Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

Aus dem Jahre 1890.

Nro. 1—16.

Göttingen,
Dieterichsche Verlags-Buchhandlung.
1890.

Man bittet die Verzeichnisse der Accessionen zugleich als Empfangsanzeigen für die der Königl. Societät übersandten Werke betrachten zu wollen.

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und

der Georg-Augusts-Universität

aus dem Jahre 1890.

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

22. Januar. | № 1. | 1890.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 11. Januar 1890.

de Lagarde, Nachträge zu früheren Mittheilungen.
Riecke legt eine Arbeit des Herrn B. Galitzine in Straßburg i/E. vor: Ueber das Daltonsche Gesetz.
Bechtel legt Kleine Aufsätze, III., vor.

Nachträge zu früheren Mittheilungen

von

Paul de Lagarde.

Ignoranti portum nullus suus ventus est

citiert Giordano Bruno in den italienischen Werken 715$_{36}$ meines Abdruckes. Ich habe 791 meiner Ausgabe gebeten, mir die Stelle nachzuweisen. Sie steht in einem von mir viel und gerne gelesenen, für die französischen Exercitien meiner Primaner einst stark benutzten Autor: am 2 November 1889 brachte mir Ulrich von Wilamowitz aus des Philosophen Seneca Briefen 71$_{3}$ Ignoranti quem portum petat, nullus suus ventus est. Die Fassung Brunos däucht mich genauer als die Senecas.

ܢܘܣܡܐ

der Ueberlieferung habe ich in meinem Abdrucke der syrischen Uebersetzung der deuterokanonischen Bücher in ܢܝܣܡܐ verwandelt, da ܥܠܝܡܐ nusquam occurrit nisi ubi νεανίσκος in graeco est. Mein nusquam des Jahres 1861 ermäßigt sich, seit man durch ACeriani (PSmith thesaurus 1607) weiß, daß ܝܠܘܡܐ ab und an auch παιδάριον wiedergibt.

1875 schrieb ThNoeldeke in seiner mandäischen Grammatik 114 zum mandäischen יאנוק an den Rand

Im Syr. ist ܝܠܐ nur im strengen Sinn θηλάζων .... doch vergleiche das wunderliche, halbgriechische ܥܠܝܡܐ, das in den Apocryphen des A. T. und in der hexaplarischen Uebersetzung viel zu häufig ist, als daß man es überall mit Lagarde durch ܥܠܝܡܐ νεανίσκος ersetzen dürfte, durch welches es allerdings beeinflußt ist.

Seit ich wieder mehr griechische Handschriften verglichen habe, weiß ich Bescheid. Diese Handschriften schreiben noch im zwölften Jahrhunderte νεἀνίσκος (zum Beispiele mein m, der Arundelianus, von mir im August 1874 zum Besten meines Lucian verglichen): das heißt, die Griechen sahen νεανίσκος als eine Zusammensetzung — νέος ἀνίσκος — an: die Syrer begnügten sich mit dem ἀνίσκος allein, das sie allein doch nie gelesen hatten. Denn — und das ist das Wichtige bei den kleinen Funde — der Spiritus lenis, also das א, konnte nur in der Mitte zwischen zwei Vokalen y werden. ܝܠܘܡܐ ist die andere Hälfte des νε-ἀνίσκος.

Ueber א = ܐ = ي siehe meine armenischen Studien (1877) 2 vor der Mitte, meine Uebersicht 42 r.

Tertullianea.

Dem verstorbenen, mir persönlich unbekannt gebliebenen Herman Roensch in Lobenstein habe ich ein viertel Jahrhundert hindurch so viele Dienste geleistet, wie irgend möglich. Einer dieser Dienste war, daß ich sein Buch „das neue Testament Tertullians“ in GGA 1871 970 ff. der Aufmerksamkeit der ersten Fakultät empfahl. Bei dieser Gelegenheit, und dann abermals 1878, NGGW 1878 15 ff., als eine klägliche Ausgabe einer Schrift Tertullians Veranlassung gegeben hatte, meine Tertullianstudien hervorzusuchen, habe ich eine Reihe Verderbnisse im Texte Tertullians zu beseitigen versucht. Ich habe was ich geschrieben, damals dem jetzt verstorbenen AReifferscheid überschickt, und unglaublicher Weise sind in der von Reifferscheid begonnenen, von den Herren GWissowa und WvHartel zu Ende geführten Ausgabe des Tertullian ganzer zwei meiner Vorschläge berücksichtigt worden, der Eine allerdings nur halb. Ich bin so unbescheiden, mich mit dieser Rücksichtnahme nicht befriedigt zu halten, und lege daher, obwohl in meinen Symmicta **1** 99 ff. **2** 2 ff. das 1871 und 1878 Veröffentlichte wiederholt worden ist, meine Vorschläge noch einmal vor.

Die von mir S[ymmicta] **2** 3 gegebene Disposition des Buches de spectaculis empfehle ich für die zweite Ausgabe des Wiener Tertullian summarisch zur Berücksichtigung.

Wiener Tertullian 2_{5} Iam vero nemo est est qui non hoc quoque praetendat. Ich S $\mathbf{2}_{2}$ iam vero non nemo est qui hoc quoque praetendat.

W 2_{21} optatam: Ich S $\mathbf{2}_{2}$ tributam: die Hdss. tantam.

W 2_{25} deum norunt nisi naturali iure. Ich S **1** 100_{39} deum norunt, nec norunt nisi naturali iure. Vergleiche S **1** 101_{14}.

W 3_{3} minus: Ich S $\mathbf{2}_{3}$ eminus.

W 4_{1} vitam mit folgendem Comma. Ich S **1** 100_{42} mit folgendem Punkte. Freilich beseitigte W 4_{2} das Fragezeichen.

W 5_{21} cum quid aliud [wo Herr von Hartel taliter, Herr Wissowa generaliter, die Hdss. aliter], etiam specialiter interpretari capit. Das durch den Zusammenhang verlangte generaliter habe ich schon 1878 hergestellt: S $\mathbf{2}_{3}$.

W 6_{19} habe ich in Folge der von mir mitgetheilten Disposition erkannt, daß ein Satz verloren gegangen ist. In der Hds. A ist eine Lücke. Die nothwendigen Punkte fehlen trotz S $\mathbf{2}_{3}$ noch immer.

W 8_{9} superstitionis. Ich S **1** 100_{45} superstitiones. Dafür läßt W das durch B gegen den nachlässigen Agobardinus bezeugte originis fort.

W 8_{16} perinde als Conjectur des Herrn Wissowa für proinde. S $\mathbf{2}_{2}$ steht das seit zwölf Jahren. Natürlich gehört das jetzt in den Text gesetzte, im Agobardinus fehlende „suis ut diis“ nicht in den Text.

W 9_{22} Sessias. S **1** 101_{1} Sesias.

W 17_{19} separamur. S **1** 101_{5} separemur.

W 18_{4} figura aus Hds. B, wo gula A. S **2** 4_{7} ligula = lingula.

W 18_{6} setze ich S **2** 4 hinter maledicta das Zeichen der Lücke: es fehlt der bei Tertullian, dessen Styl ich einigermaßen kenne, vom Schriftsteller selbst geschriebene, den sineSätzen der Parallelglieder entsprechende sineSatz.

W 19_{10} erubescant. Ich S **2** 4 erubescunt, wie die Hds. B sogar wirklich liest.

W 24_{3} curuatur Reifferscheid, curatur B, cu....ur A, utatur Ursinus, calceatur EKlußmann. Mein gütiger Weise angeführtes scurratur S **1** 101_{8} halte ich noch nach achtzehn Jahren für das allein richtige: das dem Worte voraufgehende Wort schließt mit s.

W 25_{21} domino. Muß (S **1** 101_{8}) ein Eigenname sein.

W 26_{23} perinde für das überlieferte proinde. Ich S **2** 4_{16} schon 1878 perinde.

W 32_{24} phrygio detexat. Die Hds. phrygrio testexat. Ich S **1** 101_{9} phrygiotes texat.

W 33_{22} ist aus den nicht genannten S **1** 101_{10} das Citat Enoch 99_{6} [des aethiopischen Textes] an den Rand gekommen, und irgend ein Gott, aber ein dummer und fahriger Gott, hat dem Herrn Reifferscheid ermöglicht, des Herrn Dillmann „Henoch 72“ daneben zu citieren. Schade nur, daß et rursus, welches Anfang des Citats, nicht Einführung desselben, ist, noch immer ungesperrt vor dem Colon steht. Gehörte et rursus dem Tertullian an, so müßte doch vor dem aus Enoch genommenen Citate ein erstes anderes Citat stehn.

W 34_{6} mit einem Kreuze davor ubi aeque Dauid et factores. Seit 1871 stand S **1** 101_{12} das Richtige: ubi aeque damnat Dauit et factores. Die Hds. A soll nach den alten Vergleichungen (die Wiener schweigen) den Eigennamen davit schreiben, vor dem damnat ausgefallen ist.

Ich schließe diese Liste mit der erneueten Versicherung meines Dankes für die freundliche Aufnahme, welche meine Arbeiten aller Orten finden.

Noch einmal die Schatzhöhle.

Als ich — aus den in der Anzeige selbst angegebenen Gründen — des Herrn Bezold Ausgabe der ܡܥܪܬ ܓܙܐ zu besprechen übernahm, und selbst noch, als ich wider meinen Wunsch das Buch wirklich besprach, hatte ich die 1877 von mir gehegte Absicht, die interessante Urkunde selbst zu bearbeiten, aufgegeben. Jetzt habe ich meinen alten Plan wieder aufgenommen, und halte es für nützlich, aus meinen Arbeiten wenigstens Ein Ergebnis schon jetzt mitzutheilen: es ist mir auch darum erwünscht dies zu thun, weil ich in meiner eigenen Ausgabe der ܡܥܪܬ ܓܙܐ den Namen des Herrn Bezold gar nicht erwähnen möchte.

Herr Bezold hat die pariser Handschrift Arab. 54 benutzt: wie dem Herrn Bezold für September bis December 1883 nach München, so ist mir, nur auf eine kürzere Frist (zwei Monate) der Codex nach Göttingen geschickt worden. Die Untersuchung ergab Folgendes.

Cod. Parisin. Arab. 54 ist keine Handschrift der مغارة الكنوز, sondern, was der unter dem Namen de Slane laufende Catalog im § 76 auch angibt, ein Clementinum. Den Catalog besitze ich seit 1883 selbst: ich glaubte, als ich dem Herrn Minister aus Bezolds Buche die Handschrift bezeichnete, daß eine ganz andere Handschrift als die von Herrn Bezold beigezogene, mir zugehn werde. Ich bitte den, glücklicher Weise für mich behaltenen, Verdacht ab: die von dem Donauwörth-München-Londoner Gelehrten angegebene Signatur bezeichnet das Buch richtig, welches der Pariser Catalog ebenso, nur nach einer anderen Richtung hin, ungenügend beschrieben hat wie Herr Bezold.

Aber verhält sich die Sache, wie ich eben angegeben, so hatte Herr Bezold erstens die Pflicht, nicht Eine, sondern vier Pariser Handschriften der مغارة الكنوز zu benutzen, da die §§ 77 bis 79 jenes Katalogs darüber belehren, daß das in § 76 = Ancien fonds 54 beschriebene Werk noch in drei anderen Exemplaren in Paris vorhanden ist. Zweitens hatte Herr Bezold die Pflicht, seinen Lesern zu berichten, daß die مغارة الكنوز in jener Pariser Handschrift nicht als ein selbstständiges Buch, sondern als integrierender Theil der Apokalypse des Petrus enthalten ist, und zwar als integrierender Theil eines Buches, das in Frage und Antwort zwischen Clemens von Rom und Petrus verläuft. Herr Bezold, ein Schüler des verstorbenen Fleischer, hätte weiter aus Gersdorfs, wohl zu merken, eines mit allen (alten) Katalogen versehenen Oberbibliothekars, Ausgabe der Recognitiones Clementis ix ausheben müssen, was (ohne übrigens die drei anderen zu kennen) Fleischer von Einer der vier Handschriften der Apokalypse des Petrus schreibt:

> Codex ms. Parisinus, qui inter orientales num. 70. signatur, et inscribitur „Testamentum Christi domini ad Petrum et omnia mysteria quae ei revelavit, auctore S. Clemente Romano“ etc. XCI sectionibus haud pauca quidem continet, quae ex Recognitionibus excerpta esse videntur, sed confusa ea cum ineptiis variisque hallucinationibus ac permixta conquestionibus de iniuriis et malis, quibus affligebantur saeculo post Chr. natum decimo quinto Christiani in Oriente degentes a Muhamedanis.

Wo zu der Zeitbestimmung des Buches anzumerken sein wird, daß ein Werk, das schon 1176 [Archetypus des Codex 76] oder im XIIIme siècle [Codex 78] oder 1336 [Codex 76] vorhanden war, nur in dem Falle Thatsachen des funfzehnten Jahrhunderts schildern kann, daß sein Verfasser eine ganz einzige Begabung für Prophetie oder Politik besaß. Wer den Slanes Namen tragenden neuen Katalog einsieht, erfährt, daß 70 des ancien fonds jetzt 79 heißt.

