da ja beide Verbindungen bei der Reduction mit Jodwasserstoffsäure und Phosphor Dibenzyl liefern. — Die Constitution der nicht ätherartigen Isomeren soll einer eingehenden Prüfung unterworfen werden.

Wir sehen, wie schon bemerkt, in den beschriebenen Versuchen eine wichtige Stütze für unsere Ansicht. Dieselben sprechen auf's Neue z. B. gegen die von uns besonders eingehend geprüfte

$$\text{Formel}\ \begin{array}{c} NOH \\ \diagup\quad\diagdown \\ C_6H_5 — C — C — C_6H_5 \\ \diagdown\quad\diagup \\ NOH \end{array},$$

an welche sich Michael — unter völliger Ignorirung einiger der wichtigsten Gegengründe — bei seiner Polemik klammert. In der That ist nicht einzusehen, wie aus einem Körper von dieser Formel bei der Methylirung — einem Proceß, der in diesem Falle sich bei der niedrigen Temperatur von etwa 50° abspielt und einen so absonderlichen und complicirten Verlauf nimmt — genau die analogen Reactionsproducte entstehen sollten, wie aus einer Verbindung

$$\begin{array}{ccccccc} C_6H_5 & — & C & — & C & — & C_6H_5 \\ & & \| & & \| & & \\ & HO.N & & & N.OH. & & \end{array}$$

mit gänzlich anderen Bindungsverhältnissen; vielmehr spricht der bei beiden Körpern bis in's Kleinste analoge Verlauf der Reaction unzweideutig dafür, daß in den Ausgangssubstanzen dieselbe Art der Atomverkettung besteht. —

Im Anschluß an die beschriebenen Versuche mögen hier noch einige kurze Bemerkungen über

die Reduction der beiden Dioxime

folgen. Wir haben diese Reaction nicht so eingehend verfolgt wie die Methylirung der Dioxime, weil N. Polonowska[1]) in Zürich mit dem Studium der Reductionsproducte der Dioxime beschäftigt ist und weitere Mittheilungen in Aussicht gestellt hat. Ueberdies stellte sich bald heraus, daß die Reduction in noch weit verwickelter Weise verläuft als die Methylirung und zu Producten führt, die zwar in beiden Fällen identisch, bezw. analog sind, aus denen

1) Ber. d. D. chem. Ges. XXI, 488.

sich aber keine sicheren Rückschlüsse auf die gleiche oder verschiedenartige Constitution der Ausgangskörper ziehn lassen.

Kocht man α-Benzildioxim mit Zinkstaub und Natronlauge so erhält man im wesentlichen folgende Producte:

1) Tetraphenylaldin, 2) Benzil,

3) einen bei 54° schmelzenden, stickstofffreien Körper, wahrscheinlich Dibenzyl.

Außerdem entstehen zahlreiche, nicht definirte Producte, unter andern eine bei ca. 150° schmelzende, in Aether und Alkohol schwer lösliche Base.

Ebenso gewinnt man aus β-Dioxim:

1) Tetraphenylaldin, 2) Benzil,

3) den bei 54° schmelzenden, dem Dibenzyl gleichenden Körper.

Daneben bilden sich auch hier zahlreiche, schwer zu trennende Producte, unter denen die erwähnte bei 150° schmelzende Base, sowie ein stickstoffhaltiger, nicht basischer, bei 212—213° schmelzender Körper isolirt wurden.

Auch in diesem Fall tritt also das analoge Verhalten der beiden Dioxime bei einer so complicirten, zu zahlreichen Producten führenden Reaction deutlich zu Tage.

Wir wollen indessen nochmals ausdrücklich hervorheben, daß wir den bei der Reduction beobachteten Thatsachen bei weitem nicht den Werth beimessen, wie den Ergebnissen der Methylirung. Die Producte der Reduction beider Dioxime sind theils solche, aus denen bereits aller Stickstoff herausgenommen ist, theils verdanken sie, wie das Tetraphenylaldin, einem complicirten Condensationsvorgange, der gleichfalls mit theilweiser Abspaltung des Stickstoffs verbunden ist, ihre Entstehung. Alle diese Körper sind daher nicht geeignet, Aufschluß über die Bindungsverhältnisse in den beiden Dioximen zu geben. Es ist vielmehr denkbar, daß zunächst stets Reduction der beiden Isonitrosogruppen zu Amidgruppen stattfindet, wodurch in beiden Fällen derselbe Diamidokörper entstehen kann, und daß die weiteren Producte aus tiefergehender Veränderung des primär gebildeten Diamins hervorgehn.

Ohne auf die Einzelheiten unserer mehrfach abgeänderten Versuche einzugehen, mögen hier noch einige Worte Platz finden über das bei beiden Dioximen in gleicher Weise angewandte Reductionsverfahren, welches zu den oben erwähnten Producten geführt hat.

Eine Lösung von 1 Theil α- oder β-Dioxim und etwa $1^1/_2$ Th. Aetznatron in 8 Th. Wasser wurde zum Sieden erhitzt und darauf allmählich in kleinen Portionen mit etwa $1^1/_2$ Th. Zinkstaub versetzt. Sogleich begann sich auf der Oberfläche der Flüssigkeit ein Oel abzuscheiden, während gleichzeitig lebhafte Entwickelung von Ammoniak eintrat. Sobald eine Probe der Lösung erkennen ließ, daß kein unangegriffenes Dioxim mehr vorhanden war, wurde das Oel mit viel Aether aufgenommen, der ätherische Auszug mehrfach mit sehr verdünnter Salzsäure geschüttelt — salzsaurer Auszug S — abgehoben und getrocknet.

Beim Eindunsten schieden sich farblose oder schwach gelbliche, kurze Nadeln aus, die sich nach dem Abfiltriren an der Luft allmählich intensiver gelb färbten. Der Körper ist sehr schwer löslich in heißem Alkohol und Aether, leicht dagegen in Chloroform und Schwefelkohlenstoff; er löst sich in concentrirter Schwefelsäure mit orangerother Farbe auf und wird durch Wasser aus der Lösung unverändert wieder ausgefällt. Sein Schmelzpunkt liegt bei 246⁰. Alle diese Eigenschaften charakterisiren den Körder als das von Japp und Wilson[1]) sowie von E. Braun und V. Meyer[2]) gewonnene Tetraphenylaldin, welches auch bereits von N. Polonowska[3]) bei der Reduction des β-Dioxims nach der H. Goldschmidt'schen Methode in geringer Menge erhalten worden ist.

Die Ausbeute an Tetraphenylaldin schwankt zwischen 10—20 % des Ausgangsmaterials, wenn das α-Dioxim, zwischen 5—10 %, wenn das β-Dioxim angewandt wird.

Das Filtrat von dem Tetraphenylaldin hinterließ beim völligen Eindunsten einen Rückstand, aus dem sich durch vielfaches Umkrystallisiren theils aus Gemischen von Benzol und absolutem Alkohol, theils aus letzterem allein, weitere Mengen von Tetraphenylaldin und die eingangs aufgeführten nicht basischen Körper isoliren ließen. Zu erwähnen ist betreffs des bei 54⁰ schmelzenden Körpers, daß derselbe in seinem Aussehen und seinen Löslichkeitsverhältnissen sehr an Dibenzyl erinnerte, welches bekanntlich bei 52⁰ schmilzt. Da indessen die schließlich zu Gebote stehende Menge reinen Materials zu gering war, um das charakteristische Dinitroderivat darzustellen, so muß es dahingestellt bleiben, ob der vorliegende Körper wirklich Dibenzyl war.

Aus dem salzsauren Auszuge S wurde durch Uebersättigen mit Alkali und Extrahiren mit Aether eine harzige Masse erhalten, die aus einem Gemenge eines oder mehrerer hochschmelzender,

1) Chem. Soc. 1886. I, 825. 1887. I, 98.
2) Ber. d. D. chem. Ges. XXI, 1269.
3) Ber. d. D. chem. Ges. XXI, 490.

kaum basischer Producte und einer ausgesprochenen Base bestand. Von letzterer Substanz erweichten die aus α- und β-Dioxim gegewonnenen Proben gleichzeitig bei 146° und schmolzen innerhalb der nächsten Grade. Beide Proben waren ferner sehr schwer löslich in Alkol und Aether. Wenn daher auch bei den geringen nach den verlustreichen Reinigungsoperationen zur Verfügung stehenden Substanzenmengen die Identität beider Körper nicht mit völliger Sicherheit nachgewiesen werden konnte, so ist dieselbe doch nach dem Gesagten als sehr wahrscheinlich zu bezeichnen.

Versuche mit substituirten Benzilen.

Nachdem wir die eigenthümlichen Isomerieverhältnisse der Benzildioxime erkannt hatten, mußte es unsere Aufgabe sein, zu prüfen, ob dieselben Erscheinungen auch bei den Dioximen anderer 1.2 Diketone wiederkehrten. Die in dieser Richtung angestellten Versuche haben ein sehr bemerkenswerthes Ergebniß geliefert. Die nächsten, durch Substitution entstandenen, Verwandten des Benzils, wie das Anisil und das p-Tolil verhalten sich nach Versuchen von Hrn. Stierlin, über die derselbe nächstens berichten wird, genau wie das Benzil: auch sie liefern je zwei Dioxime, von denen das eine sich in das andere umwandeln läßt, und je zwei Reihen Derivate derselben; die α-Derivate sind auch hier weniger löslich als die β-Verbindungen u. s. w.; kurz es herrscht völlige Analogie.

Versuche mit Dimethylglyoxim.

$$CH_3 - C(NOH) - C(NOH) - CH_3.$$

Ein gänzlich anderes Verhalten zeigt dagegen das Dioxim des Diacetyls, das Dimethylglyoxim, $CH_3 - C(NOH) - C(NOH) - CH_3$, welches schon vor längerer Zeit von Schramm[1]) im Laboratorium des Einen von uns in Zürich dargestellt und kürzlich auch von Fittig[2]) erhalten worden ist.

Dieser Körper läßt sich durch keines der Mittel, die sonst zum Ziele führen, in eine isomere Verbindung überführen. Erhitzt man z. B. das Dioxim mehrere Stunden mit absolutem Alkohol im Rohr auf 150—170°, oder auch 200—220°, so tritt nur eine geringe Zersetzung ein, während die Hauptmasse des Körpers unverändert bleibt. Bei höheren Temperaturen, 230—245°, zersetzt sich das Oxim vollständig, ohne daß es gelingt, faßbare Producte der Reac-

1) Ber. d. D. chem. Ges. XVI, 180.
2) Ibid. XX, 3184.

tion zu gewinnen. Ebensowenig läßt sich eine Umlagerung des Dioxims erzielen, wenn man es in der Kälte mit Acetylchlorid, oder nach Beckmann mit Eisessig, Essigsäureanhydrid und Salzsäure behandelt.

In beiden Fällen bildet sich eine bei ca. 112° schmelzende Acetylverbindung, welche durch verdünntes Alkali beim Erwärmen leicht zerlegt wird: aus der alkalischen Lösung scheiden Säuren das unveränderte Ausgangsproduct wieder aus.

Die erwähnten Thatsachen liefern unseres Erachtens ein weiteres Moment zu Gunsten unserer Anschauungen über die Isomerie der Benzil-Dioxime und seiner Verwandten. Körper, welche ein doppelt gebundenes Kohlenstoffpaar besitzen, können außer in der begünstigten Configuration in einer weniger begünstigten Form auch dann noch auftreten, wenn starke Verwandschaftskräfte die begünstigte Modification wiederherzustellen streben, da die doppelte Bindung eine Rotation der beiden Kohlenstoffatome, wenigstens bei gewöhnlicher Temperatur, unmöglich macht, und so die Umwandlung der weniger begünstigten Form in die begünstige verhindert. Sind dagegen, wie in den betrachteten Dioximen, die mittleren Kohlenstoffatome durch einfache Bindung mit einander verkettet, so können zwei isomere Modificationen nur dann dauernd bestehen, wenn die mit jenen Kohlenstoffatomen verbundenen Atome oder Gruppen ungefähr den gleichen Grad von Negativität besitzen, so daß die Affinitäten keinen erheblichen orientirenden Einfluß ausüben können, welcher das ausschließliche Zustandekommen der begünstigten Configuration zur Folge haben würde [1]).

Diese Bedingung ist erfüllt bei den Benzildioximen und den Oximen der substituirten Benzile, da die Phenyl-, Tolyl- und Anisylgruppe einerseits und die Isonitrosogruppe andererseits in Bezug auf den Grad der Negativität einander ungefähr gleich zu stellen sind; und somit sehen wir denn auch diese Verbindungen in zwei isomeren Formen existiren. Im Dimethylglyoxim steht dagegen der negativen Isonitrosogruppe die indifferente Methylgruppe gegenüber, eine Annäherung der beiden negativen Isonitrosogruppen wird daher hier nicht durch gleichzeitig anwesende Radicale von gleich großer Negativität erleichtert. Dadurch wird die dauernde Existenzfähigkeit der weniger begünstigten Configuration verhindert und demgemäß besteht das Dimethylglyoxim nur in einer Form. —

---

1) Vgl. V. Meyer u. E. Riecke, Ber. d. D. chem. Ges. XXI, 954.

Der Probleme, welche sich als Folgen dieser Untersuchungen darbieten und deren Lösung hohes Interesse bietet, besteht noch eine große Anzahl. Wir gedenken das Studium derselben fortzuführen und sehen noch einer Reihe von Arbeiten entgegen, die uns muthmaßlich lange Zeit in Anspruch nehmen wird. Zunächst haben wir eine Untersuchung über die Benzylderivate der Benzildioxime in Angriff genommen, welche ebenfalls einen eigenartigen Verlauf nimmt; wir hoffen, daß dieselbe weitere Anhaltspunkte zur Beurtheilung unserer Theorie der stereochemischen Isomerie bei einfacher Kohlenstoff-Bindung und Abwesenheit asymmetrischer Kohlenstoffatome bieten wird.

Göttingen, Universitätslaboratorium.

Preisaufgabe für 1889.

Die historisch-philologische Klasse wiederholt hier noch einmal ihre für dies Jahr gestellte Aufgabe, um das gütige Anerbieten ihres Korrespondenten, des Herrn Oberbibliothekar Dr. Wilhelm Pertsch in Gotha, zur öffentlichen Kenntniß zu bringen und zugleich die unter II. gestellte Forderung wesentlich zu vereinfachen.

„In der Erwägung, daß es den einzelnen Forschern zur Zeit unmöglich fällt einen vollständigen Ueberblick über die arabische Literatur zu erwerben, da zur Verbuchung des uns zugänglichen Bestandes derselben eine nicht unerhebliche, geflissentliche Arbeit erfordert wird, in der weiteren Erwägung, daß einen Ueberblick über das zum Studium des Arabischen vorhandene Material zu besitzen für jeden Semitisten nothwendig ist, verlangt die Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

eine von den Anfängen anhebende, bis zu der Zeit, in der die Türken Aegypten eroberten, fortgeführte Uebersicht über Alles, was die Araber und die arabisch schreibenden Angehörigen der islamischen und christlichen Reiche auf dem Gebiete der Literatur geleistet haben. Der Ausdruck Literatur wird hier im weitesten Sinne gebraucht, dessen er fähig ist.

Es bleibt den Bewerbern überlassen, welche Ordnung sie ihrem Berichte geben wollen. Derselbe darf chronologisch oder geographisch gegliedert sein, er darf auch sich nach den Mittelpunkten theilen, um welche die literarische Bewegung kreist.

Verlangt wird:

I. daß die Nationalität der arabisch schreibenden Schriftsteller thunlichst genau angegeben werde: es ist noch lange nicht bekannt genug, daß die bedeutendsten dieser Schriftsteller nicht Araber, ja nicht einmal Semiten gewesen sind:

II. daß eine, soweit die gedruckten Kataloge der europäischen Bibliotheken (mit Ausnahme Konstantinopels) eine solche ermöglichen, vollständige Verweisung auf die von jedem einzelnen arabischen Werke uns zur Verfügung stehenden Handschriften der Besprechung der Documente beigefügt, und daß überall auf die einschlagenden Artikel der Zeitschriften hingewiesen werde:

III. daß man sich für Zeitangaben ausschließlich der christlichen Zeitrechnung bediene: die Königl. Gesellschaft der Wissenschaften würde jede nach den Jahren der Flucht rechnende Bewerbungsschrift a limine abweisen.

Der Preisträger verpflichtet sich durch die Annahme des Preises dem Drucke seiner Arbeit ausführliche Register beizugeben, die der Handschrift beizufügen unthunlich sein würde. Ueber die Art, wie diese Register anzulegen sind, wird die Königl. Gesellschaft der Wissenschaften seiner Zeit auf Wunsch gern ihre Ansicht mittheilen.“

Anerbieten des Herrn Oberbibliothekars Dr. Pertsch.

In der Absicht, einem Bewerber um den Preis, welchen die historisch-philologische Classe der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen für dieses Jahr ausgesetzt hat, seine Arbeit zu erleichtern, erkläre ich mich bereit, demselben ein von mir zu meinem eigenen Gebrauche angelegtes, alphabetisches Verzeichniß der arabischen Schriftwerke, welche auf einer großen Anzahl von — meist europäischen — Bibliotheken handschriftlich vorhanden sind, zur Verfügung zu stellen, und bitte denjenigen, welcher von diesem Anerbieten Gebrauch zu machen wünscht, sich zur Feststellung der näheren Bedingungen an mich zu wenden.

Gotha, im Januar 1889.

Dr. W. Pertsch.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September, October 1888.

(Fortsetzung.)

Mémoires de la société des Naturalistes de Kiew. Tome IX. Livraisons 1 et 2. Kiew 1888.
Mémoires de la Société des Naturalistes de la Nouvelle-Russie. Tome XIII. P. 1. Odessa 1888.
Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1887. Christiania 1888.
Die Internationale Polarforschung 1882—1888. Theil II. Erdmagnetismus. Nordlicht. Christiania 1888. Polarstation Bossekop.
Uitkomsten der Rijkswaterpassing 1875—1885. II. Werken van de Nederlandsche Rijkscommission voor Graadmessing en Waterpassing. Gravenhage 1888.
Annales de l'école polytechnique de Delft. Tome IV 1888. 1. et 2. livraison. Leide 1888.
Tijdschrift voor Indische Taal- Land- en Volkenkunde. Deel XXXII. Aflevering 2 u. 3. Batavia 1888.
Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen.
a. Verhandelingen. Deel XLV. Afl. 2.
b. Notulen van de algemeene en Bestuurs vergaderingen. Deel XXV. Afl. IV. Deel XXVI. 1888. Afl. 1. Batavia 1888.
Dagh-Register gehonden in Casteel Batavia. Anno 1653. Batavia 1888.
Atti della R. Accademia dei Lincei 1887. Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol III, Parte 2a. Gennaio al Novembre.
Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Tomo XVIII. Indici degli articoli e dei nomi. Roma 1883.
Società Reale. Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli.
a. Atti. Serie seconda Vol. I. Vol. II.
b. Rendiconti Serie 2ª. Vol I. Anno XXVI fasc. 1—12 1887. Napoli.
Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XXIII, Disp. 13ª e 14ª, 15ª, 1887—88. Torino.
Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, fasc. IV. Luglio-Agosto. Tomo II. Anno 1888.
Annali della R. scuola normale superiore di Pisa; Filosofia e filologia. Vol. V. Della serie. Vol. IX. Pisa 1888.
Rivista meteorico-agraria. Anno IX. N. 23. Seconda Decade di Agosto 1888.
Bollettino delle pubblicazioni italiane 1888. N. 62—67.
De la mesure de la simplicité dans les constr. geometr. p. Lemoine.
Bulletin de la société mathématique de France.
Quelques questiono se rapportant a l'étude des antiparallèles des cotés d'un triangle; p. Lemoine.
Notes a propos du cercle des neuf points p. Lemoine.
Note sur les éléments brocardiens p. Lemoine et Vigarié.
Etude des points inverses p. Lemoine.
Questions diverses sur la géométrie du triangle p. Lemoine 1886 u. 1887.
Bulletin de la société mathématique de France. Tome XVI. N. 4.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

30. Januar. | № 2. | 1889.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung den 5. Januar.

de Lagarde kündigt einen Aufsatz des Herrn Prof. A. Erman in Berlin, Korresp. der Gesellschaft an: »Ueber die Sprache des Papyrus Westcas«.

Klein legt von Herrn Dr. Hilbert in Königsberg i. Pr. vor: »Zur Theorie der algebraischen Gebilde. Zweite Note.«

Schwarz legt von Herrn Dr. O. Hölder vor

1. »Bemerkung zur Quaternionentheorie«.
2. »Ueber einen Mittelwerthssatz«.

Sauppe legt einen Aufsatz von Herrn Prof. Ignazio Guidi in Rom, Korresp. der Gesellschaft, vor: »Le traduzioni dal Copto«.

Zur Theorie der algebraischen Gebilde.
(Zweite Note)[1]).

Von

David Hilbert aus Königsberg in Pr.

Vorgelegt von Felix Klein.

In einer vor kurzem unter gleichem Titel veröffentlichten Mittheilung ist von mir ein Princip entwickelt worden, dessen Kraft sich vornehmlich da bewährt hat, wo es auf den Nachweis der Endlichkeit gewisser Systeme von algebraischen Formen ankommt. Aber die Anwendbarkeit desselben ist auf derartige Fragen keineswegs beschränkt und die vorliegende Note soll zeigen,

1) Vgl. 1888 S. 450 ff.

wie der in jener ersten Mittheilung dargelegte Gesichtspunkt insbesondere zu einer einheitlichen und übersichtlichen Behandlung der charakteristischen Zahlen (Dimension, Ordnung, Geschlechter, Rang, etc.) eines algebraischen Gebildes führt.

Sind $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{lm}$ gegebene ganze Funktionen der n homogenen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so besitzt nach Theorem III das System von l Gleichungen

$$A_{s1} X_1 + A_{s2} X_2 + \ldots + A_{sm} X_m = 0 \ (s = 1, 2, \ldots, l)$$

eine endliche Zahl p von Lösungen

$$X_t = X_{t1},\ X_t = X_{t2},\ \ldots,\ X_t = X_{tp} \ (t = 1, 2, \ldots m)$$

von der Eigenschaft, daß jedes andere jenen Gleichungen genügende Funktionensystem sich in die Gestalt

$$X_t = Y_1 X_{t1} + Y_2 X_{t2} + \ldots + Y_p X_{tp} \ (t = 1, 2, \ldots m)$$

bringen läßt, wo $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ ebenfalls ganze und homogene Funktionen jener n Variablen sind. Unter den p Lösungssystemen möge überdies keines vorhanden sein, welches bereits aus den übrigen durch lineare Combination erhalten werden kann. Wir betrachten nunmehr die Formen $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{mp}$ als bekannt und bestimmen für die Gleichungen:

$$Y_1 X_{t1} + Y_2 X_{t2} + \ldots + Y_p X_{tp} = 0 \ (t = 1, 2, \ldots, m)$$

das volle System von Lösungen

$$Y_s = Y_{s1},\ Y_s = Y_{s2},\ \ldots,\ Y_s = Y_{sq} \ (s = 1, 2, \ldots, p)$$

derart, daß jede andere Lösung die Gestalt

$$Y_s = Z_1 Y_{s1} + Z_2 Y_{s2} + \ldots + Z_q Y_{sq} \ (s = 1, 2, \ldots, p)$$

annimmt. Wenden wir dann dasselbe Verfahren auf das Gleichungssystem

$$Z_1 Y_{s1} + Z_2 Y_{s2} + \ldots + Z_q Y_{sq} = 0 \ (s = 1, 2, \ldots, p)$$

an, so gilt der folgende für unsere weiteren Entwickelungen grundlegende Satz:

Theorem V. Ist ein Gleichungssystem von der Gestalt

$$A_{s1} X_1 + A_{s2} X_2 + \ldots + A_{sm} X_m = 0 \ (s = 1, 2, \ldots, l)$$

vorgelegt, so führt die Aufstellung der Identitäten zwischen den Lösungen desselben zu einem zweiten Gleichungssystem von derselben Gestalt; aus diesem abgeleiteten Gleichungssysteme entspringt in gleicher Weise ein drittes u. s. f. Das so gekennzeichnete Verfahren erreicht stets ein Ende und zwar spätestens nach n-maliger Anwendung, d. h. in der Reihe jener Gleichungssysteme tritt an n^{ter} oder bereits an früherer Stelle ein Gleichungssystem auf, welches keine Lösung mehr besitzt.

Der Beweis dieses Theorems ist nicht ohne Mühe. Durch geeignete Behandlung des vorgelegten Gleichungssystems gelingt es dem abgeleiteten Gleichungssystem eine solche Gestalt zu ertheilen, daß nur eine beschränkte Zahl der Lösungen dieses abgeleiteten Gleichungssystems sämmtliche n Variablen enthält, während dagegen alle übrigen Lösungen von einer jener n Variablen etwa von x_n frei sind. Durch Fortführung dieser Schlußweise und unter Benutzung des Theorems II. wird der Fall von n Variablen auf denjenigen von $n-1$ Variablen zurückgeführt. Um nun die Richtigkeit des Theorems für den Fall $n = 2$ zu erkennen, legen wir die Gleichung

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots + A_m X_m = 0$$

zu Grunde, wo $A_1, A_2, \ldots, A_m$ gegebene binäre Formen von der p^{ten} Ordnung sind. Das volle Lösungssystem dieser Gleichung besteht genau aus $m-1$ Lösungen. Ist nämlich irgend ein System von m Lösungen jener Gleichung vorgelegt, so lassen sich offenbar stets m binäre Formen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ von der Art finden, daß die Relationen

$$Y_1 X_{s1} + Y_2 X_{s2} + \ldots + Y_m X_{sm} = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, m)$$

identisch erfüllt sind. Bezeichnen wir nun die den Formen $X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{mt}$ gemeinsame Ordnung mit π_t und bestimmen einen Linearfaktor von Y_m, so lassen sich unter der Voraussetzung

$$\pi_1 \leqq \pi_2 \leqq \ldots \leqq \pi_m$$

die m Lösungen der gegebenen Gleichung durch lineare Combination derart umgestalten, daß jener Linearfaktor in dem für die neuen Lösungen gültigen Relationensystem überall unterdrückt werden kann. Wird das hiedurch angedeutete Verfahren solange wiederholt, bis sich die Linearfaktoren der Form Y_m erschöpft haben, so ergiebt sich schließlich ein Relationensystem von der Gestalt

$$X_{sm} = a_1 X_{s1} + a_2 X_{s2} + \ldots + a_{m-1} X_{sm-1}, \quad (s = 1, 2, \ldots, m)$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ wiederum binäre Formen sind. In Folge dieses Ergebnisses ist die m^{te} Lösung überflüssig und man erkennt somit, daß die Lösungen eines vollen Lösungssystems der vorgelegten Gleichung sich stets durch gewisse $m-1$ Lösungen ersetzen lassen, welche durch kein weiteres Relationensystem unter einander verknüpft sind d. h.: Bereits das aus der ursprünglichen Gleichung abgeleitete Gleichungssystem ist ein solches, welches keine Lösung besitzt. Es bietet keine Schwierigkeit, dieses Ergebniß auf den Fall mehrerer Gleichungen zu übertragen, deren Coëfficienten binäre Formen von beliebigen Ordnungen sind. Das vorhin ausgesprochene Theorem ist alsdann in der That für das binäre Formengebiet und damit zugleich allgemein als richtig erkannt.

Zur Erläuterung des Theorems diene das Beispiel der Normcurve im vierdimensionalen Raume. Die ursprüngliche Gleichung ist in diesem Fall von der Gestalt

$$\varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_2 + \dots + \varphi_6 X_6 = 0,$$

wo $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6$ die 6 in der ersten Note angegebenen quadratischen Formen der 5 homogenen Coordinaten bedeuten. Das abgeleitete Gleichungssystem enthält 8 Gleichungen und schon das dritte aus 3 Gleichungen bestehende Gleichungssystem besitzt keine Lösung.

Von principieller Bedeutung ist die Behandlung der Gleichung

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 + \dots + x_n X_n = 0;$$

dieselbe giebt nämlich einen Beleg für den Fall, in welchem das in Rede stehende Verfahren thatsächlich erst nach n maliger Anwendung ein Ende erreicht.

Um im Folgenden eine kürzere Ausdrucksweise zu ermöglichen und überdies leichter an bekannte Anschauungen und geläufige Begriffe anknüpfen zu können, nehmen wir an, daß an Stelle eines Systems von Gleichungen nur eine einzige Gleichung von der Gestalt

$$M_1 X_1 + M_2 X_2 + \dots + M_m X_m = 0$$

zu Grunde liege, wo $M_1, M_2, \dots, M_m$ gegebene Formen der n homogenen Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit bestimmten Zahlencoëfficienten und von beliebigen Ordnungen sind. Wir bestimmen zunächst die Zahl der linear von einander unabhängigen Formen M von der ξ^{ten} Ordnung, welche Ausdrücken von der Gestalt

$$M = M_1 X_1 + M_2 X_2 + \dots + M_m X_m$$

identisch gleich sind. Es ist zu diesem Zwecke nur nöthig die Gesammtzahl der in $X_1, X_2, \dots, X_m$ auftretenden bei der Darstellung verfügbaren Coëfficienten um die Zahl der von einander unabhängigen Formensysteme $X_1, X_2, \dots, X_m$ zu vermindern, für welche der obige Ausdruck M von der ξ^{ten} Ordnung identisch verschwindet. Die letztere Zahl hängt, wie die Fortsetzung der angedeuteten Schlußweise zeigt, von der Ordnung der in der Reihe der abgeleiteten Gleichungssysteme als Coëfficienten auftretenden Formen ab. Vermindern wir nun die Zahl der überhaupt vorhandenen linear unabhängigen Formen der ξ^{ten} Ordnung um die eben berechnete Zahl der in obiger Gestalt darstellbaren Formen M, so ergiebt sich die Zahl der linear von einander unabhängigen Bedingungen, welchen die Coëfficienten einer Form der ξ^{ten} Ordnung genügen müssen, damit dieselbe in obige Gestalt gebracht werden kann. Die auf diese Weise berechnete Zahl wird, falls die Ordnung ξ oberhalb einer bestimmten Grenze liegt, durch eine und dieselbe ganze Funktion von ξ ausgedrückt. Da diese Funktion $\chi(\xi)$ für ganzzahlige Argumente nothwendig ganze Zahlen darstellen muß, so können wir setzen

$$\chi(\xi) = \chi_0 + \chi_1 \binom{\xi}{1} + \chi_2 \binom{\xi}{2} + \dots + \chi_\nu \binom{\xi}{\nu}, \quad (\nu < n)$$

wo $\binom{\xi}{1}, \binom{\xi}{2}, \dots, \binom{\xi}{\nu}$ die Binomialcoëfficienten und $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_\nu$ bestimmte von der Natur der Formen $M_1, M_2, \dots, M_m$ abhängige und daher für die gegebene Gleichung charakteristische ganze Zahlen sind. Der eben angedeutete Beweis für die Existenz der Funktion $\chi(\xi)$ beruht, wie man sieht, wesentlich auf Theorem V.

Die folgenden Auseinandersetzungen lehnen an diejenige Bezeichnungsweise und Begriffsbestimmung an, welche L. Kronecker in der von ihm begründeten und neuerdings systematisch ausgebildeten Theorie der Modulsysteme [1]) anwendet. Doch sei im Voraus bemerkt, daß im Unterschiede zu den von L. Kronecker behandelten Fragen in unserer Untersuchung die Homogenität der Moduln $M_1, M_2, \dots, M_m$ bezüglich der Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ eine wesentliche und nothwendige Voraussetzung bildet. Die bisherigen Ergebnisse werden nunmehr, wie folgt, zusammengefaßt:

Die Coëfficienten einer Form von einer genügend hohen Ordnung ξ in den n homogenen Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ müssen genau $\chi(\xi)$ von einander unabhängige lineare Bedingungen erfüllen, damit die Form nach einem gegebenen Modulsystem $(M_1, M_2, \dots, M_m)$ congruent Null sei. Die ganze Funktion $\chi(\xi)$ heiße die „charakteristische Funktion“ jenes Modulsystems.

Wir wenden diese allgemeinen Betrachtungen zunächst auf

1) L. Kronecker, Crelle's Journal, Bd. 92, pag. 70—122, Bd. 93, pag. 365—366, Bd. 99, pag. 329—371, Bd. 100, pag. 490—510. Berliner Sitzungsberichte, 1888 pag. 249—258, 263—281, 331—352, 379—396, 615—648. Vergl. ferner: R. Dedekind und H. Weber, Crelle's Journal, Bd. 92, pag. 181—235, sowie J. Molk, Acta mathematica Bd. 6, pag. 50—165.

den vorhin ausführlicher besprochenen Fall an, in welchem M_1, $M_2, \ldots, M_m$ sämmtlich binäre Formen von der p^{ten} Ordnung sind. Das volle Lösungssystem der Gleichung besteht dann unseren früheren Auseinandersetzungen zufolge aus $m-1$ von einander unabhängigen Lösungen und wenn wir die Ordnungen dieser $m-1$ Lösungen bezüglich mit $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{m-1}$ bezeichnen, so ergiebt sich für die charakteristische Funktion des Modulsystems $(M_1, M_2, \ldots, M_m)$ der constante Werth

$$\chi(\xi) = \chi_0 = p - \pi_1 - \pi_2 - \ldots - \pi_{m-1}.$$

Besitzen nun die Formen $M_1, M_2, \ldots, M_m$ nicht sämmtlich einen gemeinsamen Theiler, so läßt sich offenbar jede Form M von der Ordnung $\xi \geqq 2p-1$ in die Gestalt

$$M = M_1 X_1 + M_2 X_2 + \ldots + M_m X_m$$

bringen und die charakteristische Funktion ist daher nothwendig Null. Auf diese Weise gewinnen wir den folgenden Satz:

Besitzen die binären Formen $M_1, M_2, \ldots, M_m$ von der p^{ten} Ordnung nicht sämmtlich einen gemeinsamen Faktor, so besteht das volle Lösungssystem der Gleichung

$$M_1 X_1 + M_2 X_2 + \ldots + M_m X_m = 0$$

jederzeit aus $m-1$ von einander unabhängigen Lösungen von der Eigenschaft, daß die Summe der Ordnungen dieser Lösungen der Zahl p genau gleichkommt.

Diesen Satz hat bereits F. Meyer[1]) vermuthet und als Postulat bei seinen Untersuchungen über reducible Funktionen verwendet.

Was das Beispiel der Normcurve im vierdimensionalen Raume betrifft, so ergiebt übereinstimmend die direkte Ueberlegung sowie die in der ersten Note an der betreffenden Stelle ausgeführte Rechnung für die charakteristische Funktion des Modulsystems $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_6)$ den Werth $4\xi + 1$.

Das Modulsystem $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ besitzt offenbar die charakteristische Funktion Null und das Gleiche gilt für jedes Modulsystem, welches irgend n Formen mit nicht verschwindender Resultante enthält. Für das ternäre Formengebiet vergleiche man den am Schlusse der ersten Note ausgesprochenen Satz.

Man sieht leicht ein, wie die gekennzeichnete Methode sich für die Theorie der algebraischen Gebilde verwenden läßt. Ist beispielsweise im dreidimensionalen Raume eine Curve oder ein

1) Mathematische Annalen, Bd. 30, pag. 38.

System von Curven und Punkten gegeben, so kann man nach einem in der ersten Note bewiesenen Satze* durch dieses Gebilde stets eine endliche Zahl von Flächen

$$M_1 = 0, \ M_2 = 0, \ \ldots, \ M_m = 0$$

solcher Art hindurchlegen, daß jede andere das Gebilde enthaltende Fläche durch eine Gleichung von der Gestalt

$$X_1 M_1 + X_2 M_2 + \ldots + X_m M_m = 0$$

ausgedrückt wird. Es ist somit offenbar, daß jedem algebraischen Gebilde ein Modulsystem $(M_1, M_2, \ldots, M_m)$ und durch dessen Vermittelung eine bestimmte charakteristische Funktion $\chi(\xi)$ zugehört. Die letztere Funktion giebt dann an, wie viele von einander unabhängige Bedingungen eine Fläche von der oberhalb einer gewissen Grenze liegenden Ordnung ξ erfüllen muß, damit sie das betreffende Gebilde enthalte. So hat die charakteristische Funktion einer doppelpunktslosen Raumcurve von der Ordnung μ und dem Geschlecht p den Werth [1])

$$\chi(\xi) = 1 - p + \mu\xi.$$

Entsprechende Thatsachen gelten für beliebige algebraische Gebilde im n dimensionalen Raume. Findet man nämlich für die charakteristische Funktion eines algebraischen Gebildes den Werth

$$\chi(\xi) = \chi_0 + \chi_1 \binom{\xi}{1} + \chi_2 \binom{\xi}{2} + \ldots + \chi_\nu \binom{\xi}{\nu},$$

so ist stets ν die Dimension und χ_ν die Ordnung des Gebildes, während die übrigen Coëfficienten $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{\nu-1}$ mit den von M. Noether [2]) definirten und behandelten Geschlechtszahlen des Gebildes in engem Zusammenhange stehen. Inwiefern umgekehrt ein Modulsystem durch die Gesammtheit der Werthsysteme bestimmt ist, welche die einzelnen Moduln gleichzeitig zu Null machen, ist eine Frage, welche erst durch eine systematische und alle möglichen Ausnahmefälle umfassende Untersuchung des Noetherschen Fundamentalsatzes für beliebige Dimensionenzahl eine befriedigende und allgemeingültige Beantwortung finden kann.

Wir kehren zur Betrachtung der allgemeinen Modulsysteme zurück und stellen einen auf die charakteristische Funktion derselben bezüglichen Satz auf. Sind irgend zwei Modulsysteme $(M_1, M_2, \ldots, M_m)$ und $(L_1, L_2, \ldots, L_l)$ gegeben, so stelle man zunächst für die Gleichung

1) Vergl. M. Noether, Crelle's Journal Bd. 93, pag. 295.
2) Mathematische Annalen Bd. 2 und 8.

$$M_1 X_1 + M_2 X_2 + \ldots + M_m X_m = L_1 Y_1 + L_2 Y_2 + \ldots + L_l Y_l$$

das volle Lösungssystem

$$\begin{gathered} X_1 = X_{1s}, \quad X_2 = X_{2s}, \quad \ldots, \quad X_m = X_{ms}, \\ Y_1 = Y_{1s}, \quad Y_2 = Y_{2s}, \quad \ldots, \quad Y_l = Y_{ls} \\ (s = 1, 2, \ldots, k) \end{gathered}$$

auf und bilde dann vermöge der Formeln

$$\begin{gathered} K_s = M_1 X_{1s} + M_2 X_{2s} + \ldots + M_m X_{ms} = L_1 Y_{1s} + L_2 Y_{2s} + \ldots + L_l Y_{ls} \\ (s = 1, 2, \ldots, k) \end{gathered}$$

das sogenannte „kleinste enthaltende" Modulsystem $(K_1, K_2, \ldots, K_k)$. Andererseits erhält man durch Zusammenstellung der einzelnen Moduln der beiden gegebenen Systeme das „größte gemeinsame" Modulsystem [1])

$$(M_1, M_2, \ldots, M_m, L_1, L_2, \ldots, L_l) = (G_1, G_2, \ldots, G_g).$$

Es läßt sich nun allgemein zeigen, daß zwischen den charakteristischen Funktionen χ_M und χ_L der beiden gegebenen Modulsysteme und den charakteristischen Funktionen χ_K und χ_G der beiden abgeleiteten Modulsysteme die einfache Relation

$$\chi_M + \chi_L = \chi_K + \chi_G$$

besteht, d. h.:

Die Summe der charakteristischen Funktionen zweier beliebiger Modulsysteme ist gleich der Summe der charakteristischen Funktionen für das kleinste enthaltende und das größte gemeinsame Modulsystem.

Um die Bedeutung dieses Satzes zu erläutern, wenden wir denselben auf die Lösung einer Aufgabe aus der Theorie der Raumcurven an. Es mögen zwei Raumcurven ohne Doppelpunkte von den Ordnungen μ_1, μ_2 und beziehungsweise von den Geschlechtern p_1, p_2 den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ von der Ordnung k_1, k_2 bilden. Die den beiden Raumcurven eigenen Modulsysteme seien $(M_1, M_2, \ldots, M_m)$ und $(L_1, L_2, \ldots, L_l)$. Das kleinste enthaltende Modulsystem ist offenbar (K_1, K_2) und das größte gemeinsame Modulsystem $(M_1, M_2, \ldots, M_m, L_1, L_2, \ldots, L_l)$ wird geometrisch durch diejenigen Punkte dargestellt, welche beiden Raumcurven gemeinsam sind. Die Zahl

---

1) Vergl. betreffs der Begriffsbestimmung: L. Kronecker, Crelle's Journal Bd. 92, pag. 78 sowie R. Dedekind und H. Weber, Crelle's Journal Bd. 92, pag. 197.

dieser Punkte sei g. Die in Betracht kommenden charakteristischen Funktionen sind

$$\chi_M = 1 - p_1 + \mu_1 \xi, \quad \chi_K = -\tfrac{1}{2} k_1^2 k_2 - \tfrac{1}{2} k_1 k_2^2 + 2 k_1 k_2 + k_1 k_2 \xi,$$
$$\chi_L = 1 - p_2 + \mu_2 \xi, \quad \chi_G = g,$$

und die Anwendung unseres Theorems ergiebt daher für die Zahl der den beiden Raumcurven gemeinsamen Punkte den Werth

$$g = \tfrac{1}{2} k_1^2 k_2 + \tfrac{1}{2} k_1 k_2^2 - 2 k_1 k_2 - p_1 - p_2 + 2.$$

In den citirten Untersuchungen über Modulsysteme werden noch eine Reihe weiterer für die Theorie der Modulsysteme fundamentaler Begriffe erörtert. Die dort gegebenen Definitionen sind nach geringfügigen Modifikationen auch für die hier betrachteten Systeme homogener Moduln gültig. So heißen bei unserer Auffassung zwei Modulsysteme „aequivalent“, wenn von einer gewissen Ordnung in den Variablen an eine jede bezüglich des einen Modulsystems der Null congruente Form auch stets bezüglich des anderen Modulsystems der Null congruent ist. Zwei aequivalente Modulsysteme haben daher nothwendig dieselbe charakteristische Funktion, und im besonderen sind alle Modulsysteme mit der charakteristischen Funktion Null der Einheit aequivalent.

Zum Schlusse sei noch auf die von Cayley, G. Salmon, S. Roberts und A. Brill ausgebildete Theorie der sogenannten beschränkten Gleichungssysteme[1]) hingewiesen, da insbesondere für diesen Zweig der Algebra unser Begriff der charakteristischen Funktion eine wirksame Fragestellung sowie einen einheitlichen Gesichtspunkt liefert. Ist beispielsweise eine Raumcurve gegeben und betrachten wir irgend drei dieselbe enthaltende Flächen $f = 0$, $g = 0$, $h = 0$ beziehungsweise von den Ordnungen r, s, t, so ist die Zahl der Schnittpunkte dieser Flächen, welche außerhalb jener Raumcurve liegen, offenbar gleich der charakteristischen Funktion des Modulsystems (f, g, h), vermindert um die charakteristische Funktion der Raumcurve. Diese Schlußweise führt in der That zu einem verallgemeinerungsfähigen Beweise für den bekannten Satz, wonach die Zahl der durch eine gemeinsame Raumcurve absorbirten Schnittpunkte jener drei Flächen gleich $\mu(r+s+t) - \rho$ ist, wenn μ die Ordnung der Raumcurve und ρ eine andere jener Raumcurve eigene Constante, den sogenannten Rang derselben, bedeutet.

1) Vergl. G. Salmon, Algebra der linearen Transformationen, Vorlesung 22 und 23, sowie den bezüglichen Litteraturnachweis.

Die weitere Aufgabe der im Vorstehenden entwickelten Theorie besteht nunmehr in der wirklichen Durchführung der den oben angedeuteten Anzahlbestimmungen zu Grunde liegenden algebraischen Processe.

Bemerkung zur Quaternionentheorie.

Von

O. Hölder.

Vorgelegt von H. A. Schwarz.

Für die Grundoperationen im Gebiete der reellen und der gewöhnlichen complexen, in der Form $x + yi$ enthaltenen Größen bestehen die Gesetze:

$$(1) \quad \begin{cases} a+b = b+a \\ (a+b)+c = a+(b+c) \\ a\,.\,b = b\,.\,a \\ (ab)\,.\,c = a(bc) \\ (a+b)\,.\,c = ac+bc. \end{cases}$$

Die umgekehrten Operationen, Subtraction und Division können hier übergangen werden. Das angegebene System ist vollständig. Bedeuten nämlich $a_1, a_2, \ldots a_n$ ganz willkürlich veränderliche Größen, und bildet man aus diesen unter Hinzunahme von einigen bestimmt gegebenen reellen Größen durch mehrfache Anwendung der Addition und Multiplication neue Größen, welche also Functionen von $a_1, a_2, \ldots a_n$ sind, so ist die fundamentale Frage die: Unter welcher Bedingung stimmen zwei solcher Functionen, die verschieden gebildet sind, für alle Werthe der Größen a_1, $a_2, \ldots a_n$ überein? Diese Frage ist gleichwerthig mit der folgenden: Wann ist eine solche Größe für alle Werthe von $a_1, a_2, \ldots a_n$ gleich Null? Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn der fragliche Ausdruck vermöge der mit (1) bezeichneten Relationen identisch zu Null gemacht werden kann. Es ist wohl kaum hinzuzufügen, daß der Begriff „identisch" hier nicht in dem sonst in der Algebra üblichen Sinn, sondern nur seinem rein logischen Inhalt nach zu nehmen ist.

Der Beweis der aufgestellten Behauptung ergiebt sich daraus, daß jeder durch Addition und Multiplication gebildete Ausdruck mit Hilfe der Gleichungen (1) geordnet werden kann, und daß der geordnete Ausdruck nach dem Cartesischen Satz nicht für alle

Werthe der Veränderlichen gleich Null sein kann, ohne daß alle Coefficienten gleich Null sind.

In diesem Sinn besitzt also das System der Gleichungen (1) den Charakter der Vollständigkeit.

Betrachtet man jetzt die Hamilton'schen Quaternionen, so bleiben von den Gleichungen (1) nur die folgenden bestehen:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} a+b &= b+a \\ (a+b)+c &= a+(b+c) \\ (ab)\,.\,c &= a\,.\,(bc) \\ (a+b)\,.\,c &= ac+bc. \end{aligned}\right.$$

Dazu muß wegen des Wegfalls des commutativen Gesetzes bei der Multiplication noch die Gleichung

$$(2)\qquad c\,(a+b) = ca+cb$$

besonders hinzugefügt werden.

Es erhebt sich nun die Frage, ob dieses letzte Gleichungssystem für die Quaternionen in derselben Weise vollständig ist, wie das andere für die gewöhnlichen complexen Größen. Diese Frage ist zu verneinen.

Bedeuten $a_1, a_2, \ldots a_n$ Quaternionen, welche als willkürlich veränderlich gedacht werden, so mögen aus diesen wieder durch Addition und Multiplication zusammengesetzte Ausdrücke gebildet werden. Es ist vortheilhaft noch gewisse constante reelle Größen als Multiplicatoren mit hinzuzunehmen, man hat dann zugleich auch die Subtraction mit in den Kreis der Operationen eingeschlossen. Für die Multiplication der Quaternionen mit reellen Größen $p, q,$ hat man dann noch die Gleichungen hinzuzunehmen

$$(3)\qquad \begin{aligned} p\,(a+b) &= pa+pb \\ (p+q)\,a &= pa+qa \\ (pa)\,.\,(qb) &= pq\,(ab) \\ p\,.\,(qa) &= (pq)\,.\,a. \end{aligned}$$

Will man nun eine in der angegebenen Weise zusammengesetzte, von $a_1, a_2, \ldots a_n$ abhängende Quaternion darauf untersuchen, ob dieselbe für alle Werthe dieser Veränderlichen gleich Null ist, so hat man nur in die vier Bestandtheile aufzulösen. Jede Quaternion a_k ist nichts anderes als ein Symbol

$$a_k = \alpha_k i_0 + \beta_k i_1 + \gamma_k i_2 + \delta_k i_3,$$

wo $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$ reelle Größen sind, und wobei die Multiplication der Symbole durch die Multiplicationsformeln für die Einheiten

$$i_0^2 = i_0\,,\quad i_0 i_1 = i_1 i_0 = i_1\,,\quad i_0 i_2 = i_2 i_0 = i_2\,,\quad i_0 i_3 = i_3 i_0 = i_3,$$
$$i_1^2 = -i_0\,,\qquad i_2^2 = -i_0\,,\qquad i_3^2 = -i_0\,,$$
$$i_1 i_2 = i_3\,,\qquad i_2 i_3 = i_1\,,\qquad i_3 i_1 = i_2\,,$$
$$i_2 i_1 = -i_3\,,\quad i_3 i_2 = -i_1\,,\quad i_1 i_3 = -i_2$$

definirt ist. Löst man also die Quaternionen auf, so führen die Gleichungen (1) zum Ziel. Es ist aber nicht möglich, wie nachher gezeigt wird, die Untersuchung dadurch schon zu führen, daß man, ohne die Quaternionen in ihre Bestandtheile aufzulösen, den betreffenden Quaternionenausdruck mit Hilfe der Gleichungen (2) und (3) identisch zu Null zu machen sucht.

Man kann dagegen die Frage aufwerfen, ob man den Gleichungen (2) noch eine oder mehrere Gleichungen hinzufügen kann, so daß das System dadurch ein im angegebenen Sinne vollständiges ist.

Die zu untersuchenden Ausdrücke sind nichts Anderes als ganze Functionen von Quaternionen mit reellen Coefficienten. Man setze jetzt für $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Quaternionen

$$t_1 a_1\,,\quad t_2 a_2\,,\ \ldots\ t_n a_n\,,$$

wo $t_1, t_2, \ldots t_n$ beliebige reelle Größen sind, so kann man auch nach diesen letzteren ordnen. Wenn der Ausdruck für alle Werthe der $a_1 \ldots a_n$, also auch der Größen t verschwindet, ergiebt eine nähere Ueberlegung, daß die Quaternion verschwinden muß, welche mit dem Product

$$t_1^{m_1} t_2^{m_2} \ldots t_n^{m_n}$$

multiplicirt ist. Es muß also dann ein Ausdruck gleich Null sein in dessen sämmtlichen Gliedern a_1 genau m_1 Mal, a_2 genau m_2 Mal, $\ldots a_n$ genau m_n Mal als Factor vorkommt. Es könnten also noch Gleichungen von folgender Form hinzukommen:

$$\Sigma\, C_{s_1 s_2 \ldots s_\nu}\, a_{s_1} a_{s_2} \ldots a_{s_\nu} = 0, \tag{4}$$

wo die Größen $C_{s_1 s_2 \ldots s_\nu}$ reelle Coefficienten sind, und die Summe über gewisse Permutationen $s_1, s_2, \ldots s_\nu$ bestimmter Zahlen $r_1, r_2, \ldots r_\nu$ sich erstreckt. Die Zahlen r sind aus der Reihe $1, 2, \ldots n$ entnommen, und es können auch gleiche unter denselben sein.

Hier möge nur der Fall betrachtet werden, in welchem die Größen $r_1, r_2, \ldots r_\nu$ von einander verschieden sind; man könnte die andern Fälle auf diesen zurückführen, was hier nicht ausgeführt werden soll. Man denke sich jetzt

$$\alpha_{r_1} i_0 + \beta_{r_1} i_1 + \gamma_{r_1} i_2 + \delta_{r_1} i_3$$

für a_{r_1} eingesetzt und entsprechend mit den Quaternionen a_{r_2}, $a_{r_3}, \ldots a_{r_\nu}$ verfahren, dann kann man nach den Größen α, β, γ, δ ordnen. Mit dem Product

$$\alpha_{r_1} \beta_{r_2} \gamma_{r_3} \alpha_{r_4} \ldots \alpha_{r_\nu},$$

welches ich als Beispiel herausgreife, erscheint die Quaternion multiplicirt, welche aus dem Ausdruck (4) dadurch hervorgeht, daß die Einheiten

$$i_0, i_1, i_2, i_0, \ldots i_0$$

beziehungsweise für $a_{r_1}, a_{r_2}, a_{r_3}, a_{r_4}, \ldots a_{r_\nu}$ gesetzt werden.

Wenn die Gleichung (4)

$$\Sigma C_{s_1 s_2 \ldots s_\nu} a_{s_1} a_{s_2} \ldots a_{s_\nu} = 0$$

bestehen soll, so muß dieselbe auch erfüllt sein, wenn für die Größen $a_{r_1} a_{r_2} \ldots a_{r_\nu}$ irgend welche Einheiten aus der Reihe

$$i_0, i_1, i_2, i_3$$

gesetzt werden. Aus dem unmittelbar vorhergehenden folgt zugleich, daß es auch hinreicht, wenn die Gleichung bei jeder Wahl der Einheiten erfüllt ist.

In der That existiren solche Gleichungen. Es ist

$$\Sigma \pm a_{s_1} a_{s_2} a_{s_3} a_{s_4} = 0 \tag{5}$$

wenn die Summe über alle Permutationen s_1, s_2, s_3, s_4 der Zahlen 1, 2, 3, 4 erstreckt wird, und dabei das obere oder untere Vorzeichen genommen wird, je nachdem die Substitution

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{pmatrix}$$

eine gerade oder eine ungerade ist. Setzt man auf der linken Seite der Gleichung (5) zwei der Quaternionen a_1, a_2, a_3, a_4 einander gleich, so heben sich je zwei Glieder gegeneinander auf, nämlich zwei solche, welche durch Vertauschung der beiden gleichgesetzten Größen aus einander hervorgehen. Um nun die Probe für die Richtigkeit der Gleichung (5) zu machen, setze man für a_1, a_2, a_3, a_4 irgend welche 4 aus den Einheiten i_0, i_1, i_2, i_3. Nimmt man dabei zwei oder mehr gleiche Einheiten, so verschwindet nach dem Vorhergehenden der Ausdruck. Man hat also nur noch a_1, a_2, a_3, a_4 gleich einer Permutation von i_0, i_1, i_2, i_3 zu setzen. Man setze zunächst $a_1 = i_0$. Faßt man dabei allemal solche Glieder zusammen, in welchen die Buchstaben a_2, a_3, a_4 dieselbe Stellung zu einander einnehmen, so erhält man 6 Aggregate von je 4 Gliedern, z. B.

$$a_1 a_2 a_3 a_4 - a_2 a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_1 a_4 - a_2 a_3 a_4 a_1.$$

Da nun $a_1 = i_0$ gesetzt ist, haben die 4 Glieder allemal denselben Werth, wenn man vom Vorzeichen absieht, und das Vorzeichen ist bei zwei Gliedern gleich und entgegengesetzt dem Vorzeichen der beiden andern. Es wird also der ganze Ausdruck gleich Null. Dasselbe geschieht auch, wenn a_2, a_3 oder a_4 gleich i_0 gesetzt wird.

Damit ist die Allgemeingiltigkeit der Gleichung (5) nachgewiesen. Entsprechend könnte man die entsprechende Gleichung

$$\Sigma \pm a_{s_1} a_{s_2} a_{s_3} a_{s_4} a_{s_5} = 0$$

beweisen. Diese läßt sich übrigens direct aus der andern ableiten, indem man in dem neuen Ausdruck jedesmal solche Glieder zusammenfaßt, welche denselben äußersten Factor links besitzen. Dasselbe gilt von den Ausdrücken, welche analog aus mehr als fünf Quaternionen gebildet werden können.

Die Frage, ob das System der Gleichungen (2) durch die Gleichung (5) vollständig gemacht wird, bleibt noch offen.

Ueber einen Mittelwerthssatz.

Von

O. Hölder.

Vorgelegt von H. A. Schwarz.

1.

Im Messenger of Mathematics vol. XVII no. 10 hat Herr L. J. Rogers gezeigt, wie aus der Thatsache, daß das geometrische Mittel aus beliebig vielen positiven Werthen stets kleiner ist als das arithmetische, eine Reihe von Ungleichungen abgeleitet werden kann. Diese Ungleichungen, welche bei Convergenzuntersuchungen Dienste leisten können, lassen sich aus einem allgemeinen Theorem unmittelbar ableiten, welches durch seinen Zusammenhang mit den Principien der Differentialrechnung ein besonderes Interesse beansprucht.

Bedeutet nämlich $\varphi(x)$ eine Function einer reellen Veränderlichen mit zunehmendem Differentialquotienten, so ist das arithmetische Mittel aus einer beliebigen Zahl von Functionswerthen stets größer als der Functionswerth, welcher dem in derselben Weise gebildeten Mittelwerth der zugehörigen Argumente entspricht. Dabei ist der Begriff des arithmetischen Mittels gleich in der allgemeinen Weise zu nehmen, daß jedem der Werthe, aus welchen dasselbe zu bilden ist, eine beliebige positive Größe als Gewicht zugeordnet wird, so daß also die Formel

$$\frac{a_1\varphi(x_1) + a_2\varphi(x_2) + \cdots + a_n\varphi(x_n)}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} > \varphi\left(\frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\right)$$

den Ausdruck des genannten Satzes darstellt.

2.

Um diesen Satz zu beweisen, beginne ich mit dem Fall, in welchem zwei Argumente x_1 und x_2 vorhanden sind. Der Mittelwerth werde mit s bezeichnet,

$$s = \frac{a_1x_1 + a_2x_2}{a_1 + a_2},$$

wo a_1 und a_2 positive Größen bedeuten.

Der Einfachheit wegen möge angenommen werden, daß die Größe x_1 die kleinere sei, so daß also

$$x_1 < s < x_2$$

ist. Nach dem Fundamentalsatz der Differentialrechnung ist nun

$$\varphi(x_1) - \varphi(s) = (x_1 - s)\,[\varphi'(x)]_{x_1, s}$$

wo $[\varphi'(x)]_{x_1, s}$ einen unbekannten Mittelwerth aus den Werthen von $\varphi'(x)$ im Intervall $x_1, \ldots s$ bedeutet. Man findet daher

$$\varphi(x_1) - \varphi(s) = \frac{a_2}{a_1 + a_2}(x_1 - x_2)\,[\varphi'(x)]_{x_1, s}$$

und ganz ebenso

$$\varphi(x_2) - \varphi(s) = \frac{a_1}{a_1 + a_2}(x_2 - x_1)\,[\varphi'(x)]_{s, x_2}.$$

Indem man jetzt mit a_1 beziehungsweise mit a_2 multiplicirt und dann addirt, ergeben die beiden letzten Gleichungen die Relation

$$\begin{aligned} &a_1\varphi(x_1) + a_2\varphi(x_2) - (a_1 + a_2)\varphi(s) \\ &= \frac{a_1a_2}{a_1 + a_2}(x_2 - x_1)\left\{[\varphi'(x)]_{s, x_2} - [\varphi'(x)]_{x_1, s}\right\}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist der Differentialquotient $\varphi'(x)$ eine zunehmende Function, es ist also auch

$$[\varphi'(x)]_{s, x_2} > [\varphi'(x)]_{x_1, s}$$

und es folgt somit aus der vorhergehenden Relation, daß

$$a_1 \varphi(x_1) + a_2 \varphi(x_2) - (a_1 + a_2) \varphi(s) > 0$$

ist.

3.

Aus dem zuletzt gewonnenen Resultat kann der gewünschte Beweis durch Wiederholung hergestellt werden. Ich nehme noch weitere $n-2$ Argumente $x_3, x_4, \ldots x_n$ an; die zugehörigen positiven Gewichte seien $a_3, a_4 \ldots a_n$. Zur Abkürzung werde außerdem

$$s_1 = \frac{(a_1 + a_2) s + a_3 x_3}{a_1 + a_2 + a_3} = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3}{a_1 + a_2 + a_3},$$

$$s_2 = \frac{(a_1 + a_2 + a_3) s_1 + a_4 x_4}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4},$$

. . . .

gesetzt.

Nun ist

$$a_1 \varphi(x_1) + a_2 \varphi(x_2) - (a_1 + a_2) \varphi(s) > 0$$
$$(a_1 + a_2) \varphi(s) + a_3 \varphi(x_3) - (a_1 + a_2 + a_3) \varphi(s_1) > 0$$
$$(a_1 + a_2 + a_3) \varphi(s_1) + a_4 \varphi(x_4) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \varphi(s_2) > 0$$

. . . .

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) \varphi(s_{n-3}) + a_n \varphi(x_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \varphi(s_{n-2}) > 0.$$

Durch Addition erhält man hieraus

$$a_1 \varphi(x_1) + a_2 \varphi(x_2) + \ldots + a_n \varphi(x_n)$$
$$- (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \varphi(s_{n-2}) > 0,$$

womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Aus der Art der Herleitung ergiebt sich, daß in der letzten Ungleichung das Zeichen $>$ im strengen Sinn zu nehmen, d. h. die Gleichheit auszuschließen ist, vorausgesetzt, daß die Function $\varphi'(x)$ wirklich stets zunimmt, also in keinem Intervall constant ist, daß ferner die Argumente $x_1, x_2, \ldots x_n$ nicht alle einander gleich sind und die Größen $a_1, a_2, \ldots a_n$ sämmtlich einen von Null verschiedenen Werth haben. Tritt eine der genannten Ausnahmen ein, so ist an Stelle des Zeichens $>$ das Zeichen $\geqq$ zu setzen.

Ein analoger Satz besteht unter der Voraussetzung, daß $\varphi'(x)$ eine abnehmende Function ist; man hat dann das Zeichen $>$ in das Zeichen $<$ zu verwandeln.

4.

Unter der Voraussetzung, daß die Function $\varphi(x)$ einen zweiten Differentialquotienten besitzt, kann noch eine weitere Schlußfolgerung gezogen werden. Zunächst gewinnt der Satz jetzt die Form, daß

$$\frac{a_1\varphi(x_1)+a_2\varphi(x_2)+\cdots+a_n\varphi(x_n)}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \gtrless \varphi\left(\frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}\right)$$

ist, je nachdem der zweite Differentialquotient $\varphi''(x)$ in dem ganzen in Betracht kommenden Intervall positiv oder im ganzen Intervall negativ ist.

Ich lasse jetzt die Voraussetzung fallen, daß der erste Differentialquotient immer zunehmen oder immer abnehmen soll. Die Function $\varphi''(x)$ kann also ihr Vorzeichen ändern, dieselbe möge aber zwischen endlichen Grenzen bleiben in dem betrachteten Intervall, in welchem die Argumente $x_1, x_2, \ldots x_n$ gelegen sind. M sei die obere, N die untere Grenze dieser Function. Es ist dann

$$\varphi(x)-\tfrac{1}{2}Nx^2$$

eine Function mit positivem und

$$\varphi(x)-\tfrac{1}{2}Mx^2$$

eine Function mit negativem zweitem Differentialquotienten.

Wendet man auf jede dieser beiden Functionen den gefundenen Satz an, so ergiebt sich, wenn jetzt σ an Stelle von s_{n-2} gesetzt wird, daß der Ausdruck

$$a_1\varphi(x_1)+a_2\varphi(x_2)+\cdots+a_n\varphi(x_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_n)\varphi(\sigma)$$

größer ist als

$$\tfrac{1}{2}N\left\{a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2-(a_1+a_2+\cdots+a_n)\sigma^2\right\}$$

und kleiner als

$$\tfrac{1}{2}M\left\{a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2-(a_1+a_2+\cdots+a_n)\sigma^2\right\}.$$

Es ist also

$$a_1\varphi(x_1)+a_2\varphi(x_2)+\cdots+a_n\varphi(x_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_n)\varphi(\sigma)$$

$$=\tfrac{1}{2}[N,M]\times\frac{S}{a_1+a_2+\cdots+a_n},$$

wo

$$[N,\ M]$$

einen zwischen N und M gelegenen Werth bedeutet und S eine Abkürzung ist:

$$S =$$
$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2) - (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n)^2.$$

Dieser Ausdruck kann auch so dargestellt werden:

$$S = \sum_{\nu,\mu} a_\nu a_\mu x_\mu^2 - \sum_{\nu,\mu} a_\nu a_\mu x_\nu x_\mu,$$

wo die Summationsbuchstaben ν und μ in den Doppelsummen die ganzen Zahlen von 1 bis n durchlaufen. Der Ausdruck

$$\sum_{\nu,\mu} a_\nu a_\mu x_\nu^2 - \sum_{\nu,\mu} a_\nu a_\mu x_\nu x_\mu$$

ist mit dem vorhergehenden identisch. Bildet man die halbe Summe von beiden, so erhält man

$$S = \tfrac{1}{2} \sum_{\nu,\mu} a_\nu a_\mu (x_\nu - x_\mu)^2.$$

In dieser Summe reduciren sich alle diejenigen Glieder auf Null, für welche $\nu = \mu$ ist. Man kann den Factor $\frac{1}{2}$ weglassen, wenn man dafür die Summe über alle Paare von einander verschiedener Zahlen ν, μ aus der Reihe 1, 2, . . n erstreckt und dabei jedes Zahlenpaar nur einmal nimmt.

Schließlich findet man also

$$\Sigma\, a_\nu \varphi(x_\nu) - \varphi(\sigma) \cdot \Sigma\, a_\nu = \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{M} \frac{\Sigma\, a_\nu a_\mu (x_\nu - x_\mu)^2}{\Sigma\, a_\nu},$$

wo $\mathfrak{M}$ einen Mittelwerth bedeutet aus den Werthen des zweiten Differentialquotienten $\varphi''(x)$, und die Summe im Zähler rechts in der angegebenen Weise aufzufassen ist. Dabei ist

$$\sigma = \frac{\Sigma\, a_\nu x_\nu}{\Sigma\, a_\nu}.$$

5.

Dieses Resultat kann auch aus der Restformel der Taylor'schen Reihe abgeleitet werden. Es ist

$$\varphi(x_\nu) = \varphi(\sigma) + (x_\nu - \sigma)\varphi'(\sigma) + \tfrac{1}{2}(x_\nu - \sigma)^2 \mathfrak{M}_\nu,$$

wo $\mathfrak{M}_\nu$ einen Mittelwerth aus den Werthen der Function $\varphi''(x)$ im Intervall $\sigma \ldots x_\nu$ bedeutet. Multiplicirt man mit a_ν und summirt man von $\nu = 1$ bis $\nu = n$, so ergiebt sich

$$\Sigma\, a_\nu \varphi(x_\nu) = \varphi(\sigma)\,\Sigma\, a_\nu + \varphi'(\sigma)\,\Sigma\, a_\nu (x_\nu - \sigma)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\, \Sigma\, \mathfrak{M}_\nu a_\nu (x_\nu - \sigma)^2.$$

Nun ist

$$\Sigma a_\nu (x_\nu - \sigma) = \Sigma a_\nu x_\nu - \sigma \Sigma a_\nu = 0.$$

Ferner ist nach dem gewöhnlichen Mittelwerthssatz

$$\Sigma \mathfrak{M}_\nu a_\nu (x_\nu - \sigma)^2 = \mathfrak{M} \Sigma a_\nu (x_\nu - \sigma)^2,$$

wo $\mathfrak{M}$ einen Mittelwerth von

$$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots \mathfrak{M}_n$$

bedeutet. Es ist aber

$$\Sigma a_\nu (x_\nu - \sigma)^2 = \Sigma a_\nu x_\nu^2 - 2\sigma \Sigma a_\nu x_\nu + \sigma^2 \Sigma a_\nu.$$

Setzt man hierin

$$\Sigma a_\nu x_\nu = \sigma \Sigma a_\nu,$$

so erhält man

$$\Sigma a_\nu x_\nu^2 - \sigma^2 \Sigma a_\nu,$$

also den früher mit

$$\frac{S}{\Sigma a_\nu}$$

bezeichneten Ausdruck. Damit kommt man auf die Formel

$$\Sigma a_\nu \varphi(x_\nu) - \varphi(\sigma) \Sigma a_\nu = \tfrac{1}{2} \mathfrak{M} \frac{\Sigma a_\nu a_\mu (x_\nu - x_\mu)^2}{\Sigma a_\nu}$$

zurück.

6.

In dem Fall, in welchem zwei Argumente x_1 und x_2 nur vorhanden sind, erhält man, falls $a_1 = a_2 = 1$ gesetzt wird:

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) - 2\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \tfrac{1}{4} \mathfrak{M} \cdot (x_1 - x_2)^2.$$

Dieses Ergebniß ist sehr bekannt. In der Theorie der Functionen zweier reellen Veränderlichen besteht eine analoge Beziehung. Bedeutet nämlich V eine Function von x und y und R den Radius eines Kreises in der Ebene, deren Punkte die Werthepaare x, y vorstellen, so ist

$$\int_P V dp - 2\pi R \cdot V_0 = \tfrac{1}{2} \pi R^3 [\Delta V].$$

Das Integral ist über die Peripherie P des Kreises zu erstrecken, dp ist das Bogenelement. V_0 ist der Werth der Function im Mittelpunkt des Kreises und $[\Delta V]$ ist ein Mittelwerth aus den Werthen der Größe

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

für die Kreisfläche. Unter der Annahme, daß die Function V mit ihren ersten und zweiten Differentialquotienten stetig sei, läßt die genannte Relation sich aus dem Green'schen Satz ableiten.

7.

Es mögen jetzt in der Grundformel für $\varphi(x)$ die einfachsten Functionen eingesetzt werden. Zunächst sei

$$\varphi(x) = x^m,$$

wo m eine beliebige reelle Größe bedeuten soll. Es ist $\varphi''(x) > 0$, wenn $m > 1$ oder $m < 0$ ist, und $\varphi''(x) < 0$, wenn $0 < m < 1$ ist; dabei soll das Argument x auf positive Werthe beschränkt werden. Man findet nun

$$(\Sigma a_\nu)^{m-1} \cdot \Sigma a_\nu x_\nu^m > (\Sigma a_\nu x_\nu)^m,$$

falls $m > 1$ oder $m < 0$ ist. Nimmt man an, daß

$$1 < m < 2$$

ist, so erhält man für den Exponenten $m - 1$ die Ungleichung

$$(\Sigma a_\nu)^{m-2} \cdot \Sigma a_\nu x_\nu^{m-1} < (\Sigma a_\nu x_\nu)^{m-1}.$$

Durch Combination der beiden letzten Relationen ergiebt sich

$$\Sigma a_\nu \cdot \Sigma a_\nu x_\nu^m > \Sigma a_\nu x_\nu^{m-1} \cdot \Sigma a_\nu x_\nu.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\Sigma a_\nu x_\nu^m = \tau_m,$$

so kann man die gewonnenen Ungleichungen in die Formen

$$\tau_0^{m-1} \tau_m > \tau_1^m$$

und

$$\tau_0 \tau_m > \tau_{m-1} \tau_1$$

setzen. Da man nun in den Formeln a_ν durch $a_\nu x_\nu^k$ und x_ν durch x_ν^r ersetzen kann, so muß es gestattet sein, in jeder der letzten Ungleichungen die Indices der Größen τ sämmtlich um eine und dieselbe Größe zu vermehren oder zu vermindern, oder diese Indices sämmtlich mit derselben Größe zu multipliciren. Dadurch gewinnt man unmittelbar die von Herrn Rogers aufgestellten Ungleichungen § 3 (1), (2) und § 1 (3), (5).

8.

Setzt man $\varphi(x) = e^x$, so erhält man

$$\frac{a_1 e^{x_1} + a_2 e^{x_2} + \cdots + a_n e^{x_n}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} > e^{\frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n}{a_1 + a_2 \cdots + a_n}},$$

oder, wenn

$$e^{x_\nu} = y_\nu$$

gesetzt wird,

$$\left(\frac{a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\right)^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} > y_1^{a_1} \cdot y_2^{a_2} \cdots y_n^{a_n}.$$

Dies ist der Satz vom arithmetischen und geometrischen Mittel in seiner allgemeinsten Gestalt, wie ihn Herr Rogers zum Ausgangspunkt wählt, § 1 (1).

Setzt man $\varphi(x) = \log x$, so ergiebt sich, indem man sich auf positive Argumente beschränkt

$$\log \frac{\Sigma a_\nu x_\nu}{\Sigma a_\nu} > \frac{\Sigma a_\nu \log x_\nu}{\Sigma a_\nu},$$

Vgl. a. a. O. § 4.

Falls an Stelle von $\varphi(x)$ die Function $x \log x$ genommen wird, und die Größen

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$$

gesetzt werden, so erhält man wieder für positive Argumente

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \log \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$
$$< \frac{1}{n}\{x_1 \log x_1 + x_2 \log x_2 + \cdots + x_n \log x_n\},$$

oder, wenn man die Logarithmen fortschafft,

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^{x_1 + x_2 + \cdots + x} < x_1^{x_1} \cdot x_2^{x_2} \cdots x_n^{x_n},$$

Vergl. a. a. O. § 1 (2).

9.

Für die trigonometrischen Functionen ergeben sich folgende Resultate:

$$\frac{a_1 \sin x_1 + a_2 \sin x_2 + \cdots + a_n \sin x_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} < \sin \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n},$$

vorausgesetzt, daß

$$0 < x_\nu < \pi.$$

Liegen die Größen x alle im Intervall $\pi \ldots 2\pi$ so hat man an Stelle des Zeichens $<$ das Zeichen $>$ zu nehmen. Ebenso findet man

$$\frac{a_1 \operatorname{tg} x_1 + a_2 \operatorname{tg} x_2 + \cdots + a_n \operatorname{tg} x_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} > \operatorname{tg} \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n},$$

falls die Argumente alle im Intervall $0 \cdots \frac{\pi}{2}$ oder alle im Intervall $\pi \cdots \frac{3\pi}{2}$ gelegen sind. Für die Intervalle $\frac{\pi}{2} \cdots \pi$ und $\frac{3\pi}{2} \cdots 2\pi$ gilt wieder das Umgekehrte.

10.

Von dem bekannten Satz, daß (für $m > 1$)

$$n^{m-1} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^m > \left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right)^m$$

ist, welcher durch Specialisirung einer unter 7. gegebenen Formel sich ergiebt, folgt hier noch eine Anwendung auf Reihenconvergenz. Ich beweise den Lehrsatz: Wenn für die positiven Größen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu^m \qquad (m > 1)$$

convergirt, so gilt dasselbe von der Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x_\nu}{\nu^{\frac{m-1}{m}+\varrho}},$$

wenn $\varrho > 0$ ist.

Aus der gegebenen Formel schließt man, daß

$$\sum_1^n x_\nu < n^{\frac{m-1}{m}} \left(\sum_1^n x_\nu^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

ist, also wegen der Convergenz der Summe

$$\sum_1^{\infty} x_\nu^m,$$

daß für jeden Werth von n

$$\sum_1^n x_\nu < \text{const. } n^{\frac{m-1}{m}}$$

bleibt.

Wendet man jetzt die partielle Summation an, so ergiebt sich, indem

$$\sigma_n = \sum_1^n x_\nu$$

gesetzt wird:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu}{\nu^{\frac{m-1}{m}+\varrho}} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \sigma_\nu \left\{ \frac{1}{\nu^{\frac{m-1}{m}+\varrho}} - \frac{1}{(\nu+1)^{\frac{m-1}{m}+\varrho}} \right\} + \frac{\sigma_n}{n^{\frac{m-1}{m}+\varrho}}.$$

Weil nun

$$\sigma_n < \text{const. } n^{\frac{m-1}{m}}$$

ist, so muß

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n}{n^{\frac{m-1}{m}+\varrho}} = 0$$

sein, denn ρ ist eine positive, von Null verschiedene Größe. Um den anderen Theil zu beurtheilen, entwickelt man

$$\frac{1}{\nu^{\frac{m-1}{m}+\varrho}} - \frac{1}{(\nu+1)^{\frac{m-1}{m}+\varrho}} = \frac{1}{\nu^{\frac{m-1}{m}+\varrho}} \left\{ 1 - \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{-\frac{m-1}{m}-\varrho} \right\}.$$

Wenn ν unendlich wächst, so erhält das Verhältniß der rechten Seite dieser Gleichung zur Größe

$$\left(\frac{m-1}{m}+\rho\right) \frac{1}{\nu^{\frac{m-1}{m}+\varrho+1}}$$

den Grenzwerth 1. Es convergirt also die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu \left\{ \frac{1}{\nu^{\frac{m-1}{m}+\varrho}} - \frac{1}{(\nu+1)^{\frac{m-1}{m}+\varrho}} \right\},$$

denn sie reducirt sich auf

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu^{\varrho+1}},$$

wo die Größen A_ν unter einer festen Grenze liegen.

Durch Zusammenfassung des Vorhergehenden erhärtet man die behauptete Convergenz der Summe

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{x_\nu}{\nu^{\frac{m-1}{m}+\varrho}}.$$

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September, October 1888.

(Fortsetzung.)

Bulletin de l'Academie R. des sciences, des lettres et des beaux arts de Belgique. 58 année, 3. série, tom. 16. N. 7. 8.

Jornal de sciencias Mathematicas e Astronomicas. Vol. VIII. N. 5. Coimbra 1887.
Smithsonian Report 1885. Part II. Washington 1886.
United States coast and Geodetic Survey. Report and sketches 1886. Part I, II. Washington 1887.
Twenty-fourth annual report of the Alumni association. Philadelphia 1888.
Transactions of the Connecticut Academy of art and sciences. Vol. VII. Part 2. New Haven 1888.
Bulletin of the American Geographical society. Vol. XX. N. 3. New York. 1888.
Bulletin of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Vol. XIII. N. 10. Vol. XVII. N. 1.
Report for the year 1886—87 presented by the Board of Managers of the Observatory of Yale University. Report for the year 1887—88.
Anales de la oficina meteorologica Argentina. Tomo VI. Buenos-Aires 1888.
Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. 1888. Entrega V. VI. Tomo XXV.
Boletin de la Academia national de ciencias en Cordoba 1887. Toma X. Entrega 2e Buenos-Aires. 1887.
Archivos do Musen Nacional de Rio de Janeiro. Vol. VII. Rio de Janeiro 1887.
Mittheilungen der deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio. Yokohama, Berlin. Heft 40. Juli 1888. (2 mal).
The journal of the college of science. Imp. University Japan. Vol. II. Part II. III. Tokyo 1888.
Von der Magyar Tudományos Akadémia in Budapest:
Almanach 1888.
Evkönyv XVII. 5.
Ertesítö 1887: 4—8. 1888: 1.
Emlékbeszédek IV. 6—10. et Tittre au Tome IV.
Nyelvtudományi Ertekezések. XIV. 1—7.
Simonyi Zsigmond. A magyár határozók I, 1.
Régi magyar Nyelvemlékek IV. 2. V.
József föherczeg, Czigány nyelvtan.
Nyelvtudományi közlemények XX. 3.
Nyelvemléktár IX. X.
Kúnos Ignácz. Oszmán-török népköltési gyüjtemény I.
Bayer József. A nemzeti játékszin története I. II.
Történettudományi Értekezések XIII. 6. 7. 8.
Társadalmi Értekezések IX. 2—7.
Ballagi Aladár. Colbert.
Szádeczky Lajos. Izabella és János Zsigmond Lengyelországban.
Marczali Henrik. Magyarország története II. József korában III.
Név- és tárgymutató Marczali H. Magyarország története II. József korában I., II., III. kötetéhez.
Pesty Frigyes. Magyarország helynevei I. köt.
Péch Antal. Alsó-Magyarország bányamívelésének története II.
Gelcich József. Raguza és Magyarország összeköttetéseinek oklevéltára.
Monumenta Hung. Histor. Sectio I. Diplomataria Tom. XXVII.
Monumenta Hungariae Historica Sect. III. Mon. Comitiorum Transylvaniae. T. XII.
Wenzel Gusztáv. Magyarország mezögazdaságának története.
Archaeologiai Értesítö. VII. $^3/_5$ VIII. $^1/_2$.
Természettudományi Értekezések XVI. 7. XVII. 2. 3. 4. 5.
Mathematikai Értekezések XIII, 3. XIV. 1.
Mathematikai és természettudományi Értesítö V. 6—9. VI. 1.
Thanhoffer Lajos. Adatok a központi idegrendszer szerkezetéhez.
Mathematikai és természettudományi közlemények XXII. 1—8.
Hadtörténelmi Közlemények I. évf.
Naturwissenschaftliche Berichte V. Bd.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

6. Februar. | № 3. | 1889.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Oeffentliche Sitzung vom 3. Januar.

Le traduzioni dal copto.

Nota d' **Ignazio Guidi.**

Non di rado parlando di alcuni scritti etiopici si esprime il dubbio che siano tradotti dal copto; ma per quanto ricordo, non si è mai supposto che dal copto sia stato immediatamente o mediatamente tradotto alcuno scritto siriaco. Mi sia lecito fare qualche osservazione sopra questi due punti.

Dall' introduzione del Cristianesimo, verso il 350, fino al VI o VII secolo, l'Abissinia ebbe un periodo di fiore, dopo il quale possiam credere per varii indizii che il Cristianesimo e il paese andassero sempre più in decadenza; tanto che nel X⁰ sec., sebbene per pochi anni, il potere non fu più in mano dei cristiani.[1])

La letteratura geez è strettissimamente collegata colla religione cristiana, e in quel periodo nel quale fiorì in Abissinia il Cristianesimo, ebbe origine e fiorì del pari la letteratura geez, colla traduzione dei libri canonici, apocrifi, e pseudoepigrafi della Bibbia, con quella di regole monastiche e di altri scritti, che, come il Qerillôs, si riferiscono specialmente alle questioni cristologiche agitate in Oriente nel V⁰ e VI⁰ secolo. La chiesa abissina dipendeva da Alessandria; quindi per determinare da quale lingua potevano esser tradotti i libri geez, conviene esaminare le condizioni

1) Cfr. la mia memoria: Le traduzioni degli Evangelii in arabo e in etiopico, pag. 34.

dell' Egitto nei secoli V° e VI°, in riguardo della lingua letteraria ivi in uso.

A me sembra certo che lo sviluppo e l'uso del copto come lingua letteraria, sia in grandissima parte un effetto di reazione contro l'elemento straniero e la sua lingua, il greco. Quanto i veri Egiziani odiassero gli stranieri e gli Alessandrini è notissimo, e la stessa diffusione del Cristianesimo sarebbe stata favorita dall' odio contro l'autorità romana che lo perseguitava [1]). Tuttavia l'elemento straniero e greco era troppo forte e numeroso in Alessandria e nel basso e medio Egitto; mentre nell' alto Egitto l'influenza straniera era minore, e assai più numerosa contavasi la popolazione di vera origine egiziana, la quale poteva perciò più presto prevalere sugli stranieri. Quindi è che i primordi della letteratura copta sono nell' alto Egitto, dove anche, per analoghe ragioni il copto si mantenne più a lungo, quale lingua viva. Anzi le opere più antiche, sieno esse originali o tradotte, hanno qualcosa di puramente egiziano, come il papiro Bruce e la Pistis Sophia, e si connettono con Valentino e la scuola Valentiniana, nella quale a poco a poco il primitivo gnosticismo avea preso molti elementi dalle antiche credenze e superstizioni dell' Egitto [2]). Essi come scritti eretici, fanno il contrapposto al Cristianesimo ortodosso della chiesa greca di Alessandria, e questo sentimento ad essa ostile non era estraneo a Scenuti (Sinuthios) che segna il periodo forte più ragguardevole della letteratura copta. Tali circostanze non potevano non favorire le traduzioni saidiche della Bibbia, volendosi avere nella propria lingua, e non solamente in greco, il sacro testo [3]).

---

1) Amélineau, La réligion chez les anc. Coptes 7.

2) Amélineau, Essai sur le gnostic. égypt. 281 seg.

3) Che la traduzione della Bibbia in copto risalga, non dirò al II° sec. (v. Quatremère, Recherches p. 9) ma anche agli inizii del IV°, è asserzione che dovrebbe essere meglio provata; ciò che dice Assemanni (Bibl. Med. Cat. 54) „Versionis copticae auctores fuerunt Anachoretae illi sanctissimi qui eremos Aegypti incolebant anno Christi circiter 336 etc., mi sembra di ben poco valore: ma sull' autichità della letteratura copta dirò qualche parola in seguito.

Aggiungerò quì che a me pare scorgere una notevole analogia fra le origini della letteratura copta e quelle della letteratura siriaca. Anche in questa i più antichi documenti sono gnostici, gli inni e gli scritti di Bardesanes e della sua scuola, in Edessa, in paese quasi indipendente, dove (come nel Sa'îd) l'elemento nazionale poteva più facilmente prevalere. Si noti altresì che il primo testo degli Evangeli che abbia avuto la chiesa siriaca (Diatessaron di Taziano) era in una disposizione e forma così diversa da quella ricevuta, e dovevasi a scrittore che propendeva all' eresia, se non era già eretico.

Perchè questo elemento nazionale copto potesse prevalere anche nell' Egitto inferiore, dove esso era men numeroso e dove trovavasi il centro del governo e della chiesa, si richiedeva un tempo più lungo. Ma in ciò fu singolarmente favorito dall' eresia monofisita: è conosciuto che dopo la morte di Anastasio e la repressione dell' eresia in Siria, l'Egitto divenne il vero paese del Monofisitismo, nonostante che di fatto e colla forza abbian seduto in Alessandria, per qualche tempo, dei patriarchi cattolici. La cristianità egiziana si staccava sempre più dalla bizantina e dalla chiesa greca, e si sviluppava la letteratura boheirica o memfitica colle traduzioni della Bibbia, di numerosi scritti greci ecc. E quì avvertirò che questa letteratura nacque, è vero, e fiorì nei monasterii, ma poichè i monaci appartenevano al popolo, la loro letteratura non cessa di essere nazionale; ed infatti vediamo p. es. che antichissime leggende egiziane si ritrovano, sebbene in veste cristiana, nella letteratura copta [1]).

Generalmente si ritiene che la letteratura copta sia alquanto più antica, ma ciò mentre non concorda colla ragione storica, non è provato da documenti certi che abbiamo. Li quali ci mostrano che fino al VI⁰ e VII⁰ secolo, la lingua scritta ufficiale dell' Egitto fu esclusivamente il greco, e del pari le opere più antiche scritte nell' Egitto cristiano, l'originale del papiro Bruce, la vita di S. Macario, le regole di S. Pacomio ecc. erano in greco; S. Antonio non sapeva il greco, e tuttavia le lettere copte attribuitegli e pubblicate del Mingarelli (p. 198, 201), sono tradotte dal greco!

A far credere più antica la letteratura copta molto ha contribuito l'eta che si assegnava ad alcuni mss. Ciò avveniva per l'imperfetta conoscenza della paleografia la quale di recente è stata profondamente studiata in ispecie dal Prof. Hyvernat [2]); nel magnifico Album pubblicato da quest' ultimo, neppure un ms. è riportato che sia anteriore al VI⁰ secolo, ed il famoso codice Askew della Pistis Sophia è assegnato appunto a quel secolo.

Da tutto ciò che precede è chiaro che le opere in geez non potevano essere tradotte dal copto, perchè durante il primo periodo della letteratura geez, il copto boheirico cominciava appena, per mio credere, a divenire lingua letteraria; quando poi principiò il secondo periodo della letteratura geez, il copto era già morto. Quest' ultimo essendo fiorito nell' intervallo fra i due periodi della

1) Cfr. von Lemm, Die Geschichte von der Prinzessin Bentreš u. s. w. Mél. Asiat. Acad. Imp. de St. Petersbourg, IX. (Cf. Spitta, Contes Arab. modern. IX.)

2) Album de Paléographie copte, Paris — Rome, 1888.

letteratura geez, non ha su questa esercitato un' influenza diretta.

Vengo ora al secondo punto, alle traduzioni cioè, mediate o immediate, dal copto in siriaco. Queste non hanno la ragion d'essere nelle condizioni storiche delle due letterature, la copta e la siriaca, ma son dovute ad una circostanza estranea, all' esistenza cioè del convento di s. Maria Deipara (دير السريان) nel deserto nitrio. La letteratura siriaca è sotto ogni rispetto assai più ricca e importante della copta, ma qualche opera appartenente a quest' ultima, e reputata importante, mancava nel siriaco. Intendo parlare specialmente di alcune scritture apocrife sugli Apostoli, sparse in Egitto, come p. es. la leggenda di S. Pietro e di S. Paolo. Ciò che di loro si narra presso i Siri è poca cosa, e in gran parte segue più o men fedelmente gli Atti canonici[1]). Invece in Egitto eran diffuse le *πράξεις* gnostiche, i testi del Pseudo-Lino; e il racconto parve importante a qualche monaco di S. Maria Deipara, che lo tradusse in siriaco. Questa traduzione ci è conservata senza dubbio nel cod. DCCCCLIII (Wright, Catal. p. 1116—1117) come si scorge fin dalle poche parole che ne riporta il catalogo; e il nomen loci (Payne-Smith, Thesaurus Syr. 1478) ܛܠܡܛܝܐ non è altro se non *Δαλματία*, collo scambio, consueto nel copto, di d in t e di t in d. Ma un altro codice del Brit. Mus. è degno di nota, il n⁰ DCCCCLXIII: esso si componeva originariamente di 56 vite di Santi, alle quali poi ne furono aggiunte altre 14. Molta parte di queste si riferiscono più o men direttamente all' Egitto, ed in ispecie le ultime, fra le quali figurano appunto i citati Atti di S. Pietro e S. Paolo, di S. Luca ecc. Fra esse evvi altresì un frammento di storia di ܐܒܐ ܫܢܘܕܐ: questi non è punto il patriarca di Alessandria Sinuthios I di Batnûn (859—870) ma è il celebre Scenuti del V⁰ secolo, già sopra ricordato, e quella storia è la traduzione siriaca della vita di Scenuti, scritta dal suo discepolo Bêsa (Visa, ⲂⲎⲤⲀ) e pubblicata nelle due lingue nelle quali ci è pervenuta, la copta e l'araba, dall' Amélineau[2]). Ecco tutto questo frammento siriaco secondo la copia gentilmente mandatami dal Dr. W. Budge[3]): basterà confrontarlo coi luoghi che indicherò della vita di Bêsa per persuadersi di quanto ho detto. Add. 14,152.

---

1) Cfr. il mio articolo „Gli atti apocrifi degli apostoli nei testi copti 5, 37.

2) Monuments pour servir à l'histoire de l'Egypte chrét. Paris 1888.

3) Il foglio che contiene questo frammento, è in uno stato deplorevole, come mi conferma anche il Wright, che per me ne ha esaminata una parte; molte parole e lettere non si vedono più affatto. Ciò che è in parentesi [ ] sono supplementi proposti da me.

ܗܘܐ ܐܟܣܢܝ. ܘܗܘ ܐܢܬܬܐ ܒܥܠܗ ܕܗܘ ܡܫܡܫܢܐ ܕܦܠܦܠ ܠܗ ܡܬܬܟܠܗ ܡܥܦ
ܐܢܐ ܠܗ ܘܠܐ ܐܫܟܚܬ ܒܗ ܡܕܡ ܕܒܥܐ ܟܠ ܒܠܗ. ܘܗܝܡܢ ܗܝܡܢܐ ܓܠܐ
ܫܘܬܐ ܕܡܬܚܫܒܢܘܬܗ. ܐܘ //// (1) ܗܝܡܢܘܬܗ. ܘܫܠܚ ܗܘ ܐܡܪ. ܗܟܢܐ ܐܢܐ
ܡܠܝ ܡܢܝ. ܡܫܘܐ ܡܚܡܣܢܐ ܡܢܐ ܕܒܠܗܘܢ ܒܠܠܝܐ ܗܘ ܐܡܬ ܠܝ ܫܘܬܦܘܬܐ
ܕܬܫܘܬܦܘܬܗܘܢ ܘܐܢܬ (؟) ܗܘ ܕܬܫܡܫ //// ܣܥܘܪܐ //// ܘܫܘܬܦܘܬܐ
ܕܒܠܗܘܢ. ܐܫܟܚܐ ܕܫܦܝܪܬ ܐܢܫ [ܐܘܟܝ]ܬ ܕܒܠܝ ܒܠܐ ܐܝܟܢܐ ܕܗܘ ܕܒ[ܐ]
ܘܡܫܡܫܢܘܬܐ ܕܫܡܝܐ. ܗܘ ܣܘܟܠܐ ܠܗܢܐ ܐܚܪܢܐ ܡܬܬܠ ܕܐܢܬ ܗܘ
////ܕ ܒܗܘ ܐܚܪܐ ܘܐܢܬ ܗܘ ܡܣܟܢܐ ܘܒ[ܟܠ ܐ]ܒܝ܀ //// ܫܡܥ ܕܒܠܗ
ܟܠ ܐܝܠܗ [ܘܣܡܟܗ ܒܥܠ]ܡܐ ܕܟܠ[ܒܐ] ܘܒܪܫܠܬܗ ܠܟܠ ////(2)
ܬܟܠܐ ܒܝ ܫܡܝܢ ܘܬܫܒܘܚ ܡܢ ܒܪ[ܗܝܠܗ ܒܗ] ܒܡܠܬܐ ܒܡܢ ܕܠܬܗ
ܕܐܒܘܢ ܗܝܡܢܐ. ܒ//// ܗܝܡܢ ܐܡܪ ܗܘ ܣܘܟܠ ܐܝܠܗ ܬܘܒ ////
////ܘܠܟ ܘܗܝܡܢ ܐܒܘܗ ܕܡܠܟܘܬܐ ܐܦܠܐ ܠܟܠܬܗ ܒܝ ܡܢܘܢ ܘܡܟܠܟܢ
ܠܐܠܗܐ ܘܠܡܗܝܡܢܐ ܐܦܐ ܫܠܘܡܝ܀ (3) ܘܐܡܬ ܗܘܐ ܐܠܗ ܒܡܪܬܐ ܚܝܐ ܡܢܝ
ܒܠܒ ܐܬܪܐ ܕܒܡܫܟܢ ܡܢܘܬܐ ܬܝܪܐ. ܘܠܫܒ ܗܘܐ ܐܝܪܗ. ܘܠܐ ܫܒܩܝܢ
ܗܘܘ ܒܠܒܘܬ ܠܫܡܝܐ. ܘܒܝ ܡܠ ܐܒܐ ܠܒܬ ܐܒܘܝ ܗܝܡܢܐ ܘܒܟܢܐ ܡܠܬܗ.
ܐܡܪ ܠܗ. ܐܒܘܝ ܡܟܢܐ ܬܒܥܐ ܐܠܗ ܡܠܟ. ܐܡܪ ܠܗ ܝܒܪܐ ܗܘ ܠܐܒܘܝ
ܗܝܡܢܐ. ܗܟܢܐ ܐܢܐ ܕܠܝܘܒܠܠܟ ܬܫܒܘܚܝ. ܡܬܠܠ ܕܗܝܡ ܐܢܐ ܕܡܠܝ ܕܐܡܬ
////ܝܬܪܐ ܘܡܝܡܢܐ ܠܡܘܡܢܐ ܐܢܐ ܘܒܠܒ ܠܐ ܫܒ[ܩܬܝ] ܠܫܡܝܐ. ܒܪܫ
ܐܡܬܝ ܒܫܠܡܘܬܐ ܕ//// ܘܡܘܡܐ. ܐܡܪ ܠܗ ܐܒܘܝ ܒܪܫ ܠܐ ܐܫܬ[ܚܬ]
ܒܟܝ ܐܬܝܡܢ ܡܢܘܬ ܕܬܫܬܡܥ ܒܗ. ܐܡܪ ܠܐ [ܡܢ ܐܢܐ] ܐܘ ܐܒܝ.
ܗܝܡܢ ܟܠ ܗܝܡܢܐ ܠܟܝܬܐ ܘ[ܕܟܠ] ܠܐܠܗܐ ܡܬܬܟܠܗ ܘܠܒܫ ܐܚܒܫ
////ܕܟܢܐ ܕܒܠܝܬܐ. ܗܒܠ ܐܠܬܝ //// ܒܡܢܬܐ ܕܡܬܒܠܝܐ ܘܡܢܘܢ ܐܠܬܝ ܠܗ.
ܘܐܡܪ ܠܗ. //// ܗܟܠܝ ܒ[ܬܪܐ] ܘܐܠ //// ܒ////ܬ (4) ܘܐܬܪ ܠܗ (5) ܬܡܢ
//// ////. ܕܗܢܐ ܗܘ ܕܡܢܘܢ ܠܟܝ ܡܢܘܬܐ //// //// ܐܡܬܝ ܕܫܟܢܐ ܒ//// ////
ܡܬܠܝ ܡܠܬܗ. ܘܐܢܐ //// //// ܘܐܡܪ. ܐܡܢ. ܒ[ܚ]ܪܬܐ ܐܘ ܐܚܒ //// ܘܒܝ
ܝܪܠ ܗܘ ܐܠܗ ܠܡܬܬܟܠܗ //// ܘܐܡܪ ܠܗ ܗܐ ܝܗܒܬ ܠܡܬܬܟܠܢܐ //// ܘܐܡܪ
ܠܗ. ܗܐ ܝܗܒܬ ܠܡܬܬ[ܟܠܢܐ] ܒܪܫ ܕܟܠ ܟܠܟ ܕܐܠܐ ܐܠܗ ܡܒ//// ////ܬܐ
ܡܫܡܫܢܐ ܕ//// ܒܫܡܝ//// ܬ//// ܒܟܬܒܗ ܒ//// ܐܠܐ ܐܢܐ ܐܚܠ //// //// ////
ܘܡܫܒܬ. //// //// //// //// ////ܘܐܠ //// ܐܢܐ //// //// ܐܡܪ ܠ[ܗ]
//// //// ܠܟ....

(1) ܘܐܒܠܬܗ? (2) Forse ܡܢ ܐܝܠܗ. (3) Amél. p. 82, l. 10. (4) Forse ܠܡܕܒܪܬܐ ܥܠܝܡܬܐ. (5) ܠܗܝ.

ܐܦ ܐܬܐ ܠܘܬܗ [ܐܢܫ] ܘܐܡܠܟ [ܒ]ܪܬܐ ܚܕܐ ܘܫܪܝܗ ܠܒܘܪܟܐ ܠܟܢܫܗ. ܘܗܘ
ܡܢ [ܦܪ]ܣܗ ܦܫܛ. ܡܛܠ ܕܠܐ ܡܫܟܚܐ ܗܘܬ ܠܗ ܕܢܦܩ ܣܟܠܐ ܡܢ
ܐܬܪܗ ܀ ܘܡܢ ܚܕܐ ܗܝ ܩܪܝܬܐ ܥܒܕܬ ܠܟܠܗܝܢ ܡܠܝܐ ܡܢܗ ܠܟܠܗ ܕܒܪܝܬܐ
ܘܡܦܩ ܠܗ ܕܝܢܬܐ ܘܡܢ ܐܘܣܦ ܠܟܘܬܗ ܩܪܝܗ ܡܢ ܐܡܪ. ܐܢ ܐܠܨܐ ܠܐ
ܡܬܠܘܢ ܩܪܝܢ ܡܛܠ ܡܠܝܐ ܡܬܚܫܒܘܢ ܥܠ ܦܠܗ. ܘܩܪ ܚܕܐ ܗܕܐ
ܐܠܗܐ ܣܟܠܐ ܀ ܘܗܘܝܢ ܡܫܒܚܘܬܗ ܡ[ܬܪ]ܝܗ ܘܐܬܒܛܝ ܡܢ ܡܬܦܢܝܢ
ܠܐܠܗܐ ܘܡܬܦܩܕܝܢ ܗܠܝܢ ܀ (1) ܘܐܦ ܩܪܝܬܐ ܒܝܬܝ ܠܟܢܘܫܝܐ ܡܢ
ܡܬܩܪܝ. ܘܐܡܬܝ ܗܘܐ ܠܐ ܢܦܩ ܐܢܫ ܠܒܝܬܐ. ܘܫܡܥܗ ܐܒܪ//// ܘܡܢ
ܚܕ ܡܢܗܘܢ ܚܕ ܐܝܟ ܕܐܬܐ ܠܒܢܝ ܐܢܫ ܡܬܦܢܝܢ. ܘܫܡܥܐ ܗܘܬ ܒܚܝܠܗ
ܦܫܛ. ܘܡܢ ܫܡܥܬܗ ܗܘ ܠܒܝܬܐ ܠܫܡܥܬܗ. ܘܗܘܝܢ ܥܠ ܐܘܠܗ ܕܠܬܫܒܘܚܬܐ
ܡܢ ܗܕܐ ܘܐܦ ܠܘܬ ܩܪܝܬܐ ܐܦ ܗܠܝܢ ܠܩܪܝܗ ܘܐܬܬ ܘܐܡܪ ܠܗ
ܠܩܪܝܬܐ ܗܢܘܢ ܀ //// ܩܪܝܬܐ ܡܢ ܐܡܪ ܫܡܥܘܢ ܠܒܪܬܗ //// (2)
ܡܬܝܪ ܕܫܡܥ ܡܛܠ ܕܠ[ܐ] //// ܕܐܬܐ //// ܠܚܪܬܐ ܕܐܦ ܩܪܝܬܐ
ܕܒܪܐ ܡܢ //// ܡܢ ܐܡܪ ܗܠܝܢ ܕܢ//// ܘܐܠܐ ܢܦܩ ܠܟܠ //// ܫܡܥ ܠܗ
ܐܦܢ ܐܚܪܬܐ ܕܝܬܒܢ (f. 222b) ܡܢ ܐܡܪ ܗܘܐܐ. ܐܢ ܠܐ ܫܦܝܪ ܐܠܐ
ܠܟܢܫܗ ܕܗܠܝܢ ܒܪܝܬܐ ܗܘܬ ܠܐ ܡܬܬܦܝܣ ܠܟ. ܘܠܐ ܕܒܪܐ ܐܝܬܝܗܝ
ܕܠܫܒܝܠ. ܘܐܡܪ ܡܠܝܐ ܠܟ ܘܡܬܠܘܢ. ܘܡܢ ܐܘܪܚܬܗ ܠܩܪܝܬܐ ܗܢܘܢ.
ܐܡܪ. ܐܝܟܢܐ ܕܟܬܒܐ ܢܚܦܘܢ. ܩܕܡ ܐܢܐ ܡܢܝ ܐܢܐ ܕܠܟܘܬܗ ܠܒܢܝ ܕܡܠܐ ܠܟܘܠܐ
ܩܪܝܬܐ ܡܫܡܠܝܐ ܫܘܠܐ ܠܟܠܢܐ. ܘܫܡܥܘܗ ܕܗܘ ܠܟܠܢܐ ܐܡܬܝ ܠܗܘܐ ܠܟܠ
ܗܘ ܐܝܬܘܗܝ ܕܐܦܐ ܒܝܬܐ ܘܫܘܒܚܐ ܕܐܦܪܘܗ. ܘܐܬܟܢܝ ܦܫܛ ܘܠܐ ܡܬܟܘܪ.
ܘܠܐ ܐܬܟܢܝܫ ܗܘ ܩܕܡ ܠܟܠܢܐ ܘܢܬܦܢܐ ܥܠ ܡܬܗ. ܘܠܐ ܐܬܩܢܝܫ ܕܒܝ[ܬ ܐܢܫ]
ܘܩܒܠܐ ܕܢܦܘܠ ܢܚܫܗ ܒܝܗ ܢܦܫܐ ܡܢ ܠܫܡܫܬܐ ܕܐܦܐ ܘܐܬܟܢܝܐ ܕܐܡܬܝܗܘܢ
ܗܘܐ ܒܗ. ܘܡܢ ܗܘܐ ܙܥܘܪܐ. ܠܟܠܗܘܢ ܠܟܠ ܒܟܢܫܐ ܘܡܫܒܚܝܢ ܡܢ ܥܠ
ܢܒܥܝܢ ܘܐܬܦܩܘܢ ܠܩܪܝܗ ܕܩܪܝܬܐ ܐܦ ܗܠܝܢ. ܘܫܘܒ ܗܘ ܡܬܦܐ ܒܗܘܐ ܘܠܗ
ܠܟܠ ܐܬܪܐ ܕܩܪܝܗ ܘܠܐ ܡܫܒܚ ܠܐܠܗܐ ܕܢܦܫ ܡܢ ܐܡܪ. ܗܘܫܒܚܘܢ
ܒܝ[ܬܐ] ܕܢܬܪܘܐ ܦܫܛ ܕܠܐ ܢܬܚܠܦ ܠܐܠܗܐ ܐܘܟܠܐ ܐܚܪܬܐ ܀ ܘܡܢ //// (3)
ܐܢܐ ܡܬܝܪ ܕܗܘܐ. ܒܟܠ ܡܠܬܗ ܡܢ ܩܪܝܬܐ (4) ܘܐܡܪܗ ܐܬܢܝܚ ܠܟܠܗܘܢ
//// ܡܢ ܗܘ ܐܘܪܚ ܕܫܒܝܠܐ ܡܛܠ ܡܟܠܢܐ ܕܐܡܪ ܐܠܐ ܠܗ ܡܟܠܗܘܢ ܡܬܦܢܝܢ
ܕܫܡܥܘܢ ܀ ܘܗܘܝܢ ܘܡܢ ܕܫܒܝܚܘܢ ܠܗ ܐܬܪܐ. ܘܡܢ ܠܟܠ ܢܦܫܐ ܠܟܠ
ܩܢܘܢܗܘܢ ܕܐܦܢ ܘܫܡܥ ܠܗ ܗܘ ܘܐܡܪ ܠܗ. [ܠܒܪܐ]ܘܠܟܠ [ܩܕܡܝܬ]ܐ //// (5)
ܩܪܐ ܐܬ//// (6) //// ܘܠܐ //// ܠܡܫܪܘܪܘܬܐ ܠܟܠܝܢ ܘܡܟܠܢܐ ܕܦܫܛ ܐܠܐ ܠܟ ܡܢ

(1) Amél. p. 456, l. 2. (2) Forse ܘܠܐ ܐܬܚܫܒ ܗܘ. (3) ܘܚܕ ovv. ܚܕܟܐ. (4) Forse ܩܪܝܬܐ. (5) Forse ܐܬܟܢܝܬ ܐܬܪܐ. (6) Forse ܐܬܢܝܚ.

(f. 222a) ([1]) ܠܬܠܡܝ̈ܕܐ ܡܢ ܡܢܗܘܢ ܕܢܒܥܘܢ ܠܗܝܢ. ܘܡܢ ܒܬܪܗ ܡܫܡܠܝܘܬܐ
ܡܛܠ ܐܬܦܪܗܛܘ ܘܡܫܬܠܡܘ ܘܐܫܬܠܘܒ ܠܗܘܕܪܐ ܘܐܬܪܥܘܒ ܗܪܟܐ. ܒܗܘܢ ܕܠܐ
ܐܡܬ [ܗܘܐ] ܠܗ ܐܠܗܐ ܕܢܪܚܡ ܠܗ ܒܥܝܢܘܗܝ. ܐܡܪ ܐܒܘܢ ܦܝܫܐ.
ܐܬܐ ܗܘܐ ܦܪܘܫܐ ܠܠܠܡܕܐ ܒܗܘ ܙܒܢܐ ܐܘ ܠܐ. ܐܡܪ ܠܗ ܐܝܢ. [ܒ]ܪ
ܒܝܘܡܐ ܠܗܘܢ ܢܦܫܐ ܠܬܠܡܝ̈ܕܐ ܕܗܘ ܐܬܬܐ ܕܟܠܬ ܕ[ܒ]ܢܝܫܐ ܡܢܝܢܘܬܐ.
ܘܟܠ ܚܕܐ ܢܦܫܐ ////// ////// ܒܠ ܡܢܟܘܢ ܕܐܡܪ [ܗܘܐ] ܒܪ ܡܠܬܗ ܢܒܝܐ.
[ܕ]ܒܥܝܢ ܠܡܫܬܘܬܐ ܘܢܫܡܥܘܢ [ܐܡܪ̈]ܗܘܢ ܕܟܠ //////ܢܐ ܘܢܒܠܥܘܢ. ܘܟܠ ܫܥܬܐ
ܘܢܣܒܘܢ. [ܘܫ]ܥܬܐ ܒܟܠܗ ܕܐܢܐ ܘܐܫܡܥ ܠܗ. ܘܠܐ [ܐܬܡܢܝ]ܬܐ. ܘܡܢ
ܐܡ[ܪ] //////ܒܥܝܢ ܘܫܒܩ ܠܦܪܘܩܢ [ܘܐܬܒܥ]ܒ ܠܗ ܡܢ ܐܡܪ [ܕ]ܢܦܪܘܩܢܝ
ܩܕܡܝܢ //////. ܘܠܐ ܬܬܒܥܘܢ ܕܢܦܩܘܢ ܠ[ܬܪ̈]ܥ[ܐ] ܕ[ܫܒ]ܝܠܐ ܐܚܪܬܐ.
ܠܡܠܟܐ ܠܐ ܗܘܬ ܦܪܘ[ܩ]ܢ ܕ[ܐܡܪ] ////// ////// ([2]) ܡܛܠ [ܕ]ܐܬܐ ܠܗ[ܘ]ܢ
ܬ[ܡܢ]ܝܐ ܡܪܝܪܐ ܗܘܝܐ. [ܐܡܪ] ܠܗ ܦܪ[ܘܩܢ]. ܒܬܪ ܕܐܬܬܠܬ
ܕܬ[ܒܥ]ܢ [ܒܠܠܡܕܐ] ܗܘܐ [ܠܟܠ] ܦܓܪܐ ܕܡܬܠ ܡܠܘܗܝ. ܐܠܐ ܡܗܘܢ ////// //////
[ܢܦ]ܫܐ. ܐܬܬܢܝܚ ܡܬܚܫܠ ܩܕܡܝ ܠܟܠܗܝ. ////// ////// ܘܒܪ ܡܠܬܗ ܐܬܬܢܝܚ
////// ////// ܐܘ ܡܬܢܝܚܘܬ ܘܡܢ ܠܒܝ ܡܢܝ ܒܐܝܕܗ [ܕܐܒܐ ܡܠܘܗܝ] ܘܗܘܠܒܘ
ܠܡܪܐ ܕܦܓܪܗ ܠ//////ܪܬܐ [ܕܐܬܝ]ܗ ܗܘܬ ܒܦܘܪܩܢܐ ܘܗܘܠܝ [ܕ]ܝ
ܡܦܠܠܠܝܢ ////// ܒܥܝܬܐ ܘܫܩܝܬܐ ܣܓܝܐܬܐ. ////// ////// ܡܢܝ ܕ[ܒ]ܥ[ܒ]ܐ
[ܒܡܘܒܠܐ] ܙܒܐ ܀ ([3]) ////// ////// ܐܒܘܢ ܐܠܗܐ ܒܪܚܡܘܗܝ ܕܠܐ ////// ////// [ܫܪ]ܝܗ
ܒ[ܝܘܡܐ] ܐܒܐ ܡܠܘܗܝ ܠܗܘ ////// ////// ////// ////// [ܐܬ]ܠܗܘܢ ܗܘܐ ܫܒܐ ////// //////
////// ////// ܒܠ ////// ////// ܡܢ ////// ////// ܒܪ ////// ܡܢ ////// ////// ////// ////// //////
////// ////// ////// ////// ////// ////// ܡܢܗܘܢ (col. 2) ܙܒܐ ܗܘ ܫܒܝܬܝ ܐܘ ܒܪܢܫܐ. ܒܬܪܟ
ܕܐܘܕܥܘܢ ܒܫܬܩܘܬܗܘܢ ܡܢ ܠܒܢ ܘܟܠܒ ܡܢ ܟܠ ܣܒܪܗ. ܕܐܦ ܠܐܠܗܐ
ܠܡܩܘܡ ܠܗܘܢ. ܐܡܪ ܠܗ ܗܘ ܒܪܢܫܐ. ܠܐ ܫܡܝܥ ܐܢܐ ܕܫܬܩܬ ܒܝ ܒܠ
ܒܠܗ. ܐܡܪ ܠܗ ܐܒܘܢ ܠܘܩܒ ܐܘ ܒܪܢܫ ܐܘܕܥ ܒܫܬܩܘܬܝ. ܡܛܠ ܕܟܠܢ
ܡܛܠ ܠܫܒܩ ܫܒܝܩܐ ܐܡܠܝܢ. ܘܡܢ ܐܬܓܠܝ ܠܟܠܗܘܢ ܒܦܪܘܫܘ. ܟܢܐ ܘܐܡܪ
ܒܬ[ܐܢ]ܫܐ ܢܟܝܡܬܐ. ܗܝ ܠܟܠ ܒܪܢܫ ܝܫܡܐ ܕܐܒܥܝ. ܡܛܠ ܕܫܡܥܬ
ܟܠܝ ܡܩܪܒ ܡܛܘܒܐ ܠܐ ܢܬܪܥܝ ܐܢܐ ܕܝܡܐ ܘܫܝܡܐ. ܘܡܩܒܠܬ ܡܠܐ̈ܐ ܕܫܪܝܐ
ܠܝܘ ܒܡܠܬ. ܘܐܬܦܢܝܒ ܡܠܐ̈ܐ ܡܢ ܒܡܠܬ. ܘܠܐ ܫܒܩ ܠܗ ܗܘܐ ܫܬܩܬܐ.
ܘܒܠ ܡܘܬ ܡܬܚܪܒ ܗܘܡܐ ܡܘܪܒܐ. ܗܘܐ ܗܘ[ܝܬ] ܣܒܪܐ ܠܒܢ̈ܝܐ ܕܢܬܒܥܝ
ܗ̈ܘܝ ܡܢ ܠܒܪܐ ܕܠܐ ܒܗܘܬܐ. ܘܡܢ ܡܩܕܝܠ ܐܒܘܢ ܦܚܡܝܐ ܕܢܝܠ ܘܐܡܪ ܠܗ
ܐܒܝ ܕܢܩܕܡ ܕܢܩܠܬ ܠܐܠܗܐ ܡܢܝ. ܘܣܒܪܐ ܒܪܢܫܐ ܡܢ ܘܐܡܪ ܠܗ ܠܡܠܝܘܗܝ
ܘܐܬܒܠܝܢܘܗܝ ܠܒܠܬܗ. ܘܒܬܪ ܠܬܡܢ ܡܬܩܕܡܝܢ ܡܢܬܐ ܀ ([4]) ܘܒܬܪ ܗܠܝܢ

([1]) Amél. 80, 7. ([2]) Forse ܡܒܪܐ ܠܗܘܢ. (Jer. 20, 18.) ([3]) Amél. 454, 5. ([4]) Amél. 82, 3.

Della vita di Scenuti (come suole avvenire in simili scritti leggendari) correvano più testi, e quello seguito nella traduzione siriaca è talvolta un poco diverso dal copto e dall' arabico pubblicati dall' Amélineau; ed in alcuni punti sembra aver anche migliore lezione. Potrebbe credersi che questi scritti fossero prima tradotti dal copto in arabo e poi dall' arabo in siriaco, e a ciò accennava nel principio dicendo queste traduzioni o mediate o immediate. Potrebbe citarsi in appoggio di ciò la traduzione della vita di S. Giovanni *κολοβός* fatta, secondo la sottoscrizione, dall' arabo in siriaco, da Zaccaria vescovo di Sakha. Ma non mi sembra probabile che nel X⁰ sec. gli atti apocrifi di S. Pietro e S. Paolo fossero già stati tradotti dal copto in arabo: il cod. DCCCCLIII del Br. Mus. è assegnato appunto al X⁰ secolo.

Ad ogni modo o mediatamente o immediatamente la letteratura siriaca si collega in piccola parte colla letteratura copta, e ciò grazie al soggiorno di monaci siriaci nell' Egitto. E' importante notare che qualcosa di simile si osserva nelle letterature greca e latina dell' alto medio evo, quando l' influenza bizantina sull' Italia e su Roma favorì la formazione di una colonia greca in questa città. Allora un celebre libro, i Dialogi di S. Gregorio I, a Roma furono tradotti in greco, come per analoghe circostanze la leggenda di Scenuti, in Egitto fu tradotta in siriaco.

Da das in diesen Nachrichten 1888 Seite 385 Stehende in Kraft bleiben muß, sind die Syrisches bietenden Seiten des vorstehenden Aufsatzes bei W. Drugulin in Leipzig gesetzt, und im Blei nach Goettingen gesandt worden.

Ich bemerke, daß trotz der Abrede das Haus Drugulin Gâmal und Lâmad so geschnitten hat, daß dieselben nicht ganz im Fleische liegen. Wer die neuen syrischen Typen kauft, wird gut thun, in Betreff eines richtigen Gießzettels alle Vorbehalte zu machen. *Paul de Lagarde.* 29. 1. 1889.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (Fr. W Kaestner)

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

12. Februar. № 4. 1889.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 3. November 1888.

Ueber die Ergebnisse der geologischen Aufnahme der Umgegend von Göttingen.

Von

A. von Koenen.

Die geologische Aufnahme der Umgegend von Göttingen, welche jetzt bis auf wenige Einzelheiten beendigt ist, hat für den geologischen Bau, namentlich mit Rücksicht auf die orographischen Verhältnisse, Folgendes ergeben:

Es lassen sich auf dem Meßtischblatte Göttingen unterscheiden

1) das eigentliche Leinethal, die Leine mit ihren recenten und älteren Alluvionen; dasselbe durchschneidet das Blatt ziemlich in seiner Mitte von Süden nach Norden;
2) das Leinethal im weiteren Sinne, die „Leine-Ebene“ mit den meist flachgeneigten Flächen, welche fast die Hälfte des Blattes einnimmt und nach Westen etwa durch eine Linie von Lenglern nach der Rasemühle, nach Osten durch eine Linie Geismar - Papenberg - Tuchfabrik bei Weende (jetzt Gambrinus - Brauerei) begrenzt wird;
3) die Plateaus und Abhänge auf beiden Seiten der Leine-Ebene, welche mehr oder minder durch vorwiegend nordwestlich laufende Thäler und Schluchten zerrissen sind.

Die Leine hat im Bereiche des Blattes, also auf etwa 9,4 Kilom. ein Gefälle von etwa 27 m., nämlich von 155 m. bei Rosdorf bis auf 134 m. nördlich von Bovenden; trotzdem ist ihr Thal scheinbar im Norden noch nicht halb so breit, wie im Süden.

Der Grund hierfür ist, daß auf beiden Seiten der Leine eine Anzahl von Erhebungen vorhanden sind, welche im Norden weit mehr Raum einnehmen als im Süden. So erhebt sich auf der Westseite der Leine im Süden der Wartberg und der Hammberg bei Rosdorf mehr inselartig; der Ascherberg mit der Irrenanstalt und der Egelsberg bei Grone sind schon mehr in die Länge gezogen, und der Kleine Hagen (Hagenberg der Karte) und die Lieth bilden langgestreckte Rücken. Auf der Ostseite fehlen solche Erhebungen im Süden ganz, und erst nördlich von Weende liegen die Rücken des Rothen-Bergs, Junker-Bergs und des Lohbergs. Zudem tritt hier das Plateau und dessen Abhang nach Norden sprungweise immer weiter in die Ebene des Leinethals vor, hauptsächlich östlich von Weende.

Die Leine-Ebene ist, abgesehen von den erwähnten Erhebungen, größtentheils von Lehm bedeckt und von mehreren großen Kalktufflagern, welche aus starken Quellen sehr kalkhaltigen Wassers abgesetzt wurden. Es sind dies der Reinsbrunnen bei Göttingen, der Weendespring, die Rase-Quelle an der Rasemühle, die Grone-Quelle an der Springmühle und die Quelle von Lenglern; denselben ganz ähnlich ist der Mariaspring dicht über die nördliche Grenze des Blattes hinaus. Dieselben liefern die einzigen wesentlichen und ausdauernden Zuflüsse der Leine auf dem Blatte (außer der Garte) und entspringen sämmtlich, aus dem Boden emporsteigend, an der Grenze zwischen der Leine-Ebene und den Abhängen der Plateaus in kleinen Wasserbecken, soweit sie nicht in und vor kleinen Thälern liegen, wie der Reinsbrunnen und die Quelle von Lenglern.

Die Plateaus und Abhänge auf beiden Seiten der Leine-Ebene bestehen nun im Wesentlichen aus denselben Gesteinen, im Süden aus oberem Muschelkalk, im Norden auch aus mittlerem und unterem Muschelkalk. Die Schichten sind beiderseits schon von weit her nach der Leine-Ebene zu geneigt und zwar nahe ihrer Grenze meist immer stärker. Diese „Mulde“ ist aber in der Mitte durchbrochen, indem die in der Leine-Ebene anstehenden Gesteine durchweg weit jünger sind, als die auf den Plateaus und den Abhängen, und von diesen durch Bruchlinien (Verwerfungen) getrennt sind. Sie sind in eine „Muldenspalte“ versenkt [1]) oder eingestürzt,

---

1) Vergl. v. Koenen, über das Verhalten von Dislokationen im nordwestlichen Deutschland, Jahrbuch der kgl. preuß. geolog. Landesanstalt in Berlin für 1885, S. 53 ff.

welche sich, wenn auch stellenweise in andere Dislokationen übergehend, nach Norden mindestens in die Gegend von Hildesheim, nach Süden bis zur Rheinthal-Spalte und bis zum Bodensee direkt verfolgen läßt, wie ich schon früher gelegentlich weiter ausgeführt habe [1]).

Die in der „Leinethal-Spalte“ oder Leine-Ebene versenkt liegenden Gesteine, hauptsächlich Gypskeuper und Rhätkeuper, seltener Lias und noch seltener Glieder des Muschelkalks, bilden nun innerhalb dieser Muldenspalte einen Sattel, dessen Mitte aufgebrochen ist und von dem Leinethal selbst eingenommen wird. Auf beiden Seiten der Leine treten im Norden die inneren Kanten der Sattelflügel scharf hervor; nach Süden ist dies weit weniger der Fall, da sie sich nach Süden senken, während das Leinethal selbst ja ansteigt, und da ausgedehnte Lehmdecken sie verhüllen — auf der Ostseite so gut wie ganz. Dies ist auch der Grund mit, weshalb das Leinethal im Süden so viel breiter ist und meist langsam ansteigende Gehänge besitzt.

Die Sattelflügel selbst sind noch von einer Anzahl von Brüchen in verschiedenen Richtungen zerstückelt, doch sind dieselben selten sichtbar, so in der Freise'schen Thongrube an der Straße nach Ellershausen, unmittelbar westlich der Leine; auch die Unterbrechungen der Rücken sind ohne Zweifel durch Querbrüche verursacht.

In vielen Spalten zwischen den Sattelflügeln und den Rändern der Leinethal-Spalte etc. sind nun ferner Lücken, welche nicht beim ersten Einsturz ganz ausgefüllt wurden, später ausgefüllt, theils durch Senkung der angrenzenden Gesteinsmassen, theils durch sekundäre Einstürze von Gestein, und dieses hat dann in vielen Fällen eine starke Neigung erhalten; meistens hat der so überaus mächtige und zugleich wenig feste Gypskeuper das Material dazu geliefert, seltener der Rhätkeuper (Elliehausen) oder der Lias (Göttingen, Lohberg bei Bovenden); es findet sich aber auch Wellenkalk am Westrande des Bovender Waldes in solcher Lage in einer langen, schmalen, zerrütteten und mehrfach durchbrochenen Scholle, großentheils angrenzend, doch deutlich abgetrennt von dem östlich noch mäßig geneigt anstehenden Wellenkalk. Diese Scholle fällt ausnahmsweise nach dem Leinethal zu ein, während dies sonst umgekehrt der Fall ist, wie z. B. bei dem Rhätkeuper am nördlichen Ende von Elliehausen, am Wege nach Esebeck.

---

1) Ueber die Störungen, welche der Gebirgsbau im nordwestlichen und westlichen Deutschland bedingen. Nachrichten der Kgl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen 1886 No. 6, S. 196 ff.

Die Ränder der Leinethalspalte sind nun nicht einfache, gerade oder gekrümmte Bruchlinien, sondern haben wiederholt Ecken und Absätze und zwar sind sie dann stets in südost-nordwestlicher Richtung verschoben an solchen Stellen, wo in dieser Richtung verlaufende Störungen an die Leinethal-Spalte herantreten, wie namentlich auf beiden Seiten des Lutterthales auf der Ostseite, und zwischen Elliehausen, Lenglern und Harste auf der Westseite. Es setzt also die süd-nördlich (mit einem Strich nach Osten) verlaufende Leinethal-Spalte an diesen nordwestlich streichenden Dislokationen ab, beziehungsweise folgt ihnen auf kurze Entfernungen; sie ist somit jünger als diese, wie sich dies auch daraus ergiebt, daß einzelne in die Leinethalspalte eingestürzte, süd-nördlich begrenzte und abgerissene Schollen eine Faltung und Kniffung im Sinne der Nordwestrichtung besitzen, die sie ohne Zweifel vor dem Abreißen und Einstürzen erhalten haben.

Dies ist in großem Maßstabe der Fall bei dem „Holtenser Berg“ bei Lenglern, in kleinem bei den kleinen Fetzen von Trochitenkalk und Ceratitenschichten, welche 1 Kilom. nördlich, sowie 500 resp. 800 m. südlich von Elliehausen liegen, ringsum von Keuper umgeben oder von Lehm verhüllt. Sie sind sämmtlich sattelförmig geknickt, mit einer Bruchlinie in der Sattellinie, begleitet von einer geringen Verschiebung der beiden Flügel gegen einander.

In ähnlicher Weise ist wohl auch der Bau des Papenbergs aufzufassen, obgleich die Schichten desselben mehr von Osten nach Westen streichen; es ist aber sehr wohl möglich, daß der ganze Papenberg beim Abreißen von dem nur 200 m. östlich davon anstehenden Muschelkalk eine etwas andere Richtung erhalten hätte, oder daß die Nordwestrichtung hier einfach mehr nach Westen abgelenkt worden wäre. Jedenfalls haben seine Schichten großentheils ebenfalls ein steiles Einfallen, sind durch mindestens eine Bruchlinie durchsetzt, sind größtentheils von Keuper umgeben und nur nach Norden vom Lutterthal begrenzt.

Eine ganz abweichende Richtung hat, vielleicht in Folge von ungleichmäßigem Ablösen und Einstürzen, der lange Gyps- und Rhät-Keuperstreifen erhalten, welcher sich vom Nordwestfuße des Hainberges bis zum Albanithore in Göttingen etwa 2500 m. weit nach Südosten hinzieht. Derselbe bildet gleichsam eine durch Querbrüche in drei Theile zerlegte Specialmulde, von welcher in jedem Theil nur der eine Flügel sichtbar ist, und zwar in den aufeinander folgenden Theilen abwechselnd bald der eine, bald der andere Flügel, so daß auf dem Kreutzberg (Klusberg) und von der Herzberger

Chaussee bis zum Albanithor jedesmal der Nordwestflügel, dazwischen aber der Südostflügel zu Tage träte. Gegen die Auffassung, daß der mittlere Theil etwa nur bei seinem Einsturz ein anderes Einfallen erhalten hätte, würde die auffällige Erscheinung sprechen, daß dieser mittlere Theil aus der Richtung vom Kreutzberge nach dem Albanithor ganz herausgerückt ist.

Die Leinethal-Spalte ist nun auf beiden Seiten von Parallelspalten begleitet, und zwar theils von primären, ziemlich gleichzeitig und durch dieselbe Ursache hervorgebrachten, theils von secundären. Mit letzterem Ausdrucke möchte ich diejenigen Brüche bezeichnen, welche im Wesentlichen durch die spätere, stärkere Senkung der Plateauränder nach der Leinethal-Spalte hin entstanden sind und sich gewöhnlich bei ihrer geringen Sprunghöhe der Beobachtung entziehen.

Sichtbar sind solche zur Zeit in den Wasserrissen westlich von Elliehausen an der Straße nach Knutbüren, wo oberster Muschelkalk neben unterem Keuper liegt, an den Wegen südwestlich vom Faßberge und ostsüdöstlich von Weende, wo unterer und mittlerer Muschelkalk vielfach wechseln und recht verworren liegen, und auf dem Lohberg südöstlich von Göttingen, wo eine Spalte in den Ceratitenschichten mit Lettenkohle erfüllt ist.

Selbstverständlich sind alle solche „Parallelspalten“ nicht im mathematischen Sinne parallel, ebenso wenig wie gerade Linien (im mathematischen Sinne) jemals bei denselben vorkommen, sondern die Spalten convergiren stets nach der einen oder der anderen Seite mehr oder weniger.

Primäre Parallelspalten sind namentlich in der Nordost-Ecke des Blattes, nördlich von Emmenhausen und westlich von Harste, sowie am Nordwestfuße des Holtenser Berges vorhanden, und in der Südostecke des Blattes längs des Westerberges und in dem ganzen Gebiete östlich und nordöstlich von Göttingen; sie setzen aber ebenfalls ganz gewöhnlich an den nordwestlich verlaufenden Störungen ab, welche dort, wie überhaupt außerhalb der Leinethal-Spalte, weit größere Bedeutung erlangen.

Von Nordwest-Störungen sind zu erwähnen vor allem eine Bruchzone, welche aus dem Gebiet südlich von Kerstlingeröderfeld (auf Blatt Waake) in mehreren Spalten divergirend theils etwas mehr südlich, direkt auf Göttingen, theils etwas mehr nördlich über Herberhausen nach Weende zu verläuft.

Der südlichste Zweig erstreckt sich längs der Kleper (Kleperberg der Karte) und stellt eine Sattel-Knickung des oberen Muschelkalks dar mit Unterbrechung der Flügel in der Mitte und Ausfüllung der „Sattelspalte“ durch eingestürzte Gesteinsmassen. Der Südwestflügel, die Kleper selbst, fällt ziemlich steil nach Südwesten ein, während der Nordostflügel zunächst nur flach geneigt ist und erst zu der nächsten Schlucht, dem „Molkengrund“ steil hinabsinkt, welcher durch eine kleine Muldenspalte gebildet wird.

In der Spalte liegt meist Gypskeuper, welcher in der Nähe des Hainholzhofes mehrfach gut aufgeschlossen ist, so z. B. etwa 100 m. südwestlich von dem Gehöft in einer kleinen Mergelgrube; in derselben liegen die rothen Mergel des Gypskeupers unmittelbar neben den hellen Mergeln des mittleren Muschelkalks, welcher auf dem Südwestflügel unter dem Trochitenkalk sichtbar wird. Nach Nordwesten hin liegen jedoch in der Spalte immer ältere Schichten, theils stark zerrüttet und auch wohl auf dem Kopf stehend, theils verhältnißmäßig regelmäßig, wenn auch stark geneigt. So führt der Fahrweg am Rande der Leinethal-Spalte über Trochitenkalk, dann über Ceratitenschichten, und da, wo der Hauptfußweg in mehr südlicher Richtung abgeht, über die Grenzschichten zwischen Muschelkalk und Keuper.

Die beiden Sattelflügel bestehen meistens aus Trochitenkalk und lassen darunter häufig einen schmalen Streifen des mittleren Muschelkalks zu Tage treten; durch die Trochitenkalk-Wälle sind sie leicht aufzufinden und zu verfolgen, namentlich im dichten Gebüsch des Geismarer Holzes, südöstlich vom Hainholzhof, wo Aufschlüsse ganz fehlen. Eine Complication wird jedoch durch süd-nördliche Bruchlinien hervorgebracht, welche an verschiedenen Stellen den Sattel treffen, aber anscheinend stets nur den einen Flügel verwerfen, und somit die Sattelspalte nicht gerade durchschneiden, sondern ihr streckenweise folgen. Durch diese Bruchlinien wird an einzelnen Stellen der Trochitenkalk am Rande der Sattelspalte in den Untergrund verworfen, so daß dann die Ceratitenschichten dafür den Rand bilden und neben dem eingesenkten Keuper etc. liegen. Der Innenrand des betreffenden Sattelflügels ist dann weniger erhaben, wie am nordwestlichen Ende des südwestlichen Flügels, oder er ist durch die Oberflächenverhältnisse überhaupt nicht mehr bemerkbar, wie der Nordostflügel vom Hainholzhof an auf etwa 500 m. nach Nordwesten, wo die Grenze zwischen Ceratitenschichten und Gypskeuper dicht neben dem Fahrwege liegt und schließlich über diesen hinübergeht. Dieser Streifen liegt zwischen zwei von hier nach Norden laufenden Verwerfungen, von welchen die östliche wohl Veranlassung zur Bildung der nach Herberhausen führenden Schlucht gegeben hat, während die westliche sich 500 m. weiter nördlich zu einer breiten Spalte erweitert, in welcher zersetzte Keupergesteine liegen und als Ziegelthon gewonnen werden.

Etwa 500 m. weiter nach Norden verengt sich diese Spalte an einem Querbruche bedeutend, setzt aber weiter fort und wird am Fußwege von Herberhausen nach Göttingen dadurch leicht erkennbar, daß sie den Wall des Trochitenkalks unterbricht und verschiebt.

Der Trochitenkalkstreifen auf dem Edberg wird augenscheinlich durch eine zu derselben Bruchzone gehörige Verwerfung begrenzt, welche sich freilich nicht mit Sicherheit weiterhin verfolgen läßt. Nur wenige hundert Meter weiter nach Norden setzt aber eine andere Störung durch, welche am Ostrande des Blattes nur als geringfügige Verwerfung auftritt, von dort nach Nordwesten jedoch sich immer mehr als klaffende Spalte entwickelt und durch die in diese eingeklemmten Gesteinsmassen ein immer bunteres, complicirteres Bild zeigt; so folgen am Fußwege von Göttingen nach Herberhausen von der Wasserscheide an in langen, schmalen Streifen: 1) Trochitenkalk und ein wenig mittlerer Muschelkalk, 2) Gypskeuper, 3) mittlerer Muschelkalk, 4) Wellenkalk.

Etwa 800 m. weiterhin, am Fußwege von Göttingen nach der Knochenmühle, folgen vom höchsten Punkte an auf nur ca. 600 m. Länge: 1) Trochitenkalk, 2) mittlerer Muschelkalk, 3) Ceratitenschichten, 4) Gypskeuper, 5) mittlerer Muschelkalk, 6) Trochitenkalk, 7) mittlerer Muschelkalk, 8) Wellenkalk. Hier hat sich also Schicht 2) sehr verbreitert, 3) und 6) neu eingeschoben.

Im weiteren Fortstreichen dieser Störung liegt dann nordwestlich der Straße von Göttingen nach Nikolausberg am Lutterthal ein recht zerrütteter Wellenkalkstreifen, der „Butterberg“, an dessen nordwestlichem Abhange in den letzten Jahren die obersten Schichten des Schaumkalk-Horizontes ausgebeutet wurden; dieselben zeigten, wie dies ausführlicher schon (Jahrb. d. kgl. Preuß. geol. Landesanstalt für 1887, S. 466) von mir geschildert wurde, eine kurze Sattel- und Mulden-Knickung mit je einem Bruch in der Sattellinie, wie in der Muldenlinie, doch ohne merkliche Verschiebung der Schichten an den Brüchen; die Muldenspalte öffnete sich aber nach unten immer weiter resp. theilte sich in mehrere klaffende Spalten, wie ich dies rein theoretisch zur Erklärung der mit Muldenspalten verbundenen Erscheinungen vorausgesetzt hatte.

Das Lutterthal selbst birgt ohne Zweifel eine andere in gleicher Richtung laufende Bruchlinie, nach welcher von Nordosten her die Grenzschichten zwischen unterem und mittlerem Muschelkalk steil herabsinken. Zwischen diesen und dem Trochitenkalk des Feldbornberges muß aber auch noch eine ähnliche Störung vorhanden sein, da hier sonst nicht Raum genug für den mittleren Muschelkalk bleiben würde.

Der Trochitenkalk des schmalen Osterberges westlich von Deppoldshausen hat zwar eine wesentlich nordwestliche Richtung; nach den südlich und nördlich von seiner Nordwestecke vorhandenen Verschiebungen möchte ich aber annehmen, daß wesentlich nur seine Nordwestecke eingesenkt ist.

Gleich nördlich von Deppoldshausen setzt eine erhebliche Störung nordwestlich durch; eine Verwerfung ist jedoch nirgends aufgeschlossen, und es wurde vorgezogen, auf der Karte das steile Herabsinken des Wellenkalks nach Süden hin einfach anzugeben ohne eine oder mehrere Verwerfungen zu „construiren“.

Bei einer anderen Störung ist es zweifelhaft, ob sie anzusehen ist als Querspalte zum Leinethal oder als eine Bruchlinie, welche aus der Nordwestrichtung ganz nach Westen abgelenkt ist. Dieselbe erscheint am südöstlichen Ende von Geismar als einfache Einsenkung von Keuper in oberem Muschelkalk; weiter nach Osten ist damit deutlich eine Verwerfung verbunden, besonders im Gösselgrund und längs der Lengdener Burg auf Blatt Waake, und vermuthlich ist als weitere Fortsetzung anzusehen die Bruchlinie, welche den „Hengstberg“ der Länge nach durchsetzt. Derselbe besteht aus einer Mulde von Wellenkalk, deren Südflügel gegen den Nordflügel gesunken ist und im Westen in einzelnen Schollen den Berg hinabgerutscht ist, so daß er nur noch als „gerutschter Muschelkalk“ vorhanden ist; im Osten fällt der Südflügel ziemlich steil nach Norden ein. Der Nordflügel ist dagegen im Westen nur flach geneigt, erhält aber nach Osten ein ebenfalls immer steileres südliches Einfallen und bildet dann einen zum Theil so schmalen Bergrücken, daß kaum ein Fußweg auf demselben Platz findet. Das Einfallen wechselt aber in der Regel an Einsenkungen des Rückens, durch welche mehr oder minder sicher wahrnehmbare Querbrüche in nordsüdlicher Richtung hindurchsetzen, und der ganze Wellenkalk senkt sich nach Osten, und zwar von einer Höhe von 415 m. im Westen auf eine Entfernung von etwa 1800 m. um etwa 135 m. bis zu 280 m. im Osten, wo er zugleich südlich wie nördlich von parallel laufenden Verwerfungen begleitet wird, so daß beiderseits dicht neben ihm Buntsandstein zu Tage tritt.

Durch die Schlucht von Nikolausberg läuft endlich eine Verwerfung, welche mit anderen Störungen, namentlich mit der über Deppoldshausen laufenden zusammen die tiefe Einsattelung des Wellenkalks bewirkt, durch welche auf Blatt Waake zwischen der Plesseforst und dem Göttinger Walde die Straße von Roringen nach Waake führt.

Die über Göttingen und Weende hin streichenden Bruchlinien könnten die Unterbrechung der Rhätkeuper-Rücken im Leinethal, namentlich die Abtrennung des „Kleinen Hagen“ bewirkt haben, sei es vor deren Einsturz, sei es nachher, indem auf den Nordwestbrüchen etwa eine Verschiebung sich wiederholte; ohne Zweifel stehen sie aber in ursprünglichem Zusammenhange mit den in gleicher Richtung streichenden Störungen, welche nordwestlich von der Linie Elliehausen-Lenglern die verschiedenen Gesteine des Muschelkalks und des Keupers so wirr durcheinander geworfen haben, daß eine eingehende Beschreibung der Lagerung derselben außerordentlich umfangreich werden würde. Kurz läßt sich dieselbe etwa folgendermaßen darstellen:

Es liegen dort eine Anzahl Schollen von Trochitenkalk, meist nach Nordosten einfallend, doch sehr verschieden steil geneigt, mehr oder minder lang und durch Längsbrüche und auch Querbrüche von einander getrennt, in welchen dann gewöhnlich Gypskeuper eingestürzt liegt.

Drei solche, deutlich von einander getrennte Schollen, bilden den Kamm des Holtenser Berges in seiner ganzen Länge, andere den nordöstlichen Kamm des Kuhberges und den des Berges südöstlich vom Wellbrückenkrug. An letzterer Stelle liegt ein schmaler Streifen von Trochitenkalk und Ceratitenschichten versenkt in einer Muldenspalte des unteren und mittleren Muschelkalks, während die übrigen Schollen in der Regel nur einseitige Senkung resp. Aufrichtung erkennen lassen und besonders an ihrer südwestlichen Seite von eingestürztem Gypskeuper etc. begleitet werden, seltener an der Nordostseite, wie der Kuhberg; auch der untere und mittlere Muschelkalk der Aschenburg westlich Harste schneidet nach Ostnordosten gegen Gypskeuper ab.

Ausgedehnte und mächtige Lehmmassen verhüllen im Uebrigen vielfach die Einzelheiten dieser Dislokationen.

Auch die weiter südlich in das Plateau eingeschnittenen Thäler, wie das zwischen Sommerberg und Winterberg bei Hetjershausen und das von Olehusen nach Nordwesten verlaufende verdanken wohl Bruchlinien ihre Entstehung. Am Rande des letzteren konnten wenigstens in gleicher Richtung streichende Spalten aufgefunden werden.

Für die meisten Thäler und Schluchten läßt sich somit nachweisen, daß Spalten und Bruchlinien den wesentlichen Anstoß zu ihrer Bildung gegeben haben, nicht aber die Erosion, daß im Gegentheil in einer Reihe von Fällen durch Anschwemmung von Geröllen und Lehm die tief eingesunkenen Thalsohlen ausgefüllt wurden. Um so stärker hat die Erosion auch noch in verhältnißmäßig junger Zeit auf die Plateaus und Abhänge gewirkt. Die Spalten dürften sich ebenso, wie im ganzen mittleren Deutschland, in der letzten Hälfte der Miocänen Tertiärzeit gebildet haben, und damals muß an den Rändern der Spalten noch ziemlich gleichmäßig Keuper und Lias gelegen haben, welche in hiesiger Gegend über 300 m. mächtig sind; diese sind damals in die Spalten z. Th. eingestürzt, fehlen aber jetzt auf den Plateaus ganz, und auf einzelnen, wie an der Plesse fehlen noch etwa 100 m. Muschelkalk, so daß hier die Erosion Schichten in einer Mächtigkeit von mindestens 400 m. oder fast 500 m. hinweggeführt hat.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

November 1888.

Sitzungsberichte der K. Pr. Akademie der Wissenschaften in Berlin XXXVIII, XXXIX, XL, XLI, XLII, XLIII.
Sitzungsberichte der naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig. 13/14. Jahrgang 1886—1887. Leipzig 1888.
Lehrbuch der Physiologie von Dr. L. Hermann. 9. Auflage. Berlin 1889.
Zur Kenntniß der quergestreiften Muskelfasern. Von A. Kölliker. Separatabdruck aus der Z. f. w. Zoologie.
Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historischen Classe d. K. B. Akademie d. W. zu München 1888, Band I, Heft 3. Band II, Heft 1.
Festschrift zur Jubelfeier des 25 jährigen Bestehens des Vereins für Erdkunde zu Dresden. Dresden 1888.
Register für die Monatsberichte der K. Pr. Akad. d. W. zu Berlin 1874—1881. Berlin 1884.
Zeitschrift der deutschen Morgenländischen Gesellschaft. Band 42, Heft 3. Leipzig 1888.
Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Jahrg. 23, Heft 1. 2. Leipzig 1888.
Das Bayerische Praecisions-Nivellement. Siebente Mittheilung v. M. v. Bauernfeind. München 1888.
Abhandlungen der philosophisch-philologischen Classe d. K. B. Akademie d. W. Band 18, Abth. 1. München 1888.
Verhandlungen der Conferenz der permanenten Commission für internationale Erdmessung. Im Oktober 1887 in Nizza abgehalten. Berlin 1888.
Supplément Rapport sur les triangulations.
Veröffentlichung des Kön. pr. geodätischen Institutes. Gradmessungsnivellement zwischen Anclam u. Cuxhaven. Berlin 1888.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Band XVIII, Jahrg. 1886, Heft 1. Berlin 1888.
Leopoldina. Heft XXIV, N. 19—20.
Himmel und Erde. Herausgegeben v. der Gesellschaft Urania. Berlin. Jahrg. 1, Heft 1. Okt. 1888.
Acta Mathematica. 12, 1.

Jahrbuch der K. K. geologischen Anstalt. Jahrg. 1887, Band XXXVII, Heft 3 u. 4. Jahrg. 1888, Band XXXVIII, Heft 3. Wien 1888.
Meteorologische Zeitschrift. Jahrg. 5. 1888. Heft 11. Nov. Berlin 1888.
Zeitschrift des Ferdinandeums für Tyrol und Vorarlberg. Heft 23. Innsbruck 1888.
Mémoires et documents publiés par la Société d'Histoire et d'Archéologie de Genève. Nouv. série tome 3 livr. 1. Genève. Paris 1888.
a. The journal of the Linneau society. Zoology. Vol. XX, N. 118. Vol. XXI, N. 130, 131. Vol. XXII, N. 136, 137, 138, 139.
b. The journal of the L. s. Botany. Vol. XXIII, N. 152, 153, 154, 155. Vol. XXIV, N. 159, 160, 161, 162. London 1887—88.
c. List of the L. S. of London. Session 1887—88. London.
d. The transactions of the L. S. of L. Zoology. 2. serie. Vol. III, Part 5. 6. London 1887—88.
e. The transactions of the L. S. of L. Botany. 2. serie. Vol. II, Part 15. Vol. III, Part 1. London 1887—88.
Nature. Vol. 38, N. 991. Vol. 39, N. 992—995.
Proceedings of the London mathematical society. N. 321—327.
Proceedings of the scientific meetings of the zoological society of London 1888. Part. III, Mai and June.
Journal of the R. microscopical society 1888. Part 5. Okt. London and Edinburgh.
Monthly notices of the R. astronomical society. Vol. XLVIII, N. 9. Supplementary number.
Proceedings of the Royal society. Vol. XLIV, N. 271. London.
Philosophical transactions of the R. society of London. A. Vol. 178. B. Vol. 178. London 1888.
Royal society Exchange list of duplicates and deficiencies.
Account of the operations of the great trigonometrical survey of India. Vol. X. Dehra Dun 1887.
Transactions and proceedings of the R. Society of Victoria. Vol. XXIV, Part 1. 2.
New South Wales 1888. Australian Museum-Report for 1887.
Proceedings of the Canadian Institute. Toronto, Third series Vol. VI. fasc. N. 1.
Geological and natural history survey of Canada. New series. Vol. II. 1886. Montreal 1887.
Memorie di matematica e di fisica della sosietá italiana delle scienze. Serie 3, Tomo VI. Napoli 1887.
Atti della R. Accademia dei Lincei. 1888. Serie quarta, Rendiconti. Vol. IV. fasc. 11, 12, 13 1° semestre, 1, 2, 3, 4, 5 2° semestre.
Memorie del R. istituto Lombardo di scienze e lettere Classe di lettere e scienze morali e politiche. Vol. XVIII fasc. 1. Classe di scienze matematiche e naturali. Vol. XVI fasc. 2. Milano, Napoli, Pisa 1888.
Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere Rendiconti. Serie II, Vol. XX. 1887.
Atti della società Toscana di scienze naturali di Pisa. Memorie Vol. IX. Processi verbali vol. VI. p. 105—140. Pisa 1888.
Rendiconti del circolo matematico di Palermo. Tomo II. 1888. fasc. 5.
Annali della R. scuola normale superiore di Pisa della serie Vol. VII filosofia e filologia Vol. IV.
Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Tomo XX. Dicembre 1887. Roma 1887.
Bollettino delle publicazioni italiane 1888, N. 68. 69. Firenze.
Bollettino delle opere moderne straniere. Vol. III, N. 1—3. 1888. Roma.
Annales du musée Guimet. T. XIV. 1887.
Revue de l'histoire des religions. 8ieme annee. Tome XVI N. 3. 9ieme annee. Tome XVII N. 1. 2.
Memoires de la société nationale des sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg. Tome XXV. Paris 1887.
Journal de l'école polytechnique, 57ieme cahier. Paris 1887.
Bulletin de la société des Antiquaires de Picardie. Année 1887. N. 4. Année 1888. N. 1. Amiens 1888.
Revision des nostocacées heterocystées contenues dans les principaux herbiers de France, par M. Ed. Bornet et Ch. Flahault. (Extraits des Annales des sc. naturelles, VIIe serie. Botanique. Tome III, IV et VII.) Paris 1886—1888.

De la mesure de la simplicité dans les constructions mathématiques et Notes sur diverses questions de la géométrie du triangle, par M. E. Lemoine. Congrès Dóran. 1888. Paris.

Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures. Tome VI. Paris 1888.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St. Petersbourg. VII. série, Tome XXXVI, N. 3, 4, 5 (4 u. 5 doppelt). St. Petersbourg 1888.

Bulletin de l'Acad. Imp. des sc. de St. Petersbourg. Tome XXXII, feuilles 32—$^1/_4$43, N. 4 et dernier.

Annalen des physikalischen Central-Observatoriums. Herausgeg. v. H. Wild. Jahrg. 1887. Theil 1. St. Petersburg 1888.

Finlands geologiska Undersökning Beskrifning till Kartbladet N. 10. N. 11. Helsingfors 1887—88.

Finska Vetenskaps-societeten 1838—1888. Helsingfors 1888.

Mémoires de la société R. des sciences de Liège. Deuxième série. Tome XV. Bruxelles 1888.

Bijdragen tot de Dierkunde. 14. Aflevering. 15. Afl. 1. 2. Gedeelte 16. Afl. Amsterdam 1887—88.

Feest-nummer utgeven bij het 50-jarig bestaan van het Genootschaft Natura Artis Magistra te Amsterdam. Amsterdam 1888.

Bijdragen tot de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 5te Folgereeks — 3. Deel, 4. Afleven. S'Gravenhage. 1888.

Verhandelingen der Kön. Akademie van Wetenschappen
 a. Deel XXVI Natuurkunde.
 b. Deel XVII Letterkunde.

Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akademie
 Derde Reeks 3de deel, 4de deel. Natuurkunde 1887—88.
 Derde Reeks 4de deel Letterkunde 1887. Amsterdam.

Jaarboek v. d. K. Academie 1886, 1887. Amsterdam.

Catalogus der verzamelingen Bilderdijk en van Lennep ānwezig in de Bockerij d. K. Akad. Amsterdam 1887.

Matris Querela et Esther.

Susanna, me puero. Ad urbem Bononiam. Preisgedichte. Amsterdam.

Akademia Umiejetnosci w. Krakowie.
 a. Pamiętnik. Wydzial matematyczno-przyrodniczy tom XIV, XV. 1888.
 b. Sprawozdanie Komisyi fizyjograficznej tom XXI dwudziesty pierwszy 1888.
 c. 1) Rozprawy i sprawozdania z. posiedzeń wydz. histor. filozof. tom XXI. 1888.
  2) R. i spr. z. p. wydz. matematyczno-przyrodniczege. tom XVII, XVIII. 1888.
 d. Monumenta medii aevi Historica Res gestas Poloniae illustrantia. tom XI. 1888.
 e. Grand Kourhan de Ryzanowka d'aprez les recherches faites en 1884 et 1887.
 f. Zbiór Wiadomosci do Antropologii Krakowej etc. tom XII.
 g. Andreae Cricii carmina ed. Cas. Morawski. 1888.
 h. Scriptores rerum polonicarum. tom XII. Kraków 1888.
 i. Rocznik zarzadu Akademie umiejetnósci w. Krakowie. Rok. 1887. W. Krakowie 1888.

Monographs of the United States Geological survey. Vol. XII. Geology and Mining Industry of Leadville. Colorado with Atlas by Emmons. Washington 1886-1887.

Mittheilungen der deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio. Heft 36. Band IV, Seite 245—304. 1887. Yokohama. Für Europa. Berlin 1887.

Anales del museo nacional republica di Costa-Rica. tomo I. 1887. San José 1888.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von No. 4.

A. von Koenen, über die Ergebnisse der geologischen Aufnahme der Umgegend von Göttingen. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

20. Februar. | № 5. | 1889.

Universität.

Verzeichniß der Vorlesungen auf der Georg-Augusts Universität zu Göttingen während des Sommerhalbjahrs 1889.

Die Vorlesungen beginnen den 23. April und enden den 15. August.

Theologie.

Theologische Encyklopaedie zur Einführung in das Studium der Theologie: Prof. *Knoke* viermal um 12 Uhr.

Geschichte Israels: Prof. *Smend* viermal um 4 Uhr.

Alttestamentliche Theologie: Prof. *Schultz* fünfmal um 10 Uhr.

Erklärung der Psalmen: Prof. *Smend* viermal um 10 Uhr.

Erklärung exilischer Propheten: Lic. *Gunkel* dreistündig um 5 Uhr.

Theologie des Neuen Testaments: Prof. *Wiesinger* fünfmal um 9 Uhr.

Leben, Schriften und Lehre des Apostels Paulus: Prof. *Knoke* viermal um 9 Uhr.

Synoptische Erklärung der drei ersten Evangelien: Lic. *Weiss* fünfstündig um 9 Uhr.

Erklärung der Bergpredigt und anderer Reden Jesu: *Derselbe* Freitag und Sonnabend von 12—1, gratis.

Erklärung des Briefs Pauli an die Römer: Prof. *Lünemann* fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung des ersten Korintherbriefs: Lic. *Gunkel* fünfstündig um 9 Uhr.

Kirchengeschichte des Alterthums und Mittelalters: Prof. *Wagenmann* sechsmal um 8 Uhr.

Kirchengeschichte der neueren Zeit von Anfang der Reformation bis zur Mitte des achtzehnten Jahrhunderts: Prof. *Reuter* fünfmal um 8 Uhr, Sonnabend um 9 Uhr.

Kirchengeschichte des Neunzehnten Jahrhunderts: Prof. *Wagenmann* viermal um 7 Uhr.

Apologie des Christenthums: Prof. *Schultz* fünfmal um 11 Uhr.

Dogmatik II. Theil: Prof. *Ritschl* sechsmal um 12 Uhr.

Vergleichende Symbolik: Prof. *Reuter* fünfmal um 11 Uhr und Sonnabend um 8 Uhr.

Praktische Theologie: Prof. *Wiesinger* vierstündig in noch zu bestimmender Stunde.

Geschichte des evangelischen Kirchenlieds: Prof. *Knoke* einmal, Montags um 5 Uhr, öffentlich.

Kirchenrecht s. unter *Rechtswissenschaft* S. 71.

Die alttestamentlichen Uebungen der wissenschaftlichen Abtheilung des theologischen Seminars leitet Prof. *Schultz* Donnerstag 6 Uhr; die neutestamentlichen Prof. *Wiesinger* Montags um 6; die kirchen- und dogmenhistorischen Prof. *Wagenmann* Dienstags um 6; die dogmatischen Prof. *Ritschl* Freitags um 6 Uhr.

Die homiletischen Uebungen der praktischen Abtheilung des theologischen Seminars leiten abwechslungsweise Prof. *Schultz* und Prof. *Knoke* Sonnabends 9—11 Uhr öffentlich; die katechetischen Uebungen Prof. *Wiesinger* am Mittwoch von 2—3 Uhr und Prof. *Knoke* Sonnabends 2—3 Uhr öffentlich; die liturgischen Uebungen *Derselbe* Sonnabends 9—10 und 11—12 Uhr öffentlich.

Exegetische Uebungen hält privatissime und gratis Lic. *Weiss* Mittwoch um 6 Uhr.

Alttestamentliche Uebungen: Prof. *Smend* zweimal in noch zu bestimmenden Stunden, öffentlich.

Rechtswissenschaft.

Institutionen des römischen Rechts: Montag bis Freitag von 8—9 Uhr und Mittwoch von 7—8 Uhr Prof. *Regelsberger*.

Geschichte des römischen Rechts: Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 7—8 Uhr Prof. *J. Merkel*.

Pandekten I. Theil (Allgemeine Lehren, Sachenrecht, Obligationenrecht): Montag bis Freitag von 11—1 Uhr Prof. *J. Merkel*.

Pandekten II. Theil (Familien- und Erbrecht): Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 7—8 Uhr Prof. *Regelsberger*.

Pandektenprakticum: Montag, Mittwoch und Freitag von 12—1 Uhr Prof. *v. Ihering*.

Römisch-rechtliche Uebungen: Freitag von 5—7 Uhr Prof. *J. Merkel* (öffentlich.)

Exegetische Uebungen in den Digesten: Montag von 5—7 Uhr Prof. *Regelsberger.*

Conversatorium über Pandekten: in vier noch zu bestimmenden Stunden Dr. *Goldschmidt.*

Deutsche Rechtsgeschichte: Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 10—11 Uhr Prof. *Ehrenberg.*

Deutsches Privatrecht mit Lehnrecht: Montag bis Freitag von 11—12 Uhr Prof. *Ehrenberg.*

Handelsrecht mit Einschluß des Wechsel- und Seerechts: fünfstündig von 8—9 Uhr. Prof. *Frensdorff.*

Preußisches Privatrecht: fünfmal von 10—11 Uhr Prof. *Ziebarth.*

Strafrecht: fünfmal von 11—12 Uhr Prof. *Ziebarth.*

Deutsches Staatsrecht: fünfstündig von 9—10 Uhr Prof. *Frensdorff.*

Kirchenrecht: täglich von 7—8 Uhr Prof. *Dove.*

Civilproceß, einschließlich des Konkurs- und der summarischen Processe: fünfstündig von 9—10 Uhr Prof. *John.*

Das materielle Konkursrecht: Sonnabend von 9—10 Uhr Dr. *Goldschmidt* (öffentlich).

Strafproceß: fünfmal von 11—12 Uhr Prof. *v. Bar.*

Criminalistische Uebungen: Donnerstag von 4—6 Uhr Prof. *John.*

Medicin.

Zoologie, Botanik, Chemie s. unter *Naturwissenschaften.*

Knochen- und Bänderlehre trägt Prof. *Fr. Merkel* am Dienstag, Donnerstag u. Sonnabend von 11—12 Uhr vor.

Der systematischen Anatomie II. Theil, Gefäß- u. Nervenlehre, lehrt Prof. *Fr. Merkel* täglich von 12—1 Uhr.

Allgemeine Anatomie lehrt Prof. *Fr. Merkel* Montag, Mittwoch u. Freitag, von 11—12 Uhr.

Mikroskopische Uebungen für Anfänger hält Prof *Fr. Merkel* mit Dr. *Barfurth* dreistündlich priv.

Anatomische Untersuchungen leitet Prof. *Fr. Merkel* öffentlich in zu bestimmenden Stunden.

Mikroskopische Uebungen für Geübtere hält vierstündlich Dr. *Barfurth.*

Eine Uebersicht der Anatomie des Neugebornen giebt Dr. *Barfurth* einmal wöchentlich unentgeltlich.

Mikroskopische Curse in der speciellen Histologie hält Prof. *Krause* viermal wöchentlich um 2 Uhr oder zu passender Zeit.

Physiologie mit Erläuterungen durch Versuche und mikroskopische Demonstrationen trägt Prof. *Herbst* 6 Stunden wöchentlich um 10 Uhr vor.

Experimentalphysiologie I. Theil lehrt Prof. *Meissner* tägl. um 10 Uhr.

Physiologie der Zeugung und Embryologie lehrt Prof. *Meissner* Freitag von 5—7 Uhr.

Arbeiten im physiol. Institut leitet Prof. *Meissner*.

Allgemeine Aetiologie lehrt Prof. *Orth* Montag u. Mittwoch von 3—4 öffentlich.

Allgemeine Pathologie lehrt privatim Prof. *Orth* täglich außer Sonnabend von 12—1 Uhr.

Practische Uebungen in der patholog. Histologie hält Prof. *Orth* privatissime Dienstag und Freitag von 3—5 Uhr.

Sections- und diagnostische Uebungen leitet Prof. *Orth* in passenden Stunden.

Physikalische Diagnostik verbunden mit Uebungen lehrt Prof. *Damsch* Montag, Mittwoch und Donnerstag von 4—5 Uhr.

Ueber physikalische Heilmethoden mit besonderer Berücksichtigung der Elektrotherapie, mit Uebungen am Krankenbett trägt Prof. *Damsch* dreimal wöchentlich Dienstag, Freitag u. Sonnabend von 4—5 Uhr vor.

Laryngoskopische Uebungen hält Prof. *Damsch* Sonnabend von 12—1 Uhr.

Ueber Impftechnik, verbunden mit Uebungen im Impfen trägt vor Prof. *Damsch* zu passenden Stunden.

Arzneimittellehre und Receptirkunde verbunden mit Experimenten und Demonstrationen sowie mit praktischen Uebungen im Receptiren und Dispensiren lehrt Prof. *Marmé* dreimal wöchentlich Montag, Dienstag und Donnerstag von 5—6 Uhr.

Specielle Toxicologie, I. Th., für ältere Mediciner lehrt in Verbindung mit Experimenten zweimal wöchentlich, Montag und Donnerstag von 2—3 Uhr, Prof. *Marmé*.

Die allgemeine Arzneimittellehre lehrt Prof. *Husemann* in später zu bestimmenden Stunden 3 mal wöchentlich.

Ueber eßbare und giftige Pilze trägt Prof. *Husemann* öffentlich Donnerstag von 5—6 Uhr vor.

Ein pharmakognostisches Practicum mit mikroskopischen Uebungen hält für Pharmaceuten Prof. *Marmé* Mittwoch von 10—12 Uhr.

Arbeiten im pharmakologischen Institut leitet Prof. *Marmé* täglich.

Specielle Pathologie und Therapie I. Hälfte lehrt Prof. *Ebstein* täglich außer Montag, von 7—8 Uhr.

Die medicinische Klinik und Poliklinik hält Prof. *Ebstein* täglich, und zwar fünfmal von $10^1/_2$—12 Uhr, Sonnabend von $9^1/_4$—$10^3/_4$ Uhr; die Untersuchung der ambulatorischen Kranken findet täglich von 12 Uhr an statt.

Die Untersuchung des Harns und Sputums mit practischen Uebungen leitet Prof *Ebstein* mit Dr. *Nicolaier* 1 mal wöchentlich in zu verabredender Stunde.

Poliklinische Referatstunde hält Prof. *Damsch* einmal wöchentlich publice.

Allgemeine Chirurgie lehrt Prof. *Rosenbach* dreimal wöchentlich von 8—9 Uhr Morgens, Dienstag, Mittwoch und Freitag.

Allgemeine Chirurgie lehrt Prof. *Lohmeyer* fünfmal wöchentlich von 8—9 Uhr.

Chirurgische Klinik hält Prof. *König* täglich mit Ausnahme Sonnabends von $9^1/_2$—$10^3/_4$ Uhr.

Chirurgische Poliklinik hält Prof. *König* gemeinsam mit Prof. *Rosenbach* Sonnabend $10^3/_4$ Uhr öffentlich.

Einen chirurgisch-diagnostischen Cursus hält Prof. *Rosenbach* zweimal wöchentlich, Dienstag und Freitag von 3—4 Uhr.

Operationscursus an Leichen hält Prof. *König* täglich von 5—7 Uhr. Sonnabend ausgenommen.

Ueber Fracturen u. Luxationen liest Dr. *O. Hildebrand* zweimal wöchentlich in später zu bestimmenden Stunden.

Die Klinik der Augenkrankheiten hält Prof. *Leber* Montag, Dienstag Donnerstag Freitag von 12—1 Uhr.

Augenspiegelcursus hält Dr. *Wagenmann* Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr.

Augenoperationscursus hält Prof. *Leber* Mittwoch und Sonnabend von 8—9 Uhr.

Ueber die practisch wichtigen Abschnitte der Ohrenheilkunde mit Uebungen im Ohrenspiegeln trägt Prof. *Bürkner* Dienstag und Freitag von 2—3 Uhr oder zu besser passender Zeit vor.

Poliklinik für Ohrenkranke hält Prof. *Bürkner* (für Geübtere) Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr.

Geburtshülflich-gynaekologische Klinik u. Poliklinik hält Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag um 8 Uhr Prof. *Runge.*

Geburtshülflich-gynaekologische Untersuchungen leitet Prof. *Runge* Dienstag u. Freitag von 4—5 Uhr.

Die Krankheiten der Ovarien bespricht einstündig Prof. *Runge* öffentlich.

Geburtshülflichen Operationscursus am Phantom hält Dr. *Droysen* Mittw. und Sonnab. von 8—9 Uhr, und in einer zu bestimmenden Stunde.

Psychiatrische Klinik verbunden mit Vorlesungen über Geisteskrankheiten hält Prof. *Meyer* wöchentlich in vier Stunden, Montag und Donnerstag von 3—5 Uhr.

Gerichtliche Psychiatrie mit casuistischen Demonstrationen lehrt (für Juristen) Prof. *Meyer* wöchentlich in zwei nach Verabredung festzusetzenden Stunden.

Hygiene, II. Theil, lehrt Dienstag, Donnerstag und Freitag früh 7—8 Uhr Prof. *Wolffhügel.*

Practische Uebungen im Anschluß an die Vorlesung über Hygiene hält unentgeltlich Prof. *Wolffhügel* Mittwoch u. Sonnabend von 7—8 oder von 8—9 Uhr Vormittags.

Hygienische u. bakteriologische Curse giebt Prof. *Wolffhügel* in passenden Stunden.

Arbeiten im hygienischen Institut leitet Prof. *Wolffhügel* täglich von 9—5 Uhr.

Die äußeren Krankheiten der Hausthiere und die Beurtheilungslehre des Pferdes und Rindes trägt Prof. *Esser* wöchentlich fünfmal von 8—9 Uhr vor.

Klinische Demonstrationen im Thierhospitale wird Prof. *Esser* in zu verabredenden Stunden halten.

Philosophie.

Geschichte der Philosophie: Prof. *Rehnisch*, 5 Stunden, 12 Uhr.

Ueber Kants Kriticismus: Prof. *Peipers*, Mittwoch und Sonnabend 10 Uhr, öffentlich.

Logik: Prof. *Peipers*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 8 Uhr.

Ausgewählte Kapitel der Logik: Prof. *Rehnisch*, öffentlich.

Erkenntnißtheorie und Metaphysik: Prof. *Baumann*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 9 Uhr.

Ausgewählte Kapitel der Biophysik: Prof. *G. E. Müller*, Mont., Dienst., Donnerst. 4 Uhr.

Geschichte und System der Pädagogik: Prof. *Baumann*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 5 Uhr.

Die Uebungen des K. pädagogischen Seminars leitet Prof. *Sauppe*, Mont. und Donnerst. 11 Uhr, öffentlich.

In einer philosophischen Societät wird Prof. *Baumann* das 2. Buch der Rhetorik des Aristoteles behandeln, Mittwoch 9 Uhr.

In einer psychologischen Societät (1—2 stündig) wird Prof. *G. E. Müller* psychologische Fragen behandeln, unter besonderer Berücksichtigung des experimentellen Verfahrens, Mittw. 10 Uhr.

Mathematik, Astronomie und theoretische Physik.

Analytische Geometrie: Prof. *Schwarz*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 11 Uhr.

Algebraische Analysis: Dr. *Hölder*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 12 Uhr.

Ueber die Möglichkeit der Constructionen mit Cirkel und Lineal: Dr. *Hölder*, Mittwoch und Sonnabend, 11 Uhr.

Ueber regelmäßige Theilung des Raumes, nebst Anwendungen, besonders auf die Krystallographie: Dr. *Schönflies*, Montag und Donnerstag, 9 Uhr.

Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen: Dr. *Schönflies*, Dienstag, Mittwoch, Freitag 9 Uhr.

Anwendungen der elliptischen Functionen: Prof. *Schwarz*, Montag bis Freitag 8 Uhr.

Abelsche Functionen, Fortsetzung: Prof. *Klein*, Mittw. 11—1 Uhr.

Methode der kleinsten Quadrate: Prof. *Schur*, Dienstag und Freitag 11 Uhr, öffentlich.

Höhere analytische Mechanik: Prof. *Schering*, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag 7 Uhr, früh.

Partielle Differentialgleichungen der Physik, zweiter Theil: Prof. *Klein*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 12 Uhr.

Theorie der Elasticität: Prof. *Voigt*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 10 Uhr.

Theorie der Capillaritätserscheinungen: Prof. *Voigt*, Sonnabend 10 Uhr.

Sphärische Astronomie, II. Theil (Praktische Astronomie): Prof. *Schur*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 10 Uhr.

Mathematische Colloquien wird Prof. *Schwarz* privatissime, unentgeltlich, wie bisher zweimal wöchentlich veranstalten.

Praktische Uebungen an den Instrumenten der Sternwarte: Prof. *Schur*, täglich.

Magnetische Beobachtungen im Gauss-Observatorium leitet Prof. *Schering* in Gemeinschaft mit dem Assistenten Dr. *Holborn*, Dienstag 7 Uhr Abend.

Im K. mathematisch-physikalischen Seminar wird Prof. *Riecke* ausgewählte Kapitel der mathematischen und Experimentalphysik (Donnerst. 2 Uhr) behandeln, Prof. *Schering* mathematische Uebungen Dienstag 6 Uhr leiten, Prof. *Schwarz* Sonnabend 8 Uhr solche veranstalten, Prof. *Voigt* ausgewählte Probleme der Capillarität (Mittw. 10 Uhr) und Prof. *Klein* ausgewählte Kapitel aus der Theorie der Abelschen Functionen behandeln (Sonnabend 11—1 Uhr), Prof. *Schur* astronomische Uebungen (Freit. Abend 7 Uhr) veranstalten.

Experimentalphysik: siehe *Naturwissenschaften* S. 77.

Naturwissenschaften.

Zoologie, Uebersicht des Gesammtgebietes: Prof. *Ehlers*, täglich 8 Uhr.

Entwickelungsgeschichte des Menschen und der Wirbelthiere: Dr. *Hamann*, Montag und Donnerstag 5 Uhr.

Die neueren Theorieen der Befruchtung und Vererbung im Thierreich: Dr. *Henking*, Dienstag 5 Uhr, unentgeltlich.

Zootomischer Curs: Prof. *Ehlers*, Mittw. u. Donnerst. 11—1 Uhr.

Zoologische Uebungen: Prof. *Ehlers*, wie bisher, täglich (mit Ausnahme des Sonnabends) von 9—1 Uhr.

Demonstrationen in dem K. zoologischen Museum: Dr. *Henking*, Freitag 4 Uhr.

Grundzüge der Botanik: Prof. *Peter*, fünfstündig, früh 7 Uhr.

Pflanzenphysiologie: Prof. *Berthold*, Dienstag, Donnerstag, Freitag 12 Uhr.

Biologie der Pflanzen mit besonderer Berücksichtigung der Beziehungen der Thiere zu den Pflanzen: Dr. *Koch*, 1 St. unentgeltlich.

Ueber Pflanzenkrankheiten: Dr. *Koch*, 1 Stunde.

Uebungen im Untersuchen und Bestimmen der Pflanzen: Prof. *Berthold*, Donnerstag 5—7 Uhr.

Uebungen im Untersuchen der Kryptogamen: Prof. *Berthold*, Freitag 5—7 Uhr, öffentlich.

Botanische Excursionen und Demonstrationen: Prof. *Peter*, Sonnabend Nachmittag, öffentlich.

Mikroskopisch-botanischer Kursus: Prof. *Berthold*, Sonnab. 9—1 Uhr.

Mikroskopisches botanisches Practicum für Anfänger, Mittwoch von 9—1 Uhr: Prof. *Peter*.

Tägliche Arbeiten im pflanzenphysiologischen Institut: Prof. *Berthold*.

Leitung botanischer Arbeiten für Vorgeschrittenere, täglich, privatissime, unentgeltlich: Prof. *Peter*.

Mineralogie, erster Theil: Prof. *Liebisch*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 12 Uhr.

Krystallographische Optik: Prof. *Liebisch*, Mittw. 12 Uhr, öffentlich.

Tägliche Arbeiten im mineralogisch-petrographischen Institut: Prof. *Liebisch*.

Palaeontologie: Prof. *v. Koenen*, 5 St. Dienst. bis Sonnab., 7 Uhr.

Ueber die geologischen Verhältnisse des nördlichen Deutschlands: Prof. *v. Koenen*, Sonnabend 12 Uhr, öffentlich, verbunden mit geologischen Excursionen.

Palaeontologische und geologische Uebungen: Prof. *v. Koenen*, täglich, privatissime, aber unentgeltlich.

Experimentalphysik, erster Theil (Mechanik, Akustik, Optik): Prof. *Riecke*, Mont. und Freit. 4 Uhr, Dienst. und Donnerst. 5 Uhr.

Die praktischen Uebungen im physikalischen Inststut leiten die Prof. *Riecke* und *Voigt*, in Gemeinschaft mit den Assistenten Dr. *Meyer*, Dr. *Drude*, Dr. *Meissner*, Dienstag und Freitag 2—4 Uhr, Sonnabend 9—1 Uhr.

Astrophysik: Dr. *Hugo Meyer*, Montag und Freitag 5 Uhr.

Electricität und Capillaritätserscheinungen: s. *Mathematik* S. 75.

Physikalisches Colloquium für Pharmaceuten: Dr. *Hugo Meyer* in zwei zu verabredenden Stunden.

Mathematisch-physikalisches Seminar: vgl. *Mathematik* S. 75.

Geschichte der Chemie: Dr. *Buchka*, Freitag 7 Uhr.

Allgemeine Chemie, organischer Theil (Organische Experimentalchemie): Prof. *V. Meyer*, 6 Stunden, 9 Uhr.

Organische Chemie, für Mediciner: Prof. *v. Uslar*, 4 Stunden, 9 Uhr.

Gerichtliche chemische Analyse: Prof. *Polstorff*, Dienstag und Freitag 8 Uhr.

Praktische Spectralanalyse: Dr. *Gattermann*, in 2 zu verabredenden Stunden.

Pharmaceutische Chemie (anorgan. Theil): Prof. *Polstorff*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 4 Uhr.

Chemie der Benzolderivate, II. Theil (incl. Theerfarbstoffe): Dr. *Leuckart*, Dienstag, Mittwoch und Donnerstag 7 Uhr.

Analytische Chemie: Dr. *Buchka*, Mittw. und Donnerst. 8 Uhr.

Experimentelle Gas-Analyse mit specieller Berücksichtigung der technisch wichtigen Methoden: Prof. *Jannasch*, Mont. und Donnerstag 11 Uhr.

Uebungen in der Titrir-Analyse: Prof. *Jannasch*, öffentlich.

Ueber die wichtigsten anorganischen Processe der chemischen Technik: Dr. *Jacobson*, Montag und Freitag 5 Uhr.

Anleitung zum Experimentiren (speciell für Kandidaten des höheren Schulamts): Dr. *Gattermann*, 2 Stunden.

Pharmacie: Prof. *von Uslar*, 4 Stunden, 3 Uhr. — Vgl. unter *Medicin* S. 72.

Pflanzenernährungslehre (Agriculturchemie): Prof. *Tollens*, Montag, Dienstag, Mittwoch, 10 Uhr.

Grundzüge der Chemie, I. Theil: Dr. *Pfeiffer*, Dienst., Donnerst., Freit., 9 Uhr.

Die chemischen Uebungen und wissenschaftlichen Arbeiten im akademischen Laboratorium leitet Prof. *V. Meyer*, in Gemeinschaft mit Prof. *Polstorff* und den Assistenten Prof. *Jannasch*, Dr. *Buchka*, Dr. *Leuckart*, Dr. *Gattermann*, Dr. *Demuth* und Dr. *Auwers*; und zwar 1) Vollpracticum, Montag bis Freitag 8—12 und 3—6 Uhr; 2) Halbpracticum, je Vor- und Nachmittags, täglich (außer Sonnabends); 3) Chemisches Anfänger-Practicum für Mediciner, täglich (außer Sonnabends).

Praktische Uebungen im agricultur-chemischen Laboratorium leitet Prof. *Tollens*, in Gemeinschaft mit Dr. *F. Mayer*, Montag bis Freitag, 8—12 und 2—4 Uhr.

Historische Wissenschaften.

Lehre von den Urkunden der älteren deutschen Kaiser: Prof. *Steindorff*, Mont., Dienst., Donnerst. und Freit. 10 Uhr.

Paläographische Uebungen: Prof. *Steindorff*, Mittwoch 10—12 Uhr, privatissime und unentgeltlich.

Ueber das attische Reich: Prof. *von Wilamowitz-Moellendorff*, Dienstag und Freitag 4 Uhr, öffentlich.

Allgemeine Geschichte des Mittelalters: Prof. *Weiland*, Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag, 9 Uhr.

Allgemeine Geschichte im Zeitalter der Hohenstaufen: Dr. *von Kap-herr*, Dienstag und Freitag 11 Uhr.

Deutsche Geschichte von 1786 an: Prof. *Kluckhohn*, Mon. Dienst. Donn. Freit. 12 Uhr.

Geschichte der französischen Revolution 1789—1795: Prof. *Kluckhohn*, Mittw. und Sonnabend 12 Uhr.

Geschichte Italiens seit dem Beginn des Mittelalters: Prof. *Th. Wüstenfeld*, Mont., Dienst., Donnerst. u. Freit., 10 Uhr, unentgeltlich, in seiner Wohnung.

Historische Uebungen leitet Prof. *Weiland*, Freitag 6 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Historische Uebungen leitet Prof. *Volquardsen*, Dienst. 6 Uhr, öffentl.

Historische Uebungen leitet Prof. *Kluckhohn*, Montag 6 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Kirchengeschichte: s. unter *Theologie* S. 69.

Erd- und Völkerkunde.

Geographie der Mittelmeerländer, einschließlich der Alpen: Prof. *Wagner*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit., 11 Uhr.

Geographische Uebungen: Prof. *Wagner*, Sonnabend Vormittag, privatissime, aber unentgeltlich.

Geographisches Colloquium für Vorgeschrittenere: Prof. *Wagner*, 2 Stunden, privatissime, aber unentgeltlich.

Staatswissenschaft und Landwirthschaftslehre.

Praktische Nationalökonomie und Volkswirthschaftspolitik mit besonderer Rücksicht auf die Gesetzgebung des deutschen Reiches: Prof. *Cohn*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit., 5 Uhr.

Allgemeine Nationalökonomie: Prof. *Lexis*, Mont., Dienst., Donn. Freit. 4 Uhr.

Ueber Geld und Münzwesen: Prof. *Lexis*, Dienst. 5 Uhr, öffentlich.

Ueber Staatsschulden: Prof. *Mithoff*, Mittwoch, 5 Uhr, öffentlich.

Uebungen des staatswissenschaftlichen Seminars: Prof. *Cohn*, Mittw. 5—7 Uhr, privatissime, unentgeltlich.

Volkswirthschaftliche Zeitfragen (Fortsetzung): Prof. *Mithoff*, einstündig, öffentlich.

Einleitung in das landwirthschaftliche Studium: Prof. *Drechsler*, 1 Stunde, öffentlich.

Geschichte der Landwirthschaft: Prof. *Kirchner*, Donnerstag 5 Uhr, öffentlich.

Specielle Ackerbaulehre (Pflanzenbau); Prof. *Drechsler*, 6 Stunden, 12 Uhr.

Allgemeine Thierzucht: Prof. *Kirchner*, Donnerst. Freit. Sonnab. 10 Uhr.

Allgemeine und specielle landwirthschaftliche Züchtungslehre: Prof. *Griepenkerl*, Montag und Dienstag, 5 Uhr.

Landwirthschaftliche Rassenkunde: Prof. *Griepenkerl*, Mittw. 5 Uhr, öffentlich.

Die Ackerbausysteme (Feldgraswirthschaft, Felderwirthschaft, Fruchtwechselwirthschaft u. s. w.): Prof. *Griepenkerl*, Donnerstag und Freitag 4 Uhr.

Im Anschluß an diese Vorlesungen werden Excursionen nach benachbarten Landgütern und Fabriken veranstaltet.

Molkereiwesen mit Demonstrationen: Prof. *Kirchner*, Donnerst. Freit. Sonnabend 11 Uhr.

Die Lehre vom Futter (I. Theil der landw. Fütterungslehre): Prof. *Henneberg*, Montag, Dienstag, Mittwoch, 11 Uhr.

Landwirthschaftliches Practicum: Prof. *Drechsler* und Dr. *Edler* (Uebungen im landw. Laboratorium Freit. u. Sonnab. 9—1 Uhr; Uebungen in landw. Berechnungen, 2 Stunden, Montag 6—8 Uhr).

Landwirthschaftliche Excursionen und Demonstrationen im Versuchsfeld und Garten: Prof. *Drechsler*.

Krankheiten der Hausthiere: Vgl. *Medicin* S. 74.

Agriculturchemie, Agriculturchemisches Practicum: Vgl. *Naturwissenschaften* S. 78.

* * *

Landwirthschaftliche Baukunst: Königl. Regierungsbaumeister *Wever* Dienstags 6—8 Nachm.

Ueber Obstbau liest (mit Demonstrationen) Landesbauinspector a. D. *Parisius*, wöchentlich 1 Stunde.

Literatur- und Kunstgeschichte.

Geschichte der Buchdruckerkunst im 15. Jahrh. (Forts.): Prof. *Dziatzko*, Dienst. 8 Uhr, öffentlich.

Bibliographische Uebungen: Prof. *Dziatzko*, Freit. 2—4 Uhr, privatissime.

Geschichte der griechischen Literatur im 5. Jahrhundert: Prof. *v. Wilamowitz-Moellendorff*, 4 Stunden, 10 Uhr.

Einleitung in Goethes Faust: Prof. *Roethe*, Mont., u. Donn. 4 Uhr.

Geschichte der altfranzösichen Literatur, II: Prof. *Vollmöller*, Mont., Dienst., 11 Uhr.

Corneille's Leben und Werke: Lector *Ebray* (in franz. Sprache), 2 St.

Chaucers Leben und Dichtungen, mit Interpretationen: Prof. *Brandl*, Dienst. Mittw. Donnerst. Freit., 8 Uhr.

Geschichte des englischen Dramas neben und nach Shakspeare bis zur großen Revolution: Dr. *Holthausen*, 2 St. wöchentlich.

Allgemeine europäische Kunstgeschichte im 19 Jahrhundert: Prof. *Lange*, Montag Abend 6—8 Uhr.

Geschichte der orientalischen Kunst (Aegypten, Babylonien, Assyrien, Phönicien, Judäa, Persien, Kleinasien, Islam, Indien, China): Prof. *Lange*, 2 Stunden, Donnerst. Abend 6—8 Uhr.

Geschichte der Philosophie und Pädagogik: Vgl. *Philosophie* S. 74.

Alterthumskunde.

Griechische Numismatik (für Philologen und Historiker): Prof. *Wieseler*, dreistündig, 10 Uhr.

Geschichte der griechischen Plastik, von Phidias bis zur pergamenischen Schule (einschließlich) und Erklärung der in diese Periode gehörigen Abgüsse der archäologischen Sammlung: Prof. *Dilthey*, Dienst. Donnerst. Freit., 12 Uhr.

Ausgewählte Kunstwerke läßt im K. archäolog Seminar erklären Prof. *Wieseler*, Sonnabend, 12 Uhr.

Die Gypsabgüsse antiker Kunstwerke von Alexander dem Großen an im K. archäolog. Museum wird Prof. *Wieseler* für Zuhörer aus allen Facultäten einstündig erklären, 10 Uhr, öffentlich.

Die Abhandlungen der Mitglieder des K. archäol. Seminars wird Prof. *Wieseler* privatissime beurtheilen, wie bisher.

Archäologische Uebungen: Prof. *Dilthey*, Sonnabend 10—12 Uhr.

Römische Alterthümer: Prof. *Volquardsen*, Mont., Dienstag, Donn. Freit. 8 Uhr.

Ausgewählte Abschnitte der deutschen Alterthümer (Kircheneinrichtung des Mittelalters): Prof. *Heyne*, Mittwochs 12 Uhr.

Vergleichende Sprachlehre.

Oskische, umbrische, altlateinische Inschriften: Prof. *Bechtel*, Dienst. Donnerst. Freit. 8 Uhr.

Grammatische Uebungen auf dem Gebiete der vergleichenden Grammatik mit schriftlichen Arbeiten: Prof. *Bechtel*, in zu verabredenden Stunden, privatissime, unentgeltlich.

Orientalische Sprachen.

Die Vorlesungen über das A. Testament s. u. *Theologie* S. 69.

Ausgewählte Stücke aus arabischen Schriftstellern erklärt Prof. *Wüstenfeld*, privatissime.

Ausgewählte Stücke des Koran erklärt Prof. *de Lagarde* dreimal 11 Uhr.

Den ersten Band der zu Beirut erschienenen arabischen Chrestomathie läßt Prof. *de Lagarde* zweimal um 11 Uhr übersetzen und erklären.

Die äthiopische Chrestomathie von Dillmann legt Prof. *Haupt* (Mont. und Donnerst. 6 Uhr) zur Erklärung vor.

Assyrische Grammatik: Prof. *Haupt*, Mont. und Donnerst., 6 Uhr.

Erklärung des keilschriftlichen Sintfluthberichts: Prof. *Haupt*, Freitag, 6 Uhr, öffentlich.

Grammatik der Sanskritsprache: Prof. *Kielhorn*, Mont., Mittw., Sonnab., 7 Uhr.

Erklärung von Bhâravi's Kirâtârjunîya: Prof. *Kielhorn*, Mont. und Sonnab., 8 Uhr.

Ausgewählte Hymnen der Rigvêda: Prof. *Kielhorn*, zweimal, öffentl.

Erklärung des Abschnittes der Tarkakaumudî über den Syllogismus: Prof. *Kielhorn*, einmal, öffentlich.

Orientalische Kunst: vergl. *Literatur* und *Kunstgeschichte* S. 80.

Griechische und lateinische Sprache.

Aeschylos Perser: Prof. *Sauppe*, Mont., Dienst., Donn., Freit., 9 Uhr.

Aristoteles Rhetorik: vergl. *Philosophie* S. 74.

Geschichte der griech. Literatur: *Literaturgeschichte* S. 80.

Lateinischer Stil, mit praktischen Uebungen: Prof. *Sauppe*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit., 7 Uhr früh.

Catullus: Prof. *Wilhelm Meyer*, Mont., Dienst., Donn., Freit., 8 Uhr.

Im K. philologischen Seminar leiten die schriftlichen Arbeiten und Disputationen Prof. *Sauppe* u. Prof. *W. Meyer*, Mittwoch 11 Uhr, lassen Tacitus Historiae B. 1. Prof. *Sauppe*, Dienstag und Freitag, 11 Uhr, und die Epigramme des Krinagoras Prof. *W. Meyer* erklären, Montag und Donnerstag, 11 Uhr, alles öffentlich.

Im K. philologischen Proseminar leitet die schriftlichen Uebungen und läßt den Kritias des Platon erklären Prof. *von Wilamowitz-Moellendorff*, Mittwoch 9—11 Uhr, öffentlich.

Deutsche Sprache.

Einführung in das Studium der deutschen Philologie: Prof. *Heyne*, viermal 5 Uhr.

Deutsche Metrik: Prof. *Roethe*, Dienst., Donnerst., Freit., 3 Uhr.

Deutsche Uebungen, Prof. *Heyne*.

Gothische Uebungen für Anfänger Prof. *Roethe*, Mittw., 7 Uhr, öffentlich.

Uebungen auf dem Gebiete der neuern Literatur: Prof. *Roethe*, privatissime, aber unentgeltl., Freitag Abend 6½ Uhr.

Geschichte der deutschen Literatur: Vgl. *Literaturgeschichte* S. 80.

Neuere Sprachen.

Geschichte der französischen Literatur: Vergl. *Literaturgesch.* S. 80.

Historische Grammatik der französischen Sprache I: Prof. *Vollmöller*, Mont., Dienst., Mittw., Donnerst., 12 Uhr.

Französische Metrik: Dr. *Andresen*, Mont. u. Dienst. 10 Uhr.

Italienische Grammatik: Prof. *Vollmöller* mit Dr. *Cloetta*, Donnerst. Freit., 11 Uhr.

Historische Grammatik der englischen Sprache, Flexionslehre: Prof. *Brandl*, Dienst. u. Freit. früh 7 Uhr.

Angelsächsische Uebungen, nach Kluge's Lesebuche: Dr. *Holthausen*, 2 mal wöchentlich.

Geschichte der englischen Literatur: Vgl. *Literaturgesch.* S. 80.

Im Seminar für romanische Sprachen Prof. *Vollmöller*, paläographische Uebungen an altfranzösischen Handschriften: Mittwoch 11—12 Uhr: derselbe mit Dr. *Cloetta*: Französische Uebungen Donnerst. 6—8 Uhr; Italienische Uebungen: Dienst. 6 Uhr. — Dr. *Andresen:* Provenzalische Uebungen, Mont. 6 Uhr. — Im Seminar für englische Sprache hält Prof. *Brandl* literarhistorische Uebungen über Milton und seine Schule, Dienst. 6—8 Uhr Abends. — Lector Dr. *Miller* stellt grammatische und stilistische Uebungen an, zweimal wöchentl. — Derselbe behandelt auch Kingsley's Alton Locke und Kleists Michael Kohlhaas je in einer Stunde.

Neufranzösische Uebungen (Uebersetzung eines deutschen Schriftstellers ins Französische, eines französischen ins Deutsche: Conversation): Lektor *Ebray*, 3 Stunden.

Corneille: vgl. *Literaturgeschichte.* S. 80.

Schöne Künste. — Fertigkeiten.

Unterricht im Zeichnen ertheilt Zeichenlehrer *Peters*, Mittwoch 2—4 Uhr, unentgeltlich.

Unterricht im Malen *Derselbe* in zu verabredenden Stunden.

Harmonie- und Kompositionslehre, verbunden mit praktischen Uebungen: Prof. *Hille*, in passenden Stunden.

Harmonielehre: Prof. *Freiberg*, 2 Stunden wöchentlich, öffentlich.

Zur Theilnahme an den Uebungen der Singakademie und des Orchesterspielvereins ladet Prof. *Hille* ein.

Uebungen im Ensemblespiel hält Prof. *Freiberg.*

Reitunterricht ertheilt in der K. Universitäts-Reitbahn der Univ.-Stallmeister, Rittmeister a. D. *Schweppe*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, Sonnabend, Morgens von 7—11 und Nachm. (außer Sonnabend) von 4—5 Uhr.

Fechtkunst lehrt der Universitätsfechtmeister *Grüneklee*, in zu verabredenden Stunden, Tanzkunst der Universitätstanzmeister *Höltzke* (Montag und Donnerstag 8—10 Uhr Abends).

Oeffentliche Sammlungen.

In der *Universitätsbibliothek* ist das Ausleihezimmer an den Wochentagen von 12—1 und von 2—3 Uhr, der Lesesaal von 10—4 Uhr geöffnet. Verliehen werden Bücher nach Abgabe einer Semesterkarte mit der Bürgschaft eines Professors.

Die *Gemäldesammlung* (Aula, 1 Treppe hoch links) ist Sonntags von 11—1 Uhr geöffnet.

Der *botanische Garten* ist, die Sonn- und Festtage ausgenommen, täglich von 7—12 und von 2—6 Uhr geöffnet.

Die *mineralogische* und die *geologisch-paläontologische Schausammlung* sind im Sommerhalbjahr Sonnabends von 2 bis 4 Uhr dem Publikum geöffnet.

Die Sammlungen des *landwirthschaftlichen Instituts* sind dem Publicum Mittwoch Nachmittag von 2—4 Uhr zugänglich. Anmeldung im Institutsgebäude.

Besuchszeit des *agriculturchemischen Laboratoriums* Donnerst. v. 10—12 Uhr.

Ueber den Besuch und die Benutzung der *theologischen Seminarbibliothek*, des *Theatrum anatomicum*, des *physiologischen Instituts*, der *pathologischen Sammlung*, der *Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle*, des *zoologischen* und *ethnographischen Museums*, des *botanischen Gartens* und des *pflanzenphysiologischen Instituts*, der *Sternwarte*, des *physikalischen Kabinets* und *Laboratoriums*, der *mineralogischen* und der *geognostisch-paläontologischen Sammlung*, der *chemischen Laboratorien*, des *archäologischen Museums*, der *Gemäldesammlung*, der *Bibliothek des K. philologischen Seminars*, der *Bibliothek* und des *Lesezimmers des K. mathematisch-physikalischen Seminars*, des *diplomatischen Apparats*, der *Sammlungen des landwirthschaftlichen Instituts* bestimmen besondere Reglements das Nähere.

Bei dem Logiscommissar, Pedell *Mankel* (Friedländerw. 15A), können die, welche Wohnungen suchen, sowohl über die Preise, als andere Umstände Auskunft erhalten und auch im voraus Bestellungen machen.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (Fr. W. Kaestner)

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

27. Februar. **№ 6.** 1889.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Oeffentliche Sitzung vom 2. Februar.

de Lagarde meldet „Anlagen zu der am 3. November des v. J. vorgelegten Abhandlung“ an.

Ehlers legt einen Aufsatz von Herrn Dr. Hamann vor: „Vorläufige Mittheilungen zur Morphologie und Ontogenie der Echinorhynchen“.

Schwarz legt vor: 1. von Herrn Prof. Brill in Tübingen, Korrespondenten der mathematischen Klasse: „Ueber die Discriminante von Resultanten“.
2. von Herrn Study in Marburg: „Ueber Systeme von complexen Zahlen“.

Voigt legt eine Mittheilung von Herrn Prof. Heinrich Weber in Marburg, Korrespondenten der mathematischen Klasse, vor: „Ueber stationäre Strömung der Electricität in Platten“.

Meyer übergiebt einen Aufsatz: „Ueber Ringschließung unter Abspaltung einer Nitrogruppe aus dem Benzolkern“.

Vorläufige Mitteilungen zur Morphologie und Ontogenie der Echinorhynchen.

Von

Otto Hamann.
(Vorgelegt von Ehlers.)

Die Entwicklung dieser merkwürdigen Wurmklasse ist uns zuerst ausfürlich durch Leuckart bekannt geworden. Seither sind jedoch neuere Untersuchungen, welche die Keimblätterlehre berücksichtigen, nicht angestellt worden. Nur eine Mitteilung von Kaiser (Zoolog. Anzeiger Jargg. 1887) beschäftigt sich mit der Entwicklung von Ech. gigas.

Indem ich eine Monographie dieser Gruppe in nicht zu ferner Zeit zu liefern gedenke, welche die Entwicklungsgeschichte verschiedener Arten, sowie den Bau des geschlechtsreifen Tieres sowol bekannter wie neuer eigentümlich organisirter Formen bringen soll, beabsichtige ich die Resultate in einzelnen Mitteilungen niederzulegen.

Die beim jungen Tier parigen Ovarien zerfallen in eine Anzal von Keimzellen-Ballen. Diese Ballen sind von einer Hülle umgeben und ihr Inhalt sind echte Zellen. Diese vermehren sich und einzelne wachsen indem sie sich peripher lagern, zu Eizellen mit Keimbläschen und Keimfleck heran. Es sind stets bei allen von mir untersuchten Arten echte Zellen, und kann von einem Syncitium (Kaiser) nicht die Rede sein. So setzen sich wie ich hier bereits hervorhebe, die jungen Ovarien bei den Larven ebenfalls aus echten Zellen, Ureiern zusammen.

Die Furchung der befruchteten Eizellen geschieht bei einzelnen Arten, nachdem die Eier sich von den Eiballen losgelöst haben; bei anderen hingegen bleiben die Eier wärend der Furchung in den Ballen liegen. Sobald die Eizelle eine spindlige Gestalt angenommen hat, ist der Keimfleck nicht mehr warnehmbar und es beginnt die Furchung. Bei Ech. acus kann man die Teilung des Keimes verfolgen, sie ist eine direkte. Die beiden aus der Teilung hervorgegangenen Kerne rücken auseinander und eine kaum sichtbare Furchungsebene tritt hervor. Bei Ech. polymorphus u. v. a. liegen diese Ebenen nicht senkrecht zur Längsaxe des Eies, sondern in schiefen Winkeln zu dieser, sodann die einzelnen Blastomeren später Prismen gleichen. Die Furchung schreitet weiter fort und endlich ist die Eizelle in eine Summe gleich großer Zellen zerfallen, one daß eine Furchungshöhle zu Stande käme. Sobald die Zellen eine gewisse Zal erreicht haben beginnen die im Centrum gelegenen Zellen sich Farbstoffen gegenüber abweichend zu verhalten als die peripheren. Sie färben sich intensiver, wärend die äußeren Zellen chromatinärmer sind. Die Kerne des central gelegenen Zellhaufens werden im Laufe der Entwicklung, wärend der Keim in die Länge wächst, mehr und mehr chromatinhaltig. Sind an dem einen Pol des Keimes die Embryonalhaken gebildet, so hat die Furchung ihr Ende erreicht und nach Färbung mit Carmin oder Anilinfarben tritt der centrale Zellhaufen als tief dunkel gefärbte Masse hervor. Er ist es, welcher von früheren Autoren als „Embryonalkern“ oder „centralen Körnerhaufen“ beschrieben wurde.

Sobald der Keim eine centrale Zellmasse von einer peripheren unterscheiden läßt, hat er das Stadium der Gastrula erreicht. Die centrale Zellmasse ist der Entoblast, die periphere aus mehreren Schichten bestehende der Ektoblast. Selbst wenn die Embryonalhäkchen gebildet sind lassen sich durch geeignete Reagentien, welche später ausfürlich geschildert werden sollen, die Zellen des Ektoblast leicht erkennen, wenn auch das Chromatin aus den Kernen fast ganz geschwunden zu sein scheint.

Was nun die Entstehung der Gewebe und der Organe anlangt, so hebe ich nur einige Hauptresultate hervor, um in einer späteren Mitteilung ausfürlich zu berichten.

Aus dem Ektoblast, welcher nach der Einwanderung des Embryo in einen Zwischenwirt keine Kerne mehr erkennen läßt, ebensowenig wie noch Zellgrenzen erhalten sind, geht die Haut des erwachsenen Tieres hervor, indem neue Riesenkerne auftreten welche durch Sprossungserscheinungen die später in der Haut vorhandenen Kerne liefern, welche amöboid beweglich sind, wenigstens bei einigen Arten. Diese Zellkerne teilen sich, one daß Kernteilungsfiguren auftreten. Somit unterscheiden sich die Echinorhynchen von Cestoden und Trematoden, bei welchen das äußere Keimblatt verloren geht und alle Organe sich nur aus dem Entoblast bilden. In sofern steht aber diesen Gruppen die unsrige nahe, da auch bei ihr, mit Ausnahme der Haut, diejenigen Organe, welche phylogenetisch unzweifelhaft ektoblastischen Ursprunges sind wie das Nervensystem, von Entoblastzellen geliefert werden. Die Leibeshöle tritt als eiförmiger Holraum in der Larve auf Dieselbe wird Anfangs von einem Plattenepithel ausgekleidet. Bald scheiden aber einzelne Zellen desselben an ihrer Basis contractile Substanz in Gestalt von ringförmig verlaufenden Muskelfasern aus, welche streng parallel zu einander in gleichen Abständen verlaufen. Wir haben somit Epithelmuskelzellen vor uns, wobei die Bildungszellen der Muskelfasern eine epitheliale Lagerung beibehalten. Erst in einer späteren Entwicklungsperiode werden auch longstudinale Muskelfasern von bisher noch indifferenten Coelomzellen gebildet und der Charakter des Coelomepithels hierbei verwischt. Man trifft beim erwachsenen Tier kein eigentliches Coelomepithel mehr an, da die Zellen ihre epitheliale Lagerung aufgegeben haben und zu den großen Muskelzellen ausgewachsen sind, welche später beschrieben werden sollen.

Die Entwicklung der übrigen Organe schildere ich demnächst, möchte aber an dieser Stelle noch hervorheben, daß die einzelnen Arten dieser Familie sehr verschieden von einander gebaut sein können, was nach den vorliegenden Beobachtungen zu schließen nicht der Fall ist. Bei einem Echinorhynchus, welcher warscheinlich neu ist, fungirt die Rüsselscheide nur als Behälter für das

Gehirn, dessen kolossale Ganglienzellen mit ihren kolossalen Nervenfasern dieselbe erfüllen, wärend der Rüssel selbst wegen seiner ungemeinen Länge (das weibliche Tier mißt 4 centimeter, der Rüssel 1 centimeter) nur auf einer gewissen Strecke eingestülpt werden kann.

Im Anschluß an diese erste Mitteilung berichte ich noch über einen Fund, den ich bei der Züchtung der Echinorhynchen machte. Ich fand in der Leibeshöle eines Gammarus pulex sechs an Cercarien erinnernde Gebilde, welche sich bei näherer Untersuchung als geschwänzte Cysticerkoiden herausstellten. Da bisher nur einmal von d'Udekem (Bull. de l'académ. roy. d. scienc. d. Belgique T. 22. 2. Part. 1855 p. 528—533) eine solche Form beschrieben worden ist und diese bereits Gefäße zeigte, so dürfte eine ausfürliche Beschreibung nicht uninteressant sein, zumal diese Formen seit Ratzels Entdeckung des später von Leuckart als Archigetes Sieboldi beschriebenen Tieres ein großes Interesse bieten.

Da bisher nach Leuckarts Angaben (Die Parasiten des Menschen 1. Bd. 2. Aufl. 1879) die Entstehung des Scolex eines Cysticerkoiden noch nicht beobachtet wurde so denke ich auch an anderer Stelle mit Abbildungen dieselbe ausführlich zu geben, da meine sechs Cysticerkoiden sich in verschiedensten Entwicklungszuständen befinden.

An allen Exemplaren tritt an dem eiförmigen abgeplatteten Körper ein Schwanzanhang hervor. Dieser ist drehrund und solid, wärend der vordere Teil eine Hölung zeigt, in welchem die Wandung der Ansatzstelle des Schwanzes gegenüber eingestülpt ist. Die eingestülpte Wand liegt der Blasenwand eng an und in der Tiefe desselben zeigt sich eine grubenförmige Einsenkung, in welcher die Zellen ein Polster bilden. Dies ist die erste Anlage des Kopfes. Wärend nun aber bei den echten Cysticerken im Umkreise dieser Einstülpung sich die Saugnäpfe anlegen und der Kopf in dieser Lage verharrt auch wenn die Hakenreihen entstanden sind, erhebt sich in unserem Falle die Einsenkung und stülpt sich in das Innere des eingestülpten Sackes hervor, und so nimmt der Kopf frühzeitig die Lagerung ein, wie sie das Cysticerkoid des Arion empiricorum zeigt. Dabei wird der Kopf oder Scolex solid angelegt. An dem ältesten Cysticerkoid erhebt sich der Scolex in Gestalt eines Kegels und füllt den Holraum des Sackes fast ganz aus. Das vordere Ende ist abgerundet und zeigt zwei schwache Gruben, die Saugnäpfe. Haken fehlen vollständig. Damit dürfte wol die Zugehörigkeit dieser Formen zu einem Bothriocephalus gesichert sein. Uebrigens sagt Leuckart in der Abhandlung über den Archigetes (Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd. 30. Suppl. 1878), daß er glaube Grund zu der Vermutung zu haben, daß geschwänzte Cysticerkoiden unter den Bothriocephaliden eine ziemlich weite Verbreitung haben. Bis jetzt freilich waren Tatsachen, welche diese Vermutung unterstützt hätten, von keiner Seite bekannt geworden.

Ueber die Discriminante von Resultanten.

Von

A. Brill in Tübingen.

Daß die Discriminante von Gleichungen, welche durch Eliminations- oder sonstige invariante Processe aus anderen Gleichungen gewonnen werden, häufig in angebbare Factoren rational zerfallen, habe ich bei mehreren Anlässen gezeigt und für die Theorie der binären Formen und der rationalen Curven nutzbar zu machen gesucht. Ich erlaube mir im Folgenden der K. Societät einen neuen durch seine Allgemeinheit ausgezeichneten Fall dieser Art vorzulegen, der sich auf die Resultante aus n algebraischen Gleichungen mit n Unbekannten bezieht. Man kann folgenden Satz aussprechen:

Die Resultante von n rationalen ganzen Functionen von n Veränderlichen, gebildet nach irgend einer derselben (durch Elimination der $n-1$ übrigen) hat zur Discriminante eine ganze Function der Coefficienten, welche die Resultante aus den n Functionen und ihrer Functionaldeterminante als Factor besitzt.

Der leichteren Uebersicht wegen sei es gestattet, den Beweis des Satzes für den Fall von nur drei Gleichungen mit drei Unbekannten zu führen. Er läßt sich ohne Weiteres auf den allgemeinen Fall ausdehnen.

Führt man in die drei ganzen Functionen $f(x\,y\,z)$, $\varphi(x\,y\,z)$, $\psi(x\,y\,z)$ von bezw. dem $m.$, $n.$, $p.$ Grad durch eine vorläufige Transformation statt der Variabeln z eine andere ein:

$$t = \lambda x + \mu y + z,$$

wodurch die Functionen die Form annehmen:

$$f(x\,y\,z) = F(x\,y\,t)$$
$$\varphi(x\,y\,z) = \Phi(x\,y\,t)$$
$$\psi(x\,y\,z) = \Psi(x\,y\,t),$$

so erhält man durch Elimination von x, y aus F, Φ und Ψ, wenn die Flächen $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ keine Curve gemeinsam haben (was wir, ebenso wie den Fall mehrfacher Schnittpuncte, ausschließen, weil sonst die Discriminante der Resultante identisch verschwinden würde), eine Gleichung von der Form:

$$T(t) = t^r\,T_0 + t^{r-1}\,T_1 + \cdots + T_r,$$

wo $r \gtreqless mnp$ ist, und die Coefficienten $T_0\;T_1 \cdots T_r$ ganze Functionen von λ, μ sind, T_i höchstens vom Grad i.

Die Resultante T läßt sich andererseits bekanntlich in die Form[1]) bringen:

$$T = AF + B\Phi + C\Psi, \tag{1}$$

wo die Multiplicatoren A, B, C ganze Functionen von x, y, t sind von höchstens den Graden $r-m$, $r-n$, $r-p$. Differenzirt man die Identität (1) der Reihe nach hinsichtlich t, x, y, so erhält man (in bekannter Bezeichnungsweise):

$$\text{(1a)}\quad\begin{cases} T'(t) = A\,F'(t) + B\Phi'(t) + C\Psi'(t) + A'(t)\,F + B'(t)\,\Phi + C'(t)\,\Psi \\ \quad 0 = A\,F'(x) + B\Phi'(x) + C\Psi'(x) + A'(x)F + B'(x)\,\Phi + C'(x)\Psi \\ \quad 0 = A\,F'(y) + B\Phi'(y) + C\Psi'(y) + A'(y)\,F + B'(y)\,\Phi + C'(y)\,\Psi. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen beziehungsweise mit:

$$\Phi'(x)\,\Psi'(y) - \Psi'(x)\,\Phi'(y)$$
$$\Phi'(y)\,\Psi'(t) - \Psi'(y)\,\Phi'(t)$$
$$\Phi'(t)\,\Psi'(x) - \Psi'(t)\,\Phi'(x)$$

und addirt, so kommt:

$$T'(t)\Big(\Phi'(x)\,\Psi'(y) - \Psi'(x)\,\Phi(y)\Big) =$$
$$= A\cdot\Sigma\pm F'(x)\,\Phi'(y)\,\Psi'(t) + F\cdot\Sigma\pm A'(x)\,\Phi'(y)\,\Psi'(t) +$$
$$+ \Phi\cdot\Sigma\pm B'(x)\,\Phi'(y)\,\Psi'(t) + \Psi\cdot\Sigma\pm C'(x)\,\Phi'(y)\,\Psi'(t),$$

wo unter $\Sigma\pm$ die Determinante je mit der angeschriebenen Diagonalreihe zu verstehn ist. Setzt man in dieser Identität für x, y, t das zu einem Schnittpunkt der Flächen F, Φ, Ψ gehörige Werthepaar x_i, y_i, t_i ein, so fallen die mit F, Φ, Ψ multiplicirten Glieder weg. Macht man dann der Reihe nach $i = 1, 2, \ldots r$ und multi-

1) Vgl. z. B. Perrin, Sur la relation qui existe entre p fonctions entières de $p-1$ variables, Comptes rendus 1888.

plicirt die so erhaltenen Gleichungen mit einander, so erhält man:

$$T'(t_1)\,T'(t_2)\ldots T'(t_r)\cdot M_1 M_2 \ldots M_r = A_1 A_2 \ldots A_r \cdot R_1 R_2 \ldots R_r,$$

wenn zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} M_i &= \Phi'(x_i)\,\Psi'(y_i) - \Psi'(x_i)\,\Phi'(y_i) \\ A_i &= A(x_i\, y_i\, t_i) \\ R_i &= \Sigma \pm F'(x_i)\,\Phi'(y_i)\,\Psi'(t_i) \end{aligned}$$

gesetzt wird. Das Product links wird als symmetrische Function der Coordinaten der Schnittpunkte zu einer ganzen Function der Coefficienten in T (also auch der Coefficienten von f, φ, ψ), nachdem man die erste Gruppe von Factoren mit T_0^{r-2}, die zweite mit T_0^{n+p-2} multiplicirt hat.

Man beweist leicht auf directem Weg, daß die zweite Gruppe der rechten Seite eine ganze Function wird, wenn man sie mit $T_0^{m+n+p-4}$ multiplicirt, während ersichtlich T_0^{r-m} die erste zu einer ganzen Function macht.

Man erhält so zwischen der Discriminante Δ_T von $T(t)$, der Resultante aus M, F, Φ, Ψ u. s. w. die folgende Beziehung:

$$\Delta_T.\ \text{Result.}\ (M, F, \Phi, \Psi) = \text{Result.}\ (A, F, \Phi, \Psi).\ \text{Result.}\ (R, F, \Phi, \Psi).$$

Weil aber die Differentialquotienten z. B. von F nach den neuen Variabeln x, y, t durch die von f nach den früheren x, y, z sich wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x) - \lambda f'(z) \\ F'(y) &= f'(y) - \lambda f'(z) \\ F'(t) &= f'(z), \end{aligned}$$

so wird:

$$\Sigma \pm F'(x)\,\Phi'(y)\,\Psi'(t) = \Sigma \pm f'(x)\,\varphi'(y)\,\psi'(z) = R_{f\varphi\psi}$$

und somit endlich:

$$\Delta_T = \frac{\text{Result.}\ (A, F, \Phi, \Psi)}{\text{Result.}\ (M, F, \Phi, \Psi)}.\ \text{Result.}\ (R_{f\varphi\psi}\, f, \varphi, \psi), \qquad (3)$$

wo $R_{f\varphi\psi}$ die Functionaldeterminante von f, φ, ψ nach x, y, z ist. Nun haben aber im Allgemeinen Zähler und Nenner des Bruchs auf der rechten Seite keinen Factor gemeinsam. Es genügt, an einem passend gewählten Beispiel dies nachzuweisen. Setzt man nämlich:

$$F(x\,y\,t) = x, \quad \Phi(x\,y\,t) = y - \varphi(x\,t),$$

so erhalten die beiden letzten Identitäten (1a) die Form:

$$0 = A + B\Phi'(x) + C\Psi'(x)$$
$$0 = \quad B\Phi'(y) + C\Psi'(y),$$

wenn x, y, t einem Schnittpunkt von $x = 0$, $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ entspricht.

Weil hier:

$$\Phi'(y) = 1$$

ist, so hat man wegen der letzten Gleichung:

$$B = -C \cdot \Psi'(y).$$

Setzt man diesen Werth in die erste ein, so kommt:

$$A = C \cdot M.$$

Die Resultante aus A, F, Φ, Ψ besitzt also in diesem Falle den Factor:

$$\text{Result.}\ (M, F, \Phi, \Psi),$$

während andrerseits die Letztere mit Result. $(R, F, \Phi\ \Psi)$ theilerfremd ist, weil im Allgemeinen die Gleichung

$$\Phi'(x) : \Phi'(t) = \Psi'(x) : \Psi'(t)$$

in den Schnittpunkten der drei Flächen $x = 0$, $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ nicht erfüllt ist.

Wenn nun also Res. (M, F, Φ, Ψ) und Res. (R, f, φ, ψ) in diesem Beispiel und somit im Allgemeinen theilerfremd sind, so muß die Resultante aus R, f, φ, ψ Theiler der Discriminante Δ_r sein, was zu beweisen war.

Durch passende Wahl von λ und μ kann man t in x, y oder z selbst überführen. Die Discriminante der Resultante von f, φ, ψ nach jeder dieser Veränderlichen hat also ebenso wie die nach t selbst einen „wesentlichen Theiler“, der von λ und μ unabhängig ist und denselben Werth für die Resultante von f, φ, ψ nach jeder dieser Veränderlichen besitzt, während der andere Factor der Resultante eine ganze Function von λ und μ ist, und also im Allgemeinen für jede einen anderen Werth besitzt.

Daß alle diese Bemerkungen, namentlich auch die auf die Theilbarkeit von Result. (A, F, Φ, Ψ) durch Result. (M, F, Φ, Ψ) bezügliche, sofort für den Fall von beliebig vielen Gleichungen ausgesprochen werden können, dies bedarf keiner näheren Ausführung.

Ueber stationäre Strömung der Electricität in Platten.

Von

H. Weber.

In der Theorie der Nobilischen Farben handelt es sich um die Bestimmung stationärer electrischer Strömungen aus einer meist punktförmig angenommenen Electrode durch eine Flüssigkeitsschicht in eine Metallplatte. Gewöhnlich wird hierbei die Voraussetzung gemacht, daß die elelectrische Spannung (das Potential) an der Metallfläche einen constanten Wert hat, oder, was dasselbe ist, daß die Strömung senkrecht zu der Grenzfläche in das Metall eintritt [1]). Sofern es sich nur um die Strömung in der Flüssigkeit handelt, ist diese Annahme wohl genügend, da in Folge der hohen Leitungsfähigkeit des Metalls, verglichen mit der der Flüssigkeit, das Verhalten der Strömung im Metall ohne merklichen Einfluß ist auf den Stromverlauf in der Flüssigkeit. Es bleibt jedoch dabei die Frage nach der im Metall selbst stattfindenden Strömung eine offene.

Das im folgenden behandelte Problem giebt zur Beantwortung dieser Frage einen Beitrag.

Zwei electrische Leiter (1), (2) mit den Leitungsfähigkeiten k_1, k_2 sollen die Gestalt unbegrenzter plan paralleler Platten von den Dicken a_1, a_2 haben und mit einer der Grenzflächen sich berühren. An beliebigen Stellen im Innern der Leiter oder an ihren freien Oberflächen soll die Electricität durch punktförmige Electroden ein- oder austreten. Es handelt sich um den Verlauf der Strömung im Innern dieser Leiter.

Das allgemeine Problem kann aus dem particularen einer einzigen Einströmungsstelle zusammengesetzt werden, bei welchem ein Abfluß der Electricität .nach dem Unendlichen angenommen werden muß.

Ich gehe aus von der Vorstellung einer Electrode, welche die Gestalt einer Kreisscheibe hat, deren Ebene mit den Grenzflächen der Leiter parallel ist, durch welche die Electricität senkrecht,

---

1) Ein hierher gehöriges Problem, in welchem diese Voraussetzung nicht gemacht ist, behandelt Ditscheiner, jedoch auf einem von dem unseren ganz verschiedenen Weg. (Sitzungsberichte der Wiener Akademie 4. Oct. 1887 Bd. LXXXVI, II.

und zwar, wenn die Elektrode eingetaucht ist, nach beiden Seiten, austritt, nachträglich wird der Radius der Electrode unendlich klein angenommen.

Die kreisförmige Electrode vom Radius r_1 möge in zweiten Leiter liegen und einen Strom von der Intensität S in denselben einlassen. Es sei β der Abstand der Electrode und z der Abstand eines veränderlichen Punktes von der Berührungsfläche beider Leiter, positiv auf der Seite des zweiten Leiters gerechnet; r sei der Abstand desselben veränderlichen Punktes von der durch den Electrodenmittelpunkt senkrecht zu den Grenzflächen gelegten Axe.

Das Potential, dessen partielle Ableitungen die Componenten der electrischen Strömung geben, werde mit u, und wenn eine Unterscheidung erforderlich ist, im ersten und zweiten Leiter mit u_1 und u_2 bezeichnet. Ueberdies werde der zweite Leiter durch eine Ebene, welche die Electrode enthält in zwei Teile geteilt, in welchen das Potential mit u_2' und u_2'' bezeichnet sei. Dann ist u als Function von r, z aus folgenden Bedingungen zu bestimmen:

$$(1)\quad \text{für}\quad -\alpha_1 < z < \alpha_2 \quad : \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0,$$

$$(2)\quad \text{„}\quad z = -\alpha_1 \quad : \quad \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0,$$

$$(3)\quad \text{„}\quad z = 0 \quad : \quad u_1 = u_2\,^{1)},$$

$$(4)\quad \text{„}\quad \text{„} \quad : \quad k_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial z},$$

$$(5)\quad \text{„}\quad z = \beta \quad : \quad u_2' = u_2'',$$

$$(6)\quad \text{„}\quad z = \beta,\ r < r_1 \quad : \quad \frac{\partial u_2''}{\partial z} - \frac{\partial u_2'}{\partial z} = \frac{S}{\pi k_2 r_1 \sqrt{r_1^2 - r^2}},$$

$$(7)\quad \text{„}\quad z = \beta,\ r > r_1 \quad : \quad \frac{\partial u''}{\partial z} - \frac{\partial u_2'}{\partial z} = 0,$$

$$(8)\quad \text{„}\quad z = \alpha_2 \quad : \quad \frac{\partial u_2''}{\partial z} = 0.$$

Was die Bedingungen (6) (7) betrifft, so findet der Leser die

---

1) Ist zwischen den beiden Leitern eine electromotorische Kraft thätig, so wird die Bedingung (3) durch die ersetzt, daß $u_1 - u_2$ für $z = 0$ einer gegebenen Constanten gleich ist. Dieser Bedingung kann durch Hinzufügung je einer Constanten zu u_1, u_2 genügt werden, so daß die Gestalt der Stromcurven, sowie überhaupt die Behandlung des Problems dadurch in keiner Weise geändert wird.

genauere Begründung derselben in § 5 meiner Abhandlung „Ueber Bessel sche Functionen und ihre Anwendung auf die Theorie der electrischen Ströme“ (Journal f. Mathematik Bd. 75, S. 75). Nach den dortigen Ergebnissen kann man, wenn mit $J(x)$ die Bessel sche Function 0ter Ordnung bezeichnet wird, diese beiden Bedingungen auch in die eine zusammenfassen

$$\text{für } z = 0: \quad \frac{\partial u_2''}{\partial z} - \frac{\partial u_2'}{\partial z} = \frac{S}{\pi k_2 r_1} \int_0^\infty J(\xi r) \sin(\xi r_1)\, d\xi.$$

Zu einer Lösung dieses Problems führt das in § 6 der oben genannten Abhandlung angewandte Verfahren. Ich mache den Ansatz

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{S}{\pi k_2} \int_0^\infty \left\{ J(\xi v) \left(\varphi_1(\xi) e^{\xi z} + \psi_1(\xi) e^{-\xi z}\right) - \chi(\xi) \right\} d\xi, \\ (9) \qquad u_1' &= \frac{S}{\pi k_2} \int_0^\infty \left\{ J(\xi v) \left(\varphi_2'(\xi) e^{\xi z} + \psi_2'(\xi) e^{-\xi z}\right) - \chi(\xi) \right\} d\xi, \\ u_2'' &= \frac{S}{\pi k_2} \int_0^\infty \left\{ J(\xi v) \left(\varphi_2''(\xi) e^{\xi z} + \psi_2''(\xi) e^{-\xi z}\right) - \chi(\xi) \right\} d\xi, \end{aligned}$$

wodurch die Gleichung (1) befriedigt ist. $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2', \psi_2', \varphi_2'', \psi_2''$ sind noch zu bestimmende Functionen von ξ; $\chi(\xi)$ kann nicht völlig bestimmt werden, da die Bedingungen (1) bis (8) eine additive Constante in u unbestimmt lassen. Sie ist hier nur deshalb unter dem Integral mit aufgenommen, um mit ihrer Hülfe die Convergenz der Integrale herzustellen. Aus den Differentialquotienten auf die es im Wesentlichen allein ankommt, fällt dieselbe fort. Für die Functionen φ, ψ ergeben sich aus (2) bis (8) die Bedingungen

$$(10) \qquad \begin{aligned} \varphi_1 e^{-\xi \alpha_1} - \psi_1 e^{\xi \alpha_1} &= 0; \\ \varphi_1 + \psi_1 &= \varphi_2' + \psi_2' \\ k_1(\varphi_1 - \psi_1) &= k_2(\varphi_2' - \psi_2') \\ \varphi_2' e^{\xi\beta} + \psi_2' e^{-\xi\beta} &= \varphi_2'' e^{\xi\beta} + \psi_2'' e^{-\xi\beta}, \\ (\varphi_2'' - \varphi_2') e^{\xi\beta} - (\psi_2'' - \psi_2') e^{-\xi\beta} &= 1, \\ \varphi_2'' e^{\xi\alpha_2} - \psi_2'' e^{-\xi\alpha_2} &- 0, \end{aligned}$$

wobei in der vorletzten der Wert 1 als Grenzwert von $\sin \xi r_1 : \xi r_1$ für ein verschwindendes r_1, hervorgegangen ist, so daß von nun an eine punktförmige Electrode angenommen ist. Hieraus können die Functionen φ, ψ leicht berechnet werden. Sie werden für

$\xi = 0$ unendlich, und deshalb ist die Hinzufügung der Function $\chi(\xi)$ erforderlich. Bei den nach r und z genommenen Differentialquotienten findet dies nicht mehr statt. Ich unterlasse es, die hieraus sich ergebenden ziemlich langen Ausdrücke für u_1, u_2', u_2'' hierherzusetzen, da es nicht diese Form der Lösung ist, aus welcher weitere Schlüsse gezogen werden können, und da die beabsichtigte Umformung leichter aus den unaufgelösten Gleichungen (10) abzuleiten ist.

Es werde eine Reihe von Functionen $v^{(\nu)}$ von z so definiert:

$$
\begin{aligned}
v_1^{(\nu)} &= \cos(\nu\alpha_2)\cos\nu(\alpha_1+z) \qquad -\alpha_1 < z < 0, \\
v_2^{(\nu)} &= \cos(\nu\alpha_2)\cos\nu(\alpha_2+z) \qquad 0 < z < \alpha_2,
\end{aligned} \tag{11}
$$

worin ν die Reihe der positiven Wurzeln der transcendenten Gleichung

$$
k_1\cos(\nu\alpha_2)\sin(\nu\alpha_1) + k_2\cos(\nu\alpha_1)\sin(\nu\alpha_2) = 0, \tag{12}
$$

der Größe nach geordnet, durchläuft, so daß die Functionen $v^{(\nu)}$ die Bedingungen (2), (3), (4), (5) (7), (8) erfüllen. Für diese Functionen bestehen die Gleichungen

$$
k_1\int_{-\alpha_1}^{0} v_1^{(\nu)}dz + k_2\int_0^{\alpha_2} v_2^{(\nu)}dz = 0,
$$

$$
k_1\int_{-\alpha_1}^{0} v_1^{(\nu)}v_1^{(\nu)}dz + k_2\int_0^{\alpha_2} v_2^{(\nu)}v_2^{(\nu)}dz = \tfrac{1}{2}\left(k_1\alpha_1\cos^2(\nu\alpha_2) + k_2\alpha_2\cos^2(\nu\alpha_2)\right), \tag{13}
$$

$$
k_1\int_{-\alpha_1}^{0} v_1^{(\nu)}v_1^{(\nu')}dz + k_2\int_0^{\alpha_2} v_2^{(\nu)}v_2^{(\nu')}dz = 0,
$$

wenn ν, ν' zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung (12) sind. Auf Grund dieser Formeln kann man eine zwischen $-\alpha_1$ und α_2 beliebig gegebene Function $\Phi(z)$ von z in eine nach den Functionen $v^{(\nu)}$ fortschreitende nach Art der Fourierschen gebildete Reihe

$$
\Phi(z) = A_0 + 2\sum^{\nu} A_\nu v^{(\nu)}
$$

entwickeln, worin nach (13)

$$
(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2)\,A_0 = k_1\int_{-\alpha_1}^{0}\Phi(z)\,dz + k_2\int_0^{\alpha_2}\Phi(z)\,dz,
$$

$$(k_1 \alpha_1 \cos^2 (\nu \alpha_2) + k_2 \alpha_2 \cos^2 (\nu \alpha_1)) A_\nu =$$

$$= k_1 \int_{-\alpha_1}^{0} \Phi(z) v_1^{(\nu)} dz + k_2 \int_0^{\alpha_2} \Phi(z) v_2^{(\nu)} dz.$$

Wir wenden dies an auf die durch (9), (10) definierte Function u. Für den ersten Coefficienten A_0 erhält man alsdann

$$(k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2) A_0 = \frac{-S}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{J(\xi r)}{\xi} - \chi(\xi)(k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2) \right\} d\xi,$$

und wenn man nach r differentiiert, dann die Integration nach ξ und wieder nach r ausführt, von einer additiven Constanten abgesehen, welche nicht bestimmt ist

$$A_0 = \frac{S}{\pi (k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2)} \log r.$$

Bei der Bestimmung der übrigen Coëfficienten A_ν fällt die Function $\chi(\xi)$ heraus und es findet sich mit Hülfe der in meiner oben citierten Abhandlung abgeleiteten Formel (§ 2 (161))

$$\int_0^\infty \frac{\xi J(\xi \nu) ds}{\xi^2 + \nu^2} = \int_0^\infty \frac{e^{-\xi \nu r} ds}{\sqrt{\xi^2 - 1}},$$

$$A_\nu = -\frac{S}{\pi} \frac{\cos(\nu \alpha_1) \cos \nu (\alpha_2 - \beta)}{k_1 \alpha_1 \cos^2 (\nu \alpha_2) + k_2 \alpha_2 \cos^2 (\nu \alpha_1)} \int_1^\infty \frac{e^{-\xi \nu r} d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

so daß man für u die Entwicklung erhält:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{S \log r}{\pi (k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2)} - \\ &- \frac{2S}{\pi} \sum^{\nu} \frac{\cos(\nu \alpha_1) \cos(\nu \alpha_2) \cos \nu (\alpha_1 - \beta) \cos \nu (\alpha_1 + z)}{k_1 \alpha_1 \cos^2 (\nu \alpha_2) + k_2 \alpha_2 \cos^2 (\nu \alpha_1)} \int_1^\infty \frac{e^{-\xi \nu r} d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}, \\ u_2 &= \frac{S \log r}{\pi (k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2)} - \\ &- \frac{2S}{\pi} \sum^{\nu} \frac{\cos^2 (\nu \alpha_1) \cos \nu (\alpha_2 - \beta) \cos \nu (\alpha_2 - z)}{k_1 \alpha_1' \cos^2 (\nu \alpha_2) + k_2 \alpha_2 \cos^2 (\nu \alpha_1)} \int_1^\infty \frac{e^{-\xi \nu r} d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Diese Ausdrücke gelten unverändert auch dann noch, wenn die Electrode in eine der Grenzflächen des zweiten Leiters rückt, also $\beta = 0$ oder $= \alpha_2$ wird.

Liegt die Electrode im ersten Leiter, im Abstand β von der

Berührungsfläche, so ist in diesen Formeln u_1, k_1, α_1, z zu vertauschen mit u_2, k_2, α_2, $-z$.

Die in den Entwicklungen (14) vorkommende Besselsche Function

$$\int_1^\infty \frac{e^{-x\xi} d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}$$

läßt sich durch die für große Werte von k zur Berechnung geeignete halb convergente Reihe darstellen

$$\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\, e^{-x} \sum_{0,\alpha}^{\nu} \frac{(-1)^n}{(4x)^n} \frac{(1\cdot 3 \cdots (2n-1))^2}{2\cdot 4 \cdots 2n} \tag{15}$$

und kann für hinlänglich große Argumentwerte genähert durch das erste Glied derselben ersetzt werden; jedenfalls ist der Wert des Integrals immer kleiner als dies erste Glied. In dieser Function ist $x = \nu r$ zu setzen und die Discussion der transcendenten Gleichung (12), die auch so geschrieben werden kann

$$k_1 \operatorname{tg}(\nu\alpha_1) + k_2 \operatorname{tg}(\nu\alpha_2) = 0$$

lehrt, daß die kleinste Wurzel ν immer größer ist als der kleinere der beiden Werte

$$\frac{\pi}{2\alpha_1}, \quad \frac{\pi}{2\alpha_2}\ ^{1)},$$

die folgende größer als der kleinere der beiden Werte

$$\frac{\pi}{\alpha_1}, \quad \frac{\pi}{\alpha_2}$$

u. s. f. und daß mithin die Reihen (14), wenn r im Verhältniß zur Dicke der Platten einigermaßen groß ist, sehr stark convergieren. In einiger Entfernung von der Electrode ist das erste Glied

$$\frac{S \log r}{\pi(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2)}$$

das überwiegende, welches den Teil der Strömung darstellt, welcher

---

1) Ist $\alpha_1 < \alpha_2$, so ist für die kleinste Wurzel ν

$$\nu\alpha_1 < \tfrac{1}{2}\pi < \nu\alpha_2 < \pi,$$

und es liegen, wenn n eine positive ganze Zahl ist, zwischen den Grenzen

$$(n \pm \tfrac{1}{2})\frac{\pi}{\alpha_2}$$

zwei oder eine Wurzel ν, je nachdem zwischen denselben Grenzen ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2\alpha_1}$ liegt oder nicht.

parallel den Grenzflächen der Leiter nach dem von Kirchhoff für unendlich dünne Platten aufgestellten Gesetz geschieht. Dieser Teil der Strömung verteilt sich auf den ersten und zweiten Leiter im Verhältniß $k_1 \alpha_1 : k_2 \alpha_2$, gleichviel in welchem der beiden Leiter die Electrode gelegen ist.

Ich gehe noch auf die Betrachtung einiger besonderer Fälle über.

Wenn die Dicke der beiden Platten die gleiche ist, so sind die $\nu \alpha_1$, $\nu \alpha_2$ die aufeinander folgenden Vielfachen von $\frac{1}{2}\pi$; die Coëfficienten in der Entwicklung (14) stellen sich in diesem Fall in unbestimmter Form dar; man kann ihren Wert aber durch einen Grenzübergang leicht bestimmen und erhält, wenn n die Reihe der positiven ganzen Zahlen, p die der ungeraden unter ihnen durchläuft und $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ gesetzt wird

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{S}{\pi\alpha(k_1+k_2)}\left\{\log r - 2\sum^{p} \sin\frac{p\pi}{2\alpha}\beta \sin\frac{p\pi}{2\alpha}z \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{\xi p\pi r}{2\alpha}}\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}} - \right. \\ &\qquad \left. - 2\sum^{n} \cos\frac{n\pi\beta}{\alpha}\cos\frac{n\pi z}{\alpha}\int_1^\infty \frac{e^{-\frac{\xi n\pi r}{\alpha}}\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}\right\}. \\ u_2 &= \frac{S}{\pi\alpha(k_1+k_2)}\left\{\log r - 2\frac{k_1}{k_2}\sum^{p} \sin\frac{p\pi}{2\alpha}\beta \sin\frac{p\pi}{2\alpha}z \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{\xi p\pi r}{2\alpha}}\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}} - \right. \\ &\qquad \left. - 2\sum^{n} \cos\frac{n\pi\beta}{\alpha}\cos\frac{n\pi z}{\alpha}\int_1^\infty \frac{e^{-\frac{\xi n\pi r}{\alpha}}\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Nimmt man zweitens die Leitungsfähigkeit k_1 (im Vergleich zu k_2 unendlich an, so werden die Wurzeln der Gleichung (12)

$$\nu = \frac{p\pi}{2\alpha_2}, \qquad \frac{n\pi}{\alpha_1},$$

u_1 wird verschwindend klein und für u_2 ergiebt sich

$$u_2 = -2\frac{S}{k_2\pi\alpha_2}\sum \sin\frac{p\pi}{2\alpha_2}\beta \sin\frac{p\pi}{2\alpha_2}z\int_1^\infty \frac{e^{-\frac{\xi p\pi r}{2\alpha_2}}\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}. \quad (17)$$

Diese Formel ist bereits durch Riemann gegeben. (Zur Theorie der Nobilischen Farbenringe, Riemanns Werke S. 54).

Man könnte auch noch die Annahme verfolgen, daß während

k_1 wächst, α_1 gleichzeitig so abnimmt, daß $k_1\alpha_1$ sich einer mit $k_2\alpha_2$ vergleichbaren Grenze λ nähert. Die transcendente Gleichung (12) geht dann in die aus der Wärmetheorie bekannte Gleichung über:

$$\operatorname{tg} \nu \alpha_2 = -\frac{\nu\lambda}{k_2}.$$

Ich werde nun annehmen, es seien in den beiden Leitern zwei Electroden in den Entfernungen β_1, β_2 von der Berührungsfläche einander gerade gegenüber gestellt, so daß der Strom S in den zweiten Leiter ein und aus dem ersten austritt. Für diesen Fall giebt uns die Formel (14) unmittelbar das Resultat

$$u_1 =$$
$$-\frac{2S}{\pi}\sum^{\nu}\frac{\cos(\nu\alpha_1)\cos\nu(\alpha_2-\beta_2)-\cos(\nu\alpha_2)\cos\nu(\alpha_1-\beta_1)}{k_1\alpha_1\cos^2(\nu\alpha_2)+k_2\alpha_2\cos^2(\nu\alpha_1)}\cos(\nu\alpha_2)\cos\nu(\alpha_1+z)\int_1^\infty\frac{e^{-\xi\nu r}d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}$$

(18)

$$u_2 =$$
$$-\frac{2S}{\pi}\sum^{\nu}\frac{\cos(\nu\alpha_1)\cos\nu(\alpha_2-\beta_2)-\cos(\nu\alpha_2)\cos\nu(\alpha_1-\beta_1)}{k_1\alpha_1\cos^2(\nu\alpha_2)+k_2\alpha_2\cos^2(\nu\alpha_1)}\cos(\nu\alpha_1)\cos\nu(\alpha_2-z)\int_1^\infty\frac{e^{-\xi\nu r}d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}$$

Nimmt man noch an, daß beide Platten die gleiche Dicke α haben, und daß auch die Electroden zur Trennungsfläche symmetrisch liegen, so daß $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ ist, so hat man in gleicher Weise aus (16)

$$k_1 u_1 = k_2 u_2 = -\frac{2S}{\pi\alpha}\sum^{p}\sin\frac{p\pi}{2\alpha}\beta\sin\frac{p\pi}{2\alpha}z\int_1^\infty\frac{e^{-\frac{\xi p\pi r}{2\alpha}}d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}},$$

so daß in diesem Fall die Strömung ganz so vor sich geht, als ob beide Leiter aus derselben Substanz beständen (ebenso wie in der Formel 17). Die Stromlinien durchsetzen die Berührungsfläche senkrecht und verlaufen symmetrisch zu derselben.

Aus (18) läßt sich in einfacher Weise der Winkel bestimmen unter welchen die Strombahn in die Grenzfläche beider Leiter eintritt. Es ist nämlich allgemein

$$\frac{\partial u}{\partial z} : \frac{\partial u}{\partial r}$$

die Tangente des Winkels, welchen die Stromlinie an der Stelle z, r mit der Richtung r bildet, (wobei die Drehung von der Richtung der wachsenden r nach der der wachsenden z als positiv gerechnet wird). Nehmen wir r so groß an, daß die Reihen (18) auf ihr erstes Glied beschränkt werden können und daß

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\xi\nu r}\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}$$

durch den genäherten Wert

$$e^{-\nu r}\sqrt{\frac{\pi}{2\nu r}}$$

zu ersetzen ist, so folgt daß die beiden Winkel, welche die Stromlinien mit der Trennungsfläche bilden (und zwar mit dem nach der Electrode gerichteten Teil derselben) im ersten und zweiten Leiter $\nu\alpha_1$, $\nu\alpha_2$ werden von welchen, wenn nicht beide Rechte sind, der eine spitz der andere stumpf ist. Darin bedeutet ν die kleinste positive Wurzel der transcendenten Gleichung (12), in welcher man den Ausdruck für das Kirchhoffsche Gesetz der Brechung der Stromlinien beim Uebergang aus einem Leiter in einen anderen erkennt.

Ueber Ringschließung unter Abspaltung einer Nitrogruppe aus dem Benzolkern.

Von

Victor Meyer.

In Folgendem erlaube ich mir, eine überraschende Reaction zu beschreiben, welche ich bei Anlaß einer größeren, in Gemeinschaft mit den Herren G. Haußknecht und R. Demuth ausgeführten Versuchsreihe aufgefunden habe.

Durch Behandlung von Dinitrophenylessigester

$$C_6H_3(NO_2)_2-CH_2-CO_2CH_3,$$

mit Diazobenzollösung erhält man, wie Alexander Meyer und ich s. Z. gefunden haben[1]), einen krystallisirten Azokörper, welchem man, nach seinem weiter unten beschriebenen Verhalten, sowie nach Analogie mit dem ebenso entstehenden Benzolazoderivate des Acetessigesters, nicht die Formel eines Benzolazoderivats, sondern

1) Ber. d. D. Chem. Ges. 20, p. 535; 21, p. 1307.

vielmehr eines Hydrazons zuschreiben muß. Die Substanz hat nicht die zunächst zu erwartende Formel I, sondern vielmehr II:

$$\begin{array}{cc} \text{I} & \text{II} \\ \begin{array}{l} \qquad\qquad\quad N = N - C_6H_5 \\ \qquad\qquad\quad | \\ C_6H_3(NO_2)_2 - CH - COO\,CH_3. \end{array} & \begin{array}{l} \qquad\qquad\quad N - NH\,C_6H_5 \\ \qquad\qquad\quad \| \\ C_6H_3(NO_2)_2 - C - COO\,CH_3. \end{array} \end{array}$$

Der Körper bildet tief orangerothe Nadeln, welche, aus heißem Alkohol umkrystallisirt, bei 182—183 ° C. schmelzen und bei der Analyse folgende Zahlen ergaben:

1) 0,3012 g Substanz gaben 0,5776 g Kohlensäure und 0,1002 g Wasser.

2) 0,1208 g gaben 17,7 ccm feuchten Stickstoff bei 18 ° und 740 mm Druck.

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad N - NH\,C_6H_5 \\ \qquad\qquad\quad \| \\ C_6H_3(NO_2)_2 - C - COO\,CH_3 \end{array}$$

Gefunden	Berechnet für $C_6H_3(NO_2)_2-C(=N-NH\,C_6H_5)-COO\,CH_3$
pCt. C 52,30	52,33
pCt. H 3,70	3,49
pCt. N 16,47	16,28

Bereitet man eine Lösung dieses Körpers, welche bei Zimmertemperatur auf ein Theil der Substanz ca. 250 Theile Alkohol enthält[1]) und setzt zu der Flüssigkeit, welche die Farbe einer concentrirten Kaliumbichromatlösung besitzt, etwas Kalilauge — Natron wirkt in derselben Weise —, so erhält man eine tief-blaue Lösung des Kaliumsalzes[2])

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad N - NK\,C_6H_5 \\ \qquad\qquad\quad \| \\ C_6H_3(NO_2)_2 - C - COO\,CH_3. \end{array}$$

Läßt man diese Lösung einige Minuten bei Zimmertemperatur stehen, so verschwindet die blaue Farbe und nach einigen Minuten hat man eine reine hellgelbe Flüssigkeit, welche bald reichliche Mengen eines schwefelgelben, krystallisirten Kaliumsalzes ausscheidet. In dieser äußerst verdünnten, nur der Zimmertemperatur

---

1) Eine bei Zimmertemperatur klare Lösung von dieser Concentration kann man leicht durch Uebersättigung herstellen, indem man die eben abgekühlte Lösung sofort verarbeitet. Die bei Zimmertemperatur normal gesättigte Lösung ist viel verdünnter — 1 Theil des Körpers erfordert zur normalen Lösung bei Zimmertemperatur mehr als 400 Theile Alkohol.

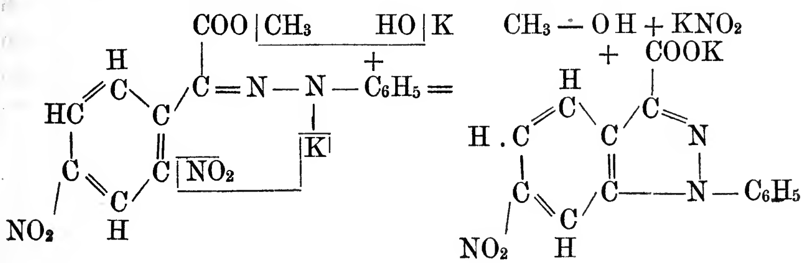
2) Ueber analoge Kaliumsalze von Hydrazonen — des Benzolazoacetessigesters und Benzolazoacetons — vgl. V. Meyer, diese Berichte 21, p. 2121.

ausgesetzten Lösung hat sich nun bei dem beschriebenen Farbenumschlag eine Umsetzung vollzogen, bei welcher Abspaltung einer Nitrogruppe, Ringschließung und Verseifung des Esters zu Kaliumsalz stattfindet.

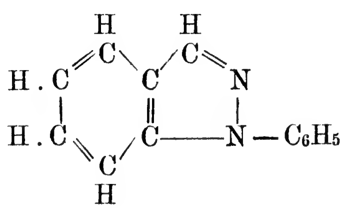
Die Reaction verläuft nach dem empirischen Schema

$$C_{15}H_{11}(NO_2)_2N_2K + KOH = CH_3OH + KNO_2 + C_{14}H_8(NO_2)N_2K.$$

Der zunächst räthselhafte Verlauf derselben wird verständlich, wenn man die (bekannte) Stellung der Nitrogruppen in dem Dinitrophenylessigester berücksichtigt und bedenkt, daß die Abspaltung der in der Orthostellung befindlichen Nitrogruppe mit dem Kaliumatom zu der Bildung eines Pyrazolringes führen muß. Drückt man in diesem Sinne die Reaction durch das Schema:



aus, so gelangt man zu der Formel eines Benzopyrazolderivates. In der That zeigt die erhaltene Säure, wenn man sie in Form ihres (weiter unten beschriebenen) Esters untersucht, schwach die Pyrazolreaction[1]), offenbar wird die Schönheit derselben durch die Anwesenheit störender Gruppen, namentlich der Nitrogruppe, sehr beeinträchtigt. Es wird indessen nicht schwierig sein, die hier angenommene Structurformel zu prüfen, indem die Nitrogruppe und, wenn möglich, auch die Carboxylgruppe eliminirt werden. So ist die Bildung eines einfachen Phenylbenzopyrazols:

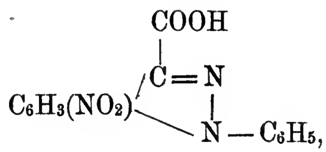


1) Knorr, Ann. Chem. Pharm. 238, p. 200. Der Ester wird in siedender alkoholischer Lösung mit Natrium behandelt, die Flüssigkeit mit Wasser verdünnt, angesäuert und filtrirt; auf Zusatz eines Tropfens Kaliumbichromat entsteht eine rothe Färbung.

zu erwarten, welches sich mit Bestimmtheit als ein Pyrazol charakterisiren lassen sollte.

Nach den ersten Versuchen und der Analyse hatte ich geglaubt, daß dieselbe 2 H-atome mehr enthalte, daß also einfach eine Nitrogruppe eliminirt und — unter Austritt von KNO_3 — durch H ersetzt sei. Allein diese Annahme trifft nicht zu, denn erstens tritt nicht salpeter-, sondern salpetrigsaures Salz aus, zweitens schließen die Wasserstoffbestimmungen der Säure und des Esters eine wasserstoffreichere Formel aus, da in allen Fällen der H-Gehalt erheblich niedriger gefunden wurde, als dieser Formel entspricht, während er bei ähnlichen Nitroazokörpern stets zu hoch gefunden wird. Endlich sollte, wenn die Reaction ohne Theilnahme der Azo- resp. Hydrazongruppe verliefe und einfach in einer Ersetzung von NO_2 durch H bestände, Dinitrophenylessigester sich ebenso verhalten, während er in Wirklichkeit von alkoholischem Alkali — mit dem er sofort ein tief schwarzbraunes Salz bildet (ohne Zweifel $C_6H_3(NO_2)_2-CHK-COOCH_3$) — unter den angegebenen Bedingungen nicht weiter angegriffen wird.

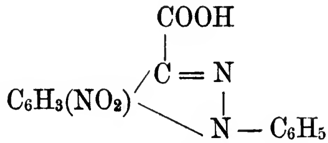
Das bei der beschriebenen Reaction erhaltene Kaliumsalz, mit Alkohol ausgewaschen, besteht aus der formulirten Verbindung nebst Kaliumnitrit, welch letzteres leicht durch kaltes Wasser (in dem das organische Salz fast unlöslich ist) ausgezogen und identificirt werden kann. Das gelbe Kaliumsalz durch längeres Erwärmen mit verdünnter Schwefelsäure auf dem Wasserbade zersetzt, liefert die zugehörige Säure



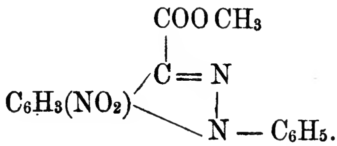
welche schwefelgelbe, in Alkohol sehr schwer lösliche Nädelchen vom Schmelzpunkte 272° bildet. Bei 265° bräunt sie sich. Nach Hantzsch's Nomenklatur wäre dieselbe als Nitrophenylbenzopyrazolcarbonsäure, nach Emil Fischer's Benennungsweise als Nitrophenyl-Isindazolcarbonsäure zu bezeichnen. Die Analyse der Säure ergab:

1) 0,1871 g Substanz gaben 0,4072 g Kohlensäure und 0,061 g Wasser.

2) 0,0952 g gaben 12,6 ccm feuchten Stickstoff bei 22° und 755 mm Druck.

Gefunden	Berechnet für 
pCt. C 59,35	59,37
pCt. H 3,62	3,18
pCt. N 14,89	14,84.

Mit Methylalkohol und Salzsäuregas erst in der Kälte, dann in der Hitze behandelt, liefert sie den Methyläther, ebenfalls hellgelbe Nädelchen von dem Schmelzpunkte 191—192° und der Formel:

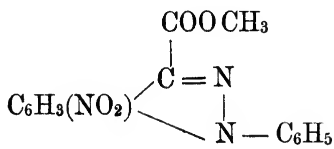


Analyse:

1) 0,2656 g gaben 0,5936 g Kohlensäure und 0,0994 g Wasser,

2) 0,2238 g gaben 0,4988 g Kohlensäure und 0,0808 g Wasser,

3) 0,086 g gaben 10,7 ccm feuchten Stickstoff bei $18^1/_2{}^0$ und 752 mm Druck.

Gefunden		Berechnet für 
I	II	
pCt. C 60,95	60,78	60,61
pCt. H 4,19	4,01	3,70
pCt. N 14,18		14,11.

Ich beabsichtige, die angenommene Constitutionsformel einer eingehenden experimentellen Controle zu unterwerfen und gedenke die Reaction, welche vielfacher Erweiterung fähig erscheint, nach verschiedenen Richtungen zu verfolgen. — Schon jetzt möchte ich indessen darauf hinweisen, daß eine ähnlich tief greifende, unter Abspaltung einer Nitrogruppe aus dem Benzolkern verlaufende Reaction unter analogen Verhältnissen (bei gewöhnlicher Temperatur und in 250 fach oder selbst viel stärker verdünnter Lösung) wohl kaum beobachtet sein dürfte. Sie zeigt aufs Neue, welchen eigenartigen Verlauf eine chemische Reaction nehmen kann, wenn dieselbe das Zustandekommen eines besonders stabilen Complexes ermöglicht. —

Ein besonderes Interesse bietet der beschriebene Versuch für die Demonstration, da hier das Zustandekommen des neuen Atomcomplexes durch einen überraschenden Farbenwechsel zum Ausdruck gebracht und direkt beobachtet werden kann. Um die Erscheinung vorzuführen, eignet sich am besten die Lösung in ca. 250 Theilen Alkohol, bei welcher der Farbenwechsel von Tiefblau in Hellgelb etwa 4 Minuten in Anspruch nimmt. Die Reaction verläuft aber ganz ebenso bei Zimmertemperatur selbst in 400 bis 500 facher Verdünnung, nur dauert sie alsdann länger — 1/4 bis 1/2 Stunde. — Beim gelinden Erwärmen tritt sie aber auch in diesem Falle momentan ein.

Noch sei bemerkt, daß die Homologen und Analogen des Hydrazons, welche aus Dinitrophenylessigester und Diazotoluol, Diazoxylol, Diazobenzolsulfosäure etc. entstehen, sich gegen Alkali ebenso verhalten, wie das beschriebene Hydrazon selbst.

Göttingen, Universitäts-Laboratorium.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

November und Dezember 1888.

(Fortsetzung.)

Nachträge.

Report on the scientific results of the exploring voyage of M. S. Challenger 1873—76. Zoology. Vol. XXVII.
Verhandlungen d. K. K. geologischen Reichsanstalt. N. 13. 1888.

Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. XLIV, XLV, XLVI, XLVII, XLVIII.
Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:
a. Berichte und Verhandlungen der philologisch-historischen Classe. 1888. I. II.
b. Des XIV. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der K. S. G. d. W. N. 10, 11, 12, 13.
Leopoldina N. 21. 22. Heft XXIV.
Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historischen Classe d. K. B. Akademie d. W. zu München. 1888. Band 2. Heft II.
Verhandlungen des historischen Vereins von Oberpfalz und Regensburg. Band 42 (34 der neuen Folge). Stadtamhof 1888.
Verhandlungen d. K. K. geologischen Reichsanstalt. N. 14. 1888. Wien.
Lotos. Neue Folge. IX. Band. Prag-Wien-Leipzig 1889.
Mittheilungen des naturwissenschaftlichen Vereins für Steiermark. Jahrg. 1887 (d. g. Reihe, 24. Heft). Graz 1888.
Zwölfter Verwaltungsbericht der akademischen Lesehalle in Czernowitz. Czernowitz 1888.
Ungarische Revue. Heft IX, X. 1888. Jahrgang 8. Budapest.

A Magyar Halàszat Könyve. 1. 2. Irta Herm. Ottó. 1887. Budapest 1887.
Erdély Edényes florajak irta Dr. Simonkai Lajos. Budapest 1886.
Crustacea cladocera faunae Hungariae el. Dr. Eugenius Daday de Dées. Budapest 1888.
Jahrbuch für schweizerische Geschichte. Band 13. Zürich 1888.
Académie Royale de Belgique. Bulletin 58e année, série 3, tome 16, N. 9—10. Bruxelles 1888.
Archives Neerlandaises des sciences exactes et naturelles. Tome XXIII. Livr. 1. Harlem 1888.
Leçons sur la théorie générale des surfaces. Fasc. 2, par Gaston Darboux. Deuxieme partie. Paris 1889.
Bulletin de la société mathématique de France. Tome XVI, N. 5. Paris 1888.
Note sur une nouvelle espèce de Laminaire de la Mediterranée par M. Ed. Bornet. (Extrait du bulletin de la société botanique de France.)
On variations of climate in the course of time by A Blytt. Cristiania 1886.
A probable cause of the displacement of beach-lines by A. Blytt. Cristiania 1889.
Bergens Museums Aars beretning for 1887. Bergen 1888.
l'Académie R. de Copenhague:
a. Bulletin 1888, N. 2.
b. Mémoires. Classe des lettres. Vol. II, N. 2 et 3. Kjobenhavn 1888.
Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo 2. Anno 1888. fasc. VI, Palermo.
Bullettino di Bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Tomo XIX. Roma 1886.
Memorie della Regia Accademia di scienze lettere ed arti in Modena. Serie II, Vol. V. Modena 1887.
Gemâledddîni ibn hišâmi. Edidit Ign. Guidi. Pars 1. e 2. Lipsiae 1874.
Studii sul testo arabo del libro di Calila e Dimna per Ign. Guidi. Roma 1873.
Bollettino delle pubblicazioni italiane 1888, N 70, 71, 72.
Bollettino delle pubblicazioni straniere delle opere moderne. Vol. III, N. 4, 1888. Roma 1888.
Observations de Poulkova publiées par Otto Struve. Vol. XIV. St. Petersbourg 1888.
Beobachtungen der Saturnstrabanten, Abth. 1. Beobachtungen am 15-zölligen Refractor, v. Herm. Struve. Supplement 1 zu den Observationen von Poulkova. St. Petersb. 1888.
Magnetische Beobachtungen des Tifliser physikalischen Observatoriums im Jahre 1886—87. Tiflis 1888.
Bulletin de la société Imp. des Naturalistes de Moscou. Année 1888, N. 3. Moscou 1888.
Meteorologische Beobachtungen, ausgef. am met. Obs. der landwirthschaftlichen Akademie bei Moskau 1888. Hälfte I. Moskau 1888.
Nature 996, 997, 998, 999, 1000.
Proceedings of the Royal society. Vol. XLIV, N. 272.
Proceedings of the London mathematical society. N. 328—332.
Proceedings of the Cambridge philosophical society. Vol. VI, Part IV.
Journal of the R. Microscopical society. 1888, Part 6.
Monthly notices of the R. astronomical society. Vol. XLIX, N. 1.
Transactions of the R. Irish Academy. Vol. XXIX, Part III, IV. Dublin 1888.
Transactions and proceedings and report of the R. society of South Australia. Vol. X. 1886/7. Adelaide 1888.
Journal and proceedings of the R. society of New South Wales. Vol. XXII, Part I. 1888. Sidney.
Bibliothéka Indica published by the Asiatic society of Bengal. New series, N. 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684. Calcutta 1888.
Pennsylvania geological survey Annual report 1886. Part IV.
Atlas annual report 1886. Part IV.
Atlas northern anthracite field. Vol. II. Philadelphia.
United states coast and geodetic survey. Bulletin N. 4, 1888.

Bulletin of the Essex Institute. Vol. 19, N. 1 2 3, 4 5 6, 7—12. Salem 1887. Visitors guide to Salem.
Memoirs of the Americal Academy of Arts and sciences. Vol. XI, Part V, N. VI, Part VI, N. VII. Cambridge 1888.
Transactions of the American philosophical society in Philadelphia. Vol. XVI. New series Part II. Philadelphia 1888.
Bulletin of the museum of comparative Zoology at Harvard college. Vol. XVI, N. 2. Vol. XVII, N. 2. Cambridge 1888.
Proceedings of the American Academy of Arts and sciences. New series. Vol. XV, Part I. Boston 1888.
Report of the superintendent of the United states observatony for 1888. Washington 1888.
Boletin de la Academia nacional de Ciencias en Córdoba. Tomo XI, Entrega 1. 2. Buenos-Aires 1887.

Nachträge.

Archives du Musée Teyler. Série II, Vol. III. Deuxième partie. Harlem 1888.
Fondation Teyler Catalogue de la biblithèque. 7 et 8ieme livraison. Harlem 1887. 1888.
Programme de la société Batave de philosophie expérimentale de Rotterdam 1888.
Acta societatis pro fauna et flora fennica. Vol. 3, 4. Helsingfors 1886-88.
Meddelanden af sociatatis pro fauna et flora fennica. 14 häftet. Helsingfors 1888.
Levensberichten der Afgestorvene Medeleden van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde. Leiden 1887.
Handelingen en Mededeelingen van de M. d. N. L. Over het Jaar 1887. Leiden 1887.
Catalogus der bibliotheka van de Maatsch. d. Ned. Lett.
1. Gedeelte Handschriften,
2. » Drukwerken, 1. Afleven. Leiden 1877. 1884.
Rosenbusch, H., Hülfstabellen zur mikroskopischen Mineralbestimmung in Gesteinen. Stuttg. 1888.

Januar 1889.

Sitzungsberichte der K. Akademie d. W. in Berlin. XLIX, L, LI. 1889 I, II.
a. Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe d. K. Bairischen Akademie d. W. Band XVI, Abth. 3.
b. Abhandlungen der historischen Classe. Band XVIII, Abth. 2.
c. Ueber die Molekularbeschaffenheit der Krystalle. Festrede zur Feier d. 129. Stiftungstages v. Dr. P. Groth.
d. Joseph v. Fraunhofers gesammelte Schriften. Im Auftrage d. mathem. Classe d. K. B. A. d. W. von E. Lommel. München 1888.
Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Jahrg. 23, Heft 3. Leipzig 1888.
Mitteilungen des Altertumsvereins für Zwickau u. Umgegend. Heft II. Zwickau 1888.
Mittheilungen der Geschichts- u. Alterthumsforschenden Gesellschaft des Osterlandes. Band X, Heft 1. Altenburg 1888.
Jahrbücher des Nassauischen Vereins für Naturkunde. Jahrgang 1841. Wiesbaden 1888.
Jahresbericht des physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. für 1886—1887. Frankfurt a. M. 1888.
Leopoldina. Heft XXIV, N. 23—24. Titel z. Heft 24. Halle 1888.
Basisapparate u. Basismessungen v. Dr. A. Westphal, II. Separatabdruck a. d. Zeitschr. für Instrumentalkunde. 1888. Berlin.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

20. März. **№ 7.** 1889.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Oeffentliche Sitzung vom 2. März.

Meyer legt vor: Mittheilung von Karl Auwers und Victor Meyer „über zwei isomere Benzilmonoxime“.

Merkel legt eine Mittheilung des Professor Dr. Marmé vor: „über Arecolin, den giftigen Bestandtheil der Bethelnuß“.

Riecke kündigt eine Mittheilung „über die Spektren einiger Elemente“ an.

Klein legt a. die Mittheilung des Herrn Professor Dr. Schröter in Breslau, Korrespondent der mathematischen Klasse, vor: „über die Bildungsweise und geometrische Construction der Configurationen 10_3“.

b. einen Aufsatz des Herrn Professor Dr. G. E. Müller: „die Theorie der Muskel-Contraction“.

c. einen eigenen: „zur Theorie der Abel'schen Funktionen“.

Ueber zwei isomere Benzilmonoxime.

Von

Karl Auwers und **Victor Meyer.**

Einleitung.

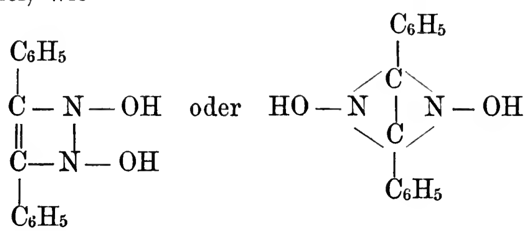
Unsere früheren Untersuchungen [1]) hatten für die beiden Benzildioxime den Nachweis gleicher Structur — soweit uns ein solcher auf dem Wege der chemischen und physikalischen Untersuchung möglich war — erbracht, und somit zu der Annahme einer neuen, bisher bestrittenen Art der stereochemischen Isomerie ge-

1) Diese Nachrichten 1888, p. 87, 1889, p. 1.

führt. Bei der Tragweite dieses Befundes, welcher zu einer wesentlichen Modification der van t'Hoff'schen Theorie und der von Wislicenus vertretenen Anwendung derselben zwingt, haben wir jeden dem Versuche nur irgend zugänglichen Einwand gegen die Gleichheit der Structur beider Isomeren geprüft, dabei aber immer von Neuem Bestätigung unserer Auffassung gefunden. Trotzdem hat die einigermaßen complicirte Zusammensetzung der beiden Körper, zumal die Anwesenheit von zwei Stickstoffatomen, welche mancherlei Combinationen zulassen, Widerspruch gegen unsere Auffassung von der Structur der beiden Isomeren hervorgerufen; wenn dem einen der beiden Oxime unzweifelhaft die Formel

$$C_6H_5 - C(NOH) - C(NOH) - C_6H_5$$

zuerkannt wird, so war doch für das andere eine abweichende Structurformel, wie



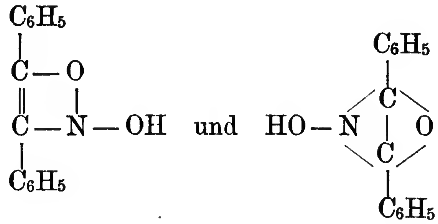
denkbar — Formeln, die wir freilich durch besondere Versuche widerlegt haben, die aber trotzdem nicht ohne Vertheidiger geblieben sind. Unter diesen Umständen hielten wir selbst es für wünschenswerth, die Richtigkeit unserer Anschauung auch an einfacher zusammengesetzten Körpern zu prüfen, und es ist uns, nach zahlreichen vergeblichen Versuchen, jetzt gelungen, eine erwünschte Bestätigung derselben in dem Nachweise der Existenz zweier isomerer Monoxime des Benzils zu finden.

Für diese beiden Substanzen läßt sich die gleiche Constitution $C_6H_5 - C(NOH) - CO - C_6H_5$ in sicherster Art erweisen:

Beide entstehen aus Benzil und Hydroxylamin bei gewöhnlicher Temperatur.

Beide zerfallen mit Salzsäure in Benzil und Hydroxylamin.

Beide sind echte Ketone, in welchen die Gruppe CO unzweifelhaft nachgewiesen werden kann: Sie verbinden sich, und zwar bei gewöhnlicher Temperatur, weiter mit Hydroxylamin und liefern dabei zwei verschiedene Dioxime. Beide Monoxime verbinden sich zudem mit Phenylhydrazin zu amorphen, gelben Hydrazonen. Die Anwesenheit der Carbonylgruppe in beiden Isomeren ist damit festgestellt, und Formeln, die den oben herangezogenen der Dioxime nachgebildet sind, wie



sind mit völliger Sicherheit ausgeschlossen.

Beide Monoxime haben das gleiche Moleculargewicht.

Beide sind nicht physikalisch, sondern im echten Sinne chemisch isomer, da sie auch isomere Esterarten liefern, aus welchen durch Verseifung mittelst Alkali in der Kälte die Monoxime wieder gewonnen werden, und zwar aus dem α-Ester das α-, aus dem β-Ester das β-Monoxim.

Beide Monoxime sind optisch inactiv. —

Beide entsprechen durchaus dem α- bezw. dem β-Dioxim; dieselben Mittel, welche bei den Dioximen die Umwandlung hervorrufen, führen auch hier zum Ziel; das α-Oxim wird durch Erwärmen mit Alkohol (hier bereits bei 100°) quantitativ in das β-Oxim übergeführt, während ein Gemisch von Eisessig, Essigsäureanhydrid und Salzsäuregas dieselbe Umwandlung schon bei gewöhnlicher Temperatur, wenn auch langsamer und weniger vollständig, bewirkt.

Wir glauben hiernach für die beiden Verbindungen mit dem durch die experimentelle Prüfung zur Zeit für uns erreichbaren Grade von Sicherheit die beiden Formeln:

$$\begin{array}{l} C_6H_5 - C = N - OH \\ \qquad\quad\;\, | \\ C_6H_5 - C = O \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} C_6H_5 - C = NOH \\ \qquad\quad\;\, | \\ \quad O = C - C_6H_5 \end{array}$$

gestützt zu haben.

Da in den beiden Monoximen die Anwesenheit der Gruppe $C_6H_5 - \underset{\|}{C} - CO - C_6H_5$ unzweifelhaft festgestellt worden ist, so könnte gegen diese Schlußfolgerung nur noch der Einwand erhoben werden, daß die Oximgruppe NOH in den beiden Isomeren eine verschiedene Structur habe. Wir verweisen deshalb zunächst darauf, daß seiner Zeit bei Entdeckung der s. g. Hydroxylaminreaction und der Aldoxime und Acetoxime, der Eine von uns, in Gemeinschaft mit J a n n y und C e r e s o l e, eine ausführliche Untersuchung durchgeführt hat, um die Frage nach der Structur der Oximidogruppe zu entscheiden. Es wurden die drei Möglichkeiten:

$$>C=N-OH \qquad >C<^{H}_{NO} \qquad >C<^{NH}_{\underset{O}{|}}$$

einer experimentellen Prüfung unterworfen, und die erste Formel, gegenüber den beiden anderen, mit voller Sicherheit als richtig erkannt. Wollte man nun annehmen, daß dies zwar für die gewöhnlichen Oxime gelte, daß aber dennoch gerade bei den vorliegenden Isomeren abweichende Structur möglich sei, so muß darauf hingewiesen werden, daß wir ja einerseits die Abwesenheit verschieden constituirter Oximidogruppen bei den Dioximen ausdrücklich erwiesen haben, und daß andererseits, wenn aus Ketonen durch Einwirkung von Hydroxylamin Oxime mit verschieden constituirter Oximidogruppe überhaupt gebildet würden, nicht einzusehen wäre, warum dieselben grade nur bei den Oximen der Diketone, nicht aber bei denjenigen der Monoketone sich zeigten. In der That, bei der großen Structurähnlichkeit, welche zwischen Benzil und Benzophenon besteht — die sich nur durch eine CO-Gruppe von einander unterscheiden —, müßte man mit größter Wahrscheinlichkeit ähnliche Erscheinungen, wie bei den Oximen des Benzils, auch bei dem des Benzophenons erwarten, wenn die Isomerie in der Structur der Oximgruppe begründet wäre. Dergleichen aber ist nirgends beobachtet worden, vielmehr haben die schönen Untersuchungen Beckmann's gezeigt, daß die Umlagerungen, welche das Benzophenonoxim unter denselben Bedingungen erleidet, welche die Umwandlung der Benziloxime in stereochemisch isomere herbeiführen, auf völlig veränderter Ursache beruhen; das Benzophenonoxim verwandelt sich dabei in das isomere Benzanilid, also einen gänzlich anders constituirten Körper; für die Existenz von mehr als einem wirklichen Oxim des Benzophenons oder irgend eines andern Monoketons sprechen dagegen nicht die geringsten Andeutungen. — Wir haben, um in dieser Hinsicht völlig sicher zu sein, die Versuche, welche zur Entdeckung der beiden isomeren Benzilmonoxime geführt haben, unter genau den gleichen Bedingungen und mit denselben Variationen mit Benzophenon wiederholt, haben aber stets ausschließlich das bekannte Benzophenonoxim vom Schmelzpunkt 140° erhalten, niemals auch nur Spuren eines isomeren Körpers.

Trotzdem unsere Ansicht von der stereochemischen Isomerie der Oxime der Diketone somit immer neue Stützen gefunden hat, werden wir doch nicht aufhören, dieselbe noch durch weitere, ganz anders gewählte Beweismittel zu prüfen. Ueber Versuche, die in dieser Hinsicht unternommen sind, hoffen wir bald berichten zu können. Für heute begnügen wir uns, die eingangs skizzirten Untersuchungen über die Isomerie der Benzilmonoxime im einzelnen zu beschreiben. —

Experimenteller Theil.

Bildung der beiden isomeren Benzilmonoxime.

Wirken Benzil und Hydroxylamin im Verhältniß gleicher Molecüle auf einander ein, so entsteht im allgemeinen ein Gemisch zweier isomerer Monoxime; je nach den Versuchsbedingungen bildet sich bald das eine, bald das andere in überwiegender Menge. Zahlreiche Versuche haben im wesentlichen Folgendes gelehrt. Wendet man das Hydroxylamin in Gestalt seines salzsauren Salzes an, welches man in wenig Wasser gelöst zu einer alkoholischen Lösung von Benzil fügt, so gewinnt man vorwiegend das bisher noch nicht bekannte, niedriger schmelzende Isomere, welches wir als das β-Benzilmononoxim bezeichnen wollen; und zwar bildet sich dieser Körper um so reichlicher, je höher die Temperatur während der Reaction ist, und je länger die beiden Substanzen auf einander wirken. Läßt man z. B. den Proceß bei einer Temperatur von etwa -15^0 sich abspielen, so erhält man nur verhältnißmäßig wenig von der fraglichen Verbindung, während der größere Theil des angewandten Benzils in das schon früher bekannte α-Benzilmonoxim übergeführt wird. Bei 0^0 entstehen beide Isomere ungefähr in gleicher Menge, während bereits bei Zimmertemperatur fast ausschließlich β-Monoxim neben Spuren von α-Monoxim gebildet wird, falls die Einwirkung des salzsauren Hydroxylamins genügend lange andauert — etwa 6—24 Stunden, je nach der Menge des angewandten Benzils. Digerirt man endlich das Gemisch auf dem Wasserbade, so vollzieht sich die Umwandlung des Benzils in das β-Monoxim quantitativ in kürzester Zeit.

Bringt man statt des salzsauren Hydroxylamins die freie Base in alkalischer Lösung in Anwendung, so erhält man bei 0^0, sowie bei Zimmertemperatur Gemische, welche im Durchschnitt annähernd gleiche Mengen der beiden Isomeren enthalten, wenigstens so lange man im Kleinen arbeitet, während bei Verarbeitung größerer Mengen von Benzil in Folge der hierdurch bedingten längeren Dauer der Reaction weniger α- und mehr β-Monoxim gebildet wird. Es ist hierbei ohne wesentlichen Einfluß, ob man einen geringen oder einen großen Ueberschuß von Alkali — Aetznatron oder Soda — zu dem salzsauren Hydroxylamin hinzufügt. Auch bei Wasserbadtemperatur kann man mit Hülfe des freien Hydroxylamins verhältnißmäßig beträchtliche Mengen — bis zu 50 % — α-Monoxim erhalten, wenn man die Reaction frühzeitig unterbricht, während bei anhaltender Digestion mehr und mehr β-Monoxim gebildet wird.

Gewinnung von α-Monoxim.

Aus dem Gesagten ergeben sich die Methoden zur praktischen Gewinnung jedes der beiden Isomeren. Um α-Monoxim darzustellen, löst man 10 Th. Benzil in etwa der 30fachen Menge gewöhnlichen Alkohols, läßt erkalten und fügt ein Gemisch von $3^1/_2$ Th. salzsaurem Hydroxylamin und 4 Th. Aetznatron, in wenig Wasser gelöst, hinzu. Ein Ueberschuß von salzsaurem Hydroxylamin ist zu vermeiden, damit sich kein Benzildioxim bilden kann. Das Reactionsgemisch läßt man bei gewöhnlicher Temperatur stehen, bis eine Probe auf Zusatz von Wasser kein Oel mehr ausscheidet, was bei kleineren Mengen schon nach wenigen Stunden der Fall ist. Man gießt darauf die Flüssigkeit in viel Wasser, filtrirt von Spuren unangegriffenen Benzils ab und säuert das Filtrat an. Es scheidet sich eine ölige Emulsion aus, welche an einem kühlen Orte bald zu einem Gemenge mikroskopischer Blättchen und Nädelchen erstarrt. Die Ausbeute an diesem Producte, einem Gemenge von α- und β-Monoxim, ist eine sehr gute. Durch Umkrystallisiren aus verdünntem Alkohol kann man aus ihm direct reines α-Monoxim, welches schwerer löslich als das Isomere ist, gewinnen; zweckmäßiger behandelt man jedoch das getrocknete Gemisch in der Kälte oder bei gelinder Wärme, nöthigenfalls mehrfach, mit einer zur Lösung unzureichenden Menge Benzols, wobei das α-Monoxim ungelöst zurückbleibt, das β-Monoxim aber in Lösung geht. Die Trennung ist eine genügende, sobald eine Probe des ungelösten Rückstandes unter dem Mikroskop als Haufwerk von Blättchen, denen nur vereinzelte Nadeln oder Prismen beigemengt sind, erscheint. Durch mehrfaches Umkrystallisiren aus heißem 30proc. Alkohol erhält man dann das α-Monoxim leicht völlig rein.

Beim Verdunsten der Benzollösung erhält man reichliche Mengen des β-Monoxims, welches zu seiner Reinigung nur noch einmal aus demselben Lösungsmittel umkrystallisirt zu werden braucht. Zweckmäßig entfernt man hierbei die sich zu allererst ausscheidenden Antheile, da dieselben in der Regel kleine Mengen des α-Monoxims enthalten.

Gewinnung von β-Monoxim.

Handelt es sich ausschließlich um die Gewinnung von β-Monoxim, so wird man natürlich die Einwirkung des salzsauren Hydroxylamins auf Benzil vorziehen. Man digerirt eine mäßig concentrirte alkoholisch-wässerige Lösung von Benzil mit etwas weniger als der theoretischen Menge salzsauren Hydroxylamins auf dem Wasserbade, bis eine Probe auf Zusatz von Wasser ein in Alkalien nahezu völlig lösliches Oel abscheidet, gießt in Wasser, übersättigt mit Alkali, filtrirt, säuert an und läßt das ausgeschiedene, fein vertheilte Oel allmählich erstarren. Das erhaltene Product wird dann aus Benzol umkrystallisirt. Die Ausbeute ist nahezu quantitativ.

α-Benzilmonoxim.

Das α-Benzilmonoxim ist zuerst von Wittenberg und V. Meyer[1]) durch die Einwirkung von freiem Hydroxylamin auf Benzil bei gewöhnlicher Temperatur erhalten worden, später ist es auch von V. Meyer und Oelkers[2]) nach der Claisen'schen Methode aus Desoxybenzoïn, Amylnitrit und Natriumalkoholat gewonnen.

Der Körper krystallisirt aus heißem verdünntem Alkohol in perlmutterglänzenden, vierseitigen Blättchen; in derselben Form wird er durch Ligroïn aus seiner Lösung in Benzol gefällt. Aus heißem Benzol scheidet sich die Substanz in langen, zugespitzten Blättchen aus, welche im Gegensatz zu der isomeren Verbindung kein Krystallbenzol enthalten. Der Schmelzpunkt des ganz reinen Oxims liegt bei 137—138°.

Der Körper ist leicht löslich in kaltem Alkohol, Aether, Chloroform und Eisessig, weniger in Benzol und Schwefelkohlenstoff, sehr wenig löslich in Ligroïn. In verdünnten Alkalien löst er sich leicht mit gelber Farbe und wird durch Säuren wieder ausgefällt. In concentrirten Laugen sind die Alkalisalze des Oxims nicht löslich, daher tritt auf Zusatz von Natron- oder Kalilauge zu einer nicht allzu verdünnten alkalischen Lösung des Oxims eine Fällung ein.

Um ganz sicher zu sein, daß der vorliegenden Verbindung wirklich die Zusammensetzung eines Benzilmonoxims zukommt, wurde die Analyse derselben wiederholt.

---

1) Ber. d. d. chem. Ges. XVI, 503.
2) Ber. d. d. chem. Ges. XXI, 1304.

I. 0,1993 g Substanz gaben bei der Verbrennung mit Kupferoxyd 0,5428 g Kohlensäure und 0,0940 g Wasser.

II. 0,2216 g Substanz gaben 12,1 cc feuchten Stickstoff bei 17° und 754 mm Druck.

Berechnet für $C_{14}H_{11}NO_2$		Gefunden I	Gefunden II
C	74,66	74,27	—
H	4,89	5,24	—
N	6,22	—	6,29.

β-Benzilmonoxim.

Die isomere β-Verbindung unterscheidet sich scharf von der eben besprochenen durch ihren niedrigeren Schmelzpunct, ihre Krystallform, die Fähigkeit, mit $^1/_2$ Mol. Benzol zu krystallisiren und durch ihre größere Löslichkeit. Das geeignetste Lösungsmittel für diese Substanz ist Benzol, aus dem sie sich beim Erkalten oder langsamen Verdunsten in glänzenden, derben Prismen und Nadeln abscheidet. Dieselben enthalten, wie bemerkt, $^1/_2$ Mol. Krystallbenzol und schmelzen in diesem Zustande bei etwa 70°.

3,2976 g Substanz verloren bei 100° bis zu constantem Gewicht getrocknet 0,4977 g.

Berechnet für $C_{14}H_{11}NO_2 + {}^1/_2 C_6H_6$		Gefunden
C_6H_6	14,78	15,10.

Beim Liegen an der Luft verwittern die Krystalle rasch unter Verlust ihres Benzols und schmelzen dann constant und scharf bei 113—114°, also 24° niedriger als die isomere Verbindung. Versucht man die Substanz aus verdünntem Alkohol umzukrystallisiren, so scheidet sie sich stets zunächst als Oel aus, welches erst allmählich zu einem Haufwerk feiner weißer Nädelchen erstarrt.

In den meisten der gebräuchlichen Lösungsmitteln ist die Verbindung sehr leicht löslich, nur in Wasser ist sie nahezu unlöslich und auch von Ligroïn wird sie nur spärlich aufgenommen. Gegen Alkalien verhält sich das Oxim genau wie sein Isomeres.

Die Analyse des Körpers lieferte das erwartete Ergebniß.

I. 0,2112 g Substanz gaben bei der Verbrennung mit Kupferoxyd 0,5780 g Kohlensäure und 0,0964 g Wasser.

II. 0,2278 g Substanz gaben 12,1 cc feuchten Stickstoff bei 13° und 762 mm Druck.

Berechnet für $C_{14}H_{11}NO_2$		Gefunden I	II
C	74,66	74,64	—
H	4,89	5,07	—
N	6,22	—	6,30.

Bestimmung des Moleculargewichts der beiden Monoxime.

Nachdem somit die gleiche procentische Zusammensetzung der beiden Verbindungen festgestellt war, galt es, die Moleculargröße derselben zu bestimmen, um zu erweisen, daß wirklich isomere, nicht polymere Substanzen vorlägen. Wie bei den Benzildioximen wurde auch in diesem Falle die Raoult'sche Methode angewandt, und zwar konnten hier statt der Acetylderivate die leicht löslichen Oxime selbst untersucht werden. Die Ergebnisse dieser Bestimmungen, welche in der folgenden kleinen Tabelle zusammengestellt sind, beweisen auf das Unzweideutigste, daß die beiden Monoxime das gleiche Moleculargewicht besitzen.

Als Lösungsmittel wurde Eisessig angewandt, dessen Erstarrungspunct bei 15°700 lag.

Gewicht der Substanz	Gewicht des Lösungsmittels	Beobachtete Depression	Depressions-Coefficient	Molecular-Gewicht
		α-Monoxim.		
0,608 g	50,1 g	0°210	0,173	225
		0,225	0,185	210
			0,179	218
1,790	50,1	0,600	0,168	232
		0,605	0,169	230
			0,169	231
		β-Monoxim.		
0,603	50,7	0,200	0,168	232
		0,205	0,172	226
			0,170	229
1,219	50,0	0,400	0,164	238
		0,400	0,164	238
			0,164	238

	Berechnet für $C_{14}H_{11}NO_2$	Gefunden im Mittel für α-Monoxim	β-Monoxim
Depressionscoefficient	0,173	0,174	0,167
Moleculargewicht	225	224	233.

Acetylverbindungen der beiden Monoxime.

Der Einwand, die beiden Monoxime seien nur physikalisch, nicht chemisch isomer, kann zwar kaum ernstlich erhoben werden, wenn man den ganz analogen Fall der beiden Benzildioxime berücksichtigt, doch haben wir zur directen Widerlegung dieses Einwurfes Derivate der beiden Monoxime dargestellt, welche ebenso verschieden sind, wie die Oxime selbst.

Wir wählten dazu die Acetylester der Oxime.

Zur Darstellung derselben kocht man gleiche Gewichtstheile Oxim und Essigsäureanhydrid einen Augenblick auf, erhitzt die entstandene Lösung kurze Zeit mit Wasser und bringt dann das ausgeschiedene Oel durch Abkühlen und Reiben mit einem Glasstabe zum Erstarren. Beim langsamen Verdunsten ihrer alkoholischen Lösungen erhält man beide Acetylderivate in schönen Krystallen und völlig rein.

Das α-Acetylbenzilmonoxim krystallisirt in breiten, flachen Prismen, welche bei 61—62° schmelzen und sich in den gebräuchlichen Lösungsmitteln, mit Ausnahme des Wassers, leicht lösen, am schwersten noch in Ligroïn.

Das β-Acetylbenzilmonoxim ähnelt der α-Verbindung in allen Stücken sehr, nur sind die Krystalle mehr nadelförmig gebildet und schmelzen beträchtlich höher, bei 78—79°.

Die Zusammensetzung beider Verbindungen wurde durch Stickstoffbestimmungen bestätigt.

I. 0,1905 g α-Verbindung gaben 9,0 cc feuchten Stickstoff bei 17° und 742 mm Druck.

II. 0,2046 g β-Verbindung gaben 9,6 cc feuchten Stickstoff bei 17° und 749 mm Druck.

Berechnet für $C_{16}H_{13}NO_3$	Gefunden I	Gefunden II
N 5,24	5,35	5,37.

Durch gelindes Erwärmen — etwa auf 40° — oder längeres Stehen mit Natronlauge bei gewöhnlicher Temperatur werden beide Acetylverbindungen gespalten, und jede derselben liefert dabei dasjenige Monoxim, durch dessen Acetylirung sie entstanden ist. Stärkeres Erwärmen ist bei dieser Operation zu vermeiden, da sonst der Geruch nach Bittermandelöl auftritt, und ein Theil der Substanz sich anderweitig zersetzt.

Umwandlung der α-Verbindung in die β-Verbindung.

Im Hinblick auf das Verhalten der beiden isomeren Dioxime war es im höchsten Grade wahrscheinlich, daß sich das eine Monoxim in das andere umwandeln lassen würde. Dies ist in der That der Fall. Es genügt, das höher schmelzende Monoxim längere Zeit — im speciellen Fall waren es 8 Stunden — mit absolutem Alkohol im Rohr nur auf 100° zu erhitzen, um es glatt in die niedriger schmelzende Modification überzuführen. Ebenso geht die erste Modification allmählich in die zweite über, wenn man sie nach Beckmann in einem Gemisch von Eisessig und Essigsäureanhydrid auflöst, unter Kühlung Salzsäuregas bis zur Sättigung einleitet und das Ganze bei gewöhnlicher Temperatur stehen läßt. Indessen verläuft unter diesen Bedingungen die Umwandlung ziemlich träge, denn bei einem Versuche war dieselbe nach mehreren Tagen noch nicht vollendet.

Das auf die eine oder andere Weise erhaltene β-Monoxim zeigte nach dem Umkrystallisiren aus Benzol den richtigen Schmelzpunct 113—114° und schied sich aus dem genannten Lösungsmittel in den charakteristischen, glänzenden, benzolhaltigen Prismen aus, so daß an der Identität mit dem auf anderem Wege erhaltenen β-Monoxim kein Zweifel bestehen konnte.

Spaltung der beiden Monoxime durch Salzsäure.

Um die Structurgleichheit der beiden isomeren Verbindungen nachzuweisen, wurden dieselben zunächst, gerade wie die Dioxime längere Zeit — 8 Stunden — mit concentrirter wässeriger Salzsäure im Rohr auf 100° erhitzt. Beide Monoxime verhalten sich bei dieser Reaction völlig gleich. Die Hauptproducte der Reaction sind Benzil und salzsaures Hydroxylamin, die auf die übliche Weise erkannt und geprüft wurden; daneben entsteht in beiden Fällen eine geringe Menge Benzoësäure und wenig Ammoniak. Beide Monoxime sind mithin echte Abkömmlinge des Benzils und enthalten die Kohlenstoffkette $C_6H_5 — C — C — C_6H_5$.

Einwirkung von Hydroxylamin auf die beiden Monoxime.

Von ganz besonderer Wichtigkeit war es, den Nachweis zu liefern, daß beide Monoxime sich wie echte Ketone verhalten, also noch eine Carbonylgruppe enthalten, denn sobald dies unzweifelhaft feststand, war die Zahl der überhaupt denkbaren structurverschiedenen Formeln auf die wenigen beschränkt, welche sich durch verschiedene Gruppirung der Elemente der Oximidogruppe construiren lassen. Die angestellten Versuche haben das Vorhandensein einer Carbonylgruppe in beiden Monoximen mit vollster Sicherheit erwiesen, denn beide verbinden sich schon bei gewöhnlicher Temperatur, bei der irgend welche Atomumlagerung in keiner Weise anzunehmen ist, weiter mit Hydroxylamin zu Dioximen, und zwar bezeichnenderweise zu verschiedenen.

Läßt man 1 Th. α-Monoxim mit 2 Th. salzsaurem Hydroxylamin und 4 Th. Aetznatron[1]) in wässeriger Lösung bei Zimmertemperatur stehen, so entfärbt sich die anfangs tief gelbe Lösung allmählich, bis sie nach 1—2 Tagen nur noch schwach gelblich gefärbt erscheint. Säuert man darauf an, so erhält man einen weißen Niederschlag, der zum weitaus größten Theile aus α-Benzildioxim besteht, während nur geringe Mengen niedriger schmelzender Producte — wahrscheinlich β-Dioxim und Spuren unveränderten Monoxims — entstanden sind.

Das α-Dioxim zeigte die bekannten Eigenschaften: es war nahezu unlöslich in siedendem Alkohol, farblos löslich in Alkalien und schmolz nach dem Auskochen mit Alkohol unter Zersetzung bei 237°.

Denselben Verlauf nimmt die Reaction, wenn man 1 Th. α-Monoxim mit 2 Th. salzsaurem Hydroxylamin in alkoholischer Lösung zusammen stehen läßt. Schon nach 1—2 Stunden beginnt sich das α-Dioxim in kleinen Nadeln auszuscheiden, welche sogleich den richtigen Schmelzpunct 237° zeigen, doch ist die schließlich gebildete Menge des α-Dioxims nicht ganz so groß wie bei der Einwirkung des freien Hydroxylamins in alkalischer Lösung.

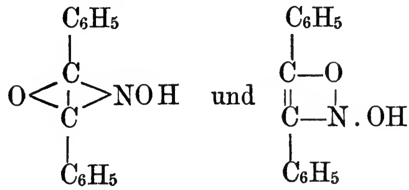
Ersetzt man in dem ersterwähnten Versuch das α-Monoxim durch die β-Verbindung, so nimmt die Reaction äußerlich betrachtet denselben Verlauf, man erhält jedoch neben äußerst geringen Mengen von α-Dioxim ein Product, welches sich als das von unserer Theorie geforderte dritte Dioxim des Benzils herausgestellt hat. Wir werden demnächst ausführlich über diese Verbindung berichten, hier sei nur bemerkt, daß dieselbe durch längeres Trocknen bei 140° vollständig in β-Dioxim umgewandelt wird, welches unter Zersetzung bei 207° schmilzt und mit Essigsäureanhydrid glatt das früher von uns beschriebene Acetylderivat vom Schmelzpunkt 125—126° liefert.

Salzsaures Hydroxylamin wirkt auf β-Monoxim erheblich langsamer ein.

---

1) Der in diesem und den übrigen Fällen angewandte sehr große Ueberschuß von Hydroxylamin und Natron dient nur zur Beschleunigung der Reaction, die sich auch bei einem halb so großen Ueberschuß glatt, nur langsamer, vollzieht.

Die im Vorstehenden mitgetheilten Thatsachen stellen die Anwesenheit einer Carbonylgruppe in beiden Monoximen fest und sind unvereinbar mit Formeln wie die bereits eingangs erwähnten:



Einwirkung von Phenylhydrazin auf die beiden Monoxime.

Auch gegenüber dem zweiten Hauptreagens auf Carbonylgruppen, dem Phenylhydrazin, verhalten sich beide Monoxime wie richtige Ketone. Erwärmt man dieselben mehrere Stunden auf dem Wasserbade in wässerig-alkoholischer Lösung mit salzsaurem Phenylhydrazin und Natriumacetat, so werden gemischte Hydrazone gebildet. Wir haben dieselben als gelbrothe, amorphe Massen erhalten und nicht näher untersucht, da diese Substanzen gegenüber den eben erwähnten Ergebnissen der weiteren Oximirung kein erhebliches Interesse für uns boten.

Optisches Verhalten der beiden Monoxime.

Nachdem durch die bisher mitgetheilten Ergebnisse der Untersuchung mit Sicherheit in beiden Monoximen der Atomcomplex $C_6H_5—CO—\underset{\|}{C}—C_6H_5—$ nachgewiesen worden ist, bleibt als letzter der mehrfach erwähnte Einwand übrig, daß die Oximidogruppe in einem oder in beiden Oximen eine von der gewöhnlichen verschiedene Constitution habe.

Die Form $C<^{H}_{NO}$ ist zwar nicht in Discussion zu ziehen, da die Substanzen sich momentan in verdünntem Alkali lösen und mit Essigsäureanhydrid glatt echte Acetylester bilden. Eher würden sich diese Thatsachen mit der Form $C<\overset{NH}{\underset{O}{|}}$ in Einklang bringen lassen. In beiden Fällen würde eines der Monoxime ein asymmetrisches Kohlenstoffatom besitzen. Wenngleich höchstwahrscheinlich das betreffende Oxim trotzdem optisch inactiv sein würde, da ja auch z. B. die Hydrobenzoïne, Bidesyle und zahlreiche andere Substanzen mit asymmetrischen Kohlenstoffatomen ausschließlich in ihren inactiven Modificationen bekannt sind, so läge doch die Möglichkeit optischer Activität vor, und es erschien daher nicht überflüssig, die beiden Monoxime auch in dieser Richtung zu untersuchen. Wie erwartet, erwiesen sich beide Verbindungen optisch völlig inactiv, denn selbst 25%ige alkoholische Lösungen bewirken in einer Schicht von 20 cm Länge nicht die geringste Drehung der Polarisationsebene des Lichtes.

Constitution der beiden Monoxime.

Die gegebenen Ausführungen leiten zur Erklärung der Verschiedenheit der beiden Benzilmonoxime wiederum auf die Annahme räumlicher Isomerie; die beiden Benzilmonoxime erscheinen als Analoga der Benzildioxime.

Die niedriger schmelzende Modification der Monoxime ist die beständigere, in welche die unbeständigere, hochschmelzende Form übergeführt werden kann. Die Isomerie beider Verbindungen läßt sich durch folgende Formeln ausdrücken:

$$\begin{array}{l} C_6H_5 - C = O \\ \qquad\quad\;\, | \\ C_6H_5 - C = N.OH \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} C_6H_5 - C = O \\ \qquad\qquad\quad | \\ OH.N = C - C_6H_5 \end{array}$$

Versuche mit gewöhnlichem Benzophenon.
(Schmp.: 48—49°).

Anhangsweise mögen hier noch einige Worte über die bereits in der Einleitung kurz erwähnten Parallelversuche mit Benzophenon Platz finden.

Läßt man ein Gemisch von 1 g der stabilen, bei 48—49° schmelzenden Modification des Benzophenons (1 Mol.) 1.2 g salzsaurem Hydroxylamin (3 Mol.) und 2 g Aetznatron (9 Mol.) in verdünnter alkoholisch-wässeriger Lösung über Nacht stehen, so wird das Keton vollständig in sein Oxim übergeführt. Säuert man die zweckmäßig vorher noch etwas mit Wasser verdünnte, klare Flüssigkeit an, so erhält man einen aus feinen, weißen Nadeln bestehenden Niederschlag, welcher ohne jede weitere Reinigung bei 140° schmilzt, also reines Benzophenonoxim darstellt. Die Ausbeute ist quantitativ.

Genau denselben glatten Verlauf nimmt die Reaction, wenn man das Gemisch auf dem Wasserbade digerirt; in diesem Falle ist bei den angegebenen Mengenverhältnissen die Reaction bereits in etwa einer Stunde vollendet.

Salzsaures Hydroxylamin wirkt beträchtlich langsamer auf das Benzophenon ein, denn man muß eine Lösung von 1 g Benzophenon (1 Mol.) und 1.2 g salzsaurem Hydroxylamin (3 Mol.) in verdünntem Alkohol mehrere Stunden auf dem Wasserbade digeriren oder einige Tage bei Zimmertemperatur stehen lassen, um eine vollständige Oximirung des Ketons zu erzielen. Versetzt man alsdann die Lösungen mit überschüssiger Natronlauge, verdünnt mit Wasser und säuert, nachdem man nöthigenfalls Spuren unangegriffener Substanz mit sehr wenig Aether entfernt hat, an, so erhält man auch in diesen Fällen einen Niederschlag von feinen Nädelchen, die gleich bei 140° schmelzen und aus dem gewöhnlichen Benzophenonoxim bestehen. Die in den beschriebenen vier Versuchen durch Ansäuern erhaltenen Producte machten auch sämmtlich, unter dem Mikroskop betrachtet, einen durchaus einheitlichen Eindruck, nie konnte das Auftreten verschiedener Krystallformen beobachtet werden. Bemerkt sei noch, daß sich das Benzophenonoxim auch nicht durch Alkohol bei hoher Temperatur in eine isomere Verbindung umwandeln läßt, denn man kann dasselbe stundenlang mit absolutem Alkohol im Rohr auf 180° erhitzen, ohne daß es irgendwie verändert wird.

Versuche mit labilem Benzophenon.
(Schmelzp.: 26—27°).

Schließlich war es noch denkbar, wenn auch sehr wenig wahrscheinlich, daß das sogenannte labile Benzophenon, jene Modification, welche bei 26—27° schmilzt und sich leicht in die höher schmelzende Form verwandelt, bei der Oximirung eine von dem gewöhnlichen Benzophenonoxim verschiedene Verbindung liefere. Nach den Angaben, die man in der Litteratur über das labile Benzophenon verzeichnet findet, scheint es, als ob dasselbe nur schwierig und nur unter gewissen, nicht festzustellenden, günstigen Bedingungen zu erhalten ist. Nach einer gefälligen Privatmittheilung von Prof. Richard Meyer in Reichenberg i/B. läßt sich jedoch die labile Modification höchst einfach gewinnen.

Frisch, unter gewissen Vorsichtsmaßregeln, destillirtes Benzophenon befindet sich immer im labilen Zustande, und man braucht daher nur gewöhnliches Benzophenon zu erhitzen, um sich das gewünschte Product zu verschaffen. Man muß nur darauf achten, daß beim Einbringen des Benzophenons in das Siedegefäß nicht

Theilchen desselben im Halse des Kolbens, zumal in der Nähe des Abflußrohres, hängen bleiben; auch darf man den Kolben nicht zu klein wählen, damit die Dämpfe nicht zu frühzeitig in das Abflußrohr gelangen. In beiden Fällen erhält man nämlich ein Destillat, welches sofort oder nach sehr kurzer Zeit erstarrt, da die geringen Mengen mitübergegangenen gewöhnlichen Benzophenons eine sofortige Umwandlung des genannten Destillates in die stabile, hoch schmelzende und leichter krystallisirende Modification bewirken. Am besten erhält man das Benzophenon erst kurze Zeit in einem geräumigen Kolben im Sieden; destillirt man dann ab, so geht ein Product über, welches bei gewöhnlicher Temperatur sich selbst überlassen Tage lang flüssig bleibt, auf 0° abgekühlt jedoch mehr oder weniger rasch zu einer durchsichtigen Krystallmasse erstarrt. Dieses Product schmilzt glatt bei 26—27°, stellt mithin die labile Form des Benzophenons dar. Man kann die Substanz beliebig oft schmelzen und wiedererstarren lassen, ohne daß der Schmelzpunct sich ändert; reibt man jedoch die flüssige oder feste Masse einige Zeit mit einem Glasstabe oder Pistill, oder berührt man sie, wie bereits Zincke[1]) angiebt, mit einer Spur gewöhnlichen Benzophenons, so wird die ganze Masse plötzlich unter lebhafter Temperaturerhöhung in die hochschmelzende Modification umgewandelt.

Das labile Benzophenon verhält sich nun gegen Hydroxylamin genau wie das stabile, denn bei Zimmertemperatur wird dasselbe, unter den beim gewöhnlichen Benzophenon angegebenen Bedingungen, sowohl von freiem Hydroxylamin in alkalischer Lösung, als auch — etwas langsamer — von der salzsauren Base ausschließlich in das Oxim vom Schmelzpunkt 140° verwandelt, welches auch hier sogleich in reinem Zustande gewonnen wird.

Man kann daher mit Bestimmtheit behaupten, daß unter den Bedingungen, die beim Benzil zur Entstehung isomerer Oxime führen, aus dem Benzophenon nur ein Oxim gebildet wird.

1) Ann. Chem. Pharm. 159, 381.

Göttingen, Universitäts-Laboratorium.

Ueber Arecolin, den giftigen Bestandtheil der Bethelnuß.

Von

Wilh. Marmé.

Vorgelegt von Prof. Merkel.

Seit vorchristlichen Zeiten wird in Ostindien und China, auf den benachbarten ostindischen, sowie auf australischen und polynesischen Inseln von den Eingeborenen beiderlei Geschlechts von früher Jugend bis in das Greisenalter die Bethelnuß, der Samenkern der Arecapalme, mit einem Blatt von Piper Bethel und etwas gebranntem Kalk tagtäglich gekaut. Die Sitte des Bethelkauens hat im östlichen Asien zu einer ausgedehnten Cultur der ursprünglich auf der malayischen Halbinsel einheimischen Palme geführt und der Handel mit den Palmenfrüchten und Fruchtkernen setzt alljährlich, obgleich er sich fast ausschließlich auf den Südosten von Asien beschränkt, außerordentlich große Mengen um[1]).

Aus dem Samen der Arecapalme hat im verflossenen Jahre Herr E. Jahns, Besitzer der hiesigen Universitätsapotheke, drei Alkaloide isolirt und zwei derselben bis jetzt chemisch genauer studirt und eingehend beschrieben[2]). Diese letzteren beiden habe ich, Dank der Liberalität des Herrn Jahns, in ihrer Wirkung auf den thierischen Organismus, soweit das Material reichte, geprüft. Die Ergebnisse meiner Versuche erlaube ich mir der Kgl. Gesellschaft d. W. vorzulegen.

Das eine Alkaloid, welches den Namen Arecaïn erhalten hat, kommt zu 0,1 % in dem Samenkern vor, bildet farblose, luftbeständige, in Wasser und verdünntem Weingeist leicht lösliche Krystalle und wirkt nicht giftig.

Das zweite Alkaloid, wegen seiner ölartigen Consistenz Arecolin genannt, findet sich zu 0,07 bis höchstens 0,1% in der Bethelnuß. Seiner chemischen Zusammensetzung nach entspricht es der Formel $C_8H_{13}NO_2$, steht demnach dem von Tanret aus der Granatwurzelrinde isolirten Pelletierin, welchem die Formel $C_8H_{13}NO$ zukommt, sehr nahe. Wie dieses letztere ist es flüchtig und flüssig. Es reagirt stark alkalisch, löst sich in jedem Verhältniß in Wasser, Alkohol und Chloroform und bildet Salze, welche leicht löslich, zum Theil zerfließlich, aber meist krystallisirbar sind.

1) Ceylon exportirt in einem Jahre 60—70000 Centner Samen, und Madras 44000 Centner Samen und 2 Millionen Früchte. Pharmacogr. 1879 S. 671.

2) Berichte d. D. ch. G. 1888. XI, S. 3404.

Scharf ausgebildete luftbeständige Krystalle stellt das bromwasserstoffsaure Arecolin dar, während das salzsaure Salz in Nadeln krystallisirt, welche beim Stehen an der Luft zerfließen. Das erstere Salz habe ich in meinen Versuchen zu $^1/_2$ Millig. bis zu 2 Decigr., das salzsaure Arecolin seinem Molekulargewicht entsprechend zu $^4/_{10}$ Millig. bis zu 16 Centig. bei meinen Versuchsthieren theils subcutan, theils intravenös injicirt oder auf die Conjunctiva des Auges gebracht.

Arecolin wirkt stark giftig. Ausgewachsene Kaninchen sterben, innerhalb weniger Minuten nach subcutaner Injection von 25—50 Milligr., erholen sich nach 10 Milligr. Katzen gehen bei gleicher Applicationsweise von 10—20 Milligr. zu Grunde, doch ist der Verlauf der Vergiftung von etwas längerer Dauer. Hunde und zwar selbst kleinere Thiere von 5—6 k Körgergewicht, können durch subcutane Injection von 50—75 Milligr. stark vergiftet, aber nicht immer getödtet werden. Tauben erliegen innerhalb 5 Minuten nach subcutaner Injection von 1 Centigramm, ertragen 5 Milligr., ältere Hühner werden ebenso rasch durch 1 bis $1^1/_2$ Centigramm getödtet. Es ist demnach das Arecolin weit giftiger als das Pelletierin.

Gewöhnung an das Gift macht sich bei Thieren insofern geltend als eine Dosis Arecolin, welche bei erstmaliger Application ausgesprochen giftig wirkt, weit weniger starke Störungen veranlaßt, wenn sie in Zwischenräumen von einigen Tagen wieder subcutan injicirt wird.

Die Vergiftungserscheinungen, welche das Arecolin veranlaßt, ähneln theils denjenigen, welche durch Pelletierin[1]), theils denjenigen, welche durch Muskarin[2]) hervorgerufen werden. Die pelletierinartige Wirkung erstreckt sich auf Hirn, Rückenmark und willkührliche Muskeln; die muskarinähnliche auf den Herzvagus, die Respiration und die Iris, auf die Darmperistaltik und verschiedene Secrete. Sie wird durch nachfolgende Injection von Atropin aufgehoben und ihr Zustandekommen durch vorgängige verhütet. Dem Arecolin fehlt wie dem Pelletierin, die curaerartige Wirkung des Muskarins auf die peripherischen Enden der motorischen Nerven. Wie das Pelletierin ist auch das Arecolin ein tödliches Gift für Darmparasiten. Die dosis toxica und lethalis des Arecolins ist viel kleiner als die des Pelletierins, aber weit größer als die des Muskarins.

1) Schroeder, Ueber Pelletierin Arch. f. experim. Path. und Pharmac. 1884. Bd. 18. S. 381—400.

2) Schmiedeberg und Koppe, Das Muskarin. 1869.

Unter den genannten Vergiftungserscheinungen sind die Veränderungen der Herzthätigkeit und der Respiration die gefährlichsten, weil sie, wenn größere Dosen einverleibt werden, die Todesursache bilden. Die ersteren lassen sich am leichtesten an curaresirten, männlichen Fröschen, deren Herz durch Fensterung des Sternums sichtbar gemacht ist, genau verfolgen. Nach subcutaner Injection von 3—5 Millig. nimmt die Zahl der Herzcontraction allmählich ab bis das strotzend gefüllte Herz in Diastole still steht. Dieser Stillstand ist aber kein absoluter. Von Zeit zu Zeit erfolgen einzelne kurzdauernde Systolen, welche durch immer länger dauernde Diastolen getrennt sind. Die kurzen Systolen führen nicht zur völligen Entleerung des prall gefüllten Ventrikels. Kommen tödtliche Dosen, 3 — 5 Centigr., zur Wirkung, so tritt zunächst auch diastolischer Stillstand ein, schließlich aber steht das Herz in Systole definitiv still. Solange absolut tödtliche Dosen vermieden werden, kann diese muskarinartige Wirkung auf das Herz immer durch nachfolgende subcutane Injection von $^1/_2$ — 1 Milligr. Atropinsulfat in kürzester Zeit aufgehoben werden, während vorgängige Atropinisirung das Zustandekommen derselben verhindert. Das Arecolin wirkt wie Muskarin auf das peripherische Ende des Herzvagus. Auch bei Säugethieren läßt sich dies darthun. Injicirt man intravenös curaresirten und künstlich respirirten Hunden, deren eine Schenkelarterie mit einem Manometer verbunden ist (nachdem die Vagi am Halse durchtrennt und die centralen Enden der den Herzmuskel versorgenden Vagusstümpfe mit den von Ludwig angegebenen Electroden versehen sind und die das Herz stillstellende Stärke des Inductionsstroms bestimmt ist) etwa 3 — 5 Milligr. Arecolin, so sieht man den Blutdruck nach einer geringen, fast momentanen Steigerung, rasch absinken. Die Kuppe der Quecksilbersäule zeigt keine Bewegung und electrische Reizung der Vagi bei dem vor der Injection mit Erfolg benutzten Rollenabstand, bleibt jetzt vollständig wirkungslos. Injicirt man dann 1 Milligr. Atropinsulfat intravenös, so steigt innerhalb einer Minute die Quecksilbersäule und der Puls wird weit über die Norm beschleunigt. Das gleiche Ergebniß haben entsprechende Versuche an Kaninchen. Werden größere Dosen intravenös injicirt, so steht gleichfalls das Herz still. Hat man bei künstlicher Respiration des curaresirten Thieres das Sternum entfernt, so sieht man nach kurzem Stillstand beider Ventrikel zunächst Contractionen des rechten eintreten, während der linke Ventrikel sich unbeweglich erhält und zwar scheint dabei, wie nach Einwirkung größerer Dosen von

Muskarin [1]) eine Wirkung des Arecolin auf den Muskel selbst betheiligt zu sein. Dieser länger dauernde Stillstand des linken Ventrikels dürfte eine Ursache für bestimmte, bald zu erwähnende Respirationsstörungen abgeben.

Die Athmung wird nämlich durch Arecolin verschieden beeinflußt je nach der Größe der Dosis, welche zur Wirkung gelangt. Große Dosen verlangsamen die Athmung sofort in hohem Grade. Bei Katzen veranlassen dieselben die hochgradigste Dispnoe; das vergiftete Thier bemüht sich mit weit geöffnetem Maule und Anspannung aller betreffenden Muskeln zu inspiriren, auf diese mühsame Inspiration folgt die Exspiration rasch und stoßweise, dabei fließt zäher Speichel aus dem Maule, das Thier legt sich auf die Seite, laute Rhonchi werden sehr bald bei In- und Exspiration hörbar, es tritt großblasiger Schaum aus dem Maule und schließlich steht die Respiration still, während noch 5—7 Minuten lang schwache und seltene Contractionen des (rechten) Herzens sich auscultiren lassen. — Mittlere Gaben steigern zunächst sehr bedeutend die Zahl der In- und Exspirationen, (besonders auffallend bei Hunden) welche bei günstiger Wendung der Vergiftung allmählich zur Norm zurückkehrt, während bei zunehmender Verschlimmerung die Beschleunigung in eine bis zum lethalen Ende wachsende Verlangsamung übergeht. Während der Beschleunigung erfolgt die Inspiration mit gewaltiger Anspannung sämmtlicher Inspirationsmuskeln, die Exspiration rasch in gewaltsamen Stößen.

Das Zustandekommen dieser Respirationsstörungen läßt sich mit der Annahme, daß das Arecolin auf die peripherischen Enden der Kehlkopf- und Lungenäste des Vagus ähnlich wie auf den Herzvagus einwirke, allein nicht erklären. Da auch nach Durchschneidung der Halsvagi und Einführung einer Trachealkanüle Dispnoe fort besteht, so müssen noch andere Ursachen gegeben sein. Eine derselben mag darin liegen, daß die verminderte Pulsfrequenz und die starke Abnahme des Blutdrucks einen mangelhaften Gaswechsel bedingt und dieser das Respirationscentrum stark erregt. Eine weitere Ursache liegt wohl in dem vorher erwähnten verschiedenen Verhalten, welches nach Injection größerer Giftmengen der rechte und linke Herzventrikel darbieten. Der frühere Eintritt von Contractionen des rechten und die länger dauernde Unthätigkeit des linken Ventrikels hat (besonders auffallend bei Katzen) das Auftreten von Lungenödem zur Folge. — Bei Fröschen steht nach subcutaner Anwendung relativ großer

1) Kobert, Archiv f. exp. Path. u. Pharm. 1886 S. 112.

Dosen die Athmung bald ganz still, während kleine Gaben von 3—5 Milligr. bei kräftigen Thieren nur eine zeitweise Ruhe des M. submaxillaris bedingen. Jeder äußere Reiz, der den Frosch trifft, löst eine oder mehrere auf einander folgende Contractionen dieses Muskels und bei Männchen meist auch lautes Quaken aus.

Zugleich mit den muscarinartigen Wirkungen auf Herz und Respiration entwickeln sich auch die vorher erwähnten pelletierinartigen. Zunächst übt das Arecolin eine gewisse lähmende Wirkung auf das Hirn aus. Kurze Zeit nach der Vergiftung erscheint der Frosch wie betäubt. Streicht man mit einem Glasstab über den Rücken, so bleibt er ruhig sitzen, quakt, sucht aber nicht zu entspringen. Wiederholt angestoßen macht er allerdings einen Sprung, welcher bisweilen sehr ungeschickt ausfällt. Mit einiger Vorsicht angefaßt, läßt er sich auf den Rücken legen und bleibt zunächst ruhig liegen. Erst einige Zeit später, oder auch gleich, wenn er stärker oder wiederholt angestoßen wird, wendet er sich in die Bauchlage um. Bei Hunden, Katzen und Kaninchen wird die narkotische Wirkung gestört durch den schon früh sich einstellenden Speichelfluß und die sehr rasch eintretenden dünnflüssigen Darmentleerungen.

Ferner veranlaßt das Arecolin, ähnlich wie das Pelletierin, eine Steigerung der spinalen Reflexe. Werden Frösche erst mit $^1/_2$ Milligr. Atropin und etwas später mit großen Gaben (etwa 2—5 Centigr.) Arecolin vergiftet, so stellen sich nach einiger Zeit Reflexkrämpfe ein, die sich bis zu ausgebildetem, oft längere Zeit andauerndem Tetanus steigern. Diese gesteigerte Reflexerregbarkeit geht nach kürzerer oder längerer Zeit in Lähmung über. Isolirt man, gleich nachdem die Extremitäten vollständig erschlafft sind und sich in jede beliebige Lage bringen lassen, die Ni. Ischiadici, so erregt deren faradische Reizung tetanische Streckung der betreffenden Extremität. Allmählich aber verbreitet sich die Lähmung vom Rückenmark aus abwärts auch auf die peripherischen Nerven. Durch diese Wirkungsweise unterscheidet sich das Arecolin von dem Muskarin, welches, wie Schmiedeberg zuerst gefunden hat, nach Art des Curare, die peripherischen Nervenenden zuerst lähmt. Auch bei Hunden von 4—5 kg Körpergewicht veranlaßt die subcutane Injection von 50—70 Milligr. Arecolin, neben der starken Erregung des Herzvagus, tetanische Krampfanfälle, die bald in unvollständige Lähmung der Extremitäten übergehn, während welcher die Inspirationen mit Anspannung aller betreffenden Muskeln erfolgen.

Endlich hat das Arecolin bei Fröschen, wie das Pelletierin, auch eine, wenn auch nicht sehr stark ausgesprochene, veratrinähnliche Wirkung auf die quergestreiften Muskeln.

Außer der geschilderten Wirkung auf das Herz und die Respiration hat das Arecolin, wie das Muskarin, die schon erwähnte Wirkung auf die Speicheldrüsen und die Darmthätigkeit. Abgesehen von dem Ptyalismus werden Hunde auch von Erbrechen heimgesucht und dazu gesellen sich erst geformte, bald aber flüssige Darmentleerungen. Mit letzteren werden mitunter Bandwürmer ausgestoßen. Nur nach sehr starker Vergiftung kommt es auch zu Bluterbrechen und blutigen Stühlen. Erhöhte Thätigkeit der Darmperistaltik wird aber bei Kaninchen, Hunden, Katzen, Hühnern und Tauben auch schon durch viel kleinere Dosen, ebenso wie bei Säugethieren Speichelfluß und mitunter auch Harnsecretion, veranlaßt. Bei Katzen und Kaninchen tritt nach subcutaner Injection weniger Milligr. auch schon vermehrte Bronchialsecretion auf. Nachfolgende Injection kleiner Dosen von Atropinsulfat hebt die genannten Wirkungen auf und vorgängige verhindert ihr Zustandekommen.

Hochgradige Vergiftung mit Arecolin veranlaßt ferner bisweilen, wenn auch nicht in jedem einzelnen Falle, bei Hunden, Katzen und Kaninchen eine starke Contraction des Sphincter pupillae beider Augen. Instillation von Arecolinlösung in ein Auge veranlaßt eine so starke Verengerung der Pupille des betreffenden Auges, daß dieselbe bei Hunden und Kaninchen nur Stecknadelkopfgröße zeigt und bei Katzen bis auf einen Strich vollständig verschwindet; doch sind dazu immerhin größere Dosen erforderlich, welche störende Nebenwirkungen zur Folge haben. Die Wirkung auf die menschliche Iris habe ich aus letzterem Grunde bis jetzt nicht untersucht.

Mit den Se- und Excreten wird unverändertes Arecolin ausgeschieden, und läßt sich als solches nachweisen. Bei dem Fehlen von charakteristischen Farbenreactionen ist vorläufig das aus dem Harn vergifteter Thiere wiedergewonnene Arecolin chemisch nur durch sein Verhalten gegen Kaliumwismuthjodid, Phosphormolybdänsäure u. s. w., physiologisch durch seine Wirkung auf das blosgelegte Herz curaresirter Frösche zu identificiren.

Auch das Kauen der Bethelnuß veranlaßt mitunter Vergiftungserscheinungen. Vorzugsweise werden von solchen Ausländer heimgesucht, welche sich der Landessitte anzubequemen suchen. Da die Eingeborenen von Ostindien und den benachbarten Inseln womöglich den saftigen Kern jüngerer an Arecolin armer Bethelnüsse kauen, ältere Samen dagegen einer vorgängigen Behandlung mit heißem Wasser unterwerfen [1]), so ist es verständlich, daß das Kauen solcher lege arte hergerichteter Bissen nur selten und vorzugsweise bei nicht Eingeborenen, deren Organismus sich noch nicht an kleine Giftmengen gewöhnt hat, Vergiftungserscheinungen hervorruft, welche nach Berichten aus älterer und neuester Zeit mit den geschilderten Erscheinungen, welche kleine Dosen Arecolin bei Thieren veranlassen, im wesentlichen übereinstimmen.

Die Bethelnuß enthält, wie ältere Untersuchungen [2]) lehren und neuere [3]) bestätigen, außer 15 % Gerbsäure etwas ätherisches Oel und einen eigenartigen rothen Farbstoff, wodurch beim Kauen der Samen die Zähne nach dem Geschmack der Südostasiaten schön schwarz, Lippen und Zahnfleisch verlockend roth gefärbt werden, und die Exspirationsluft wie die Hautausdünstung einen für eingeborene Geruchsorgane angenehmen Duft annimmt. Abgesehen von dieser kosmetischen Eigenschaft ist die Bethelnuß in ihrer Heimath als Digestivum geschätzt, welches die Magenthätigkeit anregt und die Darmperistaltik erfolgreich belebt. Endlich wird die Bethelnuß von den Malayen als Anthelminthicum benutzt, weil sie in Gaben von 15—20 g intern gebraucht, die Entleerung von Band- und Rundwürmern bei Menschen und Thieren sicher erzielen soll. — Zur Beseitigung von Darmparasiten wird die Bethelnuß seit einer Reihe von Jahren auch in Europa und Amerika besonders von Thierärzten mit Erfolg verwerthet. Diesen letzteren verdankt sie, ebenso wie den günstigen Einfluß auf die Magenthätigkeit und die Darmperistaltik ihrem Gehalt an Arecolin.

Die Reindarstellung des Arecolins und die experimentelle Prüfung seiner Wirkung berechtigt dazu, die Arecanuß zu denjenigen pflanzlichen Genußmitteln zu stellen, welche auch als Arzneimittel geschätzt sind, denn es dürfte keinem Zweifel unterliegen, daß die Arecolinsalze, sowohl wegen ihrer Wirkung auf die Darmperistaltik und auf Entozoën, auf Speichel- und Bronchialsecretion, wie auf den Herzvagus und den Oculomotorius in geeigneter Dosis, Form und Combination therapeutisch sich verwerthen lassen.

---

1) Heißes Wasser ohne Säurezusatz entzieht, wie Herr Jahns versichert, den Bethelnüssen einen nicht unbedeutenden Theil ihres Arecolins.

2) Morin, Journ. d. Pharm. 1822. T. 8. p. 449—455.

3) Pharmacographie l. c.

Göttingen, im Februar 1889.

Die Theorie der Muskelcontraktion.

Vorläufige Mittheilung

von

G. E. Müller.

Vorgelegt von F. Klein.

Die Contraktilität der Muskeln pflegt von den Anhängern der vitalistischen Anschauungen, die sich gegenwärtig wieder lebhafter geltend machen, als ein schlagendes Beispiel dafür angeführt zu werden, wie sehr die eigentlichen Lebenserscheinungen der Versuche einer mechanischen Erklärung spotten. Andere Forscher, welche der mechanischen Auffassung der Lebenserscheinungen zugethan sind, haben geglaubt voraussagen zu dürfen, daß allerdings noch lange Zeit vergehen werde, bevor man im Stande sei, sich von dem Wesen des wunderbaren Vorganges, der sich bei der Contraktion im Muskel abspiele, eine sachgemäße Vorstellung zu machen. Nur Fick hat vor nicht langer Zeit, auf Grund einer nicht unzutreffenden Erwägung, die Ueberzeugung ausgesprochen, daß gerade die Muskelzusammenziehung zuerst von allen Lebenserscheinungen sich einer streng mechanischen Erklärung zugänglich erweisen werde. Unter diesen Umständen dürfte es vielleicht einiges Interesse besitzen, wenn ich hier vorläufig einige Andeutungen über die mechanische Theorie der Muskelcontraktilität veröffentliche, welche ich nun schon seit 10 Jahren stillschweigend nebenbei verfolge, während dieser Zeit immer und immer wieder an den neu entdeckten Erscheinungen und Gesetzen des Muskels bestätigt gefunden habe und demgemäß in Bälde vollständig der Oeffentlichkeit übergeben werde. Da es sich hier um eine Theorie handelt, welche bei gehöriger Ausführung hunderte von Gesetzen und charakteristischen Erscheinungen auf einmal erklärt und eine bisher ganz unverstandene Lebensäußerung bis in die letzten Einzelheiten hinein verständlich macht, so kann hier auf diesen wenigen Seiten natürlich nicht mehr gegeben werden als eine kurze und oberflächliche Skizzirung der Theorie und ein Versuch, das Wesen und die Anwendbarkeit derselben dadurch zu verdeutlichen, daß an einigen zufällig herausgegriffenen, bisher ganz unverständlich gebliebenen, Verhaltungsweisen und Gesetzen des Muskels gezeigt wird, wie sich dieselben vom Standpunkte dieser Theorie aus in einfacher Weise erklären. Es wird nicht möglich sein, bei dieser Anführung von Beispielen auch nur alle Hauptgruppen dieses überaus reichen Erscheinungsgebietes zu berücksichtigen.

§ 1. Von den Kräften, welche bei der Muskelcontraktion wirksam sind.

Für unsere Betrachtung lassen sich an der Muskelfaser — und zwar haben wir hier nur die quergestreifte Muskelfaser vor Augen — außer dem Sarkolemma 3 Hauptbestandtheile unterscheiden: die Disdiaklasten, die Gerüstsubstanz und der Muskelsaft. Die Disdiaklasten befinden sich, mit ihren Axen annähernd im Sinne der Längsrichtung der Faser orientirt, in den anisotropen Scheiben des Muskelfaches. Jede anisotrope Scheibe ist der Sitz einer Quercolonne von Disdiaklasten [1]), die sich sämmtlich in derselben Höhe des Muskelfaches mit annähernd parallelen Axen befinden. Fixirt werden die Disdiaklasten in ihrer Lage durch die Gerüstsubstanz, welche in der Gestalt von Längs- und Querbälkchen (Längs- und Querfädchen) das Faserinnere durchzieht. Die Disdiaklasten jeder einzelnen Quercolonne stehen durch Querbälkchen in Verbindung mit einander und bilden mit diesen zusammen ein sog. Querfadennetz, das in seinen Randtheilen mit dem Sarkolemma in Verbindung steht, und in dessen Knotenpunkten die Disdiaklasten eingefügt sind, welche die Anisotropie der betreffenden Scheibe bedingen. In der Längsrichtung der Faser werden die Disdiaklasten durch die Längsbälkchen mit einander verknüpft. In Verbindung mit diesen aufgefaßt bilden sie die sog. Fibrillen, deren jede, aus abwechselnden Längsbälkchen und Disdiaklasten bestehend, das Faserinnere in der Längsrichtung durchzieht, indem sie an den beiden Faserenden eine feste Anknüpfung besitzt. Es besteht also das Fasergerüst einerseits aus den Querfadennetzen, welche sich in der Höhe der anisotropen Scheiben befinden und in ihren Knotenpunkten die Disdiaklasten einschließen, und andererseits aus den Fibrillen, welche, das Faserinnere in der Längsrichtung durchziehend, die Querfadennetze in ihren Knotenpunkten durchsetzen und an eben diesen Punkten die Disdiaklasten gleichfalls als Bestandtheile in sich einschließen. Die von dem Fasergerüste übrig gelassenen Räume des Sarkolemmaschlauches werden von dem Muskelsaft ausgefüllt, welcher das Substrat ist, in dem sich bei der Muskelthätigkeit der wärmebildende Erregungsvorgang abspielt.

1) Wie leicht zu erkennen, bezeichnen wir als einen Disdiaklasten, was nach Brücke's Ausdrucksweise als ein Aggregat von Disdiaklasten anzusehen ist. Die Disdiaklasten Brücke's fallen ungefähr mit demjenigen zusammen, was wir weiterhin (§ 8) als Micelle bezeichnen.

So viel zunächst über den so zu sagen schematischen Bau der Muskelfaser. Von der Entstehung des Contraktionsvorganges in derselben hat man sich folgende Anschauungen zu bilden. Sache des Stoffwechsels ist es zunächst, Kraftvorräthe in Gestalt chemischer Spannkraft im Muskel anzuhäufen. Der auf den Muskel direkt oder indirekt einwirkende Reiz dient dazu, einen Theil dieser chemischen Spannkraft in Wärme umzuwandeln. Eine Wirkung der so entstandenen Wärmebildung ist es, den Muskel in den Zustand der Contraktion zu versetzen, und zwar kommt diese contrahirende Wirksamkeit der Erhöhung der Muskeltemperatur durch die Pyroelektricität der Disdiaklasten zu Stande. Alle Krystalle, welche einem System mit ungleichwerthigen krystallographischen Axen angehören und die Elektricität hinlänglich zu isoliren vermögen, zeigen die Erscheinungen der Pyroelektricität. Dementsprechend sind auch die Disdiaklasten pyroelektrisch, und zwar sind dieselben polar-pyroelektrisch wie die Krystalle des Turmalins, des Zuckers, der Weinsäure u. a. m., d. h. sie werden bei jeder Temperaturänderung an ihren beiden Polen entgegengesetzt elektrisch geladen, nämlich an dem einen, sog. analogen, Pole bei der Erwärmung positiv und bei der Abkühlung negativ elektrisch geladen, an dem anderen, sog. antilogen, Pole aber umgekehrt. Nun sind die Disdiaklasten jeder Faser hinsichtlich der Stellung ihrer Axen so orientirt, daß sie ihre gleichnamigen elektrischen Pole sämmtlich nach demselben Ende der Faser hinwenden und mithin 2 benachbarte Quercolonnen sich gegenseitig ungleichnamige Pole zukehren. Wird also durch einen Reiz eine plötzliche Wärmebildung im Muskel hervorgerufen, so werden, so lange die Temperatursteigerung andauert, die Disdiaklasten an ihren analogen Polen mit positiver und an ihren antilogen Polen mit negativer Elektricität geladen, und die auf solchem Wege entstandenen elektrischen Kräfte werden offenbar in dreifacher Hinsicht die Stellungen der Disdiaklasten zu verändern streben. Erstens ziehen sich benachbarte Quercolonnen in axialer Richtung gegenseitig an, da die Pole, welche sie sich gegenseitig zukehren, dem Bemerkten gemäß bei jeder Temperaturänderung mit entgegengesetzten Elektricitäten geladen werden. Zweitens stoßen sich die einzelnen Disdiaklasten jeder Quercolonne in queren Richtungen der Muskelfaser gegenseitig ab. Endlich drittens muß sowohl in Folge dieser Abstoßungen als auch in Folge jener Anziehungen eine Tendenz entstehen, die Desorientirungswinkel der Disdiaklasten (d. h. die Winkel, um welche dieselben von einer genauen Orientirung im Sinne der Längsrichtung der Faser etwa abweichen) zu verringern. Von diesen 3 aus der elektrischen Ladung der Disdiaklasten entspringenden Kräftewirkungen müssen die beiden erstgenannten nothwendig zu einer Verkürzung der Faser in axialer Richtung und Verdickung derselben in den radialen Richtungen führen[1]).

Natürlich ist die contrahirende Wirksamkeit, welche die Disdiaklasten in einem gegebenen Zeitpunkte entfalten, nicht blos von der vorhandenen Stärke der elektrischen Ladungen derselben, sondern auch von den vorhandenen Stellungen und von den gegenseitigen Entfernungen derselben, d. h. von dem vorhandenen Dehnungs- oder Contraktionszustande der Faser, abhängig. Die bloße theoretische Ueberlegung kann hinsichtlich dieser letzteren Abhängigkeit keine sichere Entscheidung bringen, da bei einer Zunahme der Muskellänge die Abstände der Disdiaklasten in der Längsrichtung der Faser größer werden, hingegen in den Querrichtungen sich verringern, und das Umgekehrte bei der Contraktion stattfindet. Wohl aber weisen gewisse Thatsachen mit Bestimmtheit darauf hin, daß die Stärke, mit welcher die Disdiaklasten sich in einem gegebenen Zeitpunkte im Sinne einer Contraktion der Faser geltend machen, bei gleicher elektrischer Ladung derselben um so größer ist, je weniger gedehnt oder je mehr verkürzt die Faser in diesem Zeitpunkte ist.

Wenn sich ein Muskel von seiner natürlichen Ruhelänge aus verkürzt, so haben die contrahirenden Kräfte, welche von den Disdiaklasten ausgehn, bei der Contraktion fortwährend gewisse im Muskel selbst ihren Sitz habende Gegenkräfte zu überwinden, die umso beträchtlicher sind, je weiter die Contraktion bereits fortgeschritten ist. Der Hauptträger dieser inneren Widerstände ist die Gerüstsubstanz, deren Theile in Folge ihrer Elasticität jeder Stellungsänderung der Disdiaklasten entgegenwirken, und zwar in umso höherem Grade, je mehr verkürzt der Muskel bereits ist. Außer der Gerüstsubstanz kommt aber natürlich auch noch das Sarkolemma, das Perimysium u. s. w. hier in Betracht. Wir fassen die von der Gerüstsubstanz und anderen festen Muskelbestandtheilen ausgehenden elastischen Gegenkräfte, welche die contrahirenden Kräfte der Disdiaklasten bei der Contraktion zu über-

---

1) In § 8 werden die hier zu Grunde gelegten Anschauungen hinsichtlich der contrahirenden Wirksamkeit der Disdiaklasten eine gewisse Vertiefung und Modification erfahren. Da jedoch diese Modification für die Ausführungen der §§ 1—7 im Wesentlichen belanglos ist, so empfiehlt es sich, zunächst bei der hier angedeuteten, dem üblichen Vorstellen näher stehenden Anschauungsweise stehen zu bleiben.

winden haben, kurz unter der Bezeichnung des inneren Contraktionswiderstandes zusammen.

Wenn die vorhandene Muskellänge in Folge von Belastung die natürliche Ruhelänge übertrifft, so kommt natürlich an Stelle des inneren Contraktionswiderstandes vielmehr der innere Dehnungswiderstand in Betracht, d. h. die Kraft, mit welcher der Muskel in Folge der Elasticität seiner festen Bestandtheile (der Gerüstsubstanz, des Sarkolemmas, des Perimysiums u. s. w.) der Dehnung durch die Last entgegenwirkt. Nehmen wir an, es werde ein belasteter Muskel, der sich mit seiner Last in Gleichgewicht gesetzt hat, in dem also der innere Dehnungswiderstand gleich der Zugkraft der Last geworden ist, durch einen Reiz erregt, so werden die auftretenden Contraktionskräfte der Disdiaklasten sich zunächst gewissermaßen wie eine Verstärkung des inneren Dehnungswiderstandes geltend machen und gemeinsam mit demselben im Sinne einer Verkürzung des Muskels wirken. Während der so zu Stande kommenden Contraktion nimmt aber der innere Dehnungswiderstand fortwährend ab, bis er zuletzt, wenn der sich verkürzende Muskel seine natürliche Ruhelänge erreicht, gleich 0 wird und bei noch weiter fortschreitender Verkürzung dem im entgegengesetzten Sinne wirkenden inneren Contraktionswiderstande Platz macht. Fassen wir also diesen Contraktionswiderstand und jenen Dehnungswiderstand unter der gemeinsamen Bezeichnung des inneren Elasticitätswiderstandes zusammen, so können wir ganz allgemein behaupten, daß der innere Elasticitätswiderstand im Sinne einer Verringerung oder Vergrößerung der vorhandenen Muskellänge wirksam sei, je nachdem die letztere größer oder kleiner als die natürliche Ruhelänge sei, und daß die Aenderung, welche der innere Elasticitätswiderstand bei einer, von einem beliebigen Längenwerthe des Muskels ausgehenden, Verkürzung des Muskels erfahre, stets einer Abnahme der contrahirenden Kräfte der Disdiaklasten äquivalent sei, hingegen diejenige Aenderung, welche der innere Elasticitätswiderstand bei einer Zunahme der Muskellänge erfahre, stets einer Steigerung der contrahirenden Kräfte der Disdiaklasten gleichwerthig sei.

Wie die Ergebnisse der mikroskopischen Forschung darthun und Zweckmäßigkeitsbetrachtungen leicht an die Hand geben, besitzen die Längsbälkchen und die Querbälkchen eine verschiedene innere Struktur. Die ersteren besitzen eine größere Festigkeit und sind dem Muskelsafte gegenüber weniger quellungsfähig als die letzteren. Hauptsächlich ist es die (in Vergleich zur axialen Richtung der Muskelfaser quere) Richtung ihrer Längsstreckung, in welcher die Querbälkchen dem Muskelsafte gegenüber eine starke Quellungsfähigkeit besitzen. Demgemäß sind beim natürlichen Ruhezustande des Muskels diejenigen Poren (intermolekularen, intertagmatischen, intermicellaren Spalten) der Querbälkchen, welche senkrecht zur Richtung der Längserstreckung dieser Bälkchen stehen, mit erheblichen Mengen von Muskelsaft erfüllt. Wegen ihrer sogleich darzulegenden Wichtigkeit für die Funktion des Muskels sollen diese Poren kurz als die funktionellen Poren bezeichnet werden. Der Druck, unter welchem die innerhalb dieser Poren befindliche Saftmenge steht, soll aus gleichem Grunde kurz der funktionelle Imbibitionsdruck heißen.

Nach Vorstehendem kommt der Muskelsaft in 2 verschiedenen Zuständen in der Faser vor: einerseits erfüllt er als freier Muskelsaft die von dem Fasergerüste übrig gelassenen Hohlräume des Sarkolemmaschlauches, andererseits findet er sich als imbibirter oder gebundener Muskelsaft in den feinen Poren der Bestandtheile des Fasergerüstes, insbesondere in den funktionellen Poren.

Angenommen nun, es finde in Folge einer Reizung und plötzlichen Wärmebildung des Muskels eine elektrische Ladung der Disdiaklasten statt, so werden die Disdiaklasten jeder Quercolonne sich gegenseitig abstoßen und von einander entfernen. Hierbei werden natürlich die Querbälkchen, welche diese Disdiaklasten mit einander verbinden, in den Richtungen ihrer Längserstreckung, d. h. in den Richtungen ihres wesentlichen Quellungsvermögens, gedehnt und mithin zu einer ausgiebigeren Aufnahme von Muskelsaft befähigt werden. Denn wenn ein Körper, der von einer ihm quellungsverwandten Flüssigkeit umspült ist, in einer Quellungsrichtung gedehnt wird, so nimmt seine Fähigkeit der Flüssigkeitsaufnahme in dieser Richtung zu, ebenso wie umgekehrt diese Fähigkeit eine Abnahme erfährt, wenn der Körper in der betreffenden Richtung einen Druck erfährt. Sobald also die Muskelfaser sich in irgendwelchem Maße contrahirt hat und dementsprechend die Querbälkchen eine Dehnung in ihren Längsrichtungen erfahren haben, so ist sofort auch die Saftcapacität dieser Bälkchen in diesen Richtungen gewachsen. Hingegen wird die bei der Contraktion stattfindende Zusammendrückung und Biegung der Längsbälkchen wegen des geringeren Saftgehaltes derselben einen wesentlichen Einfluß auf das Mengenverhältniß zwischen freiem und gebundenem Muskelsaft nicht ausüben. Es wird mithin bei der Contraktion die Menge des gebundenen Saftes zunehmen, indem freie Safttheilchen den beim Ruhezustande des Muskels saftreichen isotropen Schichten des Muskelfaches entzogen und in die zu einer ausgiebigeren Saftaufnahme befähigten funktionellen Poren eingelagert werden. Da jedoch diese Poren den freien写ttheilchen nur in geringer Ausdehnung unmittelbar zugänglich sind, so wird die Saftcapacität dieser Poren, welche der eingetretenen elektrischen Ladung der Disdiaklasten und der aus dieser für die Querbälkchen erwachsenen Dehnungskraft entspricht, nicht sofort, sondern nur allmählich gesättigt, wie ja auch sonst eine mit einem begrenzt quellungsfähigen Körper in Berührung gebrachte Flüssigkeit das dem vorhandenen Zustande desselben entsprechende Quellungsvermögen nicht sofort, sondern nur allmählich und innerhalb geraumer Zeit vollkommen sättigt. Die Geschwindigkeit, mit welcher sich der Uebergang freien Saftes in die neu erweiterten funktionellen Poren vollzieht, muß allgemein umso geringer sein, je mehr sich der Zustand dieser Poren einer vollkommenen Sättigung ihrer gegenwärtigen Saftcapacität nähert.

Wir sind durch das Bisherige zu der Vorstellung gelangt, daß jede durch die elektrischen Kräfte der Disdiaklasten eingeleitete Contraktion einen Vorgang zu Folge hat, der seinem Wesen nach am besten kurz als die Nachquellung bezeichnet wird und darin besteht, daß freie Safttheilchen den isotropen Schichten des Muskelfaches entzogen und als gebundene Safttheilchen in die erweiterten funktionellen Poren der Querbälkchen eingelagert werden. Mit der Annahme dieses Vorganges stehen wir in vollkommener Uebereinstimmung zu den Resultaten der mikroskopischen Forschung, welche bekanntlich zu der Ansicht gelangt ist, daß „die anisotrope Substanz auf Kosten der isotropen während der Contraktion Flüssigkeit aufnimmt“, womit eine Verkürzung der Muskelfaser sich nur dann vertrage, „wenn bei dieser Umlagerung der Flüssigkeit die in die anisotrope Substanz eintretenden Moleküle sich vorwiegend in der Querrichtung der Fasern einlagern“.

Wenn ein durch äußere Kräfte nicht gedehnter, quellungsfähiger, aber bislang trocken erhaltener Körper in Berührung mit einem Quellungsmittel gebracht wird, so ist der allmähliche Flüssigkeitsübergang in denselben stets mit einer Volumenzunahme desselben verbunden. In gleicher Weise kann auch dann, wenn ein bereits durchfeuchteter quellungsfähiger Körper durch äußere dehnende Kräfte an Flüssigkeitscapacität in einer bestimmten Richtung gewinnt, der neue Flüssigkeitseintritt in denselben nicht anders geschehen als so, daß die in den Körper eindringenden Flüssigkeitstheilchen dahin wirken, die Körpermoleküle in jener Richtung noch weiter von einander zu entfernen. Wenn sich also bei der Nachquellung neue Safttheilchen in die funktionellen Poren einschieben, so muß dies im Sinne einer Erhöhung des Druckes (funktionellen Imbibitionsdruckes) wirken, der jene Poren zu erweitern strebt. Es wirkt mithin die Nachquellung wie eine Unterstützung der Tendenz der Disdiaklasten, die Querbälkchen des Fasergerüstes zu verlängern und den Muskel in seinem Querschnitt zu vergrößern, und folglich wie eine Unterstützung der contrahirenden Kräfte überhaupt, da eine Verdickung der Faser in querer Richtung nicht ohne gleichzeitige Verkürzung derselben in der Längsrichtung vor sich gehen kann.

Der funktionelle Imbibitionsdruck ist offenbar bei gleicher Weite der funktionellen Poren umso größer, je reichlicher und dichter die in diese Poren eingelagerte Saftmenge ist, und andererseits bei gleicher Menge des innerhalb dieser Poren befindlichen Saftes umso geringer, je mehr erweitert diese Poren sind, und je weniger dicht demgemäß der innerhalb derselben gebundene Saft ist. (Die hier in Rede stehenden Unterschiede der Saftdichte sind natürlich von derjenigen Größenordnung, die überhaupt bei Dichteunterschieden von Flüssigkeiten in Betracht kommt.) Es muß daher eine durch die elektrischen Kräfte der Disdiaklasten eingeleitete Contraktion dadurch, daß sie die f. Poren erweitert, zunächst dazu dienen, den f. Imbibitionsdruck zu verringern, und zwar muß die Herabsetzung dieses Druckes umso beträchtlicher sein, je plötzlicher und schneller der Muskel in Folge der elektrischen Ladung der Disdiaklasten sich contrahirt. Sobald indessen die Herabsetzung des f. Imbibitionsdruckes begonnen hat, setzt auch schon die Nachquellung ein. Anfangs, wo die Contraktion noch sehr schnell vor sich geht, vermag die Nachquellung allerdings das Sinken des f. Imbibitionsdruckes keineswegs zu verhindern. In den späteren Stadien aber, wo die Contraktion langsamer fortschreitet, tritt in Folge der Nachquellung eine Wiedererhöhung des f. Imbibitionsdruckes ein. Diese Wirksamkeit der Nachquellung findet ein Ende durch das baldige Schwinden der elektrischen Ladung der Disdiaklasten. Denn da die in den letzteren durch die Erwärmung erzeugten entgegengesetzten Elektricitäten sich durch die Substanz der Disdiaklasten hindurch leicht und schnell ausgleichen, so kann die elektrische Ladung der Disdiaklasten überhaupt nicht erheblich länger andauern, als ihre Erwärmung durch den erregten Muskelsaft andauert, (wie es denn auch aus dem gleichen Grunde stets einer plötzlichen, steilen und explosionsartig erfolgenden Temperaturänderung des Faserinneren bedarf, wennn eine leicht und deutlich erkennbare contrahirende Wirksamkeit der Disdiaklasten zu Stande kommen soll). Uebrigens ergibt die theoretische Ueberlegung, daß der f. Imbibitionsdruck bei einer geringeren Länge des Muskels, selbst bei Vollendung der Nachquellung, niemals ganz denselben Werth wieder erreichen kann, den er bei einer größeren Muskellänge beim anfänglichen Ruhezustande des Muskels besaß.

Sobald also die elektrische Ladung der Disdiaklasten bis auf einen gewissen Werth gesunken ist, hört auch die Nachquellung auf. Obwohl sehr bald nach diesem Zeitpunkte die Disdiaklasten ihre elektrische Ladung sogar ganz verloren haben, so geht doch die Erschlaffung des Muskels nur verhältnißmäßig langsam vor sich, weil eben eine Rückkehr desselben zu seiner Anfangslänge nicht anders möglich ist als dadurch, daß die Saftmenge, welche durch die Nachquellung in die f. Poren eingeführt worden ist, durch die Elasticitätskräfte der festen Muskelbestandtheile, insbesondere der Querbälkchen, durch die eigene Schwere der Muskelsubstanz und die etwaige Belastung aus diesen Poren wieder ausgepreßt wird. Aus verschiedenen Gründen muß diese Auspressung des überzählig gebundenen Muskelsaftes mit abnehmender Geschwindigkeit erfolgen, und der f. Imbibitionsdruck muß, wie leicht ersichtlich, während dieses Erschlaffungsstadiums im Allgemeinen viel höhere Werthe besitzen, als er während des aufsteigenden Zuckungsstadiums bei denselben Muskellängen besaß.

Es bedarf nicht erst einer weiteren Darlegung, daß der Werth, den der Saftgehalt der f. Poren und der f. Imbibitionsdruck in einem bestimmten Zeitpunkte der Zuckungsdauer besitzt, nicht blos von der vorhandenen Muskellänge und von der seit Beginn der Zuckung verflossenen Zeit abhängig ist, sondern auch noch von demjenigen abhängt, was in der vorausgegangenen Zuckungszeit geschehen ist. So muß z. B. der Werth, den der f. Imbibitionsdruck besitzt, wenn der Muskel nach Verfluß eines bestimmten Zeitraumes t seit Beginn der Zuckung die bestimmte Muskellänge l erreicht, bei sonst gleichartigem Contraktionsverlaufe umso geringer sein, von je größerer Anfangslänge des Muskels die Zuckung ausging. Denn je größer die Anfangslänge desselben war, desto geringer war bei Beginn der Zuckung der Saftgehalt der f. Poren, und desto geringer muß derselbe auch noch nach Verfluß jenes Zeitraums t bei Erreichung der Muskellänge l sein.

Ebenso wie bei der Erschlaffung des gereizt gewesenen Muskels wird natürlich auch bei der Belastung des ruhenden Muskels Muskelsaft aus den f. Poren ausgepreßt und in den freien Zustand übergeführt. Hauptsächlich auf dieser Umlagerung von Muskelsaft beruht es, daß der belastete Muskel in so hohem Grade die Erscheinung der elastischen Nachwirkung zeigt. Bei der Entlastung des belasteten Muskels findet natürlich ebenso wie bei der elektrischen Ladung der Disdiaklasten ein Vorgang der Nachquellung statt.

§ 2. Die mechanischen Erscheinungen und Leistungen des erregten Muskels.

Wie die Zuckung und die Wiedererschlaffung des contrahirten Muskels zu Stande kommt, ist im Bisherigen bereits hinlänglich angedeutet. Man hat mit Recht geltend gemacht, daß die Erschlaffung des contrahirten Muskels ebenso ein Problem sei wie die Contraktion selbst; und man hat sogar die Vermuthung ausgesprochen, es müßten in der Muskelfaser Veranstaltungen vorhanden sein, vermöge deren auf den Erregungsvorgang, welcher die Verkürzung bewirke, allemal noch ein zweiter chemischer Vorgang (Restitutionsproceß) folge, welcher den Zustand der Contraktion rückgängig mache. Unsere Theorie löst dieses Problem auf die einfachste Weise. Sobald die durch den Reiz bewirkte Erwärmung der Disdiaklasten ihr Ende erreicht hat, ist auch schon die elektrische Ladung der letzteren in Folge der Leitungsfähigkeit derselben in schnellem Sinken begriffen. Das Weitere wird dann von der Elasticität der festen Muskelbestandtheile und eventuell auch von der eigenen Schwere des Muskels und von der Belastung desselben besorgt. Die Abkühlung, welche der durch den Reiz bewirkten Erwärmung des Faserinnern folgt, geht zu langsam vor sich, als daß sie durch die ihr entsprechende pyroelektrische Wirksamkeit in wesentlichem Grade zur Beseitigung der durch die vorherige Erwärmung hervorgerufenen elektrischen Ladung der Disdiaklasten beitragen und späterhin eine hervortretende secundäre Ladung derselben bewirken könnte.

Was ferner die anhaltenden Contraktionszustände anbelangt, so besitzt bekanntlich nicht blos die durch Tetanisirung hervorgerufene anhaltende Muskelverkürzung einen oscillatorischen Charakter, sondern nach den neueren Untersuchungen verschiedener Forscher gilt dasselbe auch von der anhaltenden Muskelzusammenziehung, welche vom Gehirn oder Rückenmark aus angeregt wird, welche durch Einwirkung gewisser chemischer Substanzen auf den Muskel, durch Schließung eines den motorischen Nerven durchfließenden elektrischen Stromes u. dergl. m. hervorgerufen wird. Nach Allem, was zur Zeit vorliegt, scheint die Annahme gerechtfertigt, daß, abgesehen von der Contraktur, von der Wärmestarre und anderen seiner Zeit zu erklärenden anomalen Erscheinungen, ein anhaltender Contraktionszustand des Muskels überhaupt nicht anders möglich ist als so, daß er durch eine intermittirende Erregung hervorgerufen wird und dementsprechend oscillatorischer Natur ist. Nach unserer Theorie versteht sich dies von selbst. Denn die längere Andauer einer Muskelerregung von constanter Intensität, das längere Bestehen einer höheren Muskeltemperatur, kann nicht von einer gleich andauernden elektrischen Ladung der Disdiaklasten begleitet sein; nur die Entstehung einer solchen höheren Muskeltemperatur weckt die elektrischen Kräfte der Disdiaklasten, die nach Erreichung der constant bleibenden Temperaturhöhe schnell wieder abklingen. Es kann daher ein andauernder Contraktionszustand nur durch eine Reihe schnell auf einander folgender Schwankungen der Muskeltemperatur unterhalten werden, und zwar steht die Sache kurz folgendermaßen. Nach Beginn der Tetanisirung entsteht zunächst durch Summation eine steile und ausgiebige (wenn auch absatzweise vor sich gehende) Temperaturerhöhung des Faserinneren. Dieselbe ist von einer entsprechenden starken elektrischen Ladung der Disdiaklasten und Contraktion des Muskels begleitet, wobei die Nachquellung in gehörigem Grade mitwirkt. Hat nun die Temperatur des Faserinneren ihr Maximum erreicht, so wird dieselbe (wegen der gesteigerten Wärmeabgabe, wegen der bei der Tetanisirung sich entwickelnden, weiterhin näher zu erwähnenden, negativen Erregbarkeitsmodification sowie wegen der im nächsten § zur Sprache kommenden Abnahme, welche die Muskelerregbarkeit bei Zunahme der gebundenen Saftmenge erleidet) nur noch verhältnißmäßig geringe Schwankungen erleiden, sie wird bei Einwirkung eines Reizstoßes einen plötzlichen positiven Zuwuchs erfahren und hierauf bis zur Einwirkung des nächstfolgenden Reizstoßes um den gleichen Betrag wieder absinken. Die elektrische Ladung, welche die Disdiaklasten bei einer solchen verhältnißmäßig geringen positiven Wärmeschwankung erfahren, kann natürlich auch nur gering sein. Sie ist aber dennoch zur Aufrechterhaltung des erreichten hohen Contraktionsgrades genügend, weil die zuvor durch die Nachquellung in die f. Poren eingeführte Saftmenge gleichfalls einer Erschlaffung des Muskels entgegenwirkt und insbesondere verhindert, daß der Muskel in den Intervallen, die zwischen die kurzdauernden einzelnen elektrischen Ladungen der Disdiaklasten fallen, sich in erheblichem Grade verlängere. Ein wirklich gleichmäßiger Contraktionszustand kann aber natürlich auch durch diese Mitwirkung des Saftgehaltes der f. Poren nicht erzielt werden; vielmehr muß, wie thatsächlich der Fall ist, der Contraktionsgrad des Muskels und der Saftgehalt der f. Poren, entsprechend der Zahl der Erregungswellen, geringe Auf- und Abschwankungen erleiden. Man erkennt indessen bereits aus dem hier Bemerkten, wie wesentlich die Querbälkchen und die Regulirung ihres Saftgehaltes durch die Nachquellung für die Fähigkeit des Muskels sind, in einen andauernden, annähernd gleichmäßigen Contraktionszustand zu gerathen. Muskeln, welche nur zur Ausführung von kurzen und steilen Zuckungen oder von Reihen solcher Zuckungen bestimmt sind, bedürfen in der That principiell nicht unbedingt der Querbälkchen und des ganzen Vorganges der Nachquellung.

Nach diesen Andeutungen über die Entstehung des Tetanus, bei denen von verschiedenen, im Nachstehenden zur Erwähnung kommenden, Punkten ganz abgesehen ist, führen wir Beispiels halber einige Gesetze an, die sich auf den Contraktionsverlauf, die Spannung und die Arbeitsleistung des zuckenden oder tetanisirten Muskels beziehen, unter gleichzeitiger Andeutung der Erklärung, welche diese Gesetze vom Standpunkte unserer Theorie aus in einfacher Weise finden. Nur muß hier zuvor noch auf die Gültigkeit des fundamental wichtigen Satzes aufmerksam gemacht werden, daß, wie leicht ersichtlich, die Spannung, welche der Muskel in einem gegebenen Zeitpunkte besitzt, nicht blos von der vorhandenen elektrischen Ladung der Disdiaklasten und von der vorhandenen Länge des Muskels (nach welcher sich die den contrahirenden Kräften der Disdiaklasten entgegenwirkenden, bez. beistehenden Elasticitätskräfte der festen Muskelbestandtheile bestimmen) abhängig ist, sondern außerdem auch noch von dem vorhandenen Werthe des funktionellen Imbibitionsdruckes abhängt.

Auf Grund dieses Satzes erklärt sich z. B. ohne Weiteres die von Fick festgestellte Thatsache, daß die Wurfarbeit, welche der nach völliger Entwickelung des tetanischen Zustandes losgelassene Muskel thatsächlich leistet, hinter der aus der sog. Dehnungscurve berechneten theoretischen Wurfarbeit ganz bedeutend zurücksteht. Bei Bestimmung der sog. Dehnungscurve wurde von Fick für jede Muskellänge diejenige Spannung ermittelt, welche vorhanden war, wenn annähernd Gleichgewicht zwischen Last und Muskelspannung bestand, d. h. wenn der Saftgehalt der f. Poren und der f. Imbibitionsdruck annähernd den größten derjenigen Werthe besaßen, die sie bei der betreffenden Muskellänge überhaupt besitzen konnten (abgesehen von den im Verlängerungsstadium des Muskels möglichen Werthen). Ist hingegen eine Muskellänge nur Durchgangspunkt der Wurfcontraktion eines plötzlich losgelassenen tetanisirten Muskels, so ist der Saftgehalt der f. Poren und der f. Imbibitionsdruck viel geringer, als er bei der gleichen Muskellänge im Falle bestehenden Gleichgewichtes zwischen Last und Muskelspannung ist. Fick hat daher viel zu hohe Werthe bei der Berechnung der für die Wurfarbeit maßgebenden Muskelspannungen eingesetzt, als er sich der aus seiner Dehnungscurve sich ergebenden Spannungswerthe bediente, und demgemäß ist es nicht zu verwundern, daß er so hohe Werthe für die sog. verlorene Arbeit erhielt.

Wenn sich der Muskel nach völliger Entwickelung des tetanischen Zustandes stets von einer und derselben Anfangslänge aus verkürzt, so muß der Werth, den der f. Imbibitionsdruck während der Wurfcontraktion bei einer bestimmten Muskellänge besitzt, umso geringer sein, je schneller der Muskel diese Länge erreicht hat, d. h. je geringer die Last ist, welche derselbe bei seiner Contraktion bewegt. Hieraus hauptsächlich erklärt sich die Gültigkeit des von Fick gefundenen specielleren Gesetzes, daß bei abnehmender Größe der Last, welche der Muskel unter den hier angegebenen Bedingungen zu bewegen hat, die Differenz zwischen der thatsächlichen und der aus der Dehnungscurve berechneten theoretischen Wurfarbeit umso größer ist, je geringer die Last ist.

Aus der Abhängigkeit, in welcher die den verschiedenen Muskellängen entsprechenden Werthe des f. Imbibitionsdruckes zu der Contraktionsgeschwindigkeit stehen, erklärt es sich auch ohne Weiteres, daß Fick die geringste Differenz zwischen der theoretischen und thatsächlichen Wurfarbeit bei seinen Versuchen mit allmählicher Entlastung des völlig tetanisirten Muskels erhielt, hingegen die größte Differenz beider Arbeitswerthe bei Versuchen fand, bei denen der tetanisirte Muskel nach seiner Loslassung äquilibrirte Massen schleuderte, ohne daß eine Gegenkraft wirkte.

Wie Fick weiter gefunden hat, ist die Arbeit, welche der nach völliger Entwickelung des tetanischen Zustandes losgelassene Muskel an einem Gewichte leistet, bedeutend größer, wenn die Wurfcontraktion von derjenigen Muskellänge ausgeht, bei welcher der Muskel im Ruhezustande dem angehängten Gewichte gerade das Gleichgewicht hält, als dann, wenn dieselbe von einer, für die verschiedenen Gewichtsgrößen constanten, kleineren Muskellänge ausgeht. Je größer das Gewicht ist, desto beträchtlicher ist der Unterschied der in beiden Fällen eintretenden Arbeitsleistungen des Muskels.

Dieses Verhalten erklärt sich in der Hauptsache aus der Unterstützung, welche die contrahirenden Kräfte der Disdiaklasten durch den inneren Dehnungswiderstand erfahren, falls die Contraktion von einer Länge des Muskels ausgeht, welche größer ist als die natürliche Ruhelänge desselben. Je mehr der Muskel bei Beginn der Contraktion gedehnt ist, desto größer ist die Mitwirkung des inneren Dehnungswiderstandes bei der Arbeitsleistung des Muskels, desto beträchtlicher muß demgemäß letztere ausfallen.

Wie Fick gefunden und Tigerstedt bestätigt hat, steigt eine bestimmte Last, die vom zuckenden Muskel bewegt wird, höher empor, wenn sie mit Schwungmasse verknüpft ist, als dann, wenn sie allein vom Muskel emporbefördert wird. Der Unterschied der in beiden Fällen eintretenden Steighöhen der Last ist bis zu einem gewissen Grenzwerthe der Schwungmasse hin umso größer, je beträchtlicher die Schwungmasse ist. Ueberschreitet die letztere jenen Grenzwerth, so nimmt der Unterschied der in beiden Fällen erzielten Steighöhen wieder ab, und bei sehr hohen Werthen der Schwungmasse kehrt sich sogar das Verhältniß der beiden Steighöhen um.

Zwei Umstände kommen bei Erklärung dieses Einflusses der Schwungmasse in Betracht, der eine (U_1) wirkt dahin, bei Verbindung mit der Schwungmasse die Last höher emporsteigen zu lassen, der andere (U_2) wirkt im gegentheiligen Sinne. U_1 besteht darin, daß die Muskelspannungen, welche im Falle vorhandener Schwungmasse auf die Last einwirken, aus doppeltem Grunde größer sind als die Muskelspannungen, welche im Falle fehlender Schwungmasse bei den gleichen Muskellängen auf die Last einwirken. Erstens nämlich besitzt der f. Imbibitionsdruck bei vorhandener Schwungmasse gemäß der dadurch bedingten geringeren Contraktionsgeschwindigkeit bei den verschiedenen während der Contraktion durchlaufenen Muskellängen höhere Werthe, als er bei den gleichen Muskellängen im Falle fehlender Schwungmasse besitzt. Zweitens erreicht die elektrische Ladung der Disdiaklasten bei der Zuckung mit Schwungmasse ihren Maximalwerth und die ihm nahestehenden Werthe bei verhältnißmäßig noch großen Muskellängen, bei denen der innere Contraktionswiderstand nur erst gering ist oder gar noch ein innerer Dehnungswiderstand vorhanden ist, während dieselbe bei der Zuckung ohne Schwungmasse jene höheren Werthe bei kleineren Muskellängen erreicht, wo der innere Contraktionswiderstand beträchtlich ist und einen beträchtlichen Theil der vorhandenen contrahirenden Kräfte der Disdiaklasten für sich in Anspruch nimmt und der zu bewegenden Last entzieht. Der Umstand U_2 besteht darin, daß bei der Zuckung mit Schwungmasse dem geringeren Umfange der Contraktion entsprechend der Bereich von Muskellängen, welche mit ihren Spannungen zur Wirksamkeit an dem Gewichte gelangen, geringer ist als bei der Zuckung ohne Schwungmasse. Bei geringen und mittleren Werthen der Schwungmasse überwiegt der Umstand U_1 in seinem Einflusse auf die wirksame Spannungssumme und Arbeitsleistung des Muskels; bei sehr hohen Werthen der Schwungmasse aber überwiegt U_2. Daher das obige Gesetz.

Dieselben Gesichtspunkte, die wir soeben geltend gemacht haben, kommen auch bei Erklärung des Gesetzes in Betracht, daß die Arbeit, welche der Muskel bei einer isotonischen Zuckung leistet, bei wachsender Belastung bis zu einem gewissen Grenzwerthe hin zunimmt. Nur ist hier außerdem noch die Rolle, welche der innere Elasticitätswiderstand bei der Arbeitsleistung des Muskels spielt, stark zu berücksichtigen.

Wie seiner Zeit näher gezeigt werden wird und auch ohne nähere Darlegung leicht zu vermuthen ist, erklären sich die interessanten Resultate, welche Fick bei seinen Untersuchungen über das Verhältniß, das zwischen der bei einer Zuckung mit Schwungmasse thatsächlich geleisteten Arbeit und der aus den isotonischen Zuckungscurven berechneten Arbeit besteht, erhalten hat, sämmtlich ohne Weiteres, wenn man den Einfluß des f. Imbibitionsdruckes auf die Muskelspannung berücksichtigt und zugleich näher beachtet, in welcher Weise der Werth, den der f. Imbibitionsdruck besitzt, wenn der Muskel nach Verlauf eines Zeitraumes t seit Beginn der Zuckung die Länge l erreicht, von dem vorherigen Zuckungsverlaufe abhängig ist. Wie schon auf S. 140 erwähnt, ist dieser Druckwerth erstens von der Anfangslänge des Muskels abhängig. Zweitens sind aber auch die Durchgangslängen, d. h. die Längenwerthe, welche der Muskel während der Zuckung von der Anfangslänge aus bis zur Erreichung der Muskellänge l durchläuft, hier mit maßgebend. Der Werth des f. Imbibitionsdruckes, der vorhanden ist, wenn diese Muskellänge l nach Verlauf des Zeitraumes t erreicht wird, muß bei gleicher Anfangslänge umso beträchtlicher sein, je geringer jene Durchgangslängen des Muskels waren. Denn die Nachquellung geht unter sonst gleichen Umständen umso lebhafter vor sich, je kürzer der Muskel und je weiter demgemäß die f. Poren sind. Sie muß also bei gleicher Anfangslänge während des Zeitraumes t umso wirksamer sein, je kleiner die Durchgangslängen sind.

Wie Fick festgestellt hat und auch schon aus gewissen Versuchsresultaten von Place sich ergibt, erreicht der Muskel bei der isometrischen Zuckung das Maximum seiner Spannung viel früher, als er bei der isotonischen Zuckung das Maximum seiner Verkürzung erreicht. Dieser Satz ist eine schöne Bestätigung unserer Theorie. Bei der isometrischen Zuckung ist mit dem Maximum der elektrischen Ladung der Disdiaklasten zugleich auch das Maximum der Muskelspannung gegeben. Bei der isotonischen Zuckung hingegen schreitet die Contraktion in Folge der Nachquellung auch noch während eines Theiles desjenigen Zeitraumes fort, während dessen die elektrische Ladung der Disdiaklasten im Absinken begriffen ist.

Aus dem Einflusse der Nachquellung und aus der Rolle, welche der Erschlaffungswiderstand des überzählig gebundenen Muskelsaftes (vergl. S. 140) bei der Erschlaffung des Muskels spielt, erklärt sich ohne Weiteres der gleichfalls von Fick aufgestellte Satz, daß die Spannung des Muskels bei der isometrischen Zuckung viel schneller abklingt, als der Muskel bei der isotonischen Zuckung erschlafft.

Bei den Versuchen mit dem Blix'schen Myographion hat sich bekanntlich ergeben, daß die Dehnungscurve, welche bei schneller Entlastung des tetanisirten Muskels erhalten wird, hoch über der Dehnungscurve liegt, welche bei schnellem Anwachsen der Belastung desselben Muskels sich herausstellt. Dieses Resultat erscheint selbstverständlich, wenn man den Einfluß des f. Imbibitionsdruckes auf die Muskelspannung in Rücksicht zieht und näher überlegt, wie sich der Saftgehalt der f. Poren und der f. Imbibitionsdruck bei beiden Arten der Ermittelung der Dehnungscurve verhält. Uebrigens muß man Resultate ähnlicher Art auch am ruhenden Muskel erhalten.

Der Umstand, daß die Zuckung unter gewöhnlichen Verhältnissen bei einem nur mäßigen Verkürzungsgrade ihr Contraktionsmaximum erreicht, hat seinen Grund nicht darin, daß die elektrische Ladung der Disdiaklasten, welche der Reiz bewirkt, in keinem Stadium ihres Verlaufes den inneren Contraktionswiderstand, welcher bei höheren Verkürzungsgraden vorhanden ist, zu überwinden vermöchte, sondern vielmehr darin, daß diese elektrische Ladung zu schnell abklingt, so daß sie wegen der die Verkürzung verzögernden inneren und äußeren Arbeit, die sie bei der Contraktion zu leisten hat, gar nicht dazu kommt, sich an der Ueberwindung größerer Werthe des inneren Contraktionswiderstandes und Herstellung höherer Contraktionsgrade zu bethätigen. Bei dem Tetanus kommt das schnelle Abklingen der elektrischen Ladung der Disdiaklasten natürlich nicht in gleicher Weise für das erreichbare Verkürzungsmaximum in Betracht. Demgemäß wird bei demselben nach Ablauf des Entwicklungsstadiums ein verhältnißmäßig recht hoher Contraktionsgrad unter Mitwirkung des f. Imbibitionsdruckes durch eine Reihe elektrischer Ladungen der Disdiaklasten unterhalten, deren jede isolirt genommen nur eine wenig ausgiebige Zuckung bewirken würde und aus den oben (S. 142) angedeuteten Gründen geringer ist als die elektrische Ladung der Disdiaklasten, welche von einem Einzelreize gleicher Art und Stärke hervorgerufen wird. Von dem hier angedeuteten Gesichtspunkte aus verstehen sich nun ohne Weiteres die von von Kries und von Frey erhaltenen Versuchsresultate, nach denen in der Regel „der Muskel umso höhere Zuckungsgipfel erreicht, je weniger Arbeit er während der Zuckung leistet“, d. h. je größer die Unterstützungshöhe ist, und zwar dieser Einfluß der Unterstützungshöhe umso deutlicher hervortritt, je größer die bei der Contraktion vom Muskel zu bewegende Last ist, nach denen aber natürlich (vor Allem auch wegen des Verhaltens des inneren Contraktionswiderstandes) die Hubhöhen des unterstützten Muskels bei wachsender Unterstützungshöhe abnehmen, nach denen ferner die Tetanushöhe, im Gegensatze zu der Zuckungshöhe, von der Unterstützungshöhe ganz unabhängig ist, und „es am unermüdeten Muskel stets gelingt, die Höhe des Tetanus auch durch eine einzelne Zuckung zu erreichen, wenn man nur hoch genug unterstützt“.

Aus der Zunahme des inneren Contraktionswiderstandes bei wachsendem Verkürzungsgrade erklären sich auch leicht die beiden Gesetze, daß die Zuckungsgipfel bei steigender Unterstützungshöhe immer frühzeitiger eintreten, und daß in entsprechender Weise bei der Summationszuckung „mit steigender Gipfelhöhe die Gipfelzeit abnimmt“.

Greift bei einer Summationszuckung der zweite Reiz in einem Punkte des absteigenden Astes der dem ersten Reize entsprechenden Zuckungscurve ein, so steht die Höhe der eintretenden Summationszuckung hinter der Höhe zurück, welche die von einem gleich hohen Punkte des aufsteigenden Astes der Zuckungscurve ausgehende Summationszuckung erreicht. Dieses Gesetz versteht sich von selbst, wenn man bedenkt, daß bei der aufsteigend summirten Zuckung im Momente der Einwirkung des zweiten Reizes die bereits vorhandenen contrahirenden Kräfte (einschließlich des f. Imbibitionsdruckes) größer sind als der in diesem Momente vorhandene innere Contraktionswiderstand, hingegen bei der absteigend summirten Zuckung das Umgekehrte stattfindet.

§ 3. Die myothermischen Gesetze.

Alle die zahlreichen, von Heidenhain, Fick u. A. festgestellten, Gesetze, welche die Abhängigkeit der Wärmebildung des Muskels von der Belastung, Verhinderung der Contraktion, Entlastung auf der Höhe der Contraktion u. s. w. betreffen, erklären sich aus folgenden Sätzen:

1) Das myothermische Grundgesetz: Die Wärmebildung, welche in Folge eines gegebenen Reizes in einer bestimmten Partie des Muskelsaftes stattfindet, ist umso geringer, je höher der Druck ist, unter dem diese Partie des Muskelsaftes steht.

Daß eine plötzliche positive Druckschwankung erregend auf den Muskelsaft wirke, ist natürlich durch dieses Gesetz nicht ausgeschlossen.

2) Der freie Saft steht unter geringerem Drucke als der, unter einem besonderen Imbibitionsdruck stehende, gebundene Saft. Jede Vermehrung der freien Saftmenge bedeutet also an und für sich eine Zunahme der Muskelerregbarkeit.

3) Bei zunehmender Dehnung des Muskels wächst der Druck, der auf den gesammten Muskelsaft ausgeübt wird. Dieser Umstand muß nach dem unter 1) aufgestellten Gesetze im Sinne einer Verringerung der Safterregbarkeit wirken. Andererseits aber nimmt zugleich die freie Saftmenge zu, was im gegentheiligen Sinne wirkt. Bei geringeren Dehnungen überwiegt der letztere, bei größeren Dehnungen aber der erstere Einfluß auf die Safterregbarkeit. Demgemäß wächst z. B. die Wärmebildung, welche bei einer isometrischen Zuckung stattfindet, bei zunehmender Dehnungsgröße bis zu gewisser Grenze hin und nimmt bei Steigerung der Dehnungsgröße über diesen Grenzwerth hinaus wieder ab.

4) Bei der Contraktion nimmt die gebundene Saftmenge zu. Demgemäß verringert sich bei derselben im Allgemeinen die Safterregbarkeit, abgesehen von denjenigen Fällen, wo die Contraktion von so hohen Dehnungsgraden ausgeht, daß der für die Safterregbarkeit nachtheilige Einfluß der bei der Contraktion stattfindenden Saftbindung durch den dieser Erregbarkeit günstigen Einfluß überboten wird, der daraus entspringt, daß bei der Contraktion der Druck, der durch die vorhandene Belastung auf den gesammten Muskelsaft ausgeübt wird, abnimmt, weil die contrahirenden Kräfte der Disdiaklasten die Belastung theilweise oder gänzlich so zu sagen auf sich nehmen.

Hieraus erklärt sich z. B. das von Heidenhain festgestellte

Gesetz, nach welchem der Muskel bei gleicher Reizung und gleicher Belastung weniger Wärme entwickelt, wenn er sich verkürzt, als wenn er an der Verkürzung verhindert wird, vorausgesetzt daß die Belastung einen gewissen Grenzwerth nicht überschreitet. Wird dieser Grenzwerth der Belastung überschritten, so kehrt sich das Verhältniß um.

5) Bei näherer Betrachtung stellt sich der Sachverhalt bei der Contraktion als noch etwas complicirter heraus. Wie auf S. 139 gesehen, tritt bei der Contraktion zuerst eine bedeutende Herabsetzung des f. Imbibitionsdruckes ein, die erst späterhin durch die Nachquellung mehr oder weniger ausgeglichen wird. Diese anfängliche Verringerung des f. Imbibitionsdruckes muß dem obigen Grundgesetze gemäß einen förderlichen Einfluß auf die Erregbarkeit des innerhalb der f. Poren befindlichen Saftes ausüben. Doch wird dieser Einfluß in der Regel durch den Einfluß des Umstandes überwogen, daß in Folge der Nachquellung eine gewisse Menge bisher freien Saftes dem f. Imbibitionsdrucke unterworfen wird. Wenn jedoch der gereizte Muskel Anfangs festgehalten und erst in einem günstigen Zeitpunkte losgelassen wird, so daß bei der Zuckung eine ganz bedeutende Contraktionsgeschwindigkeit und Wurfhöhe erzielt wird, oder wenn auf anderem Wege eine sehr bedeutende Zuckungsgeschwindigkeit erreicht wird, so ist die bei der Zuckung eintretende anfängliche Abnahme des f. Imbibitionsdruckes eine so plötzliche und ausgiebige, daß ihr Einfluß auf die Safterregbarkeit und Wärmebildung der überwiegende ist.

Hiernach stellt sich der von Fick festgestellte, dem obigen Heidenhainschen Gesetze anscheinend widersprechende, Satz, daß die Wärmebildung bei den sehr ausgiebigen Wurfzuckungen größer ist als bei der entsprechenden isometrischen Zuckung, als eine schöne Bestätigung unserer theoretischen Anschauungen heraus. Da die Zuckungsgeschwindigkeit umso größer und die Zuckungsdauer umso geringer ist, je höher die vorhandene Temperatur ist, so erklärt sich aus demselben Gesichtspunkte auch leicht der andere von Fick aufgestellte Satz, daß bei wachsender Temperatur der Unterschied zwischen den bei der isometrischen und bei der isotonischen Zuckung erzeugten Wärmemengen sich immer mehr ausgleicht. Uebrigens läßt sich auch bereits an gewissen Versuchsresultaten Heidenhains der Miteinfluß der anfänglichen Herabsetzung des f. Imbibitionsdruckes auf die Wärmebildung nachweisen.

6) Auch beim Ruhezustande des lebenden oder überlebenden Muskels findet eine beständige Wärmebildung in demselben statt,

die im Gegensatze zu der von einem Reize hervorgerufenen exogenen Wärmebildung kurz als die endogene Wärmebildung bezeichnet werden mag. Selbstverständlich ist diese endogene Wärmebildung in ihrer Lebhaftigkeit nach ganz denselben Gesetzen wie die exogene Wärmebildung von dem vorhandenen Contraktions- oder Dehnungszustande des Muskels abhängig.

Hieraus erklärt es sich, daß Blix u. A. bei der Dehnung des ruhenden Muskels eine, von dem Ermüdungszustande desselben in ihrer Ausgiebigkeit abhängige, Zunahme der Muskeltemperatur beobachteten, hingegen bei der Entlastung eine Abnahme derselben constatirten. Hieraus erklärt sich ferner auch die Abkühlung des Muskels, welche Blix und Danilewsky beobachteten, als sie denselben im belasteten Zustande sich contrahiren und im unbelasteten Zustande sich wieder verlängern ließen. Bei diesen Versuchen wurde eben die anfängliche exogene Temperaturerhöhung des Muskels in ihrem Einflusse auf die Galvanometernadel dadurch übertönt, daß auch im späteren Verlaufe des Erschlaffungsstadiums die endogene Wärmebildung ihren vor Beginn der Zuckung vorhanden gewesenen Anfangswerth nicht annähernd wiedererreichte, weil die nur langsam sich vollziehende Erschlaffung überhaupt nur bis zu der natürlichen Ruhelänge des Muskels, nicht aber bis zu der bei der anfänglichen Belastung vorhanden gewesenen Länge desselben sich erstreckte.

7) Wird eine Muskelfaser der Verdunstung ausgesetzt, so muß der in ihr bestehende Saftdruck abnehmen, mithin nach dem obigen Grundgesetze die Erregbarkeit zunehmen. Hieraus erklärt sich die Beobachtung von Blix, daß der Muskel bei der Reizung oder bei der bloßen Dehnung im Ruhezustande eine größere Zunahme seiner Temperatur erkennen läßt, wenn er von trockener Luft umgeben ist, als dann, wenn er sich in einer feuchten Atmosphäre befindet. Der äußeren Erscheinungsweise dieser durch Austrocknung entstehenden Zunahme der Muskelerregbarkeit wird natürlich schon dadurch eine gewisse Grenze gesetzt, daß, wie Biedermann hervorgehoben hat, bei weit fortgeschrittener Austrocknung die Rinde des Muskels zu steif und unnachgiebig ist.