Ich muß mich hier selbst anklagen, im Juli 1888 meine Wege nicht zu Ende gegangen zu sein. Der Pariser Katalog verweist in § 76 darauf, daß die Petrus-Apokalypse auch in der Bodleiana liege, worüber das gedruckte Verzeichnis **1** 2_{49} Auskunft ertheile. Hätte ich dies Citat 1888 recht erwogen, so würde ich auch — was ich hiermit nachhole — auf CTischendorfs 1866 erschienene Apocalypses apocryphae xx ff. verwiesen haben, woselbst der Inhalt des Oxforder Codex genau [was hier genau heißt] zu dem Inhalte des von mir jetzt ganz, wenn auch eilig, durchgelesenen Pariser Codex stimmend angegeben wird. Ich bin immer noch nicht mistrauisch genug: aber wenigstens Herrn Bezold gegenüber wird es mir, trotz der vielen berühmten Lehrer und Gönner desselben, nie wieder einfallen zu trauen. Herr Bezold hat auch von den zwei Oxforder Handschriften, die er benutzt hat (die andere ist nur eine moderne Abschrift der ersten) mit keiner Sylbe gesagt, daß nicht die مغارة الكنوز, sondern eine die مغارة الكنوز in sich enthaltende Apokalypse des Petrus in ihnen überliefert ist. Tischendorf citiert aaO. auch plures codices dieser arabischen Apocalypse des Petrus in Rom: sein Citat kann ich zur Zeit nicht nachschlagen. Aus Nicoll und Tischendorf ist dann weiter die Kenntnis davon zu gewinnen, was EGrabe und Luc d'Achéry aus einem Briefe des Bischofs von St. Jean d'Acre, Jacques de Vitry, mittheilen, in welchem dieser 1219 dem Papste Honorius dem Dritten meldet, daß Revelationes Petri a Clemente in unum volumus redactae ihm vorgelegt worden seien. Da nun die Pariser Handschriften 77 78 die Apokalypse des Petrus zu Nicosia „gefunden" sein lassen, liegt der Verdacht nahe, daß das Buch für die Geschichte der ersten Kreuzzüge von Belang sein werde. Ob diese Vermuthung sich bestätigen wird, kann man nur durch sorgfältiges Studium des Ganzen ermitteln, welches Studium anzustellen mir so gut wie gewis die Muße fehlen wird.

Steht die Sache so — Herr Bezold war verbunden, da Er die Handschriften doch in Händen gehabt hat, den Thatbestand uns mitzutheilen —, so dürfte *diese* مغارة الكنوز für die Kritik der ܡܥܪܬ ܓܙܐ nur mit großer Vorsicht zu benutzen sein: sie ist ja nicht, wie das die syrische Urschrift thut, als besonderes Buch da, sondern sie ist in ein Sammelwerk, die Offenbarung des Petrus, hineingearbeitet. Diejenigen ihrer Theile, welche über unseren syrischen Text überschießen, sind darauf hin zu prüfen, ob sie in den Plan der Apokalypse des Petrus passen: thun sie dies, so werden sie späteren Ursprungs sein. Und auch einzelne Ausdrücke des arabischen Buchs können dem Redactor verdankt werden.

Dabei hat Herr Bezold 1 ix von dem aethiopischen „Clementinum“ als einer Uebersetzung des „Cod. Vat. Arab. 39“, eben des Codex gesprochen, welchen er seiner Ausgabe des arabischen Textes mit zu Grunde legt. Statt „Clementinum“ zwischen Anführungszeichen zu setzen (was fast wie Hohn aussieht), hätte er über die aethiopische Gestalt des Buches lieber Mittheilungen machen sollen. Allein als das Wahrscheinliche gilt mir, daß wer sich orientieren will, alle von Herrn Bezold benutzten Handschriften selbst einsehen muß, daß also auch nach dieser Richtung betrachtet, das Werk des Günstlings der Akademien von München und Berlin werthlos ist.

Aber die Verdienste des Herrn Bezold sind noch nicht genügend geschildert. Er versteht noch über andere Dinge zu schweigen als über die so eben an das Licht gezogenen. Herr Bezold hebt seine „Ausgabe“ der مغارة الكنوز mit einigen Reihen Punkten an. Ich nahm 1888 diese Punkte als das Anzeichen dafür, daß eine unerhebliche Doxologie ungedruckt geblieben sei: die Art des Drucks fand ich geschmacklos, aber nicht unerlaubt. Jetzt weiß ich, daß Herr Bezold so vorsichtig gewesen, die Einleitung wegzulassen, weil in ihr der Plan der Apokalypse als solcher auseinandergesetzt wird. Herr Bezold hat also wissentlich ein wesentliches Hülfsmittel der Belehrung beseitigt.

نبتدى بعون الله وحسن توفيقه بكتب هذا الكتاب الذى هو احد الكتب التى لاقليمس السليح تلميذ سمعان الصفا المكتومة التى امر القديس اقليمس بسترها عن العوام ويدعا منها بكتاب المجال: وفيه حال الانساب واشياء من السرائر التى اوقف مخلصنا يسوع المسيح عليها سمعان ويعقوب تلميذيه. وما يكون من الامور فى اخر الزمان. وكيف يكون مجىء سيدنا المسيح الثانى من السماء الى العالم. وما يكون من الخطا وغير ذلك ❖ وهذا الكتاب هو السادس من كتب اقليمس المستورة المخزونة فى مدينة رومية منذ زمان الحواريين (بركة صلواتهم تكون معنا امين) ❖ قال اقليمس القديس انه لما طلع الهنا يسوع المسيح (له المجد) الى السماء. وتفرق التلاميذ فى اقطار الارض للبشارة واستدعاء الخليقة الى الايمان والصبغة بالمعمودية. اتخذوا تلاميذا انتخبوهم واختاروهم ليكونوا معهم وينصرفوا فى البلدان كتصرفهم بالايمان بالمسيح ❖ فلذلك اتخذنى انا سمعان الصفا لنفسه تلميذا. فامنت به وبمن ارسله حق الايمان. وايقنت انه رئيس التلاميذ الرسل. الذى اعطى مفاتيح السموات والارض. وبنيت عليه كنيسة الله الجامعة الرسولية التى لا تحلها ابواب الجحيم كما قال الاهنا يسوع المسيح فى الانجيل المقدس ❖ وبعد مدة طويلة اتخذ اخوى قسطس وقسطينا له ايضا تلميذين: وبعد عشرين سنة من اتخاذه اياى تلميذا. جمع بينى وبين والدى

ووالدتى المسماة مطروريا [so] ❖ واوقفنى على جميع السرائر التى اعطيها من يسوع
المسيح على طور زيتا ❖ وكان سائر الحواريين [يون° Hds.] فى ذلك الوقت وجميع
المومنين بالمسيح يلقون جهدا من الكفرة اليهود. لان اليهود كانت تقتل كل من
تهيا لها قتله من المومنين ❖ وكنت ومعلمى الفاضل سمعان قد دخلنا بعض
البلدان فلقينا عنتا شديدا من مناظرة اليهود والمسالة عن نسب مريم الطاهرة
اذ كانت مقالتهم فيها انها ليست من ولد يهودا. ليبطلوا بذلك مجىء سيدنا
المسيح الى العالم وتجسده منها وكانوا يكثرون الرشا من الاموال وغيرها لليونانيين
[نين° Hds.] والروم حتى يعاونونهم على هلاك المومنين وابطال امرهم ويمنعون
السليحين من قراءة التوراة. لئلا يقفون منها على حال الخليقة وكيف كانت فى
البدى ❖ ولما رايت ما كنا فيه من الشدة مع اليهود. طلبت الى معلمى ان
يعرفنى كيف كانت الخليقة فى الابتداء. وان يتمنى [?] على الاسباب. لانه قد كان
علم كل شىء من الرب يسوع المسيح ❖ وكنت خبيرا بلسان اليونانية وكتبهم.
عالما بسرائرهم. وقد اودعت ما وقفت عليه من اسرارهم كتابين مترجمين بالسابع
والثامن. واعلمت معلمى ما تداخلنى من الغيرة للسيدة مرثمريم واغتمامى
بتعيير اليهود اياى انى غير فهم بالتوراة وكثرة مسالتهم اياى عن خلق ابينا
ادم وما اسمعه باذنى من شتمهم للسيدة مرثمريم ام النور والافتراء عليها من غير
ان يتهيا حيلة ادفعهم بها عن شنيع قولهم ❖ فقلق المعلم لقلقى. وداخله
لما اخبرته به الغيرة فقال. انا ناسق عليك .. يا بنى .. كلما سالتنى عنه وموقفك
على الامور منذ ابتداء الخليقة ومعرفك نسب ام الرحمة مريم الطاهرة وصحته
وانها بغير شك من نسل يهودا بن يعقوب وسبطه. ومعلمك السرائر والسبب
الذى كان فى سقوط الشيطان الاركون من السماء ❖ اعلم .. يا بنى .. ان الرب
هو الابتداء وقبل الابتداء الذى هو غير محدود. المتعالى فوق العلا. المستوى
العلى ليس له اسفل ولا داخل ولا خارج الذى هو قبل القبل الجوهر القديم
الذى ليس له حد ولا يلحقه عقل ولا يدركه تمييز ولا صفة كان فوق اللون ومع
اللون واسفل من اللون الجوهر الخالق الضوء البهى الذى لا تلحقه الظلمة
النور الساكن فى النور الذى لا تلحقه الابصار. قبل الخلق كان وهو مكون
الاكوان الذى مجده منه وبه وبذاته. الخالق ما يسبحه لتعرف ربوبيته واقتداره.
صنع السماء والارض وخلق قبل ايقاع تفصيل الاشياء ملائكة يسبحونه عشر
طغمات جيشه اعنى بذلك عشرة مراتب. وكانت المرتبة العليا القريبة الى
كرسى الرب الله جل وعز القائمة للتسابيح مرتبة ساطانائل الذى هو الاركون وكانت
التسابيح ترتفع الى الله عز وجل من جميع الملائكة ❖

Die Hds. schwankt in dem Namen *'Ιούδα* zwischen د und ذ. In مرتمريم مرثمريم das entsprechende Schwanken.

Zufällig habe ich das Unglück, des vielbewunderten Herrn Keßler Mani 332 aufzuschlagen (dazu ARahlfs GGA 1889_{910}): wenn ich dieses Gelehrten Vermuthungen über das allerdings verderbte und von Flügel, Roediger und Müller nicht erkannte مرمريم

[Fihrist 327_{31}] bedenke, scheint mir nöthig die Trivialität herzuschreiben, daß مرثمريم des eben mitgetheilten Textes = ܡܪܬܐ ܡܪܝܡ das mit مرمريم gemeinte ist: *die Dame Maria*[1]).

Noch mehr. Im Pariser Codex finden sich auch in dem von Herrn Bezold veröffentlichten Theile Stellen, in welchen auf die von Herrn Bezold unterschlagene Einleitung dadurch Bezug genommen wird, daß des Petrus und des Clemens gedacht wird. Ich lege den Thatbestand vor.

P = pariser Codex 76 (alt 54),

B = zweiter Band des Herrn Bezold.

P $11^{1}{}_{20}$ وكان وقوفى يا بنى اقليمس على خبر ادم, auf والقدس B 43_{9} folgend. B 43^{r} „in P hier noch ein Zusatz: s. Anm. 223". Herr Bezold hätte 1888 nicht vergessen sollen, daß er 1883 über die Zahl 217 mit den Anmerkungen nicht hinausgekommen ist. Also kann sich auch Niemand aus der Anmerkung 223 belehren.

P $24^{2}{}_{2}$ ولما عاين يا بنى اقليمس هولاء الملوك. B 151_{7} druckt Herr B aus dem Vaticanus, führt aber am Rande die Lesart Ps, jedoch nur bis zu dem unmittelbar vor البرارى stehenden Worten an. Dadurch verschwindet Clemens auch am Rande.

P $25^{2}{}_{7}$ وامر هذه الرويا يا بنى اقليمس غير مشكل على اهل المعرفة. B 161_{1} وهذا يا ابنى اقليميس هو مكشوف لمن يفهم. Hier druckt Herr Bezold aus V: also ist auch V ein PseudoClementinum, und auch das hat dieser Gelehrte verschwiegen. Uebrigens kann man denselben Schluß aus B 107^{r} machen, wo ebenfalls in V die Anrede *o mein Sohn Clemens* als Variante erscheint.

P $26^{1}{}_{1}$ واعلم يا بنى انه لم يقدم يعقوب على تقبيل راحيل الا بعد كشفه البير وسقيه غنمها منها وكذلك اقول انا بطرس لن يجوز الخ. B 161/163 ولم يكن يقبلها حتى كشف البير واسقا الغنم. Varianten werden von Herrn Bezold nicht verzeichnet: Clemens ist mithin auch für einen Arabisch lesenden Theologen beseitigt.

P $27^{1}{}_{11}$ فانظر يا بنى اقليمس كيف من الخ. B 169_{5} (am Rande erwähnt man, daß b e i d e Codices كهنوه [für كهنوت] schreiben, des Clemens gedenkt man nicht) فانظر الان فان الخ.

P $28^{2}{}_{17}$ وفى اخبار العبرانيين يا بنى اقليمس ان فى عصر حيرام. B 181_{7}

---

1) Der Fluß Stranga der Akten des Archelaus ist, seit ARahlfs schrieb, in EWBudges History of Alexander the Great 75 = 134_{5} zum Vorscheine gekommen. Der ܐܣܛܪܢܓܐ = Stranga muß östlich vom Tigris, nicht zu weit von Arbela, fließen. Unter den von FchDelitzsch „wo lag das Paradies" 185 ff. aufgezählten Nebenflüssen des Tigris dürften nur die beiden Zâb in Betracht kommen. Doch ich gerathe in GHoffmanns Arbeitsgebiet.

ohne Varianten (apage, Clemens) والعبرانيين يقولون فى اخبارهم انه فى عصر حيرام.