§ 4. Contraktionstheorie und Erregungstheorie.

Unter der Contraktilität des Muskels verstehen wir die Fähigkeit desselben, auf Grund eines in ihm entstehenden wärmebildenden Erregungsvorganges sich zu verkürzen oder, im Falle der Verhinderung der Verkürzung, eine entsprechende Verkürzungstendenz oder Spannung zu bekunden. Diese Fähigkeit will unsere Contraktionstheorie erklären, indem sie alle aus den eigenthümlichen Bedingungen dieses Contraktilitätsvermögens entspringenden einzelnen Gesetze und charakteristischen Erscheinungen der mechanischen Muskelthätigkeit aus den gefaßten Grundanschauungen abzuleiten versucht. Nun gibt es aber eine Reihe eigenthümlicher Gesetze und Erscheinungen der mechanischen Muskelthätigkeit, deren Besonderheit durch die Art und Weise bedingt ist, wie der Erregungsproceß im Nerven oder Muskel durch die verschiedenen Reizarten ausgelöst wird, und wie die Erregbarkeit von Nerv und Muskel durch die Einwirkung eines oder mehrerer Reize für einen oder mehrere kurz darauf folgende Reize modificirt wird. Die Erklärung derartiger Gesetze und Erscheinungen liegt natürlich nicht unserer Contraktionstheorie ob, sondern gehört vielmehr in den Bereich einer Erregungstheorie. Insbesondere also haben wir z. B. nicht bis auf ihren letzten Grund zu verfolgen diejenigen bei der Summationszuckung und beim Tetanus auftretenden Erscheinungen, die durch die Erregbarkeitsmodificationen bedingt sind, welche die Reize je nach ihrer Stärke, Richtung, Beschaffenheit und zeitlichem Verlaufe für die ihnen sehr bald nachfolgenden Reize hinterlassen. Nun erhebt sich aber hier ein Bedenken. Wenn wir es ablehnen, bei Darstellung unserer Contraktionstheorie eine volle Erklärung eines bestimmten Gesetzes oder charakteristischen Verhaltens der mechanischen Muskelthätigkeit zu geben, weil dasselbe in seiner Besonderheit durch die Art und Weise bedingt sei, wie Reize der betreffenden Art Erregung bewirken oder die Erregbarkeit modificiren, was schützt uns dann gegen den Verdacht, daß wir in solchem Falle ein willkürliches Ausfluchtsverfahren anwenden und einfach aus Verlegenheit der Erregungstheorie zuschieben, was unsere Contraktionstheorie nicht zu erklären vermag? In dieser Beziehung besteht nun für unsere Contraktionstheorie folgendes Controlprincip:

Wenn eine unter bestimmten Umständen auftretende Eigenthümlichkeit des mechanischen Muskelverhaltens in den Gesetzen, nach denen die Reize Erregung hervorrufen und die Erregbarkeit modificiren, ihren Grund hat, so muß sich diese Eigenthümlichkeit auch bereits in der Wärmebildung, welche unter den betreffenden Umständen im Muskel stattfindet, in entsprechender Weise kundgeben. Wir können daher eine unter bestimmten Umständen vorhandene Eigenthümlichkeit der mechanischen Erscheinungsweise des Muskels mit Sicherheit als eine nicht von unserer Contraktionstheorie, sondern von der Erregungstheorie zu erklärende Eigenthümlichkeit bezeichnen, wenn die Resultate vorliegender myothermischer Versuche die Wärmebildung des Muskels unter den betreffenden Umständen wirklich als eine solche erkennen lassen, wie sie unserer Contraktionstheorie gemäß sein muß, wenn jene Eigenthümlichkeit des mechanischen Muskelverhaltens wirklich in den Gesetzen ihren Grund hat, nach denen die Reize erregend wirken und die Erregbarkeit modificiren. Auch die Berücksichtigung des elektromotorischen Verhaltens des Nerven und Muskels kann bei vorsichtiger Behandlung unter Umständen zur Entscheidung darüber dienen, ob eine Besonderheit des mechanischen Verhaltens des Muskels mit Recht auf die letztgenannten Gesetze zurückgeführt wird oder nicht. Wir geben im Nachstehenden einige Anwendungen des hier dargelegten Controlprincipes.

Die Thatsache, daß die Zuckungshöhe bei wachsender Reizintensität im Allgemeinen nur bis zu einem gewissen Grenzwerthe wächst, über den sie bei weiter fortgesetzter Erhöhung der Reizstärke nicht hinausgeht, obwohl der Muskel an und für sich sehr wohl einer noch größeren Contraktion fähig ist, erklären wir für eine Thatsache, die in der Art und Weise, wie die betreffenden Reize erregend wirken, ihren Grund hat. Der Beweis für die Richtigkeit dieser Auffassung liegt darin, daß, wie Nawalichin festgestellt hat, bei wachsendem Reize Hubhöhe und Wärmebildung im Muskel gleichzeitig ihr Maximum erreichen.

Bei Darstellung unserer Contraktionstheorie brauchen wir auf die nähere Entstehungsweise der übermaximalen Zuckungen nicht einzugehen, weil wohl Niemand bezweifelt, daß diese Zuckungen in den Gesetzen der Erregbarkeit, aber nicht der Contraktilität, ihren Grund haben. Bestände ein solcher Zweifel, so würden wir uns einfach darauf berufen können, daß nach Nawalichin's Versuchen das Auftreten übermaximaler Zuckungen stets an das Auftreten übermaximaler Wärmebildungen geknüpft ist.

Bei der Summationszuckung, die 2 maximalen Reizen entspricht, zeigt sich bekanntlich der zweite Reiz ganz wirkungslos, wenn das Intervall einen gewissen, sehr geringen Schwellenwerth nicht übersteigt. Wird das Intervall über diesen Schwellenwerth hinaus vergrößert, so läßt den Versuchsresultaten Sewalls gemäß die Summationszuckung zunächst eine mit dem Intervalle wachsende Ausgiebigkeit erkennen. Die nähere Erklärung dieses Verhaltens ist unseres Erachtens Sache der Erregungstheorie. Dasselbe hat seinen Grund darin, daß der erste Reiz für den zweiten eine negative (d. h. die erregende Wirkung des zweiten Reizes hemmende) Erregbarkeitsmodification hinterläßt, die im Verlaufe der Zeit schnell abklingt und daher umso schwächer sich herausstellt, je größer das Intervall genommen wird. Die Richtigkeit dieser Auffassung ergibt sich unter Anderem aus den Resultaten, welche Nawalichin bei seinen Versuchen über die Wärmebildung erhielt, die bei einer 2 maximalen Reizen ertsprechenden Summationszuckung eintritt. Solange der zweite Reiz für die Zuckungshöhe wirkungslos war, zeigte er sich auch für die Wärbildung wirkungslos. Und als bei Vergrößerung des Intervalles die Zuckungshöhe zunahm, stieg auch die Wärmebildung an.

Die verschiedenen Formen des abstürzenden und verkürzten Tetanus bis zur sog. Anfangszuckung hin sehen wir gleichfalls als Erscheinungen an, deren Besonderheit durch die Gesetze der negativen Erregbarkeitsmodification bedingt ist. Zur Bestätigung dieser Ansicht dienen die Resultate der Untersuchungen, welche Schönlein über das beim Auftreten dieser anomalen Tetanusformen stattfindende thermische und elektromotorische Verhalten des Muskels anstellte, auch die Thatsache, daß die sog. Anfangszuckung nicht von secundärem Tetanus, sondern nur von einer secundären Anfangszuckung begleitet ist.

Wird bei der Tetanisirung die Reizfrequenz von demjenigen Werthe aus, der zur Herstellung eines vollständigen Tetanus eben genügt, allmählich erhöht, so wächst bekanntlich die Verkürzungsgröße bis zu gewisser Grenze hin und nimmt dann bei weiter zunehmender Reizfrequenz wieder ab. Dieses Gesetz erklären wir in folgender Weise. Bei wachsender Reizfrequenz kommen für die Verkürzungshöhe zwei Umstände in Betracht. Erstens wächst die Zahl der elektrischen Ladungen, welche die Disdiaklasten in der Zeiteinheit erfahren. Dies muß an und für sich nothwendig im Sinne einer Zunahme der Contraktionshöhe wirken, weil dadurch der Betrag verringert wird, um welchen der Contraktionsgrad in dem Zeitintervalle, das zwischen 2 Reizstöße fällt, herabsinkt. Zweitens nimmt bei wachsender Reizfrequenz die Ausgiebigkeit der Erwärmung und der elektrischen Ladung ab, welche jeder einzelne Reizstoß an den Disdiaklasten bewirkt. Und zwar hat dieser der Contraktionshöhe ungünstige Einfluß der Erhöhung der Reizfrequenz seinen Grund hauptsächlich in der negativen Erregbarkeitsmodification, die sich nach dem oben Bemerkten für die Wirkungen der einzelnen Reize umso stärker geltend machen muß, je kürzer das Intervall ist. Außerdem kommt hier aber auch noch in Betracht, daß bei zunehmender Temperatur des Faserinneren auch die Wärmemenge wächst, welche dasselbe fortwährend an seine Umgebung abgeben muß, und daß bei wachsendem Verkürzungsgrade des Muskels die gebundene Saftmenge zunimmt und mithin die Erregbarkeit desselben abnimmt. Von den beiden Einflüssen nun, welche nach dem hier Bemerkten die Erhöhung der Reizfrequenz auf die Contraktionshöhe ausübt, überwiegt Anfangs der erstere, welcher im Sinne einer Steigerung der Contraktionshöhe wirkt. Von einem gewissen Werthe der Reizfrequenz ab überwiegt jedoch der zweite Einfluß (die Verminderung der Wirkung jedes einzelnen Reizstoßes), und so kommt die Gültigkeit des obigen Gesetzes zu Stande. Zur Bestätigung dieser Auffassung, nach welcher jenes Gesetz wesentlich durch das Verhalten der negativen Erregbarkeitsmodification bedingt ist, dienen die Versuche von Heidenhain, Fick und Schönlein, nach denen bei zunehmender Reizfrequenz die Wärmebildung und auch die negative Stromesschwankung sich ganz entsprechend verhält wie die Contraktionshöhe. —

Die von Fick festgestellte Thatsache, daß durch elektrische Tetanisirung niemals derselbe Spannungsgrad des Muskels zu erreichen ist wie bei willkürlicher Erregung, erklärt sich daraus, daß bei der willkürlichen Erregung die der elektrischen Reizung eigenthümliche negative Erregbarkeitsmodification, die jeder einzelne Reizstoß für den nachfolgenden bewirkt oder verstärkt, ganz wegfällt.

Die Thatsache, daß die negative Stromesschwankung dem Auftreten der Contraktionswelle vorhergeht, steht mit unserer Theorie in vollem Einklange. Denn der Beginn des wärmebildenden Erregungsprocesses kann nicht mit dem Merkbarwerden der Contraktion zusammenfallen, die durch die, von dieser exogenen Wärmebildung bedingte, elektrische Ladung der Disdiaklasten hervorgerufen wird.

Natürlich ist es nicht möglich, bei eingehender Durcharbeitung und Darstellung der Contraktionstheorie sich solcher Betrachtungen, die eigentlich in den Bereich einer Erregungstheorie fallen, völlig zu enthalten. Aber auch ganz an und für sich muß unsere Contraktionstheorie dahin wirken, daß die erregungstheoretischen Anschauungen und Bestrebungen in den richtigen Bahnen sich concentriren und fortschreiten. Denn bisher hat man vielfach Eigenthümlichkeiten und Gesetze der am Muskel auftretenden Erfolge, die in dem Wesen der Erregbarkeit von Nerv und Muskel ihren Grund haben, auf die specifische Contraktilität des Muskels bezogen und umgekehrt Gesetze und Erscheinungen, welche durch die besonderen Vorrichtungen bedingt sind, mittels deren im Muskel bei Auftreten des wärmebildenden Erregungsprocesses Contraktion entsteht, als Aeußerungen des eigenthümlichen

Wesens der Erregbarkeit angesehen. Es ist kein Wunder, daß man bei derartigen Verwechselungen weder hinsichtlich des Wesens der Contraktilität noch hinsichtlich desjenigen der Erregbarkeit so tief eindrang, wie es eigentlich der Summe aufgewandten Forschungsgeistes entsprach. Wie unsere ganze Contraktionstheorie dadurch entstanden ist, daß gewisse psychophysische Grundvoraussetzungen und darauf fußende erregungstheoretische Anschauungen zu der Ueberzeugung führten, es müßten die in der Physiologie herrschenden, wesentlich mit auf die Erscheinungen des gereizten Nerv-Muskelpräparates sich stützenden Anschauungen und Lehren über die Erregbarkeit außer durch andere Gründe auch durch Verwechselungen der soeben angedeuteten Art nicht ganz in die richtigen Bahnen gerathen sein, so wird diese Contraktionstheorie künftighin das Instrument sein, mittels dessen wir die Erscheinungen des gereizten Muskels mit Sicherheit zum Eindringen in das Wesen und die Gesetzmäßigkeit der Erregbarkeit mitbenutzen können.

§ 5. Die Ermüdungs- und Erholungserscheinungen des Muskels.

Bei Erklärung dieser Erscheinungen und ihrer Gesetze kommt hauptsächlich Folgendes in Betracht:

1) Durch jede Erregung wird das erregbare Material oder die Menge der erregbaren Moleküle des Muskelsaftes, durch deren Spaltung die Wärmebildung des Muskels zu Stande kommt, nach Maßgabe der Intensität des Erregungsprocesses verringert. Dies dient natürlich dazu, die Wirkungen nachfolgender Reize zu schwächen.

2) Aus dem oben aufgestellten myothermischen Grundgesetze folgt, daß die verschiedenen Partien des Muskelsaftes eine verschiedene Erregbarkeit besitzen. Es besitzt nicht blos der gebundene Saft eine geringere Erregbarkeit als der freie, sondern auch diejenigen Schichten des freien Saftes, welche unter dem Einflusse starker Adhäsionskräfte fester Faserbestandtheile und mithin unter einem starken Drucke stehen, sind weniger erregbar als die übrigen freien Saftschichten. Wir unterscheiden hiernach zwischen *reizbareren und weniger reizbaren Schichten des Muskelsaftes*. Zwischen diesen verschiedenen Saftschichten besteht ein fortwährender Austausch erregbarer Moleküle. Falls jedoch der Muskel seit längerer Zeit ruht, so besteht annähernd ein Gleichgewichtszustand in diesem Austausche erregbarer Moleküle, d. h. jede Schicht gibt in der Zeiteinheit annähernd ebenso viele erregbare Moleküle an ihre Nachbarschichten ab, als sie von denselben

zurückerhält. Dieser Gleichgewichtszustand, bei welchem übrigens die verschiedenen Saftschichten keineswegs den gleichen Procentgehalt an erregbaren Molekülen zu besitzen brauchen, möge kurz als der Zustand der normalen Vertheilung des erregbaren Materiales bezeichnet werden. Wirkt nun ein Reiz auf den Muskel ein, so trifft dieser vorwiegend die reizbareren Saftschichten. Hierdurch wird die normale Vertheilung des erregbaren Materiales gestört und es tritt ein Uebergang erregbarer Moleküle aus den weniger reizbaren in die reizbareren Saftschichten ein, ein Vorgang, welcher am besten kurz als die ausgleichende Diffusion bezeichnet wird. Auf dieser ausgleichenden Diffusion beruht in der Hauptsache, wenn auch nicht ganz ausschließlich, die Wiedererhöhung der Erregbarkeit, welche der ermüdete blutlose Muskel durch eine Erholungspause erfährt. Beim blutdurchströmten Muskel kommt als Ursache der Erholung natürlich noch der Einfluß des Blutstromes hinzu. Die Zweckmäßigkeit der hier angedeuteten Einrichtung, nach welcher die weniger reizbaren Saftschichten mehr oder weniger die Funktion im Bedarfsfalle schnell aushelfender Reservestoffbehälter haben, liegt auf der Hand.

Aus der ausgleichenden Diffusion erklären sich insbesondere die Gesetze, welche den Einfluß der Ruhepause auf die Ermüdung und Erholung des blutleeren Muskels betreffen. Da die Wirksamkeit der ausgleichenden Diffusion während eines Reizintervalles umso größer sein muß, je länger das Intervall ist, und in je höherem Grade der erregbare Procentgehalt der reizbareren Saftschichten durch die vorherige Reizung in Vergleich zu demjenigen Werthe, den er bei normaler Vertheilung des noch vorhandenen erregbaren Materiales besitzen würde, herabgesetzt ist, so begreift sich leicht, daß nach den Versuchen von Kronecker u. A. die Differenz der auf einander folgenden Zuckungshöhen einer Zuckungsreihe umso geringer ist, je länger das Reizintervall ist, daß nach den Versuchen desselben Forschers eine und dieselbe längere Ruhepause einen geringeren erhöhenden Einfluß auf die Zuckungshöhe ausübt, wenn sie im Anfangstheile einer Zuckungsreihe eingeschoben wird, als dann, wenn sie erst nach längerer Ermüdung eingeschoben wird, u. A. m.

3) Von fundamentaler Bedeutung ist der Umstand, daß die Ermüdung durch die dabei stattfindende Ansammlung von Erregungsprodukten (d. h. der chemischen Produkte des Erregungsprocesses) im Muskelsaft dazu dient, die Zähigkeit dieses Saftes zu erhöhen. Diese durch die Ermüdung bewirkte Zunahme der Saftzähigkeit hat wie jede andere,

irgendwie zu Stande kommende, Consistenzzunahme des Muskelsaftes folgende Wirkungen:

a) Sie erhöht selbstverständlich den Reibungswiderstand, den der Muskelsaft jeder Formänderung des Muskels entgegenstellt, insbesondere den Erschlaffungswiderstand des überzählig gebundenen Saftes.

b) Sie verringert die Geschwindigkeit, mit welcher sich der Erregungsproceß in einem gegebenen Theile der Muskelfaser abspielt.

c) Sie vermindert die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Erregungsprocesses.

d) Sie schwächt die Erregbarkeit des Muskelsaftes, insbesondere gegenüber kurzdauernden elektrischen Strömen.

e) Sie vergrößert natürlich auch das Decrement, welches die Erregung bei ihrer Fortpflanzung in der Muskelfaser erfährt.

f) Sie verlangsamt selbstverständlicher Weise das Abklingen der von einem Reize hinterlassenen negativen Erregbarkeitsmodification und hat zu Folge, daß bei einer gegebenen tetanisirenden Reizfolge von Reiz zu Reiz eine schnellere Summation dieser Erregbarkeitsmodification stattfindet.

Eine siebente und achte Wirkung der Erhöhung der Saftzähigkeit kommen im Nachstehenden unter 4) und 5) zur Sprache[1]).

---

1) Die Unterschiede der Saftzähigkeit sind überhaupt für die erregbaren Organe von durchgreifender Bedeutung. Wie durch Ermüdung erleidet der Muskelsaft auch durch Absterben Aenderungen seiner Consistenz. Der funktionelle Unterschied der sich schnell verkürzenden weißen und der sich langsam verkürzenden rothen Mukeln beruht darauf, daß der Muskelsaft in den ersteren eine geringere Zähigkeit besitzt als in den letzteren. Nach den Anschauungen der Physik versteht es sich von selbst, daß auch durch Kälte die Zähigkeit des Muskelsaftes gesteigert wird. Demgemäß übt in der That die Kälte die nach Obigem aus einer Zunahme der Saftzähigkeit entspringenden Wirkungen auf den Zuckungsverlauf, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erregung u. s. w. aus. Durch Einwirkung gewisser chemischer Substanzen kann die Saftzähigkeit gleichfalls erhöht werden. Natürlich muß die Geschwindigkeit, mit welcher bei Durchleitung eines elektrischen Stromes durch den Muskel die elektrische Polarisation sich entwickelt und nach Unterbrechung des Stromes die Depolarisation sich vollzieht, gleichfalls bei wachsender Saftzähigkeit abnehmen.

Auch zwischen dem Muskelsafte und dem Nervensafte besteht ein Zähigkeitsunterschied, der dadurch bedingt ist, daß der Muskelsaft bei seiner Erregung reichlich Wärme bilden soll. Entweder sind also die erregbaren Moleküle des Muskelsaftes von anderer Art und zwar von viel höherer chemischer Spannkraft und von einer die Saftzähigkeit in höherem Maße vergrößernden Natur als diejenigen des Nervensaftes, oder es sind den erregbaren Molekülen, welche der Muskelsaft mit dem Nervensaft gemeinsam besitzt, innerhalb des ersteren behufs

Aus dem unter b) Angeführten erklärt es sich, daß die Ermüdung nicht blos das absteigende, sondern auch das ansteigende Zuckungsstadium verlängert, wenn auch das erstere in bedeutend höherem Grade.

Aus der Verlangsamung, welche der Ablauf der Erregung durch die Ermüdung erfährt, erklärt es sich, daß nach Schönlein auch die negative Schwankung des Muskelstromes durch die Ermüdung verlängert wird.

Die durch Ermüdung bewirkte Vergrößerung der Dauer der Erregung und der Dauer der elektrischen Ladung der Disdiaklasten hat zu Folge, daß sich die Nachquellung bei der Zuckung länger bethätigen und stärker geltend machen kann. Hieraus erklärt es sich, daß, wie Heidenhain und Nawalichin gefunden haben, bei der Ermüdung die Wärmebildung zuweilen eine Abnahme erkennen läßt, während die Hubhöhe sich nicht verringert. Zweckmäßiger Weise wird eben bei der Ermüdung die Abnahme der Wärmebildung für die mechanische Leistung dadurch verdeckt oder weniger nachtheilig gemacht, daß die Erregungsdauer verlängert und hierdurch die Mitwirkung der Nachquellung stärker herangezogen wird. Die Ermüdung trifft zunächst weniger die Ausgiebigkeit als die Schnelligkeit der Contraktionen, und je ermüdeter der Muskel ist, desto sparsamer arbeitet er mit Hilfe einer stärkeren Ausnutzung der Nachquellung. Bei Erklärung des hier er-

---

Erzielung einer ausgiebigen Wärmebildung noch andere erregbare Moleküle beigemischt, welche die höhere Zähigkeit des Muskelsaftes bedingen. Es ist hier nicht der Ort, zwischen diesen beiden Annahmen zu entscheiden. Als erregbare Organe zeigen Nerv und Muskel also nur Unterschiede (der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erregung, der Erregbarkeit gegen kurz dauernde elektrische Ströme u. dergl.), welche sich darauf zurückführen lassen, daß der Saft des Muskels reichlich Wärme bilden soll und die durch diesen Zweck erforderte Verschiedenheit in der Zusammensetzung des Muskelsaftes und des Nervensaftes eine größere Zähigkeit des ersteren bedingt. Insofern als der Muskel nicht blos erregbares, sondern auch contraktiles Organ ist, das auf Grund seiner Wärmebildung seine Form zu ändern bestrebt ist, zeigt er nun außerdem noch die Disdiaklasten und den eigenthümlichen Aufbau des Fasergerüstes.

Nach dem Bisherigen bedarf es nicht erst der Erwähnung, daß, wenn wir vom Safte des Muskels oder Nerven sprechen, man sich unter diesem Safte nicht eine Substanz vorzustellen hat, welche den tropfbar flüssigen Aggregatzustand stets in höchster Vollkommenheit besitzt. Man vergleiche hier auch die sog. Gallertsubstanz der elektrischen Platte. Im Gebiete der Biophysik hat man es hauptsächlich mit den Uebergangsstufen zu thun, welche den flüssigen mit dem festen (oder richtiger: mit dem annähernd festen) Aggregatzustande verbinden. Schon die Fragestellung: fest oder flüssig? läßt in diesem Gebiete unter Umständen die volle Einsicht vermissen.

wähnten Einflusses der Ermüdung auf das Verhältniß zwischen Wärmebildung und Hubhöhe kommt übrigens auch noch der Umstand in Betracht, daß die von Heidenhain u. A. beobachteten Zuckungswärmen sich thatsächlich aus 2 Componenten zusammensetzten, nämlich erstens aus der anfänglichen exogenen Steigerung der Wärmebildung und zweitens aus der im Erschlaffungsstadium sich einstellenden Verringerung der nur noch endogenen Wärmebildung. Diese letztere, negative, Componente mußte bei fortschreitender Ermüdung in Folge der damit verbundenen Verlangsamung der Erschlaffung ihrem absoluten Werthe nach zunehmen. Die beobachteten Zuckungswärmen geben daher den Gang der exogenen Wärmebildung bei der Ermüdung nicht richtig wieder, sondern lassen den herabsetzenden Einfluß der Ermüdung auf dieselbe zu groß erscheinen.

Da nach dem oben (auf S. 147 f.) Bemerkten der Unterschied, der zwischen den (im Sinne von von Frey verstandenen) Zuckungshöhen des unterstützten und des frei belasteten Muskels besteht, darin seinen Grund hat, daß die elektrische Ladung der Disdiaklasten zu kurz dauert, als daß sie bei der Zuckung des frei belasteten Muskels zur Herstellung höherer Contraktionsgrade gelangen könnte, so versteht es sich in Hinblick auf den hier erwähnten Einfluß der Ermüdung auf die Dauer der Erregung und der elektrischen Ladung der Disdiaklasten ganz von selbst, daß bei fortschreitender Ermüdung jener Unterschied der Zuckungshöhen des unterstützten und des frei belasteten Muskels sich verringert, wie dies in der That auch von von Frey gefunden worden ist. Bei hoher Ermüdung kann sogar der Fall eintreten, daß die Zuckungshöhe des frei belasteten Muskels die größere wird; was sich daraus erklärt, daß bei Einwirkung des Reizes die freie Saftmenge im frei belasteten Muskel größer ist als im unterstützten Muskel und mithin die Wärmebildung und elektrische Ladung der Disdiaklasten im ersteren reichlicher ausfällt. Wenn ferner von Frey auf Grund gewisser Resultate, die er bei Vergleich der Zuckungshöhen des unterstützten und des frei belasteten Muskels erhielt, den allen unseren sonstigen Anschauungen und Resultaten widersprechenden Satz aufstellt, daß „die Ueberlastungszuckungen den Muskel viel rascher ermüden als die isotonischen Zuckungen“, so erklärt sich bei näherer Betrachtung der dieser Behauptung zu Grunde liegende Thatbestand sehr einfach daraus, daß nach unseren obigen Anschauungen der die sonstigen Wirkungen der Ermüdung theilweise compensirende, günstige Einfluß, den die durch die Ermüdung bewirkte Verlängerung der Erregungsdauer auf die Zuckungshöhe ausübt, der Zuckung des frei belasteten Muskels in viel höherem Grade zu Gute kommen muß als der Zuckung des unterstützten Muskels und für einen hoch unterstützten Muskel überhaupt nicht mehr besteht.

Die oben unter d) erwähnte, durch den Einfluß der Ermüdung auf die Saftzähigkeit bedingte, Herabsetzung der Muskelerregbarkeit, welche neben der durch die Abnahme des erregbaren Materiales bewirkten Schwächung der Erregbarkeit nebenher geht, erklärt es, daß die Durchleitung gewisser Flüssigkeiten, welche kein Nährmaterial für den Muskel enthalten, dennoch einen erholenden Einfluß auf denselben auszuüben vermag. Es findet eben unter solchen Umständen eine Abfuhr von Erregungsprodukten aus dem Muskel und Verringerung der Saftzähigkeit statt.

Aus dem oben unter f) aufgestellten Satze erklärt sich die von Sewall festgestellte Thatsache, daß der Schwellenwerth, den bei der maximalen Doppelreizung die Länge des Reizintervalles überschreiten muß, damit der zweite Reiz wirksam werde, durch Ermüdung vergrößert wird. Aus ebendemselben Satze erklärt sich ferner der Umstand, daß die verschiedenen Formen des abstürzenden und des verkürzten Tetanus nur nach eingetretener Ermüdung beobachtet worden sind und zwar in umso ausgeprägterem Maße, je weiter fortgeschritten die Ermüdung war.

4) Der erholende Einfluß, den der Blutstrom auf den Muskel ausübt, beruht erstens darauf, daß der Blutstrom die angehäuften Erregungsprodukte aus dem Muskelsafte abführt und hierdurch die Zähigkeit desselben vermindert und die Erregbarkeit erhöht, und zweitens darauf, daß der Blutstrom dem Muskel Ersatzstoffe zur Bildung neuen erregbaren Materiales zuführt. Die Lebhaftigkeit, mit welcher der Stoffaustausch zwischen Blutstrom und Muskelinhalt stattfindet, muß unter sonst gleichen Umständen umso größer sein, je geringer die Menge des im Muskel vorhandenen erregbaren Materiales ist, je geringer der Gehalt des Muskelsaftes an zur Bildung erregbaren Materiales dienlichen Ersatzstoffen in Vergleich zu dem entsprechenden Gehalte des Blutstromes ist, und je mehr der Gehalt des Muskels an Erregungsprodukten über den entsprechenden Gehalt des Blutes überwiegt. Sie muß aber außerdem (abgesehen von der Geschwindigkeit des Blutstromes u. dergl. m.) auch noch von der Zähigkeit des Muskelsaftes abhängig sein, und zwar muß eine Zunahme der Saftzähigkeit an und für sich herabsetzend auf den Stoffaustausch zwischen Blut und Muskelsaft wirken. Wird nun der Muskel unter künstlichen Bedingungen (bei theilweiser Fernhaltung des Blutstromes) sehr stark ermüdet und eine sehr große Zähigkeitszunahme des Muskelsaftes bewirkt, so

kann der herabsetzende Einfluß dieser Zähigkeitszunahme auf den Stoffaustausch zwischen Blut und Muskel das Uebergewicht bekommen. Hieraus erklären sich die von Meade Smith und namentlich von Lukjanow beobachteten Erscheinungen der „Erholungsmüdigkeit“ des Muskels.

Es sind von verschiedenen Forschern Fälle beobachtet worden, wo die Herstellung einer Anämie des Muskels zunächst eine Zunahme und die Herstellung einer Hyperämie desselben zunächst eine Abnahme der Muskelerregbarkeit zu Folge hatte. Wie eingehend erörtert werden wird, erklären sich diese Fälle nach dem myothermischen Grundgesetze ganz einfach daraus, daß bei eintretender Anämie oder Hyperämie des Muskels der Druck, unter dem der Muskelsaft steht, eine Abnahme, bez. Zunahme, erfahren muß.

5) Das myothermische Ermüdungsgesetz: Der Zuwuchs, den die Muskelerregbarkeit bei einer bestimmten Vermehrung der freien und Verminderung der gebundenen Saftmenge erfährt, ist umso geringer, je mehr ermüdet der Muskel ist.

Auf dieses Gesetz weisen nicht blos die Resultate der myothermischen Versuche Heidenhains hin, nach denen z. B. der Belastungswerth, bei welchem ein gegebener Reiz die größte Zuckungswärme ergibt, bei fortschreitender Ermüdung immer geringer wird, sondern hierher gehört auch die von Fick festgestellte Thatsache, daß die Ermüdung ausgleichend auf die Differenz der bei isometrischem und isotonischem Zucken auftretenden Wärmebildungen wirkt, und eine beträchtliche Menge anderweiter Thatsachen und Gesetze.

Die Gültigkeit dieses myothermischen Ermüdungsgesetzes beruht, wie späterhin wahrscheinlich gemacht werden soll, gleichfalls auf der bei der Ermüdung stattfindenden Zunahme der Saftzähigkeit und dem Einflusse, den dieselbe auf die Erregbarkeitsverhältnisse des Muskelsaftes ausübt.

6) Die Erscheinungen, welche man theils mit dem Namen des Verkürzungsrückstandes theils mit demjenigen der Contraktur theils mit beiden Namen unterschiedslos bezeichnet hat, haben einen doppelten Grund. Sie beruhen erstens auf der Unvollkommenheit der Elasticität der festen Muskelbestandtheile, insbesondere der Querbälkchen, und auf den durch diese Unvollkommenheit bedingten Modificationen des inneren Contraktionswiderstandes. Zweitens haben sie ihren Grund in der Zunahme, welche bei einer durch Ermüdung oder andere Ursachen bewirkten Erhöhung der Saftzähigkeit der Widerstand erfährt, den der Muskelsaft den Form-

änderungen des Muskels entgegenstellt, insbesondere der überzählig gebundene Muskelsaft bei der Erschlaffung leistet. Wie seiner Zeit näher gezeigt werden wird, gehorchen diese beiden Ursachen des Verkürzungsrückstandes hinsichtlich ihres Auftretens, Schwindens und hinsichtlich ihrer Wirkungsweise nicht ganz den gleichen Gesetzen. Häufig sind beide Ursachen gleichzeitig im Spiele. Hinsichtlich der ersteren Ursache ist zu berücksichtigen, daß alle weichen Körper die Erscheinungen der Unvollkommenheit der Elasticität in hohem Maße zeigen. Dasselbe muß daher auch von den Bestandtheilen des Muskels, insbesondere den stark durchfeuchteten Querbälkchen, gelten.

7) Die Erscheinung der Treppe hat sehr verschiedene Gründe. Beim blutdurchströmten Muskel kommt vor Allem die Förderung in Betracht, welche die Blutcirculation in dem Muskel durch Reizung desselben erfährt. Wird also ein blutdurchströmter Muskel in constanten Intervallen von einem und demselben Reize erregt, so wird durch die Reizung der die Muskelerregbarkeit fördernde Einfluß des Blntstromes erhöht, und es kann demzufolge die Muskelerregbarkeit und die durch den Reiz bewirkte Wärmebildung so lange ansteigen, bis der Verlust, den die erstere innerhalb eines Reizintervalles durch die Erregung erfährt, der Zunahme gleich geworden ist, welche dieselbe innerhalb der gleichen Zeit durch den gesteigerten Blutstrom erfährt. Dieser Gesichtspunkt kommt z. B. für die am blutdurchströmten Muskel angestellten Versuche von Tiegel und von Rossbach und Harteneck, bei denen die Treppe auftrat, in Betracht.

Ein zweiter, besonderer, Gesichtspunkt kommt bei solchen Versuchen in Betracht, bei denen ein überlasteter Muskel mit kurzen Intervallen durch einen und denselben Reiz zu einer Reihe von Zuckungen veranlaßt wird. Wird ein belasteter Muskel durch in kurzen Intervallen auf einander folgende Reizstöße erregt, so ist bekanntlich eine zunächst anwachsende Contraktur zu beobachten. An einem überlasteten Muskel kann eine Contraktur selbstverständlich nicht leicht zur Beobachtung kommen. Die Ursachen der Contraktur müssen aber ebenso wie an dem belasteten auch an dem überlasteten Muskel wirksam sein. Bei Ausführung einer Zuckungsreihe der angegebenen Art wird demnach auch beim überlasteten Muskel eine Contraktur der contraktilen Muskeltheile sich ausbilden. Die Ruhelänge des Muskels aber, von welcher die jedesmalige Zuckung ausgeht, bleibt in Folge der Ueberlastung anscheinend unverändert, indem jene Contraktur der contraktilen Muskeltheile von einer entsprechenden Dehnung derjenigen nicht-contraktilen Muskeltheile (der sehnigen Faserenden u. dergl.) und Apparattheile (Faden u. dergl.) begleitet ist, welche die contraktilen Muskeltheile und die vom Muskel zu bewegende Last mit einander verbinden. Dieser Dehnung entsprechend wird auf die Last eine Zugkraft seitens des Muskels ausgeübt, eine Kraft, die allerdings zu einer wirklichen Erhebung der Last über ihre Unterlage nicht ausreicht, aber dazu dient, den Werth zu verringern, um welchen die Spannung des Muskels bei einer neuen Reizung wachsen muß, um die Last eben von ihrer Unterlage zu erheben. Je mehr sich diese virtuelle Contraktur, um uns kurz so auszudrücken, im Laufe der Zuckungsreihe entwickelt, desto größer muß die Zuckungshöhe sein, welche der Muskel bei einer und derselben Erregungsstärke erreicht. Auf der Entwickelung dieser virtuellen Contraktur beruht z. B. die Treppe, welche Buckmaster bei seinen Versuchen am überlasteten Muskel beobachtete. Hierauf weist abgesehen von Anderem schon der Umstand hin, daß bei diesen Versuchen der Treppe fast ausnahmslos eine Reihe „einleitender Zuckungen“ vorhergingen, deren Zuckungshöhen absteigende Werthe besaßen, und die eben dazu dienten, die virtuelle Contraktur erst zur genügenden Entwickelung zu bringen.

Noch andere Gesichtspunkte können bei Erklärung der Treppe unter Umständen herangezogen werden. Wir erinnern an die von Kronecker gegebene Erklärung der von Bowditch am Froschherzventrikel beobachteten Treppe. Man kann an ein Auftreten positiver Erregbarkeitsmodificationen denken und an andere Umstände, welche geeignet sind, ein anfängliches Wachsthum der Erregbarkeit des Muskelpräparates zu bewirken. Endlich kann man auch noch geltend machen, daß jeder Reiz dazu diene, die Desorientirungswinkel der Disdiaklasten zu verringern, und demgemäß auch zu Folge habe, daß ein nach kurzem Intervalle folgender zweiter Reiz die Disdiaklasten in besserer Orientirung vorfinde, als der erste Reiz dieselben vorgefunden habe. Diese im Laufe der Zuckungsreihe zunächst fortschreitende Verbesserung der Orientirung der Disdiaklasten müsse nothwendig im Sinne einer Erhöhung der contrahirenden Wirksamkeit derselben und mithin im Sinne des Auftretens der Treppe wirken.

Es ist eine empfindliche Lücke, daß niemals in solchen Fällen, wo bei einer Reihe aufeinander folgender, aktueller oder nur virtueller (d. h. isometrischer) Zuckungen oder Tetani die Treppe auftrat, zugleich auch genaue Messungen der Wärmebildung des zuckenden, bez. tetanisirten, Muskels vollzogen worden sind. Ist bei der Treppe in einem gegebenen Falle eine Zunahme der Erregbarkeit im Spiele, so muß mit der Contraktionshöhe oder Spannung auch die Wärmebildung (und negative Schwankung des Muskelstromes) wachsen. Letzteres wird aber nicht der Fall sein, wenn die Treppe nur auf einer virtuellen Contraktur oder einer allmählichen Verbesserung der Orientirung der Disdiaklasten beruht.

Die gleichen Gesichtspunkte wie für die Treppe kommen auch für die sog. erfrischende Nachwirkung des Tetanus in Betracht.

§ 6. Mechanisches und thermisches Verhalten des Muskels im Vergleich mit einander.

Fick hat bekanntlich schon seit mehr als 20 Jahren die Behauptung vertreten, daß der zweite Wärmesatz jede Theorie der Muskelcontraktion ausschließe, nach welcher die gesammte durch den Reiz im Muskel ausgelöste lebendige Kraft zunächst als Wärme auftreten und dann je nach Umständen ein größerer oder geringerer Theil derselben in Arbeit verwandelt werden soll. Er hat aus den Resultaten eigener Versuche für das Verhältniß zwischen der bei der Zuckung gebildeten Wärme und der bei derselben geleisteten Arbeit Werthe berechnet, welche eine Contraktionstheorie der soeben angegebenen Art und mithin auch unsere Theorie anscheinend als ganz unhaltbar erweisen. Wir begnügen uns vor der Hand damit, gegen die Beweiskraft dieser Berechnungen kurz Folgendes zu bemerken.

1) Soll der zweite Wärmesatz auf unsere Contraktionstheorie Anwendung finden, so ist natürlich diejenige Erwärmung in Betracht zu ziehen, welche die Disdiaklasten bei der Erregung erfahren, nicht aber diejenige, welch die mit der Thermosäule in Berührung stehende Außenschicht des Muskels zeigt. Daß die erstere Temperaturzunahme größer ist als die zweite, ergibt sich leicht, wenn man bedenkt, wie die erregten Saftschichten nebst den Disdiaklasten und den Quer- und Längsbälkchen thatsächlich doch nur einen Theil der Muskelmasse ausmachen, und wie die in diesen Theilen des Muskels erzeugte Erwärmung doch nur in abgeschwächtem Maße an der Außenschicht des Muskels zu Tage treten kann. Schon Du Bois-Reymond hat vor langer Zeit darauf hingewiesen, daß die Temperaturerhöhung bei der Muskelcontraktion „in den eigentlichen Herden des Molekularvorganges ja eine viel beträchtlichere sein mag, als sie für die Gesammtheit der Muskelmasse sich darstellt“.

2) Nun hat allerdings Fick für die Fälle starker Belastung des Muskels Werthe für das Verhältniß zwischen Wärme und Arbeit berechnet, welche selbst bei Berücksichtigung dessen, was soeben über die Unzulänglichkeit der erhaltenen Wärmewerthe bemerkt worden ist, geeignet erscheinen, Bedenken zu erwecken. Allein man darf nicht übersehen, daß bei der Arbeitsleistung eines stark belasteten Muskels der größere Theil der Arbeit gar nicht von den contrahirenden Kräften der Disdiaklasten, sondern von dem inneren Dehnungswiderstande geleistet wird. Der zweite Wärmesatz hat Anwendung zu finden auf die Arbeitsleistung der Disdiaklasten, nicht aber auf diejenige des Gesammtmuskels. Wegen des Verhaltens des inneren Elasticitätswiderstandes ist die erstere Arbeitsleistung bei sehr starken Belastungen geringer, bei sehr schwachen Belastungen aber größer als die letztere.

Zieht man die beiden hier geltend gemachten Gesichtspunkte in Betracht und versucht sich ein ungefähres Bild von dem Verhältnisse der Wärme- und Arbeitswerthe der Disdiaklasten zu entwerfen, so gelangt man zur Annahme von Werthen, die sich mit dem zweiten Wärmesatze sehr wohl vereinen. —

Nach unserer Theorie ist die Aenderung der Spannung oder Länge, welche der gereizte Muskel erfährt, ganz wesentlich von der die elektrische Ladung der Disdiaklasten bedingenden Wärmebildung abhängig. Es erhebt sich also die Frage, ob die Längen- und Spannungsänderungen, welche der gereizte Muskel unter den verschiedenen Umständen erkennen läßt, auch wirklich in derjenigen Weise, wie es unsere Theorie erfordert, zu dem thermischen Verhalten stimmen, welches der Muskel nach den Resultaten der bisherigen myothermischen Untersuchungen unter denselben Umständen zeigt. Diese Frage ist durchaus zu bejahen. Wir haben bereits im Bisherigen (vgl. S. 153 ff.) Gelegenheit gehabt, eine Anzahl von Beispielen der Uebereinstimmung zwischen thermischem und mechanischem Verhalten des Muskels vorzuführen, und bemerken hinsichtlich dieses Punktes hier nur Folgendes.

Man muß natürlich stets in Rücksicht ziehen, daß die Spannung und Längenänderung des Muskels nicht blos von der Stärke und dem zeitlichen Verlaufe der elektrischen Ladung der Disdiaklasten abhängig ist, sondern auch (im Sinne des auf S. 135 Bemerkten) nach den gegenseitigen Entfernungen und den Stellungen der Disdiaklasten und nach dem Verhalten des f. Imbibitionsdruckes und des inneren Elasticitätswiderstandes sich bestimmt. Wenn also z. B. während einer Tetanisirung in Folge der Nachquellung und in Folge der Unvollkommenheit der Elasticität der durch die contrahirenden Kräfte deformirten festen Muskelbestandtheile der Contraktionsgrad noch weiter anwächst, während die Wärmebildung sich auf gleicher Höhe hält oder gar etwas abnimmt, so ist dies nicht im Mindesten ein Widerspruch zu unserer Theorie. Wenn ferner nach Nawalichin's Versuchen bei wachsender Reizstärke die Zuckungswärme schneller zunimmt als die Hubhöhe, so ist dies in Hinblick auf die Rolle, welche der innere Elasticitätswiderstand bei der Contraktion spielt, nur als eine Bestätigung unserer Theorie anzusehen. Denn die Arbeit, welche die contrahirenden Kräfte der Disdiaklasten während der Contraktion durch Deckung des Ausfalles an innerem Dehnungswiderstande oder durch Ueberwindung des inneren Contraktionswiderstandes leisten, wächst viel schneller als die Hubhöhe.

Wie leicht ersichtlich, muß wegen der Mitwirkung der Nachquellung bei der Contraktion der Satz gültig sein, daß die Erzeugung einer und derselben Wärmemenge seitens des gereizten Muskels bei gleicher Anfangslänge und Belastung desselben von einer umso größeren Hubhöhe begleitet ist, je längere Zeit diese Wärmebildung in Anspruch nimmt, und daß eine und dieselbe Arbeitsleistung des Muskels eine umso geringere Wärmebildung desselben erfordert, je langsamer Wärmebildung und Contraktion stattfinden, vorausgesetzt, daß die Dauer der Wärmebildung eine gewisse obere Grenze nicht überschreitet. Von diesem Satze haben wir schon bei Erklärung der Thatsache Gebrauch gemacht, daß bei fortschreitender Ermüdung die Hubhöhe zuweilen eine Abnahme nicht erkennen läßt, während die Wärmebildung sich deutlich verringert. Derselbe Satz ist auch bei Erklärung der namentlich von Fick hervorgehobenen Thatsache heranzuziehen, daß die von einem gegebenen Reize bewirkte Wärmebildung des Muskels (innerhalb gewisser Grenzen) umso reichlicher ausfällt, je höher die vorhandene Temperatur ist, und trotzdem die Zuckungshöhe von der Temperatur fast unabhängig erscheinen kann. Je höher die vorhandene Temperatur ist, desto schneller verläuft bekanntlich exogene Wärmebildung und Zuckung. Aus dem hier aufgestellten Satze erklärt sich ferner auch die von W. Gleiß constatirte Thatsache, daß der (in Folge der größeren Zähigkeit seines Saftes) sich langsamer zusammenziehende Wadenmuskel der Kröte bei der gleichen Arbeitsleistung regelmäßig weniger Säure entwickelt als der schneller sich verkürzende Wadenmuskel des Frosches, und daß in entsprechender Weise auch der (wegen der größeren Zähigkeit seines

Saftes) langsamer arbeitende rothe Säugethiermuskel sparsamer arbeitet als der weiße.

Für den Fall des Tetanus gilt der Satz, daß die Aufrechterhaltung eines und desselben Contraktionsgrades unter sonst gleichen Umständen eine umso geringere Wärmebildung des Muskels erfordert, je zäher der Muskelsaft, sei es in Folge von Ermüdung, sei es in Folge anderer Umstände, ist. Denn je zäher der Muskelsaft ist, um einen desto geringern Betrag wird der Contractionsgrad während des Intervalles, das zwischen zwei Erregungswellen fällt, wieder absinken, desto geringer wird also die elektrische Ladung der Disdiaklasten sein, die zur Wiederherstellung des vor diesem Absinken vorhanden gewesenen Contraktionsgrades erforderlich ist.

Am besten läßt sich die Abhängigkeit der mechanischen Muskelthätigkeit von der Wärmebildung natürlich an den isometrischen Zuckungen und tetanischen Zusammenziehungen studiren, weil bei diesen die Aenderungen des f. Imbibitionsdruckes und des inneren Elasticitätswiderstandes während der Muskelthätigkeit annähernd wegfallen. Wie z. B. Fick gefunden hat und neuerdings bestätigt worden ist, dauert bei einer isometrischen Zuckung die Erhöhung der Muskelspannung umso länger an, bei je größerer Länge des Muskels diese Zuckung stattfindet. Dies erklärt sich einfach daraus, daß mit der Länge des Muskels bis zu gewisser Grenze auch die Wärmebildung zunimmt und die elektrische Ladung der Disdiaklasten natürlich umso später schwindet, bis zu einem je höheren Werthe sie emporstieg. In Hinblick auf den soeben erwähnten Umstand, daß bei zunehmender Länge des Muskels auch die bei einer isometrischen Zuckung eintretende Wärmebildung und elektrische Ladung der Disdiaklasten anwächst, ist zu erwarten, daß auch das Spannungsmaximum, das bei einer isometrischen Zuckung erreicht wird, bis zu gewisser Grenze mit der Länge des Muskels zunehmen werde. Nach den neuerdings hierüber veröffentlichten Untersuchungen ist dies in der That der Fall. Man darf indessen hinsichtlich dieses Punktes den auf S. 135 erwähnten Einfluß nicht vergessen, den die gegenseitigen Entfernungen der Disdiaklasten auf die Stärke der von ihnen ausgehenden contrahirenden Wirksamkeit ausüben. Dieser Einfluß wirkt bei einer Vergrößerung der Muskellänge demjenigen Einflusse, der aus der Vermehrung der freien Saftmenge für die Wirkungsfähigkeit eines Reizes entspringt, direkt entgegen. In der Regel überwiegt dieser letztere Einfluß. Am ermüdeten Muskel aber, wo dem myothermischen Ermüdungsgesetze gemäß der letztere Einfluß geringer ist, können Fälle vorkommen, wo der erstere Einfluß überwiegt.

Aus der Zunahme, welche die freie Saftmenge und demgemäß auch die Wärmebildung bei wachsender Belastung erfährt, erklären sich auch die bekannten Versuche von Hermann, bei denen sich die zur minimalen Zuckung erforderliche Reizstärke im Falle noch nicht eingetretener Ermüdung als ganz unabhängig von der Belastung erwies, sowie die von ähnlichen Resultaten begleiteten gleichartigen Versuche anderer Forscher. Wenn die von Hermann beobachtete Constanz des zur minimalen Zuckung erforderlichen Reizwerthes nach den eigenen Mittheilungen dieses Forschers nicht mehr vorhanden war, als das Präparat stark ermüdet war, vielmehr in diesem Stadium die erforderlichen Reizwerthe schnell mit den Belastungen stiegen und verhältnißmäßig geringe Belastungen überhaupt nicht mehr erhoben werden konnten, so erklärt sich dies ganz einfach aus dem myothermischen Ermüdungsgesetze.

Doch es hätte kein Ende, wollten wir hier alle einzelnen Versuchsthatsachen anführen, welche darauf hinweisen, daß in der That zwischen der mechanischen Muskelthätigkeit und der Wärmebildung die von unserer Theorie behauptete Beziehung besteht. Wir schließen die Ausführungen dieses § mit der Aufstellung eines den Gegenstand desseben betreffenden allgemeineren Satzes. Das Verhalten des f. Imbibitionsdruckes hat für die Spannung des Muskels auf doppeltem Wege Bedeutung. Erstens ist die Spannung direkt von dem f. Imbibitionsdrucke als einer im Sinne der Muskelverkürzung wirksamen Druckkraft abhängig. Zweitens ist der f. Imbibitionsdruck auch noch auf indirektem Wege für die Muskelspannung dadurch von Bedeutung, daß die Erregbarkeit des innerhalb der f. Poren gebundenen Saftes sich nach ihm bestimmt und auf diesem Wege auch die elektrische Ladung der Disdiaklasten von ihm mit abhängig ist. Wie leicht ersichtlich, verhalten sich bei einer Aenderung des f. Imbibitionsdruckes beide Einflüsse entgegengesetzt. Denn eine Zunahme des f. Imbibitionsdruckes muß auf dem ersteren, direkten, Wege im Sinne einer Zunahme, auf dem zweiten, indirekten, Wege aber im Sinne einer Abnahme der Muskelspannung wirken. Es ist nun allgemein an dem, schon von vorn herein sehr wahrscheinlichen Satze festzuhalten, daß *bei einer Aenderung des f. Imbibitionsdruckes der direkte Einfluß dieser Aenderung auf die Muskelspannung stets bedeutend über den indirekten überwiegt.*

§ 7. Die mikroskopische Erscheinungsweise des Muskels.

Am Schlusse seiner Untersuchungen über Contraktilität und Doppelbrechung äußert sich W. Engelmann folgendermaßen: „Wir dürfen uns nach den vorstehenden Erfahrungen für berechtigt halten, den Satz auszusprechen:

Contraktilität, wo und in welcher Form sie auftreten möge, ist gebunden an die Gegenwart doppelbrechender, positiv einaxiger Theilchen, deren optische Axe mit der Richtung der Verkürzung zusammenfällt.

Unter den vielen Fragen, welche sich an dieses Resultat knüpfen, ist die bedeutungsvollste die nach der Art des Zusammenhanges zwischen Contraktilität und Gegenwart von Disdiaklasten. Welche Bedeutung haben letztere für den Contraktionsvorgang? Die Zeit ist noch nicht gekommen, um eine nur einigermaßen befriedigende Antwort hierauf zu geben". Wir denken, unsere Theorie hat eine befriedigende Antwort auf diese Frage gegeben. Contraktilität setzt das Vorhandensein pyroelektrischer Körperchen voraus; diese Pyroelektricität aber ist ohne gleichzeitige Anisotropie nicht möglich. Inwieweit hierbei der Begriff der Contraktilität einer Einschränkung bedarf, so daß er nicht fast jede beliebige Protoplasmabewegung umfaßt, ist hier nicht der Ort zu erörtern.

Wenn man ferner bedenkt, daß eine Abtheilung des Muskelfaches umso heller, durchsichtiger und weniger lichtbrechend erscheinen muß, je mehr Saft und je weniger feste Bestandtheile, insbesondere Theile der Gerüstsubstanz, sie enthält, und wenn man sich hineindenkt in die Deformationen und Aenderungen ihres Saftgehaltes, welche nach unserer Theorie die verschiedenen Theile der Gerüstsubstanz bei der Contraktion erfahren, so wird man vielleicht auch der Behauptung nicht ganz ungläubig gegenüber stehen, daß unsere Theorie in gleicher Weise wie die große Mannigfaltigkeit von Gesetzen, welche das mechanische und thermische Verhalten des Gesammtmuskels betreffen, auch die Erscheinungen sehr gut zu erklären vermöge, welche die verschiedenen Abtheilungen des Muskelfaches hinsichtlich ihres Volumens, ihrer Form und ihrer mechanischen und optischen Eigenschaften einerseits beim Ruhezustande und andererseits bei der Contraktion darbieten. Nur lassen sich alle diese die mikroskopische Erscheinungsweise des ruhenden und thätigen Muskels betreffenden Punkte, weil sie eben mehr deskriptiver Art sind, nicht so leicht andeutungsweise behandeln wie die mechanischen und thermischen Leistungen des Muskels. Deshalb müssen wir hier wegen der Begrenztheit des uns zur Verfügung stehenden Raumes von einem näheren Eingehen auf diese Punkte ganz absehen. Im Wesentlichen haben wir hier die Erscheinungen vor Auge, wie sie von Engelmann beschrieben und von anderen Forschern bestätigt und theilweise ergänzt worden sind. Wenn wir in einzelnen Punkten von diesem Forscher abweichen, z. B. der Zwischenscheibe, welche allerdings aus gewissem Grunde mit reichlicherer und dichterer Gerüstsubstanz ausgestattet ist als z. B. die Querscheiben, (abgesehen von einer anderen, mit dieser Art der Ausstattung zusammenhängenden, Funktion) wegen ihrer Anisotropie auch noch eine gleichartige, wenn auch quantitativ verschiedene, Rolle beim Contraktionsakte zuschreiben, wie z. B. den Querscheiben, so werden sich diese Abweichungen leicht rechtfertigen lassen.

Daß unsere Theorie bei Erklärung der Zerfallserscheinungen, welche die Muskelfaser beim Absterben oder bei Einwirkung chemischer Substanzen erleidet (Bildung von Fibrillen, von Scheiben verschiedener Art, von bloßen „doppelbrechenden Körnern“), keine Schwierigkeiten findet, bedarf nicht erst der Erwähnung.

Wichtiger ist der Hinweis darauf, daß nach unserer Theorie die Querstreifung des Muskels als selbstverständlich erscheint, wenn es sich um einen Muskel handelt, der ausgiebig, schnell und sparsam arbeiten soll. Zur Beförderung der Schnelligkeit und Ausgiebigkeit der Contraktion scheint auch diejenige Einrichtung der Muskelfaser zu dienen, welche auf dem Querschnitte das Bild der Cohnheim'schen Felder bewirkt.

Nach unserer Theorie bedarf es für einen ausgiebig, schnell und sparsam arbeitenden Muskel anscheinend nur eines Aufbaues aus abwechselnden anisotropen Scheiben und isotropen Schichten, so wie wir auf S. 133 den schematischen Bau der Muskelfaser angegeben haben. Wir stimmen also in gewissem Sinne mit Exner überein, wenn er den Typus der Muskelfaser in der zweischichtigen Faser erblickt. Es läßt sich indessen ein Gesichtspunkt geltend machen, welcher zunächst die Differenzirung der anisotropen Scheiben in eine Querscheibe und Zwischenscheibe und dann auch noch die weiteren Gliederungen des Muskelfaches als zweckmäßig für die Funktion des Muskels erscheinen läßt[1]).

1) Im Wesentlichen ist der hier erwähnte Gesichtspunkt der folgende. Für die Funktion der Muskelfaser ist es dienlich, wenn die anisotropen Scheiben

Doch brauchen natürlich nicht alle diese Gliederungen in allen quergestreiften Fasern vorzukommen. Besondere Funktionsart, Länge, Dicke und Umgebung des Muskels dürften in dieser Beziehung eine Rolle spielen.

Die Querbälkchen, welche die Disdiaklasten jeder anisotropen Scheibe mit einander verbinden und mit denselben zusammen Querfadennetze (im allgemeineren Sinne genommen) bilden, haben wir postulirt und in der aus dem Bisherigen erhellenden Weise zur Erklärung zahlreicher physiologischer Erscheinungen und Gesetze verwandt, bevor uns die Untersuchungen von Retzius zur Kenntniß kamen, zu einer Zeit, wo wir uns einigermaßen isolirt mit dieser Anschauung fühlten. Seitdem haben sich die histologischen Untersuchungen gehäuft, welche zu gleichartigen Anschauungen geführt haben. Allerdings findet von gewisser Seite Widerspruch statt. Die Zukunft dürfte bald hierüber entscheiden. Daß sich die Querbälkchen so leicht der Beobachtung entziehen, erklärt sich einfach aus ihrer, mit ihrer Funktion zusammenhängenden starken Durchfeuchtung oder Durchsaftung, welche zu Folge hat, daß sich dieselben hinsichtlich ihres Lichtbrechungsvermögens nur wenig von dem umgebenden Muskelsafte unterscheiden, daß Färbemittel, welche in die eine andere innere Struktur besitzenden Längsbälkchen und Disdiaklasten nicht merkbar eindringen, dennoch in die Querbälkchen eindringeu und die von denselben eingenommenen Räume als von derselben Substanz erfüllt wie die vom Muskelsaft erfüllten Räume erscheinen lassen u. dergl. m. Daß die Querbälkchen der verschiedenen anisotropen Scheiben nicht ganz gleichwerthig zu sein brauchen, ist schon oben angedeutet worden.

Was das Verhalten der Doppelbrechung bei der Contraktion anbelangt, so mag es genügen, hier darauf hinzuweisen, daß unsere Theorie nicht eine solche Disdiaklastentheorie ist, welche nur die bei der Contraktion eintretenden Aenderungen der Stellungen und Entfernungen der Disdiaklasten als Ursachen etwaiger Ver-

---

theilweise solche sind, deren Querbälkchen sich bei der Contraktion leicht dehnen lassen und mithin einer ausgiebigeren Mitwirkung der Nachquellung und umfangreicheren Vergrößerung des Faserquerschnittes günstig sind, theilweise aber auch solche, welche durch die größere Festigkeit ihres Aufbaues dem Fasergerüste als wesentliche Stütze dienen und nachtheilige Verschiebungen und Desorientirungen der Disdiaklasten verhindern. Natürlich kann dadurch, daß zwischen die abwechselnden Scheiben von beiderlei Art noch Scheiben von einer so zu sagen vermittelnden Art eingeschoben werden, sowie durch eine Verdoppelung der Querscheiben die Contraktionskraft, die bei gegebener Reizung eintritt, nur gefördert werden.

änderungen der Doppelbrechung in Anspruch nehmen kann. Vielmehr müssen die Spannungen, welche die Querbälkchen bei der Contraktion erfahren, die Saftbewegungen, welche bei derselben sich vollziehen, und auch die Erwärmungen und elektrischen Ladungen der Disdiaklasten in dieser Beziehung in Mitrücksicht gezogen werden.

Was die Disdiaklasten anbelangt, so ist schon hier der Ort zu erklären, daß wir sie nicht für Krystalle im engeren Sinne des Wortes, sondern vielmehr für Krystalloide, d. h. für quellungsfähige Krystalle, halten, und zwar dürfte es sich hier um Krystalloide handeln, die aus Eiweißstoffen bestehen. Bekanntlich sind schon Catherine Schipiloff und A. Danilevsky bei ihren Untersuchungen über die Natur der anisotropen Substanzen des quergestreiften Muskels zu der Anschauung gekommen, daß die Disdiaklasten Brücke's aus krystalloiden Myosinpartikelchen bestehen. Von welcher Bedeutung diese krystalloide Natur der Disdiaklasten für ihr elektrisches Verhalten und überhaupt für ihre ganze Verhaltungsweise und Funktion ist, wird im nachstehenden § angedeutet werden.

§ 8. Das elektrische Verhalten des sich contrahirenden Muskels.

Von den elektrischen Erscheinungen, welche an das Auftreten und die Fortpflanzung des wärmebildenden Erregungsprocesses unmittelbar geknüpft sind, haben wir hier nicht zu handeln. Unser Gegenstand ist ein anderer. Wenn die Disdiaklasten gleichnamige Pole nach demselben Faserende hinkehren, muß dann nicht hierdurch bei der Erregung eine constatirbare Elektricitätsbewegung entstehen, welche z. B. bei Herstellung einer leitenden Verbindung zwischen beiden Muskelenden einen den Schließungsbogen durchströmenden elektrischen Strom zu Folge hat?

In den elektrischen Organen tritt dieser pyroelektrische Strom, um uns kurz so auszudrücken, mit hoher Intensität auf. Und zwar hat man die doppeltbrechenden Bestandtheile der Bogenfasern Krause's als Disdiaklasten des elektrischen Organes von Torpedo anzusehen. Dieser Forscher hat an den Bogenfasern Querstreifung constatirt und auf Grund seiner entwicklungsgeschichtlichen Beobachtungen die Behauptung aufgestellt, „daß sich die Bogenfasern in unverändertem Zustande von den quergestreiften Fibrillen bis zu den fertigen elektrischen Lamellen des erwachsenen Thieres verfolgen lassen“. Von vorn herein kann man geneigt sein, in erster Linie die sog. Pallisaden für Disdiaklasten der elektrischen Platte zu halten. Ihr Aussehen, ihre zur Ebene der elektrischen Platte senkrechte Stellung u. A. m. legen diese Vermuthung nahe. Nach Krause's Beobachtungen erscheint ebenso wie eine dorsale Randschicht der elektrischen Platte, welche etwa ein Drittel der ganzen Plattendicke beträgt, auch eine ventrale Randschicht von gleicher Dicke hell zwischen den gekreuzten Nicols. In letztere Schicht fallen die Pallisaden nebst Anderem hinein. Auch der Nachweis von Krause, daß „in den motorischen Endplatten von Torpedo nichts existirt, was an die elektrische Punktirung auch nur erinnert", ist an und für sich der hier erwähnten Vermuthung günstig. Doch ist zur Zeit ein sicheres Urtheil über die letztere noch nicht zu fällen.

Wir behaupten also, daß in den elektrischen Organen bei ihrer Erregung eine Wärmebildung stattfindet, welche von gleicher Größenordnung ist wie die exogene Wärmebildung der Muskeln und auf pyroelektrischem Wege den elektrischen Schlag erzeugt. Und wir erblicken in der Existenz, Entwicklungsschichte, Beschaffenheit und Thätigkeit der elektrischen Organe eine Bestätigung unserer Theorie. Das Gleiche gilt natürlich erst recht auch von den unvollkommenen elektrischen Organen.

Was nun den colossalen Unterschied anbelangt, der hinsichtlich der Stärke des pyroelektrischen Stromes zwischen den vollkommenen elektrischen Organen und den Muskeln besteht, so hat man im Falle des Festhaltens an der zuerst zu Grunde gelegten Ansicht, daß die Disdiaklasten Krystalle im engeren Sinne des Wortes seien, den Grund dieses Unterschiedes darin zu erblicken, daß in den Muskeln die beiden entgegengesetzten Elektricitäten jedes Disdiaklasten sich fast ausschließlich durch die relativ (d. h. im Verhältnisse zu ihrer Umgebung) gut leitende Substanz des Disdiaklasten selbst mit einander ausgleichen, hingegen in den elektrischen Organen die Disdiaklasten selbst relativ schlecht leiten und mithin die erzeugten Elektricitäten zu einem großen Theile sich in der umgebenden Masse verbreiten. Nach unserer eigenen Ansicht aber ist hier der Umstand wesentlich, daß die Disdiaklasten, wie schon oben erwähnt, krystalloide Natur besitzen. Dasjenige also, was wir im Bisherigen als einen Disdiaklasten bezeichnet haben, besteht unseres Erachtens thatsächlich aus einer großen Anzahl kleiner krystallartiger Körperchen — wir wollen im Folgenden, ohne weitere Consequenzen damit zu verbinden, dafür den Ausdruck Micell anwenden —, welche ihren Axen und elektrischen Polen nach in gleicher Weise orientirt sind und durch

Schichten imbibirter Flüssigkeit, die hinsichtlich ihrer Beschaffenheit mit dem übrigen Safte nicht ganz übereinzustimmen braucht, von einander getrennt sind. Die Länge eines Micells ist sehr klein im Vergleiche zu dem Abstande zweier benachbarter Disdiaklasten. Ist nun die elektrische Leitungsfähigkeit der Flüssigkeit, welche in die Disdiaklasten imbibirt ist und die Micelle umgibt, gering im Vergleiche zur Leitungsfähigkeit der Micelle, und sind die Flüssigkeitsschichten, welche die Micelle eines Disdiaklasten von einander trennen, verhältnißmäßig dick, so kann, wie leicht ersichtlich, ein in Betracht kommender pyroelektrischer Strom nicht auftreten. Dies ist der Fall in den Muskeln. Verhalten sich hingegen die Leitungsfähigkeiten der Micelle und der Flüssigkeit umgekehrt und sind etwa außerdem auch die Flüssigkeitsschichten, welche die einzelnen Micelle eines Disdiaklasten von einander trennen, nur verhältnißmäßig dünn, so kann bei genügender Anzahl der Disdiaklasten ein starker pyroelektrischer Strom zu Tage treten. Dies ist der Fall bei den vollkommenen elektrischen Organen. Natürlich sind die beiden hier angeführten Fälle nur 2 Extreme, zwischen denen Uebergangsstufen möglich sind und wohl auch thatsächlich vorkommen.

Eine Folge der hier behaupteten ziemlichen Leitungsfähigkeit der Muskelmicelle ist es, daß, wie die mechanischen Erscheinungen des Muskels darthun, die elektrische Ladung derselben nicht erheblich länger andauern kann als die Temperaturzunahme derselben. Uebrigens dürfte die krystalloide Natur der Disdiaklasten auch der Stärke ihrer elektrischen Ladung günstig sein. Denn in einem Krystalle, in welchem die mit entgegengesetzten Elektricitäten sich ladenden Pole zweier benachbarter, als kleine pyroelektrische Krystalle wirksamer, Elementarbestandtheile unmittelbar an einander stoßen und ihre elektrischen Ladungen ausgleichen, muß eine geringere elektrische Wirkung bei der gleichen Erwärmung erzielt werden als in einem solchen, wo die entgegengesetzten Elektricitäten durch die imbibirten Flüssigkeitsschichten genöthigt sind, bei ihrer Ausgleichung den längeren Weg durch die Substanz des Micells zu nehmen.

Wird auf die im Vorstehenden angedeutete Weise bei der Erregung eine polare Ladung mit entgegengesetzten Elektricitäten nicht sowohl für die Disdiaklasten als vielmehr für die Pole der die letzteren zusammensetzenden Micelle angenommen, so kommt natürlich die eine der beiden contrahirenden Kräftewirkungen, die wir früher (S. 134) als von den Disdiakasten ausgehend angenommen haben, nämlich die gegenseitige Abstoßung der Disdiaklasten jeder

Quercolonne, im Wesentlichen in Wegfall. Man hat sich dann vorzustellen, daß bei der Erregung die Disdiaklasten der verschiedenen Quercolonnen sich gegenseitig in der Längsrichtung der Faser anziehen, daß die aus dieser Anziehung entspringende Tendenz, die anisotropen Scheiben und die Faserenden einander zu nähern, nothwendig von einer Tendenz, die Querschnitte der Fasern zu vergrößern, begleitet ist, und daß durch diese letztere Tendenz und durch die (wegen der Verbindung des Sarkolemmas mit den Querbälkchen) daraus entspringende Dehnung der Querbälkchen der Vorgang der Nachquellung hervorgerufen wird. Geht man also von der zuerst zu Grunde gelegten Anschauung, daß die Disdiaklasten als Ganze bei der Erregung eine polare elektrische Ladung erführen, zu der tiefer gehenden Anschauung über, daß die Micelle durch ihre polare elektrische Ladung bei der Contraktion wirksam seien, so bleibt hinsichtlich des mechanischen, thermischen und optischen Verhaltens im Wesentlichen Alles beim Alten. Nur tritt insofern eine Aenderung ein, als bei der Contraktion die Veränderung der gegenseitigen Abstände der Disdiaklasten jeder Quercolonne und der Vorgang der Nachquellung auf einem mehr indirekten Wege durch die elektrische Ladung der Disdiaklasten hervorgerufen werden. Der Uebergang zu der zweiten Auffassung hat, ganz abgesehen von dem elektrischen Verhalten, noch anderweite Vortheile. Nach dieser Auffassung versteht sich der auf S. 135 aufgestellte Satz, daß die Stärke, mit welcher die Disdiaklasten bei gegebener elektrischer Ladung im Sinne einer Contraktion wirken, umso größer sei, je geringer die Länge des Muskels sei, dessen Gültigkeit bei der ersten Auffassung nur auf Grund gewisser Thatsachen erschlossen werden konnte, ganz von selbst. Der Umstand, daß die Träger der Anisotropie und Contraktilität des Muskels durch gewisse chemische Substanzen so leicht und schnell funktionsunfähig gemacht oder ganz zerstört werden, erscheint begreiflicher, wenn die Disdiaklasten durchfeuchtet sind. Neben den Desorientirungswinkeln der Disdiaklasten kommen natürlich nach der zweiten Auffassung auch noch diejenigen der Micelle mit in Betracht. Auch ist nach dieser Auffassung mit der Möglichkeit zu rechnen, daß die Disdiaklasten bei der Erregung durch die elektrische Ladung ihrer Micelle in ihrer Form etwas verändert werden. Wie leicht begreiflich, erschien es nicht zweckmäßig, gleich bei Beginn der Darstellung unserer Theorie mit dieser, complicirteren und den im Gebiete der Thierphysiologie üblichen Anschauungsweisen etwas fremderen, zweiten Auffassung ins Haus zu fallen.

Im Vorstehenden ist hinsichtlich der uns in diesem § interessirenden Frage das Wesentliche angedeutet. Wir halten es nicht im Entferntesten für angezeigt, besondere Einrichtungen, welche dem Auftreten eines pyroelektrischen Stromes entgegenzuwirken bestimmt sind, im Muskel anzunehmen, z. B. so zu sagen parelektronomische Quercolonnen von Disdiaklasten u. dergl. m. anzunehmen. Natürlich unterscheiden sich die elektrischen Organe auch noch in anderen als in der hier besprochenen Beziehung von den Muskeln. Sie bedürfen nicht eines ganz gleichen Gerüstes wie die Muskeln für die erfolgreiche Funktion ihrer Disdiaklasten. Die elektrischen Organe nebst ihren Nerven sind auf Erzielung möglichst großer elektrischer Massenwirkungen und daher auch auf ein möglichst gleichzeitiges in-Thätigkeit-treten aller Disdiaklasten eingerichtet. Hierher gehören die Versorgung des elektrischen Organes des Zitterwelses durch nur eine einzige große Nervenfaser und die schon von Fritsch in diesem Sinne gedeuteten eigenthümlichen Aufrollungen der aus dieser Faser entspringenden Zweigfasern; hierher gehört die von Gotsch neuerdings festgestellte Thatsache, daß sich die Erregung von einer elektrischen Platte nicht auf eine andere weiterverbreitet u. A. m. Einrichtungen dieser Art fallen natürlich beim Muskel mehr oder weniger hinweg. Da übrigens ursprünglich jede Zelle das Zeug dazu in sich hat, pyroelektrische Apparate, seien es nun Contraktionsapparate oder Schlagapparate — auch aktinoelektrische Contraktionsapparate scheinen vorzukommen —, in sich zu entwickeln, so ist es nicht sehr zu verwundern, wenn sich einmal ein elektrisches Organ auch an Stelle eines Hauttheiles entwickelt hat.

Nach allem, was im Bisherigen bemerkt worden ist, bleibt der Unterschied zwischen Muskel und elektrischem Organe hinsichtlich des pyroelektrischen Stromes streng genommen doch nur ein quantitativer, wenn auch ein solcher von äußerst hohem Betrage. Die Frage bleibt also bestehen, ob es unsere Beobachtungsmittel erlauben, zuweilen auch an Muskeln pyroelektrische Ströme zu constatiren. Es gibt ja mancherlei beobachtete Erscheinungen, auch solche neueren Datums, welche man auf einen pyroelektrischen Strom des erregten Muskels beziehen könnte. Doch diese Beobachtungen sind theils unsicherer Art, theils sind die Resultate nicht regelmäßig aufgetreten, theils läßt das Beobachtete ohne Schwierigkeiten andere Deutungen zu. Nur ausgedehnte neue experimentelle Untersuchungen, welche wohl in erster Linie die Muskeln der den elektrischen Fischen nahestehenden Fischarten zu berücksichtigen haben, können hier die Entscheidung bringen.

Schon aus der vorstehenden, flüchtigen und in wenigen Tagen hingeworfenen, Skizzirung unserer Contraktionstheorie erkennt man vielleicht, daß es im Principe nicht schwer ist, ein Modell zu construiren, welches qualitativ ganz dieselben mechanischen, thermischen, optischen und elektrischen Erscheinungen zeigt wie die Muskelfaser und in Berührung und Wechselwirkung durch Diffusion zu anderen flüssigkeitshaltigen Schläuchen von geeignetem strömendem Inhalte versetzt auch die Ermüdungs- und Erholungserscheinungen des Muskels sämmtlich nachahmt. Die Bestandtheile, die ich für dieses Modell brauche, sind Stoffe, die in ihren Eigenschaften nichts besitzen, was außerhalb der Anschauungen der Physik und Chemie läge, vorausgesetzt daß man die Quellung und alles, was aus ihr folgt, als physikalisch ganz verständliche Erscheinungen anerkennt. Und so führt unsere Theorie, wie sie einerseits für die Erregungstheorie und Psychophysik vorbereitet, auf der anderen Seite hinein in eine Vertiefung in diejenigen physikalischen Erscheinungen, die deshalb, weil sie nur an den organisirten Körpern in solchen Ausprägungen und Constellationen und mit so tiefgehenden Einflüssen auftreten, trotz ihrer Wichtigkeit von der allgemeinen Physik so kümmerlich behandelt werden, in eine Vertiefung in die Erscheinungen und Gesetze der Biophysik. Ein volles Verständniß oder wenigstens eine geläufige Handhabung unserer theoretischen Anschauungen ist ohne tiefere Kenntniß der biophysischen Haupterscheinungen nicht möglich. Es bedarf keines weiteren Hinweises, wie sehr unsere Theorie dazu nöthigt, sich mit Nägeli's Micelltheorie und überhaupt mit einer ziemlichen Reihe von Gedankenkreisen und Resultaten der Pflanzenphysiologie vertraut zu machen und auseinanderzusetzen, und wie sehr überhaupt unsere ganze Anschauung von der Materie umgestimmt wird, wenn man sich neben den modernen Vorstellungen der Physik von den Ursachen der Pyroelektricität zugleich die Thatsache vergegenwärtigt, daß die Pyroelektricität das Mittel ist, durch welches die Contraktionserscheinungen der organisirten Körper zu Stande kommen. Nicht immer nur erhält die Biophysik ihre Wege von der allgemeinen Physik vorgezeichnet. Sie kann auch auf diese zurückwirken, zumal hinsichtlich der allgemeinen Anschauungen. Ist doch z. B. der Grundgedanke von Maxwells Theorie der elastischen Nachwirkung mehr als naheliegend für denjenigen, der einigermaßen über die Gründe der starken Ausprägung der elastischen Nachwirkung an den durchfeuchteten Körpern nachgedacht hat (vergl. S. 140 f.). —

Eine eingehende Darstellung meiner Contraktionstheorie werde ich in einem besonderen Werke liefern, dessen erster Band in 5 Abschnitten von den bei der Contraktion wirksamen Kräften, von der mikroskopischen Erscheinungsweise des ruhenden und thätigen Muskels, von der Zuckung, von der anhaltenden Muskelzusammenziehung und von den speciellen Gesetzen der Arbeitsleistung des Muskels handeln wird. Der zweite Band wird in 4 Abschnitten von der Ermüdung und Erholung des Muskels und ihren Gesetzen, von der Muskelstarre, von der unmittelbaren (d. h. nicht erst durch einen wärmebildenden Erregungsproceß vermittelten) Einwirkung einer Temperaturänderung auf die Disdiaklasten und den Muskel überhaupt und von den verschiedenen Muskelarten handeln, wobei in diesem letzten Abschnitt zugleich auch auf die elektrischen Organe und die Frage eingegangen werden wird, wie weit die Benutzung pyroelektrischer Contraktionsapparate so zu sagen in das Primitiv-protoplasmatische hinabreiche. Die wesentlichen Faktoren bei der Contraktion sind Pyroelectricität und Quellung. Dieselben lassen sich aber natürlich auch noch in etwas anders aufgebauten Fasern und Formelementen, als wir in den im Vorstehenden betrachteten quergestreiften Fasern vor uns haben, zu contrahirender Wirksamkeit verbinden.

Zur Theorie der Abel'schen Functionen.

Von

Felix Klein.

Die folgenden Entwickelungen sind eine Fortsetzung meiner Note vom 5. November 1887: sie zeigen, wie sich diejenigen Sätze, die ich in der ersten Hälfte der genannten Note mittheilte, von den hyperelliptischen Functionen auf beliebige Abel'sche Functionen verallgemeinern lassen.

Die entscheidende Frage, welche ich zwecks Erreichung des hiermit bezeichneten Zieles zu erledigen hatte, war die nach der algebraischen Darstellung des in der Theorie der Abel'schen Functionen zu Grunde zu legenden Gebildes. Auf der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche, die man der Theorie der hyperelliptischen Functionen zu Grunde zu legen pflegt, finden die verschiedenen Gattungen der Abel'schen Integrale und in Folge dessen die sämmtlichen im weiteren Verlaufe der Theorie in Betracht zu ziehenden Functionen eine besonders einfache Darstellung; ist es möglich, dem allgemeinen algebraischen Gebilde eine Gestalt zu geben, welche die hyperelliptische Fläche als speciellen Fall umschließt und für alle Fälle dieselbe Einfachheit der Formeln ermöglicht, wie letztere in ihrem besonderen Gebiete? Ich habe bemerkt, daß man dieses Ziel erreicht, wenn man eine besondere Art Riemann'scher Flächen über der z-Ebene zu Grunde legt, die ich kanonische Riemann'sche Flächen nennen werde. Ich verstehe darunter solche m-blättrige Flächen vom Geschlechte p, deren $2(m-1+p)$ Verzweigungspuncte als Nullstellen einer bestimmten zur Fläche gehörigen ganzen algebraischen Function s definirt werden können. Ist diese Function vom $(d+2)^{\text{ten}}$ Grade in z, so ist $2p-2 = m \cdot d$, m also jedenfalls ein Theiler von $2p-2$. Des Weiteren sieht man, daß (für $p > 0$) die folgenden Integrale:

$$\int z^d \cdot \frac{dz}{s}, \quad \int z^{d-1} \cdot \frac{dz}{s}, \quad \ldots \quad \int z^0 \cdot \frac{dz}{s}$$

überall endliche zur Fläche gehörige Integrale sind, so daß also irgend m auf der Fläche übereinander liegende Puncte (wie sie durch die Gleichung $z = c$ gegeben werden, unter c eine beliebige Constante verstanden), d-fach gezählt, eine Gruppe von $2p-2$ durch eine φ verknüpfter Puncte vorstellen. Letztere Eigenschaft (die für $p = 0$ natürlich keine Bedeutung hat, für $p = 1$ aber in jedem Falle erfüllt ist) kann für $p > 0$ als neue Definition der kanonischen Flächen angesehen werden. In der That, sei w dasjenige der Annahme nach existirende überall endliche Integral der Fläche, dessen Differential in jedem der m Puncte $z = c$ d-fach verschwindet, so wird die Formel

$$s = \frac{(z-c)^d \cdot dz}{dw}$$

eine ganze Function s von z vom Grade $(d+2)$ definiren, welche, gleich Null gesetzt, genau die Verzweigungspuncte der Fläche liefert.

Daß die zweiblättrige, hyperelliptische Fläche sich unter die kanonischen Flächen subsumirt, ist deutlich: sie repräsentirt den Fall $m = 2$. Weitere einfache Beispiele kanonischer Flächen erhält man, wenn man singularitätenfreie ebene Curven oder solche singularitätenfreie Raumcurven betrachtet, die der volle Schnitt zweier Flächen sind: man hat zu dem Zwecke diese Curven nur auf ein Strahlbüschel, bez. Ebenenbüschel zu beziehen, dessen Mittelpunct der Curve nicht angehört (dessen Axe die Curve nicht schneidet) und nun z als den Parameter des Büschels einzuführen[1]).

1) Hierin liegt die Beziehung, welche die folgenden allgemeinen Entwicke-

Daß alle Riemann'schen Flächen vom Geschlechte $p = 1$ kanonisch sind, wurde bereits angedeutet. Aber mit diesen Beispielen wird die Bedeutung der kanonischen Flächen nicht erschöpft, vielmehr besteht der Satz, daß man auch für $p > 1$ jedes algebraische Gebilde in Gestalt einer kanonischen Fläche bringen kann. Man erreicht dies, indem man z einfach gleich dem Quotienten zweier solcher überall endlichen Differentiale der Fläche, dw_1 und dw_2, setzt, die keinen Verschwindungspunkt gemein haben; man kommt so auf den Fall $m = 2p-2$, $d = 1$ [1]).

Da dieser Ansatz ganz allgemein ist, also auch für die voraufgeführten hyperelliptischen Gebilde etc. gilt, so erkennt man, daß sich unter Umständen dasselbe algebraische Gebilde durch verschiedene kanonische Flächen repräsentiren läßt; es wird nützlich sein, schon hier zu bemerken, daß dies für das Folgende Nichts ausmacht, insofern die weiterhin auf dem algebraischen Gebilde zu definirenden Functionen zwar der Vermittelung einer kanonischen Fläche nicht entrathen können, aber völlig unabhängig davon bleiben, welche unter den möglichen kanonischen Flächen man gewählt hat.

Um jetzt zunächst die Integrale der verschiedenen Gattungen auf der kanonischen Fläche darzustellen, ist es nützlich, zu homogenen Variabelen überzugehen. Wir setzen $z = \frac{z_1}{z_2}$ und werden dann auf der Fläche nicht mehr mit Functionen von z, sondern mit Formen von z_1, z_2 operiren. Sei $G(z)$ irgend eine zur Fläche gehörige ganze algebraische Function von z vom Grade ε, so benenne ich das Product

$$z_2^\varepsilon \,.\, G(z) = \Gamma(z_1, z_2)$$

als eine zur Fläche gehörige algebraische Form vom ε^{ten} Grade. Nach allgemeinen Gründen muß sich die Gesammtheit der auf einer kanonischen Fläche existirenden algebraischen Formen aus einer beschränkten Zahl einfacher Formen ganz zusammensetzen lassen; ich bezeichne den Inbegriff dieser einfachen Formen (der sich ev. auf verschiedene Weise abgrenzen läßt) als ein zur Fläche gehöriges volles Formensystem. Ein solches Formensystem bilden z. B. auf der zweiblättrigen Fläche z_1 und z_2 selbst

lungen zu den Resultaten haben, die Hr. Pick im 29ten Bande der mathematischen Annalen für singularitätenfreie ebene Curven veröffentlicht hat.

1) Ueber diesen allgemeinsten Fall und die an ihn anschließende Definition der Thetafunctionen habe ich bereits Einiges in den Comptes Rendus der Pariser Akademie vom 21. Januar und 11. Februar 1889 mitgetheilt.

zusammen mit der Quadratwurzel aus derjenigen rationalen Form $f(z_1, z_2)$, die gleich Null gesetzt die Verzweigungspuncte der Fläche ergibt, — auf der Fläche, die in der vorerwähnten Weise aus der singularitätenfreien ebenen Curve entsteht, die Dreieckscoordinaten x_1, x_2, x_3 der Ebene. Auch für die allgemeine kanonische Fläche ($m = 2p-2$, $d = 1$) kann man auf Grund der Sätze, die Hr. Nöther in Bd. 17 der mathematischen Annalen veröffentlicht hat, ein volles Formensystem angeben; dasselbe ist einfach im Sinne der sogleich zu erklärenden Ausdrucksweise der Inbegriff der p zur Fläche gehörigen Formen erster Gattung: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p$. Uebrigens ist die specielle Kenntniß eines zur Fläche gehörigen Formensystems im Folgenden nicht nöthig und es sollen also in dieser Hinsicht keinerlei Voraussetzungen gemacht werden.

Wir setzen jetzt

$$z^{d+2} . s = S(z_1, z_2),$$

wo S die Verzweigungsform der Fläche heißen mag; wir bilden ferner

$$dw = \frac{(z\,dz)}{S}$$

und bezeichnen $d\omega$ (eine Differentialform —$d$ten Grades in z_1, z_2) als das zur Fläche gehörige Differential. Dieses $d\omega$ ist das erste der neuen Elemente, die wir in die Theorie der algebraischen Gebilde einführen, und von ihm gilt bereits, was oben allgemein in Aussicht gestellt wurde, daß dasselbe von der besonderen Wahl der kanonischen Fläche, auf die wir das algebraische Gebilde bezogen denken, unabhängig ist.

Wir wenden uns jetzt zur Darstellung der auf dem algebraischen Gebilde existirenden Abel'schen Integrale. Unser Standpunct wird dabei derjenige sein, der implicite bereits vorausgesetzt wurde, indem wir das algebraische Gebilde schlechtweg durch eine zu ihm gehörige Riemann'sche Fläche definirten: die Riemann'schen Existenzsätze gelten uns bereits als bewiesen, die Existenz der Integrale als sicher gestellt, es handelt sich einzig darum, welches der Charakter der Formeln ist, durch welche wir die Integrale auf der kanonischen Fläche zur Darstellung bringen.

Seien zunächst

$$w_1, w_2, \ldots . w_p$$

p linear unabhängige auf der Fläche existirende überall endliche Integrale. Wir bilden die Quotienten

$$\frac{dw_1}{d\omega}, \quad \frac{dw_2}{d\omega}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{dw_p}{d\omega},$$

die wir beziehungsweise mit

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots\ldots \quad \varphi_p$$

bezeichnen. Wir schließen, daß diese φ auf der Fläche existirende linear unabhängige Formen d^{ten} Grades sind und daß es auf der Fläche keine Form d^{ten} Grades geben kann, welche sich nicht aus den $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_p$ linear mit constanten Coëfficienten zusammensetzte. Ist uns nun die kanonische Fläche irgendwie in expliciter Definition gegeben, so muß es gelingen, auf ihr p linear unabhängige Formen d^{ten} Grades

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots\ldots \quad \varphi_p$$

zu bilden; wir haben dann zur Darstellung der Integrale erster Gattung die Formeln, denen ich bestimmte Gränzen beisetze:

$$w_1^{x,y} = \int_y^x \varphi_1 \, d\omega, \quad w_2^{x,y} = \int_y^x \varphi_2 \, d\omega, \quad \ldots\ldots \quad w_p^{x,y} = \int_y^x \varphi_p \, d\omega. \text{ —}$$

Die hier auftretenden $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p$ sind es, welche ich als Formen erster Gattung bezeichne.

Durch ganz entsprechenden Ansatz erhält man die Gestalt, in der sich die Integrale zweiter und dritter Gattung darstellen. Indem man von der Existenz der Integrale selbst ausgeht, erschließt man, daß auf der kanonischen Fläche eine von den zwei Variabelreihen z_1, z_2 und t_1, t_2 abhängige Form

$$\Psi(z, t)$$

existiren muß, vom $(d + 2)^{\text{ten}}$ Grade in jeder der beiden Reihen, welche verschwindet, und zwar doppelt verschwindet, wenn $\frac{z_1}{z_2} = \frac{t_1}{t_2}$ ohne daß die Stellen z und t auf der kanonischen Fläche zusammenfallen, die aber gleich $S(z)^2 = S(t)^2$ wird, wenn die Stellen z und t coïncidiren. Man erschließt ferner, daß ein solches Ψ noch genau p^2 linear unabhängige Constante enthalten muß, so zwar, daß aus irgend einem speciellen Ψ_0 das allgemeine Ψ in der Gestalt hervorgeht:

$$\Psi = \Psi_0 + (zt)^2 \cdot \Sigma c_{ik} \, \varphi_i(z) \, \varphi_k(t), \quad \{ i, k = 1, 2, \ldots p \},$$

wo die c_{ik} beliebig. Gesetzt nun, man habe sich bei vorgelegter kanonischer Fläche irgend ein solches Ψ gebildet (über besondere Nomirung dieses Ψ wollen wir hier gar nichts verabreden), so haben wir, — indem wir noch der größeren Deutlichkeit wegen dem $d\omega$ einen Index geben, der die veränderliche Stelle bezeichnet, auf die sich das $d\omega$ bezieht —, in

$$Y^{x,y}(t) = \int_y^x \frac{\Psi(z,t)}{(zt)^2} \cdot d\omega_z$$

die Darstellung eines zur Fläche gehörigen Integrals zweiter Gattung mit der Unstetigkeitsstelle t, in

$$P_{\xi,\eta}^{x,y} = \int_y^x \int_\eta^\xi \frac{\Psi(z,t)}{(zt)^2} \cdot d\omega_z \cdot d\omega_t$$

die Darstellung eines zur Fläche gehörigen Integrals dritter Gattung mit den Parametern ξ, η. Beide Formeln ergeben zugleich die allgemeinsten Integrale zweiter, bez. dritter Gattung, sobald man Ψ in der vorangegebenen Weise mit p^2 veränderlichen Constanten ausgestattet denkt.

Man betrachte jetzt folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} Y^{xy}(t) & Y^{xy}(t') & & Y^{xy}(t^p) \\ \varphi_1(t) & \varphi_1(t') & & \varphi_1(t^p) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_p(t) & \varphi_p(t') & & \varphi_p(t^p) \end{vmatrix}.$$

Aus den Riemann'schen Sätzen folgt, daß selbige gleich einem algebraischen Ausdrucke ist:

$$\frac{X(x, y;\ t, t', \ldots . t^p)}{(xt)(xt') \ldots . (xt^p) \cdot (yt)(yt') \ldots . (yt^p)},$$

wo X eine Form der beigesetzten Argumentreihen ist, in den x und y vom p^{ten} Grade, in den $t, t', \ldots . t^p$ bez. vom $(d+2)^{\text{ten}}$. Diese Form muß sich bei vorgelegter kanonischer Fläche auf algebraischem Wege berechnen lassen. Ich nehme jetzt an, daß die $t', t'', \ldots . t^p$ feste Stellen der kanonischen Fläche seien, welche nicht durch ein φ verknüpft sein sollen. Dann wird sich $Y_1^{xy}(t)$ aus der Determinante und deren algebraischem Werthe in der Form berechnen lassen:

$$Y^{xy}(t) = \varphi_1(t) \cdot Y_1^{xy} + \varphi_2(t) \cdot Y_2^{xy} + \ldots . \varphi_p(t) \cdot Y_p^{xy} + \text{Alg. Funct.}$$

Hier sind $Y_1, Y_2, \ldots Y_p$ lineare Combinationen der $Y(t'), Y(t''), \ldots Y(t^p)$, die ich ihre Normalcombinationen nenne. Dieselben haben die wesentliche Eigenschaft, daß ihre Perioden unabhängig von der besonderen Auswahl der bei ihrer Definition benutzten Stellen $t', t'', \ldots t^p$ sind. Diese Perioden sind es, welche ich im Folgenden unter $-\eta_{ik}$ verstehe ($-\eta_{ik}$ = Periode von Y_i am $k$ten Querschnitte, sowie ω_{ik} = Periode des w_i am $k$ten Querschnitte). Unsere Formel ergibt für die Periode von $Y(t)$ am $k$ten Querschnitte:

$$-\Sigma_i \varphi_i(t) \cdot \eta_{ik}$$

desgleichen für die entsprechende Aenderung von $P_{\xi\eta}$:

$$-\Sigma_i w_i^{\xi\eta} \cdot \eta_{ik}.$$

Wie man von hier aus zu den Bilinearrelationen kommt, welche die ω_{ik}, η_{ik} verknüpfen, mag unerörtert bleiben[1]).

Haben wir so auf der kanonischen Fläche, ausgehend von den Riemann'schen Sätzen, im Anschlusse an wohlbekannte Weierstrass'sche Entwickelungen eine bestimmte algebraische Darstellung aller derjenigen Functionen gewonnen, deren Inbetrachtnahme auch sonst in der Theorie der Abel'schen Integrale erfolgt, so schreite ich nunmehr zur Construction desjenigen Elementes der Theorie, welches ich zuerst, soweit hyperelliptische Functionen in Betracht kamen, in meiner Note vom 5. Nov. 1887 eingeführt habe, nämlich der zum algebraischen Gebilde gehörigen Primform $\Omega(x, y)$[2]). Dieselbe ergiebt sich als Form $-\frac{d}{2}$ten Grades in den x_1, x_2 wie in den y_1, y_2, welche auf dem algebraischen Gebilde nirgends verzweigt ist, nirgends unendlich wird und nur dann und zwar wie das Differential $d\omega$ verschwindet, wenn die Stelle x mit der Stelle y zusammenfällt. Stehen mehrere kano-

1) Man vergleiche hierzu Herrn Burkhardt's Arbeit im 32ten Bande der mathematischen Annalen (Beiträge zur Theorie der hyperelliptischen Sigmafunctionen); daselbst sind auch eine Reihe anderer Puncte, die ich im Texte nur flüchtig berühre, in einer Weise besprochen, die sich von den hyperelliptischen Functionen, die Hr. Burkhardt zunächst nur in Betracht zieht, fast ungeändert auf allgemeine Abel'sche Functionen übertragen.

2) Daß auf jedem algebraischen Gebilde Primformen in dem von mir gemeinten Sinne existiren, habe ich zuerst in Bd. 32 der math. Annalen, p. 363 daselbst, angegeben. Ich will aber nicht unterlassen hervorzuheben, daß in der Arbeit von Herrn Pick im 29ten Bande der Annalen für den besonderen Fall der singularitätenfreien ebenen Curve das Quadrat der Primform bereits thatsächlich vorkommt; Hr. Pick hat nur unterlassen hervorzuheben, daß die Quadratwurzel aus dem betreffenden Ausdrucke auf der Riemann'schen Fläche auch noch unverzweigt ist, und hat wohl nicht daran gedacht, diese Quadratwurzel als selbständiges Element in die Theorie einzuführen.

nische Flächen zur Darstellung des algebraischen Gebildes zur Verfügung, so erweist sich Ω, wie vorhin $d\omega$ und späterhin die Form $\mu(x)$, von der Auswahl, die man unter diesen Flächen treffen mag, unabhängig. Durchläuft x einen Periodenweg, bei welchem die Integrale w_i^{xy} um ω_i, die Integrale Y_i^{xy} um $-\eta_i$ wachsen, so erhält Ω den Factor:

$$\pm\, e^{\Sigma_i \eta_i \left(w_i^{xy} + \frac{\omega_i}{2}\right)},$$

wo für gerade d stets das untere Zeichen zu wählen ist, während bei ungeradem d je nach der Beschaffenheit des Weges jedes der beiden Zeichen richtig sein kann; analog, wenn y einen Periodenweg durchläuft. —

Das hiermit besprochene Ω wird am besten als Limes definirt:

$$\Omega(x, y) = \sqrt{d\omega_x \cdot d\omega_y \cdot e^{-P_{x,y}^{x+dx,\, y+dy}}} \;\{\lim.\ dx = 0,\ dy = 0\}.$$

Will man den in dieser Formel angedeuteten Gränzübergang ausführen, so führe man die $(m-1)$ Stellen der kanonischen Fläche ein

$$x',\ x'',\ \ldots\ x^{(m-1)},\ \text{ bez. } y',\ y'',\ \ldots\ y^{(m-1)},$$

welche demselben Werthe von z entsprechen, wie x, bez. y selbst, aber von x, resp. y und unter einander verschieden sind; man hat dann nach dem Abel'schen Theoreme:

$$\Omega(x, y) = \frac{(xy)}{\sqrt{S(x) \cdot S(y)}} \cdot e^{\frac{1}{2}\sum_{1}^{m-1}{}_i\, P_{x,y}^{x^i, y^i}}.$$

Ist $p = 1$, so hat man die Formel:

$$\Theta\left(\int_y^x dw\right) = c \cdot \Omega(x, y);$$

hier soll Θ im allgemeinen Sinne eine ungerade Thetafunction bedeuten, d. h. eine solche, welche sich aus der ungeraden Thetareihe durch Zufügen irgend eines Exponentialfactors

$$e^{aw^2 + b}$$

ergibt; man wird die Constanten a und b verschieden wählen müssen, je nachdem man über das c unserer Formel und über das bei der Construction der Primform Ω benutzte Integral dritter Gattung P verfügt hat; auf bestimmte Festsetzungen hierüber gehen wir an gegenwärtiger Stelle nicht ein. — Ist $p = 0$ und nimmt man, was dann am einfachsten ist, $m = 1$, so geht Ω in die Elementardeterminante (xy) über. — In den beiden niedersten Fällen coïncidirt also Ω mit denjenigen beiden Ausdrücken, welche man bei ihnen allgemein als zugehörige Primfactoren zu verwenden pflegt; man darf erwarten, daß Ω sich auch in den höheren Fällen bewähren wird. Ich möchte mir vorbehalten, hierauf bei späterer Gelegenheit zurückzukommen; gegenwärtig soll die Primform Ω nur erst benutzt werden, um auch für $p > 1$ und solche Argumente, die sich aus beliebig vielen Integralen als Summen zusammensetzen, die 2^{2p} zum algebraischen Gebilde gehörigen allgemeinen Thetafunctionen durch eine einfache, alle Fälle umfassende Formel zu definiren.

Um das hiermit bezeichnete Ziel zu erreichen ist erforderlich, daß ich vorab noch eine andere Formenclasse einführe, die Mittelformen, die ich so nenne, weil sie den Uebergang von den algebraischen Formen zu den transcendenten, d. h. den Ω-Producten, vermitteln. Seien $t', t'', \ldots t^m$ die Stellen der kanonischen Flächen, in denen die Linearform (xt) verschwindet; ich setze dann (was sich als zulässig erweist):

$$\frac{\Omega(xt')\cdot\Omega(xt'')\ \ldots\ldots\ \Omega(xt^m)}{(xt)} = \mu(x)^m\cdot\mu(t')\cdot\mu(t'')\ \ldots\ \mu(t^m).$$

Die hier auftretende Form $\mu(x)$ ist in den x_1, x_2 von der Dimension $-\frac{p}{m}$; sie ist nirgends auf der kanonischen Fläche verzweigt und wird nirgends Null oder Unendlich. Durchläuft x den früher genannten beliebigen Periodenweg (bei dem w_i^{xy} um ω_i, Y_i^{xy} um $-\eta$ zunahm), so erhält $\mu(x)$ den Factor:

$$\pm\, e^{\Sigma\eta_i\left(w_i^x + \frac{\omega_i}{2}\right)};$$

hier ist w_i^x eine Abkürzung für folgende Integralsumme:

$$w_i^x = \frac{1}{m}\left\{\int_{t'}^{x} dw_i + \int_{t''}^{x} dw_i + \ldots \int_{t^m}^{x} dw_i\right\},$$

die von dem besonderen Werthe, den wir dem t gegeben haben mögen, unabhängig ist. Man beachte dabei, daß die Definition dieses w_i^x und überhaupt des $\mu(x)$ im Sinne der analytischen Functionentheorie keine eindeutige ist: es gibt m^{2p} modulo der Perioden zu unterscheidende und also auf der kanonischen Fläche unter einander analytisch nicht zusammenhängende Werthereihen des w_i^x. Die hieraus fließende Unbestimmtheit in der Bedeutung der vorstehenden Formeln ist indeß für das Folgende nicht von Belang, weil dort immer eine durch m theilbare Zahl von Factoren $\mu(x)$ zu einem Product vereinigt auftreten wird, wobei es denn genügt, um zu einer analytisch einheitlichen Definition des Productes zu gelangen, für $\mu(x)$, bez. w_i^x bei sämmtlichen Factoren dieselbe Definition zu Grunde zu legen. — Im hyperelliptischen Falle coïncidirt das hier definirte $\mu(x)$ mit demjenigen Ausdrucke, den ich in meiner Note vom 5. Nov. 1887 mit

$$\left\{\frac{X(x)}{\sqrt{f(x)}}\right\}^{1/4}$$

bezeichnet habe[1]).

Es seien nun

$$x',\ x'',\ \ldots\ldots\ x^{m\nu}$$

irgend $m\nu$ Stellen des algebraischen Gebildes; ich will dann folgende Integralsummen betrachten:

$$w_i = \int^{x'} dw_i + \int^{x''} dw_i + \ldots \int^{x^{m\nu}} dw_i,\ (i = 1, 2, \ldots p),$$

wo die unteren Gränzen in die ν fach gezählten m Puncte $t', t'', \ldots t^m$ hineingelegt sein sollen, in denen das kanonische z irgend einen vorgegebenen Werth t annimmt. Unter Θ irgend eine der 2^{2p} auf dem algebraischen Gebilde existirenden allgemeinen Thetafunctionen verstanden, verlangen wir jetzt

$$\Theta(w_1,\ w_2,\ \ldots\ w_p)$$

durch die bisher gebrauchten Functionszeichen darzustellen. —

Wir bestimmen zunächst die Verhältnisse dieser Θ als Quotienten algebraischer Formen. Dies gelingt leicht durch Verallgemeinerung der Resultate, welche Weber für $p = 3$, Nöther für beliebiges p gegeben hat[2]). Unter einer Berührungsform $\Phi(x_1, x_2)$ verstehe ich eine solche auf unserer kanonischen Fläche existirende algebraische Form, welche überall, wo sie verschwindet, doppelt verschwindet, unter einer Wurzelform die Quadratwurzel aus einer Berührungsform, also $\sqrt{\Phi}$. Für jeden Grad n, wo $mn \geqq p$, gibt es 2^{2p} Systeme solcher Wurzelformen, deren jedes von einer Anzahl ϱ willkürlicher Parameter $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$

1) In meiner Arbeit im 32ten Bande der math. Annalen habe ich die Einführung einer besonderen $\mu(x)$ überhaupt vermieden; dies gelingt aber nur auf Kosten der Symmetrie der Endformel.

2) Weber in seiner Schrift: Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3 (Berlin 1876), Nöther im 28ten Bande der mathematischen Annalen.

in der Weise linear abhängt, daß die allgemeine Wurzelform $\sqrt{\Phi}$ des Systems aus ρ linear unabhängigen festgewählten Wurzelformen: $\sqrt{\Phi_1}$, $\sqrt{\Phi_2}$, ... $\sqrt{\Phi_\varrho}$ folgendermaßen zusammengesetzt werden kann:

$$\sqrt{\Phi} = u_1\sqrt{\Phi_1} + u_2\sqrt{\Phi_2} + \dots\dots u_\varrho\sqrt{\Phi_\varrho}.$$

Dabei ist, nach dem Riemann-Roch'schen Satz:

$$\rho = \frac{mn}{2} + 1 - p + \tau,$$

wo τ die Zahl der linear unabhängigen Formen erster Gattung φ ist, die für die Nullpuncte irgend einer $\sqrt{\Phi}$ des Systems verschwinden

Ich will nun insbesondere

$$n = 2\nu + d$$

wählen, außerdem zunächst annehmen, daß $\tau = 0$ sei. So wird

$$\rho = \frac{mn}{2} + 1 - p = m\nu,$$

d. h. gerade gleich der Zahl der in unseren Integralsummen vorkommenden oberen Gränzpuncte x', x'', ... Mit Φ_1', Φ_1'', ...; Φ_2', Φ_2'', ... mag jetzt bezeichnet werden, was aus Φ_1, Φ_2, ... wird, wenn man in dieselben insbesondere die x', x'', ... einträgt. Ich construire mir dann die Determinante:

$$D = c\begin{vmatrix} \sqrt{\Phi_1'} & \sqrt{\Phi_1'} & \dots\dots & \sqrt{\Phi_1^{m\nu}} \\ \sqrt{\Phi_2'} & \dots\dots & & \\ \dots\dots & & & \\ \dots\dots & & & \\ \sqrt{\Phi_{m\nu}'} & \sqrt{\Phi_{m\nu}''} & \dots\dots & \sqrt{\Phi_{m\nu}^{m\nu}} \end{vmatrix},$$

unter c eine beliebige Constante verstanden. Jetzt ist jeder Thetacharakteristik ein bestimmtes System der hier in Betracht gezogenen Wurzelformen $\sqrt{\Phi}$ und also eine bestimmte Determinante D zugeordnet. Und das einfache Resultat, welches wir bezüglich algebraischer Darstellung unserer Thetaquotienten finden, ist dieses: daß sich die 2^{2p} Thetafunctionen $\Theta(w_1\,w_2\dots w_p)$ schlechtweg verhalten wie die zugehörigen Determinanten D.

Hierin ist eingeschlossen oder doch jedenfalls leicht hinzuzufügen, was geschieht, wenn für das gerade in Betracht gezogene System von Wurzelformen $(2\nu + d)^{\text{ter}}$ Ordnung τ von Null verschieden ist. Θ verschwindet, mit D zusammen, im Falle $\tau = 0$, wenn die $m\nu$ Puncte x', x'', ... zufälligerweise so gewählt sind, daß sie Nullpunkte ein und derselben Wurzelform $\sqrt{\Phi}$ des in Betracht kommenden Systems sind. Ist nun $\tau > 0$, so ist dies bei beliebiger Lage der Puncte $x', x'', \ldots$ der Fall; es verschwindet in denselben dann sogar ein ganzes $(\tau-1)$fach unendliches System von Wurzelformen $\sqrt{\Phi}$ (d. h. ein solches, welches τ linear auftretende willkürliche Parameter homogen enthält). Dem entspricht nun, daß Θ dann identisch τ-fach verschwindet, d. h. mitsammt seinen ersten, zweiten, ... $(\tau-1)$ten nach den $w_1, w_2, \ldots w_p$ genommenen Differentialquotienten[1]).

Haben wir so die Verhältnisse der Θ algebraisch festgelegt, so erhalten wir nun auch einfach die Schlußformel für das einzelne Θ. Wir haben:

$$\Theta(w_1 \ldots . w_p) = D \cdot \frac{\Pi_i\, \mu(x^i)^{m\nu}}{\Pi_i \Pi_k\, \Omega(x^i, x^k)}, \quad (i, k = 1, 2, \ldots m\nu;\ i < k).$$

Diese Formel begreift sich sofort, wenn man die Eigenschaften des D mit denen von Θ vergleicht. Von gemeinsamen Nullstellen des D und des Θ war bereits die Rede. Aber D verschwindet auch, ohne daß Θ es thut, nämlich wenn irgend zwei der Stellen $x', x'', \ldots . x^{m\nu}$ zusammenfallen. Deßhalb tritt in unserer Formel rechter Hand der Nenner $\Pi\Pi\Omega(x^i, x^k)$ hinzu, der diesen Unterschied aufhebt. Nun ist D eine Form der Variabelreihen x_1', x_2'; x_1'', x_2''; .... vom $\left(\nu + \frac{d}{2}\right)$ten Grade in jeder derselben. Indem wir D durch das Primformenproduct dividiren, entsteht also ein Quotient, der in jeder Variabelreihe vom Grade $p\nu$ ist. Aber Θ ist eine eigentliche Function der Stellen $x', x'', \ldots . x^{m\nu}$, d. h. in jeder Variabelreihe vom 0ten Grade. Um diesen Unterschied in der Dimension abzugleichen, eben dazu dient das in unserer Formel rechter Hand zugesetzte Product von Mittelformen. — Ich bemerke noch, daß die hier aufgestellte Formel für $m = 2p-2$, $\nu = 1$ in

1) In diese Regel ist selbstverständlich eingeschlossen, was über das identische Verschwinden der hyperelliptischen Theta zu bemerken ist. Eine hübsche Folgerung ergibt sich auch für singularitätenfreie ebene Curven ungerader Ordnung m. Durch eine briefliche Mittheilung von Herrn Pick bin ich darauf aufmerksam geworden, daß bei ihnen immer ein System der hier in Betracht kommenden Wurzelformen $(2\nu + m-3)$ter Ordnung rational ist; dasselbe besteht einfach aus der Gesammtheit der in x_1, x_2, x_3 (dem Dreieckscoordinaten der Ebene) rationalen Formen $\nu + \frac{m-3}{2}$ Ordnung. Dementsprechend gibt es bei diesen Curven eine ausgezeichnete Θ-function, die für $\nu \leqq \frac{m-3}{2}$ $\frac{(m-2\nu)^2-1}{8}$-fach identisch verschwindet.

diejenige übergeht, die in den Comptes Rendus der Pariser Akademie vom 11. Februar mitgetheilt ist, während sie sich für $m = 2$ mit derjenigen deckt, die für den hyperelliptischen Fall in der Note vom 5. Nov. 1887 aufgestellt wurde.

Universität.

Die medizinische Fakultät der Georg-Augusts-Universität hat beschlossen, dem Verfasser der Arbeit, welche auf die von ihr in dieser Zeitschrift 1888 Nr. 7 ausgeschriebene Preisaufgabe eingegangen ist, Herrn

Candid. med. Hans Berkenbusch
aus Göttingen

den vollen Preis aus den Einkünften der Petsche-Stiftung im Betrage von dreihundert zweiundzwanzig Mark zuzuerkennen.

Preisstiftung der Wittwe Petsche, geb. Labarre.

Für den im Jahre 1889 aus der Preisstiftung der Wittwe Petsche, geb. Labarre, von der philosophischen Fakultät der Georg-Augusts-Universität zu vergebenden Preis im Betrage von 170 ℳ hatte die philosophische Fakultät die Aufgabe gestellt:

„Die Fakultät wünscht eine Bearbeitung der Potenzentwickelungen der hyperelliptischen Sigmafunctionen, bei welchen jedenfalls die zweiten Glieder der genannten Entwickelungen wirklich ausgerechnet werden."

Unter Beobachtung der bestehenden Vorschriften ist eine Preisbewerbungsschrift eingegangen, welche mit dem Sinnspruche versehen ist: *„C'est la conscience de se mouvoir dans l'identique, qui fait la joie de l'algébriste"*.

Der Verfasser dieser Schrift hat die Lösung der gestellten Aufgabe auf unmittelbar rechnerischem Wege in Angriff genommen. Obgleich die hierbei entstehenden Formeln sehr verwickelt sind, führt der Verfasser die Untersuchung in ebenso durchsichtiger als genauer Darstellung wenigstens für den zunächst in Betracht kommenden Fall bis zu Ende durch. Sowohl für den Fleiß des Verfassers als auch für seine tüchtige mathematische Ausbildung legt diese Arbeit ein sehr günstiges Zeugniß ab.

Die Fakultät hat hiernach kein Bedenken getragen, dem Verfasser den vollen Preis zuzuerkennen.

Die Eröffnung des versiegelten mit dem oben angegebenen Sinnspruche versehenen Briefumschlages, welche in der Sitzung der Fakultät am 21ten Februar 1889 vorgenommen wurde, ergab als Verfasser

Herrn Johannes Schröder, cand. math.,
aus Hamburg.

Der z. Dekan der philosophischen Fakultät.
H. A. Schwarz.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Januar 1889.
(Fortsetzung.)

a. Memorie della R. Accademia delle scienze dell' istituto di Bologna. Serie IV, Tomo VIII.
b. Note sur les derniers progrès de la question de l'unification du calendrier dans ses rapports avec l'heure universelle. Bologne 1888.
Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XXIV. Disp. 1e. 1888—89. Torino.
a. Bollettino delle pubblicazioni italiane 1889. Nr. 73.
b. Indici del bollettino delle pubblicazioni italiane 1888. Firenze 1888.
Bollettino delle opere moderne straniere. Vol. III. N. 5. 1888. Roma 1888.
Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas. Vol. VIII. N. 6. Coimbra 1887.
Nature. Vol. 39. 1001—1004.
Monthly notices of the R. astronomical society. Vol. XLIX. N. 2. 1888.
Proceedings of the Royal society. Vol. XLV. N. 273.
Proceedings of the Royal Irish Academy. Third series. Vol. 1. N. 1. Dublin 1888.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

3. April. №. 8. 1889.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 2. März 1889.

Ueber die Bildungsweise und geometrische Konstruction der Konfigurationen 10_3.

Von

H. Schroeter, correspond. Mitglied.

Vorgelegt von F. Klein.

In einer früheren Arbeit [1]) habe ich eine besondere Klasse von Konfigurationen n_3, welche man die „homogenen" oder „regelmäßigen" nennen kann, auf lineare Weise zu konstruiren gelehrt; diese Construction tritt erst für $n > 9$ in Kraft. Für $n = 9$ hat zuerst Herr S. Kantor [2]) nachgewiesen, daß es nur drei Konfigurationen 9_3 giebt, wie dieselben hergestellt werden und mit der Kurve dritter Ordnung im Zusammenhange stehen. Für $n = 10$ hat Herr S. Kantor in einer zweiten Abhandlung [3]) zuerst die sämmtlichen wesentlich von einander verschiedenen zehn Gestalten der Kfg. 10_3

1) „Ueber lineare Konstructionen zur Herstellung der Konfigurationen n_3". (Nachr. der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, No. 9, 1888.)

2) S. Kantor: „Ueber die Konfigurationen (3, 3) mit den Indices 8, 9 und ihrem Zusammenhang mit den Kurven dritter Ordnung". (Sitz.-Ber. d. Wien. Acad. v. 17. Nov. 1881.)

3) S. Kantor: „Die Konfigurationen $(3, 3)_{10}$". (Sitz.-Ber. d. Wien. Acad. v. 15. Dec. 1881.)

aufgestellt, unter denen die beiden homogenen, nämlich die bekannte Désargues'sche Figur und die oben erwähnte regelmäßige 10_3 (bei Kantor A und B) vorkommen. Von diesen beiden Kantor'schen Abhandlungen bedaure ich, nicht vor der Veröffentlichung meiner ersten Arbeit Kenntnis genommen zu haben, in welcher ich nur auf die Untersuchungen von V. Martinetti und A. Schoenflies [1]) Bezug genommen habe; ich hole daher diese Versäumnis nach. Das Studium der zweiten inhaltreichen Abhandlung des Herrn S. Kantor führte mich dazu, die verschiedenen geometrischen Konstructionen, aus welchen derselbe zu dem vollständigen Systeme der zehn Kfg. 10_3 gelangt, rücksichtlich ihrer wirklichen Ausführbarkeit zu prüfen und (die kombinatorische Bildungsweise der Kfg. vorausgesetzt) ihre geometrische Konstruction aufzusuchen; dabei zeigte sich die eigenthümliche und unerwartete Erscheinung, daß nur neun Kfg. 10_3 geometrisch konstruirbar sind, dagegen die zehnte (bei Kantor C) obwohl kombinatorisch zulässig, doch geometrisch unausführbar ist. Die Auffindung dieser Thatsache rechtfertigt es daher wohl, das Problem nochmals in Angriff zu nehmen und die kombinatorische Bildungsweise der Konfiguration 10_3 von ihrer geometrischen Konstruktion vollständig zu trennen. Ich versuche nun im Folgenden, auf die möglichst einfachste Art die sämmtlichen Kfg. 10_3 aus rein kombinatorischem Gesichtspunkte aufzustellen, indem ich mich des Kantor'schen Prinzips der Restfiguren bediene (a. a. O. VII), von denen einige von Herrn S. Kantor als thatsächlich eintretend angegebene Eigenschaften begründet werden. Hieraus geht der allerdings etwas weitläufige aber erschöpfende Nachweis hervor, daß in der That nur zehn wesentlich von einander verschiedene Kfg. 10_3, wie sie Herr Kantor angegeben hat und keine weiteren mehr möglich sind. Sind diese nun erst erschlossen, so kann man durch ein sehr einfaches Verfahren, welches mit dem von Herrn S. Kantor (a. a. O. XI) angegebenen im Wesentlichen und nothwendig übereinkommt, sehr schnell von der Désargues'schen Figur ausgehend durch successive Versetzung immer nur zweier Elemente sämmtliche übrigen Kfg. erhalten, wobei man aber, um Wiederholungen zu vermeiden, die Vorsicht gebrauchen muß, nur solche

---

1) V. Martinetti: „Sulle configurationi piane μ_3". (Ann. di matem. del Brioschi, Serie IIa, tome XV, 1. Apr. 1887.)

A. Schoenflies: „Ueber die regelmäßigen Konfigurationen n_3". (Math. Ann. Bd. XXXI, S. 43.)

A. Schoenflies: „Ueber einige ebene Konfigurationen und die zugehörigen Gruppen von Substitutionen". (Nachr. d. K. G. d. W. zu Göttingen, No. 14, 1887.)

Versetzungen vorzunehmen, die auf neue Kfg. führen; auch habe ich an mehreren Stellen diejenigen Permutationen der Elemente angegeben, durch welche verschiedene Gestalten, unter denen eine und dieselbe Konfiguration auftreten kann, in einander übergeführt werden.

An zweiter Stelle gehe ich sodann zur geometrischen Konstruction der gefundenen Kfg. 10_3 über und führe in jedem Falle dieselbe vollständig durch, so daß die Ausführung der Zeichnung allein mittelst des Lineals angegeben wird. Hierbei tritt die oben erwähnte Erscheinung auf, daß für eine der Kfg. die Konstruction unausführbar ist, wie ich nachweise.

Endlich wird noch für jede der zehn Kfg. (mit Ausnahme der unkonstruirbaren) angegeben, wie sich aus den Kfg.-Geraden ein Zehneck bilden (d. h. die Kfg. im Zusammenhange durchlaufen) läßt, welches sich selbst ein- und also auch umbeschrieben ist, d.h. bei dem jede Seite noch durch eine dritte Ecke läuft und jede Ecke noch in einer dritten Seite liegt.

---

1. Eine Konfiguration 10_3 ist eine derartige Gruppirung von zehn Elementen in zehn Kolonnen zu je dreien, daß jedes Element in drei und nur in drei Kolonnen auftritt, keine Kolonne zwei gleiche Elemente enthält und keine zwei Kolonnen mehr als ein gleiches Element enthalten.

Man kleidet diese rein kombinatorische Aufgabe der Bildungsweise einer Kfg. 10_3 in ein geometrisches Gewand, wenn man für die Elemente Punkte und für die Kolonnen Gerade setzt, also eine Figur von zehn Punkten und zehn Geraden aufsucht, die so liegen, daß auf jeder der zehn Geraden drei der zehn Punkte sich befinden und durch jeden der zehn Punkte drei der zehn Geraden gehen. Indessen bleibt es eine offene Frage, ob eine kombinatorisch hergestellte Kfg. 10_3, die den geforderten Bedingungen genügt, auch eine ihr aequivalente geometrische Figur zuläßt, was, wie wir sehen werden, nicht immer der Fall ist. Unabhängig davon werden wir uns der Kürze wegen meist der geometrischen Ausdrucksweise bedienen.

Den einfachsten Fall einer Kfg. 10_3 bietet die Désargues-sche Figur zweier perspectiv liegenden Dreiecke

$$\begin{matrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{matrix}$$

bei denen die drei Verbindungsstrahlen entsprechender Ecken

$$|23| \qquad |45| \qquad |67|$$

sich in einem Punkte 1 schneiden und bekanntlich die Schnittpunkte entsprechender Seiten

$$(24, 35) = 8 \qquad (26, 37) = 9 \qquad (46, 57) = 10$$

sich auf einer Geraden $|8\ 9\ 10|$ befinden; wir haben dann die Kfg. der zehn Elemente 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 vertheilt in die zehn Kolonnen:

	1	1	1	8	2	3	2	3	4	5
I.	2	4	6	9	4	5	6	7	6	7
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10

welche den vorgeschriebenen Bedingungen der Kfg. genügt. Wir bezeichnen diese Kfg. mit I., bei Kantor heißt sie B, bei Martinetti X.

Es ist leicht aus dieser Kfg. neue abzuleiten, welche ebenfalls sämmtlichen Bedingungen genügen; man braucht nur gewisse zwei Elemente in ihren Stellen mit einander zu vertauschen, ohne die vorgeschriebenen Bedingungen zu verletzen, z. B. in I.

1	1	1	8	2	3	2	3	4	5
2	4	6	9	4	(5)	6	(7)	6	7
3	5	7	10	8	8	9	9	10	10

die beiden eingeklammerten Zahlen mit einander zu vertauschen, so erhält man eine neue Kfg.

	1	1	1	8	2	3	2	3	4	5
II.	2	4	6	9	4	7	6	5	6	7
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10

die ebenfalls sämmtlichen Kfg.-Bedingungen genügt und doch von der vorigen verschieden ist, weil hier zwei Elemente mit einander verbunden sind, d. h. auf einer Kfg.-Geraden liegen (7 und 8, 5 und 9), die in der vorigen getrennt waren, d. h. nicht auf einer Kfg.-Geraden lagen.

Solcher Vertauschungen kann man eine große Anzahl vornehmen; aber es wird nicht immer vorkommen, daß die neue Kfg. von jeder der vorhergehenden verschieden ist, wenn sie auch eine scheinbar verschiedene Gestalt annimmt. Vertauscht man z. B. in der ursprünglichen Kfg. I.

1	1	1	8	2	3	(2)	3	(4)	5
2	4	6	9	4	5	6	7	6	7
3	5	7	10	8	8	9	9	10	10

die beiden jetzt eingeklammerten Elemente, so erhält man eine Kfg.

1	1	1	8	2	3	4	3	2	5
2	4	6	9	4	5	6	7	6	7
3	5	7	10	8	8	9	9	10	10

die mit II. identisch ist, denn man braucht nur an Stelle der Elemente in II.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

zu setzen

1 6 7 4 5 2 3 9 10 8

so erhält man die letzte Kfg. Durch eine bloße Permutation sämmtlicher Elemente erhalten dieselben zwar andere Namen, aber wo früher zwei Punkte durch eine Kfg.-Gerade verbunden (oder nicht verbunden) waren, da werden sie auch in der neuen Benennung verbunden (oder nicht verbunden) sein; das Wesentliche der Kfg. wird also nicht geändert. Wir nennen demgemäß zwei Kfg. identisch, wenn die eine durch eine bloße Permutation sämmtlicher Elemente in die andere übergeführt werden kann; dagegen heißen zwei Kfg. verschieden von einander, wenn die eine durch keine Permutation der Elemente in die andere übergeführt werden kann; und es wird nothwendig sein, ein Kriterium zu ermitteln, durch welches erkennbar ist, ob eine Kfg. mit einer andern identisch oder von ihr verschieden ist; ein solches Kriterium liefern die Kantor'schen Restfiguren.

2. Ist eine beliebige Kfg. 10_3 gegeben, so kann man von einem ihrer Punkte ausgehen; durch denselben gehen drei Kfg.-Gerade; jede derselben enthält außer dem ersten noch zwei weitere Kfg.-Punkte; man hat also sieben Kfg.-Punkte, und es bleiben nur noch drei übrig, welche man den zu dem ersten angenommenen Punkte zugehörigen „Rest“ oder „die Restfigur“ nennt.

Wenn also der Punkt $\mathfrak{b}$ in dem zu $\mathfrak{a}$ zugehörigen Reste vorkommt, so können $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nicht auf einer Kfg.-Geraden liegen, d. h. nicht verbunden sein, und umgekehrt, wenn zwei Punkte nicht durch eine Kfg.-Gerade mit einander verbunden sind, so muß jeder von ihnen in der zu dem andern zugehörigen Restfigur enthalten sein.

Die drei Punkte einer Restfigur können nur auf drei verschiedene Arten gelegen sein, nämlich:

1) Die drei Restpunkte liegen auf einer Konfigurations-Geraden; wir bezeichnen dies nach Kantor (···) und nennen solche Restfigur einen Einer.

2) Die drei Restpunkte bilden ein Dreieck, von welchen zwei Seiten Kfg.-Gerade sind, die dritte aber nicht; solche Restfigur (nach Kantor Λ bezeichnet) nennen wir einen Zweier.

3) Die drei Restpunkte bilden ein Dreieck, von welchem alle drei Seiten Kfg.-Gerade sind; solche Restfigur (nach Kantor Δ bezeichnet) nennen wir einen Dreier.

Andere Restfiguren können nicht vorkommen; denn liegen die drei Restpunkte in einer geraden Linie, so muß dieselbe eine Kfg.-Gerade sein; wäre sie nämlich keine, so müßten durch jeden ihrer drei Restpunkte drei Kfg.-Gerade gehen, also schon neun, und zusammen mit den drei ersten Kfg.-Geraden (die durch den anfänglichen Punkt gehen) zwölf, was den Bedingungen einer 10_3 zuwiderläuft. Ist dagegen die Restfigur ein Einer, d. h. selbst eine Kfg.-Gerade, so gehen durch jeden ihrer drei Kfg.-Punkte nur noch zwei weitere Kfg.-Gerade; wir haben also nur $1 + 3.2 + 3 = 10$ Kfg.-Gerade, wie es nothwendig ist.

Liegen ferner die drei Restpunkte nicht auf einer Geraden, so bilden sie ein Dreieck; wäre nun keine der drei Seiten desselben eine Kfg.-Gerade, so müßten wiederum durch jeden der drei Restpunkte drei verschiedene Kfg.-Gerade gehen; wir hätten also im Ganzen $9 + 3 = 12$ Kfg.-Gerade, was widersinnig ist. Wäre aber nur eine der drei Seiten eine Kfg.-Gerade, die beiden andern nicht, so hätte man durch jeden der beiden Endpunkte der ersteren noch zwei weitere Gerade und durch die dritte Dreiecksecke drei, also zusammen $1 + 2.2 + 3 + 3 = 11$ Kfg.-Gerade, was ebenfalls widersinnig ist. Sind dagegen zwei Seiten des Dreiecks der Restfigur Kfg.-Gerade und die dritte nicht, so haben wir $2 + 2.2 + 1 + 3 = 10$ Kfg.-Gerade, wie es erforderlich ist.

Sind endlich alle drei Seiten des Dreiecks der Restfigur Kfg.-Gerade, so hat man durch diese Restpunkte außer den Dreiecksseiten noch je eine Kfg.-Gerade, also zusammen $3 + 3 + 3 = 9$ Kfg.-Gerade; es muß also noch eine zehnte Kfg.-Gerade vorhanden sein; diese kann nur drei von denjenigen sechs Punkten enthalten, die nicht mit dem Ausgangspunkte und den drei Restpunkten identisch sind, da durch jeden dieser vier Punkte bereits drei Kfg.-Gerade gehen. Wir schließen also:

Wenn die zu einem Kfg.-Punkte $\mathfrak{A}$ zugehörige Restfigur ein Dreier ist, so müssen von den sechs Kfg.-Punkten, welche paarweise auf den drei von $\mathfrak{A}$ ausgehenden Kfg.-Geraden liegen, nothwendig drei auf einer neuen Kfg.-Geraden liegen.

Hierdurch ist nachgewiesen, daß für eine Restfigur nur diese drei Möglichkeiten vorhanden sind, daß sie ein Einer (...), ein Zweier (Λ) oder ein Dreier (Δ) ist. Nennen wir nun $\mathfrak{A}$ den Ausgangspunkt, $\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ die drei Restpunkte, ferner $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ die drei Punktepaare, welche auf den drei von $\mathfrak{A}$ ausgehenden Kfg.-Geraden liegen, dann können wir die Kfg. selbst bilden für die drei verschiedenen Fälle, daß die Restfigur ein Einer, Zweier oder Dreier ist und erhalten die drei Schemata:

	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	.	.	.	.	.	.
A)	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{C}$	.	.	.	.	.	.
	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{e}$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{D}$

wo an Stelle der zwölf Punkte die Elemente $\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}\;\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}\;\mathfrak{d}\,\mathfrak{d}\;\mathfrak{e}\,\mathfrak{e}\;\mathfrak{f}\,\mathfrak{f}\;\mathfrak{g}\,\mathfrak{g}$ den Bedingungen der Kfg. gemäß zu setzen sind,

	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	.	.	.	.	.	.	.
B)	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{B}$	.	.	.	.	.
	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{e}$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{D}$

wo an Stelle der zwölf Punkte die Elemente $\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}\;\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}\;\mathfrak{d}\,\mathfrak{d}\;\mathfrak{e}\,\mathfrak{e}\;\mathfrak{f}\,\mathfrak{f}\;\mathfrak{g}\,\mathfrak{g}$ den Bedingungen der Kfg. gemäß zu setzen sind,

	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	.	.	.	.	.	.	$\mathfrak{b}$
C)	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$	.	.	.	$\mathfrak{d}$
	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{e}$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{f}$

wo an Stelle der neun Punkte die Elemente $\mathfrak{b}\;\mathfrak{d}\;\mathfrak{f}\;\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}\;\mathfrak{e}\,\mathfrak{e}\;\mathfrak{g}\,\mathfrak{g}$ den Bedingungen der Kfg. gemäß zu setzen sind.

Die Ausfüllung der unbesetzten Stellen ist natürlich in jedem dieser drei Fälle auf mannigfache Art möglich und führt zu den verschiedenen Arten von Kfg. 10_3.

3. Wir haben nun bei einer gegebenen Kfg. nicht blos *eine* Restfigur, sondern da wir jeden der zehn Kfg.-Punkte zum Ausgangspunkte wählen können *zehn* Restfiguren, die gleichartig oder verschieden, Einer, Zweier und Dreier sein können, und welche wir das „*Restesystem*“ nennen wollen.

Wenn irgend eine Kfg. 10_3 gegeben ist und wir ersetzen die Elemente derselben

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

durch irgend eine Permutation aus denselben, so muß in beiden Fällen das System der sämmtlichen zehn Restfiguren nach Art und Anzahl derselben das gleiche sein d. h. soviel Einer, Zweier und Dreier, als in dem einen Restsystem vorkommen, müssen auch in dem andern vorkommen; denn wären vor der Permutation in den Kfg. zwei Elemente verbunden (oder nicht verbunden) so müssen sie es auch nach der Permutation sein, wenn sie auch andere Namen erhalten haben. Hieraus folgt umgekehrt, daß, wenn zwei Kfg. 10_3 verschiedene Restsysteme liefern, nicht die eine aus der andern durch eine bloße Permutation der Elemente hervorgegangen sein kann, denn sonst müßten sie nach Art und Anzahl gleiche Restsysteme liefern. Wir haben also durch Bildung der Restsysteme ein Kriterium gewonnen, um zu entscheiden, ob zwei Kfg. identisch oder verschieden von einander sind. Bilden wir z. B. für die Kfg. I, die Désargues'sche Figur der Reihe nach zu den sämmtlichen Elementen 1 2 ... 10 die Restfiguren und schreiben sie darunter, so erhalten wir

	1	1	1	8	2	3	2	3	4	5
I.	2	4	6	9	4	5	6	7	6	7
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10
Reste:	8 9 10	5 7 10	4 6 10	3 7 9	2 6 9	3 5 8	2 4 8	1 6 7	1 4 5	1 2 3
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

für sämmtliche Restfiguren Einer; daher wird diese Kfg. I eine homogene genannt.

Anders verhält es sich mit der Kfg. II (s. o. S. 196); bilden wir zu derselben das Restsystem, so erhalten wir:

	1	1	1	8	2	3	2	3	4	5
II.	2	4	6	9	4	7	6	5	6	7
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10
Reste:	8 9 10	5 7 10	4 6 10	3 7 9	2 6 8	3 5 8	2 4 9	1 5 6	1 4 7	1 2 3
	...	...	...	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	...

als Restfiguren vier Einer und sechs Zweier; die Kfg. I. und II. sind also wesentlich von einander verschieden d. h. die eine kann nicht durch eine Permutation der Elemente in die andere übergeführt werden.

4. Wir wollen nun, bevor wir zur Bildungsweise der verschiedenen Kfg. 10_3 übergehen, zunächst einige allgemeine Eigenschaften eines Restesystems in's Auge fassen, wie sie aus der Betrachtung der drei Schemata A) B) C) (s. o. S. 199) hervortreten. In jedem dieser drei Schemata ist die zu $\mathfrak{A}$ zugehörige Restfigur $\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$; suchen wir nun z. B. zu $\mathfrak{B}$ die zugehörige Restfigur auf, so müssen wir die drei Kolonnen nehmen, in welchen $\mathfrak{B}$ vorkommt und die in ihnen enthaltenen sieben Elemente fortnehmen, dann bleiben die drei übrigen als Restfigur zurück. Es ist aber ersichtlich, daß in keiner der drei Kolonnen, welche $\mathfrak{B}$ enthalten, das Element $\mathfrak{A}$ vorkommen kann, folglich muß $\mathfrak{A}$ in der Restfigur auftreten, also:

Wenn $\mathfrak{B}$ in der zu $\mathfrak{A}$ zugehörigen Restfigur vorkommt, so muß auch 𝔄 in der zu 𝔅 zugehörigen Restfigur vorkommen.

Jede Restfigur besteht aus drei Kfg.-Punkten und enthält entweder eine, oder zwei oder drei Kfg.-Gerade, je nachdem sie ein Einer, Zweier oder Dreier ist. Durch jeden der drei Kfg.-Punkte einer Restfigur muß daher mindestens eine in derselben enthaltene Kfg.-Gerade gehen; daher kann ein Kfg.-Punkt überhaupt höchstens in drei verschiedenen Restfiguren des Restesystems auftreten, denn sonst gingen durch ihn mehr als drei Kfg.-Gerade, was unzulässig ist; er muß aber auch mindestens in drei verschiedenen Restfiguren des Restesystems auftreten; denn wir haben zehn Restfiguren, jede mit drei Kfg.-Punkten, also im Ganzen dreißig Punkte, die in den Restfiguren auftreten; wenn nun einer der zehn Kfg.-Punkte in weniger als drei Restfiguren aufträte, dann müßte ein anderer in mehr als drei Restfiguren auftreten, damit wir überhaupt dreißig Punkte in den Restfiguren hätten; da letzteres aber nicht möglich ist, so schließen wir:

Jeder Kfg.-Punkt muß in drei verschiedenen Restfiguren des Restesystems je einmal auftreten und sonst nicht weiter.

Hieraus folgt mit Rücksicht auf den vorigen Satz:

Wenn man sich in dem Restesystem drei solche Restfiguren aufsucht, die einen gemeinsamen Kfg.-Punkt 𝔭 haben, alsdann müssen diejenigen drei Kfg.-Punkte, zu welchen die drei Restfiguren gehören, selbst eine Restfigur bilden und zwar diejenige, welche dem Punkte 𝔭 zugehört, und auch umgekehrt.

Betrachten wir das Schema A) (s. o. S. 199), in welchem die zu 𝔄 zugehörige Restfigur der Einer | 𝔅 ℭ 𝔇 | ist, so sehen wir, daß in der Restfigur zu 𝔅 die Elemente ℭ und 𝔇 nicht vorkommen können; ebenso können in der Restfigur zu ℭ die Elemente 𝔅 und 𝔇, sowie in der Restfigur zu 𝔇 die Elemente 𝔅 und ℭ nicht vorkommen. Nehmen wir aber einen der übrigen sechs Punkte 𝔟 𝔠 𝔡 𝔢 𝔣 𝔤, z. B. den Punkt 𝔟, so sehen wir, daß derselbe den Bedingungen der Kfg. gemäß nicht gleichzeitig in zwei Kolonnen stehen kann, die 𝔅 und 𝔅, oder ℭ und ℭ, oder 𝔇 und 𝔇 enthalten; er muß also in zwei Kolonnen stehen, welche ℭ und 𝔇, oder 𝔅 und 𝔇, oder 𝔅 und ℭ enthalten; die Restfigur zu 𝔟 kann also, mag sie ein Einer, Zweier oder Dreier sein, immer nur einen der drei Punkte 𝔅 ℭ 𝔇 enthalten; und dasselbe gilt von 𝔠 𝔡 𝔢 𝔣 𝔤; wir schließen also:

Wenn in dem Restesystem ein Einer vorkommt, so kann diese Kfg.-Gerade in keiner der übrigen Restfiguren mehr vorkommen, mögen diese Einer, Zweier oder Dreier sein.

Wenn die zu dem Kfg.-Punkte $\mathfrak{A}$ zugehörige Restfigur der Einer $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ ist, so gehen durch $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ noch je zwei weitere Kfg.-Gerade; also haben wir sieben und es bleiben nur noch die drei Kfg.-Geraden übrig, welche sich in $\mathfrak{A}$ schneiden. Nennen wir mit Kantor diese drei übrigen Kfg.-Geraden die correlative Restfigur, welche zu der Kfg.-Geraden $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}| = a$ zugehört, so können wir den Satz aussprechen:

Wenn zu einem Kfg.-Punkte $\mathfrak{A}$ eine Restfigur zugehört, die ein Einer ist $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}| = a$, so gehört auch zu der Kfg.-Geraden a eine correlative Restfigur bcd, welche aus drei Kfg.-Geraden besteht, die durch einen und denselben Punkt, nämlich durch $\mathfrak{A}$, laufen. (Kantor a. a. O. S. 1299).

5. Wenn wir uns darüber Auskunft verschaffen wollen, wie oft eine Kfg.-Gerade in den sämmtlichen Restfiguren eines Restesystems auftreten kann, so liefert dieselbe der folgende Satz, den wir sogleich beweisen wollen:

Unter den sämmtlichen Geraden, aus welchen sich die zehn Restfiguren des Restesystems zusammensetzen als Einer, Zweier oder Dreier muß jede Kfg.-Gerade mindestens einmal und kann höchstens dreimal vorkommen; das Minimum (10) tritt also ein, wenn sämmtliche Restfiguren Einer, das Maximum (30) wenn sämmtliche Restfiguren Dreier sind.

Beweis.

Sei $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ eine Kfg.-Gerade, dann kann der Fall, daß sie in keiner der zehn Restfiguren vorkäme, nur eintreten, wenn $\mathfrak{a}$ allein in drei verschiedenen Restfiguren, $\mathfrak{b}$ in drei andern verschiedenen Restfiguren und $\mathfrak{c}$ ebenfalls in drei neuen verschiedenen Restfiguren aufträte, wodurch also schon neun Restfiguren erhalten werden, von denen drei das Element $\mathfrak{a}$, drei das Element $\mathfrak{b}$, drei das Element $\mathfrak{c}$ enthalten, also nur noch eine Restfigur übrig bleibt, die weder $\mathfrak{a}$ noch $\mathfrak{b}$ noch $\mathfrak{c}$ enthält. Wenn aber drei Restfiguren ein gemeinsames Element $\mathfrak{a}$ haben und den drei Elementen $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ zugehören, so muß auch $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ eine Restfigur sein und dem Element $\mathfrak{a}$ zugehören (s. o. S. 201); aus gleichem Grunde muß auch $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3$ eine Restfigur sein, die dem Element $\mathfrak{b}$ zugehört, und $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3$ eine Restfigur, die dem Element $\mathfrak{c}$ zugehört. Die Elemente $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3$ $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3$ müßten aber sämmtlich von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ verschieden sein, weil $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ nicht mehr als dreimal in den Restfiguren auftreten können; folglich müßte es drei Restfiguren geben, die weder $\mathfrak{a}$ noch $\mathfrak{b}$ noch $\mathfrak{c}$ enthalten; es kann aber nur e i n e solche geben, wie wir gesehen haben, also ist unsere Annahme unzulässig, daß die Kfg.-Gerade $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ in keiner der Restfiguren auftritt, und wir schließen den ersten Theil unseres Satzes, daß die Kfg.-Gerade $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ nothwendig mindestens einmal in einer der Restfiguren des Restesystems enthalten sein muß.

Ferner kann die Kfg.-Gerade $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ nur in drei verschiedenen Gestalten als

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{b}| \qquad |\mathfrak{a}\mathfrak{c}| \qquad |\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$$

in den Restfiguren des Restesystems auftreten; sollte sie daher in mehr als drei, also mindestens in vier verschiedenen Restfiguren gleichzeitig auftreten, so müßte sich eines dieser drei Paare, etwa $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ wiederholen. Wir können aber nachweisen, daß, wenn $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ eine Kfg.-Gerade ist, die vier Elementenpaare

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{b}| \qquad |\mathfrak{a}\mathfrak{c}| \qquad |\mathfrak{b}\mathfrak{c}| \qquad |\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$$

in vier verschiedenen Restfiguren des Restesystems nicht gleichzeitig vorkommen können, sondern höchstens drei von ihnen.

Ist nämlich $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$ eine Kfg.-Gerade, so können die Kolonnen der Konfiguration diese Punkte nur in folgender Weise enthalten:

$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	.	.	.	$\mathfrak{a}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\mathfrak{b}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\mathfrak{c}$

soll nun die zu $\mathfrak{a}_1$ zugehörige Restfigur $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$
die zu $\mathfrak{b}_1$ „ „ $\mathfrak{c}$ „ $\mathfrak{a}$
die zu $\mathfrak{c}_1$ „ „ $\mathfrak{a}$ „ $\mathfrak{b}$
enthalten, so können also

$$\mathfrak{a}_1 \text{ und } \mathfrak{b} \qquad \mathfrak{b}_1 \text{ und } \mathfrak{c} \qquad \mathfrak{c}_1 \text{ und } \mathfrak{a}$$
$$\mathfrak{a}_1 \text{ und } \mathfrak{c} \qquad \mathfrak{b}_1 \text{ und } \mathfrak{a} \qquad \mathfrak{c}_1 \text{ und } \mathfrak{b}$$

nicht in derselben Kolonne stehen; es kann also $\mathfrak{a}_1$ nur in einer der beiden Kolonnen stehen, welche $\mathfrak{a}$ enthalten und noch in zwei der freien Kolonnen, da es dreimal auftreten muß; denn daß $\mathfrak{a}_1$ in allen drei freien Kolonnen stehe, ist unzulässig, weil sonst $\mathfrak{b}_1$ nur noch in einer der beiden Kolonnen stehen könnte, die $\mathfrak{b}$ enthalten und in zwei der freien Kolonnen stehen müßte, also jedenfalls $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1$ gleichzeitig in zwei der freien Kolonnen vorkämen, was unzulässig ist; es muß also $\mathfrak{a}_1$ in einer der beiden Kolonnen stehen, die $\mathfrak{a}$ enthalten und in zwei freien Kolonnen; ebenso $\mathfrak{b}_1$ in einer der beiden Kolonnen die $\mathfrak{b}$ enthalten und in zwei freien Kolonnen, und endlich $\mathfrak{c}_1$ in einer der beiden Kolonnen, die $\mathfrak{c}$ enthalten und in zwei freien Kolonnen. Nun können auch nicht $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1$ alle drei in einer der drei freien Kolonnen stehen, denn sonst müßten in den beiden übrigen zwei Elemente stehen, die schon in der ersteren zusammen auftreten, was nicht zulässig ist; folglich kann die Anordnung der Elemente in den Kolonnen der Kfg. nur diese sein:

$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{a}$
$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{c}_1$	.	.	.	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{b}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\mathfrak{c}$

Nun bleiben überhaupt nur noch vier Elemente $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ zu vertheilen übrig, deren jedes dreimal auftreten muß. Soll daher die Kfg.-Gerade $|\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,|$ noch ein viertes Mal in einer Restfigur des Restesystems vorkommen, so muß diese Restfigur zu einem der vier Elemente $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ zugehören. Nehmen wir an, es käme in der Restfigur zu $\mathfrak{A}$ das Elementenpaar $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ vor, so könnte $\mathfrak{A}$ nur in den Kolonnen stehen, die $\mathfrak{a}$ oder die $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{a}_1$ enthalten; es kann $\mathfrak{A}$ aber immer nur in einer der drei letzteren stehen, weil sonst zwei Kolonnen zwei gleiche Elemente enthielten; es kann aus demselben Grunde $\mathfrak{A}$ auch nur in einer der beiden Kolonnen stehen, die $\mathfrak{a}$ enthalten; folglich kann $\mathfrak{A}$ überhaupt nur in zwei Kolonnen stehen, während es doch in drei Kolonnen vorkommen muß. Dasselbe gilt von $\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$, also ist die Annahme, daß die Kfg.-Gerade $|\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,|$ noch ein viertes Mal in einer der Restfiguren des Restesystems vorkäme unstatthaft, und damit ist der zweite Theil unsres obigen Satzes erwiesen.

6. Wir wenden uns jetzt zu dem Schema B) (s. o. S. 199)

$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	.	.	.	.	.	.	.
$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{B}$	.	.	.	.	.
$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{e}$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{D}$

bei welchem zu dem Element $\mathfrak{A}$ als Restfigur ein Zweier $|\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,|$ $|\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{D}\,|$ zugehört und an Stelle der Punkte die Elemente $\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{d}$ $\mathfrak{e}\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{f}\,\mathfrak{f}\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{g}$ den Bedingungen der Kfg. gemäß zu setzen sind. Da hier offenbar auch $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ durch eine Kfg.-Gerade nicht verbunden sein können (denn sonst wäre die zu $\mathfrak{A}$ zugehörige Restfigur ein Dreier), so haben wir zu $\mathfrak{A}$ die Restfigur $\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$
„ $\mathfrak{C}$ „ „ $\mathfrak{A}\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{x}$
„ $\mathfrak{D}$ „ „ $\mathfrak{A}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{y}$

wo $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ den Elementen $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{f}\,\mathfrak{g}$ angehören; hieraus erkennen wir, daß auch die zu $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ zugehörigen Restfiguren Zweier sein müssen.

Diese drei zusammengehörigen Restfiguren, welche Zweier sind, enthalten die sechs Kfg.-Geraden:

$$|\mathfrak{B}\mathfrak{C}| \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{D}| \quad |\mathfrak{x}\mathfrak{A}| \quad |\mathfrak{x}\mathfrak{D}| \quad |\mathfrak{y}\mathfrak{A}| \quad |\mathfrak{y}\mathfrak{C}|.$$

Da nun $\mathfrak{x}$ in der Restfigur zu $\mathfrak{C}$ vorkommt, so kann $\mathfrak{x}$ nicht in den Kolonnen stehen, welche $\mathfrak{C}$ enthalten, also nur in den Kolonnen die $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ enthalten; es kann $\mathfrak{x}$ aber nicht in der Kolonne stehen, welche gleichzeitig $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ enthält, denn sonst könnte es in keiner Kolonne zum dritten Mal stehen, da es schon in den Kolonnen vorkommt, die $\mathfrak{A}$ enthalten; es muß also $\mathfrak{x}$ in der Kolonne stehen, die $\mathfrak{B}$ allein enthält und in einer der beiden Kolonnen die $\mathfrak{D}$ allein enthalten. Aus gleichem Grunde muß $\mathfrak{y}$ in der Kolonne stehen, die $\mathfrak{B}$ allein enthält und in einer der beiden Kolonnen, die $\mathfrak{C}$ allein enthalten; also stehen $\mathfrak{B}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$ in einer Kolonne d. h. liegen auf einer Kfg.-Geraden; wir erhalten hieraus den Satz:

Wenn in einem Restesystem ein Zweier als Restfigur auftritt, so müssen auch die den beiden nicht verbundenen Punkten des Zweiers zugehörigen Restfiguren Zweier sein, und die drei Doppelpunkte dieser drei zusammengehörigen Zweier müssen auf einer Kfg.-Geraden liegen.

Die sechs Kfg.-Geraden, aus denen die drei zusammengehörigen Zweier des Restesystems bestehen, bilden ein geschlossenes einfaches Sechseck

$$\mathfrak{B}\;\mathfrak{C}\;\mathfrak{y}\;\mathfrak{A}\;\mathfrak{x}\;\mathfrak{D}$$

bei dem die erste dritte und fünfte Ecke auf einer Kfg.-Geraden liegen.

Wir schließen hieraus:

In einem Restesystem kann die Anzahl derjenigen Restfiguren, welche Zweier sind nur 0 oder 3 oder 6 oder 9 betragen (da ein Zweier immer zwei andere nach sich zieht).

Da drei zusammengehörige Zweier, die in einem Restsysteme auftreten schon sechs Kfg.-Gerade in Anspruch nehmen, so können, wenn unter den übrigen Restfiguren Einer vorkommen, diese höchstens in einer Anzahl von vieren vorhanden sein, weil die Kfg.-Gerade, welche als Einer in einem Restesystem auftritt, in keiner Restfigur weiter auftreten kann (s. o. S. 201); wir schließen also:

Wenn in einem Restsystem ein Zweier vorkommt, so kann dasselbe höchstens vier Einer als Restfiguren haben.

Dies ist z. B. der Fall in unserer Kfg. II (s. o. S. 200), welche vier alleinstehende Einer als Restfiguren enthält, und bei der die sechs übrigen Kfg.-Geraden sich zweimal zu zwei Gruppen von je drei zusammengehörigen Zweiern vereinigen, welche die beiden Sechsecke

3 7 1 4 2 9 und
3 8 2 6 1 5

bilden, in deren jedem die drei ungeraden Ecken 1 2 3 auf einer und zwar auf derselben Kfg.-Geraden liegen; die sechs Seiten der beiden Sechsecke sind:

|248| |378| |269| |359| |145| |167|,

während die übrigen die vier Einer |123| |8 9 10| |4 6 10| |5 7 10| sind.

7. Wir wenden uns endlich zu dem Schema C) (s. o. S. 199)

$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	.	.	.	.	.	.	$\mathfrak{b}$
$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$	.	.	.	$\mathfrak{d}$
$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{e}$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{f}$

bei welchem die zu dem Elemente $\mathfrak{A}$ zugehörige Restfigur ein Dreier $\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ ist und erkennen, daß in der Konfiguration eine Kolonne übrig bleiben muß, welche weder $\mathfrak{A}$ noch $\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ enthalten kann, weil $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ bereits zweimal auftreten und daher nur noch einzeln in drei Kolonnen vorkommen können. Die letzte Kolonne kann daher nur drei von den sechs Punkten $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{f}\,\mathfrak{g}$ enthalten und zwar nur drei solche, von denen nicht schon zwei auf einer der von $\mathfrak{A}$ ausgehenden Kfg.-Geraden liegen; wir können hierzu ohne eine Beschränkung einzuführen die Elemente $\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{f}$ wählen (s. o. S. 198). Wir können aber auch umgekehrt behaupten:

Wenn auf den drei von einem Kfg.-Punkt $\mathfrak{A}$ ausgehenden Kfg.-Geraden sich unter den übrigen sechs Kfg.-Punkten derselben drei solche befinden, die auf einer vierten Kfg.-Geraden liegen, dann ist die Restfigur zu $\mathfrak{A}$ ein Dreier.

In der That behalten wir außer diesen vier Kfg.-Geraden nur noch sechs weitere übrig, auf denen, wenn $\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ die Restfigur zu $\mathfrak{A}$ ist, diese Elemente $\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ nicht anders vertheilt sein können, als daß sie in dreien einzeln und in den drei andern paarweise auftreten, da jedes von ihnen dreimal auftreten muß; daraus folgt aber, daß die Restfigur $\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ ein Dreier ist.

Wir wollen noch die Frage beantworten, in wie vielen Restfiguren höchstens dieselben zwei Elemente gleichzeitig vorkommen können?

Möge die zu $\mathfrak{A}$ zugehörige Restfigur $\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ ein Einer, Zweier oder Dreier sein, immer muß die Kfg. selbst die Gestalt haben:

$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	.	.	.	.	.	.	.
$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{f}$	.	.	.	.	.	.	.
$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{e}$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{D}$	.

wo die letzte Kolonne für den Fall des Einers alle drei Elemente

𝔅 ℭ 𝔇, für den Fall des Zweiers nur eines derselben, für den Fall des Dreiers keines derselben enthält.

Nehmen wir nun an, daß die beiden Elemente 𝔅 und ℭ nicht blos in der zu 𝔄 gehörigen Restfigur, sondern auch in einer zweiten zu 𝔟 gehörigen aufträte (wo 𝔟 beliebig aus den sechs Elementen 𝔟 𝔠 𝔡 𝔢 𝔣 𝔤 herausgenommen ist), dann kann 𝔟 offenbar nicht in den vier Kolonnen stehen, welche 𝔅 und ℭ enthalten, muß also nothwendig in einer der beiden stehen, die 𝔇 enthalten und außerdem zum dritten Mal in der letzten noch freien Kolonne. Wir haben also das Schema

𝔄	𝔄	𝔄	.	.	.	.	.	𝔟	𝔟
𝔟	𝔡	𝔣	.	.	.	.	.	.	.
𝔠	𝔢	𝔤	𝔅	𝔅	ℭ	ℭ	𝔇	𝔇	.

Da nun in der letzten Kolonne weder 𝔅 noch ℭ noch 𝔇 stehen können, weil 𝔅 und ℭ in dem Reste zu 𝔟 vorkommen sollen und 𝔇 bereits mit 𝔟 verbunden ist, so müssen in der letzten Kolonne zwei von den vier Elementen 𝔡 𝔢 𝔣 𝔤 stehen, die nicht gleichzeitig auf derselben von 𝔄 ausgehenden Kfg.-Geraden liegen; wir können hierzu 𝔡 und 𝔣 wählen, und da nun in der letzten Kolonne 𝔟 𝔡 𝔣 stehen, so muß nach dem vorigen Satze (S. 206) die Restfigur 𝔅 ℭ 𝔇 ein Dreier sein.

Wir haben also nunmehr das Schema:

𝔄	𝔄	𝔄	.	.	.	.	.	𝔟	𝔟
𝔟	𝔡	𝔣	ℭ	.	𝔇	.	𝔅	.	𝔡
𝔠	𝔢	𝔤	𝔅	𝔅	ℭ	ℭ	𝔇	𝔇	𝔣

aus welchem sich die Restfigur zu 𝔟 ermitteln läßt; es kann nämlich die vorletzte unvollständige Kolonne nur noch entweder 𝔢 oder 𝔤 enthalten, und demgemäß die Restfigur zu 𝔟 entweder 𝔅 ℭ 𝔤 oder 𝔅 ℭ 𝔢 sein. Steht nun 𝔢 in der vorletzten Kolonne, so muß 𝔤 nothwendig in zwei der übrigen Kolonnen an noch freien Stellen stehen, also sicherlich mit 𝔅 und ℭ verbunden sein; steht dagegen 𝔤 in der vorletzten Kolonne, so muß 𝔢 in zwei der übrigen Kolonnen an noch freien Stellen stehen, also mit 𝔅 und ℭ verbunden sein; jedenfalls ist also auch die Restfigur zu 𝔟 ein Dreier, und wir schließen:

Wenn unter den Restfiguren eines Restesystems zwei solche vorkommen, die gleichzeitig dieselben beiden Elemente enthalten, dann müssen diese beiden Restfiguren Dreier sein.

Zugleich ist ersichtlich, daß dieselben beiden Elemente 𝔅 und ℭ in einer dritten Restfigur des Restesystems gleichzeitig nicht mehr auftreten können; denn kämen 𝔅 und ℭ noch in einer dritten Restfigur vor, so könnte dieselbe nur einem Elemente zugehören, welches in einer Kolonne stände, die weder 𝔅 noch ℭ enthielte; dies ist aber nicht mehr möglich, weil die fünf Kolonnen, welche 𝔅 und ℭ enthalten, in den noch freien Stellen mit den Elementen 𝔠𝔡𝔢𝔣𝔤 besetzt werden müssen.

Endlich bemerken wir noch, weil in den beiden Restfiguren zu 𝔄 und 𝔟 gleichzeitig die Elemente 𝔅 und ℭ enthalten sind, müssen auch umgekehrt in den Restfiguren zu 𝔅 und ℭ dieselben zwei Elemente 𝔄 und 𝔟 enthalten sein (s. o. S. 200); mithin müssen nach unserem Satze auch diese beiden Restfiguren, welche zu 𝔅 und ℭ gehören, Dreier sein; das Restesystem muß daher vier Dreier enthalten.

8. Aus den abgeleiteten Eigenschaften eines Restesystems der 10_3 ergiebt sich, daß unter den Restfiguren gewisse Verbindungen von Einern, Zweiern und Dreiern überhaupt nicht vorkommen können. Die Désargues'sche Figur (I) lieferte uns ein Restesystem von lauter Einern; es ist aber klar, daß wenn in einem Restesystem neun Restfiguren Einer sind, auch die zehnte ein Einer sein muß; denn nach dem (o. S. 201) bewiesenen Satze ist nur noch eine Kfg.-Gerade zur Bildung der zehnten Restfigur zur Verfügung, also muß diese ein Einer sein. Ebenso zeigt sich, daß wenn in einem Restesystem acht Restfiguren Einer sind, auch die beiden letzten Restfiguren Einer sein müssen; denn wir haben nur noch zwei Kfg.-Gerade zur Bildung zweier Restfiguren zur Verfügung, also müssen dieselben Einer sein. Auch wenn in einem Restesystem sieben Restfiguren Einer sind, müssen die drei letzten Restfiguren ebenfalls Einer sein; denn es ließen sich zwar aus den drei zur Verfügung stehenden Kfg.-Geraden die drei letzten Restfiguren bilden, indem sich aus den drei Geraden entweder drei Zweier oder ein Dreier und zwei Zweier zusammenstellen ließen, allein es müßten dann in Folge unseres obigen Satzes (S. 205) entweder noch sechs oder vier weitere Zweier als Restfiguren vorkommen, was nicht mehr möglich ist; also müssen auch die drei letzten Restfiguren Einer sein.

Wenn dagegen in einem Restesystem nur sechs Einer vorkommen, so brauchen die vier letzten Restfiguren nicht sämmtlich Einer zu sein, sondern können vier Dreier sein; ein Zweier kann aber in dem Restesystem nicht vorkommen, denn dieser hätte noch zwei andere Zweier zur Folge und diese drei zusammengehörigen Zweier nehmen, wie wir wissen (s. o. S. 205) sechs Kfg.-Gerade in Anspruch, während wir doch zur Bildung der vier letzten Restfiguren nur vier Kfg.-Gerade zur Verfügung haben. Diese können aber, da sie vier Dreiecke bilden, vier Dreier als letzte Restfiguren des Restesystems liefern. Eine Kfg., deren Restesystem aus sechs Einern und vier Dreiern besteht, ist also an sich widerspruchsfrei; ob eine solche existirt und geometrisch construirbar ist, werden wir später sehen.

Wenn in einem Restesystem nur fünf Einer vorkommen, so können die übrigen Restfiguren keinen Zweier enthalten, denn ein solcher hätte zwei weitere Zweier zur Folge, und diese drei zusammengehörigen Zweier nähmen sechs Kfg.-Gerade in Anspruch (s. o. S. 205) während wir doch nur noch fünf Kfg.-Gerade zur Verfügung haben. Die letzten fünf Restfiguren können aber auch nicht sämmtlich Dreier sein; denn vier Kfg.-Gerade $a\,b\,c\,d$ bilden höchstens vier Dreier: $b\,c\,d$, $c\,d\,a$, $d\,a\,b$, $a\,b\,c$, in welchen jede der vier Kfg.-Geraden $a\,b\,c\,d$ schon dreimal auftritt. Soll daher durch Hinzunahme der letzten (fünften) zur Verfügung stehenden Kfg.-Geraden noch ein Dreier als Restfigur gebildet werden, so müßten zwei der vorigen Kfg.-Geraden $a\,b\,c\,d$ gleichzeitig in vier Restfiguren auftreten, was, wie wir früher (s. o. S. 202) bewiesen haben, unmöglich ist. Eine Konfiguration, die nur fünf Einer im Restesystem und übrigens Zweier oder Dreier liefert, ist also nicht möglich.

Wenn in einem Restesystem nur vier Einer vorkommen, so können die übrigen sechs Restfiguren nicht sämmtlich Dreier sein, denn sollen aus den noch übrigen sechs Kfg.-Geraden $a\,b\,c\,d\,e\,f$ sechs Dreier gebildet werden, so würden, wenn wir vier Gerade $a\,b\,c\,d$ zur Bildung der vier Dreier $a\,b\,c$, $a\,b\,d$, $a\,c\,d$, $b\,c\,d$ herausnehmen, die Geraden $e\;f$ zur Bildung eines fünften Dreiers nicht ausreichen, denn jede der vier Geraden $a\;b\;c\;d$ tritt bereits in drei verschiedenen Dreiern auf und kann nicht viermal in verschiedenen Restfiguren vorkommen (s. o. S. 202); bilden wir aber, was noch zulässig erscheint, die sechs Dreier $a\,b\,c$, $a\,b\,d$, $a\,c\,d$, $e\,f\,b$, $e\,f\,c$, $e\,f\,d$, so würde, da die Ecken eines Dreiers immer Kfg.-Punkte sind, die Kfg.-Gerade e die vier Kfg.-Punkte (ef) (eb) (ec) (ed) enthalten müssen, was widersinnig ist; folglich kann ein Restesystem unmöglich aus vier Einern und sechs Dreiern bestehen. Es müssen daher in dem Restesystem außer den vier Einern mindestens drei Zweier vorkommen; es läßt sich aber zeigen, daß alsdann auch die drei letzten Restfiguren nothwendig Zweier sein müssen und nicht Dreier sein können. Um diesen etwas umständlichen Nachweis zu vermeiden, wollen wir nunmehr an die wirkliche Bildungsweise der Kfg. 10_3 herantreten und zunächst die Aufgabe lösen:

E s s o l l e n s ä m m t l i c h e v e r s c h i e d e n e n G e s t a l t e n e i n e r K f g. 10_3 e r m i t t e l t w e r d e n, i n d e r e n R e s t e s y s t e m w e n i g s t e n s e i n E i n e r e n t h a l t e n i s t.

Es geht dann daraus von selbst hervor, daß eben andere Verbindungen von Einern, Zweiern und Dreiern in einem Restesystem nicht auftreten können, als sie die gefundenen Kfg. liefern. Diese Aufgabe hat nur eine endliche bestimmte Anzahl von Lösungen.

9. Gehen wir von einem beliebigen Kfg.-Punkt aus, den wir 1 nennen können, so laufen durch ihn drei Kfg.-Gerade, deren jede noch zwei weitere Kfg.-Punkte enthält, die wir mit

2 und 3, 4 und 5, 6 und 7

bezeichnen dürfen; dann bleiben drei Kfg.-Punkte 8 9 10 übrig als Restfigur, und da unserer Annahme gemäß ein Einer in dem Restsystem vorkommen soll, so können wir 8 9 10 als auf diesem liegend annehmen, so daß also 8 9 10, die zu 1 zugehörige Restfigur (der Einer) ist.

Dann müssen durch 8 noch zwei weitere Kfg.-Gerade gehen, ebenso durch 9 und durch 10; dies sind die noch übrigen sechs Kfg.-Geraden und die Kfg. selbst hat die Gestalt:

1	1	1	8	.	.	.	.	.	.
2	4	6	9	.	.	.	.	.	.
3	5	7	10	8	8	9	9	10	10

wo die zwölf Punkte durch die Elemente 2 2 3 3 4 4 5 5 6 6 7 7 den Bedingungen der Kfg. gemäß zu ersetzen sind. Beginnen wir mit 2, so muß 2 noch in zwei Kolonnen stehen, die nicht beide dasselbe Element 8 (oder 9 oder 10) enthalten; es kann also 2 in eine der beiden Kolonnen, die 8, und in eine der beiden Kolonnen, die 9 enthalten, eingestellt werden; eine andere Einstellung würde durch Vertauschung von 8 9 10 unter einander auf diese zurückführbar sein, wodurch das Wesen der Kfg. nicht geändert wird. Das nächste Element 3 kann dann entweder in die zweite Kolonne, welche 8 enthält und in die zweite Kolonne, welche 9 enthält, oder aber in eine der beiden Kolonnen, die 10 enthalten, eingestellt werden; dies giebt zwei wesentlich verschiedene Fälle:

a)

1	1	1	8	2	3	2	3	.	.
2	4	6	9	.	.	.	.	.	.
3	5	7	10	8	8	9	9	10	10

b)

1	1	1	8	2	3	2	.	3	.
2	4	6	9	.	.	.	.	.	.
3	5	7	10	8	8	9	9	10	10

Wir betrachten zuerst den Fall a); wollen wir nun von dem Elementarpaar 4 und 5 eines, z. B. 4, in den Kolonnen unterbringen, die 8 und 9 enthalten, so könnte 5 doch nur einmal in den Kolonnen stehen, die 10 enthalten; es müßte also in der anderen Kolonne, die 10 enthält, entweder zweimal 6 oder 6 und 7 stehen, was beides nicht möglich ist; es muß also nothwendig in einer der Kolonnen, die 10 enthalten, das Element 4 und ebenso in der andern das Element 5 stehen; wir erhalten also das Schema:

1	1	1	8	2	3	2	3	4	5
2	4	6	9	.	.	.	.	.	.
3	5	7	10	8	8	9	9	10	10

und können jetzt das Elementenpaar 4 und 5 nur noch auf drei wesentlich von einander verschiedene Arten einstellen:

	1	1	1	8	2	3	2	3	4	5
a')	2	4	6	9	4	5	.	.	.	.
	3	5	7	10	8	8	8	9	10	10

	1	1	1	8	2	3	2	3	4	5
a'')	2	4	6	9	4	.	5	.	.	.
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10

	1	1	1	8	2	3	2	3	4	5
a''')	2	4	6	9	4	.	.	5	.	.
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10

Jetzt bleibt nur noch das Elementenpaar 6 und 7 einzustellen übrig, welches vertauschbar ist. Wir erhalten daher für jeden dieser drei Fälle nur zwei Konfigurationen, für welche wir nun einzeln die Restsysteme bestimmen und darunter setzen wollen:

	1	1	1	8	2	3	2	3	4	5
a_1')	2	4	6	9	4	5	6	7	6	7
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10
Reste:	8 9 10	5 7 10	4 6 10	3 7 9	2 6 9	3 5 8	2 4 8	1 6 7	1 4 5	1 2 3
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

	1	1	1	8	2	3	2	3	4	5
a_2')	2	4	6	9	4	5	6	7	7	6
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10
Reste:	8 9 10	5 7 10	4 6 10	3 6 9	2 7 9	3 4 8	2 5 8	1 6 7	1 4 5	1 2 3
	...	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	...	...	...

	1	1	1	8	2	3	2	3	4	5
$a''_1)$	2	4	6	9	4	6	5	7	6	7
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10
Reste:	8 9 10	6 7 10	4 5 10	3 7 9	3 6 8	2 5 9	2 4 8	1 5 7	1 4 6	1 2 3
	...	Δ	Δ	...	...	...	...	Δ	Δ	...

	1	1	1	8	2	3	2	3	4	5
$a''_2)$	2	4	6	9	4	6	5	7	7	6
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10
Reste:	8 9 10	6 7 10	4 5 10	3 6 9	3 7 8	2 4 9	2 5 8	1 5 7	1 4 6	1 2 3
	...	Δ	Δ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	...

	1	1	1	8	2	3	2	3	4	5
$a'''_1)$	2	4	6	9	4	7	6	5	6	7
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10
Reste:	8 9 10	5 7 10	4 6 10	3 7 9	2 6 8	3 5 8	2 4 9	1 5 6	1 4 7	1 2 3
	...	...	...	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	...

	1	1	1	8	2	3	2	3	4	5
$a'''_2)$	2	4	6	9	4	7	6	5	7	6
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10
Reste:	8 9 10	5 7 10	4 6 10	3 6 9	2 7 8	3 4 8	2 5 9	1 5 6	1 4 7	1 2 3
	...	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Δ	Δ	...

Aus dem Anblick dieser sechs Restsysteme ergiebt sich, daß dieselben für die Fälle

$$a'_2) \quad \text{und} \quad a'''_1)$$

dieselben sind, und ebenso für die Fälle

$$a''_2) \quad \text{und} \quad a'''_2)$$

während die übrigen unter einander und von diesen verschieden sind; und in der That geht die Kfg. $a'_2)$ in die Kfg. $a'''_1)$ über, sobald wir an Stelle der Elemente der ersteren

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 8 & 6 & 4 & 5 & 7 & 2 & 3 & 1 \end{array}$$

setzen, d. h. eine bloße Permutation vornehmen. Ebenso geht die Kfg. $a''_2)$ in die Kfg. $a'''_2)$ über, sobald wir an Stelle der Elemente der ersteren

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 8 & 9 & 7 & 4 & 5 & 6 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

setzen. Wir erhalten demnach nur folgende vier wesentlich von einander verschiedene Gestalten von Kfg. 10_3, welche wir in andere Reihenfolge stellen und so bezeichnen wollen:

	1	1	1	8	2	3	2	3	4	5
I.	2	4	6	9	4	5	6	7	6	7
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10

(die Désargues'sche Figur, s. o. S. 196),

	1	1	1	8	2	3	2	3	4	5
II.	2	4	6	9	4	7	6	5	6	7
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10

(s. o. S. 196),

	1	1	1	8	2	3	2	3	4	5
III.	2	4	6	9	4	6	7	5	6	7
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10

die mit a_2''') identisch ist, wenn wir 6 und 7 mit einander vertauschen und

	1	1	1	8	2	3	2	3	4	5
IV.	2	4	6	9	4	6	5	7	6	7
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10

Andere als diese vier Gestalten können aus dem Schema a) (S. 210) nicht hervorgehen, die von diesen oder unter einander wesentlich verschieden wären.

Wir wenden uns nunmehr zum Schema b) (S. 210)

1	1	1	8	2	3	2	.	3	.
2	4	6	9	.	.	.	.	.	.
3	5	7	10	8	8	9	9	10	10

Die noch freien Plätze sind nun mit den Elementen 4, 5, 6, 7, doppelt genommen, zu besetzen gemäß den Bedingungen der Konfiguration: eins dieser vier Elemente muß in die Kolonne, welche 2 und 8 enthält, als drittes Element eintreten und es ist gleichgültig, welches wir von den vieren 4, 5, 6, 7 wählen; nehmen wir 4, so kann dies Element 4 zum dritten Male nur noch in dreifacher Weise eingestellt werden, und wir erhalten drei Fälle:

	1	1	1	8	2	3	2	4	3	.
b')	2	4	6	9	4	.	.	.	.	.
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10

	1	1	1	8	2	3	2	.	3	.
b'')	2	4	6	9	4	.	.	.	4	.
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10

	1	1	1	8	2	3	2	.	3	4
b''')	2	4	6	9	4	.	.	.	.	.
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10

Im Falle b') kann von den noch zu vertheilenden Elementen 5 6 7 die letzte Kolonne, welche 10 allein enthält, nicht gleichzeitig 6 und 7 enthalten, muß also 5 enthalten, und das Element 5 kann daher zum dritten Mal nur noch in zweifacher Weise eingestellt werden, woraus die beiden Unterfälle hervorgehen:

	1	1	1	8	2	3	2	4	3	5
b'_1)	2	4	6	9	4	5	.	.	.	.
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10

	1	1	1	8	2	3	2	4	3	5
b'_2)	2	4	6	9	4	.	5	.	.	.
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10

Jetzt bleiben nur die Elemente 6 und 7 einzustellen übrig, die vertauschbar sind. Wir erhalten demnach aus dem Schema b'_1) zwei, aus dem Schema b'_2) aber nur eine Konfiguration, die wir in Bezug auf ihre Restsysteme untersuchen wollen, um zu ermitteln, ob sie von den frühern verschieden, oder mit denselben identisch sind:

	1	1	1	8	2	3	2	4	3	5
b'_{11})	2	4	6	9	4	5	6	7	6	7
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10
Reste:	8 9 10	5 7 10	4 7 9	3 6 10	2 6 9	4 5 8	2 3 8	1 6 7	1 3 5	1 2 4
	...	...	...	...	...	Δ	Δ	...	Δ	Δ

	1	1	1	8	2	3	2	4	3	5
b'_{12})	2	4	6	9	4	5	7	6	6	7
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10
Reste:	8 9 10	5 6 10	4 7 9	3 7 10	2 6 9	2 5 8	3 4 8	1 6 7	1 3 5	1 2 4
	...	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	...	Δ	Δ

	1	1	1	8	2	3	2	4	3	5
b'_{21})	2	4	6	9	4	7	5	6	6	7
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10
Reste:	8 9 10	6 7 10	4 5 9	3 7 10	3 6 8	2 5 8	2 4 9	1 5 6	1 3 7	1 2 4
	...	Δ	Δ	Δ	Λ	Λ	Δ	Λ	Δ	Δ

Wir erkennen aus der Vergleichung der Restsysteme, daß die Kfg. b'_{11}) mit der früheren a''_1) (S. 212) identisch ist; und in der That setzen wir in a''_1) an Stelle von

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	7	6	5	4	3	2	10	9	8

so erhalten wir $b'_{11})$; ebenso ist $b'_{12})$ identisch mit der früheren $a''_2)$ (S. 212), denn setzen wir in $a''_2)$ an Stelle von

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	10	9	5	3	2	4	7	6	1

so erhalten wir $b'_{12})$. Dagegen liefert die Kfg. $b'_{21})$ ein neues Restesystem, also eine von den früheren verschiedene Konfiguration, die wir nun als V. bezeichnen:

	1	1	1	8	2	3	2	4	3	5
V.	2	4	6	9	4	7	5	6	6	7
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10

Gehen wir nun zu dem Schema $b'')$ (S. 213) über, so erkennen wir, daß in den beiden Kolonnen, welche 9 und 10 allein enthalten, die freien Stellen nicht durch 6 und 7 allein ausgefüllt werden können, vielmehr in jeder derselben einmal das Element 5 enthalten sein muß; dann kann aber das letzte Elementarpaar 6 und 7, welches vertauschbar ist, nur noch so eingestellt werden, daß wir die einzige Kfg. erhalten:

	1	1	1	8	2	3	2	5	3	5
$b''_1)$	2	4	6	9	4	6	7	6	4	7
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10
Reste:	8 9 10	5 6 10	5 7 9	6 7 9	2 3 8	2 4 10	3 4 8	1 5 7	1 3 4	1 2 6
	...	Λ	Δ	Δ	Δ	Λ	Δ	Δ	Δ	Λ

Die Betrachtung des Restesystems zeigt, daß die Kfg. identisch ist mit der zuletzt gefundenen V., und in der That ergiebt sich unsere, wenn wir in V. an Stelle von

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5	4	7	6	2	3	10	9	8

setzen.

Gehen wir endlich zu dem letzten Schema $b''')$ (S. 214) über, so sehen wir, daß die Kolonne, welche 9 allein enthält, nothwendig das Element 5 enthalten muß, da 6 und 7 die noch freien Stellen nicht ausfüllen dürfen, ohne den Bedingungen der Konfiguration zu widersprechen; wir haben also ein Schema, bei welchem die 5 zum dritten Mal nur noch an zwei Stellen stehen kann und erhalten die beiden Unterfälle:

	1	1	1	8	2	3	2	5	3	4
$b'''_1)$	2	4	6	9	4	5	.	.	.	.
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10

	1	1	1	8	2	3	2	5	3	4
$b_2''')$	2	4	6	9	4	.	.	.	5	.
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10

Jetzt bleiben nur noch die Elemente 6 und 7 einzustellen übrig, welche vertauschbar sind und daher in jedem dieser beiden Fälle nur zwei verschiedene Kfg. liefern; wir ermitteln für diese vier letzten Konfigurationen wiederum die Restesysteme, welche wir darunter setzen, um sie mit den früheren zu vergleichen und zu entscheiden, ob die erhaltenen Kfg. neue oder mit den früheren identisch sind. Wir erhalten also

	1	1	1	8	2	3	2	5	3	4
$b_{11}''')$	2	4	6	9	4	5	6	7	6	7
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10
Reste:	8 9 10	5 7 10	4 7 9	3 6 9	2 6 10	3 5 8	2 3 8	1 6 7	1 3 4	1 2 5
	...	Λ	Λ	Λ	Λ	Δ	Δ	...	Λ	Λ

	1	1	1	8	2	3	2	5	3	4
$b_{12}''')$	2	4	6	9	4	5	6	7	7	6
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10
Reste:	8 9 10	5 7 10	4 6 9	3 7 9	2 6 10	3 5 8	2 4 8	1 6 7	1 3 4	1 2 5
	...	Λ	Λ	Λ	Λ	...	...	...	Λ	Λ

	1	1	1	8	2	3	2	5	3	4
$b_{21}''')$	2	4	6	9	4	6	6	7	5	7
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10
Reste:	8 9 10	5 7 10	4 7 9	3 6 9	2 6 8	4 5 10	2 3 8	1 5 7	1 3 4	1 2 6
	...	Δ	Λ	Λ	Δ	Δ	Δ	Δ	Λ	Δ

	1	1	1	8	2	3	2	5	3	4
$b_{22}''')$	2	4	6	9	4	7	6	7	5	6
	3	5	7	10	8	8	9	9	10	10
Reste:	8 9 10	5 7 10	4 6 9	3 7 9	2 6 8	3 5 8	2 4 10	1 5 6	1 3 4	1 2 7
	...	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ

Von diesen Konfigurationen ist nun, wie wir aus den Restsystemen sehen, b_{11}''' identisch mit der früheren a_2'', denn setzen wir in letzterer an Stelle von

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 7 & 6 & 5 & 4 & 2 & 3 & 9 & 10 & 8 \end{array}$$

so geht b_{11}''' hervor; sodann ist b_{12}''' identisch mit der früheren a_2', denn setzen wir in letzterer an Stelle von

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 9 & 10 & 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 & 1 \end{array}$$

so geht b'''_{12} hervor; ferner ist b'''_{21} identisch mit der früheren b'_{21}, denn setzen wir in letzterer an Stelle von

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 9 & 10 & 8 \end{matrix}$$

so geht b'''_{21} hervor; dagegen liefert die letzte Kfg. ein neues, bisher noch nicht dagewesenes Restesystem, also eine von den früheren verschiedene Kfg. die wir mit VI bezeichnen wollen

$$\text{VI.}\left\{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 8 & 2 & 3 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 4 & 7 & 6 & 7 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 10 & 8 & 8 & 9 & 9 & 10 & 10 \end{matrix}\right.$$

und hiermit sind alle Möglichkeiten erschöpft. Wir erhalten also als Resultat unserer Untersuchung: Wenn in dem Restesystem einer Konfiguration 10_3 mindestens ein Einer vorkommen soll, so kann dieselbe nur sechs wesentlich von einander verschiedene Gestalten haben, bei denen in den Restesystemen die Einer, Zweier und Dreier in folgenden Anzahlen auftreten:

	Einer	Zweier	Dreier
I	10	0	0
II	4	6	0
III	2	6	2
IV	6	0	4
V	1	3	6
VI	1	9	0

11. Wir könnten nun eine analoge Untersuchung anstellen unter der Annahme, daß in dem Restesystem der Kfg. mindestens ein Zweier oder ein Dreier auftritt und die sämmtlichen dabei auftretenden Gestalten ermitteln, wobei die bereits gefundenen Kfg. zum Theil wiederkehren würden; allein diese Untersuchung gestaltet sich sehr umständlich, und wir können ihrer entbehren, wenn wir den obigen Satz (s. o. S. 205) zu Hülfe rufen, wonach in einem Restesystem die Zweier nur in der Anzahl 0 oder 3 oder 6 oder 9 auftreten können; wenn daher kein Einer vorkommt, so müssen die Dreier in der ergänzenden Anzahl nämlich 10 oder 7 oder 4 oder 1 auftreten; es sind also überhaupt nur noch vier von den früheren verschiedene Kfg. denkbar, und daß dieselben

wirklich vorhanden sind, erkennen wir, ohne lange suchen zu müssen, wenn wir von dem Schema C) (s. o. S. 199) ausgehen, in welchem die zu dem Element 1 zugehörige Restfigur 8 9 10 ein Dreier ist, nämlich

1	1	1	.	.	.	.	.	.	2
2	4	6	8	8	9	.	.	.	4
3	5	7	9	10	10	8	9	10	6.

Wir können hier die Elemente 2 4 6, welche in einer Kolonne stehen den drei Kolonnen zutheilen, welche die Paare 8 9, 8 10, 9 10 enthalten und die drei letzten Elemente 3 5 7 dann den Bedingungen der Kfg. gemäß den drei übrigen Kolonnen einreihen, dann erhalten wir die neue Kfg.:

	1	1	1	2	4	6	5	3	7	2
VII	2	4	6	8	8	9	7	5	3	4
	3	5	7	9	10	10	8	9	10	6
Reste	8 9 10	5 7 10	4 6 8	3 7 9	2 6 10	358	2 4 9	1 3 6	1 4 7	1 2 5
	Δ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ

deren Restesystem einen Dreier und neun Zweier enthält.

Oder wir können die Elemente 3 5 7 den drei Kolumnen zuweisen, welche die Paare 8 9, 8 10, 9 10 enthalten und die übrigen Elemente dann den Bedingungen der Kfg. gemäß an die noch freien Stellen setzen; dann erhalten wir die neue Kfg.:

	1	1	1	3	5	7	2	6	4	2
VIII	2	4	6	8	8	9	7	5	3	4
	3	5	7	9	10	10	8	9	10	6
Reste	8 9 10	5 9 10	5 6 7	7 8 9	2 3 7	3 8 10	3 4 5	1 4 6	1 2 4	1 2 6
	Δ	Δ	Λ	Δ	Λ	Δ	Λ	Δ	Δ	Δ

deren Restesystem drei Zweier und sieben Dreier enthält.

Ferner erhalten wir aus der Kfg. VII

1	1	1	2	4	6	7	5	(3)	(2)
2	4	6	8	8	9	5	3	7	4
3	5	7	9	10	10	8	9	10	6

indem wir nur die beiden eingeklammerten Elemente mit einander vertauschen, wodurch die Bedingungen der Kfg. nicht aufgehoben werden, die neue Kfg.:

	1	1	1	2	4	6	7	5	2	3
IX	2	4	6	8	8	9	5	3	7	4
	3	5	7	9	10	10	8	9	10	6
Reste	8 9 10	4 5 6	7 8 10	2 7 9	2 6 10	2 5 8	3 7 9	1 3 6	1 4 7	1 3 5
	Δ	Λ	Δ	Λ	Λ	Λ	Λ	Δ	Λ	Δ

deren Restesystem sechs Zweier und vier Dreier enthält.

Endlich erhalten wir aus der Kfg. VIII

1	1	1	3	(5)	7	(2)	6	4	2
2	4	6	8	8	9	7	5	3	4
3	5	7	9	10	10	8	9	10	6

indem wir nur die beiden eingeklammerten Elemente mit einander vertauschen, wodurch die Bedingungen der Kfg. nicht verletzt werden, die letzte Kfg.:

X	1	1	1	3	2	7	5	6	4	2
	2	4	6	8	8	9	7	5	3	4
	3	5	7	9	10	10	8	9	10	6
Reste	8 9 10	5 7 9	5 6 7	7 8 9	2 3 10	3 8 10	2 3 4	1 4 6	1 2 4	1 5 6
	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ

deren Restesystem aus lauter Dreiern besteht; diese letzte Kfg. ist also, wie die erste, eine homogene oder regelmäßige Kfg.; sie stimmt überein mit derjenigen, welche ich in meiner früheren Arbeit (a. a. O.) als ein einfaches Zehneck

3 2 4 1 6 5 7 9 8 10

ermittelt habe, welches sich selbst gleichzeitig ein- und umbeschrieben ist, indem jede Seite welche die i^{te} und $(i+1)^{\text{te}}$ Ecke verbindet zugleich durch die $(i+3)^{\text{te}}$ Ecke geht.

Daß keine anderen, als diese vier letzten Konfigurationen vorkommen können, wofern das Restesystem keinen Einer enthält, haben wir oben nachgewiesen. Bei den vier letzteren treten also in den Restesystemen die Zweier und Dreier in folgenden Anzahlen auf:

	Einer	Zweier	Dreier
VII	0	9	1
VIII	0	3	7
IX	0	6	4
X	0	0	10

Dies sind die zehn Konfiguren 10_3 welche Herr S. Kantor (a.a.O.) zuerst aufgestellt hat; wenn sie auch in etwas anderer Gestalt auftreten, so ist doch die Zurückführung auf diejenige, welche Herr Kantor oder Herr Martinetti gewählt haben, ohne alle Schwierigkeit; uns kam es vorzugsweise darauf an, nachzuweisen, daß keine anderen, von diesen wesentlich verschiedenen mehr existiren können.

12. Die Bildungsweise dieser zehn Kfg. 10_3 läßt sich nun, nachdem wir sie erst gefunden haben in kürzerer Weise nach dem Prinzip herstellen, welches wir bei den beiden letzten Kfg. angewendet haben und welches mit dem von Herrn S. Kantor angegebenen (s. d. Einl.) im Wesentlichen übereinstimmt.

Wir können nämlich von der Désarguesschen Figur allein ausgehen

$$\text{I.}\left\{\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 8 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 4 & (5) & 6 & (7) & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 10 & 8 & 8 & 9 & 9 & 10 & 10 \end{array}\right.$$

und brauchen in ihr nur die beiden eingeklammerten Elemente (5) und (7) mit einander zu vertauschen, wodurch die Bedingungen der Kfg. nicht verletzt werden, um die zweite Kfg. zu erhalten

$$\text{II.}\left\{\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 8 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 4 & (7) & (6) & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 10 & 8 & 8 & 9 & 9 & 10 & 10 \end{array}\right.$$

In dieser Kfg. brauchen wir wiederum nur die beiden eingeklammerten Elemente (7) und (6) mit einander zu vertauschen, um die dritte Kfg. zu erhalten

$$\text{III.}\left\{\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 8 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 4 & 6 & (7) & (5) & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 10 & 8 & 8 & 9 & 9 & 10 & 10 \end{array}\right.$$

und in dieser brauchen wir wiederum nur die beiden eingeklammerten Elemente (7) und (5) mit einander zu vertauschen, um die vierte Kfg. zu erhalten:

$$\text{IV.}\left\{\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 8 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 4 & 6 & 5 & 7 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 10 & 8 & 8 & 9 & 9 & 10 & 10 \end{array}\right.$$

Wenn wir aber in II.

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 8 & 2 & 3 & 2 & ((3)) & ((4)) & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 4 & 7 & (6) & (5) & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 10 & 8 & 8 & 9 & 9 & 10 & 10 \end{array}$$

einmal die beiden eingeklammerten Elemente (6) und (5) und sodann die beiden ((3)) und ((4)) mit einander vertauschen, wodurch auch die Bedingungen für eine Kfg. nicht verletzt werden, so erhalten wir:

$$\mathrm{V.}\left\{\begin{array}{cccccccccc}1&1&1&8&2&3&2&4&3&5\\2&4&6&9&4&7&((5))&6&((6))&7\\3&5&7&10&8&8&9&(9)&10&(10)\end{array}\right.$$

und wenn wir in dieser einmal die beiden eingeklammerten Elemente (9) und (10), darauf die beiden eingeklammerten Elemente ((5)) und ((6)) mit einander vertauschen, so erhalten wir die nächste Kfg.:

$$\mathrm{VI.}\left\{\begin{array}{cccccccccc}1&1&1&8&2&3&2&5&3&4\\2&4&6&9&4&7&6&7&5&6\\3&5&7&10&8&8&9&9&10&10\end{array}\right.$$

Aus diesen somit hergestellten können wir auch die vier letzten Kfg. ableiten durch die gleiche Operation, wenn wir zunächst eine der gefundenen Kfg., welche im Restesystem einen Dreier enthält, so umgestalten, daß die zu dem Element 1 gehörige Restfigur ein Dreier wird; nehmen wir nämlich die Kfg. III

$$\begin{array}{cccccccccc}1&1&1&8&2&3&2&3&4&5\\2&4&6&9&4&6&7&5&6&7\\3&5&7&10&8&8&9&9&10&10\end{array}$$

und setzen an Stelle der Elemente

$$\begin{array}{cccccccccc}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\9&3&7&10&6&8&2&5&1&4\end{array}\quad\text{folgende:}$$

so ergiebt sich die neue Gestalt derselben Kfg.:

$$\begin{array}{cccccccccc}1&1&1&2&4&6&5&3&3&2\\2&4&6&8&8&9&7&(7)&(5)&4\\3&5&7&9&10&10&8&9&10&6\end{array}$$

und in dieser brauchen wir nur die beiden eingeklammerten Elemente (7) und (5) mit einander zu vertauschen, um die Kfg. VII zu erhalten:

$$\mathrm{VII.}\left\{\begin{array}{cccccccccc}1&1&1&2&4&6&5&3&7&2\\2&4&6&8&8&9&7&5&3&4\\3&5&7&9&10&10&8&9&10&6\end{array}\right.$$

Um die nächste Kfg. zu erhalten gestalten wir die frühere V, nämlich:

$$\begin{array}{cccccccccc}1&1&1&8&2&3&2&4&3&5\\2&4&6&9&4&7&5&6&6&7\\3&5&7&10&8&8&9&9&10&10\end{array}$$

in der Weise um, daß die dem Element 1 zugehörige Restfigur ein Dreier wird, indem wir an Stelle der Elemente

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	setzen:
5	9	6	10	3	4	1	7	8	2,	

woraus die neue Gestalt derselben Kfg. hervorgeht

1	1	1	3	(4)	7	2	6	(5)	2
2	4	6	8	8	9	7	5	3	4
3	5	7	9	10	10	8	9	10	6

und in dieser brauchen wir jetzt nur die beiden eingeklammerten Elemente (4) und (5) mit einander zu vertauschen, um die Kfg. VIII zu erhalten:

	1	1	1	3	5	7	2	6	4	2
VIII.	2	4	6	8	8	9	7	5	3	4
	3	5	7	9	10	10	8	9	10	6

Endlich folgt aus VII, nämlich:

1	1	1	2	4	6	5	3	7	(2)
2	4	6	8	8	9	7	5	(3)	4
3	5	7	9	10	10	8	9	10	6

durch Vertauschung der beiden eingeklammerten Elemente (3) und (2) die Kfg.

	1	1	1	2	4	6	5	3	2	3
IX.	2	4	6	8	8	9	7	5	7	4
	3	5	7	9	10	10	8	9	9	6

und aus VIII, nämlich

1	1	1	3	(5)	7	(2)	6	4	2
2	4	6	8	8	9	7	5	3	4
3	5	7	9	10	10	8	9	10	6

durch Vertauschung der beiden eingeklammerten Elemente (5) und (2) die letzte Kfg.

	1	1	1	3	2	7	5	6	4	2
X.	2	4	6	8	8	9	7	5	3	4
	3	5	7	9	10	10	8	9	10	6

so daß also nunmehr in kürzerer Weise durch eine sehr einfache Operation sämmtliche zehn Konfigurationen 10_3 aus der ursprünglichen Désarguesschen Figur abgeleitet sind.

13. Wir wenden uns erst jetzt zur geometrischen Konstruction der gefundenen Konfigurationen, indem wir die zehn Elemente als Punkte und je drei in einer Kolonne stehende Elemente als drei auf einer Geraden liegende Punkte auffassen, dann zeigt die Konfiguration I:

$$\text{I.}\left\{\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 8 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 10 & 8 & 8 & 9 & 9 & 10 & 10 \\ \hline \end{array}\right.,$$

daß die drei Schnittpunkte

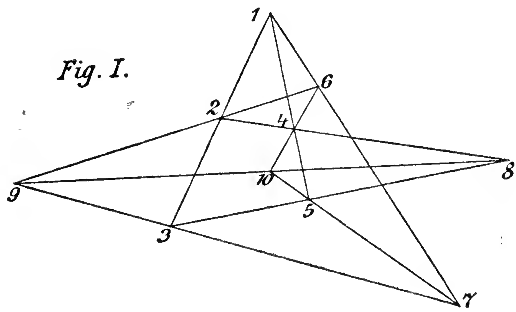
$$(24,\ 35) = 8 \qquad (26,\ 37) = 9 \qquad (46,\ 57) = 10$$

auf einer Geraden | 8 9 10 | liegen sollen und die beiden Dreiecke

$$\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ \hline & 1 & \end{array}$$

perspective Lage haben rücksichtlich des Perspectivitätscentrums 1; nach dem Désarguesschen Satze ist das Eine Folge des Andern, und wir erhalten die Figur I, indem wir die Punkte 23456 beliebig wählen, die Schnittpunkte (2 4, 3 5) = 8 (2 3, 4 5) = 1 bestimmen und auf | 1 6 | den Punkt 7 willkürlich annehmen, dann folgen (7 3, 2 6) = 9 (7 5, 4 6) = 10.

Fig. I.



In der Konfiguration II haben wir

$$\text{II.}\left\{\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 8 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 4 & 7 & 6 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 10 & 8 & 8 & 9 & 9 & 10 & 10 \\ \hline \end{array}\right.$$

die Schnittpunkte

$$(24,\ 37) = 8 \qquad (26,\ 35) = 9 \qquad (46,\ 57) = 10,$$

welche auf gerader Linie liegen sollen; hieraus folgt nach dem Désurguesschen Satze, daß die beiden Dreiecke

$$\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 5 \\ \hline & \mathfrak{p} & \end{array}$$

perspectiv liegen müssen rücksichtlich des Perspectivitätscentrums $\mathfrak{p}$ = (23, 56); sie sollen auch beide perspectiv liegen rücksichtlich des Perspectivitätscentrums 1, nämlich

$$\frac{\begin{matrix}2 & 4 & 6\\ 3 & 5 & 7\end{matrix}}{1}$$

folglich müssen sie eine doppelt-perspective Lage haben; wir können demnach die Figur auf folgende Art construiren:

Man nehme die Punkte 2 3 4 5 6 willkürlich an, bestimme die Schnittpunkte

$$\begin{array}{ll} (23,\ 45) = 1 & (23,\ 56) = \mathfrak{p} \\ (26,\ 35) = 9 & (16,\ 4\mathfrak{p}) = 7 \\ (24,\ 37) = 8 & (46,\ 57) = 10 \end{array}$$

dann müssen 8 9 10 auf einer Geraden liegen, weil die beiden Dreiecke

$$\frac{\begin{matrix}2 & 4 & 6\\ 3 & 7 & 5\end{matrix}}{\mathfrak{p}}$$

perspectiv liegen, und wir erhalten die Figur II.

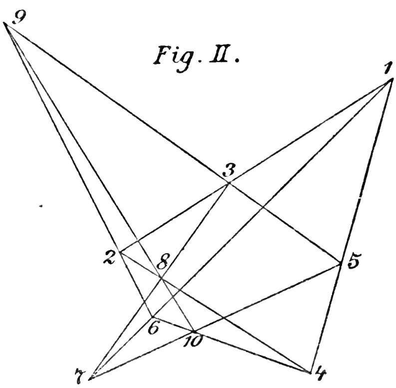


Fig. II.

In der Kfg. III haben wir:

$$\text{III.}\left\{\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 8 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 4 & 6 & 7 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 10 & 8 & 8 & 9 & 9 & 10 & 10 \end{array}\right.$$

die drei Schnittpunkte

$$(54,\ 67) = 1 \qquad (48,\ 79) = 2 \qquad (86,\ 95) = 3,$$

welche in gerader Linie liegen sollen, folglich muß das Sechseck

5 4 8 6 7 9

ein Pascal'sches sein, bei dem die drei Sehnen

$$|\,46\,| \quad |\,57\,| \quad |\,89\,|$$

sich in einem Punkte 10 schneiden sollen, um sämmtlichen Bedingungen der Kfg. zu genügen. Die Figur wird also sehr einfach zu construiren sein:

Man nehme die fünf Punkte

$$4\ 5\ 6\ 7\ 8$$

willkürlich an und bestimme die Schnittpunkte

$$(46,\ 57) = 10 \qquad (47,\ 56) = \mathfrak{p}$$
$$(45,\ 67) = 1 \qquad (1\mathfrak{p},\ 58) = \mathfrak{q},$$

dann folgt

$$(7\,\mathfrak{q},\ 10\,8) = 9$$
$$(9\,5,\ 8\,6) = 3$$
$$(9\,7,\ 8\,4) = 2;$$

es sind also sämmtliche Punkte ermittelt und genügen den Bedingungen der Kfg., denn da $|45|$ $|67|$ $|\mathfrak{p}\mathfrak{q}|$ sich in einem Punkte 1 schneiden, so liegen die beiden Dreiecke

$$\frac{\begin{matrix}4 & 6 & \mathfrak{p}\\ 5 & 7 & \mathfrak{q}\end{matrix}}{1}$$

perspectiv, also die drei Schnittpunkte

$$(46,\ 57) = 10 \quad (4\mathfrak{p},\ 5\mathfrak{q}) = (47,\ 58) \quad (6\mathfrak{p},\ 7\mathfrak{q}) = (65,\ 79)$$

oder gemäß der Konstruktion

$$(46,\ 89) \qquad (47,\ 85) \qquad (65,\ 97)$$

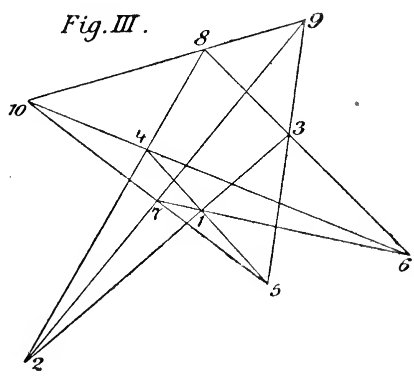
auf gerader Linie, woraus folgt, daß das Seckseck 7 4 6 5 8 9 ein Pascalsches ist; bilden wir aus diesen sechs Punkten das Pascalsche Sechseck 5 4 8 6 7 9 so zeigt sich, dass die drei Punkte

$$(54,\ 67) = 1 \quad (48,\ 79) = 2 \quad (86,\ 59) = 3$$

auf der letzten Kfg.-Geraden liegen.

Nach der angegebenen Konstruction läßt sich also die Figur III. zeichnen:

Fig. III.



Die nächste Kfg. IV.

$$\text{IV.}\left\{\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 8 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 4 & 6 & 5 & 7 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 10 & 8 & 8 & 9 & 9 & 10 & 10 \end{array}\right.$$

zeigt dagegen eine wesentlich andere Konstitution. Wir haben nämlich die sechs Geraden

$$\begin{array}{ll} |2\,3\quad 1| & |8\,9\quad 10| \\ |2\,8\quad 4| & |3\,9\quad 7| \\ |2\,9\quad 5| & |3\,8\quad 6| \end{array}$$

und erkennen, daß dieselben die drei Seitenpaare eines vollständigen Vierecks

$$2\ 3\ 8\ 9$$

bilden, mithin die Gerade $|1\,4\,5|$ in den drei Punktepaaren einer Involution schneiden.

Zugleich haben wir auch die sechs Geraden

$$\begin{array}{ll} |6\,7\quad 1| & |9\,10\quad 8| \\ |6\,10\quad 4| & |9\,7\quad 3| \\ |7\,10\quad 5| & |9\,6\quad\ |, \end{array}$$

welche ebenfalls die drei Seitenpaare eines vollständigen Vierecks

$$6\ 7\ 9\ 10$$

sind, also auch die Gerade $|1\,4\,5|$ in den drei Punktepaaren einer Involution schneiden.

Diese beiden Involutionen sind aber identisch, weil zwei Punktepaare dieselben sind, nämlich

$$1 \text{ und } (8\,9\,10,\ 1\,4\,5); \quad 4 \text{ und } (3\,7\,9,\ 1\,4\,5),$$

folglich muß auch der in beiden Involutionen dem Punkte 5 conjugirte Punkt derselbe sein d. h. es müssen die drei Geraden

$$|1\,4\,5| \qquad |3\,8\,6| \qquad |9\,6|$$

sich in einem und demselben Punkte schneiden. Da aber die zweite und dritte Gerade sich in 6 schneiden, so müßte entweder $|1\,4\,5|$ den Kfg.-Punkt 6 enthalten, was widersinnig ist, oder es müssen $|3\,6\,8|$ und $|9\,6|$ identisch zusammenfallen, also die vier Kfg.-Punkte 3 6 8 9 auf einer Geraden liegen, was ebenfalls widersinnig ist.

Wir schließen also, daß die combinatorisch wohl zulässige Konfiguration IV. geometrisch unausführbar ist. Dies ist die in der Einleitung hervorgehobene Kfg. (s. o. S. 194), welche bei Kantor mit (C) bezeichnet wird.

Wir gehen zur nächsten Kfg. V. über:

$$\text{V.}\left\{\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 8 & 2 & 3 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 4 & 7 & 5 & 6 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 10 & 8 & 8 & 9 & 9 & 10 & 10 \end{array}\right.$$

Hier zeigt sich, daß die drei Schnittpunkte

$$(9\,5,\ 1\,3) = 2; \qquad (9\,6,\ 1\,5) = 4; \qquad (9\,10,\ 3\,7) = 8$$

auf einer Geraden $|\,2\,4\,8\,|$ liegen sollen und außerdem noch die drei Bedingungen zu erfüllen sind, daß $1\,6\,7$, $3\,6\,10$, $5\,7\,10$ auf je einer Geraden liegen. Wir können daher die Punkte

$$1\ 3\ 5\ 7$$

willkürlich annehmen, und auf $|\,7\,5\,|$ auch den Punkt 10 beliebig wählen, dann folgt hieraus der Punkt

$$6 = (3\,10,\ 1\,7)$$

und wir haben jetzt drei Punkte

$$5 = \mathfrak{a} \qquad 6 = \mathfrak{b} \qquad 10 = \mathfrak{c}$$

und drei Gerade

$$|\,1\,3\,| = a \qquad |\,1\,5\,| = b \qquad |\,3\,7\,| = c$$

gegeben; es ist die Aufgabe einen Punkt $\mathfrak{x} = 9$ zu finden von der Beschaffenheit, daß die drei Schnittpunkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{a}, a)$ $(\mathfrak{x}\mathfrak{b}, b)$ $(\mathfrak{x}\mathfrak{c}, c)$ auf einer Geraden liegen. Der Ort eines solchen Punktes ist bekanntlich[1]) eine Kurve dritter Ordnung, welche durch drei Paare conjugirter Punkte:

$$\mathfrak{a} \text{ und } (bc) \qquad \mathfrak{b} \text{ und } (ca) \qquad \mathfrak{c} \text{ und } (ab)$$

bestimmt ist, und von welcher wir weitere Paare conjugirter Punkte auf lineare Weise in unzähliger Menge aus diesen drei Paaren ableiten können. Die drei ersten Paare conjugirter Punkte sind bei uns

$$6 \text{ und } 3, \qquad 10 \text{ und } 1, \qquad 5 \text{ und } \mathfrak{p} = (1\,5,\ 3\,7);$$

wir finden aus ihnen das neue Paar

$$(3\,5,\ 6\,\mathfrak{p}) = \mathfrak{r} \ \text{ und } \ (6\,5,\ 3\,7) = \mathfrak{q}$$

und können jetzt den Schnittpunkt

$$(1\,\mathfrak{q},\ 10\,\mathfrak{r}) = 9$$

als den gesuchten Punkt 9 wählen, aus dem dann die drei letzten Punkte $2\,4\,8$ in der angegebenen Weise folgen. Wir erhalten also folgende lineare Konstruction der Kfg. V:

1) Vgl. »Zurückführung der Grassmannschen Definitionen der Kurve dritter Ordnung auf die von Chasles, Cayley und Hesse angegebenen Erzeugungsweisen«, Kronecker's Journal Bd. 104, S. 71.

Man nehme die vier Punkte 1 3 5 7 willkürlich an und wähle auf | 5 7 | den Punkt 10 beliebig, dann erhält man

$$(3\,10,\ 1\,7) = 6$$

und bestimmt die Hülfspunkte

$$\begin{aligned} (1\,5,\ \ 3\,7) &= \mathfrak{p} \\ (5\,6,\ \ 3\,7) &= \mathfrak{q} \\ (3\,5,\ \ 6\,\mathfrak{p}) &= \mathfrak{r}, \end{aligned}$$

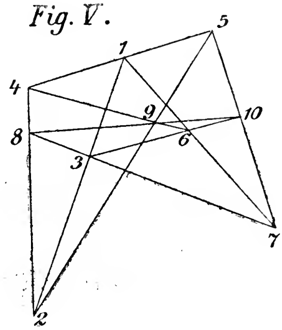
dann folgt $(1\,\mathfrak{q},\ 10\,\mathfrak{r}) = 9$

und die drei letzten Kfg.-Punkte

$$(9\,5,\ 1\,3) = 2 \qquad (9\,6,\ 1\,5) = 4 \qquad (9\,10,\ 3\,7) = 8$$

müssen auf einer Geraden liegen, wodurch die ganze Kfg. V hergestellt ist. Wir erhalten durch die angegebene Konstruction die Figur V:

Fig. V.



Wir gehen nun zur Kfg. VI über:

$$\text{VI.}\left\{\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 8 & 2 & 3 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 4 & 7 & 6 & 7 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 10 & 8 & 8 & 9 & 9 & 10 & 10 \\ \hline \end{array}\right.$$

bei welcher die drei Schnittpunkte

$$(2\,4,\ 3\,7) = 8 \qquad (2\,6,\ 5\,7) = 9 \qquad (4\,6,\ 3\,5) = 10$$

auf einer Geraden liegen sollen, d. h. die beiden Dreiecke

$$\begin{array}{c} 2\ 4\ 6 \\ 7\ 3\ 5 \\ \hline \mathfrak{p} \end{array}$$

müssen perspective Lage haben rücksichtlich eines Perspectivitätscentrums $\mathfrak{p} = (2\,7,\ 3\,4)$; dieselben beiden Dreiecke müssen aber den Bedingungen der Kfg. gemäß die zweite perspective Lage haben:

$$\begin{array}{c} 2\ 4\ 6 \\ 3\ 5\ 7 \\ \hline 1 \end{array}$$

rücksichtlich des Perspectivitätscentrums 1; folglich haben sie eine doppelt-perspective Lage, und wir können die Figur auf folgende Art construiren:

Man nehme die Punkte 2 3 4 5 7 willkürlich an, bestimme die Schnittpunkte

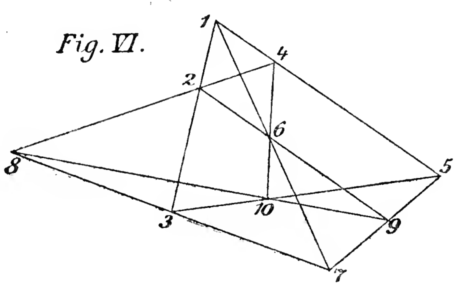
$$\begin{array}{lll} (23,\ 45) = 1 & (27,\ 34) = \mathfrak{p} & (26,\ 57) = 9 \\ (24,\ 37) = 8 & (5\mathfrak{p},\ 17) = 6 & (46,\ 35) = 10, \end{array}$$

dann müssen 8 9 10 auf einer Geraden liegen, weil die beiden Dreiecke

$$\begin{array}{c} 2\ 4\ 6 \\ 7\ 3\ 5 \\ \hline \mathfrak{p} \end{array}$$

perspective Lage haben, und wir erhalten für die Kfg. VI. die Figur VI:

Fig. VI.



Wir gehen nun zur Kfg. VII über:

$$\text{VII.} \left\{ \begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 8 & 9 & 7 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 10 & 10 & 8 & 9 & 10 & 6 \\ \hline \end{array} \right.$$

Hier liegen die beiden Dreiecke

$$\begin{array}{c} 1\ 5\ 7 \\ 2\ 9\ 10 \\ \hline 3 \end{array}$$

perspectiv rücksichtlich des Perspectivitätscentrums 3, folglich müssen die Schnittpunkte entsprechender Seiten

$$(15,\ 29) = \mathfrak{p} \qquad (17,\ 2\,10) = \mathfrak{q} \qquad (57,\ 9\,10) = \mathfrak{r}$$

auf einer Geraden liegen. Diese drei Punkte lassen sich aber zufolge der Kfg. auch so ausdrücken

$$(145,\ 289) = \mathfrak{p}; \qquad (167,\ 2\,10) = \mathfrak{q}; \qquad (578,\ 6\,9\,10) = \mathfrak{r}.$$

Wählen wir daher die Punkte

$$1\ 2\ 6\ 8\ 10$$

willkürlich und bestimmen aus ihnen

$$(2\,6,\ 8\,10) = 4 \qquad (2\,8,\ 6\,10) = 9$$

so erhalten wir die drei Hilfspunkte

$$(1\,4,\ 2\,8) = \mathfrak{p} \qquad (1\,6,\ 2\,10) = \mathfrak{q} \qquad (\mathfrak{p}\,\mathfrak{q},\ 6\,10) = \mathfrak{r}$$

folglich die drei letzten Kfg.-Punkte:

$$(8\,\mathfrak{r},\ 1\,4) = 5 \qquad (8\,\mathfrak{r},\ 1\,6) = 7 \qquad (5\,9,\ 7\,10) = 3,$$

und aus der perspectiven Lage der beiden Dreiecke

$$\begin{array}{ccc} 5 & 9 & \mathfrak{p} \\ 7 & 10 & \mathfrak{q} \\ \hline & \mathfrak{r} & \end{array}$$

folgt die letzte Kfg.-Gerade $|\,1\ 2\ 3\,|$. Wir können also die Figur folgendermaßen construiren:

Man nehme die Punkte $1\ 2\ 6\ 8\ 10$ willkürlich an, bestimme die Schnittpunkte

$$(2\,6,\ 8\,10) = 4 \qquad (2\,8,\ 6\,10) = 9$$

und die drei Hilfspunkte

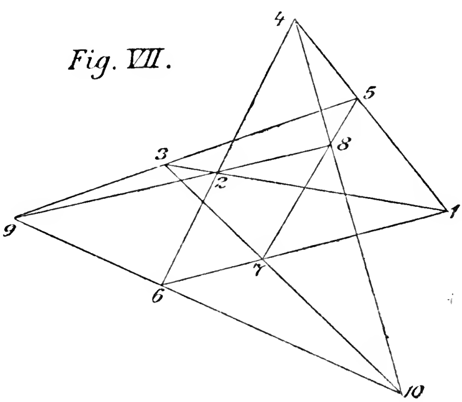
$$(1\,4,\ 2\,8) = \mathfrak{p} \qquad (1\,6,\ 2\,10) = \mathfrak{q} \qquad (\mathfrak{p}\,\mathfrak{q},\ 6\,10) = \mathfrak{r}$$

dann folgen die drei letzten Kfg.-Punkte

$$\begin{aligned} (8\,\mathfrak{r},\ 1\,4) &= 5 \\ (8\,\mathfrak{r},\ 1\,6) &= 7 \\ (5\,9,\ 7\,10) &= 3; \end{aligned}$$

nach dieser Konstruction können wir die Kfg. VII zeichnen:

Fig. VII.



Wir gehen nun zur Kfg. VIII über:

	1	1	1	3	5	7	2	6	4	2
VIII.	2	4	6	8	8	9	7	5	3	4
	3	5	7	9	10	10	8	9	10	6

Hier zeigt sich, daß die Schnittpunkte

$$(82,\ 16) = 7; \qquad (83,\ 56) = 9; \qquad (85,\ 34) = 10$$

auf einer Geraden liegen sollen; wir können also ebenso verfahren, wie bei der Konstruction der Kfg. V und erhalten, ohne das dort auseinandergesetzte Verfahren zu wiederholen, folgende Konstruction:

Man nehme die Punkte 1 3 4 6 willkürlich an und wähle auf $|\,14\,|$ beliebig den Punkt 5, dann erhält man den Schnittpunkt $(13,\ 46) = 2$ und bestimmt die Hilfspunkte:

$$\begin{aligned}(16,\ 34) &= \mathfrak{p}\\ (56,\ 34) &= \mathfrak{q}\\ (16,\ 35) &= \mathfrak{r}\\ (5\mathfrak{p},\ 36) &= \mathfrak{s},\end{aligned}$$

dann wird der gesuchte Punkt 8 als der Schnittpunkt

$$(2\mathfrak{s},\ \mathfrak{q}\mathfrak{r}) = 8$$

gefunden, und die drei letzten Kfg.-Punkte

$$(82,\ 16) = 7; \qquad (83,\ 56) = 9; \qquad (85,\ 34) = 10$$

müssen auf einer Geraden liegen. Diese Konstruction liefert die Zeichnung der Kfg. VIII:

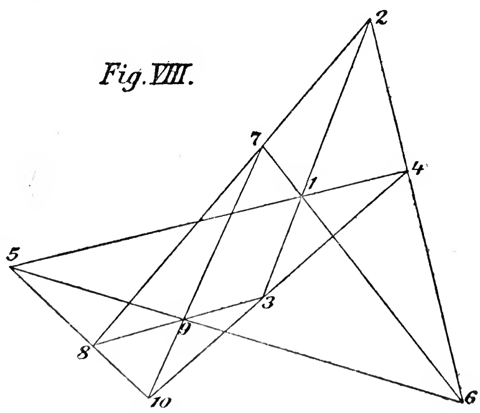


Fig. VIII.

Wir gehen jetzt zur Kfg. IX über:

	1	1	1	2	4	6	5	3	2	3
IX.	2	4	6	8	8	9	7	5	7	4
	3	5	7	9	10	10	8	9	10	6

in welcher es sich ganz ähnlich verhält, wie in der vorigen, da die drei Schnittpunkte

$$(89,\ 13) = 2 \qquad (85,\ 16) = 7 \qquad (84,\ 69) = 10$$

auf einer Geraden liegen sollen; wir können also unter Anwendung desselben Verfahrens zu folgender Konstruction gelangen:

Man nehme die Punkte 1 3 6 9 willkürlich an und wähle auf $|\,36\,|$ den Punkt 4 beliebig, dann erhält man den Schnittpunkt $(14,\ 39) = 5$ und bestimmt die Hilfspunkte:

$$\begin{aligned}(13,\ 69) &= \mathfrak{p}\\ (16,\ 49) &= \mathfrak{q}\\ (19,\ 36) &= \mathfrak{r},\end{aligned}$$

dann wird der gesuchte Punkt 8 unmittelbar gefunden als der Schnittpunkt

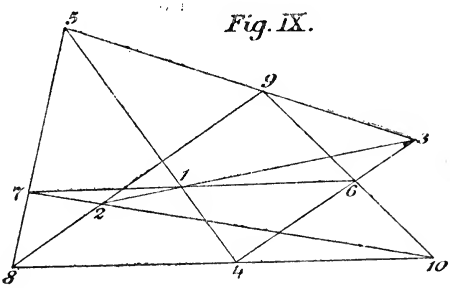
$$(5\mathfrak{r},\ \mathfrak{p}\mathfrak{q}) = 8$$

und die drei letzten Kfg.-Punkte

$$(89, 13) = 2; \qquad (85, 16) = 7; \qquad (84, 69) = 10$$

müssen auf einer Geraden liegen. Diese Konstruction liefert die Zeichnung der Kfg. IX:

Fig. IX.



Wir gehen endlich zur letzten Kfg. X. über:

$$\text{X.}\left\{\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 7 & 5 & 6 & 4 & 2\\ 2 & 4 & 6 & 8 & 8 & 9 & 7 & 5 & 3 & 4\\ 3 & 5 & 7 & 9 & 10 & 10 & 8 & 9 & 10 & 6 \end{array}\right.$$

in welcher es sich ganz ähnlich verhält, wie in der vorigen, da die drei Schnittpunkte

$$(85, 16) = 7; \qquad (83, 56) = 9; \qquad (82, 34) = 10$$

auf einer Geraden liegen sollen. Wir können daher unter Anwendung desselben Verfahrens zu folgender Konstruction gelangen:

Man nehme die Punkte 1 3 4 6 beliebig an und wähle auf

|14| den Punkt 5 willkürlich, dann erhält man den Schnittpunkt (13, 46) = 2 und bestimmt die Hilfspunkte:

$$\begin{aligned}(16, 34) &= \mathfrak{p}\\ (56, 34) &= \mathfrak{q}\\ (36, 2\mathfrak{p}) &= \mathfrak{r};\end{aligned}$$

dann wird der gesuchte Punkt 8 unmittelbar gefunden als der Schnittpunkt

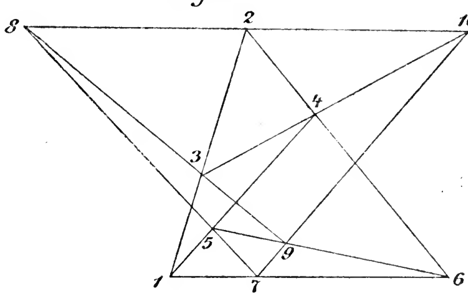
$$(1\mathfrak{q}, 5\mathfrak{r}) = 8$$

und die letzten drei Kfg.-Punkte

$$(85, 16) = 7; \qquad (83, 56) = 9; \qquad (82, 34) = 10$$

müssen auf einer Geraden liegen. Diese Konstruction liefert die Zeichnung der Kfg. X:

Fig. X.



Diese Figur zeigt uns auch das einfache Zehneck

1 4 2 3 10 8 9 7 5 6,

welches sich selbst ein- und umbeschrieben ist, indem jede Seite, welche die i^{te} und $(i+1)^{te}$ Ecke verbindet, zugleich durch die $(i+3)^{te}$ Ecke geht, wie bereits oben (11) bemerkt worden ist.

14. Herr Kantor zeigt (a. a. O. S. 1305), daß jede Kfg. 10_3 sich als ein sich selbst ein- und somit auch umbeschriebenes Zehneck betrachten läßt, freilich nicht in der regelmäßigen Weise, wie dies bei der letzten Kfg. X. der Fall ist. Dies folgt, wie Herr Kantor (a. a. O.) bemerkt, aus einem Listing'schen Satze, und es ist bei den verschiedenen Kfg. auf mehrfache Weise möglich, den durch eine Kfg. gebildeten Linienzug in einem zusammenhängenden Laufe zu durchfahren. Ich will mich hier damit begnügen, bei jeder einzelnen Kfg. (mit Ausnahme der unkonstruirbaren IV.) wenigstens ein einfaches Zehneck anzugeben, welches die Eigenschaft besitzt, daß jede Seite desselben noch durch eine dritte

Ecke des Zehnecks geht, also auch jede Ecke in einer zwei andere Ecken des Zehnecks verbindenden Seite desselben liegt.

Für die Kfg. I.

$$\text{I.}\left\{\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 8 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 10 & 8 & 8 & 9 & 9 & 10 & 10 \end{array}\right.$$

können wir aus den Kfg.-Geraden das einfache Zehneck bilden

$$1 \quad 2 \quad 9 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 6 \quad 10 \quad 8 \quad 4$$

dessen aufeinander folgende Seiten $|12|$ $|29|$ $|93|\ldots|41|$ bez. durch die Ecken gehen

$$3 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 10 \quad 1 \quad 4 \quad 9 \quad 2 \quad 5.$$

Für die Kfg. II.

$$\text{II.}\left\{\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 8 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 4 & 7 & 6 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 10 & 8 & 8 & 9 & 9 & 10 & 10 \end{array}\right.$$

können wir aus den Kfg.-Geraden das einfache Zehneck bilden

$$1 \quad 2 \quad 9 \quad 3 \quad 7 \quad 6 \quad 4 \quad 8 \quad 10 \quad 5$$

dessen aufeinander folgende Seiten $|12|$ $|29|\ldots.|51|$ bez. durch die Ecken gehen

$$3 \quad 6 \quad 5 \quad 8 \quad 1 \quad 10 \quad 2 \quad 9 \quad 7 \quad 4.$$

Für die Kfg. III.

$$\text{III.}\left\{\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 8 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 4 & 6 & 7 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 10 & 8 & 8 & 9 & 9 & 10 & 10 \end{array}\right.$$

können wir aus den Kfg.-Geraden das einfache Zehneck bilden

$$1 \quad 2 \quad 7 \quad 5 \quad 4 \quad 8 \quad 3 \quad 9 \quad 10 \quad 6$$

dessen aufeinander folgende Seiten $|12|$ $|27|\ldots.|61|$ bez. durch die Ecken gehen

$$3 \quad 9 \quad 10 \quad 1 \quad 2 \quad 6 \quad 5 \quad 8 \quad 4 \quad 7.$$

Die unkonstruirbare Kfg. IV fällt aus.

Für die Kfg. V.

$$\text{V.}\left\{\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 8 & 2 & 3 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 4 & 7 & 5 & 6 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 10 & 8 & 8 & 9 & 9 & 10 & 10 \end{array}\right.$$

können wir aus den Kfg.-Geraden das einfache Zehneck bilden

$$1 \quad 5 \quad 7 \quad 3 \quad 2 \quad 9 \quad 4 \quad 8 \quad 10 \quad 6$$

dessen aufeinander folgende Seiten $|15|$ $|57|\ldots.|61|$ bez. durch die Ecken gehen

4 10 8 1 5 6 2 9 3 7.

Für die Kfg. VI.

$$\text{VI.}\left\{\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 8 & 2 & 3 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 4 & 7 & 6 & 7 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 10 & 8 & 8 & 9 & 9 & 10 & 10 \end{array}\right.$$

können wir aus den Kfg.-Geraden das einfache Zehneck bilden

1 2 8 3 5 7 6 9 10 4

dessen aufeinander folgende Seiten | 1 2 | | 2 8 | .... | 4 1 | bez. durch die Ecken gehen

3 4 7 10 9 1 2 8 6 5.

Für die Kfg. VII.

$$\text{VII.}\left\{\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 8 & 9 & 7 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 10 & 10 & 8 & 9 & 10 & 6 \end{array}\right.$$

können wir aus den Kfg.-Geraden das einfache Zehneck bilden

1 3 9 6 2 8 5 4 10 7

dessen aufeinander folgende Seiten | 1 3 | | 3 9 | ... | 7 1 | bez. durch die Ecken gehen

2 5 10 4 9 7 1 8 3 6.

Für die Kfg. VIII.

$$\text{VIII.}\left\{\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 8 & 9 & 7 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 10 & 10 & 8 & 9 & 10 & 6 \end{array}\right.$$

können wir aus den Kfg.-Geraden das einfache Zehneck bilden

1 4 10 9 3 2 6 5 8 7

dessen auf einander folgende Seiten | 1 4 | 4 10 | .... | 7 1 | bez. durch die Ecken gehen

5 3 7 8 1 4 9 10 2 6.

Für die Kfg. IX.

$$\text{IX.}\left\{\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 8 & 9 & 7 & 5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 10 & 10 & 8 & 9 & 10 & 6 \end{array}\right.$$

können wir aus den Kfg.-Geraden das einfache Zehneck bilden

1 3 4 10 2 8 7 6 9 5

dessen aufeinander folgendeSeiten | 1 3 | | 3 4 | .... | 5 1 | bez. durch die Ecken gehen

2 6 8 7 9 5 1 10 3 4.

Endlich für die Kfg. X.

$$X. \left\{ \begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 7 & 5 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 8 & 9 & 7 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 10 & 10 & 8 & 9 & 10 & 6 \end{array} \right.$$

können wir aus den Kfg.-Geraden das einfache Zehneck bilden

$$1 \quad 4 \quad 2 \quad 3 \quad 10 \quad 8 \quad 9 \quad 7 \quad 5 \quad 6$$

dessen aufeinander folgende Seiten $|\,1\,4\,|$ $|\,4\,2\,|$ .... $|\,6\,1\,|$ bez. durch die Ecken gehen

$$5 \quad 6 \quad 1 \quad 4 \quad 2 \quad 3 \quad 10 \quad 8 \quad 9 \quad 7.$$

Dies ist der einzige Fall, bei welchem die Ecken in derselben Reihenfolge auf einander folgen, wie bei dem ursprünglichen Zehneck, nur von einem andern Ausgangspunkte ab; wir gelangen also, indem wir die Ecken in dieser Reihenfolge mit einander verbinden, wieder zu dem ursprünglichen Zehneck.

Breslau, im Februar 1889.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Januar 1889.

(Fortsetzung.)

Transactions of the R. society of Victoria. Vol. 1. Part. 1. Melbourne 1888.
Memoirs of the geological survey of India. Serie XIII. Saltrange-fossils, I. Productus-limestone fossils. 7. Coelenterata-Amorphozoa-Protozoa. Calcutta 1887.
Report of the scientific results of the exploring voyage of H.M.J. Challenger Zoology. Vol. XXVIII. London 1888.
Théorie mathématique de la lumière. Paris 1889, par H. Poincaré.
Annales du musée Guimet. Tome XIII. Paris 1888.
a. Le Râmâyana, par Charles Schoebel. P. 6.
b. Revue de l'histoire des religions, p. J. Réville. Année 9. Tome XVII. N. 3. Tome XVIII. N. 1.
Académie des sciences et lettres de Montpellier. Mémoires de la section des lettres. Tome VIII. fasc. II. 1888. Montpellier.
Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. 3e série. Tome III. Cahier II. Paris 1887.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

20. März. **№ 9.** 1889.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 2. März.

Ueber Systeme von complexen Zahlen.

Von

E. Study.

Vorgelegt von H. A. Schwarz.

Durch Untersuchungen über Gruppen von linearen Transformationen bin ich auf einige Betrachtungen geführt worden, welche sich auf die aus n Haupteinheiten gebildeten Größen beziehen, und welche zu dem Gegenstande in naher Beziehung stehen, den die Herren Weierstraß, Schwarz, Hölder, Dedekind und Petersen in den Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen unter verschiedenen Gesichtspunkten behandelt haben [1]).

Für die Untersuchung von Herrn Weierstraß ist der Gesichtspunkt maßgebend gewesen, die Gesetze des Rechnens für Größen mit mehreren Grund-Einheiten so zu definiren, daß eine möglichst große Uebereinstimmung mit den Rechnungs-Operationen im Gebiete der gewöhnlichen reellen Zahlen herbeigeführt wird.

---

1) Weierstraß Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größen. Gött. Nachr. 1884, Nr. 10 (S. 395—419). Hierzu Schwarz ebenda, Nr. 13 (S. 516—519). Dedekind 1885 Nr. 4 (S. 141—159). Hölder 1886 Nr. 7 (S. 241—244). Dedekind 1887 Nr. 1 (S. 1—7). Petersen 1887 Nr. 17 (S. 489—502).

Da eine völlige Uebereinstimmung in dem Sinne, wie sie noch die Theorie der gewöhnlichen complexen Zahlen darbietet, für Größen mit mehr als zwei Grundeinheiten nicht zu erreichen ist, so kann eine solche Verallgemeinerung nur in der Weise vollzogen werden, daß man unter den Regeln des Rechnens mit reellen Zahlgrößen einige beibehält, andere fallen läßt. Es liegt in der Natur der Sache, daß man hierbei eine gewisse Willkür in der Auswahl derjenigen Gesetze hat, welche man beibehalten will. Man kann die Forderungen stellen, welche Herr Weierstraß ausgesprochen hat; man kann aber auch nur einen Theil dieser Forderungen aufrecht erhalten; man kann endlich die Verallgemeinerung auch in einer ganz anderen Richtung vornehmen. Man kann z. B. das sogenannte commutative Gesetz der Multiplication aufgeben, und dafür verlangen, daß das Product zweier Zahlen niemals verschwinden soll, ohne daß einer der Factoren verschwindet. Es gibt, nach einem schönen, von Herrn Frobenius entdeckten Satze, nur drei Zahlensysteme, welche dieser Forderung Genüge leisten: Die reellen Zahlen (Zahlen mit einer Grundeinheit), die gewöhnlichen complexen Zahlen, und die Quaternionen [1]); es sind dies also gerade diejenigen Zahlensysteme, welche sich für das Ganze der Wissenschaft bis jetzt als die bedeutungsvollsten erwiesen haben.

Ich will im Folgenden, wenn auch nicht die allgemeinste Definition, so doch eine solche Definition eines Systems von complexen Zahlen zu Grunde legen, welche allgemein genug ist, um sowohl die Quaternionen, als auch die von Herrn Weierstraß betrachteten Systeme zu umspannen.

Um nicht oft wiederholte Dinge auf's Neue wiederholen zu müssen, setze ich hier den Begriff einer aus n „Grundzahlen" oder „Haupteinheiten" mit reellen oder gewöhnlichen complexen Coefficienten gebildeten sogenannten complexen oder extensiven Größe voraus; ferner die Begriffe der Multiplication und Division einer extensiven Größe mit einer gewöhnlichen reellen oder complexen Zahl, sowie der Addition und Multiplication von zwei extensiven Größen. (Vgl. Graßmann, Ausdehnungslehre von 1862, Kap. 1, 2). Es wird nun das System aller aus denselben Grundzahlen $e_1 \ldots e_n$ linear abgeleiteten extensiven Größen unter folgenden Bedingungen ein „System von complexen Zahlen" genannt:

1) Es muß das Product $e_i e_k$ von irgend zweien dieser Grundzahlen e_i und e_k wieder eine Zahl des Sy-

---

1) Crelle's J. Bd. 84. (1878), S. 1—63. „Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen". S. insbesondere § 14.

stems $= \Sigma \gamma_{iks} e_s$ sein (wobei die Coefficienten γ_{iks} gewöhnliche reelle oder complexe Zahlen sind).

2) Es muß das in der Formel $(ab)c = a(bc)$ ausgedrückte sogenannte associative Gesetz der Multiplication erfüllt sein.

3) Es muß in dem System eine Größe a^0 vorhanden sein, welche den **beiden** Gleichungen $a^0 x = x$, $xa^0 = x$ unabhängig von x genügt.

Dagegen wird nicht verlangt das Bestehen des sogenannten commutativen Gesetzes der Multiplication.

Man sieht leicht, daß die letzte Forderung 3) sich mit der anderen deckt, daß die Gleichung $xy = a$ „im Allgemeinen" nach x sowohl als auch nach y auflösbar sein soll. Hierzu ist nämlich nöthig, daß keine der Determinanten

$$| \Sigma_k \gamma_{iks} y_k | \quad | \Sigma_i \gamma_{iks} x_i |$$

identisch verschwindet. Ist nun die Voraussetzung 3) erfüllt, so kann man einmal $y = a^0$, dann $x = a^0$ nehmen, und erhält so augenscheinlich zwei nicht verschwindende Determinanten. Die Umkehrung des Satzes ist ein besonderer Fall eines von Herrn Lie aufgestellten Theorems, wonach jede Gruppe von Cremona'schen Transformationen die identische Transformation enthält [1]).

Wir werden die Zahl a^0 öfter als die Zahl „Eins" des Systems bezeichnen, und ihre charakteristische Eigenschaft durch die symbolische Gleichung $a^0 = 1$ ausdrücken.

Aus jedem der definirten Systeme von complexen Zahlen kann man unzählig viele andere dadurch herleiten, daß man an Stelle der Grundzahlen $e_1 \dots e_n$ durch eine lineare Transformation von nicht verschwindender Determinante neue Grundzahlen $\bar{e}_0 \dots \bar{e}_{n-1}$ einführt, und nun alle Zahlen des Systems als lineare Functionen dieser letzteren darstellt.

Alle so erhaltenen Systeme sind offenbar zugleich mit dem

1) „Theorie der Transformationsgruppen", § 3, S. 21. Vgl. Schur, „Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen", Math. Ann. Bd. XXXIII, S. 50. (1888). — Man könnte versucht sein, zu glauben, daß durch die Bedingungen 1) und 2) eine der unter 3) genannten Forderungen überflüssig gemacht wird, daß also eine der Gleichungen $a^0 x = x$, $xa^0 = x$ die andere nach sich zieht. Dies ist indessen nicht der Fall, wie das Beispiel $e_1^2 = e_1$, $e_1 e_2 = e_2$, $e_2 e_1 = 0$, $e_2^2 = 0$ zeigt. Hier sind die Forderungen 1) und 2) erfüllt, auch hat man identisch $e_1(x_1 e_1 + x_2 e_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2$, es gibt aber keine aus e_1 und e_2 linear ableitbare Größe, welche der zweiten unter 3) ausgesprochenen Forderung genügt. Demgemäß ist auch die Gleichung $xy = a$ im Allgemeinen nur nach y, nicht aber nach x auflösbar. — Sind zwei Größen a^0, b^0 vorhanden, welche bezüglich die Gleichungen $a^0 x = x$, $xb^0 = x$ identisch befriedigen, so folgt sofort $a^0 = b^0$.

System $e_1 \ldots e_n$ in allen ihren Eigenschaften bekannt; wir werden sie daher als von dem Systeme $e_1 \ldots e_n$ nicht wesentlich verschieden betrachten, und mit ihm in einen und denselben „Typus“ stellen. Ebendahin wollen wir dann auch noch dasjenige System stellen, welches aus dem Systeme $e_1 \ldots e_n$ dadurch hervorgeht, daß man in den Multiplicationsregeln $e_i e_k = \sum \gamma_{iks} e_s$ alle Constanten γ_{iks} mit den entsprechenden Constanten γ_{kis} vertauscht. Wir wollen dieses letztere System als das „reciproke System“ des gegebenen bezeichnen. Es ist ebenfalls zugleich mit dem gegebenen System völlig bekannt; jeder Formel des einen entspricht eine bestimmte Formel des anderen, welche aus jener dadurch hervorgeht, daß man die Ordnung (Reihenfolge) aller Multiplicationen umkehrt, das heißt, jedes Product $ab \ldots ef$ durch das entsprechende Product $fe \ldots ba$ ersetzt.

Nunmehr können wir die Aufgabe stellen:

Alle verschiedenen Typen von Systemen mit n Grundzahlen anzugeben.

Dieselbe soll im Folgenden für die beiden Werthe $n = 3$ und $n = 4$, sowie der Vollständigkeit halber auch für den noch sehr einfachen und übrigens wohlbekannten Fall $n = 2$ behandelt werden. Wir repräsentiren einen jeden Typus durch eines seiner Systeme, welches wir zuweilen auch als eine „canonische Form“ des Typus bezeichnen werden. Die zugehörigen Multiplicationsregeln stellen wir durch eine Multiplicationstafel dar, die am übersichtlichsten in Form eines Quadrates geschrieben wird, z. B.:

	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	e_2
e_1	e_1	e_0	e_2
e_2	e_2	$-e_2$	0 [1]).

Hier steht in der Horizontalreihe (e_i) und in der Verticalreihe (e_k) der Werth des Productes $e_i e_k$, z. B. $e_2 e_1 = -e_2$.

---

1) Aehnlicher Tafeln hat sich auch der verstorbene amerikanische Mathematiker B. Peirce bedient. Es werden in dessen sehr umfangreicher, im vierten Bande des American Journal (p. 97—229) abgedruckter Abhandlung: Linear Associative Algebra außer einer großen Zahl von nicht hierhergehörigen Algorithmen auch einige, aber keineswegs alle Systeme aufgezählt, welche der Definition 3) genügen. Für $n = 3$ z. B. wird nur ein einziges Zahlensystem angegeben, während ihrer fünf verschiedene vorhanden sind.

Die Multiplicationstafel des reciproken Systems erhält man aus dem vorstehenden Schema einfach dadurch, daß man Horizontal- und Verticalreihen vertauscht.

Für die Methode, welche wir bei Aufstellung der verschiedenen Systeme von n Grundzahlen befolgen werden, ist es wesentlich, daß die Bestimmung aller Systeme von weniger als n Grundzahlen bereits geleistet ist. Bei einigen besonderen Klassen von Zahlensystemen lassen sich indessen Methoden angeben, welche die Bestimmung aller ihnen angehörigen Systeme sofort für einen unbestimmten Werth von n leisten. Ich werde mich in dieser Hinsicht darauf beschränken, einen allgemeinen Satz auszusprechen, welcher alle diejenigen Systeme bestimmen lehrt, bei welchen die Potenzen $a^0 = 1, a^1, a^2, \ldots a^{n-1}$ einer Zahl a im Allgemeinen linear unabhängige Größen sind; Systeme, unter denen insbesondere auch die von Herrn Weierstraß behandelten enthalten sind.

An Stelle des hier zu Grunde gelegten Begriffs eines Systems von complexen Zahlen kann man auch einen von demselben etwas verschiedenen setzen, und dann wieder ein ähnliches Problem stellen. Beschränkt man sich nämlich auf solche Systeme von complexen Zahlen, bei welchen die Constanten γ_{iks} der Relationen $e_i e_k = \Sigma \gamma_{iks} e_s$ reelle Werthe haben, so wird man auch nur diejenigen Zahlensysteme in einer Klasse unterbringen dürfen, welche durch lineare Transformationen mit reellen Coefficienten in einander übergeführt werden können. Es scheint mir nicht zweckmäßig, von vorn herein einen solchen Standpunkt einzunehmen, weil dadurch der algebraische Charakter des Problems verwischt wird. Es ist aber wohl der Mühe werth, innerhalb eines jeden Typus diejenigen Systeme zu unterscheiden, zu welchen reelle Werthe der Constanten γ_{iks} gehören, und welche durch lineare Transformationen mit reellen Coefficienten nicht in einander übergeführt werden können. Wir wollen sie „verschiedene Gestalten desselben Typus“ nennen. Auch sie sollen im Nachstehenden für alle überhaupt behandelten Typen von Systemen complexer Zahlen vollständig bestimmt werden.

Hat man ein System mit n Grundzahlen, und ist $n > 1$, so muß nothwendig eine zwischen den Grenzen 2 und n liegende Zahl k von der Eigenschaft vorhanden sein, daß die k^{te} Potenz einer jeden Zahl a des Systems linear ausdrückbar wird durch die vorhergehenden Potenzen $a^0 = 1, a^1, a^2 \ldots a^{k-1}$, während diese letzteren bei hinreichend allgemeiner Wahl von a linear unabhängig sind.

Wir werden die bei einem gegebenen Werthe von n vorhandenen Zahlensysteme nach absteigenden Werthen von k ordnen. Die in den

Fällen $n = 2, 3, 4$ vorhandenen Zahlensysteme sollen jedesmal am Schluß des betreffenden Abschnittes übersichtlich zusammengestellt werden. Systeme desselben Typus erhalten dieselbe römische Ziffer; die einzelnen Gestalten desselben Typus werden durch angehängte Indices a, b, . . . unterschieden.

$n = 2$.

Hier ist nothwendig auch $k = 2$.

Sei a linear unabhängig von $a^0 = 1$, und

$$a^2 = \alpha_1 a^1 + \alpha_2 a^0,$$

wo α_1, α_2 gewöhnliche reelle oder complexe Zahlen sind. Hat nun die quadratische Gleichung

$$\lambda^2 = \alpha_1 \lambda + \alpha_2$$

zwei getrennte Wurzeln λ_0, λ_1, so führe man als neue Grundzahlen ein:

$$e_0 = \frac{a - \lambda_1}{\lambda_0 - \lambda_1} \qquad e_1 = \frac{a - \lambda_0}{\lambda_1 - \lambda_0};$$

hat sie eine Doppelwurzel λ, so nehme man als neue Grundzahlen diese:

$$e_0 = (a - \lambda)^0 = 1, \quad e_1 = a - \lambda.$$

Man erhält so die beiden einzigen, in den nachstehenden Tafeln I und II verzeichneten Typen von Systemen mit zwei Grundzahlen. Reell-verschiedene Systeme gehören offenbar nur zum ersten Typus, und zwar gibt es zwei Gestalten, entsprechend den beiden Möglichkeiten, daß die quadratische Gleichung $\lambda^2 = \alpha_1 \lambda + \alpha_2$ zwei reelle oder zwei conjugirt imaginäre Wurzeln hat. Im letzteren Falle erhält man durch Einführung der neuen Grundzahlen

$$\bar{e}_0 = e_0 + e_1 \qquad \bar{e}_1 = (e_0 - e_1)\,i$$

die Tafel I b), welche das System der gewöhnlichen complexen Zahlen vorstellt. Als Typus der Zahlensysteme der ersten Klasse kann die Tafel I selbst gelten; es erscheint uns aber zweckmäßig, diese Tafel nach Einführung der neuen Grundzahlen

$$\bar{e}_0 = e_0 + e_1 \qquad \bar{e}_1 = e_0 - e_1$$

noch einmal, in der Form I a) zu schreiben; wir haben dann in den Tafeln I a) und I b) zwei analoge canonische Formen der beiden Gestalten des Typus I.

I.

	e_0	e_1
e_0	e_0	0
e_1	0	e_1

I a).

	e_0	e_1
e_0	e_0	e_1
e_1	e_1	e_0

I b).

	e_0	e_1
e_0	e_0	e_1
e_1	e_1	$-e_0$

II.

	e_0	e_1
e_0	e_0	e_1
e_1	e_1	0 [1]).

Die Tafel I a) geht, wie gesagt, aus I hervor durch die reelle Substitution

$$\bar{e}_0 = e_0 + e_1 \qquad \bar{e}_1 = e_0 - e_1,$$

wenn man nachträglich die übergesetzten Striche wieder fortläßt; die Tafel I b) ebenso aus I a) durch die Substitution

$$\bar{e}_0 = e_0 \quad \bar{e}_1 = e_1 i \quad \left(i = \sqrt{-1}\right).$$

$n = 3$.

Sei zunächst $k = 3$; so daß also

$$a^3 = \alpha_1 a^2 + \alpha_2 a^1 + \alpha_3 a^0,$$

und bei allgemeiner Wahl der Zahl a nicht schon a^2 durch a^1 und a^0 ausdrückbar wird. Wir unterscheiden nun drei Fälle, je nachdem die cubische Gleichung

$$\lambda^3 = \alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3$$

bei allgemeiner Wahl der Zahl a drei getrennte Wurzeln $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ oder eine Doppelwurzel λ_0 und eine einfache Wurzel λ_2, oder endlich eine dreifache Wurzel λ_0 hat.

Im ersteren Falle setze man einfach

$$e_0 = \frac{(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)}{(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_0-\lambda_2)},$$

und entsprechend e_1 und e_2, mit cyclischer Vertauschung der Indices. Da e_0, e_1 und e_2 auf Grund der gemachten Annahme linear

1) Man vergleiche hierzu: Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, Bd. II, § 5. Nach einer in diesem Werke gemachten Angabe rührt die Bestimmung der verschiedenen Systeme von zwei Grundzahlen, beziehungsweise ihrer verschiedenen „Gestalten", von Herrn Weierstraß her.

unabhängig sind, und außerdem den sofort zu verificirenden Relationen $e_i^2 = e_i$, $e_i e_k = 0$ genügen, so erhält man die weiter hinten aufgeführte canonische Form I.

Fällt λ_1 mit λ_0 zusammen, so werden e_0 und e_1 unendlich, und die Transformation auf die canonische Form I wird unmöglich. Man mag aber bemerken, daß $e_0 + e_1$ und $(\lambda_0 - \lambda_1) e_0$ endlich bleiben; man hat in den Grenzwerthen dieser Ausdrücke:

$$\bar{e}_0 = -\frac{(a-\lambda_2)(a-2\lambda_0+\lambda_2)}{(\lambda_0-\lambda_2)^2},$$

$$\bar{e}_1 = \frac{(a-\lambda_0)(a-\lambda_2)}{(\lambda_0-\lambda_2)}$$

zusammen mit dem Grenzwerth von e_2:

$$\bar{e}_2 = \frac{(a-\lambda_0)^2}{(\lambda_2-\lambda_0)^2}$$

wieder drei linear unabhängige Zahlen, und erhält damit die canonische Form II.

Fällt endlich auch noch λ_2 mit λ_0 und λ_1 zusammen, so wird auch diese Form unmöglich. Es bleiben aber wieder $\bar{e}_0 + \bar{e}_2$, ferner $(\lambda_0 - \lambda_2)\,\bar{e}_0 + \bar{e}_1$, und $(\lambda_0 - \lambda_2)\bar{e}_1$ endlich, und man hat in den Grenzwerthen dieser Ausdrücke:

$$\bar{\bar{e}}_0 = 1, \quad \bar{\bar{e}}_1 = (a-\lambda_0), \quad \bar{\bar{e}}_2 = (a-\lambda_0)^2$$

die Grundzahlen eines neuen Typus III.

Sei ferner $k = 2$. Dann werden wir neben $e_0 = 1$ zwei Zahlen e_1 und e_2 derart auswählen können, daß entweder (A) $e_1^2 = e_2^2 = 1$ oder (B) $e_1^2 = e_2^2 = 0$ wird. Machen wir zunächst die erstere Annahme. Sei also

$$\text{(A)} \qquad e_1^2 = 1, \quad e_2^2 = 1, \quad e_1 e_2 = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2;$$

so findet man, wenn man die Producte $e_1(e_1 e_2)$ und $(e_1 e_2) e_2$ bildet, daß die vorstehende Gleichung eine der folgenden vier Formen haben muß:

$$\begin{aligned}
e_1 e_2 &= -e_0 + e_1 + e_2 \\
e_1 e_2 &= e_0 - e_1 + e_2 \\
e_1 e_2 &= e_0 + e_1 - e_2 \\
e_1 e_2 &= -e_0 - e_1 - e_2.
\end{aligned}$$

Nun führe man an Stelle von e_2 eine neue Grundzahl $\bar{e}_2$ ein, beziehungsweise durch die Substitutionen $\bar{e}_2 = e_1 + e_2$, $e_2 - e_1$, $e_2 - e_1$, $e_1 + e_2$; so erhält man in den beiden ersten Fällen $e_1 \bar{e}_2 =$

$\bar{e}_2$, in den beiden letzten $e_1 \bar{e}_2 = -\bar{e}_2$. Schreiben wir für $\bar{e}_2$ wieder e_2, so haben wir hiernach folgende Fälle zu unterscheiden:

(a) $$e_0 = 1 \quad e_1^2 = 1 \quad e_1 e_2 = e_2$$

(b) $$e_0 = 1 \quad e_1^2 = 1 \quad e_1 e_2 = -e_2.$$

(a). Sei $e_2 e_1 = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$; so erkennen wir, wenn wir die Producte $e_1(e_2 e_1)$ und $(e_2 e_1) e_1$ bilden, daß entweder

(a_1) $$e_2 e_1 = e_2$$

oder

(a_2) $$e_2 e_1 = m(e_0 + e_1) - e_2.$$

(a_1). Setzt man entsprechend der Annahme $k = 2$:

$$(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2)^2 = (\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2)(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) + \beta_{11} \lambda_1^2 + 2\beta_{12} \lambda_1 \lambda_2 + \beta_{22} \lambda_2^2,$$

und vergleicht links und rechts die Coefficienten gleich hoher Potenzen von λ_1, so erhält man widersprechende Gleichungen; es gibt also kein der Annahme (a_1) entsprechendes Zahlensystem $k = 2$.

(a_2). Bildet man das Product $(e_2 e_1) e_2$, so erhält man $e_2^2 = m e_2$

Sei zunächst $m = 0$; so erhält man das Zahlensystem IV.

Sei zweitens $m \neq 0$; so können wir an Stelle von e_2 unbeschadet der Geltung der Gleichungen (a) eine neue Grundzahl einführen, so daß die der Größe m entsprechende Constante des neuen Systems gleich Eins wird. Das so bestimmte Zahlensystem erhält durch Einführung der neuen Grundzahl $\bar{e}_2 = e_0 + e_1 - 2e_2$ an Stelle von e_2 ebenfalls die Form IV.

Hiermit ist die Annahme (a)' erledigt. Eine analoge Erörterung der Gleichungen (b) führt zu einem Zahlensystem, das zu dem System IV reciprok ist, und überdies durch die Substitution $\bar{e}_0 = e_0$, $\bar{e}_1 = -e_1$, $\bar{e}_2 = e_2$ in das System IV übergeführt werden kann.

Sei nunmehr

(B) $$: e_1^2 = 0, \; e_2^2 = 0;$$

so ergibt sich aus dem associativen Gesetz sogleich, daß auch $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$ ist; wir erhalten das System V.

Wir haben also im Ganzen fünf Typen. Zu dem Typus I gehören zwei Gestalten, I a) = I und I b), da die für das System charakteristische cubische Gleichung entweder drei reelle oder eine reelle und zwei conjugirt-imaginäre Wurzeln haben kann. Die Typen II, III und V zerfallen, auch wenn man sich auf reelle lineare Substitutionen beschränkt, offenbar nicht in verschiedene Klassen. Ebenso gehören auch zu dem Typus IV keine Systeme, deren Tafel von der

Tafel IV reell-verschieden wäre. Denn führt man an Stelle der Grundzahlen e_1 und e_2 zunächst die neuen Grundzahlen $\bar{e}_1 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$, $\bar{e}_2 = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$ ein, so kann man unter allen Umständen $\mu_1 = 0$ nehmen, da das System nur eine von Null verschiedene Zahl (e_2) enthält, deren Quadrat verschwindet, und ein Vielfaches dieser Zahl nothwendig reell sein muß. Ferner kann man für λ_1 den Werth 1 oder den Werth i nehmen, da man durch Bildung von $\bar{e}_1^2$ erkennt, daß λ_1^2 reell ist. Im ersten Falle kommt man auf die Tafel IV zurück; im anderen erhält man eine Multiplicationstafel mit zum Theil imaginären Coefficienten γ_{iks}. Hieraus aber ergibt sich der aufgestellte Satz. Denn man muß auch in dem neuen System stets zwei reelle Grundzahlen von der Form $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ auswählen können, da die Zahlen von der Form $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ die einzigen Zahlen des Systems IV sind, für welche eine Gleichung von der besonderen Form $a^2 = \alpha_2 a^0$ besteht.

Wir haben mithin für den Fall $n=3$ die folgenden Tafeln aufzuzählen:

I.

	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	0	0
e_1	0	e_1	0
e_2	0	0	e_2

I a).

	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	0
e_1	e_1	e_0	0
e_2	0	0	e_2

I b).

	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	0
e_1	e_1	$-e_0$	0
e_2	0	0	e_2.

Die Tafel I a) ist von der Tafel I nicht wesentlich verschieden, und geht aus ihr durch die reelle Substitution

$$\bar{e}_0 = e_0 + e_1 \qquad \bar{e}_1 = e_0 - e_1 \qquad \bar{e}_2 = e_2$$

hervor; sie ist nur der Analogie mit der folgenden Tafel I b) wegen aufgeführt.

Die Tafel I b) geht aus I a) hervor durch die Substitution

$$\bar{e}_0 = e_0 \qquad \bar{e}_1 = ie_1 \qquad \bar{e}_2 = e_2.$$

II.

	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	0
e_1	e_1	0	0
e_2	0	0	e_2

III.

	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2	0
e_2	e_2	0	0

IV.

	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	e_2
e_1	e_1	e_0	e_2
e_2	e_2	$-e_2$	0

V.

	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	e_2
e_1	e_1	0	0
e_2	e_2	0	0.

Das System IV geht in sein reciprokes System über durch die Substitution

$$\bar{e}_0 = e_0 \quad \bar{e}_1 = e_1 \quad \bar{e}_2 = e_2.$$

$n = 4.$

Sei zuerst $k = 4$, also

$$a^4 = \alpha_1 a^3 + \alpha_2 a^2 + \alpha_3 a^1 + \alpha_4 a^0.$$

Hat dann die biquadratische Gleichung

$$\lambda^4 = \alpha_1 \lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_3 \lambda + \alpha_4$$

bei allgemeiner Annahme der Zahl a vier getrennte Wurzeln λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 so nehme man als Grundzahlen e_0, e_1, e_2, e_3, wo z. B.

$$e_0 = \frac{(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)(a-\lambda_3)}{(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_0-\lambda_2)(\lambda_0-\lambda_3)};$$

man erhält dann die weiter hinten verzeichnete canonische Form I,

Im Falle einer Doppelwurzel λ_0 und zweier einfacher Wurzeln λ_2, λ_3 nehme man als Grundzahlen die Grenzwerthe von $e_0 + e_2$, $(\lambda_0 - \lambda_1) e_0$, e_2, e_3, nämlich:

$$\bar{e}_0 = \{3\lambda_0^2 - 2\lambda_0 (a + \lambda_2 + \lambda_3) + (a\lambda_2 + a\lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3)\} \cdot \frac{(a-\lambda_2)(a-\lambda_3)}{(\lambda_0-\lambda_2)^2(\lambda_0-\lambda_3)^2},$$

$$\bar{e}_1 = \frac{(a-\lambda_0)(a-\lambda_2)(a-\lambda_3)}{(\lambda_0-\lambda_2)(\lambda_0-\lambda_3)},$$

$$\bar{e}_2 = \frac{(a-\lambda_0)^2(a-\lambda_3)}{(\lambda_2-\lambda_0)^2(\lambda_2-\lambda_3)},$$

$$\bar{e}_3 = \frac{(a-\lambda_0)^2(a-\lambda_2)}{(\lambda_3-\lambda_0)^2(\lambda_3-\lambda_2)}.$$

Die zugehörige Multiplicationstafel wird II.

Fällt ferner auch noch λ_3 mit λ_2 zusammen, so nehme man als Grundzahlen die Grenzwerthe von $\bar{e}_0$, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2+\bar{e}_3$, $(\lambda_2-\lambda_3)\,e_2$:

$$\bar{e}'_0 = -\frac{(2a-3\lambda_0+\lambda_2)(a-\lambda_2)^2}{(\lambda_0-\lambda_2)^3}$$

$$\bar{e}'_1 = \frac{(a-\lambda_0)(a-\lambda_2)^2}{(\lambda_0-\lambda_2)^2}$$

$$\bar{e}'_2 = -\frac{(2a-3\lambda_2+\lambda_0)(a-\lambda_0)^2}{(\lambda_2-\lambda_0)^3}$$

$$\bar{e}'_3 = \frac{(a-\lambda_2)(a-\lambda_0)^2}{(\lambda_2-\lambda_0)^2};$$

man erhält damit die Tafel III.

Wird dagegen λ_0 eine dreifache, λ_3 eine einfache Wurzel, so erhält man bei Einführung der Grenzwerthe von $\bar{e}_0+\bar{e}_2$, $(\lambda_0-\lambda\ )\,\bar{e}_0+\bar{e}_1$, $(\lambda_0-\lambda_2)\,\bar{e}_1$, $\bar{e}_3$:

$$\bar{\bar{e}}_0 = 1-\frac{(a-\lambda_0)^3}{(\lambda_3-\lambda_0)^3},$$

$$\bar{\bar{e}}_1 = -\frac{(a-\lambda_0)(a-\lambda_3)(a-2\lambda_0+\lambda_3)}{(\lambda_0-\lambda_3)^2}$$

$$\bar{\bar{e}}_2 = -\frac{(a-\lambda_0)^2(a-\lambda_3)}{(\lambda_0-\lambda_3)}$$

$$\bar{\bar{e}}_3 = \frac{(a-\lambda_0)^3}{(\lambda_3-\lambda_0)^3}$$

als Grundzahlen die Tafel IV.

Wenn endlich auch noch die Wurzel λ_3 mit λ_0 zusammenfällt, convergiren wieder

$$\bar{\bar{e}}_0+\bar{\bar{e}}_3,\ (\lambda_0-\lambda_3)\,\bar{\bar{e}}_0+\bar{\bar{e}}_1,\ (\lambda_0-\lambda_3)\,\bar{\bar{e}}_1+\bar{\bar{e}}_2,\ (\lambda_0-\lambda_3)\,\bar{\bar{e}}_2$$

gegen endliche Grenzen, nämlich gegen

$$(a-\lambda_0)^0,\ (a-\lambda_0)^1,\ (a-\lambda_0)^2,\ (a-\lambda_0)^3.$$

Man erhält bei Einführung derselben als Grundzahlen die Tafel V.

Wir wenden uns nunmehr zu dem zweiten Hauptfall $k = 3$. Hier wird irgend eine allgemein genug gewählte Zahl a mit ihrem Quadrat und $a^0 = 1$ zusammen ein System von drei Zahlen bilden, welches einem der für $n = 3$ aufgestellten Typen I, II, III entspricht. Da überhaupt nur vier linear unabhängige Einheiten vorhanden sind, so werden irgend zwei solcher Gebiete dritter Stufe ein Gebiet zweiter Stufe ein System von zwei Zahlen gemein haben (welches dann in gleicher Weise allen jenen Systemen von drei Zahlen angehört).

Nehmen wir nun zuerst an, daß das System von drei Zahlen, welches zu einer allgemein gewählten Zahl a gehört, ein System des ersten Typus sei. Dann ist das System zweiter Stufe, welches den Durchschnitt des Systems I mit einem anderen System bildet, ein (dreideutig) bestimmtes. Drückt man nämlich aus, daß bereits das Quadrat einer Zahl $\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ des Systems I durch die Zahl selbst und $e_0 + e_1 + e_2 = 1$ linear darstellbar sein soll, so folgt, daß $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ Wurzeln einer quadratischen Gleichung sind, daß also zwei von diesen drei Größen einander gleich sein müssen.

Es gibt daher nur drei unter einander gleichwerthige Theilgebiete in unserem Zahlensystem, welche die verlangte Eigenschaft haben; eines von ihnen ist bestimmt durch die Zahlen $\bar{e}_0 = e_0 + e_1 + e_2 = 1$, $\bar{e}_1 = e_0 + e_1$. Führt man diese zusammen mit $\bar{e}_2 = e_0$ als neue Grundzahlen ein, und fügt eine weitere Grundzahl $\bar{e}_3$ hinzu, welche mit $\bar{e}_0$ und $\bar{e}_1$ durch dieselben Relationen verknüpft ist, wie $\bar{e}_2$; so ist damit ein Theil der zu suchenden Multiplicationsregeln bereits bekannt. Er wird dargestellt durch die Formeln

$$\text{(A)} \qquad \begin{gathered} e_0 = 1, \quad e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_3^2 = e_3, \\ e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_2, \quad e_1 e_3 = e_3 e_1 = e_3. \end{gathered}$$

Sei zweitens das System von drei Zahlen, welches durch a^0, a^1, a^2 bestimmt wird, bei völlig allgemeiner Wahl von a ein System des zweiten Typus. Dann kann man auf zwei wesentlich verschiedene Arten der Zahl $\bar{e}_0 = 1$ eine Zahl $\bar{e}_1$ derart zuordnen, daß beide zusammen ein System von zwei Zahlen bilden: $\bar{e}_1 = e_1$ und $\bar{e}_1 = e_2$.

Im ersteren Falle nehme man als neue Grundzahlen $\bar{e}_0$, $\bar{e}_1$ und $\bar{e}_2 = e_2$, und füge eine dritte Grundzahl $\bar{e}_3$ hinzu, welche zu $\bar{e}_0$ und

$\bar{e}_1$ in demselben Verhältniß steht, wie $\bar{e}_2$; man erhält dann die Multiplicationsregeln

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} &e_0 = 1, \quad e_1^2 = 0, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_3^2 = e_3, \\ &e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0, \quad e_1 e_3 = e_3 e_1 = 0; \end{aligned}$$

im anderen Fall ergeben sich durch die folgende Wahl der Grundeinheiten: $\bar{e}_0 = 1$, $\bar{e}_1 = e_2$, $\bar{e}_2 = e_1$ die Formeln

$$\text{(C)} \qquad \begin{aligned} &e_0 = 1, \quad e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = 0, \quad e_3^2 = 0, \\ &e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0, \quad e_1 e_3 = e_3 e_1 = 0. \end{aligned}$$

Möge endlich das durch a^0, a^1, a^2 bestimmte System auch bei allgemeiner Wahl von a dem dritten Typus angehören. Dann kann man die Zahl $\bar{e}_0 = e_0 = 1$ im Wesentlichen nur auf eine Art durch eine andere Zahl $\bar{e}_1$ derart ergänzen, daß $\bar{e}_0$ und $\bar{e}_1$ zusammen ein System von zwei Zahlen ausmachen; dasselbe ist bestimmt durch $\bar{e}_0 = 1$ und $\bar{e}_1 = e_2$. Schreibt man für e_1 dann noch $\bar{e}_2$, fügt eine dritte Grundzahl $\bar{e}_3$ hinzu, und läßt die Striche wieder weg, so erhält man ein viertes Formelsystem:

$$\text{(D)} \qquad \begin{aligned} &e_0 = 1, \quad e_1^2 = 0, \quad e_2^2 = e_1, \quad e_3^2 = e_1, \\ &e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0, \quad e_1 e_3 = e_3 e_1 = 0. \end{aligned}$$

Die vier Annahmen (A), (B), (C), (D) gehen wir nun im Folgenden einzeln durch; wir fügen zu ihnen in allgemeinster Weise Relationen der Form

$$\begin{aligned} e_2 e_3 &= \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \\ e_3 e_2 &= \beta_0 e_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3, \end{aligned}$$

und bestimmen die Constanten α und β gemäß dem associativen Gesetz.

$$\textbf{(A)} \qquad \begin{aligned} &e_0 = 1, \quad e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_3^2 = e_3, \\ &e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_2, \quad e_1 e_3 = e_3 e_1 = e_3. \end{aligned}$$

Sei ferner

$$e_2 e_3 = \alpha_0 + \alpha_1 e + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3;$$

so folgt durch Multiplication mit e_1: $\alpha_0 = 0$; ferner, wenn man die Producte $e_2(e_2 e_3)$ und $(e_2 e_3) e_3$ bildet:

$$\begin{gathered} \alpha_1 = \alpha_1 \alpha_2 = \alpha_1 \alpha_3, \quad \alpha_2^2 = \alpha_2, \quad \alpha_3^2 = \alpha_3, \\ \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_3 = 0; \end{gathered}$$

d. h. es ist entweder

(a) $\qquad \alpha_1 = -1 \qquad \alpha_2 = 1 \qquad \alpha_3 = 1$ oder

(b) $\qquad \alpha_1 = 0 \qquad \alpha_2 = 0 \qquad \alpha_3 = 1$ oder, was auf dasselbe hinauskommt,

$$\alpha_1 = 0 \qquad \alpha_2 = 1 \qquad \alpha_3 = 0 \quad \text{oder}$$

(c) $\alpha_1 = 0 \qquad \alpha_2 = 0 \qquad \alpha_3 = 0.$

(a) $$e_2 e_3 = -e_1 + e_2 + e_3.$$

Ist $$e_3 e_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3,$$

so findet man unter Benutzung der Gleichung $(e_2 e_3) e_2 = e_2 (e_3 e_2)$, oder der anderen $e_3 (e_2 e_3) = (e_3 e_2) e_3$: $\beta_3 = \beta_2 = -\beta_1$; d. h. es ist entweder

$$\beta_1 = -1, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3 = 1 \quad \text{oder}$$
$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 0.$$

Die erstere Annahme ist an dieser Stelle für uns unbrauchbar, weil sie durch die Substitution $\bar{e}_0 = e_0 - e_1$, $\bar{e}_1 = e_2 + e_3 - e_1$, $\bar{e}_2 = e_1 - e_3$, $\bar{e}_3 = e_1 - e_2$ auf das System I zurückführt.

Im zweiten Falle führen wir an Stelle von e_0 und e_1 zwei neue Einheiten ein, $\bar{e}_0 = e_1$, $\bar{e}_3 = e_0 - e_1$, die so bestimmt sind, daß $\bar{e}_0^2 = \bar{e}_0$, $\bar{e}_3^2 = \bar{e}_3$, $\bar{e}_0 + \bar{e}_3 = 1$ wird; ferner an Stelle von e_2 und e_3 zwei neue Grundzahlen $\bar{e}_1$ und $\bar{e}_2$, die so bestimmt werden, daß $\bar{e}_0$, $\bar{e}_1$ und $\bar{e}_2$ für sich genommen ein dem vierten Typus angehöriges System von drei Einheiten bilden. Wir bestimmen zu dem Ende $\bar{e}_2$ so, daß $\bar{e}_2^2 = 0$ wird: $\bar{e}_2 = -e_1 + e_2 + e_3$; hierauf $\bar{e}_1$ so, daß $\bar{e}_1^2 = \bar{e}_0$ wird: $\bar{e}_1 = e_2 - e_3$. So erhalten wir die Multiplicationstafel VI.

(b) $e_2 e_3 = e_3$. Führt man an Stelle von e_3 eine neue Grundzahl $\bar{e}_3$ ein durch die Substitution $\bar{e}_3 = e_3 + e_1 - e_2$, so kommt man auf den eben behandelten Fall (a) zurück.

(c) $e_2 e_3 = 0$. Will man nicht auf einen der Fälle (a), (b) zurückkommen, so muß man $e_3 e_2$ ebenfalls gleich Null annehmen. Das ist aber unzulässig; man würde durch die Substitution

$$\bar{e}_0 = e_0 - e_1, \quad \bar{e}_1 = e_1 - e_2 - e_3, \quad \bar{e}_2 = e_2, \quad \bar{e}_3 = e_3$$

wiederum die Tafel I erhalten.

(B) $$e_0 = 1, \quad e_1^2 = 0, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_3^2 = e_3,$$
$$e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0, \quad e_1 e_3 = e_3 e_1 = 0,$$
$$e_2 e_3 = \alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3.$$

Hier folgt durch Multiplication mit e_1: $\alpha_0 = 0$; ferner durch Multiplication mit e_2 und e_3:

$$\alpha_1 = \alpha_1 \alpha_2 = \alpha_1 \alpha_3, \quad \alpha_2 \alpha_3 = 0,$$
$$\alpha_2^2 = \alpha_2, \quad \alpha_3^2 = \alpha_3;$$

d. h. es ist entweder

(a) $\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1,$ oder

$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 0,$ oder

(b) $\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0.$

(a). $e_2 e_3 = e_3.$

Sei $e_3 e_2 = \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3;$
so folgt durch Multiplication mit e_3:

$$\beta_2 + \beta_3 = 1,$$

d. h. es ist entweder $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 1$, oder $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 0$. Die erstere Annahme ist unzulässig, man würde durch die Substitution $\bar{e}_0 = e_0 - e_2$, $\bar{e}_1 = e_1$, $\bar{e}_2 = e_2 - e_3$, $\bar{e}_3 = e_3$ die Tafel II erhalten. Es bleibt also nur noch die Annahme $e_2 e_3 = e_3$, $e_3 e_2 = e_2$, die wir, zum reciproken System übergehend, auch durch diese ersetzen können: $e_2 e_3 = e_2$, $e_3 e_2 = e_3$. Hier bilden e_0, e_2, e_3 ein System von drei Zahlen, welches dem vierten Typus angehört. Dasselbe geht durch die Substitution $\bar{e}_0 = e_0$, $\bar{e}_1 = e_0 - 2e_3$, $\bar{e}_2 = e_3 - e_2$ in seine canonische Form über; fügen wir noch $\bar{e}_3 = e_1$ hinzu, so erhalten wir die Tafel VII.

Wir sind ausgehend von der ersten unter (a) gemachten Annahme zu einem System gelangt, welches zu dem System VII reciprok ist; von der zweiten Annahme ausgehend, würden wir ebenso das System VII selbst erhalten haben. Beide Systeme, das System VII uud sein reciprokes, können n i c h t in einander übergeführt werden (während dies bei dem System VI, aus dem VII durch einen leicht anzugebenden Grenzübergang hergeleitet werden kann, noch möglich ist).

In der That, seien $\bar{e}_0 \ldots \bar{e}_3$ die Grundzahlen des zu VII reciproken Systems, dessen Multiplicationstafel aus der Tafel VII durch Vertauschung der Horizontal- und Verticalreihen hervorgeht. Sollen dann $\bar{e}_0 \ldots \bar{e}_3$ aus $e_0 \ldots e_3$ linear mit numerischen Coefficienten ableitbar sein, so folgt zunächst $\bar{e}_0 = e_0$; da ferner $\bar{e}_1^2 = \bar{e}_0$, $\bar{e}_2^2 = 0$, $\bar{e}_3^2 = 0$ sein soll, so müssen $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ und $\bar{e}_3$ bezüglich die Form haben:

$$\bar{e}_1 = \pm e_1 + \lambda_2 e_2, \; \bar{e}_2 = \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3, \; \bar{e}_3 = \nu_2 e_2 + \nu_3 e_3.$$

Da $\bar{e}_1 \bar{e}_2 = -\bar{e}_2$ sein soll, ist in dem ersten dieser Ausdrücke nur das untere Vorzeicheu zulässig. Dann aber folgt aus der Gleichung $\bar{e}_1 \bar{e}_3 = \bar{e}_3$ das widersinnige Resultat $\nu_2 = \nu_3 = 0$.

(b). Ist $e_2 e_3 = 0$, so folgt auch $e_3 e_2 = 0$. Dies ist wieder unzulässig; man würde durch die Substitution $\bar{e}_0 = e_0 - e_2 - e_3$ den Typus II erhalten.

(C) $e_0 = 1, \quad e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = 0, \quad e_3^2 = 0,$

$$e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0, \qquad e_1 e_3 = e_3 e_1 = 0,$$

$$e_2 e_3 = \alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3.$$

Hier folgt durch Multiplication mit e_1, e_2, und e_3 sogleich

$$e_2 e_3 = e_3 e_2 = 0.$$

Führt man an Stelle von $e_0 \,..\, e_3$ die neuen Grundzahlen ein:

$$\bar{e}_0 = e_0 - e_1, \quad \bar{e}_1 = e_2, \quad \bar{e}_2 = e_3, \quad \bar{e}_3 = e_1,$$

so erhält man die Tafel VIII.

(D)
$$e_0 = 1, \quad e_1^2 = 0, \quad e_2^2 = e_3^2 = e_1,$$
$$e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0, \quad e_1 e_3 = e_3 e_1 = 0,$$
$$e_2 e_3 = \alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3.$$

Durch Multiplication mit e_1, e_2 und e_3 findet man jetzt:

$$\alpha_0 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,$$

so daß also

$$e_2 e_3 = \alpha e_1 \qquad e_3 e_2 = \beta e_1$$

gesetzt werden kann.

Führt man hier zunächst an Stelle von e_3 eine neue Grundzahl ein: $\bar{e}_3 = e_3 - \alpha e_2$, so wird

$$e_2 \bar{e}_3 = 0, \quad \bar{e}_3 e_2 = (\beta - \alpha) e_1, \quad \bar{e}_3^2 = (1 - \alpha\beta) e_1.$$

Wir unterscheiden nun drei Fälle:

(a) $\beta - \alpha \neq 0$; (b) $\beta - \alpha = 0$, $1 - \alpha\beta \neq 0$;
(c) $\beta - \alpha = 0$, $1 - \alpha\beta = 0$.

(a) Man führe an Stelle von e_0, e_1, e_2, $\bar{e}_3$ die neuen Grundzahlen $e_0' = e_0$, $e_1' = e_2$, $e_2' = e_2 - 2\dfrac{\bar{e}_3}{\beta - \alpha}$, $e_3' = e_1$ ein, von welchen die dritte (e_2') so bestimmt ist, daß $e_2 e_2' = -e_2' e_2 = e_1$ wird.

Man erhält dann die Tafel IX.

Der hier auftretende numerische Parameter c läßt sich durch Einführung neuer Grundzahlen nicht beseitigen.

(b) $e_2 \bar{e}_3 = \bar{e}_3 e_2 = 0$, $\bar{e}_3^2 = c e_1$. Diese Constante c kann man offenbar gleich Eins nehmen. Schreibt man dann für e_0, e_1, e_2, $\bar{e}_3$ bezüglich e_0, e_3, e_1, e_2, so erhält man das Zahlensystem X.

(c) $e_2 \bar{e}_3 = \bar{e}_3 e_2 = \bar{e}_3^2 = 0$. Diese Annahme gibt die Tafel XI.

Hiermit ist auch die Annahme $k = 3$ erledigt; und wir haben nun nur noch die Zahlensysteme aufzustellen, für welche $k = 2$ ist.

Hier unterscheiden wir diejenigen Zahlensysteme, bei welchen sich neben $e_0 = 1$ zwei Grundzahlen e_1 und e_2 der Art angeben lassen, daß eines der Producte $e_1 e_2$, $e_2 e_1$ von e_0, e_1, e_2 linear unabhängig ist (A) von den anderen (B), bei welchen $e_0 = 1$ und irgend zwei Zahlen a und b bereits für sich ein System von drei Einheiten bilden.

(A) Hier werden wir unbeschadet der Allgemeinheit annehmen dürfen, daß entweder

$e_1^2 = 1$, $e_2^2 = 1$ (a) oder $e_1^2 = 0$, $e_2^2 = 0$ ist (b).

(a) Sei $e_1^2 = e_2^2 = 1$. Drücken wir alsdann aus, daß

$$(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2)^2$$

sich linear durch $(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2)$ und $e_0 = 1$ darstellen lassen soll, so folgt

$$e_1 e_2 + e_2 e_1 = c,$$

wo c eine numerische Constante bedeutet.

Hier führen wir an Stelle von e_2 eine neue Grundzahl

$$\bar{e}_2 = \lambda e_1 + \mu e_2$$

ein, und suchen die Constanten λ und μ so zu bestimmen, daß $\bar{e}_2^2 = 1$ bleibt, andrerseits aber $e_1\bar{e}_2 + \bar{e}_2 e_1 = 0$ wird. Dies ist immer möglich, außer wenn $c^2 = 4$. Sei zuerst $c^2 \neq 4$; so können wir an Stelle von $\bar{e}_1 = e_1$ und $\bar{e}_2$ wieder andere Grundzahlen einführen durch die Substitution $e_1 = i\bar{e}_1$, $e_2 = i\bar{e}_2$; und haben dann die Relationen $e_1^2 = e_2^2 = -1$, $e_1 e_2 = -e_2 e_1$. Setzen wir $e_1 e_2 = e_3$, und bestimmen dann die Ausdrücke der übrigen Einheitsproducte aus dem associativen Gesetz, so erhalten wir die Tafel XII, welche das bekannte System der Quaternionen darstellt.

Sei zweitens $c = 2$. Wir nehmen dann als Grundzahlen

$$\bar{e}_0 = 1, \quad \bar{e}_1 = ie_1, \quad \bar{e}_2 = e_1 + \lambda e_2, \quad \bar{e}_3 = \bar{e}_1\bar{e}_2;$$

wobei wir λ nunmehr so bestimmen, daß $\bar{e}_2^2 = 0$ wird. Dies ergibt $\lambda = -1$; man erhält die Tafel XIII.

Sei drittens $c = -2$; so kommt man durch die Substitution $\bar{e}_2 = \frac{e_1 - e_2}{2}$ auf den eben erledigten Fall $c = +2$ zurück.

(b) Sei $e_1^2 = e_2^2 = 0$. Dann folgt, wie oben, aus der Bedingung $k = 2$:

$$e_1 e_2 + e_2 e_1 = c.$$

Ist $c \neq 0$, so dürfen wir unbeschadet der Allgemeinheit $c = 1$ nehmen. Wir können dann durch die Substitution

$$\bar{e}_1 = e_1 + e_2, \quad \bar{e}_2 = i(e_2 - e_1)$$

diesen Fall sofort auf den Fall (a) zurückführen. Ist aber $c = 0$, so erhalten wir ein neues Zahlensystem XIV.

(B) Irgend zwei Zahlen a, b bilden mit $e_0 = 1$ zusammen ein System von drei Einheiten. Hier sind zwei Möglichkeiten: Entweder es gehört dieses Zahlensystem bei allgemeiner Wahl von a und b dem vierten der für $n = 3$ aufgestellten Typen an, oder es ist ein System vom fünften Typus.

Im ersten Fall können wir annehmen, es sei das System von e_0, e_1, e_2 bereits auf die canonische Form III (S. 247) gebracht. Ist dann e_3 irgend eine von e_0, e_1, e_2 linear unabhängige Zahl, so bilden e_0, e_1, e_3 ebenfalls ein System des vierten Typus; wir können daher in dieses System an Stelle von e_3 eine neue Grundzahl $\bar{e}_3$ aufnehmen, welche der Gleichung $\bar{e}_3^2 = 0$ genügt. Dadurch geht auch das System e_0, e_1, e_3 in seine canonische Form über. Schreiben wir für $\bar{e}_3$ wieder e_3, so bilden nunmehr e_0, e_2, e_3 ein System des fünften Typus, welches unmittelbar in der canonischen Form vorliegt, weil $e_2^2 = e_3^2 = 0$. Hiermit sind bereits die Ausdrücke für sämmtliche Producte der Grundzahlen e_0, e_1, e_2, e_3 bekannt; wir erhalten die Tafel XV.

Im zweiten Falle endlich können wir e_1, e_2, e_3 so wählen, daß $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 0$ wird. So entsteht die letzte Tafel XVI.

Daß die hiermit aufgezählten Typen alle wirklich verschieden sind, d. h. daß es nicht möglich ist, aus einer der Tafeln I—XVI durch Einführung neuer Grundzahlen eine andere Tafel derselben Reihe herzuleiten, braucht wohl kaum noch besonders hervorgehoben zu werden.

Man kann die vorstehende Betrachtung mit Leichtigkeit auch noch derartig erweitern, daß man alle verschiedenen Gestalten eines jeden Typus erhält. Wir werden uns indessen mit der Behandlung dieses Problems nicht aufhalten, und geben nur die Resultate. Die Substitutionen, durch welche die reell-verschiedenen Gestalten Ia) . . Ic), IIa) und IIb) aus den Grundformen ihrer Typen I und II entstehen, brauchen wir nach dem bei der Untersuchung des Falles $n = 3$ Bemerkten wohl nicht noch besonders hinzuschreiben.

I.

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	0	0	0
e_1	0	e_1	0	0
e_2	0	0	e_2	0
e_3	0	0	0	e_3

Ia).

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	0	0
e_1	e_1	e_0	0	0
e_2	0	0	e_2	e_3
e_3	0	0	e_3	e_2

Ib).

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	0	0
e_1	e_1	$-e_0$	0	0
e_2	0	0	e_2	e_3
e_3	0	0	e_3	e_3

Ic).

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	0	0
e_1	e_1	$-e_0$	0	0
e_2	0	0	e_2	e_3
e_3	0	0	e_3	$-e_3$

II.

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	0	0
e_1	e_1	0	0	0
e_2	0	0	e_2	0
e_3	0	0	0	e_3

IIa).

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	0	0
e_1	e_1	0	0	0
e_2	0	0	e_2	e_3
e_3	0	0	e_3	e_2

IIb).

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	0	0
e_1	e_1	0	0	0
e_2	0	0	e_2	e_3
e_3	0	0	e_3	$-e_2$

III.

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	0	0
e_1	e_1	0	0	0
e_2	0	0	e_2	e_3
e_3	0	0	e_3	0

IIIa).

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_0	e_3	e_2
e_2	e_2	e_3	0	0
e_3	e_3	e_2	0	0

Die Form III a) geht aus III hervor durch die reelle **Substitution:**

$$\bar{e}_0 = e_0 + e_2, \quad \bar{e}_1 = e_0 - e_2, \quad \bar{e}_2 = e_1 + e_3, \quad \bar{e}_3 = e_1 - e_3.$$

IIIb).

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	e_3	0	0
e_3	e_3	$-e_2$	0	0

Die Tafel III b) entsteht aus III a) durch die Substitution:

$$\bar{e}_0 = e_0 \quad \bar{e}_1 = ie_1 \quad \bar{e}_2 = e_2 \quad \bar{e}_3 = ie_3$$

IV.

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	0
e_1	e_1	e_2	0	0
e_2	e_2	0	0	0
e_3	0	0	0	e_3

V.

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3	0
e_2	e_2	e_3	0	0
e_3	e_3	0	0	0

VI.

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	0
e_1	e_1	e_0	e_2	0
e_2	e_2	$-e_2$	0	0
e_3	0	0	0	e_3

Dieses System geht in sein reciprokes System über durch Einführung der neuen Grundzahl $\bar{e}_1, = -e_1$.

VII.

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_0	e_2	e_3
e_2	e_2	$-e_2$	0	0
e_3	e_3	e_3	0	0

Dieses System kann nicht in sein reciprokes System überführt werden (S. 252).

VIII.

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	0
e_1	e_1	0	0	0
e_2	e_2	0	0	0
e_3	0	0	0	e_3

IX.

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_3	e_3	0
e_2	e_2	$-e_3$	ce_3	0
e_3	e_3	0	0	0

Die Tafel IX stellt unendlich viele Typen dar, entsprechend den verschiedenen Werthen des Parameters c. Durch die Substistution $\bar{e}_2 = -e_2$ geht jedes dieser Systeme in sein reciprokes System über.

X.

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_3	0	0
e_2	e_2	0	e_3	0
e_3	e_3	0	0	0

XI.

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	0	0
e_2	e_2	0	0	0
e_3	e_3	0	0	0

XII.

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$

Dies sind die Quaternionen. Sie gehen in ihr reciprokes System über durch die Substitution $\bar{e}_1 = -e_1$, $\bar{e}_2 = -e_2$, $\bar{e}_3 = -e_3$. Durch dieselbe Substitution gehen auch die folgenden Systeme, bis XV einschließlich, jedes in sein reciprokes System über.

XII b).

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_0	e_3	e_2
e_2	e_2	$-e_3$	e_0	$-e_1$
e_3	e_3	$-e_2$	e_1	$-e_0$,

XII b) entsteht aus XII durch die Substitution:

$$\bar{e}_0 = e_0 \quad \bar{e}_1 = ie_1 \quad \bar{e}_2 = ie_2 \quad \bar{e}_3 = -e_3.$$

Durch dieselben Substitutionen geht auch XIII b) aus XIII hervor.

XIII.

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	0	0
e_3	e_3	e_2	0	0

XIII b).

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_0	e_3	e_2
e_2	e_2	$-e_3$	0	0
e_3	e_3	$-e_2$	0	0

XIV.

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	0	e_3	0
e_2	e_2	$-e_3$	0	0
e_3	e_3	0	0	0

XV.

.	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_0	e_2	e_3
e_2	e_2	$-e_2$	0	0
e_3	e_3	$-e_3$	0	0

XVI.

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	0	0	0
e_2	e_2	0	0	0
e_3	e_3	0	0	0.

Soweit die vorstehenden Untersuchungen sich auf den Fall $k = n$ beziehen, lassen sie sich ohne Schwierigkeit auf beliebige Werthe von n ausdehnen. Der betreffende Satz lautet so:

Um alle verschiedenen Systeme mit n Grundzahlen zu finden, in welchen die Potenzen $A^0 A^1 \dots A^{n-1}$ irgend einer Zahl A im Allgemeinen von einander linear unabhängig sind, stelle man die Zahl n auf alle möglichen Arten als Summe von ganzen Zahlen dar. Ist $n = \alpha + \beta + \dots + \mu$ eine solche Zerlegung von n; so ordne man die n Grundzahlen in Gruppen zu $\alpha, \beta, \dots \mu$, und bezeichne sie durch $a_0 \dots a_{\alpha-1}$, $b_0 \dots b_{\beta-1}$, $m_0 \dots m_{\mu-1}$. Man setze dann die Producte von je zwei Grundzahlen verschiedener Gruppen gleich Null, und nehme für die Multiplication von zwei Zahlen derselben Gruppe eine Regel an, die etwa für die erste Gruppe ausgesprochen so lautet: $a_i a_j = a_{i+j}$, wenn $i + j \leqq \alpha - 1$; $a_i a_j = 0$, wenn $i + j > \alpha - 1$.

Je zwei der so bestimmten Zahlensysteme sind verschieden, d. h. es ist nicht möglich, eines derselben durch Einführung neuer Grundzahlen in ein anderes überzuführen. Jedes System von n

Zahlen aber, welches der genannten Bedingung genügt, kann durch Einführung geeigneter Grundzahlen in eines der aufgeführten Systeme übergeleitet werden.

Ich werde den Beweis für diese Behauptung nicht ausführen, sondern nur kurz skizziren. Eine eingehendere Darstellung des Satzes, welcher mit der Theorie der Partialbruchzerlegung einer rationalen Function in einem merkwürdigen Zusammenhange steht, behalte ich mir für eine spätere Gelegenheit vor.

Sei

$$(1) \qquad A^n = \alpha_1 A^{n-1} + \ldots + \alpha_n A^0$$

die Formel, vermöge deren sich die n^{te} Potenz von A durch die von einander linear unabhängigen Potenzen A^0, A^1, ... A^{n-1} ausdrückt, und habe die zugehörige Gleichung n^{ten} Grades

$$(2) \qquad \lambda^n = \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n$$

eine α-fache Wurzel λ_a, eine β-fache Wurzel λ_b und so weiter; so ist

$$\begin{aligned} \overline{A} = \; & \lambda_a a_0 + \lambda_{a,1} a_1 + \ldots + \lambda_{a,\alpha-1} a_{\alpha-1} \\ & + \lambda_b b_0 + \lambda_{b,1} b_1 + \ldots + \lambda_{b,\beta-1} b_{\beta-1} \\ & + - - - - - - - - - , \end{aligned}$$

worin $\lambda_{a,1}$ u. s. f. unbestimmte Parameter bedeuten, ein Ausdruck, welcher für A gesetzt, die Gleichung (1) identisch befriedigt, ohne doch zugleich noch einer anderen, ähnlichen Gleichung n^{ten} Grades zu genügen. Schreibt man nun der Reihe nach die Gleichungen auf: $\overline{A}^0 = A^0$, $\overline{A} = A$, $\overline{A}^2 = A^2$, ... $\overline{A}^{n-1} = A^{n-1}$, und berechnet die Ausdrücke links nach der in obigem Satze gegebenen Multiplicationsregel, so erhält man ein System von linearen Gleichungen zur Bestimmung von a_0, a_1, ... $m_{\mu-1}$, dessen Determinante nicht verschwindet. Es ergeben sich daraus a_0, a_1, .. $m_{\mu-1}$ als lineare Functionen der Potenzen von A, mit Coefficienten, welche außer den Wurzeln λ_a, λ_b, ... im Allgemeinen noch die willkürlichen Parameter λ_{ai}, λ_{bi}, ... enthalten. Hierbei sind indessen die Theilgebiete (a), (b), ..., d. h. der Inbegriff der aus a_0 ... $a_{\alpha-1}$, bezüglich b_0 ... $b_{\beta-1}$ linear ableitbaren Größen völlig bestimmt, ebenso auch a_0, b_0, .. m_0; a_1 dagegen ist nur in der Weise bestimmt, daß man an seiner Stelle ebensogut jeden Ausdruck von der Form $\lambda_{a,1} a_1 + \lambda_{a,2} a_2 + \ldots$ einführen kann, sofern nur $\lambda_{a1} \mp 0$.

Mehrere reell-verschiedene Gestalten können aus einem der Zerlegung $n = \alpha + \beta + .. + \mu$ entsprechenden System nur dann entspringen, wenn unter den Zahlen $\alpha, \beta, \ldots \mu$ einige einander gleich sind; und zwar erhält man, wenn die Zahl α m_1 mal, die erste von α verschiedene Zahl m_2 mal, die erste von beiden verschiedene Zahl m_3 mal u. s. f. auftritt,

$$\left[\frac{m_1+2}{2}\right] \cdot \left[\frac{m_2+2}{2}\right] \cdot \left[\frac{m_3+2}{2}\right] \ldots$$

verschiedene, sofort hinzuschreibende Gestalten, sofern $[m]$ die größte in m enthaltene ganze Zahl bedeutet. Sei z. B. $\alpha = \beta = \gamma$, aber $\gamma \neq \delta \neq \varepsilon \neq \ldots \neq k$, so gibt es zwei reell-verschiedene Gestalten. Als die canonische Form der ersten von ihnen kann die in obigem Satze angegebene gelten; es scheint mir aber zweckmäßiger zu sein, statt der Grundzahlen a_i, b_k neue 2α Grundzahlen einzuführen durch die Substitutionen:

$$\mathfrak{a}_i = a_i + b_i \quad \mathfrak{b}_i = a_i - b_i \quad (i = 0, 1, \ldots \alpha - 1),$$

wodurch diese Multiplicationsregeln entstehen:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_j = \mathfrak{a}_{i+j} \quad \mathfrak{b}_i \mathfrak{b}_j = \mathfrak{a}_{i+j} \\ \mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_j = \mathfrak{b}_{i+j}. \end{array} \right.$$

Die entsprechende Tafel der zweiten reellen Gestalt erhält man dann einfach durch die Substitutionen

$$\overline{\mathfrak{a}}_i = \mathfrak{a}_i, \quad \overline{\mathfrak{b}}_i = \sqrt{-1}\; b_i \; (i = 0, 1, \ldots \alpha - 1)$$

in der Form

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_j = \mathfrak{a}_{i+j} \quad \mathfrak{b}_i \mathfrak{b}_j = -\mathfrak{a}_{i+j} \\ \mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_j = \mathfrak{b}_{i+j}. \end{array} \right.$$

In beiden Tafeln sind natürlich alle Grundzahlen gleich Null zu setzen, deren Index $i+j$ über den größten zulässigen Werth $\alpha - 1$ hinausgeht.

Nehmen wir die besondere Zerlegung $n = 1 + 1 + \ldots + 1$ vor, d. h. beschränken wir uns auf den allgemeinen und zugleich durch seine Einfachheit ausgezeichneten Fall, wo die Gleichung (2) n getrennte Wurzeln $\lambda_0 \ldots \lambda_{n-1}$ hat, so erhalten wir dasjenige System, welches Herr Weierstraß in seinen verschiedenen Gestalten untersucht hat. Es ergeben sich als Multiplicationsregeln dieses Typus nach unserem allgemeinen Satze die folgenden:

$$(5) \qquad e_i^2 = e_i \quad e_i e_k = 0 \; (i \neq k;\; i, k = 0, 1, \ldots n-1).$$

Die Grundzahlen e_i, die Auflösungen des oben genannten Gleichungssystems, sind hier völlig eindeutig bestimmt, und entstehen durch cyclische Vertauschung der Indices aus dem Ausdruck der ersten unter ihnen:

$$e_0 = \frac{(A-\lambda_1)\ldots(A-\lambda_{n-1})}{(\lambda_0-\lambda_1)\ldots(\lambda_0-\lambda_{n-1})}. \tag{6}$$

Hat die Gleichung (2) reelle Coefficienten, aber nicht lauter reelle Wurzeln, so werden einige unter den Ausdrücken (6) paarweise conjugirt-imaginär; zieht man alle vorhandenen $\left[\frac{n+2}{2}\right]$ Möglichkeiten in Betracht, so erhält man alle verschiedenen Gestalten dieses Typus. Will man nicht, wie es oben geschah, auch reelle Grundzahlen paarweise vereinigen, so kann man eine jede Gestalt auf diese canonische Form bringen: Eine Anzahl von Systemen von je zwei Einheiten (Theilgebieten zweiter Stufe), deren Multiplicationsregel die der gewöhnlichen complexen Zahlen ist, wird zusammengestellt mit einer Anzahl von Systemen, welche aus nur je einer Grundzahl bestehen, deren Quadrat ihr selbst gleich ist. (Theilgebieten erster Stufe). Hierauf wird das Product der Zahlen aus je zwei verschiedenen Theilgebieten gleich Null gesetzt. Da die Grundzahlen $e_0 \ldots e_{n-1}$ völlig eindeutig bestimmt sind, so sind auch die neuen Grundzahlen eindeutig, beziehungsweise bis auf's Vorzeichen bestimmt, und abgesehen von der letztgenannten Mehrdeutigkeit nur in einer Art vorhanden.

Die im letzten Absatz angeführten, auf den Fall getrennter Wurzeln der Gleichung (2) bezüglichen Sätze sind in zum Theil etwas abweichender Fassung vollständig von den Herren Weierstraß, Schwarz und Hölder, dann auch von Herrn Petersen in den Eingangs genannten Abhandlungen entwickelt worden. Dieselben Sätze sind aber in einem anderen Zusammenhange schon früher aufgetreten; sie sind, abgesehen von der Ausdrucksweise, identisch mit bekannten Sätzen der Theorie der linearen Transformationen. Da dieser Umstand bis jetzt unbemerkt geblieben zu sein scheint, wenigstens in keiner mir bekannt gewordenen Veröffentlichung erwähnt wird[1]), so will ich den angedeuteten Zusam-

1) Die Untersuchungen von Herrn Dedekind, welche ebenfalls den Zusammenhang der von Herrn Weierstraß betrachteten Zahlensysteme mit der sogenannten gewöhnlichen Algebra zum Gegenstande haben, bewegen sich in einer anderen Richtung.

menhang kurz auseinandersetzen, und zwar in der Weise, daß ich die betreffenden Sätze aus der Theorie der linearen Transformationen einfach anführe, dabei aber die nämlichen Bezeichnungen gebrauche, wie bisher; wodurch die vollkommene Uebereinstimmung beider Reihen von Sätzen von selbst deutlich werden wird. Um mich einer bequemeren und anschaulicheren Redeweise bedienen zu können, beschränke ich mich hierbei auf den Fall $n = 4$ [1]).

Sei
$$A = \Sigma a_{ik} x_i u_k$$

eine quaternäre Form mit einander dualistisch gegenüberstehenden (sogenannten contragredienten) Veränderlichen. Dann stellt die Gleichung $A = 0$ bekanntlich eine lineare Transformation des Raumes dar. Die „Potenzen“

$$\begin{aligned} A^0 &= \Sigma x_i u_k \\ A^1 &= \Sigma a_{ik} x_i u_k \\ A^2 &= \Sigma a_{ij} a_{jk} x_i u_k \\ A^3 &= \Sigma a_{ij} a_{jl} a_{lk} x_i u_k \end{aligned}$$

dieser Form oder Transformation sind im Allgemeinen linear unabhängig, während

$$A^4 = \Sigma a_{ij} a_{jl} a_{lm} a_{mk} x_i u_k$$

durch jene mit Hilfe gewisser Invarianten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ linear ausdrückbar wird:

$$A^4 = \alpha_1 A^3 + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^1 + \alpha_4 A^0.$$

$A^0 \ldots A^3$ bestimmen eine lineare Schaar von bilinearen Formen

$$A_k = k_0 A^0 + k_1 A^1 + k_2 A^2 + k_3 A^3$$

von der Eigenschaft, daß das „Product“ von je zwei Formen der

---

1) Man vergleiche Clebsch und Gordan: Ueber biternäre Formen mit contragredienten Variabeln, 1868, Math. Ann. Bd. 1. S. 389—400. Diese Abhandlung bezieht sich zwar unmittelbar nur auf den Fall $n = 3$, der Ausdehnung der hier in Betracht kommenden Formeln auf einen beliebigen Werth der Zahl n steht aber Nichts im Wege. Die Untersuchungen, welche Herr Weierstraß selbst über die Transformation der bilinearen Formen angestellt hat (Monatsber. der Berl. Ak. 1868, S. 310 u. ff.) hängen mit den im Texte genannten Sätzen ebenfalls nahe zusammen. Man vergleiche ferner die erwähnte Abhandlung von Herrn Frobenius.

Schaar sich bei Vertauschung seiner Factoren nicht ändert, und immer wieder eine Form derselben Schaar ist. Die Gleichungen $A_k = 0$ stellen daher eine **Gruppe** von vertauschbaren Transformationen dar, und zwar ist dies offenbar im Allgemeinen die Gruppe aller linearen Transformationen des Raumes, bei welchem dieselben vier Punkte unverändert bleiben.

Damit das festbleibende Tetraeder ein eigentliches (nicht ausgeartetes) und nur in einer Art vorhanden sei, ist die nothwendige und ausreichende Bedingung die, daß die „charakteristische" biquadratische Gleichung

$$\lambda^4 - \alpha_1 \lambda^3 - \alpha_2 \lambda^2 - \alpha_3 \lambda - \alpha_4 = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

lauter getrennte Wurzeln $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ hat.

Ist diese Bedingung erfüllt, so enthält die lineare Schaar A_k vier Formen, welche in das Product von je zwei linearen Factoren zerfallen, und je eine Seitenfläche des Tetraeders zusammen mit der gegenüberliegenden Ecke darstellen. Sie sind irrationale Covarianten der Form A und Combinanten der Formenschaar A_k; sie sind dargestellt durch die Ausdrücke

$$e_0 = U_0 X_0 = \frac{(A-\lambda_1)(A-\lambda_2)(A-\lambda_3)}{(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_0-\lambda_2)(\lambda_0-\lambda_3)}\,{}^{1)}$$

u. s. w., und genügen den Relationen

$$e_i^2 = e_i, \quad e_i e_k = 0 \quad (i = k);$$

sie sind natürlich nur in einer Art vorhanden.

Hat die Form A reelle Coefficienten, so wird die charakteristische biquadratische Gleichung entweder vier reelle, oder zwei reelle und zwei conjugirt-imaginäre, oder zwei Paare conjugirt-imaginärer Wurzeln haben. Diesen drei Möglichkeiten entsprechend hat das Tetraeder beziehungsweise 4, 2, 0 reelle Ecken („Theilgebiete erster Stufe") und 0, 1, 2 Paare conjugirt-imaginärer Ecken, denen dann natürlich reelle Verbindungslinien („Theilgebiete zweiter Stufe") zukommen.

Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, daß die geometri-

---

1) Vgl. Clebsch u. Gordan a. a. O. S. 386, Formel (7), (8).

schen Deutungen des letzten Abschnittes ohne Weiteres auf das allgemeine auf S. 262 angegebene Theorem ausgedehnt werden können. Ueberhaupt scheint mir das Interesse, welches die in vorliegendem Aufsatz in einigen besonderen Fällen gelöste algebraische Aufgabe besitzt, vorzugsweise auf dem Gebiete der Theorie der Transformationsgruppen zu liegen. Ich denke an einem anderen Orte zu zeigen, daß mit der Aufstellung aller Typen von Zahlensystemen mit n Haupteinheiten zugleich ein bestimmtes Problem der Theorie der Transformationsgruppen gelöst ist, welches unter Gebrauch der von dem Begründer der genannten Disciplin, Herrn S. Lie eingeführten Terminologie kurz so formulirt werden kann:

„Alle Typen von Paaren einfach transitiver reciproker Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe eines Raumes von $n-1$ Dimensionen zu bestimmen“.

Marburg, d. 20. Januar 1889.

Inhalt von No. 9.

E. Study, über Systeme von complexen Zahlen.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe,* Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

27. April. **№ 10.** 1889.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber das dritte Benzildioxim.

Von

Karl Auwers und **Victor Meyer.**

Einleitung.

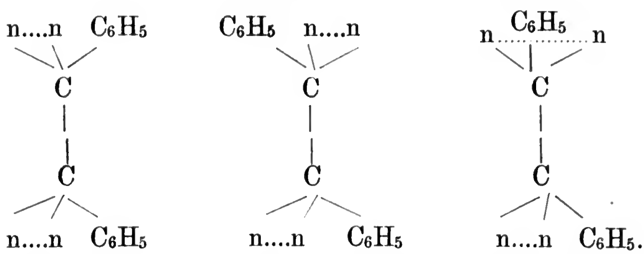
Als wir vor etwa Jahresfrist auf Grund eingehender Untersuchungen zu der Ueberzeugung gelangt waren, daß die damals bekannten beiden isomeren Benzildioxime gleiche chemische Structur besäßen, suchten wir in weiterer Verfolgung der van't Hoff'schen Anschauungen die Isomerie dieser Verbindungen durch die Einführung einer neuen Art stereochemischer Isomerie zu erklären.

Wir machten damals die Annahme, daß unter gewissen Verhältnissen auch bei einfach mit einander verbundenen Kohlenstoffatomen die freie Rotation derselben um die Axe der verbindenden Valenz aufgehoben sein könne, und zeigten, daß unter dieser Voraussetzung eine Verbindung von der Formel:

$$C_6H_5—C(NOH)—C(NOH)—C_6H_5$$

in drei stereochemisch verschiedenen Modificationen denkbar sei, welche in den folgenden, perspectivisch gedachten Formeln ihren Ausdruck finden.

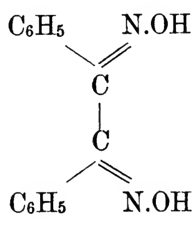
I II III



Das Zeichen n....n drückt in diesen Formeln die zweiwerthige N.OH-Gruppe aus. (Vgl. l. c.)

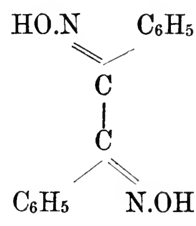
Wir hoben bereits damals hervor, daß der Unterschied zwischen der Configuration I einerseits und den Formen II und III andrerseits erheblich größer und von andrer Ordnung sei, als die Verschiedenheit, die zwischen den beiden letztgenannten Configurationen besteht. Während wir erwarten durften, bei einem Körper von der Form I wesentlich andere chemische Eigenschaften zu finden wie bei einer Verbindung von der Form II oder III, ließen wir es dahingestellt, ob zwischen den beiden letzteren bei ihrer großen Aehnlichkeit sich überhaupt ein merkbarer Unterschied nachweisen lassen würde, und da sich uns zu jener Zeit im Laufe unserer ganzen Untersuchung nirgends Anhaltspuncte für die Existenz eines dritten Benzildioxims ergeben hatten, genügten für unsere Betrachtungen die Formeln

I



und

II



von denen II die oben genannten Formen II und III in sich zusammenfaßt. Die Thatsache, daß das hochschmelzende, schwer lösliche α-Dioxim des Benzils bei einer Reihe von Reactionen in das niedriger schmelzende und löslichere β-Dioxim umgewandelt wird, veranlaßten uns, in ersterem die weniger beständige, durch I ausgedrückte, Configuration zu erblicken, letzteres aber für die begünstige Configuration anzusehen.

Im weiteren Verlauf unserer Arbeiten über diesen Gegenstand haben wir indessen niemals die Möglichkeit der Existenz eines dritten Benzildioxims aus dem Auge verloren, und in der That ist uns, wie wir bereits kurz angekündigt haben, vor wenigen Wochen die Auffindung dieser Verbindung gelungen.

Die Thatsache der Existenz eines dritten Dioxims des Benzils, und mehr noch die Eigenschaften dieses Körpers liefern ein schwer wiegendes Argument für die Richtigkeit unserer Anschauungen. Die neue Verbindung ist, wie im experimentellen Theil ausführlich nachgewiesen werden wird, ein echtes, chemisches Isomeres der beiden bis jetzt bekannten Benzildioxime und hat unzweifelhaft dieselbe chemische Constitution wie jene.

Der Körper hat dasselbe Moleculargewicht wie die anderen Benzildioxime.

Er läßt sich leicht in β-Dioxim umwandeln.

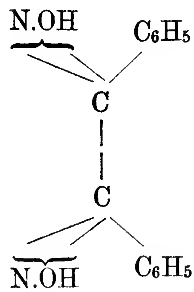
Er liefert eine Reihe von Derivaten, welche isomer, nicht identisch mit den entsprechenden der anderen Dioxime sind.

Salzsäure wandelt bei höherer Temperatur die Verbindung in β-Dioxim um, welches dann weiter in Benzil und Hydroxylamin gespalten wird.

Bei der Oxydation wird dasselbe Oxydationsproduct wie aus α- und β-Dioxim gebildet.

Durch Wasserabspaltung entsteht das nämliche Anhydrid, wie aus den anderen Oximen.

Trotzdem zeigt der Körper in mehreren Puncten ein Verhalten, welches in charakteristischer Weise von dem der beiden anderen Dioxime abweicht und beweist, daß nicht, wie wir bisher angenommen haben, das α-Dioxim, sondern die neue Verbindung, welche wir als γ-Benzildioxim bezeichnen wollen, die wahre, durch die Form



ausgedrückte, maleïnartige Configuration der Benzildioxime darstellt.

Nur zwei Eigenschaften mögen bereits hier in dieser Hinsicht hervorgehoben werden. Einmal die geringe Beständigkeit des neuen Dioxims, welches die größte Neigung besitzt, in die beständigere β-Form überzugehen. Die Leichtigkeit dieser Umwandlung ist auch der Grund, weswegen das γ-Dioxim nicht schon früher aufgefunden worden ist, denn bei den Reactionen, die gewöhnlich zur Darstellung der beiden andern Dioxime dienen — andauernde Digestion einer alkoholischen Lösung von Benzil mit salzsaurem Hydroxylamin auf dem Wasserbade, oder Erhitzen des Gemisches im Rohr auf 170° — geht das γ-Dioxim vollständig in die β-Verbindung über.

Vor allem ist es nämlich die Wärme, welche mit größter Leichtigkeit das γ-Dioxim in die beständigere β-Configuration umwandelt, wobei es gänzlich gleichgültig ist, in welcher Form das Dioxim ihrem Einflusse ausgesetzt wird.

Mag man nämlich das γ-Dioxim im trocknen Zustand andauernd auf 100° oder kurze Zeit auf eine höhere Temperatur erhitzen, oder mag man seine alkoholische Lösung einige Stunden auf dem Wasserbade digeriren, oder mag man endlich seine Lösung in Alkali einige Zeit auf dem Wasserbade erwärmen, stets geht das γ-Dioxim glatt in die β-Verbindung über. Vergleicht man damit das Verhalten des α-Dioxims, so kann man nicht darüber im Zweifel sein, daß nicht diesem, sondern dem neuen Dioxim die nicht begünstigte, maleïnartige Configuration zukommt. Allerdings wird auch das α-Dioxim beim Erhitzen seiner alkalischen Lösung allmählich in die β-Form umgewandelt, jedoch viel langsamer als das γ-Dioxim, und unter dem Einfluß des Alkohols vollzieht sich dieselbe Umwandlung nicht wie bei dem γ-Dioxim auf dem Wasserbade, sondern erst bei hoher Temperatur im Rohr. Das α-Dioxim nimmt somit in Bezug auf seine Beständigkeit eine mittlere, jedoch dem β-Dioxim bedeutend näher liegende Stellung ein: während das γ-Dioxim, wie bemerkt, sehr wenig beständig ist und durch sehr gelinde Mittel umgelagert wird, bedarf es bei dem α-Dioxim energischer Eingriffe, um eine solche Umlagerung hervorzurufen, beide aber liefern unter allen Bedingungen als Umwandlungsproduct β-Dioxim, welches die beständigste, bei allen energischen Reactionen sich bildende Configuration des Benzildioxim-Molecüls darstellt. Soweit bisher beobachtet, kann dieselbe auf keine Weise in eine der anderen Formen zurückverwandelt werden.

Entscheidend für die Beurtheilung der Configuration des neuen Dioxims ist indessen die Neigung zur Anhydridbildung, welche der Körper im Gegensatz zu den beiden bisher bekannten Dioximen zeigt.

An dem freien γ-Dioxim selbst tritt diese Erscheinung allerdings nicht so deutlich hervor, um so schärfer dagegen an seinen Säureestern. Läßt man nämlich einen beliebigen Säureester des γ-Dioxims mit gewöhnlicher Natronlauge bei Zimmertemperatur über Nacht stehen, so erhält man nicht, wie aus den entsprechenden Verbindungen der beiden anderen Dioxime das Alkalisalz des Oxims zurück, sondern statt dessen das Anhydrid des Dioxims, welches identisch mit dem Anhydrid der beiden anderen Dioxime ist. Ebenso braucht man nur z.B. die Acetylverbindung des γ-Dioxims einige Stunden mit Alkohol auf dem Wasserbade zu erhitzen, um dieselbe in Anhydrid und Essigester zu spalten, eine Reaction, die sich bei den andern Dioximen erst im Rohr bei hoher Temperatur vollzieht.

Aus dem Gesagten ergiebt sich, daß das neue Benzildioxim in einem deutlich ausgesprochenen Gegensatz zu den früher bekannten Dioximen steht, welch' letztere in ihren Eigenschaften keine derartigen durchgreifenden Unterschiede aufweisen. Während die letzteren mithin die zwei möglichen, einander ähnlichen, begünstigten Configurationen des Benzildioxim-Molecüls darstellen, muß man dem γ-Dioxim die nur in einer Form vertretene, nicht begünstigte, maleïnartige Form zuschreiben, womit sein chemisches Verhalten, zumal die außerordentlich leichte Anhydridbildung im besten Einklange steht.

Es existiren somit alle drei von unserer Theorie geforderten Benzildioxime, und ebenso besteht zwischen ihnen die gleichfalls von unserer Theorie angezeigte chemische Aehnlichkeit bezw. Verschiedenheit, so daß wir aufs Neue unsere Anschauungen durch die Thatsachen in erwünschtester Weise bestätigt sehen.

Im Anschluß hieran möge gleich an dieser Stelle bemerkt werden, daß es sich auf Grund unserer neuen Beobachtungen zweckmäßig erweist, den bisher von uns β-Benzilmonoxim genannten Körper — Schmp. 113—114° — als γ-Benzilmonoxim zu bezeichnen, um die Beziehungen zwischen den Monoximen des Benzils zu den entsprechenden Dioximen klarer hervortreten zu lassen. α-Monoxim liefert mit überschüssigem Hydroxylamin behandelt α-Dioxim, das frühere β-, jetzige γ-Monoxim γ-Dioxim, während das dem β-Dioxim entsprechende β-Monoxim bis jetzt noch nicht aufgefunden worden ist.

Experimenteller Theil.

Gewinnung des γ-Dioxims.

Die Art der Gewinnung des γ-Dioxims ist bereits in unserer

Abhandlung über zwei isomere Benzilmonoxime kurz angegeben worden, möge jedoch hier noch einmal etwas ausführlicher besprochen werden.

Man löst 1 Th. γ-Monoxim vom Schmelzpunct 113—114° (vgl. oben) und 4 Th. Aetznatron in so viel kaltem Wasser, daß eine klare Lösung entsteht, fügt 2 Th. salzsaures Hydroxylamin hinzu und läßt das Ganze bei gewöhnlicher Temperatur stehen. Der sehr große Ueberschuß von Hydroxylamin (etwa 6 Mol. auf 1 Mol. Monoxim) und Aetznatron dient dazu, um den Verlauf der Reaction zu beschleunigen und die gesammte Menge des Monoxims in Dioxim überzuführen, da sich Gemenge von γ-Monoxim und γ-Dioxim nur unvollkommen trennen lassen. Während des Stehens scheiden sich in der Regel aus der Lösung allmählich einzelne glänzende, derbe Krystalle aus; dieselben sind in reinem Wasser leicht löslich und bestehen aus dem Natriumsalz des gebildeten Dioxims. Das Ende der Reaction erkennt man daran, daß die Farbe der Lösung, welche anfangs tief gelb ist und mit dem Fortschreiten der Umsetzung mehr und mehr verblaßt, nicht mehr an Intensität verliert, was nach 1—2 Tagen der Fall ist. Man verdünnt darauf die Lösung mit Wasser, filtrirt, wenn nöthig, und säuert mit stark verdünnter Salzsäure unter Vermeidung stärkerer Erwärmung die Flüssigkeit an. Der sich ausscheidende, röthlich-weiße Niederschlag besteht zum Theil aus einem Harz, welches rasch krystallinisch erstarrt, zum Theil aus mikroskopischen Nädelchen. Dieses Product ist zum weitaus größten Theile γ-Dioxim, enthält jedoch daneben kleine Mengen von α- und von β-Dioxim. Zur Reinigung schüttelt man den scharf abgesaugten und abgepreßten Niederschlag tüchtig mit etwa der zehnfachen Menge kalten Alkohols, wobei die sehr geringen Mengen des α-Dioxims ungelöst zurückbleiben. Läßt man nun das Filtrat in einer Glasschale freiwillig nahezu eindunsten, so erhält man eine aus feinen, seideglänzenden Nadeln bestehende Krystallisation. Die oben an den Wänden der Schale haftenden Massen sind meist gefärbt und ziemlich unrein, während die später auf dem Grunde der Schale ausgeschiedenen Antheile nahezu farblos und fast völlig rein sind. Man hebt die letzteren Partien getrennt aus der Schale, saugt die geringe Menge Mutterlauge scharf ab, ohne indessen wegen der großen Löslichkeit der Substanz mit Alkohol nachzuwaschen und läßt den Körper nochmals aus Alkohol bei gewöhnlicher Temperatur auskrystallisiren. Die Krystallmassen, die sich jetzt auf dem Grunde der Schale ausscheiden, sind schneeweiß und stellen die völlig reine Verbindung dar, welche nur noch zwischen Fließpapier abgepreßt zu werden braucht. Aus den unreineren Massen kann man durch Wiederholung desselben Verfahrens weitere Mengen reiner Substsnz darstellen; man kann auf diese Weise ohne Schwierigkeit etwa die Hälfte des Gewichtes der Ausgangssubstanz an reinem γ-Dioxim gewinnen. Bei allen Operationen ist Erwärmung, zumal längere Zeit dauernde, zu vermeiden, da hierdurch die Bildung von α- und β-Dioxim, sowie von Dioximanhydrid begünstigt wird.

α-Monoxim wird, wie gleichfalls schon in der früheren Abhandlung erwähnt worden ist, unter den gleichen Bedingungen hauptsächlich in α-Dioxim übergeführt. In einem besonderen Versuche wurde die Menge desselben zu $^4/_5$ des Gewichts des angewandten Monoxims gefunden. Aus dem alkoholischen Filtrat, in dem sich die Nebenproducte der Reaction befanden, konnten nur ganz geringe Mengen einer bräunlichen Substanz isolirt werden, welche bei etwa 200° schmolz und vielleicht unreines β-Dioxim war.

Eigenschaften des γ-Dioxims.

Das γ-Benzildioxim krystallisirt aus Alkohol in feinen, seideglänzenden Nädelchen, welche ein sehr charakteristisches Verhalten zeigen. Bringt man nämlich eine zwischen Fließpapier getrocknete kleine Probe der Substanz — bei größeren Mengen ist die Erscheinung weniger deutlich — auf ein im Wasserbad erhitztes Uhrglas, so schmilzt dieselbe, um sofort wieder zu einer harten, krystallinischen Masse zu erstarren. Erhitzt man dieses Product im Capillarröhrchen weiter, so verflüssigt es sich bei 164—166° zum zweiten Male, erstarrt jedoch gleich darauf abermals zu einer Krystallmasse. Steigert man die Temperatur noch mehr, nämlich bis auf 207°, so schmilzt die Substanz endlich zum dritten Male, diesmal jedoch unter gleichzeitiger Zersetzung. Die Erklärung dieser merkwürdigen Erscheinung liegt in Folgendem. Die aus Alkohol krystallisirte Substanz besitzt einen Gehalt an Krystallalkohol. Allerdings haben mehrere Bestimmungen des Gewichtsverlustes, den die Substanz im Vacuum über Schwefelsäure oder bei 100° erleidet, keine unter einander stimmenden Werthe geliefert, da die Substanz sehr rasch verwittert, doch deuten die gefundenen Zahlen auf 1 Mol. Krystallalkohol hin. Der Alkoholgehalt der Substanz wurde überdies mit Hülfe von Acetylchlorid und Benzoylchlorid nachgewiesen. Erwärmt man nämlich die lufttrockene Verbindung einen Augenblick mit den genannten Reagentien und darauf mit Wasser und etwas Alkali, so tritt der charakteristische Geruch des Essigesters, bezw. Benzoësäureesters in unverkennbarer Weise auf. Bei dem ersten Schmelzen der Substanz entweicht dieser Krystallalkohol, und es hinterbleibt das trockne γ-Dioxim. Dieses seinerseits schmilzt bei 164—166°, geht dabei aber in das höher schmelzende β-Dioxim über. Daher erstarrt die geschmolzene Masse abermals und zeigt nun den Schmelz- und Zersetzungspunct des β-Dioxims, 207°.

Um die beschriebene Erscheinung beobachten zu können, muß man die Substanz rasch auf 100°, bezw. 165° erhitzen, bei langsamem Erwärmen tritt kein Schmelzen, sondern nur ein Zusammensintern ein.

Der bei 165° liegende Schmelzpunct bietet übrigens auch das bequemste Mittel dar, um den Grad der Reinheit des γ-Dioxims zu prüfen. Nur sehr reine Präparate schmelzen nämlich bei der genannten Temperatur zu einer klaren Flüssigkeit; bei der Anwesenheit auch nur geringer Spuren von β-Dioxim erhält man statt dessen eine trübe Flüssigkeit, bei etwas größeren Mengen von Verunreinigung wird die Masse nur halbflüssig oder sintert nur noch an einzelnen Stellen zusammen.

Bemerkt sei hier, daß sich auch das β-Dioxim aus Alkohol mit 1 Mol. Krystallalkohol ausscheidet.

0,5117 g lufttrockene Substanz verloren bei 100° 0,0800 g an Gewicht.

	Berechnet für $C_{14}H_{12}N_2O_2 + C_2H_6O$	Gefunden
C_2H_6O	16,08	15,63.

Auf dem Wasserbade verliert das β-Dioxim rasch seinen Alkohol, jedoch ohne zu schmelzen.

Für die Analyse wurde das γ-Dioxim über Schwefelsäure im Vacuum bis zu constantem Gewicht und darauf noch kurze Zeit bei 100° getrocknet.

I. 0,2214 g Substanz gaben bei der Verbrennung mit Kupferoxyd 0,5657 g Kohlensäure und 0,1027 g Wasser.

II. 0,1610 g Substanz gaben 16,5 cc feuchten Stickstoff bei 17°,5 und 759 mm Druck.

	Berechnet für	Gefunden	
	$C_{14}H_{12}N_2O_2$	I	II
C	70,00	69,68	—
H	5,00	5,15	—
N	11,67	—	11,85.

Der Körper ist unlöslich in kaltem Wasser und Ligroïn, sehr leicht dagegen in allen übrigen gebräuchlichen Lösungsmitteln. In Alkohol z. B. ist die Verbindung bei weitem löslicher als das β-Dioxim, während das α-Dioxim bekanntlich in demselben fast völlig unlöslich ist. In Alkalien löst sich das Oxim farblos auf; selbst sehr reine Producte werden aus diesen Lösungen durch Säuren leicht etwas harzig ausgefällt, gehen jedoch rasch in den krystallinischen Zustand über. Der Niederschlag schmilzt wie das aus Alkohol umkrystallisirte und bei 100° getrocknete Product bei 165° und erstarrt wieder, um dann bei 207° zu schmelzen.

Umwandlung des γ-Dioxims in β-Dioxim.

Bereits in der Einleitung ist hervorgehoben worden, mit welcher Leichtigkeit das γ-Dioxim in die β-Form übergeführt werden kann. Der Uebergang beim Schmelzen des γ-Dioxims ist schon oben erwähnt worden; zum Beweis, daß wirklich bei diesem Proceß β-Dioxim entsteht, wurden einige Zehntel Gramm γ-Dioxim geschmolzen, und die Schmelze durch Essigsäureanhydrid in der Kälte in die Acetylverbindung übergeführt. Dieselbe schmolz bei 124—125° und zeigte auch im übrigen alle Eigenschaften des β-Diacetyl-Dioxims.

Ein Erhitzen des γ-Dioxims bis zum Schmelzen ist nicht einmal nöthig, um diese Umlagerung zu bewirken, dieselbe tritt vielmehr auch ein, wenn man das unbeständige Dioxim längere Zeit auf 130—140° erwärmt; ja, selbst die Temperatur von 100° ist für diesen Zweck ausreichend, nur muß in diesem Falle das Erhitzen viele Stunden oder einige Tage fortgesetzt werden.

Ebenso leicht vollzieht sich die Umwandlung in alkoholischer Lösung. Es genügt, eine Lösung von γ-Dioxim in gewöhnlichem Alkohol mehrere Stunden auf dem Wasserbade zu kochen, um die Substanz in β-Dioxim zu verwandeln. Rascher verläuft der Vorgang, wenn man γ-Dioxim mit absolutem Alkohol im Rohr auf 100° erhitzt; in diesem Falle bildet sich neben dem β-Dioxim auch eine geringe Menge von α-Dioxim.

Bemerkenswerth ist, daß der Uebergang der γ- in die β-Form auch stattfindet, wenn man eine wässerige alkalische Lösung des γ-Dioxims einige Stunden auf dem Wasserbade erwärmt. Säuert man die Flüssigkeit nach dieser Zeit an, so scheidet sich reines β-Dioxim aus. Diese Thatsache ist insofern auffallend, als man nach dem sonstigen Verhalten des neuen Dioxims die Bildung von Dioximanhydrid hätte erwarten sollen, wie ja z. B. auch das β-Naphtochinondioxim beim Erwärmen mit Alkali in sein Anhydrid übergeht.

Behandelt man endlich das γ-Dioxim mit dem Beckmann'schen Gemisch (Eisessig, Essigsäureanhydrid und Salzsäure), so tritt gleichfalls Umlagerung ein. Als eine derartige Lösung nach zweitägigem Stehen mit Wasser versetzt wurde, schied sich ein Körper aus, der nach dem Umkrystallisiren aus Alkohol den Schmelzpunct, 124—125°; und die sonstigen Eigenschaften des β-Diacetyldioxims zeigte.

Einwirkung von Salzsäure.

Erhitzt man das γ-Dioxim mit concentrirter wässeriger Salzsäure im Rohr auf 100°, so wird es, wie seine beiden Isomeren, aber nur bei langer Dauer des Versuches, glatt in Benzil und salzsaures Hydroxylamin gespalten. Dies ist indessen keine primäre Reaction. Unterbricht man nämlich den Versuch rechtzeitig, so kann man sich davon überzeugen, daß das γ-Dioxim dabei zunächst in die β-Verbindung übergeführt wird, welche dann in bekannter Weise gespalten wird. Das auf diese Weise erhaltene β-Dioxim zeigte nach dem Auflösen in Alkali und Wiederausfällen durch Salzsäure den richtigen Schmelzpunct 207°. Das als Spaltungsproduct auftretende Benzil wurde an seiner Krystallform, dem Schmelzpunct 95° und der Violettfärbung beim Kochen mit alkoholischem Kali erkannt, während das salzsaure Hydroxylamin in üblicher Weise mit Hülfe von Fehling'scher Lösung nachgewiesen wurde.

Säureester des γ-Dioxims.

Wie von den anderen beiden Dioximen des Benzils, wurden auch vom γ-Dioxim einige Säureester dargestellt, um zu zeigen, daß nicht physikalische, sondern echt chemische Isomerie vorliegt, welche auch in den Derivaten des Oxims erhalten bleibt.

Untersucht wurden der Acetyl-, Propionyl- und Isobutyrylester. Zur Gewinnung dieser Substanzen übergießt man das γ-Dioxim mit etwa dem doppelten Gewicht des betreffenden Säureanhydrids, wobei sich das Oxim bei gewöhnlicher Temperatur unter merklicher Wärmeentwickelung allmählich auflöst. Man läßt die Lösungen über Nacht stehen und verreibt sie alsdann mit kaltem Wasser. Hierbei scheiden sich die Acetyl- und Propionylverbindung rasch als feste, weiße Substanzen aus, welche fast reine Producte darstellen. Die Ausbeuten sind quantitativ. Die Isobutyrylverbindung bleibt dagegen, selbst wenn man mit einer Kältemischung kühlt und andauernd mit einem Glasstabe reibt, zunächst ölig. Zu ihrer Reinigung nimmt man das Oel in Aether auf und schüttelt dasselbe mit wässerigem Ammoniumcarbonat, um die überschüssige Buttersäure zu entfernen. Das nach dem Verdunsten des Aethers hinterbleibende Oel behandelt man nochmals mit Ammoniumcarbonatlösung, gießt letztere dann ab und löst das Oel in kaltem Alkohol. Beim freiwilligen Verdunsten der Lösung scheidet sich dann der Körper in guten Krystallen aus. Auch die Acetyl- und Propionylverbindung reinigt man durch Umkrystallisiren aus kaltem Alkohol.

Das γ-Diacetyl-Benzildioxim krystallisirt in feinen, weißen Nädelchen, die bei 114—115° schmelzen. (Schmp. der α-Verbindung: 147—148°; der β-Verbindung: 124—125°). Der Körper ist unlöslich in Wasser, mäßig löslich in kaltem Alkohol und Aether, sehr leicht in Benzol, Schwefelkohlenstoff, Eisessig und Chloroform, schwer löslich dagegen in Ligroïn.

0,1484 g Substanz gaben 11,4 cc feuchten Stickstoff bei 16° und 744 mm Druck.

	Berechnet für $C_{18}H_{16}N_2O_4$	Gefunden
N	8,64	8,76

Das γ-Dipropionyl-Benzildioxim gleicht der Acetylverbindung in seiner äußern Erscheinung sehr; der Schmelzpunct liegt bei 86—87°. (Schmp. der α-Verbindung: 103—104°; der β-Verbindung: 121°). Die Löslichkeitsverhältnisse der Substanz sind ungefähr dieselben wie die der Acetylverbindung.

0,2212 g Substanz gaben 15,45 cc feuchten Stickstoff bei 17°,5 und 758 mm Druck.

	Berechnet für $C_{20}H_{20}N_2O_4$	Gefunden
N	7,96	8,07.

Das γ-Diisobutyryl-Benzildioxim scheidet sich aus seiner alkoholischen Lösung in kleinen, stark glänzenden Krystallen aus, welche constant, aber nicht ganz scharf bei 89—92° schmelzen. (Schmp. der α-Verbindung: 121—122°; der β-Verbindung: 88—89°). Obwohl die Schmelzpuncte der β- und der γ-Verbindung fast zusammenfallen, lassen sich die beiden Körper doch leicht durch ihr verschiedenes, gleich zu besprechendes, Verhalten gegen Alkalien von einander unterscheiden. Die Substanz ist unlöslich in Wasser, mäßig löslich in Ligroïn, leicht in den übrigen Mitteln.

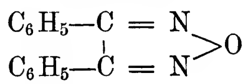
0,1699 g Substanz gaben 11,2 cc feuchten Stickstoff bei 17° und 750,5 mm Druck.

	Berechnet für $C_{22}H_{24}N_2O_4$	Gefunden
N	7,37	7,55.

Spaltung der Säureester. — Anhydrid.

Sehr wichtig und interessant ist die Spaltung, welche die Säureester des γ-Dioxims unter dem Einfluß von Alkali erleiden. Läßt man, wie wir es früher angegeben haben, die Säureester des α- oder β-Dioxims über Nacht mit gewöhnlicher Natronlauge stehen, so ist das Reactionsproduct eine weiße Masse, welche das Alkalisalz des zurückgebildeten α- oder β-Dioxims darstellt. Auf Zusatz von Wasser gehen diese Salze bis auf Spuren in Lösung und aus dem Filtrat wird durch Säuren das betreffende Oxim ausgefällt.

Ein durchaus anderes Verhalten zeigen die Ester des neuen Dioxims. Behandelt man diese Verbindungen in der eben angegebenen Weise — der Versuch wurde mit allen drei Säureestern mehrfach angestellt — so erhält man gleichfalls als Reactionsproduct eine weiße Masse. Dieselbe löst sich jedoch auf Zusatz von Wasser nicht auf, und im Filtrat ruft ein Zusatz von Säure auch nicht die geringste Trübung hervor, ein Beweis, daß keine Spur des Oxims zurückgebildet ist. Das Reactionsproduct zeigt vielmehr die Eigenschaften, welche das früher von uns sowohl aus α-, wie aus β-Dioxim dargestellte Anhydrid der Dioxime,



besitzt, denn es scheidet sich aus Alkohol in breiten, zum Theil gezackten, flachen Nadeln aus, die bei 94⁰ schmelzen. Um jeden Zweifel an der Identität der auf verschiedenen Wegen erhaltenen Producte auszuschließen, wurde in einer Probe der Substanz, welche durch Spaltung des Acetylesters des γ-Dioxims erhalten worden war, der Stickstoffgehalt bestimmt.

0,1550 g Substanz gaben 17,4 cc feuchten Stickstoff bei 17^0 und 748 mm Druck.

	Berechnet für $C_{14}H_{10}N_2O$	Gefunden
N	12,61	12,81.

Die beschriebene Reaction ist in doppeltem Sinne von großer Wichtigkeit. Einmal liefert die Thatsache, daß aus einem Säureester des γ-Dioxims durch Natronlauge bei gewöhnlicher Temperatur dasselbe Anhydrid entsteht, welches aus den anderen Dioximen gewonnen werden kann, den Beweis, daß dem γ-Dioxim dieselbe Structur zukommt wie seinen Isomeren. Dann aber spricht diese leichte Anhydridbildung, deren das γ-Dioxim im Gegensatz zu den beiden anderen Oximen allein fähig ist, wie schon eingangs hervorgehoben worden ist, in gewichtiger Weise dafür, daß das γ-Dioxim diejenige Configuration des Benzildioxim-Molecüls darstellt, in welcher die beiden Isonitrosogruppen an correspondirenden Stellen (im Sinne unserer Formulirung „übereinander“) gelagert sind, Wasserabspaltung also besonders leicht stattfinden kann.

Auch auf anderm Wege lassen sich die Säureester des γ-Dioxims leicht in Anhydrid verwandeln. Erwärmt man z. B. eine alkoholische Lösung der Acetylverbindung kurze Zeit auf dem Wasserbade, so ist keine wesentliche Veränderung wahrzunehmen, setzt man aber die Digestion mehrere Stunden fort, so tritt vollständiger Zerfall der Verbindung in Dioximanhydrid einerseits und Essigsäureäthylester andererseits ein. Dieselbe Spaltung erleiden auch die Säureester der isomeren Dioxime, doch muß man zu diesem Zwecke die alkoholischen Lösungen derselben im Rohr auf hohe Temperatur erhitzen.

Diese äußerst leichte Anhydridbildung findet übrigens nur dann statt, wenn das γ-Dioxim aus seinen Verbindungen durch Spaltung entsteht, sich also im Entstehungszustande befindet. Die fertige Verbindung spaltet weniger leicht Wasser ab, doch kann man auch aus ihr das Anhydrid darstellen, und zwar auf demselben Wege, der bei den isomeren Oximen zum Ziele führt, nämlich durch mehrstündiges Erhitzen mit Wasser im Rohr auf hohe Temperatur. Auch unter diesen Bedingungen erfolgt die Anhydridbildung bei dem γ-Dioxim am leichtesten, denn dasselbe wird z. B. bei 180° rasch und glatt in Anhydrid verwandelt, während α-Dioxim bei dieser Temperatur kaum Spuren, und β-Dioxim nur geringe Mengen Anhydrid liefert.

Oxydationsproduct.

Einen weiteren Beweis für die normale Constitution des γ-Dioxims liefert seine Oxydation. Fügt man, wie bei den isomeren Dioximen, zu einer stark verdünnten alkalischen Lösung des γ-Dioxims nicht ganz die dreifache Menge Kaliumferricyanid, so entsteht ein gelber Niederschlag, der abgesaugt, ausgewaschen, einige Zeit in alkoholischer Lösung mit Thierkohle gekocht und schließlich mehrfach aus demselben Lösungsmittel umkrystallisirt wird. Man erhält auf diese Weise die bekannten, flachen, weißen Nadeln vom Schmelzpunct 113—114°, welche bei rascher Destillation in Phenylcyanat übergehen. Alle drei Dioxime liefern mithin, bei gewöhnlicher Temperatur oxydirt, denselben um 2 Wasserstoffatome ärmeren Körper

$$\begin{array}{l} C_6H_5-C = N-O \\ \quad\quad\quad | \quad\quad\quad | \\ C_6H_5-C = N-O \end{array},$$

ein Verhalten, daß sich ungezwungen nur dann erklären läßt, wenn man allen drei Oximen, auch ihren Oximidogruppen, dieselbe Structur zuschreibt.

Bestimmung des Moleculargewichts.

Zur Ermittelung der Moleculargröße des γ-Dioxims und seiner Derivate diente, wie in den analogen Fällen die Raoult'sche Methode. Da das Moleculargewicht des α- und β-Dioxims an ihren Acetylverbindungen festgestellt worden war, wurde auch hier die Acetylverbindung untersucht. Die gefundenen Werthe weisen deutlich auf das einfache Moleculargewicht hin und schließen die Annahme einer Polymerie völlig aus.

Der Erstarrungspunkt des angewandten Eisessigs lag bei 16°,495.

I. 0,639 g Substanz in 42,7 g Eisessig gaben eine Depression von 0°,195.

II. 1,046 g Substanz in 42,7 g Eisessig gaben eine Depression von 0°,315.

	Berechnet für	Gefunden	
	$C_{18}H_{16}N_2O_4$	I	II
Depressionscoëfficient	0,120	0,130	0,129
Moleculargewicht	324	299	303.

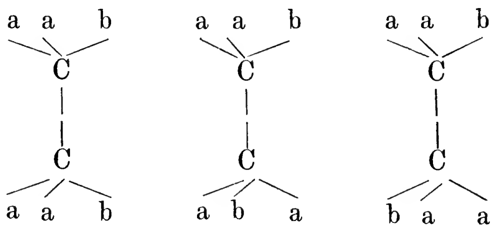
Nachdem durch die im Vorstehenden mitgetheilte Untersuchung die Existenz eines dritten structurgleichen Dioxims des Benzils mit Sicherheit nachgewiesen worden ist, sind zur Zeit fünf Oxime des Benzils bekannt, nämlich drei Dioxime und zwei Monoxime. Der besseren Uebersicht halber mögen nachstehend die Schmelzpuncte dieser Körper sowie ihrer zugehörigen Acetylverbindungen zusammengestellt werden.

	Monoxim.	Acetylmonoxim.	Dioxim.	Acetyldioxim.
α	137—138°	61—62°	237°	147—148°
β	—	—	207°	124—125°
γ	113—114°	78—79°	164—166°	114—115°.

Wie man sieht, fehlt bis jetzt noch ein β-Monoxim, d. h. ein Monoxim, welches bei weiterer Behandlung mit Hydroxylamin das β-Dioxim vom Schmelzpunct 207⁰ liefert. Wie wir in unserer Abhandlung über zwei isomere Benzilmonoxime kurz erwähnten, liegen bereits Andeutungen für die Existenz eines dritten Benzilmonoxims vor, und es wird daher unsere nächste Aufgabe sein, weitere auf die Auffindung und Darstellung dieser Verbindung gerichtete Versuche zu unternehmen.

Schlußbetrachtung.

Die vorstehend beschriebenen Isomerien erklären sich in ungezwungenster Weise durch unsere stereochemische Hypothese, welche in den Schemen



ihren Ausdruck findet. Daß derartige Isomerien sich gerade bei den Derivaten des Benzils, unter keinen Umständen aber bei den entsprechenden des Benzophenons zeigen, ist ein schwer wiegendes Argument zu Gunsten unserer Anschauung, nach welcher die Isomerie durch die räumliche Lage der mit dem Kohlenstoffpaar verbundenen Gruppen bedingt wird.

Offenbar aber giebt es in der Reihe der Oxime noch ganz andere Arten der Isomerie, welche mit den von uns untersuchten Fällen nichts gemein haben, bei denen der Grund der Verschiedenheit vielmehr auf abweichender Structur der stickstoffhaltigen Gruppe beruht. Eines der Beispiele für die letztere Art der Isomerie bieten nach den Versuchen von Beckmann[1]) die beiden isomeren Aldoxime des Bittermandelöls, welche, wie derselbe nachgewiesen hat, zwei verschieden constituirte Oximidogruppen besitzen. Bei Körpern, welche dem Benzil analog sind, und daher für unsere Untersuchung in Betracht kommen (Acetoxime) ist eine derartige Isomerie indessen trotz sorgfältigsten Suchens niemals gefunden worden. Es ist daher wahrscheinlich, daß für das Zu-

1) Berichte d. Deutsch. chem. Ges. XXII, 429.

standekommen dieser Isomerie der mit dem Kohlenstoffatome der Aldoximgruppe verbundene Wasserstoff,

$$C_6H_5-C\begin{matrix}\nearrow N.OH \\ \searrow H^*\end{matrix},$$

wesentlich ist. In der That verschwindet die Fähigkeit der Bildung solcher Isomeren, sobald man diesen Wasserstoff durch ein Alkyl ersetzt, denn das Acetophenon ist nach den Versuchen Beckmann's nicht mehr im Stande, zwei isomere Oxime zu liefern.

Allein außer dieser Isomerie bestehen noch Verschiedenheiten von abermals anderer Natur, wie die Auffindung unserer basischen und nicht basischen Methyläther der Benzildioxime, die Existenz isomerer Aether des Acetoxims (Beckmann[1]), endlich die Erkenntniß des Bestehens isomerer Tribenzylhydroxylamine (Walder[2]), Behrend[3])) zeigt. Die hier angedeuteten Facta bedürfen ohne Zweifel noch, bevor eine eingehende theoretische Discussion derselben möglich ist, einer gründlichen experimentellen Untersuchung. Wir wollen daher heute mit Bezug auf diese Thatsachen nur eine kurze Bemerkung anfügen.

Es giebt nur eine salpetrige Säure, aber es giebt zwei Arten von Alkylverbindungen derselben, die Nitrokörper und die Salpetrigsäureester.

Es giebt nur ein Hydroxylamin, aber es giebt isomere Tribenzylhydroxylamine.

Es giebt nur eine Art von Acetoximen, aber es giebt zwei Reihen von Alkyläthern derselben.

Während die erst erwähnte Isomerie ihre genügende Erklärung in der verschiedenen Bindungsweise der einzelnen Elemente der isomeren Verbindungen findet, indem die Alkylgruppe im einen Falle direct, im anderen dagegen durch Vermittelung eines Sauerstoffatomes mit dem Stickstoff in Verbindung steht, ist eine derartige Erklärungsweise doch in den anderen Fällen nicht möglich. Erwägt man aber, daß von den Tribenzylhydroxylaminen das eine basisch, das andere dagegen indifferent ist, und sich derselbe Unterschied bei den Alkyläthern der Benzildioxime wiederholt, so wird man zu der Vermuthung gedrängt, daß diese Art der Isomerie auf das Vorkommen von einerseits dreiwerthigem, andrerseits fünfwerthigem Stickstoff zurückzuführen ist. In der That ist es leicht verständlich, daß ein Tribenzylhydroxylamin von der Formel

1) Ibid. XXII, 439.
2) Ibid. XIX, 1631.
3) Ibid. XXII, 386.

$$N \begin{array}{l} \diagup O-R \\ -R \\ \diagdown R \end{array},$$

wie das Hydroxylamin selbst, basischer Natur ist, während ein Isomeres desselben von der Structur

$$N \begin{array}{l} /\!\!/ O \\ \diagdown\!\!\!\diagdown\!\!\!\diagdown (R)_3 \end{array}$$

sich nicht wohl mit Säuren zu verbinden im Stande sein wird. Eine ähnliche Annahme erscheint auch für die beiden Paare isomerer Methyläther des α- und β-Dioxims nicht ausgeschlossen. Die einen verbinden sich mit Salzsäure und erweisen sich als einfache Abkömmlinge der Oxime, indem sie durch Spaltung mit Salzsäure in Benzil übergeführt werden. Die Structur

$$\begin{array}{l} C_6H_5-C = N-O\,.\,CH_3 \\ \qquad\quad | \\ C_6H_5-C = N-O\,.\,CH_3 \end{array}$$

kann daher für sie wohl nicht bezweifelt werden. Ihre Isomeren sind dagegen nicht befähigt, sich mit Salzsäure zu verbinden; sie verhalten sich aber auch nicht den Oximen ähnlich, da sie durch hydrolytische Spaltung nicht in Benzil verwandelt, sondern vielmehr unter Bildung von Benzoësäure zerstört werden, während sie bei energischer Reduction (Jodwasserstoffsäure und Phosphor) glatt Dibenzyl liefern. Unter Zugrundelegung der obigen Betrachtungsweise wird man es als wohl möglich betrachten dürfen, daß ihre Structur durch die Formel

$$\begin{array}{l} C_6H_5-C = N \begin{array}{l} /\!\!/ O \\ \diagdown CH_3 \end{array} \\ \qquad\quad | \\ C_6H_5-C = N \begin{array}{l} \diagup CH_3 \\ \diagdown\!\!\!\diagdown O \end{array} \end{array}$$

wiedergegeben wird. Doch sind für sie auch andere Formeln wie z. B.

$$\begin{array}{l} C_6H_5-C-N-O\,.\,CH_3 \\ \qquad\quad \| \quad | \\ C_6H_5-C-N-O\,.\,CH_3 \end{array}$$

u. a. in Betracht zu ziehen.

Ein eingehendes experimentelles Studium wird die Berechtigung unserer Annahme zu prüfen haben. Heute lag uns nur daran, hervorzuheben, daß die neuen Arten von Structurisomerien, welche in der Reihe der Hydroxylaminderivate aufgefunden worden sind, durch w e s e n t l i c h a n d e r e U r s a c h e n bedingt sind, als die Isomerie der beiden Benzilmonoxime und der drei Benzildioxime, für welche, wie wir glauben, die von uns aufgestellte stereochemische Hypothese zur Zeit die geeignetste Erklärung gewährt.

Göttingen, Universitätslaboratorium.

Universität.

Elfter Bericht über die Königl. Universitäts-Poliklinik für Ohrenkrankheiten.

Von

Prof. **K. Bürkner.**

In der Zeit vom 1. April 1888 bis 31. März 1889 wurden in der Poliklinik für Ohrenkrankheiten 1281 Patienten 11360 Consultationen ertheilt — gegen 1148 Patienten und 10275 Consultationen im Etatsjahr $18^{87}/_{88}$.

1218 Kranke wurden in Behandlung genommen, während 63 theils wegen völliger Unheilbarkeit oder aus andren Gründen abgewiesen werden mußten, theils auch nur zum Zwecke einer einmaligen Untersuchung sich vorgestellt hatten.

Geheilt wurden	651	=	50,8 %
Gebessert	176	=	13,7 „
Ungeheilt blieben	59	=	4,6 „
Ohne Behandlung entlassen wurden	63	=	4,9 „
Vor beendigter Kur blieben aus .	203	=	15,9 „
In Behandlung verblieben	126	=	9,8 „
Gestorben sind	3	=	0,3 „
	1281	=	100,0 %.

Es war somit bei Berücksichtigung sämmtlicher zur Untersuchung gekommener Patienten Heilung zu verzeichnen in 50,8 %, Besserung in 13,7 %. Von den überhaupt in Behandlung genommenen 1218 Kranken wurden, nach Abrechnung der noch in Behandlung befindlichen, 75,7 % geheilt oder gebessert.

Von den 1281 Patienten waren wohnhaft:

in Göttingen	497	=	38,7 %
außerhalb Göttingen, aber in der Provinz Hannover	553	=	43,8 „
mithin in der Prov. Hannover	1050	=	82,5 %.

Außerdem kamen auf

Provinz Hessen-Nassau . . .	102
„ Sachsen	56
„ Westfalen	24
„ Brandenburg	1
Herzogthum Braunschweig . .	31
„ Anhalt	1
Fürstenthum Lippe-Detmold .	5

Freie Stadt Bremen	4
„ „ Hamburg	1
Durchreisende waren	6
	231 = 17,5 %.

Von den auswärts wohnenden Kranken blieben 48, um regelmäßig behandelt werden zu können, in Gasthöfen und Privatwohnungen der Stadt. Außerdem wurden zur Untersuchung oder Behandlung von andren klinischen Instituten eine Reihe von Kranken der Poliklinik überwiesen, nämlich

von der medicinischen Klinik	30
„ „ chirurgischen Klinik	3
„ „ Augenklinik . . .	43
„ „ Irrenanstalt . . .	1
	77.

Männlichen Geschlechts waren 763 Kranke = 59,6 %, nämlich 310 Kinder bis zu 15 Jahren und 453 Erwachsene.

Weiblichen Geschlechts waren 518 Kranke = 40,4 %, nämlich 281 Kinder und 237 Erwachsene.

Es waren mithin Erwachsene 690 = 53,9 %, Kinder 591 = 46,1 %.

Folgende Krankheiten kamen zur Beobachtung:

A. Krankheiten des äußeren Ohres.

340 Fälle = 26,6 %.

1. *Angeborene Deformitäten.* 2 Fälle.
   2 weiblich.
2. *Othaematom.* 1 Fall.
   Männlich.
3. *Abscess der Ohrmuschel.* 1 Fall.
   Männlich.
4. *Erysipeloid der Ohrmuschel.* 1 Fall.
   Weiblich.
5. *Ohrenschmalz-Ansammlung.* 175 Fälle.
   145 männlich, 30 weiblich.
6. *Fremdkörper.* 22 Fälle.
   12 männlich, 10 weiblich.

Nämlich a) lebende: Floh, Fliege.
b) leblose: Bohne, Erbse, Roggenkörner (4mal), Haferkörner, Weizenkörner, Gerstengranne (2mal), Zwiebel, Wegerichwurzel, Blatt von wildem Wein,

Blatt vom Nußbaum, Watte, Papier, Mennige, Kieselstein, Glasperle (2mal).

7. *Pilzwucherung (Aspergillus) im Gehörgang.* 3 Fälle.
1 männlich, 2 weiblich.

8. *Acutes Ekzem.* 63 Fälle.
28 männlich, 35 weiblich.

9. *Chronisches Ekzem.* 12 Fälle.
6 männlich, 6 weiblich.

10. *Acute diffuse Gehörgangsentzündung.* 9 Fälle.
6 männlich, 3 weiblich.

11. *Chronische diffuse Gehörgangsentzündung.* 2 Fälle.
2 männlich.

12. *Furunkel im äußeren Gehörgange.* 49 Fälle.
34 männlich, 15 weiblich.

B. Krankheiten des Trommelfells.

10 Fälle = 0,8 %.

13. *Acute Trommelfellentzündung.* 6 Fälle.
5 männlich, 1 weiblich.

14. *Zerreißung des Trommelfells.* 4 Fälle.
3 männlich, 1 weiblich.

C. Krankheiten des Mittelohres.

840 Fälle = 65,6 %.

15. *Acuter Tubenkatarrh.* 9 Fälle.
4 männlich, 5 weiblich.

16. *Chronischer Tubenkatarrh.* 5 Fälle.
4 männlich, 1 weiblich.

17. *Acuter Mittelohrkatarrh.* 193 Fälle.
101 männlich, 92 weiblich.

18. *Chronischer Mittelohrkatarrh.* 245 Fälle.
160 männlich, 85 weiblich.

19. *Bluterguß in die Paukenhöhle,* 1 Fall.
Weiblich.

20. *Acute eiterige Mittelohrentzündung.* 183 Fälle.
93 männlich, 90 weiblich.

21. *Chronische eiterige Mittelohrentzündung.* 152 Fälle.
83 männlich, 69 weiblich.

22. *Residuen von chronischer Mittelohreiterung.* 41 Fälle.
17 männlich, 24 weiblich.

23. *Neuralgie des Plexus tympanicus.* 11 Fälle.
2 männlich, 9 weiblich.

D. Krankheiten des inneren Ohres.

60 Fälle = 4,6 %.

24. *Acute Nerventaubheit.* 8 Fälle.
5 männlich, 3 weiblich.
25. *Ménière'sche Krankheit.* 1 Fall.
Männlich.
26. *Chronische Nerventaubheit.* 36 Fälle.
26 männlich, 10 weiblich.
27. *Ohrensausen ohne Befund.* 5 Fälle.
1 männlich, 4 weiblich,
28. *Taubstummheit.* 10 Fälle.
3 männlich, 7 weiblich.

E. Verschiedenes.

31 Fälle = 2,4 %.

29. *Simulation.* 1 Fall.
Männlich.
30. *Nasen- und Rachenkrankheiten ohne Betheiligung des Ohres.*
12 männlich, 11 weiblich.
31. *Normal.* 7 Fälle.
5 männlich, 2 weiblich.

Außer den hier aufgeführten Krankheiten wurden bei den 1281 Patienten noch 109 mal anderweitige Ohrenkrankheiten und in 101 Fällen Nasen- und Rachenkrankheiten behandelt.

An Operationen wurden in der Poliklinik ausgeführt:

Eröffnung von Abscessen	7 mal.
„ „ *Furunkeln*	39 mal.
Fremdkörperextraction	5 mal.
Paracentese des Trommelfelles	114 mal.
Extraction von Sequestern	3 mal.
„ „ *Polypen*	13 mal.
	181.

Außerdem wurde zu unzähligen Malen mit dem Galvanocauter operirt, sowohl im Ohr als in der Nase.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Januar 1889.

(Fortsetzung.)

Bulletin de la société des antiquaires de Picardie. Année 1888. N. 2. 3. Amiens 1888.
Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le département de la Gironde de Juin 1886 — Mai 1887. Bordeaux 1887.
Nouveaux Mémoires de la société. Imp. des Naturalistes de Moscou. Tome VI formant le tome XII de la collection. 1889.
Tome XIII (XIX de la coll.) livr. III. 1871.
Tome XIV (XX de la coll.) livr. III. 1882.
Tome XV (XX de la coll.) livr. V. 1888.
Meteorologische Beobachtungen in Dorpat. Mai — August 1888.
Finlands geologiska Undersokning. Beskrifning till Kartbladet N. 8, N. 9 af Ad. Moberg. Helsingfors 1885.
Additional note to the probable cause of the displacement of Beach-lines by A. Blytt. Christiania 1889.
Eighth international congress of Orientalists which will be held at Stockkolm and at Christiania. From 2 to the 13th Sept. 1889.
Annales de l'école polytechnique de Delft. Tome IV. 1888. 3me livraison. Leide 1888.
Bijdragen tot de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. Vijfde Volgreeks. Vierde Deel. 1de Aflevering. 'S Gravenhage. 1889.
Flora Batava 281e Aflevering. Leiden.
282e Aflevering.
Bibliographie générale de l'Astronomie, p. J. C. Honzeau et A. Lancaster. Tome 1. Partie 1. Bruxelles 1887.
Annales de l'observatoire R. de Bruxelles, deuxième série. Annales météorologiques. Tome II. 1885. Nouv. série. Annales astronomiques. Tome V. fasc. 3. 1885. Tome VI. 1889. Bruxelles.
Annuaire de l'observatoire Royal de Bruxelles. 1885 — 1888. 52e — 55e année. Brux. 1884 — 1887.
a. Annuaire de l'Académie royale de Belgique. 1889. 55e année.
b. Bulletin de l'Académie royale de Belgique. 58e année, 3e série, tome 16. N. 11. Brux. 1888.
Journal of the Elisha Mitchell scientific society 1888. 5th year, part second.
a. Bulletin of the Museum of comparative Zoölogy at Harvard college. Whole series Vol. XVI, N. 3. Cambridge 1888.
b. Annual report of the Curator of the museum of comparative Zoölogy at Harvard-college for 1887—88. Cambridge 1888.
Bulletin of the American geographical society. Vol. XX. N. 4. 1888. New-York.
Journal of the college of science Imp. University Japan. Vol. II. Part IV. Tokyo. 1888.

Nachträge.

Meteorologische Zeitschrift. V. Jahrg. Heft 12. 1888. Berlin.
Verhandlungen d. K. K. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Jahrg. 1888. Band XXXVIII. Quartal III und IV. Wien 1888.
Magyarorszag II Jozsef Koràban irta Marezali. 1. Kötet. Budapest 1882.
Titel zu Ertekezések a Nyelo-es osztalya Köréböl. Band XIII. Budapest 1887.

Februar 1889.

Sitzungsberichte der K. Pr. Akademie d. W. zu Berlin. III, IV, V, VI, VII, VIII, IX und Register von 1888.

Veröffentlichung des K. Pr. geodätischen Institutes:
a. Astronomisch-geodätische Arbeiten I. Ordnung. Telegraphische Längenbestimmungen im Jahre 1887. Bestimmung der Polhöhe und des Azimutes auf den Stationen Rauenberg und Kiel in den Jahren 1886 und 1887. Berlin 1889.
b. Das Märkisch-Thüringische Dreiecksnetz. Berlin 1889.

Acta Mathematica 12:2. Berlin. Stockholm. Paris 1889.

Neues Lausitzisches Magazin. Band 64. Heft 2. Görlitz 1888.

Ueber die Molecularvolume von Flüssigkeiten von Herm. Kopp. Abdr. aus Liebig's Annalen. 250. Band. Leipzig und Heidelberg 1889.

Bericht über das XIV. Vereinsjahr 1887—88 erstattet vom Vereine der Geographen an der Universität Wien. Wien 1888.

Verhandlungen der K. K. geologischen Reichsanstalt. N. 15, 16, 17, 18 und Titel. 1888. N 1. 1889. Wien.

Meteorologische Zeitschrift. Jahrg. 6. 1889. Heft 1. Jan. Heft 2. Febr. Wien.

Ungarische Revue. 1889. Heft 1. Jahrg. 9. Budapest 1889.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Section des Siebenbürgischen Museum-Vereines in Klausenburg.
Orvos-Termesc. tudom. Ertesitö. 1888. I.2·3, II.3. Klausenburg.

Journal of the R. microscopical society. 1888. Part. 6a. 1889. Part. 1. Febr. London and Edinburgh.

Proceedings of the Liverpool Biological society. Vol. I. 1886—87. Vol. II 1887—88. Liverpool.

Nature. Vol. 39. 1005 – 1008.

Proceedings of the R. society. Vol. XLV. N. 274, 275.

Proceedings of the London mathematical society. N. 333—337.

Monthly notices of the R. astronomical society. Vol. XLIX. N. 3. Jan. 1889.

The scientific papers of Thom. Andrews with a memoir by P. G. Tait and A. Crum Brown. London 1889.

The transacfions of the R. Irish Academy. Vol. XXIX. Part. V. Dublin 1889.

Prodromus of the Zoology of Victoria. Decade XVI. (Natural history of Victoria). Melbourne 1888.

Académie R. de Belgique. Bulletin de l'A. Année 58, série 3, tome 16. N. 12, Année 59, série 3, tome 17. N. 1. Bruxelles.

Annales de la société géologique de Belgique. Tome XIII. Livr. 1. 2. Tome XIV. Livr. 1. Tome XV. Livr. 1. 2. 3. Liège.

Revue générale de Botanique dirigée par M. Gaston Bonnier. (Extrait). Sur l'ectocarpus fulvescens Thuret. Paris.

Mémoires de la société de Physique e d'histoire naturelle de Genève. Tome XXX. Prem. partie. Genève 1888.

Rendiconti dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche. Serie 2a. Vol. 2. fasc. 1—12. 1888. Napoli.

Rendiconti del circolo matematico di Palermo. fasc. 1. Tomo III. Anno 1889.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XXIV. Disp. 2. 3. 1888—89.
Vol. Vigesimo quarto. 1888—89. Torino. Elenco degli Academici.

Atti della R. Accademia dei Lincei 1888. Rendiconti Vol. IV. fasc. 6—10. 2º semestre. Roma.

Ulteriori asservazioni sui giacimenti minerali di Val D'Ala in Piemonte. Memoria del socio Giov. Struever. Roma 1888.

Table du commerce epistolaire de Galilée Galiléi. Indice alfabetico e topografico. Firenze 1889.
a. Bollettino delle pubblicazioni italiane. N. 74—75. 1889.
b. Indice alfabetico delle opere. Bre. al Maz. 1888. 17—64. Firenze.

Mémoires de l'Académie Imp. des sciences de St. Pétersbourg. VIIe série. Tome XXXVI. N. 6—11. St. Petersb. 1888.

Neue Reduction der Bradley'schen Beobachtungen aus den Jahren 1750—1762 von Arthur Auwers. Band 3. St. Petersburg 1888.

Flora Batava. 283 a 284e aflevering. Leiden.

Proceedings of the American pharmaceutical association 1888. Vol. 36. Philadelphia 1888.

Atlas, Eastern Middle Antracite field. Part. II. A. A. Pennsylvanian Geological survey.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. Part. II. March — September 1888. Philadelphia 1888.

Nachträge.

Bulletin of the American Geographical society. Vol. XX. 1888. Supplement. New-York.

Die Aufgaben der Hydrotechnik. Rede zum Geb. d. K. Wilhelm II. in der Aula der technischen Hochschule zu Berlin von Jul. Schlichting. Berlin 1889.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Jahrg. 23. Heft 4. Leipzig. 1888.

Leopoldina. Heft XXV. N. 1—2. 1889. Halle a. S.

Mittheilungen aus dem naturwissenschaftl. Verein für Neu-Vorpommern und Rügen in Greifswald. Jahrg. 20 Berlin 1889.

United States coast and geodetic survey, Bulletin. N. 5, 6, 7, 8.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Tomo XXVI. Entrega 1, 2, 3. Julio, Agosto, Setiembre de 1888. Buenos-Aires 1888.

Verhandlungen des deutschen wissenschaftl. Vereins zu St. Iago. Heft 1. Valparaiso 1885.

Dr. Rudolf Wolf, Astronomische Mittheilungen. LXXII. December 1888.

Det kongelige Norske Videnskabers Selskabs Skrifter. 1886 og 1887. Throndjem 1888.

Notulen van de algemeene en Bestuurs-Vergaderingen van het bataviaasch Genootshap van Kunsten en Wetenschappen. Deel XXVI. 1888. Aflevering II. Batavia, 1888.

Tijdschrift voor Indische Taal- Land- en Volkenkunde. Deel XXXII. Aflev. 4. Batavia - s'Hage. 1888.

Nederlandsch-Indisch Plakatboek, 1602—1811, door J. A. van der Chijs. Batavia - s'Hage. 1888.

Die Venusdurchgänge 1874 und 1882. Bericht über die deutschen Beobachtungen. Herausgegeben von A. Auwers. 2. Band. Berlin 1889.

Записки математиъескаго Отдѣленія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей. Томъ VIII. Одесса 1888.

Записки Новороссійскаго Общества Естествоиспытатедей. Томъ XIII. Выпускъ II. Одесса 1888.

Mémoires de la société des naturalistes de la Nouvelle-Russie (Odessa). T. XIII P. 2.

Inhalt von No. 10.

Karl Auwers und *Victor Meyer*, über das dritte Benzildioxim. — *K. Bürkner*, Elfter Bericht über die Königl. Universitäts-Poliklinik für Ohrenkrankheiten. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

29. Mai. **№ 11.** 1889.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 4. Mai.

de Lagarde macht kleine Mittheilungen:

a. Se non è vero, è ben trovato.
b. Giordano Brunos Wispure.
c. Sura.
d. Die Heimath der zahmen Kastanie und des Oelbaums.
e. Iosephs ägyptischer Titel.

Zugleich legt er von Herrn Professor Dr. Hoffmann in Kiel, unserem Correspondenten in der hist. philol. Klasse, eine Abhandlung „Ueber einige phoenikische Inschriften“ vor, die in Band 36 erscheinen wird.

Riecke legt eine Mittheilung von Herrn Dr. W. Hallwachs in Darmstadt vor: „Ueber den Zusammenhang des Electricitätsverlustes durch Beleuchtung mit der Lichtabsorption.“

Klein legt eine Mittheilung des Herrn Dr. Schönfliess vor: „Ueber regelmässige Configurationen n_3 auf der allgemeinen Curve dritter Ordnung.“

Kleinigkeiten.

Von

Paul de Lagarde.

1.

Se non è vero, è ben trovato.

In dem Nachworte zu meiner im Januar 1889 erschienenen Ausgabe der opere italiane des Giordano Bruno 2 799 habe ich angemerkt, daß die Phrase Se non è vero, è ben trovato von Bruno gemünzt sei: sie stehe bei Wagner 2 415, bei mir 2 730_{12} in einem Zusammenhange, der für Bruno als Urheber bürge.

Herr OberBibliothekar Reinhold Köhler in Weimar hatte die große Güte unter dem 12 März 1889 mir Folgendes zu schreiben.

In den Londoner Notes and Queries vom 19. Mai 1881 (6. Series. Vol. III, pg. 387) hat ein Herr N. Tr. das Vorkommen der Worte Se non è vero, u. s. w. in Brunos Werken ed. Wagner II, 415, nachgewiesen und angefragt, ob etwa ein Leser der N. and Qu. die Worte noch früher nachweisen könne. Letzteres ist bisher meines Wissens in den N. and Q. nicht geschehen. Im October 1881 theilte ich mit andern Nachträgen die Notiz der N. and Qu. Büchmann mit, und darauf hat Büchmann in der 1882 erschienenen dreizehnten vermehrten und umgearbeiteten Auflage seiner geflügelten Worte S. 224 die Redensart als in Brunos Gli eroici furori stehend angeführt, leider mit dem Druckfehler (Wagner Bd.) 1 (S. 415).

Der Herr N. Tr. der Notes and Queries ist so gut wie sicher der Londoner Buchhändler Nicolaus Trübner.

2.

Giordano Brunos Vispure.

In des Herrn Domenico Berti vita di Giordano Bruno (1868) 347 erzählt Bruno, er sei von Paris per causa de' tumulti (GBrunos Weltanschauung und Verhängnis, von HBrunnhofer, 58) nach Germania gegangen, e feci prima recapito a Mez, alias Magonza[,] che è una città Arciepiscopale e è il primo elettor dell' Imperio. Hier fehlt natürlich über Mez ein Strichlein: das Protokoll der Inquisition wird Mēz bieten = Menz: wer ein klein wenig die deutsche Litteratur kennt, weiß, daß SebMünster stets Mentz schreibt, nicht Mainz, welche Form an Brunos Ohr sicher nicht geschlagen hat. Vergleiche in meiner Ausgabe Brunos 7_{24} tentadolo, $13^4/_5$ mãtegono, 16_6 senteze, 18_{34} fermamete, usw.

Bruno fährt fort: non trovando ne qui ne in Vispure luoco poco lontano de lĭ trattenimento a mio modo, andai a Vittimberg in Sassonia. Jenes Vispure hat die Biographen Brunos viel gequält: weder Weißenburg kann es sein, das weit südlich von Mainz liegt, noch Wiesbaden, da pure nicht baden ist.

Im Codex diplomaticus Nassoicus WSauers urkundet § 484 der Rheingraf Embricho am 2 April 1240, und nennt unter anderen Besitzthümer molendinum in Wissebura. Ebenda § 757 bestimmt ein für die Wetterau ausgemachter Landfrieden vom 15 Mai 1265 als die Eine Grenze seines Gebiets aquam que dicitur Wieschebure prope Lorche. Diese LandfriedensUrkunde war schon 1817 in CWGrotes historisch-geographisch-statistisch-literarischem Jahrbuche für Westfalen und den Niederrhein 190 ff., und 1836 im ersten Bande des Codex Moenofrancofurtanus JFrBoehmers 134 (Datum hier: 6 Mai 1265) gedruckt worden. Es erhellt, daß diese aqua die bei Lorch[1]) in den Rhein mündende Wisper[2]) ist. Nahe der Quelle dieses sieben Stunden langen Flusses liegt das Dorf Wisper, über welches der zu Frankfurt am Main 1747 erschienene Wetterauische Geographus 414 schreibt:

> Wisbert, Wisper, Dorf in dem Fürstenthum Hessen-Rheinfels, im Amt Hohenstein, anderthalbe Stunden von Langenschwalbach, zwey von Nastett. Unweit von hier entspringt die Wisberbach.

KMüllenhoffs deutsche Altertumskunde liefert mir 2 233ʳ folgende Analogien für Wissebure-Wisper (der Name fehlt bei Förste-

1) Grote 192 glaubt, es sei Lorsch gemeint, das im Bache Weschinte stehe: er deutet Wieseborn oder Wäschborn, und weist auf die Weschnitz der neuen Landkarten. Allein die Wetterau greift nie auf das linke Rheinufer über: Starkenburg wie Aschaffenburg sind als Grenzen des Friedebezirks genannt, nicht in denselben einbegriffen, der omnibus hominibus, immo etiam et Judeis zu Gute kam. Nach der Wieschebure wird die Wilne genannt (Heinrich Graf von Wilnowe = Weilnau ist einer der Urkundenden), nach der Wilne die Logena = Lahn, darauf Bischoveskirchen, d. h. das Solmsische Bißkirchen, in welchem Namen dieselbe Verkürzung von *Bischofs* eingetreten ist wie in Bismarck, meine Mittheilungen 2 318ʳ. Herr Hirsch Graetz hat sich für seinen siebenten Band folgende Stelle des in Rede stehenden Landfriedens entgehn lassen: Item quia nonnulli effrenes homines in civitatibus, plerumque non parcente Deo, in cujus passionis memoriam Iudeos sustinet ecclesia sancta dei, nec etiam Imperio deferentes, ad cuius cameram pertinere noscuntur, facile tumultuant .... statutum est quod .....

2) „Der Nachtwächter gieng vorbei, und sagte: »Ei! was pfeift der Wispelwind heut närrisch im Rheingau!«“ Clemens Brentano, Mährchen³, 1 32. Bekanntlich spielt Brentanos erstes Mährchen zwischen Rüdesheim und Mainz: ich führe den Satz an, um zu zeigen, wie nahe bei Mainz die Wisper mündet. FFreiligrath:

„Der Wisperwind, der Wisperwind,
den kennt bis Oestrich jedes Kind;
des Morgens früh von vier bis zehn,
da spürt man allermeist sein Wehn!
Stromauf aus Wald und Wiesengrund
haucht ihn der Wisper kühler Mund.“

Die arabischen Geographen kennen im Meere Thalwinde, die an der Mündung der Flüsse wehen: ein ThalWind ist der Wisperwind, der durch die zwischen der Temperatur des engen Wisperthales und der des breiten Rheingaus von selbst sich machende Ausgleichung alle Tage neu entsteht.

mann): aus Lüntzel Hildesheim 355 360 vom Jahre 1022 Alabure für Oelper, und aus Dronkes traditiones Fuldenses 41, 4. 23 Suilbore für Schwülper. Zu Müllenhoffs Sammlungen füge man die westfälische Ennepe, von der ein Goettinger Mathematiker († 24. 3. 1885) Enneper hieß. Halte man nicht etwa Vispure für eine dem Lautstande des Jahres 1586 nicht entsprechende Form. Das *e* in dem Vispure der Akten ist das von den SüdItalienern, wann sie Lateinisch sprechen, an jeden EndConsonanten angehängte: ich hörte einst consiliumme čepitte omnesse professoresse convocare, und Forumme ist in Rom sogar beim Volke alltäglich. So bleibt Vispur, was dem im Jahre 1586 zu erwartenden Wispẹr nahe genug steht. Vom Wisperwinde spricht man im ganzen Rheingaue: leicht konnte dem Bruno, als er zu Thale fuhr, die Wisper, von deren Winde er gehört haben mochte, vorgestellt, und er so den Namen des Flusses als den Namen desjenigen Ortes anzusehen verleitet werden, bei welchem sie in den Rhein fällt.

Natürlich wird Bruno nicht in dem Dorfe Wisper, sondern in dem an der Mündung der Wisper gelegenen Lorch sich aufgehalten haben, das er, in England lebend, ohne Englisch zu verstehn — er schildert das ja in der Cena selbst —, in Deutschland, ohne ein Wort Deutsch zu können, leicht nach der Wischebure = Wisper genannt haben kann, deren „Wisperwind" ihm besser gefallen haben mag als die Stadt Lorch, und deren Namen ihn unbedenklicher dünken mußte als „Lorche" oder „Loriche".

Ich vermuthe, daß den Professoren der Geschichte der Philosophie zwischen Rüdesheim und Aßmannshausen vorzunehmende Nachforschungen behaglicher vorkommen werden als das Studium der Werke, namentlich der italienisch geschriebenen Werke, Brunos: so wollte ich rathen, zu Ehren des Nolaners einmal in Lorch Aufenthalt zu nehmen, und dort nach „Reliquien" des Ahnherren der jetzt geltenden Weltanschauung zu suchen.

3.

Sûra.

Der Stamm Quraiš liebte nicht, in der Mitte der Wörter den Consonanten Alif zu hören: ThNoeldeke, Geschichte des Qorans, an den in meiner „Uebersicht" 115r angeführten Stellen. Folglich beweist ein von den Quraiš gebrauchtes سورة nicht unbedingt, daß dies سورة zu سار gehört.

Die in Spanien angesiedelten Araber sprachen, wie die im zwölften Jahrhunderte angefertigte lateinische Uebersetzung des

Koran durch ihr Azoara, wie ausdrücklich arabische Schriftsteller bei EWLane bezeugen, über dem و von سورة ein ء, d. h. sie leiteten سورة von سٶر* = שְׁאֵר* ab.

Da שׁוּר ܫܘܪ *Mauer* und سور *Mauer* die übliche Verschiebung der Laute س ܫ zeigen, ist سور nicht aus dem Aramäischen entlehnt: es ist dies um so gewisser nicht, als die Araber, wann sie ܫܘܪܐ ܙܥܘܪ[1] [BA 2633] entnehmen, باشورة mit ش sagen. Herr SFränkel theilt die letztere, von seinem Lehrer ThNoeldeke entdeckte Thatsache 238 mit, und meint gleichwohl, سور *Mauer* für ein aus dem Aramäischen stammendes Fremdwort halten zu dürfen.

سار ist nicht ein ܫܪ, sondern ܫܘܪ *springt*, dessen Weiterbildung ܐܫܬܘܪܒ GHoffmann GGA 1871 1225 ff. erläutert hat. ܫܘܪ = سوار: ein سار *ist hoch* kennt nur Herr SFränkel, kein Araber. Für Anfänger erwähne ich, daß سور *Gastmahl* Ġawâlîqî 86 6 Vullers 2 346¹, سوار *Armband* (Plural اسورة) = دستوار (so Lane: Vullers 1 875¹), اسوار *Ritter* den Arabern durch die Arsaciden oder Sâsâniden aus Erân zugekommen sind. Herr Noeldeke, Geschichte des Qorans 24ʳ, gibt dem سورة, das er zu سور stellt, die Bedeutung *Stufe*: ich bezweifele, daß ein vernünftiger Mensch die Stufen einer Treppe *Sprung* genannt haben werde, da wenigstens bei uns Stufen und Treppen gelegt werden, um das Springen und Klettern zu ersparen. سٶر = שְׁאֵר liefert — die و haben alle ء — سؤر und سؤرة *Neige* im Becher, *Rest* der Jugendkraft, von Jagdfalken *nicht aufgefressenes* Futter. Der Name سورة *Kapitel* dürfte zu שְׁאֵר kaum gehören.

Wie aber, wenn سورة ein Lehnwort wäre?

Dann dürfte es im Hebräischen nur mit שׂ ס, im Syrischen nur mit ܣ anlauten: wenigstens wäre das die Regel.

Durch diese Erwägung allein ist der oft nachgesprochene Einfall des Herrn Noeldeke widerlegt (Geschichte des Qorans 24), سورة sei

> שׁוּרָה, d. h. eigentlich eine Reihe von Steinen in der Mauer, dann eine Linie in Büchern und Briefen; so konnten daher leicht die einzelnen Abschnitte des Qorâns genannt werden.

Wo ich von „leicht“ nicht reden würde: „a linea“ gibt es bei Gesetzentwürfen im deutschen Reichstage, kaum im Koran.

Auch wäre „Reihe“ für Kapitel doch höchstens dann denkbar, wann der Verfasser von vorne herein die Absicht hatte, ein aus vielen „Reihen“ bestehendes Buch zu schreiben. Ich bezweifele,

---

1) Nicht *kleine Mauer*, wie Herr Noeldeke übersetzt, sondern חֵל Isa 26 1 = فصيل *a wall of enclosure having little height, before, or in front of, a fortress.*

daß diese Absicht bei Muḥammad bestanden hat, als er seine Offenbarungen von sich gab. Dieser „große" Mann lebte wie wenige von der Hand in den Mund.