P 29^{1}_{5} وانت يا بنى اقليمس وسائر اليونانيين. B 183_{6} وانت يا ابنى اقليميس الخ. Da Herr Bezold 183^{r} aus V انتم für وانت angibt, ist auch der Vaticanus ein PseudoClementinum.

P 33^{2}_{5} حتى وقفت على صحتها من كتب العبرانيين المستورة وانا اقص عليك يا بنى اقليمس ذلك. B 211_{10} ebenso, nur ابنى اقليميس, was eine Variante nicht ist.

P 33^{2}_{21} ومن اجل معرفتنا يا بنى اقليمس بنسب السيدة مريم وانتساب ابادها. B 213_{14} ebenso, nur ابنى اقليميس بنسل, was eine Variante nicht ist.

P 34^{1}_{13} واسمع الان يا ايها الابن المبارك. B 217_{5} ebenso.

P 35^{2}_{13} اعلم يا بنى اقليمس. B 229_{1} اعلم يا ابنى ohne Variante. Also ist Clemens wieder ein Mal beseitigt.

P 36^{1}_{3} فتامل يا بنى اقليمس ما قد شرحته لك. B 229_{12} ebenso, nur ابنى اقليميس, und ohne قد.

P 36^{1}_{8} واعلم = B 229_{18}.

P 37^{1}_{1} ايها الاخ والابن المبارك. B 235/237 ايها الاخ الحبيب والابن المبارك.

P 37^{2}_{2} يا بنى اقليمس. B 239_{7} يا ابنى اقليميس.

Sollte Herr Bezold wirklich befugt gewesen sein, nachdem er in seiner Einleitung verschwiegen hatte, daß die von ihm benutzten arabischen Handschriften nicht Handschriften der مغارة الكنوز, sondern ein unter vielem Anderen (wie dem Testamente Adams) auch die مغارة الكنوز enthaltendes Clementinum sind, mit keinem Worte dieser *Varianten* — ausdrücklich — zu gedenken, in denen der Araber den von dem Syrer nicht erwähnten Clemens nennt? Es vergleicht doch so leicht Niemand das Original mit einer noch dazu erbärmlich herausgegebenen Uebersetzung so genau, daß er ohne Herrn Bezolds ausdrücklichen Fingerzeig an den angezogenen Stellen den Clemens von Rom entdeckte. Herr Bezold war so schlecht geschult, daß er gar nicht merkte, was der Werth dessen war, was er zum Theile ausmerzte, zum Theile tot schwieg.

Ich schreibe nunmehr — nicht die P 51^{2}ff. stehende Liste der von Petrus dem Clemens geweißagten 70 Haeresien, welche mit Arius und Apollinarius schließt —, sondern einige andere Stellen aus.

Zuerst aus einer Königsliste 54^{1}_{7} ملك راس اسمه هاء وهو هذا هرقل اخر ملك يكون قبل غضبى . . . . يبطل هذا الملك الناموس المستقيم, nach welchem وحوش القفار والبرية التى اخلاق الحمير الوحشية التى لا عقول

لها einbrechen. Heraclius starb erst am 11 März 641: die wilden Thiere der Wüste (Genesis 16_{12}) hatten 630 angefangen, OstRom zu bedrohen und zu berauben: das richtige Gesetz dürfte der Monophysitismus, also das über dessen Vernichtung klagende Buch die Arbeit eines Monophysiten sein.

Weiter in dem Aufsatze über den (aus dem Stamme Dan geborenen) Antichrist 87^{2} Ende die Deutung der Zahl χξς der Apocalypse 13_{18} aus koptischem ⲙⲁⲙⲉⲧⲓⲟⲥ, griechischem ⲥⲁⲣⲁⲡⲓⲇⲟⲥ.

Drittens die sich mit den Recognitiones am nächsten berührende Stelle 111^{2} ff.

[111^{2}] وانا اقليمس اقول ان المعلم الصفا صاحب خزاين السماء والارض اجتاز [اختاز .Hds] ببعض سواحل البحر وكان معه اندراوس ويوحنا وفيلبس وجماعة من السبعين وانا غلام واقف على ساحل البحر ابكى لما كان نالنى من المحن ؛ فقال الاخوة للمعلم بطرس. يجب ان نعرف قضية هذا الغلام: فاقبل الى معلمى بطرس وقال لى. ما الذى يبكيك.. ايها الغلام.. ومن اين انت. ومن ابوك. ومن امك .. وكان كلامه لى بكلام اهل رومية ؛ فقلت انا له. من انت.. يا شيخى.. فانى ما رايت احدا منذ خرجت من بلدى رومية يتكلم بلسانها سواك: ولى اليوم ثلثة ايام واقفا فى هذا الموضع لم يسالنى احد عن خبرى غيرك؛ لانه لم يجتاز بى احد يعقل ما اكلمه به. ولا اعقل انا ايضا بما يكلمنى به ؛ فقال لى المعلم. انا بطرس رييس تلاميذ يسوع المسيح ؛ وبشرنى ببشرى الانجيل. فامنت على يديه واعمدنى باسم الاب والابن والروح القدس ومسحنى بالمارون الذى اعطاه سيدى والهى يسوع المسيح (فانه كان محتفظا به عنده) وعلمنى الناموس الواجب على المومنين بالمسيح. واظهر لى السراير التى قد تقدم ذكرها. وكتبتها عنه وخزنتها عندى. واستودعنى الكتب (اعنى الصحايف) المكتوبة بيد الهنا ومخلصنا يسوع المسيح. وقدمنى على جميع تلاميذه؛ لانه قد كان فيهم اخوان فسطس وقسطنطينس. ولم اكن بهما عارفا. وجعلنى خازنا على السراير كما جعله الهى يسوع المسيح خازنه عليها. وصرت له كاتبا باللسان الرومى واليونانى: ولم يكن سيدى يسوع المسيح كشف له خبرى. ولا من اين كنت. ولا سالنى عن ذلك الا من بعد مدة طويلة [112^{1}] عند مصيرة الى مدينة اللادقية. وذلك بعد انتخاب الرب شاوول المسمى بولس الرسول: فان بولس كان سايرا فى الطريق الى دمشق لاخراب كنايس الله بها ونفى المومنين به عنها. فتراايا له يسوع المسيح الرب فى طريقه واعما بصره. فقال بولس عند ذلك. يا رب.. من انت .. فقال له الرب. شاوول شاوول.. لماذا تودبنى وتعاندنى .. فقال شاوول. ابن [IV] لى.. يا رب.. من انت. لاومن بك: فقال له الرب. انا يسوع المسيح الناصرى الذى انت حريصا على مجاهدته ؛ فامن حينيذ بولس. وعند ايمانه امره المسيح بالانطلاق الى دمشق وقصد حنانيا احد التلاميذ. فانه كان هناك. ليرد اليه بصره: فامتثل امره. وقصد حنانيا. وعمده [II] وابرى بصره ؛ وبينما معلمى بطرس داخلا الى الى مدينة ارواد التى من عمل اللادقية. اذ راى امراة جالسة على بابها تسال

الصدقة: فقال لها ٍ ايتها الامراة .. لماذا تسالى الصدقة ∴ فانى ارى لك قوة تستطيعين بها العمل والتمعيس: فقالت له .. ايها الشيخ الجليل .. لو قد تعلم ما انا فيه ٍ وتقف على قصتى ∴ كنت تدعوا الى بالموت لاستريح: وكان دموعها تجرى على خديها ❖ فقال لها المعلم ٍ ما قصتك .. ايتها الامراة ∴ فقالت .. ايها الشيخ الكريم .. انا امراة من مدينة رومية من بنات الملوك ٍ متزوجة رجل يقال له خرسطوس . وكان لى منه ثلثة اولاد يقال لهم قسطس وقسطنطينا واقليمس . فرايت مناما حملنى تاويله على انى ركبت واولادى البحر لنقصد اما مدينة اثينا واما مدينة بيروطس تقدير [?] لتتعلم اولادى باحدى هاتين المدينتين [112²] الحكمة: وكان الكبير من اولادى قسطس والاوسط قسطنطينا . وانى حملت معى هاذين فى المركب وتركت الابن الصغير (وهو اقليمس) عند ابيه: فانكسرت بنا المركب ٍ وطرحتنى الامواج على لوح من المركب الى هذا الساحل منذ سنين ٍ وما عرفت لاحد من اولادى خبرا [خبر .Hds] . وانا حيرانة جالسة على هذا الباب اسال خبز الصدقة ❖ وكان المعلم بطرس قد وجه [II] اخوتى الى مدينة اللادقية فى حاجة له . فجلسا فى طريقهما على باب مدينة ارواد واسندا ظهورهما الى حائط باب المدينة يتحدثان من حيث تسمعهما الامراة المتصدقة . فكان فيما قال احدهما لصاحبه ٍ لنا .. ايها الاخ .. فى تلمذة هذا الاب القديس سنين كثيرة ما عرف احد منا صاحبه ولا وقف على مكان مولده من المدن: فقال قسطس ٍ اما انا فرجل من اهل رومية من قرابات الملك . وكنا ثلثة اخوة . وكان لنا والد يقال له جرسطوس [so] وام يقال لها مطروديا [الصحيح مطرادورا am Rande von erster Hand] . وكان لى اخان احدهما طريدى يقال له قسطنطينا واخر يقال له اقليمس ٍ وهو الاصغر . فرات والدتى رويا خرجت من اجلها عن مدينة رومية . واخذتنى واخى قسطنطينا وتركت الصغير اقليمس قبل والدنا: فركبنا البحر . فعصفت علينا الرياح وكسر بنا المركب . وسلمت انا الى بعض السواحل وما عرفت لاخى خبرا [خبر .Hds] ولا لوالدتى الى هذه الغاية: فقال له اخوه ٍ ما اشبه [اسبه .Hds] هذا الحديث بحديثى . فانى ايضا من اهل رومية . ومثل هذه الصفة كانت قصتى حتى كسر بنا فى البحر ❖ فلما سمعت المراة حديثهما ∴ وثبت اليهما ووقعت عليهما وبكيت وقالت ٍ حى هو الله الذى انتما تعبداه [113¹] انكما اولادى وانا امكما مطرادورا . وحدثتهما [وحدتهما .Hds] بخبرها واعطتهما علامات وقفا عليها: وكنت انا اقليمس فى ذلك الوقت فى مدينة اللادقية وصارت والدتنا الى المعلم بطرس وقالت له ٍ وحق الرب الذى انت تعبده .. يا شيخ .. ان تلميذيك هاذين ابناى ٍ وانا والدتهما ❖ وقصت على بطرس قصتهما: فدعا لها المعلم وقال ٍ انا اسال الهى يسوع المسيح الذى اراك ولديك هاذين ٍ وجمع بينك وبينهما ٍ ان تجمع بينك وبين والدهما واخيهما الاخر ❖ ثم وافيت انا اقليمس من المدينة . وكانت روح القدس قد قالت للمعلم بطرس ان يسالنى عن قصتى ومن اين بلدى . فقال لى ٍ انت .. يا بنى .. معى فى خدمة المسيح الرب منذ سنين كثيرة لم اسالك عن بلدك وعن قصبتك . وقد امرنى روح القدس ان

اسالك عن ذلك فبحق المسيح الهنا اما صدقتنى عن قصتك على صحتها.
وقصصت على قصتك: وكان اخوتى قد مضيا الى المدينة فى بعض الحاجات ❖
فلما سمعت والدتى بقصتى. وانا اقصها على معلمى بطرس الى انقضاءها. رمت
نفسها على وقالت وحق الاله الذى تعبده. انك ابنى وانا امك: ثم قالت للمعلم
القديس. هذا ابنى اقليمس الصغير الذى ذكرته لك ❖ ومضى المعلم بطرس
بنفسه الى المدينة فى طلب اخوتى واتانى بهما. ونظرا الى وانا اتكلم مع والدتى
فانكرا على ذلك. لانى منذ تتلمذت معهما. ما كلمت امراة. وقالا للمعلم بطرس
اما ترا اقليمس يكلم امنا. فلما سمعت امنا كلامها. اعتنقتنا [113²] جميعا
[جميع .Hds] وبكت بكاءً شديدا وبكا معلمنا بطرس بحرقة وعرف بعضنا
بعضا [بعض .Hds]. وقلنا للمعلم. نحن نعلم ان المسيح يستجيب دعاك
ويعطيك كلما تساله. فاساله ان يعرفك خبر والدنا. اهل هو حى او ميت ❖ فقال
لنا المعلم. انا اسال سيدى يسوع المسيح ان يبعث بوالدكم اليكم. ان كان
حيا [حى .Hds]. وان كان ميتا. ضرعت اليه فى أقامته من قبره حتى يجتمع
معكم عندى ❖ وقام المعلم بطرس فصف قدميه واستقبل الشرق وقال. الهى
وسيدى يسوع المسيح الذى هبطت من سماء قدسك وتجسدت من العذرى
المختارة مرتمريم لتخلص بتجسدك ادم البالى. وانت الذى اعطيتنا سلطانا
على جميع الاشياء. وانت الذى خولتنى مفاتيح الملك. وان احل واربط واغفر
الخطايا. وانت الذى قلت لنا. اذا نحن امنا بك. صنعنا اكثر من العجايب
التى صنعتها بين يدى اليهود. وانت اقمت العازر من الموت من بعد اربعة ايام
كان فيها مقبورا. وانت اقمت ابنة يوراس وابن الارملة من الموت. فاسمع دعاى
كما اوعدتنى. وارحم تلاميذى هاولاء وامهم. وابعث اليهم والدهم حيا كان ام
ميتا ❖ وكان فى ذلك الوقت باللادقية علم فم احم [Rd. على مراحم خ und
rechts davon, jetzt verwischt und rechts beschnitten خ ...م ......ر]
فلما فرغ من صلاته. نظرنا الى سحاب هائلة منيرة. وصوت يسمع منها ويقول.
اخرج اخرج الى اولادك: ونظرنا الى شيخ خارج من الوادى الذى هناك بهى
[? يهى .Hds] المنظر. عليه ثياب ليست بالشريفة. وشعره ابيض مصفوف
[مظفور .Rd. pr. m] كالصوف النقى: فبدر اليه المعلم بطرس وقال له. ايها
الشيخ .. انت منا او من غيرنا: لانه توهمه [114¹] من الارواح النجسة فقال له
باللسان الرومى. انا انسان مثلك .. يا شيخ: فقال له. اعطينى خبرك. ومن اين
انت: فقص عليه قصته ❖ فلما سمعت انا اقليمس واخوتى كلام الشيخ. قلنا
للمعلم ان هذا والدنا. وان المسيح قد قبل دعاك فى رده علينا: فقال. نعم هذا
ابوكم. وقال للشيخ ان هولاء اولادك ❖ فسقط علينا وعانقنا وبكا ❖ فقال له المعلم
بطرس. اريد ان تعطينى الان خبرك وكيف كان سبب مجيئك الى هاهنا: فقال
له. لما فقدت اولادى وامهم معهم (ومن منذ فقدتهم اثنين وعشرين سنة).
كنت اخرج فى كل يوم من منزلى برومية الى ساحل البحر واسال اصحاب المراكب
والتجار عن خبرهم. فما وجدت احدا [احد .Hds] اعطانى لهم خبرا [خبر .Hds]:

فلما كان فى هذا اليوم . كنت واقفا على ساحل البحر على رسمى . اذ هبت ريح عاصف . ورايت سحابة عليها شاب واقف يضىء وجهه كما يضىء نور الشمس اضعافا . وهو يقول .. ايها السحاب .. احملى الشيخ الى بطرس رييس تلاميذى : فحملتنى تلك السحابة . وخلايق من الناس ينظرون الى وينعجبون . وما زلت عليها كالنايم الى ان وقفت عند هذا الوادى . ولى منذ فارقت رومية ساعة واحدة . وما ادرى فى هذا الوقت فى اى بلدة انا ❖ فقال له المعلم . انا بطرس اقل تلاميذ المسيح . وهو الشاب الذى رايته على السحابة : ودعاه الى الايمان . فامن : ولم يكن فى موضعنا ذلك ماء . فضرب بطرس المعلم بعصاه الوادى الجاف الذى هناك . فجاءنا ماء جار . وهى فى ذلك الوادى الى هذا الوقت [114²] عين تعرف بعين سمعان : وعمده [II] فيها بسم الاب والابن والروح القدس ورشمه بالدهن المقدس الذى اعطاه المسيح الاهه وقبله هو من المعمودية : ودخلنا من ذلك الموضع الى اللادقية واقمنا بها سنين كثيرة نكرز ببشارة الانجيل . وامن على ايدينا خلق كثير من الناس لا يحصون كثرة . ثم رجعنا الى يروشليم واجتمعنا هناك مع ساير التلاميذ . وامر المعلم بطرس لوالدى ولوالدتى بالمقام بياروشليم ❖

Ich muß mich kurz fassen, und hebe deshalb nur Einen Punkt hervor. Des Clemens Mutter heißt bei Rufin Mattidia, in dem von mir herausgegebenen syrischen Texte Metrodora: ich habe aus diesem Metrodora schon 1855 [jetzt: gesammelte Abhandlungen 145_{10}] geschlossen, daß dieser Text nach NordWestKleinAsien gehört, wie ich aus dem in den *διατάξεις* ε 20 sich findenden Datum Symmicta **1** 68_{19} (so auch JFreudenthal ebenda 118_{26}) geschlossen habe, daß die ersten sechs Bücher der *διατάξεις* in Ephesus zu Hause sind: worauf GBickell in der Innsbrucker Zeitschrift **3** 392[r] aufmerksam gemacht hat. Indem ich hier für die auch in diesem Falle mir bewiesene Theilnahme öffentlich quittiere, mache ich geltend, daß unser Araber wie mein Syrer von Metrodora redet. Dieses Arabers قسطس = Constans und قسطنطينا oder قسطنطينس = *Κωνσταντῖνος* ist erst in Aegypten durch Verwechselung von ف und ق aus *Φαῦστος* und *Φαυστιν*[*ιαν*]*ός* entstanden: der Vater des Clemens heißt dem Araber خرسطوس oder جرسطوس für خوسطوس in Folge einer Verwechselung von ܦܘܣܛܘܣ mit ܟܘܣܛܘܣ. Daß ich 1864 erwiesen habe, daß und wie unsere Faustsage aus der Clemenssage entstanden (darüber GESteitz in den Studien und Kritiken 1867_{556} ff.) — jetzt Mittheilungen **1** 47 ff. —, darf ich wohl in die Erinnerung zurückrufen, nachdem sehr zu meiner Freude unlängst Ulrich von Wilamowitz (Euripides Herakles **1** 284 ff.) darauf zu reden gekommen ist. Meine deutschen Schriften 163.

Den kitâb almagâll erläutere man sich aus ASprengers Muhammed **1** 94. Ich bemerke zum Schlusse nur, daß der abgedruckte Text aus Einer Handschrift genommen ist, nicht, was ich zu thun außer Stande war, aus den sechs oder noch mehreren, welche vorhanden sind. An jeder deutschen Universität werden die Mitglieder der ersten Fakultät Gelehrte finden, welche ihnen das Mitgetheilte übersetzen. Ich habe keine Muße eine Uebersetzung zu liefern, und hätte an dieser Stelle keinen Raum, eine Uebersetzung zu veröffentlichen.

Es ist mir unwahrscheinlich, daß ich die مغارة الكنوز je drucken werde: denn nicht sie liegt in den bis jetzt bekannten Handschriften vor, sondern ein neben vielem Anderen auch sie enthaltendes Sammelwerk, die Apokalypse des Petrus, zu dessen Bearbeitung ich in meinen Jahren, und durch die „Gönner“ noch so weit ab von meinem Ziele, mir Zeit zu nehmen mich nicht mehr für berechtigt erachte. Das syrische Original hoffe ich im zweiten oder dritten Bande meiner Bibliotheca Syriaca zu veröffentlichen. Vom ersten Bande dieser Bibliotheca sind zwanzig Quartbogen bereits gedruckt [1]).

ܒܪ = վեր.

In den gesammelten Abhandlungen 24_8 habe ich ܒܪܢܝܡܣ *κνημίς* aus վեր = persischem بر = उपरि und जंघा = awestischem זאנגא (vgl. سرجنك und *զանգապան*) erklärt. Mit վեր بر anhebende Wörter sind im Armenischen und NeuPersischen häufig: jeder Eranisch redende Syrer kannte ihrer eine Menge.

Wie wir *superklug*, *superfein* bilden, bildeten die Syrer ܒܪ ܕܘܢܒܐ Schwanzriemen, ܒܪ ܚܕܐ Brustriemen (Hoffmanns Glosse 2612), ܒܪ ܐܦܘܪܐ = ܒܪ ܕܘܢܒܐ und (trotz des von PSmith 598 angeführten ܒܪܢܐ ܥܘܩܒܬܐ) das in meinen Mittheilungen 3 204 behandelte ܒܪ ܥܘܩܒܐ. ܒܪܣܝܐ: ܒܪ ܙܘܙܐ = الزيبق Elias aus Nisibis 13_1 = Praetermissa 36_{24}.

Für „Lautphysiologen“ wird von Interesse sein, daß in بادونب und in باشورة das ر verschwunden ist. Analog ist, daß in ܦܘܫܩܐ (das doch ܦܘܫܩܝܐ sein wird) ܩ zu ܟ geworden.

אִפַּר

habe ich in meiner Uebersicht 178_1 für وفاق erklärt. Ich habe, in

1) Der uns im December 1889 leider entrissene Bischof von Durham, JBLightfoot, hatte die Absicht, die Recognitionen des Clemens herauszugeben. Er hatte zu diesem Behufe durch einen deutschen Gelehrten die zwei, in Italien liegenden, Haupthandschriften des Buches vergleichen heißen. Am 24 Oktober 1885 bat er mich um mein Material, das er nicht vollständig kannte, andererseits aber auch überschätzte. Da Lightfoot unverheirathet war, weiß ich — nach WWrights Tode — nicht, an wen seine Manuscripte gekommen sind. Sollten die eben erwähnten Collationen mittheilbar sein, so bitte ich auf diesem Wege, sie mir nicht vorzuenthalten.

höchster Eile schreibend, und mit einem schwer kranken, seitdem verstorbenen Setzer kämpfend, »ܦܝܕܐ« für mich anzuführen vergessen: »ܫܡܝܕܐ« zu יָחֵם wie »ܦܝܕܐ« zu وفد. Als Einzelform ist ܦܝܕ = fidat anzusetzen. הָאֵפֹד und ܦܝܕܐ sind selbstständige Wörter: um so wichtiger ist die Uebereinstimmung der Wurzel. وافد *Anwalt* „der Unterhändler, welcher kommt um die Freilassung zu erwirken", Wellhausen Vaqidi 390ʳ. אֲפֻד stammt von אֵפֹד, nicht אֵפֹד von אֲפֻד. ܦܝܕܐ الفرجية Elias aus Nisibis 13_1 = Praetermissa 36_{26}. Die فرجية erklärt RDozy supplément 2 248 robe flottante, faite ordinairement de drap, à manches amples et longues qui dépassent un peu l'extrémité des doigts, et qui ne sont point fendues. Dozy schöpft *hier* schweigend aus EWLanes thousand and one nights 4_{41} = **1** 288 [1883], aus dem er noch hätte beifügen müssen Is is worn chiefly by persons of the learned professions. Castle citiert Avicenna **2** 33_{29}.

Der Codex des ben Ascher

ist von mir in meinen Mittheilungen **2** 50 ff. am 1 Juni 1886 erwähnt worden. Seitdem ist mir des Herrn Wickes, im Mai 1887 erschienenes treatise on the accentuation of the prose books of the old testament, und in ihm ein Lichtbild Einer Seite jenes Codex vor Augen gekommen. Danach gehört der Codex nach Deutschland, und stammt aus dem vierzehnten Jahrhunderte, ist also für die Wissenschaft werthlos. Ich bitte, den Dresdener Codex des תנ״ך, den ich einmal im Hause gehabt, und Tafel 41 des Oriental Series des Palaeographical society zu vergleichen: wobei man allerdings zu bedenken haben wird, daß das Bild des Herrn Wickes sehr stark verkleinert ist.

Cai[a]phas

ist von mir in der Uebersicht 97ʳ 111ʳ besprochen worden, an welchen Stellen ich Iohannes 11_{49} 18_{14} hätte beiziehen müssen. Nicht bekannt war mir, als ich über ܡܚܐ und ܡܚܐ handelte, daß ich gegen Herrn IDérenbourg aus Fränkel-Graetzens Monatsschrift **21** 257 eine Mittheilung des Herrn Perles hätte anführen können, welcher aus Nathans עָרוּךְ einen קֵנָה als zum בית קנתרוס [= *τοῦ Καυϑηρᾶ*] gehörig namhaft macht. Ich habe nicht die nöthige Muße, nachzusuchen, ob des Herrn Perles Aufsatz der ersten Fakultät bekannt geworden ist: ich habe nur meine eigene Unwissenheit hier gut machen wollen.

Wenn Herr Kautzsch was ich in den Mittheilungen **1** 116 über die bei Matthaeus 27_{46} Marcus 15_{34} vorliegenden Varianten gesagt habe, in der Grammatik des biblisch-Aramäischen 11 mit dem Satze abfertigt „de Lagarde findet in dem Ganzen einen Beweis für frühzeitige systematische Correcturen im neutest. Text“, so darf ich freilich nicht erwarten, daß was ich in der Uebersicht 97r über *Καΐφας Καιάφας* vorgetragen habe, verstanden werden werde.

Gregorius von Nazianz. Dionys der Areopagite.

Herr IohDräseke hat einen Band „gesammelte patristische Abhandlungen“ herausgegeben, zu dessen vierter und zweiter Nummer ich einiges des Lesens Werthe anzumerken habe.

Ich habe 1858 in meinen Analecta Syriaca 31—67 Texte veröffentlicht, welche in der Bibliothek des Klosters von Šihêt unter dem Namen des Gregorius *θαυματουργός* oder (wie ihn ein im Osten verstorbener Ordinarius der Kirchengeschichte zu verdeutschen pflegte) Gregor von Thaumaturgien sich erhalten haben, und bis auf Eines, das von AMai herausgegeben worden war, mir, als ich druckte, für unbekannt galten. Ich bitte, meine Symmicta 2 112 113 nachzulesen: man wird erfahren, daß mir noch 1859 die Benutzung der königlichen Bibliothek sehr erschwert worden ist, und wird mir in Folge davon zu Gute halten, daß ich damals wenigstens Eines der von Herrn VRyssel noch 1880 gleich mir für ungedruckte Arbeiten Gregors „von Thaumaturgien“ gehaltenen Bücher falsch beurtheilt habe.

Herr IohDräseke hat 1881 [siehe a. oben a. O. 103] entdeckt, daß das Eine der angeblichen Inedita griechisch unter den Werken des Gregor von Nazianz steht: für diese Entdeckung verdient er den Dank der betheiligten Kreise, den meinen an erster Stelle.