Sodann: woher stammt „שׁוּרָה *Reihe von Steinen in der Mauer*"? Aus dem ATe nicht: man befrage nur die Staatsräthe. Es stammt aus dem 1639 erschienenen Lexicon chaldaicum IohBuxtorfs 2354: freilich „*von Steinen in der Mauer*" ist eine aus unbekanntem Beutel, vermuthlich in Folge einer Combination von „שׁוּרָה" *Reihe* mit שׁוּר *Mauer* in die Erscheinung getretene Zuthat des Herrn Noeldeke.

Allerdings ist سورة hebräisch, und allerdings ist سورة das von Buxtorf 2354 besprochene Wort: nur muß dies Wort שֹׂרָה, wenn man will, שׂוֹרָה, mit שׂ sinistrum, geschrieben werden. Nur dies kann als „Lehnwort" سورة (mit س) lauten.

Und dies שֹׂרָה — nicht aber שׁוּרָה — findet sich bei Isaias 28_{25}. Dies שֹׂרָה hat (nach wem?) David Qamḥî mit מְשׂוּרָה[1]) in Verbindung gebracht. שׂרַת הַדִּין (bei Buxtorf) sind die lineae quas transsilire impune non possumus, wenn man will, die normae et regulae: اشار [wohlverstanden richtig mit ش] er zog solche Linien, wies einer Handlung die Richtung: مشير Feldmarschall.

Herr Noeldeke behauptet 24ʳ, die Bedeutung *Stufe* sei dem Worte سورة „durch mehre[so] Belegstellen aus alten Dichtern gesichert". Wenn er diese Stellen nur angeführt hätte. Ich kenne Nâbiġas Vers 5_7 D = 10_7 A, und was Muḥibbaldîn شرح شواهد الكشاف 109_{20} ff. zu Zamakšarî 1 51_{27} [Calc.] beibringt: bei Nâbiġa ist سورة في المجد ebenso gewis nur eine Phrase, wie das gleich darauf folgende ليس غرابها بمطار eine Phrase ist. Bei Muḥammad ist سورة nicht mehr. Will man es übersetzen, so schreibe man *κανών*.

Ob ج der Spanier etwas Anderes sollte als die Aussprache sórat sichern? שֹׂרָה stimmt zu sórat. Es wäre in der Ordnung, daß die am nördlichsten, den Juden am nächsten, wohnenden Araber, welche nachmals Spanien semitisierten, eine richtigere Aussprache des Fremdwortes hätten, als die weit ab vom Jordan ihr Wesen treibenden Quraiš.

Arabisch ist שֹׂרָה شارة = صورة oder هيئة.

---

1) Paral. α 23_{29} Ezech. $4_{11\ 16}$ Levit. 19_{35}, und bei Aquila Isa. 9_5 = *mensura*, für מִשְׂרָה: meine Semitica 1 16. Daß, obwohl Herr ENestle in der theologischen Literaturzeitung 1878_{250} auf dies מְשׂוּרָה Aquilas aufmerksam gemacht hat, Herr Vollers ZAT 4 10 und Herr Ryssel ebenda 5 126 wie „Micha" 123 von demselben keine Notiz nehmen, befremdet nicht. 𝔊 Mich. 7_4 מְשׂוּרָה κανών?

4.

Kastanie und Oelbaum.

Des Herrn Alphonse de Candolle Buch über den »Ursprung« der »Cultur«pflanzen, dessen von Herrn EGoeze besorgte Uebersetzung mir vorliegt, scheint bei unseren Botanikern sich eines guten Rufes zu erfreuen: wie denn die Arbeit eines funfzehnfachen Akademikers eines solchen sicher sein darf.

Der Philologe, der genau wissen, d. h., der die Beweise für eine Behauptung klar überschauen will, würde anders arbeiten als die Herren VHehn und AdeCandolle gearbeitet haben.

Der Philologe würde ein Buch über den »Ursprung« der »Cultur«pflanzen mit einer sorgsam durchgeprüften Liste aller der Zeugnisse anheben, durch welche die Wanderung einer — aus Gottes Hand entstandenen — Pflanze ausdrücklich in Raum und Zeit festgelegt wird. Er würde an diese Liste eine mit Hülfe eines Geographen, eines Kenners der Handelsgeschichte und eines Botanikers, vielleicht eines Palaeontologen, gearbeitete Kritik derselben anschließen, und nur über den in dieser Liste nicht auftretenden Rest der Pflanzen sich Vermuthungen erlauben.

Herr VHehn[4] 318 ff. hat — aus dem nicht genannten Thesaurus HEstiennes abgeschriebene — Stellen zusammengetragen, in denen von paphlagonischen *Διὸς βάλανοι*, von Sardiani balani, von *σινωπικὰ κάρυα*, von ponticae nuces die Rede ist, ohne entscheiden zu wollen, ob in den einzelnen Fällen von Haselnüssen, von Kastanien oder noch anderen Früchten gehandelt wird.

Er hat nicht erwogen, daß das von ihm 496 richtig nach Zeuß [der die Thatsache nicht zuerst gefunden hat] mit unserem Hasel zusammengestellte *κόρυλος* [für *κόσυλος*] die Hasel als in Griechenland alt-heimisch erweist, wie denn unser Gottesglaube, und ich vermuthe auch derjenige der Kelten, durch die der Hasel sichere Heiligkeit meines Erachtens ausschließt, daß die Hasel erst „in verhältnismäßig später Zeit aus dem mittleren KleinAsien, besonders aber aus den Pontusgegenden weiter gewandert“ sei: ich meine, jene Stellen bei Estienne reden von Castanea vesca.

Er hat — wie er unverantwortlicher Weise pflegt — sein Buch nicht weiter geführt, wenn er 321 schreibt:

> Nicht in den semitischen, wohl aber, wie wir glauben, in iranischen Idiomen, besonders im AltArmenischen, würden Kenner dieser Sprachen vielleicht den Ursprung und eine Erklärung des Namens Kastanie entdecken können.

Herr VHehn ist, wie sich alsbald zeigen wird, schon im Jahre 1877 bedient worden: meine armenischen Studien gaben im § 1115 alles Nöthige.

Herr AdeCandolle citiert 446 Plinius 19, 23 [schreibe **15** 23 = 92], nimmt aber von dem erträglich deutlichen provenere primum des Römischen Polyhistors keine Notiz, und behauptet „es läßt sich aus dem Original [das er mithin gelesen zu haben erklärt] dieses Autors nicht ersehen, ob die Römer den Maronenbaum besaßen“. Ich denke, Andere werden ersehen was Herr AdeCandolle zu ersehen nicht vermocht hat. Denn Plinius schreibt:

> Proxuma corpori membrana et in his et in nucibus saporem, ni detrahatur, infestat.

Man wird unten von Mattioli lernen können, daß die RossKastanie diese membrana nicht hat. Der Herr AdeCandolle meint trotz dieses Satzes des — von ihm, allerdings falsch, citierten — Plinius zweifeln zu dürfen, ob die Römer die Maronen besaßen.

> torrere has in cibis gratius. moluntur etiam et praestant ieiunio feminarum quandam imaginem panis .... Tarentinae faciles, nec operosae cibo .... populares nigrae quae coctivae vocantur. patria laudatissimis Tarentum, et in Campania Neapolis. ceterae suum pabulo gignuntur.

PAMattioli, der erste, der die RossKastanie kennt, schreibt am unten angeführten Orte, von der Castanea vesca handelnd (vgl. VCordus zu Dioscorides [1561] 22 § 146):

> In Welschland in Hetruria sindt der Kestenbäumen zwey geschlecht, nemlich der zäme vnd wilde. Die Zämen sindt widerumb zweyerley. Der eine bringt grosse Castanien, der ander kleine. Die Zämen Castanien, so sie ein wenig gelegen haben, lassen sie sich abschelen, haben einen lieblichern vnd süssern geschmack. Aber die wilden lassen sich nicht schelen, dann man siede sie zuuor, gehören mehr für die Sewe, dann für die menschen.

Ich wiederhole ausgeführter, was ich 1877 im § 1115 meiner armenischen Studien kurz gesagt habe, freilich ohne zu erwarten, daß die Herren VHehn und AdeCandolle es je benutzen werden.

Auf Armenisch heißt die Kastanie kask, und der Kastanienbaum kaskeni.

Ciakciak 754[3] կասկ orzo mondato, castagna. Daß orzo mondato hordeum decorticatum bedeutet, beliebe man von der Crusca zu lernen, die als Crusca über dergleichen Dinge Bescheid wissen mußte. Ich vermuthe, daß orge mondé = orzo mondato und avoine mondée = avena mondata unsere Gerstengraupen und unsere Hafergrütze sind. Das armenisch geschriebene armenische Wörterbuch des Jahres 1837 setzt **1** 1059[1] statt orzo mondato zu *կասկ* die Worte *պարի կեղեւալ* [= *κριθὴ λεπισθεῖσα*, armenische Studien § 1139] *մաքուր* [ebenda § 1461] *և եփեալն պարուղ և ցորենոյ որպէս հերիսայ.*

Hier muß ich zuerst *հերիսայ* erklären, das in den mir zugänglichen Wörterbüchern fehlt. Es ist עֲרִיסָה, ein längst mit עַרְסָן des Talmûᴅ und ܐܪܘܣܐ der Syrer zusammengehaltenes Wort. עֲרִיסָה können nur die durch die Assyrer nach „Medien“ in das Elend geschleppten Israeliten des NordReichs nach Armenien gebracht haben: ܐܪܘܣܐ und עַרְסָן, obwohl derselben Wurzel wie עֲרִיסָה entsprossen, zeigen ganz andere Bildung, sodaß aus ihnen *հերիսայ* nicht geflossen sein kann. Das *հ* des herisa' = ע, das *ս* = *σ* = ס [das also im Reiche Ioseph vor 725 nicht wie kš oder š klang], *ե*, für *i* stehend, nach meiner Uebersicht 113_{17} zu erklären: die Wurzel ein friša. Also ein Mus, ein Gemüse in dem alten Sinne des Wortes (noch bei Hebel Hafermus), wäre עֲרִיסָה = *հերիսայ*. Und kask nicht bloß Kastanie, sondern auch geschrotene reine Gerste, und ein Geköch [dies fränkische Wort lernte ich vor 45 Jahren von Friedrich Rückert] von Gerste und Weizen gleich einem Muse.

Nun lehrt Elias aus Nisibis in meinen Praetermissa 35_{88} الكشك ܐܪܘܣܐ: so schreibe ich aus PSmith 395: ich selbst habe, an خشكار[1]) Semitica **1** 41 Symmicta **2** 110 denkend, obwohl ich richtig EWLane MCME[5] **2** 223[r] [= MI nights (1883) **2** 424] dazu citierte, الخشك gedruckt.

كشك wird in Persien kašk, von den das Wort entlehnenden Arabern kišk gesprochen, und von EWLane aaO. so beschrieben:

> Kishk (as the word is commonly pronounced, but properly keshk) is prepared from wheat, first moistened, then dried, trodden in a vessel to separate the husks, and coarsely ground with a hand-mill: the meal is mixed with milk, and about six hours afterwards is spooned out upon a little straw or bran, and then left for two or three days to dry. When required for use it is either soaked or pounded, and put into a sieve, over a vessel; and then boiling water is poured on it. What remains in the sieve is thrown away: what passes through is generally poured into a saucepan

1) Ich habe in den Beiträgen 52_{12}, in den armenischen Studien § 1830, in den Mittheilungen **1** 146 ff. die Πατισχορεῖς Strabos, den Padašḳwar-gar der Perser, den Patižahaṛ der Armenier besprochen. Die Landschaft erscheint als Patuš'arra in einem Assyrischen Texte in des Herrn FHommel Geschichte Babyloniens und Assyriens 722, ohne daß Herr Hommel das Land erkannt hätte. Pêš-ḳwar ist das vor Ḳwar Χοαρήνη liegende Gebiet.

of boiled meat or fowl, over the fire. Some leaves of white beet, fried in butter, are usually added to each plate of it.

Man kann jetzt auch RDozys Artikel كشك im Supplément **2** 472 nachlesen.

Es wäre nun sehr nett, wenn einer der Wiener Mkiθaristen, so lange in Wien deutsche Hausfrauen noch geduldet werden, erkunden wollte, was der oesterreichische Topfen ist: mich däucht, ein dem կասկ كشك ganz ähnliches Ding, und im Topfenknödel höchst wohlschmeckend.

Daß կասկ *orzo mondato* mit كشك identisch ist, dürfte einleuchten. Ich will zum Ueberflusse noch anführen, daß կասկաջուր wie كشكاب „Gerstenwasser" bedeutet, einen bei den alten Aerzten sehr beliebten Trank. Aber wie kommt կասկ dazu, außer orzo mondato auch castagna zu bedeuten? Mag Iohannes Leunis[3] **2** § 606 Seite 511 für mich antworten:

> Die Früchte [der Edelkastanie] sind in SüdEuropa für die ärmeren Landbewohner ein wichtiges Nahrungsmittel. Sie werden etwas geröstet, damit sie nicht verderben, dann vor dem Verspeisen in Wasser aufgequellt, mit Salzwasser gekocht, und zu einem Mehlbrei (Châtigna) zubereitet.

Oder der deutsche Mattioli $73^2 = 74^2$:

> Auff den gebirgen, da es am getreide mangelt, neeren sich die einwoner von den Castanien, denn sie braten sie, vnd essens. Auch machen sie mehl vnnd brot darauß, derhalben da uil Castanien wachsen, darff man sich keiner hungerßnot besorgen.

Ich merke noch an, daß πτισάνη Geopon. ιξ 15_3 von meinem Syrer ιγ 13 = 103_{22} durch ܦܬܘܩܐ übersetzt wird, und bitte, man wolle sich aus Galens Buche περὶ πτι[σ]σάνης bei Kühn **6** 816 ff., in der Baseler Ausgabe **2** 489 ff., unterrichten, was πτισάνη = עֲרִיסָה ist. Die Staatsräthe werden das natürlich nicht thun. Auch HEstienne bringt viel Lehrreiches über die πτισάνη bei.

Nun gibt es ein Zeitwort կասուլ ἀλοᾶν — Corinth. α 9_{10} Isa. 41_{15} Ierem. 5_{17} Michaeas 4_{13} Paral. α 21 $_{20}$ (Concordanzgelahrtheit) —, das ich im Januar 1854 in meiner Schrift »zur Urgeschichte der Armenier« 522, in welcher nach Herrn AWeber allerdings das Neue nicht gut, und das Gute nicht neu war, mit dem awestischen קאס und mit պակաս [armenische Studien § 1114 1791] in Verbindung gebracht habe: kaçyâo später mit *κακίων*.

Von diesem կասուլ ἀλοᾶν möchte ich կասկ abgeleitet glauben, weil die Kastanie wie in der Provence zur châtigna, so in Armenien zu einem Muse zerrieben genossen wurde.

In کشک ein š, in կասկ ein s: ersteres aus einem hier des Raumes wegen nicht zu erörternden Grunde.

Ich habe die mir — wie Alles was ich auf dem Gebiete der armenischen Philologie gearbeitet und gefunden habe — plaudente plebe auf die ehrloseste Weise gestohlene Entdeckung gemacht (Abhandlungen [1866] 298), daß wir im Armenischen eine zwei- bis dreifache Garnitur von Vokabeln finden, haikische, arsacidische, sâsânidische. *կասկ Kastanie* ist alt, denn es gibt noch einen heimisch gewordenen neuPersischen Ausdruck für Kastanie im Armenischen, den das Wörterbuch von 1837 2 457[3] als շագանակ oder շաղգանակ oder շաղղանակ aufführt, der in der unter dem Namen des Moses Ḳorenaʒi umlaufenden Geographie neben ղառլիկ = زرنيق [armenische Studien § 757] als Erzeugnis der Provinz Koṛčaꭓ — Werke (Venedig 1843) 608 $_{16}$, in Patkanows армянская географія 19 $_{2}$ — als շահնդակ erscheint: im Venediger Drucke am Rande die Varianten շագանակ շաղղանակ աշահդանակ, letzteres mit der Glosse գանգար փշոյ սերմն *Same des Dornes* کنگر: ich darf mich hier weder auf diese Glosse noch auf šâhdâna einlassen, das unten 315 wiederkehren wird. Patkanow schreibt شهدانك mit einem ? daneben. Ganz sicher das Persische شاه دانه *Königskern*, d. h. eine königliche Frucht, die Königin der Früchte. Den Namen erläutere ich aus VHehn[4] 322 323 (man lese auch oben das aus Mattioli Ausgezogene nach):

> So sehr sind die Früchte der Kastanien zur allgemeinen Volksnahrung geworden, daß man in Frankreich die Trägheit der Corsen ihren Kastanien zugeschrieben, und deshalb den Untergang dieser Bäume gewünscht hat.
>
> Auch im rauhen italienischen Apennin lebt der Gebirgsbewohner, da wo der Ackerbau unmöglich oder unergiebig[so] geworden ist, einen großen Theil des Jahres von Kastanien und Kastanienmehl [կասկ] [,] und geräth in große Noth, wenn einmal in einem ungünstigen Jahr[e] die Ernte spärlich ausfällt.

Wie nun von խնձոր *Apfel* = سیب խնձորենի *Apfelbaum*, von արմաւ = خرما *Dattel* արմաւենի *Dattelpalme*, von նուշ *Mandel* [انوش *süß*] նշենի *Mandelbaum*, so stammt von կասկ *Kastanie* կասկենի *Kästenbaum*. Die Endung ենի habe ich in den Beiträgen 15 $_{10}$ ff. awestischem aênya gleich gesetzt: daß sie griechischem *ανεος* entspricht, folgere ich mit der Bestimmtheit, welche die Verschiedenheit von अजा, awestischem אזי und այծ *αἴξ* zuläßt, aus dem neben *αἰγανέη* stehenden այծենի *αἴγειος* Hebr. 11 $_{37}$ (vgl. խոզենի *schweinisch*, առիւծենի *löwenartig* usw.), ohne *αἰγανέη* für etwas Anderes als den Bumarang zu halten: *ᾄττω* muß den Stamm *α-ιγ* haben: die Awestier brauchen इज्* ohne अ.

կաղկնի und καστανέα entsprechen sich nach dem eben Gesagten vollständig, wenn man das τ aus einer Dissimilation des anderen κ erklärt.

Ich gehe nun dazu über, auseinanderzusetzen, was die von mir gefundene Gleichung „armenisches κασκενι = griechischem καστανέα“ für die Geschichte der Castanea vesca wie für die Geschichte der Sprache erkennen lehrt.

Eugène Burnouf hat in seinem Commentaire sur le Yaçna die Lautgesetze der Sprache behandelt, welche wir jetzt in Ermangelung eines besseren Namens die awestische nennen. Ich habe dann im Mai 1851 den Nachweis geführt, daß es eine Reihe von Idiomen gibt, welche die charakteristischen Eigenthümlichkeiten des Awestischen mit diesem theilen: ich nannte diese Idiome damals arische, da die sie sprechenden Völker sich selbst als Arier ansehen. Die »Sachverständigen« des Jahres 1851 waren in ihrer eigenen Terminologie befangen, nach welcher Arisch dem jetzt umlaufenden Ausdrucke Indogermanisch oder Indoceltisch entsprach: die Herren Friedrich Spiegel, ChrLassen, AWeber haben gar keine Ahnung davon gehabt, daß ich in meinen Arica den Radius angegeben, der einen eigenen Kreis geschlagen. Man hat später diese von *mir* Arisch geheißenen Idiome iranische oder besser eranische genannt: „Erân“ ist ein Genetiv Pluralis, welcher älterem Airyanąm = τῶν Ἀρίων entspricht: Érânšahr = Reich [kšatra = кšaтra] der Arier, Érânšâh = König der Arier. Die jetzige Terminologie, soweit ich dieselbe kenne, nennt Arier die gemeinschaftlichen Vorfahren der „Eranier“ und der vedischen Inder.

Zu den Eraniern zog ich — nicht aus Vermuthung, sondern darum, weil die von Burnouf nachgewiesenen charakteristischen Lautgesetze des Awestischen auch im Armenischen, Phrygischen und Lydischen gelten — die Armenier, die Phrygier und die Lyder. In Betreff der Lyder wird man meine gesammelten Abhandlungen 266 ff. nachzulesen haben.

Indisches çarad, das im Griechischen und Lateinischen mit einem k c q, im Germanischen mit einem h anlauten müßte, findet sich im Lydischen als σάρδις *Jahr*: so schon mein Heft zur Urgeschichte der Armenier, in dem „das Neue nicht gut, und das Gute nicht neu“ war: jetzt Mittheilungen 2 25.

Jedem armenischen σ — hier nicht auseinander zu setzende Ausnahmen abgerechnet — muß im Griechischen ein κ gegenüberstehn: denn jedes armenische σ vertritt ein indisches श = ç.

Armenisches κασκενι *Kästenbaum* hat mithin Einen Buchstaben, der im Griechischen καστανέα nur dann ebenfalls σ lauten kann, wann das Wort nicht urverwandt, sondern entlehnt ist. Vergleiche (die Gleichheitszeichen sind nicht streng zu nehmen):

indisch dṛç = δέρκ-εσθαι, armenisch tes-anel̩:
daçan = δέκα decem, armenisch tasn:
çrôṇi = κλόνι-ς clunis, armenisch sṛoün-ḳ:

Armenisches kaskeni und griechisches καστανέα, welche Wörter beide den Kästenbaum bezeichnen, sind mithin nicht urverwandt, sondern das griechische καστανέα ist entlehnt.

Es ist in verhältnismäßig alter Zeit entlehnt, da die Endung ανεα in καστανέα älter als das jetzt, und zwar schon seit der Zeit der Bibelübersetzung (rund 431), im Armenischen umlaufende eni ist.

Ich habe das Glück gehabt, zweifelnd in den Arica 1851, sicher in dem genannten Hefte, in dem „das Gute nicht neu, und das Neue nicht gut war“, im Januar 1854 das lydische Κανδαύλης, dessen Sinn *würgend* uns durch Hipponax, also unanfechtbar, überliefert ist, als identisch mit dem Armenischen ḳeldaul̩ *würgend* zu erkennen, einem regelrechten, aber ausschließlich armenischen, Participe der alltäglichen Wurzel խեղդել = ḳeldel̩ *würgen*. Wie aus dem α von Κανδαύλης = ḳendaul̩ folgt, daß diejenigen, welche armenisches ε für ihre Phantasien vom „europäischen“ Charakter der Sprache Haiks verwenden[1]), irre gehn, so folgt aus dem σ des griechischen καστανέα = kaskeni, daß die Kastanie ein aus eranischer Heimath nach Hellas verpflanzter Baum ist. Κασταναία ist eine VolksEtymologie: wenn in Κάστανα viel Kästenbäume wachsen, so sind sie darum dort noch nicht ursprünglich. Plinius sagt ausdrücklich — ich weiß nicht, aus welcher Quelle er für sein funfzehntes Buch schöpfte —, daß die Kastanie von Sardes aus weiter gewandert sei. Da die Beschaffenheit der Vokabel καστανέα = կասկենի dem Plinius Recht gibt, wird an der Thatsache nicht zu zweifeln sein, daß die Castanea vesca aus dem eranischen Lydien nach Griechenland gekommen ist.

Ueber die Rosskastanie habe ich mich unterrichten können, weil ich in der Hoffnung, die arabische Uebersetzung des Dioscorides noch einmal herauszugeben, die Schriften des KGesner, des VCordus und des PAMatthiolus gelesen habe, und zum Theile sogar besitze. Aber schon 1879 hat mir Herr ThvHeldreich (Athen) das Wesentlichste von dem was ich hier zu sagen habe, vorweggenom-

1) Näheres gesammelte Abhandlungen 275_{21} 300_{32}, NeuGriechisches aus Klein-Asien 5r, armenische Studien § 986. Κυνάγχα ist nicht „Hundewürger“, sondern συνάγχα. Wegen des μηονιστί des Hipponax hieß mich KUsener unter dem 12 December 1877 das rheinische Museum **23** 336 nachlesen.

men. Ich bin durch dieses Schriftstellers in MDeffners Archive für mittel- und neuGriechische Philologie 1880 **1** 89 ff. gedruckten Aufsatz — namentlich durch 96r 97r — auf die Verhandlungen des botanischen Vereins der Provinz Brandenburg **21** (vom Jahre 1879) 139 ff. aufmerksam geworden, in denen Herr von Heldreich nachweist, daß Matthiolus[1]) in der 1565 in Venedig erschienenen Ausgabe des Commentars zum Dioscorides 211 die castanea equina, wie sie in Constantinopel heiße, abbildet: den Zweig habe er von Guilelmus Quaccelbenus Flander medicus insignis erhalten: und zwar hatte Quackelbeen die erste Nachricht von der at-kastanési[2]) schon im Juli 1557 an Mattioli gelangen lassen.

Aber bereits 1563 bietet, was Herr von Heldreich nicht wußte, die höchst seltene deutsche Uebersetzung des newen Kreüterbuchs des Matthiolus, welche mit Georg Melantrich von Auentin zusammen Felix Valgrisi, der venediger Verleger der Schriften jenes großen Arztes und Botanikers, durch Georg Handsch zu Prag veranstalten hieß — ich besitze das seltene Werk selbst — 74c Folgendes:

> Es ist noch ein ander frembd geschlecht der Castanien, welchs ich allhie wegen seyner schönen gestalt hab lassen abmalen.
>
> Diesen Zweig sampt der Frucht hat mir von Constantinopel gesendet der hochberümpte Augerius[3]), des Christlichen Keysers Legat daselbst. Es ist ein langer baum, er tregt bletter, wie der Creutzbaum, die haben sechs spalten biß zum stil, der ist lang vnnd dünn. Die stachlichen schelffen vergleichen sich in der grösse mit den vnsern, aber sie seind gelblicht, in einer jedern ligt ein Castanien, dicker vnd runder dann die vnsere. Die rinde an dieser Castanien ist schwartzlecht, ausgenommen an dem vorderteyl, da sie an den stachlichen schelffen hafftet, ist sie weislecht, vnd hat ein zeichen eines hertzen. Vnter dieser schalen ist kein ander heutle, wie in vnserer das rote runtzlechte. Sie schmecken fast wie die vnsern, sindt doch süsser, vnd nicht so lieblich

---

1) Ernst Meyer Geschichte der Botanik **4** 366 ff., woselbst 372 auch der Beziehungen Mattiolis zu Wilhelm Quakelbeen so gedacht wird. Gut, daß die Liebedienerei im sechszehnten Jahrhunderte noch nicht ganz so groß war wie heut zu Tage: sonst würden wir hinter der Berliner Universität und vor den Tuilerien unter Quackelbeenien lustwandeln.

2) at = ձթօ *Pferd*, meine armenischen Studien Seite 111r.

3) Augerius Ghislain van Busbeck [= Busbecqius] aus Commines in der Herrschaft Ypern, 1522—1592: allgemeine deutsche Biographie **3** 633 ff.

zu essen. Die Türken nennens roßcastanien[so], darumb daß sie den keichenden rossen sehr behulfflich sindt.

Charles de l'Escluse, berühmt unter dem Namen Carolus Clusius (1526—1609), ein mir höchst sympathischer Gelehrter, berichtet (bei ThvHeldreich, Verhandlungen **21** 140), er habe die 1576 in Wien gesäte Rosskastanie 1588 als einen Stamm von der Dicke eines Mannesschenkels und zwei „orgyiae" oder mehr hoch verlassen. Das ist die erste Rosskastanie außerhalb der HaemusHalbinsel.

Theodor Fontane läßt 303 seine Grete Minde bald nach 1600 unter einem Paar alten Kastanien rasten: er hat nicht gewußt, daß es damals um Tangermünde herum alte Rosskastanien — solche meint er — nicht geben konnte. Er wird, auch wenn er dies Blatt lesen sollte, die Kastanien dort stehn lassen, denn er braucht sie für seine Erzählung, wie ich an einer Stelle meiner Strandlieder sie gebraucht habe.

Wende ich mich nun zu der Erörterung über die Heimath des Oelbaumes, so liegt die Sache für die Herren VHehn und AdeCandolle noch ungünstiger als sie bei der so eben beantworteten Frage lag. Die Zunft leidet nicht, daß meine Arbeiten bekannt werden: das soll zur Entschuldigung jener beiden Gelehrten von mir selbst geltend gemacht werden.

Für mich fängt die Untersuchung damit an, daß ich ausdrückliche Zeugnisse über den Oelbaum handelnder alter Schriftsteller zu finden versuche.

Herodot redet ε 82 von der Zeit, in welcher die Feindschaft zwischen Athen und Aegina ihren Anfang nahm. *Λέγεται ὡς ἐλαῖαι ἦσαν ἄλλοθι γῆς οὐδαμοῦ κατ' ἐκεῖνον τὸν χρόνον ἢ ἐν Ἀθήνῃσι.*

Damit stimmt nicht ganz Plinius NG ιε 1: Hesiodus in primis cultum agrorum docendam arbitratus vitam, negavit oleae satorem fructum ex ea percepisse quemquam: tam tarda tunc res erat. Die griechischen Worte Hesiods sind uns nicht erhalten: es steht frei zu glauben, daß Plinius das Citat irgendwo abgeschrieben, nicht selbst es aus einem ihm vorliegenden Werke Hesiods eingetragen hat. Stammte die Stelle des Plinius aus Theophrast, dem der römische Beamte so viel verdankt, so wäre die Nachricht ernst zu nehmen. Immerhin folgt aus dem Satze, daß auch außerhalb Atticas Oelbäume lebten, nur freilich können sie nicht verbreitet gewesen sein: sie zu bauen, lohnte nicht. Homer nennt bekanntlich Oel und Oelbaum, ohne Näheres zu sagen.

Plinius aaO.: Oleam .... Fenestella omnino non fuisse in Italia Hispaniaque aut Africa Tarquinio Prisco regnante, ab annis populi Romani CLXXIII, quae nunc pervenit trans Alpis quoque et in Gallias Hispaniasque medias. Fenestella starb unter Tiberius: seine Gelehrsamkeit gilt für zuverlässig.

Hier mag des Herrn AdeCandolle 356 Bericht folgen:

> Kein Oelblatt ist bis jetzt in dem Tuffstein des südlichen Frankreich, Toscanas und Siciliens gefunden worden, wo man doch den Lorbeer, die Myrte und andere noch jetzt dort vorhandene Sträucher nachgewiesen hat. Bis der Gegenbeweis geliefert wird, ist dies ein Anzeichen späterer Naturalisation.

Es ist Thatsache, daß זַיִת ϫⲱⲓⲧ ձէթ *Olivenoel*[1]) bedeuten. Aus der Thatsache, daß das Olivenöl bei den Hebräern, den Aegyptern, den Armeniern augenscheinlich mit demselben Namen genannt wird, muß die Sprachwissenschaft etwas zu lernen wissen, um so mehr so, als (um von den Vokalen zu schweigen) der Anlaut der Vokabeln nicht identisch ist.

זַיִת bedeutet allerdings nicht bloß *Oel*, sondern auch *Oelbaum.* Daß *Oel* der ursprüngliche Sinn von זַיִת ist, schließe ich erstens aus der in meiner „Uebersicht“ 129 ₁₉ ff. besprochenen Parallele von תִּירֹשׁ יִצְהָר דָּגָן *Most AusbruchOel Korn* und יַיִן שֶׁמֶן לֶחֶם *Wein PressOel Brot*: ich schließe es zweitens daraus, daß die Araber زيت *Oel* und زيتون *Oelbaum* unterscheiden. Die Armenier brauchen ձէթ fast nur für *Oel*: der Oelbaum heißt ihnen meistentheils ձիթենի.

Die Aegyptologie hat erst vor wenigen Jahren angefangen. eine Wissenschaft zu werden: man muß mithin sehr vorsichtig sein.

Wie AErman, Aegypten und aegyptisches Leben im Altertum[e] 316, erzählt, haben im alten Aegypten Salben so sehr zu den Bedürfnissen des täglichen Lebens gehört, daß die unbezahlten, hungernden Arbeiter in Einem Athem darüber klagen, daß man ihnen nichts zu essen, und daß man ihnen keine Salbe gebe. Das wird im Klima gelegen haben: der Islâm hat die Salben vermuthlich dadurch unnöthig gemacht, daß er seinen Bekennern Bäder schenkte. „Wenn auch diese Arbeiter“ fährt AErman fort „sich gewis mit einheimischem Fette begnügen müssen, so fordern doch schon die

---

1) ձէթ (wie זית) bedeutet ab und zu auch den *Oelbaum*, der auf Armenisch eigentlich ձիթենի heißt. Wie sich ձէթ und das unten zu besprechende իւղ unterscheiden, müssen uns geborene Armenier lehren: ich habe den Unterschied nicht in den Kreis meiner Beobachtungen gezogen. Aegyptisch ϫⲓⲧ in ⲃⲱ ⲛ̄ϫⲓⲧ ⲛⲟⲩⲧⲙ̄ *zahmer Oelbaum*, ⲃⲱ ⲛ̄ϫⲓⲧ ϩⲟⲟⲩⲧ *wilder Oelbaum*, Peyron 397[1].

Soldaten »Oel vom Hafen«, importierte Waare". Diese Thatsache macht wahrscheinlich, daß Olivenoel in Aegypten nicht gewonnen wurde, weiter, daß ϫⲱⲓⲧ ϫⲟⲉⲓⲧ in Aegypten ein Fremdwort ist. Allerdings ergibt sich, wie mir GSteindorff brieflich mitgetheilt hat, aus dem großen Papyrus Harris (ich befolge hier Steindorffs Umschreibung, ohne sie zu billigen), daß es mit d̲dt bestellte Ländereien gibt, an denen Gärtner und viele Leute um Oel (ⲛⲉϩ) zu fabricieren angestellt sind, daß die Frucht d̲dt mit Scheffeln gemessen wird. Aber das beweist so wenig etwas gegen das oben Gesagte, wie die Wollankschen Weinberge und die Weingärten auf dem Kreuzberge bei Berlin erhärten, daß vitis vinifera in der Mark Brandenburg heimisch ist.

Bekanntlich hat RLepsius 1855 in deutscher, 1863 in englischer Zunge (Standard Alphabet) sich über ein GeneralAlphabet vernehmen lassen, und obwohl schon dieses Gelehrten erster Versuch auf dem Gebiete der Alphabetik (AWeber in meinen Mittheilungen **2** 42) ihn nicht als Alphabetiker, sondern als ABCSchützen erwiesen hatte, ist es gelungen, dieses Standard Alphabet zur Berühmtheit aufzuloben: vgl. meine Symmicta **2** 97 $_{28}$, meine Mittheilungen **1** 159—161 **2** 43 $_{10}$. Schon in des gefeierten Mannes erstem Versuche begegnet 51 Ot́i für das von den Engländern Odji geschriebene Wort: im StandardAlphabet 9 197 erfahren wir, daß t′ (t mit Accent daneben oder, in GardeTransscription, darüber) ty bedeutet. Ἐθελοθρησκεία, weiter nichts: wenn man das lieber hören will, ein „Werthurtheil".

HBrugsch, WB **4** 1671 [vom Jahre 1868], nennt das in der Hieroglyphik alltägliche Schlangenbild „von uns durch t′ umschrieben". Er hätte seinem Rivalen ruhig sein Eigenthum belassen sollen: mindestens gab die Annektierung desselben keine Veranlassung zu einem Majestätsplurale. Noch 1882 WB **7** 1380 ff. erscheint t′ als Umschreibung jenes Schlangenbildes.

Herr SLevy bietet zu Turin 1887 in seinem vocabolario geroglifico copto-ebraico [80] statt jenes Akutkranken t ein z.

In Wahrheit entspricht, was die Herren Brugsch und Levy auch wissen, die Schlange dem neuAegyptischen ϫ: die Form von ϫ ist (LStern, koptische Grammatik Seite 8 $_{3}$) aus dem von Brugsch **4** 1690 ff. behandelten Hieroglyphenzeichen entstanden. Ich habe 1852, Entsprechungen semitischer und aegyptischer Wörter vorlegend, mit dem Satze geschlossen

> möglicherweise gibt die Scheidung von k in K und G, von t in T und D Anlaß zu genauerer Bestimmung hieroglyphischer Zeichen:

ich möchte heute zu erwägen bitten, ob nicht wie *d* und *t*, *g* und *k*, die ja jetzt unterschieden werden können, auch ص ض ط ظ sich in der Hieroglyphenschrift verschieden spiegeln.

Da ich „immer etwas Apartes haben muß", schreibe ich die Hieroglyphe Schlange durch den ihr im NeuAegyptischen entsprechenden Buchstaben ϫ, also ǧ oder č für NeuAegyptisches (je nach dem Dialekte), nur č für AltAegyptisches. Dann wissen doch wenigstens die Völker der Zukunft, die Slaven, was sie vor sich haben: aus t′ d̲ kennt sich niemand aus, nicht einmal Herr AdeCandolle.

HBrugsch Pascha WB [1868] **4** 1672 ϫⲉ ϫⲉⲧ, demotisch čît *Oel* neben ϫⲉⲉⲓⲧ ϫⲟⲉⲓⲧ ϫⲱⲓⲧ זַיִת زيت.

Herr SLevy **5** 89[2] „zet" *Oel*: sonst wie HBrugsch Pascha.

KPiehl, dictionnaire du Papyrus Harris 112 (nur in Hieroglyphen), čdt (für die Hand gebe ich d, für den Berg t) *Olive*, wann mit dem Baume, aber *fruits de l'olive*, wann außer dem Baume auch mit den drei Kreisen determiniert.

Es fragt sich nun, ob זַיִת und ϫⲱⲓⲧ ein und dasselbe Wort sind.

Längst bekannt ist die Gleichung צֹעַן ϫⲁⲛⲏ صان Yâqût **3** 364 8. GSteindorff versichert mich brieflich, daß auch צֹר *Τύρος*, צִידֹן *Σιδών*, צמר *Σίμυρα*, צָרְפַת *Σάραπτα* als Anlaut die Schlange, also ץ, haben.

Daraus folgt, daß das Oel, falls sein Name ϫⲱⲓⲧ aus Palaestina nach Aegypten gekommen wäre, צית gelautet haben müßte: denn צר, צידן, צמר, צרפת sind sicher eher palaestinisch gewesen als aegyptisch, das צ in צֹעַן ϫⲁⲛⲏ spricht nicht für aegyptischen Ursprung des Namens: folglich ist ϫ Ausdruck für ץ, nicht ץ Ausdruck für ϫ.

Umgekehrt wird ϫ eines eingeführten Wortes in Palaestina ז. IgnRossi hat in den zu Rom 1808 erschienenen Etymologiae aegyptiacae 125 das nachmals auch in hieroglyphisch geschriebenen Texten aufgefundene ⲙⲟϫϩ ⲙⲟⲩϫϩ ⲙⲟϫϩ neben מֵזַח gestellt, das bei Isaias 23 10 *Deich* bedeutet, und durch den Zusammenhang für mein Empfinden als ein aegyptisches Wort gekennzeichnet ist.

Mithin würde das Wort ϫⲱⲓⲧ, falls es aus Aegypten nach Palaestina gewandert wäre, als זַיִת nicht befremden.

Die Botaniker müssen sagen, ob der Oelbaum in Aegypten spontan sein kann: nach den oben aus Ermans Buche angeführten Zeugnissen glaube ich als Philologe nicht, daß er dies ist: darum glaube ich auch nicht, daß ϫⲱⲓⲧ die Mutter von זַיִת sei.

1927 wird man wissen, was ich für die Erkenntnis des Armenischen gethan habe. Das armenische Wort für *Oel*, ձէթ = ʒηϑ, enthält einen spezifisch alt-armenischen Consonanten, das ձ, das formell aus dem die Quetschung von k, also č, vertretenden ϭ Aegyptens entlehnt, der Sache nach haik-êrânisches Aequivalent von ह = ह् = χ ist. Beweis: ձեռն *Hand* (Genetiv ձեռին, Ablativ ձեռանէ, also Stamm ʒer) = χείρ, Stamm χερ-: ձիւն *Schnee* (Genetiv ձեան) = χιών, Stamm χιον-: ձլել *ackern*, हल: ձմեռն *Winter* (Genetiv ձմեռան), हिम χειμών neben χειμερινός: ձօնի Mittheilungen 2 368 ff. zu हु, χόανον χοάνη = χώνη: ինձ = सिंह (die Vergleichung gelang FMüller) mit ընձու ունզի *Pardel, Löwe,* „Unze". ձ genügt zu dem Erweise, daß ձէթ ein in Armenien alt-heimisches Wort ist.

Ganz unmöglich wäre թ = ϑ = ת in einem alten Worte: und alt wird doch das Wort ձէթ auf alle Fälle sein, da Niemand annehmen wird, daß der Oelbaum erst nach dem Anfange der SeleucidenHerrschaft nach [Süd]Armenien gewandert sei: mein Heft zur Urgeschichte der Armenier 1012, gesammelte Abhandlungen 255, Agathangelus 141: da die beiden zuerst citierten Werke längst vergriffen sind, wird es sich empfehlen, den Agathangelus nachzulesen: man wird ihn ja irgendwoher geliehen bekommen können. ת ist τ: erst nach Seleucus tritt für die בגדכפת die Gewohnheit auf, sie zwischen Vokalen anders zu sprechen als nach einem Konsonanten. Ich erkläre das թ von ձէթ, wie ich in den armenischen Studien § 1757 das թ von ութ *acht* erklärt habe, und fast so, wie ich ⲑⲏⲟⲩ = ⲧϩⲏⲟⲩ und Aehnliches erkläre. In ⲑⲏⲟⲩ = ⲧϩⲏⲟⲩ bleibt ⲧ wirklich ⲧ, in ձէթ = ʒêt' *t* altes ת. *Diese* թ sind ть oder тъ.

Nehmen die Armenier semitische Vokabeln auf, so umschreiben sie ז ܙ ز durch զ, nicht durch ձ, צ ص ܨ durch ծ: ich habe längst nachgewiesen, daß das Zeichen ծ sogar aus dem syrischen ܨ (man muß an Hdss. denken) entstanden ist. ܙܘܓ ܙܘܦܐ גזה ܟܪܘܙܐ erscheinen als զոյգ զուպայ գզաթ քարոզ. Wäre זַיִת aus Palaestina zu den Armeniern gekommen, so würde es mit զ anlauten. ז vertritt außer զձ auch ժճջ: vgl. ասպնջական ܐܣܦܢܩܐ (Semitica **1** 51, ich in ThNoeldekes Untersuchungen zur Kritik des alten Testaments 154, wonach zu berichtigen ILoew, revue des études juives **16** 155 Ende), բաժակ ܒܙܟܐ, գանձաւոր גזבר Agathangelus 158, դերձակ ܕܪܙܝܐ, կուժ ܟܘܙܐ, ձիւթ زفت ܙܦܬܐ, ճանբակ زنبق, քուրձ ܩܘܪܙܐ [خرج stammt aus Persien, zeigt aber immerhin ج für ձ ז]. Nur in ganz später Zeit findet sich ج für ж զ.

Wir müssen in Folge davon ձէթ für das Original von זַיִת halten. Wann die Semiten ձ-haltige Vokabeln zu sich herübernehmen, so setzen sie für das ձ stets ז ܙ ز ein. Die Stadt Հանձիթ heißt ܐܢܙܝܛ oder ܗܢܙܝܛ: selbst wann mit dem syrischen Artikel versehen, behält sie in Լնձայ ihr ձ: խնձոր *Apfel* wird ܚܙܘܪܐ,

խանձարուր Windel Orientalia 2 47 ܚܘܙܘܩܐ : անդրձագեա אַדְרַזְגַר Agathangelus 158.

Ist ձէթ ohne Frage das Original von זַיִת, das Original von ϫⲱⲓⲧ *kann* es wenigstens sein. Begreiflicherweise gibt es kein anderes Beispiel davon, daß ձ durch ϫ vertreten wird, da der Verkehr zwischen Armenien und Aegypten ein lebhafter nicht gewesen sein kann. Ich habe in den armenischen Studien § 960 geschrieben:

> խաղող σταφυλή Matth. 7 16 ist dem koptischen ⲉⲗⲟⲗⲓ σταφυλή Matth. 7 16 so ähnlich, daß das Eine das Original des andern sein wird:

allein խաղող ⲉⲗⲟⲗⲓ enthalten kein ձ ϫ. Aber wenn ձ als Vertreter eines ڗ irgendwelche Schattierung eines *z* ist, kann es füglich mit ϫ gewechselt haben.

Ich wüßte keine im Bereiche aegyptischer Schiffahrt und chananäischen Handels gelegene, einen eranischen Dialekt redende Landschaft zu nennen, in welcher der Oelbaum vorkommt, als Cilicien. Herr AdeCandolle schreibt 354:

> Der wildwachsende Oelbaum ist an der Südküste KleinAsiens sehr gemein. Er bildet daselbst wirkliche Wälder. Balansa, Bull. soc. bot. de France 4 107.

Auf dem Seewege haben die Aegypter den ձէթ von der Mündung der cilicischen Flüsse als ϫⲱⲓⲧ, auf dem Landwege haben ihn die Chananäer als זַיִת aufgenommen.

Der Beweis für die Richtigkeit meiner Behauptung, der Oelbaum habe seine Heimath in einer armenisches Eranisch redenden Landschaft SüdKleinAsiens, kann noch auf einem anderen Wege erbracht werden.

Oel heißt auf altArmenisch իւղ oder եւղ, armenisch geschriebenes WB von 1837 1 873, d. h. da die betreffenden Zeichen unmittelbar [1]) griechischen Zeichen entsprechen [2]), ιυλ oder ευλ. Neu-

1) Der Herr Akademiker FMüller, über den man die Seiten 200 ff. meiner armenischen Studien nachzulesen beliebe, hat den sonderbaren Einfall gehabt, das armenische Alphabet sei aus „dem" semitischen Alphabete entstanden. Für unser Einen ist solche Behauptung einfach komisch: Herr Gardthausen hat sich ZDMG 30 74 ff. die Mühe gegeben, für besonders unwissende Personen sie ausführlich zu widerlegen. Jener Ephemere hatte, als Herr Gardthausen schrieb, bereits ausgelebt.

2) Dies zu sagen, ist aus zwei Gründen nöthig. Einmal wende ich mich gegen den modernen Fortsetzer des Herrn FMüller, Herrn Hübschmann [Symmicta 2 89—136, aus dem deutschen Gelehrtenleben 88 ff., Mittheilungen 1 140 ff. 2 38 ff.], der ղ nicht für λ, sondern für ł hält. Schon 1866 habe ich in den gesammelten Abhandlungen ix auseinandergesetzt, daß die Reihenfolge der Buchstaben ικλμ, in der κ vor λ steht, erweist, daß das auf կ folgende ղ, nicht das dem կ vorauf-

Armenisch heißt *Oel* (ebenda 874 oben) եղ = ελ. In Betreff des letzteren bemerke ich, daß die neuArmenischen Dialekte vielfach eine ältere Gestalt der Sprache zeigen als die Drucke unseres SchriftArmenisch: ich wiederhole das in meinen armenischen Studien 207 schon vor zwölf Jahren Ausgesprochene, daß, ehe nicht eine vergleichende Grammatik der neuArmenischen Dialekte und ein Wörterbuch derselben vorliegt, von einem wirklichen Verstehn des Armenischen keine Rede ist: vergleiche das oben über Հերիսայ = עֲרִיסָה Mitgetheilte. Ich wende mich mit diesen Sätzen an vernünftige Armenier, die an ein Königreich Armenien glauben: nicht wende ich mich an die Gelehrtenzunft des neuen Reichs.

Jedermann sieht, daß ιυλ ευλ ελ *Oel* mit ἔλαιον verwandt ist. **Ἔλαιον** ist für die Hellenisten unerklärbar: GCurtius[5] 359 hält es für das Original der den Lateinern, Gothen, Lithauern, Slaven das Oel bezeichnenden Wörter. Allerdings thut er es aus einem nicht triftigen Grunde. Denn wenn *vielleicht* ली 'liquefacere' die Wurzel von ἔλαιον ist, so darf man nicht schließen wie Curtius schloß:

> im Griechischen ist der Vorschlag eines Vocals gerechtfertigt, nicht in den übrigen Sprachen. Dies der Hauptgrund für meine jetzige Auffassung.

Der Obersatz des Schlusses müßte lauten:

> ἔλαιον stammt *unbedingt* von ली ab.

Daß ἔλαιον das nicht thut, folgt mir auch aus իւղ եւղ եղ.

Daß ἔλαιον mit den ihm entsprechenden gothischen und lithauisch-slavischen Vokabeln nicht *verwandt* ist, ergibt sich mir einfach daraus, daß im alten Gothen- und LithauSlavenLande Oelbäume nicht wuchsen.

Wenn GCurtius oliva zu ἐλαία im gleichen Verhältnisse stehend denkt wie Achivi zu Ἀχαιοί, so würde er besser oleiva und Acheivei geschrieben, und in ἐλαία ein Digamma — wohin? — gesetzt haben.

Ich nehme jetzt die Aussagen des Herrn AdeCandolle, soweit

---

gehende լ, = λ ist. Zweitens wende ich mich gegen die NeuArmenier, welche ղ *gh* sprechen (wie die Araber Balduin بغدوين): Bôghos ist Paulos, Ghûgas Lucas (der russische General Tergukassow der Sohn eines armenischen Priesters [տէր] Lucas): es erscheint einem mäßig gebildeten Linguisten nicht verständlich, wenn man ղ als ursprüngliches *gh* ansieht, und darum jenes alte ιυλ, weil es *jetzt* iugh gesprochen wird, mit türkischem ياغ *Oel* gleichsetzt. Ist chew = kauen, weil es jetzt čyu gesprochen wird, etwa mit einem čyu lautenden Papua- oder AbiponenWorte verwandt?

sie für mich in Betracht kommen, einzeln durch. Obwohl sonst das Einrücken citierter Sätze dieselben als citiert zu erweisen genügt, füge ich hier » « noch zu dem Eingerückten hinzu: ich möchte nicht erleben — was mir schon begegnet ist —, daß was ich bekämpfe, als Mein Eigenthum ausgegeben werde.

»Es ist mir unbekannt, ob ein Zendname besteht.«

Ein Blick in FJustis 1864 erschienenes Handbuch der Zendsprache 347[1] würde gelehrt haben, daß Herr Justi ein Wort für oliva nicht anzuführen hat. Hätte Herr AdeCandolle dann bei Justi 251[1] das für oleum angegebene Wort aufgeschlagen, so würden ihm unter raoghni* *oelbringende Pflanzen* aufgefallen sein, und †Vullers **2** 77[2] hätte ihn gelehrt, daß das neuPersische rôg̃an jedes Fett, auch OlivenOel, bedeutet. Hätte er dann des Herrn Justi Belegstelle, Yašt 22$_{18}$, nachgeschlagen, welche in Westergaards Ausgabe 298$_{7}$ steht, und des Herrn von Spiegel Avesta **3** 189 mit des Herrn James Darmesteter Zend-Avesta **2** 318 verglichen, so würde sich ergeben haben, daß die Seele des Gerechten zaremayêhê raoghnahê erhält, — meinethalben einen génitif partitif —: *von dem goldnen Oele* (Justi), *of the oil of Zaremaya* (Darmesteter), [von] *dem vollen Fette* (Spiegel). Er würde am Rande des Herrn Darmesteter gelesen haben:

> Zaremaya is the spring: the word translated oil might perhaps be better translated butter; the milk made in the middle of spring was said to be the best.

Hätte er dann noch einmal in Herrn Justis Handbuch 251[1] geblickt, so würde er auch erfahren haben, wo die Quelle für Herrn Darmesteters Anmerkung fließt: im „Minokhired“ in „Spiegels H.“ [andere Leute citieren, da das Buch einmal so heißt, »Einleitung in die traditionellen[so] Schriften der Parsen«] **2** 140“. Dort befiehlt Gott: „Bringt ihm die besten Speisen .... von jenem fetten Maidyo[so]-zaremaya herbei“. Wenn Herr AdeCandolle dann auch dies hätte kontrollieren wollen, so würde er des Herrn EWWest Pahlavi texts **3** 21 aufgeschlagen, und erfahren haben, daß Maidhyô-zarm rôghan, *Frühlingsbutter*, bei den Dogmatikern, welche nicht ahnen, daß ein Hirtenvolk sich das Leben nach dem Tode anders als Sie vorstellt, the spiritual representative of butter made during the mid-verdure festival bedeutet. Er würde schließlich des Herrn FCAndreas Mainyô-i-khard 14 citieren.

Er würde vielleicht sich noch dadurch als Ketzer erweisen, daß er über das Verhältnis von âzûiti und आहुति etwas ultra Iustium sapere möchte.

Jedenfalls erhellte aus dem was Herr AdeCandolle gethan haben *würde*, wenn er nicht Herr AdeCandolle wäre, daß im Awesta Olivenoel nicht bekannt ist.

Wer erst gelernt hätte, bevor er zu lehren anhöbe, würde auch an den Bundehesch denken. Es genügt, da des hochverdienten Anquetil du Perron Buch selten ist, FWindischmanns zoroastrische Studien [1863] 108 109 zu citieren, welcher 109[5] an der entscheidenden Stelle Punkte setzt, weil er nicht verstanden hat. Herr FJusti hat in dem seiner Ausgabe angehängten Wörterbuche 170[1] wie in seiner Umschrift (= 65 $_{12}$ Westergaard) زندق gelesen, was Herr EWWest, Pahlavi texts **1** 102, in den Text aufnimmt, und am Rande „perhaps zêtô ‘olive’, as Anquetil supposes, and Justi assumes“ dazuschreibt. Es ist eine nicht zu qualificierende Leistung, زندق für ܙܝܬܐ zu erklären.

زندق steht nach كنچيت = neupersischem كنجيد (kunǧîd) Farhang-i-šuûrî [Constantinopel] **2**[1] 277 $_{13}$, das IohLeunis Synopsis der Pflanzenkunde[3] **2** § 665[5] als Kuntschut = *weißer Sesam* aufführt: nach דושׁדאנק *Uebelkorn* und שׁאהדאנק *Königskorn*, welches letztere ohne Frage Hanf bedeutet, meine gesammelten Abhandlungen 82, ILoew § 156.

> »Der semitische Name Sait muß auf[so] ein hohes Alterthum zurückgehen[so], denn er findet sich gleichzeitig im neupersischen Seitun und im arabischen Zeitun Sjetun.«

Das älteste Denkmal des neuPersischen stammt aus dem zehnten Jahrhunderte nach Christi Geburt — ich meine Daqîqîs in Firdausî's Königsbuch aufgenommene Bruchstücke —: ob in ihm زيتون vorkommt, weiß ich nicht. Käme زيتون bei Daqîqî oder Firdausî vor, was es bei Letzterem nach Vullers **2** 166 thut, so würde der Schluß des Herrn Akademikers doch nicht erlaubt sein: jeder Perser hat gewußt, und weiß, daß زيتون aus dem Arabischen entlehnt ist. Die älteste Belegstelle für زيتون, die Ich in Persien kenne, die älter als eine Stelle bei Firdausî wäre, findet sich bei Muwaffaq aus Herât, fundamenta pharmacologiae ed. FRSeligmann, 132 Ende: Muwaffaq schrieb um 990 nach Chr.

> »Auch im Türkischen und bei den Tataren der Krim findet es sich als Seitun wieder, was auf einen turanischen Ursprung oder auf den sehr entlegenen Zeitpunkt der Vermischung semitischer und turanischer Völker schließen lassen könnte.«

Ein Blick in Meninskys Wörterbuch[2] 3 184[2] hätte dem Herrn AdeCandolle zu der Erkenntnis verholfen, daß زيتون bei den Türken ebenso gewis aus dem Arabischen entlehnt ist, wie bei den Persern. Der Koran hat als Nummer 95 eine سورة الزيتون: überall wo der Koran bekannt wurde, lernte man durch ihn زيتون kennen: die Muhammadaner haben zwar kein „Schriftprincip", kennen aber den Koran besser als die pro ministerio geprüften Candidaten des Protestantismus ihre Bibel. Durch das eben Nachgewiesene ist der Schlußsatz des Herrn AdeCandolle als das was er ist, erkennbar gemacht.

> »Die alten Aegypter bauten den Oelbaum an, welchen sie Tat nannten.«

Herr AdeCandolle hat übersehen, daß das T des Wortes Tat einen Akut führt, den er sich über oder rechts neben dem T denken, den er aber nicht auslassen darf: dies t́at liest sich čat, wenn man anders beweisen kann, daß der — nicht geschriebene — Vokal ein *a* war, was Ich nicht beweisen kann.

> »Der von dem semitischen ganz verschiedene aegyptische Name deutet ein den ersten Dynastien vorhergehendes Auftreten an.«

Oben ist gezeigt, daß die Aegyptologen gar nicht daran denken če čet zet [čdt, zu trennen čd-t] für „ganz verschieden" von dem semitischen זַיִת zu halten: im Gegentheile. Was weiß denn Herr AdeCandolle von den „ersten Dynastien" Aegyptens? hält er dieselben für semitisch? man sollte es meinen. Welche Sprache redete der Name, als er dem Herrn Akademiker „Andeutungen" über sein „Auftreten" machte?

Herr AdeCandolle fährt fort:

> »Es ist eine sehr eigenthümliche Thatsache, welche die Philologen weder bemerkt noch weiter erörtert haben, daß der berberische Name für den Oelbaum und seine Frucht, die Olive, in Uebereinstimmung mit dem Tat der alten Aegypter, Taz oder Tas zur Wurzel hat. Nach dem von der französischen Regierung veröffentlichten französisch-berberischen Wörterbuche nennen die Kabylen von Algerien den wildwachsenden Oelbaum Tazebboujt, Tesettha[1]) Ou' Zebbouj, und den gepfropften Oelbaum Tazemmourt, Tazettha[so] Ou' Zemmour ..... Dies sind gute Anzeichen von dem hohen Alter des Oelbaums in Afrika.«

Es ist bereits nachgewiesen worden, daß den Aegyptern nicht einfällt, den Oelbaum Tat zu nennen, der vielmehr čdt heißt, meinet-

---

1) Der Bediente des Herrn AdeCandolle hat ungenau tesettha abgeschrieben: der benutzte, 1844 auf Befehl des Kriegsministers zu Paris herausgegebene dictionnaire français-berbère hat 389 das Richtige. Ou' Zebbouj usw. schreibt nur Herr AdeCandolle: seine Vorlage ou'zebbouj usw.

halben ϫⲓⲧ, da Peyron (oben 308^{r}) ein ⲃⲱ ⲛ̅ϫⲓⲧ ϩⲟⲟⲩ *wilder Oelbaum* kennt.

Schwindet schon hierdurch die Aehnlichkeit des Berberischen mit dem Aegyptischen, so wird die Sache für den Herrn Akademiker noch hoffnungsloser dadurch, daß das T dieser berberischen Wörter nichts als BildungsBuchstabe, daß nämlich zu trennen ist:

t-azebbouj-t,
t-asettha ou'zebbouj,
t-azemmour-t,
t-asettha ou'zemmour.

Es ist vielleicht nöthig, AHanoteaus 1858 erschienenen Essai de grammaire kabyle zu citieren, der dem Herrn AdeCandolle ebenso zugänglich war wie mir, und wie das von ihm benutzte dictionnaire français-berbère. Hanoteau lehrt 17 19 20

> Pour former le féminin singulier, on met un *th* devant le nom masculin et un autre à la fin. Beaucoup de noms féminins, cependant, ne se terminent pas par le *th*, les terminaisons *a* et *i* surtout sont très-fréquentes. Mais il est à remarquer que la plupart de ces noms ne caractérisant aucun sexe, n'ont pas de masculin.
>
> Dans le nombre singulier kabyle, on doit distinguer l'idée collective du genre ou de l'espèce, comme:
>
> azemmour l'espèce olivier greffé.
> aslen le frêne.
> oulmou l'orme.
>
> Et l'idée d'individualité.
>
> thazemmourth un olivier greffé.
> thaslent[h] un frêne.
> thoulmouth un orme.

Ich bemerke, daß Hanoteau und der Dictionnaire ث verschieden umschreiben, jener *th*, dieser *t*: ich bemerke weiter, daß Hanoteau ausdrücklich sein Hauptaugenmerk auf den Dialekt der Igaouaouen oder Zouaoua richtet, welche in Deutschland als Zuaven bekannter sind denn als Zouaoua.

Hätte Herr AdeCandolle sich ein wenig umgeschaut, so würde ihm Seite 41 des von ihm gelobten Wörterbuchs *arbre tasettha* entgegengetreten sein: sein *Tas* ist noch erheblich vergnüglicher als sein *Taz*. Hätte Herr AdeCandolle sich die Zeit genommen, seine Seite 355 noch einmal zu überlesen, bevor er sie dem Setzer in die Hände gab, so würde er aus seinem eigenen Manuscripte gelernt haben, daß

> »die Araber von Algerien Zenboudje für den wildwachsenden Oelbaum sagen«,

und

»die Andalusier den wildwachsenden Oelbaum Azebuche nennen«.

Es wäre erlaubt gewesen, das azebbouj des Berberwortes, das Zenboudje der Araber Algeriens, das Azebuche der Andalusier (die Berbern genug in ihrem Lande gehabt haben) für eine und dieselbe Vokabel zu halten. Herr AdeCandolle mußte wissen, daß *j* der Franzosen = ž, *dj* der Franzosen = ǧ, und *ch* der Spanier = č ist: er verstand doch auszusprechen was er schrieb, und konnte über die Verwandtschaft von ž ǧ č kaum im Zweifel sein. RDozys Gesinnungen empfahlen ihn der französischen Schweiz gewis: Dozys Ausgabe von Engelmanns glossaire des mots espagnols et portugais dérivés de l'Arabe (1869) hätte zu Rathe gezogen werden können: sie lehrt 32, daß spanisches acebuche, portugiesisches azambujo arabisches زنبوجة ist, das dann RDozy in einer Anmerkung unter Benutzung des auch von Herrn AdeCandolle eingesehenen dictionnaire français-berbère für das berberische t-azebbouj-t erklärt (die Trennungsstriche gebe ich dazu). Obwohl Herr AdeCandolle als Historiker keine Neigung zeigt, die Quellen aufzusuchen, will ich ihm doch den Weg zu dem Wasser weisen, an welchem er trinken konnte: Pedro de Alcala 108^2 21 meines Neudrucks. Er sehe RDozys Supplément **1** 605^2, mehr aber noch ein ihn sehr nahe angehendes Werk, des braven, bescheidenen J-JClément-Mullet livre de l'agriculture d'Ibn-al-Awam, Paris 1864, **1** 215 [= Banqueris libro de agricultura, Madrid 1802, **1** 234] (welche Stelle auch dem Herrn Engelmann gute Dienste geleistet haben würde).

Nun geht mein Elend an: denn jetzt spreche ich — zitternd vor dem Zorne eines Gerechten, der nur sieht was vor Augen ist — eine Vermuthung aus. Der gepfropfte Oelbaum t-azemmour-t wird uns eine punische Wurzel זָמַר offenbaren, woher זָמוֹר*. Daß ترمورث aus einer Semitischen Sprache, aber nicht aus dem Arabischen, stammt, dürfte für Unbefangene keinem Zweifel unterliegen. Ich bitte aber, sich das irgendwo „bestätigen" zu lassen. Habe ich Recht, so ist der Oelbaum in NordAfrica, wo er in wildem Zustande angetroffen werden mag, erst durch die Punier kultiviert worden.

Mein Ergebnis: Castanea (vesca) trägt einen érânischen Namen, und ist zu einer Zeit, deren sich die Alten noch entsannen, über Lydien nach Griechenland gekommen. Der Oelbaum stammt von der Südküste KleinAsiens, ebenfalls aus érânischem Gebiete, ist von da sowohl zu den Chananäern wie zu den Aegyptiern, von ersteren nach Carthago gelangt: die Punier haben die Kunst der Veredelung des wilden Oelbaums den Numidiern gelehrt. Der Name *ἔλαιον* ist den Griechen von Stammverwandten der Armenier zugeführt worden. Die Kultur des Oelbaums ist nach Fenestella in Italien nicht älter das siebente Jahrhundert vor Christo.

Zum Schlusse mache ich darauf aufmerksam, daß die bei den Israeliten und Juden umlaufende Fluthsage den Oelbaum nach Armenien setzt, da die aus der gestrandeten Arche Noes ausgesandte Taube doch wohl das berühmte „Oelblatt“ — schreibe: Oelbaumblatt — aus keiner anderen Landschaft als אֲרָרַט, dem Lande der *Ἀλαρόδιοι* (diese Identificierung gehört HKiepert), geholt hat. Auch die Taube ist vermuthlich eine Eranierin: יוֹנָה ونا.

5.

Der Titel des Patriarchen Ioseph.

In der Genesis 41_{45} wird erzählt, wie der König von Aegypten den keuschen, weisen und brauchbaren Ioseph „charakterisiert“ hat. Der Titel צָפְנַת פַּעְנֵחַ = *Ψονθομφανήχ* 𝔊 ist bisher ein Räthsel gewesen, an dessen Lösung sich nicht wenige Gelehrte versucht haben. Mir stand früher nur Eines fest: daß in פענח ⲡⲉⲛⲉϩ oder ⲡⲱⲛϩ enthalten sei: moderne [1]) Juden schreiben ע für *e*, den Griechen liefert ע ihr o.

Unter dem 31 December 1887 theilte mir mein Schüler Georg Steindorff mit, צפנת פענח sei ϫⲉ ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ⲉϥⲱⲛϩ *Es spricht Gott und er lebt.* Wo ich das *und* zu streichen bitte.

Steindorff schrieb mir damals:

> Die Erklärung liegt sehr nahe: es ist, wenn auch in anderer Zusammensetzung, einer der häufigsten aegyptischen Eigennamen .... Die LXX haben den Namen schon nicht mehr verstanden .... Ich will meine Erklärung in Stades Zeitschrift veröffentlichen; auch zeitlich ist sie interessant, da der aegyptische Name erst im achten Jahrhundert gebräuchlich wird.

Ich erwiderte meinem jungen Freunde unter dem 1 Januar 1888:

> Ihre Erklärung ist gewis richtig, und das Datum sehr von Belang. Es stimmt zu der Zeitbestimmung der Urkunde, die ich im Kolleg vortrage. Der Name ist wohl in Aegypten aus religiösen Gründen einmal Mode gewesen .....

---

1) Ich mache auf das von ENestle entzifferte Alphabet am Hochaltare der KiliansKirche in Heilbronn aufmerksam: Lübke, Geschichte der Plastik 536 ff.

> Können Sie nachweisen, wann der Name aufhört gebraucht zu werden, so wäre das noch wichtiger, da wir Theologen dann auch einen Terminus ad quem erhielten. Versuchen Sie doch auch zu ermitteln, warum gerade diese Formel in die Mode kam. Dieselbe hat doch eine ratio essendi in Zeitanschauungen. Die Laute stimmen prächtig.

Heute (am 25 April 1889) erhalte ich von GSteindorff einen Ausschnitt aus der Zeitschrift für aegyptische Sprache und Alterthumskunde, in dem das 1887 Entdeckte etwas weiter ausgeführt ist: ich darf nunmehr öffentlich von GSteindorffs wichtigem Funde reden. Ich habe zur Form nur die Eine Bemerkung, daß ꜥ sowohl ⲡ als ϥ ist, und frage an, ob statt ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ das nordAegyptische ⲫⲛⲟⲩϯ gesetzt werden muß: Herodot hörte (*πίρωμις ἐκ πιρώμιος*) nord-, nicht südAegyptisch. ϥ muß in alter Zeit ו sein, פענח = ⲉϥⲱⲛϩ ist wegen des פ jung. Ich merke an, daß um 680 ח auch zwischen Vokalen noch ein schlichtes *t* ist.

GSteindorff berichtet im Drucke:

> Eigennamen der besprochenen Form vermag ich zuerst im Anfange der XXII Dynastie

also bald nach Salomon, unter den Bubastiten

> nachzuweisen, häufig werden sie erst in saitischer Zeit

also unter Psammetich I und Necho II.

> Da auch die Namen Ns-nt

= אסנת, von der Neith, dem verschleierten Bilde in Sais, benannt

> und Petepre̅ʿ

פוטיפרע, hier muß Steindorff meine Genesis 172₆ʳ berücksichtigen, wo er eine südAegyptische Form als Variante der nordAegyptischen antreffen wird: beiläufig gesagt, ist פנטיפרע *Πεντεφρη* für mich verständlicher als פוטיפרע, der Putipharus der Vulgata. GSteindorffius et AErmanus viderint ne quid detrimenti capiat theologia.

> derselben Epoche angehören, so haben wir in ihnen ein überaus wichtiges Hülfsmittel zur Datirung von Genesis 41 45, wie des

ersten

> Elohisten überhaupt.

Wer meine Grundanschauung über אֱלֹהִים und יְהוָה kennt, wie ich sie seit 1874 (Psalterium iuxta Hebraeos Hieronymi), nicht einmal für Diebe nutzbar, oft vorgetragen habe, weiß, daß ich Elohim-Urkunden — ich nehme Pentateuch, Psalter, Iob, wodurch ich mich von den Facultätstheologen unterscheide, stets zusammen, — daß ich Elohim-Urkunden stets entweder in eine Zeit versetze, in welcher man von Erfüllung der Verheißungen nichts spürte, oder aber in die Tage der Entstehung des Pharisaeismus. Die Möglichkeit, Elohim-Urkunden frisch zu schreiben, beginnt deshalb meines Erachtens mit der Vernichtung des Reiches Iosephs. Der erste Elohist schrieb mithin nach dieser Vernichtung: wie lange nachher, ist hier nicht zu erörtern[1]), doch muß ich auf zwei Thatsachen aufmerksam machen.

In Aegypten erscheint in Eigennamen der von GSteindorff besprochenen Art nicht ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ *der Gott*, sondern irgend ein Eigenname eines Gottes: beispielshalber heißt es *Es sagt Osiris Er lebt.* Ein solcher Eigenname konnte einem Israeliten — ich suche den ersten Elohisten, darin auch mit Herrn Dillmann in Uebereinstimmung, im Nordreiche — im Titel seines verehrten Ioseph nicht passen. Die Einsetzung des ⲡⲛⲟⲩⲧⲉ ist also eine willkürliche: sie kann nur von Jemandem gemacht sein, der Aegyptisch verstand: daß dieser Mensch schon theoretisch-monotheistisch empfand wie seine Nachfahren heut zu Tage, ist für die Geschichte des Israelitismus interessant. „Von den ägyptischen Dingen hat er die besten Kenntnisse“, rühmt Herr Dillmann dem Manne nach, der in Genesis 45 redet. Dieser Mann weiß nichts von dem albernen, von mir in den Symmicta **1** 117 $_{27}$ ff. — zu Niemandes Nutzen — besprochenen und erklärten Wahne des jüngeren Elohisten (Genesis 17), daß die Beschneidung ein Unterscheidungsmerkmal des ausgesuchten Volkes sei: wer Aegypten kannte, wußte, daß jeder Aegypter beschnitten war, mithin in der Behandlung seines Gliedes der Israelit — gerade durch das »BundesZeichen« — sich vom Aegypter *nicht* unterschied.

Zweitens: in Sais, dem Hauptorte derjenigen Dynastie, unter welcher die hier in Rede stehende Namengruppe am häufigsten erscheint, wurde vor anderen Gottheiten die Neit verehrt. Ns-nt = אסנת *der Neit gehörig* ist ebenso wie Petepré [oder Petephrê] *das Geschenk* [?] *des Sonnengottes* ein Eigenname der Zeit des Psammetich I und des Necho II, und dem ersten Elohisten aus demselben Grunde geläufig, aus welchem er den Titel צָפְנַת פַּעְנֵחַ an Ioseph vergeben werden läßt: er war ein Zeitgenosse der zweiten Saiten-Dynastie, und muß das Aegypten dieser Dynastie gekannt haben. Er ist mithin nicht, wie ich lange gelehrt habe, jünger als 729 oder 709, aber nicht viel jünger, sondern er gehört in das siebente

1) Als vernichtet habe ich das Reich Iosephs von der Zeit an betrachtet, in welcher Achaz (Regn. δ 16_{10}) als Vasall Assyriens in Damascus — sagen wir, dem Erfurt WestAsiens — vor dem Heerführer des Königs von Ninive erschien, und in welcher zum ersten Male aus Ioseph deportiert wurde. Der äußerliche Fall Iosephs erfolgte bekanntlich 709.

Jahrhundert. Neit und die Sonne galten dem älteren Elohisten wohl als diejenigen Gottheiten der Aegypter, deren Diener noch am ersten werth waren, mit einem Ioseph in Verwandtschaft zu treten.

פנת = ⲡⲛⲟⲩϯⲉ = ⲫⲛⲟⲩϯ des Namens צפנת פענח ist הָאֱלֹהִים, also genau das, was dem Sprachgebrauche, weil dem Empfinden, des „Elohisten“ entsprach. Meine Orientalia **1** 104.

Die Absicht des Jahwisten war die, seinem sündigen Volke einen Spiegel der Art vorzuhalten, wie ihn Stephanus in der Apostelgeschichte den Juden weist. Das Reich muß noch gestanden haben, als der Jahwist schrieb: denn dieser arbeitet im Sinne der besseren Prophetie. Auch der Jahwist kennt nach Ausweis des Kapitels 47 der Genesis Aegypten: hat er dem Minister Ioseph, um ihn zu tadeln oder um ihn zu loben, die KornwuchererHumanität nachgesagt, durch welche die Krone Aegyptens die alleinige Grundbesitzerin des Reichsbodens geworden sein soll? Ein socialistisches Königthum von einer nur für irgendwie „Gläubige“ unbedenklichen Art. Von der „Charakterisierung“ des Ioseph berichtet nicht der Jahwist.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

März und April 1889.

Sitzungsberichte d. k. Akad. d. W. zu Berlin X, XI—XIII, XIV, XV, XVI—XVIII, XIX, XX, XXI.
Berichte über die Verhandlungen d. k. Sächs. Ges. d. W. zu Leipzig:
  a. mathematisch-physische Classe. 1888. I, II.
  b. philologisch-historische Classe. 1888. III, IV. Leipzig 1889.
Abhandlungen d. k. S. Ges. d. W. zu Leipzig des XV. Bandes Abh. der mathematisch-physischen Classe: N. I, II, III (doppelt), IV.
Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft. Band 42. Heft IV. Leipzig 1888.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Band XVIII. Jahrg. 1886. Heft 2. Berlin 1889.
Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. 24. Jahrg. Heft I. Leipzig 1889.
Untersuchungen über die Gestalt der Bilder und die Theorie der Messungen außerhalb der optischen Axe von astronomischen Instrumenten von Dr. H. Bettermann. Kiel 1889.
Germanisches Museum:
  a. Anzeiger. Band II. Heft 2. Seite 93—178. Jahrg. 1888.
  b. Mitteilungen. Band II. Heft 2. Jahrg. 1888.
  c. Katalog der deutschen Kupferstiche des XV. Jahrhunderts.

Sitzungsberichte d. k. b. Akademie zu München:
a. Philologisch-philosophisch und historische Classe. 1888. Band II. Heft III.
b. Mathematisch physikalische Classe. 1888. Heft III.
Zeitschrift für Naturwissenschaften. Der ganzen Reihe LXI. Band. Vierte Folge. Band 7. Heft 1. 2, 3 u. 4. Halle a. S. 1888.
a. Archiv des historischen Vereins von Unterfranken und Aschaffenburg. Bd. 31. Würzburg 1888.
b. Jahresbericht für 1887.
Leopoldina. Heft XV. N. 3—4, 5—6. Halle a. S.
72. u. 73. Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft in Emden 1886/88. Emden 1889.
Meteorologische Zeitschrift. Jahrgang 6. 1889. Heft 3, 4. Wien 1889.
a. Verhandlungen d. k. k. geologischen Reichsanstalt. N. 2. N. 3. Wien 1889.
b. Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrgang 1888. Band XXXVIII. Heft 4. Wien 1889.
a. VI. Bericht der meteorologischen Commission des naturforschenden Vereins in Brünn. 1886.
b. Verhandlungen des naturforschenden Vereins in Brünn. Band XXVI. 1887. Brünn 1888.
Mathematisch naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Band VI. Juni 1887 — Juni 1888. Berlin und Budapest 1889.
Ungarische Revüe. Jahrg. 9. 1889. Heft II, III. Budapest 1889.
Földtani Közlöny. 1888. Kötet XVIII. Füzet 5—7, 8—10, 11—12. Budapest 1888.
a. Jahresbericht d. Vereins f. siebenbürgische Landeskunde. 87/88.
b. Archiv d. Vereins f. siebenbürgische Landeskunde. Neue Folge. Band 22. Heft 1. Hermannstadt 1889.
Programm des evangelischen Gymnasiums A. B. und der damit verbundenen Realschule und ev. Elementarschule zu Hermannstadt für 1886 — 87. Hermannstadt 1887.
Die Generalsynode der evangelischen Kirche A. B. in Siebenbürgen vom Jahre 1708, v. C. Werner. Hermannstadt 1883.
Anzeiger der Akad. d. W. in Krakau. 1889. Heft 1. 3. Krakau 1889.
Proceedings of the London mathematical society. N. 338—342, 343—345.
Monthly notices of the royal astronomical society. Vol. XLIX. N. 4. 5.
Proceedings of the Royal society. Vol. XLV. N. 276, 277.
Journal of the Royal microscopical society 1889. Part II. April. London and Edinburgh.
Reports from the Laboratory of the R. college of physicians, Edinburgh. Vol. I. Edinburgh and London 1889.
Nature. Vol. 39. 1009 — 1017.
Transactions of the Cambridge philosophical society. Vol. XIV. Part III.
The collected mathematical papers of Arthur Cagley. Vol. I. Cambridge 1889.
Proceedings of the Cambridge philosophical society. Vol. VI. Part. V. Cambridge 1889.
Proceedings of the Royal Irish Academy
a. for the year 1838—39. Part III.
b. » » » 1839—40. » IV.
c. » » » 1840—41. » V.
d. » » » 1843—44. » VIII.
e. » » » 1844—45. Vol. III. Part I.
f. » » » 1846. Vol. III. Part II.
g. » » » 1858. Vol. VI. Part. IV.
h. » » » 1854—55. Vol. VI. Part. II.
i. » » » 1880. Vol. II. Ser. II. N. 2. Dublin.
k. » » » 1880. Vol. III. Ser. II. N. 5.
l. » » » 1881. Vol. III. Ser. II. N. 6.
m. » » » 1884. Vol. II. Ser. II. N. 5.
Transactions of the R. Irish Academy.
a. Polite literature and antiquities. Vol. XXVII. 4,

b. Science. Vol. XXVIII. 1, 2, 3—4, 5. Dublin 1880—81.

Records of the geological survey of India. Vol. XXI. Part. IV. 1888. Vol. XXII. Part. 1. 1889. Calcutta.

List of errata in the catalogue of the australian scyphomedusae etc. by Lendenfeld.

Annales du musée Guimet. Revue de l'histoire des religions neuvième année. Tome XVIII. N. 2. 3. Paris 1888.

Bulletin de la société mathematique de France. Tome XVI. N. 6.

Annales de la faculté des lettres de Bordeaux. 1888. N. 3 et 4. Paris 1888.

Bibliothèque nationale Catalogue des manuscrits des fonds Libri et Barrois par Leopold Delisle. Paris 1888.

Mémoire sur les opérations financières des templiers par L. Delisle (extrait des mém. de l'acad. des inscript. et belles-lettres. Tome XXXIII. 2e partie). Paris 1889.

Académie royale de Belgique, Bulletin. 59 année. 3e série. Tome 17. N. 2. 3.

Acta universitatis Lundensis. Tom. XXIV. 1887—88.

a. mathematik och naturvetenskap.

b. Theologi. Lund.

Sveriges offentliga Bibliotek. Stockholm, Upsala, Lund, Göteborg. Accessions-Katalog. 3. 1888. Stockholm 1889.

The probatle cause of the displacement of beach-lines. Second additional note by A. Blytt.

Zonenbeobachtungen der Sterne zwischen 64° 50′ und 70° 10′ nördlicher Deklination. Im Auftrage des academischen Collegiums. Christiania 1888.

Finlands geologiska undersökning. N. 8. 9.

Annalen des physikalischen Central-Observatoriums. Theil II. Jahrg. 1887.

Mémoires de l'académie Imp. des sciences de St. Petersb. VIIe série. Tome XXXVI. N. 12, 13. St. Petersb. 1888.

Mémoires de la société des naturalistes de Kiew. Tome X. Livr. 1. Kiew. 1889.

Bollettino delle pubblicazioni italiane 1889. N. 76, 77, 78, 79, 80. Biblioteca nazionale di Firenze.

Bollettino delle opere moderne straniere. Vol. III. N. 6. Vol. IV. N. 1. Biblioteca nazionale V. E. di Roma.

Atti della società Toscana di scienze naturali. Processi verbali. Vol. VI. Adunanza del 6 maggio e del 11 novembre 1888.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XXIV disp. 4a, 5a, 6a, 7a. 1888—89. Torino.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXV. Rendiconti. Vol IV, fasc. 11, 12. 1888. Anno CCLXXXVI. Vol. V, fasc. 1, 2, 3. 1889. Roma.

Bulletin of the U. St. geological survey. N. 40—47. Washington 1887—88.

U. S. geological survey. Mineral resources of the U. S. 1887, by D. Day.

Johns Hopkins University studies. Seventh series. I. Arnold Toynbec. (2 Exempl.) Baltimore 1889.

J. Hopkins University circulars. Vol. VII. N. 66. 67. Vol. VIII. N. 68. Baltimore 1888.

American Journal of mathematics. Vol. X. N. 4. Vol. XI. N. 1. 2. Baltimore. J. Hopkins University.

Proceedings of the american philosophical society. Vol. XXV. N. 128.

Rules and regulations of the Henry M. Phillips price essay fund. Adopted 7. Dec. 1888.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von No. 11.

Paul de Lagarde, Kleinigkeiten. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

19. Juni. №. 12. 1889.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 4. Mai.

Ueber den Zusammenhang des Elektricitätsverlustes durch Beleuchtung mit der Lichtabsorption.

Von

Wilhelm Hallwachs.

Angeregt durch Versuche von Herrn Hertz [1]) über die Wirkung des Lichtes auf den Induktionsfunken hatte ich vor einiger Zeit gezeigt [2]), daß bei der Belichtung negativ elektrischer, blanker Metallplatten mit geeignetem, ultraviolettem Licht sich die negative Elektricität den elektrostatischen Kräften des Feldes folgend, zerstreut. Eine Reihe von Abhandlungen [3]) von den Herrn Righi, Stoletow, Bichat, Bichat und Blondlot, Hoor

1) H. Hertz, Berl. Ber. 1887 p. 487, auch Wied. Ann. 31. p. 983. 1887.

2) W. Hallwachs, Wied. Ann. 33. p. 301. 1888.

3) A. Righi, Acad. dei Lincei 1888, auch Journ. de phys. 1888 p. 153, auch Phil. Mag. [5] 25. p. 314. 1888.

Derselbe. C. R. 106. p. 1349. 1888 und C. R. 107. p. 559. 1888.

A. Stoletow, C. R. 106. p. 1149 und p. 1593. 1888, sowie C. R. 107. p. 91. 1888.

E. Bichat und R. Blondlot, C. R. 106. p. 1349. 1888.

E. Bichat, C. R. 107. p. 557. 1888.

M. Hoor, Wiener Anz. XVIII. 1888. Wiener Ber. IIa. Bd. 97. p. 719. 1888.

u. A. erweiterten dann die Kenntnisse über das Phänomen, ich selbst war leider längere Zeit verhindert die Untersuchung desselben fortzusetzen. Eine im Anschluß daran von mir gefundene Erscheinung[1]), die Elektrisierung von Metallplatten durch Licht, hat namentlich durch die Herrn Bichat und Blondlot[2]) eine willkommne Bestätigung und experimentelle Weiterführung erhalten. Die Untersuchung dieser letzteren Erscheinung, die vielleicht den Nachweis einer Verwandlung von Licht in Elektricität ermöglichen würde, glaubte ich erst nach Bereicherung des Beobachtungsmaterials mit Erfolg in Angriff nehmen zu können[3]). Dazu ließ sich aber, wie mir schien, leichter die erstere Erscheinung verwenden. Die Versuche über dieselbe zielten darauf ab den Zusammenhang des Electricitätsverlustes mit der Lichtabsorption klarer heraustreten zu lassen und manche Einwände zu untersuchen, welche man sich gegen das Vorhandensein dieses Zusammenhangs machen konnte.

§ 1.

Die negative Elektricität ging, wie sich gezeigt hatte, von den Metallplatten bei der Belichtung nicht mehr weg, wenn die zuerst frisch geputzte Oberfläche einige Zeit an der Luft gelegen hatte. Es vollzog sich dabei möglicherweise ein ähnlicher Process wie bei der Belichtung der frischen Oberfläche, nach dessen Ablauf das Licht dann unwirksam bleiben mußte.

Zunächst ließ sich nachweisen, daß ein solcher Proceß nicht in einer Oxydation der Oberfläche bestehn kann. Zu diesem Zwecke setzte man den Strahlen einer Bogenlampe in geeigneter Entfernung ein isoliert aufgehängtes Kupferblech aus, welches mit einem Goldblattelektroskop in Verbindung stand. Bei alter Oberfläche nahm die negative Ladung bei der Belichtung in 5, 15, 30 und 45 Secunden um 8, 30, 60 und 80 Procent ab. Nach dem Putzen der Oberfläche stieg die Abnahme auf 80 bezw. 100 Procent in 2 bezw. 5 Sekunden. Wurde dann das Blech ausgeglüht, so blieb die Wirkung dieselbe wie im letzten Fall und änderte sich auch dann nicht, als das Blech durch längeres Ausglühen vollständig mit einer Oxydschicht bedeckt wurde.

Außer der Oxydation hätte vielleicht auch die Luftfeuchtig-

1) W. Hallwachs, Göttinger Nachr. 1888 p. 176, auch Wied. Ann. 34 p. 731. 1888 und Phil. Mag. [5] 26. p. 78 1888.

2) E. Bichat u. R. Blondlot, C. R. 107. p. 29 und p. 557. 1888. Siehe auch A. Righi, C. R. 107. p. 559. 1888.

3) Es ist mir inzwischen gelungen eine Elektrisierung durch Belichtung bis zu Potentialen von über 100 Volt zu erhalten.

keit bezw. auf der Metallplatte condensierter Wasserdampf eine Rolle spielen können. Indess wurde die Schnelligkeit des Verlustes der negativen Elektricität bei der Beleuchtung einer Kupferplatte nicht geändert, nachdem man dieselbe fünf Minuten in einen Dampfstrom gebracht, oder fünf Stunden ganz nahe über einer Wasserfläche belassen, oder auch mit Wasser begossen und dann an der Luft getrocknet hatte.

Daß absorbierte Gase nicht etwa bei der Wirkung des Lichtes eine primäre Rolle spielen, geht aus den im Folgenden erwähnten Versuchen mit Flüssigkeiten hervor. Ich will damit über eine sekundäre Rolle adsorbierter Gase, welche, wie Herr Hoor schließt, die Träger der durch Convection von den Platten weggehenden Elektricität sind, nichts aussagen.

Der quantitative Vergleich verschiedener Versuche über den Elektricitätsverlust durch Licht findet in der Inconstanz des Lichtes oft eine Schwierigkeit. Um die einzelnen Resultate auf gleiche Lichtstärke zurückführen zu können, bediente ich mich einer frisch ausgeglühten Platin- oder auch einer vollständig oxydierten, neu ausgeglühten Kupferplatte. Das Ausglühen bringt diese Platten, wie die Versuche gezeigt haben, immer auf gleiche Empfindlichkeit für unser Phänomen und läßt sich schneller und mit constanterem Erfolg ausführen wie mechanisches Reinigen der Oberflächen.

§ 2.

Um das Beobachtungsmaterial zu bereichern und den Nachweis über einen Zusammenhang zwischen der Lichtabsorption und unserem Phänomen zu erleichtern, wurde eine Reihe von Flüssigkeiten auf ihre Empfindlichkeit für die Erscheinung untersucht. Dabei standen die Kohlen, zwischen welchen sich der Lichtbogen bildete, horizontal. Es umgab dieselben ein ebenfalls horizontal liegender Eisenblechcylinder von 15 cm Länge und 11 cm Durchmesser, welcher das Licht durch eine im Mantel nach unten zu befindliche, kreisförmige Oeffnung von etwa 3 cm Durchmesser hindurchließ. Die Strahlen gingen zunächst durch die kreisförmigen Oeffnungen zweier horizontaler Metallschirme; eine derselben war fast immer mit einer Gypsplatte, zuweilen auch mit einer Quarzplatte bedeckt, während eine Glimmerplatte, welche man nur während des Versuches hinwegnahm, die andre schloß. 30 cm vom Lichtbogen entfernt trafen die Strahlen auf die Oberfläche der zu untersuchenden Flüssigkeit. Diese befand sich in einem großen, auf Schellackfüßen stehenden Uhrglas. Ein Platindraht tauchte in die Flüssigkeit und war andrerseits mit dem Goldblattelektroskop verbunden.

Die Aufnahmefähigkeit von Flüssigkeiten für die Erscheinung hat man auch in der Weise zu ermitteln gesucht[1]), daß man Filtrierpapier mit denselben tränkte oder Drahtnetze mit denselben bedeckte. Die Versuchsbedingungen werden dadurch verwickelt; man kann diese Anordnung für sehr empfindliche Flüssigkeiten immerhin benutzen, bei weniger empfindlichen kommt man aber leicht zu unrichtigen Resultaten. Eine Flüssigkeit kann in einer Glasschale den Lichtstrahlen ausgesetzt sich unempfindlich erweisen, während sie bei den andern Anordnungen unter Umständen eine Wirkung gibt.

Gewöhnliches Kohlenlicht erwies sich für weniger empfindliche Flüssigkeiten zu schwach, weshalb Metallseelen in die Kohlen eingeführt wurden. Letztere erhielten der Länge nach eine Durchbohrung von etwa 2,5 mm Weite, in welche Al, Zn oder Sn Drähte eingepaßt wurden. Der Bogen liefert dann mehr ultraviolette Strahlen und erweist sich, wie schon die Herrn Righi und Stoletow[2]) erwähnt haben, wirksamer.

Es nahmen die Erscheinung auf mit einer Stärke wie die Metalle: wässrige Lösungen von Fuchsin, Cyanin, Jodgrün; mit geringerer Stärke wässrige Lösungen von salpetrigsaurem Kalium, Eosin, Hämatoxylin, Blauholz, Rotholz sowie Ameisensäure und Anilin. Keine Wirkung erhielt man bei Wasser, wässrigen Lösungen von Chromsäure, Lakmus, übermangansaurem Kalium, Kobaltnitrat, Salpeter, Bromkalium, sowie bei Aceton und Amylacetat.

Die Lösungen besaßen je nach den verschiedenen damit ausgeführten Versuchen sehr verschiedene Concentrationen. Um einen Anhalt darüber zu geben, wie sich die Empfindlichkeit mit der Concentration ändert, mag das Ergebnis einer Versuchsreihe mit verschieden concentrierten, wässrigen Fuchsinlösungen folgen. Bei einer 0,1 procentigen Lösung nahm die negative Ladung in einer Sekunde um 70—80 Procent ab. Die reciproken Werte der Zeiten, innerhalb welcher eine gleiche Abnahme erfolgt, sind dann für Lösungen

vom Procentgehalt	0,1	0,05	0,025	0,01	0,001	0,0005
	1,00	0,80	0,54	0,28	0,22	0,12.

Fuchsinlösung gelangte auch, durch längeres Auskochen luft-

1) A. Stoletow, C. R. 106. p. 1593. 1888.

2) A. Righi, Phil. Mag. [5] 25. p. 314 u. a. a. oben citierten Orten. A. Stoletow, C. R. 106. p. 1149. 1888.

frei gemacht, noch heiß zur Untersuchung und zeigte da dieselbe Empfindlichkeit wie vor dem Auskochen. Es geht daraus hervor, daß absorbierte Gase bei der Wirkung des Lichtes auf elektrostatisch geladene Körper, wie schon § 1 erwähnt wurde, keine primäre Rolle spielen können.

Die weniger empfindlichen Flüssigkeiten zeigten unter Umständen auch dann einen Elektricitätsverlust bei der Bestrahlung, wenn sie positiv geladen waren. Indessen konnte noch nicht mit Sicherheit festgestellt werden, inwieweit dieser Verlust etwa durch die Wirkung des Lichtes auf die in den umgebenden Körpern influenzierte negative Elektricität hervorgerufen wird.

§ 3.

Nachdem genügendes Beobachtungsmaterial gewonnen war, ging ich darauf aus zu untersuchen, ob eine einfache Beziehung zwischen der Lichtabsorption und der Aufnahmefähigkeit für unsre Erscheinung bestehe. Zunächst zeigte sich, daß alle Lösungen, welche bei der Beleuchtung eine ihnen mitgeteilte negativ elektrische Ladung abgaben, die ultravioletten Strahlen äußerst stark absorbierten. Das letztere Verhalten, welches sich für einige Körper schon aus der Litteratur ergab, wurde noch durch besondere Versuche für die einzelnen, verwendeten Flüssigkeiten nachgewiesen. Bei den orientierenden Beobachtungen überdeckte die eine Blendenöffnung der in § 2 erwähnten Versuchsanordnung ein cylindrisches Gefäß mit Marienglasboden, welches die auf ihre Absorption zu untersuchenden Flüssigkeiten aufnahm. Nach dem Durchgang durch die Lösung trafen die Lichtstrahlen auf ein Kupferblech, welches über der Flüssigkeitsschale lag und nach den früheren Versuchen zu urteilen durch alle ultravioletten Strahlen erregbar war. Die Wirkung versagte nun schon beim Einfüllen äußerst verdünnter empfindlicher Lösungen während sie durch Wasser ungeschwächt hindurchging, erstere mußten daher die erregenden ultravioletten Strahlen sehr stark absorbieren.

Später gelangte die Absorption nochmals mit Hülfe eines fluorescierenden Schirmes zur Untersuchung. Dabei gingen die Strahlen einer Bogenlampe, deren positive Kohle Sn enthielt, zunächst durch einen Spalt, dann durch einen Quarztrog für die absorbierenden Flüssigkeiten. Mit Hülfe einer Quarzlinse und eines Quarzprismas wurde darauf auf einer Uranglasplatte in etwa 2 Meter Abstand vom Lichtbogen ein ultraviolettes Spektrum entworfen. Die Uranglasplatte saß in der Rückwand eines mit Tüchern gegen fremdes Licht geschützten Kastens, dessen Vorderseite, durch welche die Lichtstrahlen eintraten, eine Schiebervorrichtung aufnahm, so daß beliebige Teile des Spektrums ausgeblendet werden konnten. Schon bei Concentrationen von der Größenordnung nach 0,01 Procent erhielt man sehr starke Absorption im Ultraviolett. Es fand sich keine empfindliche Flüssigkeit, welche das Ultraviolett nicht sehr stark absorbierte.

Wenn nun auch dies Ergebnis eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür liefert, daß der Elektricitätsverlust bei der Belichtung eine Folge der Absorption des Lichtes ist, so zeigte sich doch, daß eine einfache Beziehung zwischen den beiden Erscheinungen nicht besteht. Eine solche einfache Beziehung hätte darin bestehen können, daß die Strahlen eines gewissen Spektralbezirks, sobald sie von irgend einer Flüssigkeit absorbiert werden, den Elektricitätsverlust hervorrufen und daß diese Wirkung für verschiedene Flüssigkeiten bei gleicher Absorption nicht sehr verschieden ist.

Schon Versuche mit Lösungen von übermangansaurem und salpetrigsaurem Kalium machten die Gültigkeit dieser einfachen Beziehung unwahrscheinlich; am schlagendsten wurde dies mittelst wässriger und alkoholischer Fuchsinlösung nachgewiesen. Eine 0,01 procentige alkoholische Fuchsinlösung zeigte sich, soweit die Genauigkeit der Versuchsanordnung es zu schließen gestattete, als vollkommen unempfänglich für die Erscheinung, während bei der wässrigen Lösung von gleicher Concentration die Goldblättchen in 10 Sekunden vollständig zusammenfielen. Dabei absorbierte die alkoholische Lösung, sämmtliche Strahlen, welche auf die wässrige wirkten, so daß beim Einschieben eines mit alkoholischer Lösung gefüllten Marienglastroges zwischen Lichtbogen und wässrige Fuchsinlösung auf die letztere nicht mehr gewirkt wurde. Bei der spektralen Zerlegung ergab sich, daß die alkoholische Lösung bei gleicher Concentration dieselben Strahlen, aber sehr viel kräftiger absorbiert wie die wässrige.

§ 4.

Wenn danach eine ganz einfache Beziehung zwischen Lichtabsorption und Elektricitätsverlust bei der Beleuchtung nicht besteht, so wird durch die erwähnten Versuche der Zusammenhang zwischen beiden doch sehr wahrscheinlich gemacht. Die Beziehung könnte von ähnlicher Art sein wie bei der Fluorescenz. Unter anderem kommt bei derselben auch der Fall vor, daß die Lösung derselben Substanz in einem Lösungsmittel fluoresciert, im andern nicht.

Einen derartigen Zusammenhang nachzuweisen wurde auf folgendem Weg erstrebt. Man ging darauf aus empfindliche Lösungen zu finden, welche im Ultraviolett selectiv absorbieren und beabsichtigte dann die Versuche über den Elektricitätsverlust bei der Beleuchtung mit diesen Lösungen unter abwechselnder Beleuchtung mit ultraviolettem Licht, welches durchgelassen und solchem, welches absorbiert wird, anzustellen, indem man das Licht der Bogenlampe spektral zerlegte und die geeigneten Teile des Spektrums ausblendete.

Die Absorptionsspektra wurden mittelst der § 3 angegebenen Versuchsanordnung ermittelt. Von den drei hervorragend empfindlichen Flüssigkeiten: Cyanin-, Fuchsin- und Jodgrünlösung lieferte die erste keine deutliche Absorptionsbande; mit wachsender Concentration rückte vielmehr die Absorption ziemlich gleichmäßig zu größeren Wellenlängen vor. Bei einem Procentgehalt von 0,0036 war die Lösung etwa bis zur Wellenlänge 210×10^{-6} mm durchlässig, bei 0,012 Procent bis 230×10^{-6}, bei 0,1 Proc. bis 330×10^{-6}, absorbierte zuletzt also fast das ganze Ultraviolett. Fuchsinlösung lieferte eine kräftige Absorptionsbande. Dieselbe lag etwa zwischen $\lambda = 250$ und $\lambda = 275$. Das übrige Ultraviolett wurde bei einer 0,006 procentigen Lösung zu beiden Seiten der Absorptionsbande durchgelassen bis auf die Strahlen von $\lambda = 230$ ab nach kleineren Wellenlängen hin. Auch Jodgrünlösung ergab eine Bande, die sich bei einer 0,008 procentigen Lösung etwa von $\lambda = 295$ bis $\lambda = 265$ erstreckte. Das übrige ultraviolette Licht wurde bis auf den letzten Teil, von $\lambda = 230$ ab zu kleineren Wellenlängen, absorbiert. Die Versuchsanordnung gestattete Licht bis zur Wellenlänge 180 etwa wahrzunehmen. Mit derselben gelangten noch eine Reihe anderer Körper zur Untersuchung. Eine Lösung, welche im äußersten Teil des Ultraviolett, jenseits $\lambda = 230$ eine Absorptionsbande geliefert hätte, konnte nicht gefunden werden. Die bei den Versuchen zur Abhaltung des erregenden Lichtes benutzten Glimmer- und Glasplatten erwiesen sich als vollkommen undurchlässig für ultraviolettes Licht.

Setzte man die Fuchsin- oder Jodgrünlösung, nachdem sie negativ geladen war, nun dem spektral zerlegten Licht der Bogenlampe aus, so ging die Elektricität nur sehr langsam weg. Um ein einigermassen reines Spektrum zu behalten, durfte der Spalt nicht zu weit gemacht und die Entfernung von ihm bis zur elektrisierten Lösung nicht zu klein gewählt werden. Die Versuchsanordnung wurde so günstig gestaltet, als es mit den vorhandenen Mitteln möglich erschien, indeß blieb die Wirkung doch zu schwach, als daß man daran hätte denken können einzelne Teile des Spektrums, hinsichtlich ihrer Fähigkeit den Elektricitätsverlust hervorzubringen, mit einander zu vergleichen.

Kräftigeres Licht geeigneter Spektralgebiete ließ sich auch so erhalten, daß man die im § 2 angegebene Anordnung wählte, bei welcher das Licht des Bogens direkt die in nur 30 cm Abstand aufgestellte Flüssigkeit bestrahlt, und in den Gang der Strahlen einen Quarztrog mit geeignet absorbierender Lösung einschaltete. Dazu erwiesen sich Lösungen von salpetrigsaurem Kalium, Kobaltnitrat und Brucin bei Anwendung von Jodgrün- oder auch Fuchsinlösung als empfindliche Flüssigkeiten brauchbar. Die Versuche mit ihnen führten zu dem Resultat, daß nur das alleräußerste Ultraviolett die Erscheinung bei diesen Körpern hervorruft. Dies ergab sich auf folgende Weise. Kobaltnitratlösung vom Procentgehalt 0,016 zeigt eine Absorptionsbande im Ultraviolett, welche fast ganz mit der des Jodgrüns zusammenfällt, etwa von $\lambda = 290$ bis $\lambda = 270$ reicht. Von $\lambda = 240$ ab wird alles Licht absorbiert, während dies bei Jodgrün von 0,008 Proc. erst von 230 ab geschieht. Es läßt somit die Kobaltlösung nur solches Licht durch, welches von der Jodgrünlösung nicht absorbiert wird. Ein Bestrahlungsversuch der letzteren ergab, daß dies Licht das elektrische Phänomen nicht hervorzurufen vermag.

Trat an die Stelle der Kobaltnitratlösung eine solche von salpetrigsaurem Kalium, so ergab sich auch nur eine äußerst geringe Wirkung. Letztere Lösung ist nur an einer Stelle durchlässig, wo die Kobaltlösung absorbiert, nämlich gerade da, wo das Absorptionsband der bestrahlten Jodgrünlösung liegt. Aus beiden Versuchen folgt, daß Licht von größerer Wellenlänge als 240×10^{-6} mm die Erscheinung jedenfalls nur äußerst schwach hervorruft. Daraus, daß eine Wirkung gerade für das Licht, dem die Absorptionsbande des Jodgrüns entspricht, erhalten wurde, kann wegen der Schwäche derselben kein Schluß gezogen werden. Ein entsprechendes Resultat ergab sich bei der Bestrahlung der Fuchsinlösung.

Ueber die Wirkung des Lichtes von kleinerer Wellenlänge als 240 ließ sich mit Hülfe von Brucin- und Äsculinlösung weiterer Aufschluß erhalten. Erstere Lösung zeigt bei einer Concentration von 0,004 zwei Absorptionsbanden diesseits von $\lambda = 240$, die sich nach dem Vorigen unter den angewendeten Verhältnissen bei den Bestrahlungsversuchen nicht deutlich geltend machen. Da aber die Lösung jenseits von $\lambda = 240$ noch bis $\lambda = 218$ etwa durchlässig ist, also in einem Spektralgebiet, von dem ein Teil durch Jodgrün- und Fuchsinlösung vollständig absorbiert wird (von $\lambda = 230$ an), so war von dem durch die Brucinlösung gegangenen Licht eine Wirkung zu erwarten. In der Tat verursachte dasselbe auf 0,008 procentige Jodgrünlösung wirkend in 20 Sekunden eine Abnahme der negativen Ladung um 20 Procent. Fuchsinlösung gab ein entsprechendes Resultat. Unter Anwendung von 0,006 procentiger Asculinlösung, welche das äußerste Ultraviolett nur bis $\lambda = 205$ absorbirt, trat eine Abnahme der negativen Ladung der Jodgrünlösung um 20 Procent bereits in 12 Sekunden ein, und es waren dazu nur 5 Sekunden erforderlich, wenn der Absorptionstrog destilliertes Wasser enthielt, welches ja kein ultraviolettes Licht absorbiert. Es mag noch darauf hingewiesen werden, daß das Zinnspektrum genügend gleichmäßig verteilte Linien in ausreichender Anzahl besitzt, um den erwähnten Schluß, daß nur das äußerste Ultraviolett bei den verwendeten Flüssigkeiten das elektrische Phänomen hervorruft, zu gestatten.

In diesem äußersten Teil des Spektrums konnten nun, wie schon früher erwähnt, bei den untersuchten Flüssigkeiten Absorptionsbanden nicht gefunden werden. In demjenigen Teil des Ultraviolett aber, wo sich Banden zeigten, ist die Wirkung nur sehr schwach. Es wird also nur mit ganz besonders kräftigen Hülfsmitteln gelingen können, den einwandfreien Nachweis für den Zusammenhang zwischen Absorption und Zerstreuung der Elektricität durch Licht auf dem eingeschlagenen Wege zu liefern. Indeß scheint mir dieser Zusammenhang doch hinlänglich wahrscheinlich gemacht, um bei weiteren Versuchen als Annahme mit Vorteil zu Grunde gelegt werden zu dürfen.

Physikal. Inst. d. Univ. Straßburg April 1889.

Ueber regelmäßige Configurationen n_3 auf den Curven dritter Ordnung.

Von

A. Schoenflies.

Die regelmäßigen ebenen Configurationen n_3, deren Existenz auf den Curven dritter Ordnung nachgewiesen werden soll, sind Cyclen von Polygonen, die einander wechselseitig ein- und umgeschrieben sind [1]). Ueber den Zusammenhang zwischen diesen Configurationen und den Curven dritter Ordnung liegen bereits verschiedene Resultate vor. Daß Configurationen 9_3 und 10_3 ganz auf einer Curve C_3 liegen können, wurde zuerst von Herrn Kantor erkannt [2]). Ferner hat Herr Schroeter gezeigt, daß sich eine specielle Klasse der genannten regelmäßigen Configurationen n_3 mit Hilfe der Sätze über conjugirte Polepaare einer Curve dritter Ordnung linear construiren läßt [3]). Die Resultate meiner eigenen Untersuchungen, die ich im Folgenden kurz mittheilen werde, stellen eine noch innigere Beziehung zwischen den bezüglichen Configurationen und den Curven C_3 dar; es läßt sich nämlich zeigen, daß diese Configurationen ganz auf den Curven dritter Ordnung existiren [4]). Mit Rücksicht auf die merkwürdige Thatsache, auf die Herr Schroeter kürzlich aufmerksam machte, daß eine der Configurationen 10_3, obwohl sie combinatorisch als möglich erscheint, doch geometrisch nicht existiren kann [5]), darf der Nachweis der Configurationen n_3 auf den Curven C_3 besonderes Interesse beanspruchen.

Die Ableitung der Resultate will ich zunächst für die allgemeine C_3 durchführen; ich bediene mich dazu der Darstellung der C_3 durch elliptische Functionen, und setze der Einfachheit halber voraus, daß einem Wendepunkt das Argument Null entspricht.

---

1) Ueber diese Configurationen vgl. meine Abhandlung in den math. Ann. Bd. 31. S. 43.

2) Ueber die Configurationen $(3, 3)_8$ und $(3, 3)_9$ und ihren Zusammenhang mit den Curven dritter Ordnung; über die Configurationen 10_3; Wiener Berichte, Bd. 84, S. 915 resp. 1291.

3) Ueber lineare Constructionen zur Herstellung der Configurationen n_3. Diese Nachrichten 1888, S. 237.

4) Für einzelne hat dies auch Herr de Vries gefunden. Vgl. S. 335 Anm. 1.

5) Ueber die Bildungsweise und geometrische Construction der Configurationen 10_3. Diese Nachrichten, 1889, S. 193.

Alsdann sind diejenigen Curvenpunkte, welche einer Configuration n_3 angehören können, solche, deren Argumente ein rationales Verhältniß zu einer Periode haben. Diese Punkte treten bekanntlich auch bei den übrigen Schließungsproblemen auf und spielen überhaupt eine ganz hervorragende Rolle für die Theorie der allgemeinen C_3 [1]). Für jede ganze Zahl m und jede primitive Periode der Curve giebt es $\varphi(m)$ solcher Punkte. Dieselben bilden eine gewisse Configuration, und die folgenden Untersuchungen bilden einen Beitrag zum Studium derselben. Bei tieferer Auffassung stehen sie auch mit der Theorie der Transformation der elliptischen Functionen in enger Beziehung und können als geometrische Deutung gewisser Eigenschaften der Transformationsgleichungen angesehen werden. Beispielsweise finden sich in der letzten Abhandlung des Herrn Kiepert die Teilwerthe der $\wp$-Function in derselben Weise nach einfachen und mehrfachen Cyclen gruppirt, wie die Punkte der bezüglichen Configurationen n_3 [2]). Hierauf an dieser Stelle genauer einzugehen, liegt jedoch nicht in meiner Absicht.

1. Ich betrachte zunächst diejenigen Polygoncyclen, bei denen die Punkte des eingeschriebenen Polygons P_{i+1} der Reihe nach auf den auf einander folgenden Seiten des umgeschriebenen Polygons P_i liegen. Die Punkte von P_i seien

$$0_i,\ 1_i,\ 2_i, \ldots . p_i;\ i = 0, 1 \ldots q$$

Bezeichnen wir nun die Argumente dieser Punkte durch

$$u_0^{(i)},\ u_1^{(i)},\ u_2^{(i)} \ldots\ldots u_p^{(i)}$$

und nehmen an, daß das Argument Null einem Wendepunkt entspricht, so bestehen für die Argumente der Configurationspunkte folgende Relationen:

---

1) Eingehender hat man bisher nur die aus ihnen gebildeten Tangentialcyclen, die sogenannten Durègeschen Polygone, untersucht. Vgl. darüber besonders Picquet, Application de la représentation des courbes du troisième degré à l'aide des fonctions elliptiques, Journ. de l'école polyt. cah. 54. S. 31 ff. Sylvester, on certain ternary cubicform equations. Amer. Journ. of Math. Bd. 3. S. 58 ff. E. Kötter, Beiträge zur Theorie der Osculationen bei ebenen Curven 3. Ord. Diss. Berlin 1884. — Mittelst der Durègeschen Cyclen ist ganz kürzlich Herr de Vries zu solchen Configurationen n_3 gelangt, welche aus Cyclen von Dreiecken bestehen. Ich verdanke diese Kenntniß einer brieflichen Mittheilung an mich.

2) Ueber die Transformation der elliptischen Functionen bei zusammengesetztem Transformationsgrad. Math. Ann. Bd. 32, S. 1; vgl. besonders S. 8—15. — Ueber die invariantentheoretische Bedeutung der fraglichen Punkte vgl. noch Halphen, Recherches sur les courbes planes du troisième degré. Math. Ann. Bd. 15. S. 359.

$$
\begin{array}{lllll}
\mathrm{I} & \mathrm{I}' & & \mathrm{I}^q \\
u_0 + u_1 + u_0' \equiv 0 & u_0' + u_1' + u_0'' \equiv 0 & \dots & u_0^{(q)} + u_1^{(q)} + u_\lambda & \equiv 0 \\
u_1 + u_2 + u_1' \equiv 0 & u_1' + u_2' + u_1'' \equiv 0 & \dots & u_1^{(q)} + u_2^{(q)} + u_{\lambda+1} & \equiv 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \\
u_p + u_0 + u_p' \equiv 0 & u_p' + u_0' + u_p'' \equiv 0 & \dots & u_p^{(q)} + u_0^{(q)} + u_{\lambda-1} & \equiv 0
\end{array}
$$

Es handelt sich darum, sämmtliche Lösungen $u_i^{(k)}$ derselben zu finden. Dann ist zu untersuchen, ob diese Lösungssysteme auch einer wirklichen Configuration n_3 entsprechen. Es ist einleuchtend, daß dies nur dann der Fall sein kann, wenn alle Argumente incongruent und von einander verschieden sind.

Wir beschäftigen uns demnach zunächst mit der analytischen Auflösung der obigen Gleichungen unter der Voraussetzung, daß alle $u_i^{(k)}$ von einander verschieden sind. Diese Gleichungen lassen sich durch andere ersetzen, welche nur die Argumente eines einzigen Polygons enthalten.

Im Besondern ergeben sich für die Argumente der Punkte von P_0 die Relationen:

$$
\text{II)} \quad
\begin{array}{l}
u_0 + (q+1)\, u_1 + (q+1)_2\, u_2 + \dots + u_{q+1} + (-1)^q u_\lambda \equiv 0 \\
u_1 + (q+1)\, u_2 + (q+1)_2\, u_3 + \dots + u_{q+2} + (-1)^q u_{\lambda+1} \equiv 0 \\
\dots \\
u_p + (q+1)\, u_0 + (q+1)_2\, u_1 + \dots + u_q + (-1)^q u_{\lambda+p} \equiv 0.
\end{array}
$$

Die Coefficienten sind die Binomialcoefficienten. Die Indices kommen nur in Bezug auf $p+1$ als Modul in Frage.

Die linken Seiten der vorstehenden Relationen repräsentiren $p+1$ homogene lineare Functionen der $p+1$ Variabeln u_i mit ganzzahligen Coefficienten. Die Determinante derselben ist bis auf einen Ausnahmefall von Null verschieden. Lassen wir diesen Fall zunächst bei Seite[1]) und bezeichnen den Wert der Determinante durch m, so ist für jeden Index i

$$m u_i \equiv 0$$

die Auflösung der Relationen II; m ist eine ganze Zahl.

2. Sind u_i und v_i zwei Lösungssysteme, so ist auch $u_i + v_i$ resp. $u_i - v_i$ ein Lösungssystem. Aus diesem Grunde genügt es, diejenigen Argumente zu suchen, welche nur mit einer primitiven Periode gebildet sind. Wir bezeichnen dieselbe durch $\tilde{\omega}$. Nur wenn $\tilde{\omega}$ die reelle Periode ist, sind die zugehörigen Configurationen ebenfalls reell.

---

1) Die hierauf bezüglichen Resultate theile ich an anderer Stelle ausführlicher mit.

Da jedes u_λ ein rationales Verhältniss zu $\tilde{\omega}$ hat, so besteht für zwei beliebige Argumente u_i und $u_i + 1$ sicher eine Relation

III) $$\mu u_{i+1} - \nu u_i \equiv 0,$$

wo μ und ν ganze Zahlen sind. Nun ändern sich die Relationen II) nicht, wenn man die u_λ cyclisch mit einander permutirt. Diese Eigenschaft ist characteristisch; sie steht in Uebereinstimmung damit, daß auch die Configurationen selbst eine cyclische Substitution gestatten. Die Relation III) gilt daher für jeden Index $i = 0, 1 \ldots p$, und die so entstehenden Gleichungen sind den Gleichungen II) aequivalent.

Nun werde

$$u_0 = \frac{\alpha_0}{m}\tilde{\omega}, \quad u_1 = \frac{\alpha_1}{m}\tilde{\omega} \; \ldots\ldots \; u_p = \frac{\alpha_p}{m}\tilde{\omega}$$

gesetzt. Jedes ganze Vielfache eines Lösungssystems ist wieder ein Lösungssystem; daher dürfen wir uns auf die Aufsuchung solcher u_λ beschränken, bei denen die Zahlen α_λ weder mit m noch unter sich einen gemeinsamen Teiler besitzen. Die bezüglichen Lösungssysteme sollen einfache Lösungssysteme heißen, so folgt sofort, daß jedes Lösungssystem durch Addition und ganzzahlige Multiplication aus einfachen abgeleitet werden kann.

Die Relation III geht für einfache Lösungssysteme in die Congruenz

$$\alpha_{i+1} \equiv g\,\alpha_i \text{ mod. } m$$

über, wo g relativ prim zu m ist; und zwar folgt nun, daß

$$g^{p+1} \equiv 1 \text{ mod. } m$$

ist und daß für $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p$ geradezu die Zahlen

$$1, \; g, \; g^2 \ldots g^p$$

gewählt werden können. Also folgt:

Jedes einfache Lösungssystem, welches die Relationen II befriedigt, und zu lauter distincten Punkten führt, ist von der Form

$$u_0 \equiv \frac{\tilde{\omega}}{m}, \quad u_1 \equiv g\frac{\tilde{\omega}}{m}, \quad u_2 \equiv g^2\frac{\tilde{\omega}}{m}, \; \ldots \; u_p \equiv g^p\frac{\tilde{\omega}}{m}$$

wenn g relativ prim zu m ist und der Congruenz

$$g^{p+1} \equiv 1 \text{ mod. } m$$

genügt.

Die Zahl $p+1$ ist ein Divisor von $\varphi(m)$, wenn, wie üblich, $\varphi(m)$ die Anzahl der Zahlen bedeutet, die kleiner als m und relativ prim zu m sind.

3. Es sei nun m eine beliebige Zahl und

$$g^{p+1} \equiv 1 \text{ mod. } m,$$

so ist nun umgekehrt zu untersuchen, ob die Argumente

$$u_0 \equiv \frac{\tilde{\omega}}{m}, \quad u_1 \equiv g\,\frac{\tilde{\omega}}{m}, \; \ldots \; u_p \equiv g^p\,\frac{\tilde{\omega}}{m}$$

stets zu einer Configuration n_3 mit lauter distincten Punkten Veranlassung geben. Dabei ist natürlich $p \geqq 2$ vorauszusetzen und $n \geqq 8$.

Seien allgemein

$$u_i \equiv \frac{\alpha_i}{m}\tilde{\omega}, \; u_i' \equiv \frac{\alpha_i'}{m}\tilde{\omega}, \; \ldots \; u_i^{(q)} \equiv \frac{\alpha_i^{(q)}}{m}\tilde{\omega}$$

Lösungen der Relationen I, I', . . ., so müssen, wie diese Relationen unmittelbar ergeben, sämmtliche Zahlen $\alpha_i^{(k)}$ denselben Teiler mit m haben. Sind daher, wie im vorliegenden Fall, die Zahlen $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = g$, . . . $\alpha_p = g^p$ relativ prim zu m, so sind auch alle $\alpha_i^{(k)}$ zu m relativ prim. Nun bestehen für α', α_1' . . . α_p' die Congruenzen

$$\left.\begin{array}{r} 1+g+\alpha' \equiv 0 \\ g+g^2+\alpha_1' \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ g^p+1+\alpha_p' \equiv 0 \end{array}\right\} \text{mod. } m$$

es muß daher, damit α' relativ prim zu m ist, auch $1+m$ zu m relativ prim sein. Daraus folgt beiläufig, daß m eine ungerade Zahl sein muß. Ferner sei nun h diejenige Zahl zwischen 0 und m, so daß

$$1+g+h \equiv 0 \text{ mod. } m$$

ist. Giebt es dann eine Zahl λ, so daß $h \equiv g^\lambda$, also

$$1+g+g^\lambda \equiv 0 \text{ mod. } m,$$

so bilden bereits die Punkte u_0, u_1 . . . u_p ein $(p+1)$-Eck, welches sich selbst regelmäßig ein- und umschrieben ist, und zwar so, daß der $i$te, $(i+1)$te, $(i+\lambda)$te Punkt auf einer Geraden liegen. Dies ist nur dann illusorisch, wenn λ einen der Werte 0, 1, 2 hat, also h einer der Zahlen

$$1, \; g, \; g^2$$

congruent ist[1]). Wenn dagegen die fragliche Zahl nicht existirt, so liefern die Zahlen

$$\alpha' = h,\ \alpha_1' = gh,\ \ldots\ \alpha_p' = g^p h$$

ein Polygon P_1, welches P_0 eingeschrieben ist, und ist q die kleinste Zahl, so daß für irgend einen Wert λ

$$h^{q+1} \equiv g^\lambda \text{ mod. } m$$

ist, so bestimmen die Zahlen

$$\text{A)}\quad \begin{array}{lllll} 1, & g, & g^2, & \ldots & g^p \\ h, & gh, & g^2h, & \ldots & g^ph \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h^q, & gh^q, & g^2h^q, & \ldots & g^ph^q \end{array}$$

$(p+1)(q+1) = n$ verschiedene Punkte der Curve dritter Ordnung, welche eine Configuration n_3 bilden, die aus einem Cyclus von $q+1$ einander ein- und umschriebenen $(p+1)$-Ecken besteht.

Sei z. B. $m = 55$. Es ist $\varphi(m) = 40$. Wir setzen

$$g \equiv 3^4 \equiv 26, \text{ so ist } g^5 \equiv 1.$$

Ferner wird

$$h \equiv 28 \text{ und } h^4 \equiv 31 \equiv g^3.$$

Diese Werte g, h bestimmen daher eine Configuration 20_3, die aus vier einander ein- und umgeschriebenen Fünfecken besteht und zwar sind die auf ihren Seiten liegenden Punkte resp. durch folgende Zahlen characterisirt:

1, 26, 28;	26, 16, 13;	16, 31, 8;	31, 36, 43;	36, 1, 18;
28, 13, 14;	13, 8, 34;	8, 43, 4;	43, 18, 49;	18, 28, 9;
14, 34, 7;	34, 4, 17;	4, 49, 2;	49, 9, 52;	9, 14, 32;
7, 17, 31;	17, 2, 36;	2, 52, 1;	52, 32, 26;	32, 7, 16.

Ist übrigens m eine Primzahl und g eine primitive Wurzel derselben, so liefern die Potenzen

$$1,\ g,\ g^2,\ \ldots\ g^{m-2}$$

stets eine Configuration $(m-1)_3$, die aus einem einzigen sich selbst ein- und umgeschriebenen Polygon besteht[2]).

4. Die Zahl $n = (p+1)(q+1)$ ist entweder $\varphi(m)$ selbst,

---

1) Es ist formell auch der Fall $\lambda = p$ noch zu erwähnen; dieser ist aber von $\lambda = 2$ nicht verschieden. Uebrigens ist für $\lambda = 2$ $g^3 \equiv 1$ mod. m.

2) Für $m = 11$ ergeben sich die Configurationen 10_3, deren Existenz auf der C_3 von Herrn Kantor nachgewiesen wurde; a. a. O. S. 1301. Andere Zahlen, die zur 10_3 führen, sind z. B. $m = 33$, $g = 7$.

oder doch ein Teiler von $\varphi(m)$. Ist nämlich $n < \varphi(m)$, so sei k irgend eine Zahl relativ prim zu m, welche unter den Zahlen $g^\mu h^\nu$ der Tabelle A) nicht enthalten ist. Alsdann sind die sämmtlichen n Zahlen

$$g^\mu h^\nu k$$

$$\mu = 0, 1, \ldots p, \quad \nu = 0, 1, \ldots q$$

unter einander und von den n Zahlen $g^\mu h^\nu$ verschieden sind. Nun giebt es stets eine kleinste Zahl r, so daß für irgend ein μ, ν

$$k^{r+1} \equiv g^\mu h^\nu \bmod. m$$

ist; dann sind sämmtliche Zahlen

$$g^\mu h^\nu k^\varrho$$

$$\mu = 0, 1, \ldots p, \quad \nu = 0, 1, \ldots q, \quad \rho = 0, 1, \ldots r$$

von einander verschieden. Diese Zahlen erschöpfen entweder die $\varphi(m)$ Zahlen oder nicht; u. s. w. . . . und so folgt in der That, daß entweder $n = \varphi(m)$ ist, oder daß die $\varphi(m)$ Punkte in mehrere derartige Configurationen zerfallen, deren Anzahl gleich dem Quotienten von $\varphi(m)$ und n ist.

5. Analoge Betrachtungen lassen sich für die in § 6 meiner Arbeit erörterten Configurationen anstellen. Soll eine Configuration dieser Art auf der Curve dritter Ordnung bestehen, so muß, unter Beibehaltung der früheren Bezeichnung, den Gleichungen

$$\begin{array}{lll}
u_0 + u_1 + u_0' \equiv 0 & u_0' + u_1' + u_0'' \equiv 0 & u_0^{(q)} + u_1^{(q)} + u_\lambda \equiv 0 \\
u_1 + u_2 + u_l' \equiv 0 & u_l' + u_2' + u_l'' \equiv 0 & u_1^{(q)} + u_2^{(q)} + u_{\lambda \pm l} \equiv 0 \\
\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot & \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot & \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\
u_p + u_0 + u_{pl}' \equiv 0 & u_p' + u_0' + u_{pl}'' \equiv 0 & u_p^{(q)} + u_0^{(q)} + u_{\lambda \pm pl} \equiv 0
\end{array}$$

durch $(p+1)(q+1)$ von einander verschiedene Argumente genügt werden. Man kann aus diesen Relationen wieder andere ableiten, welche nur die einem Polygon zugehörigen Argumente enthalten, und da die Configuration bei cyclischer Vertauschung der Polygonpunkte in sich übergeht, so folgt, daß alle oben über die Gleichungen I gezogenen Folgerungen hier unverändert bestehen bleiben. Bezeichnen wir also die Determinante wieder durch m, so besteht für jedes Argument $u_i^{(k)}$ eine Relation

$$m u_i^{(k)} \equiv 0$$

und jedes einfache Lösungssystem der obigen Gleichungen ist wieder von der Form

$$\frac{\tilde{\omega}}{m}, \quad g\frac{\tilde{\omega}}{m}, \quad g^2\frac{\tilde{\omega}}{m}, \; \ldots \ldots \; g^p\frac{\tilde{\omega}}{m},$$

wenn

$$g^{p+1} \equiv 1 \text{ mod. } m$$

ist.

Es fragt sich nun wieder, unter welchen ferneren Bedingungen die vorstehenden Zahlen $1, g, g^2 \ldots . g^p$, resp. die zugehörigen Argumente eine Configuration n_3 der betrachteten Art bestimmen. Zunächst folgt wie oben, daß $1+g$ relativ prim zu m, also auch im Besonderen m ungerade sein muß. Nun sei g so gewählt, daß nicht etwa $1+g+g^\lambda \equiv 0$ mod. m ist; dies ist nötig, damit die bezüglichen $p+1$ Punkte nicht schon ein sich selbst ein- und umgeschriebenes Polygon bilden. Setzen wir nun

$$1+g+h_1 \equiv 0 \text{ mod. } m$$

so sind wieder

$$h_1, \quad gh_1, \quad g^2h_1, \ldots \ldots g^p h_1$$

die Zahlen, welche den Ecken des Polygons P_1 entsprechen. Soll dies dem Polygon P_0 in der durch obige Gleichungen characterisirten Weise eingeschrieben sein, so muß es eine Zahl k relativ prim zu $p+1$ geben, so daß die Congruenz

$$h_1 + g^k \; h_1 + h_2 \equiv 0 \text{ mod. } m$$

durch eine Zahl h_2, die relativ prim zu m ist, erfüllt werden kann; d. h. es muß

$$1+g^k$$

relativ prim zu m sein. Setzen wir noch

$$g^k \equiv g_1, \quad \text{so ist } g_1^l \equiv g$$

und es bestimmen die obigen Zahlen das Polygon P_1 so, daß die Punkte desselben der Reihe nach den Zahlen

$$h_1, \quad g_1 h_1, \quad g_1^2 h_1 \ldots \ldots g_1^p h_1$$

entsprechen. Giebt es nun eine Potenz von g, so daß

$$h_2 \equiv g^\lambda \text{ mod. } m$$

ist, so bilden P_0 und P_1 bereits eine Configuration der angegebenen Art. Wenn nicht, so schliessen wir auf dieselbe Weise weiter.

Wir gelangen dabei zuletzt zu einem Polygon P_q, welches die Punkte

$$h_q, \quad g_q h_q, \quad g_q^2 h_q \ldots \ldots g_q^p h_q$$

enthält und zwar bestehen die Congruenzen

$$\left.\begin{aligned} g_q &\equiv g^{kq} \\ h_q + g_q h_q + g^\lambda &\not\equiv 0 \end{aligned}\right\} \text{ mod. } m$$

und es muß wieder $1+g_q$ relativ prim zu m sein. Hierzu kommt, damit die Configuration sich schließt, die weitere Bedingung, daß

$$g_q \equiv g^{\pm l} \text{ mod. } m$$

ist, und zwar entspricht dem oberen Zeichen eine Configuration erster Art, dem unteren eine solche zweiter Art. Nun bestehen aber die Congruenzen

$$g \equiv g_1^l, \quad g_1 \equiv g_2^l \; \ldots\ldots \; g_q \equiv g^{\pm l},$$

hieraus folgt

$$g_q \equiv g_q^{\pm l^{q+1}} \text{ mod. } m$$

und daher ergiebt sich schließlich mit Rücksicht auf $g^{p+1} \equiv 1$ mod. m, daß

$$l^{q+1} \equiv \pm 1 \text{ mod. } p + 1$$

ist [1]). Dieselbe Congruenz besteht auch für k. Beachten wir nun noch, daß die Zahlen $g, g_1, g_2 \ldots\ldots g_q$ in Bezug auf den Modul m resp. durch

$$g, g^k, g^{k^2} \ldots\ldots g^{k^q}$$

dargestellt werden, so erhalten wir schließlich folgende zusammenfassende Bedingung, daß die Zahlen g und k den Congruenzen

$$g^{p+1} \equiv 1 \text{ mod. } m, \quad k^{q+1} \equiv \pm 1 \text{ mod. } p + 1$$

genügen und die Zahlen

$$1 + g, \; 1 + g^k \ldots\ldots 1 + g^{k^q}$$

sämmtlich relativ prim zu m sind. Sind dieselben erfüllt, so bestimmen die oben genannten

$$n = (p + 1)(q + 1)$$

Punkte eine Configuration n_3 der betrachteten Art.

Um ein Beispiel zu geben, setzen wir wieder $m = 55$. Dann läßt sich $g = 16$ wählen. Es ist

$$16^5 \equiv 1$$

ferner wird

$$h_1 = 38, \quad h_2 = 19, \quad h_3 = 52, \quad h_4 = 1 = g^0$$

$$g_1 = 26, \quad g_2 = 31, \quad g_3 = 36$$

$$l = 2$$

und wir erhalten eine Configuration 20_3, welche aus vier einander cyclisch umschriebenen Fünfecken besteht. Die zu ihnen gehörigen Zahlen sind

1) Vgl. die analoge Bedingung a. a. O. S. 62.

1,	16,	36,	26,	31
38,	53,	3,	23,	48
19,	39,	54,	24,	29
52,	2,	17,	7,	32

so daß z. B.

1, 16, 38; 16, 36, 3; 36, 26, 48; 26, 31, 53; 31, 1, 23;

je einer Geraden entsprechen; u. s. w.

Die übrigen zwanzig Punkte liefern gleichfalls eine Configuration 20_3 der vorstehenden Art; wir erhalten sie, wenn wir jede der obigen Zahlen mit 4 multipliciren. Auch hier läßt sich genau wie oben allgemein nachweisen, daß wenn aus den $\varphi(m)$ Punkten eine Configuration n_3 dieser Art gebildet werden kann, dieselben in mehrere derartige Configurationen zerfallen, deren Zahl gleich dem Quotienten von $\varphi(m)$ und n ist.

6. Es ist oben erwähnt worden, daß jedes Lösungssystem der ursprünglichen Relationen durch Combination einfacher Lösungssysteme gebildet werden kann. Dabei ist zu beachten, daß zur Zusammensetzung auch solche Lösungssysteme benutzt werden können, deren Argumente nicht sämmtlich verschieden sind. Die Systeme, die hier in Frage kommen, sind solche, deren Argumente v_i sämmtlich gleich dem dritten Teil einer Periode sind. Werden sie zu Argumenten u_i hinzugefügt, die eine wirkliche Configuration bestimmen, so können auch die Werte $u_i + v_i$ zu einer analogen Configuration führen. Dies ist einerseits der Fall, wenn alle v_i einander gleich sind; alsdann ergiebt sich dieselbe Configuration, nur auf einen andern Wendepunkt bezogen. Aber auch wenn die v_i in cyclischer Reihenfolge die Werte $0, \frac{\tilde{\omega}}{3}, \frac{2\tilde{\omega}}{3}$ haben, liefern die Argumente $u_i + v_i$ eine neue Configuration n_3 derselben Art. Natürlich ist das letztere nur möglich, wenn p ein Vielfaches von 3 ist.

Es wäre nun die Lage dieser verschiedenen Typen von Configurationen zu einander zu untersuchen; doch soll hierauf nicht weiter eingegangen werden.

Endlich läßt sich die Aufgabe stellen, bestimmt vorgeschriebene Configurationen n_3 auf der C_3 anzugeben. Diese Aufgabe kann jedoch nicht in jedem Fall gelöst werden. Im Besonderen ist es unmöglich, die Desargues'sche Configuration 10_3 auf der C_3 aufzufinden; die gegenteiligen Resultate des Herrn Kantor können daher keine Geltung haben[1]).

1) Vgl. a. a. O. S. 1301.

7. Die vorstehenden Resultate lassen sich unmittelbar auf die Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt übertragen. Wir denken die Coordinaten der Curven als rationale Functionen eines Parometers t dargestellt, so daß drei Punkte t_1, t_2, t_3 auf einer Geraden liegen, wenn

$$t_1\, t_2\, t_3 = -1$$

ist. Bezeichnen wir nun $\sqrt[m]{-1}$ durch ε, so sind die gefundenen Sätze unmittelbar auf die Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt anwendbar, wenn wir

$$u_i = \alpha_i \frac{\tilde{\omega}}{m} \text{ durch } t_i = \varepsilon^{\alpha_i}$$

ersetzen. Dagegen könnten auf den Curven dritter Ordnung mit Spitze nur solche Configurationen liegen, für welche die zu den Relationen II gehörige Determinante verschwindet Aber die bezüglichen Configurationen werden, wie ich an anderer Stelle zeigen werde, für die Curven C_3 mit Spitze sämmtlich illusorisch. Auf den Curven dritter Ordnung mit Spitze giebt es daher Configurationen n_3 der betrachteten Art überhaupt nicht.

Universität.

Beneke'sche Preisstiftung.

Die philosophische Fakultät der Georg-Augusts-Universität erneuerte auch in diesem Jahre in einer an dem Geburtstage des Stifters, am 11ten März, gehaltenen öffentlichen Sitzung dankbar die Erinnerung an den im Jahre 1864 verstorbenen Preußischen Consistorialrath und Prediger Carl Gustav Beneke, welcher zum Andenken an seinen verstorbenen Bruder, den Professor an der Universität Berlin, Friedrich Eduard Beneke, die zur Förderung des Studiums der Philosophie — mit Ausschluß der sogenannten speculativen Philosophie — bestimmte Beneke'sche Preisstiftung gegründet hat.

Die für das Jahr 1889 von der philosophischen Fakultät der Georg-Augusts-Universität aus der Beneke'schen Preisstiftung gestellte „Beneke'sche philosophische Preisaufgabe“ hatte folgenden Wortlaut:

„Es sollen die in der Gegend zwischen Weser, Werra und Leine auftretenden basaltischen Gesteine rücksichtlich ihrer petrographischen Natur, chemischen Beschaffenheit und der in ihnen etwa zufällig vorkommenden Mineralien, sowie endlich bezüglich ihres geologischen Auftretens genau untersucht werden, auf daß dadurch eine möglichst allseitige Kenntniß dieser nördlichsten Basalte Deutschlands erreicht werde."

In derselben am 11ten März 1889 abgehaltenen öffentlichen Sitzung wurde verkündet, daß die angeführte für das Jahr 1889 gestellte Beneke'sche Preisaufgabe einen Bearbeiter nicht gefunden habe.

Für das Jahr 1892 stellt die philosophische Fakultät folgende neue

Beneke'sche philosophische Preisaufgabe:

„Die inneren Zustände des Kurfürstenthums **Hannover** unter der französisch-westfälischen Herrschaft 1806—1813".

„Die inneren Verhältnisse des Landes Hannover zur Zeit Napoleons I. sind nie quellenmäßig dargestellt worden. Die kleine Schrift von W. Havemann „Das Kurfürstenthum Hannover unter zehnjähriger Fremdherrschaft 1803—1813 (Jena 1867)" ist nur eine dürftige Compilation, Göcke's treffliche Geschichte des Königreichs Westfalen aber (vollendet und herausgegeben von Th. Ilgen, Düsseldorf 1888) bringt, abgesehen davon, daß sie nur einen Theil des Kurfürstenthums Hannover berühren kann, mehr die äußere Geschichte des neuen Königreichs, das in Kassel seinen Mittelpunkt fand, als die inneren Zustände der einzelnen unter der französisch-westfälischen Herrschaft vereinigten Landschaften zur Anschauung".

„Die Fakultät wünscht, daß auch das bisher nicht benutzte Aktenmaterial nach Möglichkeit herangezogen werde, und zwar sowohl für die innere Geschichte der schon von 1806 an mit dem Königreich Westfalen vereinigten Landestheile, als auch der erst später damit verbundenen oder dem französischen Kaiserreiche einverleibten Gebiete. Die Beschränkung der Aufgabe auf die Jahre 1806—1813 aber ist nicht so zu verstehen, als ob nicht die Untersuchung vielfach bis auf die erste Occupation Hannovers durch die Franzosen zurückgreifen solle, und als ob der Arbeit nicht zur Empfehlung gereichen werde, was sie etwa neues aus den Jahren 1803—1806 beibringen wird. Als die Hauptaufgabe ist die Darstellung der Verwaltung in ihren wichtigeren Zweigen, mit besonderer Rücksicht auf das Finanzwesen und den Volkswohlstand anzusehen. Uebrigens sollen neben den politischen Zuständen auch diejenigen Personen, einheimische oder fremde, ihre Würdigung finden, welche in hervorragender Weise in der Verwaltung des Landes oder einzelner Theile desselben thätig gewesen sind. Es ist die Hoffnung nicht ausgeschlossen, daß zu diesem Zwecke auch ungedruckte Familienpapiere nutzbar gemacht werden können".

Jede Bewerbungsschrift, welche berücksichtigt werden soll, ist in deutscher Sprache abzufassen und bis zum

31ten August 1891

kostenfrei an uns einzusenden. Jede Bewerbungsschrift muß auf dem Titelblatte mit einem Spruche versehen sein und ebendaselbst die Bezeichnung einer Adresse enthalten, an welche die Arbeit für den Fall, daß sie nicht preiswürdig befunden wird, zurückzusenden ist. Ferner muß einer jeden solchen Arbeit ein versiegelter Brief beigegeben sein, welcher auf der Außenseite mit dem Spruche der Abhandlung bezeichnet ist und innerhalb Namen, Stand und Wohnort des Verfassers angiebt. In anderer Weise darf der Name des Verfassers nicht angegeben sein.

Der erste Preis beträgt 3400 ℳ, der zweite 680 ℳ.

Die etwaige Zuerkennung dieser beiden Preise oder eines derselben erfolgt am 11ten März 1892, dem Geburtstage des Stifters, in öffentlicher Sitzung der philosophischen Fakultät der Georg-Augusts-Universität.

Die gekrönten Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigenthum der Verfasser.

Die Preisaufgaben, für welche die Bewerbungsschriften bis zum 31ten August 1889 und bis zum 31ten August 1890 einzusenden sind, sind in den „Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen" im Jahrgange 1887 auf Seite 83 und im Jahrgange 1888 auf Seite 132 veröffentlicht.

Göttingen, den 1sten Mai 1889.

Die philosophische Fakultät.

Der Dekan

H. A. Schwarz.

Inhalt von No. 12.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

19. Juni. №. 13. 1889.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber die Dampfdichtebestimmung einiger Elemente und Verbindungen bei Weißgluth.

Von

Heinrich Biltz und **Victor Meyer.**

Vor etwa zwei Jahren brachen V. Meyer und J. Mensching ihre auf Dichtebestimmungen hochsiedender Substanzen gerichteten Untersuchungen ab, weil es ihnen nicht gelang, die von ihnen damals erreichte Temperatur — etwa 1400—1450° C — zu steigern; denn wenn auch C. Langer und V. Meyer in ihren „pyrochemischen Untersuchungen“ [1]) Dichte-Messungen mit Gasen bei 1700° ausgeführt hatten, so gestattete doch ihr, auf Anwendung eines horizontalen Versuchsrohrs basirtes Verfahren keine Anwendung auf feste Körper, die in einer vertical stehenden Birne untersucht werden müssen. Nun haben in der letzten Zeit die Herrn Nilson und Pettersson in Stockholm verschiedentlich Dichtebestimmungen veröffentlicht, die sie bei einer Temperatur von 1600° C ausgeführt hatten; auf die Anfrage des einen von uns teilte uns Herr Prof. Nilson in liebenswürdigster Weise alle Einzelheiten des bisher nur der Idee nach publicirten Heizverfahrens mit, nach dem es ihnen möglich gewesen

1) Braunschweig, 1884.

ist, die Temperatur eines Perrotschen Gasofens durch eigenartige Hinzuführung von Gebläseluft auf jene sehr hohe Temperatur zu steigern. Unter Anwendung dieser Methode haben wir die vor zwei Jahren abgebrochenen Untersuchungen wieder aufgenommen und berichten in folgendem über unsere Resultate [1]).

Die Dichtebestimmungen wurden nach dem Gasverdrängungsverfahren ausgeführt. Als Verdampfungsgefäß dienten die von dem Einen von uns und J. Mensching beschriebenen, innen und außen glasierten Porcellanbirnen der Berliner Kgl. Porzellanmanufactur [2]). Dieselben wurden im Ofen direct durch die Flammen erhitzt. Da jedoch mit ihnen bei einer so hohen Temperatur noch keine eingehenden Untersuchungen angestellt worden waren, prüften wir zunächst, ob die Wandungen der Birne für Flammengase bei der Versuchstemperatur impermeabel sind. Ein Platinrohr wurde durch den Hals in die Birne eingeführt und durch dieses Kohlensäure durch den erhitzten Apparat geleitet; die austretende Kohlensäure wurde in einem Schiffschen Apparat durch Alkali absorbiert. Nach Verdrängung der Luft aus der Birne wurde drei Minuten lang das von der Lauge nicht absorbierte Gas — die Verunreinigungen der Kohlensäure — aufgesammelt und nach längerem Durchschütteln mit der Lauge in einem Messrohr gemessen. Jetzt wurde bei voller Glut des Ofens der Kohlensäurestrom unterbrochen und nach 10 Minuten wieder auf drei Minuten hergestellt. Wären Flammengase eingedrungen, so würden diese nun durch die Kohlensäure in den Meßapparat übergeführt und so bestimmt werden. Die Differenz beider Volumina 0.02 cc ist so gering, daß man daraus auf völlige Undurchdringlichkeit der Porcellanwandungen für die hier in Betracht kommenden Flammengase schließen muß.

Die Porcellanbirnen erweichen bei der Ofentemperatur beträchtlich, jedoch verändern sie ihr Volumen nicht, wie mehrfache Ausmessungen derselben vor und nach der Erhitzung ergaben, wenn weder innen noch außen ein Ueberdruck entsteht. Einmal geschah dies, allerdings nur in geringem Maße, bei der höchsten Ofentemperatur und alsbald löste sich der Boden auf der einen Seite unter Bildung eines weit klaffenden Spaltes los. Um die Widerstandsfähigkeit der Birnen zu erhöhen, umwickelten wir sie

1) Eine kurze Mittheilung der Resultate ist in den Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXII, 725. 1889 veröffentlicht.

2) Die Kgl. Porcellanmanufactur hält diese Birnen jetzt vorräthig und zeigt sie in ihrem Katalog zu einem Preise von M. 8.00 pro Stück ohne Compensator an.

mit einem dicken Platinblech, welches der Porcellanwandung überall eng auflag und mit dieser durch die leichtschmelzende Glasur fest verbunden wurde.

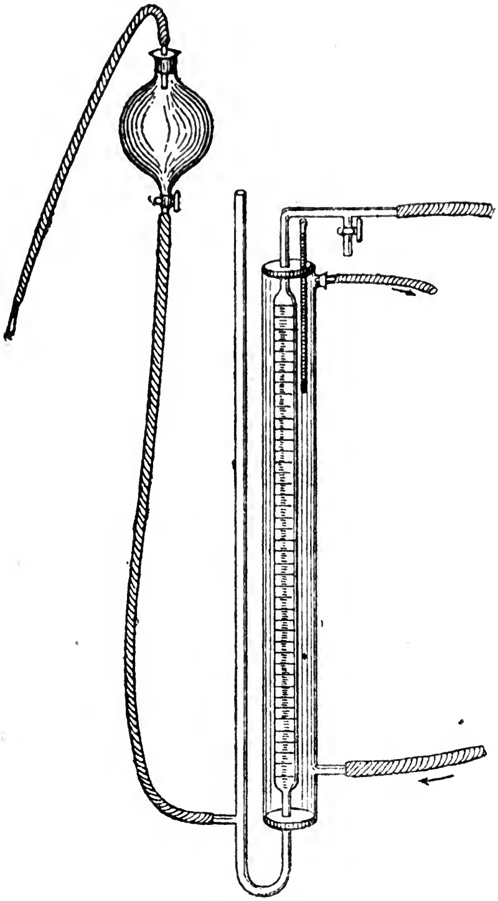
Als Kopf des Apparates wurde die von uns angegebene Fallvorrichtung[1]) benutzt, nur wurde, da er sich bei den Temperaturmessungen um einen für längere Zeit absolut dichten Schluß handelt, der Vorsicht halber der als Verschluß dienende mit Gummischlauch überzogene kleine Glasstab mit einem weiteren das obere Ende der Fallvorrichtung ebenfalls umschließenden Kautschuckschlauch umgeben, welcher durch zwei Ligaturen fest mit Fallvorrichtung und Glasstab verbunden wurde. Ebenso wurde auf den absolut dichten Schluß der übrigen Verbindungsstellen peinlichste Sorgfalt verwandt; sämmtliche dabei zur Verwendung kommenden Schläuche wurden vor jeder Benutzung genau untersucht und an den zu verbindenden Teilen mit Ligaturen befestigt.

Das Ausführungsrohr der Fallvorrichtung wurde durch ein enges Bleirohr (innerer Durchmesser $1\frac{1}{2}$ mm) mit einer Gasbürette verbunden, die zur Messung der bei der Temperaturmessung und bei der Dichtebestimmung verdrängten Gasmengen diente. Der Gasofen selbst war in einer großen, von der Decke bis zum Boden reichenden Kapelle des Arbeitsraumes aufgestellt, so daß wir durch die Wände resp. Fenster der Kapelle vor der Ausstrahlung geschützt uns dicht neben ihm lange Zeit aufhalten konnten. Außerhalb der Kapelle war die Gasbürette aufgestellt. Die Verbindung derselben mit der Birne durch ein Bleirohr erwies sich sowohl des geringen Volumens als auch der Biegsamkeit und leichten Handhabung desselben wegen als sehr praktisch.

Die Gasbüretten (vgl. Figur) sind ganz nach dem Muster der in einer früheren Arbeit[2]) des Einen von uns beschriebenen in der Ilmenauer Glashütte hergestellt und vom hiesigen Mechaniker Apel montiert worden. Die größere war in 200 cc geteilt und zwar von $\frac{1}{10}$ zu $\frac{1}{10}$ cc. Die Länge der Skala betrug 81 c. Das mit Teilung versehene Rohr war von einem 5 c weiten und 92 c langen Glasmantel umgeben, durch den Kühlwasser mittelst der zwei Rohransätze, die dicht über und unter den Stopfen mündeten, geleitet werden konnte. Zum Einstellen der Sperrflüssigkeit im zweiten Schenkel des U-förmigen Rohres diente der Kugelteil; um zu

1) Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1888, pag 19, Zeitschrift für physik. Chemie II, 188. 1888.

2) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXI, 2767. 1888.



$^1/_{12}$ natürl. Grösse.

diesem Zweck jedoch an dem zu ihm führenden Gummischlauch nicht zu stark saugen resp. blasen zu müssen, konnte die Kugel gesenkt und gehoben werden, so daß nur die feinere Einstellung mittelst Saugens und Blasens bewerkstelligt zu werden brauchte. Das Rohr welches in den Meßcylinder führt war dickwandig und von geringem innern Durchmesser (0.7 mm). An ihm befand sich eine Gabelung, deren einer Zweig mit einem Hahn geschlossen werden konnte. Durch diesen Rohransatz konnte die Birne und das Meßrohr mit der Außenluft in Verbindung gesetzt werden, was z. B. zum genauen endgiltigen Einstellen der Sperrflüssigkeit (vgl. pag. 355) im Meßrohr beim Beginn des Versuches unbedingt nötig ist. Die Ablesungen wurden mit einer Lupe ausgeführt, während hinter den abzulesenden Meniscus eine Kerzenflamme gehalten wurde; auf diese Weise gelang es bis auf $\frac{1}{20}$ cc genau abzulesen. In gleicher Weise war die kleinere Gasbürette construiert und ausgerüstet; sie war in 50 cc geteilt; die Länge der Teilung betrug 39 c. Beide Gasbüretten waren von demselben Kühlwasserstrom umgeben; in jedem Kühlmantel befand sich ein in $\frac{1}{5}$ Grade geteiltes Thermometer, das die Temperatur des Kühlwassers abzulesen gestattete. Nach Angabe dieser Thermometer wurde der Kühlwasserstrom so reguliert, daß in beiden Apparaten genau die gleiche Temperatur herrschte.

Sowohl die bei der Temperaturmessung als auch die bei der Dampfdichtebestimmung verdrängte Luft wurde in der Gasbürette gemessen. Vor Beginn der Temperaturmessung wurde die Sperrflüssigkeit — wir verwandten bei allen unseren Versuchen Wasser — in beiden Apparaten auf den Nullpunkt eingestellt; da nach Beendigung derselben der Meniskus im Hauptapparat auf etwa 170 stand, so würde ein geringes Schwanken der Temperatur im Meßcylinder während der Dampfdichtebestimmung eine nicht unbedeutende Aenderung dieses Volumens bewirkt haben, eine Aenderung, die die Bestimmung des entstandenen Dampfvolumens leicht hätte ungenau machen können. Deßhalb wurde nach Beendigung der Temperaturbestimmung der zur Atmosphäre führende Hahn an der Meßbürette geöffnet, die Sperrflüssigkeit auf etwa Teilstrich 10 eingestellt und der Hahn wieder geschlossen. Auf diese 10 cc Luft konnte eine Temperaturschwankung von ein, zwei Zehntel Grad natürlich keinen bemerkbaren Einfluß ausüben.

Zur Messung der Temperatur auf luftthermometrischem Wege benutzten wir in bekannter Weise die Birne als Pyrometer. Da dieselbe aber nicht wie unser Platin- und unsere Glasapparate mit einem engen Zuleitungsrohr versehen war, mittelst dessen der Inhalt der Birne durch ein anderes Gas verdrängt werden konnte — die Einführung einer Platinröhre in den erhitzten Apparat und das Herausziehen derselben nach der Temperaturmessung nicht angängig war, da hierbei das Eindringen von etwas Luft nicht zu vermeiden ist, zudem ein Platinrohr innen an die Wandung des Halsteils anschmolz und durch die zähe Glasurmasse so fest gehalten wurde, daß es, so lange der Apparat heiß war, nicht entfernt werden konnte — so war es nicht möglich nach dem von Crafts und V. Meyer herrührenden Verfahren die bei der zu messenden Temperatur in der Birne enthaltene Luftmenge zu bestimmen und daraus die Temperatur zu berechnen. Aus diesem Grunde verwandten wir das alte, einfache, von Regnault schon benutzte und verbesserte Verfahren[1], nach dem das aus dem Pyrometer bei der Erwärmung verdrängte Luftvolumen in einer Meßbürette bei Atmosphärendruck gemessen wird. Neben dem Halsteil der Birne befand sich ein ihm gleicher Compensator, der mit einer zweiten, der ersten absolut gleichen Fallvorrichtung versehen war, von der ein dem ersten gleiches Bleirohr zu der kleineren Gasbürette führte, in der die aus dem Compensationsapparat austretende Luftmenge bestimmt wurde. Die Differenz des aus dem Hauptapparat und des aus dem Compensator ausgetriebenen Luftquantums ist gleich der aus der Birne allein verdrängten Luft-

1) Mémoire de l'académie royale des sciences de France XXI, 163. 1847.

menge. Um ferner die ursprünglich in der Birne enthaltene Luftmenge zu bestimmen, wurde der Apparat mit Wasser ausgemessen, wobei die Temperatur desselben natürlich in Rechnung gezogen wurde; ebenso wurde das Volumen des Compensators bestimmt. Die Differenz beider ergab das Volumen der Birne allein bei 0° und 700 mm = V. Ferner wurde Druck und Temperatur der Birne — von einer Abkühlung der Birne auf 0° C vor dem Anwärmen, wie es Nilson und Pettersson vornahmen, wurde als mit zu großen Unbequemlichkeiten und Gefahren für den Porcellanteil verbunden Abstand genommen — im Moment des völligen Abschlusses des Apparates genau bestimmt und aus diesen Daten die bei Beginn des Versuches in der Birne enthaltene Luftmenge auf Normalbedingungen umgerechnet bestimmt. Die Differenz dieses Volumens und des auf Normalbedingungen reducirten Volumens des aus der Birne ausgetretenen Gases ergiebt die in der Birne im Moment der Temperaturbestimmung noch enthaltene Gasmenge v. Aus V, v, α, dem Ausdehnungscoefficienten des Gases und γ, dem kubischen Ausdehnungscoefficienten des Porcellans ($\gamma = 0.00\,00\,108$ [1]) berechnet sich die Versuchstemperatur T zu

$$T = \frac{V - v}{v.\alpha - V.\gamma}.$$

Die zur Berechnung der Temperatur nötigen Daten sind also:

1) Das Volumen der Birne unter Normalbedingungen.
2) Die vor dem Anheizen im Ofen herrschende „Anfangstemperatur".
3) Der Barometerstand während des Versuches.
4) Die in den zwei Gasbüretten gemessenen Volumina.
5) Die „Ablesetemperatur", bei der die Volumina gemessen sind.

Bei dieser Art der Temperaturbestimmung mußte ganz besonders auf eine absolute Reinheit und Trockenheit der Birne geachtet werden, da die geringsten Feuchtigkeitsspuren einen sehr bedeutenden, Fehler in dem Resultat hervorgebracht hätten. Die Art der Reinigung nach einem Versuche hing natürlich ganz von den Eigenschaften des dabei benutzten Körpers ab. Zur Trocknung wurde die Birne mit Alkohol und Aether gewaschen und unter Durchsaugen eines kräftigen Luftstromes erhitzt. Alsdann wurde die ebenso gereinigte und getrocknete Fallvorrichtung aufgesetzt und befestigt und der Apparat durch eine Wasserstrahlpumpe evacuiert; war dies geschehen, so wurde er

---

1) Vgl. Le Chateliers Bestimmungen Compt. rend. 107. 862. 1888.

mit getrockneter Luft (Luft, die im langsamen Strome mehrmals durch Schwefelsäure und Phosphorsäureanhydrid geleitet war) gefüllt. Dies wurde etwa 6 bis 10 Mal wiederholt und während dessen der Apparat ziemlich stark erhitzt. Schließlich ließen wir ihn abkühlen, während die dabei in ihn eintretende Luft durch die Trocknungsmittel streichen mußte. Von dieser letzten Trocknung wurde jedesmal geprüft, ob der Apparat vollkommen dicht schlösse, d. h. das durch eine gute Wasserstrahlpumpe erzeugte Vacuum unverändert hielte.

Selbstverständlich ist nicht zu übersehen, daß die Temperaturmessungen nicht zu weitgehenden Ansprüchen auf Genauigkeit Genüge leisten können. Bei 1700° sind nur noch 14—15 % der bei 0° im Apparat enthaltenen Luft vorhanden: demgemäß wird eine nicht ganz unbedeutende Temperaturänderung nur eine geringe Volumenänderung hervorbringen, ein geringer Ablesefehler also einen nicht unbeträchtlichen Fehler im Resultat erzeugen und zwar wird dieser Fehler bei gleicher Größe des Ablesefehlers um so beträchtlicher sein, je höher die zu messende Temperatur ist. Ferner werden die Ungenauigkeiten in der Bestimmung der übrigen Größen, namentlich bei der Bestimmung des Volumens der Birne — man denke daran, daß nie ein Halsteil einen Compensator absolut gleich ist — auf das Resultat einen merklichenen Einfluß ausüben. Auch kann jedesmal nur eine einzige Temperaturmessung ausgeführt werden, während bei der Salzsäure-Verdrängungsmethode bequem vier hinter einander gemacht werden können.

Nichtsdestoweniger beweist die relativ große Uebereinstimmung der unter gleichen Verhältnissen mit verschiedenen Apparaten angestellten Versuche, daß der wirkliche Fehler der Messungen nicht groß ist. Es sind auch die Erscheinungen, die das erweichende Porcellan zeigt, dieselben, wie sie in der Kgl. Porcellanmanufactur bei Temperaturen beobachtet werden, die nach den dort üblichen Meßmethoden als dieselben wie die unseren bestimmt worden sind. Wenn auch die bei dieser Arbeit von uns benutzte Methode nicht so genau ist als die Verdrängungsmethode, so ist sie doch ebenso genau als das von Nilson und Pettersson bei ihren Dichtebestimmungen angewandte Verfahren, das ihr ja auch im allgemeinen recht ähnlich ist. Alles in allem können wir sagen, daß unsere Versuchstemperatur zwischen 1600° und 1700° liegt und daß die späteren Versuche zumal sicher bei letzterer Temperatur angestellt sind. Daß diese Temperatur aber höher ist als die von Nilson und Pettersson erreichte, erklärt sich vor allem wohl dadurch, daß wir mit einem größeren Perrotschen Ofen und unter ganz besonders günstigen Bedingungen der Gebläseluft- und Gaszuleitung sowie der Ableitung der Verbrennungsgase arbeiteten.

Zur Uebung stellten wir nach diesem Verfahren der Temperaturmessung zunächst einige Messungen bekannter Temperaturen an. Obgleich sich eine höhere Temperatur hierzu besonders geeignet hätte, weil diese ein besseres Bild von der größeren oder geringeren Genauigkeit des Verfahrens für unsere Zwecke gegeben hätte, wählten wir doch den Siedepunkt des Wassers hierfür, weil dessen Temperatur leicht und sicher zu erzielen ist. Da innerhalb dieses geringen Temperaturintervalles mehr als ein Viertel des gesammten Luftinhaltes der Birne austritt, mußte diese Temperatur natürlich recht genau gefunden werden.

Siedepunktsbestimmung des Wassers.

Volumina ausgetreten aus dem Hauptapparat	dem Compensator	Anfangs-temperatur	Druck	Ablese-temperatur
43.1	1.7	11.0	756	10.2
43.7	1.6	10.3	758	10.3

Das Volumen der Birne betrug 175.5 cc; demnach berechnet sich die Temperatur zu 99.57° (statt 99.85) und zu 99.51° (statt 99.93).

Alle Dichtebestimmungen wurden in reinem Stickstoff ausgeführt. Dieser wurde nach der von dem Einen von uns angegebenen Methode[1]) aus der atmosphärischen Luft gewonnen und aufs sorgfältigste gereinigt. Mittelst eines engen langen Glasrohrs wurden von dem so bereiteten Stickstoff etwa 10 bis 12 l. in langsamen Strome — das Durchleiten dauerte wenigstens 2 Stunden — durch die kalte Birne geleitet. Während das Glasrohr aus dem Porcellanapparat gezogen wurde, wurde seitlich durch die Ausführungsöffnung der Fallvorrichtung Stickstoff durch diese geleitet und dann nach Entfernung des Glasrohrs ohne Unterbrechung des Stickstoffstromes die Substanz eingeführt. Durch dies Verfahren, speciell dadurch, daß die Substanz in der Kälte vor Beginn des Anheizens des Ofens[2]) in die Fallvorrichtung eingeführt wurde, wurde verhindert, daß auch die geringsten Luftspuren mit in den Apparat

1) Zeitschrift für physikalische Chemie. 1888, pag. 921.

2) Ein Oeffnen des erhitzten Apparates, wie es Alex. Scott in seiner weiterhin noch zu besprechenden Arbeit vorgenommen hat, ist absolut unzulässig.

eindrangen. Schließlich wurde der Apparat in der oben angegebenen Weise verschlossen, der Stickstoffstrom jetzt erst unterbrochen und das Ausführungsrohr der Fallvorrichtung sofort mit dem inzwischen auch mit Stickstoff gefüllten Bleirohr verbunden. Nachdem die Sperrflüssigkeit in der Bürette auf den Nullpunkt eingestellt war, wurde schließlich der an ihr befindliche zur Atmosphäre führende Hahn geschlossen.

Besonderer Wert wurde darauf gelegt, den Deckel des Ofens zu dichten. Zwei dicke Chamotteplatten, die auf der Seite, wo sie an einander lagen, mit Einschnitten versehen waren, verschlossen das im Deckel befindliche Loch und ließen nur den Hals des Apparates und den Compensator durch die Einschnitte gehn. Die Zwischenräume zwischen diesen und den Steinen wurden mit Asbest verstopft, und schließlich alle Fugen mit Chamottebrei verstrichen. Dadurch wurde jede irgend erhebliche Ausstrahlung des Ofens nach oben hin vermieden, so daß die Fallvorrichtungen nicht viel über Zimmertemperatur erwärmt wurden. Zu weiterem Schutz derselben war über dem Ofendeckel noch ein Blechschirm angebracht.

Jetzt war der Apparat zum Anheizen vorbereitet. Bei der vortrefflichen Beschaffenheit des Porcellans war es möglich, das Anwärmen ohne jede Gefahr für die Birne sehr zu beschleunigen, so daß nach etwa 40 Minuten schon eine Temperatur von ca 2001° im Ofen herrschte. Nun wurde das mit einem Gasmotor getriebene Gebläse (aus der Fabrik von Rost & Comp. in Dresden) in Betrieb gesetzt und nach der Nilson-Petterssonschen Methode Luft von etwa 70—90 mm Quecksilber-Ueberdruck eingeblasen. Nach etwa 40 Minuten war dann die Temperatur so gut wie constant; nur noch ein minimales Steigen derselben war zuweilen zu beobachten. Aber erst 60 bis 70 Minuten nach Inbetriebsetzung des Gebläses wurde der Versuch angestellt. Diese Bedingungen sind erst nach und nach völlig ausprobirt worden, und so erklärt es sich, daß die ersten Versuche noch nicht bei den extremen Hitzegraden ausgeführt worden sind, wie die späteren, bei denen eine Temperatur von etwa 1700° C im Ofen herschte.

Wismut.

V. Meyer und J. Mensching hatten seiner Zeit den Versuch[1]) gemacht, die Dampfdichte des Wismut zu bestimmen. Sie

1) Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1887, 258. Inaugural-Dissertation von J. Mensching, Göttingen 1887.

fanden, daß dieses Metall bei 1400 bis 1450° C in geringem Maaße zu verdampfen beginnt, daß die Verdampfung jedoch zu langsam und unvollständig vor sich geht, als daß eine Dichtebestimmung Aussicht auf Erfolg hätte. Bei der uns jetzt zu Gebot stehenden Temperatur verdampfte Wismut mit genügender Schnelligkeit, daß einer Dichtebestimmung keine Schwierigkeiten im Wege stehen. Das Wismutmetall wurde in Stückchen ohne Eimer abgewogen und zur Dichtebestimmung benutzt. Zwei Versuche ergaben folgende Resultate.

Temperaturmessung.

Volumen ausgetreten aus dem Hauptapparat	Volumen ausgetreten aus dem Compensator	Anfangs-temperatur	Druck	Ablese-temperatur
155.5	6.65	13.6	747	11.7

Das Volumen der Birne betrug 175.1 cc; danach berechnet sich die Temperatur zu **1626°**.

Dichtebestimmung des Wismut bei dieser Temperatur.

Substanz	Volumen	Druck	Temperatur	Dichte
0.1237	8.6	747	12	11.983

Temperaturmessung.

Volumen ausgetreten aus dem Hauptapparat	Volumen ausgetreten aus dem Compensator	Anfangs-temperatur	Druck	Ablese-temperatur
177.85	8.5	10.3	742	11.7

Das Volumen der Birne betrug 197.04 cc; demnach berechnet sich die Temperatur auf **1640°** C.

Dichtebestimmung des Wismut bei dieser Temperatur.

Substanz	Volumen	Druck	Temperatur	Dichte
0.1011	8.35	742	11.3	10.125

Trotzdem beide Versuche bei ziemlich derselben Temperatur angestellt wurden, sind die gefundenen Werte recht verschieden. Der Grund hierfür liegt darin, daß beim ersten Versuch etwas zu viel Substanz verwandt worden ist, so daß durch die bei der enormen Temperatur äußerst heftige Bewegung der Moleküle in der Birne schon Teile des Dampfes in den oberen kälteren Teil des Halses gelangten und sich dort condensierten, ehe alle Substanz verdampft war, was übrigens nicht zu verwundern ist, wenn man bedenkt, daß der Wismutdampf bei unseren Versuchen etwa 60 cc in der Birne einnimmt, die volle Verdampfung aber über eine Minute dauert. Daß dies in der That der Grund war, zeigte sich in dem plötzlichen Aufhören der Volumenvermehrung und dem unmittelbar darauf folgenden Zurücksteigen der Sperrflüssigkeit. Beim zweiten Versuch blieb die Sperrflüssigkeit nach Beendigung der Verdampfung längere Zeit — wenigstens eine Minute — ruhig stehen, ehe sie zurückging; der in diesem Versuche erhaltene Wert entspricht also der wirklichen Dampfdichte des Wismut bei 1640° unter den herrschenden Bedingungen. Da beide Werte aber kleiner sind als der der Molekulargröße Bi^2 zukommende 14.4, so ist nicht daran zu zweifeln, daß die Molekulargröße des Wismut durch die Formel Bi_1 ausgedrückt ist. Das Wismutmolekül besteht also aus einem Atom, ebenso wie die Moleküle der übrigen Metalle, deren Molekulargröße man bisher kennt, des Quecksilbers, Cadmiums, Zinks. Der Wismutdampf ist bei 1640° noch nicht in ein normales Gas übergegangen, und so erklärt sich der von uns gefundene Mittelwert; bei einer entsprechend höheren, z. Z. freilich kaum anwendbaren Temperatur würde zweifellos der Wert 7.2 gefunden werden.

Dieser Erfolg ermutigte uns mit

Zinn

Versuche anzustellen, welches den Angaben der älteren Literatur zu folge über 1400° verdampfen soll. Unsere Beobachtungen ergaben, daß Zinn allerdings bei 1650 bis 1700° verdampft, aber doch so langsam, daß eine Dichtebestimmung resultatlos verlaufen wäre. Das Bild, das die Verdampfung des Zinns uns gewährte, war etwa dasselbe, wie es die des Wismut bei 1450° geboten hatte.

Phosphor.

Eine Untersuchung des Phosphor bei 1700° mußte zu den schönsten Erwartungen berechtigen, da J. Mensching und V.

Meyer[1]) bei der um 250° niedrigeren Temperatur bereits den Wert 3.03 erhalten hatten, während 2.15 der dem Molekül P_2 entsprechende Wert ist. Zu hoffen war, daß der dem Molekül P_2 entsprechende Wert gefunden würde oder ein niedrigerer. Unsere Hoffnungen sind, wie die weiter unten angegebenen Bestimmungen zeigen, unerfüllt geblieben.

Als Substanz wurde bei diesen Versuchen rother Phosphor verwandt, der mehrfach mit Wasser ausgekocht und oftmals gewaschen, alsdann mit Alkohol und Aether geschüttelt und getrocknet worden war; er wurde über Schwefelsäure im Vacuum aufbewahrt. Abgewogen wurde er in sehr kleinen einseitig zugeschmolzenen Röhrchen aus papierdünnem Glase, die nach der Wägung mit ausgeglühtem Asbest verschlossen wurden. Daß diese Fläschchen keine sauerstoffhaltige Luft etwa mit in die Birne bringen könnten, wurde dadurch vermieden; fast zum Ueberfluß wurden sie nach der Wägung bis zum Versuch in einer Atmosphäre von Kohlensäure im Exsiccator aufbewahrt.

Da diese Gläschen meist so fest an die Birnenwandung anschmolzen, daß sie nach dem Versuch nicht mehr entfernt werden konnten, mußte eine entsprechende Correctur an dem zur Temperaturberechnung der nächsen Bestimmung benutzten Volumen angebracht werden. Nach mehreren derartigen Versuchen wurde je das Volumen der Birne neu bestimmt.

Temperaturmessung.

Volumen verdrängt aus dem Hauptapparat	Volumen verdrängt aus dem Compensator	Anfangs-temperatur	Druck	Ablese-temperatur
158.1	6.6	11.0	747	12.0

Das Volumen der Birne betrug 175.2 cc; demnach berechnet sich die Temperatur **1677.5°**.

Dichtebestimmung des Phosphor bei dieser Temperatur.

Substanz	Volumen	Druck	Temperatur	Dichte
0.0508	13.15	747	12.5	3.226

1) Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1887, 258.

Temperaturmessung.

Volumen ausgetreten aus dem Hauptapparat	dem Compensator	Anfangs-temperatur	Druck	Ablese-temperatur
158.4	6.4	10.6	747	12.0

Das Volumen der Birne betrug 175.1 cc; demnach berechnet sich die Temperatur auf **1708.5°**.

Dichtebestimmung des Phosphor bei dieser Temperatur.

Substanz	Volumen	Druck	Temperatur	Dichte
0.0404	10.7	747	12.2	3.147

Beide Versuche ergaben gut untereinander übereinstimmende Werte, die aber nicht nur nicht kleiner, sondern sogar etwas größer als die bei 1400° erhaltenen Werte waren. Bei der Vorsicht, mit der unsere Versuche angestellt waren, war ein bedeutender Fehler ausgeschlossen. Um nun zu constatieren, ob die damalige Bestimmung mit irgend einem Fehler behaftet gewesen ist, stellten wir eine Revisionsbestimmung an. Dieselbe wurde in einem großen Kohlenofen von 34 c größeren und 26 c kleineren Durchmesser (der Querschnitt des Ofens war aus besonderen Gründen oval) und 60 c Höhe des Feuerraums vorgenommen, dessen Abzug in den großen Schornstein des Laboratoriums führt. Dieser Ofen war von einem hohlen etwa 50 qc im Querschnitt haltenden Ring umgeben, der etwa in der Höhe der im Ofen zu erhitzenden Birne mit vier Düsen in den Feuerraum mündete und durch diese Gebläseluft in den Ofen treten ließ. Dadurch sollte eine gleichförmigere Erhitzung der verschieden hoch gelegenen Teile der Birne bewirkt werden. Das Heizmaterial bestand aus gleichen Teilen Coke und Holzkohlen; damit es nicht mit der Birne selbst in Berührung käme, war diese von einem weiten Thonrohr umgeben, welches durch den Rost bis auf den Boden des Ofens ging, anderseits bis kurz über den Deckel reichte.

Temperaturmessung.

Volumina ausgetreten aus dem Hauptapparat	dem Compensator	Anfangs-temperatur	Druck	Ablese-temperatur
158.4	10.4	12.0	743	12.0

Das Volumen der Birne betrug 175.5 cc; demnach berechnet sich die Temperatur auf **1484°** C.

Trotzdem die Dimensionen dieses Ofens bedeutend größer sind als die des alten, mit dem vor zwei Jahren die Bestimmungen gemacht worden waren, und die Abzugsvorrichtungen vorzüglich functionierten, wurde mit ihm nur eine um ein geringes höhere Temperatur erzielt als damals. Es scheint demnach bei 1500° die Maximaltemperatur eines mit dem Holzkohle-Cokegemisch geheizten Ofens zu liegen, vorausgesetzt, daß die ihm zugeführte Luft nicht vorgewärmt ist.

Dichtebestimmung des Phosphor bei dieser Temperatur.

Substanz	Volumen	Druck	Temperatur	Dichte
0.0490	11.3	743	120	3.632.

Der Versuch zeigt die Unhaltbarkeit des Werkes 3.03 bei 1450° und muss daher in dem älteren Versuche von Mensching und V. Meyer ein Fehler angenommen werden. Ferner wird durch diesen Versuch die Kenntniß der Curve, die die Zersetzung des Phosphormoleküls P_4 ausdrückt, in erwünschter Weise erweitert[1]). Die dem Molekül P_4 entsprechende Dichte ist 4.29. Bei mäßiger Rotglut ca 800—900° ist die Dichte 3.85; bei heller Gelbglut (1200—1300°) 3.715; bei beginender Weißglut (1500°) 3.632; bei blendender Weißglut (1700°) 3.186 im Mittel zweier Bestimmungen. Diese so langsam vor sich gehende Abnahme der Dichte läßt kaum die Hoffnung zu, daß es uns jemals gelingen wird, zu einem endgiltigen Resultat betreffs der Molekulargröße des Phosphors bei hoher Temperatur zu kommen, ensprechend dem bei niederen Temperatur gültigen Werte P_4.

Antimon.

Die Dampfdichtebestimmung des Antimon ist zuerst von J. Mensching und V. Meyer[1]) versucht worden. Es gelang ihnen Antimon in reichlicher Menge zu verdampfen und dabei die Werte 12.31 und 12.48 für die Dampfdichte zu erzielen, während 12.37 dem Molekül $Sb._3$, 8.25 dem Molekül $Sb._2$ entspricht. Schon damals machten sie darauf aufmerksam, daß man aus diesen Werten nicht auf die Molekulargröße Sb_3, sondern vielmehr Sb_2 oder Sb_1 schließen müsse, und daß zunächst bei höheren Temperaturen

1) Nachrichten der Kgl. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen 1887, 258.

Bestimmungen ausgeführt werden müßten. Dies haben wir jetzt gethan und sind zu folgenden Werten gelangt.

Temperaturmessung.

Volumen ausgetreten aus dem Hauptapparat	dem Compensator	Anfangs-temperatur	Druck	Ablese-temperatur
173.85	6.15	10.7	745	11.7.

Das Volumen der Birne betrug 197.04; demnach berechnet sich die Temperatur auf **1572°** C.

Dichtebestimmung des Antimon bei dieser Temperatur.

Substanz	Volumen	Druck	Temperatur	Dichte
0.0984	7.65	745	12.0	10.743.

Temperaturmessung.

Volumen ausgetreten aus dem Hauptapparat	dem Compensator	Anfangs-temperatur	Druck	Ablese-temperatur
175.7	6.9	9.5	748	10.5.

Das Volumen der Birne betrug 197.04; demnach berechnet sich die Temperatur auf **1640°** C.

Dichtebestimmung des Antimon bei dieser Temperatur.

Substanz	Volumen	Druck	Temperatur	Dichte
0	4.25	748	10.5	9.7815.

Aus demselben Grunde wie bei der ersten Bestimmung der Wismutdichte ist der erste Wert 10.743 vielleicht etwas zu groß ausgefallen, und der zweite 9.781 als der der Versuchstemperatur entsprechende zu betrachten. Allerdings ist hier zu berückeichtigen, daß die Temperaturdifferenz bei beiden Versuchen nicht ganz unbedeutend ist. Beide Werte zeigen jedoch, daß die Frage nach der Molekulargröße des Antimon bei 1650° noch nicht definitiv zu lösen ist, und daß die schon vor zwei Jahren aus den damaligen Resultaten gezogene Schlußfolgerung, die Molekulargröße des Antimons sei durch die Formeln S_2 oder Sb_1, auszudrücken, nicht verändert wird.

Arsen.

Noch günstiger als beim Phosphor und Antimon lagen die Verhältnisse beim Arsen; denn bei ihm ist schon vor zwei Jahren von J. Mensching und V. Meyer[1]) der Wert 6.53 gefunden wurden, während 5.201 der Molekulargröße As_2 entspricht. Das von uns benutzte Arsen stammt aus derselben Quelle wie das damals angewandte und wurde ebenfalls durch Sublimation in einer Kohlensäureatmosphäre gereinigt. Die Sublimation wurde in einem großen Reagiercylinder vorgenommen; die an den Wänden desselben sich absetzenden Krusten wurden verworfen, da sie eventuell noch Spuren der leichter flüchtigen arsenigen Säure enthalten konnten und nur ausgesuchte, prächtige Krystallblätter aus dem inneren Teile des Sublimats wurden verwandt. Das Arsen wurde ebenso wie der Phosphor in sehr kleinen, äußerst dünnwandigen Glasröhrchen abgewogen und so zum Versuche verwandt.

Temperaturmessung.

Volumen ausgetreten aus dem Hauptapparat	Volumen ausgetreten aus dem Compensator	Anfangs-temperatur	Druck	Ablese-temperatur
176.8	7.7	12.0	747	10.0.

Das Volumen der Birne betrug 197.8 cc; demnach berechnet sich die Temperatur auf **1714.5°**.

Dichtebestimmung des Arsen bei dieser Temperatur.

Substanz	Volumen	Druck	Temperatur	Dichte
0.0783	11.95	747	11.6	5.451.

Temperaturmessung.

Volumen ausgetreten aus dem Hauptapparat	Volumen ausgetreten aus dem Compensator	Anfangs-temperatur	Druck	Ablese-temperatur
177.2	7.5	13.0	737.5	12.8.

1) Nachrichten der Kgl. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen 1887, 258.

Das Volumen der Birne betrug 197.8 cc; demnach berechnet sich die Temperatur auf **1736°**.

Dichtebestimmung des Arsen bei dieser Temperatur.

Substanz	Volumen	Druck	Temperatur	Dichte
0.0667	10.1	737.5	14.5	5.543.

Diese Werte stimmen ziemlich genau auf die Molekulargröße As_2. Ob sie jedoch nur Dissociationswerte sind, welche, entspechend dem beim Wismuth gefundenen, auf den Wert As_1 hinweisen, oder ob in der That dem Arsen bei hoher Temperatur die Molekulargröße As_2 zukommt, dies zu entscheiden wird erst möglich sein, wenn bei einer noch höheren Temperatur Bestimmungen angestellt sind.

Thallium.

Ein Versuch, Thallium behufs einer Dichtebestimmung des Dampfes zu vergasen, ist unseres Wissens noch nicht angestellt. Da den Angaben der Literatur zufolge dies bei der uns zu Gebote stehenden Temperatur unschwer möglich sein mußte, so zogen wir auch dies Metall in den Kreis unserer Untersuchungen. Die Substanz wurde der Sammlung des hiesigen Laboratoriums entnommen; aus dem Inneren eines größern getrockneten Blockes wurde, ohne daß Feuchtigkeit heran gelangen konnte, kurz vor dem Versuch ein Stückchen herausgeschnitten und nach einigem Stehen im Schwefelsäureexsiccator ohne Eimerchen gewogen. Die Dichtebestimmungen ergaben folgende Resultate.

Temperaturmessung.

Volumen ausgetreten aus dem Hauptapparat	Volumen ausgetreten aus dem Compensator	Anfangs-temperatur	Druck	Ablese-temperatur
177.9	6.8	8.4	753	11.5.

Das Volumen der Birne betrug 197.04 cc; demnach berechnet sich die Temperatur auf **1636°**.

Dichtebestimmung des Thalliums bei dieser Temperatur.

Substanz	Volumen	Druck	Temperatur	Dichte
0.0974	4.85	753	11.7	16.115.

Temperaturmessung.

Volumen ausgetreten aus dem Hauptapparat	Volumen ausgetreten aus dem Compensator	Anfangs-temperatur	Druck	Ablese-temperatur
170.2	7.5	13.0	751	14.8.

Das Volumen der Birne betrug 184.8 cc; demnach berechnet sich die Temperatur auf **1728° C.**

Dichtebestimmung des Thalliums bei dieser Temperatur.

Substanz	Volumen	Druck	Temperatur	Dichte
0.0587	3.45	751	14.3	14.248.

Der erste Wert ist wahrscheinlich aus dem oben beim Wismut und Antimon erwähnten Grunde etwas zu hoch ausgefallen, wenigstens folgte auf das Ende der Verdampfung bald das Zurücksteigen der Sperrflüssigkeit. Der zweite Versuch dagegen ist vollkommen einwurfsfrei; obgleich bei ihm der Wert für das aus zwei Atomen bestehende Molekül (Tl_2 = 14.167) erreicht ist, läßt sich die Frage nach der Größe des Thalliumsmoleküls noch nicht endgiltig entscheiden: entweder besteht es aus zwei oder aus einem Atom. In dieser Hinsicht befindet sich jetzt die Frage für Antimon, Arsen und Thallium im gleichen Stadium, doch ist die Lösung der Frage beim Arsen und Thallium am ehesten zu erwarten.

Teils zur Prüfung der Methode, teils auch zur Untersuchung der Constanz der Dampfdichten wurden Dichtebestimmungen mit Quecksilber und Schwefel ausgeführt. Wie nicht anders zu erwarten war, ergaben sie die auf die Formeln Hg und S_2 stimmenden Werte.

Quecksilber.

Temperaturmessung.

Volumen ausgetreten aus dem Hauptapparat	Volumen ausgetreten aus dem Compensator	Anfangs-temperatur	Druck	Ablese-temperatur
168.0	7.5	12.7	743	13.7.

Das Volumen der Birne betrug 184.9 cc; demnach berechnet sich die Temperatur auf **1731°** C.

Dichtebestimmung des Quecksilbers bei dieser Temperatur.

Substanz	Volumen	Druck	Temperatur	Dichte
0.0947	11.4	743	13.5	7.006.

Die der Molekulargröße Hg_1 entsprechende Dichte ist 6.94.

Schwefel.

Temperaturmessung.

Volumen ausgetreten aus dem Hauptapparat	Volumen ausgetreten aus dem Compensator	Anfangs-temperatur	Druck	Ablese-temperatur
178.2	7.2	11.2	747.5	11.6.

Das Volumen der Birne betrug 197.8 cc; demnach berechnet sich die Temperatur auf **1719°** C.

Dichtebestimmung des Schwefels bei diesr Temperatur.

Substanz	Volumen	Druck	Temperatur	Dichte
0.0315	11.9	747.5	11.7	2.198.

Die der Molekulargröße S_2 entsprechende Dichte ist 2.215.

Kupferchlorür.

Aus der Stellung, die das Kupfer im System der Elemente einnimmt, hatte man mehrfach geschlossen, es müsse Kupferverbindungen geben, in denen das Kupfer einwertig sei. Das Kupferchlorür, an das man zuweilen dabei gedacht hat, kann z. Z. nicht zu solchen gerechnet werden, da die Untersuchungen von V. und C. Meyer[1]) und von V. Meyer und J. Mensching[2]) gezeigt haben, daß

1) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XII 1116 und 1282. 1879.

2) Dissertation v. J. Mensching, Göttingen 1887.

bis 1440° Werte für die Dampfdichte des Kupferchlorürs gefunden werden, die der Formel $Cu_2 Cl_2$ entsprechen. Bei dem großen Interesse, das die Frage erweckt, ob nicht bei einer noch höheren Temperatur eine Dissociation in Moleküle Cu Cl eintritt, nahmen wir die Untersuchung wieder auf, indem wir bei 1700° die Dampfdichte des Kupferchlorürs bestimmten. Die Substanz wurde nach dem Wöhlerschen Verfahren am Abend vor dem Versuch hergestellt, geschmolzen und in Stäbchenform gebracht; in dieser Gestalt wurde sie ohne Eimerchen abgewogen und zur Dichtebestimmung verwandt.

Temperaturmessung.

Volumen ausgetreten aus dem Hauptapparat	Volumen ausgetreten aus dem Compensator	Anfangs-temperatur	Druck	Ablese-temperatur
163.15	7.0	14.0	752,5	8.8.

Das Volumen der Birne betrug 184.8 cc; demnach berechnet sich die Temperatur auf **1691.5°** C.

Dichtebestimmung des Kupferchlorürs bei dieser Temperatur.

Substanz	Volumen	Druck	Temperatur	Dichte
0.0574	7.15	752.5	10.5	6.6035.

Eine zweite Dichtebestimmung wurde bei etwa derselben Temperatur ohne Temperaturmessung angestellt.

Dichtebestimmung des Kupferchlorürs bei etwa 1700°.

Substanz	Volumen	Druck	Temperatur	Dichte
0.0509	6.5	754.5	11.4	6.441.

Der der Formel $Cu_2 Cl_2$ entsprechende Wert ist 6.825. Wenngleich die von uns gefundenen Werte etwas geringer sind, so ist doch der Unterschied nicht bedeutend genug, um auf eine Dissociation zu Molekülen Cu Cl sichere Schlüsse zu erlauben. Bis auf weiteres muß man also an der Formel $Cu_2 Cl_2$ für das Kupferchlorür festhalten.

Chlorsilber.

Schon vor zwei Jahren hatten V. Meyer und J. Mensching den Versuch angestellt, Chlorsilber bei der höchsten Temperatur ihres Ofens behufs einer Dichtebestimmung zu verdampfen, doch erwies sich ihre Versuchstemperatur als zu niedrig um Verdampfung hervorzurufen. Nicht lange darauf veröffentlichte Alex. Scott[1]) in einer größeren pyrochemischen Arbeit einige Dichtebestimmungen dieser Substanz, aus denen er auf die Molekulargröße Ag Cl schloß. Diese Bestimmungen hatte er im Kohlenofen ohne Gebläse, und bei einer Temparatur angestellt, die, nach dem Ergebnisse der ausserdem von ihm mitgetheilten Dichtebestimmung des Jods, jedenfalls erheblich unter 1400° C lag, also bei einer Temperatur, bei der in Göttingen keine Verdampfung zu beobachten gewesen war. Bei seinen Versuchen wandte er eine Platinbirne als Verdampfungsgefäß an, die er durch einen Eisenmantel und zwei auf einander gestellte Tiegel vor den Flammengasen zu schützen suchte. Wie unzureichend ein solcher Schutz ist, erhellt genügend aus den zahlreichen Diffusionsversuchen verschiedener Forscher, zumal denen von J. Mensching und V. Meyer. Aber abgesehen von all' dem sind die Scott'schen Versuche über das Silberchlorid schon deßhalb völlig belanglos, weil diese Substanz durch Platin bei höherer Temperatur unter Bildung einer Platinsilberlegierung zersetzt wird, Daß Scott eine Volumenvermehrung beobachtete, erklärt sich eben aus dem Freiwerden des Chlors; dass er zu dem ziemlich genau stimmenden Dichtewert gekommen ist, beruht wohl auf Zufall. Auch die übrigen Einzelnheiten der Versuche, zumal das Arbeiten ohne Fallvorrichtung, zeugen von einem derartigen Mangel an Sachkenntniß, daß auch die Mehrzahl seiner übrigen Bestimmungen, namentlich diejenigen über die Alkalimetalle, keine Entscheidung gewährt.

Aus diesem Grunde versuchten wir in einwandfreier Weise die interessante Frage nach der Molekulargröße des Silberchorids zur Lösung zu bringen. In Ammoniak gelöstes und wieder ausgefälltes reines Silberchlorid wurde im Porcellantiegel mit kleiner Flamme eben zum Schmelzen erhitzt; der Kuchen wurde aus dem Tiegel entfernt und in Stücke zerschnitten. Diese wurden ohne Eimerchen zur Dichtebestimmung benutzt.

---

1) Proc. Roy. Soc. Edinburgh 1887, 410.

Temperaturmessung.

Volumen ausgetreten aus dem Hauptapparat	Volumen ausgetreten aus dem Compensator	Anfangs-temperatur	Druck	Ablese-temperatur
166.55	7.5	14.6	752.7	13.0.

Das Volumen der Birne betrug 184.8 cc; demnach berechnet sich die Temperatur auf **1735.5°**.

Dichtebestimmung des Silberchlorids bei dieser Temperatur.

Substanz	Volumen	Druck	Temperatur	Dichte
0.0589	8.6	752.7	13.4	5.698.

Für Ag Cl berechnet sich die Dichte zu 4.965. Trotzdem dieser Wert noch nicht erreicht ist, zeigt doch die Annäherung an ihn, daß Ag Cl die Formel für das Molekül des Chlorsilbers ist[1]). Ein zweiter Versuch, der ohne Temperaturmessung jedoch bei einer zweifellos niedrigeren Temperatur angestellt wurde, ergab den Wert 8.29, also ebenfalls einen Wert, der bedeutend unter dem für $Ag_2\ Cl_2$ erforderlichen liegt und daher ebenfalls zu der Formel Ag Cl führt.

Hier mußten wir diese Arbeit abbrechen; noch manche andere interessante Frage wird bei unserer Versuchstemperatur zur Entscheidung oder der Entscheidung nahe gebracht werden können, zumal die Frage nach dem Verhalten des Chlors und Broms bei diesen Hitzegraden, ferner ob sich die Moleküle der arsenigen und antimonigen Säure spalten lassen, und andere mehr. Wir hoffen später die Arbeit in diesem Sinne fortsetzen zu können.

Göttingen, Universitätslaboratorium.

1) Durch ein Versehen des Setzers ist in unserer vorläufigen Publication dieser Arbeit (Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXII, 727. 1889) der Sinn dieses Passus so entstellt worden, daß grade das Gegenteil von unserer Meinung zu tage tritt. „Jedoch ist die Molekulargröße Ag Cl nicht bewiesen“ heißt es dort statt „sicher bewiesen.“

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

März und April 1889.

(Fortsetzung.)

Supplementary report of the committee for international language. 1888. 7. Dec.
Bulletin of the Am. geographical society. Vol. XXI. N. 1. 1889. New-York 1889.
History of cooperation in the U. S. J. Hopkins University studies. Vol. VI. Baltimore 1888.
Boletin de la Academia nacional de ciencias exactas. Tomo II. Entr. 1, 2, 3, 4. Tomo III. Entr. 1. Córdoba.
Anales de la sociedad Cientifica Argentina. Tomo XXVI. Entrega IV, V. 1888. Buenos Aires 1888.
Observations made at the magnetical and meteorological Observatory at Batavia. Vol. VIII. 1883—1885. Vol. X. 1887. Batavia 1888.
Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indië. Jaarg. 9. 1887. Batavia 1888.
Bigdragen tot de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 5de Volgreeks. 4. Deel. 2. aflevering. S. Gravenhage 1889.

Nachträge.

Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas. Vol. IX. N. 1.
Publicationen der v. Kuffnerschen Sternwarte in Wien. Band 1. Herausgeg. v. Dr. Norbert Herz. Wien 1889.
Results of the exploring voyage of H. M. S. Challenger 1873—76. Zoology. Vol. XXIX.
a. text first part.
b. text second part.
c. plates.
Vierteljahrschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. 33. Heft 2. Zürich 1888.
Onderzoekingen gedaaw in het physiologisch Laboratorium to Utrecht. Derde Reeks XI. Utrecht 1889.
Report upon the International exchanges under the direction of the Smithonian Institution 1888. Washington 1889.

Mai 1889.

Sitzungsberichte der K. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin, XXII, XXIII, XXIV, XXV, XXVI, XXVII.
Sitzungsberichte der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München.
a. philosophisch-philologische und historische Klasse 1889 Heft I.
b. mathematisch-physikalische Klasse 1889. Heft I.
Leopoldina. Heft XXV. No. 7—8.
Abhandlungen herausgegeben vom naturwissenschaftlichen Vereine in Bremen. X. Band. 3. Heft. (Schluß). Bremen 1889.
Zeitschrift der deutschen Morgenländischen Gesellschaft. Band 43. Heft 1. Leipzig 1889.
58. und 59. Jahresbericht des Vogtländischen Alterthumsforschenden Vereins zu Hohenlauben und 11. u. 12. Jahresbericht des Geschichts- und Alterthumsforschenden Vereins zu Schleiz.
Veröffentlichung des Königl. Preußischen geodätischen Instituts:
a. Gewichtsbestimmungen für Seitenverhältnisse in schematischen Dreiecknetzen von P. Simon.
b. Polhöhenbestimmungen aus dem Jahre 1886 und gelegentlich ausgeführte Polhöhen- und Azimutbestimmungen aus den Jahren 1878—1884. Berlin 1889.

Sechsundzwanzigster Bericht der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- u. Heilkunde. Gießen 1889.
Chemiker-Zeitung N. 40. Jahrgang XIII. Cöthen 1889.
Freie Perspektive in ihrer Begründung und Anwendung von Dr. Gustav Ad. v. Peschka. Band I und II. Leipzig 1889.
Meteorologische Zeitschrift. Jahrgang 6. Heft 5. Mai 1889. Wien 1889.
Verhandlungen der K. K. geologischen Reichsanstalt. No. 4, 5, 6. 1889.
Sitzungsberichte der K. K. Akademie d. Wissenschaften zu Wien.
a. Philosophisch-historische Classe. Band CXVI. Jahrgang 1888.
b. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Band XCVII.
1. Abth. Heft 1—5.
2a. Abth. Heft 1 und 2, 3 und 4, 5, 6 und 7.
2b. Abth. 1—3, 4 und 5, 6, 7.
3. Abth. 1—6. Heft. Wien 1888.
Denkschriften der K. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Band 54. Wien 1888.
Archiv für österreichische Geschichte. Band 72. 2. Hälfte. Band 73. 1. und 2. Hälfte. Wien 1888.
Almanach d. K. Akademie der Wissenschaften. Jahrgang 38. 1888. Wien.
Ungarische Revue. Heft IV, V. 1889. Budapest 1889.
Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau. No. 4. 1889. Krakau.
Proceedings of the London mathematicae society. No. 346—348.
Proceedings of the Royal society. Vol. XLV. No. 278.
Monthly notices of the Royal astronomical society. Vol. XLIX. No. 6.
Nature. Vol. 40. No. 1018—1021.
Prodromus of the Zoology of Victoria: Decade XVII. Melbourne 1888.
Iconography of the australian species of Acacia etc. 12. a. 13th Decade by Baron Ferd. v. Müller. Melbourne 1888.
Académie Royale de Belgique. Bulletin, année 59. 3. serie. Tome 17. No. 4. Bruxelles 1889.
Publications de la section historique de l'institut Gr. Ducat de Luxembourg. Vol. XL. Luxembourg 1889.
Bulletin de l'Académie Imp. des sciences de St. Petersbourg. Nouvelle série I. (XXXIII) N. 1. (2 Exemplare).
Bericht über die Ergebnisse an den Regenstationen der K. Livländischen gemeinnützigen und ökonomischen Societät. Für 1887. Dorpat 1889.
Meteorologische Beobachtungen angestellt in Dorpat. Sept.—Decemb. 1888.
Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. Tome XXIII. livrais. 2. Harlem 1889.
Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde. Deel XXXII. Afl. 5. Batavia. s'Hage. 1889.
Notulen van de algemeene en bestures-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel XXVI. 1888. Aflever. III. Batavia 1888.
Allgemeen Reglement en reglement van orde for B. Genootschap v. Kunsten en Wetenschappen op d. 24. April 1778. Batavia 1889.
Rendiconti del circolo matematico di Palermo. Tomo. III. fasc. II. Anno 1889.
Atti della società Toscana di scienze naturali. Processi verbali. Vol. VI. Adunanza d. 13. Gennaio 1889. 17 Febbr. e del di 24. Marzo 1889.
Alla memorin del Prof. Giusseppe Meneghin 24 marzo. Pisa 1889.
Alaudae 1889. I. II. Journal latin international periodique.
Bollettino del osservatorio della R. università di Torino. Anno XXII (1887). Torino 1889.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions - Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner)

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

26. Juni. № 14. 1889.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 1. Juni.

de Lagarde, Maria Magdalena.
Kielhorn, über das Verhältniß der indischen Aeren unter einander.
Klein legt vor:
a. eine eigene Mittheilung: „Zur Theorie der Abelschen Funktionen. II.“
b. im Anschluss daran von Dr. E. Wiltheiß in Halle: „Die partiellen Differentialgleichungen der Abelschen Thetafunktionen dreier Argumente“.
c. von Dr. H. Maschke in Berlin: „Ueber eine merkwürdige Configuration gerader Linien im Raume“.
Berthold legt eine Mittheilung vor von Herrn Prof. Vöchting in Tübingen, Korrespondenten der physikalischen Klasse: „Ueber Transplantation im Pflanzenkörper“.

Maria Magdalena.

Von

Paul de Lagarde.

Maria Magdalena hat ihren Festtag am 22 Juli: unter diesem Datum handeln die Bollandisten über sie: fünfter Band des Juli 187—225. Ihr Ende fand sie „apud Massiliam in Provincia [= Provence] Galliae“: abweichende Ansichten mag man bei den Bollandisten aufsuchen, und allenfalls auch des am 13 November 1652 in hohem Alter verstorbenen Jesuiten Balduin Cabilliavius [= Kabeljau aus Ypern], mir in einem Plantinschen Drucke von 1625 vorliegende Magdalena nachlesen. Den 22 Juli nennt für Maria Magdalena auch das aramäische Evangeliar (Lucas 8_1 ff.), welches aus einem 1030 in Antiochia geschriebenen, jetzt römischen Codex Graf FMiniscalchi-Erizzo herausgegeben hat, und das ich neu zu veröffentlichen vorhabe.

Nicht wenig erstaunt war ich daher, am 5 Mai 1889, einem Sonntage, in der Vossischen Zeitung zu lesen, die heute beginnende Woche stehe unter dem Zeichen der heiligen Maria Magdalena, die, vormals Patronin der KammMacher, jetzt Beschützerin der Haarkünstler und Barbiere sei. Die von ihr Beschützten würden daher auch ihr zu Ehren — obwohl in Berlin selbst eigentlich unter der Obhut der heiligen Cosmas und Damianus stehend — morgen, Mondtag [= feria II] den sechsten Mai, in Berlin ihren Verbandtag abhalten. Man wird zugeben müssen, daß es mit dem „Protestantismus“ der tagenden Haarkünstler etwas kümmerlich bestellt ist.

Μαρία ἡ Μαγδαληνή *), zwölfmal so genannt, kann zunächst nicht anders erklärt werden als *Maria aus Magdala*: Magdala wird bald in *Μάγδαλα* **) im Stamme Iuda [meine Onomastica sacra ² 276 $_{26}$], bald [PSmith 656] im Thurme von Siloe oder im *Πύργος Στράτωνος*, oder im Megdel Galilaeas [Socin ² 268] gesucht. Schon 𝔖 ܡܪܝܡ ܡܓܕܠܝܬܐ. Wer seine Tochter Magdalena taufen heißt, ist so geschmackvoll, wie der, welcher die seine Potsdamerin oder Buxtehuderin nennt. In einem Lande freilich, in welchem Devrients „Lutherspiel“ Begeisterung weckt, ist ein MädchenName Magdalena eben nur blödsinnig genug. Er hat seiner werthe Genossen an den spanischen Eigennamen Maria del Carmen und Maria del Pilar, deren erster durch Prosper Mérimées Novelle, die auf diese

---

*) Es wird seit Alters darüber gestritten, ob sie mit der Ioh. 11 genannten Maria identisch sei. Maria, Martha, Lazarus Ioh. 11 halte ich für Allegorien. Μάρθα ist kein Eigenname, und kann kein Eigenname sein, sowenig wie dame, signora, senhora Eigennamen sein können: denn ܡܪܬܐ bedeutet *die Herrin*. Λάζαρος ist nicht Ἐλεάζαρος = אֶלְעָזָר, sondern ܠܐܥܙܪ *hülflos* (Mischform aus Syrischem und Hebräischem). Folglich ist auch *diese* Μαρία nicht מִרְיָם, sondern ܡܪܬܐ *die Herrin*. Ich verhehle nicht, daß ماريّة des arabischen Sprichwortes mir mit diesem Μαρία identisch scheint: Freytag 1 Seite 422, Maidânî 1 204. Μαρθοῦς καὶ Μαρθάνα der Ossaeer bei Epiphanius ιθ 2 = 41 ¹ P dürften analog zu deuten sein (vgl. Ἠλαθοῦς أيلة אֵילַת Iosephus θ 245). Maria und Martha sind zwei „Heiden“kirchen: die Erweckung, d. h. Bekehrung, Israels wird erwartet. Erwartete sie doch Iesus selbst: das σημεῖον Ἰωνᾶ τοῦ προφήτου Matth. 12 $_{39}$ ist nach dem Zusammenhange (nachdem man Vers 40 als Glosse eines Orthodoxen ausgestoßen hat), daß an Iesus geglaubt wird, wie Ninive dem Ionas, die Königin von Saba dem Salomon glaubte. Vgl. Matth. 16 $_{4}$ Luc. 11 $_{29}$ ff. Er kannte seine Leute schlecht: doch ist nicht ausgeschlossen, daß er oder der ihm Worte unterlegende Evangelist auf die Bekehrung der Hellenen und Römer weisen will: in letzterem Falle wäre die Weißagung nicht ganz alt.

**) Μάγδαλα Matth. 15 $_{39}$ ist die Lesart der emendati, d. h. contaminati.

Novelle gebaute Oper Bizets, und durch Carmen Sylva, Königin von Rumänien, in Aller Munde ist. Ein Maria del Pilar [= vom Pfeiler] getauftes Mädchen wird schlechtweg Pilar, ein Maria del Carmen benanntes schlechtweg Carmen gerufen*).

Allein *Μαγδαληνή* ist in der alten Zeit anders aufgefaßt worden. ܐܬܓܕܠ belegt PSmith 654 als Synonymum von ܓܕܠ und ܓܕܠ *flicht*, namentlich Haare eines Menschenhaupts: man muß nur — billige Gelahrtheit über die Haartrachten auszukramen ist unnütz — man muß nur festhalten, daß es sich bei den צְפִירוֹת = ظفاير auch mit um das in die Haare Eingeflochtene (Blumen, Goldfäden, Goldmünzen) handelt. ܡܓܕܠܐ = maGdẹlâ wäre ein Participium, und würde ein Weib bezeichnen, welches Einmal jemandem die Haare flicht: wäre sie gewerbsmäßige *Friseuse*, so müßte sie ܡܓܕܠܢܝܐ = maGdẹlânyâ genannt werden. ܫܪܓܐ ܡܢܗܪ 𝔖 Matth. 5 15 = ὁ *λύχνος λάμπει*, aber [so] ܟܘܟܒܐ ܐܝܬܝܗܘܢ ܡܢܗܪܢܐ Brief des Ieremias 59 = *ἄστρα εἰσί λαμπρά*: daher die Fenster oder *ὑποφαύσεις* eines Hauses ܡܢܗܪܢܝܬܐ heißen. „*Die* Haarkünstlerin" würde ܡܓܕܠܢܝܬܐ = maGdẹlânîTa sein.

Ich darf mich des Raumes und meiner Unwissenheit wegen nicht darauf einlassen, des TalmûD Mittheilungen über מִרְיָם מְגַדְּלָא zu besprechen: mir genügt eine Verweisung auf Buxtorfs Wörterbuch 389 1458 ff. GHWiner Realwörterbuch 2 57:

> Die jüdischen תּוֹלְדוֹת יֵשׁוּעַ machen die Maria [die Mutter Iesu] zu einer (im Talmud erwähnten, vgl. Othon. lexic. rabb. 411) berühmten Haarkräuslerin (מגדלא נשיא, vielleicht eine Verwechselung mit Maria Magdalena?) in Ierusalem ....

Winer bezieht sich auf das Classical Journal **9** 262 ff.**)

---

*) Es lohnt nicht, festzustellen von welcher Maria del Carmen (= Maria a Carmelo), von welcher Maria del Pilar die entzückenden Eigennamen Carmen und Pilar (so eine jetzt nach Baiern verheirathete spanische Prinzessin) hergeleitet worden sind. Am Rande nenne ich noch Maria de los Dolores, Maria de las Mercedes, Maria de la Concepcion, Maria de Guadalupe, Maria della Piedad, Maria da Gloria, Maria do Patrocinio, Maria da Immaculata Conceição: der gothaische Hofkalender unter Spanien und Portugal genügt, diese Namen zu sichern, deren Einer, Dolores, durch Achims von Arnim Roman, nicht in Deutschland, aber unter manchen Deutschen, bekannt genug ist. Die santa Maria del Carmelo nennt Giordano Bruno 53_{25} meiner Ausgabe: wie sie sich zur Santa Maria del Carmino (ebenda 95_{6}) verhält, weiß ich nicht.

**) Es würde sich sehr empfohlen haben, einige Citate dieses 1814 zu London bei Valpy erschienenen Bandes auszuschreiben, Lightfoots Opera [mir 2 388], und eines ungenannten Mauriners explication de plusieurs textes difficiles de l'écriture, Paris 1730, 632 ff.: aus Charles de Lama, bibliothèque des écrivains de la congrégation de Saint-Maur [1882] § 510 ist zu lernen, daß dies Werk von Dom Jacques

Es ist zweifellos, daß „Maria Magdalena“ der Evangelien neben einer מִרְיָם מְגַדְּלָא des Talmûᴅ steht: mir scheint sehr möglich, daß die ältesten Evangelienschreiber — *ἡρμήνευσεν ὡς ἦν δυνατὸς ἕκαστος*, Papias bei Eusebius KG γ 39_{16} — aus מִרְיָם מְגַדְּלָנִיָּא „Maria die Friseuse“ *Μαρία ἡ Μαγδαληνή* gemacht haben, die dann aus der Geschichte zu verschwinden hätte: sie läuft so wie so mit anderen Marien stets zusammen. Vgl. meinen Agathangelus 128ʳ. Natürlich hätte wer *Μαγδαληνή* für *Haarkünstlerin* gesetzt, von der „Geschichte“ Iesu *nichts* gewußt.

In seinem Kalendarium manuale utriusque ecclesiae 2 334 hat der Jesuit NNilles nachgewiesen, daß in der *ἑβδομὰς διακαινήσιμος*, d. h. in der auf das Osterfest folgenden Woche — sie hieß in albis: ihr Sonntag heißt noch heute whitsunday oder weißer Sonntag — = ܥܐܕܐ ܕܫܘ̈ܪܐ die Syrer am Mondtage, = feria II, die Maria Magdalena feiern.

Die Kirche von Constantinopel kommt der Syriens nahe, da sie die *κυριακὴ τῶν μυροφόρων* zwei Wochen nach Ostern liegen hat. Dieser Kirche Schema ist das folgende: Ostern [dem nur eine *παρασκευὴ* (also ein Freitag) *τῆς διακαινησίμου* folgt], Thomas, *γυναῖκες μυροφόροι, παραλύτης, Σαμαρεῖτις, τυφλὸς ἐκ γενετῆς, ἀνάληψις,* [*τιη*] *πατέρες* [von Nicaea], Pfingsten. Nilles 2 427 ff., dictionary of christian antiquities 1055.

Das Eine wie das Andere abweichend von der römisch-katholischen Kirche, welche das MariaMagdalenaFest auf den 22 Juli verlegt hat.

Ich kann den Glauben, Maria Magdalena sei die Schutzpatronin der Haarkünstler, nur auf die מִרְיָם מְגַדְּלָ[נִיָּ]א *Maria die Friseuse* des Talmûᴅ in der Voraussetzung zurückführen, daß diese Frau in der That dem Kreise Iesu angehört habe: aus dem Talmûᴅ kann bei der in der ältesten Zeit ganz allgemein den Juden gewidmeten Abneigung an christliche Handwerker nichts gekommen sein: der Talmûᴅ bezeugt nur von Seinem Standpunkte aus eine Thatsache, welche der am 6 Mai 1889 zu Berlin abgehaltene Verbandtag der Haarkünstler seinerseits bestätigt.

Martin verfaßt ist. Auch das wäre wichtig gewesen zu erfahren, daß J. T. in Macclesfield (so zeichnet der Verfasser des Aufsatzes) unter Verweisung auf Schleusner den Nachweis führt, daß *Sünde* = חַטָּאָה Exod. $32_{31\,35}$ Regn. γ 14_{16} *κατ᾽ ἐξοχήν* Götzendienst ist, daß Matth 26_{45} diejenigen *ἁμαρτωλοί* *Sünder* heißen, die Luc. 18_{32} *ἔθνη* *NichtJuden* (JudenDeutsch: *Heiden*) genannt werden, und daß man Mth. 5_{47} Mc. 14_{41} Luc. 24_{7} Galat. 2_{15} wie חַטָּאִים Regn. α 15_{18} erwägen muß: heut würde man hinzufügen, daß nahezu jeder tüchtige Europäer jetzt als רָשָׁע = rôsche gilt. Alles zum Erweise zu verwenden, daß die *ἁμαρτωλός* Lucas 7_{37} nicht eine Dirne zu sein braucht, eine NichtJüdin sein kann.

Diese Männer folgen dem Brauche der Kirche von Constantinopel: der zweite Sonntag nach Ostern fiel heuer auf den 5 Mai, folglich wurden die Salben bringenden Frauen, deren Namen man bei Nilles 2 429 nachsehen mag, heuer am 5 Mai gefeiert, und der erste „Arbeits“tag, den die von der Maria Magdalena bei Gott vertretenen Haarkünstler für ihre Verbandversammlung zur Verfügung hatten, war der 6 Mai.

Nähere Nachforschungen wären erwünscht. Auch die Clemens-Sage, an der für uns Deutsche die FaustSage hängt, ist von Osten her, durch Methodius, zunächst nach Freisingen und Regensburg gebracht: meine Mittheilungen **1** 40^r 47*).

---

*) Zu dem neulich über die Πατισχορεῖς Gesagten habe ich einen Nachtrag zu liefern.

Herr FHommel machte mich durch eine Postkarte vom 11 Juni 1889 darauf aufmerksam, daß Herr [CP]Tiele mir in der Deutung des Patuš-arra zuvorgekommen sei: er selbst habe dies Seite 724 seiner Geschichte mitgetheilt. Ich bedaure — näheres Citat fehlt —, dies übersehen zu haben.

Ich bemerke dazu, daß Herr Wilhelm ZDMG **42** 96 ff. unter Anführung der von mir in den gesammelten Abhandlungen 219 277 citierten Stellen des Ammian ις 9_4 ιζ 5_1 ιη 6_{22} [Er XIX 1_7] die Xyaona des Awesta in den Chionitae gesucht hat, wie Ich das schon 1866 gethan habe. Auf die östlich vom Tanais wohnenden Κερμιχίωνες ist der Herr Wilhelm nicht verfallen, die ich — volksetymologisch — als گرماخون [Vullers 2 983[1] unten] deutete, ebensowenig auf die Gleichung շուն ks̆apâyaona شباخون in den armenischen Studien § 1710: was ich an der zuletzt genannten Stelle geschrieben, muß man ja recht mit Vorsicht lesen, da ein Freund des Herrn Noeldeke, Herr HHübschmann (aus dem deutschen Gelehrtenleben 94_{14}), meinem Versuche sein Misfallen bezeugt hat.

Zu dem neulich über den Namen des OlivenOeles Gesagten vergleiche was ich in meiner »Uebersicht« 219 über den Namen des Pechs beigebracht habe. Auch Aegyptologen bitte ich das anzusehen.

Zur Theorie der Abel'schen Functionen.

(Zweite Mittheilung).

Von

Felix Klein.

In einer ersten unter dem vorstehenden Titel erschienenen Note (cf. Nachrichten vom 2. März dieses Jahres) habe ich nur erst einen Theil der ursprünglich für hyperelliptische Functionen beliebig vieler Argumente im Nov. 1887 mitgetheilten Sätze auf beliebige Abel'sche Functionen übertragen: alle diejenigen Theoreme blieben im Rückstande, welche es wesentlich mit der Abhängigkeit der in Betracht kommenden Functionen von den Moduln des algebraischen Gebildes zu thun haben. Bei der Unkenntniß, in der wir uns betreffs dieser Größen für alle höheren Werthe von p befinden, erscheint es zweckmäßig, die einzelnen Fälle vorab für sich zu untersuchen. Ich beschäftige mich daher nachstehend nur erst mit dem allgemeinen Falle $p = 3$, wobei ich das algebraische Gebilde von vornherein als ebene Curve vierter Ordnung $f(x_1\, x_2\, x_3) = 0$ zu Grunde legen will.

In meiner vorigen Note habe ich eine allgemeine Definition der zum algebraischen Gebilde gehörigen Θ-Functionen gegeben. Wir müssen uns jetzt vor allen Dingen darüber klar werden, wie man diese Definition modificiren muß, um diejenigen Functionen zu erhalten, die man nach Analogie sonstiger Entwickelungen als σ-Functionen bezeichnen wird. Hierüber gibt bereits die wiederholt genannte Arbeit des Hrn. Pick im 29ten Bande der mathematischen Annalen den erforderlichen Aufschluß. Wir werden das in der Definition der Θ vorkommende noch nicht normirte Integral dritter Gattung P durch das von Hrn. Pick auf pag. 262 seiner Arbeit eingeführte Integral Q ersetzen müssen, wir werden ferner den bei Θ noch unbestimmt gebliebenen constanten Factor so festlegen, daß die Reihenentwickelung nach ansteigenden Potenzen der w beim geraden σ mit 1 beginnt, beim ungeraden aber mit $\varphi_1(w)$, unter $\varphi_1(x)$ die zum ungeraden σ gehörige Doppeltangente von $f = 0$ verstanden. Durch w_1, w_2, w_3 werden dabei die Integrale $\int x_1\, d\omega$, $\int x_2\, d\omega$, $\int x_3\, d\omega$, bez. die Integralsummen $\Sigma \int x_1\, d\omega$, $\Sigma \int x_2\, d\omega$, $\Sigma \int x_3\, d\omega$ bezeichnet.

Wir fragen nunmehr nach dem allgemeinen Gesetz, nach welchem die genannten Potenzentwickelungen fortschreiten. In dieser Hinsicht werden die Erläuterungen von Wichtigkeit, die ich in

Nr. 8 der Nachrichten vom vorigen Jahre über irrationale Covarianten einer Curve vierter Ordnung gegeben habe. In der That habe ich damals zwei kanonische Gestalten der biquadratischen Form f in Betracht gezogen, welche genau der Adjunction einer einzelnen σ-Function entsprechen. Es war dies erstlich die Form:

$$(1) \qquad f = \varphi_1 \varphi_3 - \varphi_2^2,$$

bei der $\varphi_1 = 0$ eine Doppeltangente von $f = 0$ vorstellt, so daß von vorneherein eine ungerade σ-Function ausgezeichnet erscheint, es war ferner die Darstellung von f durch eine symmetrische Determinante linearer Formen a_{ik} $(a_{ik} = a_{ki})$:

$$(2) \qquad f = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

deren Zugehörigkeit zu einem Systeme von Berührungscurven dritter Ordnung zweiter Art der Curve vierter Ordnung wohlbekannt ist, so daß durch dieselbe eine gerade σ-Function festgelegt erscheint. Als irrationale Covarianten von f in dem durch (1) gegebenen Rationalitätsbereiche erschienen alle diejenigen rationalen Covarianten der drei ternären Formen φ_1, φ_2, φ_3, welche bei den Umsetzungen:

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi_1' = \lambda^2 \varphi_1 \\ \varphi_2' = \lambda\mu\,(\varphi_2 + (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3)\varphi_1) \\ \varphi_3' = \mu^2\,(\varphi_3 + 2(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3)\varphi_2 + (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3)^2 \varphi_1) \end{cases}$$

bis auf einen Factor ungeändert bleiben. Die irrationalen Covarianten von (2) ließen sich am besten bezeichnen, indem man unter Einführung neuer Veränderlicher $\xi_1 \ldots \xi_4$ die ternär-quaternäre Form

$$(4) \qquad \Sigma\,\Sigma\, a_{ik}\, \xi_i\, \xi_k$$

zu Hülfe nahm. Setzt man diese Form gleich Null und deutet die ξ als gewöhnliche Punctcoordinaten, so hat man in Anbetracht der in den a_{ik} enthaltenen x_1, x_2, x_3, die jetzt die Bedeutung vno Parametern erhalten, ein N e t z v o n F l ä c h e n z w e i t e r O r d n u n g vor sich. Die zu (2) gehörigen Covarianten von f sind dann nichts anderes, als diejenigen Combinanten dieses Netzes, welche wohl noch möglicherweise die x aber nicht mehr die ξ enthalten. — Uebrigens kann man auch die Form (1) passend mit raumgeometrischen Vorstellungen in Verbindung bringen. Gleichung (1) ist die in Bezug auf x_4 gebildete Discriminante der Gleichung:

(5) $$\varphi_1 x_4^2 + 2\varphi_2 x_4 + \varphi_3 = 0.$$

Hier deuten wir $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ als räumliche Punct-Coordinaten und haben dann eine Fläche dritter Ordnung, welche durch die Ecke $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ des Coordinatentetraëders hindurchläuft: unsere Curve vierter Ordnung ist der Schnitt des Umhüllungskegels, der sich von der genannten Ecke an die Fläche dritter Ordnung legen läßt, mit der der Ecke gegenüberliegenden Coordinatenebene, d. h. mit der Ebene $x_4 = 0$. Man hat also die bekannte Geiser'sche Figur (Mathematische Annalen Bd. I); ich komme hernach auf dieselbe zurück.

Hier nun die Angaben über die Potenzentwickelungen der σ-Functionen. Dieselben formuliren sich jetzt folgendermaßen:

1) Um ein ungerades σ in eine Potenzreihe zu entwickeln bilde man die ihm entsprechende kanonische Form (1). Man hat dann

(6) $$\sigma = [w]_1 + [w]_3 + \ldots [w]_{2\varrho+1} + \ldots,$$

wo $[w]_1$, wie schon oben gesagt wurde, $\varphi_1(w)$ bedeutet, allgemein aber die Tenne $[w]_{2\varrho+1}$ Aggregate rationaler ganzer Covarianten der drei ternären Formen φ_1, φ_2, φ_3 sind, deren Variable $x_1\ x_2\ x_3$ man durch $w_1\ w_2\ w_3$ ersetzt hat. Diese Aggregate dürfen sich bei den Transformationen (3) nicht anders ändern, als $\varphi_1(w)$ selbst, d. h. um den Factor μ^{-2}. Uebrigens ist der Grad ihrer einzelnen Glieder in den Coëfficienten von φ_1, φ_2, φ_3 aus folgender Formel ersichtlich:

(7) $$[w]_{2\varrho+1} = \sum_{1}^{2\varrho+1}{}_{e} \left(\overset{e}{\varphi_1}, \overset{4\varrho+2-2e}{\varphi_2}, \overset{e-1}{\varphi_3}, \overset{2\varrho+1}{w}\right).$$

2) Jedem geraden σ entspricht eine kanonische Form (2). Unter Zugrundelegung derselben lassen sich die einzelnen Glieder der Potenzentwickelung:

(8) $$\sigma = 1 + [w]_2 + [w]_4 + \ldots [w]_{2\varrho} + \ldots$$

folgendermaßen charakterisiren: sie sind solche Combinanten des durch (4) gegebenen Flächennetzes, welche die ξ nicht mehr enthalten und in denen man die $x_1\ x_2\ x_3$ durch $w_1\ w_2\ w_3$ ersetzt hat. Ihr Grad in den Coëfficienten von (4) ist 8ϱ. —

Wir gehen jetzt von den σ zu den ϑ. Hierbei fragt sich vor Allem, welche ϑ-Charakteristik $\begin{vmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix}$ man dem einzelnen durch Auswahl eines bestimmten Systems von Wurzelformen $\sqrt{\Phi}$ festgelegten Θ oder σ zuzuordnen hat. Diese Frage, welche früheren

Autoren Schwierigkeiten bereitet zu haben scheint, erledigt sich vermöge der in der vorigen Note für Θ aufgestellten allgemeinen Formel von selbst. Die einfachste Formulirung, zu der man gelangt, ist folgende, die gleich für beliebiges p gilt: Man bilde sich die Form

$$\sqrt{\Phi(x)} \, . \, \Omega(x, y),$$

(wo Ω die Primform meiner vorigen Note, y ein beliebiger Hülfspunct). Läßt man das in ihr vorkommende x den k^{ten}, bez. $k+p^{\text{ten}}$ Querschnitt der Riemann'schen Fläche überschreiten, so erhält dieselbe Factoren

$$(-1)^{g_k} . e^{\Sigma_\alpha \eta_{\alpha,k}\left(w_\alpha + \frac{\omega_{\alpha,k}}{2}\right)}, \text{ bez. } (-1)^{h_k} . e^{\Sigma_\alpha \eta_{\alpha,k+p}\left(w_\alpha + \frac{\omega_{\alpha,k+p}}{2}\right)}$$

wo

$$w_\alpha = \int_y^x dw_\alpha;$$

die in diesen Faktoren auftretenden Zahlen g_k, h_k geben die Charakteristik der zu $\sqrt{\Phi}$ gehörigen ϑ-Function.

Nach dem von Hrn. Thomae gegebenen Resultate (Crelle's Journal Bd. 75) hat man jetzt für das so fixirte $\vartheta\left|\begin{matrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{matrix}\right|$ folgende Formel:

$$\vartheta\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right| = c \, . \, \sqrt{p_{123}} \, . \, E \, . \, \sqrt[8]{G} \, . \, \sigma. \tag{9}$$

Hier bezeichnet c eine numerische Constante, die wir unbestimmt lassen, p_{123} die Determinante aus den drei ersten Perioden der w_1, w_2, w_3:

$$p_{123} = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{vmatrix},$$

E einen bekannten, von der Charakteristik unabhängigen Exponentialfactor, dessen Exponent eine homogene quadratische Function der w_1, w_2, w_3 ist, endlich G einen Ausdruck, der von den Coëfficienten von f algebraisch abhängt. Ich werde hier angeben, wie man dieses G zu bilden hat, womit denn eine Frage, über die von anderer Seite viel gearbeitet ist, ihren symmetrischen Abschluß findet.

Die Bestimmung des G hängt von der Gestalt ab, welche die Discriminante D der Curve vierter Ordnung in dem der einzelnen σ-Function entsprechenden Rationalitätsbereiche (1) oder (2) annimmt; als Discriminante bezeichne ich dabei denjenigen Ausdruck 27ten Grades in den Coëfficienten von f, der gleich Null gesetzt besagt, daß die Curve vierter Ordnung $f = 0$ einen Doppelpunct besitzt. Diese Discriminante D zerfällt in jedem der zweierlei Rationalitätsbereiche in einen einfach und einen quadratisch auftretenden Factor:

$$(10) \qquad D = S \,.\, T^2.$$

Was die Definition dieser Factoren angeht, so ist dieselbe in beiden Fällen am einfachsten auszusprechen, wenn man die raumgeometrische Vorstellung zu Hülfe nimmt, von der die Rede war.

Um zunächst mit (2) zu beginnen, so ist S die Tactinvariante des Netzes (4), d. h. diejenige Function 48ten Grades der Coëfficienten von (4), welche verschwinden muß, damit zwei von den 8 Grundpuncten des Netzes zusammenfallen, T aber eine Function 30ten Grades der Coëfficienten von (4), deren Verschwinden besagt, daß sich unter den Flächen zweiten Grades des Netzes ein Ebenenpaar befindet. Man vergleiche Salmon's Geometry of three dimensions, 4. edition, p. 208 ff.; es ist dort geradezu (p. 213 oben) die Formel (10) für den hier in Frage stehenden Fall angegeben.

Noch leichter erledigt sich (10) im Falle (1). Es ist dann S die Discriminante der Fläche dritter Ordnung (5) (so daß also $S = 0$ besagt, daß (5) einen Doppelpunct besitzt), $T = 0$ aber sagt aus, daß die Ecke $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ auf einer der 27 Geraden der Fläche dritter Ordnung (5) liegt. Man bildet also T, indem man die bekannte Covariante 9ten Grades in den x, 11ten Grades in den Coëfficienten der Fläche aufstellt (Clebsch in Crelle's Journal, Bd. 58), welche gleich Null gesetzt die 27 Geraden der Fläche ausschneidet, und aus dieser Covariante dasjenige Glied herausgreift, welches mit x_4^9 verbunden ist.

Mit dieser Zerlegung von D ist nun die Bestimmung des G in Formel (9) ohne Weiteres gegeben. Es ist nämlich in beiden Fällen einfach:

$$(11) \qquad G = S.$$

Ich habe dieses Resultat bereits gegen Mitte Februar an Hrn. Cayley mitgetheilt, der selbiges der London Mathematical Society vorgelegt hat.

Göttingen, den 12. Mai 1889.

Die partiellen Differentialgleichungen der Abelschen Thetafunktionen dreier Argumente.

Von

Ed. Wiltheiss in Halle a/S.

(Vorgelegt von F. Klein.)

In früheren Aufsätzen (man vergl. hauptsächlich Math. Annalen, Bd. XXXIII, S. 267,) habe ich die bekannten Differentialgleichungen der Jakobischen Thetafunktionen:

$$4\pi i \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{\alpha\alpha}} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \upsilon_\alpha^2}, \qquad 2\pi i \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{\alpha\beta}} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \upsilon_\alpha \partial \upsilon_\beta},$$

für den Fall, daß sie zu hyperelliptischen Integralen gehören, so umgeformt, daß die sämmtlichen Constanten in denselben ganze Funktionen der Coefficienten des Radicanden in der Wurzelgröße der zugehörigen Integrale wurden und daß zugleich die einzelnen Theile Invarianteneigenschaft erhielten. Das Analoge habe ich für die Abelschen Thetafunktionen mit drei Argumenten ausgeführt, und ich werde im folgenden die gefundenen Resultate mittheilen.

Das wesentlich Neue dabei besteht in der Aufstellung der partiellen Differentialgleichungen der Perioden ω_α, bez. η_α der Normalintegrale erster und zweiter Gattung.

Diese Normalintegrale will ich, um die symbolischen Abkürzungen der Invariantentheorie gebrauchen zu können, mit homogenen Differentialen schreiben; und außerdem sollen aus dem gleichen Grunde die Integrale erster, bez. zweiter Gattung je in ein einziges Integral zusammengefaßt werden. Bei den Integralen erster Gattung ist dasselbe:

$$(1) \qquad \int \frac{U_x (kx\, dx)}{D_k f(x)},$$

wo U_1, U_2, U_3 beliebige Größen sind, wo

$$f(x) = \sum_{pqr} A_{pqr}\, x_1^p x_2^q x_3^r = a_x^4 = b_x^4 = \cdots$$

die den Integralen zu Grund liegende Form vierter Ordnung ist, und D_k die Polarenbildung unter Einführung von k_1, k_2, k_3 bedeutet. Bei den Normalintegralen zweiter Gattung kann man demselben die beiden Formen

$$(2) \qquad \int \frac{\Gamma(x,y)}{8a_x^3 a_y} \frac{(kx\, dx)}{D_k f(x)},$$

$$\Gamma(x,y) = (abc)^2 [a_x^2 b_x^2 c_y^2 + a_x^2 b_x b_y c_x c_y]$$

und

$$(3) \qquad \int \frac{\gamma(x,y,z)}{4(xyz)^2} \frac{(kx\,dx)}{D_k f(x)},$$

$$\gamma(x,y,z) = 2a_x^3 a_z b_y^3 b_z + 2a_x^2 a_y a_z b_x b_y^2 b_z - a_x^2 a_z^2 b_x b_y^3 - a_x a_y a_z^2 b_x^2 b_y^2 - a_y^2 a_z^2 b_x^3 b_y$$

geben, welche identisch werden, sobald man den im übrigen willkürlichen Größen y_1, y_2, y_3 und z_1, z_2, z_3 die Bedingung

$$a_y^4 = 0, \qquad a_z^4 = 0$$

auferlegt. Diese Integrale (1) und (2), bez. (3) liefern bei der Integration auf einem geschlossenen Integrationsweg die Ausdrücke

$$\omega_1 U_1 + \omega_2 U_2 + \omega_3 U_3,$$
$$-\eta_1 y_1 - \eta_2 y_2 - \eta_3 y_3;$$

sie sind ferner so normirt, daß die zugehörigen Thetafunktionen die Invarianteneigenschaft haben.

Die Differentialgleichungen für die Perioden nehmen, wie es sich zeigen wird, die einfachste Form an, wenn man den Aronholdschen Proceß

$$\delta = \sum_{pqr} \bar{A}_{pqr} \frac{\partial}{\partial A_{pqr}}$$

mit der Funktion

$$(4) \qquad \sum_{pqr} \bar{A}_{pqr} x_1^p x_2^q x_3^r = \bar{f}(x) = (abc)^2 [a_x^2 b_x^2 c_v^2 + a_x^2 b_x b_v c_x c_v]$$

ausführt, die sich speciell noch dadurch auszeichnet, daß sie mit dem Zähler der ersten Form des Integrals zweiter Gattung, mit $\Gamma(x, v)$, übereinstimmt. Die Ausführung dieses Processes gestaltet sich hier bei homogenen Differentialen in den Integralen ein wenig complicirter, weil in Folge von $f(x) = 0$ sich auch die x_1, x_2, x_3 ändern müssen, wenn man die Coefficienten von $f(x)$ variiren läßt. Demgemäß ist

$$\delta \int \varphi(kx\,dx) = \int \Big\{ \Big(\bar{\varphi} + \sum_a \frac{\partial \varphi}{\partial x_a} \delta x_a\Big)(kx\,dx) + \varphi((k\delta x\,dx) + (kx\,d\delta x)) \Big\},$$

wo $\bar{\varphi}$ bedeutet, daß an den Coefficienten von φ die Operation δ ausgeführt worden ist. Die rechte Seite läßt sich durch partielle Integration umformen, so daß man die Formel

$$(5) \qquad \delta \int \varphi(kx\,dx) = (kx\,\delta x)\varphi + \int \Big(\bar{\varphi} + \tfrac{1}{2}\bar{f}\frac{D_k \varphi}{D_k f}\Big)(kx\,dx)$$

erhält.

Mit Hilfe dieser Formel wird der Aronholdsche Proceß an den Integralen (1) und (3) ausgeführt. Man findet nach mancherlei Reduktionen

$$\delta \int U_x \frac{(kx\,dx)}{D_k f(x)} = (vx\,\delta x)\frac{U_x}{D_v f(x)} - 2\,U_v \int \frac{\Gamma(x,v)}{8\,a_x^3 a_v}\frac{(kx\,dx)}{D_k f(x)},$$

$$\delta \int \frac{\gamma(x,y,v)}{4(xyv)^2}\frac{(kx\,dx)}{D_k f(x)} = (vx\,\delta x)\frac{\gamma(x,y,v)}{4(xyv)^2 D_v f(x)} + \Phi(x) + \frac{1}{144}\int L(x,y)\frac{(kx\,dx)}{D_k f(x)},$$

wo

$$L(x,y) = \Sigma\, l_{\alpha\beta}\, x_\beta y_\alpha = 9(abc)^2(abe)^2[c_v c_x e_v e_y + c_v^2 e_x e_y] - 5(abc)^4 e_v^2 e_x e_y,$$

$$\Phi(x) = \tfrac{1}{4}(xyv)\,a_v^3 a_x \frac{d}{(kv\,dv)}\left[\frac{\gamma(v,y,x)}{(xyv)^3}\right] - \tfrac{3}{4}\,a_v^2 a_x a_y \frac{\gamma(v,y,x)}{(xyv)^3}$$

ist, und die bisher willkürlichen Größen v_1, v_2, v_3 jetzt der Bedingung $a_v^4 = 0$ unterliegen. Durch Integration auf geschlossenen Integrationswegen ergeben sich hieraus die Differentialgleichungen für die Perioden:

$$\text{(6)}\qquad \begin{aligned} \delta\omega_\alpha &= 2\,v_\alpha \sum_\beta v_\beta \eta_{\beta}, \\ \delta\eta_\alpha &= -\frac{1}{144}\sum_\beta l_{\alpha\beta}\,\omega_\beta. \end{aligned}$$

In jeder derselben sind, da das Werthsystem v_1, v_2, v_3, abgesehen von der Bedingung $a_v^4 = 0$, ganz beliebig ist, sechs einzelne Differentialgleichungen zusammengefaßt.

Um jetzt aus den Differentialgleichungen der Perioden diejenigen für die Thetafunktionen selbst abzuleiten, sind die Betrachtungen genau dieselben, wie ich sie in dem oben erwähnten Aufsatz bezüglich der hyperelliptischen Thetafunktionen angestellt habe. Man findet:

$$\text{(7)}\qquad \delta\theta + \sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u_\alpha\,\partial u_\beta}\,v_\alpha v_\beta + \left(\frac{1}{288}\sum_{\alpha\beta} l_{\alpha\beta}\,u_\alpha u_\beta + C\right)\theta = 0.$$

Dabei bedeutet θ diejenige Form der Thetafunktion, welche dadurch charakterisirt ist, daß

$$\theta(\ldots, u_\alpha + \omega_\alpha, \ldots) = \pm\,\theta(\ldots, u_\alpha, \ldots)\,e^{\sum_\beta \eta_\beta (u_\beta + \frac{1}{2}\omega_\beta)}$$

wo ω_α und η_α die gleiche Bedeutung wie in den seitherigen Entwicklungen haben. Die Constante C ist ein transcendenter Ausdruck, der aus den Größen ω_α und η_α gebildet ist; man kann sie insbesondere zum Verschwinden bringen, indem man durch die Substitution

$$\theta = \pi^{-\frac{3}{2}}\,\omega^{\frac{1}{2}}\,Th,$$

(wo ω die sogenannte Determinante der realen Perioden ist,) die Differentialgleichung für die Funktion θ in eine solche für Th verwandelt:

$$(8) \qquad \delta\, Th + \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 Th}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} v_\alpha v_\beta + \frac{1}{288} \sum_{\alpha\beta} l_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta Th = 0.$$

Diese Funktion Th unterscheidet sich von der Klein'schen σ-Funktion nur um den irrationalen Faktor $\sqrt[8]{G}$. (Vergl. die hier vorangehende Mittheilung von Klein: Zur Theorie der Abel'schen Funktionen, II.)

In den Gleichungen (7) und (8) sind wiederum in Folge der Unbestimmtheit von v_1, v_2, v_3 sechs einzelne Differentialgleichungen vereinigt. Zu diesen kommen dann noch die neun weiteren Differentialgleichungen, welche die Invarianteneigenschaft der Thetafunktionen ausdrücken.

Halle, den 25. Mai 1889.

Ueber eine merkwürdige Configuration gerader Linien im Raume[1]).

Von

H. Maschke in Berlin.

(Vorgelegt von F. Klein).

Es mögen die sieben Größen: $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ den beiden Gleichungen:

$$\sum_{i=0}^{6} x_i = \sigma, \quad \sum_{i=0}^{6} x_i^2 = 0 \tag{1}$$

genügen. Alsdann kann man $x_0, \ldots . x_6$ als überzählige Coordinaten der geraden Linie im Raume von drei Dimensionen auffassen. Denkt man sich etwa x_0 aus den Gleichungen (1) eliminirt, so erhält man eine, in den sechs Größen $x_1, \ldots . x_6$ quadratische Gleichung, welcher die genannten sechs Größen nur zu genügen brauchen, damit sie Liniencoordinaten bedeuten können. Aus Symmetriegründen werden wir aber diese Elimination nicht vornehmen,

1) Vergl., was die Verwendung der Liniencoordinaten $x_1 \ldots x_7$ angeht, den allgemeinen Ansatz bei Herrn Klein in dessen Abhandlung: Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades. Math. Ann. Bd. 28, pag. 499 ff., bes. pag. 507.

sondern stets die sieben Größen x_i mit den zwischen ihnen bestehenden Gleichungen (1) nebeneinander in Betracht ziehen.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Gerade mit den Coordinaten x_i' und x_i'', wobei also die Gleichungen bestehen müssen:

$$\Sigma x_i' = 0,\ \Sigma x_i'' = 0,\ \Sigma x_i'^2 = 0,\ \Sigma x_i''^2 = 0,$$

sich schneiden, ist dann einfach:

$$\sum_{i=0}^{6} x_i' x_i'' = 0. \tag{2}$$

Die folgende Untersuchung basirt nun darauf, daß die Gleichungen (1) ungeändert bleiben, wenn man die sieben Größen $x_0, \ldots, x_6$ in beliebiger Weise permutirt. Durch die $7!$ Permutationen, welche wir mit den Coordinaten einer bestimmten Geraden vornehmen, entstehen alsdann $7!$, im allgemeinen von einander verschiedene Geraden im Raume, welche ein in sich geschlossenes Ganze bilden. Wegen der übergroßen Zahl dieser Geraden würde eine Untersuchung ihrer gegenseitigen Lage auf Schwierigkeiten stoßen. Diese Zahl reducirt sich aber wesentlich, wenn einige der sieben Coordinaten einander gleich gesetzt werden. Unter den so entstehenden möglichen Fällen erweist sich als der bei weitem interessanteste derjenige, in welchem zweimal je drei der Coordinaten gleich sind. Letztere sind alsdann, von einem gemeinsamen Proportionalitätsfactor abgesehen, durch die Gleichungen (1) eindeutig bestimmt, und in folgender Weise darstellbar:

$$\begin{array}{rccccccc} & x_0, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \\ \text{resp.} = & 3, & \lambda, & \lambda, & \lambda, & \mu, & \mu, & \mu, \end{array}$$

wo $\lambda = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-7})$, $\mu = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-7})$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung $z^2+z+2 = 0$ sind.

Die Anzahl der durch alle möglichen Permutationen dieser sieben Coordinaten bestimmten Geraden ist $\frac{7!}{3!\,3!} = 140$.

Von den interessanten geometrischen Eigenschaften der Configuration dieser 140 Geraden, welche man sämmtlich ohne Zugrundelegung eines speciellen Punktcoordinatensystems, fast ausschließlich mit Benutzung der Gleichung (2), aufstellen kann, möchte ich die wichtigsten im folgenden kurz zusammenstellen, indem ich die Beweise an anderer Stelle zu geben gedenke, wo ich auch auf die Bedeutung dieser geometrischen Ergebnisse für die Theorie der Gleichungen 7ten Grades näher einzugehen beabsichtige.

1. Jede der 140 Geraden der Configuration, die ich kurz die Hauptgeraden nennen will, wird von 36 Hauptgeraden geschnitten. Diese 36 Hauptgeraden liegen mit der sie schneidenden Hauptgeraden L zu je 6 in 6 durch L gehenden Ebenen, und gehen zu je 6 durch 6 auf L liegende Punkte, wie denn überhaupt die Configuration der 140 Geraden sich selbst dualistisch entspricht.

2. Die so definirten Ebenen und Punkte nenne ich Hauptebenen und Hauptpunkte. In jeder Hauptebene liegen, und durch jeden Hauptpunkt gehen mithin je 7 Hauptgerade. Die Anzahl der Hauptebenen und Hauptpunkte ist demnach $\frac{6.140}{7} = 120$.

3. Da jede Hauptgerade auch nur von 36 anderen geschnitten wird, und zwar in 6 Hauptpunkten, so folgt: Jeder Schnittpunkt von irgend 2 Hauptgeraden ist ein Hauptpunkt, und: Jede Ebene, in der irgend 2 Hauptgerade liegen, ist eine Hauptebene; ferner: In jeder Hauptebene liegen 21 Hauptpunkte, nämlich die 21 Schnittpunkte der in ihr liegenden 7 Hauptgeraden, und: Durch jeden Hauptpunkt gehen 21 Hauptebenen. In den 21 durch einen Hauptpunkt gehenden Hauptebenen liegen sämmtliche 120 Hauptpunkte (und dualistisch). Innerhalb jeder Hauptebene schneiden sich in einem Hauptpunkte 2 und nur 2 Hauptgerade.

4. Die 6 in einer beliebigen Hauptgeraden liegenden Hauptpunkte sind in charakteristischer Weise gruppirt. Bezeichne ich dieselben mit:

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 3, \\ 4, & 5, & 6, \end{matrix}$$

so zeigt sich, daß diese Punkte dreimal zu je vieren harmonisch liegen, und zwar in folgender eigenthümlicher Anordnung. Es wird das Punktepaar (1, 5) von (2, 4), (1, 6) von (3, 4), endlich (2, 6) von (3, 5) harmonisch getrennt. Ich will die Lage von 6 in dieser Beziehung zu einander stehenden Punkten der Kürze halber „metaharmonisch“ nennen, und zwei dieser 6 Punkte, welche von zwei anderen harmonisch getrennt werden „metaharmonisch zusammengehörig“ [1]). Demnach bilden auch die 6 durch irgend

1) Man kann sich 6 metaharmonische Punkte auf einer Kugel, welche Trägerin der Werthe einer complexen Variabelen ist, in folgender Weise construiren. Ich gebe den Punkten 1, 2, 3 die Breite $+\varphi$, den Punkten 4, 5, 6 die Breite $-\varphi$ mit der Bestimmung: $\cos 2\varphi = \frac{1}{7}$, ferner den Punkten 1 und 4 die Länge

eine Hauptgerade gehenden Hauptebenen ein metaharmonisches Ebenenbüschel. Eine jede von den 7, in einer Hauptebene liegenden Hauptgeraden wird von jeder der 6 anderen in 6 metaharmonischen Punkten geschnitten.

5. Bezeichne ich die 6 durch eine Hauptgerade L gehenden Hauptebenen mit I, II, ... VI, die Hauptpunkte von L wie vorhin mit 1, 2, ... 6, so ist den 2 beliebigen Punkten 1, 2 in der beliebigen Ebene I ein und nur ein Hauptpunkt zugeordnet, derjenige nämlich, in welchem sich die in der Ebene I liegenden und durch die Punkte 1 und 2 gehenden Hauptgeraden schneiden. Ich nenne diesen Punkt kurz I (1, 2). Im Ganzen sind so dem Punktepaar 1, 2 sechs verschiedene Hauptpunkte zugeordnet, nämlich I (1, 2), II (1, 2), ... VI (1, 2). Ich frage nun: Ist die Verbindungslinie zweier solcher, einem Punktepaar i, k zugeordneter Punkte Hauptgerade oder nicht? Eine erste Antwort ist folgende: Sind die beiden Punkte i und k metaharmonisch zusammengehörig, so ist jede der 15 Verbindungslinien der 6 Punkte I (i, k), II (i, k), ... VI (i, k) eine Hauptgerade.

Die 2 Punkte i und k bilden demnach mit den 6 zugeordneten Punkten I (i, k), ... VI (i, k) eine Configuration von 8 Hauptpunkten, deren sämmtliche 28 Verbindungslinien Hauptgerade sind. Ich nenne diese Configuration ein Punktoctupel. Es existiren im Ganzen nur 30 Punktoctupel. Ebenso giebt es 30 Ebenenoctupel; jedes derselben wird von 8 Hauptebenen gebildet, deren sämmtliche 28 Schnittlinien Hauptgerade sind. Auf den 28 Hauptgeraden eines Punktoctupels liegen sämmtliche 120 Hauptpunkte (und dualistisch).

6. Die 30 Punktoctupel lassen sich nicht sämmtlich durch Permutation der 7 Coordinaten in einander überführen. Dieselben spalten sich vielmehr in 2.15 derart, dass sich nur 15 der einen Art und 15 der anderen Art in einander überführen lassen. Man zeigt, daß 2 den metaharmonisch zusammengehörigen Punktepaaren i, k und i, k' von L zugehörige Punktoctupel nicht in einander übergeführt werden können. Jedem Punktoctupel ist ein Ebenenoctupel in der Weise zugeordnet, daß dieselben 168 Permutationen der x_i, welche die Gesammtheit der 28 Geraden und also auch der 8 Punkte des Punktoctupels ungeändert lassen, auch die 28 Geraden des Ebenenoctupels ungeändert lassen.

0, den Punkten 2 und 5 die Länge $\frac{2\pi}{3}$, und den Punkten 3 und 6 die Länge $\frac{4\pi}{3}$. Dann liegen die 6 Punkte in der Weise zu einander harmonisch, wie im Text angegeben.

7. Irgend 2 von den Punktoctupeln einer Art haben 4 Hauptgerade gemeinsam. Es existirt alsdann stets ein und nur ein Punktoctupel derselben Art, welches mit jenen 2 dieselben 4 Hauptgeraden gemeinsam hat. Je 4 so zusammengehörige Hauptgerade haben die merkwürdige Eigenschaft, daß jede von den je 6 Hauptebenen der 3 anderen in ihren 6 Hauptpunkten geschnitten wird.

8. Die in § 5 gestellte Frage wird nun weiter folgendermaßen beantwortet. Sind die Punkte i und k einer Hauptgeraden metaharmonisch nicht zusammengehörig, so sind nur die Verbindungslinien von 2 solchen dem Punktepaar i, k zugeordneten Punkten Hauptgerade, welche in metaharmonisch zusammengehörigen Ebenen liegen. Je 2 metaharmonisch nicht zusammengehörige Punkte definiren somit 6 andere Hauptgerade. Diese 6 Hauptgeraden liegen entweder in einer Ebene, oder sie bilden ein windschiefes geschlossenes Sechsseit. Von den 9 metaharmonisch nicht zusammengehörigen Punktepaaren der Hauptgeraden L gehört unter Benutzung der in § 4 angewandten Bezeichnung der Punkte zu dreien, nämlich zu (1, 4), (2, 5), (3, 6) je ein windschiefes Sechsseit. Die 6 anderen Punktepaare (1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 5), (5, 6), (6, 4) definiren je 6 in je einer Ebene liegende Gerade. Diese 6 Ebenen schneiden sich sämmtlich in derjenigen Geraden L', welche man aus L durch Vertauschung von λ mit μ erhält, und sind die 6 zu L' gehörigen Hauptebenen (dasselbe dualistisch). Folglich sind die 36 so eben definirten Geraden nichts anderes als die sämmtlichen 36 Transversalen von L'.

9. Bemerkenswerth sind endlich noch gewisse Nebengerade der Configuration. Dieselben sind dadurch definirt, daß auf ihnen je 3 Hauptpunkte liegen, und daß je 3 Hauptebenen durch sie hindurchgehen. Eine solche Nebengerade wird von 24 Hauptgeraden geschnitten. Von diesen gehen 21 durch die 3 Hauptpunkte, während die 3 übrig bleibenden durch keinen der 3 Hauptpunkte hindurchgehen, ebenso liegen 21 der 24 Hauptgeraden in 3 durch die Nebengerade gehenden Hauptebenen, während die übrigen 3 in keiner der 3 Hauptebenen liegen.

In Bezug auf einen Hauptpunkt P spalten sich demnach die 119 übrigen in $35 + 42 + 42$. Die 35 liegen zu je 5 in den 7 durch P gehenden Hauptgeraden, die ersten 42 zu je 2 in 21 durch P gehenden Nebengeraden, während die Verbindungsgeraden der letzten 42 mit P keine weiteren Hauptpunkte enthalten.

Ueber Transplantation am Pflanzenkörper.

Von

Hermann Vöchting.

(Vorgelegt von Prof. Berthold.)

Unter den mancherlei Methoden, welche uns in der gärtnerischen Praxis aus dem fernen Alterthum überkommen sind, nimmt die sogenannte „künstliche Veredlung" ein besonderes Interesse in Anspruch. Man versteht darunter bekanntlich das Verfahren, die Knospe oder das Zweigstück, das „Reis", einer Pflanzenform mit dem Stock einer anderen, der „Unterlage", zu verbinden, welche beide dann verwachsen und zu einer physiologischen Einheit zusammentreten.

Während diese Methoden allerorts in großem Maaßstabe zur Erhaltung von Culturpflanzen geübt werden und alten Ursprungs sind, gehören die entsprechenden Versuche am thierischen Körper der neueren Zeit an, und erfreuen sich bis jetzt einer nur geringeren praktischen Bedeutung; lediglich die Osteoplastik und ganz besonders die Hautpfropfungen sind zu wichtigen Hülfsmitteln in der Hand des Chirurgen geworden.

Wurde die Transplantation sowohl am Pflanzen-, als am Thierkörper bisher wesentlich vom praktischen Standpunkte aus betrieben, so ist sie doch nicht selten auch Gegenstand theoretischer Erörterungen gewesen. Wiederholt wurde auch betont, daß das Problem der allgemeinen Physiologie angehöre, und daher eine einheitliche Behandlung verlange. Doch wurde auch auf die Unterschiede zwischen den beiderlei Transplantationen, vor Allem auf den Umstand hingewiesen, daß bei der fraglichen Operation am Pflanzenkörper stets entwickelungsfähige selbständige Stücke von Individuen, Knospen oder Reis, übertragen werden, während es sich am Thierkörper um die Verpflanzung von abhängigen, einer eigenen Entwickelung nicht fähigen Theilen handle.

Drei Fragen waren es, um deren Lösung man sich auf botanischem Boden besonders bemüht hat. Erstens: Wie verläuft der Proceß der Verwachsung mit einander verbundener Theile in histologischer Beziehung?

Zweitens: In welchem Verhältniß steht die Transplantation zur systematischen Verwandtschaft der zu verbindenden Formen?

Drittens: Ueben systematisch verschiedene Formen, wenn sie durch Transplantation zu Lebenseinheiten verbunden werden, gegenseitig einen ihr Wesen verändernden Einfluß aus?

Auf zoophysiologischem Gebiete drehte sich die Untersuchung theilweise um die gleichen Punkte, doch war hier vor Allem erst die Vorfrage zu erledigen, ob am Körper des höheren Thieres überhaupt eine Transplantation von Theilen möglich sei.

Seit einer Reihe von Jahren mit Versuchen über Transplantation am Pflanzenkörper beschäftigt, habe ich allmählich eine Reihe von Erfahrungen gesammelt, welche zur Lösung der vorhin erwähnten Fragen einen Beitrag liefern dürften. Vor Allem aber leitete mich bei meiner Arbeit ein Gesichtspunkt, von dem aus keiner der bisherigen Untersucher den Gegenstand betrachtet hat, obwohl er der nächste sich darbietende zu sein scheint. Es handelt sich nämlich um die Frage: Welche Theile sind an demselben Körper transplantabel? — Einige erläuternde Bemerkungen hierzu werden nicht überflüssig sein.

Der Körper der Pflanze stellt eine durch ihre Entwickelung bedingte Folge von sehr verschiedenartigen Theilen dar, welche sich jedoch sämmtlich auf die drei Grundformen, Wurzel, Stengel und Blatt, zurückführen lassen. Allen liegt als gemeinschaftliches formales Element die Zelle zu Grunde. Unsere Frage lautet nun: Kann man die Theile des Körpers von ihren durch die Entwickelung gegebenen Orten entfernen, und an beliebige andere verpflanzen? Kann man die Bausteine, aus denen der Körper zusammengesetzt ist, in Bezug auf ihren Ort beliebig vertauschen, oder sind hier Schranken gesetzt? Und wie werden die Elemente, welche an einen ihnen fremden Ort übertragen wurden, von der Umgebung beeinflußt? — Es handelt sich somit in erster Linie um ein Problem, das man als ein stöchiometrisches bezeichnen kann.

Um die fragliche Aufgabe zu lösen, konnten manche der von den Gärtnern gemachten Erfahrungen ohne Weiteres verwerthet werden, doch genügten dieselben nur in beschränktem Maaße. Es bedurfte vor Allem einer Erweiterung des Verfahrens. Alle bisher ausgeführten Veredlungen setzen die Anwesenheit von Cambium oder der in unmittelbarer Nähe desselben gelegenen theilungsfähigen Zellen voraus. Um die Beschränkung, welche in diesem Umstande liegt, zu überwinden, griff ich nach längerer Erwägung zu gewissen fleischigen Pflanzen, besonders zu den knollenförmig wachsenden Wurzeln. Unter diesen war es hauptsächlich die Runkelrübe, Beta vulgaris, deren zahlreiche Rassen die Beantwortung wichtiger Fragen gestatteten. An diesen Körpern behält nicht nur das Cambium, sondern auch das gesammte parenchymatische Gewebe lange Zeit seine Wachsthums- und Theilungsfähigkeit. Solche Gewebe lassen sich daher leicht verbinden; sie setzen uns in den Stand, auch den Ort kleiner Zellengruppen zu verändern; und damit die oben erwähnte Kluft zwischen pflanzlicher und thierischer Transplantation zu beseitigen. Zu Versuchen dagegen, welche eine längere Lebensdauer der Objecte voraussetzen, eigneten sich die Rüben nicht; in solchen Fällen wurden holzige Pflanzen zum Experiment benutzt.

Aus meinen Untersuchungen und deren Ergebnissen will ich nun im Nachfolgenden einige der wichtigsten Thatsachen im Auszuge mittheilen. Die ausführliche Arbeit, begleitet von den nöthigen Abbildungen, ist dem Abschluß nahe, und wird in Kurzem an anderem Orte erscheinen.

Bei aller Transplantation handelt es sich zunächst darum, ob wir gleichnamige oder ungleichnamige Theile — diese Ausdrücke im morphologischen Sinne genommen — verbinden, d. h. ob wir Wurzeln und deren Theile wieder mit Wurzeln, Sprosse und Sproßstücke wieder mit Sprossen, oder ob wir Sprosse mit Wurzeln und umgekehrt Wurzeln mit Sprossen vereinigen. Sodann ist von maaßgebender Bedeutung, ob das implantirte Stück in seiner Wachsthumsrichtung mit demjenigen, welchem es eingesetzt wird, übereinstimmt, oder ob es davon mehr oder minder abweicht. Im ersteren Falle wollen wir die Stellung des Stückes als eine normale, im zweiten als eine abnormale bezeichnen.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir nunmehr zur Transplantation gleichnamiger Theile über, und beginnen mit der Wurzel. Bei allen Operationen seien die Stücke zunächst in normaler Richtung eingesetzt. Nimmt man aus einem Wurzelsystem irgend eine genügend kräftige Seitenwurzel, so kann man dieselbe in longitudinaler Richtung beliebig verschieben, man kann sie näher der Spitze oder der Basis einpflanzen; das Anwachsen derselben wird keinerlei Schwierigkeit bieten, vorausgesetzt, daß die Operation mit der nöthigen Vorsicht ausgeführt wird. Wie in longitudinaler, kann man die Seitenwurzel auch in transversaltangentialer Richtung an dem Umfange des radiär gebauten Körpers der Hauptwurzel verschieben; sie wird sich ebenso leicht in den neuen Platz einfügen.

Trennt man statt einer Seitenwurzel den vorderen Theil der Hauptwurzel ab, so läßt sich dieser an dem bleibenden Theile seitlich an beliebigem Orte einfügen, und umgekehrt läßt sich eine Seitenwurzel an den Ort des entfernten Hauptwurzeltheiles setzen. Im einen wie im andern Falle verhalten sich die eingepflanzten Stücke in ihrem Wachsthum, wie die Glieder, an deren Orte sie gesetzt wurden.

Ebenso wie ganze Glieder kann man aber auch bloße Gewebestücke versetzen. Nimmt man in den Monaten Juni oder Juli kräftige Wurzeln einer der vorwiegend in die Länge wachsenden Runkelrüben-Rassen, und schneidet aus denselben Gewebestücke von 15—20 mm Länge, 10—12 mm Breite und ebensoviel Tiefe heraus, so lassen sich dieselben in entsprechend große, an beliebigen Orten angebrachte Löcher der Wurzeln unschwer einpflanzen. Bei genügender Dauer des Versuches fügen sie sich dem neuen Orte so vollständig ein, daß später nur geringe Spuren der einst vorgenommenen Operation zu sehen sind. — Statt der Stücke von der bezeichneten Größe kann man auch kleinere anwenden, ja der Versuch gelingt noch bei der Transplantation selbst sehr kleiner Gewebeinseln.

In den bisher besprochenen Versuchen führten die verpflanzten Stücke Cambium, und dieses war bei dem Anwachsen in besonderem Grade betheiligt. Man kann denselben aber das äußere Gewebe mit dem Cambium nehmen und sie in dieser Gestalt einsetzen; sie wachsen auch dann an, und erzeugen sich nun ein neues Cambium.

Wie in longitudinaler und transversal-tangentialer, so lassen sich die Stücke auch in transversal-radialer Richtung verpflanzen. Nimmt man einer Wurzel ein Stück von bestimmter Größe und schiebt es in ein übrigens gleich großes, aber etwa doppelt so tiefes Loch bis an dessen hintere Wand, so hat eine Versetzung in radialer Richtung stattgefunden. Auch jetzt wächst das Stück ringsum leicht an, und entwickelt sich kräftig in die Dicke. An demselben sind keinerlei Störungen wahrzunehmen, wohl aber bildet sich in seiner Umgebung, hauptsächlich über ihm, ein mehr oder minder stark vorspringender Wulst. — Wie von außen nach innen, so kann man auch umgekehrt ein Stück von innen nach außen verschieben; es wächst unschwer an, erzeugt sich eine neue Cambiumschicht, und entwickelt sich vermittelst dieser weiter.

Von der Wurzel gehen wir zum Stengel. Hier sind zwei Hauptformen des Versuches zu unterscheiden, je nachdem das Stück Knospen führt oder nicht.

Im ersteren Falle haben wir die zahlreichen Formen der künstlichen Veredlung vor uns, auf die an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden kann. Erwähnt sei nur, daß man hauptsächlich zu unterscheiden hat zwischen dem „Oculiren“, „Pfropfen“ und „Ablactiren“.

Durch Oculiren, d. h. durch die Transplantation einer Knospe oder eines „Auges“ läßt sich leicht zeigen, daß man eine noch indifferente Knospe von ihrem Ort an jeden anderen beliebigen desselben oder eines benachbarten Zweiges übertragen kann. Sie wächst an und entwickelt sich nun, dem Ort entsprechend, den man ihr ertheilt hat, zu einem längern oder kürzeren Laub- oder zu einem Blüthensproß.

Wird statt einer Knospe ein mit indifferenten Knospen besetztes Zweigstück transplantirt — man spricht dann vom „Pfropfen“ —, so ergeben sich im Wesentlichen die gleichen Verhältnisse, wie beim Oculiren.

Aber nicht nur die noch indifferente Knospe läßt sich von einem Orte auf den anderen verpflanzen, der Versuch gelingt auch mit den schon differenzirten. So kann man, wie die Praxis der Baumzüchter längst gezeigt hat, schon völlig ausgebildete Fruchtknospen auf sterile Zweigtheile übertragen, und umgekehrt durch „Ablactiren“ ganze Laubsprosse verpflanzen.

Wir gelangen damit zu der zweiten Versuchsform, derjenigen, in welcher das Zweigstück keine Knospen führt. Im Allgemeinen ist die Transplantation in diesem Falle schwieriger, als an der Wurzel, doch gelingen die Versuche bei der Wahl geeigneter Objecte auch hier fast ausnahmslos. An dieser Stelle sei jedoch nur des Verfahrens gedacht, welches ich bei holzigen Körpern anwandte. In der Regel wurden bloß internodiale Rindenstücke verpflanzt. Löst man zur Zeit der Saftfülle von dem Zweige einer Cydonia japonica oder eines Apfelbaumes ein solches Stück ab, und überträgt dasselbe auf eine beliebige andere gleich große, von ihrer Rinde entblößte Stelle desselben oder eines gleich starken Nachbar-Zweiges, so wächst dasselbe an, überwindet die geringe, zunächst eintretende Störung sehr rasch, und entwickelt sich dann in normaler Weise in die Dicke.

Wie an der Wurzel und dem Stengel, so sind nun auch am Blatt die entsprechenden Transplantationen möglich. Auf die Beschreibung derselben soll hier aber verzichtet werden.

In allen bis jetzt ausgeführten Versuchen hatten die transplantirten Theile normale Stellung (in dem oben bezeichneten Sinne). Wir wollen nunmehr sehen, ob auch eine Transplantation derselben in abnormaler Lage möglich ist. Daß hier verschiedene Versuche ausführbar sind, leuchtet ohne Weiteres ein; an dieser Stelle wollen wir uns jedoch auf die Erörterung nur ganz weniger beschränken. Soweit nicht ausdrücklich bemerkt ist, beziehen sich alle zunächst zu machenden Angaben auf die Runkelrübe, und zwar auf die Wurzel.

Zunächst sei der Versuch so gestaltet, daß die Längsaxe[1]) des Stückes in der neuen Stellung ihre natürliche Richtung behält, die radiale und tangentiale Axe aber um 180° gedreht sind, d. h. daß das Stück mit seiner Außenseite nunmehr nach innen gewandt ist. Um das Anwachsen des Stückes zu erleichtern, werde ihm die Kork- und äußere Rindenlage bis in die Nähe des Cambiums genommen; es muß ferner seine Form eine möglichst genau parallelepipedische sein, und endlich werde es der Einfachheit halber an seinen eigenen Ort wieder eingefügt. Es bleibt also im Wesentlichen Alles unverändert, mit Ausnahme des Umstandes, daß das Stück jetzt radial und tangential verkehrte Stellung hat. Trotz dieser Lage des Stückes findet in der Regel eine Verwachsung desselben mit dem Mutterboden statt, und zwar auf allen Berührungsflächen; doch ist dieselbe oft nur local und unvollständig, und unterbleibt an der oberen Fläche selbst gänzlich. Die nach außen gewandte Fläche schrumpft in ihrem oberen und mittleren Theile meist mehr oder weniger ein, während sie im unteren etwas anschwillt. Das Gewebe der Unterlage wächst ungleich stärker, und bildet besonders über und neben dem Stück einen stark vorspringenden Wulst. Auch bei langer Dauer des Versuches ist das Wachsthum des Stückes ein nur sehr geringes, vor Allem steht die Thätigkeit des Cambiums auf der Innenseite still, sobald die Verwachsung der Flächen stattgefunden hat.

Nunmehr soll das Stück in radialer Richtung seine normale Lage behalten, mit seiner longitudinalen und tangentialen Axe dagegen um 180° gedreht werden, derart also, daß sein Scheitel nach unten, seine Basis nach oben sieht, und seine rechte und linke Hälfte vertauscht sind. Auch jetzt findet eine Verwachsung statt, und zwar mit mehr oder minder großen Unterbrechungen auf allen Seiten des Stückes. Am geringsten ist dieselbe an der unteren Fläche, wo sie auch völlig unterbleiben kann; am regelmäßigsten geht sie dagegen an der oberen Fläche vor sich. Im Laufe der weiteren Entwickelung schwillt das Stück in seinem oberen Theile immer mehr an, während es sich in seinen unteren wenig oder gar nicht mehr verdickt. Da nun auch die Unterlage rings um den oberen Theil des Stückes einen starken Wulst bildet, so entsteht wieder, wie in dem vorigen Falle, eine entschieden pathologische Erscheinung.

---

1) Um einfache und feste Bezeichnungen zu haben, seien an jedem Stück drei Axen unterschieden, die Längsaxe, die radiale und die tangentiale Axe. Dieselben beziehen sich auf die ursprüngliche Lage des Stückes am Mutter-Organ, und bedürfen keiner weiteren Erläuterung.

Am größten werden die Störungen, wenn man das Stück in allen drei Richtungen verkehrt einsetzt. Dann erfolgt zuweilen gar kein Anwachsen, in den meisten Fällen dagegen tritt es ein, jedoch in der Regel nur an verhältnißmäßig wenigen Punkten der Berührungsflächen. Um das im Wachsthum zurückbleibende Stück erzeugt der Mutterboden einen auffallenden, gelegentlich sogar schnabelartigen Wulst, der das verkehrte Object wie einen Fremdkörper umschließt. Nur sehr selten fügt sich das Stück ohne große Störungen ein; auf diese Ausnahmen aber, wie auf die Einzelheiten der oben beschriebenen Vorgänge kann hier nicht näher eingegangen werden. Ebenso müssen wir an diesem Orte auf die Beschreibung der histologischen Verhältnisse verzichten.

Mit Uebergehung alles Weiteren wollen wir jetzt den einen der oben beschriebenen Versuche an einem holzigem Gewächs mit längerer Lebensdauer wiederholen, und zwar sei auch hier wieder die sich besonders eignende Cydonia japonica gewählt.

Es wurde oben gezeigt, daß man Rindenstücke in normaler Stellung leicht transplantiren kann. Wir wollen nun einen derartigen Versuch, jedoch mit einer kleinen Abweichung, wiederholen. Es werde dieses Mal an einem kräftigen Zweige ein vollständiger Rindenring von 15—20 mm Länge abgelöst, und an dieselbe Stelle, jedoch in longitudinal verkehrter Richtung, wieder angelegt. Auch jetzt findet bei richtiger Behandlung der Objecte ausnahmslos Verwachsung statt. Die Erscheinungen, welche eintreten, gleichen im Wesentlichen den oben für die entsprechenden Versuche mit Beta beschriebenen, werden aber in diesem Falle ungleich ausgeprägter und nehmen das Interesse in hohem Grade in Anspruch. Die umgekehrten Stücke bilden im ersten, zweiten und dritten Jahre eine immer stärker anschwellende krankhafte Geschwulst. Ihren größten Umfang erreicht dieselbe unter der oberen Verwachsungsstelle, nimmt von hier aus nach unten allmählich an Dicke ab, um sich an der unteren Verwachsungsstelle noch einmal um ein Geringes zu erheben. Während der Entwickelung dieser Geschwulst wächst der unterhalb derselben bis zum nächsten stärkeren Seitenzweig gelegene Theil der Unterlage nur wenig in die Dicke; der nach oben auf die Geschwulst folgende dagegen erfährt seiner ganzen Länge nach ein abnorm gesteigertes Dickenwachsthum. Damit Hand in Hand gehen weitere Veränderungen. Es nimmt die Bildung der Laubsprosse an diesem Theile ab, und erlischt allmählich ganz, während die Blüthen- und Fruchtbildung sich steigert; Verhältnisse, wie sie bei Pflanzen stattfinden, die an der Wurzelbildung verhindert sind. Im vierten, fünften oder auch schon im dritten Jahre sterben die Zweige, soweit meine bis jetzt gemachten Erfahrungen reichen, ausnahmslos bis unter die krankhafte Geschwulst ab.

Daß die Geschwulst wirklich krankhafter Natur sei, und einen abnormen Bau habe, lehrt schon ein einfacher Versuch. Spaltet man einen mit der Geschwulst versehenen Zweig der Länge nach median, so zeigt derselbe in der normal gebauten Region eine glatte, in der Geschwulst dagegen eine wellige, stellenweise sogar muschelige Spaltfläche. Dem entspricht der innere Bau, auf den hier aber nur mit wenigen Worten hingedeutet werden kann.

An dem abnormen Dickenwachsthum sind beide, Holz und Bast, betheiligt. Am auffallendsten treten die Veränderungen, welche dieselben darbieten, auf dem tangentialen Längsschnitt hervor. Im normal gebauten Holz haben die Gefäße, die Tracheiden, sowohl die gefäß- als die libriformartigen, gerade Gestalt und sind von verhältnißmäßig beträchtlicher Länge. Zwischen ihnen und den Holzparenchym-Reihen verlaufen Markstrahlen, welche eine bis zwei Zellenlagen Breite haben, und in ihrer Gesammtheit an Masse sehr zurücktreten. Ganz anders in der krankhaften Geschwulst. Was hier zunächst in die Augen fällt, ist die Zunahme des Parenchyms der Markstrahlen; diese haben durchschnittlich fünf bis sieben Zellenlagen Breite bei gleicher oder geringerer Länge. Zwischen ihnen hin verlaufen wellenförmige Züge von Gefäßen, Tracheiden und Holzparenchym. Stellenweis kommen höchst eigenthümliche Gestalten vor: um Gruppen von Parenchymzellen sind die verlängerten Elemente geradezu gewunden, und bilden ovale oder runde Knäuel.

Mit dem Bilde, welches der Längsschnitt bietet, stimmt die Form der durch Maceration isolirten Elemente des Holzkörpers überein. Die Gefäße und Tracheiden sind durchschnittlich kürzer, als im normalen Holze; die ersteren oft gebogen, von auffallend kurzer, selbst tonnenförmiger Gestalt und gelegentlich mit eigenthümlichen Auswüchsen versehen. Auch die Tracheiden weichen gewöhnlich von der geraden Form ab; in den Knäueln sind sie selbst kreis- oder halbkreisförmig gebogen, und zeigen an den Enden häufig Gabelungen oder zackige Fortsätze, mit denen die benachbarten Elemente übereinander greifen.

Im Wesentlichen die gleichen Störungen im Bau zeigt der Bast, dieselben welligen Züge und Knäuel der verlängerten dünnwandigen und sclerenchymatischen Elemente, dieselbe abnorme Entwickelung der Parenchymstrahlen.

Auf die Verschiedenheiten des Baues in den einzelnen Theilen der Geschwulst, sowie auf die minder ausgesprochenen Abweichungen, welche die über und unter derselben gelegenen Zweigtheile erfahren, kann hier nicht eingegangen werden.

Beim Anblick der sämmtlichen angedeuteten Verhältnisse erhält man unmittelbar den Eindruck, es stießen sich an den Berührungsflächen des verkehrt eingesetzten Stückes und der normal gestellten Theile die Elemente gegenseitig ab, und es erklärte sich hieraus allein der Bau der krankhaften Geschwulst und der angrenzenden Zweigtheile.

Wir gelangen damit zur zweiten Hauptgruppe von Transplantationen, zu derjenigen von ungleichnamigen Theilen. Da wir drei Grundformen von Gliedern haben, so ergeben sich sechs mögliche Verbindungen. Von diesen sollen hier jedoch nur zwei, die von Stengel und Wurzel und die umgekehrte, von Wurzel und Stengel, erörtert werden.

Die Transplantation von Stengeltheilen auf Wurzeln spielt in der gärtnerischen Praxis eine gewisse Rolle, und ist leicht ausführbar. Ich trennte junge Wurzeln der Beta durch horizontal geführte Schnitte von ihren Stengeln und hypocotylen Gliedern, und setzte nun in natürlicher Stellung Stengeltheile verschiedener Art wieder ein. Regelmäßig fand Verwachsung und kräftige Entwickelung beider Theile statt. Vom gewöhnlichen Verhalten wichen die Wurzeln jetzt nur insofern ab, als sie sich vorwiegend an denjenigen Orten entwickelten, an welchen die Sprosse eingefügt waren, daß sie kein gleichartiges, sondern ein excentrisches Wachsthum erfuhren.

Wie der Stengel in die Wurzel, so läßt sich die Wurzel auch in den Stengel einpflanzen. Spitzt man eine Wurzel in geeigneter Art zu, und fügt sie in natürlicher Stellung in einen seitlich am Stengel angebrachten Spalt, so wächst sie ohne Schwierigkeit an. Nach der Vereinigung kann man beide Theile vom System trennen, und nun als eigne Pflanze in den Boden setzen.

Aber die Wurzel läßt sich auch auf die Spitze des Stengels transplantiren. Entfernt man im Frühjahr von einem im Treiben begriffenen Stengel den oberen Theil und fügt durch Pfropfen in den Spalt den apicalen Theil der Wurzel ein, so findet wohl Verwachsung, aber keine oder nur geringe Entwickelung des Wurzelstückes statt. Anders aber, wenn man statt der Wurzel eine ganze Pflanze mit ihrer Wurzel aufsetzt. In diesem Falle erhält man die beim ersten Anblick seltsame Erscheinung von einer Pflanze auf einer anderen. Unten im Boden befindet sich eine

Wurzel, auf welche das zugehörige Stengelstück folgt; dieses aber trägt auf seinem Scheitel wieder eine Wurzel mit ihrem Stengel. Derartige Zusammensetzungen gediehen vorzüglich. Anfänglich kleine obere Wurzeln wuchsen zu kräftigen Bildungen heran, deren Stengel im zweiten Jahre in Blüthenbildung übergingen.

Daß man auf Blattstiele Blüthenstände transplantiren kann, hat schon vor langer Zeit Knight gezeigt. Auch mir gelangen die gleichen und ähnliche Versuche.

Selbst die Transplantation von Blättern erwies sich als ausführbar. Ich setzte Blätter auf Wurzeln, also an einen Ort, an welchem sie in der Natur nie vorkommen. Es fand vollständige Verwachsung und frisches Gedeihen beider statt.

Wie ganze Glieder, so kann man auch bloße Internodial-Stücke auf ungleichnamige Organe übertragen. Versetzt man an der Pflanze einer solchen Runkelrüben-Rasse, welche schon im ersten Jahre einen längeren oberirdischen Stengeltheil bildet, ein würfelförmiges Wurzelstück in das Internodium des Stengels und umgekehrt das Internodial-Stück in die Wurzel, beide in natürlicher Stellung, so wachsen sie leicht an, und es treten keinerlei bemerkenswerthe Störungen ein. Nur wächst die Wurzel stärker, als das eingesetzte Stengelstück, und tritt daher über das letztere hervor; umgekehrt wächst der Stengel, seiner specifischen Natur entsprechend, langsamer, als das ihm implantirte Wurzelstück, und bleibt daher hinter letzterem zurück. — Ganz anders aber gestaltete sich die Sache, wenn die Stücke nicht in ihrer natürlichen, sondern in umgekehrter Lage eingesetzt wurden. Nun fand zwar auch Verwachsung statt, aber es traten Störungen ein, und zwar im Wesentlichen diejenigen, welche oben für die longitudinal verkehrt eingesetzten Wurzel- und Stengelstücke beschrieben wurden.

Da dieser Gegenstand von Bedeutung war und eine möglichst schlagende Beweisführung erwünscht schien, so griff ich wieder zu holzigen Pflanzen, unter denen sich Cydonia japonica auch zu diesem Versuch als geeignet erwies. Zur Zeit der Saftfülle wurden dem Boden kräftige Wurzeln von etwa der Dicke eines Daumens entnommen, zu ihnen passende Zweige gleicher Dicke gesucht, und nun von den Wurzeln abgelöste Rindenringe entsprechend großen, von ihrer Rinde entblößten Zweigflächen eingefügt. Die Einschaltung selbst geschah in zweierlei Art. Im einen Falle waren die ursprünglich nach oben gerichteten Enden der Rindenringe auch an den neuen Orten nach oben gewandt, im zweiten Falle dagegen wurde ihnen die entgegengesetzte Richtung gegeben;

oder, um mich morphologisch auszudrücken, im ersteren Falle war die Basis des Wurzel-Rindenringes dem Scheitel der Zweigunterlage, diese als Ganzes betrachtet, im zweiten umgekehrt die Spitze des Wurzelringes dem Scheitel der Zweigunterlage zugewandt. — Auch jetzt erfolgte die Vereinigung der Ringe mit ihren Unterlagen, ebenso aber traten die auffallenden Wachsthumsverschiedenheiten ein, je nachdem die Stücke die eine oder die andere Stellung erhalten hatten. Waren sie aufrecht, mit ihrem einstigen Oberende wieder nach oben gesetzt, so erfolgte — vorausgesetzt, daß die Operation mit der nöthigen Vorsicht ausgeführt worden war — die Einfügung derselben ohne Störung für die Unterlage; Zweig und Wurzelstück wuchsen gleichmäßig in die Dicke. Waren sie aber entgegengesetzt, mit ihrem einstigen Oberende nach unten, gerichtet, dann traten alle jene Störungen ein, welche oben für die umgekehrt eingefügten Zweigrindenringe beschrieben wurden: krankhafte Geschwulst mit ihren histologischen Veränderungen, und Hemmungen im Wachsthum der über derselben gelegenen Zweigtheile.

An die beschriebenen Thatsachen wollen wir einige Erwägungen allgemeinerer Natur knüpfen.

Man ist gewohnt, vom morphologischen Standpunkte aus die Vegetationspunkte von Wurzel und Sproß als analoge Bildungen zu betrachten, und es beruhen hierauf die seit langer Zeit gebrauchten Ausdrücke „Scheitel“ oder „Spitze“ und „Basis“, Bezeichnungen, die nun nicht nur für ganze Glieder, sondern auch für deren Theilstücke Geltung haben. Niemals aber ist zu vergessen, daß denselben lediglich eine morphologische Bedeutung zukommt.

In früheren Untersuchungen habe ich nachgewiesen, daß Sproß und Wurzel, und zwar nicht nur die ganzen Glieder, sondern auch jeder Theil derselben bis zur einzelnen Zelle herab, polar gebaut sind. Am klarsten spricht sich diese Polarität in den Regenerations-Erscheinungen aus. Am Sproß, dem ganzen sowohl als dem einzelnen Theilstück, entstehen Knospen bezw. Sprosse, am Scheitelende, Wurzeln an der Basis; an der Wurzel dagegen bilden sich am Scheitelende Wurzeln, während die Knospen an der Basis entstehen. Den Producten, und damit dem Bau, nach entspricht der Scheitel des Sprosses der Basis der Wurzel, die Basis des Sprosses dem Scheitel der Wurzel. Um die Unzuträglichkeiten, welche die morphologischen Bezeichnungen Scheitel und Basis bei Untersuchungen über Polarität mit sich bringen, zu vermeiden, werde ich mich fortan der Ausdrücke „Sproßpol“ und „Wurzelpol“ bedienen, welche bei beiden, bei Wurzeln und Zweigen bezw. deren Theilstücken, dasselbe bedeuten, nämlich die Enden, an deren einen Sprosse, an den andern Wurzeln entstehen. Bei den aufrecht wachsenden Pflanzen sind also im Allgemeinen die Sproßpole nach oben, die Wurzelpole nach unten gerichtet.

Unsere Untersuchungen über Transplantation haben uns nun gelehrt, daß die Möglichkeit der letzteren eine sehr weitgehende ist; daß man jedes Glied am Pflanzenkörper und jedes Theilstück desselben an jeden beliebigen anderen Ort, gleichviel ob am gleichnamigen oder am ungleichnamigen Gliede, verpflanzen kann; und daß es ferner principiell gleichgültig ist, ob die transplantirten Stücke Knospen und cambiales Gewebe, oder keines von beiden besitzen.

Fundamentale Bedingung aber für das Gelingen jeder Transplantation ist, daß die zu verbindenden Theile gleichsinnig „polarisirt“ sind. Trifft diese Bedingung nicht zu, dann findet entweder keine Verwachsung statt, oder es entstehen, wenn die letztere erfolgt, krankhafte Geschwülste, welche mehr oder minder große Störungen im Organismus und selbst den Tod im Gefolge haben.

In Bezug auf die Polarität selbst aber führen unsere Untersuchungen zu einer nicht unbeträchtlichen Erweiterung. Wir fanden nämlich, daß die einem radiär gebauten Organe, wie der Wurzel, entnommenen Stücke nicht nur in longitudinaler, sondern auch in radialer Richtung, vom Centrum nach der Peripherie, verschieden gebaut sind. Auch diese äußerlich nicht sichtbaren, sondern lediglich auf dem inneren Bau beruhenden Unterschiede sind gänzlich unabhängig vom Cambium, und finden sich an jeder Gruppe lebendiger Zellen. Man kann dieselben daher auch als in radialer Richtung „polarisirt“ bezeichnen; und es ergab sich aus unseren Versuchen, daß nur dann eine vollständige Verwachsung der mit einander verbundenen Theile stattfindet, wenn sie auch in radialer Richtung gleichsinnig „polarisirt“ sind.

Geht man den vorgeführten Thatsachen und Erwägungen in folgerichtiger Weise nach, so gelangt man zu dem Schlusse, daß jede lebendige Zelle von Wurzel und Stengel ein verschiedenes Oben und Unten, ein verschiedenes Vorn und Hinten und damit eine rechte und linke Hälfte besitzt. Die letzteren aber sind augenscheinlich symmetrisch gebaut.

Bedenkt man diese Verhältnisse, und faßt alles oben über Transplantation Gesagte zusammen, so ergiebt sich für die Verbindung von Stengel- und Wurzeltheilen ganz allgemein der Satz: Gleichnamige Pole stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an.

Niemand kann diese Dinge betrachten, ohne dabei an den Magneten zu denken, und in der That sind die Analogieen bei aller Verschiedenheit der Körper auffallend. Die Wurzel und der Stengel verhalten sich in gewissem Sinne wie ein cylindrischer Magnet, der aus einzelnen nicht nur in longitudinaler, sondern auch in radialer Richtung gleichsinnig magnetisirten Ausschnitten zusammengesetzt ist. Einen solchen Magneten kann man in Theilstücke zerlegen, wie Sproß und Wurzel. Fügt man die Theilmagnete mit glatter Querschnittsfläche mit den ungleichnamigen Polen möglichst innig wieder zusammen, so erhält man wieder den ganzen Magneten ohne Folgepunkte. Zerlegt man eine Pappelwurzel in zwei Hälften, so erzeugt jedes an den entsprechenden Polen Knospen und Wurzeln; verbindet man dagegen die Stücke nach der Durchschneidung an den ungleichnamigen Enden in geeigneter Weise wieder, so erhält man durch Verwachsung wieder das ursprüngliche Stück mit seinen zwei Polen. Auf eine weitere Ausführung dieser Gedanken soll hier verzichtet werden.

Die oben aufgestellten Regeln über die Verbindung von Körpertheilen sind zunächst für die Glieder desselben Körpers entwickelt. Sie gelten aber auch, was noch kurz hinzuzufügen ist, für die Vereinigung von Theilen verschiedener Individuen, mögen diese nun in näherem oder fernerem Verwandtschaftsgrade stehen.

Was das Verhalten bilateral-symmetrisch und dorsiventral gebauter Glieder, ferner solcher mit begrenztem Wachsthum bei der Transplantation anlangt, so kann dasselbe erst in meiner ausführlichen Arbeit Erörterung finden.

Damit gelangen wir zu der Frage, ob Reis und Unterlage sich gegenseitig beeinflussen, einem Gegenstande, der hier aber nur flüchtig berührt werden soll. In dem Sinne, in welchem man die Sache gewöhnlich auffaßt, daß nämlich der Einfluß sich auf die innere, vor Allem die morphotische Natur erstrecke, ist diese Frage wahrscheinlich zu verneinen. Meine eigenen zahlreichen Versuche haben mir nicht ein bejahendes Ergebniß geliefert, und ich stimme insofern mit den Angaben zahlreicher Beobachter überein, denen freilich immer von Neuem widersprochen worden ist.

Von der Voraussetzung ausgehend, daß, wenn der fragliche Einfluß überhaupt vorhanden, er sich am sichersten bei nahe verwandten Formen zeigen werde, verband ich die verschiedenen

Rassen der Runkelrübe miteinander, runde, ovale und lange, in und über die Erde wachsende, weiße, gelbe, hell- und dunkelrothe. Bald wurde der obere Theil der Pflanze aus der einen, der untere aus der anderen Rasse gebildet, bald das umgekehrte Verhältniß herbeigeführt; bald wurde einer Rübe nur das Stück der Wurzel einer anderen Rasse eingefügt. So mannigfaltig die Versuche aber auch gestaltet wurden, niemals konnte eine morphotische Beeinflussung eines Theiles durch einen anderen festgestellt werden, obschon beide sich vortrefflich mit einander entwickelten. Vielmehr blieb die Wachsthumsweise eines Theiles dieselbe, mochte die Verbindung, in welche er gebracht wurde, sein, welche sie wollte. Und ebenso unverändert blieb die Farbe; niemals wurden Farbenübergänge, niemals Mischfarben wahrgenommen.

Konnte somit ein Einfluß der oben bezeichneten Art nicht festgestellt werden, so wurde dagegen eine andere Form der Einwirkung der Unterlage auf das Reis und umgekehrt wiederholt und sicher beobachtet. Diese betraf aber lediglich die Wachsthumsverhältnisse, welche ein Individuum während seines Lebens normal durchläuft, und gehören einer anderen Klasse von Erscheinungen an. Auf eine nähere Beschreibung derselben wollen wir hier jedoch verzichten.

Das vorhin über die specifische Wachsthumsweise der mit einander verbundenen Theile verschiedener Rassen Gesagte fand auch in der histologischen Untersuchung der Verbindungsstellen volle Bestätigung. Die Gewebe der verbundenen Rassen hielten sich auch bei innigster Verwachsung völlig gesondert, eine Thatsache, die bei der Besichtigung verschieden gefärbter Gewebe besonders deutlich in die Augen sprang.

Bei diesen histologischen Untersuchungen ergaben sich auch einige Thatsachen und Folgerungen über Cambiumbildung, die hier noch eine kurze Erwähnung finden mögen. Die Runkelrübe zeigt das Bestreben, an jeder künstlich erzeugten Oberfläche in einiger Entfernung von dem zunächst entstehenden Kork Cambium zu bilden; selbst im älteren Gewebe findet dieser Proceß gewöhnlich noch statt. Die allgemeine Regel, nach welcher der Vorgang verläuft, läßt sich in folgender Weise zum Ausdruck bringen: der Ort und die Bildung des Cambiums werden nicht durch den ganzen Körper als solchen, sondern durch locale Ursachen bedingt. Jede künstlich oder natürlich erzeugte Oberfläche zieht die Bildung von Cambium nach sich, und das letztere läuft im Allgemeinen der ersteren parallel. Die Thätigkeit des Cambiums fällt in die Richtung des Krümmungsradius, so zwar, daß auf der Seite der Oberfläche das Phloem, auf der entgegengesetzten das Xylem erzeugt wird. Das normale Cambium erscheint nur als besonderer Fall dieser allgemeinen Regel.

Indem ich damit diesen kurzen Auszug schließe, verweise ich in Betreff aller näheren Ausführungen und Beweise auf meine eingehende Arbeit. In dieser wird auch die ausgedehnte Litteratur, die gärtnerische und botanische sowohl, als die zoophysiologische, Besprechung finden.

Universität.

Blumenbachsches Stipendium.

Zufolge eines vom Königlichen Universitätskuratorium ergangenen Rescriptes ist der verfügbare Fonds des Blumenbachschen Stipendiums auf 1800 M. angewachsen, sodaß dasselbe wiederum einem jungen, durch vorzügliche Geistesgaben sich auszeichnenden, aber unbemittelten Doctor medicinae als Reisestipendium zuerkannt werden kann. Competenten haben sich vor Ablauf eines halben Jahres an die medicinische Fakultät zu Göttingen, welcher dieses Mal die Vertheilung zukommt, zu wenden, derselben Zeugnisse über ihr Betragen und über ihren Mangel an Vermögen, sowie ihre Inaugural-Dissertation und was sie sonst etwa haben drucken lassen, portofrei einzusenden, dabei den Umfang und Zweck ihrer wissenschaftlichen Reise zu entwickeln. Wer das Stipendium erhält, muß bestimmt dafür ein Jahr auf Reisen sein.

Göttingen, den 31. Mai 1889.

W. Ebstein,
d. z. Dekan.

Preisaufgaben
der
Wedekindschen Preisstiftung
für Deutsche Geschichte.

Wiederholt aus Nr. 4 der Nachrichten vom Jahr 1887 S. 69 ff.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung für Deutsche Geschichte macht hierdurch die Aufgaben bekannt, welche von ihm für den fünften Verwaltungszeitraum, vom 14. März 1886 bis zum 14. März 1896, nach den Ordnungen der Stiftung (§ 20) gestellt werden.

Für den ersten Preis

wiederholt der Verwaltungsrath die für den vorigen Verwaltungszeitraum gestellte Aufgabe: er verlangt eine allen Anforderungen der Wissenschaft entsprechende Ausgabe der von dem **Mainzer Eberhard Windeck** verfaßten **Denkwürdigkeiten über Leben und Zeit Kaiser Sigismunds.**

Es gilt den völlig werthlosen und unbrauchbaren Abdruck bei Mencken durch eine nach Seite der Sprache wie des Inhalts gleich tüchtige Ausgabe zu ersetzen.

Nach den älteren Vorarbeiten von Dümgé, Mone, Aschbach, Droysen hat neuerdings v. Hagen in der Einleitung zu seiner Uebersetzung (Geschichtschreiber der deutschen Vorzeit, Lief. 79. Leipzig 1886) über das Verhältniß von dreien der wichtigsten Handschriften (Gotha, Cheltenham, Hannover) zu einander gehandelt und danach zwei von dem Verfasser selbst herrührende Redactionen unterschieden, auch die Annahme abgewiesen, daß die Handschrift zu Cheltenham ein Original sei. Für den Bearbeiter ist die Heranziehung der anderen bekannten und von v. Hagen S. VII, Anm. 2 aufgeführten Hdsch. schon deßhalb erforderlich, um die Richtigkeit der Aufstellung v. Hagen's zu prüfen und festzustellen, ob etwa noch mehr als zwei Ausgaben des Werkes vorliegen.

Von den drei im Archiv III, 429 verzeichneten Vaticanischen Hdsch. wird der Verwaltungsrath demnächst Beschreibungen anfertigen lassen, welche ihre Classificirung ermöglichen. Diese Beschreibungen sollen dem Bearbeiter durch Vermittelung der Verwaltung der Kgl. Universitätsbibliothek zur Verfügung stehen. Von der Heranziehung dieser drei Hdsch. zur Textconstitution glaubt der Verwaltunsrath im übrigen den Bearbeiter befreien zu sollen [1]).

Bei der Bearbeitung des Textes wird es vor allem darauf ankommen, daß die von dem Verfasser herrührenden Unterschiede der verschiedenen Redactionen klar und übersichtlich zur Erscheinung kommen, davon auch äußerlich dasjenige geschieden und gekennzeichnet werde, was etwa fremder Ueberarbeitung seinen Ur-

1) Vgl. den Bericht über diese Hss. in den Nachrichten 1888 S. 11 ff.

sprung verdankt. Die originalen Rubriken und Capitelüberschriften sind in die Ausgabe aufzunehmen.

Die Urkunden und Aktenstücke aller Art, welche dem Werke zahlreich eingefügt sind, erfordern genaue Untersuchung in Bezug auf Herkunft, Wiedergabe und anderweitige Benutzung. Sind von denselben abweichende Texte oder die Originale bekannt, so ist darauf in den Anmerkungen hinzuweisen, geeigneten Falls der abweichende Text zum Abdruck in der Anmerkung zu bringen. Desgleichen ist wenigstens annäherungsweise der Versuch zu machen für die rein erzählenden Theile Ursprung oder Quelle beizubringen, namentlich in Bezug auf An- und Abwesenheit des Verfassers. Es darf dem Text an Erläuterung in sprachlicher und sachlicher Hinsicht nicht fehlen.

Die Einleitung soll sowohl die bei der Untersuchung und Herstellung des Textes befolgte Methode klarlegen, als auch eine eingehende Erörterung über die Lebensschicksale des Verfassers, die Beziehungen zu seiner Vaterstadt, seine Reisen, sein Verhältniß zum Kaiser und anderen namhaften Zeitgenossen, seine übrigen Werke in Prosa und Dichtung geben.

Die sprachliche Behandlung des Textes hat sich, falls nicht etwa eine Originalhandschrift auftauchen sollte, nach den von Weizsäcker im I. Bande der Reichstagsakten für die Vereinfachung der Schreibung spätmittelalterlicher deutscher Texte aufgestellten Grundsätzen zu richten.

Der Ausgabe ist ein Wortverzeichniß, entsprechend demjenigen des 1. Bandes der Mainzer Chroniken (Städtechroniken Bd. XVII), sowie ein ungetrenntes Verzeichniß der Personen- und Ortsnamen beizufügen.

Von der Cheltenhamer Handschrift befindet sich eine genaue Abschrift auf der Kgl. Universitätsbibliothek, welche bereitwilligst von der Bibliotheksverwaltung zur Benutzung ausgeliehen wird.

Für den zweiten Preis

schreibt der Verwaltungsrath

eine Geschichte des Herzogthums Schwaben vom Beginn des 10. bis in die zweite Hälfte des 13. Jahrhunderts

aus.

Nach einem einleitenden Rückblicke auf die karolingische Zeit ist der Schwerpunkt der Arbeit in die Verfassungsgeschichte des bezeichneten Zeitraums zu legen, da die politische Geschichte Schwabens zur Genüge behandelt worden ist. Das schwäbische

Herzogthum ist in seiner Entwicklung bis zur Auflösung zu verfolgen, sein Verhältnis zu der königlichen Gewalt einerseits wie zu den Bisthümern, Grafschaften, Herrschaften und Städten andererseits darzulegen. Nach der gründlichen und erschöpfenden Untersuchung des Einzelnen erwartet der Verwaltungsrath eine zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse der Untersuchung. Neben den Nachrichten der Geschichtschreiber hat der Bearbeiter dem reichen Urkundenmaterial eingehendste Aufmerksamkeit zu widmen und es nach allen Richtungen für den bezeichneten Zweck auszubeuten. Als Beilage der Arbeit wünscht der Verwaltungsrath Regesten der Urkunden, an welchen die Herzöge von Schwaben in irgend einer Eigenschaft betheiligt sind oder in welchen sie Erwähnung finden.

In Beziehung auf die Bewerbung um diese Preise, die Ertheilung des dritten Preises und die Rechte der Preisgewinnenden wird aus den Ordnungen der Stiftung Folgendes wiederholt:

1. **Ueber die zwei ersten Preise.** Die Arbeiten können in deutscher oder lateinischer Sprache abgefaßt sein.

Jeder dieser Preise beträgt 1000 Thaler in Gold (3300 Reichsmark) und muß jedesmal ganz, oder kann gar nicht zuerkannt werden.

2. **Ueber den dritten Preis.** Für den dritten Preis wird keine bestimmte Aufgabe ausgeschrieben, sondern die Wahl des Stoffes bleibt den Bewerbern nach Maßgabe der folgenden Bestimmungen überlassen.

Vorzugsweise verlangt der Stifter für denselben ein deutsch geschriebenes Geschichtsbuch, für welches sorgfältige und geprüfte Zusammenstellung der Thatsachen zur ersten, und Kunst der Darstellung zur zweiten Hauptbedingung gemacht wird. Es ist aber damit nicht bloß eine gut geschriebene historische Abhandlung, sondern ein umfassendes historisches Werk gemeint. Speciallandesgeschichten sind nicht ausgeschlossen, doch werden vorzugsweise nur diejenigen der größten (15) deutschen Staaten berücksichtigt.

Zur Erlangung des Preises sind die zu diesem Zwecke handschriftlich eingeschickten Arbeiten und die von dem Einsendungstage des vorigen Verwaltungszeitraums bis zu demselben Tage des laufenden Zeitraums (dem 14. März des neunten Jahres) gedruckt erschienenen Werke dieser Art gleichmäßig berechtigt. Dabei findet indessen der Unterschied statt, daß die ersteren, sofern sie in das Eigenthum der Stiftung übergehen, den vollen Preis von 1000 Thalern in Gold, die bereits gedruckten aber, welche Eigenthum des Verfassers bleiben, oder über welche als sein Eigenthum er bereits verfügt hat, die Hälfte des Preises mit 500 Thalern Gold empfangen.

Wenn keine preiswürdigen Schriften der bezeichneten Art vorhanden sind, so darf der dritte Preis angewendet werden, um die Verfasser solcher Schriften zu belohnen, welche durch Entdeckung und zweckmäßige Bearbeitung unbekannter oder unbenutzter historischer Quellen, Denkmäler und Urkundensammlungen sich um die deutsche Geschichte verdient gemacht haben. Solchen Schriften darf aber nur die Hälfte des Preises zuerkannt werden.

Es steht Jedem frei, für diesen zweiten Fall Werke der bezeichneten Art auch handschriftlich einzusenden. Mit denselben sind aber ebenfalls alle gleichartigen Werke, welche vor dem Einsendungstagen des laufenden Zeitraums gedruckt erschienen sind, für diesen Preis gleich berechtigt. Wird ein handschriftliches Werk gekrönt, so erhält dasselbe einen Preis von 500 Thalern in Gold; gedruckt erschienenen Schriften können nach dem Grade ihrer Bedeutung Preise von 250 Thlr. oder 500 Thlr. Gold zuerkannt werden.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich von selbst, daß der dritte Preis auch Mehreren zugleich zu Theil werden kann.

3. **Rechte der Erben der gekrönten Schriftsteller.** Sämmtliche Preise fallen, wenn die Verfasser der Preisschriften bereits gestorben sein sollten, deren Erben zu. Der dritte Preis kann auch gedruckten Schriften zuerkannt werden, deren Verfasser schon gestorben sind, und fällt alsdann den Erben derselben zu.

4. **Form der Preisschriften und ihrer Einsendung.** Bei den handschriftlichen Werken, welche sich um die beiden ersten Preise bewerben, müssen alle äußeren Zeichen vermieden werden, an welchen die Verfasser erkannt werden können. Wird ein Verfasser durch eigene Schuld erkannt, so ist seine Schrift zur Preisbewerbung nicht mehr zulässig. Daher wird ein jeder, der nicht gewiß sein kann, daß seine Handschrift den Preisrichtern unbekannt ist, wohlthun, sein Werk von fremder Hand abschreiben zu lassen. Jede Schrift ist mit einem Sinnspruche zu versehen, und es ist derselben ein versiegelter Zettel beizulegen, auf dessen Außenseite derselbe Sinnspruch sich findet, während inwendig Name, Stand und Wohnort des Verfassers angegeben sind.

Die handschriftlichen Werke, welche sich um den dritten

Preis bewerben, können mit dem Namen des Verfassers versehen, oder ohne denselben eingesandt werden.

Alle diese Schriften müssen im Laufe des neunten Jahres, vor dem 14. März 1895, dem Direktor zugesendet sein, welcher auf Verlangen an die Vermittler der Uebersendung Empfangsbescheinigungen auszustellen hat.

5. **Ueber Zulässigkeit zur Preisbewerbung.** Die Mitglieder der Königlichen Societät, welche nicht zum Preisgerichte gehören, dürfen sich wie jeder Andere um alle Preise bewerben. Dagegen leisten die Mitglieder des Preisgerichts auf jede Preisbewerbung Verzicht.

6. **Verkündigung der Preise.** An dem 14. März, mit welchem der neue Verwaltungszeitraum beginnt, werden in einer Sitzung der Societät die Berichte über die Preisarbeiten vorgetragen, die Zettel, welche zu den gekrönten Schriften gehören, eröffnet, und die Namen der Sieger verkündet, die übrigen Zettel aber verbrannt. Jene Berichte werden in den Nachrichten über die Königliche Societät, dem Beiblatte der Göttingischen gelehrten Anzeigen, abgedruckt. Die Verfasser der gekrönten Schriften oder deren Erben werden noch besonders durch den Direktor von den ihnen zugefallenen Preisen benachrichtigt, und können dieselben bei dem letzteren gegen Quittung sogleich in Empfang nehmen.

7. **Zurückforderung der nicht gekrönten Schriften.** Die Verfasser der nicht gekrönten Schriften können dieselben unter Angabe ihres Sinnspruches und Einsendung des etwa erhaltenen Empfangsscheines innerhalb eines halben Jahres zurückfordern oder zurückfordern lassen. Sofern sich innerhalb dieses halben Jahres kein Anstand ergiebt, werden dieselben am 14. October von dem Direktor den zur Emfangnahme bezeichneten Personen portofrei zugesendet. Nach Ablauf dieser Frist ist das Recht zur Zurückforderung erloschen.

8. **Druck der Preisschriften.** Die handschriftlichen Werke, welche den Preis erhalten haben, gehen in das Eigenthum der Stiftung für diejenige Zeit über, in welcher dasselbe den Verfassern und deren Erben gesetzlich zustehen würde. Der Verwaltungsrath wird dieselben einem Verleger gegen einen Ehrensold überlassen oder, wenn sich ein solcher nicht findet, auf Kosten der Stiftung drucken lassen, und in diesem letzteren Falle den Vertrieb einer zuverlässigen und thätigen Buchhandlung übertragen. Die Aufsicht über Verlag und Verkauf führt der Director.

Der Ertrag der ersten Auflage, welche ausschließlich der Freiexemplare höchstens 1000 Exemplare stark sein darf, fällt dem verfügbaren Capitale zu, da der Verfasser den erhaltenen Preis als sein Honorar zu betrachten hat. Wenn indessen jener Ertrag ungewöhnlich groß ist, d. h. wenn derselbe die Druckkosten um das Doppelte übersteigt, so wird die Königliche Societät auf den Vortrag des Verwaltungsrathes erwägen, ob dem Verfasser nicht eine außerordentliche Vergeltung zuzubilligen sei.

Findet die Königliche Societät fernere Auflagen erforderlich, so wird sie den Verfasser oder, falls derselbe nicht mehr leben sollte, einen andern dazu geeigneten Gelehrten zur Bearbeitung derselben veranlassen. Der reine Ertrag der neuen Auflagen soll alsdann zu außerordentlichen Bewilligungen für den Verfasser, oder, falls derselbe verstorben ist, für dessen Erben, und den neuen Bearbeiter nach einem von der Königlichen Societät festzustellenden Verhältnisse bestimmt werden.

9. **Bemerkung auf dem Titel derselben.** Jede von der Stiftung gekrönte und herausgegebene Schrift wird auf dem Titel die Bemerkung haben:

> Von der Königlichen Societät der Wissenschaften in Göttingen mit einem Wedekindschen Preise gekrönt und herausgegeben.

10. **Freiexemplare.** Von den Preisschriften, welche die Stiftung herausgiebt, erhalten die Verfasser je zehn Freiexemplare.

Göttingen, den 14. März 1887.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Mai 1889.

(Fortsetzung.)

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XXIV. Disp. 8, 9 e 10. 1888—89.

Bollettino delle pubblicazioni italiane 1889. No. 81.

Tavola sinottica delle pubblicazioni italiane, che furono ricevute dalle altre biblioteche pubbliche governative italiane nel 1888.

Bibliotheka nazionale centrale Vittorio Emanuele di Roma. Bollettino delle opere moderne straniere. Vol. IV. N. 2. 1889.

Bulletin de la société mathématique de France. Tome XVII. No. 1. Paris 1889.

Ein Bogen nachgeliefert zu No. 8433 des Mss. latins de la bibliothèque nationale. Tome XXXII 2e partie.

Contributions to meteorology by Elias Loomis. Chapter III. New Haven 1889. Conn.

Anales de la Sociedad Cientifica argentina 1888. Entrega VI. Tome XXVI. 1889. Entrega I. Tomo XXVII Buenos Aires.

The journal of the college of scienze. Imp. University Japan. Vol. II. Part V. Tokyo 1889.

Nachträge.

Fennia I. Bulletins de la société de Geographie finlandaise. Helsingfors 1889.

Bulletin of the museum of comparative Zoology at Harvard College. Vol. XVII. No. 3. The coral reefs of the Hawaiian islands by Alex. Agassiz. Cambridge.

Beiträge zur Kenntniß der Oxydationsvorgänge in lebenden Zellen v. W. Pfeffer. Band XV. No. 5. d. Abh. d. mathem.-physischen Classe d. K. sächs. Ges. d. Wissenschaften. Leipzig 1889.

Berichte über die Verhandlungen d. K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathem.-physische Classe. 1889. I. Leipzig 1889.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.

Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.

Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

31. Juli. **№ 15.** 1889.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 6. Juli.

Riecke legt eine Abhandlung von E. Cohn, »die Absorption elektrischer Schwingungen in Elektrolyten« vor.

Klein legt vor: 1. E. Pascal »Zur Theorie der ungeraden Abelschen Sigmafunctionen«', und 2. David Hilbert (in Königsberg): »Zur Theorie der algebraischen Gebilde. III.«

Die Absorption elektrischer Schwingungen in Elektrolyten.

Von

E. Cohn.

Aus der Thatsache, daß in Elektrolyten Elektricität sich nur gleichzeitig mit träger Masse bewegt, ist oft gefolgert worden, daß für diese Leiter das Ohm'sche, und somit das Joule'sche Gesetz nicht allgemein gelten könne, daß vielmehr Abweichungen auftreten müßten, sobald nur die elektrischen Kräfte hinreichend schnell Größe oder Richtung wechselten. Alle Bemühungen jedoch, solche Abweichungen experimentell nachzuweisen, haben lediglich zu negativen Ergebnissen geführt.

Zunächst hat F. Kohlrausch bewiesen, daß mit Strömen, die ihre Richtung einige hundert mal in der Secunde wechseln, Widerstandsmessungen von größter Genauigkeit ausgeführt werden können. — Ich selbst konnte dann zeigen[1], daß der Widerstand zweier Lösungen von Schwefelsäure und Kupfersulfat bei 25000 Stromwechseln in der Secunde noch derselbe war, wie bei beliebig langsamem Wechsel. Durch eine kürzlich veröffentlichte Untersuchung von J. J. Thomson[2]) ist die Grenze noch sehr viel weiter vorgeschoben worden. Er maß die Absorption elektrischer Wellen von 100 bis 200 Millionen Schwingungen in der Secunde durch Elektrolyte, und konnte daraus Widerstandswerthe für die letzteren ableiten, die mit den für stationäre Ströme gefundenen übereinstimmten. —

Stellt man sich aber auf den Boden der elektromagnetischen Lichttheorie, so kann man Schwingungszahlen angeben, für welche der Widerstand nicht mehr jenen constanten Werth hat: diejenigen der sichtbaren Strahlen. — Der Widerspruch, der zwischen dem Leitungsvermögen der Elektrolyte und ihrer Durchsichtigkeit besteht, ist bereits hervorgehoben, als zum ersten Mal die Identität von elektrischen Wellen und Lichtwellen behauptet wurde[3]). Er drängt sich um so störender auf, seit Dank Hertz' Entdeckungen diese Identität sich nicht mehr als das Ergebniß mathematischer Entwicklungen, sondern als Gegenstand unmittelbarster Anschauung darstellt. —

Wo die Thatsache erwähnt wird, daß ein Elektrolyt dem Ohm'schen Gesetz *a*) folgt, — bez. *b*) widerspricht, findet sich häufig die Bemerkung, daß die Zeit einer Schwingungsperiode *a*) sehr groß, — bez. *b*) sehr klein sein müsse gegen die Dauer gewisser molecularer Vorgänge im Elektrolyten[4]). Es scheint jedoch bisher nicht bemerkt zu sein, daß seit langer Zeit Beobachtungsdaten vorliegen, aus denen sich die Grenze für die Gültigkeit des Ohm'schen Gesetzes ableiten läßt. — Diese Ableitung soll im folgenden gegeben werden. Sie zeigt, daß einerseits in J. J. Thomson's Beobachtungen ein constanter Widerstandswerth zu erwarten war, — und daß andererseits gegenüber Lichtschwingungen ein solcher nicht zu erwarten ist. — Die einzige Voraussetzung der Rechnung ist die Annahme der unbedingten Gültigkeit des Faraday'schen Gesetzes[5]). — Im übrigen fußt sie auf

1) E. Cohn, Wied. Ann. 21, p. 667 (1884).

2) Proc. Roy. Soc. Vol. 45, p. 269 (1889).

3) Maxwell, A dynamical theory of the electromagnetic field. Phil. Trans. 1865, p. 504.

4) s. zu *a*): F. Kohlrausch, Wied. Ann. 26, p. 169 (1885); — zu *b*): Maxwell a. a. O.

5) Unten Gleichung (2) und (4).

den Werthen, die F. Kohlrausch für die molecularen Leitungsvermögen, und Hittorf für die Ueberführungszahlen der Elektrolyte gefunden hat. — Irgendwelche Molecularhypothesen liegen der Rechnung nicht zu Grunde. —

Sei in einem Punkt des Elektrolyten R die elektrische Intensität (auf die Elektricitätsmenge 1 wirkende Kraft), σ die Stromdichte [1]; dann wird im Volumelement 1 in der Zeit dt von elektrischen Kräften die Arbeit $R\sigma . dt$ geleistet. Dieselbe wird theils in Joule'sche Wärme (dQ) umgesetzt, theils zur Vermehrung der Energie geordneter Bewegung der Jonen (de) verwandt. — Also

$$R\sigma . dt = dQ + de.$$

Ist R periodisch nach der Zeit, so gilt dasselbe von e, während Q unbegrenzt mit der Zeit wächst. Summirt man folglich für genügend lange Zeit, so wird

$$(1) \qquad Q = \int_0^t R\sigma\, dt.$$

Enthält der Werth des Integrals periodische Glieder, so fallen auch diese außer Betracht. —

Bezeichnen nun u_1 und u_2 die Geschwindigkeiten der beiden Jonen, — η die Anzahl von Gramm-Aequivalenten, die nach dem Faraday'schen Gesetz mit der Elektricitätsmenge 1 wandert, — N die Anzahl von Gramm-Aequivalenten des Elektrolyten im Volumen 1, welche an der Elektrolyse theilnimmt [2]), so ist die Summe von Gramm-Aequivalenten beider Jonen, die in der Zeit 1 einen Querschnitt 1 senkrecht zur Strömungsrichtung in entgegengesetzter Richtung kreuzen:

$$(2) \qquad N(u_1 + u_2) = \eta . \sigma.$$

Also:

$$(3) \qquad \begin{cases} Q = Q_1 + Q_2, \text{ wo} \\ Q_1 = \dfrac{N}{\eta}\displaystyle\int_0^t R u_1\, dt; \quad Q_2 = \dfrac{N}{\eta}\displaystyle\int_0^t R u_2\, dt. \end{cases}$$

Sei F_1 die mechanische Kraft elektrischen Ursprungs, die auf die Masse 1 des ersten Jons wirkt, und bezeichne A_1 das sog. Aequivalentgewicht [3]) desselben, so ist

1) Alle Größen seien in absolutem Maß cm. gr. sec. gemessen.

2) Dieselbe ist in der numerischen Ausrechnung gleich der Anzahl N' von Gr.-Aequ. gesetzt, die im Volumen 1 enthalten ist. In neuerer Zeit hat man wahrscheinlich gemacht, daß beide Zahlen nur in sehr verdünnten Lösungen identisch sind, während im allgemeinen $N < N'$ ist. Für die hier gezogenen Schlüsse ist der Unterschied zwischen beiden Annahmen ohne Bedeutung.

3) Eine reine Zahl.

(4) $$R = \eta A_1 . F_1.$$

u_1 ist als Function von F_1 darzustellen. Die Differentialgleichung, welche zwischen beiden besteht, folgt aus der Betrachtung eines Specialfalls:

R (und folglich F_1) sei constant; dann erreicht erfahrungsmäßig (und zwar in unmeßbar kurzer Zeit) u_1 einen stationären Endwerth U_1, der der beschleunigenden Kraft F_1 proportional ist; damit dies der Fall sei, muß die Bewegung einen Widerstand finden, welcher der Geschwindigkeit u_1 proportional ist. D. h. die Beschleunigung des Jons ist allgemein:

(5) $$\frac{\partial u_1}{\partial t} = F_1 - \frac{u_1}{a_1},$$

wo a_1 eine Constante. Der Werth derselben ergiebt sich ebenfalls aus dem Specialfall. Sei nemlich F_1 constant, so folgt:

(6) $$u_1 = a_1 F_1 (1 - e^{-\frac{t}{a_1}})$$

und folglich:

$$U_1 = a_1 . F_1$$

oder

(7) $$a_1 = \frac{U_1}{F_1} = \frac{\text{Jonen-Geschwindigkeit im stationären Strom}}{\text{beschleunigende Kraft elektrischen Ursprungs}}.$$

a_1 drückt sich durch elektrische Größen in folgender Weise aus. Sei

$$U = U_1 + U_2$$

die Summe der beiden stationären Jonengeschwindigkeiten; n_1 und n_2 die Ueberführungszahlen, wo

(8) $$n_1 + n_2 = 1,$$

und Σ der stationäre Werth von σ, dann ist

(9) $$U_1 = n_1 U \text{ und } \Sigma \eta = NU.$$

Aus (4), (9) und (7) folgt

$$a_1 = \frac{\eta^2 n_1 A_1}{N} \cdot \frac{\Sigma}{R}$$

oder, wenn das specifische Leitungsvermögen für stationären Strom mit k bezeichnet wird,

(10) $$a_1 = \frac{\eta^2 n_1 A_1 k}{N}.$$

Nachdem uns die Betrachtung der stationären Strömung die Form der reibungsartigen mechanischen Kraft und die Größe der auftretenden Constante geliefert hat, wenden wir die allgemeine Gleichung (5) auf den Fall periodischer Ströme an. Sei

$$R = P \,.\, \sin \nu t\,, \tag{11}$$

so wird die Lösung von (5) (unter Benutzung von (4) und (10)):

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= B_1 \sin \nu t + C_1 \cos \nu t + D_1 e^{-\frac{t}{a_1}}, \text{ wo} \\ B_1 &= \frac{\eta n_1 k}{N} \cdot \frac{P}{1+(a_1\nu)^2}. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Folglich nach (3):

$$Q_1 = \frac{N}{\eta} \int_0^t P \sin \nu t \,(B_1 \sin \nu t + C_1 \cos \nu t + D_1 e^{-\frac{t}{a_1}})\, dt$$

oder mit Fortlassung der verschwindenden und periodischen Glieder:

$$Q_1 = t \cdot \frac{P^2 k}{2} \cdot \frac{n_1}{1+(a_1\nu)^2}.$$

Ebenso erhält man Q_2, und folglich:

$$Q = t\, \frac{P^2 k}{2} \left[\frac{n_1}{1+(a_1\nu)^2} + \frac{n_2}{1+(a_2\nu)^2}\right]. \tag{13}$$

Solange $(a_1\nu)^2$ und $(a_2\nu)^2$ gegen 1 verschwinden, ist wegen (8) der Ausdruck in der Klammer gleich 1, und Q erhält den von der Schwingungszahl unabhängigen Werth, der sich ohne Berücksichtigung der Trägheit der bewegten Massen ergiebt, und welcher dem Ohm'schen Gesetz entspricht. Sobald aber die Schwingungszahl $\frac{\nu}{\pi}$ über die bezeichnete Grenze wächst, sinkt Q unter diesen Werth; — die hindurchgesandte Energie wird in geringerem Grade absorbirt. —

Bei F. Kohlrausch[1]) finden sich die Größen $\frac{1}{a}$ für eine große Anzahl von Jonen aus Leitungsvermögen, Wanderungszahl und Aequivalentgewicht gemäß Gleichung (10) berechnet, und (in der letzten Spalte der Tabelle XIV, S. 206) in einer auf Gravitationsmaß gegründeten Einheit zusammengestellt. Sie werden auf absolutes Maß ($\sec^{-1}$) zurückgeführt durch Multiplication mit 98.10^8 [2]). — Danach liegen die Größen a in dem Intervall:

1) Wied. Ann. 6.

2) Die specifischen Leitungsvermögen sind von Kohlrausch aus Beobachtungen mit langsamen Wechselströmen abgeleitet; daß aber die Ergebnisse identisch sind mit den aus stationären Strömen erhaltenen, ist von K. selbst und Anderen nachgewiesen.

$$10^{-15} \text{ bis } 10^{-13} \text{ sec.}$$

In Thomson's Versuchen stieg ν bis zu $6.10^8\,\text{sec}^{-1}$. Die Zahlen $(a\nu)^2$ waren folglich gegen 1 verschwindende Größen, und es war zu erwarten, daß die Joule'sche Wärme den gleichen Betrag, wie für stationäre Ströme, haben würde, — wie es auch die Beobachtung ergab. —

Für das sichtbare Spectrum sind die Größen ν von der Ordnung $10^{15}\,\text{sec}^{-1}$. Es ist folglich anzunehmen, daß durch die Trägheit der bewegten Massen die Absorption der Strahlung unter den aus stationären Zuständen abgeleiteten Betrag herabgedrückt werde. — Man darf aber nicht erwarten, aus der Gleichung (13) für diesen Fall numerisch richtige Werthe zu erhalten. Die Widerstände, welche sich der Jonenbewegung entgegenstellen, und die in der obigen Darstellung ihr Maß in der Constante $\frac{1}{a}$ finden, werden wir thatsächlich nicht als gleichmäßig wirkend ansehen dürfen. Dieselben werden vielmehr, nach den Anschauungen, die man sich über Molecularbewegungen gebildet hat, schnell und unregelmäßig wechseln. Solange die Zeiten, aus denen wir einen genügend angenäherten Mittelwerth ziehen können, sehr klein sind gegen die Periode des Stromwechsels, wird nur dieser constante Mittelwerth in Betracht kommen, — und diesen haben wir aus der Beobachtung stationärer Zustände bestimmt und unsrer Rechnung zu Grunde gelegt. — Sobald man die Erscheinungen der „auswählenden Absorption“ erklären will, wird man die zeitlichen Abweichungen von diesem Mittelwerth in Betracht ziehen, — d. h. Hypothesen über die molecularen Vorgänge im Elektrolyten machen müssen. — Der Werth der vorstehenden Ableitung liegt m. E. darin, daß sie von solchen Hypothesen frei ist.

Straßburg i./E., Juni 1889.

Zur Theorie der ungeraden Abel'schen Sigmafunctionen dreier Argumente.

Von

Ernst Pascal.

Vorgelegt von F. Klein.

Ziel der gegenwärtigen Note ist, in den Hauptzügen die Resultate mitzutheilen, die ich beim Studium der Reihenentwickelungen der neuerdings von Prof. Klein eingeführten Abel'schen Sigmafunctionen dreier Argumente erhalten habe.

Indem ich mir vorbehalte über die geraden Sigmafunctionen bei einer anderen Gelegenheit zu berichten, beschränke ich mich nachstehend auf den Fall der ungeraden Sigmafunctionen.

Zwei Mittheilungen, welche Prof. Klein neuerdings in diesen Nachrichten veröffentlicht hat[1]), entheben mich der Verpflichtung hier irgendwie auf die allgemeine Theorie der Sigmafunctionen einzugehen. Daher haben die nachfolgenden Auseinandersetzungen die genannten Arbeiten von Prof. Klein zur nothwendigen Voraussetzung.

Meine ganze Untersuchung zerfällt in zwei Theile:

1) das zweite Glied der Reihenentwickelung der ungeraden σ-Functionen zu bestimmen;

2) aus eben diesem zweiten Gliede unter Benutzung der neuerdings von Prof. Wiltheiss gefundenen und ebenfalls in diesen Nachrichten veröffentlichten[2]) Differentialgleichung für die übrigen Glieder der Reihenentwickelung ein recurrentes Gesetz aufzustellen.

§. 1.

Setzen wir die Integrale erster Gattung in der besonderen Form voraus:

$$(1)\qquad w_1 = \int_y^x z_1 d\omega_z\,, \quad w_2 = \int_y^x z_2 d\omega_z\,, \quad w_3 = \int_y^x z_3 d\omega_z\,,$$

so hat die ungerade σ-Function die Form

$$(2)\qquad \sigma(w_1 w_2 w_3) = \sqrt{D_x D_y}\,.\,\Omega(xy),$$

wo Ω unter den von Prof. Klein eingeführten „Primformen" diejenige ist, die aus dem rational normirten Integral dritter Gattung Q[3]) abgeleitet wird, und $D_x = 0$ die ausgezeichnete Doppeltangente der Curve 4ter Ordnung vorstellt, welch' letztere durch die Gleichung gegeben ist:

$$(3)\qquad D_x \Phi_x^3 - (\Omega_x^2)^2 = 0.$$

Zwischen den drei durch (1) gegebenen w besteht, wie Prof. Klein auf Grund mündlicher Angaben von Frobenius in seinen

1) Zur Theorie der Abel'schen Functionen, I und II [März und Mai 1889].

2) Juni 1889.

3) Pick, Mathematische Annalen, Bd. 29.

Vorlesungen entwickelte, eine Relation $\chi(w_1 w_2 w_3) = 0$, welche nach Potenzen der w entwickelt mit Gliedern vierter Ordnung in den w beginnt. Daher ist die in (2) enthaltene Definition der σ-Function allgemein genug, um den zweiten Term der Reihenentwickelung der σ-Function, der vom dritten Grade in den w ist, zu liefern.

Wir beginnen daher, in (1), (2)

$$y = x + \zeta$$

zu setzen und die durch (2) gegebene σ-Function nach Potenzen von ζ zu entwickeln. Indem wir darauf denjenigen Theil der Terme dritter Ordnung in ζ suchen, welcher von dem zweiten Gliede in der Reihenentwickelung der σ herstammt, erhalten wir (indem wir $x_2 = 1$ setzen und also die Homogeneïtät hinsichtlich der 3 Variabelen $x_1 x_2 x_3$ aufheben):

$$(4)\quad -\frac{D_x}{4f_3^3}[(\varphi,f),f]_x + \tfrac{1}{3}\frac{D_x}{f_3^4}[(f_3,f),f] - \tfrac{1}{3}\frac{1}{f_3^3}[(D,f),f) + \tfrac{1}{2}\frac{(D,f)^2}{D_x f_3^2} - \tfrac{1}{2}\frac{D_x}{f_3^5}(f_3 f)^2.$$

Hier bedeutet φ den zum Integral dritter Gattung Q gehörigen Integranden, $f = 0$ ist die Curve vierter Ordnung, $f_3 = \frac{\partial f}{\partial x_1}$, und allgemein das Symbol:

$$(\psi,\chi) = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial x_3} - \frac{\partial\psi}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial x_1}.$$

Von dem hiermit erreichten Puncte aus, habe ich nun zur Erledigung der vorhin angegebenen ersten Fragestellung zweierlei Methoden angewandt.

Zunächst will ich voraussetzen, daß der sonst willkürliche Punct x der Curve vierter Ordnung insbesondere einer der Berührungspuncte der ausgezeichneten Doppeltangente werde. Dann vereinfacht sich (4) ausserordentlich und gibt, wenn man es als Function der Coëfficienten der drei ferneren Formen D_x, Φ_x^3, Ω_x^2 berechnet:

$$(5)\qquad -\tfrac{8}{3}(D\Omega\Omega')^2.\Phi_x^3.\left(\frac{1}{f_3^3}\right).$$

Von anderer Seite aber wissen wir, das der gesuchte Term eine rationale ganze Covariante der D, Φ, Ω von folgender Gestalt ist:

$$(6)\qquad \Sigma(D^{3-\mu}, \Phi^{2-\mu}, \Omega^{2\mu}, w^3)$$

(wo die oberen Indices beziehungsweise den Grad in den Coëfficienten der D, Φ, Ω und in den w angeben).

Nun habe ich alle Covarianten von diesem Typus (6) bestimmt und gefunden, daß unter denselben allein folgende sechs linear unabhängig sind:

$$(7)\quad \begin{cases} (\Phi\Phi' D)^2 \Phi_w \Phi'_w D_w, & (D\Omega\Omega')^2 \Phi_w^3, \qquad (\Phi\Omega\Omega')(D\Omega\Omega')\Phi_w^2 D_w \\ (\Phi\Omega\Omega')^2 \Phi_w D_w^2, & (\Phi D\Omega)^2 \Phi_w^2 \Omega_w'^2, \qquad (\Omega\Omega'\Omega'')^2 \Omega_w'''^2 D_w. \end{cases}$$

Bedenkt man nun, daß die σ-Function ungeändert bleiben muß, wenn wir unter Festhaltung der Doppeltangente D die Berührungscurve Φ in eine andere desselben Systems verwandeln:

$$\Phi_x^3 + 2s_x \Omega_x^2 + (s_x)^2 D_x,$$

während wir den Kegelschnitt Ω durch folgenden ersetzen:

$$\Omega_x^2 + s_x D_x$$

(unter $s_x = 0$ eine beliebige Gerade der Ebene verstanden), so ergiebt sich, daß σ und also jeder einzelne Term der zugehörigen Reihenentwickelung der Differentialgleichung genügen muß:

$$(8)\qquad \Delta\sigma = \Sigma \frac{\partial\sigma}{\partial\Omega} sD + 2\Sigma \frac{\partial\sigma}{\partial\Phi} s\Omega = 0,$$

wo auf der linken Seite zwei verschiedene Aronhold-Processe auftreten, deren einer die quadratische Form Ω_x^2 durch $s_x D_x$, deren anderer die cubische Form Φ_x^3 durch $s_x \Omega_x$ ersetzt.

Ich habe nun gefunden, daß es eine einzige Covariante vom Typus (6) gibt, welche die Differentialgleichung (8) befriedigt; dieselbe ist natürlich eine lineare Combination der sechs Covarianten (7).

Die betreffende Covariante, mit welcher, von einem numerischen Factor abgesehen, der gesuchte zweite Term der Reihenentwickelung der σ übereinstimmen muß, ist folgende:

$$(9)\quad \begin{aligned} S(w) = \{ & -2(D\Omega\Omega')^2 \Phi_w^3 + 3(\Phi D\Omega')^2 \Phi_w \Omega_w^2 - \tfrac{3}{4}(\Phi\Phi' D)^2 \Phi_w \Phi'_w D_w \\ & - (\Phi\Omega\Omega')^2 \Phi_w D_w^2 + \tfrac{2}{9}(\Omega\Omega'\Omega'')^2 \Omega_w^2 D_w + 2(\Phi\Omega\Omega')(D\Omega\Omega')\Phi_w^2 D_w \}. \end{aligned}$$

Indem wir hier für die w die x einführen, kommt:

$$S(w) = -\frac{4^3}{f_3^3} . S(x),$$

und indem wir hier x mit einem der Berührungspuncte der Doppeltangente $D(x) = 0$ zusammen fallen lassen, kommt:

$$\frac{2 . 4^3}{f_3^2} (D\Omega\Omega')^2 . \Phi_x^3,$$

worauf der Vergleich mit (5) als zweiten Term der σ-Function den folgenden ergiebt:

$$-\frac{1}{3.16}S(w).$$

Die zweite Methode, die ich gebraucht habe und die durch einen Umstand von dem ich unten sprechen werde, besondere Bedeutung gewinnt, besteht darin, den Ausdruck (4) direct umzuformen. Diese Umformung wird recht complicirt; es gelingt aber, sie durchzuführen, indem man einige Kunstgriffe gebraucht, betreffs deren ich hier keine Einzelheiten geben will.

§. 2.

Die Differentialgleichung, welche Prof. Wiltheiss für $\Theta = s.\sigma$ gefunden hat (wo s ein irrationaler Ausdruck ist, den wir hier nicht zu kennen brauchen), ist folgende:

$$\delta\Theta + \Sigma v_i v_j \frac{\partial^2 \Theta}{\partial w_i \partial w_j} + L\Theta = 0 \tag{10}$$

wo δ ein Aronhold-Process ist, der sich darauf bezieht, daß man die Ableitungen bezüglich der Coëfficienten von f bildet und sie mit den Coëfficienten der folgenden Form multiplicirt:

$$F(x,v) = (abc)^2 [a_x^2 b_x^2 c_v^2 + a_x^2 b_x b_v c_x c_v], \tag{11}$$

wo ferner L nachstehende Covariante bedeutet:

$$288\, L(w,v) = 9\,(abc)^2 (abe)^2 [c_v^2 e_w^2 + c_v c_w e_v e_w] - 5\,(abc)^4 e_v^2 e_w^2.$$

Setzen wir jetzt:

$$\Theta = s(N_1 + N_3 + N_5 + \ldots.),$$

so kommen die Gleichungen:

$$s\,(\delta \mathrm{N}_1)_{v=w} + \mathrm{N}_1 (\delta s)_{v=w} + 6\,\mathrm{N}_3 s = 0, \tag{12}$$

$$s(\delta \mathrm{N}_{2\lambda+1})_{v=w} + \mathrm{N}_{2\lambda-1}(\delta s)_{v=w} + (2\lambda+1)2\lambda . s\,\mathrm{N}_{2\lambda+1} + L(w,w)\,\mathrm{N}_{2\lambda-3} s = 0. \tag{13}$$

Um aber diese Formeln anwenden zu können, muß man vor allen Dingen wissen, welche Gestalt der Process δ in dem bei der σ-Function in Betracht kommenden Rationalitätsbereiche annimmt, d. h. wie er sich transformirt, wenn man nicht mehr nach den Coëfficienten von f, sondern nach denjenigen der D, Ω, Φ die Ableitungen bildet.

Wir setzen jetzt:

$$\delta = \Sigma \frac{\partial}{\partial f} F = \Sigma \frac{\partial}{\partial D} \overline{D} + \Sigma \frac{\partial}{\partial \Omega} \overline{\Omega} + \Sigma \frac{\partial}{\partial \Phi} \overline{\Phi} \tag{14}$$

und hier muß es, nach den Eigenschaften der Functionen σ, nothwendig möglich sein die drei Ausdrücke $\overline{D}$, $\overline{\Omega}$, $\overline{\Phi}$ als Covarianten der drei Formen D, Ω, Φ zu bestimmen. Man erhält leicht:

$$F = D\overline{\Phi} - 2\Omega\overline{\Omega} + \Phi\overline{D} \tag{15}$$

und daher muß F eine derartige Form sein, welche, in den Coefficienten der drei D, Φ, Ω ausgedrückt, sich in drei Theile spaltet, deren einzelner entweder D_x, oder Ω_x^2, oder Φ_x^3 zu Factoren hat.

Die genannte Zerlegung von F gelingt natürlich nicht ohne Weiteres, vielmehr wird man zu dem Zwecke wieder verschiedene Kunstgriffe gebrauchen, über deren Einzelheiten ich hier keine näheren Angaben mache.

Nachdem man F solchergestalt zerlegt hat, wird man versuchen die Ausdrücke der $\overline{D}, \overline{\Omega}, \overline{\Phi}$ so sehr zu vereinfachen als möglich.

Ich habe gefunden, daß sich dieselben auf Combinationen der elf folgenden invarianten Formen, und der Glieder ihrer nach v genommenen Polaren, zurückführen lassen:

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{llll} A = (D\Omega\Omega')^2, & B_w = (\Phi D\Omega)^2\Phi_w, & C_w^2 & = (\Phi\Phi' D)^2\Phi_w\Phi'_w \\ E = (\Omega\Omega'\Omega'')^2, & G_w = (\Phi\Omega\Omega')^2\Phi_w, & H_w^2 & = (\Phi\Phi'\Omega)^2\Phi_w\Phi'_w \\ & & K_w^2 & = (\Phi\Omega\Omega')(D\Omega\Omega')\Phi_w^2 \\ \multicolumn{2}{r}{M_w^3 = (\Omega\Phi D)(\Omega\Phi\Phi')\Phi_w\Phi'^2_w,} & N_w^3 & = (\Phi\Phi'\Phi'')^2\Phi_w\Phi'_w\Phi''_w \\ \multicolumn{2}{r}{P_w^4 = (D\Omega\Phi)(D\Omega\Phi')\Phi_w^2\Phi'^2_w,} & Q_w^4 & = (\Omega\Omega'\Phi)(\Omega\Omega'\Phi')\Phi_w^2\Phi'^2_w \end{array}\right.$$

(sechs dieser Formen betheiligen sich bereits bei der Bildung der Formen (7)).

Ich setze nun ferner:

$$\left.\begin{array}{l} M_{1w}^2 \\ M_{2w}^2 \end{array}\right\} = (\Omega\Phi D)(\Omega\Phi\Phi')\left\{\begin{array}{l} \Phi_v\Phi'^2_w \\ \Phi_w\Phi'_w\Phi'_v \end{array}\right.; \quad \left.\begin{array}{l} P_{1w}^2 \\ P_{2w}^2 \end{array}\right\} = (D\Omega\Phi)(D\Omega\Phi')\left\{\begin{array}{l} \Phi_w^2\Phi'^2_v \\ \Phi_w\Phi_v\Phi'_w\Phi'_v \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} Q_{1w}^2 \\ Q_{2w}^2 \end{array}\right\} = (\Omega\Omega'\Phi)(\Omega\Omega'\Phi')\left\{\begin{array}{l} \Phi_w^2\Phi'^2_v \\ \Phi_w\Phi_v\Phi'_w\Phi'_v \end{array}\right.$$

Die Ausdrücke $\overline{\Phi}$, $\overline{\Omega}$, $\overline{D}$ werden dann folgende:

$$\begin{aligned} 4.3.\overline{\Phi} = {} & \frac{3}{8}N_w^3 D_v^2 + \frac{105}{16} N_w^2 N_v D_w D_v - \frac{3}{16} N_v^2 N_w D_w^2 - \frac{3}{2} C_w C_v \Phi_w^2 \Phi_v - \\ & - \frac{9}{16} C_w^2 \Phi_v^2 \Phi_w + \frac{4}{9} E \Phi_w^2 \Phi_v \Omega_w \Omega_v + \frac{43}{4} G_w \Phi_w^2 \Phi_v D_v + \\ & + \frac{29}{4} G_w \Phi_w \Phi_v^2 D_w + \frac{7}{2} G_v \Phi_w^2 \Phi_v D_w + \frac{2}{3} G_w (\Omega_v \Omega_w)^2 - \frac{59}{4} Q_w^3 Q_v D_v \\ & - \frac{25}{4} Q_{2w}^2 D_w - 6 Q_{1w}^2 D_w - \frac{7}{4} K_w K_v \Phi_w^2 \Phi_v + \frac{3}{2} K_w^2 \Phi_w \Phi_v^2 - \end{aligned}$$

$$-8M_w^3\Omega_v^2-\frac{19}{2}M_{2w}^2\Omega_w\Omega_v-\frac{9}{2}M_{1w}^2\Omega_w\Omega_v-\frac{11}{4}H_w^2D_w\Omega_v^2-$$
$$-\frac{9}{2}H_w^2D_v\Omega_w\Omega_v-\frac{7}{2}H_vH_w\Omega_w\Omega_vD_w,$$

$$-2.3.4.\overline{\Omega}=-3B_w\Phi_w^2\Phi_v-\frac{3}{2}B_w\Phi_w\Phi_v^2+3P_{2w}^2+6P_{1w}^2-3M_{2w}^2D_v$$
$$-3M_{1w}^2D_v-2M_{2v}^2D_w-6M_{1v}^2D_v-7H_wH_vD_wD_v-$$
$$-\frac{1}{4}H_v^2D_w^2+4K_wK_v\Omega_w\Omega_v+6K_w^2\Omega_v^2+2K_v^2\Omega_w^2+2G_w\Omega_w\Omega_vD_v$$
$$+2G_v\Omega_w^2D_v+\frac{17}{3}G_w\Omega_v^2D_w+\frac{5}{3}G_v\Omega_w\Omega_vD_w+$$
$$+E\left[-2\Phi_w^2\Phi_vD_v-\frac{17}{9}\Phi_v^2\Phi_wD_w-\frac{8}{9}(\Omega_w\Omega_v)^2-\frac{16}{9}\Omega_w^2\Omega_v^2\right],$$

$$3.4.\overline{D}=-\frac{3}{4}C_wC_vD_v+\frac{9}{16}C_v^2D_w+E\left(\frac{2}{9}\Omega_v\Omega_wD_v-\frac{19}{9}\Omega_v^2D_w\right)+$$
$$+\frac{3}{2}B_w\Omega_v^2+3B_v\Omega_w\Omega_v-3A\Phi_w'\Phi_v^2+\frac{17}{4}K_v^2D_w'+2K_wK_vD_v.$$

Ich will hier insbesondere den Ausdruck

$$(\delta N_1)_{v=w}+6N_3$$

in Betracht ziehen; man findet, daß derselbe den Factor $D_w=N_1$ erhält. Daher ergibt sich aus (12) $(\delta s)_{v=w}$ als ganze Function. Man findet:

$$17)\qquad (\delta s)_{v=w}=-\frac{5}{64}C_w^2-\frac{1}{3}G_wD_w+\frac{5}{27}E\Omega_w^2-\frac{13}{48}K_w^2.$$

Nun hatten wir in § 1 angegeben, daß man den zweiten Term der Reihenentwickelung der σ auf directem Wege berechnen kann. Daher geben (13) und (17) einen Beweis des Fundamentalsatzes aus der Theorie der Sigmafunctionen, nämlich des Satzes, daß die σ ganze Functionen des Coëfficienten der drei Formen D, Ω, Φ sind.

Ehe ich schliesse, will ich noch folgende Bemerkungen hinzufügen:

Es ist leicht zu sehen, daß es unendlich viele Formen $\overline{D}$, $\overline{\Omega}$, $\overline{\Phi}$ gibt. Ich behaupte, daß man ein beliebiges dieser Tripel auswählen kann. Dies ist nicht ohne Weiteres evident, denn, da der Process δ, durch D, Ω, Φ ausgedrückt, eine ganz bestimmte Gestalt haben muß, so scheint es zunächst, daß nur dann unser Problem aufgelöst ist, wenn diese bestimmte Gestalt gefunden ist.

Wäre dieses der Fall, so würde unsere Untersuchung nicht einfach zu führen sein; ich habe jedoch bewiesen (und zwar auf zwei untereinander sehr verschiedene Weise), daß das Problem der Reihenentwickelung der σ aufgelöst ist, wenn man irgend welche bez. $\overline{D}$, $\overline{\Omega}$, $\overline{\Phi}$ kennt.

Es ist auch interessant, zu beweisen (und ich habe es bewiesen), daß alle diese Formentripel etwas Gemeinsames haben.

Nämlich die drei Glieder

$$\tfrac{3}{2}\mathrm{B}_w \Omega_v^2 + 3\mathrm{B}_v \Omega_v \Omega_w - 3\mathrm{A}\Phi_w \Phi_v^2,$$

welche in den Ausdruck von $\overline{D}$ eingehen, sind jedenfalls fest und unveränderlich. Dies zieht nach sich, daß $(\delta s)_{v=w}$ immer eine ganze Function wird, welches Tripel man auch für die $\overline{D}$, $\overline{\Omega}$, $\overline{\Phi}$ gewählt haben mag. Dies konnte vorausgesehen werden, es scheint aber immer interessant eine directe Bestätigung zu haben.

Zur Theorie der algebraischen Gebilde.

(Dritte Note.) [1]

Von

David Hilbert aus Königsberg in Pr.

(Vorgelegt von F. Klein.)

Die vorliegende Mitteilung ist eine Ergänzung der beiden unlängst unter dem gleichen Titel in diesen Nachrichten veröffentlichten Noten. Die sämmtlichen in diesen beiden Noten abgeleiteten Sätze über algebraische Gebilde beruhen wesentlich auf dem Theoreme I der ersten Note. Diesem Theoreme läßt sich nun eine noch allgemeinere Fassung geben, welche dasselbe auch für Anwendungen auf zahlentheoretische Untersuchungen geeignet macht und, wie folgt, lautet:

Theorem VI. Ist irgend eine nicht abbrechende Reihe von Formen $F_1, F_2, F_3, \ldots$ mit ganzzahligen Coefficienten und von beliebigen Ordnungen in den n homogenen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vorgelegt, so giebt es stets eine Zahl m von der Art, daß eine jede Form jener Reihe sich in die Gestalt

$$F = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \ldots + A_m F_m$$

bringen läßt, wo $A_1, A_2, \ldots, A_m$ geeignete ganzzahlige Formen der nämlichen n Veränderlichen sind.

---

1) Vergl. diese Nachrichten 1888 S. 450 und 1889 S. 25.

Wie man sieht, wird hier im Unterschiede zu der früheren Fassung des Theorems verlangt, daß in gleicher Weise wie die gegebenen Formen F_1, F_2, F_3, ... auch die bei der Darstellung zu verwendenden Formen $A_1, A_2, \ldots, A_m$ Formen mit ganzzahligen Coefficienten sind. Zum Beweise des Theorems bedienen wir uns der folgenden Schlußweise, welche mithin zugleich für Theorem I einen neuen Beweis liefert.

Wir bezeichnen allgemein mit f_s die von der Veränderlichen x_n freien Glieder der Form F_s; sind dann alle Formen der unendlichen Reihe $f_1, f_2, f_3, \ldots$ identisch Null, so setzen wir

$$F_s^{(1)} = F_s; \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

im anderen Falle sei f_α die erste von Null verschiedene Form der Reihe $f_1, f_2, f_3, \ldots$, ferner f_β die erste Form derselben Reihe, welche nicht einem Produkte von der Gestalt $a_\alpha f_\alpha$ gleich ist, worin a_α eine ganzzahlige Form der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ bedeutet; f_γ sei die erste Form jener Reihe, welche sich nicht in die Gestalt $a_\alpha f_\alpha + a_\beta f_\beta$ bringen läßt, wo a_α und b_β wiederum ganzzahlige Formen von $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sind und in dieser Weise fahren wir fort. Wäre nun unser Theorem VI für den Fall von $n-1$ homogenen Veränderlichen bereits bewiesen und beachten wir, daß in der gewonnenen Formenreihe $f_\alpha, f_\beta, f_\gamma, \ldots$ keine Form durch lineare Combination aus den vorhergehenden Formen erhalten werden kann, so folgt, daß diese Formenreihe notwendig im Endlichen abbrechen muß. Es sei demgemäß f_λ die letzte Form dieser Reihe, so daß stets

$$f_s = a_{\alpha s} f_\alpha + a_{\beta s} f_\beta + \ldots + a_{\lambda s} f_\lambda = l_s(f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda), \quad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

gesetzt werden kann, wo $a_{\alpha s}, a_{\beta s}, \ldots, a_{\lambda s}$ ganzzahlige Formen von $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sind. Bilden wir nun die Ausdrücke

$$F_s^{(1)} = F_s - l_s(F_\alpha, F_\beta, \ldots, F_\lambda), \quad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

so sind dies Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, von denen jede die Veränderliche x_n als Faktor enthält. Wir bezeichnen allgemein mit $x_n f_s^{(1)}$ diejenigen Glieder der Form $F_s^{(1)}$, welche lediglich mit der ersten Potenz von x_n multiplicirt sind und betrachten die Formen $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}, \ldots$ der $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Verschwinden diese Formen sämmtlich, so setzen wir

$$F_s^{(2)} = F_s^{(1)}, \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ist dagegen jede Form der Reihe $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}, \ldots$ eine lineare Combination der Formen $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda$, wie folgt

$$f_s^{(1)} = a_{\alpha s}^{(1)} f_\alpha + a_{\beta s}^{(1)} f_\beta + \ldots + a_\lambda^{(1)} a_{\lambda s}^{(1)} f_\lambda = l_s^{(1)}(f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda), \quad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

so setzen wir

$$F_s^{(2)} = F_s^{(1)} - l_s^{(1)}(x_n F_\alpha, x_n F_\beta, \ldots, x_n F_\lambda).$$

In jedem anderen Falle sei $f_{\alpha(1)}^{(1)}$ die erste nicht durch lineare Combination aus $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda$ hervorgehende Form der Reihe $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}, \ldots,$ ferner sei $f_{\beta(1)}^{(1)}$ die erste Form dieser Reihe, welche keiner linearen Combination der Formen $f_\alpha, f_\beta, \ldots f_\lambda$ $f_{\alpha(1)}^{(1)}$ gleich ist und entsprechend $f_{\gamma(1)}^{(1)}$ die erste nicht durch lineare Combination von $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha(1)}^{(1)}, f_{\beta(1)}^{(1)}$ hervorgehende Form der nämlichen Reihe. Die so entstehende Formenreihe $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda,$ $f_{\alpha(1)}^{(1)}, f_{\beta(1)}^{(1)}, f_{\gamma(1)}^{(1)}, \ldots$ bricht unter der vorhin gemachten Annahme notwendig im Endlichen ab, und wenn $f_{\lambda(1)}^{(1)}$ die letzte Form der Reihe bezeichnet, so finden wir stets

$$f_s^{(1)} = l_s^{(1)}(f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha(1)}^{(1)}, f_{\beta(1)}^{(1)}, \ldots, f_{\lambda(1)}^{(1)}), \quad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

wo $l_s^{(1)}$ eine lineare homogene Funktion jener Formen bedeutet, deren Coefficienten selber ganzzahlige Formen der $n-1$ Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sind. Setzen wir daher

$$F_s^{(2)} = F_s^{(1)} - l_s^{(1)}(x_n F_\alpha, x_n F_\beta, \ldots, x_n F_\lambda, F_{\alpha(1)}^{(1)}, F_{\beta(1)}^{(1)}, \ldots, F_{\lambda(1)}^{(1)}),$$

so besitzen die so entstehenden Formen $F_s^{(2)}$ der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sämmtlich den Faktor x_n^2. Wir bezeichnen demgemäß allgemein mit $x_n^2 f_s^{(2)}$ diejenigen Glieder der Form $F_s^{(2)}$, welche lediglich mit der zweiten Potenz der Veränderlichen x_n multiplicirt sind und betrachten die Formen $f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, f_3^{(2)}, \ldots$ der $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$. Sind diese Formen nicht sämmtlich Null beziehungsweise lineare Combinationen der Formen $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda,$ $f_{\alpha(1)}^{(1)}, f_{\beta(1)}^{(1)}, \ldots, f_{\lambda(1)}^{(1)},$ so bezeichne $f_{\alpha(2)}^{(2)}$ die erste nicht in dieser Weise durch lineare Combination entstehende Form jener Reihe; desgleichen sei $f_{\beta(2)}^{(2)}$ die erste nicht durch $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha(1)}^{(1)}, f_{\beta(1)}^{(1)}, \ldots,$ $f_{\lambda(1)}^{(1)}, f_{\alpha(2)}^{(2)}$ linear darstellbare Form in derselben Reihe. Das in dieser Weise eingeleitete Verfahren muß wiederum nach einer endlichen Anzahl von Wiederholungen abbrechen, vorausgesetzt, daß unser Theorem VI für den Fall von $n-1$ Veränderlichen richtig ist. Bezeichnet demgemäß $f_{\lambda(2)}^{(2)}$ die letzte durch jenes Verfahren sich ergebende Form, so wird stets

$$f_s^{(2)} = l_s^{(2)}(f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha(1)}^{(1)}, f_{\beta(1)}^{(1)}, \ldots, f_{\lambda(1)}^{(1)}, f_{\alpha(2)}^{(2)}, f_{\beta(2)}^{(2)}, \ldots, f_{\lambda(2)}^{(2)}), \quad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

wo $l_s^{(2)}$ eine lineare homogene Funktion bedeutet, deren Coefficienten selber ganzzahlige Formen von $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ sind. Setzen wir daher

$$F_s^{(3)} = F_s^{(2)} - l_s^{(2)}(x_n^2 F_\alpha, x_n^2 F_\beta, \ldots, x_n^2 F_\lambda, x_n F_{\alpha(1)}^{(1)}, x_n F_{\beta(1)}^{(1)}, \ldots, x_n F_{\lambda(1)}^{(1)}, F_{\alpha(2)}^{(2)}, F_{\beta(2)}^{(2)}, \ldots, F_{\lambda(2)}^{(2)}), \quad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

so besitzen die so entstehenden Formen $F_s^{(3)}$ sämmtlich den Faktor x_n^3. Wir bezeichnen wiederum allgemein mit $x_n^3 f_s^{(3)}$ diejenigen Glieder der Form $F_s^{(3)}$, welche mit keiner höheren als der dritten Potenz von x_n multiplicirt sind und gelangen so zu einer Formenreihe $f_1^{(3)}, f_2^{(3)}, f_3^{(3)}, \ldots$, welche in entsprechender Weise einer weiterer Behandlung zu unterwerfen ist. Es ist klar, wie die fortgesetzte Wiederholung des angegebenen Verfahrens zu der folgenden Formenreihe führt

$$f_{\alpha(\pi)}^{(\pi)}, f_{\beta(\pi)}^{(\pi)}, \ldots, f_{\lambda(\pi)}^{(\pi)}, f_{\alpha(\tau)}^{(\tau)}, f_{\beta(\tau)}^{(\tau)}, \ldots, f_{\lambda(\tau)}^{(\tau)}, \ldots, \ldots$$

wo $\pi, \tau, \ldots$ gewisse ganze positive Zahlen bedeuten und keine der auftretenden Formen einer linearen Combination der vorhergehenden Formen gleich ist. In Folge des letzteren Umstandes muß auch jene Reihe im Endlichen abbrechen, vorausgesetzt, daß unser Theorem VI für den Fall von $n-1$ Veränderlichen richtig ist. Wir bezeichnen die letzte Form jener Reihe mit $f_{\lambda(\omega)}^{(\omega)}$ und zeigen nun, daß jede Form in der ursprünglich vorgelegten Formenreihe $F_1, F_2, F_3, \ldots$ einer linearen Combination der Formen

$$F_{\alpha(\pi)}^{(\pi)}, F_{\beta(\pi)}^{(\pi)}, \ldots, F_{\lambda(\pi)}^{(\pi)}, F_{\alpha(\tau)}^{(\tau)}, F_{\beta(\tau)}^{(\tau)}, \ldots, F_{\lambda(\tau)}^{(\tau)}, F_{\alpha(\omega)}^{(\omega)}, F_{\beta(\omega)}^{(\omega)}, \ldots, F_{\lambda(\omega)}^{(\omega)}$$

gleich wird. Ist nämlich F_s irgend eine Form der ursprünglich vorgelegten Formenreihe und r die Ordnung dieser Form in Bezug auf die Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so betrachten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} F_s^{(r+1)} &= F_s^{(r)} - l_s^{(r)}, \\ F_s^{(r)} &= F_s^{(r-1)} - l_s^{(r-1)}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ F_s^{(1)} &= F_s - l_s, \end{aligned}$$

wo $l_s^{(r)}, l_s^{(r-1)}, \ldots, l_s$ lineare Combinationen der eben vorhin angegebenen Formen sind. Da ferner die Form $F_s^{(r+1)}$ die Ordnung r besitzt und in Folge ihrer Bildungsweise durch x_n^{r+1} teilbar ist, so ist sie notwendig identisch gleich Null und aus den obigen Gleichungen folgt, daß auch F_s eine lineare Combination der vorhin angegebenen Formen ist. Diese Formen ihrerseits sind aus den Formen

$$F_{\alpha(\pi)}, F_{\beta(\pi)}, \ldots, F_{\lambda(\pi)}, F_{\alpha(\tau)}, F_{\beta(\tau)}, \ldots, F_{\lambda(\tau)}, \ldots, F_{\alpha(\omega)}, F_{\beta(\omega)}, \ldots, F_{\lambda(\omega)}$$

durch lineare Combination entstanden und es ist daher offenbar $m = \lambda^{(\omega)}$ eine Zahl von der Beschaffenheit, wie sie unser Theorem VI verlangt. Das Theorem VI ist mithin für n Veränderliche bewiesen, unter der Voraussetzung, daß dasselbe für $n-1$ Veränderliche gilt. Es ist nun leicht, sich von der Richtigkeit des Theorems für den Fall einer Veränderlichen zu überzeugen, da in diesem Falle jede Form nur aus einem einzigen Gliede besteht und demgemäß auch die vorgelegte Formenreihe eine sehr einfache Behandlung zuläßt.

Auf Grund des eben bewiesenen Theoremes läßt sich, wie in der ersten Note gezeigt worden ist, der Nachweis führen, daß die Invarianten eines beliebigen Systems von Grundformen mit beliebig vielen Veränderlichen jederzeit ganze und rationale Funktionen einer endlichen Anzahl derselben sind. Für binäre Grundformen läßt sich dieser Beweis in eine besonders einfache Fassung bringen, wenn man sich des folgenden in der Inauguraldissertation [1]) des Verfassers bewiesenen Satzes bedient:

Jede homogene und isobare Funktion der Coefficienten einer binären Form

$$a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots + a_n x_2^n$$

vom Grade g in den Coefficienten $a_0, a_1, \dots, a_n$ und vom Gewichte $p = \frac{ng}{2}$ geht nach Anwendung des Operationssymbols

$$\begin{aligned}[\,] &= 1 - \frac{\Delta D}{1!2!} + \frac{\Delta^2 D^2}{2!3!} - \frac{\Delta^3 D^3}{3!4!} + \dots \\ &= 1 - \frac{D\Delta}{1!2!} + \frac{D^2\Delta^2}{2!3!} - \frac{D^3\Delta^3}{3!4!} + \dots,\end{aligned}$$

worin

$$\begin{aligned} D &= a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} + \dots \\ \Delta &= n a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + (n-1) a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + (n-2) a_3 \frac{\partial}{\partial a_2} + \dots \end{aligned}$$

zu setzen ist, in eine Invariante jener Grundform über.

Denken wir uns nun nach irgend einer Regel die Invarianten der Grundform in eine unendliche Reihe $i_1, i_2, i_3, \dots$ geordnet, so lehrt Theorem VI, daß eine jede Invariante sich durch eine

1) Ueber die invarianten Eigenschaften spezieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunktionen. Königsberg i. Pr. 1885, sowie Mathematische Annalen Bd. 30.

endliche Zahl m derselben in der Gestalt

$$i = A_1 i_1 + A_2 i_2 + \ldots + A_m i_m$$

ausdrücken läßt, wo A_1, A_2, . . ., A_m ganze homogene Funktionen der Coefficienten a_0, a_1, . . ., a_n sind. Wir beachten ferner, daß jede Invariante durch Anwendung der Symbole D und Δ identisch zu Null gemacht wird und erhalten dann aus der obigen Gleichung

$$[i] = [A_1 i_1] + [A_2 i_2] + \ldots + [A_m i_m]$$

oder

$$\begin{aligned} i &= [A_1] i_1 + [A_2] i_2 + \ldots + [A_m] i_m \\ &= \;\; J_1 i_1 + \;\; J_2 i_2 + \ldots + \;\; J_m i_m, \end{aligned}$$

wo J_1, J_2, . . ., J_m wiederum Invarianten der Grundform sind. Indem wir diese Invarianten derselben Behandlung unterwerfen, wie vorhin die Invariante i, erhalten wir schließlich eine ganze und rationale Darstellung der Invariante i mit Hilfe der m Invarianten i_1, i_2, . . ., i_m.

Dieselbe Schlußweise ist für ein System von beliebig vielen binären Grundformen gestattet. Handelt es sich jedoch um Formen mit mehr Veränderlichen oder Veränderlichenreihen, welche theilweise verschiedenen linearen Transformationen unterliegen, so ist das eingeschlagene Verfahren nicht anwendbar, weil bisher diejenigen Sätze noch nicht bekannt sind, welche in der Invariantentheorie der Formen mit mehr Veränderlichen dem vorhin für das binäre Formengebiet ausgesprochenen Satze entsprechen. Dagegen führt das in der ersten Note auseinandergesetzte Verfahren auch im Gebiete der Formen von beliebig vielen Veränderlichen zu dem gewünschten Beweise der Endlichkeit des vollen Formensystems.

In den bisherigen Untersuchungen legten wir den von Cayley eingeführten Invariantenbegriff zu Grunde, indem wir lediglich diejenigen ganzen homogenen Funktionen der Coefficienten der Grundformen betrachteten, welche gegenüber jeder beliebigen linearen Transformation der Variablen die Invarianteneigenschaft besitzen. Es hat jedoch seitdem der Begriff der Invariante eine wesentliche Ausbildung und Erweiterung durch die Arbeiten von F. Klein[1]) und S. Lie[2]) erfahren. Um zu diesem allgemeinen Begriff der Invariante zu gelangen, wählen wir eine bestimmte

1) Vergl. die Programmschrift: »Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.« Erlangen 1872.

2) Vergl. die Vorrede des Werkes: »Theorie der Transformationsgruppen.« Leipzig 1888.

Untergruppe der allgemeinen Gruppe der linearen Transformationen aus und betrachten diejenigen ganzen homogenen Funktionen der Coefficienten der Grundformen, denen nur mit Rücksicht auf die Substitutionen der gewählten Untergruppe die Invarianteneigenschaft zukommt. Es entsteht nun die Frage, ob unsere früheren Entwickelungen auch auf diese Invarianten sich übertragen lassen und insbesondere zum Nachweis der Existenz eines endlichen Invariantensystems ausreichend sind. Denn obwohl unter den einer bestimmten Untergruppe zugehörigen Invarianten offenbar alle Invarianten im früheren Sinne enthalten sind, so folgt doch aus unseren bisherigen Sätzen über die Endlichkeit der vollen Invariantensysteme noch nicht, daß auch unter den Invarianten im erweiterten Sinne sich jederzeit eine endliche Zahl auswählen läßt, durch welche jede andere Invariante der nämlichen Art ganz und rational ausgedrückt werden kann. Es zeigt sich nun in der That, daß unsere Schlußweise sich auf gewisse und zwar besonders interessante Substitutionengruppen ohne Schwierigkeit übertragen läßt. Sind nämlich die unsere Substitutionengruppe bestimmenden Substitutionscoefficienten ganze und rationale Funktionen einer beschränkten Anzahl von Parametern, so kann der Umstand eintreten, daß durch Zusammensetzung zweier beliebigen Substitutionen der Gruppe eine Substitution entsteht, deren Parameter bilineare Funktionen der Parameter der beiden ursprünglich ausgewählten Substitutionen sind und daß es zugleich einen Differentiationsproceß giebt, welcher sich in entsprechender Weise zur Erzeugung der zur vorgelegten Gruppe gehörigen Invarianten verwenden läßt, wie der Differentiationsproceß Δ[1]) im Falle der zur allgemeinen linearen Gruppe gehörigen Invarianten. Für solche Substitutionengruppen ergiebt sich stets durch unser Schlußverfahren die Endlichkeit des zur Gruppe gehörigen Invariantensystems. Als Beispiel diene die Gruppe aller eine bestimmte quadratische quaternäre Form in sich überführenden linearen Substitutionen, sowie die Gruppe derjenigen linearen Substitutionen im Raume, bei denen eine bestimmte Raumcurve dritter Ordnung ungeändert bleibt.

Im Vorstehenden haben wir den bereits in Theorem I und II der ersten Note dargelegten und in Theorem VI von neuem zum Ausdruck gebrachten Gesichtspunkt für die Theorie der algebraischen Invarianten verwerthet. In der zweiten Note ist gezeigt worden, daß jenes Princip nicht ausschließlich auf invariantentheoretische Anwendungen beschränkt ist, sondern ebensosehr in der

1) Vergl. S. 453 in der ersten Note: »Zur Theorie der algebraischen Gebilde«.

Theorie der Modulsysteme sich als fruchtbar erweist. Bei diesen allgemeineren Untersuchungen dient nothwendigerweise das Theorem V der zweiten Note als Grundlage.

Ist ein beliebiges Modulsystem $(M_1, M_2, \ldots, M_m)$ vorgelegt, wo $M_1, M_2, \ldots, M_m$ homogene Formen der n Veränderlichen bedeuten und bezeichnen wir allgemein mit c_ξ die Zahl aller derjenigen Formen von der Ordnung ξ, aus denen sich in linearer Weise mit Hülfe constanter Multiplikatoren keine nach dem Modulsystem $(M_1, M_2, \ldots, M_m)$ der Null congruente Form der nämlichen Ordnung ξ zusammensetzen läßt, so ist die unendliche Zahlenreihe $c_1, c_2, c_3, \ldots$ von einem gewissen Elemente an eine arithmetische Reihe von der Ordnung ν, wo ν eine dem Modulsystem charakteristische Constante bezeichnet. Es folgt diese Thatsache aus dem Umstande, daß gemäß der Bedeutung der in der zweiten Note eingeführten charakteristischen Funktion $\chi(\xi)$ eines Modulsystems für genügend große Werthe von ξ jederzeit

$$c_\xi = \chi(\xi)$$

wird. Rechnen wir nun alle diejenigen Modulsysteme, für welche jene Zahlenreihen elementweise genau übereinstimmen, zu der nämlichen Klasse, so gilt für Modulsysteme mit zwei homogenen Veränderlichen x_1, x_2 der folgende Satz, dessen Beweis auf den in der zweiten Note mit Hülfe des Theorems V gewonnenen Resultaten beruht:

Wenn zwei binäre Modulsysteme der nämlichen Klasse angehören, so kann man stets von dem einen Modulsystem durch continuirliche Aenderung der Coefficienten der dasselbe bestimmenden Formen zu dem anderen Modulsysteme gelangen, so daß die Klasse der bei dem Uebergange entstehenden Modulsysteme fortdauernd dieselbe bleibt.

Dieser Satz enthält offenbar den Kern für eine auf Grund der dargelegten Principien zu entwickelnden Theorie der binären Modulsysteme.

Königsberg, den 30. Juni 1889.

Kurze Mittheilungen zur Indischen Chronologie.

Von

F. Kielhorn.

1. — Das Âshâḍhâdi Vikrama Jahr.

Auf Seite 79 seiner Einleitung zum dritten Bande des *Corpus Inscriptionum Indicarum* erwähnt Herr Fleet, daß im westlichen Kâṭhiâwâḍ ein Jahr gebräuchlich sei, welches mit der hellen Hälfte des dem Monate Kârttika des gewöhnlichen Vikrama-Jahres vorausgehenden Monates Âshâḍha anfange. Dies Jahr heiße, weil es der Hâlâr Unterabtheilung von Kâṭhiâwâḍ angehöre, das Hâlârî Jahr. Ob dasselbe mit dem *amânta* oder dem *pûrṇimânta* Schema des Monates zu verbinden sei, sei unbekannt[1]).

Die folgenden Daten zeigen, daß dies *Âshâḍhâdi* Jahr schon im 16. und 17. Jahrhunderte der Vikrama Aera in einem Theile des westlichen Indiens im Gebrauche war. Die Berechnung derselben beweist, daß das über den Anfang des Jahres Bemerkte richtig ist; und zeigt außerdem, daß das Schema des lunaren Monates dieses Jahres das *amânta* Schema des sogenannten südlichen Vikrama Jahres ist. Um hierüber keinen Zweifel zu lassen, gebe ich für jedes der vier Daten alle möglichen europäischen Aequivalente, und mache das Datum unseres Kalenders, welches die Bedingungen des indischen Datums erfüllt und somit das wahre Aequivalent desselben ist, durch gesperrten Druck kenntlich. Wenn das *Âshâḍhâdi* Jahr wirklich mit dem dem Anfange des südlichen (*Kârttikâdi*) Jahres vorausgehenden oder dem Anfange des nördlichen (*Chaitrâdi*) Jahres folgenden Monate Âshâḍha anfängt, so muß sich das wahre Aequivalent eines Datums aus den vier Monaten Âshâḍha, Çrâvaṇa, Bhâdrapada, und Âçvina durch die Berechnung des Datums für dasselbe nördliche Vikrama Jahr, das wahre Aequivalent eines Datums aus den drei Monaten Chaitra, Vaiçâkha und Jyaishṭha durch die Berechnung des Datums für dasselbe südliche Vikrama Jahr ergeben, während ein Datum aus den fünf Monaten Kârttika — Phâlguna allen drei Jahren gemeinsam sein muß. Zu erwarten ist ferner, daß die Inder auch beim *Âshâḍhâdi* Jahre das abgelaufene (nicht in europäischer Weise das laufende) Jahr im Datum angegeben haben werden.

---

1) Man vergleiche jetzt *Ind. Antiquary*, 1889, S. 93.

1. — Nach Professor Aufrechts *Catal. Cod. MSS. Bibl. Bodl.*, Seite 348[b], trägt eine Handschrift des *Prabhâsakshêtratîrtha-yâtrânukrama* das Datum —

> Saṁvat 15 Âshâḍhâdi 34 varashê [1]) Çrâvaṇa-çudi 5 Bhû-(bhau)mê ad[y*] = êha çrî-Kadanapurê sthânê pâtasâha-srî-(çrî)-Mahimûda-vijayarâjyê, —

d. i., am 5. der hellen Hälfte des Çrâvaṇa im *Âshâḍhâdi* (Vikrama) Jahre 1534, an einem Dienstage. Die Aequivalente für Çrâvaṇa-çudi 5 sind —

für das nördliche laufende V. Jahr 1534: Freitag, 26 Juli, 1476;
für das nördliche verflossene (oder südliche laufende) V. Jahr 1534: Dienstag, 15 Juli, 1477;
für das südliche verflossene V. Jahr 1534, in dem Çrâvaṇa ein Schaltmonat war: entweder Sonnabend, 4 Juli, 1478;
oder Montag, 3 August, 1478.

2. — Eine Inschrift von Aḍâlij bei Ahmadâbâd, in *Archaeol. Survey of W. India, List of Antiquarian Remains in the Bombay Presidency*, Seite 265, enthält (Zeile 21—24) das Datum —

> Svasti çrîman-nṛipa-Vikrama-samayâtîtâ (!) Âshâḍhâdi-saṁvat 1555 varshê çâka 1420 pravartamânê . . . . Mâgha-mâsê çukla-pakshê paṁchamyâṁ tithau Budha-vâsarê Uttarâbhadrapada-nakshatrê Siddhi(!)-nâmni yôgê Bava-karaṇê . . . ., —

d. i., am fünften lunaren Tage der hellen Hälfte des Monates Mâgha, im *Âshâḍhâdi* (Vikrama) Jahre 1555, oder dem Çaka Jahre 1420, an einem Mittwoch, unter dem *nakshatra* Uttarâ Bhadrapadâ, dem *yôga* Siddhi (!), und dem *karaṇa* Bava. Hier sind die Aequivalente für Mâgha-çudi 5 —

für das (nördliche oder südliche) laufende V. Jahr 1555: Sonnabend, 27 Januar, 1498; und
für das (nördliche oder südliche) verflossene V. Jahr 1555: Mittwoch, 16 Januar, 1499; an diesem Tage endete die fünfte *tithi* der hellen Hälfte $17^h\,34^m$, und das *karaṇa* Bava etwa 6^h, und das *nakshatra* war Uttarâ Bhadrapadâ bis $11^h\,10^m$, und der *yôga* Siddha (!) bis $18^h\,24^m$ nach mittlerem Sonnenaufgange.

(Die Berechnung zeigt, daß das Wort *pravartamânê* des Datums nicht gleichbedeutend mit unserem „laufend", und daß für *Siddhinâmni Siddha-nâmni* zu schreiben ist.)

1) Lies *varshê.*

3. — Professor Webers *Verzeichniß der Sanskṛit HSS. der Berliner Bibliothek*, Band I, Seite 69, gibt das Datum einer Handschrift des *Pañchaviṁçabrâhmaṇa* —

Svasti saṁvat Âshâḍhâdi 83 varshê Vaiçâsha(kha)-sita-dvitîyâ[yâ*]ṁ Bhûmi-tanayê.

Vergleicht man dies Datum mit dem oben unter 1. gegebenen, so ersieht man, daß der Schreiber hinter dem Worte *saṁvat* die Zahl für die Jahrhunderte ausgelassen hat. Und da nach einer brieflichen Mittheilung Professor Webers die betreffende Handschrift etwa 300 Jahre alt ist, so hege ich keinen Zweifel, daß die für die Jahrhunderte zu ergänzende Zahl 15 ist, und daß der Schreiber demgemäß sein Werk beendigte —

am zweiten lunaren Tage der hellen Hälfte des Monates Vaiçâkha, im *Âshâḍhâdi* (Vikrama) Jahre 1583, an einem Dienstage.

Für Vaiçâkha-çudi 2 sind die Aequivalente —

für das nördliche laufende V.Jahr 1583: Montag, 24 April, 1525;

für das nördliche verflossene (oder südliche laufende) V.Jahr 1583: Freitag, 13 April, 1526;

für das südliche verflossene V.Jahr 1583: Dienstag, 2 April, 1527.

4. — Auf Seite VII der Notes, Additions, and Corrections zu seinem *Report on Sanskṛit MSS.* für 1883/84 gibt Professor Bhâṇḍârkar das Datum einer Handschrift eines Commentars zu den *Çôbhana-stutayaḥ*, wie folgt: —

Saṁvat 16 Âshâḍha vadi 99 varshê Phâlguna-vadi 11 tithau Sôma-dinê.

Hier geben die Worte *Âshâḍha vadi* natürlich keinen Sinn; und wer das Datum mit den obigen Daten vergleicht, wird zugeben, daß der Schreiber *Âshâḍhâdi* schreiben wollte oder, was wahrscheinlicher ist, wirklich geschrieben hat. Die Handschrift wurde also beendigt —

am elften lunaren Tage der dunklen Hälfte des Monates Phâlguna, im *Âshâḍhâdi* (Vikrama) Jahre 1699, an einem Montage.

Und hier sind die Aequivalente für Phâlguna-vadi 11 —

für das (nördliche oder südliche) laufende V. Jahr 1699, —

pûrṇimânta: Dienstag, 15 Februar, 1642;

amânta : Mittwoch, 16 März, 1642.

für das (nördliche oder südliche) verflossene V. Jahr 1699, —

pûrṇimânta: Sonntag, 5 Februar, 1643;

amânta : Montag, 6 März, 1643.

Mit der eigenthümlichen Weise, in welcher in drei der obigen Daten die Zahl für die Jahrhunderte von der Zahl für das Jahr innerhalb des Jahrhunderts getrennt ist, vergleiche man den Eingang des Datums einer Hds. der *Prakriyâ-kaumudî* in Eggelings *Catalogue of the Skr. MSS. I. O.*, Seite 166: saṁvat pañchadaça 15 açîtau 80 pravarttamânê „im (Vikrama) Jahre funfzehn-achtzig (1580)".

2. — Çaka in der Bedeutung »Jahr« (= varsha).

Kein Lexicon gibt für *çaka* die Bedeutung „Jahr" (= *varsha*); und doch beweisen eine Anzahl von Daten, daß das Wort wenigstens seit dem Anfange des 13. Jahrhunderts gelegentlich auch in diesem Sinne gebraucht worden ist.

1. — Eine zuerst von Dr. F. E. Hall im *Jour. Beng. As. Soc.*, Band XXVIII, Seite 2, herausgegebene und später in *Archaeol. Survey of Western India,* No. 10, Seite 111, wieder abgedruckte Inschrift von Harsaudâ (oder Chârwâ) enthält das Datum —

(Z. 4). — Saṁvat paṁchasaptaty - adhika - dvâdaçaçatê = ṁkê 1275 Mârgga-sudi 5 Sa(ça)nau ...; und

(Z. 7). — Adhikê paṁchasaptatyâ dvâdaç-âvda(bda)-çatê çakê vatsarê Chitrabhânau tu Mârggaçîrshê çi(si)tê dalê ‖ 4 ‖ paṁchamy-aṁtaka-[saṁ]yôgê nakshatrê Vishṇudaivatê | yôgê Harshaṇa-saṁjñê tu tithy-arddhê Dhâtṛi-daivatê ‖ 5 ‖;

d. i., um mich kurz zu fassen, im Jahre 1275, in (Jupiters) Jahre Chitrabhânu, am 5. der hellen Hälfte des Monates Mârgaçîrsha, an einem Sonnabende, unter dem *nakshatra* Çravaṇa, dem *yôga* Harshaṇa, und während des *karaṇa* Balava.

Dr. Hall hat das Wort *çakê* in Z. 7 im Sinne von „im Jahre der Çaka Aera" gefaßt, und demgemäß den in der Inschrift genannten Dêvapâla in das Jahr 1353 n. Ch. versetzt. Aber weder ergibt sich für Mârga-sudi 5 des laufenden oder verflossenen Çaka-Jahres 1275 ein Sonnabend, noch kann eines dieser beiden Jahre auf irgend eine Weise mit dem Cyclus-Jahre Chitrabhânu verbunden werden. Nehmen wir dagegen *çakê* als gleichbedeutend mit *varshê* „im Jahre", und beziehn das Datum auf die Vikrama Aera, so erhalten wir für 1275 Mârga-sudi 5 ein Aequivalent, welches alle im Datum enthaltenen Bedingungen erfüllt. Denn dem Tage Mârga-sudi 5 des verflossenen Vikrama Jahres 1275 entspricht Sonnabend, 24 November, 1218, mit dem *nakshatra* Çravaṇa und *yôga* Harshaṇa; und der Anfang des solaren Jahres, welches dem verflossenen Vikrama Jahre 1275 entspricht, fiel sowohl nach der Sûrya-Siddhânta wie nach der Jyôtistattva Regel in das Cyclus-Jahr Chitrabhânu[1]).

2. — Nach Professor Eggelings *Catalogue of the Skr. MSS. I. O.*, Seite 23, trägt eine Handschrift des *Kâṇḍânukramaṇikâ-vivaraṇa* das Datum —

Saṁvat 1650 çakê | Çubhakṛit-saṁvatsarê Bhâdrapada-sudi-paurṇamâsyâṁ Bhṛigu-vâsarê, —

d. i., im Jahre 1650, in (Jupiters) Jahre Çubhakṛit, am Vollmondstage in der hellen Hälfte des Monates Bhâdrapada, an einem Freitage.