Allerdings habe ich 1858 etwas gethan, was 1880 dem Herrn Ryssel hätte helfen können, welcher keinen Granius Licinianus zu büßen hatte, und der mit dem Herrn Oberbibliothekare LKrehl, wie aus seiner Widmung und seiner Vorrede zu schließen ist, so gut stand, wie ich mit dem verstorbenen Collaboratorenverächter und treuen Vater GHPertz schlecht. Ich habe nämlich in der Vorrede zu meinen Analecta xij zu 64_{10} wohlweislich angemerkt, daß die von mir aaO. abgeklatschte Handschrift an Einem Orte, in dem Verzeichnisse der im Codex enthaltenen Stücke [136^4], als Verfasser des in Rede stehenden Aufsatzes den Gregor Bischof von NeuCaesarea in Pontus, aber an einer anderen Gregor den Großen nennt. Damit war den Leuten, welche ein Lesezimmer zu benutzen Zeit, oder das Recht hatten, ohne jedesmal frisch einzuholendes Ja Pertzens, Folianten nach Hause zu nehmen, der Weg gewiesen.

Nicht allein Herr VRyssel ist diesen Weg nicht gegangen, sondern auch seine drei hochwürdigen Herren Beurtheiler (Dräseke 123r) haben es nicht gethan: von denen Einer, Herr Consistorialrath FrBaethgen, GGA 1880 1889, Syrisch lesen kann, und meine Analecta kennen mußte.

Bei dem zweiten Aufsatze des Herrn Dräseke, 32 ff., kommt es darauf an, zu erfahren, wie eine von Hipler und dem diesen bis auf die Schreib- und Druckfehler, auch wo er ihn bekämpft, abklatschenden Herrn RFoss (über den Abt Hilduin von St. Dénis und Dionysius Areopagita) benutzte Stelle des Dionysius Areopagita in der sehr alten syrischen Uebersetzung lautet. Herr EWBudge hat die Güte gehabt, mir aus drei Handschriften des brittischen Museums (Add. 12151 96 12152 110 14539 59) das in Frage Kommende auszuschreiben. Hier ist es: die Varianten stehn zwischen [ ] im Texte:

ܘܟܕ ܠܘܬ ܐܦ [= ܕܐܦ] ܗܘܐ ܠܗܢܐ ܠܡ ܗܟܢܐ ܡܫܠܡܢܘܬܐ ܕܟܠܗܘܢ ܕܡܢܗ ܕܡܠܟܝܢ ܐܠܗܐ ܐܝܟ ܕܒܟܘܪܐ ܢܗܝܪܐ ܐܠܦܢܝ. ܠܐ ܗܘ ܢܠܚܘܫ ܡܠܬܐ ܟܘܠ ܗܘܢܝܢܘܬܐ ܡܠܬܐ ܐܝܟ ܕܟܢܘܫܬܐ ܕܟܠܗ ܡܢ ܕܟܠܗ ܕܡܠܦܢܐ ܕܡܢ ܐܠܗܝܡ ܟܠܗ. ܡܛܠ ܕܐܦ ܟܠܗܘܢ ܕܩܕܝܫܐ ܡܬܝܠܐ ܐܚܝܢ ܥܠܝܗܘܢ — ܐܡܪ ܕܐܦ ܚܢܢ (ܐܝܟܢܐ ܕܝܕܥ ܐܢܬ) ܘܐܢܬ ܘܣܓܝܐܐ ܡܢ ܐܚ̈ܝܢ ܩܕ̈ܝܫܐ ܐܬܟܢܫܢ ܗܘܝܢ ܠܚܙܬܗ ܕܦܓܪܐ ܗܘ ܪܫ ܚܝܐ ܘܡܩܒܠ ܐܠܗܘܬܐ. ܩܪܝܒ ܗܘܐ ܕܝܢ ܐܦ ܐܚܘܗܝ ܕܐܠܗܐ ܝܥܩܘܒ ܘܦܛܪܘܣ ܗܘ [so] ܡܥܠܝܐ ܪܝܫܐ ܘܩܫܝܫܐ ܕܡܠ̈ܦܢܐ ܐܠܗ̈ܝܐ — ܘܟܕ ܐܬܚܙܝܬ ܠܗܘܢ ܒܬܪ ܚܙܬܐ ܗܕܐ ܡܢ ܟܠܗ ܣܓܝܐܐ ܐܝܩܢܘܗܝ ܐܝܟ ܕܗܘܦܟ ܗܘܐ ܟܠ ܚܕ ܡܢܗܘܢ. ܒܬܫܒܘܚܬܐ ܕܠܐ ܡܬܚܙܝܐ ܚܝܠܗ ܕܡܫܒܚܘܬܗ ܕܐܠܗܘܬܐ. ܒܬܪܗܘܢ ܡܠܦܢܐ ܡܢ ܐܚܪܢܐ ܕܡܢ ܟܠܗ ܗܘܢܝܢ ܡܡܠܠܝܢ ܐܠܗܝܐ ܒܟܢ [= ܒܟܢ] (ܐܝܟ ܡܐ ܕܝܕܥ ܐܢܬ) ܡܢ ܟܠܗ ܢܨܝܚ ܗܘܐ. ܘܟܠܗ ܢܦܩ ܗܘܐ ܗܘ ܡܢܗ. ܘܢܨܝܚ ܗܘܐ ܒܡܫܬܘܕܥܢܘܬܐ ܕܟܠ ܗܘܝܢ ܕܡܫܬܡܥܝܢ ܡܢܗ ܘܡܢ ܟܠܗܘܢ ܐܝܟܢ ܕܫܡܥܝܢ ܗܘܘ ܠܗ ܘܢܨܝܚ ܗܘܐ ܠܗ. ܘܕܝܕܥܝܢ ܗܘܘ ܠܗ. ܘܠܐ ܝܕܥܝܢ ܗܘܘ ܠܗ. ܡܫܬܘܕܥܢܐ ܒܟܠ ܡܢ ܐܠܗܐ ܘܐܠܗܝܐ ܡܠܦܢ [= ܡܠܦܢܐ] ܗܘܐ ܕܐܬܚܙܝ: ܘܡܛܠ ܗܢܐ ܠܘ ܒܠܐ ܐܝܟܢ ܕܐܬܡܠܠܢ [= ܕܐܬܡܠܠ] ܡܢܗ ܐܝܟ ܐܠܗܝܐ.·.

Dionysius, der angebliche Areopagit, nennt sich selbst einen Schüler des Hierotheus, also nicht des Apostels Paulus. Er schreibt an Gaius, Titus, Carpus: er erwähnt einen Iacobus und einen Petrus, einen Bartholomaeus, einen Clemens, einen Elymas, einen Simon als Zeitgenossen.

Ich denke, diese Namen alle seien zu verstehn wie die Namen des vor Karl dem Großen versammelten Kreises von Gelehrten: sie sind die Masken, unter denen sich die Mitglieder einer platonischen Akademie versteckten, unter denen sie ihre Gegner bezeichneten.

Erst die sorgsame Vergleichung der Handschriften wird lehren, ob diese meine Vermuthung richtig ist.

Dabei wird sich empfehlen, ehe man über *ἀδελφόθεος* aus der Theorie der griechischen Wortbildung urtheilt, aus Estienne und DuCange zu lernen, was *ἀδελφόθεος* im Leben bedeutete. Ich wäre sehr dumm, wenn ich Hektoliter von *ἔκτος* herleitete, weil hundert *ἑκατόν* heißt, wenn ich Antipyrin für ein Gegenmittel gegen den Weizen hielte, weil das Fieber bekanntlich nicht *πυρός*, sondern *πυρετός* genannt wird.

Der Syrer liest nicht *θείαν*, sondern *θέαν*, nicht *σήματος*, sondern *σώματος*: den *ἀδελφόθεος* hat er wie unsere Drucke. Uebrigens kann ich weder mit dem Griechischen [**1** 343 der Venediger Ausgabe] noch mit dem Syrischen viel anfangen.

אֶבֶן

als Nebenform für בֵּן habe ich in meiner Uebersicht 75[r] in *Αβεννήρ Αβεσσαί Αβεσσαλώμ Αβεσσουέ* nachgewiesen. Es gibt noch einen Namen, der dies אֶבֶן enthält: אֶבְצָן Iudd. 12_8 heißt in 𝔊 *Αβαισσαν* oder *Αβεσσάν*, in 𝔖 إِصبُن, d. h. die richtige Aussprache ist אֶבְצָן = אֶבֶן צָן, welche Form sich zu إِصبُن verhält wie *Αβεσσουέ* zu אֲבִישׁוּעַ. Für mich ist durch *Αβεσσάν* 𝔊s erwiesen, daß 𝔊 einer sehr guten Ueberlieferung folgte: kein Nachdenken hätte einen alexandrinischen Juden darauf gebracht, אֶבְצָן auszusprechen.

Ich weiß nicht, ob es schon jetzt erlaubt ist, die Vermuthung zu äußern, ạвen für ben sei südPalaestinisch.

Vulfilas Ezdras.

Als ich zu Ostern 1857 das jetzt in meinen gesammelten Abhandlungen 85 ff. bequem nachzulesende Programm de novo testamento ad versionum orientalium fidem edendo herausgab, meinte ich, einen weiten Schritt vorwärts gethan zu haben. Karl Lachmann war darauf ausgewesen, die im Osten und im Westen vorhandenen ältesten Zeugen des Textes des neuen Testaments gegen einander zu hören, und aus ihrer Uebereinstimmung zu schließen. Lachmann hatte kein Recht, an den Erfolg seines Unternehmens zu glauben, da er erstens was er abhörte, aus unzuverlässigen Vergleichungen abhörte, da er zweitens alle alten Uebersetzungen außer der als Ganzes nicht vorliegenden lateinischen Version bei Seite ließ. Ich machte geltend, daß in amtlichem Gebrauche befindliche Uebersetzungen sichereren Werthes seien als beliebig auf-gelesene griechische Handschriften, deren Herkunft man nicht kenne, und ich verlangte die griechischen Handschriften durch jene Versionen — jetzt setze ich hinzu: durch die Lectionare — kontrolliert zu sehen. Ich maß dann zweitens an den Testimoniis, deren Benutzung bei Lachmann ebenso willkürlich war wie die der Handschriften und der lateinischen Version.

Ich erkannte weiter, daß zu irgend einer Zeit eine durchgreifende Revision des Textes vorgenommen worden ist, und forderte die nicht recensierten von den recensierten Codices zu scheiden: die Einen dürften, so lehrte ich, gar nicht mit den andern zusammengehalten werden.

Für die an letzter Stelle dargelegte Ueberzeugung hatte ich in gewissem Sinne an unserm IDMichaelis und dessen Vorarbeitern Vorgänger: die latinizantes des vorigen Jahrhunderts waren von den Michaelis scharf vom Reste geschieden, und von diesen in der Wolle gefärbten Protestanten, eben weil latinizantes, geächtet worden. Daß D der Evangelien vielfach mit den Uebersetzungen des Morgenlands stimmte, hatte IDMichaelis nach seinem Vater und Anderen richtig erkannt. Ich drehte gerade wegen dieser Uebereinstimmung den Spieß um, und lehrte: wo die Lateiner mit dem Syrer, den Aegyptern, dem Aethiopen, dem Gothen stimmen, haben wir den alten, nicht recensierten Text: die in diese Gruppe nicht gehörenden Zeugen bieten die recensio, d. h. die contaminatio. Das heißt: sie gehn uns nur in zweiter Linie etwas an.

Wie mir dies Programm bekommen ist, sehe man in den in den Abhandlungen 85 und in der Uebersicht 4r angeführten Schriften nach, sowie in den Symmicta 2 28 29.

Die für das N.T. geltend gemachten Grundsätze habe ich nachmals auf die Septuaginta angewandt. Ich sehe auch auf diesem Gebiete meine Forderung als einen wesentlichen Fortschritt an, nicht griechische Handschriften, sondern die drei nach des Hieronymus Zeugnis amtlich vorhandenen Recensionen des Lucian, des Hesychius und Palaestinas zu vergleichen: mehr amtliche Recensionen, falls es deren mehr als die von Hieronymus genannten gibt.

Daraus folgte für mich ohne Weiteres, daß ich Vulfilas und des alten Slaven Text, da Vulfila wie der Slave im Sprengel von Constantinopel arbeiteten, als den in diesem Sprengel und dem von Antiochia geltenden Text Lucians anzusehen hatte.

Daß des Holmes Handschriften 19 108 118 und die Ausgabe von Alcala de Henarez zusammengehören, hat Holmes selbst zu 19 108 118 vor dem Pentateuche gesagt: alles Weitere erhellt aus des Holmes Apparate sofort für jeden, der hintereinander gestellte

Zahlen zu lesen versteht. Es brauchte von Niemandem entdeckt zu werden.

Daß dieser Text der Text Lucians, also der Antiochias und Constantinopels, also auch der Vulfilas und des Slaven sei, ergab sich im December 1868, als ich in Schleusingen mein Register der von Chrysostomus (Savileschen Drucks) angeführten Bibelstellen beendigt hatte und zu benutzen anfieng.

Herr Otto Ohrloff hat im Jahre 1876 in einer greifswalder Promotionsschrift, von der bis heute der goettinger Bibliothek ein Exemplar nicht geliefert worden ist, die ich aber unlängst gekauft habe, ohne von dem so eben Auseinandergesetzten etwas zu wissen, zum Theil ohne von ihm etwas wissen zu können, nur aus dem Apparate des Holmes-Parsons — also empirisch, wie Rosenmüller und Olshausen was sie über den Archetypus des alten Testaments gelehrt, aus Kennicott empirisch gelernt haben — gefunden, daß dessen Handschriften 19 82 93 108 den von Vulfila übersetzten Text des Ezdras enthalten: daß Vulfila selbst diese Uebersetzung gemacht, leugnet Ohrloff.

Aber schon 1873 hatte Herr Alexander Kisch in des Herrn [Frankel] Hirsch Graetz Monatsschrift für Geschichte und Wissenschaft des Judenthums **22** 42—46 85—89 die Frage nach dem Originale des gothischen Ezdras behandelt, und war zu dem charakteristisch ausgedrückten (man beachte das *e* in *Codeces*, wo ̤ für *i*), nicht erheblichen Ergebnisse gelangt

> Aus dem Gesagten geht klar hervor, daß der dem Ulfilas vorgelegene Septuagintatext nicht unwesentlich von unseren jetzigen Codeces dieser Uebersetzung verschieden war.

Dies bitte ich zu meiner Pars prior Lucians xiv wie zu meinen Mittheilungen **2** 52ʳ nachzutragen. Ich bemerke noch, daß Frankels Zeitschrift auf der goettinger Bibliothek nicht gehalten wurde, und erst auf meinen Betrieb — ich weiß nicht mehr wann — in einer Reihe von Bänden auf einmal gekauft, und dann fortgesetzt worden ist. Des Herrn Kisch Aufsatz ist mir erst im laufenden Semester durch Zufall bekannt geworden.

Ueber das Dalton'sche Gesetz.

Von

B. Galitzine.

Vorgelegt von Riecke.

Das Dalton'sche Gesetz sagt bekanntlich aus: erstens, der Gesammtdruck eines Gemisches zweier Gase setzt sich einfach aus den Partialdrucken jedes einzelnen Bestandtheiles zusammen; zweitens, die Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit in einem Gase ist derjenigen im Vacuum gleich.

Dieses Gesetz ist von verschiedenen Experimentatoren geprüft worden, unter anderen von Dalton[1]), Henry[2]), Gay-Lussac[3]), Magnus[4]), Regnault[5]), Andrews[6]), Guglielmo und Musina[7]), F. Braun[8]). Doch gehen ihre Ansichten sehr auseinander, insbesondere hinsichtlich der Spannkraft eines gesättigten Dampfes in einem Gas. Die einen, außer den ersten Beobachtern auch Regnault, erkannten das Dalton'sche Gesetz als ein theoretisches an; die großen Unterschiede, welche Regnault zwischen der Spannkraft des Aetherdampfes in Luft und im Vacuum fand, führte er auf eine störende Einwirkung der Gefäßwände zurück. Andere schrieben dem Dalton'schen Gesetz blos eine beschränkte Gültigkeit zu.

So zum Beispiel erhoben sich bei Wüllner[9]) nach besonderen Versuchen Zweifel an der Richtigkeit der Regnault'schen Erklärung, da er, wie später auch Guglielmo und Musina, nachweisen zu können glaubte, daß die Adhäsion des Dampfes an den Gefäßwänden auf die Spannkraft eines gesättigten Dampfes in

1) Manch. philol. soc. 5, p. 535, 1802; Gilbert's Ann. 12 p. 385, 1803 und 15 p. 21.

2) Nicholson's Journ. 8 p. 297. 1804; Gilb. Ann. 21. p. 393. 1805.

3) Ann. de Chimie. 95. p. 314. 1815. Auch Biot. Traité de Physique 1. p. 298.

4) Pogg. Ann. 38. p. 488. 1836.

5) Mém. de l'Ac. des Sc. 26. pp. 256, 679 und folg.

6) Phil. Mag. (5). 1. p. 84. 1876; Phil. Trans. 178 A. p. 45. 1887.

7) Riv. Sc.-Ind. di Firenze. Anno XIX. N. 16—17. p. 185. 1887. Auch Beibl. XII. p. 464. 1888.

8) Wied. Ann. 34. p. 943. 1888.

9) Wied. Ann. 11. p. 545. 1880. Auch Wüllner Lehrbuch der Experimentalphysik. Bd. III. p. 704. IV. Aufl.

einem Gas von minimalem Einflusse sei. In dem Verhalten reiner Dämpfe fand er dagegen ganz sonderbare Anomalien, welche auf einen Verflüssigungsverzug hindeuten und zu der Vermuthung führen, daß die Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit nicht, wie es bisher angenommen wurde, eine genau bestimmte Größe ist, sondern zwischen gewissen Grenzen schwanken kann. Dieses anomale Verhalten gesättigter Dämpfe wurde auch von anderen beobachtet und besprochen [1]), und noch in neuester Zeit hat Blümcke [2]) interessante Mittheilungen darüber gemacht. Bei Gemischen sollen diese Anomalien in viel stärkerem Maß und viel leichter hervortreten.

Auch bei Guglielmo und Musina, und ebenso bei F. Braun stellten sich Abweichungen vom Dalton'schen Gesetz heraus, doch waren dieselben immer sehr gering. Andrews dagegen constatierte zuweilen ganz beträchtliche Abweichungen. So fand er z. B., daß ein Gemisch von 3 Vol. CO_2 mit 4 Vol. N_2 unter keinem Drucke flüssig gemacht werden könne, so lange nicht die Temperatur des Gemisches auf —20° C. gebracht wird. Bei höherer Temperatur kann also eine Verflüssigung der im Gemische vorhandenen CO_2 überhaupt nicht stattfinden, obgleich die kritische Temperatur der CO_2 erst bei 31° C. liegt.

Ein Zusatz eines indifferenten Gases hat also eine Erniedrigung der kritischen Temperatur der betreffenden Flüssigkeit zur Folge. Diese Erscheinung, welche mit dem Verhalten von Gemischen zum Dalton'schen Gesetz in unmittelbarem Zusammenhang steht, ist auch von anderen Experimentatoren, wie Cailletet [3]), Hannay [4]), Ansdell [5]), Strauß [6]), Pawlewski [7]) und anderen beobachtet worden. Pawlewski fand bei Versuchen mit Flüssigkeitsgemischen, daß wenn man α Gewichtstheilchen einer Flüssigkeit mit β Gewichtstheilchen einer anderen mischt, die kritische Temperatur T_m des Gemisches sich nach der folgenden einfachen Formel berechnen läßt:

---

1) Man sehe z. B. Van der Waals, Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. p. 90. Leipzig 1881.

2) Wied. Ann. 36. p. 911. 1889.

3) C. R. 90. p. 210. 1880; Journ. de Ph. 9. p. 192. 1880.

4) Proc. Roy. Soc. 31. p. 520. 1881.

5) Proc. Roy. Soc. 34. p. 113. 1882.

6) J. d. russ. phys.-chem. Gesellschaft. 12 p. 207. 1880; 14 p. 510. 1882. Auch Beibl. VI p. 282. 1882 und VII p. 676. 1883.

7) Chem. Ber. 15. Jahrg. p. 460. 1882.

$$T_m = \frac{\alpha T_1 + \beta T_2}{\alpha + \beta},$$

worin T_1 und T_2 die kritischen Temperaturen der Bestandtheile bedeuten. Die flüchtigere Flüssigkeit kann man offenbar bei der Temperatur T_m als ein Gas (Definition Andrews') betrachten und somit von einer Erniedrigung der kritischen Temperatur der anderen Flüssigkeit sprechen. Die Richtigkeit des Pawlewski'schen Gesetzes wird jedoch nicht allgemein anerkannt.

Da sich also verschiedene Ansichten bezüglich des Dalton'schen Gesetzes, so wie auch der kritischen Temperatur von Gemischen gegenüberstehen, habe auch ich versucht, durch einige experimentelle und theoretische Untersuchungen diese Frage ihrer Lösung näher zu bringen.

Der erste Theil der experimentellen Untersuchungen ist im wesentlichen nur eine Erweiterung der Versuche Regnault's auf höhere Temperaturen (bis zu 100° C.). So wurde die Spannkraft in Luft der gesättigten Dämpfe von Wasser, Aethyl-Aether und Chloraethyl bestimmt. Die Versuche mit Wasser wurden außerdem mit Gefäßen von verschiedener Form ausgeführt, wodurch man sich zugleich ein Urtheil über den Einfluß der Gefäßwände auf die Spannkraft des gesättigten Dampfes in Luft bilden konnte.

In dem zweiten Theile dieser experimentellen Untersuchungen beschäftigte ich mich mit der Bestimmung der kritischen Temperatur verschiedener Mischungen von Aceton und Schwefelkohlenstoff mit Aethyl-Aether, ferner mit der Untersuchung des Einflusses eines kleinen Zusatzes von Luft auf die Erniedrigung der kritischen Temperatur einer Flüssigkeit.

Durch Zusammenstellung der früheren, theilweise von mir verarbeiteten Untersuchungen, mit meinen eigenen, bin ich zu Resultaten gelangt, welche ich hier in aller Kürze vorläufig mittheile.

Das Dalton'sche Gesetz für Gasgemische ist kein allgemein gültiges Naturgesetz.

Die Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit in einem Gase ist im Allgemeinen mit derjenigen im Vacuum nicht identisch, folglich ist auch für Dämpfe das Dalton'sche Gesetz nicht genau richtig und nicht einmal ein theoretisches, wie es von Regnault behauptet worden ist.

Die Summe der Partialdrucke zweier Gase ist im Allgemeinen größer als der gesammte von der Mischung ausgeübte Druck; der Unterschied, welchen ich mit Δ bezeichne, kann bei starken

Drucken ganz beträchtlich sein[1]). Bei weiterer Verkleinerung des von der Mischung eingenommenen Volumens nimmt Δ ab. Bei einem gewissen verhältnißmäßig sehr kleinen Volumen wird $\Delta = 0$, also das Dalton'sche Gesetz in aller Strenge anwendbar; bei weiter fortschreitender Verminderung des Volumens wird Δ negativ, und zwar erreicht es bald sehr hohe negative Werthe. Dieses eigenthümliche Verhalten von Δ läßt sich sowohl auf die wechselseitige Cohäsion, als auch auf die räumliche Ausdehnung der Moleküle der beiden Gase zurückführen.

Auch bei kleineren Drucken ist ein Unterschied zwischen der Summe der Partialdrucke und dem Gesammtdrucke der Mischung vorhanden, obgleich hier die absoluten Werthe von Δ sehr klein sind. Das Vorzeichen von Δ hängt von der Natur der gemischten Gase wesentlich ab. Für Mischungen mit Wasserstoff, welcher bekanntlich eine sehr kleine Cohäsion besitzt, werden die Abweichungen Δ gewöhnlich negativ, also die Summe der Partialdrucke kleiner als der Gesammtdruck der Mischung.

Ueberhaupt sind bei höheren Temperaturen, insbesondere, wenn dieselben die kritische übersteigen, die Abweichungen vom Dalton'schen Gesetz auch bei starken Compressionen im Allgemeinen immer sehr gering.

Die Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit in einem Gase ist im Allgemeinen kleiner als die entsprechende Spannkraft im Vacuum, doch für sehr große Compressionen kann der Fall eintreten, daß der weniger flüchtige Körper sich bei dem normalen Drucke seines gesättigten Dampfes nicht mehr verflüssigt, da seine kritische Temperatur durch das Vorhandensein des anderen indifferenten Gases zuweilen ganz beträchtlich erniedrigt werden kann.

Die sehr großen und unregelmäßig verlaufenden Werthe von Δ, welche Regnault für die Spannkraft des Aetherdampfes in Luft gefunden hat, erklären sich in der That theilweise durch die störende Einwirkung der Gefäßwänden, respective die Verzögerung in der Diffusion des Aetherdampfes durch die Luft, was sich besonders bei sehr großen Gefäßen, mit welchen Regnault ja auch gearbeitet hat, geltend macht.

Die Behauptung Wüllner's, Guglielmo's und Musina's, daß der Einfluß der Adhäsion minimal sei, scheint mir unzulässig zu sein. Die Beobachtungen Regnaults, so wie meine eigenen mit verschiedenen Gefäßen ausgeführten Versuche lassen eine stö-

1) Δ ist zugleich Maß für die Abweichung vom Dalton'schen Gesetz.

rende Einwirkung der Wände bei großen und langen Gefäßen ganz gut erkennen. Für kleine Volumina allerdings, wo sich die Diffusion des Dampfes rasch vollziehen kann, scheint der Einfluß der Adhäsion sehr klein zu sein.

Obgleich die Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit in einem Gase kleiner ist, als im Vacuum, ist doch dieser Unterschied bis zu 100° hinauf verhältnißmäßig immer noch gering und jedenfalls viel kleiner, als man nach Regnault's Beobachtungen erwarten könnte.

Hier mögen einige Zahlen folgen.

t bedeutet die Temperatur

p den Druck der Luft

$\frac{\Delta}{e}100$ die procentische Abweichung vom Dalton'schen Gesetz (e ist die Spannkraft im Vacuum).

Für Aethyl-Aether

t	p	$\frac{\Delta}{e}100$
63°,6 C.	628 m/m	0,1 %[1]
78,0	647	0,6
99,8	684	1,4.

Für Chloraethyl

t	p		$\frac{\Delta}{e}100$
63°,6 C.	316 m/m	kleiner als	1,4 %
77,5	324	kleiner als	1,6
100,5	340	kleiner als	2,6.

Für Wasserdampf in Luft von etwa ½ Atmosphäre Druck ist bei 100° der wahrscheinlichste absolute Werth von Δ nicht größer als 4—5 m/m.

Man kann also bis zu 100° hinauf das Dalton'sche Gesetz für gesättigte Dämpfe bis auf 1 oder 2 % als richtig ansehen, vorausgesetzt, daß der Druck der Luft nicht zu groß ist.

Die Bestimmung der Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit in einem Gase wird durch die Erscheinungen des Verflüssigungsverzuges, respective Siedeverzuges, welche sehr leicht auftreten können, ganz besonders erschwert. Ein Verflüssigungs- und Siedeverzug kann auch bei reinen Substanzen eintreten.

Die Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit in

1) Der erste Werth ist wahrscheinlich zu klein.

einem Gase ist eine ziemlich unbestimmte Größe, die zwischen gewissen Grenzen schwankt.

Die Lehre von der Spannkraft gesättigter Dämpfe bedarf einer Erweiterung und Vervollständigung. Untersuchungen über die wirkliche Gestalt der Isotherme in der Nähe des Verflüssigungspunktes und eine Vergleichung derselben mit der theoretischen Isotherme sind sehr erwünscht [1]).

Wenn ein indifferentes Gas die Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit verkleinert, so erniedrigt es auch die kritische Temperatur derselben. Die Richtigkeit dieses Satzes ergiebt sich auch aus thermodynamischen Betrachtungen.

Ein ganz geringer Zusatz von Luft kann eine Erniedrigung der kritischen Temperatur einer Flüssigkeit hervorrufen.

Das oben erwähnte Gesetz von Pawlewski ist nicht allgemein gültig, obgleich es zuweilen Resultate liefert, welche mit den Beobachtungen gut übereinstimmen.

Die Erscheinungen, welche das Eintreten des kritischen Zustandes charakterisiren haben bei Gemischen denselben Verlauf, wie bei homogenen Körpern. Man scheint also berechtigt zu sein, ein Gemisch im gewissen Sinne als ein Individuum zu betrachten [2]).

An diese Erfahrungsthatsachen knüpfe ich einige theoretische Betrachtungen an; obgleich dieselben eine Vervollständigung und Erweiterung, insbesondere was die Ausarbeitung der Zustandsgleichung der Gase betrifft, bedürfen werden, führen sie schon jetzt zu Resultaten, welche in ihren Hauptzügen mit den Erfahrungsthatsachen in Uebereinstimmung stehen.

Die Theorie geht aus von Betrachtungen, über die Verzögerung, welche die Bewegungen der Moleküle eines Gases durch andere Gasmoleküle erleiden, und führt zu einem Ausdruck für die innere Cohäsion der Gase, welcher mit demjenigen in der bekannten ersten Clausius'schen Zustandsgleichung [3])

$$\left\{p + \frac{a}{T(v+\beta)^2}\right\}\left\{v - b\right\} = RT$$

vollständig identisch ist. Die einzige zulässige Annahme über die

1) Vergl. Margules Wien. Ber. Sitzung vom 6. Juni 1889.

2) Vergl. Van der Waals Continuität etc. p. 142.

3) Wied. Ann. 9. p. 337. 1880. Diese Zustandsgleichung scheint nach den neueren Untersuchungen Nadeschdin's (Exners Rep. 23 pp. 617, 685 und 759) eine sehr allgemeine Gültigkeit zu besitzen und auch auf den flüssigen Zustand in gewissen Grenzen angewendet werden zu dürfen.

Art und Weise der gegenseitigen Einwirkung verschiedener Moleküle, wenn sie sich umgekehrt proportional der n^{ten} Potenz ihrer Entfernung anziehen, ist, daß auch die kleinsten Theilchen der Materie, die Moleküle, dem Newton'schen Gesetz folgen[1]). Andere Annahmen über n führen zu Ausdrücken, welche mit den synthetischen Eigenschaften der inneren Cohäsion, wie sie durch experimentelle Thatsachen festgestellt sind, im Widerspruch stehen. Auch die Notwendigkeit des Covolumens β im Ausdrucke für die innere Cohäsion ergiebt sich aus theoretischen Gründen.

Durch Verallgemeinerung lassen sich diese theoretischen Betrachtungen auf ein Gemisch zweier Gase übertragen. Die so erhaltene Gleichung enthält Glieder, welche von der einfachen und wechselseitigen Cohässion, sowie auch von der räumlichen Ausdehnung der Moleküle beider Gase abhängen. Die Cohäsion und räumliche Ausdehnung der Moleküle sind eben die beiden Hauptfactoren, welche die Abweichungen vom Dalton'schen Gesetz hervorrufen. Die so erhaltene verallgemeinerte Zustandsgleichung gestattet die wirklichen Partialdrucke beider Gase zu berechnen.

Bei Anwendung dieser Theorie auf die Beobachtungen Andrews' über die Zusammendrückbarkeit eines Gemisches von 3 Vol. CO_2 mit 4 Vol. N_2 hat sich herausgestellt, daß bei den hohen von Andrews angewendeten Drucken, wenn also der Abstand der Moleküle durchschnittlich ein sehr kleiner ist, neue Kräfte ins Spiel kommen, welche bedingen, daß die ungleichartigen Moleküle in diesem Falle sich etwas schwächer anziehen, als es das Newton'sche Gesetz fordern würde. Man gewinnt also auf diesem Wege einen Einblick in gewisse Eigenschaften der Moleküle selber.

Unter Einsetzung der Werthe der Constanten, soweit sie bekannt sind, in der charakteristischen Zustandsgleichung einiger Körper, ergab sich nach dieser Theorie im Allgemeinen eine gute Uebereinstimmung zwischen den berechneten und den beobachteten Werthen von Δ. Auch die negativen Werthe von Δ, welche auf den ersten Blick auffallen könnten, ergeben sich aus theoretischen Gründen als in der Natur der Sache liegend.

Ein Ausdruck für die Erniedrigung der kritischen Temperatur einer Flüssigkeit bei Anwesenheit eines indifferenten Gases läßt sich aus der verallgemeinerten Zustandsgleichung unmittelbar ableiten.

1) Vergl. auch P. Bohl Wied. Ann. 36. p. 334. 1889. B. Galitzine Zeitschr. für phys. Chemie IV. 4. p. 417. 1889.

Die so ausgebildete Theorie sieht auch die Möglichkeit solcher Fälle voraus, wo die kritische Temperatur eines Gemisches außerhalb derjenigen seiner Bestandtheile liegt [1]).

Physikalisches Institut Straßburg i. E.

December 1889.

Kleine Aufsätze.

Von

F. Bechtel.

10. Δωΐς.

In dem Hymnus auf Demeter wird erzählt, daß die Göttin, als sie von Helios gehört, Zeus habe dem Hades ihre Tochter gegeben, die Gestalt einer Alten angenommen und die Städte der Menschen aufgesucht habe. Zuletzt sei sie nach Eleusis gekommen, und habe sich beim Jungfrauenbrunnen im Schatten eines Oelbaumes niedergelassen. Da treten die vier Töchter des Keleos zum Brunnen, Wasser zu schöpfen: auf die Frage der Mädchen, wer sie sei, antwortet sie (V. 122)

Δὼς ἐμοί γ' ὄνομ' ἐστί,

und berichtet, Seeräuber haben sie aus Kreta entführt.

Der Versanfang ist verdorben. Man hat ihn manchfach zu heilen gesucht. Am weitesten Verbreitung hat der Vorschlag gefunden *Δηώ* für *Δώς* zu lesen. Aber er ist aus zwei Gründen unhaltbar. Erstens ist die Entstellung von *Δηώ* in *Δώς* um so unwahrscheinlicher, als *Δηώ* ganz verständlich und schon V. 47 vorgekommen war (Baumeister Hymni Homerici 295). Zweitens würde Demeter, hätte sie *Δηώ* als ihren Namen angegeben, sich der Gefahr ausgesetzt haben ihr Geheimnis sofort zu verraten: ein Dichter, der die Koseform *Δηώ* dreimal als seinen Hörern ganz geläufiges Aequivalent von *Δημήτηρ* gebraucht, kann nicht ohne Weiteres voraussetzen, den Töchtern des Keleos sei sie nicht geläufig gewesen. Die Lesung ist also paläographisch wie sachlich gleich unwahrscheinlich.

Die Wahrheit hat GHermann schon im Jahre 1806 ausgesprochen. »Quam late pateat coniecturae campus, non inficete Her-

---

1) Man ist in der That gewissermaßen berechtigt zu vermuthen, daß solche Ausnahmefälle in Wirklichkeit vorkommen können. Vergleiche z. B. Van der Waals Continuität etc. pp. 142 und 143.

mannus ostendit, quum luderet scribi posse etiam *Δωΐς* vel *Δωάς*«, Baumeister 296. Ließe sich zeigen, daß *Δωΐς* grammatisch und sachlich untadelhaft ist, so müßte dieser Lesung die höchste Wahrscheinlichkeit zugesprochen werden, da sie mittelst der geringfügigsten Aenderung gewonnen werden könnte: ΔωC wäre zunächst aus ΔῳC verdorben, ΔῳC zu der Zeit, als man Iota adscriptum zu subscribieren pflegte, für zweisilbiges, nicht mehr verstandenes, ΔωIC in den Text geraten. Kann nun eine Form *Δωΐς* grammatisch wie sachlich gerechtfertigt werden?

Ich glaube, ja. Unter den auf der Stätte des alten äolischen Aigai jüngst entdeckten Inschriften, die bei Bohn Altertümer von Aigai publiciert sind, finde ich eine, auf der Schuchardt mit Sicherheit den Genetiv [*Δ*]*ώ*[*μ*]*ατρος* hergestellt hat (a. a. O. 42). Schon früher war eine Münze von Kyme mit der Legende *Δωμάτριος* (Mionnet Suppl. 6. 10)[1]) bekannt; die Zweifel an der Richtigkeit der Lesung müssen jetzt verstummen. Es ist also ausgemacht, daß neben *Δαμάτηρ* eine Form *Δωμάτηρ* bestanden hat, die in der Aiolis im Gebrauche war. Daß *ᾱ* mit *ō* im Ablautsverhältnisse steht, ist seit Saussure bekannt; mit dem Verhältnisse von *Δαμάτηρ* zu *Δωμάτηρ* vergleiche man das von *χᾱλαργός* (Soph. El. 861) zu *Χωλαργός* (Pferdename auf einer attischen Vase, Kretschmer K. Z. 29. 411)[2]). Ist aber *Δωμάτηρ* nachgewiesen, so ist auch *Δωΐς* erklärt. *Δωΐς* ist gebildet wie *Ζωΐς*, ist eine Koseform, die überall da möglich und verständlich war, wo als Vollname der Göttin *Δωμάτηρ* galt. Damit ist zugleich gesagt, wie diese Koseform gerade an unsere Stelle kommt: in Eleusis, wo die Göttin unter dem Namen *Δημήτηρ* verehrt wird, setzt sie sich nicht der Gefahr aus ihre wahre Gestalt zu verraten, wenn sie den Töchtern der Stadt, die sie nach ihrem Namen fragen, *Δωΐς* als solchen angibt. Es ist ganz geschickt von dem Dichter, daß er ihr

---

1) Die Münze mit ΔΟΜΑΤΡΙΟΣ, die Mionnet 3. 8 nach dem handschriftlichen Kataloge des Cabinet Cousinéry mitteilt, ist identisch mit der oben erwähnten. »Da die ehemalige Cousinéry'sche Sammlung in München ist, habe ich an Dr. Riggauer geschrieben, der mir so eben berichtet, daß zweifellos ΔΩΜ.. da steht«, Brief Imhoof-Blumers.

2) Auf der gleichen Seite constatiert Kretschmer diesen Ablaut in der auf attischen Vasen zweimal belegten Form ΚΑΜΟΣ des Satyrnamens ***Κῶμος***, und vergleicht, ähnlich wie GMeyer Gr. Gr.² 51, das Verhältnis von att. *θᾶκος* zu zu hom. *θῶκος*. Ich verstehe weder, wie im Attischen ein altes *ᾱ* in dieser Lage sich gehalten haben, noch wie *θᾶκος* als Beleg für ein solches *ᾱ* angeführt werden kann, da die Glosse *θάβακον· θᾶκον. ἢ θρόνον* (Hes.) das attische *ᾱ* als contrahiert erweist.

diese Hindeutung auf eine seltener gebrauchte Form ihres Namens in den Mund legt.

---

11. Ionismen auf Kos.

Statt *δείξω*, *ἔδειξα*, *δέδειγμαι* sagt Herodot bekanntlich *δέξω*, *ἔδεξα*, *δέδεγμαι*; das Präsens *δέκνυμι* ist auf der wichtigsten Inschrift von Chios (Röhl no. 381 *c* Z. 14/15) zu Tage gekommen. Eine Form dieses ionischen Verbums kann ich auf Kos nachweisen: es handelt sich um die Inschrift bei Newton Ancient Greek Inscriptions in the British Museum no. 260. Der Stein ist im Apollontempel zu Kalymna gefunden; wie Newton richtig bemerkt, enthält er den Schluß eines von Kos ausgestellten Decrets, dessen *ἀντίγραφον* den Kalymniern mitgeteilt wird. Die Kalymnier hatten einen koischen Arzt öffentlich belobt und den Wunsch ausgesprochen, das Lob des Gefeierten möchte auch in seiner Heimat verkündigt, zugleich ein Mann mit Errichtung der Stele beauftragt werden. Die Koer beschließen zu willfahren; hinsichtlich der Errichtung der Stele wird bestimmt: [*ἀπο*]|*δεξάντω δὲ καὶ τοὶ προστάται μετὰ τοῦ ἱερέως τοὶ α*[*ἱρεθέν*]|*τες, καθ' ὃν κα χρόνον ἁ ἀνάθεσις τᾶς στάλας γίνηται, τοῖ*[*ον*] | *ὅς κα δοκῆ αὐτοῖς ἐπιτάδειος ἦμεν.* Man sieht: *ἀποδεξάντω* im Werte und an Stelle von *ἀποδειξάντω*; zum Ueberflusse steht auf einem andren, leider stark beschädigten, Steine von Kos bei einer analogen Bestimmung eine Form von *ἀποδείκνυμι*: Bull. de Corr. hell. 5. 223 Z. 11 f. *καὶ ἀναγράψα*[*ι* | — —] *τὸν ἀποδειχθησόμενον.*

Die Inschrift Newtons gehört der Schrift nach (Μ, Ξ, Σ) in das 3. Jahrh. v. Chr. Sie ist die einzige, auf der ich das Verbum *δέκνυμι* im Gebrauche gefunden habe. Auf anderen fungiert *δείκνυμι*: zu der oben angeführten kommt Bull. de Corr. hell. 5. 238 no. 26, wo ΕΝΑΠΟΔ . . . . ΥΣΘΑΙ (Z. 6) für *δείκνυμι* zeugt. Aber trotz ihrer Vereinzelung steht die Form *δεξάντω* für Kos fest, da der Steinmetz augenscheinlich mit großer Sorgfalt gearbeitet hat. Mit der Tatsache eines koischen *ἔδεξα* haben wir also zu rechnen; wie ist sie zu erklären?

Wären *δέκνυμι*, *δέξω* durch ein speciell ionisches Lautgesetz aus *δείκνυμι*, *δείξω* entstanden, so müßten die genannten Formen, wo sie auf nicht-ionischem Boden erscheinen, unweigerlich auf Entlehnung zurückgeführt werden. Aber jene Voraussetzung ist wahrscheinlich irrig (so schon GMeyer² 130), jedenfalls nicht zu beweisen; daher a priori ein *δέκνυμι*, *δέξω*, das auf nicht-ionischem

Gebiete angetroffen würde, mit gleichem Rechte für Fortsetzung einer urgriechischen Form gelten müßte, wie das in einem ionischen Texte stehende Wort. Und doch kann kein Zweifel darüber obwalten, daß *ἀποδεξάντω* nicht auf Kos gewachsen sondern von Ionien aus eingeführt ist. Die Insel liegt dem Chersonese gegenüber, auf dem Halikarnassos, die ionisch redende Stadt, erbaut ist. Verkehr der Insel mit dem Festlande war schon durch dessen Nähe gegeben; es kam dazu das hohe Ansehen des Asklepiostempels und der Ruhm der Aerzte von Kos. Aber Verkehr mit den Nachbarn bedingt noch nicht Einfluß der Nachbarn auf das geistige Leben, auf die Sprache: es kommt auch darauf an, was der Nachbar zu bieten hat. Die Ionier des fünften Jahrhundert waren im Besitze einer nationalen Litteratur, im Besitze einer Schriftsprache (vgl. Wilamowitz Zeitschr. f. Gymnasialwesen 31. 645); die Dorer in ihrer Umgebung nicht. Vermöge dieser geistigen Hegemonie wirken sie auf die Dorer der Hexapolis ein. Daher schreibt Hippokrates von Kos, schreibt später Ktesias von Knidos in schriftionischem Dialekte, daher tragen die Silbermünzen von Ialysos neben ΙΑΛΥΣΙΟΙ auch die Legende ΙΕΛΥΣΙΟΙ (Head Hist. num. 538), wird *Ἰηλύσιοι* die stehende Orthographie der attischen Tributlisten. Also im 5. Jahrhundert ist der Einfluß der ionischen Bildung so groß, daß Hippokrates die ionische Schriftsprache wählt. Ist es da ein Wunder, wenn uns in späteren Zeiten auf Kos vereinzelt Ionismen begegnen? Zu ihrer Erklärung bieten sich zwei Wege. Entweder sie entstammen der Umgangssprache, in die sie von Ionien aus zu der gleichen Zeit eingedrungen waren, in der die ionische Schriftsprache auf Kos adoptiert wurde. Oder sie haben kein wirkliches Leben geführt, sind rein äußerlich von der späteren Schriftsprache aus der früheren übernommen. Diese zweite Erklärung würde auf alle Ausdrücke passen, die formelhafte Wendungen oder Teile solcher Wendungen vorstellen; also gerade auf den Imperativ *ἀποδεξάτω, ἀποδεξάντω,* da die Verbindung *ἀποδέξαι ἄνδρα* zur Formel geworden ist. Unser Material reicht noch nicht dazu aus eine Entscheidung zu treffen; vielleicht bringt uns das angekündigte Werk des Herrn Paton weiter.

Daß meine Auffassung des koischen *ἀποδεξάντω* richtig ist, wird durch eine zweite Spur ionischen Einflusses auf Kos bewiesen. Auf dem überaus wichtigen Festkalender von Kos, dessen Fragmente von Hicks Journal of Hellenic Studies 9. 323 ff. zusammengestellt und besprochen sind, finde ich zweimal (S. 334 Z. 56. 61) die Schreibung *κνέοσα* neben einmaligem *κνεῦσα* (S. 327

Z. 2). Diese Orthographie ist von Ionien entlehnt; sie begegnet freilich auch bei andern Dorern, aber nur bei solchen, die in ionischer Umgebung oder unter ionischem Einflusse leben. Ein knidisches Tetradrachmon vom Ende des 5. Jahrhunderts trägt die Aufschrift ΕΟΒΩΛΟ[Σ], Head Hist. num. 524. Nach Knidos gehört vielleicht auch der Henkel CIG. no. 2121 *'Επὶ Καλλία.* | *Εὀπάμονος*, der in Phanagoreia gefunden wurde. Im Gebiete des alten Theodosia ist die Grabschrift *Πύρρος* | *Εὀρυνόμο[υ]* *'Ηρακλειώτας* (Samml. no. 3083) ausgegraben; der Verstorbene war aus Herakleia unter Ionier gewandert, und Der, der ihm die Grabschrift setzte, schrieb sie in ionischer Orthographie. Also sicher ist, daß, wo Dorer ΕΟ für ΕΥ schreiben, Ionier ihre Lehrer gewesen sein können. Und darum halte ich *κυέοσα* für einen Beweis der Einwirkung ionischer Schriftsprache auf Kos — für einen zweiten Beweis, wenn man den Imperativ *ἀποδεξάντω* auf die Schriftsprache beschränkt wissen will.

Hicks hat auch in dem *'Αμφιαρηΐς* des erwähnten Kalenders (Bull. de Corr. hell. 5. 220 Face A Z. 7 = Hicks 326) einen Ionismus sehen wollen. Aber die korinthische Vaseninschrift *'Αμφιάρηος* (Blass Samml. no. 3140, Kretschmer K. Z. 29. 172 no. 35), nach der die entsprechenden Aufschriften einiger attischer Vasen beurteilt werden müssen (Kretschmer a. a. O. 415 f.), widerlegt diese Ansicht, indem sie lehrt, daß als urgriechische Form des mythischen Namens *'Αμφιάρηϝος* anzusetzen ist (Wackernagel K. Z. 27. 265), *'Αμφιαρηΐς* also in Einer Linie steht mit dem von Hicks selbst angeführten Namen *'Αλκηΐδες*[1]) (334 Z. 60). Das *η* dieser Bildung ist urgriechisch, und braucht um so weniger aus Ionien nach Kos importiert zu sein, als es hier in einer enge verwandten Kategorie ebenfalls zu Tage tritt, wo es auf ionische Rechnung gar nicht gesetzt werden kann: im Dat. Sg. der *ευ*-Stämme (*Πολιῆϊ*, *Μαχανῆϊ* bei Hicks 328 *a* 11, 13 und sonst), in dem die alte Länge bei den Ioniern bekanntlich fast ganz ausgemerzt ist. — Eher könnte eine andere Bildung, die Hicks überall eliminiert, den Ioniern zugeschoben werden. Bull. de Corr. hell. 5. 220 A Z. 5 steht *ἐπιρεξέτω* ΤΕΛΕΩΝ, Hicks 328 Z. 13 und 14/15 *ὄϊες τρεῖς* ΤΕΛΕΩΙ, 334 Z. 61 *ὄϊς* ΤΕΛΕΩΣ. An der Existenz eines koischen Nom. Sg. Masc. ΤΕΛΕΩΣ ist also nicht zu zweifeln. Wie aber diese Form zu dem gewöhnlichen *τέλειος*, von dem man es

---

1) *'Αλκηΐς* ist Femininum zu *'Αλκεύς*, der grammatischen Voraussetzung zu *'Αλκείδας*. Der Name hängt mit der Verehrung des Herakles zusammen, die für Kos jetzt auch durch das erste Fragment des Festkalenders bezeugt wird.

nicht trennen mag, sich verhalte, weiß ich nicht zu sagen. Das ΑΡΝΕΩΣ der attischen Inschrift CIA. 2 no. 844 bringt uns nicht weiter. Hätte Meisterhans (Gramm. d. att. Inschr.[2] 100) Recht das Wort mit *ἀρνειός* zu identificieren, so ständen wir in Attika vor dem gleichen Rätsel. Ich sehe nicht, wie man auf lautlichem Wege von *-ειος* zu *-εως* kommen will, und habe auf der anderen Seite keine Lust mich bei einer nach der Formel *Ὁ δράκων γάρ ἐστι μακρὸν ὅ τ' ἀλλᾶς αὖ μακρόν* aufgestellten analogistischen Erklärung zu beruhigen.

---

12. Der Ursprung der *Ταυροκαθάψια*.

Der nachfolgende Aufsatz ist bei einem Versuche den Dialekt von Kos zu begreifen nebenher abgefallen. Ich glaube ein neues Zeugnis für die Geschichtlichkeit der im Schiffskataloge niedergelegten Sage beibringen zu können, die die ältesten griechischen Besiedler der Insel von Thessalien ausgehn läßt. Es ist für mich hier gleichgiltig, ob diese Achäer direct von Thessalien aus oder über Epidauros nach Kos gekommen sind: bloß darauf, daß überhaupt ein Zusammenhang zwischen den beiden Gebieten besteht, kommt es mir an.

* * *

Wir wissen, daß bei den Thessalern bis in die Zeit Theodosius des Großen das Fest der *Ταυροκαθάψια* in hohem Ansehen gestanden hat (die Stellen bei Böckh zu Schol. Pind. Pyth. 2. 79). Eine gottesdienstliche Grundlage dieses Festes hat schon KFHermann (Gottesd. Altert.[2] 446) vermutet und an den »in Thessalien sehr verbreiteten Cult des Poseidon« (451) gedacht. Ich glaube eine abweichende Meinung rechtfertigen zu können: Ausgangspunkt war nicht der Cult des Poseidon, sondern das jährlich dem Zeus Polieus unter charakteristischen Cärimonien dargebrachte Opfer, das ich auf Grund der folgenden Erwägungen den Thessalern zuweisen möchte.

Was ist das Wesentliche des thessalischen Volksfestes? Das lehrt ein Ausdruck, der auf einer von Lolling (Mittheil. des archäol. Instit. 7. 346 *a* = Prellwitz De dial. thessal. 2 no. III) publicierten Inschrift steht und von dem Herausgeber schlagend richtig auf die *Ταυροκαθάψια*[1]) bezogen wird: *ταῦρον πεφειράκον-*

---

1) Lolling schreibt *Ταυροκαθαψία*; in Rücksicht auf die Glosse des Hesych

[τες], attisch ταῦρον τεθηρακότες. Dieser Ausdruck erläutert zugleich den Namen Βουθήρας, der auf mehreren nordgriechischen Inschriften belegt ist: ein Aeniarch heißt Ἵππαρχος Βουθήρ[α], Coll. no. 1431 a_6, ähnlich ein Archont der Lamier --ισκος Βουθή(ρ)α Coll. no. 1445$_9$. Also das Treiben von Stieren ist das Wesentliche der Ταυροκαθάψια.

Das Treiben von Stieren ist aber auch das Wesentliche innerhalb einer bestimmten, auf Kos vorgeschriebenen Culthandlung, von der wir kürzlich Kunde erhalten haben. Das zweite der von WRPaton entdeckten Fragmente des Festkalenders von Kos (Hicks a. a. O. 332 f.) enthält eine genaue Beschreibung der Cärimonien, unter denen das Fest des Zeus Polieus jährlich am 19. und 20. Tage des Monats Batromios begangen werden soll. Die Ausführlichkeit, mit der die rituellen Vorschriften behandelt werden, läßt auf das Ansehen schließen, in dem das Fest gestanden haben muß. Der erste Act besteht in der Auswahl des Ochsen, der als Opfer zu fallen hat. Und bei dieser Auswahl spielt das Jagen von Rindern die Hauptrolle. Es wird angeordnet, daß eine bestimmte Anzahl Ochsen über den Markt getrieben (ἐλάντω) und zwar an die τράπεζα herangetrieben werden (ἐπελάντω), an der ἱερεύς und ἱεροποιοί Platz genommen haben. Zunächst stellt jede der drei Phylen, die nach Hicks' höchst ansprechender Vermutung je drei χιλιαστύες umfassen, dreimal je drei (also je einen auf die χιλιαστύς) ihrer schönsten Ochsen zur Auswahl. Hat keines der 3×3×3 Tiere die Probe bestanden, so soll noch einmal aus jeder χιλιαστύς ein Ochse ausgewählt werden (ἐπικρίνονται); nach Hicks' Vermutung wären also noch ein viertes Mal 3×3 Ochsen gegen die τράπεζα getrieben worden. Das erwählte Opfertier wird dann durch Herolde auf den Markt (zurück) geführt; der bisherige Eigentümer oder dessen Bevollmächtigter ruft aus »Κώιοις παρέχω τὸν βοῦν«, worauf der ἱερεύς das Schlachtopfer bekränzt (στέπτει; vgl. ἐρέπτω zu ἐρέφω).

Nehmen wir an, daß diese Culthandlung einst auch in Thessalien heimisch gewesen ist, so haben