Auch hier entspricht das Wort *çakê* dem gewöhnlichen *varshê*, und das entsprechende Datum (für das verflossene nördliche *Vikrama* Jahr 1650) ist Freitag, 31 August, 1593, ein Tag des Cyclus-Jahres Çubhakṛit, welches dauerte, —

nach der Sûrya-S. Regel, ohne Bîja, vom 19 März 1593 bis 15 März 1594;

nach der Sûrya-S. Regel, mit Bîja, vom 26 April 1593 bis 22 April 1594;

nach der Jyôtistattva Regel, vom 4 März 1593 bis 28 Februar 1594.

3. — Die im *Indian Antiquary*, Band IX, Seite 193, veröffentlichte Inschrift der Königin Lalitatripurasundarî enthält eine Anzahl von Daten, die alle, was ich nicht zu beweisen brauche, der Vikrama Aera angehören. In dieser Inschrift lesen wir, z. B., Seite 193, Z. 5 v. u., und Seite 194, Z. 6 v. o., *tasminn = êva çakê* „in demselben Jahre“; Seite 193, Z. 4 v. u., *bâṇa-svara-nâga-bhû-mitê 1875 çakê* „im (Vikrama) Jahre 1875“; und ähnlich Z. 6 v. u., *Vaikramê çâkê* „im Vikrama Jahre“, ein Ausdruck, der sich, ebenso wie *Vikramâditya-çâkê*, auch anderweitig nachweisen läßt.

Das Wort *çakê* in einem Datum beweist also nicht mit Nothwendigkeit, daß das Datum der Çaka Aera angehört. Eine andre Frage ist die von Professor Bhâṇḍârkar in seinem Report für 1883/84, S. 148, besprochene, ob in Daten der letzten Jahrhunderte das vor der Jahreszahl stehende *saṁvat* auch für *çaka-saṁvat* „im Jahre der Çaka Aera“ stehn könne. Professor Bhâṇḍârkar verneint diese Frage; und da bei der zwischen ihm und Professor Bühler geführten Discussion das Datum einer von mir benutzten

---

1) Seit ich Obiges schrieb, sind mir zwei andre noch nicht veröffentlichte Inschriften desselben Dêvapâla, aus den Vikramajahren 1286 und 1289, bekannt geworden.

Handschrift des Mahâbhâshya als Beweis für das Gegentheil angeführt worden ist, theile ich hier mit, daß *dies* Datum der Rechnung nach ein Vikrama-Datum sein muß (Saṁvat 1513 varshê Paushê mâsi sitê pakshê navamyâṁ tithau Saumyê = Mittwoch, 17 December, 1455).

3. — Çu.ti. und Va.ti.

Bekannt sind *çu.di.* oder *su.di.* und *ba.di.* oder *va.di.*, die, ursprünglich Abkürzungen, später (in der Form *çudi* oder *sudi*, und *badi* oder *vadi*) als nicht declinierbare selbstständige Wörter im Sinne von *çukla-pakshê* und *kṛishṇa-pakshê* verwendet und sowohl für sich wie in Zusammensetzungen mit vorhergehenden und folgenden Wörtern gebraucht werden. Weit seltener und bis jetzt unbeachtet geblieben sind die Bezeichnungen *çu.ti.* und *va.ti.* oder *çuti* und *vati*, in denen an die Stelle des *di* (für *divasa* oder *dina*) *ti* (für *tithi*) getreten ist. Diese Ausdrücke scheinen im Norden Indiens und besonders in Kaçmîr gebräuchlich zu sein. Als Beispiele gebe ich folgende Daten: —

1. — In den Inschriften des Vîsaladêva auf einer Säule zu Delhi, von welchen ich der Güte des Herrn Fleet Abdrücke verdanke, lesen wir, —

A., Z. 1: Saṁvat 1220 Vaiçâkha çu.ti. 15; und
C., Z. 5: Saṁvat çrî-Vikramâdityê 1220 Vaiçâkha çu.ti. 15 Gurau.

2. — Die Kaçmîr Handschriften der *Kâçikâ-vṛitti* und der *Çakuntalâ* des Deccan College, die ich selbst verglichen habe, wurden beendigt, die erstere —

Çrî-nṛipa-Vikramâditya-râjyasya gat-âbdaḥ 1717 çrî-Saptarshi-matê saṁvat 36 Pau. va.ti. 3 Ravau Tishya-nakshatrê;

und die zweite —

Saṁvat 33 Vai. çu.ti. saptamyâṁ.

3. — In *Z.D.M.G.*, Band XL, Seite 9, berichtet Dr. Hultzsch, daß eine Grabschrift in Çârada Charakteren auf dem Kirchhofe bei Hariparvat datiert ist —

Saṁ 60 Çrâ. va.ti pra. Çakrê | Mahammada-çâha-râjyê || ;

und daß eine Handschrift seiner Sammlung beendigt wurde —

Saṁvat 24 Kârtika va.ti. trayôdaçyâṁ Budhê || Çrî-Çâkaḥ 1570 || .

4. — Nach Professor Bühlers *Kaçmîr Report*, App. II, Seite LV, trägt eine Handschrift des *Chârâyaṇîya-mantra-bhâshya* das Datum —

Saṁvat 47 Srâ (çrâ). va.ti. pañchadaçyâṁ (?) parataḥ shashṭhyâṁ.

Endlich werden *çu. ti.* und *va. ti.* durchgängig in einem Kalender gebraucht, den ich unten erwähnen werde.

4. — Das Saptarshi- oder Çâstra-Jahr; und die Daten der Chambâ Kupferplatte des Sômavarmadêva und Âsaṭadêva.

Sir A. Cunningham hat in seinem *Book of Indian Eras*, Seite 6—17, von der Saptarshi-Aera ausführlich gehandelt. Derselbe theilt in *Archaeol. Survey of India*, Band XXI, Seite 136, mit, daß die Jahre dieser Aera auch *çâstri-saṁvatsara* heißen. Die dort erwähnte Chambâ Kupferplatte, von der ich gleichfalls Herrn Fleet Abdrücke verdanke, zeigt indessen, daß der wirkliche Name des Jahres *çâstra-saṁvatsara* ist, denn wir lesen in ihr —

Z. 1. — çrîmad-Vikramâ[rka?]-saṁvatsarê 191[5] çrî-çâstra-saṁvatsarê 34;

Z. 7. — çrîmad-Vikramâditya-saṁvatsarê 1917 çâstra-saṁvatsarê 36;

Z. 8. — Vikramâditya-saṁvat 1915 çrî-çâstra-saṁvat 34;

Z. 18. — Vikramâditya-saṁvat 1917 çâstra-saṁvat 36.

Ein in der Königlichen Bibliothek zu Berlin befindlicher Kalender, der entweder im nördlichen Indien oder in Kaçmîr geschrieben ist, und für die Zeit von Mittwoch, 13. März, 1793, (= Chaitra-çuti 1), bis Montag, 31. März, 1794, (= Chaitra-vati 15), gilt, beschreibt in den einleitenden Bemerkungen das Jahr für welches er bestimmt war, wie folgt:

Çrî-Saptarshichârânumatêna saṁvat 4869, tathâ cha saṁvat 69, . . . çrî-Çâkâḥ 1715, . . . çrî-Vikramâditya-saṁvat 1850, . . . Kalêr = gata-varshâṇi 4894.

Da die hier angegebenen Jahre der Çaka- und Vikrama-Aeren und der Aera des Kaliyuga verflossene Jahre sind, die Zahlen für die Saptarshi-Jahre aber aller Wahrscheinlichkeit nach laufende Jahre bezeichnen, so muß die Saptarshi-Aera angefangen haben als 26 Jahre des Kali-yuga verflossen waren. Dies würde mit dem von Professor Bhâṇḍârkar in seinem Report für 1883/84, Seite 84, gewonnenen Resultate übereinstimmen. Auf jeden Fall aber muß ein Jahr 0 oder 100 der Saptarshi Aera einem laufenden Jahre 82 der Vikrama Aera, einem laufenden Jahre 47 der Çaka Aera, und einem Jahre 24(—25) der christlichen Zeitrechnung entsprechen. Und dies wird durch die Berechnung der Daten, die mir zur Hand sind, bestätigt.

1. — Wie oben erwähnt, wurde die Kaçmîr Handschrift der *Kâçikâ-vṛitti* des Deccan College beendigt —

Çrî-nṛipa-Vikramâditya-râjyasya gat-âbdaḥ 1717 çrî-Saptarshi-matê 36 Pau. va.ti. 3 Ravau Tishya-nakshatrê;

das entsprechende Datum, für das laufende Vikrama Jahr 1718 und den *pûrṇimânta* Monat, ist Sonntag, 9 December, 1660, mit dem *nakshatra* Tishya bis $17^h 44^m$ nach mittlerem Sonnenaufgange.

2. — Die Kaçmîr Handschrift der *Kâtantra-vṛitti bâlabôdhinî* des Deccan College enthält das Datum —

Çrî-Çâkaḥ 1591 saṁvatsaraḥ 45 Bhâdrapada-mâsaḥ pakshas = sitêtaraḥ tithir = dvâdaçî vârô(raḥ) Kâvyasy = êti;

das entsprechende Datum, für das laufende Çaka Jahr 1592 = Vikrama 1727 und den *pûrṇimânta* Monat, ist Freitag, 13 August, 1669.

3. — Das schon oben erwähnte Datum einer Handschrift des Dr. Hultzsch ist —

Saṁvat 24 Kârtika va.ti. trayôdaçyâṁ Budhê ‖ Çrî-Çâkaḥ 1570 ‖;

das entsprechende Datum, für das laufende Çaka Jahr 1571 = Vikrama 1706 und ebenfalls den *pûrṇimânta* Monat, ist Mittwoch, 4 October, 1648.

Schwierigkeit macht oft das Jahrhundert, für welches die Rechnung zu machen ist, weil es gewöhnlich durch außerhalb des Datums liegende Umstände bestimmt werden muß. Ich habe schon oben das Datum einer Grabschrift mitgetheilt, welches lautet —

Saṁ 60 Çrâ. va.ti. pra. Çukrê | Mahammada-çâha-râjyê ‖,

d. i., im Jahre 60, am ersten lunaren Tage der dunklen Hälfte des Monates Çrâvaṇa, an einem Freitage, unter der Regierung des Muhammad Shâh. — Muhammad Shâh soll, wie Dr. Hultzsch angibt, von 1487 bis 1537 regiert haben. Nehmen wir an, daß er um 1500 n. Chr. lebte, so müßte sich das richtige Aequivalent für unser Datum durch die Berechnung desselben für 60 + 1424 = 1484 n. Chr. ergeben. Und dies ist in der That der Fall; denn im Jahre 1484 n. Chr. fiel der 1. der dunklen Hälfte des *pûrṇimânta* Çrâvaṇa auf den 9. Juli, einen Freitag. (Muhammad Shâh hat also sicher wenigstens drei Jahre *vor* 1487 regiert.)

Die Beschäftigung mit der Saptarshi Aera hat mir die Frage nahe gelegt, ob etwa auch die beiden Daten der von mir im *Indian Antiquary*, Band XVII, Seite 11—13 herausgegebenen Inschrift des Sômavarmadêva und Âsaṭadêva dieser Aera angehören könnten. Bei der Herausgabe der Inschrift habe ich die Jahre der Daten nach dem Vorgange Sir A. Cunninghams als Regierungsjahre des Âsaṭadêva betrachtet und demnach die Abfassung der Inschrift in die Mitte des 11. Jahrhunderts n. Ch. gesetzt; aber die Chronologie Kaçmîrs, welche dieser Annahme zu Grunde liegt, erscheint keineswegs derartig, daß wir uns in allen Einzelnheiten mit absoluter Sicherheit auf sie verlassen könnten. Leider ist der Wortlaut des zweiten Datums nicht ganz sicher, weil die Kupferplatte hier eine schadhafte Stelle hat; und was sich überhaupt über die Lesung der beiden Daten sagen läßt, ist etwa Folgendes:

Das erste Datum, in Z. 27, lautet —

Pravardhamâna - kalyâṇa - vijaya - râjyê çrîmad - Âsaṭadêvîyê saṁvatsarê prathamê Vaiçâkha - sita-[dvi]tîyâyâṁ Çukra-vârêṇa.

Das einzige in den Abdrücken etwas undeutliche *akshara* ist hier das erste *akshara* von *dvitîyâyâṁ*, dessen Consonanten vielleicht *tr* gelesen werden könnten. Da aber die Lesung *dv* ebenso gut möglich und der Vocal *i* ganz deutlich ist, so hege ich keinen Zweifel, daß wir *dvitîyâyâṁ* lesen müssen, und daß der Sinn der Worte demgemäß ist —

„während der siegreichen Regierung des Âsaṭadêva, im ersten Jahre, am zweiten lunaren Tage der hellen Hälfte des Monates Vaiçâkha, an einem Freitage".

Schwieriger ist das zweite Datum in Z. 30. Bei der Herausgabe der Inschrift habe ich es gegeben —

pa[ra?]-saṁvat 11 Bhâdrapada-[çubhr?]ê 12 [sa?] . . . .

Eine nochmalige Prüfung der Abdrücke zeigt mir, daß die Worte und Zahlen

saṁvat 11 Bhâdrapada . . 12,

wie ich sie gegeben, absolut sicher sind, und daß das auf *Bhâdrapada* folgende *akshara* wirklich *çu* ist und das auf die Zahl 12 folgende Wort unzweifelhaft mit dem Consonanten *s* anfing. Dagegen lese ich jetzt den Consonanten des auf *çu* folgenden *akshara t* (nicht *bhr*) und halte das darüber stehende Vocalzeichen für ein undeutlich geschriebenes *i* (nicht *ê*), lese also

pa[ra?]-saṁvat 11 Bhâdrapada çu.t[i]. 12 S . . . . .

Das letzte *S* muß der Anfang des Namens eines Wochentages sein; und da von den gewöhnlich gebrauchten Namen der Wochentage nur *Sôma-vâra* oder Montag mit *s* anfängt und Sir A. Cunningham, dem die Kupferplatte selbst vorgelegen zu haben scheint, in *Archaeol. Survey of India*, Band XXI, S. 136, wirklich *Sômê* gelesen hat, dürfen wir gewiß das ganze Datum mit einiger Sicherheit erklären durch —

„im folgenden Jahre 11, am 12. lunaren Tage der hellen Hälfte des Monates Bhâdrapada, an einem Montage“.

Daß die Inschrift aus dem 11. Jahrhunderte n. Ch. stammt, scheint sicher; und wenn die beiden Daten der Saptarshi Aera angehören sollten, so müßte das erste derselben nach dem, was oben über die Aera bemerkt ist, in das Jahr 1 + 1024 = 1025 n. Ch., und das zweite in 11 + 1024 = 1035 n. Ch. fallen. Und wirklich ergibt die Berechnung der Daten für diese beiden Jahre die erwünschten Wochentage. Denn in 1025 fiel Vaiçâkha-sudi 2 auf Freitag, den 2. April; und ebenso fiel in 1035 Bhâdrapada-sudi 12 auf Montag, den 18. August.

Diese Uebereinstimmung scheint mir mehr als ein Spiel des Zufalls; und ich hoffe, daß diese Zeilen die Beamten des Archaeol. Survey Indiens veranlassen werden, wenn irgend möglich, die Lesung des zweiten Datums durch eine nochmalige Einsicht der Kupferplatte selbst mit Sicherheit festzustellen. Eine eingehende Prüfung der Chronologie Kaçmîrs dürfen wir ohnehin von Dr. Hultzsch erwarten.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Juni 1889.

Königl. Sächs. Ges. d. Wissenschaften zu Leipzig. Abhandlungen der mathem.-phys. Classe. Bd. XV. N. 6.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begr. v. Ortmann. Bd. XVIII. Jahrg. 1886. Heft 3. Berlin 1889.

Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Jahrg. 24. Heft 2. Leipzig 1889.

Leopoldina. Heft XXV. N. 9—10.

Neues Lausitzisches Magazin. Bd. 65. Heft 1. Görlitz 1889.

Verhandlungen des Naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg. Neue Folge. Bd. IV. Heft 2. Heidelberg 1889.

Schriften der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig. Neue Folge. Bd. 7. Heft 2. Danzig 1889.

a. Verhandlungen der physikalisch-medizinischen Gesellschaft zu Würzburg. Neue Folge XXII. Bd. Würzburg 1889.

b. Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Gesellschaft zu Würzburg. Jahrg. 1888. Würzburg 1888.

Meteorologische Zeitschrift. Jahrg. 6. 1889. Heft 6. Juni. Wien 1889.
Königl. Ungarische Geologische Anstalt:
a. Jahresbericht für 1887.
b Mittheilungen aus dem Jahrbuch. Bd. VIII. Heft 7 u. 8.
c. Publicationen d. Kgl. Ung. Geol. Anst. Der Hollóhazaer Rhyolith-kaolin v. Ludw. Petrik.
d. Földtani Közlöny Kötet XIX. 1—3, 4—6. füzet. Budapest 1889.
Ungarische Revue. Jahrg. 9. 1889. Heft VI. Budapest 1889.
Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau 1889. Krakau 1889.
Schriften des Vereines zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien. Bd. XXVIII. Jahrg. 1887—88. Wien 1888.
Report of the exploring voyage of H. M. S. Challenger. Zoology. Vol. XXX. Plates. Vol. XXXI.
Nature. Vol. 40. N. 1022—1026.
Proceedings of the Royal society. Vol. XLV. N. 279.
Journal of the R. microscopical society. 1889. Part 3. June. London and Edinburgh.
Proceedings of the scientific meetings of the zoological society of London. 1888. Part IV. London 1889.
Monthly notices of the R. astronomical society. Vol. XLIX. N. 7. Mai 1889.
Proceedings of the canadian institute Toronto. Third series. Vol. VI. fasc. 2.
Annual report of the Canadian Institute. Session 1887—88. Toronto 1889.
Records of the geological survey of India. Vol. XXII. Part 2. 1889. Calcutta.
Transactions of the zoological society of London. Vol. XII. Part. 8. London 1889.
Anzeige der „Birds of New-Zealand by Sir Walter L. Buller".

Atti della R. Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXVI. 1889. Vol. V. fasc. 4°. 5°. Roma 1889.
Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XXIV. disp. 11ª, 12ª. 1888—1889. Torino.
Rendiconti del circolo matematico di Palermo. Tomo III. anno 1889. fasc. III.
Bollettino delle pubblicazioni italiane. Bibl. naz. centr. di Firenze 1889. N. 82, 83, 84.

Le moyen age. Année 2e. N. 3. 1889. Paris.
Bulletin de la société mathématique de France. Tome XVII. N. 2 et 3. Paris 1889.
Bulletin de l'Académie R. des sciences des lettres et des beaux arts de Belgique. Année 59. 3e série. Tome 17. N. 5. Bruxelles 1889.
Annales de l'école polytechnique de Delft. Tome IV. 1888. 4me livr. Leide 1888.
Bulletin de la société impr. des naturalistes de Moscou. Année 1888. N. 4. Moscou 1889.
Bulletin mensuel de l'observatoire météorologique de l'université d'Upsal. Vol. XX. Année 1888. Upsal. 1888—89.

Oversigt over det Koneglige Danske Videnskabernes Selskabs forhandlinger i Aaret 1888, N. 3, 1889, N. 1.
Mémoires de l'Acad. Roy. de Copenhague. 6me série.
1) Familien Podoste maceae. Classe des sciences. Vol. IV. N. 8.
2) Phratri-Beslutninger fra Dekeleia. Classe des lettres. Vol. II. N. 4.
3) Etikens teoretiske Grundlag. Classe des lettres. Vol. II. N. 5.

Regesta diplomatica historiae Danicae. Series secunda. Tomus I—VI. Ab anno 1522 ad 1536. Kopenhagen 1889.

Proceedings of the Boston society of natural history. Vol. XXIII. Part III. 1887. Boston 1887.

The Bulletin of Denison University. Vol. IV. Part 1 and 2. Granville, Ohio, 1888.

Bulletin of the Museum of comparative Zoology, at Harvard college. Whole series. Vol. XVI. N. 4. Cambridge 1889.

Proceedings of the Boston society of natural history. Vol. XXIII. Part IV. Dec. 1887—May 1888. Boston 1888.

The transactions of the academy of science of St. Louis. Vol. V. N. 1 and 2. 1886—88. St. Louis 1888.

Proceedings of the academy of natural sciences of Philadelphia. Part III. Okt. —Dec. 1888. Philadelphia 1888.

Joseph Henry and the magnetic telegraph. New York 1885.

Resultados del Observatorio nacional Argentino en Córdoba. Vol. X. Buenos Aires 1888.

Informe de la direccion general de estadistica. 1888. Guatemala.

Nachträge.

Mittheilungen der antiquarischen Gesellschaft in Zürich. Bd. XXII. Heft 5. Leipzig 1889.

Dell' aftalosio di racalmuto in Sicilia, nota del socio G. Struever. (Estratto dal vol. V. 1° sem. fasc. 11 dei rendiconti della R. accademia dei Lincei.) Roma 1889.

Atti della R. accademia dei Lincei. Anno CCLXXXIII. 1886. Serie Quarta. Memorie della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. III, e 1887. Anno CCLXXXIV. Vol. IV. Roma 1889.

Mittheilungen der Deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio. Heft 41. Bd. V. Seite 1—41. Supplement-Heft zu Bd. V. Yokahama und Berlin 1889.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner)

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

7. August. | № 16. | 1889.

Universität.

Verzeichniß der Vorlesungen auf der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen während des Winterhalbjahrs 1889/90.

Die Vorlesungen beginnen den 15. October und enden den 15. März.

Theologie.

Einleitung in das Alte Testament: Prof. *Smend* fünfstündig um 4 Uhr.

Erklärung der Genesis: *Derselbe* vierstündig um 10 Uhr.

Erklärung des Buches Jesajas: Prof. *Schultz* fünfstündig um 10 Uhr.

Hebräische Sprache s. unter Orientalische Sprachen S. 455.

Erklärung der paulinischen Briefe (mit Ausnahme des Römerbriefs und der Pastoralbriefe): Prof. *Wiesinger* fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung der Briefe Pauli an die Korinther: Prof. *Lünemann* fünfstündig um 9 Uhr.

Erklärung des Briefes Pauli an die Römer: Lic. *Weiss* fünfmal um 5 Uhr.

Erklärung der Briefe des Johannes: Prof. *Häring* zweistündig Dienstag und Donnerstag um 5 Uhr.

Kirchengeschichte der acht ersten Jahrhunderte: Prof. *Reuter* fünfmal um 8 Uhr, Sonnabends um 9 Uhr.

Kirchengeschichte der Neuzeit von der Reformation bis zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts: Prof. *Wagenmann* sechsmal um 8 Uhr.

Geschichte der Kirche und Theologie seit Mitte des achtzehnten

Jahrhunderts, vornehmlich im neunzehnten, mit besonderer Berücksichtigung Schleiermachers: Prof. *Reuter* viermal um 11 Uhr.

Christliche Dogmengeschichte: Prof. *Wagenmann* fünfmal um 4 Uhr.

Dogmatik Theil I: Prof. *Häring* fünfstündig um 11 Uhr.

Theologische Ethik: Prof. *Schultz* fünfstündig um 12 Uhr.

Praktische Theologie: Prof. *Knoke* fünfstündig um 5 Uhr.

Die innere Mission in der evangelischen Kirche: *Derselbe* zweistündig um 10 Uhr.

Kirchenrecht siehe unter Rechtswissenschaft S. 445.

Die alttestamentlichen Uebungen der wissenschaftlichen Abtheilung des theologischen Seminars leitet Prof. *Smend* Mittwochs um 6 Uhr; die neutestamentlichen Prof. *Wiesinger* Montags um 6 Uhr; die kirchen- und dogmenhistorischen Prof. *Wagenmann* Freitags um 6 Uhr; die dogmatischen Prof. *Schultz* Donnerstags um 6 Uhr.

Die Uebungen des königl. homiletischen Seminars leiten Prof. *Schultz* und Prof. *Knoke* Sonnabends von 9—11 Uhr öffentlich; die Uebungen des liturgischen Seminars leitet Prof. *Knoke* Sonnabends um 9 und um 11 Uhr; die Uebungen des katechetischen Seminars Prof. *Wiesinger* Mittwochs von 2—3 Uhr, Prof. *Knoke* Sonnabends von 2—3 Uhr öffentlich.

Rechtswissenschaft.

Institutionen des römischen Privatrechts: Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag von 9—10 Uhr Prof. *Merkel.*

Römische Rechtsgeschichte: Montag, Dienstag, Donnerstag von 3—4 Uhr Prof. *Regelsberger.*

Römischer Civilproceß: Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr Dr. *Goldschmidt.*

Lektüre des Gaius: Mittwoch von 10—11 Uhr Prof. *Merkel* (unentgeltlich).

Pandekten, I. Theil (Allgemeine Lehren, Obligationenrecht, Pfandrecht): Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 8—10 Uhr Prof. *Regelsberger.*

Römisches Sachenrecht: Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 12—1 Prof. *v. Jhering.*

Pandekten, III. Theil (Erbrecht und Familienrecht): Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 10—11 Uhr Prof. *Merkel.*

Conversatorium über Pandekten: Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag von 6—7 Uhr Dr. *Goldschmidt.*

Pandektenpraktikum: Mittwoch von 4—6 Uhr Prof. *Regelsberger.*

Exegetische Uebungen in den Digesten: Montag von 5—7 Uhr Prof. *Merkel.*

Deutsche Rechtsgeschichte: Mittwoch und Sonnabend von 8—10 Uhr Prof. *Ehrenberg.*

Deutsches Privatrecht: fünfstündig von 11—12 Uhr Prof. *Frensdorff.*

Handels-, Wechsel- und Seerecht: Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 9—10 Uhr Prof. *Ehrenberg.*

Preußisches Privatrecht: fünfmal von 11—12 Uhr Prof. *Ziebarth.*

Landwirthschaftsrecht: Mittwoch von 4—6 Uhr Prof. *Ziebarth.*

Die Grundzüge des Entwurfs eines bürgerlichen Gesetzbuches für das deutsche Reich, II. Theil (Familien- und Erbrecht): Sonnabend von 10—12 Uhr Dr. *Goldschmidt* (öffentlich).

Strafrecht: Montag, Dienstag, Donnerstag, Feitag von 10—11 Uhr Prof. *v. Bar.*

Deutsches Reichs- und Landesstaatsrecht: fünfmal wöchentlich von 9—10 Uhr Prof. *Dove.*

Verwaltungsrecht: Dienstag, Donnerstag, Freitag von 12—1 Uhr Prof. *Frensdorff.*

Völkerrecht: Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr Prof. *v. Bar.*

Kirchenrecht einschließlich des Eherechts: täglich von 8—9 Uhr Prof. *Dove.*

Civilproceß: Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 11—12 Uhr Prof. *v. Bar.*

Das materielle Zwangsvollstreckungsrecht: Mittwoch von 11—12 Uhr Dr. *Goldschmidt* (unentgeltlich).

Strafproceß: Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 10—11 Uhr Prof. *John.*

Civilproceßprakticum: Dienstag von 4—6 Uhr Prof. *John.*

Criminalistische Uebungen: Donnerst. von 4—6 Uhr Prof. *Ziebarth.*

Vorlesüngen über Staatswissenschaft s. S. 453.

Medicin.

Zoologie, vergleichende Anatomie, Botanik, Chemie, siehe unter *Naturwissenschaften.*

Knochen- u. Bänderlehre lehrt Dr. *Barfurth* Montag, Mittwoch und Sonnabend von 11—12 Uhr.

Systematische Anatomie, I. Theil, trägt vor Prof. *Fr. Merkel* tägl. von 12—1 Uhr.

Anatomie des Gehirns lehrt Dr. *Barfurth* Montag von 2—3 Uhr öffentlich.

Topographische Anatomie lehrt Prof. *Fr. Merkel* Dienstag, Donnerstag, Freitag von 2—3 Uhr.

Praeparirübungen leitet Prof. *Fr. Merkel* täglich von 9—4 Uhr.

Mikroskopische Uebungen für Geübtere hält Dr. *Barfurth* Dienstag und Freitag von 5—7 Uhr.

Uebungen in der normalen Histologie für Anfänger und für Geübtere hält Prof. *Krause* viermal wöchentlich um 2 Uhr oder zu anderen passenden Stunden.

Physiologie mit Erläuterungen durch Experimente u. mikroskopische Demonstrationen lehrt Prof. *Herbst* in 6 Stunden wöchentlich um 10 Uhr.

Experimentalphysiologie, II. Theil (Physiologie des Nervensystems u. der Sinnesorgane) lehrt Prof. *Meissner* täglich von 10—11 Uhr.

Arbeiten im physiologischen Institut leitet Prof. *Meissner* täglich in passenden Stunden.

Pathologische Anatomie der Knochen und Muskeln trägt öffentlich vor Prof. *Orth* Montag von 12—1 Uhr.

Specielle pathologische Anatomie lehrt Prof. *Orth* Dienstag bis Freitag von 12—1 Uhr.

Pathologisch-anatomische Demonstrationen hält Prof. *Orth* privatissime Mittwoch und Sonnabend von 2—4 Uhr.

Praktische Uebungen in der pathologischen Histologie leitet Prof. *Orth* Dienstag u. Freitag von 6—8 Uhr.

Physikalische Diagnostik verbunden mit Uebungen lehrt Prof. *Damsch* Montag, Mittwoch, Donnerstag von 5—6 Uhr.

Laryngoskopische Uebungen hält Prof. *Damsch* Sonnabend von 12—1 Uhr.

Arzneimittellehre u. Receptirkunde verbunden mit Experimenten u. praktischen Uebungen im Receptiren u. Dispensiren lehrt Prof. *Marmé* Montag, Dienstag u. Donnerstag von 6—7 Uhr.

Die gesammte Arzneimittellehre trägt Prof. *Husemann* vierstündlich in später zu bestimmenden Stunden vor.

Uebungen in der Abfassung von Arzneiverordnungen leitet Prof. *Husemann* öffentlich Donnerstag von 3—4 Uhr.

Specielle Toxikologie, II. Theil, verbunden mit Experimenten trägt Prof. *Marmé* für ältere Mediciner vor Montag u. Donnerstag von 3—4 Uhr.

Arbeiten im pharmakologischen Institut leitet Prof. *Marmé* täglich in passenden Stunden.

Pharmakognosie lehrt Prof. *Marmé* dreimal wöchentlich Dienstag bis Donnerstag von 8—9 Uhr.

Pharmakognostisch-mikroskopische Uebungen hält Prof. *Marmé* Mittwoch von 10—12 Uhr.

Specielle Pathologie u. Therapie, II. Hälfte, trägt vor Prof. *Ebstein* Montag, Dienstag, Donnerstag u. Freitag von 4—5 Uhr.

Medicinische Klinik u. Poliklinik leitet Prof. *Ebstein* fünfmal wöchentlich von $10^1/_2$—12 Uhr, Sonnabend von $9^1/_4$—$10^3/_4$ Uhr.

Kinderheilkunde, I. u. II. Theil, lehrt Montag u. Donnerstag von 6—7 Uhr und Dienstag von 5—6 Uhr Prof. *Damsch.*

Poliklinische Referatstunde hält Prof. *Damsch* einmal wöchentlich.

Die Untersuchung des Harns u. Sputums mit praktischen Uebungen leitet Prof. *Ebstein* mit Dr. *Nicolaier* einmal wöchentlich in zu verabredender Stunde.

Specielle Chirurgie, I. Theil, lehrt Prof. *König* in zu bestimmenden Stunden.

Dasselbe lehrt Prof. *Lohmeyer* fünfmal wöchentlich von 8—9 Uhr.

Einen chirurgisch-diagnostischen Cursus hält Prof. *Rosenbach* Dienstag u. Freitag von 3—4 Uhr.

Die Lehre von den chirurgischen Operationen trägt Prof. *Rosenbach* dreimal wöchentlich in zu verabredenden Stunden vor.

Chirurgische Klinik leitet Prof. *König* von $9^1/_2$—$10^3/_4$ Uhr täglich außer Sonnabend.

Chirurgische Poliklinik wird öffentlich Sonnabend von $10^3/_4$—12 Uhr von Prof. *König* u. Prof. *Rosenbach* gemeinschaftlich gehalten.

Einen Verbandcursus leitet Dr. *Hildebrand* zweimal wöchentlich in passenden Stunden.

Instrumentenlehre ertheilt einmal wöchentlich Dr. *Hildebrand* öffentlich.

Ueber die chirurgischen Krankheiten des Magens u. des Darmkanals liest einmal wöchentlich Dr. *Hildebrand.*

Klinik der Augenkrankheiten hält Prof. *Leber* Montag, Dienstag, Donnerstag u. Freitag von 12—1 Uhr.

Augenspiegelcursus hält Dr. *Wagenmann* Mittwoch u. Sonnabend von 12—1 Uhr.

Ueber Verletzungen des Auges liest Dr. *Schirmer* Sonnabend von 8—9 Uhr öffentlich.

Ueber die praktisch wichtigen Abschnitte der Ohrenheilkunde mit Uebungen im Ohrenspiegeln spricht Prof. *Bürkner* Dienstag und Freitag von 2—3 Uhr oder zu besser passender Zeit.

Poliklinik für Ohrenkranke hält Prof. *Bürkner* (für Geübtere) Mittwoch u. Sonnabend von 12—1 Uhr.

Geburtshülflich-gynaekologische Klinik und Poliklinik leitet Prof. *Runge* Dienstag, Mittwoch, Freitag, Sonnabend von 8—9 Uhr.

Geburtshülflichen Operationscursus hält Prof. *Runge* Dienstag, Freitag, Sonnabend von 4—5 Uhr.

Geburtshülfe lehrt Montag u. Donnerstag von 4—5 Uhr Prof. *Runge*.

Krankheiten der ersten Lebenstage bespricht Mittwoch von 4—5 Uhr öffentlich Prof. *Runge*.

Untersuchungscursus an Schwangern hält an passenden Tagen von 3—4 Uhr Dr. *Droysen*.

Psychiatrische Klinik in Verbindung mit systematischen Vorträgen über Geisteskrankheiten hält Prof. *L. Meyer* Montag u. Donnerstag von 4—6 Uhr.

Forensische Psychiatrie mit casuistischen Demonstrationen lehrt (für Juristen) Prof. *L. Meyer* wöchentlich in 2 zu verabredenden Stunden.

Hygiene, I. Theil, lehrt Prof. *Wolffhügel* Montag, Mittwoch und Donnerstag von 5—6 Uhr.

Praktische Uebungen im Anschluß an die Vorlesung über Hygiene hält Prof. *Wolffhügel* unentgeltlich Dienstag und Freitag von 3—4 Uhr.

Hygienische u. bakteriologische Curse giebt Prof. *Wolffhügel* in passenden Stunden.

Arbeiten im Institut für medicinische Chemie u. Hygiene leitet täglich von 9—5 Uhr Prof. *Wolffhügel*.

Anatomie u. Physiologie der Hausthiere sowie die Lehre von den innerlichen Krankheiten derselben trägt Prof. *Esser* fünfmal wöchentlich von 9—10 Uhr vor.

Klinische Demonstrationen im Thierhospitale hält Prof. *Esser* in zu verabredenden Stunden.

Philosophie.

Allgemeine Geschichte der Philosophie: Prof. *Baumann*, Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag 5 Uhr.

Kurze Uebersicht über die deutsche Philosophie seit Kant: Prof. *Rehnisch*, Mittwoch 12 Uhr, öffentlich.

Logik: Prof. *Baumann*, Mont., Dienst., Donn. Freit. 9 Uhr.

Logik: Prof. *Rehnisch*, 4 St. 12 Uhr.

Metaphysik und Erkenntnißtheorie: Prof. *Peipers*, Mont., Dienst., Donn., Freit., 10 Uhr.

Psychologie: Prof. *G. E. Müller*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 4 Uhr.

Darstellung und Kritik der hauptsächlichsten Theorien über das Wesen des Willens: Prof. *Peipers*, Mittwoch 9 Uhr, öffentlich.

In einer philosophischen Gesellschaft wird Prof. *G. E. Müller*, Mittwoch 10 Uhr, ausgewählte Kapitel der Logik und Erkenntnißtheorie behandeln.

Die Uebungen des K. pädagogischen Seminars leitet Prof. *Sauppe*, Dienstag und Freitag 11 Uhr öffentlich.

Mathematik, Astronomie und theoretische Physik.

Allgemeine Einleitung in die höhere Mathematik: Prof. *Hölder*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 6 Uhr.

Differentialrechnung: Prof. *Schwarz*, Mont. bis Freit. 11 Uhr.

Ueber die wichtigsten bestimmten Integrale: Prof. *Hölder*, Mont., Dienst. 10 Uhr.

Theorie der algebraischen Gleichungen: Dr. *Schönflies*, Mont., Dienst., Donnerst. Freit. 11 Uhr.

Theorie der reellen und der imaginären Zahlen: Prof. *Schering*, Mont., Dienst., Donnerst. Freit. 4 Uhr.

Nicht-Euklidische Geometrie: Prof. *Klein*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 12 Uhr.

Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen: Prof. *Schwarz*, Mont. bis Freit. 9 Uhr.

Höhere Kugelfunctionen (Lamé'sche Functionen): Prof. *Klein*, Freit. 6—8 Uhr.

Elementare Mechanik: Prof. *Voigt*, Mont. bis Mittw. 10 Uhr.

Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie: Dr. *H. Meyer*, Dienst., Donnerst., Freit. 11 Uhr.

Anwendung der Elasticitätslehre auf die Optik: Prof. *Voigt*, Freit. und Sonnabend 10 Uhr.

Populäre Astronomie: Prof. *Schur*, Sonnabend 11 Uhr, öffentlich.

Theorie der Bahnbewegung von Planeten und Cometen: Prof. *Schur*, Mont., Dienst., Donnerst. u. Freit. 11 Uhr.

Mathematische Uebungen für Anfänger: Prof. *Hölder*, Mittw. 6 Uhr, öffentlich.

Geometrische Constructionen: Prof. *Schwarz* und Prof. *Hölder*, Mittw. 3—5 Uhr, öffentlich.

Math. Colloquien wird Prof. *Schwarz* unentgeltlich wie bisher wöchentlich zweistündig privatissime veranstalten.

Uebungen in elementarer Mechanik: Prof. *Voigt*, Mittw. 12 Uhr.

Praktische Uebungen an den Instrumenten der K. Sternwarte: Prof. *Schur*, täglich.

Magnetische Beobachtungen im Gauss-Observatorium leitet Prof. *Schering* in Gemeinschaft mit dem Assistenten Dr. *Holborn*, Mont. 7 Uhr Abends.

Im K. mathematisch-physikalischen Seminar wird Prof. *Riecke* ausgewählte Kapitel der mathematischen und Experimentalphysik (Donn. 2 Uhr) behandeln, Prof. *Schering* mathematische Uebungen veranstalten (Mont. 6 Uhr), Prof. *Schwarz* ebensolche Uebungen leiten (Sonn. 9 Uhr), Prof. *Voigt* ausgewählte Kapitel der Electricitätslehre (Donn. 10 Uhr), Prof. *Klein* ausgewählte Theile aus der Theorie der Kugelfunctionen behandeln (Mittw. 11—1), Prof. *Schur* astronomische Uebungen veranstalten (Dienst. 7 Uhr).

Experimentalphysik: siehe *Naturwissenschaften* S. 451.

Naturwissenschaften.

Vergleichende Anatomie, besonders der Wirbelthiere und mit Rücksicht auf die Entwickelungsgeschichte: Prof. *Ehlers*, Mont.— Freit. 4 Uhr.

Die Parasiten des Menschen mit Demonstrationen am Skioptikon: Dr. *Hamann*, Donnerstag und Freitag 6 Uhr.

Descendenzlehre und Darwinismus: Dr. *Hamann*, Mittwoch 6 Uhr, unentgeltlich.

Ueber das Leben und die Lehre von Charles Darwin: Dr. *Henking*, Donnerstag, 6 Uhr, unentgeltlich.

Zoologischer Kurs: Prof. *Ehlers*, Dienst. u. Mittw. 11—1 Uhr.

Zoologische Uebungen wird Prof. *Ehlers* täglich (mit Ausnahme des Sonnabend) von 10—1 Uhr anstellen.

Zoologische Societät f. Vorgeschrittenere: Prof. *Ehlers*, unentgeltlich.

Allgemeine Morphologie und vergleichende Entwickelungsgeschichte der Pflanzen: Prof. *Peter*, Dienst. Mittw. Freit. 3 Uhr.

Anatomie und Entwickelungsgeschichte der Pflanzen: Prof. *Berthold* Dienst., Donnerst. Freit. 12 Uhr.

Technisch und medicinisch wichtige Pflanzen mit mikroskopischen Demonstrationen: Prof. *Peter*, Mont. u. Donnerst. 3 Uhr.

Ueber die Archegoniaten: Prof. *Peter*, Mittwoch 12 Uhr öffentlich.

Ueber Bakterien: Dr. *Koch*, 1 St. unentgeltlich.

Mikroskopisch-botanischer Kursus: Prof. *Berthold*, Sonnabend von 9—1 Uhr.

Mikroskopisch-botanischer Kursus für Anfänger: Prof. *Peter*, vierstündig an einem zu verabredenden Tage.

Tägliche Arbeiten im pflanzenphysiologischen Institut: Prof. *Berthold*.

Botanische Societät: Prof. *Berthold*, in zu bestimmender Stunde, öffentlich.

Leitung botanischer Arbeiten für Vorgeschrittenere: Prof. *Peter*, täglich, privatissime.

Mineralogie 2. Theil: Prof. *Liebisch*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 12 Uhr.

Chemische Krystallographie: Prof. *Liebisch*, Mittw. 12 Uhr.

Geologie: Prof. *von Koenen*, Montag bis Freitag, 8 Uhr.

Ueber einzelne Klassen von Fossilien: Prof. *von Koenen*, Sonnabend 8 Uhr, öffentlich.

Geologische und Palaeontologische Uebungen: Prof. *von Koenen*, täglich, privatissime, aber unentgeltlich.

Uebungen im Bestimmen von Fossilien: Prof. *von Koenen*, zwei Stunden, öffentlich.

Arbeiten im mineralogisch-petrographischen Institut: Prof. *Liebisch*, öffentlich.

Experimentalphysik, zweiter Theil: Magnetismus, Elektricität und Wärme: Prof. *Riecke*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit., 5 Uhr.

Ueber die Theorie der Dissociationserscheinungen: Prof. *Riecke*, Mittw. 4 Uhr.

Die Uebungen im physikalischen Institute leiten die Prof. *Riecke* und *Voigt*, in Gemeinschaft mit den Assistenten Dr. *Hugo Meyer*, Dr. *Drude*, und Dr. *Pockels*. Für Mathematiker: Dienstag und Freitag 2—4 Uhr; für Chemiker: Sonnabend 9—1 Uhr.

Allgemeine Chemie, unorganischer Theil (unorganische Experimentalchemie): Prof. *Wallach*, sechs Stunden, 9—10 Uhr.

Organische Chemie für Mediciner: Prof. *von Uslar*, 4 St., 9 Uhr.

Ueber das Pyridin und seine Derivate (Alkaloide): Dr. *Buchka*, Mont. und Mittw. 12 Uhr.

Physikalische Chemie: Dr. *Buchka*, Dienst. u. Donnerst. 12 Uhr.

Maßanalyse: Dr. *Buchka*, Freitag 12 Uhr.

Pharmaceutische Chemie (organischer Theil): Prof. *Polstorff*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 4 Uhr.

Ueber die Verunreinigungen und Verfälschungen der Nahrungs- und Genußmittel und deren Erkennung: Prof. *Polstorff*, Freitag und Sonnabend, 8 Uhr.

Pharmacie: Prof. *von Uslar*, viermal, 3 Uhr.

Chemisches Colloquium für Mediciner (im Anschluß an das Practicum): Prof. *Wallach*, öffentlich, in zu verabredender Stunde.

Chemisches Colloquium für Pharmaceuten: Prof. *Polstorff*, in zwei zu verabredenden Stunden.

Technische Chemie für Landwirthe (Zuckerfabrikation, Gährungsindustrien, etc.): Prof. *Tollens*, Mont., Dienst., Mittw., 10 Uhr.

Grundzüge der Chemie, II. Theil: Dr. *Pfeiffer*, Dienstag und Freitag 3 Uhr.

Zuckerbestimmungen durch Polarisation: Prof. *Tollens*, 1 St. öffentlich.

Agriculturchemische Untersuchungsmethoden: Dr. *Pfeiffer*, Sonnabend 10 Uhr.

Die chemischen Uebungen und wissenschaftlichen Arbeiten im akadem. Laboratorium leitet Prof. *Wallach* in Gemeinschaft mit Prof. *Polstorff* und den Assistenten Dr. *Buchka* und Dr. *Leuckart*, und zwar: 1) Vollprakticum, Mont. bis Freit., von 8 bis 12 und von 3 bis 6 Uhr; 2) Halbprakticum, je Vor- und Nachmittags, täglich außer Sonnabends; 3) Chemisches Anfängerprakticum für Mediciner, täglich mit Ausschluß des Sonnabends.

Prof. *Tollens* leitet die praktisch-chemischen Uebungen im agriculturchemischen Laboratorium in Gemeinschaft mit Dr. *F. Mayer*, Montag bis Freitag 8—12 und 2—4 Uhr.

Historische Wissenschaften.

Anleitung zur Kritik mittelalterlicher Urkunden: Prof. *Steindorff*, Mittwoch 10 Uhr.

Die Hauptlehren der mittelalterlichen Zeitrechnung: Prof. *Steindorff*, Sonnabend 11 Uhr, öffentlich.

Griechische Geschichte seit den Perserkriegen: Prof. *Volquardsen*, Mont., Dienst., Donn., Freit., 8 Uhr.

Quellenkunde der Europäischen Geschichte bis 1250: Prof. *Weiland*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit., 10 Uhr.

Allgemeine Geschichte vom deutschen Interregnum bis zum Ausgang des Mittelalters: Dr. *v. Kap-herr*, Dienst. und Freit. 11 Uhr.

Geschichte des fränkischen Reiches: Prof. *Steindorff*, Mont. und Donnerst. 4 Uhr.

Allgemeine Geschichte von 1555 bis 1648: Prof. *Kluckhohn*, Dienst., Donnerst., Freit. 12 Uhr.

Neueste Geschichte von 1848 bis 1871: Prof. *Kluckhohn*, Mittw. u. Sonnabend 12 Uhr.

Französische Geschichte von Hugo Capet bis zur großen Revolution: Prof. *Weiland*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit., 9 Uhr.

Geschichte Italiens im Mittelalter: Prof. Dr. *Theod. Wüstenfeld*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 10 Uhr, öffentlich in seiner Wohnung.

Historische Uebungen leitet Prof. *Volquardsen*, Dienst. 6 Uhr, öffentl.

Historische Uebungen: Prof. *Weiland*, Freit., 6 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Historische Uebungen: Prof. *Kluckhohn*, Montag, 6 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Kirchengeschichte: s. unter *Theologie* S. 443.

Erd- und Völkerkunde.

Geographie von Deutschland: Prof. *Wagner*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 11 Uhr.

Geographische Uebungen: Prof. *Wagner*, Sonnabend Vormittag, privatissime, aber unentgeltlich.

Staatswissenschaft.

Nationalökonomie, grundlegender Theil, als Einleitung in das Studium der Staatswissenschaften: Prof. *Cohn*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 4 Uhr.

Praktische Nationalökonomie oder Volkswirthschaftspolitik: Prof *Lexis*, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag 10 Uhr.

Finanzwissenschaft, mit besonderer Beziehung auf die deutsche und preußische Steuergesetzgebung: Prof. *Cohn*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 5 Uhr.

Ueber Bevölkerungsstatistik: Prof. *Lexis*, Mittw. 4 Uhr, öffentlich.

Ueber Staatsschulden: Prof. *Mithoff*, Mittw. 5 Uhr, öffentlich.

Staatswissenschaftliche Uebungen: Prof. *Cohn*, Mittw. 5—7 Uhr, privatissime, unentgeltlich.

Landwirthschaft.

Einführung in das landwirthschaftliche Studium: Prof. *Kirchner*, 1 Stunde, öffentlich.

Allgemeine Ackerbaulehre: Prof. *Kirchner*, Dienst. und Donnerst. 12 Uhr, Donnerst. u. Freit. 11 Uhr.

Die Ackerbausysteme (Felderwirthschaft, Feldgraswirthschaft, Fruchtwechselwirthschaft u. s. w.): Prof. *Griepenkerl*, Donnerst. und Freit. 5 Uhr.

Die allgemeine und specielle landwirthschaftliche Züchtungslehre: Prof. *Griepenkerl*, Montag, Dienstag, 5 Uhr.

Spezielle Thierzucht: Prof. *Kirchner*, Montag, 8—10 Uhr.

Die landwirthschaftliche Rassenkunde: Prof. *Griepenkerl*, Mittwoch 5—7 Uhr, öffentlich.

Im Anschluß an diese Vorlesungen werden Excursionen nach benachbarten Landgütern und Fabriken veranstaltet werden.

Landwirthschaftliche Betriebslehre: Dr. *Rümker*, Montag, Mittw. Donnerstag, Sonnabend 12 Uhr.

Die Lehre von der Futterverwerthung (II. Theil der landwirthschaftlichen Fütterungslehre): Prof. *Henneberg*, Mont. u. Dienst. 11 Uhr.

Uebungen in Futterberechnungen: Prof. *Henneberg*, Mittwoch 11 Uhr, öffentlich.

Molkereiwesen: Prof. *Kirchner*, Sonnabend 10—12 Uhr.

Uebungen im landw. Laboratorium, Prof. *Kirchner*, dreimal von 9—12 Uhr, privatissime; Excursionen und Demonstrationen: Prof. *Kirchner*, Sonnabend von 3 Uhr an.

Landwirthschaftsrecht: vgl. *Rechtswissenschaft* S. 445.

Chemie und praktisch-chemische Uebungen für Landwirthe: vgl. *Naturwissenschaften* S. 452.

Anatomie, Physiologie und Pathologie der Hausthiere: vgl. *Medicin* S. 448.

Literär- und Kunstgeschichte.

Bibliothekverwaltungslehre: Prof. *Dziatzko*, Montag, Dienstag, Donnerst. 5 Uhr.

Leitung bibliographischer Arbeiten: Prof. *Dziatzko*, Freit. 3 Uhr.

Geschichte der indischen Grammatik: s. *Oriental. Sprachen* S. 455.

Geschichte der römischen Litteratur der Kaiserzeit: Prof. *Wilh. Meyer*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 5 Uhr.

Roman, Novelle, Märchen im Alterthum: s. *Griech. und lat. Sprache* S. 455.

Geschichte der deutschen Litteratur von Luther bis auf Klopstock: Prof. *Roethe*, Mont., Mittw., Freit. 3 Uhr.

Hamlet: Prof. *Brandl*, Donnerstag und Freitag 4 Uhr.

Leben und Werke Leonardo da Vincis' und Rafaels: Prof. *Lange*, Mont. 6—8 Uhr.

Theorie der bildenden Künste (Technik, Stillehre, Aesthetik der Baukunst, Malerei, Bildhauerei und des Kunstgewerbes): Prof. *Lange*, Dienstag und Donnerstag 6—8 Uhr.

Alterthumskunde.

Das Theaterwesen der Griechen: Prof. *Wieseler*, zweistündig 12 Uhr.

Bildwerke des troischen Sagenkreises: Prof. *Dilthey*, Dienst., Donn., Freit., 12 Uhr.

Im K. archäologischen Seminar wird Prof. *Wieseler* ausgewählte Kunstwerke zur Erklärung vorlegen, Sonnabend 12 Uhr öffentlich.

Die schriftlichen Arbeiten der Mitglieder des K. archäologischen Seminars wird er privatissime beurtheilen.

Archäologische Uebungen: Prof. *Dilthey*, Sonnabend 10—12 Uhr.

Ueber Bewaffnung und Rüstung bei den alten Germanen und im deutschen Mittelalter: Prof. *Heyne*, Mont. 6 Uhr, Mittw. 5 Uhr.

Vergleichende Sprachlehre.

Vergleichende Grammatik des Griechischen: Prof. *Bechtel*, Dienst., Donnerst. und Freitag, 9 Uhr.

Griechische Dialektinschriften, in zu bestimmender Stunde, privatissime, gratis, Prof. *Bechtel*.

Orientalische Sprachen.

Die Vorlesungen über das alte Testament s. unter *Theologie* S. 443.

Anfangsgründe des Arabischen: Prof. *Wüstenfeld*, privatissime.

Hebräische Grammatik lehrt Prof. *de Lagarde* viermal, 3 Uhr.

Harizis hebräische Makamen läßt Prof. *de Lagarde*, Mittw. 3 Uhr öffentlich, erklären.

Grammatik der Sanskritsprache für Anfänger: Prof. *Kielhorn*, Mont. Mittwoch und Sonnabend 8 Uhr.

Erklärung ausgewählter Abschnitte der Ashṭâdhyâyî des Pâṇini: Prof. *Kielhorn*, Montag, Sonnabend 9 Uhr.

Erklärung ausgewählter Abschnitte schwieriger Schriftsteller (nach Bedürfniß der Zuhörer): Prof. *Kielhorn*, 2 Stunden, öffentlich.

Ueber die ältesten Indischen Inschriften: Prof. *Kielhorn*, einmal wöchentlich (eine oder zwei Stunden), öffentlich.

Griechische und lateinische Sprache.

Uebungen über lateinische Palaeographie: Prof. *W. Meyer*, 2 Stunden.

Grundzüge der griechischen und lateinischen Epigraphik: Prof. *Sauppe*, Mont. Dienst. Donnerst., Freit., 9 Uhr.

Griechische Dialektinschriften: s. *Vergleich. Sprachlehre*.

Thukydides: Prof. *v. Wilamowitz-Moellendorff*, vierstündig 10 Uhr.

Terentius Heautontimorumenos und Adelphoe: Prof. *Sauppe*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit., 4 Uhr.

Apuleius' Erzählung von Amor und Psyche, nebst Einleitung über Roman, Novelle und Märchen im Alterthum und über Apuleius: Prof. *Dilthey*, Montag 12 Uhr, öffentlich.

Im K. philologischen Seminar leiten die schriftlichen Arbeiten und Disputationen Prof. *Sauppe* und Prof. *Wilh. Meyer*, Mittwoch

11 Uhr; läßt Plutarchs Perikles erklären Prof. *Sauppe*, Mont. und Donn., 11 Uhr; läßt Velleius erklären Prof. *W. Meyer*, Dienst. und Freit., 11 Uhr, alles öffentlich.

Im K. philologischen Proseminar wird Prof. *von Wilamowitz-Moellendorff* die Choephoren des Aeschylos interpretiren lassen, sowie die Disputationen über die Arbeiten der Mitglieder leiten, Mittw. 9—11 Uhr, öffentlich.

Deutsche Sprache.

Formenlehre des Neuhochdeutschen auf geschichtlicher Grundlage: Prof. *Heyne*, viermal wöchentl., 5 Uhr.

Walther von der Vogelweide: Prof. *Roethe*, Dienstag, Donnerstag, 3 Uhr.

Im K. deutschen Seminar läßt Prof. *W. Müller* das 5. Buch des Parzival von Wolfram von Eschenbach erklären, Donnerst. 12 Uhr; hält Prof. *Heyne* textkritische Uebungen, Freitag 12 Uhr; leitet Prof. *Roethe* altnordische Uebungen (Erklärung der Völsungasaga nach Ranischs Ausgabe, Berlin 1889), Dienstag 12 Uhr, alles privatissime aber unentgeltlich.

Im deutschen Proseminar hält Prof. *Heyne* althochdeutsche Uebungen, Sonnabend 12 Uhr öffentlich; leitet Prof. *Roethe* mittelhochdeutsche Uebungen für Anfänger („von dem übelen wîbe“ nach Moritz Haupts Ausgabe, Leipzig 1871), Mittwoch 12 Uhr öffentlich.

Geschichte der deutschen Literatur: s. *Literärgeschichte* S. 454.

Neuere Sprachen.

Geschichte der französischen Sprache und französische Lautlehre Prof. *Vollmöller*, Mont., Dienst., Mittw. Donnerst., 12 Uhr.

Provenzalische Laut- und Formenlehre: Dr. *Cloetta*, Mont. und Mittw. 11 Uhr.

Molière's Leben und Werke (in französ. Sprache): Lektor *Ebray*, 2 Stunden.

Dante's divina commedia: Dr. *Andresen*, Mont. u. Dienst. 10 Uhr.

Historische Syntax der englischen Sprache, I. Teil: Dr. *Holthausen*, zweimal.

Lektüre und Erklärung des Beowulf, mit einer Einführung ins Altenglische: Prof. *Brandl*, Mont., Dienst., Mittw. 4 Uhr.

Erklärung ausgewählter mittelenglischer und schottischer Texte: Dr. *Holthausen*, 2 Stunden.

Im romanischen Seminar giebt Prof. *Vollmöller*, Mittw. 9—11 Uhr, die Erklärung des französichen Rolandsliedes; französische und provenzalische Uebungen leitet Dr. *Andresen*, Montag 6 Uhr; Dr. *Cloetta* giebt eine Erklärung von Dante's Komödie, Donnerst. 6—8 Uhr.

Im englischen Seminar liest Prof. *Brandl* Sketches by Dickens Mittwoch 6—8 Uhr Abends.

Neufranzösische Uebungen: Lektor *Ebray*, drei Stunden, im romanischen Seminar.

Neuenglische (grammatische und stilistische) Uebungen stellt im englischen Seminar Lektor Dr. *Miller* Mont. u. Freit. 6—8 Uhr an (Browning's Poems und Heyse's Weinhüter von Meran).

Schöne Künste. — Fertigkeiten.

Theorie der bildenden Künste: s. *Literär- u. Kunstgeschichte* S. 454.

Harmonielehre: Prof. *Freiberg*, wöch. 2 Stunden, öffentlich. — Auch hält er Uebungen im Ensemblespiel.

Harmonie- und Kompositionslehre, verbunden mit praktischen Uebungen: Prof. *Hille*, in passenden Stunden.

Zur Theilnahme an den Uebungen der Singakademie und des Orchesterspielvereins ladet Prof. *Hille* ein.

Unterricht im Zeichnen ertheilt Zeichenlehrer *Peters*, Sonnabend 2—4 Uhr, unentgeltlich.

Unterricht im Malen *Derselbe* in zu verabredenden Stunden.

Reitunterricht ertheilt in der K. Universitäts-Reitbahn der Univ. Stallmeister, Rittmeister a. D. *Schweppe*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, Sonnabend, Vormittags v. 8—12, u. Nachm. (außer Sonnab.) v. 3—4 Uhr.

Fechtkunst lehrt der Universitätsfechtmeister *Grüneklee*, Tanzkunst der Universitätstanzmeister *Höltzke*, Montag und Donnerstag 8—10 Uhr Abends.

Oeffentliche Sammlungen.

In der *Universitätsbibliothek* ist das Ausleihezimmer an den Wochentagen von 12—1 und von 2—3 Uhr, der Lesesaal von 10—4 Uhr geöffnet. Verliehen werden Bücher nach Abgabe einer Semesterkarte mit der Bürgschaft eines Professors.

Die *Gemäldesammlung* (Aula, 1 Treppe hoch links) ist Sonntags von 11—1 Uhr geöffnet.

Der *botanische Garten* ist, die Sonn- und Festtage ausgenommen, täglich von 7—12 und von 2—6 Uhr geöffnet.

Die *mineralogische* und die *geologisch-paläontologische Schausammlung* sind im Winterhalbjahr bis zum 1. December Sonnabends von 1 bis 3 Uhr dem Publikum geöffnet.

Die Sammlungen des *landwirthschaftlichen Instituts* sind dem Publicum Mittwoch Nachmittag von 2—4 Uhr zugänglich. Anmeldung im Institutsgebäude.

Besuchszeit des *agriculturchemischen Laboratoriums* Donnerst. v. 10—12 Uhr.

Ueber den Besuch und die Benutzung der *theologischen Seminarbibliothek*, des *Theatrum anatomicum*, des *physiologischen Instituts*, der *pathologischen Sammlung*, der *Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle*, des *zoologischen* und *ethnographischen Museums*, des *botanischen Gartens* und des *pflanzenphysiologischen Instituts*, der *Sternwarte*, des *physikalischen Kabinets* und *Laboratoriums*, der *mineralogischen* und der *geognostisch-paläontologischen Sammlung*, der *chemischen Laboratorien*, des *archäologischen Museums*, der *Gemäldesammlung*, der *Bibliothek und des Lesezimmers des K. philologischen Seminars*, der *Bibliothek* und des *Lesezimmers des K. mathematisch-physikalischen Seminars*, des *diplomatischen Apparats*, der *Sammlungen des landwirthschaftlichen Instituts* bestimmen besondere Reglements das Nähere.

Bei dem Logiscommissar, Pedell *Mankel* (Jüdenstrasse 11), können die, welche Wohnungen suchen, sowohl über die Preise, als andere Umstände Auskunft erhalten und auch im voraus Bestellungen machen.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

15. Oktober. **№ 18.** 1889.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 3. August.

Merkel legt eine Mittheilung von Herrn Dr. Maaß vor: „über die beim Menschen vorkommenden körnigen Pigmente“.

Voigt legt vor: a. G. Baumgarten und W. Voigt: „Bestimmung der Elasticitätskonstanten des Kalkspaths“.

b. W. Voigt und Dr. P. Drude: „Bestimmung der Elasticitätskonstanten einiger dichter Mineralien“.

Klein legt vor: Wilhelm Wirtinger: „über das Analogon der Kummerschen Fläche für $p = 3$“.

Ueber die beim Menschen vorkommenden körnigen Pigmente.

Von

Dr. **F. Maass**, Assistent.

(Aus dem anatomischen Institut zu Göttingen.)

Vorgelegt von Fr. Merkel.

Von den körnigen Pigmenten des menschlichen Körpers sind am besten gekannt diejenigen der Retina, des Haars, der Haut, der Lunge, der Neubildungen, der Extravasate und der Thromben. Aus der hierüber vorliegenden Literatur und sonstigen Erwägungen ergeben sich für die mikroskopische Untersuchung der Farbstoffniederschläge anderer Organe folgende fünf Fragen:

1) Ist die Pigmentation vom Alter abhängig und in welchem Lebensabschnitt beginnt sie?

2) Sind die Pigmente als physiologische oder pathologische Bildungen aufzufassen?

3) Werden dieselben an ihrem Fundort gebildet oder dort aus dem Blut abgelagert oder endlich durch Zellen dahin verschleppt?

4) Entstehen sie aus dem Blutfarbstoff oder dem Fett?

5) Sind sie unter sich indentisch oder nicht?

Unter diesen Gesichtspunkten habe ich auf Anregung von Herrn Prof. Dr. Merkel das Nieren-, Leber-, Herz-, Nebennieren-, Samenbläschen-, Nebenhoden- und Hodenpigment untersucht. Die Resultate theile ich hier kurz mit und behalte mir einen ausführlicheren Bericht vor.

Frage 1. In den Nieren findet sich vom ersten Lebensjahre ab in den Epithelien der Henleschen Schleifen Pigment, in den Leberzellen vom 3. oder 4. Lebensjahre ab, in den Herzmuskeln vom 10. Lebensjahre ab, in der Nebenniere vom 17.—20. Lebensjahre, in den Epithelien und glatten Muskelzellen des Samenbläschen vom 20.—25. Lebensjahre, in den Epithelien des Nebenhoden vom 24.—30. Lebensjahre ab. Interstitielle Zellen des Hodens im ersten Stadium der Pigmentation habe ich unter meinem Material nicht gefunden, bei denselben mag etwa mit dem 20. Lebensjahre die Farbstoffablagerung erfolgen. Die eigentlichen Hodenzellen ließen eine derartige Regelmäßigkeit nicht erkennen. An allen diesen Fundstätten nahm mit dem Alter nicht allein die Menge, sondern auch die Größe der Körnchen zu.

Frage 2. Die unter 1 mitgetheilten Thatsachen drängen zu dem Schluß, daß es sich hier um normale Producte des Stoffwechsels handelt. Eine Begünstigung der Pigmentbildung durch krankhafte Processe ließ sich an den mir zu Gebote stehenden Organen nicht erkennen, obwohl die Todesursache in den einzelnen Fällen eine sehr verschiedenartige war, die Leichen sich theils in gutem Ernährungszustande befanden, theils die äußerste Abmagerung zeigten.

Frage 3. Für einfache Ablagerung fertigen Farbstoffes aus dem Blute etwa abgestorbener Blutzellen oder die Zuführung der Körnchen durch Bindegewebs- oder Wanderzellen habe ich Anhaltspunkte nicht gefunden. Ich glaube daher, daß die hier beschriebenen Träger des Pigmentes auch die Bildung desselben besorgen.

Frage 4. Der Zusammenhang mit Hämoglobin kann mikroskopisch durch Eisenreaction oder Hämatoidinreaction erkannt werden. Letztere gab keines der von mir untersuchten Pigmente.

Eisenkörnchen finden sich sowohl ohne als mit Pigment in den Leberzellen. Es ist daher die Annahme der Entstehung aus Blutfarbstoff nicht ganz einwandsfrei. Ein Theil der interstitiellen Zellen des Hodens gab ebenfalls immer Eisenreaction, sodaß es sich hier wohl um ein Derivat des Hämoglobins handelt.

Den Fettlösungsmitteln, wie Alkohol, Aether etc. setzen schon die geringsten Spuren farbiger Körnchen 14 Tage und länger Widerstand entgegen. Nach Monate langer Behandlung mit diesen Flüssigkeiten schwanden jedoch auch massenhafte Körnchenansammlungen fast vollständig. Da sich hierbei eine stark bleichende Wirkung des Lichtes herausstellte, so mußten die Versuche im Dunkeln gemacht werden. Aus dem Rückstande des Aethers etc. fand sich nur nach Herzmuskelextraction eine Substanz, welche nicht als Pigment selbst, wohl aber als Vorstufe desselben aufgefaßt werden konnte, indem sie aus leicht schmelzbaren, lebhaft gelben Tropfen bestand und dieselben Reactionen wie das Herzpigment zeigte.

Während ich dann weiter am Herzpigment Osmiumsäure und ligochromatische Reactionen probirte, zeigte sich, daß sowohl größere Fetttropfen als Pigment mehr oder minder intensiv schwarz wurden, wenn der Osmiumsäurebehandlung eine solche mit conc. Schwefelsäure nachfolgte. Vorhergehende Extraction der mikroskopischen Schnitte mit Alc. abs. verhinderte die Reaktion. Ferner gelang es mir durch die von Ranviers angegebene Fettfärbemethode mit Chinoleinblau zwar nicht das Fett selbst, wohl aber das Herzpigment sehr energisch blau zu färben. Nach voraufgehender 24stündiger Behandlung mit Aether erfuhr die Reaction eine sehr bedeutende Beeinträchtigung. In Muskelzellen aus 8—10jährigen Herzen, also solchen, welche dicht vor Beginn der Pigmentbildung standen, ließen sich durch diese Methode 2—3 kleine den Kernpoolen unmittelbar anliegende, sich intensiv blau färbende Körnchen nachweisen. Nachdem die Präparate vor der Färbung 24 Stunden mit Aether behandelt waren, war von der Reaction nichts zu sehen. Auf Grund aller dieser Thatsachen glaube ich annehmen zu dürfen, daß die Vorstufe des Herzpigmentes ein fettartiger Körper ist.

Bei den übrigen Farbstoffen konnte ich mit diesen Reagentien eine charakteristische Tinction nicht erzielen, weil sich die übrige Zellsubstanz zu energisch mitfärbte.

Frage 5. Eine Uebereinstimmung dieser Pigmente liegt darin, daß sie einmal in Schwefelsäure sehr deutlich dunkler werden und zweitens, daß sie gegenüber dem Licht wenig beständig sind.

Durch letztere Eigenschaft unterscheiden sie sich deutlich von den melanotischen Pigmenten des menschlichen Körpers. Die volle Uebereinstimmung dieser Farbstoffe aber wird dadurch gestört, daß ihr Verhalten gegen Salzsäure, Essigsäure und Aetzkali in concentrirtem oder verdünntem Zustande deutliche Verschiedenheiten darbietetet, indem sie darin theils dunkler werden, theils bleichen und theils unverändert bleiben. Es handelt sich demnach um chemisch differente Körper, die einander jedoch näher stehen als den melanotischen Pigmenten, sodaß man beim Menschen zwei Gruppen von Farbstoffen unterscheiden kann, einerseits die Melanine, andererseits die hier in Rede stehenden, denen sich vielleicht noch manche andere anreihen werden.

Ueber das Analogon der Kummer'schen Fläche für $p = 3$.

Von

Wilhelm Wirtinger.

Vorgelegt von F. Klein.

Auf Anregung des Herrn Prof. Klein unternahm ich es, die Mannigfaltigkeit näher zu untersuchen, welche erhalten wird, wenn man 8 linear unahängige Quadrate von Thetafunctionen dreier Veränderlichen proportional den 8 homogenen Punktcoordinaten eines Raumes von 7 Dimensionen setzt.

Es zeigte sich, daß diese neben einem, dem der Kummer'schen Fläche analogen System von Collineationen, auch das entsprechende System von reciproken Umformungen in sich besitzt.

Um dies näher auseinander zu setzen, schicken wir einiges über die im folgenden gebrauchte Bezeichnungsweise voraus.

Wir verstehen unter einem R_ν des Raumes von 7 Dimensionen eine durch $7-\nu$ lineare Gleichungen zwischen den 8 homogenen Punktcoordinaten x_i des Raumes von 7 Dimensionen definirte Mannigfaltigkeit, und gebrauchen für R_2, R_1, R_0 resp. die Ausdrücke Ebene, Gerade, Punkt.

Die 8 Coefficienten U_i der Gleichung eines R_6 bezeichnen wir als die Coordinaten desselben. Die Gleichung $\sum_0^7{}_i\, U_i x_i = 0$ sagt dann aus, daß der Punkt x in dem R_6 U liegt, und umgekehrt, daß der R_6 U durch den Punkt x hindurchgeht. Ferner verstehen wir unter Collineation eine durch 8 lineare Gleichungen

$$x'_i = \rho \sum_0^7{}_k\, a_{ik} x_i \qquad (i = 0, 1, 2 \dots 7)$$

definirte Transformation des R_7 in sich selbst. Unter einer Correlation dagegen verstehen wir eine Zuordnung der Punkte des R_7 zu den R_6 desselben, welche durch ein Gleichungssystem

$$U_i = \rho \sum_0^7{}_k\, a_{ik} x_i \qquad (i = 0, 1, 2 \dots 7)$$

definirt ist. Ist diese letztere Beziehung so beschaffen, daß den Punkten eines R_6—U— diejenigen R_6 entsprechen, welche durch den dem U entsprechenden Punkt x hindurch gehen, dann nennen wir die Correlation eine involutorische. Ersetzt man in diesem Falle in $\sum_0^7 U_i x_i = 0$ die U_i durch ihre Ausdrücke in den x_i, so erhält man entweder ein Gebilde 2ter Ordnung M_6^2, dessen sämmtliche Punkte in den ihnen entsprechenden R_6 liegen, oder der Ausdruck verschwindet identisch. Im ersten Falle nennen wir die Correlation Polarsystem und M_6^2 die Ordnungs-M_6^2, im letzteren Falle aber ein Nullsystem.

Ein algebraisches Gebilde von ν Dimensionen nennen wir von der Ordnung n, wenn die definirenden Gleichungen mit jedem System von $7—\nu$ linearen Gleichungen zusammen n Lösungen zulassen, d. h. das Gebilde von einem $R_{7-\nu}$ in n Punkten geschnitten wird. Wir bezeichnen ein solches Gebilde mit $M_{7-\nu}^n$.

Die hier gegebenen Definitionen sind nichts, als die auch sonst schon vielfach verwandte Erweiterung der im gewöhnlichen Raume gebräuchlichen Benennungen auf unsern Raum.

Verstehen wir nun unter $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7$ die Charakteristiken eines zur Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right) = \beta_0$ gehörigen vollständigen Systems [1]), so sind durch die 8 Functionen $\vartheta^2\{\beta_i\}(u_h)$ die Quadrate der übrigen 56 Thetafunctionen linear und homogen darstellbar und es besteht die Relation

$$\text{I)} \qquad \vartheta^2\{\beta_0\}\vartheta\{\beta_0\}(u_h + v_h)\,\vartheta\{\beta_0\}(u_h - v_h) = \sum_{i=0}^{i=7}\vartheta^2\{\beta_i\}(u_h)\,\vartheta^2\{\beta_i\}(v_h)\ ^{2)}.$$

Setzen wir nun

$$x_i = \rho\,\vartheta^2\{\beta_i\}(u_h)$$

1) Vgl. Weber, Theorie der Abelschen Functionen vom Geschlechte 3, pag. 25. Wir gebrauchen im folgenden durchaus die Weber'sche Bezeichnung, und citiren diese Schrift mit W.

2) W. pag. 35.

so ist dadurch eine M_3^{24} definirt. Nach einem Satze von Poincaré hat nämlich ein Gleichungsystem

$$\Theta_1(u_h) = \Theta_2(u_h) = \Theta_3(u_h) = \cdots = \Theta_p(u_h) = 0$$

wo $\Theta_1, \Theta_2 \cdots \Theta_p$ Thetafunctionen von p Variabeln und derselben τ_{ik} von den resp. Ordnungen $m_1, m_2 \cdots m_p$ bedeuten, $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdots m_p \cdot p!$ Lösungen [1]). Dieß ergiebt in unserem Falle, wenn wir drei lineare Verbindungen der x_i, nachdem wir diese durch die Thetaquadrate ersetzt haben, gleich Null setzen, zunächst $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 = 48$ Lösungen. Da aber, wenn u_h eine Lösung ist, auch $-u_h$ ein solche ist, beide aber dieselben x_i ergeben, so wird unsere M_3 von einem R_4 nur in 24 Punkten getroffen, ist also wirklich von der 24ten Ordnung [2]).

Was nun die Eigenschaften dieser M_3^{24} angeht, so ist zunächst klar, daß jeder R_6 des Coordinatenoctaeders die M_3^{24} längs einer M_2^{12} berührt, da ja die Coordinaten vollständige Quadrate in den Parametern u_h sind. Denkt man sich ferner die 56 übrigen Thetaquadrate durch die 8 zur Definition unserer Mannigfaltigkeit verwendeten dargestellt, und in den so erhaltenen Linearformen die $\vartheta^2\{\beta_i\}(u_h)$ durch die x_i ersetzt, so stellt eine solche Linearform gleich Null gesetzt einen R_6 dar, welcher aus denselben Gründen, wie die Coordinaten $-R_6$, ebenfalls längs einer M_2^{12} berührt, so daß wir im ganzen 64 längs ebensovielen M_2^{12} berührende R_6 erhalten.

Vermehrt man jetzt die Argumente der 8 Thetaquadrate $\vartheta^2\{\beta_i\}(u_h)$ um ein zusammengehöriges System halber Perioden $\frac{1}{2}\omega_h$ (mit der Charakteristik ω), wodurch offenbar das Gebilde in sich übergeht, und drückt die $\vartheta^2\{\beta_i + \omega\}(u_h)$ durch die $\vartheta^2\{\beta_i\}(u_h)$ aus, ersetzt dann die $\vartheta^2\{\beta_i + \omega\}(u_h)$ durch x_i', die $\vartheta^2\{\beta_i\}(u_h)$ durch x_i, so ist dadurch ein System von 63 oder — die Identität mit eingerechnet — von 64 Collineationen gegeben, welches unser Gebilde in sich überführt, die 64 längs einer M_2^{12} berührenden R_6 aber untereinander vertauscht, und zwar so, daß die Vertauschungsgruppe einfach transitiv ist.

Diese Collineationen vertauschen aber auch die Punkte mit den Argumenten $u_h = \frac{1}{2}\omega_h$, und da der Punkt $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ ein

---

1) Poincaré, Bulletin de la Société Mathématique de France, tome XI, pag. 129.

2) Dies wurde bereits von Herrn Klein in einer Leipziger Vorlesung vom Winter 1885/86 mitgetheilt; vgl. auch Reichardt's Dissertation, Leipzig 1887, Nachtrag.

vierfacher ist, wie man daraus erkennt, daß $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ eine 8fache Lösung des Gleichungssystems

$$\sum_1^7 a_i \vartheta^2\{\beta_i\}(u_h) = 0, \quad \sum_1^7 b_i \vartheta^2\{\beta_i\}(u_h) = 0, \quad \sum_1^7 c_i \vartheta^2\{\beta_i\}(u_h) = 0$$

ist und zwei Werthsysteme der u_h von entgegengesetzten Zeichen immer dieselbe Stelle unserer Mannigfaltigkeit definiren, so hat unsere M_3^{24} auch 64 vierfache Punkte.

Dieselben liegen zu je 28 in den 64 R_6, und die letzteren gehen zu je 28 durch diese Punkte, so daß dadurch eine Configuration $(64)_{28}$ im R_7 gegeben ist. Denn die 28 ungeraden Thetafunctionen verschwinden für die Nullwerthe der Argumente, die Thetafunktion mit der Charakteristik β_0 dagegen für die 28 Systeme halber Perioden mit ungerader Charakteristik, und da durch die 64 Collineationen jeder unserer 64 R_6 aus dem $R_6 : x_6 = 0$ und jeder unserer 64 Punkte aus dem Punkte $u_h = 0$ hervorgeht, die Gesammtheit unserer Punkte und R_6 aber dieselbe bleibt, so folgt unsere Behauptung.

Wir behaupten nun:

„Unsere M_3^{24} geht auch durch $28 + 36$ Correlationen in sich über, nämlich 28 Nullsysteme und 36 Polarsysteme, welche mit den 64 Collineationen derart eine Gruppe bilden, daß alle Punkte und R_6 des R_7 vermöge dieser Correlationen sich zu Configurationen $(64)_{28}$ zusammenordnen. Wenn wir sagen, daß dabei die M_3^{24} in sich übergeht, so ist das so zu verstehen, daß dabei die Punkte der M_3^{24} mit gewissen R_6 zusammengeordnet werden, die man im dualistischen Sinne als der M_3^{24} angehörig betrachten kann.

Diese R_6 sind unter allen R_6, welche durch den Tangential R_3 eines Punktes der M_3^{24} hindurchgehen, dadurch charakterisirt, daß jeder einzelne von ihnen die M_3^{24} längs einer ganzen C_6, die in einem R_3 liegt, berührt; durch jeden Punkt der M_3^{24} gehen einfach unendlich viele R_6, welche ihrerseits ein Gebilde 6ter Classe umhüllen; die Beziehung zwischen den Punkten und R_6 ist eine durchaus dualistisch umkehrbare".

Zum Beweise bedürfen wir des folgenden Hülfssatzes: Eine Relation

$$\text{A)} \qquad \sum_{(i,k=0,1,2\ldots 7)} A_{ik} \vartheta^2\{\beta_i\}(u_h)\, \vartheta^2\{\beta_k\}(u_h) = 0$$

kann nur dann für alle Werthe der u_h bestehen, wenn jenes $A_{ik} = 0$ ist.

Setzen wir nämlich in Formel I $u_h = v_h + \frac{1}{2}\omega_h$, unter ω eine gerade Charakteristik verstanden, so bekommen wir die 36 Functionen $\vartheta\{\omega\}(2u_h)$ ausgedrückt durch die 36 Größen $\vartheta^2\{\beta_i\}(u_h)\vartheta^2\{\beta_k\}(u_h)$. Einer Relation von der Form A) mit nicht verschwindenden Coefficienten müßte daher auch eine lineare Relation zwischen den $\vartheta\{\omega\}(2u_h)$ entsprechen. Eine solche ist aber unmöglich; also kann auch keine Relation A) mit nicht verschwindenden Coefficienten statt haben.

Setzen wir nun

$$U_i = \rho\,\vartheta^2\{\beta_i\}(u_h + \tfrac{1}{2}\omega_h) = \rho_1\,\vartheta^2\{\beta_i + \omega\}(u_h),$$

unter ω eine ungerade Charakteristik verstanden, ersetzen die rechten Seiten durch ihre Ausdrücke in den $\vartheta^2\{\beta_i\}(u_h)$ und schließlich diese selbst wieder durch die x_i, so sind dadurch, wie ich jetzt behaupte, 28 Nullsysteme definirt. Denn setzt man in Formel I $v_h = u_h + \frac{1}{2}\omega_h$, so verschwindet für eine ungerade Charakteristik ω die linke Seite, während wir auf der rechten Seite, wenn wir die $\vartheta^2\{\beta_i + \omega\}(u_h)$ durch die $\vartheta^2\{\beta_i\}(u_h)$ ausdrücken, gerade das erhalten, was aus dem Ausdruck $\sum\limits_0^7 U_i x_i = 0$ wird, wenn wir die U_i gemäß unserer Correlation durch die x_i ausdrücken, und diese dann durch die $\vartheta^2\{\beta_i\}(u_h)$ ersetzen. Nun müssen aber die hier auftretenden Coefficienten der $\vartheta^2\{\beta_i\}(u_h)\vartheta^2\{\beta_k\}(u_h)$ sämmtlich nach dem Hülfssatze verschwinden, also auch die Coefficienten der $x_i x_k$. Wir haben es also in der That mit Nullsystemen zu thun.

Setzen wir ferner

$$U_i = \rho\,\vartheta^2\{\beta_i\}(u + \tfrac{1}{2}\tilde{\omega}_h) = \rho_1\,\vartheta^2\{\beta_i + \tilde{\omega}\}(u_h),$$

unter $\tilde{\omega}$ eine gerade Charakteristik verstanden, so erhalten wir 36 Polarsysteme, wenn wir wieder die $\vartheta^2\{\beta_i + \tilde{\omega}\}(u_h)$ durch die $\vartheta^2\{\beta_i\}(u_h)$ darstellen und dann die letzteren wieder durch die x_i ersetzen. Man schließt nämlich den involutorischen Charakter dieser Correlationen einfach daraus, daß bis auf einen constanten Factor die $\vartheta^2\{\beta_i + \tilde{\omega}\}(u_h)$ sich ebenso durch die $\vartheta^2\{\beta_i\}(u_h)$ darstellen lassen, wie diese durch jene, daß aber ein Nullsystem vorliegen sollte, ist ausgeschlossen, weil wir es mit einer geraden Charakteristik zu thun haben. Dies sind die beiden Arten von Correlationen, welche wir weiter zu untersuchen haben. Uebrigens erkennt man für sie wie für die Collineationen leicht die Regel, daß man die Coordinaten des entsprechenden Gebildes erhält, wenn man in den Ausdrücken der $\vartheta^2\{\beta_i+\omega\}(u_h)$ durch die $\vartheta^2\{\beta_i\}(u_h)$ die letzteren durch die Coordinaten des Ausgangsgebildes ersetzt. Da nun die $\vartheta^2\{\beta_i+\omega\}(u_h)$ nur auf eine Weise durch die $\vartheta^2\{\beta_i\}(u_h)$ dargestellt werden können, so folgt, daß man auch bei successiver Anwendung mehrerer Transformationen die Coordinaten des letzten Gebildes nach derselben Regel erhält, wenn man nur statt ω die Summe der den einzelnen Operationen zugehörigen Charakteristiken schreibt.

Daraus folgt nun unmittelbar, daß unsere Collineationen und Correlationen in ihrer Gesammtheit eine Gruppe im strengen Sinne des Wortes bilden. Denn, wenn wir der obigen Regel entsprechend irgend zwei Operationen nacheinander anwenden, kommen wir wieder zu einer schon in der Gruppe vorhandenen Operation.

Betrachten wir nun einen beliebigen R_6 unseres Raumes von 7 Dimensionen, so entsteht durch unsere Operationsgruppe daraus ein Aggregat von 64 R_6 und 64 Punkten, während die Combination dieser Operationen untereinander keine weiteren Gebilde liefert.

Dann müssen aber wegen der 28 Nullsysteme je 28 Punkte in einem der 64 R_6 liegen und je 28 R_6 durch einen der 64 Punkte gehen.

Die Punkte und R_6 des R_7 werden daher zu Configurationen $(64)_{28}$ zusammengeordnet, wie behauptet wurde.

Durch die sonach festgelegte Operationsgruppe, insbesondere durch die 64 in ihr enthaltenen dualistischen Transformationen soll nun unsere M_3^{24} in dem schon erwähnten Sinne in sich übergehen.

Zunächst wird durch unser System von 64 Reciprocitäten unsere M_3^{24} in eine 3fach unendliche Mannigfaltigkeit von R_6 übergeführt, welche man durch die Gleichungen

$$U_i = \rho\,\vartheta^2\{\beta_i\}(v_h) \qquad i = (0, 1, \ldots 7)$$

darstellen kann, und umgekehrt diese Mannigfaltigkeit in unsere M_3^{24} umgeformt.

Es soll nun die geometrische Beziehung dieser R_6-Mannigfaltigkeit zur Punktmannigfaltigkeit untersucht werden.

Der R_6 mit den Parameterwerthen v_h schneidet zufolge der Formel I unsere M_3^{24} in einem Gebilde M_2^{24}, welches durch

$$\vartheta(u_h+v_h)\,\vartheta(u_h-v_h) = 0$$

gegeben ist. Nun stellt aber jeder der beiden Factoren gleich Null gesetzt dasselbe Gebilde vor, da, wenn ein Werthsystem u_h den ersten zu Null macht, das Werthsystem $-u_h$ den zweiten zu

Null macht. Setzen wir aber beide Factoren gleichzeitig Null, so ist dadurch ein eindimensionales Gebilde, also eine Curve auf M_3^{24} bestimmt, längs welcher sich das Schnittgebilde unseres R_6 verhält wie zwei verschiedene Zweige eines und desselben Gebildes, also eine Doppelcurve. Der Poincaré'sche Satz ergiebt ihre Ordnung gleich 6. Differentiirt man ferner Formel I nach v_1, v_2, v_3 und setzt dann erst $v_h = \bar{v}_h$, so erkennt man, daß unsere Curve gleichzeitig in 4 von einander unabhängigen R_6 also in einem R_3 liegt, welcher als Schnitt von 4 unendlich benachbarten R_6 der betrachteten Mannigfaltigkeit aufgefaßt werden kann.

Die reciproken Resultate erhält man nun einfach dadurch, daß man im Vorhergehenden die u_h mit den v_h vertauscht, womit dann unsere Behauptung vollständig bewiesen ist.

Göttingen, 25. Juli 1889.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Juli 1889.

Sitzungsberichte der K. Pr. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. XXVIII, XXIX u. XXX, XXXI, XXXII u. XXXIII, XXXIV, XXXV, XXXVI u. XXXVII.

Veröffentlichungen der Großherzoglichen Sternwarte zu Karlsruhe. Heft 3. Karlsruhe 1889.

Berichte über die Verhandlungen d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig. Philologisch-historische Classe. 1889. I. Leipzig 1889.

Jahresbericht der fürstl. Jablonowski'schen Gesellschaft. Leipzig, April 1889.

Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historischen Classe der k. b. Akad. d. Wiss. zu München. 1889. Heft II. München 1889.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Im Auftrage des Naturwissenschaftlichen Vereins für Sachsen und Thüringen. Halle 1888.

Der ganzen Reihe LXI. Bd. Vierte Folge Bd. 7. Heft 5. 6.

» » » LXII. » » » » 8. » 1.

Leopoldina Heft XXV. N. 11. 12.

Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät in Erlangen. 1888. München 1889.

Mitteilungen des Altertumsvereins zu Plauen im V. Sechste Jahresschrift für 1886—87. Plauen i. V. 1887.

Meteorologische Zeitschrift. Jahrg. 6. 1889. Heft 7. Wien 1889.

Verhandlungen der K. K. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Band XXXIX. Quartal 1 u. 2. Jahrg. 1889. Wien 1889.

Verhandlungen der K. K. geologischen Reichsanstalt. No. 7—9. 1889.

Mittheilungen des Musealvereines für Krain. Jahrg. 2. Laibach 1889.

Ungarische Revue. Heft VII. 1889. Budapest 1889.

Mittheilungen des Vereins für Aerzte in Steiermark. XXV. Vereinsjahr. 1888. Graz 1889.

Orvos Természettudomànyi Ertesitö 1889. XIV. Evfolyam II. Természettudomànyi szak. füzet 1. 2. Kolozvark 1889.

XVIII. Jahresbericht der historisch-antiq. Gesellschaft von Graubünden. Jahrgang 1888. Chur.

Proceedings of the Royal physical society. Session 1887—88. Edinburgh 1888.

Proceedings of the scientific meetings of the Zoological society of London for 1889. Part I. Jan. and February. London.

Monthly notices of the R. astronomical society. Vol. XLIX. N. 8. June 1889.

Proceedings of the Royal society. Vol. XLVI. N. 280.

Proceedings of the Liverpool biological society. Vol. III. Session 1888—89. Liverpool 1889.

The transactions of the Royal Irish Academy. Vol. XXIX. Part VIII. Dublin 1889.

The scientific transactions of the R. Dublin society. Vol. IV. Series II. N. 2. 3. 4. 5. Dublin 1889.

The scientific proceedings of the R. Dublin society. Vol. VI. Part. 3. 4. 5. 6. Dublin 1888.

Nature. Vol. 40. 1027—1030.

Journal and proceedings of the R. society of New South Wales. Vol. XXII. Part II. 1888. Sidney.

Atti della R. Accademia dei Lincei 1889. Serie quarta. Rendiconti. Vol. V. fasc. 6. 1. semestre. Roma.

a. Dell' aftalosio di racalmuto in Sicilia. (Estratto dal vol. V. 1. sem. fasc. 11. d. Rendiconti d. R. Acc. dei Lincei.) Roma 1889.
b. Sulla forma cristallina dell' ossido cromico. (Estr. d. Memorie V. vol. Classe scienze fis., mat. e natur. d. Accad. dei Lincei.) Roma 1889.

by G. Struever.

Atti della società Toscana di scienze naturali. Processi verbali. Vol. VI. ad. del di 12 maggio 1889.

Biblioteca nazionale centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane 1889. N. 85. Firenze 1889.

Mémoires de l'académie Imp. des sciences de St. Pétersbourg. VII^{e} série. Tome XXXVI. N. 14, 15, 16. St. Pétersbourg 1889.

a. Bulletin de la société Imp. des naturalistes de Moscou. Année 1889. N. 1. Moscou 1889.

b. Beilage zum Band 2, zweite Serie. Meteorologische Beobachtungen der landwirthschaftl. Akad. bei Moskau. Das Jahr 1888, zweite Hälfte. Moskau 1889.

Archives neerlandaises des sciences exactes et naturelles publ. par la société hollandaise des sciences de Harlem. Tome XXIII. livr. 3 et 4. Harlem 1889.

Bijdragen tot de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 5. Volgreeks. 4. Deel. 3. aflever. 's Gravenhage 1889.

Dagh-Register gehouden int Casteel Batavia Anno 1659. Batavia 's Hage 1889.

Notulen van de Algemeene en Bestuurs-Vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel XXVI. 1888. Afl. IV.

Tijdschrift voor Indische Taal-, Land en Volkenkunde. Deel XXXII. 1889. Afl. 6.

Bulletin de l'Académie R. de Belgique. 59. année. 3. série. tome 17. N. 6. Bruxelles 1889.

Leçons synthétiques de mécanique générale par M. J. Boussinesq. Paris 1889.

Variétés bibliographiques. Année 1. N. 7. 1889.

Annuaire de l'observatoire municipal de Montsouris pour l'an 1889. Paris 1889.

Journal de sciencias mathematicas, physicas e naturales da Academia real das sciencias de Lisboa.

a. 1881. N. XXX. N. XXXI.
b. 1882. N. XXXII. N. XXXIV.
c. 1883. N. XXXV. N. XXXVI.
d. 1884. N. XXXVII—XXXIX.
e. 1885. N. XL. N. XLI.
f. 1886. N. XLII. N. XLIII.
g. 1887. N. XLIV. N. XLV. N. XLVI.
h. 1888. N. XLVII. N. XLVIII.
i. 1889. Secunda serie. Tomo I. N. 1. Lisboa.

Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas. Vol. IX. N. 2. Coimbra 1889.

Report of the Chief signal Officer War Department 1888. Washington 1889.

Bulletin of the American Geographical society. Vol. XXI. N. 2. 1889. NewYork.

Bulletin of the Museum of comparative Zoology at Harvard college. Whole series. Vol. XVI. N. 5. Cambridge 1889.

Anales de la sociedad cientifica Argentina 1889. Entrega II, III. Tomo XXVII. Buenos Aires 1889.

Mitteilungen aus der medizinischen Fakultät der Kaiserl. Japanischen Universität. Band I. N. 3. Tokio 1889.

Nachträge.

Astronomische Mittheilungen d. Sternwarte Zürich v. Dr. R. Wolf. Mai 1889.

Inhalt von No. 18.

F. Maass, Ueber die beim Menschen vorkommenden körnigen Pigmente. — *Wilhelm Wirtinger*, Ueber das Analogon der Kummer'schen Fläche für $p = 3$. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

21. August. **№ 17.** 1889.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber die Oxime des Phenanthrenchinons.

Von

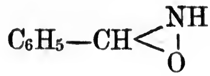
Karl Auwers und **Victor Meyer.**

Einleitung.

Unsere Untersuchungen über die Oxime des Benzils haben es sehr wahrscheinlich gemacht, daß in diesen Körpern structur identische stereochemisch isomere Verbindungen vorliegen Den zunächst gegen unsere Auffassung erhobenen Bedenken konnten wir im Hinblick auf die von uns experimentell festgestellten Thatsachen keine Bedeutung zuerkennen, und wir sahen uns daher nicht veranlaßt, näher auf dieselben einzugehen. Anderer Natur waren dagegen die Einwände, welche auf Grund der schönen Arbeiten R. Behrend's[1]) über Benzylhydroxylamine und namentlich E. Beckmann's über die isomeren Benzaldoxime gegen die Annahme einer stereochemischen Isomerie der Benziloxime geltend gemacht werden konnten. Die von Beckmann[2]) erwiesene Thatsache, daß die Isomerie der beiden Benzaldioxime auf der verschiedenen Structur ihrer Oximidogruppen beruht, welche in den Formeln

1) Berichte d. Deutsch. Chem. Ges. XXII, 384, 613.
2) Ibid. XXII, 429, 514.

$$C_6H_5—CH = N—OH \quad \text{und}$$



ihren Ausdruck findet, erschien uns im höchsten Grade beachtenswerth; wir führten indessen sogleich nach dem Erscheinen jener Abhandlung kurz aus [1]), daß die Verhältnisse bei den Benziloximen anders liegen, und die für die Isomerie der Benzaldoxime zutreffende Erklärung nicht auf jene übertragen werden darf. Wir sind erfreut, aus der letzt erschienenen Arbeit E. *Beckmann's* [2]) zu ersehen, daß wir uns in voller Uebereinstimmung mit diesem Forscher befinden, welcher in der erwähnten Abhandlung einen weitern, eleganten Beweis für die Structurverschiedenheit der Benzaldoxime beibringt, jedoch gleich uns die Isomerie der Benziloxime als auf durchaus anderer Ursache beruhend erkennt.

Um weiteres Material zur Prüfung unserer Theorie zu gewinnen, boten sich uns in erster Linie zwei Wege dar: eine directe und eine indirecte Beweisführung.

Einerseits durften wir erwarten, durch ein genaues Studium der *Benzyläther der Benziloxime* zu einem endgültigen Beweise dafür zu gelangen, daß in den isomeren Benziloximen isomere Oximidogruppen, wie sie die Benzaldoxime enthalten, *nicht* vorkommen.

Ueber die auf diesem Wege erhaltenen Ergebnisse ist in einer besonderen Mittheilung von *Auwers* und *Dittrich* berichtet worden; hier sei nur bemerkt, daß sich die Resultate dieser Untersuchung durchweg im Einklang mit unseren Voraussetzungen befinden.

Der indirecte Beweis für die Richtigkeit unserer Annahme konnte erbracht werden, wenn es gelang zu zeigen, daß nur Ketone von ganz bestimmter Constitution unter denselben oder ähnlichen Bedingungen wie das Benzil den isomeren Benziloximen analoge isomere Hydroxylaminderivate liefern, daß aber den übrigen Ketonen die Fähigkeit, *derartige* isomere Oxime zu bilden, abgeht. Isomere Ketoxime mit *verschieden constituirten Oximidogruppen* oder wenigstens Aether solcher Verbindungen — bekanntlich sind isomere *freie* Oxime von verschiedener Structur bis jetzt nur bei einem Aldehyd, dem Benzaldehyd, nachgewiesen worden — werden nämlich voraussichtlich Ketone der *verschie-*

1) Berichte d. Deutsch. Chem. Ges. XXII, 564.
2) Ibid. XXII, 1531.

densten Structur zu liefern vermögen, denn es ist nicht wahrscheinlich, daß die mit der Carbonylgruppe verbundenen verschiedenen Reste auf das Zustandekommen oder Nichtzustandekommen der beiden Gruppen

$$C = N—OH, \text{ bezw. } C\Big<{NH \atop | \atop O}$$

irgend einen erheblichen Einfluß ausüben. Umgekehrt ist die Existenzfähigkeit stereochemisch isomerer Oxime naturgemäß an die Erfüllung einer ganzen Reihe von Bedingungen geknüpft, so daß nur eine beschränkte Anzahl von Ketonen befähigt sein wird, dieselben zu bilden, und man mit Wahrscheinlichkeit voraussagen kann, ob ein bestimmtes Keton Oxime, deren Isomerie derjenigen der Benziloxime entspricht, liefern wird oder nicht.

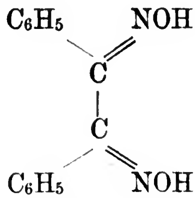
Zu diesem Zwecke hat früher Hr. A. Stierlin[1]) die substituirten Benzile Anisil und p-Tolil untersucht und gezeigt, daß sich dieselben in Bezug auf Oximbildung genau wie das Benzil selbst verhalten, und andererseits haben wir[2]) nachgewiesen, daß das Benzophenon, ein dem Benzil so nahestehender Körper, bei dem jedoch die Bedingungen für das Entstehen stereochemisch isomerer Derivate nicht gegeben sind, unter den beim Benzil erprobten Bedingungen kein zweites Oxim zu liefern vermag. Man konnte gegen die Beweiskraft des letzteren Versuches einwenden, daß ein Monoketon nicht ohne Weiteres einem Diketon vergleichbar sei; es galt mithin, ein Diketon zu untersuchen, welches dem Benzil möglichst ähnlich ist, dessen Constitution dabei jedoch nach unserer Hypothese der Bildung stereochemisch isomerer Oxime nicht günstig ist oder dieselbe gänzlich verhindert.

Ein Körper, der in dieser Beziehung vorzüglich geeignet erschien, den Prüfstein für die Richtigkeit unserer Annahme abzugeben, ist das Phenanthrenchinon.

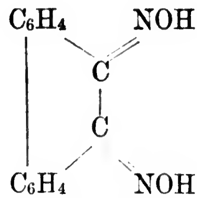
Benzil und Phenanthrenchinon sind chemisch nahe verwandte Körper: beide sind Orthodiketone, beide condensiren sich leicht mit Orthodiaminen, beide erleiden unter dem Einfluß von Alkali dieselbe merkwürdige Atomverschiebung zu Diphenyl- bezw. Diphenylenglycolsäure u. s. w. Ist mithin die Isomerie der Benziloxime in der Verschiedenheit ihrer Oximidogruppen begründet, so darf man mit großer Wahrscheinlichkeit erwarten, denselben Ver-

1) Berichte d. Deutsch. Chem. Ges. XXII, 376.
2) Ibid. XXII, 549.

hältnissen bei den Oximen des Phenanthrenchinons wieder zu begegnen. Anders wenn die Isomerie der Benziloxime eine stereochemische ist. Blickt man auf die Formeln z. B. der Dioxime beider Substanzen:



Benzildioxim



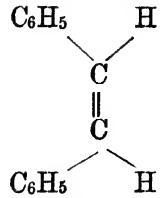
Phenanthrenchinondioxim

so bemerkt man, daß die beschränkte Drehbarkeit der centralen Kohlenstoffatome, auf welcher unserer Ansicht nach die Isomerie der Benziloxime beruht, in Phenanthrenchinon und seinen Abkömmlingen durch die Bindung zwischen den beiden Phenylgruppen aufgehoben oder doch zum mindesten sehr erschwert ist, da die beiden Benzolreste, welche im Benzil nicht unmittelbar zusammenhängen, im Phenanthrenchinon sowohl direct als auch durch Vermittelung der centralen Kohlenstoffatome mit einander verbunden und daher, in ähnlicher Weise wie zwei doppelt gebundene Kohlenstoffatome, in gewissem Sinne in ihrer gegenseitigen Lage fixirt sind. Daher läßt unsere Theorie erwarten, daß das Phenanthrenchinon trotz seiner sonstigen großen Aehnlichkeit mit dem Benzil im Gegensatz zu diesem unter den gleichen Bedingungen nur ein Monoxim, und nur ein Dioxim zu bilden vermag.

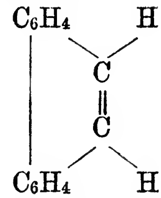
Die Thatsachen entsprechen vollkommen den Forderungen unserer Hypothese. Weder haben wir aus dem Phenanthrenchinon direct unter den verschiedensten Bedingungen, welche beim Benzil zur Entstehung isomerer Oxime führen, ein zweites Monoxim oder Dioxim erhalten können, noch haben wir vermocht, das Monoxim oder Dioxim des Phenanthrenchinons mit den üblichen Mitteln in isomere Verbindungen überzuführen.

Allerdings dürfen wir nicht unterlassen, auf einen Umstand hinzuweisen, welcher das Schlagende dieser Beweisführung etwas beeinträchtigt. v. Baeyer[1]) hat nämlich vor kurzem gezeigt, daß Stilben und Phenanthren, welche sich von einander ähnlich wie Benzil und Phenanthrenchinon unterscheiden:

1) Ann. Chem. Pharm. 251, 286.



Stilben



Phenanthren

sich gänzlich verschieden gegen Kaliumpermanganat verhalten. Während die Acetylengruppe des Stilbens augenblicklich von dem Oxydationsmittel angegriffen, und das Stilben in Benzaldehyd verwandelt wird, ist dieselbe Acetylengruppe durch die im Phenanthren erfolgte Ringschließung gegen die Oxydation geschützt: das Phenanthren wird von Kaliumpermanganat nicht angegriffen. Wir glauben indessen nicht, daß man aus diesem verschiedenen Verhalten der Gruppe —CH = CH— in beiden Substanzen den Schluß ziehen darf, daß auch die Gruppe —CO—CO— im Phenanthrenchinon einen andern Charakter besitze als im Benzil, denn abgesehen davon, daß die Aehnlichkeit zwischen letztern beiden Substanzen eine weit größere ist als diejenige zwischen Stilben und Phenanthren, bleiben ja gerade alle charakteristischen Eigenschaften der Orthodiketongruppe, durch welche das Benzil ausgezeichnet ist, bei dem Uebergang desselben in das Phenanthrenchinon erhalten. Hervorgehoben sei außer den bereits oben angeführten Puncten hier besonders noch die Thatsache, daß das Monoxim des Phenanthrenchinons in normaler Weise die Beckmann'sche Umlagerung erleidet, indem es sich unter dem Einfluß gasförmiger Salzsäure in der Hitze in das isomere Diphenimid umlagert[1].

Somit liefert das Verhalten des Phenanthrenchinons ein weiteres wichtiges Argument zu Gunsten unserer stereochemischen Hypothese, während die Annahme eines Vorkommens verschiedener Oximidogruppen in den Benziloximen das gegensätzliche Verhalten des Phenanthrenchinons und Benzils völlig unerklärt lassen würde.

Experimenteller Theil.

Phenanthrenchinonmonoxim.

$$\begin{array}{l} C_6H_4 - C = NOH \\ | \qquad\quad | \\ C_6H_4 - CO. \end{array}$$

Wir stellten uns zunächst das bekannte Monoxim des Phenan-

1) Beckmann und Wegerhoff, Ann. Chem. Pharm. 252, 15.

threnchinons nach der Vorschrift von H. Goldschmidt[1]) durch Erhitzen von Phenanthrenchinon und der berechneten Menge salzsauren Hydroxylamins mit Alkohol auf dem Wasserbade dar.

Schon die sehr gute Ausbeute an diesem Oxim deutete darauf hin, daß dasselbe das einzige Product der Reaction sei, und in der That konnten aus den Mutterlaugen nur noch geringe weitere Mengen desselben Körpers, jedoch keine Spur einer isomeren Verbindung gewonnen werden. Der Schmelzpunct, welcher bei 158° lag, sowie die sonstigen Eigenschaften stimmten mit den früheren Angaben überein; hervorgehoben sei, daß die Natriumverbindung, welche sich aus der Lösung des Oxims in heißer Natronlauge beim Erkalten in grünlich schimmernden Blättchen ausscheidet, in kaltem Wasser sehr schwer löslich ist.

Um zu sehen, ob bei niedrigerer Temperatur vielleicht ein anderes Product gebildet würde, wurde der Versuch bei gewöhnlicher Temperatur wiederholt. Gleiche Molecüle Phenanthrenchinon und salzsaures Hydroxylamin wurden zu einem innigen Gemisch verrieben, mit wenig Alkohol zu einem dicken Brei angerührt und mehrere Tage bei Zimmertemperatur stehen gelassen.

Der Brei verwandelte sich hierbei allmählich in ein dichtes Haufwerk feiner Nädelchen, welche sich bei der Untersuchung als reines Monoxim vom Schmelzpunct 158° erwiesen.

Die Ausbeute war quantitativ; Nebenproducte waren nicht gebildet worden.

War ein zweites Monoxim des Phenanthrenchinons existenzfähig, so war nach den beim Benzil gemachten Erfahrungen die Bildung desselben bei der Einwirkung von freiem Hydroxylamin auf das Keton, am besten in alkalischer Lösung, zu erwarten. Bei der Ausführung dieser Versuche stellte es sich heraus, daß ein Ueberschuß von Alkali, gleichgültig ob Aetznatron oder Soda verwandt wurde, in der Wärme tiefer gehende Zersetzungen hervorruft. Sofort nach dem Zusammenbringen der einzelnen Substanzen färbte sich das Gemenge schwarzgrün, und nach wenigen Augenblicken der Erwärmung erfolgte eine stürmische Gasentwickelung. Nach dem Ansäuern der Reactionsproducte wurden flockige, dunkele Massen erhalten, aus denen sich nur verhältnißmäßig geringe Mengen des bereits erwähnten Monoxims isoliren ließen. Auch bei Vermeidung eines Ueberschusses von Alkali nahm die Reaction im Wesentlichen denselben Verlauf.

1) Berichte d. Deutsch. Chem. Ges. XVI, 2178. Vgl. auch Beckmann und Wegerhoff, loc. cit.

Bei gewöhnlicher Temperatur war die Reaction weniger stürmisch, doch trat auch hier auf Zusatz überschüssigen Aetznatrons eine schwarzgrüne Färbung und theilweise Verharzung ein, wogegen bei Anwendung von Soda eine glatte Umsetzung erfolgte.

Bei letzteren Versuchen wurde das fein gepulverte Gemisch von 1 Mol. Phenanthrenchinon und 1 Mol. salzsaurem Hydroxylamin mit Alkohol zu einem dicken Brei verrührt, zu dem darauf allmählich unter Kühlung eine concentrirte wässerige Lösung von Soda zugegeben wurde. Nach mehrtägigem Stehen hatten sich die Proben in dichte, röthlichgelbe Krystallgemenge verwandelt, welche nur mit verdünntem Alkohol ausgelaugt zu werden brauchten, um auf dem Filter nahezu reines Monoxim vom Schmelzpunct 158° zu hinterlassen. Ein kleiner Theil des Phenanthrenchinons blieb in der Regel unangegriffen. Irgend welche Nebenproducte konnten dagegen bei dieser Reaction nicht nachgewiesen werden.

Da man, wie aus diesen Versuchen hervorgeht, durch directe Einwirkung von Hydroxylamin auf Phenanthrenchinon unter den angegebenen Bedingungen zu keinem zweiten Monoxim gelangt, so blieb noch übrig zu versuchen, ob sich vielleicht durch dieselben Mittel, welche die unbeständigen Formen der Benziloxime in deren stabilere Modificationen umwandeln, das Phenanthrenchinonmonoxim gleichfalls in eine isomere Verbindung überführen lassen würde. Als zu diesem Zweck das Oxim mit absolutem Alkohol im Rohr mehrere Stunden auf 130° erhitzt worden war, erwies es sich, abgesehen von einer geringen Verharzung, unverändert, während das α-Benzilmonoxim schon bei 100° glatt in die γ-Modification verwandelt wird. Wurde die Versuchstemperatur auf 170—180° gesteigert, so trat weitgehende Verharzung ein, ohne daß es gelang, neben unverändertem Ausgangsmaterial ein krystallisirtes Reactionsproduct zu fassen.

Ebenso wenig lagert sich die Verbindung unter dem Einflusse des Beckmann'schen Gemisches — Eisessig, Essigsäureanhydrid und gasförmige Salzsäure — in ein stereochemisch isomeres Oxim um. Man kann vielmehr das Phenanthrenchinonmonoxim Tage lang mit diesem Gemisch bei Zimmertemperatur stehen lassen, ohne daß die Substanz im geringsten verändert wird; ja, selbst bei andauerndem Erhitzen auf 100° tritt, wie Beckmann und Wegerhoff (loc. cit.) gefunden haben, nur eine theilweise Acetylirung des Oxims, jedoch keine Umlagerung ein. Bei 130° endlich wird das Phenanthrenchinonmonoxim nach den genannten Autoren in Diphenimid $\begin{matrix} C_6H_4-CO \\ | \qquad\quad \\ C_6H_4-CO \end{matrix}\!\!>\!NH$ verwandelt; es tritt also in normaler Weise die von Beckmann an zahlreichen Oximen beobachtete, merkwürdige Atomverschiebung ein.

Phenanthrenchinondioxim.

Nachdem alle Versuche, ein zweites Monoxim des Phenanthrenchinons zu gewinnen, ergebnißlos verlaufen waren, wandten wir uns der Darstellung von Dioximen dieses Ketons zu. Bislang war nur das Anhydrid eines Phenanthrenchinondioxims bekannt, welches H. Goldschmidt [1]) durch Erhitzen von Phenanthrenchinon, salzsaurem Hydroxylamin und etwas Salzsäure im Rohr auf 180° dargestellt hatte. Das Dioxim selbst erhält man nach Versuchen, welche Hr. R. Stierlin auf unseren Wunsch angestellt hat, gerade wie das α-Benzildioxim, durch andauernde Digestion von fein gepulvertem Phenanthrenchinon mit einer Lösung von überschüssigem salzsaurem Hydroxylamin in Alkohol auf dem Wasserbade. Die Bildung des Dioxims vollzieht sich sehr langsam; bei Verarbeitung von 10 g Phenanthrenchinon (1 Mol.) und 14 g salzsaurem Hydroxylamin (4 Mol.) ist die Reaction erst nach etwa 30stündiger Digestion annähernd vollendet.

Das Reactionsproduct ist ein gelbes Krystallpulver, welches durch einmaliges Umkrystallisiren aus viel heißem Alkohol oder Eisessig rein erhalten wird. Aus diesen Lösungsmitteln scheidet sich die Verbindung in mikroskopischen, gelben Prismen aus, deren Schmelzpunct je nach der Art des Erhitzens etwas verschieden gefunden wird; bei mäßig raschem Erhitzen schmilzt die Substanz nach vorheriger Bräunung bei etwa 202°.

Die Zusammensetzung des Körpers wurde durch die folgenden Analysen, welche Hr. R. Stierlin ausgeführt hat, festgestellt.

I. 0.1871 g Substanz gaben 0.4853 g Kohlensäure und 0.0735 g Wasser.

II. 0.2100 g Substanz gaben 20.4 cc feuchten Stickstoff bei 12° und 758 mm Druck.

III. 0.2115 g Substanz gaben 20.5 cc feuchten Stickstoff bei 11°.5 und 761 mm Druck.

Berechnet für $C_{14}H_{10}N_2O_2$	Gefunden I.	II.	III.	
C 70.58	70.71	—	—	pCt.
H 4.20	4.38	—	—	„
N 11.77	—	11.50	11.55	„

Die Substanz ist unlöslich in Wasser, sehr wenig löslich in Chloroform und Benzol, schwer in heißem Alkohol, Aether und

1) Berichte d. Deutsch. Chem. Ges. XVI, 2178.

und Eisessig, mäßig löslich in Schwefelkohlenstoff. In heißer Natronlauge löst sich der Körper mit gelber Farbe, beim Erkalten scheidet sich das schwer lösliche Natriumsalz in perlmutterglänzenden Blättchen aus. In Kalilauge ist das Dioxim auch in der Kälte leicht löslich. In concentrirter Schwefelsäure löst sich das Dioxim wie das Monoxim mit blutrother Farbe.

Die Ausbeute an dieser Verbindung ist recht gut; aus den Mutterlaugen konnten neben weiteren Mengen der gleichen Substanz nur etwas Monoxim vom Schmelzpunct 158° gewonnen werden, jedoch keine Spur eines zweiten Dioxims. Durch die Einwirkung überschüssigen salzsauren Hydroxylamins auf Phenanthrenchinon in der Wärme wird also nur ein Dioxim gebildet, während bekanntlich das Benzil unter denselben Bedingungen zwei Dioxime liefert.

Bei gewöhnlicher Temperatur läßt sich derselbe Versuch nicht durchführen. Als nämlich die Componenten in dem oben angegebenen Verhältniß mit Alkohol zu einem Brei verrieben und bei Zimmertemperatur stehen gelassen wurden, stellte es sich heraus, daß unter diesen Bedingungen die Reaction selbst bei wochenlangem Stehen nur bis zur Bildung des Monoxims fortschreitet; ein Dioxim konnte auf diese Weise nicht erhalten werden.

Bezüglich der Versuche mit Hülfe von überschüssigem freiem Hydroxylamin aus dem Phenanthrenchinon ein zweites Dioxim zu gewinnen, gilt genau das bei der Darstellung des Monoxims Gesagte, indem je nach den Bedingungen weit gehende Zersetzung oder glatte Bildung des bekannten Monoxims eintrat. Wie bei der Einwirkung des salzsauren Hydroxylamins blieb auch bei Gegenwart eines großen Ueberschusses von freier Base und Alkali und wochenlanger Versuchsdauer bei gewöhnlicher Temperatur die Reaction bei der Bildung des Monoxims stehen.

Dagegen gelang es in verdünnter wässerig-alkalischer Lösung das Monoxim bei Zimmertemperatur wenigstens theilweise in Dioxim überzuführen. 1 g Monoxim wurde in überschüssiger heißer Natronlauge gelöst, und darauf die Lösung so stark mit Wasser verdünnt, daß sich beim Erkalten nichts ausschied. Alsdann wurden 2 g salzsaures Hydroxylamin zugefügt, und das Ganze mehrere Tage stehen gelassen. Beim Ansäuern schied sich ein gelber Niederschlag aus, der ein Gemisch zweier Substanzen bildete. Durch mehrfache Krystallisation aus Alkohol wurden dieselben getrennt und rein dargestellt. Hierbei ergab es sich, daß der größere Theil jenes Niederschlages aus unverändertem Monoxim bestand, während der Rest des Monoxims in ein bei 202° schmelzendes Dioxim umgewandelt war, welches auch in seinen sonstigen Eigenschaften völlig mit dem zuvor beschriebenen Dioxim übereinstimmte.

Mithin wird durch freies, wie durch salzsaures Hydroxylamin aus Phenanthrenchinon dasselbe Dioxim gebildet, neben welchem in keinem Falle nachweisbare Mengen eines isomeren Körpers entstehen.

Der Versuch, durch Erhitzen mit Alkohol das Phenanthrenchinondioxim umzulagern, bot von vornherein wenig Aussicht auf Erfolg, da schon bei verhältnißmäßig niedriger Temperatur Anhydridbildung zu erwarten war. In der That wird das Dioxim bereits durch mehrstündiges Erhitzen mit absolutem Alkohol auf 150^0 vollständig in sein Anhydrid verwandelt. Diese Verbindung krystallisirte in langen, feinen, gelben Nadeln, welche bei 182—183^0 schmolzen — 181^0 nach Goldschmidt — und von wässeserigem Alkali selbst bei anhaltendem Kochen nicht angegriffen wurden. Als das Dioxim mit Alkohol 3—4 Stunden nicht über 130^0 erhitzt wurde, war die Anhydridbildung nur in geringem Maaße eingetreten, während die Hauptmasse des Dioxims sich als unverändert erwies. Außer diesen beiden Substanzen konnte kein weiterer Körper in dem Reactionsproduct nachgewiesen werden.

Diacetylphenanthrenchinondioxim.

Im Hinblick darauf, daß α- und γ-Benzildioxim besonders leicht durch das Beckmann'sche Gemisch in die beständige β-Modification übergeführt werden, mußte das Verhalten des Phenanthrenchinondioxims, welches in seinen Eigenschaften dem α-Benzildioxim ähnelt, diesem Reagens gegenüber von besonderer Wichtigkeit erscheinen.

3 g fein gepulvertes Dioxim wurden mit 30 g Eisessig und Essigsäureanhydrid (4 : 1) übergossen, worauf unter Kühlung bis zur Sättigung Salzsäuregas eingeleitet wurde. Es entstand zunächst allmählich eine klare, rothe Lösung, aus der sich bald glitzernde, gelbe Krystalle in reichlicher Menge auszuscheiden begannen, während sich gleichzeitig die Farbe der Lösung aufhellte. Nach zweitägigem Stehen wurden die Krystalle abfiltrirt; in der Mutterlauge befanden sich nur noch geringe Mengen derselben Substanz. Nach einmaligem Umkrystallisiren aus heißem Alkohol war die Substanz rein.

Die Analyse ergab, daß der Körper die Diacetylverbindung eines Phenanthrenchinondioxims ist.

0.1583 g Substanz gaben 12.3 cc feuchten Stickstoff bei 16^0 und 751 mm Druck.

Berechnet für $C_{18}H_{14}N_2O_4$	Gefunden
N 8.70	8.95 pCt.

Diese Acetylverbindung bildet gut ausgebildete, mikroskopische, schiefwinklige Krystalle, welche bei 184° schmelzen. Sie ist leicht löslich in Chloroform und Benzol, ziemlich löslich in Schwefelkohlenstoff, wenig in Alkohol, Eisessig, Aether und Ligroin, unlöslich in Wasser.

Um zu entscheiden, ob die Verbindung ein Derivat des Dioxims vom Schmelzpunct 202° oder einer isomeren Verbindung sei, d. h. ob das Beckmann'sche Gemisch umlagernd gewirkt habe oder nicht, wurde eine Probe des Esters mit verdünnter wässriger Kalilauge verrieben, und das Gemisch über Nacht stehen gelassen. Auf Zusatz von Wasser blieb nur ein geringer Rückstand ungelöst, welcher abfiltrirt wurde und sich als unangegriffener Acetylester erwies.

Aus dem Filtrat wurde durch Salzsäure ein hellgelber Körper gefällt, der nach dem Umkrysallisiren aus Alkohol alle Eigenschaften des bekannten Phenanthrenchinondioxims zeigte; er schmolz bei etwa 202°, krystallisirte in mikroskopischen Prismen, war schwer löslich in heißem Alkohol, löste sich in concentrirter Schwefelsäure mit rother Farbe und bildete ein perlmutterglänzendes, schwer lösliches Natriumsalz.

Durch das Beckmann'sche Gemisch wird also das Phenanthrenchinondioxim nur acetylirt, aber nicht umgelagert.

Vergleicht man die Ergebnisse der mitgetheilten Versuche mit den Thatsachen, welche wir beim Studium der Benziloxime festgestellt haben, so macht sich der Gegensatz in dem Verhalten des Benzils und des Phenanthrenchinons in überzeugender Weise geltend. Alle Mittel, welche die Bildung isomerer Benziloxime herbeiführen, versagen beim Phenanthrenchinon, und man darf aus dieser Thatsache wohl mit Recht schließen, daß solche structuridentische, stereochemisch-isomere Derivate des Phenanthrenchinons im Einklang mit unserer Hypothese entweder nicht existenzfähig sind, oder wenigstens unter den bisher erprobten Bedingungen nicht entstehen, während es andererseits sehr wohl möglich, ja wahrscheinlich ist, daß man auf anderen Wegen, z. B. durch Einwirkung des β-Benzylhydroxylamins auf Phenanthrenchinon, zu Abkömmlingen structurverschiedener isomerer Phenanthrenchinonoxime gelangen wird.

Nachschrift.

Im Begriffe, die vorstehende Abhandlung abzusenden, erhalten wir die im 10. Heft der Berichte der Deutschen Chemischen Gesellschaft veröffentlichte Arbeit E. Beckmann's[1]) über die Oxydation der isomeren Benzaldoxime. Die Thatsache, daß aus diesen beiden structurverschiedenen Körpern dasselbe Oxydationsproduct hervorgeht, ist von hervorragendem Interesse. Wir sind indessen der Ansicht, auf welche auch Beckmann selbst hinweist, daß die Verhältnisse bei den Benzildioximen anders liegen. Die Benzaldoxime erleiden nämlich nach Beckmann mit ganz ungewöhnlicher Leichtigkeit Umwandlung in einander, welche zudem hier sowohl vom α- zum β-Oxim führt, als auch in umgekehrter Richtung verläuft; so genügt z. B. schon Stehenlassen unter Benetzung mit wenig Alkohol nach Beckmann, um das β-Oxim in die α-Verbindung zu verwandeln. Dem gegenüber ist doch das Verhalten der Benziloxime ein durchaus anderes. Rückwandlungen finden hier niemals statt, sondern alle Isomeren streben die eine beständige Configuration anzunehmen, wie dies die stereochemische Auffassung erfordert.

Daß bei der Oxydation der so sehr leicht ineinander übergehenden Benzaldoxime ebenfalls zuvor Umwandlung des einen Isomeren in das andere eintritt, erscheint nach ihrem Gesammtverhalten begreiflich. Dagegen bedarf es, um α- in β-Benzildioxim überzuführen, eines Erhitzens mit Alkohol auf 170⁰ oder der andauernden Einwirkung des Beckmann'schen Gemisches, und dennoch findet bei der — momentan verlaufenden — Oxydation Bildung desselben Productes statt.

Wir glauben daher, daß durch die neue Beobachtung jener eine, auf der Oxydation der Benzildioxime beruhende Punct unserer Beweisführung nicht hinfällig wird, wenn er auch, wie wir gern zugeben, an Sicherheit verliert. Von irgendwelchem Belang ist dies indessen heute nicht mehr, da inzwischen in der oben erwähnten Arbeit von Auwers und Dittrich die Structurgleichheit der Oximidogruppen in den Benzilmonoximen in endgültiger Weise festgestellt worden ist.

1) Ber. d. Deutsch. Chem. Ges. XXII, 1588.

Göttingen, Universitätslaboratorium.

Inhalt von No. 17.

Karl Auwers und *Victor Meyer*, über die Oxime des Phenanthrenchinons.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner)

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

23. October. № 19. 1889.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 3. August.

Bestimmung der Elasticitäts-Constanten für Kalkspath.

Unter Benutzung von Biegungsbeobachtungen G. Baumgarten's.

Von

W. Voigt.

Der Kalkspath ist zuerst von allen Krystallen auf seine Elasticitätsverhältnisse hin untersucht worden; die Beobachtungen der Biegungen prismatischer Stäbchen durch G. Baumgarten [1]) haben die Abhängigkeit seines Elasticitätscoefficienten oder, wie wir präciser sagen, seines Dehnungswiderstandes von der Richtung klargestellt und die überraschende Größe seiner Aenderung gezeigt.

Absolute Werthe für diese Coëfficienten konnten jene Beobachtungen aber besonders deshalb nicht liefern, weil die Stäbchen, welche Baumgarten damals unter großen Schwierigkeiten selbst anfertigen mußte, derjenigen feinen Politur entbehrten, welche allein die sichere Bestimmung ihrer Dimensionen gestattet. Bei dem enormen Einfluß, den namentlich die Dicke der Prismen bei der Berechnung des Dehnungswiderstandes übt, mußte diese Unsicherheit in den absoluten Werthen große Fehler verursachen,

1) G. Baumgarten, Pogg. Ann. B. 152, p. 369, 1874.

während sie das Gesetz ihrer Aenderung mit der Richtung weniger betraf, da hier nicht der absolute Werth des Fehlers in der Dickebestimmung, sondern nur seine Aenderung von Stäbchen zu Stäbchen wirksam ist.

Nachdem in dem optischen Institut von Herrn Dr. Steeg und Reuter in Homburg, das seinerzeit jene erste Arbeit nicht übernehmen wollte, Vorkehrungen getroffen sind, um die für die elastischen Beobachtungen nöthigen Prismen herzustellen, bietet die vollständige Bestimmung der Elasticitätsconstanten und damit der absoluten Werthe der Dehnungs- und Drillungswiderstände für Kalkspath weniger Schwierigkeiten, als für die meisten anderen Krystalle, weil von ihm das nöthige Beobachtungsmaterial leicht in höchster Vollkommenheit zu beschaffen und die genannte Werkstatt überdies in seiner Bearbeitung ganz besonders erfahren ist.

In die Beobachtungen haben wir uns in der Weise getheilt, daß Baumgarten die Messung der Biegungen, ich diejenige der Dimensionen und der Drillungen übernahm; bei der Bestimmung der Dimensionen hat mir, wie schon früher, Herr Dr. Drude treulich geholfen.

Schließlich habe auch ich die Biegungen eines großen Theiles der Stäbchen gemessen, weil es von Interesse schien, zu constatiren, in wie weit unsere beiden Apparate bei demselben Material übereinstimmende Resultate ergäben.

Formeln für das rhomboëdrische System.

Die für die Berechnung der Beobachtungen zu benutzenden Gleichungen sind ausführlich an anderen Orten [1]) entwickelt; es genügt demnach hier die Zusammenstellung der wichtigsten Resultate.

Das Spaltungsrhomboëder sei so aufgestellt, daß die Z-Axe in die Hauptaxe, die YZ-Ebene in eine krystallographische Symmetrieebene fällt und die $+Y$-Axe aus einer der um die $+Z$-Axe herumliegenden Rhomboëderflächen austritt.

Das System der Elasticitätsconstanten sei dann bezeichnet durch das Schema:

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1886 p. 289, 1888 p. 359.

$$
\begin{array}{c|cccccc|}
 & x_x & y_y & z_z & y_z & z_x & x_y \\
\hline
-X_x & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\
-Y_y & c_{12} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0 \\
-Z_z & c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\
-Y_z & c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\
-Z_x & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{14} \\
-X_y & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14} & \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})
\end{array}
\qquad 1)
$$

seine Determinate heiße S, und in ihr der Coefficient des $h$ten Elementes in der $k$ten Colonne S_{hk}; wir setzen:

$$S_{hk}/S = s_{hk}. \qquad 2)$$

Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{c} s_{11} = s_{22}, \quad s_{13} = s_{23}, \quad s_{44} = s_{55}, \quad s_{66} = 2(s_{11}-s_{12}), \\ s_{14} = -s_{24} = \frac{1}{2}s_{56}; \end{array}\right\} \qquad 3)$$

alle übrigen s_{hk} sind gleich Null. Als unabhängig behalten wir bei:

$$s_{11}, \quad s_{33}, \quad s_{44}, \quad s_{12}, \quad s_{13}, \quad s_{14}.$$

Der Dehnungscoefficient E in einer durch die Richtungscosinus α, β, γ gegen die Coordinatenaxen bestimmten Richtung hat dann den Werth:

$$\mathrm{E} = s_{11}(1-\gamma^2)^2 + s_{33}\gamma^4 + (s_{44}+2s_{13})\gamma^2(1-\gamma^2) + 2s_{14}\beta\gamma(3\alpha^2-\beta^2). \qquad 4)$$

Durch diesen Dehnungscoefficienten E bestimmt sich die Biegung η eines rechteckigen Prismas von den Dimensionen L, B, D durch ein in seiner Mitte angreifendes Gewicht P nach der Formel:

$$\eta = \mathrm{E}\frac{PL^3}{4BD^3}. \qquad 5)$$

$1/\mathrm{E} = E$ nennen wir den Dehnungs- oder Biegungswiderstand; E ist identisch mit dem sogenannten Elasticitätscoefficienten.

Der Drillungscoefficient T für ein durch die Richtungscosinus α, β, γ seiner Längsaxe, α_1, β_1, γ_1 seiner größeren, α_2, β_2, γ_2 seiner kleineren Querdimension nach seiner Orientirung gegebenes rechtwinkliges Prisma hat den Werth:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{T} = s_{44} + (2(s_{11}-s_{12}) - s_{44})\gamma_2^2 + 4(s_{11}+s_{33}-s_{44}-2s_{13})\gamma^2\gamma_1^2 \\ \qquad + 4s_{14}[(\gamma\beta_1+\beta\gamma_1)(3\alpha\alpha_1-\beta\beta_1)-\beta_2\gamma_2]. \end{array}\right\} \qquad 6)$$

Mit diesem Coefficienten ist der Drillungswinkel τ des Prismas aber allgemein nur dann proportional, wenn die kleinere Querdimension neben der größeren vernachlässigt werden kann; im andern Falle ist nur das maßgebende Glied in dem dafür geltenden Ausdruck in ihn multiplicirt. Eine Vereinfachung tritt ein, wenn die Längsaxe des Prismas eine geradzählige krystallographische Symmetrieaxe und daher normal zu einer elastischen Symmetrieebene ist. Dann gilt:

$$\tau = \mathrm{T}\,\frac{3NL}{D^3 B\left(1+\frac{D}{B}f\right)}, \tag{7}$$

worin N das ausgeübte Moment um die Längsaxe bezeichnet und f eine Function der Orientirung des Prismas ist, für welche sich ein angenährter Werth leicht erhalten läßt. Es gilt nämlich:

$$f = -\frac{2}{\pi}\,\frac{\sqrt{s'_{44}\,s'_{55}-s'^2_{45}}}{s'_{55}}\left(1+0{,}510\,\frac{s'^2_{45}}{s'_{44}\,s'_{55}-s'^2_{45}}\right), \tag{8}$$

falls gesetzt wird:

$$\begin{aligned} s'_{44} &= s_{44}+(2(s_{11}-s_{12})-s_{44})\gamma_1^2-4s_{14}\gamma_1\beta_1,\\ s'_{55} &= s_{44}+(2(s_{11}-s_{12})-s_{44})\gamma_2^2-4s_{14}\gamma_2\beta_2,\\ s'_{45} &= s_{44}(\gamma_1\gamma_2+\beta_1\beta_2)+2s_{14}(\gamma_1\beta_2+\gamma_2\beta_1). \end{aligned} \tag{9}$$

In dem Ausdruck 4) für E kommen vier Aggregate der sechs s_{hk} vor, man kann diese also durch die Beobachtung der Biegung von vier Gattungen von Stäbchen bestimmen. Deren Orientirungen werden passend so gewählt, daß für sie E ein Maximum oder Minimum wird; denn dann sind die unvermeidlichen kleinen Fehler in der Orientirung ohne Einfluß. Man findet nun leicht, daß die Werthe

$$\alpha = \beta = 0,\quad \gamma = 1 \qquad \text{und}$$
$$\alpha = 1,\quad \beta = \gamma = 0$$

δE zu Null werden lassen; stets wird sich also die X- und die Z-Axe als Längsrichtung für je eine Gattung von Prismen empfehlen. Weitere Maximal- und Minimal-Richtungen liegen in der YZ-Ebene: diese sind aber zahlenmäßig erst angebbar, wenn die s_{hk} bestimmt sind. Nach den früheren Baumgarten'schen Beobachtungen war ein Minimum in ca. $+70^0$, ein Maximum in ca. -50^0 Neigung gegen die Hauptaxe zu erwarten, wenn die Winkel in der Richtung nach der $+Y$-Axe hin positiv gerechnet werden. Demgemäß hatte ich auch bei Dr. Steeg und Reuter Stäbchen unter den Winkeln $+70^0$ resp. -50^0 gegen die Hauptaxe in Arbeit gegeben. Indessen ist in der Werkstatt ein Versehen vor-gekommen und die gelieferten Stäbchen entsprachen ungefähr den Winkeln -70^0 und $+50^0$.

Hiermit ist natürlich der gewünschte Zweck vereitelt, und es mußte die Orientirung der beiden Gattungen Stäbchen genau nachgemessen werden; indessen ist gerade bei Kalkspath der Schaden verhältnißmäßig gering, da die deutlichen Spaltungsflächen jene Messungen leicht und ziemlich genau mit dem Reflexionsgoniometer auszuführen gestatten.

Im Uebrigen sind die Stäbchen von Dr. Steeg und Reuter außerordentlich schön gearbeitet und hochpolirt. Vor der Messung der Dimensionen wurden sie mehrere Tage in Benzol aufbewahrt und dann tüchtig mit Leinen abgerieben, um die fest anhängenden Reste der Kitt- und Polirmasse zu entfernen.

Durch Drillungsbeobachtungen sind nur zwei Aggregate der s_{hk} zu bestimmen, und hierzu also nur zwei Gattungen von Stäbchen nöthig. Ich habe sie beide mit ihrer Längsaxe in die X-Richtung, d. h. die Normale zur krystallographischen Symmetrieebene, gelegt und bei der einen die kleinere Querdimension, bei der andern die größere in die Z-Hauptaxe fallen lassen.

Die Bezeichnung der verschiedenen Gattungen Stäbchen wollen wir folgendermaßen wählen.

Ein Stäbchen, dessen Längsaxe in der Symmetrieebene des Krystalles (I. Hauptschnitt) liegt, soll die Ziffer I, eines, dessen Längsaxe in der dazu normalen Ebene (II. Hauptschnitt) liegt, die Ziffer II beigelegt erhalten, wenn gleichzeitig die größere Querdimension (Breite B) normal zur Z-Axe steht, hingegen die Ziffern I′ und II″, wenn die kleinere Querdimension (Dicke D) normal zur Z-Axe steht; außerdem soll eine hinzugefügte Zahl abgerundet die Anzahl Grade des Winkels zwischen Längsrichtung des Stäbchens und Z-Axe angeben.

Es entsprechen sich also folgende Bezeichnungen und Richtungscosinus:

$\mathrm{I}(0^0)$ und $\mathrm{II}(0^0)$	$\alpha = \beta = 0,\ \gamma = 1,\ \gamma_1 = \gamma_2 = 0,$
$\mathrm{I}(+70^0)$	$\alpha = 0,\ \beta = +\sin(70^0),\ \gamma = +\cos(70^0),\ \gamma_1 = 0,$
$\mathrm{I}(-50^0)$	$\alpha = 0,\ \beta = -\sin(50^0),\ \gamma = +\cos(50^0),\ \gamma_1 = 0,$
$\mathrm{II}(90^0)$	$\alpha = 1,\ \beta = \gamma = 0,\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 1,$
$\mathrm{II}'(90^0)$	$\alpha = 1,\ \beta = \gamma = 0,\ \gamma_2 = 0,\ \gamma_1 = 1.$

Bei dem Dehnungscoefficienten E genügt in den vorstehenden fünf Fällen zur Unterscheidung die Angabe des Neigungswinkels, falls man nur die Bezeichnung als auf den ersten

Hauptschnitt bezogen denkt; denn E oder E hat für die Gattungen II (90°), II' (90°) und I (90°) den gleichen Werth.

Wir erhalten sonach folgendes Tableau:

$$E_0 = s_{33}, \quad E_{90} = s_{11},$$

$$\text{10)} \quad \begin{aligned} E_{-70} &= s_{11}\sin^4(70^0) + s_{33}\cos^4(70^0) + (s_{44}+2s_{13})\sin^2(70^0)\cos^2(70^0) \\ &\qquad + 2s_{14}\sin^3(70^0)\cos(70^0), \\ E_{+50} &= s_{11}\sin^4(50^0) + s_{33}\cos^4(50^0) + (s_{44}+2s_{13})\sin^2(50^0)\cos^2(50^0) \\ &\qquad - 2s_{14}\sin^3(50^0)\cos(50^0); \end{aligned}$$

hierin sind statt der abgerundeten Zahlen 50° und 70° die weiter unten angegebenen genauen Werthe einzusetzen.

Die Drillungscoefficienten für die Gattungen II (90°) und II'(90°) wollen wir mit T_{90} und T'_{90} bezeichnen, analog die in Formel 7) auftretende Function f resp. mit f_{90} und f'_{90}.

Für die Gattung II (90°) gilt nach 6), 8) und 9):

$$s'_{44} = s_{44}, \quad s'_{55} = 2(s_{11} - s_{12}), \quad s'_{45} = 2s_{14},$$

also

$$\text{11)} \qquad T_{90} = 2(s_{11} - s_{12}) \qquad \text{und}$$

$$f_{90} = -\frac{2}{\pi}\,\frac{\sqrt{2s_{44}(s_{11}-s_{12}) - 4s_{14}^2}}{2(s_{11}-s_{12})}\left(1 + 0{,}510\,\frac{4s_{14}^2}{2s_{44}(s_{11}-s_{12}) - 4s_{14}^2}\right);$$

für die Gattung II'(90°) ist

$$s'_{44} = 2(s_{11} - s_{12}), \quad s'_{55} = s_{44}, \quad s'_{45} = 2s_{14},$$

also

$$\text{12)} \qquad T'_{90} = s_{44} \qquad \text{und}$$

$$f'_{90} = -\frac{2}{\pi}\,\frac{\sqrt{2s_{44}(s_{11}-s_{12}) - 4s_{14}^2}}{s_{44}}\left(1 + 0{,}510\,\frac{4s_{14}^2}{2s_{44}(s_{11}-s_{12}) - 4s_{14}^2}\right).$$

Außer diesen beiden Gattungen Stäbchen habe ich auch die Gattung I (0°) gedrillt.

Da bei derselben die größere Querdimension der X-Axe parallel liegt, wird für sie

$$\text{13)} \qquad T_0 = s_{44};$$

die Formel 7) für τ bleibt auch hier bestehen, aber f ist nicht mehr durch Rechnung bestimmbar. Bei Bergkrystall hatte die Combination gewisser Beobachtungen den Werth

$$f_0 = -0{,}635$$

ergeben, der auffällig mit dem theoretisch bei unkrystallinischen Medien gefundenen $f = -0{,}636$ übereinstimmt. Es war daher von Interesse zu untersuchen, ob bei Kalkspath die Benutzung dieses Werthes T_0 wirklich zur Uebereinstimmung mit T'_{90} bringt.

Sind die sechs Constanten s_{hk} gefunden, so berechnet sich aus ihnen außer den allgemeinen Werthen von E und T auch der Werth des Drillungscoefficienten T^0 für einen Kreiscylinder, der nur von den Richtungscosinus α, β, γ seiner Längsaxe gegen die Coordinatenaxen abhängt und der deshalb für die Discussion der Resultate besonders bequem ist; man erhält:

$$\begin{aligned} T^0 = {} & s_{44} + 2(s_{11} - s_{12}) + (s_{44} - 2(s_{11} - s_{12}))\gamma^2 \\ & + 4(s_{11} + s_{33} - s_{44} - 2s_{13})\gamma^2(1-\gamma^2) - 8s_{14}\beta\gamma(3\alpha^2 - \beta^2). \end{aligned} \tag{14}$$

Ein beliebig gestaltetes Stück eines rhomboëdrischen Krystalles wird bei allseitig gleichem Druck so deformirt, daß die ihm entsprechenden linearen Compressionscoefficienten A_3 und A_1 parallel und normal der Hauptaxe die Werthe haben:

$$A_1 = s_{11} + s_{12} + s_{13}, \quad A_3 = 2s_{13} + s_{33}; \tag{15}$$

hieraus folgt der cubische Compressionscoefficient:

$$M = s_{33} + 2(s_{11} + s_{12}) + 4s_{13}. \tag{16}$$

Der Coefficient B der Winkeländerung bei allseitig gleichem Druck ist:

$$B = s_{13} + s_{33} - s_{11} - s_{12}. \tag{17}$$

Aus den Größen s_{hk} folgen unter Benutzung der thermischen linearen Ausdehnungscoefficienten a_3 und a_1 parallel und normal zur Hauptaxe auch die Coefficienten q_3 und q_1 der Wärmeabstoßung in diesen Richtungen; es gilt nämlich:

$$q_3 = 2a_1 c_{13} + a_3 c_{33}, \quad q_1 = a_1(c_{11} + c_{12}) + a_3 c_{13}. \tag{18}$$

Sind die s_{hk} aus den Beobachtungen berechnet, so bestimmen sich aus ihnen die Elasticitätsconstanten c_{hk} gemäß folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} c_{11} + c_{12} &= \frac{s_{33}}{s_{33}(s_{11}+s_{12}) - 2s_{13}^2}, & c_{11} - c_{12} &= \frac{s_{44}}{s_{44}(s_{11}-s_{12}) - 2s_{14}^2}, \\ c_{13} &= \frac{-s_{13}}{s_{33}(s_{11}+s_{12}) - 2s_{13}^2}, & c_{14} &= \frac{-s_{14}}{s_{44}(s_{11}-s_{12}) - 2s_{14}^2}, \\ c_{33} &= \frac{s_{11}+s_{12}}{s_{33}(s_{11}+s_{12}) - 2s_{13}^2}, & c_{44} &= \frac{s_{11}-s_{12}}{s_{44}(s_{11}-s_{12}) - 2s_{14}^2}. \end{aligned} \tag{19}$$

Diese Constanten c_{hk} wie auch ihre mit s_{hk} bezeichneten Aggregate heißen isothermische Elasticitätsconstanten, da sie elastische Deformationen messen, welche durch gegebene äußere Einwirkung bei constanter Temperatur hervorgebracht werden. Ihnen treten die adiabatischen γ_{hk} und σ_{hk} gegenüber, welche die Aenderungen bei verhinderter Wärmebewegung bestimmen. Zwischen ihnen gelten die Beziehungen:

$$20)\qquad \gamma_{hk} = c_{hk} + \frac{q_h q_k \Theta}{A\varepsilon c}, \quad \sigma_{hk} = s_{hk} - \frac{a_h a_k \Theta}{A\varepsilon c},$$

in denen Θ die absolute Temperatur, A das mechanische Wärmeäquivalent, ε die Dichte des Krystalls, c seine gewöhnliche specifische Wärme bezeichnet.

Endlich sei noch der Werth der Differenz der beiden specifischen Wärmen c_p und c_d bei constanten Spannungen und constanten Deformationen angegeben; es gilt:

$$21)\qquad c_p - c_d = \frac{\Theta}{A\varepsilon}(2q_1 a_1 + q_3 a_3).$$

Dimensionen.

Die Zusammenstellung der gemessenen Dimensionen ist in der früher benutzten Weise gegeben. Die Einheiten sind Trommeltheile des Sphärometers = 1/992,6 mm. Die Dicken D sind nach den Formeln: $D = 800 + \delta$,

$$\delta = \delta_0 \pm \alpha\delta_1 + \alpha^2\delta_2, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

berechnet und die Werthe der Constanten δ_0, δ_1, δ_2, sowie die aus ihnen folgenden Werthe der Dicke an den Beobachtungsstellen mitgetheilt.

I(0°) No. 1. $D = 800 + \delta$

$\delta =$	12,7	12,5	12,5	13,0	14,9	18,7	21,1
	13,8	12,9	12,7	13,5	15,0	17,4	19,5
	13,9	12,9	12,7	13,6	14,9	17,4	19,8
	14,5	13,6	13,3	13,7	15,5	17,7	19,8
Mittel	13,7	13,0	12,8	13,4	15,1	17,8	20,1
ber.	13,7	12,9	12,8	13,5	15,0	17,3	20,5

$\delta_0 = 13,5$, $\delta_1 = 1,12$, $\delta_2 = 0,40$.

$B = 5500 + \beta$

$\beta =$	76	92	100	99	100	98	94
	76	88	96	99	100	98	95
Mittel	76	90	98	99	100	98	94

I(0°) No. 2. $D = 800 + \delta$

$\delta =$	18,0	15,5	15,7	15,8	17,3	19,4	20,2
	16,5	16,5	17,0	16,3	17,0	19,8	21,9
	18,0	16,9	16,7	17,1	17,1	20,0	22,2
	18,3	17,9	17,8	18,7	19,7	21,2	22,6
Mittel	17,7	16,7	16,8	17,0	17,8	20,1	21,7
ber.	17,7	16,8	16,6	17,0	18,0	19,6	21,9

$\delta_0 = 17,0$, $\delta_1 = 0,7$, $\delta_2 = 0,31$.

$B = 5500 + \beta$

$\beta =$	82	89	97	101	100	100	94
	80	91	98	105	104	98	95
Mittel	81	90	98	103	100	99	95

I(0°) No. 3. $D = 800 + \delta$ — $B = 5600 + \beta$

$\delta =$	19,8	18,9	18,8	19,6	21,7	23,9	27,4
	19,5	18,4	18,4	19,7	21,7	25,1	27,5
	19,6	18,6	18,6	19,7	21,6	23,7	28,2
	20,8	19,7	19,6	19,8	21,7	23,9	27,8
Mittel	19,9	18,9	18,6	19,7	21,7	24,2	27,7
ber.	19,7	18,8	18,8	19,7	21,6	24,2	27,9

$\delta_0 = 19{,}7,\ \delta_1 = 1{,}35,\ \delta_2 = 0{,}48.$

$\beta =$	6	14	15	15	12	6	−1
	4	12	15	15	12	7	0
Mittel	5	13	15	15	12	6	−1

I(0°) No. 4. $D = 800 + \delta$ — $B = 5600 + \beta$

$\delta =$	15,3	14,6	14,2	13,6	14,5	16,8	18,7
	16,2	16,0	15,2	14,8	15,1	16,1	18,5
	17,5	15,7	15,1	15,2	15,9	17,0	19,2
	18,3	17,9	17,5	16,6	17,0	18,2	19,8
Mittel	16,8	16,1	15,5	15,0	15,6	17,0	19,0
ber.	17,3	15,9	15,1	15,1	15,7	16,9	18,9

$\delta_0 = 15{,}1,\ \delta_1 = 0{,}27,\ \delta_2 = 0{,}33.$

$\beta =$	−1	+13	18	13	9	4	−6
	−4	+7	11	12	10	5	−5
Mittel	−3	+10	15	12	10	4	−5

I(0°) No. 5. $D = 800 + \delta$ — $B = 5600 + \beta$

$\delta =$	21,7	20,1	18,7	17,9	20,3	21,0	23,9
	22,6	20,6	17,7	16,7	17,6	20,8	23,2
	23,2	20,8	18,2	17,6	18,9	21,2	24,1
	23,4	20,8	17,9	17,6	17,9	21,0	24,1
Mittel	22,7	20,6	18,1	17,4	18,7	21,0	23,8
ber.	23,1	19,9	18,1	17,6	18,5	20,7	24,3

$\delta_0 = 17{,}6,\ \delta_1 = 0{,}2,\ \delta_2 = 0{,}68.$

$\beta =$	2	9	14	13	10	3	2
	1	11	13	16	11	5	−2
Mittel	2	10	14	15	11	4	0

I(−70°) No. 1. $D = 800 + \delta$ — $B = 5500 + \beta$

$\delta =$	17,5	22,5	27,4	29,5	30,5	28,5	25,6
	17,5	23,4	26,7	29,3	29,3	27,2	23,7
	17,8	22,5	26,8	29,4	29,3	27,6	24,6
	18,5	23,1	26,5	29,0	28,5	26,5	23,1
Mittel	17,8	22,6	26,8	29,3	29,4	27,4	24,2
ber.	16,9	22,8	27,0	29,1	29,4	27,8	24,3

$\delta_0 = 29{,}1,\ \delta_1 = 1{,}23,\ \delta_2 = -0{,}95.$

$\beta =$	70	82	90	96	96	92	85
	72	84	91	95	93	90	86
Mittel	71	83	91	95	94	91	86

I(−70°) No. 2. $D = 800 + \delta$ — $B = 5500 + \beta$

$\delta =$	15,9	25,4	30,4	32,4	30,8	26,3	17,3
	17,7	26,0	30,7	32,5	31,0	26,3	18,0
	17,9	26,0	30,8	32,3	31,0	26,6	18,3
	18,8	27,1	31,4	33,4	32,1	26,4	19,4
Mittel	17,6	26,1	30,8	32,6	31,2	26,4	18,2
ber.	17,7	25,9	30,9	32,6	31,1	26,3	18,3

$\delta_0 = 32{,}6,\ \delta_1 = 0{,}11,\ \delta_2 = -1{,}62.$

$\beta =$	85	96	101	102	98	89	76
	84	96	101	101	97	88	75
Mittel	85	96	101	101	98	89	75

I(−70°) No. 3. $D = 800 + \delta$ — $B = 5500 + \beta$

$\delta =$	16,7	25,0	34,3	37,5	38,7	35,3	29,1
	17.2	25,5	33,6	36,7	37,5	34,5	27,4
	16,9	26,4	34,0	37,3	37,8	34,2	27,8
	20,5	28,4	34,0	37,8	37,5	34,4	28,0
Mittel	17,8	26,3	34,0	37,3	37,9	34,6	28,1
ber.	17,0	27,1	33,9	37,4	37,7	34,7	28,4

$\delta_0 = 37{,}4,\ \delta_1 = 1{,}9,\ \delta_2 = -1{,}63.$

$\beta =$	67	86	96	105	109	109	106
	64	84	94	105	112	111	105
Mittel	65	85	95	105	111	110	105

I(—70°) No. 4. $D = 800 + \delta$ $B = 5500 + \beta$

$\delta =$	19,5	27,3	33,0	37,4	38,9	38,1	35,5
	18,2	26,1	32,4	36,1	38,4	37,8	33,9
	19,7	26,6	32,4	36,1	38,2	37,2	34,8
	20,4	27,1	32,4	36,3	37,8	36,5	33,6
Mittel	19,4	26,7	32,5	36,5	38,3	37,4	34,4
ber.	19,0	27,0	32,8	36,5	38,0	37,4	34,8

$\beta =$	54	73	87	96	101	102	98
	54	72	87	97	102	103	99
Mittel	54	73	87	96	101	103	98

$\delta_0 = 36{,}5,\ \delta_1 = 2{,}62,\ \delta_2 = -1{,}07.$

I(—70°) No. 5. $D = 800 + \delta$ $B = 5500 + \beta$

$\delta =$	17,5	24,5	29,5	32,0	33,5	32,7	29,8
	20,1	26,1	31,1	34,5	35,4	34,1	33,1
	22,3	27,0	31,9	34,4	35,4	35,0	33,7
	22,3	28,1	33,2	36,2	37,3	36,8	34,0
Mittel	20,5	26,4	31,4	34,3	35,4	34,4	32,6
ber.	20,4	26,8	31,4	34,3	35,4	34,8	32,4

$\beta =$	107	111	112	109	104	95	82
	106	111	112	111	105	95	81
Mittel	106	111	112	110	104	95	82

$\delta_0 = 34{,}3,\ \delta_1 = 2{,}01,\ \delta_2 = -0{,}88.$

I(+50°) No. 1. $D = 800 + \delta$ $B = 5600 + \beta$

$\delta =$	20,7	21,3	21,3	21,3	21,5	21,6	21,9
	(28,4)	19,0	19,5	19,8	19,9	19,7	(20,1)
	18,4	19,5	18,6	18,6	18,9	19,8	20,1
	20,8	20,3	21,2	20,8	20,2	20,8	21,0
Mittel	19,6	20,0	20,1	20,1	20,1	20,5	20,8
ber.	19,5	19,7	20,0	20,1	20,2	20,3	20,3

$\beta =$	—7	+7	8	15	17	22	19
	—2	+9	17	17	21	22	17
Mittel	—4	+8	12	16	19	22	18

$\delta_0 = 20{,}1,\ \delta_1 = 0{,}14,\ \delta_2 = -0{,}02.$

I(+50°) No. 2. $D = 800 + \delta$ $B = 5600 + \beta$

$\delta =$	18,9	21,0	22,8	24,2	24,8	25,8	26,2
	19,6	21,8	23,9	25,1	25,5	26,3	26,9
	19,5	21,2	23,0	24,8	25,3	26,4	27,2
	20,3	22,3	24,3	25,8	26,6	27,5	27,9
Mittel	19,6	21,6	23,5	25,0	25,5	26,5	26,0
ber.	19,4	21,8	23,6	24,9	25,8	26,2	26,2

$\beta =$	—6	+6	14	17	19	18	13
	—4	+6	13	18	19	18	11
Mittel	—5	+6	12	17	19	18	12

$\delta_0 = 24{,}9,\ \delta = 1{,}12,\ 4_2 = -0{,}23.$

I(+50°) No. 3. $D = 800 + \delta$ $B = 5600 + \beta$

$\delta =$	10,4	14,8	17,0	19,0	20,8	22,1	23,0
	13,4	15,9	17,6	19,8	21,1	23,9	23,9
	12,9	15,2	17,8	19,9	21,1	23,4	23,9
	14,2	17,1	19,5	21,3	22,2	23,2	24,0
Mittel	12,7	15,7	18,0	20,2	21,3	23,1	23,7
ber.	12,9	15,7	18,1	20,1	21,7	22,9	23,7

$\beta =$	+1	5	14	20	17	12	6
	—5	+7	14	16	18	15	7
Mittel	—2	+6	14	18	18	14	6

$\delta_0 = 20{,}1,\ \delta_1 = 1{,}8,\ \delta_2 = -0{,}20.$

I(+50°) No. 4. $D = 800 + \delta$ $B = 5600 + \beta$

$\delta =$	17,4	17,5	18,3	18,4	18,6	18,8	17,6
	19,4	18,9	19,1	19,0	19,1	19,0	18,6
	19,6	19,9	19,3	19,0	19,0	19,0	18,8
	20,2	20,5	20,8	20,7	20,6	20,6	20,6
Mittel	19,1	19,2	19,4	19,3	19,3	19,3	18,9
ber.	19,1	19,2	19,3	19,3	19,3	19,2	18,9

$\beta =$	—3	+6	12	15	17	14	7
	+1	7	11	17	18	16	8
Mittel	—1	+6	12	16	17	15	7

$\delta_0 = 19{,}3,\ \delta_1 = 0{,}02,\ \delta_2 = -0{,}03.$

I(+50°) No. 5. $D = 800 + \delta$

$\delta =$	17,4	17,9	18,2	18,7	19,4	20,2	20,3
	18,5	19,2	20,4	21,1	21,9	22,3	22,9
	18,9	19,3	20,3	21,1	22,1	22,3	22,6
	21,4	21,4	22,2	23,2	24,0	24,8	24,9
Mittel	19,0	19,4	20,3	21,0	21,8	22,4	22,7
ber.	18,8	19,5	20,3	21,0	21,7	22,3	22,8

$\delta_0 = 21{,}0,\ \delta_1 = 0{,}68,\ \delta_2 = -0{,}02.$

$B = 5500 + \beta$

$\beta =$	84	93	97	103	101	98	101
	85	95	100	103	104	100	103
Mittel	84	94	98	103	102	99	102

II(90°) No. 1. $D = 800 + \delta$

$\delta =$	21,7	26,9	31,1	35,4	37,3	35,3	35,3
	25,8	29,8	34,0	36,9	39,0	37,0	40,8
	(25,4)	29,0	34,0	36,4	39,9	39,1	(42,0)
	33,1	30,1	35,4	39,8	43,2	44,5	46,2
Mittel	26,5	28,9	33,6	37,1	39,9	38,9	41,1
ber.	25,9	30,0	33,4	36,3	38,6	40,2	41,3

$\delta_0 = 36{,}3,\ \delta_1 = 2{,}57,\ \delta_2 = -0{,}30.$

$B = 5600 + \beta$

$\beta =$	−15	−2	+4	9	10	9	5
	−17	−5	+5	11	13	11	2
Mittel	−16	−3	+5	10	11	10	4

II(90°) No. 2. $D = 800 + \delta$

$\delta =$	23,9	27,1	32,1	35,3	39,2	40,1	39,4
	26,2	29,6	35,5	38,8	40,6	42,3	41,8
	(26,0)	30,3	33,8	38,7	41,9	42,1	(42,0)
	30,3	33,0	37,3	42,5	46,2	46,9	45,5
Mittel	26,6	30,0	34,7	38,8	42,0	42,8	42,2
ber.	25,2	29,7	35,3	38,8	41,3	41,7	43,0

$\delta_0 = 38{,}8,\ \delta_1 = 2{,}98,\ \delta_2 = -0{,}52.$

$B = 5600 + \beta$

$\beta =$	−12	0	+8	11	11	7	0
	−7	+3	7	10	9	5	−2
Mittel	−9	+2	7	10	10	6	−1

II(90°) No. 3. $D = 800 + \delta$

$\delta =$	18,7	32,6	38,5	44,1	50,3	54,6	56,1	56,2	55,6
	17,7	29,8	37,0	43,3	48,5	52,3	55,0	55,0	56,1
	20,3	28,6	36,1	43,1	50,3	53,0	55,2	54,8	58,0
	21,2	29,5	36,3	42,7	50,0	52,2	55,6	54,9	56,0
Mittel	19,5	30,1	37,0	43,3	49,8	53,0	55,5	55,2	56,4
ber.	19,6	29,2	37,4	44,1	49,3	53,1	55,4	56,2	55,6

$\delta_0 = 49{,}3,\ \delta_1 = 4{,}51,\ \delta_2 = -0{,}73.$

$B = 5500 + \beta.$

$\beta =$	63	82	94	102	105	103	99	89	74
	65	86	96	102	105	103	102	88	73
Mittel	64	84	95	102	105	103	101	89	74

II(90°) No. 4. $D = 800 + \delta$

$\delta =$	31,9	39,8	46,3	52,2	55,7	56,8	57,8	56,3	52,2
	33,8	40,0	47,8	52,7	55,9	57,7	58,7	56,8	53,6
	34,0	42,7	47,4	53,0	55,9	57,9	38,3	57,1	53,6
	36,9	41,8	49,0	54,0	56,0	59,2	60,1	59,0	54,5
Mittel	34,2	41,1	47,6	53,0	56,4	57,9	58,7	57,3	53,5
ber.	33,5	41,6	48,0	52,9	56,3	58,1	58,4	57,0	54,1

$\delta_0 = 56{,}3\ \ \delta_1 = 2{,}58,\ \delta_2 = -0{,}78.$

$B = 5500 + \beta$

$\beta =$	59	84	100	111	116	116	112	102	88
	59	82	99	110	115	116	110	100	84
	59	83	100	110	115	116	111	101	86

II(90°) No. 5. $D = 800 + \delta$

δ =	25,9	34,9	42,5	49,4	53,6	54,9	55,0	54,0	50,9
	24,7	33,9	42,0	49,8	52,0	54,3	55,2	54,8	51,0
	24,5	34,3	40,5	47,6	51,8	54,7	54,8	53,3	51,0
	30,0	37,7	43,3	50,0	53,2	56,1	56,0	54,4	50,3
Mittel	26,3	35,2	42,1	49,2	52,6	55,0	55,2	54,1	50,8
ber.	25,9	35,3	42,9	48,7	52,7	54,9	55,3	53,9	50,7

$\delta_0 = 52{,}7, \quad \delta_1 = 3{,}11, \quad \delta_2 = -0{,}90.$

$B = 5500 + \beta$

β =	66	90	102	110	111	111	104	91	73
	70	88	102	110	113	111	106	92	76
Mittel	68	89	102	110	112	111	105	92	74

II'(90°) No. 1. $D = 800 + \delta$

δ =	36,6	42,0	45,0	46,8	48,0	47,9	47,6
	36,8	40,2	42,9	44,9	45,9	47,1	48,4
	37,0	40,1	43,0	45,1	46,1	47,1	47,0
	37,5	41,8	43,9	46,5	47,4	47,6	47,4
Mittel	37,0	41,0	43,7	45,8	46,8	47,4	47,6
ber.	37,3	40,8	43,6	45,7	47,0	47,6	47,3

$\delta_0 = 45{,}7, \ \delta_1 = 1{,}68, \ \delta_2 = -0{,}38.$

$B = 5600 + \beta$

β =	−9	+9	15	16	15	10	−2
	−15	+2	10	15	15	8	0
Mittel	−12	+5	12	16	15	9	−1

II'(90°) No. 2. $D = 800 + \delta$

δ =	48,9	53,7	57,9	61,0	63,9	65,9	68,0
	49,0	54,3	58,6	62,0	64,7	65,9	67,0
	50,0	55,1	58,5	62,2	64,4	66,8	67,6
	51,1	55,1	60,0	62,1	64,8	66,0	67,8
Mittel	49,8	54,5	58,8	61,8	64,4	66,1	67,6
ber.	49,9	54,7	58,6	61,9	64,4	66,3	67,5

$\delta_0 = 61{,}9, \ \delta_1 = 2{,}92, \ \delta_2 = -0{,}36.$

$B = 5500 + \beta$

β =	65	81	107	106	110	109	108
	64	82	108	103	108	111	105
Mittel	65	81	108	105	109	110	107

II'(90°) No. 3. $D = 800 + \delta$

δ =	32,5	38,5	42,3	46,9	48,8	51,0	52,0	52,9	52,7
	33,6	39,1	43,6	47,9	50,6	52,9	54,5	54,9	54,9
	34,2	38,7	43,7	46,9	49,4	51,4	53,0	54,3	56,1
	34,0	38,2	43,0	45,7	49,1	50,6	52,7	53,9	53,7
Mittel	33,6	38,6	43,1	46,8	49,5	51,5	53,0	54,0	54,3
ber.	33,7	38,7	43,0	46,6	49,5	51,6	53,2	53,9	54,1

$\delta_0 = 49{,}5, \quad \delta_1 = 2{,}54, \quad \delta_2 = -0{,}35.$

$B = 5500 + \beta$

β =	85	99	108	115	117	114	106	94	82
	80	97	108	114	116	114	107	99	90
Mittel	82	98	108	114	117	114	107	96	86

II'(90°) No. 4. $D = 800 + \delta$

$\delta =$	36,9	42,4	47,3	52,0	56,2	60,0	62,3	65,1	67,0
	41,7	45,2	50,2	54,4	58,8	62,6	66,0	69,3	70,9
	41,6	44,2	48,9	53,5	57,3	61,0	64,4	67,5	70,1
	40,0	45,0	50,2	55,0	59,0	62,9	66,0	69,1	70,4
Mittel	40,1	44,2	49,1	53,7	57,8	61,6	64,7	67,7	69,6
ber.	39,4	44,5	49,4	53,8	57,8	61,4	64,6	67,5	70,0

$\delta_0 = 57{,}8, \quad \delta_1 = 3{,}83, \quad \delta_2 = -0{,}19.$

$B = 5500 + \beta$

$\beta =$	78	89	99	104	105	103	96	88	69
	80	91	100	105	105	102	98	84	67
Mittel	79	90	100	104	105	102	97	86	68.

Biegungen.

Die folgenden Tafeln enthalten nach der Angabe des Beobachters und neben der Bezeichnung jedes Stäbchens zunächst seine Dimensionen, die Längen in Millimetern, die Breiten und Dicken in Trommeltheilen des Sphärometers. Da Breite und Dicke von Querschnitt zu Querschnitt wechselten, so sind ihre in Rechnung zu ziehenden Werthe je nach der Länge, in welcher das Stäbchen benutzt ist, verschieden; die Art ihrer Berechnung habe ich früher [1]) auseinandergesetzt.

Es folgen dann die bei den in Grammen angegebenen Belastungen P gemessenen Biegungen η in Scalentheilen der Beobachtungsapparate, welche bei den Baumgarten'schen Beobachtungen 0,001340 mm, bei den meinen 0,0002954 mm entsprachen; die je zwei angegebenen Zahlen beziehen sich auf zwei Lagen des Stäbchens auf den Unterlagen, bei denen oben und unten vertauscht war.

Die Biegungen bei den kurzen Längen 15,5 resp. 14,07 mm sind gemessen, um mit ihrer Hülfe die Eindrückung der Lagerschneiden zu ermitteln und zu eliminiren. Ihr Betrag ist neben den Beobachtungen bei größeren Längen für jede Belastung aufgeführt und mit η' bezeichnet.

Unter ihrer Berücksichtigung sind aus den verschiedenen Belastungen entsprechenden Biegungen die Werthe für eine bestimmte (P) nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet und mit der Bezeichnung η_P daruntergesetzt. Dieser Werth ist in einzelnen Fällen, wo die Beobachtung bei erheblich von 20° C. abweichender Temperatur stattfand, noch um einen durch directe Beobachtung ermittelten Betrag $\delta\eta$ zu corrigiren.

1) W. Voigt, l. c. p. 100.

Aus den so erhaltenen reducirten Biegungen sind die Werthe von E[1]) berechnet, die am Ende jedes Systemes mitgetheilt sind. Die Vergleichung der so aus Baumgarten's und meinen Beobachtungen erhaltenen Zahlen giebt eine gute Uebereinstimmung. In der That ist ja auch bei beiden Berechnungen dasselbe System von Dimensionen B und D benutzt, Abweichungen können also nur durch Fehler in der Bestimmung von L und η bewirkt werden.

Hierbei ist aber zu bemerken, daß η außer durch directe Ablesungsfehler auch durch ein etwas unrichtiges Auflegen des Stäbchens auf die Lager einen falschen Werth erhalten kann; da die Stäbchen nämlich alle etwas unregelmäßige Form haben, z. B. auch an dem einen Ende dicker als an dem andern sind, so wird, je nachdem das eine oder das andere Ende etwas weiter über das Lager hinausreicht, die Biegung größer oder kleiner erscheinen. Bei ungünstigen Umständen kann schon eine kleine Abweichung von der zu den Schneiden symmetrischen Lage merkliche Differenzen verursachen.

Aus den für die einzelnen Stäbchen erhaltenen Resultaten für E sind die Gesammtmittel in der Weise berechnet, daß allen Stäbchen der gleiche Einfluß gegeben ist, z. B. also wo derselbe Beobachter ein Stäbchen in verschiedenen Längen benutzt hat, das Mittel aus den gefundenen Werthen das einfache Gewicht erhalten hat.

Biegungen.

Beobachter B.

I(0°) No. 1. $L = 15{,}5, \quad B = 5595, \quad D = 813{,}9$

$P = 50, \quad \eta = 2{,}2 \quad 2{,}4$

$P = 100, \quad \eta = 4{,}2 \quad 4{,}3$

$L = 50{,}0$

$P = 50, \quad \eta = 64{,}3 \quad 64{,}7, \quad \eta' = 0{,}24$

$P = 100, \quad \eta = 128{,}8 \quad 129{,}2, \quad \eta' = 0{,}4$

$\eta_{100} = 128{,}6$ $\qquad$ $E = 5841000.$

I(0°) No. 2. $L = 15{,}5, \quad B = 5596, \quad D = 817{,}3$

$P = 50, \quad \eta = 2{,}2 \quad 2{,}1$

$P = 100, \quad \eta = 4{,}1 \quad 4{,}1$

$L = 50$

$P = 50, \quad \eta = 63{,}5 \quad 63{,}5, \quad \eta' = 0{,}24$

$P = 100, \quad \eta = 127{,}0 \quad 127{,}2, \quad \eta' = 0{,}4$

$\eta_{100} = 126{,}7$ $\qquad$ $E = 5848000.$

---

1) Ich habe diese Größen und nicht die reciproken $\mathrm{E} = 1/E$ angegeben, weil sie in Lehrbüchern überall bevorzugt sind; für die eigentlichen Berechnungen hat man freilich immer von den E auszugehen.

I(0°) No. 3. $L = 15{,}5,\quad B = 5611,\quad D = 820{,}1$

$P = 50,\quad \eta = 2{,}1\quad 2{,}0$

$P = 100,\quad \eta = 4{,}3\quad 4{,}0$

$L = 50$

$P = 50,\quad \eta = 63{,}2\quad 63{,}0,\quad \eta' = 0{,}24$

$P = 100,\quad \eta = 126{,}0\quad 125{,}8,\quad \eta' = 0{,}4$

$\eta_{100} = 125{,}6$ $\quad\quad E = 5826000.$

I(0°) No. 4. $L = 15{,}5,\quad B = 5608,\quad D = 805{,}4,$

$P = 50,\quad \eta = 2{,}1\quad 2{,}0$

$P = 100,\quad \eta = 4{,}0\quad 4{,}1$

$L = 50{,}0$

$P = 50,\quad \eta = 64{,}2\quad 63{,}9,\quad \eta' = 0{,}24$

$P = 100,\quad \eta = 128{,}1\quad 127{,}8,\quad \eta' = 0{,}4$

$\eta_{100} = 127{,}6$ $\quad\quad E = 5836000.$

I(0°) No. 5. $L = 15{,}5,\quad B = 5609,\quad D = 818{,}2$

$P = 50,\quad \eta = 2{,}1\quad 2{,}1$

$P = 100,\quad \eta = 4{,}2\quad 4{,}1$

$L = 50{,}0$

$P = 50,\quad \eta = 63{,}3\quad 63{,}4,\quad \eta' = 0{,}24$

$P = 100,\quad \eta = 126{,}6\quad 126{,}5,\quad \eta' = 0{,}4$

$\eta_{100} = 126{,}2$ $\quad\quad E = 5837000.$

Beobachter V.

I(0°) No. 1. $L = 50{,}07$[1], $B = 5595,\quad D = 813{,}9$

$P = 60,\quad \eta = 350{,}8\quad 352{,}6,\quad \eta' = 1{,}1$

$\eta_{60} = 350{,}6$ $\quad\quad E = 5832000.$

I(0°) No. 2. $L = 14{,}07$

$P = 60,\quad \eta = 8{,}7,\quad 8{,}7$

$L = 52{,}07$

$P = 60,\quad \eta = 390{,}3\quad 391{,}9,\quad \eta' = 1{,}1$

$\eta_{60} = 390{,}0$

$L = 50{,}07$

$P = 60,\quad \eta = 343{,}4\quad 344{,}2$

$\eta_{60} = 342{,}7$ $\quad\quad E = 5850000.$

I(0°) No. 3. $L = 44{,}07,\quad B = 5608,\quad D = 821{,}8$

$P = 60,\quad \eta = 233{,}5\quad 232{,}7,\quad \eta' = 1{,}1$

$\eta_{60} = 232{,}0$ $\quad\quad E = 5817000.$

I(0°) No. 5. $L = 14{,}07,\quad B = 5609,\quad D = 818{,}2$

$P = 60,\quad \eta = 8{,}9\quad 8{,}9$

$L = 50{,}07$

$P = 60,\quad \eta = 344{,}1\quad 344{,}7,\quad \eta' = 1{,}1$

$\eta_{60} = 343{,}3$ $\quad\quad E = 5842000.$

Gesammtmittel $E_0 = 5837000,\quad E_0 = 17{,}13 . 10^{-8}$

Wahrscheinlicher Fehler $\pm 2400,\quad \pm 0{,}007.$

---

1) 0,7 ist die Correction der direct abgelesenen Länge an meinem Biegungsapparate.

Beobachter B.

I(−70°) No. 1. $L = 15{,}5,\quad B = 5589,\quad D = 828{,}2$

$P = 50,\quad \eta = 2{,}1 \quad 2{,}0$

$P = 100,\quad \eta = 4{,}0 \quad 3{,}9$

$L = 50{,}0$

$P = 50,\quad \eta = 62{,}0 \quad 62{,}2,\quad \eta' = 0{,}3$

$P = 100,\quad \eta = 124{,}5 \quad 124{,}5,\quad \eta' = 0{,}34$

$\eta_{100} = 124{,}1$ **E = 5749000.**

I(−70°) No. 2. $L = 15{,}5,\quad B = 5597,\quad D = 831{,}6$

$P = 50,\quad \eta = 2{,}0 \quad 2{,}1$

$P = 100,\quad \eta = 3{,}9 \quad 4{,}0$

$L = 50{,}0$

$P = 50,\quad \eta = 61{,}2 \quad 61{,}6,\quad \eta' = 0{,}3$

$P = 100,\quad \eta = 122{,}5 \quad 122{,}7,\quad \eta' = 0{,}34$

$\eta_{100} = 122{,}2$ **E = 5754000.**

$L = 60{,}1,\quad B = 5594,\quad D = 831{,}1$

$P = 50,\quad \eta = 107{,}0 \quad 107{,}4,\quad \eta' = 0{,}3$

$P = 100,\quad \eta = 214{,}2 \quad 214{,}7,\quad \eta' = 0{,}34$

$\eta_{100} = 214{,}0$ **E = 5719000.**

I(−70°) No. 3. $L = 15{,}5,\quad B = 5601,\quad D = 836{,}4$

$P = 50,\quad \eta = 2{,}1 \quad 2{,}1$

$P = 100,\quad \eta = 3{,}9 \quad 4{,}0$

$L = 50{,}0$

$P = 50,\quad \eta = 60{,}2 \quad 60{,}2,\quad \eta' = 0{,}3$

$P = 100,\quad \eta = 120{,}7 \quad 120{,}4,\quad \eta' = 0{,}34$

$\eta_{100} = 120{,}1$ **E = 5752000.**

$L = 60{,}1,\quad B = 5598,\quad D = 835{,}9$

$P = 50,\quad \eta = 105{,}5 \quad 105{,}4,\quad \eta' = 0{,}3$

$P = 100,\quad \eta = 210{,}3 \quad 210{,}2,\quad \eta' = 0{,}34$

$\eta_{100} = 210{,}0$ **E = 5729000.**

I(−70°) No. 4. $L = 15{,}5,\quad B = 5592,\quad D = 835{,}9$

$P = 50,\quad \eta = 2{,}1 \quad 2{,}2$

$P = 100,\quad \eta = 4{,}0 \quad 4{,}0$

$L = 50{,}0$

$P = 50,\quad \eta = 60{,}4 \quad 60{,}6,\quad \eta' = 0{,}3$

$P = 100,\quad \eta = 120{,}7 \quad 120{,}6,\quad \eta' = 0{,}34$

$\eta_{100} = 120{,}3$ **E = 5761000.**

$L = 60{,}1,\quad B = 5589,\quad D = 835{,}5$

$P = 50,\quad \eta = 105{,}3 \quad 105{,}2,\quad \eta' = 0{,}3$

$P = 100,\quad \eta = 210{,}7 \quad 210{,}7,\quad \eta' = 0{,}34$

$\eta_{100} = 210{,}3$ **E = 5735000.**

I(−70°) No. 5. $L = 15{,}5,\quad B = 5604,\quad D = 833{,}5$

$P = 50,\quad \eta = 2{,}2 \quad 2{,}0$

$P = 100,\quad \eta = 3{,}9 \quad 3{,}9$

$L = 50{,}0$

$P = 50,\quad \eta = 60{,}9 \quad 60{,}9,\quad \eta' = 0{,}3$

$P = 100,\quad \eta = 121{,}5 \quad 121{,}7,\quad \eta' = 0{,}34$

$\eta_{100} = 121{,}2$ **E = 5757000.**

Beobachter V.

I(-70^0) No. 1. $L = 14{,}07,\ B = 5589,\ D = 828{,}2,\ \vartheta = 16$
$P = 60,\ \eta = 9{,}6\ \ 9{,}0$
$L = 55{,}07$
$P = 60,\ \eta = 450{,}2\ \ 450{,}8,\ \eta' = 1{,}8$
$\eta_{60} = 448{,}7,\ \delta\eta = 1{,}0$ $\qquad$ $E = 5770000.$

I(-70^0) No. 2. $L = 14{,}07,\ B = 5594,\ D = 831{,}1,\ \vartheta = 16$
$P = 60,\ \eta = 9{,}2\ \ 9{,}4$
$L = 60{,}07$
$P = 60,\ \eta = 576{,}5\ \ 576{,}3,\ \eta' = 1{,}8$
$\eta_{60} = 574{,}6,\ \delta\eta = 1{,}3$ $\qquad$ $E = 5778000.$

I(-70^0) No. 3. $L = 60{,}07,\ B = 5598,\ D = 835{,}9,\ \vartheta = 16$
$P = 60,\ \eta = 565{,}0\ \ 566{,}2,\ \eta' = 1{,}8$
$\eta_{60} = 563{,}8,\ \delta\eta = 1{,}3$ $\qquad$ $E = 5789000.$

I(-70^0) No. 4. $L = 58{,}07,\ B = 5589,\ D = 835{,}5,\ \vartheta = 16$
$P = 60,\ \eta = 514{,}7\ \ 513{,}5,\ \eta' = 1{,}8$
$\eta_{60} = 512{,}3,\ \delta\eta = 1{,}2$ $\qquad$ $E = 5769000.$

I(-70^0) No. 5. $L = 55{,}07,\ B = 5604,\ D = 833{,}5,\ \vartheta = 16$
$P = 60,\ \eta = 443{,}5\ \ 441{,}2,\ \eta' = 1{,}8$
$\eta_{60} = 440{,}6,\ \delta\eta = 1{,}0$ $\qquad$ $E = 5748000.$

Gesammtmittel $E_{-70} = 5756000,\quad \mathrm{E}_{-70} = 17{,}37.10^{-8}$
Wahrscheinlicher Fehler $\pm 4600,\quad \pm 0{,}014.$

Beobachter B.

I($+50^0$) No. 1. $L = 15{,}5,\ B = 5614,\ D = 820{,}0$
$P = 50,\ \eta = 1{,}6\ \ 1{,}3$
$P = 100,\ \eta = 2{,}6\ \ 2{,}7$
$L = 50{,}0$
$P = 50,\ \eta = 33{,}1\ \ 33{,}5,\ \eta' = 0{,}44$
$P = 100,\ \eta = 66{,}1\ \ 66{,}7,\ \eta' = 0{,}65$
$\eta_{100} = 65{,}68$ $\qquad$ $E = 11130000.$

I($+50^0$) No. 2. $L = 15{,}5,\ B = 5613,\ D = 824{,}7$
$P = 50,\ \eta = 1{,}3\ \ 1{,}3$
$P = 100,\ \eta = 2{,}5\ \ 2{,}4$
$L = 50{,}0$
$P = 50,\ \eta = 32{,}9\ \ 32{,}7,\ \eta' = 0{,}44$
$P = 100,\ \eta = 65{,}3\ \ 65{,}2,\ \eta' = 0{,}65$
$\eta_{100} = 64{,}62$ $\qquad$ $E = 11130000.$

I($+50^0$) No. 3. $L = 15{,}5,\ B = 5612,\ D = 819{,}9$
$P = 50,\ \eta = 1{,}7\ \ 1{,}5$
$P = 100,\ \eta = 2{,}8\ \ 2{,}8$
$L = 50{,}0$
$P = 50,\ \eta = 33{,}3\ \ 33{,}4,\ \eta' = 0{,}44$
$P = 100,\ \eta = 66{,}2\ \ 66{,}2,\ \eta' = 0{,}65$
$\eta_{100} = 65{,}56$ $\qquad$ $E = 11170000.$

I(+50°) No. 4. $L = 15{,}5$, $B = 5612$, $D = 819{,}3$
$P = 50$, $\eta = 1{,}3 \quad 1{,}2$
$P = 100$, $\eta = 2{,}4 \quad 2{,}5$
$L = 50{,}0$
$P = 50$, $\eta = 33{,}1 \quad 33{,}1$, $\eta' = 0{,}44$
$P = 100$, $\eta = 66{,}2 \quad 66{,}1$, $\eta' = 0{,}65$
$\eta_{100} = 65{,}46$ $\quad$ $\boldsymbol{E} = 1120\,0000.$

I(+50°) No. 5. $L = 15{,}5$, $B = 5598$, $D = 821{,}0$
$P = 50$, $\eta = 1{,}6 \quad 1{,}4$
$P = 100$, $\eta = 2{,}6 \quad 2{,}7$
$L = 50{,}0$
$P = 50$, $\eta = 33{,}3 \quad 32{,}8$, $\eta' = 0{,}44$
$P = 100$, $\eta = 66{,}1 \quad 65{,}7$, $\eta' = 0{,}65$
$\eta_{100} = 65{,}20$ $\quad$ $\boldsymbol{E} = 1122\,0000.$

Beobachter V.

I(+50°) No. 1. $L = 14{,}07$, $B = 5614$, $D = 820{,}0$
$P = 80$, $\eta = 7{,}0 \quad 6{,}7$
$L = 48{,}07$
$P = 80$, $\eta = 212{,}8 \quad 212{,}6$, $\eta' = 1{,}7$
$\eta_{80} = 211{,}0$ $\quad$ $\boldsymbol{E} = 1118\,0000.$

I(+50°) No. 2. $L = 14{,}07$, $B = 5613$, $D = 824{,}7$
$P = 80$, $\eta = 6{,}9 \quad 7{,}3$
$L = 48{,}07$
$P = 80$, $\eta = 210{,}3 \quad 209{,}9$, $\eta' = 1{,}7$
$\eta_{80} = 208{,}4$, $\quad$ $\boldsymbol{E} = 1113\,0000.$

I(+50°) No. 3. $L = 48{,}07$, $B = 5612$, $D = 819{,}9$
$P = 80$, $\eta = 213{,}0 \quad 213{,}4$, $\eta' = 1{,}7$
$\eta_{80} = 211{,}5$ $\quad$ $\boldsymbol{E} = 1116\,0000.$

I(+50°) No. 4. $L = 48{,}07$, $B = 5612$, $D = 819{,}3$
$P = 80$, $\eta = 213{,}0 \quad 213{,}0$, $\eta' = 1{,}7$
$\eta_{80} = 211{,}3$ $\quad$ $\boldsymbol{E} = 1118\,0000.$

Gesammtmittel $\boldsymbol{E}_{+50} = 1116\,7000$, $\quad E_{+50} = 8{,}955 . 10^{-8}$
Wahrscheinlicher Fehler ± 7000, $\quad \pm 0{,}005$.

Beobachter B.

II(90°) No. 1. $L = 15{,}5$, $B = 5607$, $D = 836{,}2$
$P = 50$, $\eta = 1{,}6 \quad 1{,}9$
$P = 100$, $\eta = 2{,}8 \quad 3{,}2$
$L = 50{,}0$
$P = 50$, $\eta = 38{,}8 \quad 39{,}1$, $\eta' = 0{,}58$
$P = 100$, $\eta = 77{,}4 \quad 77{,}9$, $\eta' = 0{,}65$
$\eta_{100} = 76{,}96$ $\quad$ $\boldsymbol{E} = 897\,4000.$

$L = 60{,}1$ $B = 5604$, $D = 836{,}0$
$P = 50$, $\eta = 67{,}6 \quad 67{,}5$, $\eta' = 0{,}58$
$P = 100$, $\eta = 134{,}9 \quad 134{,}8$, $\eta' = 0{,}65$
$\eta_{100} = 134{,}14$ $\quad$ $\boldsymbol{E} = 895\,4000.$

II (90°) No. 2. $L = 15,5$, $B = 5607$, $D = 838,5$
$P = 50$, $\eta = 1,6 \quad 1,8$
$P = 100$, $\eta = 2,8 \quad 2,9$
$L = 50,0$
$P = 50$, $\eta = 38,4 \quad 38,5$, $\eta' = 0,58$
$P = 100$, $\eta = 77,0 \quad 77,1$, $\eta' = 0,65$
$\eta_{100} = 76,28$ — **$E = 8980000$.**
$L = 60,1$, $B = 5605$, $D = 838,3$
$P = 50$, $\eta = 67,0 \quad 66,7$, $\eta' = 0,58$
$P = 100$, $\eta = 133,7 \quad 135,5$, $\eta' = 0,65$
$\eta_{100} = 133,6$ — **$E = 8917000$.**

II (90°) No. 3. $L = 15,5$, $B = 5601$, $D = 848,8$
$P = 50$, $\eta = 1,7 \quad 1,8$
$P = 100$, $\eta = 2,5 \quad 3,0$
$L = 50,0$
$P = 50$, $\eta = 37,0 \quad 36,9$, $\eta' = 0,58$
$P = 100$, $\eta = 73,9 \quad 73,9$, $\eta' = 0,65$
$\eta_{100} = 73,12$ — **$E = 9041000$.**
$L = 80,0$, $B = 5593$, $D = 848,1$
$P = 50$, $\eta = 151,7 \quad 152,1$, $\eta' = 0,58$
$P = 100$, $\eta = 303,7 \quad 304,5$, $\eta' = 0,65$
$\eta_{100} = 303,2$ — **$E = 8965000$.**

II (90°) No. 4. $L = 15,5$, $B = 5610$, $D = 855,9$
$P = 50$, $\eta = 1,6 \quad 1,4$
$P = 100$, $\eta = 2,8 \quad 2,9$
$L = 50,0$
$P = 50$, $\eta = 36,3 \quad 36,0$, $\eta' = 0,58$
$P = 100$, $\eta = 72,2 \quad 72,2$, $\eta' = 0,65$
$\eta_{100} = 71,44$ — **$E = 9010000$.**
$L = 80,0$, $B = 5601$, $D = 855,3$
$P = 50$, $\eta = 147,4 \quad 147,8$, $\eta' = 0,58$
$P = 100$, $\eta = 295,0 \quad 295,3$, $\eta' = 0,65$
$\eta_{100} = 294,4$ — **$E = 8987000$.**

II (90°) No. 5. $L = 15,5$, $B = 5608$, $D = 852,2$
$P = 50$, $\eta = 1,7 \quad 1,7$
$P = 100$, $\eta = 2,9 \quad 2,8$
$L = 50,0$
$P = 50$, $\eta = 36,7 \quad 36,5$, $\eta' = 0,58$
$P = 100$, $\eta = 72,8 \quad 73,0$, $\eta' = 0,65$
$\eta_{100} = 72,88$ — **$E = 9051000$.**
$L = 80,0$, $B = 5599$, $D = 851,3$
$P = 50$, $\eta = 149,2 \quad 149,7$, $\eta' = 0,58$
$P = 100$, $\eta = 298,8 \quad 299,1$, $\eta' = 0,65$
$\eta_{100} = 298,2$ — **$E = 9005000$.**

Beobachter V.

II (90°) No. 1. $L = 14{,}07$, $B = 5604$, $D = 836{,}0$
$P = 30$, $\eta = 4{,}1 \quad 4{,}1$
$L = 58{,}07$
$P = 30$, $\eta = 166{,}9 \quad 166{,}9$, $\eta' = 1{,}8$
$\eta_{30} = 165{,}1$, **E = 8930000.**

II (90°) No. 2. $L = 64{,}07$, $B = 5605$, $D = 838{,}3$
$P = 30$, η $222{,}0 \quad 222{,}7$, $\eta' = 1{,}8$
$\eta_{30} = 220{,}5$. **E = 8913000.**

II (90°) No. 3. $L = 84{,}07$, $B = 5593$, $D = 848{,}1$
$P = 30$, $\eta = 478{,}7 \quad 478{,}5$, $\eta' = 1{,}8$
$\eta_{30} = 476{,}8$ **E = 9024000.**

II (90°) No. 4. $L = 14{,}07$, $B = 5601$, $D = 855{,}3$
$P = 30$, $\eta = 4{,}3 \quad 3{,}8$
$L = 88{,}07$
$P = 30$, $\eta = 533{,}5 \quad 533{,}2$, $\eta' = 1{,}8$
$\eta_{30} = 531{,}5$ **E = 9036000.**

II (98°) No. 5. $L = 88{,}07$, $B = 5599$, $D = 851{,}3$
$P = 30$, $\eta = 541{,}5 \quad 542{,}3$, $\eta' = 1{,}8$
$\eta_{30} = 540{,}1$. **E = 9026000.**

Beobachter B.

II′(90°) No. 1. $L = 15{,}5$, $B = 5612$, $D = 845{,}6$
$P = 50$, $\eta = 1{,}7 \quad 1{,}5$
$P = 100$, $\eta = 2{,}9 \quad 2{,}9$
$L = 50{,}0$
$P = 50$, $\eta = 37{,}4 \quad 37{,}5$, $\eta' = 0{,}38$
$P = 100$, $\eta = 74{,}9 \quad 74{,}5$, $\eta' = 0{,}55$
$\eta_{100} = 74{,}2$ **E = 8993000.**

$L = 65{,}0$, $B = 5609$, $D = 845{,}4$
$P = 50$, $\eta = 82{,}1 \quad 82{,}0$, $\eta' = 0{,}38$
$P = 100$, $\eta = 164{,}0 \quad 163{,}7$, $\eta' = 0{,}55$
$\eta_{100} = 163{,}3$ **E = 8987000.**

II′(90°) No. 2. $L = 15{,}5$, $B = 5604$, $D = 861{,}8$
$P = 50$, $\eta = 1{,}6 \quad 1{,}3$
$P = 100$, $\eta = 2{,}4 \quad 2{,}7$
$L = 50{,}0$
$P = 50$, $\eta = 35{,}5 \quad 35{,}5$, $\eta' = 0{,}38$
$P = 100$, $\eta = 70{,}7 \quad 70{,}9$, $\eta' = 0{,}55$
$\eta_{100} = 70{,}2$ **E = 8993000.**

$L = 65{,}0$, $B = 5600$, $D = 861{,}6$
$P = 50$, $\eta = 77{,}5 \quad 77{,}7$, $\eta' = 0{,}38$
$P = 100$, $\eta = 155{,}2 \quad 155{,}2$, $\eta' = 0{,}55$
$\eta_{100} = 154{,}6$ **E = 8987000.**

II′(90°) No. 3. $L = 15{,}5,\ B = 5613,\ D = 851{,}4$
$P = 50,\ \eta = 1{,}3\ \ 1{,}5$
$P = 100,\ \eta = 2{,}7\ \ 2{,}9$
$L = 50{,}0$
$P = 50,\ \eta = 37{,}3\ \ 37{,}0,\ \eta' = 0{,}38$
$P = 100,\ \eta = 74{,}0\ \ 74{,}0,\ \eta' = 0{,}55$
$\eta_{100} = 73{,}44$ $\boldsymbol{E} = 8900000.$
$L = 80{,}0,\ B = 5605,\ D = 851{,}0$
$P = 50,\ \eta = 150{,}9\ \ 151{,}2,\ \eta' = 0{,}38$
$P = 100,\ \eta = 301{,}6\ \ 302{,}5,\ \eta' = 0{,}55$
$\eta_{100} = 301{,}5$ $\boldsymbol{E} = 8904000.$

II′(90°) No. 4. $L = 15{,}5,\ B = 5602,\ D = 857{,}7$
$P = 50,\ \eta = 1{,}2\ \ 1{,}5$
$P = 100,\ \eta = 2{,}6\ \ 2{,}4$
$L = 50{,}0$
$P = 50,\ \eta = 36{,}0\ \ 36{,}0,\ \eta' = 0{,}38$
$P = 100,\ \eta = 71{,}7\ \ 72{,}0,\ \eta' = 0{,}55$
$\eta_{100} = 71{,}28$ $\boldsymbol{E} = 8987000.$
$L = 80{,}0,\ B = 5595,\ D = 857{,}5$
$P = 50,\ \eta = 146{,}9\ \ 146{,}9,\ \eta' = 0{,}38$
$P = 100,\ \eta = 293{,}6\ \ 294{,}3,\ \eta' = 0{,}55$
$\eta_{100} = 293{,}3$ $\boldsymbol{E} = 8960000.$

Beobachter V.

II′(90°) No. 1. $L = 68{,}07,\ B = 5609,\ D = 845{,}4$
$P = 30,\ \eta = 258{,}1\ \ 258{,}6,\ \eta' = 1{,}8$
$\eta_{30} = 256{,}5$ $\boldsymbol{E} = 8937000.$

II′(90°) No. 2. $L = 14{,}07,\ B = 5600,\ D = 861{,}6$
$P = 30,\ \eta = 4{,}0\ \ 4{,}0$
$L = 66{,}07$
$P = 30,\ \eta = 223{,}9\ \ 223{,}3,\ \eta' = 1{,}8$
$\eta_{30} = 221{,}8$ $\boldsymbol{E} = 8948000.$

II′(90°) No. 3. $L = 82{,}07,\ B = 5605,\ D = 851{,}0$
$P = 25,\ \eta = 370{,}3\ \ 369{,}3,\ \eta' = 1{,}6$
$\eta_{25} = 368{,}2$ $\boldsymbol{E} = 8930000.$

II′(90°) No. 4. $L = 82{,}07,\ B = 5595,\ D = 857{,}5$
$P = 25,\ \eta = 359{,}6\ \ 359{,}6,\ \eta' = 1{,}6$
$\eta_{25} = 358{,}0$ $\boldsymbol{E} = 8986000.$

Gesammtmittel $\boldsymbol{E}_{90} = 8977000,\quad \mathrm{E}_{90} = 11{,}14.10^{-8}$
Wahrscheinlicher Fehler $\pm 6500,\quad \pm 0{,}008.$

Um die vorstehenden Resultate zur Berechnung der Coefficienten in dem Ausdruck für E zu benutzen, waren zunächst die genauen Orientirungen der Stäbchen I(−70°) und I(+50°) zu bestimmen. Die Abweichungen ihrer Längsrichtungen aus dem ersten Hauptschnitt sind ohne Einfluß auf die Berechnung, es genügte also, mit dem Reflexionsgoniometer die Winkel zu bestimmen, welche ihre Breitseiten mit der Spaltungsfläche normal zu dem betreffenden Hauptschnitt einschlossen. Diese Winkel fanden sich bei den genannten beiden Gattungen resp. gleich 24° 0′ und 83° 59′. Da nun die Spaltungsflächen den Winkel 45° 23′,5 mit der Hauptaxe einschließen, so finden sich die gesuchten Winkel zwischen der Hauptaxe und den Längsrichtungen dieser beiden Stäbchengattungen resp.

$$\text{gleich} \quad -69^0\ 23' \quad \text{und} \quad +50^0\ 38'.$$

Aus den erhaltenen vier Werthen für E:

$$\begin{aligned} E_0 &= (17{,}13 \pm 0{,}007)\,10^{-8}, \\ E_{-70} &= (17{,}37 \pm 0{,}014)\,10^{-8}, \\ E_{+50} &= (8{,}955 \pm 0{,}005)\,10^{-8}, \\ E_{90} &= (11{,}14 \pm 0{,}008)\,10^{-8}, \end{aligned}$$

berechnen sich nunmehr nach (10) zunächst folgende vier Aggregate der s_{hk}:

$$22)\quad \begin{aligned} s_{11} &= (11{,}14 \pm 0{,}008)\,10^{-8}, \\ s_{33} &= (17{,}13 \pm 0{,}007)\,10^{-8}, \\ s_{44} + 2s_{13} &= (31{,}05 \pm 0{,}030)\,10^{-8}, \\ s_{14} &= (8{,}983 \pm 0{,}017)\,10^{-8}. \end{aligned}$$

Der allgemeine Werth für E nimmt dadurch folgende Gestalt an:

$$23)\quad E = 11{,}14\,\beta^4 + 17{,}13\,\gamma^4 + 31{,}05\,\beta^2\gamma^2 + 17{,}97\,\beta\gamma\,(3\alpha^2 - \beta^2).$$

In dem ersten Hauptschnitt, für welchen $\alpha = 0$ ist, finden Maxima und Minima statt in den vier Richtungen, welche folgenden Winkeln gegen die Hauptaxe entsprechen:

$$\varphi_{\mathrm{I}} = -50^0\ 52', \quad \varphi_{\mathrm{II}} = -7^0\ 7', \quad \varphi_{\mathrm{III}} = 0^0, \quad \varphi_{\mathrm{IV}} = +66^0\ 46'.$$

Mit diesen Werthen stimmen befriedigend die aus Baumgartens früheren Beobachtungen folgenden

$$\varphi_{\mathrm{I}}' = -49^0\ 30', \quad \varphi_{\mathrm{II}}' = -2^0\ 35', \quad \varphi_{\mathrm{III}}' = 0, \quad \varphi_{\mathrm{IV}}' = +68^0\ 16';$$

die Factoren in der Gleichung für E, nämlich 15,06, 23,65, 45,70, 24,10, weichen stark in dem Sinne ab, der daraus folgt, daß bei jenen Beobachtungen nicht polirte, sondern matt geschliffene Stäbchen benutzt sind. Ihr Verhältniß zu den richtigen Werthen ist ziemlich constant, nämlich 1,35, 1,38, 1,47, 1,34, was die Uebereinstimmung in der Lage der Maxima und Minima zur Folge hat und darauf hinweist, daß die verschiedenen Stäbchen in Folge des Schliffs nahe gleiche oberflächliche Poren besessen haben.

Die Maximal- und Minimalwerthe von E haben folgende Größen:

$$E_{I} = 19{,}49.10^{-8}, \quad E_{II} = 17{,}12.10^{-8}, \quad E_{III} = 17{,}13.10^{-8},$$
$$E_{IV} = 6{,}94.10^{-8}.$$

Das Minimum E_{II} und das Maximum E_{III} sind so nahe gleich, daß ihre gegenseitige Lage nur ungenau bestimmbar ist. Man möchte zunächst vermuthen, daß sie in Wirklichkeit znsammenfallen. Dann müßte nach der Formel für E

$$2s_{33} = s_{44} + 2s_{13}$$

sein; da diese Größen aber um ein Zehntel ihres Werthes verschieden gefunden sind, so ist diese Möglichkeit auszuschließen.

Für den zweiten Hauptschnitt ($\beta = 0$) kömmt in Formel (23) nur das letzte Glied in Wegfall, wodurch E eine gerade Function der Winkel gegen die X- und Z-Axe wird. Maxima und Minima finden nur in diesen Axen-Richtungen statt; sie sind die direct beobachteten Werthe

$$E_0 = 17{,}13.10^{-8}, \quad E_{90} = 11{,}14.10^{-8}.$$

Figur 1) der beigegebenen Tafel stellt die Curven dar, welche man erhält, wenn man im I. und II. Hauptschnitt die Größe von E, durch eine Länge repräsentirt, auf der zugehörigen Richtung aufträgt.

Drillungen.

Die Drillungsbeobachtungen sind mit dem auch früher von mir benutzten Spiegelapparat angestellt; der Abstand A zwischen Spiegel und Scala betrug 5173 mm, die Millimeter der letzteren waren um 0,00374 zu groß. Die in den folgenden Tafeln angegebenen σ sind die an der Scala beobachteten, bereits von der Tangente auf den Bogen reducirten Längen für die Belastungen $G + P$, wobei G das Gewicht der Waagschaale bezeichnet, das bei der Elimination der Axenreibung aus der Rechnung herausfällt. lR und rR deuten an, daß die Beobachtungen an der linken oder rechten Rolle des Apparates angestellt sind; das Mittel von deren Radien R betrug 36,80 mm; ρ giebt die Größe der Axenreibung in Theilen der Scala an.

Aus sämmtlichen Beobachtungen ist die dem Moment RP entsprechende Drehung σ_p berechnet und unter jede Beobachtungsreihe gesetzt; σ_p/A ist die doppelte Drehung $2\tau_p$ in Theilen des Radius, welche RP entspricht.

Aus diesem Werthe τ und den angegebenen Dimensionen sind nach den Formeln 7), 11) und 12) unter Benutzung des oben erhaltenen Werthes $s_{14} = 8{,}98 . 10^{-8}$ durch successive Annäherung die Drillungswiderstände T_{90} und T'_{90} berechnet und aus ihnen die Gesammtmittel in gewöhnlicher Weise gebildet.

II (90°) No. 1. $L = 44{,}41$, $B = 5607$, $D = 835{,}7$

rR.	$G + 20$,	$\sigma =$ 124,2	124,4	124,4	124,1,	$\rho = 4{,}6$
	$G + 10$,	$\sigma =$ 74,1	74,4		,	$\rho = 4{,}6$
	G ,	$\sigma =$ 24,3	24,2	24,1	24,1,	$\rho = 4{,}6$
lR.	$G + 20$,	$\sigma =$ 123,1	123,2	122,9	122,9,	$\rho = 5{,}5$
	$G + 10$,	$\sigma =$ 73,2	73,3	73,3	73,2,	$\rho = 5{,}6$
	G ,	$\sigma =$ 23,3	23,5	23,4	23,3,	$\rho = 5{,}6$
		$\sigma_{20} =$ 99,85				$T' = 3385000.$

II (90°) No. 2. $L = 51{,}27$, $B = 5607$, $D = 837{,}7$.

lR.	$G + 20$,	$\sigma =$ 142,8	142,7	142,6	142,4,	$\rho = 2{,}8$
	$G + 10$,	$\sigma =$ 85,4	85,2	85,3	85,3,	$\rho = 3{,}1$
	G ,	$\sigma =$ 27,7	27,8	28,2	28,6,	$\rho = 3{,}2$
rR.	$G + 20$,	$\sigma =$ 143,1	143,2	143,1	143,3,	$\rho = 1{,}2$
	$G + 10$,	$\sigma =$ 85,9	85,9	85,8	85,8,	$\rho = 1{,}2$
	G ,	$\sigma =$ 28,7	28,8	28,8	28,9,	$\rho = 1{,}2$
		$\sigma_{20} =$ 114,4				$T' = 3396000.$

II (90°) No. 3. $L = 64{,}22$, $B = 5599$, $D = 846{,}9$.

rR.	$G + 20$,	$\sigma =$ 171,0	170,7	170,6	170,4,	$\rho = 11{,}0$
	$G + 10$,	$\sigma =$ 100,9	100,9	100,7	100,8,	$\rho = 11{,}0$
	G ,	$\sigma =$ 31,2	30,9	30,6	30,5,	$\rho = 12{,}0$
lR.	$G + 20$,	$\sigma =$ 172,6	172,7	172 2	172,4,	$\rho = 6{,}3$
	$G + 10$,	$\sigma =$ 103,8	103,8	103,5	104,1,	$\rho = 6{,}0$
	G ,	$\sigma =$ 33,8	34,2	34,1	33,8,	$\rho = 6{,}0$
		$\sigma_{20} =$ 139,3				$T' = 3384000.$

Wiederholt bei anderer Einstellung

lR.	$G + 20$,	$\sigma =$ 172,4	172,2	172,2	172,3,	$\rho = 6{,}0$
	$G + 10$,	$\sigma =$ 103,3	102,9	102,9	103,0,	$\rho = 6{,}0$
	G ,	$\sigma =$ 33,7	33,8	33,7	33,9,	$\rho = 5{,}8$
		$\sigma_{20} =$ 139,2				$T' = 3386000.$

Gesammtmittel $T_{90} = 3388000$, $T = 29{,}515 . 10^{-8}$

Wahrscheinlicher Fehler ± 2500, $\pm 0{,}022$.

II' (90°) No. 1. $L = 52{,}42$, $B = 5603$, $D = 845{,}1$.

lR.	$G + 10$,	$\sigma =$ 110,0	110,0	109,7	109,9,	$\rho = 4{,}8$
	G ,	$\sigma =$ 36,5	36,6	36,1	36,7,	$\rho = 5{,}2$
rR.	$G + 10$,	$\sigma =$ 110,0	110,5	110,4	110,3,	$\rho = 1{,}4$
	G ,	$\sigma =$ 36,3	36,4	36,2	36,1,	$\rho = 1{,}6$
		$\sigma_{20} =$ 147,5				$T' = 2528000.$

II′(90°) No. 2. $L = 52{,}17$, $B = 5603$, $D = 861{,}1$.

rR.	$G + 20$,	$\sigma = 172{,}9$	172,7	172,6	172,9,	$\rho = 5{,}5$
	$G + 10$,	$\sigma = 103{,}4$	103,4	103,1	103,1,	$\rho = 6{,}5$
	G ,	$\sigma = 33{,}6$	33,4	33,3	33,5,	$\rho = 6{,}4$
lR.	$G + 20$,	$\sigma = 173{,}3$	173,4	173,4	173,7,	$\rho = 6{,}8$
	$G + 10$,	$\sigma = 103{,}2$	102,8	102,4	102,5,	$\rho = 7{,}0$
	G ,	$\sigma = 33{,}0$	33,1	33,1	32,9,	$\rho = 7{,}5$
		$\sigma_{20} = 139{,}9$				$T = 2523000$.

II′(90°) No. 3. $L = 65{,}74$, $B = 5609$, $D = 848{,}4$.

rR.	$G + 20$,	$\sigma = 228{,}6$	228,4	228,1	228,0,	$\rho = 1{,}6$
	$G + 10$,	$\sigma = 136{,}1$	135,8	136,5	136,1,	$\rho = 2{,}0$
	G ,	$\sigma = 44{,}4$	44,2	44,3	44,3,	$\rho = 2{,}4$
lR.	$G + 20$,	$\sigma = 228{,}2$	229,2	229,0	229,2,	$\rho = 4{,}8$
	$G + 10$,	$\sigma = 136{,}1$	135,9	136,8	136,9,	$\rho = 3{,}2$
	G ,	$\sigma = 44{,}8$	44,7	44,4	44,7,	$\rho = 4{,}6$
		$\sigma_{20} = 183{,}8$				$T = 2522000$.

II′(90°) No. 4. $L = 65{,}01$, $B = 5599$, $D = 857{,}1$.

lR.	$G + 20$,	$\sigma = 218{,}3$	218,4	218,8	219,3,	$\rho = 5{,}1$
	$G + 10$,	$\sigma = 129{,}8$	130,5	131,0	131,3,	$\rho = 5{,}7$
	G ,	$\sigma = 42{,}5$	42,4	42,5	42,6,	$\rho = 5{,}0$
rR.	$G + 20$,	$\sigma = 221{,}8$	221,8	221,9	221,5,	$\rho = 6{,}0$
	$G + 10$,	$\sigma = 132{,}9$	132,7	132,6	132,3,	$\rho = 6{,}4$
	G ,	$\sigma = 43{,}9$	43,7	44,5	44,0,	$\rho = 6{,}2$
		$\sigma_{20} = 176{,}8$				$T = 2524000$.

Gesammtmittel $T'_{90} = 2524000$, $T'_{90} = 39{,}62 \cdot 10^{-8}$

wahrscheinlicher Fehler $\pm$ 900, $\pm$ 0,014.

Die Berechnung der T_{90} und T'_{90} ist im Vorstehenden so ausgeführt, als wäre die Orientirung der Stäbchen absolut genau; wir wollen nun nachträglich an den Resultaten die kleinen Correctionen anbringen, welche in Folge der Fehler der Orientirung nöthig sind. Dies geht an, weil dieselben auf den Werth der bei der Berechnung benutzten Function f keinen merklichen Einfluß üben.

Die Abweichung der Längsrichtung der benutzten Stäbchen von der Normalen zur krystallographischen Symmetrieebene, d. h. der X-Axe, übt keinen merklichen Einfluß, da diese eine Maximalrichtung für den Drillungscoefficienten darstellt. Dagegen ist die Abweichung der Breiten- und Dickenrichtung von der Y- und Z-Axe von Wichtigkeit.

Um diese Abweichungen zu bestimmen, wurden von zwei Stäbchen Stücken abgeschnitten und an diesen je eine Spaltungsfläche angebrochen; deren Winkel gegen die Breitseiten ließen sich mit dem Reflexionsgoniometer leicht bestimmen.

Aus den für die Gattung II(90°) und II′(90°) erhaltenen

Werthen 44° 45′ und 45° 32′,5 fand sich unter Benutzung des Werthes 45° 23′,5 für den Winkel der Hauptaxe mit der Spaltungsfläche für die Gattung

$$\begin{array}{ll} \text{II } (90^0) & \sphericalangle(B, Y) = \sphericalangle(D, Z) = -8{,}5' \\ \text{II}' \ (90^0) & \sphericalangle(D, Y) = \sphericalangle(B, Z) = -9'{,}0; \end{array}$$

beide Winkel ergaben sich also merklich gleich, entsprechend dem Umstande, daß die Stäbchen aus derselben Platte, welche der XZ-Ebene nahe parallel gewesen war, hergestellt sind.

Nehmen wir abgerundet 9′ als die Größe der Abweichung an und berücksichtigen, daß nach Formel (9)

T_{90} um $4 s_{14} \sin(9') \cos(9')$ zu vergrößern,
T'_{90} um ebensoviel zu verkleinern

ist, um die Werthe $2(s_{11} - s_{12})$ resp. s_{44} zu liefern, so findet man

$$\begin{aligned} 2(s_{11} - s_{12}) &= (29{,}61 \pm 0{,}022)\ 10^{-8}, \\ s_{44} &= (39{,}52_5 \pm 0{,}014)\ 10^{-8} \end{aligned}$$

als definitive Werthe.

Wie ich schon in der Einleitung angegeben, will ich nun auch die Resultate der Drillung der Stäbchen I(0°) mittheilen und sie unter der Annahme berechnen, daß für sie f denselben Werth $-0{,}630$ hat, der nach der Theorie für unkrystallinische Medien gilt, was die plausible Hypothese enthält, daß hinsichtlich der resultirenden Drehung für ein Stäbchen parallel der Hauptaxe die Lage der Querdimensionen ohne Einfluß ist.

I(0°) No. 1. $L = 35{,}04$, $B = 5598$, $D = 814{,}2$, $\vartheta = 23$.

lR.	$G + 20$,	$\sigma =$	168,8	168,7	168,9	168,7,	$\rho = 2{,}2$
	$G + 10$,	$\sigma =$	112,3	111,7	111,6	112,0,	$\rho = 2{,}0$
	G ,	$\sigma =$	55,1	55,1	55,3	55,0,	$\rho = 2{,}4$
rR.	$G + 20$,	$\sigma =$	167,4	167,3	167,2	167,3,	$\rho = 2{,}2$
	$G + 10$,	$\sigma =$	111,2	111,1	111,0	110,9,	$\rho = 2{,}0$
	G ,	$\sigma =$	54,9	54,9	55,0	55,0,	$\rho = 1{,}8$

$\sigma_{20} = 113{,}0$. ($\boldsymbol{T} = 2500000$).

Diese Beobachtung schließe ich wegen der höheren Temperatur, auf welche sie sich bezieht, von der Berechnung aus.

I(0°) No. 2. $L = 39{,}16$, $B = 5599$, $D = 817{,}5$.

rR.	$G + 20$,	$\sigma =$	153,9	154,0	153,5	153,7,	$\rho = 1{,}6$
	$G + 10$,	$\sigma =$	91,9	92,0	91,8	91,8,	$\rho = 1{,}6$
	G ,	$\sigma =$	30,6	30,2	30,4	30,8,	$\rho = 1{,}4$

$\sigma_{20} = 123{,}2$, $\boldsymbol{T} = 2532000$.

I(0°) No. 3 zerbrach beim Torquiren.

I(0°) No. 4.	L = 39,15,	B = 5611,	D = 815,7.				
lR.	G + 20,	σ = 154,8	154,8	155,0	154,9,	ρ = 3,0	
	G + 10,	σ = 92,9	92,9	92,9	92,9,	ρ = 2,4	
	G ,	σ = 31,0	30,8	30,8	30,7,	ρ = 2,6	
rR.	G + 20,	σ = 155,3	155,5	155,7	155,4,	ρ = 2,2	
	G + 10,	σ = 93,1	93,4	93,2	93,2,	ρ = 2,0	
	G ,	σ = 31,6	31,1	31,2	31,0,	ρ = 1,7	
		σ_{20} = 124,2.				$\mathfrak{T}$ = 2522000.	
I(0°) No. 5.	L = 38,31,	B = 5612,	D = 818,7.				
rR.	G + 20,	σ = 148,8	148,9	148,8	148,5,	ρ = 6,2	
	G + 10,	σ = 89,2	88,8	89,2	88,8,	ρ = 5,8	
	G ,	σ = 28,9	28,9	28,4	28,6,	ρ = 6,2	
lR.	G + 20,	σ = 149,9	149,9	149,8	150,0,	ρ = 3,0	
	G + 10,	σ = 90,2	90,3	90,2	90,3,	ρ = 3,0	
	G ,	σ = 30,5	30,5	30,4	30,5,	ρ = 2,6	
		σ_{20} = 119,7.				$\mathfrak{T}'$ = 2532000.	
		Gesammtmittel		$\mathfrak{T}_0$ = 2528000,		T_0 = 39,56 . 10^{-8}	
		wahrscheinlicher Fehler		± 2200,		± 0,34.	

Auch dies Resultat ist wegen des Fehlers in der Orientirung zu corrigiren, denn für den Drillungscoefficienten eines rechteckigen Prismas ist die Z-Hauptaxe keine Maximal- oder Minimalrichtung.

Die Beobachtung am Reflexionsgoniometer ergab, daß die Längsaxe um 4′ nach der Seite der $+Y$- zu von der $+Z$-Axe abwich. Nach Formel (6) ist daher $4s_{14}\sin(4')\cos(4')$ von T_0 in Abzug zu bringen, um s_{44} zu erhalten. Man findet so

$$s_{44} = (39{,}51_5 \pm 0{,}034)\,10^{-8}.$$

Die Uebereinstimmung dieses Resultates mit dem durch die Beobachtung von Gattung II′ (90°) erhaltenen ist ganz überraschend; die benutzte Hypothese ist also vollständig bestätigt und der wahrscheinliche Werth des Fehlers von s_{44} wird durch Combination beider Resultate noch erheblich herabgedrückt.

Wir schreiben das Endresultat:

$$\begin{aligned} 2(s_{11}-s_{12}) &= (29{,}61 \pm 0{,}022)\,.\,10^{-8}, \qquad (24\\ s_{44} &= (39{,}52 \pm 0{,}002)\,.\,10^{-8}. \end{aligned}$$

Der allgemeine Werth des Drillungscoefficienten für ein rechteckiges Prisma, dessen Längsaxe in die X-Axe fällt und dessen Queraxen beliebig liegen, wird hiernach:

$$T = (39{,}52 - 9{,}91\,.\,\gamma_2^2 - 35{,}93\,.\,\gamma_2\beta_2)\,10^{-8}. \qquad 25)$$

Er besitzt ein Maximum $T_{max} = 53{,}2\,.\,10^{-8}$, wenn die kleinere Querdimension D zwischen der $+Y$- und $-Z$-Axe liegt und mit der Y-Axe den Winkel $37^0\ 17{,}5$ einschließt, ein Minimum $T_{min} = 15{,}93 \cdot 10^{-8}$, wenn dieselbe zwischen der $+Y$- und $+Z$-Axe liegt und unter $37^0\ 17'5$ gegen letztere geneigt ist. Der Einfluß der Lage der Querdimensionen ist also ganz enorm; Fig. 2 auf der beigegebenen Tafel stellt T als Function der Richtung von D dar.

Der Drillungscoefficient T^0 eines Kreiscylinders besitzt nach (14) den Werth:

$$26)\quad T^0 = (69{,}13 - 1{,}21\gamma^2 + 11{,}12\gamma^4 - 71{,}86\beta\gamma(3\alpha^2 - \beta^2))10^{-8}.$$

In dem ersten Hauptschnitt, für welchem $\alpha = 0$ ist, finden Maxima und Minima statt in den vier Richtungen, die folgenden Winkeln gegen die Z-Hauptaxe entsprechen:

$$\varphi_I = -60^0\,53', \quad \varphi_{II} = 0, \quad \varphi_{III} = +11^0\,0', \quad \varphi_{IV} = +58^0\,35';$$

sie haben die Werthe:

$$T^0_I = 46{,}15 \cdot 10^{-8}, \quad T^0_{II} = 79{,}04 \cdot 10^{-8}, \quad T^0_{III} = 78{,}77 \cdot 10^{-8},$$
$$T^0_{IV} = 92{,}90 \cdot 10^{-8}.$$

Für den zweiten Hauptschnitt ist $\beta = 0$ und man erhält nur ein Maximum und ein Minimum entsprechend

$$\varphi_{I'} = 0 \qquad \varphi_{II'} = 90$$

mit den Werthen

$$T^0_0 = 79{,}04 \cdot 10^{-8}, \quad T^0_{90} = 69{,}13.$$

Figur 3 der beigegebenen Tafel stellt den Verlauf von T^0 für beide Hauptschnitte anschaulich dar.

Resultate.

Wir bilden nunmehr die Werthe aller der einzelnen s_{hk} welche aus (22) und (24) folgen. Es findet sich

$$27)\quad \begin{aligned} s_{11} &= (11{,}14 \pm 0{,}008)10^{-8}, & s_{12} &= -(3{,}67 \pm 0{,}013)10^{-8}, \\ s_{33} &= (17{,}13 \pm 0{,}007)10^{-8}, & s_{13} &= -(4{,}24 \pm 0{,}015)10^{-8}, \\ s_{44} &= (39{,}52 \pm 0{,}002)10^{-8}, & s_{14} &= +(8{,}98 \pm 0.017)10^{-8}. \end{aligned}$$

Hieraus folgen zunächst die Coefficienten der linearen Dilatation bei allseitigem Druck

$$28)\quad A_1 = A_2 = 3{,}23 \cdot 10^{-8}, \quad A_3 = 8{,}65 \cdot 10^{-8};$$

Kalkspath verkürzt sich also parallel der Hauptaxe bei allseitig gleichem Druck sehr viel stärker als normal dazu. Der cubische Compressionscoefficient findet sich

$$M = 15{,}11 \,.\, 10^{-8}. \qquad 28')$$

Diese Werthe sind erheblich kleiner als für Bergkrystall.

Der Coefficient der Winkeländerung bei allseitigem Druck ist

$$B = 5{,}42 \,.\, 10^{-8}, \qquad 28'')$$

nahe doppelt so groß und dabei von entgegengesetztem Vorzeichen als für Bergkrystall.

Die Elasticitätsconstanten c_{hk} erhalten folgende Werthe:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 13{,}97 \,.\, 10^6, & c_{12} &= +4{,}65 \,.\, 10^6, \\ c_{33} &= 8{,}12 \,.\, 10^6, & c_{13} &= +4{,}60 \,.\, 10^6, \\ c_{44} &= 3{,}49 \,.\, 10^6, & c_{14} &= -2{,}12 \,.\, 10^6; \end{aligned} \qquad 29)$$

sie beziehen sich, wie auch die s_{hk}, auf das ganz bestimmt fixirte Coordinatensystem und eine Temperatur von circa 20° C.

Aus den c_{hk} folgen in Verbindung mit den von Fizeau gefundenen Werthen der thermischen linearen Ausdehnungscoefficienten

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 &= -5{,}40 \,.\, 10^{-6}, \\ a_3 &= +26{,}21 \,.\, 10^{-6} \end{aligned}$$

die Größen der thermischen Drucke nach (18) zu

$$\begin{aligned} q_1 = q_2 &= +20{,}1 \\ q_3 &= +163{,}1. \end{aligned} \qquad 30)$$

Die Unterschiede der isothermischen und adiabatischen Elasticitätsconstanten bestimmen sich bei Einführung des Werthes der absoluten Temperatur $\Theta = 293$, des mechanischen Wärmeäquivalentes 426000, der Dichte des Kalkspathes $2{,}715 \,.\, 10^{-3}$, seiner gewöhnlichen specifischen Wärme 0,207 nach (20) folgendermaßen:

$$\begin{aligned} &\gamma_{11} - c_{11} = \gamma_{12} - c_{12} = +0{,}0005 \,.\, 10^6, \\ &\gamma_{13} - c_{13} = +0{,}0040 \,.\, 10^6, \quad \gamma_{33} - c_{33} = +0{,}0326 \,.\, 10^6, \\ &\gamma_{44} - c_{44} = \gamma_{14} - c_{14} = 0; \end{aligned} \qquad 31)$$

die analogen Werthe für die s_{hk} werden:

$$\begin{aligned} &s_{11} - \sigma_{11} = s_{12} - \sigma_{12} = +0{,}0036 \,.\, 10^{-8}, \\ &s_{13} - \sigma_{13} = -0{,}0173 \,.\, 10^{-8}, \quad s_{33} - \sigma_{33} = +0{,}084 \,.\, 10^{-8}, \\ &s_{44} - \sigma_{44} = s_{14} - \sigma_{14} = 0. \end{aligned} \qquad 32)$$

Endlich findet sich die Differenz der specifischen Wärmen bei constanter Spannung und bei constanter Deformation nach (21):

$$c_p - c_d = 0{,}00103,$$

und hieraus ihr Verhältniß:

$$\varkappa = c_p / c_d = 1{,}005.$$

Einige Bemerkungen über die Gleitflächen des Kalkspaths.

Der Kalkspath gestattet bekanntlich durch Ausübung geeigneter Druckkräfte die Erzeugung von Zwillingsbildungen, bei denen ein mehr oder minder großer Theil des Krystalles, begrenzt durch eine zu einer Symmetrieebene senkrechte Ebene, die sogenannte Gleitfläche, sich in die Zwillingsstellung gegen diese begiebt. Dabei erleiden die deformirten Theile Verschiebungen, welche ihren Abständen von der Gleitfläche proportional und sämmtlich der Schnittlinie der Gleitfläche mit der Symmetrieebene parallel sind, eine „einfache Schiebung" nach der Bezeichnung von W. Thomson.

Legt man in die Gleitfläche ein ΞH-System, dessen Ξ-Axe mit der X-Axe des in der vorigen Untersuchung benutzten Hauptaxensystems zusammenfällt, und bezeichnet die Verschiebung parallel der H-Axe mit ω, so ist

$$\omega = k\zeta \tag{1}$$

eine solche Verschiebung, wie sie bei der Bildung von Zwillingen durch Gleiten stattfindet.

Die Deformationsgrößen

$$\xi_\xi, \quad \eta_\eta, \quad \zeta_\zeta, \quad \eta_\zeta, \quad \zeta_\xi, \quad \xi_\eta$$

in Bezug auf das System, welches aus ΞH durch Zufügung einer normalen Z-Axe hervorgeht, verschwinden dabei alle mit Ausnahme von η_ζ, für welches gilt

$$\eta_\zeta = k.$$

Bezeichnen wir die abgeleiteten Elasticitätsconstanten für dieses System mit γ_{hk}, so werden die Druckkräfte, welche zur Hervorbringung der obigen Deformation erforderlich sind:

$$\begin{aligned} -\Xi_\xi &= k\gamma_{14}, & -H_\eta &= k\gamma_{24}, & -Z_\zeta &= k\gamma_{34}, \\ -H_\zeta &= k\gamma_{44}, & -Z_\xi &= k\gamma_{54}, & -\Xi_\eta &= k\gamma_{64}. \end{aligned} \tag{2}$$

Diese Druckkräfte wollen wir untersuchen; wir lassen dabei die Art des Krystalles und die Neigung der ΞH- gegen die XY-Ebene vorerst noch willkürlich und setzen nur voraus, daß die Ξ- noch mit der X-Axe zusammenfällt.

Es handelt sich dann zunächst um die Berechnung der abgeleiteten Constanten γ_{hk} aus den Hauptelasticitätsconstanten c_{hk}, wo-für ich an anderer Stelle [1]) die allgemeinen Formeln gegeben habe; in unserm Falle vereinfacht sich die Rechnung erheblich.

Bezeichnen wir den Winkel zwischen der H- und Y-Axe, positiv von der Y- nach der Z-Axe hingerechnet, mit φ und kürzen ab

$$\cos\varphi = c, \quad \sin\varphi = s,$$

so findet sich leicht:

$$\begin{aligned}
\gamma_{14} &= -c_{12}cs + c_{13}cs + c_{14}(c^2 - s^2),\\
\gamma_{24} &= -c_{22}c^3s + c_{33}cs^3 + c_{44}2cs(c^2 - s^2)\\
&\quad + c_{23}cs(c^2 - s^2) + c_{24}c^2(c^2 - 3s^2) + c_{34}s^2(3c^2 - s^2),\\
\gamma_{34} &= -c_{22}cs^3 + c_{33}c^3s - c_{44}2cs(c^2 - s^2)\\
&\quad - c_{23}cs(c^2 - s^2) + c_{24}s^2(3c^2 - s^2) + c_{34}c^2(c^2 - 3s^2),\\
\gamma_{44} &= +c_{22}c^2s^2 + c_{33}c^2s^2 + c_{44}(c^2 - s^2)^2\\
&\quad - c_{23}2c^2s^2 - (c_{24} - c_{34})^2 cs(c^2 - s^2),\\
\gamma_{54} &= -c_{25}c^2s + c_{35}c^2s + c_{45}c(c^2 - s^2)\\
&\quad + c_{26}cs^2 - c_{36}cs^2 - c_{46}s(c^2 - s^2),\\
\gamma_{64} &= -c_{25}cs^2 + c_{35}cs^2 + c_{45}s(c^2 - s^2)\\
&\quad - c_{26}c^2s + c_{36}c^2s + c_{46}c(c^2 - s^2).
\end{aligned} \tag{3}$$

Diese Werthe in 2) eingesetzt ergeben dasjenige System von Druckkräften, welches in einem beliebigen Krystall eine einfache Schiebung parallel der YZ-Ebene hervorzubringen vermag.

Gehen wir nun zu einer Schiebung parallel der Symmetrieebene in einem Krystall des rhomboedrischen Systems über, so wird noch einfacher wegen

$$c_{11} = c_{22}, \quad c_{13} = c_{23}, \quad c_{24} = -c_{14},$$
$$c_{25} = c_{35} = c_{45} = c_{26} = c_{36} = c_{46} = 0:$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{14} &= -(c_{12} - c_{13})cs + c_{14}(c^2 - s^2),\\
\gamma_{24} &= -c_{11}c^3s + c_{33}cs^3 + c_{44}2cs(c^2 - s^2)\\
&\quad + c_{13}cs(c^2 - s^2) - c_{14}c^2(c^2 - 3s^2),\\
\gamma_{34} &= -c_{11}cs^3 + c_{33}c^3s - c_{44}2cs(c^2 - s^2)\\
&\quad - c_{13}cs(c^2 - s^2) - c_{14}s^2(3c^2 - s^2),\\
\gamma_{44} &= +(c_{11} + c_{33})c^2s^2 + c_{44}(c^2 - s^2)^2\\
&\quad - c_{13}2c^2s^2 + c_{14}2cs(c^2 - s^2),\\
\gamma_{54} &= \gamma_{64} = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Unter diesen Coefficienten verdient γ_{44} besonderes Interesse, denn gemäß der Formel

1) W. Voigt, Abh. d. Gött. Ges. d. Wiss. Bd. 34, p. 50, 1887.

$$-H_\zeta = \eta_\zeta \gamma_{44}$$

mißt es den Widerstand, welchen eine gegen die ΞH-Ebene wirkende und parallel der H-Axe schiebende Kraft innerhalb des Krystalles findet.

Wir stellen uns die Frage:

Wenn wir der ΞH-Ebene durch Drehung um die Ξ-Symmetrieaxe alle möglichen Lagen ertheilen, für welche Lagen nimmt der Widerstand γ_{44} seine größten und kleinsten Werthe an?

Bezeichnet man den bezüglichen Werth von φ mit Φ, so erhält man die Gleichung:

$$5) \qquad \operatorname{tg} 4\Phi = \frac{-4c_{14}}{c_{11} + c_{33} - 2c_{13} - 4c_{44}}.$$

Benutzt man die in der vorstehenden Arbeit erhaltenen Zahlenwerthe für Kalkspath, so folgt aus ihr:

$$\Phi = 24^0\,18', \quad 69^0\,18', \quad 114^0\,18', \quad 159^0\,18',$$

und zwar giebt der erste und dritte Winkel Lagen kleinsten, der zweite und vierte größten Verschiebungswiderstandes.

Es ist nun sehr merkwürdig, daß die eine Ebene kleinsten Widerstandes nahe mit der Gleitfläche im Kalkspath zusammenfällt, denn während erstere mit der Hauptaxe den Winkel

$$65^0\,42'$$

einschließt, bildet die letztere den Winkel

$$63^0\,45',$$

wobei noch zu bedenken ist, daß die Berechnung wegen der unvermeidlichen Fehler der c_{hk} und wegen des Umstandes, daß in dem Nenner von Formel 5) der erste Theil sich fast vollständig gegen den zweiten hinweghebt, nicht sehr genau sein kann.

Ferner ist bemerkenswerth, daß der Verschiebungswiderstand sehr erheblich mit der Lage der ΞH-Ebene variirt, denn der Maximalwerth von γ_{44} beträgt

$$4{,}43 \, . \, 10^6,$$

der Minimalwerth ist

$$2{,}28 \, . \, 10^6,$$

also fast nur die Hälfte des ersteren.

II. Obgleich die vorstehende Betrachtungsweise eine interessante Beziehung einer gewissen Function der Elasticitätsconstanten zu den Gleitflächen geliefert hat, so knüpft sie doch zu wenig an die wirklichen Umstände an, unter welchen Gleitflächen bei Kalkspath entstehen, um ganz zu befriedigen. Allerdings sind die bei den verschiedenen gebräuchlichen Methoden angewandten äußeren Kräfte durchaus der Rechnung unzugänglich, aber das ist sicher, daß man Gleitflächen auf sehr verschiedene Weise erhalten kann und daß, wenn auch das Endresultat, nämlich die Deformation, welche nach Aufhebung der äußeren Einwirkung zurückbleibt, eine „reine Schiebung" ist, doch während des Processes noch andere Deformationen auftreten.

Es wird daher immerhin schon eine deutlichere Vorstellung von dem Vorgang geben, wenn wir untersuchen, welchen Betrag die Schiebung η_ζ für die ΞH-Ebene annimmt, wenn gegen diese keine andere Kraft als die schiebende Druckcomponente H_ζ und zwar in constanter Größe wirkt. Eine solche Einwirkung würde z. B. practisch dadurch erreichbar sein, daß auf die Flächen eines dem Coordinatensystem Ξ, H, Z mit seinen Kanten parallelen Prismas geeignete Tangentialdrucke ausgeübt würden, nämlich auf die Flächen, deren Normale die ± H-Axe ist, Kräfte parallel der ± Z-Axe und umgekehrt.

Eine solche constante Kraft $-H_\zeta = K$ bringt dann die folgenden constanten Deformationen hervor:

$$\begin{aligned} \xi_\xi &= K\sigma_{14}, & \eta_\eta &= K\sigma_{24}, & \zeta_\zeta &= K\sigma_{34}, \\ \eta_\zeta &= K\sigma_{44}, & \zeta_\xi &= K\sigma_{54}, & \xi_\eta &= K\sigma_{64}. \end{aligned} \tag{6}$$

Die σ_{hk} sind dabei die auch in der vorigen Arbeit benutzten Determinantenverhältnisse, aber genommen von den abgeleiteten Constanten γ_{hk}; sie stellen hier die Deformationscoefficienten dar und sind um so größer, je größer die durch K hervorgebrachte Deformation ist, je kleiner also der wirkende Widerstand ist.

Uns interessirt besonders der Factor σ_{44}, der Coefficient der Schiebung η_ζ, und wir stellen uns wiederum die Frage nach den Lagen der ΞH-Ebene, welche durch die Symmetrieaxe X geht, für welche σ_{44} seine größten und kleinsten Werthe annimmt.

Behalten wir die obige Bedeutung des Winkels φ und die Abkürzungen s und c bei, so drückt sich σ_{44} allgemein folgendermaßen durch das System der s_{hk} aus [1]), welche sich auf die krystallographischen Hauptaxen beziehen:

$$7)\qquad \sigma_{44} = (s_{22} + s_{33} - 2s_{23})\,4c^2s^2 - (s_{24} - s_{34})\,4cs\,(c^2 - s^2) + s_{44}\,(c^2 - s^2)^2;$$

angewandt auf das rhomboëdrische System ergiebt dies wegen

$$s_{11} = s_{22}\,,\quad s_{14} = -s_{24}\,,\quad s_{34} = 0:$$

$$8)\qquad \sigma_{44} = (s_{11} + s_{33} - 2s_{13})\,4s^2c^2 + s_{14}\,4cs\,(c^2 - s^2) + s_{44}\,(c^2 - s^2)^2.$$

Hieraus folgt, daß σ_{44} seine größten und kleinsten Werthe annimmt für einen Winkel Φ, der gegeben ist durch

$$9)\qquad \operatorname{tg} 4\Phi = \frac{-2s_{14}}{s_{11} + s_{33} - 2s_{13} - s_{44}}.$$

Benutzen wir die in der vorigen Arbeit erhaltenen Werthe der s_{hk} für Kalkspath, so findet sich

$$\Phi = 20^0\,19',\quad 65^0\,19',\quad 110^0\,19',\quad 155^0\,19',$$

und zwar entspricht der erste und dritte Werth einem Maximum, der zweite und vierte einem Minimum für σ_{44}.

Auch hier findet sich wieder eine bemerkenswerthe Annäherung der ersten Maximalebene an die Gleitfläche, denn der Winkel der letzteren gegen die Hauptaxe beträgt

$$63^0\,45',$$

der Winkel der ersteren

$$69^0\,40'.$$

Die Abweichung ist größer, als oben gefunden, trotzdem aber findet in der Gleitfläche ein Werth des Deformationscoefficienten statt, der nur sehr wenig unterhalb des Maximalwerthes bleibt; der Maximalwerth von σ_{44} ist nämlich

$$47{,}2 . 10^{-8},$$

der Minimalwerth

$$29{,}6 . 10^{-8},$$

der für die Gleitfläche geltende

$$46{,}5 . 10^{-8}.$$

III. Nach den im Vorstehenden entwickelten Resultaten können wir jedenfalls die Thatsache behaupten, daß im Kalk-

1) W. Voigt, l. c. p. 63.

spath eine elastische Schiebung nahezu den kleinsten Widerstand findet, wenn sie parallel einer Gleitfläche stattfindet, dagegen einen nahe doppelt so großen, wenn sie parallel einer unter 45^0 gegen die Gleitfläche geneigten Ebene normal zur Symmetrieebene geschieht.

Diese Bemerkungen lassen es einleuchtend erscheinen, daß die mechanische Herstellung von Zwillingslamellen im Kalkspath so besonders leicht und sicher von Statten geht.

Dagegen ist zu betonen, daß die Existenz solcher unter einander sehr abweichender Minima und Maxima des Gleitungswiderstandes für sich allein noch nicht ausreicht, um Gleitflächen theoretisch möglich zu machen, sonst müßte auch eine Ebene, nahe normal zur Gleitfläche durch die X-Symmetrieaxe gelegt, eine Gleitfläche sein können. Zunächst muß jedenfalls die rein geometrische Bedingung erfüllt sein, daß die Krystallform durch die Schiebung parallel der Gleitfläche in die Zwillingsstellung übergeht; außerdem aber muß die Molekulardrehung, welche die Schiebung begleitet, eine solche Größe besitzen, daß bei einer gewissen Größe der Schiebung alle verschobenen Theile im Ganzen, wie in den einzelnen Molekülen nahezu eine mittlere Position zwischen der ursprünglichen und der Zwillingsstellung einnehmen und daher bei gleichen Umständen ebenso leicht der ersteren wie der letzteren zustreben. Die Unwahrscheinlichkeit der Erfüllung dieser letzten Bedingung ist offenbar die Ursache des verhältnißmäßig seltenen Vorkommens von Gleitflächen.

Geht man von der Thatsache aus, daß im Kalkspath eine Gleitfläche durch eine Symmetrieaxe und unter $63^0 45'$ gegen die Hauptaxe geneigt vorhanden ist, so kann man nach diesen Kriterien leicht erkennen, weshalb eine zu ihr nahe normale Ebene keine Gleitfläche sein kann, selbst wenn sie als eine mögliche Rhomboëderfläche die geometrische Bedingung erfüllt.

Legen wir die ΞH-Ebene wie früher in die Gleitfläche, die + H-Axe in den Quadranten zwischen $+ Y$- und $+ Z$-Axe, so wird durch eine einfache Schiebung von der Größe

$$\omega = \zeta \operatorname{tg}(19^0 8')$$

der Krystall in eine Lage gebracht, die in der Mitte liegt zwischen der ursprünglichen und der Zwillingsstellung, welche letztere durch eine Schiebung

$$\omega = 2\zeta \operatorname{tg}(19^0 8')$$

erreicht wird.

Damit dabei auch das einzelne Molekül in eine mittlere Lage zwischen der ursprünglichen und der Zwillingsstellung gekommen ist, muß es sich um circa $26^0 15'$ in der Richtung von der $+H$-zur $+Z$-Axe gedreht haben; denn die neue krystallographische Hauptaxe ist um $52^0 30'$ gegen die ursprüngliche in diesem Sinne geneigt.

Nun habe ich an anderer Stelle [1]) bewiesen, daß die Moleculardrehung l um die X-Axe bei blos mechanischer Einwirkung für rhomboëdrische Krystalle dem Gesetz folgt:

$$10)\qquad l = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \frac{q}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

worin q eine der Substanz des Krystalles individuelle Constante bezeichnet.

Von der Größe von q können wir uns eine Vorstellung mit Hülfe der obigen Zahlen verschaffen, wenn wir die Formel, die im Grunde nur für kleine Winkel abgeleitet ist, als eine angenäherte auch für größere benutzen, was unbedenklich ist, da es sich für uns nur um Vorzeichen und Größenordnung handelt.

Es ist in der früheren Bezeichnung:

$$11)\qquad y = \eta_1 c - \zeta s, \quad z = \eta_1 s + \zeta c,$$

also, da nur eine Verschiebung $w = k\zeta$ parallel der H-Axe stattfindet:

$$12)\qquad \frac{\partial w}{\partial y} = -ks^2, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = +kc^2$$

und demgemäß

$$13)\qquad l = -\frac{k}{2}(1 + q(c^2 - s^2))$$

oder

$$q = -\frac{k + 2l}{k(c^2 - s^2)}.$$

Setzt man die Werthe $k = \operatorname{tg}(19^0 8')$ und $l = 26^0 15'$ sowie den der Neigung der Gleitfläche entsprechenden Winkel für φ in $c^2 - s^2$ ein, so erhält man als ungefähren Werth

$$q = -6.$$

Die Formel (13) lautet demgemäß:

$$14)\qquad l = -\frac{k}{2}(1 - 6(c^2 - s^2)),$$

1) W. Voigt, l. c. p. 42.

und hieraus können wir nun die Molekulardrehung bei einer andern Schiebung in der Symmetrieebene, z. B. bei der parallel der zweiten Maximalebene, welche zur Gleitfläche nahe normal steht, berechnen.

Soll der Krystall demgemäß deformirt das Spiegelbild der ursprünglichen Form in Bezug auf jene Ebene zeigen, so müssen sich, da die neue Axe um 52° 30′ nach der positiven Seite von der alten abliegt, die einzelnen Moleküle bei der Schiebung um etwa ebenso viel nach der positiven Seite drehen, falls die betrachtete Fläche Geitfläche sein soll. Nun ist hier aber, wie die Anschauung leicht lehrt, k positiv, $c^2 - s^2$ aber negativ und daher die rechte Seite der Gleichung 14) jedenfalls negativ.

Bei einer Schiebung der gedachten Art drehen sich daher die Moleküle gerade im entgegengesetzten Sinne, als zur Erreichung der Zwillingslage nöthig wäre. Jene zweite Ebene kleinsten Widerstandes kann hiernach also keine zweite Gleitfläche sein.

W. Voigt und P. Drude, Bestimmung der Elasticitätsconstanten einiger dichter Mineralien.

Mitgetheilt von

W. Voigt.

1. Reihe.

Gegenüber den zu elastischen Untersuchungen mit Vorliebe verwandten Metallen und Glassorten bieten viele natürliche Körper den Vortheil, daß sie in sehr ausgedehnten Massen und höchst wahrscheinlich unter allseitig gleichem Druck gebildet und daher unter einfacheren Verhältnissen entstanden sind, als die künstlichen Drähte, Stäbe und Röhren, die nach ihrer Herstellungsart meist elastische Differenzen in verschiedenen Richtungen besitzen. Demnach erschien es mir als eine nützliche Arbeit, durch Beobachtung einiger dichter Mineralien Zahlen für die Elasticitätsconstanten von solchen Körpern zu bestimmen, welche mit besonders großem Rechte „isotrope" genannt werden können.

Insbesondere strebte ich darnach von denjenigen Körpern dichte Varietäten zu untersuchen, von denen ich regelmäßige Krystalle bereits früher beobachtet hatte, um die Erklärung, welche ich an einer andern Stelle [1]) für die Abweichung der Beobachtung und der bisherigen molekularen Theorie der Elasticität bei isotropen Medien gegeben habe, zu prüfen. Bestehen diese Vorkommnisse aus mit den optischen Hülfsmitteln nachweisbaren kleinen Krystallindividuen, so werde ich sie kurz als quasi-isotrop bezeichnen.

Von solchen Mineralien habe ich indeß bisher trotz mehrjährigen Suchens nur eine kleine Zahl in wirklich brauchbarem Zustand, nämlich homogen, feinkörnig, sprung- und störungsfrei erhalten können; und von ihnen waren einige, wie z. B. carrarischer Marmor zu elastischen Versuchen absolut unbrauchbar, weil sie selbst bei kleinen äußeren Einwirkungen enorme dauernde Deformationen erlitten. Die bisher angestellten Beobachtungen theile ich im Nachstehenden mit und knüpfe die betreffenden theoretischen Betrachtungen an die erhaltenen Resultate; bei der Wichtigkeit der Frage werde ich um Beschaffung weiteren Materials und Fortsetzung der Untersuchung bemüht bleiben.

Von den Messungen hat Herr Dr. Drude den größten Theil der Dimensions- und Biegungsbeobachtungen gemacht, ich habe die übrigen und die Drillungsbeobachtungen ausgeführt. Die Resultate theile ich in der früher gewohnten Weise, aber nur im Auszuge mit, weil bei der geringeren erreichbaren Genauigkeit das Detail der Ablesungen geringeres Interesse besitzt. Dabei habe ich, weil mitunter die absoluten Werthe der Biegungs- und Drillungswiderstände E und T für verschiedene Stäbchen in Folge von Störungen oder Unregelmäßigkeiten der Form abweichen, ihre Verhältnisse aber, auf welche jene Umstände weniger einwirken, nahe gleiche Größe besitzen, alle auf dasselbe Stäbchen bezüglichen Messungen zusammengestellt und nicht alle Dimensionen, alle Biegungen, alle Drillungen auf einander folgen lassen.

Um eine gewisse Sicherheit dafür zu erhalten, daß innerhalb der untersuchten Körper elastische Differenzen nicht bestehen, sind die Stäbchen so geschnitten, daß die Breitseite einer Gattung (A) in die Ebene der Schmalseite der anderen (B) fällt. Wären die Richtungen normal zur Längsaxe elastisch different, so müßten im Allgemeinen die Drillungen dieser beiden Gattungen von Stäbchen verschiedene Resultate ergeben.

Die Bedeutung der Bezeichnungen in den folgenden Tafeln ist

1) W. Voigt, Gött. Abh. Bd. 34. p. 48, 1887.

dieselbe, wie in meinen früheren Arbeiten. L, B, D sind die Dimensionen der Prismen, die ersteren in mm, die letzteren in 1/992,6 mm. Die η sind die beobachteten Biegungen in 0,0002954 mm bei zwei Auflagen des Stäbchens und bei der Belastung P; η' ist die Eindrückung an den Auflagestellen, berechnet mit Hülfe der Beobachtung in der Länge $L = 14{,}07$. Die σ sind die bei der Drillung mit dem Gewicht P an beiden Rollen des Apparates erhaltenen Verschiebungen der Scala, deren Theile um 0,00374 größer als Millimeter waren, in dem Beobachtungsfernrohr, das um $A = 5173$ mm von der Scala abstand. Der mittlere Radius R der Rollen betrug 36,80 mm.

Aus den Beobachtungen folgt der Biegungswiderstand E nach der Formel

$$E = \frac{PL^3}{4\eta D^3 B}, \tag{1}$$

der Drillungswiderstand T nach

$$T = \frac{6RLPA}{\sigma D^3 B\left(1 - \frac{D}{B}\,0{,}630\right)}. \tag{2}$$

$1/E = \mathrm{E}$ und $1/T = \mathrm{T}$ geben die Dehnungs- und Drillungscoefficienten. Mit den Elasticitätsconstanten a und b stehen diese Größen in der Beziehung, daß

$$\begin{aligned} E &= 1/\mathrm{E} = \frac{(a-b)(a+2b)}{a+b}, \\ T &= 1/\mathrm{T} = \frac{a-b}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

ist, woraus folgt:

$$a = \frac{T(4T-E)}{(3T-E)}, \quad b = \frac{T(E-2T)}{(3T-E)}. \tag{4}$$

Die Erfüllung der Poisson'schen Relation

$$a = 3b$$

verlangt, daß

$$E/T = 2{,}50 \tag{5}$$

ist. Die Discussion der Beobachtungen bezüglich der Erfüllung dieser Beziehung wird am besten an diese letztere Formel geknüpft, welche direct bestimmte Größen enthält, während a und b mitunter nur den zehnten Theil der Genauigkeit besitzen wie E

und T; denn in sämmtlichen drei Klammern der Formeln 4), namentlich in $(3T-E)$ und $(E-2T)$, heben sich die beiden Glieder zum größten Theil gegenseitig hinweg.

1. Dichter Flussspath

von Stolberg am Harz; ich verdanke das Stück der Freundlichkeit meines verehrten Collegen Liebisch.

Farbe grau mit röthlichen Flocken; Gefüge äußerst feinkörnig, doch nicht frei von Störungen und Sprüngen. Gestalt der Stäbchen sehr regelmäßig, Politur recht vollkommen.

A I. $D = 1800 + \delta$ $B = 5900 + \beta$

$\delta = 51{,}1$ 50,9 51,5 53,8 58,1 65,1 74,5 $\beta = 51$ 76 91 96 100 94 70

ber. 51,8 50,4 51,1 53,8 58,5 65,2 74,0

$\delta_0 = 53{,}8$, $\delta_1 = 3{,}7$, $\delta_2 = 1{,}01$

Biegung $L = 64{,}07$, $B = 5986$, $D = 1854{,}7$, $P = 110$

$\eta = 60{,}5$ 60,6, $\eta' = 1{,}7$ **E = 10570000.**

Drillung $L = 50{,}07$, $B = 5991$, $D = 1855{,}9$, $P = 100$

$\sigma = (37{,}8\,?)$ 42,0 **T = 4280000 (?)[1].**

E/T = 2,47.

A II. $D = 1800 + \delta$ $B = 5900 + \beta$

$\delta = 60{,}9$ 57,6 56,5 57,0 60,2 65,5 72,9 48 65 75 80 81 72 44

ber. 61,0 57,5 56,2 57,1 60,2 65,5 73,0

$\delta_0 = 57{,}1$, $\delta_1 = 2{,}0$, $\delta_2 = 1{,}1$

Biegung $L = 14{,}07$, $B = 5970$, $D = 1858{,}1$, $P = 110$

$\eta = 2{,}3$ 2,4

$L = 58{,}07$

$\eta = 45{,}9$ 46,0, $\eta' = 1{,}7$ **E = 1042000.**

Drillung $L = 45{,}54$, $B = 5976$, $D = 1858{,}8$, $P = 100$

$\sigma = 38{,}1$ 38,4 **T = 4285000.**

E/T = 2,44.

A III. $D = 1800 + \delta$ $B = 5900 + \beta$

$\delta = 40{,}9$ 39,8 39,9 41,0 44,1 48,4 52,6 $\beta = 104$ 109 115 117 115 104 82

ber. 41,0 39,7 39,9 41,2 43,9 47,9 53,2

$\delta_0 = 41{,}2$, $\delta_1 = 2{,}04$, $\delta_2 = 0{,}65$

Biegung $L = 48{,}07$, $B = 6008{,}5$, $D = 1841{,}8$, $P = 110$

$\eta = 27{,}5$ 27,0, $\eta' = 1{,}6$ **E = 10420000.**

Drillung $L = 29{,}46$, $B = 6009$, $D = 1842{,}3$, $P = 100$

$\sigma = 25{,}0$ 25,0 **T = 4300000.**

E/T = 2,43.

---

1) Sehr unsicheres Resultat, da die Drillungen nach entgegengesetzten Richtungen verschiedene Werthe ergaben, offenbar in Folge von Sprüngen.

BI. $D = 1800 + \delta$ $B = 6100 + \beta$

$\delta = 28{,}5 \quad 29{,}5 \quad 31{,}5 \quad 35{,}8 \quad 42{,}4 \quad 50{,}5 \quad 59{,}8$ $\beta = 27 \quad 42 \quad 47 \quad 44 \quad 37 \quad 24 \quad 5$

ber. $28{,}7 \quad 29{,}2 \quad 31{,}6 \quad 35{,}9 \quad 42{,}2 \quad 50{,}2 \quad 60{,}3$

$\delta_0 = 35{,}9, \quad \delta_1 = 5{,}27, \quad \delta_2 = 0{,}95$

Biegung $L = 64{,}07, \quad B = 6135, \quad D = 1836{,}8 \quad P = 110$

$\eta = 61{,}2 \quad 61{,}3, \quad \eta' = 1{,}6$ $\boldsymbol{E} = 10490000.$

Drillung $L = 49{,}95, \quad B = 6139, \quad D = 1837{,}9, \quad P = 100$

$\sigma = 42{,}0 \quad 42{,}1$ $\boldsymbol{T} = 4254000.$

$\boldsymbol{E}/\boldsymbol{T} = 2{,}465.$

BII. [1]) $D = 1800 + \delta$ $B = 5800 + \beta$

$\delta = (51{,}5 \quad 50{,}7) \quad 51{,}4 \quad 52{,}9 \quad 56{,}9 \quad 63{,}1 \quad 71{,}5$ $\beta = (149 \quad 142) \quad 128 \quad 107 \quad 81 \quad 48 \quad 9$

ber. $51{,}3 \quad 52{,}9 \quad 56{,}9 \quad 63{,}1 \quad 71{,}5$

$\delta_0 = 56{,}9, \quad \delta_1 = 5{,}05, \quad \delta_2 = 1{,}13$

Biegung $L = 14{,}07, \quad B = 5888, \quad D = 1857{,}3, \quad P = 110$

$\eta = 2{,}2 \quad 2{,}1$

$L = 48{,}07$

$\eta = 27{,}3 \quad 27{,}4, \quad \eta' = 1{,}6$ $\boldsymbol{E} = 10340000.$

Drillung $L = 52{,}45, \quad B = 5901, \quad 1855{,}0, \quad P = 110$

$\sigma = 44{,}8$ (zerbrochen) $\boldsymbol{T} = 4290000.$

$\boldsymbol{E}/\boldsymbol{T} = 2{,}41.$

Gesammtmittel $\boldsymbol{E} = 10450000, \quad \mathrm{E} = 9{,}570.10^{-8}. \quad \boldsymbol{E}/\boldsymbol{T} = \mathrm{T/E} = 2{,}44.$

$\boldsymbol{T} = 4282000, \quad \mathrm{T} = 23{,}35.10^{-8}.$

$a = 11900000, \quad b = 3370000, \quad a = 3{,}53.\,b.$

2. Solnhofener Lithographenstein,

in der bekannten feinkörnigen und gleichmäßigen Structur.

AI. $D = 1700 + \delta$ $B = 5900 + \beta$

$\delta = 60{,}8 \quad 50{,}2 \quad 45{,}6 \quad 48{,}6 \quad 58{,}1 \quad 75{,}1 \quad 101{,}2$ $\beta = 67 \quad 50 \quad 42 \quad 44 \quad 47$

ber. $61{,}3 \quad 49{,}8 \quad 45{,}5 \quad 48{,}4 \quad 58{,}5 \quad 75{,}8 \quad 100{,}3$

$\delta_0 = 48{,}4, \quad \delta_1 = 6{,}5, \quad \delta_2 = 3{,}6$

Biegung $L = 14{,}07, \quad B = 5948, \quad D = 1751{,}3, \quad P = 110$

$\eta = 3{,}7 \quad 3{,}7$

$L = 64{,}07$

$\eta = 128{,}6 \quad 128{,}7, \quad \eta' = 2{,}3$ $\boldsymbol{E} = 5885000.$

Drillung $L = 48{,}50, \quad B = 5945, \quad D = 1753{,}7, \quad P = 50$

$\sigma = 43{,}6 \quad 44{,}0$ $\boldsymbol{T} = 2346000.$

$\boldsymbol{E}/\boldsymbol{T} = 2{,}51.$

---

1) Von diesem Stäbchen brach bei der Drillung in Folge eines Sprunges das Ende ab, dem die eingeklammerten Dimensionsbestimmungen entsprechen. In Folge dessen ist das übrige Stück allein gebogen worden; die Berechnung von δ_0, δ_1, δ_2 bezieht sich nur auf dieses.

B I. $D = 1700 + \delta$ $B = 5900 + \beta$

$\delta = 73{,}1 \quad 63{,}8 \quad 62{,}2 \quad 67{,}1 \quad 78{,}2 \quad 95{,}3 \quad 118{,}0$ $\beta = 59 \quad 54 \quad 52 \quad 49 \quad 52 \quad 64 \quad 83$

ber. $72{,}3 \quad 64{,}3 \quad 62{,}3 \quad 67{,}1 \quad 78{,}0 \quad 95{,}1 \quad 118{,}5$

$\delta_0 = 67{,}1, \quad \delta_1 = 7{,}7, \quad \delta_2 = 3{,}15$

Biegung $L = 64{,}07, \quad B = 5957, \quad D = 1769{,}0, \quad P = 110$

$\eta = 124{,}9 \quad 124{,}4, \quad \eta' = 2{,}3$ **$\boldsymbol{E}$ = 5890000.**

Drillung $L = 52{,}02, \quad B = 5953, \quad D = 1771{,}6, \quad P = 50,$

$\sigma = 45{,}2 \quad 45{,}4$ **$\boldsymbol{T}$ = 2362000.**

$\boldsymbol{E}/\boldsymbol{T}$ = 2,495.

Gesammtmittel **$\boldsymbol{E}$ = 5888000,** **E = 16,98.10⁻⁸.** **$\boldsymbol{E}/\boldsymbol{T}$ = T/E = 2,50.**

$\boldsymbol{T}$ = 2354000, **T = 42,48.10⁻⁸.**

$a = 7070000, \quad b = 237000, \quad a = 2{,}99.\, b.$

3. Dichter Baryt

von Clausthal im Harz, hell graugrünlich; anscheinend ziemlich homogen und wenig gestört. Eingeschlossene Körnchen einer härteren Substanz bilden auf den polirten Flächen kleine Hervorragungen, welche die Dickebestimmung erschweren.

A I. $D = 1200 + \delta$ $B = 6100 + \beta$

$\delta = 24{,}5 \quad 44{,}5 \quad 58{,}6 \quad 70{,}5 \quad 77{,}0 \quad 78{,}1 \quad 69{,}2$ $\beta = 2 \quad 15 \quad 34 \quad 34 \quad 27 \quad 16 \quad -9$

ber. $23{,}1 \quad 44{,}1 \quad 59{,}8 \quad 70{,}5 \quad 76{,}0 \quad 76{,}5 \quad 71{,}8$

$\delta_0 = 70{,}5, \quad \delta_1 = 8{,}1, \quad \delta_2 = -2{,}55$

Biegung $L = 61{,}07, \quad B = 6120, \quad D = 1268, \quad P = 110$

$\eta = 281{,}3 \quad 284{,}5, \quad \eta' = 2{,}7$ **$\boldsymbol{E}$ = 5880000.**

Drillung $L = 48{,}20, \quad B = 6128, \quad D = 1267, \quad P = 40$

$\sigma = 86{,}5 \quad 86{,}7$ **$\boldsymbol{T}$ = 2270000.**

$\boldsymbol{E}/\boldsymbol{T}$ = 2,59.

A II. $D = 1200 + \delta$ $B = 6100 + \beta$

$\delta = 33{,}6 \quad 44{,}8 \quad 50{,}5 \quad 65{,}2 \quad 59{,}6 \quad 55{,}1 \quad 53{,}1$ $\beta = 11 \quad 22 \quad 38 \quad 38 \quad 30 \quad 16 \quad -4$

ber. $30{,}2 \quad 45{,}4 \quad 54{,}8 \quad 61{,}4 \quad 61{,}2 \quad 58{,}2 \quad 49{,}4$

$\delta_0 = 61{,}4, \quad \delta_1 = 3{,}2, \quad \delta_2 = -2{,}4$

Biegung $L = 14{,}07, \quad B = 6125, \quad D = 1259, \quad P = 110$

$\eta = 5{,}6 \quad 6{,}0$

$L = 61{,}07$

$\eta = 288{,}4 \quad 290{,}1, \quad \eta' = 2{,}3$ **$\boldsymbol{E}$ = 5880000.**

Drillung $L = 32{,}33, \quad B = 6127, \quad D = 1252, \quad P = 40$

$\sigma = 58{,}4 \quad 58{,}6$ **$\boldsymbol{T}$ = 2330000.**

$\boldsymbol{E}/\boldsymbol{T}$ = 2,52.

B I. $D = 1200 + \delta$ $B = 5900 + \beta$

$\delta =$ 37,2 40,1 59,6 66,3 67,5 58,2 44,5 $\beta =$ 60 71 66 72 40 18 −8

ber. 30,2 47,4 60,0 66,0 65,6 58,6 45,0

$\delta_0 = 66{,}0,\ \delta_1 = 2{,}8,\ \delta_2 = -3{,}16$

Biegung $L = 14{,}07,\ B = 5949,\ D = 1263,\ P = 110$

$\eta = 5{,}4\ \ 6{,}0$

$L = 57{,}07$

$\eta = 236{,}1\ \ 238{,}9,\ \eta' = 2{,}2$ $\mathbf{E} = 5960000.$

Drillung $L = 46{,}32,\ B = 5954,\ D = 1261,\ P = 40$

83,25, ? [1]) $\mathbf{T} = 2325000.$

$\mathbf{E}/\mathbf{T} = 2{,}57.$

B II. $D = 1200 + \delta$ $B = 5900 + \beta$

$\delta =$ 25,7 47,5 72,8 77,0 79,6 77,8 73,5 $\beta =$ 22 47 64 91 97 110 93

ber. 26,9 50,5 67,5 77,9 81,7 78,9 69,5

$\delta_0 = 77{,}9,\ \delta_1 = 7{,}1,\ \delta_2 = -3{,}3$

Biegung $L = 57{,}07,\ B = 5978,\ D = 1275,\ P = 110$

$\eta = 232{,}5\ \ 232{,}6,\ \eta' = 2{,}2$ $\mathbf{E} = 5890000.$

Drillung $L = 42{,}50,\ B = 5982,\ D = 1273,\ P = 40$

$\sigma = 38{,}1$? [1]) $\mathbf{T} = 2340000.$

$\mathbf{E}/\mathbf{T} = 2{,}52.$

Gesammtmittel $\mathbf{E} = 5900000.$ $E = 16{,}98 . 10^{-8}.$ $\mathbf{E}/\mathbf{T} = T/E = 2{,}54.$

$\mathbf{T} = 2320000.$ $T = 42{,}48 . 10^{-8}.$

$a = 7400000,\ b = 2760000,\ a = 2{,}68 . b.$

4. Dichter Baryt

von Clausthal im Harz, hellröthliche Farbe; anscheinend ziemlich homogen und wenig gestört. Die Stäbchen haben gute Politur angenommen, einige Flecken sind matt geblieben; ihre Form ist ziemlich unregelmäßig.

A I. $D = 1500 + \delta$ $B = 6000 + \beta$

$\delta =$ 66,6 89,3 93,7 88,6 85,5 78,3 72,1 $\beta =$ 1 35 40 52 60 50 38

ber. 75,3 84,4 89,5 90,3 87,1 79,8 68,3

$\delta_0 = 90{,}3,\ \delta_1 = 1{,}15,\ \delta_2 = -2{,}06$

Biegung $L = 66{,}97,\ B = 6043,\ D = 1589,\ P = 110$

$\eta = 190{,}3\ \ 190{,}4,\ \eta' = 2{,}9$ $\mathbf{E} = 5970000.$

Drillung $L = 56{,}24,\ B = 6050,\ D = 1588,\ P = 50$

$\sigma = 66{,}33,$? [2]) $\mathbf{T} = 2320000.$

$\mathbf{E}/\mathbf{T} = 2{,}58.$

1) Die Drillung nach der einen Seite war in Folge elastischer Nachwirkung unmöglich.

2) Gestörte Beobachtung.

A II. $D = 1500 + \delta$ $B = 6000 + \beta$

$\delta = 32{,}3 \quad 40{,}9 \quad 57{,}0 \quad 61{,}0 \quad 56{,}8 \quad 58{,}5 \quad 54{,}4$ $\beta = 0 \quad 29 \quad 35 \quad 55 \quad 58 \quad 56 \quad 51$

ber. $31{,}4 \quad 45{,}0 \quad 54{,}4 \quad 59{,}8 \quad 61{,}0 \quad 58{,}2 \quad 51{,}4$

$\delta_0 = 59{,}8, \quad \delta_1 = 3{,}3, \quad \delta_2 = -2{,}06$

Biegung $L = 14{,}07, \quad B = 6044, \quad D = 1558, \quad P = 110$

$\eta = 4{,}8 \quad 4{,}6$

$L = 66{,}97$

$\eta = 200{,}0 \quad 204{,}2, \quad \eta' = 2{,}9$ **E = 5950000.**

Drillung $L = 64{,}6, \quad B = 6051, \quad D = 1556, \quad P = 50$

$\sigma = 64{,}9 \quad 64{,}2$ **T = 2320000.**

E/T = 2,56.

B I. $D = 1500 + \delta$ $B = 5700 + \beta$

$\delta = 73{,}9 \quad 85{,}6 \quad 92{,}4 \quad 92{,}6 \quad 93{,}9 \quad 85{,}4 \quad 76{,}0$ $\beta = 39 \quad 67 \quad 101 \quad 126 \quad 138 \quad 148 \quad 154$

ber. $74{,}6 \quad 85{,}1 \quad 91{,}5 \quad 93{,}8 \quad 92{,}1 \quad 86{,}3 \quad 76{,}4$

$\delta_0 = 93{,}8, \quad \delta_1 = 0{,}3, \quad \delta_2 = -2{,}03$

Biegung $L = 66{,}97, \quad B = 5813, \quad D = 1592, \quad P = 110$

$\eta = 200{,}4 \quad 196{,}9, \quad \eta' = 2{,}6$ **E = 5900000.**

Drillung $L = 52{,}70, \quad B = 5821, \quad D = 1591, \quad P = 50$

$\sigma = 66{,}0 \quad 65{,}8$ **T = 2280000.**

E/T = 2,59.

B II. $D = 1500 + \delta$ $B = 5700 + \beta$

$\delta = 54{,}5 \quad 67{,}5 \quad 80{,}0 \quad 84{,}6 \quad 88{,}1 \quad 83{,}6 \quad 79{,}0$ $\beta = 53 \quad 92 \quad 126 \quad 145 \quad 162 \quad 168 \quad 166$

ber. $54{,}1 \quad 68{,}6 \quad 79{,}0 \quad 85{,}2 \quad 87{,}2 \quad 85{,}0 \quad 78{,}5$

$\delta_0 = 85{,}2, \quad \delta_1 = 4{,}06, \quad \delta_2 = -2{,}1$

Biegung $L = 14{,}07, \quad B = 5834, \quad D = 1583, \quad P = 110$

$\eta = 4{,}5 \quad 4{,}6$

$L = 66{,}97$

$\eta = 204{,}9 \quad 203{,}1, \quad \eta' = 2{,}6$ **E = 5840000.**

Drillung $L = 55{,}89, \quad B = 5841, \quad D = 1582, \quad P = 50.$

$\sigma = 71{,}5$? (zerbrochen) **T = 2260000.**

E/T = 2,59.

Gesammtmittel **E = 5915000. T = 2295000. E/T = T/E = 2,58.**

E = 16,90.10⁻³. T = 43,57.

$a = 7720000, \quad b = 3130000, \quad a = 2{,}46 . b.$

Gehen wir nun zu der Discussion der erhaltenen Resultate über, so ist zunächst hervorzuheben, daß die Drillungswiderstände T für die beiden Gattungen Stäbchen A und B, deren Breit- resp. Schmalseiten ihrer Lage nach vertauscht waren, merklich gleich ausgefallen sind. Dies zeigt, daß die Richtungen, welche normal zu den Seitenflächen stehen, elastisch gleichwerthig sind, und da dies in allen Krystallsystemen bei zu einander normalen Richtungen höchst selten stattfindet, so ist durch diese Beobachtung nahezu gewiß gemacht, daß in den untersuchten Körpern alle Richtungen gleichwerthig, diese selbst also wirklich isotrop sind.

Ferner zeigt sich, daß das Verhältniß E/T für dichten Flußspath erheblich kleiner, für dichten Baryt größer ist, als der nach der älteren Theorie für isotrope Körper gefundene Werth 2,50. Daß dies nicht durch Beobachtungsfehlern begründet ist, erkennt man besonders daraus, daß unter den an verschiedenen Stäbchen derselben Substanz erhaltenen Zahlen keine einzige in ihrem Verhalten gegen diesen theoretischen Werth von den andern abweicht.

Für Solnhofner Lithographenstein findet sich sehr nahe das theoretische Verhältniß $E/T = 2,50$ durch die Beobachtung gegeben, woraus übrigens, wie wir sogleich sehen werden, keineswegs nothwendig folgt, daß seine Theilchen keine polaren Wirkungen auf einander ausüben, wie die ältere Theorie dies annimmt.

Besteht ein homogener quasi-isotroper Körper aus Krystallfragmenten, deren Dimensionen groß sind gegen diejenige der Molekularwirkungssphäre, aber klein gegen seine gesammte Ausdehnung, und sind dieselben ohne Zwischenräume aneinander gelagert, so besitzt der isotrope Körper Elasticitätsconstanten a und b, die sich aus denjenigen c_{hk} der krystallinischen Varietät folgendermaßen berechnen [1]).

Setzt man

$$c_{11}+c_{22}+c_{33} = 3\mathrm{A}, \quad c_{23}+c_{31}+c_{12} = 3\mathrm{B}, \quad c_{44}+c_{55}+c_{66} = 3\Gamma,$$

so wird:

$$5a = 3\mathrm{A}+2\mathrm{B}+4\Gamma,$$
$$5b = \mathrm{A}+4\mathrm{B}-2\Gamma.$$

Für nicht polarwirkende Moleküle ist

$$c_{23} = c_{44}, \quad c_{31} = c_{55}, \quad c_{12} = c_{66}$$

also

$$\mathrm{B} = \Gamma \text{ und daher nothwendig } a = 3b,$$

aber aus $a = 3b$ und demgemäß $\mathrm{B} = \Gamma$ folgt nicht mit Nothwendigkeit das System der Beziehungen zwischen den c_{hk}.

Dieser Fall, daß die Krystallfragmente in dem quasi-isotropen Körper ohne irgend welche Zwischenräume aneinandergefügt sind, ist indeß ein idealer und die Bestimmung des specifischen Gewichtes einerseits, die Beobachtung, daß die quasi-isotropen Körper in der Regel Flüssigkeiten aufzunehmen vermögen, andererseits beweist, daß in ihnen fast immer merkliche Interstitien vorhanden sind. Ueberdies giebt die chemische Untersuchung häufig die An-

1) W. Voigt, Gött. Abh. Bd. 34, 1887.

wesenheit eines fremdartigen Bindemittels zwischen den einzelnen Krystallfragmenten.

Sind nur lufterfüllte Hohlräume vorhanden und von gleicher Größenordnung wie die Krystallfragmente, also nicht etwa, wie Sprünge und Fortwachsungserscheinungen, flächenhaft erheblich ausgedehnt, so kann man zwar über die absolute Größe von a und b resp. von E und T in der obigen Weise keine Folgerungen mehr ziehen, aber man erhält durch Verfolgung der Theorie das Resultat, daß wenigstens die Verhältnisse der wirklichen Constanten a/b resp. E/T denjenigen der wie oben angegeben berechneten gleich sein müssen. Diese Folgerungen basiren, wie auch die obigen Gleichungen für a und b, auf keinerlei willkürlichen Hypothesen, und ihre Uebereinstimmung mit der Beobachtnug würde dergleichen nicht zu bestätigen haben, sondern nur erweisen, daß die Structurverhältnisse den gemachten Voraussetzungen entsprechen.

Abweichungen von ihnen können, wie gesagt, eintreten einmal in Folge von Verunreinigung durch fremde eingeschlossene Bestandtheile oder durch Störungen der Structur; diese Umstände sind theoretisch nicht wohl in ihrem Einfluß zu beurtheilen. Abweichungen können aber auch dadurch veranlaßt sein, daß die Krystallfragmente nicht sämmtlich sehr groß sind gegen die Molecularwirkungssphäre, sondern alle oder zum Theil mit letzterer von gleicher Ordnung. In diesem Falle läßt sich wenigstens der Sinn im Voraus feststellen, in welchem die Abweichung stattfinden muß. Denn da im Grenzfalle, daß die Krystallfragmente sich auf einzelne Moleküle reduciren, bei polaren wie bei nicht polaren Molekularwirkungen $a/b = 3$, $E/T = 2{,}5$ wird, so muß der beobachtete Werth zwischen diesen und den aus dem Verhalten des regelmäßigen Krystalles wie oben gezeigt zu berechnenden Grenzwerthen liegen. Sind die Krystallfragmente nicht klein gegen die Stäbchen, so würde ebenfalls die Theorie sich nicht bestätigen können, aber es ist wahrscheinlich, daß in diesem Falle schon die verschiedenen Stäbchen der gleichen Substanz abweichende Resultate ergeben.

Die Vergleichung wollen wir, um den Grad der Uebereinstimmung besser beurtheilen zu können, nicht mit den Verhältnissen a/b vornehmen, die, wie oben erwähnt, sich sehr ungenau berechnen, sondern mit den oben angegebenen Verhältnissen E/T, welche die Genauigkeit der directen Beobachtungen besitzen und sich, namentlich für das reguläre System, aus drei Constanten der regelmäßigen Krystalle vortheilhaft berechnen, indem man die

Werthe der Elasticitätsconstanten c_{hk} des regelmäßigen Krystalles durch die nahezu direct beobachteten Determinantenverhältnisse s_{hk} gemäß den von mir an verschiedenen Stellen [1]) gegebenen Formeln ausdrückt und diese in die Gleichungen

$$E = \frac{(a-b)(a+2b)}{a+b}, \quad T = \frac{a-b}{2}$$

oder

$$\frac{E}{T} = \frac{2(a+2b)}{a+b}$$

einführt.

Die Berechnung ist etwas umständlich, aber ohne alle Schwierigkeit.

Für quasi-isotropen Flußspath haben wir oben erhalten

$$E = 10{,}45 \,.\, 10^6, \quad T = 4{,}28 \,.\, 10^6, \quad E/T = 2{,}44.$$

Krystallinischen Flußspath habe ich zweimal beobachtet, erst in einem nicht ganz ungestörten, dann in einem völlig reinem Vorkommen. Die erste Beobachtungsreihe ergab Constanten, welche zur Berechnung benutzt führen auf

$$E = 10{,}89 \,.\, 10^6, \quad T = 4{,}48 \,.\, 10^6, \quad E/T = 2{,}43,$$

die letztere führte ebenso auf

$$E = 11{,}50 \,.\, 10^6, \quad T = 4{,}50 \,.\, 10^6, \quad E/T = 2{,}55.$$

Man sieht, daß der erstere Werth genau mit dem beobachteten übereinstimmt, was begreiflich ist, da eben auch der dichte Flußspath Sprünge und Störungen zeigte. Auf die Einwirkung solcher deutet auch der Umstand, daß die absoluten Werthe von E und T durch die Beobachtung erheblich kleiner gefunden sind, als durch die Rechnung, obgleich die specifischen Gewichte des krystallinischen und des dichten Vorkommens nur um wenige Procente differirten.

Für Solnhofner Lithographenstein ist oben gefunden

$$E/T = 2{,}50;$$

dieses Mineral ist nicht chemisch reiner kohlensaurer Kalk, sondern mit Thon verunreinigt; die Vergleichung des beobachteten Werthes mit dem Resultat, das sich aus den Constanten des Kalkspaths berechnet, hat also nur geringen Werth. Man findet auf letzterem Wege

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1887 No. 19 p. 565, 1888 No. 11 p. 300.

$$E/T = 2{,}54,$$

ein immerhin recht nahe liegender Werth.

Für dichten grauen Baryt ergaben die Beobachtungen

$$E = 5{,}90 \,.\, 10^6, \quad T = 2{,}32 \,.\, 10^6, \quad E/T = 2{,}54,$$

für braunen

$$E = 5{,}915 \,.\, 10^6, \quad T = 2{,}295 \,.\, 10^6, \quad E/T = 2{,}58,$$

erstere Varietät war durch Einschlüsse einer härteren Substanz verunreinigt. Aus den Beobachtungen an einem Barytkrystall fanden sich Elasticitätsconstanten, deren Benutzung führt zu

$$E = 6{,}65 \,.\, 10^6, \quad T = 2{,}57 \,.\, 10^6, \quad E/T = 2{,}585.$$

Die absoluten Werthe von E und T weichen wie begreiflich erheblich von den beobachteten ab, das Verhältniß E/T stimmt hingegen, namentlich bei der bräunlichen Varietät, sehr nahe mit dem berechneten Werthe überein.

Verbesserungen.

Seite 497, Zeile 2 v. u. muß stehen 0,07 statt 0,7.

Inhalt von No. 19.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

3. Dezember. № 20. 1889.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 2. November.

Liebisch kündigt eine kurze Note an „über thermoelektrische Stöme in Krystallen“.

Kielhorn legt: „Tafel für die Berechnung der Jupiterjahre in indischen Inschriften“ vor. (Erscheint in den Abhandlungen XXXVI.)

Ueber thermoelektrische Ströme in Krystallen.

Von

Th. Liebisch.

Vor Kurzem hat H. Bäckström[1]) die erste quantitative Bestimmung der Abhängigkeit der thermoelektrischen Kraft von der krystallographischen Richtung in einem thermoelektrisch anisotropen Krystall durchgeführt, welche gestattet das Gesetz dieser Abhängigkeit einer Prüfung zu unterziehen. Das von ihm benutzte Material bestand aus Eisenglanz von der Peder Ankers Grube auf der Insel Langö bei Kragerö in Norwegen. Bezeichnet man die thermo-elektromotorische Kraft in Volt für einen Grad nach der Richtung der Axe der Isotropie mit τ_γ, nach den zu dieser Axe senkrechten Richtungen mit τ_α, so ist in jenem Eisenglanz:

$$\tau_\gamma = 0{,}0002879\,, \quad \tau_\alpha = 0{,}0003138.$$

1) H. Bäckström: Beiträge zur Kenntniß der Thermoelektricität der Krystalle. Öfvers. K. Vetensk.-Akad. Förh. 1888, No. 8, 553.

Für eine unter $\omega = 27^\circ 15'$ gegen die Axe γ geneigte Richtung beträgt die thermoelektrische Kraft $\tau = 0{,}0002923$ Volt.

H. Bäckström bemerkt, daß er aus τ_γ und τ_α den mit dem gemessenen Werthe sehr nahe übereinstimmenden Werth $\tau = 0{,}0002928$ „nach der Gleichung der Ellipse" berechnet habe. Allein es fehlt eine nähere Angabe über diese Ellipse. Man überzeugt sich indessen leicht, daß die Gleichung:

$$(1) \qquad \frac{\cos^2\omega}{\tau_\gamma^2} + \frac{\sin^2\omega}{\tau_\alpha^2} = \frac{1}{\tau^2},$$

also die Relationen:

$$\tau = \frac{\tau_\gamma}{\cos\varphi}, \quad \sin^2\varphi = \frac{\tau_\alpha^2 - \tau_\gamma^2}{\tau_\alpha^2} \sin^2\omega$$

genau auf den von H. Bäckström mitgetheilten Werth von τ führen.

Sollte H. Bäckström in der That die Ellipse (1) benutzt haben, woran nach seinen Zahlenangaben nicht zu zweifeln ist, so würde die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Berechnung auf einem Zufalle beruhen. Denn das vor längerer Zeit von W. Thomson[1]) aus den Principien der Thermodynamik abgeleitete Gesetz für die elektromotorischen Kräfte, welche durch ungleichmäßige Temperaturvertheilungen in leitenden Krystallen mit einer Axe der Isotropie hervorgerufen werden, ergiebt eine andere Beziehung zwischen den Größen τ_γ, τ_α, ω und τ, aus der ein etwas stärker abweichender, immerhin aber mit der Messung noch recht gut übereinstimmender Werth von τ folgt.

I.

Um das W. Thomson'sche Gesetz zu formuliren betrachten wir einen Stab aus einem Krystall des hexagonalen oder tetragonalen Systems, der longitudinal in einen, aus einem isotropen Normalmetall hergestellten Stromkreis eingeschaltet ist. Der Stab habe die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds mit den Kantenlängen a, b, l. Die Seitenflächen mit dem Flächeninhalt bl seien parallel zum Hauptschnitte der Längsrichtung l, so daß jede zu ihnen parallele Ebene eine thermoelektrische Symmetrieebene ist. Alsdann haben die Kanten a des Stabes die Richtung einer Symmetrieaxe von der Periode 2.

Der Winkel zwischen der Längsrichtung und der Axe der Isotropie Z werde $= \omega$ gesetzt.

1) W. Thomson: On the Dynamical Theory of Heat. Part VI. Trans. R. Soc. Edinburgh 21, 153, 1857. Math. phys. Papers. Cambridge 1882, 1, 266.

Fließt durch eine Endfläche des Stabes, deren Inhalt ab ist, in der Zeiteinheit die Elektricitätsmenge $\mathfrak{Q}$, so möge die Strömung durch diese Fläche (die Stromintensität für die Flächeneinheit) hinfort bezeichnet werden mit $U = \mathfrak{Q}/ab$.

Ferner seien τ_γ und τ_α die thermoelektrischen Kräfte zwischen dem Normalmetall und zwei Stäben, die parallel und senkrecht zu Z aus dem Krystall geschnitten sind. —

A. Wird nun der gleichförmig erwärmte Stab von einem stationären elektrischen Strom in der Längsrichtung durchflossen, so erfolgt nach dem für die Peltier'sche Wärme geltenden Gesetze an der Eintrittsfläche in der Zeiteinheit für die Flächeneinheit die Wärmeabsorption:

$$\frac{1}{J} \cdot U \cdot \vartheta\,(\tau_\gamma \cos^2\omega + \tau_\alpha \sin^2\omega), \qquad \text{(a)}$$

worin J das mechanische Aequivalent der Wärmeeinheit und ϑ die absolute Temperatur der Eintrittsfläche bedeuten. Gleichzeitig findet an der Austrittsfläche eine Wärmeentwickelung von demselben Betrage statt.

Bezeichnet man den in Klammern eingeschlossenen Faktor des Ausdruckes (a) mit τ, so ist ersichtlich, daß die Abhängigkeit des an einer Endfläche durch den Strom erzeugten Peltier-Effectes von der Längsrichtung des Stabes durch die Quadrate der Radien $\sqrt{\tau}$ des Umdrehungsovaloids:

$$\tau_\gamma \cos^2\omega + \tau_\alpha \sin^2\omega = \tau \qquad (2)$$

repräsentirt werden kann. Die Richtung der Umdrehungsaxe ist durch die Axe der Isotropie Z bestimmt. Die Längen der Halbaxen parallel und senkrecht zu Z sind gegeben durch $\sqrt{\tau_\gamma}$ und $\sqrt{\tau_\alpha}$.

An Stelle des Ovals (2) kann aber auch die inverse Curve, eine Ellipse mit den Halbaxen $1/\sqrt{\tau_\gamma}$ und $1/\sqrt{\tau_\alpha}$:

$$\tau_\gamma z^2 + \tau_\alpha x^2 = 1 \qquad (3)$$

zur geometrischen Darstellung jener Abhängigkeit benutzt werden. Jedenfalls dienen zur Berechnung von τ aus gegebenen Werthen von τ_γ, τ_α, ω die Relationen:

$$\tau = \tau_\alpha \cos^2\psi, \quad \sin^2\psi = \frac{\tau_\alpha - \tau_\gamma}{\tau_\alpha} \cos^2\omega.$$

B. Herrschen auf den Seitenflächen des Stabes übereinstimmende Temperaturen, dagegen auf den Endflächen verschiedene Temperaturen ϑ_0 und ϑ_0', so entsteht, wenn die Endflächen durch einen homogenen, gleichmäßig erwärmten Schließungsbogen aus dem Normalmetall verbunden werden, ein elektrischer Strom in der Längsrichtung des Stabes, dessen elektromotorische Kraft F nach W. Thomson gegeben ist durch:

$$\text{(b)} \qquad F = \int_{\vartheta_0'}^{\vartheta_0} (\tau_\gamma \cos^2\omega + \tau_\alpha \sin^2\omega)\, d\vartheta.$$

Die Abhängigkeit der thermoelektrischen Kraft:

$$\frac{dF}{d\vartheta} = \tau_\gamma \cos^2\omega + \tau_\alpha \sin^2\omega = \tau$$

von der Längsrichtung des Stabes wird demnach durch dasselbe Umdrehungsovaloid dargestellt, welches die Abhängigkeit des Peltier-Effectes an den Endflächen des Stabes von jener Richtung angiebt. Dieses Resultat war zu erwarten, da der Peltier-Effect der thermoelektrischen Kraft und der absoluten Temperatur proportional ist.

Hieraus folgt für die auf S. 531 angegebenen Werthe von τ_γ, τ_α, ω der mit H. Bäckström's Messung befriedigend übereinstimmende Werth $\tau = 0{,}0002933$.

II.

Ein rechtwinkliges Parallelepiped aus einem homogenen leitenden Krystall des triklinen Systems sei vollständig eingebettet in das homogene isotrope Normalmetall. Parallel zu den Kantenrichtungen sei ein Axensystem X_1, X_2, X_3 durch den Mittelpunkt O gelegt.

Die ungleichmäßige Temperaturvertheilung, welche dadurch hervorgerufen wird, daß einander gegenüberliegende Seitenflächen des Parallelepipeds auf verschiedenen Temperaturen gehalten werden, erzeugt einen elektrischen Strom. Nach W. Thomson ist die thermoelektrische Kraft τ in der Richtung ξ des stärksten Temperaturgefälles:

$$\text{(c)} \qquad \tau = \sum_{h,k=1}^{3} \tau_{hk} \cos(\xi X_h) \cos(\xi X_k).$$

Die neun Coefficienten τ_{hk} sind die thermoelektrischen Constanten des Krystalls.

Hieraus ist ersichtlich, daß wir zwei Oberflächen benutzen können, um die Abhängigkeit der thermoelektrischen Kraft τ von der Richtung ξ und den Constanten τ_{hk} geometrisch darzustellen. Setzen wir zunächst:

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}} \cos(\xi X_h) = y_h, \quad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \frac{1}{\tau},$$

so geht die Gleichung (c) über in:

$$1 = \tau_{11} y_1^2 + \tau_{22} y_2^2 + \tau_{33} y_3^2 + (\tau_{23} + \tau_{32}) y_2 y_3 + (\tau_{31} + \tau_{13}) y_3 y_1 + (\tau_{12} + \tau_{21}) y_1 y_2. \quad \text{(E)}$$

Andererseits erhalten wir durch die Substitution:

$$\sqrt{\tau} \cos(\xi X_h) = z_h, \quad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \tau$$

den Ausdruck:

$$(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)^2 = \sum_{h,k=1}^{3} \tau_{hk} z_h z_k. \quad \text{(F)}$$

Betrachten wir nun y_1, y_2, y_3 und z_1, z_2, z_3 als Punktcoordinaten in dem Coordinatensystem X_1, X_2, X_3, so bedeutet (E) die Gleichung eines Ellipsoids und (F) die Gleichung eines Ovaloids. Der gemeinsame Mittelpunkt ist der Anfangspunkt O. Auf einer von O ausgehenden Geraden schneidet das Ellipsoid die Strecke $1/\sqrt{\tau}$ und das Ovaloid die Strecke $\sqrt{\tau}$ ab. (F) ist die inverse Fläche von (E).

Wählen wir jetzt zu Coordinatenaxen die in ihren Richtungen übereinstimmenden Hauptaxen $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_3$ der beiden Oberflächen, so gehen die Gleichungen derselben über in:

$$1 = \mathfrak{t}_1 \mathfrak{y}_1^2 + \mathfrak{t}_2 \mathfrak{y}_2^2 + \mathfrak{t}_3 \mathfrak{y}_3^2, \quad \text{(E)}$$

$$(\mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{z}_2^2 + \mathfrak{z}_3^2)^2 = \mathfrak{t}_1 \mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{t}_2 \mathfrak{z}_2^2 + \mathfrak{t}_3 \mathfrak{z}_3^2, \quad \text{(F)}$$

wenn mit $1/\sqrt{\mathfrak{t}_h}$ die Halbaxen des Ellipsoids und mit $\sqrt{\mathfrak{t}_h}$, $(h = 1, 2, 3)$, die Halbaxen des Ovaloids bezeichnet werden.

Die thermoelektrische Kraft τ in der Richtung des stärksten Temperaturgefälles ξ wird repräsentirt in dem Ellipsoid (E) *durch den reciproken Werth des Quadrates des zu ξ parallelen Radiusvector und in dem Ovaloid* (F) *durch das Quadrat des zu ξ parallelen Radiusvector.*

Göttingen, October 1889.

Universität.

(Aus dem philosophischen Seminar.)

Ueber Contrasterscheinungen in Folge von Einstellung.

Eine vorläufige Mittheilung

Von

Dr. F. Schumann.

1.

Bei Gelegenheit von experimentellen Untersuchungen über das Gedächtnis nach der Methode von Ebbinghaus, welche hier seit längerer Zeit angestellt werden, habe ich nebenher einige interessante Beobachtungen gemacht über Täuschungen in der Auffassung von Geschwindigkeiten. Bei diesen Untersuchungen wurden sinnlose Silben, welche auswendig gelernt werden sollten, auf einen Papierbogen unter einander in gleichen Abständen geschrieben; dieses Papier wurde dann auf eine um eine horizontale Axe sich bewegende Kymographiontrommel geklebt und vor die Trommel wurde ein Schirm mit einem kleinen Ausschnitte gestellt. Sobald man nun das Uhrwerk des Kymographions in Gang setzte, erschienen die Silben in bestimmten, constanten Zwischenzeiten der Reihe nach einzeln in dem Ausschnitte des Schirmes und wurden von der vor dem Schirme sitzenden Versuchsperson so lange laut vorgelesen, bis dieselbe sie frei hersagen konnte. Bei diesen Versuchen zeigten sich nun folgende Erscheinungen.

1. Bei der Controle der Rotationsgeschwindigkeit der Trommel, die natürlich im Verlaufe einer Versuchsreihe möglichst constant erhalten werden mußte, kam es häufiger vor, daß die Geschwindigkeit anfangs wesentlich zu groß war. Stellte ich dann durch Verminderung des treibenden Gewichtes die normale Geschwindigkeit wieder her, so schien mir diese wesentlich kleiner zu sein als die normale, obwohl ich die letztere sonst durch lange Erfahrung sehr genau kannte.

2. Waren die Versuchspersonen geistig abgespannt, so hielten sie die normale Geschwindigkeit für wesentlich größer als sonst. Waren die Versuchspersonen dagegen geistig besonders frisch, so schien ihnen umgekehrt die Geschwindigkeit geringer als gewöhnlich zu sein.

Die Erklärung dieser Erscheinungen ergiebt sich leicht auf folgende Weise. Taucht eine Silbe im Gesichtsfelde auf, so folgt die Versuchsperson derselben so lange mit der Aufmerksamkeit, bis sie deutlich erkannt ist, dann wendet sich die Aufmerksamkeit der nächstfolgenden Silbe zu, folgt dieser wieder, bis sie erkannt ist u. s. w. Nun ist der Ausschnitt des Schirmes so groß gewählt, daß jede Silbe unmittelbar nach dem Verschwinden der vorangehenden im Gesichtsfelde erscheint. Bei gewissen mittleren Geschwindigkeiten, die auch im Allgemeinen bei den Versuchen benutzt wurden, kann daher die Versuchsperson, indem sie jeder Silbe so lange die Aufmerksamkeit zuwendet, wie dieselbe im Gesichtsfelde sichtbar ist, gerade bequem alle Silben deutlich erkennen. Bei Steigerung der Geschwindigkeit wird aber die Versuchsperson ihre Aufmerksamkeit immer mehr concentriren müssen, bis es ihr schließlich überhaupt nicht mehr gelingt alle Silben deutlich zu erkennen. Andererseits ist bei einer verhältnismäßig geringen Geschwindigkeit jede Silbe schon deutlich erkannt, ehe sie aus dem Gesichtsfelde verschwindet, so daß man immer eine mehr oder weniger kurze Zeit auf die folgende Silbe warten muß.

Hat man nun einige Zeit bei gesteigerter Geschwindigkeit die Silben zu erkennen gesucht und geht dann wieder zu der normalen Geschwindigkeit über, so fährt man unwillkürlich noch einige Zeit fort mit derselben angestrengten Aufmerksamkeit, welche bei der größeren Geschwindigkeit erforderlich war, rascher als gewöhnlich von jeder Silbe zur nächstfolgenden überzugehen. Es wird daher jetzt jede Silbe schon etwas früher erwartet, als sie im Gesichtsfelde erscheint, und man hält deshalb, da dieses sonst nur bei einer unternormalen Geschwindigkeit der Fall war, die Geschwindigkeit für langsamer als gewöhnlich.

Ist ferner die Versuchsperson geistig abgespannt, so ist auch die Thätigkeit ihrer Aufmerksamkeit träger. Da sich die Versuchsperson demgemäß mehr als gewöhnlich anstrengen muß, so hält sie auch die Rotationsgeschwindigkeit für größer als gewöhnlich. Das Analoge gilt für den Fall einer besonderen geistigen Frische.

Die obigen Anschauungen werden außerdem noch bestätigt durch eine weitere Reihe von Erscheinungen, welche sich zeigten, als ich statt der Silben einfache Linien in bestimmten Abständen auf die rotirende Trommel zeichnete und nun die Geschwindigkeit dieser Linien durch den Ausschnitt eines Schirmes beobachten ließ. Doch ist in dieser vorläufigen Mittheilung nicht der Ort auf diese Erscheinungen näher einzugehen.

2.

Im Vorstehenden sind Erscheinungen beschrieben, die offenbar in das Gebiet des Zeitsinnes gehören. Denn da die Silben immer in gleichen Zwischenzeiten im Gesichtsfelde erscheinen, so schätzt man thatsächlich diese Zwischenzeiten, wenn man die Rotationsgeschwindigkeit für größer bez. kleiner hält.

Sind die Intervalle, wie es gewöhnlich bei Zeitsinnversuchen der Fall ist, durch einfache Gehörsreize begrenzt, so zeigen sich analoge Erscheinungen. Sucht man z. B. mit Hülfe eines Metronoms die sog. adaequate Zeit zu bestimmen, welche in der Gegend von 0,7 sec. liegt, so ergiebt sich durch Selbstbeobachtung leicht, daß sich bei diesem Intervall die Aufmerksamkeit gerade bequem nach jedem Eindrucke auf den folgenden Eindruck vorbereiten kann, und daß man dementsprechend auch jeden Eindruck gerade in dem Augenblick erwartet, in welchem er eintritt. Nimmt man das Intervall kleiner, so ist eine größere Anstrengung der Aufmerksamkeit erforderlich, während bei einem größeren Intervalle vor jedem Schalle die Spannungsempfindungen der Erwartung sich merkbar machen.

Ferner zeigt sich ebenfalls eine Einstellung der Aufmerksamkeit. Hat man z. B. bei Zeitsinnversuchen öfter hintereinander mit ein und derselben Normalzeit z. B. 0,7 sec. operirt und geht dann zu einer etwas größeren Normalzeit z. B. 0,9 sec. über, so erscheint diese Zeit bei den ersten Versuchen größer als bei den folgenden. Ebenso erscheint, wenn man von größeren Normalzeiten zu kleineren übergeht, die kleinere Normalzeit bei den ersten Versuchen kleiner als bei den folgenden. Diese Contrasterscheinung erklärt sich leicht daraus, daß man einerseits beim Uebergange von einer kleineren zu einer größeren Normalzeit anfangs das 2. Signal früher erwartet als es eintritt und daß man andererseits beim Uebergange von einer größeren zu einer kleineren Normalzeit anfangs von dem 2. Signal überrascht wird, während sich in beiden Fällen nach kurzer Zeit die Erwartung des Eindrucks gerade zur richtigen Zeit einstellt. Es findet also eine Einstellung des sensorischen Centrums auf eine Thätigkeit in bestimmtem Intervalle statt. Nachdem öfter der zweite Schall eine bestimmte Zeit nach dem ersten Schalle eingetreten ist, bereitet sich das Centralorgan auf das Eintreten des 2. Schalles nach dieser Zeit vor. Diese Vorbereitung besteht wohl darin, daß im Centralorgane eine Erregung entsteht, welche von der durch den Schall hervorgerufenen psychophysischen Erregung nur durch die geringere Intensität sich unterscheidet. Bei höheren Graden der

Einstellung kann diese Erregung so stark anwachsen, daß ein Erinnerungsbild des Schalles mit sinnlicher Deutlichkeit hervorgerufen wird, wie dies durch die Erscheinung des Sinnengedächtnisses, welche Fechner nach mehrstündigem Beachten der Schläge einer Secundenuhr bei Gelegenheit von erdmagnetischen Beobachtungen hatte, bewiesen wird [1]).

Diese Einstellung der sensorischen Centren scheint um so schwieriger stattzufinden, je größer das Intervall ist. Man wird sich daher vielleicht noch nach anderen Grundlagen für die Schätzung größerer Zeiten umsehen müssen. In wieweit man sich etwa bei größeren Zeiten auf die periodische Thätigkeit des Athmens stützt, bin ich noch beschäftigt genauer festzustellen.

3.

Bei Gelegenheit von Untersuchungen über die Vergleichung von Fühlstrecken habe ich eine Contrasterscheinung beobachtet, welche sich ebenfalls durch Einübung erklären läßt. Zu diesen Versuchen spannte ich ein schmales Band horizontal zwischen 2 Stativen aus und stellte vor das Band eine Versuchsperson mit verbundenen Augen, welche dasselbe mit Daumen und Zeigefinger rechts und links von einem markirten Mittelpuncte erfaßte. Die Versuchsperson hielt hierbei die Oberarme ruhig herunter, während die Unterarme im rechten Winkel gegen die Oberarme gebeugt waren und sich gegen den in der Medianebene befindlichen markirten Punct des Bandes richteten. Indem ich nun rechts und links Strecken von bestimmter Größe markirte, ließ ich die Versuchsperson auf ein bestimmtes Zeichen hin erst die eine und unmittelbar darauf die andere Strecke durch Bewegung der Hand ausmessen. In dieser Weise habe ich Versuchsreihen nach der Methode der richtigen und falschen Fälle durchgeführt, indem ich z. B. eine Normalstrecke von 20 cm und 7 Vergleichsstrecken von 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 cm benutzte. Nachdem die Versuchsperson eine größere Anzahl von Versuchen ausgeführt hatte, kam es häufig vor, daß die Hand beim Ausmessen einer Vergleichstrecke von 23 cm ungefähr die ersten 20 cm rasch zurücklegte und dann entweder unwillkürlich zum Ausgangspunct zurückkehrte oder aber den Rest der Strecke zögernd zurücklegte. Ferner gab die Ver-

1) Neben der sensorischen Einstellung treten noch unterstützende motorische Erscheinungen beim Zeitschätzen auf, welche, wie ich später zeigen werde, je nach der Versuchsperson und dem Versuchsverfahren eine mehr oder weniger große Rolle spielen.

suchsperson in diesen Fällen an, daß ihr die Strecke ganz außergewöhnlich groß erschienen sei.

Diese Contrasterscheinung dürfte sich in folgender Weise erklären. Bei jedem Einzelversuche traf wenigstens eine Hand nach Ausmessung der Normalstrecke auf das Hindernis, welches diese Strecke markirte. Nach einer größeren Anzahl von Versuchen haben sich daher die motorischen Centren auf eine Bewegung von dem Umfange der Normalstrecke eingestellt, so daß sie dieselbe auf eine Anregung vom Centrum der Bewegungsbilder hin ohne Weiteres ausführen. Nach Ausführung derselben tritt dann das Vorstellungsbild des Hindernisses in Folge der Einübung mit großer Energie auf und bewirkt eine starke Hemmung der Weiterbewegung der Hand. Infolge dieser Hemmung dauert es aber verhältnißmäßig lange, bis die Hand wirklich auf das Hindernis trifft, so daß die von der Erwartung herrührende Spannung einen hohen Intensitätsgrad erreichen wird. Da nun diese Spannung gewöhnlich nur bei außergewöhnlich großen Strecken so stark anwächst, so überschätzen wir die durchmessene Strecke.

Wie man leicht erkennen wird, ergeben sich aus der im Vorstehenden angedeuteten Auffassung der erwähnten Contrasterscheinungen interessante Folgerungen über die beim Vergleichen von Geschwindigkeiten, kleinen Zeiten und Fühlstrecken stattfindenden psychischen Vorgänge. Mit Untersuchungen, welche zur weiteren Analyse dieser Vorgänge dienen sollen, bin ich noch beschäftigt.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September und Oktober 1889.

Sitzungsberichte der K. Preuß. Akademie d. Wissensch. zu Berlin. N. XXXVIII.
Abhandlungen d. Kön. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin. Jahrg. 1888. Berlin 1889.
Publikationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Band IV. Theil II. Potsdam 1889.
Verzeichniß der türkischen Handschriften der Kön. Bibliothek zu Berlin. Bd. VI. v. W. Pertsch. Berlin 1889.
Der Briefwechsel des Gottfried Wilh. Leibnitz in der Kön. öffentl. Bibliothek zu Hannover, beschr. v. Ed. Bodemann. Hannover 1889.

Jubiläumsschrift. Litteratur der Landes- und Volkskunde des Königreichs Sachsen, v. P. E. Richter. Dresden 1889.
Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Jahrg. 24. Heft. 3. Leipzig 1889.
Theodor Benfey, kleinere Schriften. Band 1. Berlin 1890.
Sechsundsechzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Breslau 1889.
Jahresbericht des Direktors des Kön. geodätischen Instituts für April 1888—April 1889. Berlin 1889.
Zeitschrift für Naturwissenschaften. D. g. R. Band LXII. 4. Folge. Band 8. Heft 2. Halle a/S. 1889.
Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes. Band IX. No. 2. Leipz. 1889.
Leopoldina. Heft XXV. N. 13—18.
Verhandlungen der im Sept. 1888 in Salzburg abgehaltenen Conferenz der perm. Commission der Internationalen Erdmessung. Berlin 1889.
Politische Correspondenz Friedrichs des Großen. Band 17. Berlin 1889.
Zeitschrift der deutschen Morgenländischen Gesellschaft. Band 43. Heft 2.
Ueber die Anwendung der Sternphotographie zu Helligkeitsmessungen der Sterne v. C. V. L. Charlier. (Publikation der astronomischen Gesellschaft XIX.) Leipzig 1889.
Papyrus Ebers, die Maaße und das Kapitel über die Augenkrankheiten. Thl. 1 u. 2. Des XI. Bandes der Abh. d. philologisch-historischen Klasse der K. sächsischen Ges. d. W. N. 2 u. 3. Leipzig 1889.
Der Bilderschmuck in den Sakramentarien des frühen Mittelalters, v. A. Springer. Des XI. Bandes der Abhandl. d. philol.-histor. Classe der kgl. sächs. Ges. d. Wiss. N. 4. Leipzig 1889.
XXXIV. u. XXXV. Bericht des Vereins für Naturkunde zu Kassel, über April 1886—1888. Kassel 1889.
Jahresbericht der Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. 1888. Nürnberg 1889.
Jahrbücher des Nessauischen Vereins für Naturkunde. Jahrg. 42. Wiesbaden 1889.
Jahrbuch der Hamburgischen wissenschaftlichen Anstalten. Jahrg. VI erste Hälfte 1888. Hamburg 1889.
Bericht der 30. Plenarversammlung der historischen Commission bei der K. B. Akademie der Wissenschaften. München 1889.
Acta mathematica. 12: 3. u. 4. Berlin. Stockholm. Paris 1889.
Das Gorilla-Rückenmark von Waldeyer. Berlin 1889. (Aus d. Abh. d. K. Pr. Ak. d. W. zu Berlin vom Jahre 1888).
Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. Jahrg. 29. 1888. Königsberg 1889.
Antonini Placentini itinerarium, herausgeg. von Dr. J. Gildemeister. Berlin 1889.
Jahresbericht des historischen Vereins von Unterfranken u. Aschaffenburg für 1888. Würzburg 1889.
Archiv d. hist. Vereins von Unterfranken u. Aschaffenburg. Band 32. Würzburg 1889.
Untersuchung der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen, von Lipschitz. (Aus Heft 2, Band 105 des Journals für reine und angewandte Mathematik.)
Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. Band 14. Zürich 1889.
Jahrbuch der K. K. Geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1889. Band XXXIX. Heft 1 u. 2.
Verhandlungen d. K. K. geologischen Reichsanstalt. Nr. 10—12. Wien 1889.
Astronomische Arbeiten des K. K. Gradmessungs-Bureau. Band I. Wien 1889.
Verhandlungen der oesterreichischen Grad-Messungscommission. Protokolle über Sitzungen vom 17. 18. 19. Dez. 1885, 9. 10. 11. Dez. 1886. 13. Jan. 1887. 28. 29. Dez. 1887, vom 26. März 1888 u. 24. Apr. 1889. Wien 1889.
Magnetische und meteorologische Beobachtungen a. d. K. K. Sternwarte zu Prag i. J. 1888. Jahrg. 49. Prag.

Abhandlungen des Archäologisch-Epigraphischen Seminars in Wien, VIII. Griechische Weihgeschenke v. E. Reisch. Wien 1890.
Meteorologische Zeitschrift. 1889. Band XXIV. Der Zeitschr. d. österr. Ges. für Meteorologie Heft 8, 9, 10. Wien 1889.
Die Königl. Böhm. Gesellschaft d. Wissensch. zu Prag:
a. Sitzungsberichte: Philos.-Philol.- Histor. Classe, Jahrg. 1887. 1888.
b. — Math. naturw. Classe. 1887. 1888 u. 1889. Bd. I.
c. Abhandlungen: VII. Folge. 2 Bände.
d. Jahresbericht: für d. Jahr 1888 der Classe für Philosophie, Gesch. und Philol., u. der mathem. naturwiss. Classe.
Mittheilungen des naturwissenschaftl. Vereins für Steiermark. Jahrg. 1888. Graz 1889.
Programm des ev. Gymnasiums etc. zu Hermannstadt für 1888/89. Hermannstadt 1889.
Archiv des Vereins für siebenbürgische Landeskunde. Neue Folge. Band 22. Heft 2. Hermannstadt 1889.
Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jahrg XXVII. N. 1, 2, 3, 4. Prag 1889.
Anzeiger der Akademie d. Wissenschaften in Krakau, 1889. N. 6. Juni 1889. Krakau 1889.
Medizinisch-naturwissenschaftl. Section des Siebenbürgischen Museum-Vereines in Klausenburg. Orvos-Természettudományi. Értesitö. 1889. I. u. III. 1. 2. Heft. Klausenburg 1889.
Royal society London. Mitgliederverzeichniß für 1888.
Philosophical transactions of the Royal society for 1888. Vol. 179. A. B.
Nature. N. 1031—1043. Vol. 40.
Proceedings of the R. society. Vol. XLVI. N. 281, 282, 283.
Proceedings of the London mathematical society. N. 349—353. N. 354—358.
Journal of the R. microscopical society 1889. Part 4. August. London and Edinburgh.
Proceedings of sc. meetings of the Zoological society of London 1889. Part II. March a. April.
Transactions of the zoolog. Soc. of London. Vol. XII. Part 9. London.
Proceedings of the R. society of Victoria. Vol. I. (New Series). 1889. Melbourne.
Australean Museum. Rep. of the trusties for 1888. New South Wales 1889. Sidney 1889.
Records of the geological survey of India. Vol. XXII. Part 3. 1889. Calcutta.
Memoirs a. proceedings of the Manchester litterary and philosophical society. Vol. I. Fourth series (vol. XXXI old). Manchester 1888.
The transactions of the K. Irish Academy. Vol. XXIX. Part VI—XI. Dublin 1889.
Handelingen en Mededeelingen van de Maatschappy der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. 1888.
Levensberichten der afgestorvene Medeleden. Bijlage tot 1888. Leiden 1888.
Annales de l'école polytechnique de Delft. Tome 5. Livr. 1 et 2. Leide 1889.
Oeuvres complites de Christiaan Huygens publ. p. la société hollandaise des sciences. Tome II. La Haye 1889.
Bijdragen tot de Taal-Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indie. 5. Volgreeks. 4. deel. Vierde Afleren. Sgravenhage 1889.
Notulen van de algemeene en Bestaurs-Vergadeningen van het Bataviaasch Genootschap v. Kunsten en Wetenschapen. Deel XXVII. 1889. Aflever. 1. Batavia.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von No. 19.

Th. Liebisch, über thermoelektrische Ströme in Krystallen. — Dr. *F. Schumann*, über Contrasterscheinungen in Folge von Einstellung. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

25. December. **№ 21.** 1889.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Oeffentliche Sitzung am 7. December. 4 Uhr.

Weiland hält einen Vortrag zum Gedächtniß von Julius Weizsäcker, früherem ordentlichen Mitglied.

Ehlers legt 1. eine Abhandlung von sich vor: Zur Kenntniß der Pedicellinen. (Erscheint in den Abhandlungen.)

2. Eine Arbeit von Herrn Dr. Henking, Privatdocenten: Ueber die Befruchtung der Eier von Agelastica alni. Eine vorläufige Mittheilung.

von Könen macht eine kurze Mittheilung über das bei allen Gastropoden der Tertiärzeit und der Gegenwart heterostrophe Embryonalende.

Voigt legt eine Abhandlung von sich vor: Ueber die innere Reibung fester Körper, zumal der Krystalle. I. (Erscheint in den Abhandlungen.)

Schwarz macht Mittheilungen über die Ergebnisse einiger neueren Untersuchungen über Minimalflächen.

Klein legt 1. eine Abhandlung von Herrn Ernst Pascal in Neapel vor: Zur Theorie der geraden Sigmafunctionen dreier Argumente.

2. eine Abhandlung des Herrn Privatdocenten Dr. Burkhardt: Ueber eine hyperelliptische Multiplicatorgleichung.

Jahresbericht des Beständigen Sekretärs.

Ueber die Befruchtung der Eier von Agelastica alni L.

Eine vorläufige Mittheilung.

Von

Dr. **H. Henking.**

Privatdocent und Assistent in Göttingen.

Wie so häufig bei den Eiern der Insecten, so findet auch bei dem Erlenblattkäfer die Befruchtung in dem Augenblicke statt, wenn das Ei abgelegt wird. Ueberrascht man ein solches Ei in dem nach außen führenden Leitungswege, so sieht man, wie die dem Vorderende des Thieres zugewandte Eispitze von einer großen Schaar von Samenfäden umschwärmt wird.

Auch darin stimmen die Eier unseres Käfers mit dem bei andern Insecten beobachteten Verhalten überein, daß mehrere Samenfäden in das Ei eindringen, nicht nur ein einziger, wie bei den meisten andern Thieren.

Während aber in andern Fällen z. B. bei Pontia brassicae L. die überzähligen Samenfäden nur selten die periphere Plasmazone verlassen, ist es bei Agelastica fast Regel, daß eine größere Zahl sich tief zwischen die Dottermassen begiebt, gewöhnlich bis zu einer Ebene, welche man sich etwas jenseits des seitlichen Eikernes horizontal durch das Ei gelegt denken kann. Raketenartig, indem eine dünne Spur von Plasma den zurückgelegten Weg kenntlich macht und ein etwas größerer Plasmahof den Kopffaden umgiebt, dringen die Spermatozoen zwischen die Dottermassen. Wohlerhaltene Kopffäden habe ich dort in einem Falle drei, in mehreren Fällen zwei oder nur einen gefunden.

Aber selbst wenn nur ein Samenfaden im Ei gefunden wird, deuten meist gewisse Anzeichen darauf hin, daß dennoch deren mehrere eingedrungen waren; denn wenn man mehrere getrennte Plasmazüge vom Rande her verfolgen kann, und bemerkt am Ende derselben die bekannten Plasmahöfe, welche weiterhin allseitige Strahlen aussenden, sieht aber nur in einem der Höfe einen wirklichen Samenfaden, in den andern höchstens einige unsichere gefärbte Körnchen, so liegt die Vermuthung nahe, daß auch hier Samenfäden vorhanden waren, aber einer Auflösung anheimfielen. Genauer habe ich das endliche Schicksal der überzähligen Spermatozoen bisher nicht verfolgt.

Zur Copulation mit dem Eikern scheint immer nur ein einziger Samenfaden zu gelangen. Die Veränderungen, welche derselbe zu diesem Zwecke erleidet, sind im Principe ganz die gleichen, wie ich sie in einer im Druck befindlichen Arbeit vom Kohlweißling (Pieris brassica E. L.) geschildert habe [1]). Nur ist bei Agelastica anfangs das Schwanzfadenstück nicht zu sehen, ein Verhalten, welches ich auf die körnige Beschaffenheit und balkenförmige Anordnung des Plasmas schieben möchte. Dagegen tritt auch hier bald am hinteren Ende des sich stark färbenden Kopffadens ein hellerer Schein auf. Späterhin aber, wenn der sich nun bildende helle Hof, das Arrhenoid, wie ich es in der Abhandlung über Pieris brassicae genannt habe, größer und größer wird, kommt auch der zarte Schwanzfaden als schwach gefärbte Linie in der heller und homogener gewordenen Umgebung deutlich zum Vorschein. Auch hier umgiebt das Arrhenoid vorzugsweise den Schwanzfaden, und vielfach ist noch, ganz wie bei Pieris, doppelseitig am Schwanzfaden, eine Strecke vom Kopfabschnitt entfernt, eine besonders helle Stelle zu bemerken.

Wie sich das Arrhenoid vergrößert, vermehrt sich die plasmatische Ansammlung etwas und die deutlicher werdende sonnenförmige Strahlung derselben verräth die Neigung, mehr und mehr das Arrhenoid zum Mittelpunkte zu nehmen. Gleichzeitig beginnt der anfangs langgestreckte Kopfabschnitt des Spermatozoon sich zu verkürzen und nimmt schließlich die Gestalt einer keinen kugeligen chromatinhaltigen Blase an. Dann rückt diese Blase, unter beträchtlicher Größenzunahme an die Stelle des Arrhenoids, welches in gleichem Schritt kleiner wird, wie der männliche Vorkern wächst. Es liegt demnach die Vermuthung nahe, daß der Kern den größten Theil des Arrhenoids in sich aufnimmt. Der männliche Vorkern ist eine stattliche ovale Blase mit fein vertheilten Chromatin. Er ist nun zur Copulation mit dem Eikern bereit.

In welcher Weise der Eikern ein Richtungskörperchen, und ich kann jetzt hinzufügen, ein erstes Richtungskörperchen abschnürt, habe ich bereits früher [2]) mitgetheilt. Nachdem ich später auch die zweite Richtungsspindel und das zweite Richtungskörperchen aufgefunden habe, kann ich meine damalige Mittheilung dahin ergänzen, daß die dort erwähnte „Richtungszunge“ dem ersten Richtungskörperchen entspricht.

Nun bemerke ich mehrfach an der Wurzel der Richtungszunge eine helle Stelle, welche ihrer Lage nach zwischen dem

1) Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd. XLIX. H. 3.

2) Henking, Ueber die Bildung von Richtungskörpern etc. in Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. Göttingen 1888

Chromatin des ersten Richtungskörperchen einerseits und dem Rest des Eikerns andererseits und nach ihrem Aussehen ganz wohl jenem hellen Gebilde bei Pieris brassicae entspricht, welches ich als Thelyid bezeichnet und dort als einen unzweifelhaften Abkömmling des Keimbläschens erkannt habe. Jedenfalls ist hier die helle Stelle im Verhältniß viel kleiner, auch ist mir die Entstehung des Gebildes aus dem Keimbläschen zu verfolgen aus Mangel an passenden Stadien bisher nicht gelungen.

Die zweite Richtungsspindel liegt mir in der Gestalt vor, daß am Ende einer langgestreckten hellen Spindel die Chromatinelemente sich bereits wieder zu kleinen Kernkugeln zusammengeschlossen haben. Die Mitte der zierlichen Spindel durchsetzt eine gefärbte Aequatorialplatte von ähnlichem Aussehen, wie das entsprechende Gebilde der ersten Richtungsspindel. Und nun geschieht das äußerst Merkwürdige, daß die beiden Tochterkerne, welche sich an den Enden der Spindel zu kleinen Kugeln mit darin vertheiltem Chromatin ausgebildet haben, direct auseinander weichen, ohne die Spindel für ihren Aufbau zu verbrauchen. Der eine Kern wandert an die Peripherie des Eies und wird damit zum zweiten Richtungskörperchen, der innere Kern strebt nach innen und wird zum weiblichen Vorkern. An der alten Stelle bleibt die helle Spindel unverändert liegen, sie ist an der gefärbten Aequatorialplatte als solche noch deutlich zu erkennen, wenn die beiden Kerne schon längst fortgewandert und durch dazwischen geschobene Dottermassen von ihr getrennt sind. Ich glaube nicht fehl zu gehen, wenn ich die Spindel als ein abgeworfenes Stück des Eikernes betrachte und sie demgemäß als ein (evt. zweites) Thelyid in dem bei Pieris angewandten Sinne betrachte.

Der weibliche Vorkern wandert nun seinerseits auf den männlichen Vorkern zu, welcher ihn in seiner Plasmasonne erwartet. Der weibliche Vorkern wird auf seinem Wege von gar keiner oder nur einer ganz winzigen Menge von Plasma, ohne irgend welche Strahlung, begleitet, und unterscheidet sich dadurch auffällig von seinem männlichen Genossen. Unterwegs nimmt ersterer denselben Bau an, wie letzterer, d. h. bildet ein ovales Bläschen mit fein vertheilten Chromatin, ist anfangs aber von geringerer Größe.

In etwas älteren Eiern sieht man alsdann die beiden Kerne aneinander geschmiegt in der männlichen Plasmasonne liegen und aus ihrer Vereinigung entstehen dann die ersten Embryonalzellen in bekannter Weise.

Göttingen d. 7. December 1889.

Zur Theorie der geraden Sigmafunctionen dreier Argumente.

Von

Ernst Pascal.

Vorgelegt von F. Klein.

In einer im vorigen Juli der Societät vorgelegten Note[1]) habe ich in kurzen Zügen über die Resultate Bericht erstattet, welche ich betreffs der Reihenentwickelung der ungeraden Abel'schen Sigmafunctionen dreier Argumente damals gefunden hatte; ich hielt mir dabei vor auf die analoge Frage bei den geraden Sigmafunctionen später zurückzukommen; Letzteres soll nunmehr geschehen.

§. I.

Die verschiedenen Glieder der Reihenentwickelung der geraden Sigmafunctionen sind Combinanten des Netzes quadratischer Formen:

$$a_x \alpha_z^2, \tag{1}$$

(wo die z quaternäre, die x ternäre Variabele sind). Insbesondere ist das zweite Glied der Reihenentwickelung eine Combinante achten Grades in den Coëfficienten des Netzes und zweiter Ordnung in den x.

Ich habe bewiesen, daß es von Combinanten der letzteren Art überhaupt nur drei linear unabhängige gibt. Es sind dies:

(A) $a_x a'_x (bcd)(b'c'd')(\alpha\beta\gamma'\delta)(\alpha\beta\gamma'\delta')(\alpha'\beta'\gamma\delta)(\alpha'\beta'\gamma\delta')$,

(B) $a_x a'_x (bcd)(b'c'd')(\alpha\beta\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma'\delta')(\alpha'\beta'\gamma\delta')(\alpha'\beta'\gamma'\delta)$,

(C) $a_x a'_x (bcb')(dc'd')(\alpha\beta\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma'\delta')(\alpha'\beta'\gamma\delta')(\alpha'\beta'\gamma'\delta)$.

Führen wir zunächst an, welches die Ausdrücke der fundamentalen Curve vierter Ordnung und ihrer hier in Betracht kommenden Berührungscurven dritter Ordnung in den Coëfficienten des Netzes sind. Man findet für die Curve vierter Ordnung:

1) Zur Theorie der ungeraden Abel'schen Sigmafunctionen dreier Argumente. Gött. Nachr. Nr. 15. 1889. Siehe auch:

Sullo sviluppo delle funzioni σ abeliane dispari di genere 3. Annali di Matematica. Serie II. Vol. XVII.

Sulle formole di ricorrenza per lo sviluppo delle σ abeliane dispari a tre argomenti. Id. Id.

(2) $$f = a_x b_x c_x d_x (\alpha\beta\gamma\delta)^2$$

und für die Berührungsformen dritter Ordnung:

(3) $$\Phi_u = a_x b_x c_x (\alpha\beta\gamma u)^2;$$

die Verschwindungspunkte von Φ_u und Φ_v liegen dabei auf einer neuen Curve dritter Ordnung, welche durch

(4) $$\Phi_{uv} = a_x b_x c_x (\alpha\beta\gamma u)(\alpha\beta\gamma v)$$

gegeben ist. Versteht man unter Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 die Berührungsformen, welche den Parameterwerthen

$$\begin{aligned} u_1, u_2, u_3, u_4 = {} & 1, 0, 0, 0; \\ & 0, 1, 0, 0; \\ & 0, 0, 1, 0; \\ & 0, 0, 0, 1 \end{aligned}$$

entsprechen, so hat man die Formel:

(5) $$f = \sum_{i}^{1,3} \sum_{j,k}^{1,4} a_i x_i \alpha_j \alpha_k \sqrt{\Phi_j}\sqrt{\Phi_k}.$$

Wir bemerken ferner, daß man dem Netz (1) von Flächen zweiten Grades einen Connex (1, 2) der Ebene substituiren kann[1]). In der That, legt man die vierte Ecke des Fundamentaltetraeders der z in einen der 8 Fundamentalpunkte des Netzes, so kann das letztere, indem man noch u an Stelle von x setzt, folgendermaßen geschrieben werden:

(1') $$z_4(u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3) + \overline{(u_1, u_2, u_3}^{1}; \overline{z_1, z_2, z_3)}^{2}$$

oder symbolisch geschrieben

(1'') $$z_4 u_z + u_\alpha a_x^2,$$

wo die z nur noch ternär sind. Man erkennt, daß jede Combinante des Netzes eine ternäre Invariante der Hauptcoïncidenz des Connexes $C = u_\alpha a_z^2$ ist.

Est ist leicht, eine Differentialgleichung anzugeben, der solche

---

1) Nach einer Bemerkung von Prof. Klein. Vergl. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, Bd. I, p. 1001 ff.; Godt, über den Connex erster Ordnung und zweiter Classe, Göttingen 1873 (Dissertation); Frobenius, über die Beziehungen zwischen den 28 Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung, Journal für Mathematik, Bd. 99.

Invarianten genügen müssen. Man erhält dieselbe vermöge eines Aronhold-Processes in der Form:

$$\Sigma \frac{\partial J}{\partial C}(u_x \mu_x) = 0, \tag{6}$$

die μ sind dabei willkürliche Größen.

Drückt man die f, Φ durch die Coëfficienten von C aus, so erhält man:

$$f = u_a u_b (\alpha\beta u)^2, \tag{2'}$$

$$\Phi_v = \tfrac{1}{2} u_a (u\alpha v)^2, \qquad \Phi_4 = -\tfrac{1}{12} u_a u_b u_c (\alpha\beta\gamma)^2, \tag{3'}$$

$$\Phi_{vv'} = \tfrac{1}{2} u_a (u\alpha v)(u\alpha v'), \qquad \Phi_{v4} = \tfrac{1}{4} u_a u_b (u\alpha\beta)(\alpha\beta v). \tag{4'}$$

Besonders interessant wird es, zu untersuchen, wie sich die oben mitgetheilten drei Covarianten (A), (B), (C) dann ausdrücken. Offenbar werden dieselben vom vierten Grad in den Coëfficienten des Connexes, vom zweiten Grad in dem u. Ich habe überdies gezeigt, daß alle Covarianten letzterer Art sich aus folgenden zehn linear unabhängigen linear zusammensetzen lassen:

$$\begin{array}{llll}
(u\delta\beta)(u\delta\gamma)\,\alpha_a\alpha_b\beta_c\gamma_d = (1), & & (u\delta\gamma)^2\,\alpha_a\beta_b\alpha_c\beta_d = (8), \\
\quad\text{„}\quad \alpha_a\alpha_b\gamma_c\beta_d = (2), & & \quad\text{„}\quad \alpha_a\alpha_b\beta_c\beta_d = (9), \\
\quad\text{„}\quad \alpha_a\beta_b\gamma_c\alpha_d = (3), & & \quad\text{„}\quad \beta_a\alpha_b\alpha_c\beta_d = (10). \\
\quad\text{„}\quad \alpha_a\gamma_b\beta_c\alpha_d = (4), & & \\
\quad\text{„}\quad \beta_a\gamma_b\alpha_c\alpha_d = (5), & & \\
\quad\text{„}\quad \beta_a\alpha_b\gamma_c\alpha_d = (6), & & \\
\quad\text{„}\quad \beta_a\alpha_b\alpha_c\gamma_d = (7), & &
\end{array}$$

Ich habe ferner gezeigt, daß es nur drei lineare Combinationen dieser zehn Covarianten gibt, welche der Differentialgleichung (6) Genüge leisten. Solche drei Combinationen, die also lineare Verbindungen der drei Covarianten (A), (B), (C) sein müssen, sind beispielsweise:

$$(a) = (3) - \tfrac{2}{3}(4) - \tfrac{32}{3}(5) - 4(6) + \tfrac{32}{3}(7) - \tfrac{4}{3}(8) - \tfrac{10}{3}(9) + \tfrac{32}{3}(10),$$

$$(b) = (2) - \tfrac{1}{6}(4) + \tfrac{4}{3}(5) - (6) - \tfrac{4}{3}(7) + \tfrac{1}{6}(8) - \tfrac{5}{6}(9) + \tfrac{2}{3}(10),$$

$$(c) = (1) + \tfrac{1}{3}(4) - \tfrac{5}{6}(5) - \tfrac{1}{3}(7) - \tfrac{1}{3}(8) - \tfrac{1}{3}(9) - \tfrac{7}{6}(10).$$

§. II.

Vermöge einer Bemerkung, die derjenigen ganz ähnlich ist, die im Falle der ungeraden Sigmafunctionen Platz griff, können wir uns bei der Berechnung des zweiten Gliedes der Reihentwickelung der geraden Sigmafunctionen auf die reducirte Form beschränken:

$$\sigma = \frac{[x, y]\Omega(xy)}{(xy)},$$

in welcher x, y irgend zwei Puncte unserer Curve vierter Ordnung vorstellen. Der Ausdruck $[x, y]$ ist dabei durch folgende Formel definirt:

$$[x,y] = \sum_1^4 a_h a_i a_j \sqrt{\Phi_i(x)}\sqrt{\Phi_j(y)}$$

(wo $a_h a_i a_j$ Ausdrücke in den Coëfficienten des Netzes quadratischer Formen sind); wir können das auch so schreiben, unter a_h $a_i a_j$ Ausdrücke in den Coefficienten des Connexes verstanden:

$$[x, y] = \sum_1^3 a_h a_i a_j \sqrt{\Phi_i(x)}\sqrt{\Phi_j(y)} + \sqrt{\Phi_3(x)}\sqrt{\Phi_4(y)} + \sqrt{\Phi_4(x)}\sqrt{\Phi_3(y)}.$$

Wir setzen jetzt, wie im Falle der ungeraden Sigmafunctionen:

$$y = x + \xi$$

$$\varphi = \frac{16\psi}{f_3(z)f_3(z')}$$

(unter φ dem Integranden des algebraisch normirten Integrals dritter Gattung verstanden). Wir finden dann für das zweite Glied der Reihenentwickelung unseres geraden σ zunächst:

$$\frac{((\psi f), f)_u}{f_3^4} + \frac{1}{8}\frac{(f_3 f)^2}{f_3^4} + \frac{1}{8}\frac{((f_3 f), f)}{f_3^3} - \frac{1}{2}\sum_1^3 a_3 a_i a_j \frac{(\Phi_i f)(\Phi_j f)}{\Phi_i^{\frac{1}{2}}\Phi_j^{\frac{1}{2}} f_3^3} - \frac{(\Phi_3 f)(\Phi_4 f)}{\Phi_3^{\frac{1}{2}}\Phi_4^{\frac{1}{2}} f_3^3}.$$

Aber dieser Ausdruck kann in bemerkenswerther Weise reducirt werden. Setzen wir nämlich

$$f = u_m^4 = u_{m'}^4 = \ldots$$

so erhalten wir für denselben vermöge gewisser Kunstgriffe, die ich hier nicht darlegen kann:

$$(7)\quad \frac{(mm')^2 u_m^2 u_{m'}^2}{f_3^2} + \frac{1}{12}\frac{((f_3 f), f)}{f_3^3} - \frac{1}{2f_3^3}\sum_1^3 a_3 a_i a_j \frac{(\Phi_i f)(\Phi_j f)}{\Phi_i^{\frac{1}{2}}\Phi_j^{\frac{1}{2}}} - \frac{(\Phi_3 f)}{f_3^3 \Phi_3^{\frac{1}{2}}}\frac{(\Phi_4 f)}{\Phi_4^{\frac{1}{2}}}.$$

Dieser Ausdruck muß mit f_3^2 multiplicirt eine ganze Function vorstellen. In der That habe ich gezeigt, daß die $(\Phi_i f)$ mit Rücksicht darauf, daß x ein Punct unserer Curve vierter Ordnung ist, durch $\sqrt{\Phi_i}$ dividirbar ist, d. h. ich habe gezeigt, daß jeder Ausdruck $(\Phi_i f)$ sich in die Form setzen läßt:

$$(\Phi_i f) = \Phi_{i1} A_1 + \Phi_{i2} A_2 + \Phi_{i3} A_3 + \Phi_{i4} A_4,$$

unter A_1, A_2, A_3, A_4 vier ganze Functionen verstanden.

Der Ausdruck (7) muß sich jetzt nach Multiplication mit f_3^2 auf eine lineare Verbindung der drei Covarianten (a), (b), (c) reduciren. Es handelt sich offenbar nur um die Bestimmung der betr. numerischen Terme, die wir

$$n_a, \; n_b, \; n_c$$

nennen wollen. Zu dieser Bestimmung bin ich nun durch folgende Kunstgriffe gelangt:

1) Nehmen wir zunächst an, daß der Connex die Gestalt annimmt:

$$C = 2p u_1 z_2 z_3 + 2q u_2 z_3 z_1 + 2r u_3 z_1 z_2.$$

Man hat dann folgende Formeln:

$$f = -2p^2 u_1^4 - 2q^2 u_2^4 - 2r^2 u_3^4 + 4pq u_1^2 u_2^2 + 4qr u_2^2 u_3^2 + 4rp u_3^2 u_1^2,$$

$$\Phi_1 = -p u_1 u_2 u_3, \quad \Phi_{23} = \tfrac{1}{2} r u_1 u_3^2 - \tfrac{1}{2} p u_1^3 + \tfrac{1}{2} q u_1 u_2^2,$$

$$\Phi_2 = -q u_1 u_2 u_3, \quad \Phi_{31} = \tfrac{1}{2} p u_2 u_1^2 - \tfrac{1}{2} q u_2^3 + \tfrac{1}{2} r u_2 u_3^2,$$

$$\Phi_3 = -r u_1 u_2 u_3, \quad \Phi_{12} = \tfrac{1}{2} q u_3 u_2^2 - \tfrac{1}{2} r u_3^3 + \tfrac{1}{2} p u_3 u_1^2,$$

$$\Phi_4 = -pqr u_1 u_2 u_3, \quad \Phi_{14} = p\Phi_{23}, \quad \Phi_{24} = q\Phi_{31}, \quad \Phi_{34} = r\Phi_{12},$$

$$(\Phi_1 f) = 8p\,[r^2 u_2 u_3^4 - p^2 u_1^4 u_2 - qr u_2^3 u_3^2 + pq u_1^2 u_2^3],$$

$$(\Phi_2 f) = 8q\,[\;.\;.\;.\;.\;.\;\text{idem}\;.\;.\;.\;.\;.\;],$$

$$(\Phi_3 f) = 8r\,[\;.\;.\;.\;.\;.\;\text{idem}\;.\;.\;.\;.\;.\;],$$

$$(\Phi_4 f) = 8pqr\,[\;.\;.\;.\;.\;.\;\text{idem}\;.\;.\;.\;.\;.\;],$$

$$f_3 = 16\Phi_{34}, \quad f_1 = 16\Phi_{14}.$$

Wir können überdies schreiben:

$$\frac{(\Phi_1 f)}{\sqrt{\Phi_1}} = 16p\,[-r u_2 u_3 \sqrt{\Phi_2} + u_1 u_2 \sqrt{\Phi_4}],$$

$$\frac{(\Phi_2 f)}{\sqrt{\Phi_2}} = 16q\,[-r u_2 u_3 \sqrt{\Phi_1} + p u_1 u_2 \sqrt{\Phi_3}],$$

$$\frac{(\Phi_3 f)}{\sqrt{\Phi_3}} = 16r\,[-u_2 u_3 \sqrt{\Phi_4} + p u_1 u_2 \sqrt{\Phi_2}],$$

$$\frac{(\Phi_4 f)}{\sqrt{\Phi_4}} = 16pqr\,[-u_2 u_3 \sqrt{\Phi_3} + u_1 u_2 \sqrt{\Phi_1}],$$

so daß also schließlich (7) [mit Rücksicht auf $f = 0$ und $u_2 = 1$] die Form erhält:

$$(7') \qquad -\tfrac{64}{9} pqr\,[pu_1^2 + q + ru_3^2].$$

Gleichzeitig werden die drei Covarianten (a), (b), (c):

$$\begin{aligned}(a) &= -64\,pqr\,[pu_1^2 + q + ru_3^2],\\ (b) &= 0,\\ (c) &= \tfrac{23}{3} pqr\,[pu_1^2 + q + ru_3^2].\end{aligned}$$

Daher kommt:

$$(8) \qquad -64\,n_a + \tfrac{23}{3} n_c = -\tfrac{64}{9}.$$

2) Nehmen wir ferner an, der Connex C werde:

$$C = p'u_1 z_1^2 + q'u_1 z_2^2 + r'u_2 z_3^2.$$

Wir haben dann:

$$\begin{aligned}
f &= 2p'q'u_1^2u_3^2 + 2p'r'u_1u_2^3 + 2q'r'u_1^3u_2,\\
f_3 &= 4p'q'u_1^2u_3,\\
f_1 &= 4p'q'u_1u_3^2 + 2p'r'u_2^3 + 6q'r'u_1^2u_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \tfrac12 r'u_2^3 + \tfrac12 q'u_1u_3^2, & \Phi_{23} &= -\tfrac12 p'u_1u_2u_3,\\
\Phi_2 &= \tfrac12 p'u_1u_3^2 + \tfrac12 r'u_1^2u_2, & \Phi_{31} &= -\tfrac12 q'u_1^2u_3,\\
\Phi_3 &= \tfrac12 q'u_1^3 + \tfrac12 p'u_1u_2^2, & \Phi_{12} &= -\tfrac12 r'u_2^2u_1,\\
\Phi_4 &= -\tfrac12 p'q'r'u_1^2u_2, & \Phi_{14} &= \tfrac12 q'r'u_1^2u_2,\\
&& \Phi_{24} &= \tfrac12 r'p'u_2^2u_1,\\
&& \Phi_{34} &= \tfrac12 p'q'u_1^2u_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Phi_1 f) &= 2\,[-p'q'^2u_1^2u_3^3 - p'q'r'u_1u_2^3u_3 - 3\,q'^2r'u_1^3u_2u_3],\\
(\Phi_2 f) &= 2\,[-p'q'r'u_1^3u_2u_3 - p'^2r'u_1u_2^3u_3],\\
(\Phi_3 f) &= 2\,[-3p'q'^2u_1^4u_3 + p'^2q'u_1^2u_2^2u_3],\\
(\Phi_4 f) &= -4p'^2q'^2r'u_1^3u_2u_3,\\
((f_3 f), f) &= 16\,[3p'^2q'^2u_1^2u_3^2 - p'^2q'r'u_1u_2^3 - 6p'q'^2r'u_1^3u_2]\,f_3\\
&\quad - 64p'^2q'^2u_1^3u_3\,[2p'q'u_1u_3^2 + p'r'u_2^3 + 3\,q'r'u_1^2u_2].
\end{aligned}$$

Hiernach wird der Ausdruck (7) (vermöge $u_2 = 1$):

$$(7'') \qquad \tfrac23 p'^2q'r'u_1.$$

Andererseits werden die drei Covarianten (a), (b), (c):

$$\begin{aligned}
(a) &= \tfrac{25}{3} p'^3q'u_3^2 - \tfrac{32}{3} p'^2q'r'u_1,\\
(b) &= -\tfrac16 p'^3q'u_3^2 + \tfrac13 p'^2q'r'u_1,\\
(c) &= -\tfrac72 p'^3q'u_3^2 - \tfrac23 p'^2q'r'u_1.
\end{aligned}$$

Daher haben wird die weiteren beiden Relationen:

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} \tfrac{25}{3} n_a - \tfrac{1}{6} n_b - \tfrac{7}{2} n_c &= 0, \\ -\tfrac{32}{3} n_a + \tfrac{1}{3} n_b - \tfrac{2}{3} n_c &= \tfrac{2}{3}, \end{aligned} \right.$$

die mit (8) zusammengestellt das Resultat ergeben:

$$n_a = \frac{1}{3^2},$$
$$n_b = \frac{2 \cdot 5^2}{3^2},$$
$$n_c = 0.$$

Hiermit ist das zweite Glied in der Reihenentwickelung des geraden Sigma endgültig gefunden.

Neapel, im November 1889.

Ueber eine hyperelliptische Multiplicatorgleichung.

Von

H. Burkhardt in Göttingen.

Vorgelegt von F. Klein.

Die algebraischen Gleichungen, welche in der Theorie der hyperelliptischen Modulfunctionen auftreten, sind ihren Eigenschaften nach noch ziemlich wenig bekannt. Ich habe mich speciell mit einer dieser Gleichungen beschäftigt, welche als eine Verallgemeinerung der in der Theorie der elliptischen Functionen auftretenden Jacobi'schen Multiplicatorgleichung aufgefaßt werden kann. Indem ich mir erlaube, die Resultate, zu welchen ich gelangt bin, der Societät vorzulegen, muß ich für die Ableitung derselben auf eine ausführlichere Darstellung verweisen, welche später in den mathematischen Annalen erscheinen wird.

Ich stelle zunächst die Bezeichnungen zusammen, deren ich mich bediene. Mit f_x^6 bezeichne ich die binäre Form sechsten Grades, welche gleich Null gesetzt die Verzweigungsstellen des vorgelegten hyperelliptischen Gebildes bestimmt; durch:

$$f_x^6 = \varphi_x^3 \cdot \psi_x^3$$

sei eine der 10 Zerlegungen von f in zwei cubische Factoren definirt. Δ_x^2 und ∇_x^2 seien die Hesse'schen Formen von φ und ψ, R und P deren Discriminanten (zugleich die Discriminanten von φ, ψ selbst) T ihre Simultaninvariante; J sei die lineo-lineare Simultaninvariante (dritte Ueberschiebung) von φ und ψ, $\mathfrak{R}$ ihre Resultante; alle diese Invarianten seien in Bezug auf Zahlenfactoren so normirt, daß sie irreducible ganze ganzzahlige Functionen der Coefficienten der mit Binomialcoefficienten geschriebenen Formen φ, ψ sind. Außerdem sei noch gesetzt:

$$B = 2J^2 - 9T, \quad D = RP, \quad E = J\mathfrak{R}, \quad Z = \mathfrak{R}^2.$$

Bekanntlich ist dann bis auf einen Zahlenfactor:

$$D = \frac{\vartheta^8}{(\omega_{11}\,\omega_{22} - \omega_{12}\,\omega_{21})^4}$$

wenn mit ϑ der Nullwert der zu der Zerlegung $f = \varphi\psi$ gehörenden geraden Thetafunction bezeichnet wird.

Nun sei $\overline{D}$ einer derjenigen Werte, welche durch Transformation n^{ten} Grades aus D hervorgehen; dann betrachte ich nebeneinander die Gleichungen, welchen:

$$\sqrt[4]{\overline{D}}\,; \quad \sqrt[4]{\frac{\overline{D}}{D}}\,; \quad \sqrt[4]{\frac{\overline{D}}{D^n}}$$

genügen. Uebrigens beschränke ich mich dabei auf den Fall, daß n eine ungerade Primzahl ist.

Zunächst ist nun zu sehen:

„Die $n^3 + n^2 + n + 1$ Werte von $\sqrt[4]{\frac{\overline{D}}{D}}$ (und ebenso diejenigen von $\sqrt[4]{\frac{\overline{D}}{D^n}}$) genügen einer Gleichung vom Grade $n^3 + n^2 + n + 1$, deren Coefficienten rational von den Nullstellen der f_6 abhängen."

Nähere Untersuchung führt zu folgender engerer Umgränzung des Rationalitätsbereiches, welchem diese Coefficienten angehören:

„Die Coefficienten der Gleichung für $\sqrt[4]{\frac{\overline{D}}{D^n}}$ sind rationale symmetrische[1]) Invarianten von φ und ψ."

Andererseits aber findet man:

„Die Wurzeln der Gleichung für $\sqrt[4]{\overline{D}}$ sind ganze algebraische Functionen der Coefficienten von f."

Hält man die beiden letzten Sätze zusammen, so gewinnt man

1) d. h. solche, welche bei Vertauschung von φ mit ψ ungeändert bleiben.

für die beiden Fälle $n \equiv 1$ und $n \equiv 3 \pmod 4$ verschiedene Resultate, nämlich:

„Im ersten Falle sind die Coefficienten gerader Potenzen von $\sqrt[4]{D}$ in der Gleichung für diese Größe rationale ganze symmetrische Invarianten von φ und ψ, die Coefficienten ungerader Potenzen Produkte solcher Invarianten in $\sqrt{D}$.“

„Im zweiten Falle ist allgemein der Coefficient von $\sqrt[4]{D}^{\lambda}$ das Produkt einer solchen Invariante in $\sqrt[4]{D}^{[\lambda]}$, unter $[\lambda]$ den kleinsten positiven Rest von λ nach dem Modul 4 (0, wenn $\lambda \equiv 0 \bmod 4$) verstanden.“

Weitere Eigenschaften dieser Coefficienten liefert die Untersuchung der Grenzfälle, in welchen f eine doppelte oder dreifache Nullstelle besitzt; man erhält durch dieselbe folgende Resultate:

„Verschwindet die Resultante von φ und ψ, so bleiben alle Werte von $\sqrt[4]{D}$ endlich und von Null verschieden; wird aber die Differenz zweier Wurzeln von $\varphi = 0$ (oder zweier Wurzeln von $\psi = 0$) von der ersten Ordnung unendlich klein (D also von der zweiten Ordnung), so werden $n^3 + n^2$ von jenen Werten unendlich klein je von der Ordnung $\frac{1}{2n}$, die übrigen $n + 1$ je von der Ordnung $\frac{n}{2}$.“

„Werden die gegenseitigen Entfernungen zweier Wurzeln von $\varphi = 0$ und einer von $\psi = 0$ (oder zweier von $\psi = 0$ und einer von $\varphi = 0$) je von der ersten Ordnung unendlich klein, so wird jeder Wert von $\sqrt[4]{D}$ unendlich klein von der Ordnung $\frac{1}{2}$; werden aber die gegenseitigen Entfernungen der drei Wurzeln von $\varphi = 0$ (oder der drei von $\psi = 0$) von der ersten Ordnung unendlich klein, so werden $(n+1)^2$ von den Werten von $\sqrt[4]{D}$ unendlich klein von der Ordnung $\frac{3}{2}$, die übrigen $n^3 - n$ von der Ordnung $\frac{1}{2}$.“

(Bei diesen Behauptungen sind selbstverständlich alle diejenigen Wurzeln von $f = 0$, von welchen nicht ausdrücklich angegeben ist, daß sie zusammenfallen, als unabhängig veränderlich betrachtet).

Aus dem zweiten dieser beiden Doppelsätze kann man erschließen, daß alle diese Coefficienten sich nach Multiplication mit geeigneten Potenzen der Periodendeterminante $\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}$ als ganze Functionen der 10 „ursprünglichen“ Thetanullwerte darstellen lassen; aus dem ersten Doppelsatz aber folgt, daß der Coefficient von:

$$\sqrt[4]{D}^{\,n^3 + n^2 + n + 1 - \lambda}$$

als Factor eine Potenz von D enthält, deren Exponent:

$$\text{für } \lambda \leqq n^3 + n^2 \text{ mindestens } = \frac{\lambda}{4n},$$

$$\text{für } \lambda \geqq n^3 + n^2 \text{ mindestens } = \frac{n\lambda}{4} - \frac{n^4 + n^3 - n^2 - n}{4} \text{ ist.}$$

Alle Invarianten nun, welche allen diesen für einen bestimmten Coefficienten unserer Gleichung erhaltenen Bedingungen genügen, lassen sich aus einer bestimmten Anzahl linear unabhängiger unter ihnen mit numerischen Zahlencoefficienten linear zusammensetzen; und zwar ist diese Anzahl erheblich kleiner, als die Anzahl aller ganzen Invarianten des entsprechenden Grades schlechtweg, sodaß die Bestimmung der noch unbekannten Zahlencoefficienten durch Reihenvergleichung nicht mehr allzuviel Rechnung erfordert. In der That erhält man Reihenentwicklungen nach Potenzen von

$$e^{\pi i \tau_{11}}, \quad e^{\pi i \tau_{22}}, \quad e^{\pi i \tau_{12}} + e^{-\pi i \tau_{12}}$$

für die bei uns vorkommenden Invarianten aus deren Ausdrücken durch die ursprünglichen Thetanullwerte, für die Wurzeln unserer Gleichung vermittelst der Hermite'schen Repraesentanten der Klassen aequivalenter transformirter Periodensysteme. Man findet so für jene Coefficienten rationale Zahlenwerte.

Für $n = 3$ habe ich die Berechnung wenigstens der ersten Glieder der Gleichung für:

$$x = \sqrt[4]{D}$$

durchgeführt und folgendes Resultat erhalten:

$$x^{40} - 108\,D^{\frac{1}{2}} x^{38} - 16\,BD^{\frac{1}{4}} x^{37} + 3942\,D x^{36} + 480\,BD^{\frac{3}{4}} x^{35} + \ldots = 0.$$

Das von x freie Glied der Gleichung hat $D^{\frac{n(n+1)}{2}}$ zum Factor; sein anderer Factor muß eine Potenz derjenigen Invariante sein, welche verschwindet, sobald ein zu dem gegebenen hyperelliptischen Gebilde gehörendes Integral in einer die Zerlegung $f = \varphi\psi$ auszeichnenden Weise durch Transformation n^{ter} Ordnung auf ein elliptisches Integral reducirt werden kann. Für $n = 3$ ist diese Invariante von Herrn Goursat[1]) in irrationaler Form angegeben worden; in rationale Form umgesetzt lautet sie:

$$G = 3^{11}D^2 - 2^5 3^6 DE - 2^8 E^2 + 2^9 3^2 ZT.$$

Vergleichung der Grade und der Anfangsglieder der Reihen-

1) Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 13 (1886).

entwicklungen gibt dann für das absolute Glied unserer Gleichung vierzigsten Grades den Wert:

$$\frac{1}{3^8} G^2 D^6 .$$

Göttingen, im November 1889.

Jahresbericht 1889.

Die Kön. G. d. W. ist heute zum 10. mal in diesem Jahre versammelt und es ist alte Sitte in dieser letzten, öffentlichen Sitzung einen kurzen Bericht über die Thätigkeit der Gesellschaft im abgelaufenen Jahre und das, was sich in ihr und für sie zutrug, zu erstatten.

In den 9 früheren Sitzungen wurden folgende wissenschaftliche Mittheilungen gemacht:

Am 5. Januar. De Lagarde kündigt einen Aufsatz des Herrn Prof. A. Erman in Berlin, Korrespondenten der Gesellschaft, an Ueber die Sprache des Papyrus Westcar. (Erscheint im 36. Bande.)

Klein legt von Dr. David Hilbert in Königsberg in Pr., Zur Theorie der algebraischen Gebilde. II. vor.

Schwarz legt von Herrn Dr. Hölder zwei Aufsätze vor:

a. Bemerkung zur Quaternionentheorie.

b. Ueber einen Mittelwerthsatz.

Sauppe legt einen Aufsatz von Ignazio Guidi in Rom, Korrespondenten der Gesellschaft, vor: Traduzione dal Copto.

Am 2. Februar. De Lagarde meldet Anlagen zu seiner Abhandlung vom 3. November v. J. an.

Ehlers legt einen Aufsatz des Herrn Dr. Hamann vor: Vorläufige Mittheilungen zur Morphologie und Ontogenie der Echinorhynchen.

Schwarz legt vor: 1. von Herrn Prof. Brill in Tübingen, Korrespondenten d. G., Ueber die Discriminante von Resultanten. 2. von Herrn Study in Marburg, Ueber Systeme von komplexen Zahlen.

Voigt legt eine Mittheilung von Herrn Prof. Weber in Marburg, Korrespondenten d. G., vor, Ueber stationäre Strömung der Elektricität in Platten.

Meyer, Ueber Ringschließung unter Absperrung einer Nitrogruppe aus dem Benzolkern.

Am 2. März. Meyer legt eine Mittheilung von Dr. **Auwers** und sich vor: Ueber zwei isomere Benzilmaxime.

Merkel legt eine Mittheilung von Herrn Prof. Dr. **Marmé** vor: Ueber Alkaloide der Betelnuß.

Riecke kündigt eine Mittheilung Ueber die Spektren einiger Elemente an.

Klein legt 1. die Mittheilung des Herrn Professor Schröter in Breslau, Korrespondenten d. G., vor: Ueber die Bildungsweise und geometrische Konstruktion der Konfigurationen 10 y. 2. einen Aufsatz von Herrn Professor G. E. Müller hier: die Theorie der Muskelkontraktion. 3. eine eigene Arbeit: Zur Theorie der Abelschen Funktionen.

Meyer, von Herrn Auwers und ihm selbst: Ueber das dritte Benzildioxim.

Am 4. Mai. De Lagarde theilt „Kleinigkeiten" mit:

a. se non e vero, e ben trovato.
b. Giordano Brunos Wispurc.
c. die Heimat der zahmen Kastanie und des Oelbaums.
d. Iosephs ägyptischer Titel.
e. Sura.

Ferner übergiebt er eine Abhandlung des Herrn Professor Hoffmann in Kiel, Korrespondenten d. G., Ueber einige phönikische Inschriften. (Erscheint im 36. Bande.)

Riecke legt eine Mittheilung von Herrn W. Hallwachs in Darmstadt vor: Ueber den Zusammenhang des Elektricitätsverlustes durch Beleuchtung mit der Lichtabsorption.

Klein legt eine Mittheilung von Herrn Dr. Schönfliess vor: Ueber regelmäßige Konfigurationen n_3 auf der allgemeinen Curve dritter Ordnung.

Am 1. Juni. De Lagarde, Maria Magdalena.

Kielhorn trägt eine Mittheilung vor Ueber das Verhältniß der indischen Aeren unter einander.

Klein legt vor 1. eine eigene Arbeit Zur Theorie der Abelschen Funktionen. II. 2. im Anschluß daran die Arbeit von Herrn Dr. Wiltheiß in Halle: Die partiellen Differentialgleichungen der Abelschen Thetafunktionen dreier Argumente. 3. von Herrn Dr. Maschke in Berlin: Ueber eine merkwürdige Konfiguration gerader Linien im Raume.

Berthold legt eine Mittheilung vor von Herrn Prof. Vöchting in Tübingen, Korrespondenten d. G., Ueber Transplantation im Pflanzenkörper.

Am 6. Juli. Riecke legt eine Arbeit von Herrn E. Cohn vor: Die Absorption elektrischer Schwingungen in Elektrolyten.

Klein legt vor 1. von Herrn E. Pascal Zur Theorie der ungeraden Abelschen Sigmafunktionen dreier Argumente. 2. von Herrn Dr. David Hilbert in Königsberg: Zur Theorie der algebraischen Gebilde. III.

Am 3. August. Merkel legt eine Arbeit von Herrn Maas vor Ueber die beim Menschen vorkommenden körnigen Pigmente.

Voigt legt vor: G. Baumgarten und W. Voigt Bestimmung der Elektricitätskonstanten einiger dichter Mineralien.

Klein legt von Herrn Wilhelm Wirtinger vor Ueber das Analogon der Kummer'schen Fläche für $p = 3$.

Am 3. November. Liebisch kündigt eine kurze Note an Ueber die Thermoelektricität der Krystalle.

Kielhorn legt Tafeln für die Berechnung der Jupiterjahre in indischen Inschriften vor. (Wird im 36. Bd. der Abhandlungen gedruckt.)

Eine vorläufige Mittheilung von Herrn Dr. Schumann über Kontrasterscheinungen in Folge von Einstellung wird als Arbeit aus dem Philosophischen Seminar vorgelegt und aufgenommen.

Diese Mittheilungen sind, wenn nichts besonders bemerkt ist, in den bisher erschienenen 20 Nummern der Nachrichten gedruckt, die 542 Seiten enthalten. Von den Abhandlungen ist der 35. Band erschienen.

Von andern auf die Verwaltung bezüglichen Gegenständen, über die in unseren Sitzungen verhandelt wurde, möge Folgendes erwähnt werden.

Die Gesellschaft beschloß Herrn Hanssen zu seinem 80. Geburtstag, dem 31. Mai, ihre herzlichen Glückwünsche auszusprechen, was durch den Direktor und Sekretär ausgeführt wurde.

Mit der Biological Society in Liverpool und dem Research Laboratory of the Royal college of Physicians in Edinburgh wurde auf den Wunsch dieser Gesellschaften ein Austausch der erscheinenden Druckschriften (unsererseits Nachrichten) beschlossen.

Den Olbersschen Erben in Bremen, welche eine Sammlung der Werke des großen Astronomen veranstalten, wird auf ihren Wunsch der Briefwechsel von Olbers und Gauß, der sich in der Gaußbibliothek befindet, zur Benutzung mitgetheilt. Herr Kollege Schering übernimmt das Nöthige zu besorgen.

Ferner wurde über Umfang und Inhalt der Nachrichten an das Kön. Kuratorium der Universität nach Aufforderung desselben ausführlich berichtet.

In der Sitzung am 16. November wurden neue Wahlen vorgenommen.

Für die Preisbewerbung im J. 1889 hatte die Gesellschaft im J. 1886 als Aufgabe gestellt eine Uebersicht über die arabische Literatur von ihren Anfängen bis zu der Zeit, in der die Türken Aegypten eroberten, zu geben. Obgleich sie noch im J. 1889 Mittheilung über eine wesentliche Erleichterung der Aufgabe machen konnte (Nachrichten S. 23 f.), ist doch eine Bewerbung nicht erfolgt.

Für 1890 lautet die Aufgabe der Physikalischen Klasse:

Es ist allgemein bekannt und anerkannt, daß dichte oder krystallinische Kalke, zumal des Mittel-Devon, allerlei Umwandlungen erlitten haben, sei es durch Veränderung ihrer Structur, sei es durch Stoffaustausch u. s. w. Die mechanischen und chemischen Vorgänge, welche hierbei mitwirken, sind jedoch durchaus nicht genügend bekannt. Es wird daher gewünscht, daß diese Umwandlungen mit Hülfe chemischer und mikroskopischer Untersuchungen verfolgt und erklärt werden möchten.

Die Aufgabe für 1891 lautet nach dem Vorschlag der Mathematischen Klasse:

Die Aufgabe der conformen Abbildung eines ebenen Bereiches auf ein Stück einer krummen Fläche, deren Krümmungsmaß überall den constanten Werth k besitzt, hängt zusammen mit der Aufgabe, die partielle Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2k \cdot e^u$$

vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen gemäß zu integriren.

Für diese Aufgabe kommen zunächst die von Riemann in seiner Theorie der Abelschen Functionen angegebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen in Betracht.

Die Königliche Gesellschaft wünscht die Frage, ob es möglich ist, die angegebene partielle Differentialgleichung für einen gegebenen Bereich unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen der angegebenen Art zu integriren, vorausgesetzt, daß der Konstanten k negative Werthe beigelegt werden, vollständig beantwortet zu sehen.

Insbesondere wünscht die Königliche Gesellschaft den Fall *der angeführten Aufgabe behandelt zu sehen, in welchem der betrachtete ebene Bereich eine geschlossene mehrfach zusammenhängende Riemannsche Fläche ist, während die Function u keine anderen als logarithmische Unstetigkeiten annehmen soll.*

Die Aufgabe der Historisch-Philologischen Klasse für 1892 wird in nächster Zeit bekannt gemacht werden.

Die zur Bewerbung um einen der Preise bestimmten Arbeiten müssen, mit einem Spruch versehn, vor Ablauf des Septembers des bestimmten Jahres an die Kön. Gesellschaft der Wissenschaften portofrei eingesandt werden und von einem versiegelten Zettel begleitet sein, welcher außen den Spruch trägt, der die Arbeit bezeichnet, und innen Namen und Wohnort des Verfassers angiebt.

Die von der Wedekindschen Preisstiftung für deutsche Geschichte zur Lösung in dem am 14. März 1886 begonnenen fünften Verwaltungszeitraum gestellten Aufgaben sind in den Nachrichten 1887 S. 69 f. bekannt gemacht, dann 1888 S. 134 ff. und 1889 S. 403 ff. wiederholt worden. Außerordentlicher Weise ist aus den mit Beginn des Verwaltungszeitraums zu freier Verfügung gekommenen Geldern 1) an Herrn Dr. Löwenfeld in Berlin für seine Bemühungen um die neue Ausgabe der Jafféschen Regesta pontificum romanorum ein Ehrenpreis von 900 Mk. gegeben und sind 2) Herrn Professor Kluckhohn für eine Aufsuchung und Sammlung von Akten zu einer Geschichte des Bauernkrieges in Thüringen, Sachsen und Hessen 3000 Mk. bewilligt worden. Auch sind die Arbeiten zur endlichen Herausgabe der Chronik Hermann Korners glücklich in Gang gebracht.

Das Direktorium der Gesellschaft ist mit dem 1. Oktober von Herrn Wüstenfeld an Herrn Ehlers übergegangen.

Die Gesellschaft hat im Laufe des J. 1889 durch den Tod verloren

I. die Ehrenmitglieder

Michele Amari in Rom, am 18. Juli

und Freiherrn F. H. A. von Wangenheim-Waake, am 29. Oktober;

II. die Auswärtigen Mitglieder

1. der Physikalischen Klasse

Ernst Heinrich Karl von Dechen in Bonn, am 16. Februar,

Michel Eugène Chevreul in Paris, am 9. April,
F. C. Donders in Utrecht, am 24. April,
Anton Geuther in Jena, am 25. August;

2. der Historisch-philologischen Klasse
William Wright in Cambridge, am 22. Mai,
Julius Weizsäcker in Berlin, am 3. September.

III. die Korrespondenten der Historisch-philologischen Klasse
Karl Bötticher in Berlin, am 21. Juni,
Wilhelm Nassau-Lees in London, am 9. März,
Jean de Witte in Paris, am 30. Juli.

Außerdem schied aus der Zahl der Ordentlichen Mitglieder der Physikalischen Klasse
Victor Meyer, da er mit dem Herbst an die Universität Heidelberg übergieng,
und aus der Zahl der Assessoren der Hist.-philol. Klasse
August Fick, der zu Ostern einem Rufe an die Universität Breslau folgte.

Neu gewählt endlich wurden am 16. November:

I. Nach dem Antrag der Physikalischen Klasse
1. zum Ordentlichen Mitglied
Herr Albert Peter, ordentlicher Professor der Botanik;
2. zu Auswärtigen Mitgliedern
Geh. Hofrath R. Leuckart, Prof. in Leipzig,
Geh. Rath Ernst von Brücke, Prof. in Wien,
Geh. Oberbergrath Ernst H. Beyrich, Prof. in Berlin,
Geh. Reg. Rath Victor Meyer, Prof. in Heidelberg;
3. zu Korrespondenten
Karl Kupffer, Professor in München,
Justus Rath, Professor in Berlin,
Archibald Geikie in Londen,
Otto Bütschli, Prof. in Heidelberg,
E. W. Benecke, Professor in Straßburg i/E.;

II. nach dem Antrag der Mathematischen Klasse zum Korrespondenten
Professor Gibbs am Yale College in New-Haven;

III. nach dem Antrag der Historisch-philologischen Klasse
1. zu Auswärtigen Mitgliedern
Gaston Paris, Membre de l'Institut, zu Paris,
Julius Ficker, Professor zu Innsbruck;

2. zu Korrespondenten

Arthur Breusing, Direktor der Seemanns-Schule in Bremen,

Konstantin Hoehlbaum, Stadtarchivar in Köln,

Karl Koppmann, Stadtarchivar in Rostock,

und

R. Pischel, Professor in Halle a/S.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September und Oktober 1889.

(Fortsetzung.)

Tijdskrift voor indische Taal-, Land- en Volkenkunde. Deel XXXIII. Aflevr. 1. Batavia 1889.

Flora Batava. 285 en 286e Aflevering. Leiden.

Archives du Musée Teyler. Série II. Vol. III. 3ieme partie. Haarlem 1889.

Académie Royale de Belgique:

Bulletin année 59. 3. série, tome 18. N. 7, 8.

Introduction au tome VII de la table chronologique des chartes et diplômes imprimés concernant l'histoire de la Belgique. 1888.

Mémoires de l'Academie B. Tome XLVII. 1889.

Memoires couronnés et mémoires des savants étrangers. Tome XLIX. 1889. in 4°.

Memoires couronnés et autres mémoires. Collection in 8°. T. XL, 1887, T. XLI, 1888, T. XLII, 1889.

Collection de Chroniques Belges inedites:

a. Relations politiques des Pays-Bas et de l'Angleterre sous Philippe II publ. p. Le Baron Kervyn de Lettenhove. Vol. VI, VII. 1888.

b. Histoire des troubles des Pays-Bas publ. p. Charles Piot. Tome II. 1889.

c. Cartulaire des Comtes de Hainaut publ. p. Léop. Devillers. Tome IV. 1889. Bruxelles.

Annales de la société géologique de Belgique. Tome XIV. 2e livr. Jul. 1889. Tome XVI 1. livr. Jul. 1889. Liege.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania 1888, N. 1—13 en Oversigt over V. S. moder i 1888. Christiania.

Mammuthjaeger-Stationen ved Predmost i Mähren af Jap. Steenstrup. Kjobenhavn 1889.

Sculptures et inscriptions de Palmyre à la Glyptotheque de Ny Carlsberg, par Simonsen. Copenhague 1889.

Materialien zur Mineralogie Rußlands v. N. Korschakow. Band X. Bogen 7—14. Seite 97-224. St. Petersburg 1889.

Nouveaux mémoires de la société imp. des naturalistes de Moscou. Tome XV. livr. 6. Moscou 1889.

Mémoires de la société des naturalistes de la Nouvelle Russie. T. XIV. P. 1. Odessa 1889.

Tomo IX v. **Записки математилескачо отдыленія Ковороссінскаго Обиуества Естествоиспыгателей.** Odessa 1889.
Översigt af Finska Vetenskaps-Societetens forhandlingar XXX. 1887—1888.
Acta societatis-scientificae fennicae. Tom. XVI.
Atti della R. Accademia dei Lincei. 1889. Rendiconti. Vol. V, fasc. 7—12. Semestre 1. Vol. V, fasc. 1. 2. 2. Semestre. Roma 1889.
Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze mathematiche e fisiche. Tomo XX. Indici degli articoli e dei nomi. Roma 1887.
Bollettino della società italiana dei Microscopisti. Anno 1. Vol. 1, fasc. 1—2. Acireale 1889.
Annali della R. senola normale superiore di Pisa, filosofia e filologia. Vol. VI. Scienze fisiche e matematiche. Vol. V. Pisa 1888/89.
Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XXIV. Disp. 13, 14, 15. 1888—89. Torino.
Memorie della R. Accad. delle scienze di Torino. Serie seconda. Tomo XXXIX. Torino 1889.
Rendiconti del circolo matematico di Palermo. Fasc. IV e V. Tomo III. Anno 1889. Palermo. Roma. Torino.
Società reale di Napoli:
Rendiconto, anno 27. Gennaio a Dic. 1888.
Atti della R. accad. di scienze morali e politiche. Vol. 23. 1889.
Catalogo dei minerali e delle rocce Vesuviane per Areangelo Scacchi. Estr. dal vol. 1, della 4. série degli Atti accademici.
Sulle ossa fossili trovate nella Campania. Aus: Atti della R. Accad. delle scienze, fis. e mat. Vol. III, serie 2. N. 3. p. A. Scacchi. Napoli 1889.
Il Vulcanetto di Puccianello p. A. Scacchi.
Memorie della R. Accademia di scienze lettere ed arti in Modena. Serie II. Vol. VI. Modena 1888.
A Guglielmo II. Imp. d. Germania, versi di Anton. Maria Lombardi.
Bollettino delle pubblicazioni italiane della biblioteca nazionale centrale di Firenze 1889. N. 86, 87, 88, 89, 90, 91.
Bollettino delle opere straniere della bibl. naz. centr. Vittorio Emanuele di Roma. Vol. 3. 1888, indice alfabetico, e Vol. IV. N. 3. 1889.
Memorias de la R. Academia de ciencias exactas, fisicas y naturales de Madrid. Tomo XIII. Parte II et III. Madrid 1888/89.
Revista de los progressos de las ciencias exactas, fisicas y naturales. Tomo 22, N. 5, 6, 7. 1888 y 89.
Historia do Infante D. Duarte Irmão de el-Rei D. per José Ramos-Coelho. Joño IV. Tomo I. Lisboa 1889.
Les nostačees heterocystées du systema algarum p. Ed. Bornet (extr. du Bulletin de la société bot. de Fr. tome XXXVI seance de 8 mars 1889).
Bulletin de la société mathematique de France. Tome XVII. N. 4. Paris.
American philosophical society.
Proceedings: Vol. XXVI. N. 129. Philadelphia.
Subject Register of papers published etc.
Supplementary register of writhen communications.
Report of the committee appointed January 1888.
List of deficiencies in the library.
National Academy of sciences. Vol. IV part 1 and third memoir, fourth memoir aus Vol. IV. Washington 1888.
The geological and natural history survey of Minnesota 16. annual report for 1887.
American journal of mathematics. Vol. XI. N. 3.
Johns Hopkins University Circulars. Vol. VIII. N. 69—74. Baltimore.
Johns Hopkins University studies in histor. and polit. Science. Seventh series II—III, IV, V—VI. Febr.—June 1889.
Memoirs of the Museum of comparative zoology at Harvard college. Vol. XIV. N. 1. Part I. II.
Bulletin of the Mus. of compar. zoology at Harvard college. Vol. XVII. N. 4.
United states coast and geodetic survey. Bulletin N. 10. N. 11. N. 12.

Annals of the New York Academy of sciences. Vol. 1. March 1880. N. 11—12.
Proceedings of the Davenport Academy. Vol. V. Part I. 1884—1889. Davenport Jowa.
25 annal report of the Alumnassociation of the Philadelphia College of Pharmacy for 1888—1889. Philadelphia.
Bulletin of the American geographical society. Vol. XXI. N. 3. 1889. New York.
Smithsonian report. 1886. Part 1.
Transactions of Kansas Academy of science. Vol. X. 1885—86. Topeka.
Report for 1888—89 of the observatory of Yale University.
Boletin de la Academia national de Ciencias en Córdoba (Republica Argentina) Junio 1888. Tomo XI. Entr. 3a. Buenos Aires.
Anales de la sociedad cientifica Argentina. 1 Avril de 1889. Entr. IV. Tomo XXVII.
Mayo de 1889. „ V. „ XXVII.
Verhandlungen des deutschen wissensch. Vereins zu Santiago. Band II. Heft 1. Santiago 1889.
The journal of the college of science Imp. University Japan. Vol. III. Part 1, 2. Tokio 1889.
Mittheilungen der deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio. Heft 42. Band V. Seite 43—82. Yokohama.

Nachträge.

Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg. N. Folge. Band 4. Heft 3.
Almanach 1889.
Évkönyv. XVII. 6.
Értesitö. XXII. évf. (1888) 2—6. XXIII. (1889.) 1.
Emlékbeszédek. V. 1—8.
Nyelvtudományi Értekezések. XIV. 8—10.
Nyelyvtudományi közlemények. XXI. 1. 2.
Történettudományi Értekezések. XIII. 9—12. XIV. 1—4.
Társadalmi Értekezések. IX. 8—10. X. 1. 2. 4.
Bölcsészeti Értekezések. III. 1. sz.
Dr. Pistóry Mór. A nemzetgazdaságtan haladása és iránya az utolsó tizenöt év alatt.
Rentmeister Antal. Lex falcidia és quarta falcidia.
Dr. Acsády Ignácz. Magyarország pénzügyei I. Ferdinand uralkodása alatt.
Monumenta Hungariae Historica. Sect. III. Monum. Comitiorum Transylvaniae T. XIII.
I.sö Rákóczy György és a porta.
Archaeologiai Értesitö. Uj folyam. VIII. 3—5. IX. 1. 2.
Természettudományi Értekezések. XVII. 6. XVIII. 1—5.
Mathematikai és természettudományi Értesítö. VI. $^2/_3$—$^8/_9$. VII. 1. $^2/_3$.
Dr. Fröhlich Izidor. Az electrodynamometer általános elmélete.
Mathematikai és természettudományi közlemények. XXIII 1—3.
Ungarische Revue. 1888. 7—10. 1889. 1—3. Heft.
Math. und Naturwissenschaftliche Berichte. VI. Bd.

November 1889.

Sitzungsberichte d. K. Pr. Akademie d. W. zu Berlin. XXXIX, XL, XLI, XLII. XLIII, XLIV, XLV, XLVI.
G. Lejeune Dirichlet's Werke. Band I. Berlin 1889.
Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Band VI. Potsdam 1889.
Gesellsch. d. W. zu München.
  a. Abhandlungen der historischen Classe. Band 18. Abth. 3.
  b. Abhandlungen d. philosophisch-philologischen Classe. Band 18. Abth. 2.
  c. Festrede am 27. Dez. 1888. Ueber die historische Methode auf dem Gebiet des deutschen Civilproceßrechtes v. J. W. v. Planck.
  d. Festrede am 28. März 1889. G. S. Ohm's wissenschaftliche Leistungen v. E. Lommel.

e. Gedächtnißrede auf K. v. Prantl. Von W. v. Christ. München 1889.
f. Sitzungsberichte der math.-physikalischen Classe. 1889. Heft II.
g. Sitzungsberichte d. philosophisch - philologischen u. historischen Classe. 1889. Bd. I. Heft III und Band II. Heft I.

Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Stadt Meißen d. 2. Bandes. 3. Heft. Meißen 1889.

Bericht der Wetterauischen Gesellschaft für die gesammte Naturkunde zu Hanau v. 1. April 1887—31. März 1889. Hanau 1889.

a. Zeitschrift der deutschen Morgenländischen Gesellschaft. Band 43. Heft 3. Leipzig 1889.
b. Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes. Bd. IX. N. 3. Leipzig 1889.

Leopoldina. Heft XXV. N. 19—20. Halle a/S.

Mitteilungen des Vereins für Geschichte und Landeskunde von Osnabrück. Band 14. 1889. Osnabrück.

Nature. Vol. 40. 1044. Vol. 41. 1045—1048.

a. Transactions of the Cambridge philosophical society. Vol. XIV. Part. IV. Cambridge a. London.
b. Proceedings of the Cambridge philos. Soc. Vol. VI. Part VI.

Journal of the R. microscopical society. 1889. Part V. London a. Edinburgh.

Monthly notices of the R. astronomical society. Vol. XLIX. N. 9.

Proceedings of the sc. meetings of the Zoological society of London. 1889. Part. III. Mai and June. 1889. London.

The Linnean society.
a. Transactions. 2. serie. Zoology. Vol. IV. Part 3. Vol. V. Part 1. 2. 3.
b. Title page, contents and Index to 2nd. ser. Botany. Vol. II. P. 16.
c. Title page, contents and Index to 2nd. ser. Zoology. Vol. II. P. 18.
d. The journal. Zoology. Vol. XX. N. 119. 120. 121. Vol. XXI. N. 132. Vol. XXII. N. 140.
e. The journal. Botany. Vol. XXIII. N. 156—157, Vol. XXIV N. 163, Vol. XXIV N. 164, Vol. XXV N. 165—169, N. 170, Vol. XXVI N. 173.
f. Index to the journal. Botany. 1838—86.
g. List of the society. Session 1888—89. London.

Transactions and report of the R. society of South Australia. Vol. XI for 1887—88. Adelaide 1889.

Contributions to Canadian Palaeontology. Vol. I. Part II. Montreal 1889.

Mittheilungen des historischen Vereins für Steiermark. Heft XXXVII. Graz 1889.

O Theorii forem Bilinearných. Ed. Weyr. Prag 1889.

Ungarische Revue. Jahrg. 9. 1889. VIII—IX. Heft. Budapest.

Jahrbücher d. K. K. Centralanstalt für Meteorologie u. Erdmagnetismus. Jahrg. 1887. Neue Folge. Band XXIV. Wien 1888.

Monographia Chrysididarum, auctore A. Mocsary. Budapest 1889.

13ter Verwaltungs-Bericht der Akademischen Lesehalle in Czernowitz. 1889.

Meteorologische Zeitschrift. Jahrg. 6. 1889. Heft vom 11. November. Wien.

Vierteljahrschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jhrg. 34. Hft. 1, 2. Zürich 1889.

Mémoires de l'Academie Imp. de St. Petersbourg. Tome XXXVI. N. 17 et dernier. Tome XXXVII. No. 1.

Atti della R. Accademia dei Lincei. 1889. Serie quarta. Rendiconti. Vol. V. fasc. 3, 4.

Memorie del R. Istituto Lombardo. Classe di lettere e science morali e politiche. Vol. XV. VI della serie III. Fasc. II. Milano, Napoli.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von No. 21.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions - Verlag der *Dieterich'schen Verlags - Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

13
3094 4

BINDING SECT. MAY 2 8 1971

AS
182
G834
1889

Akademie der Wissenschaften, Göttingen
Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY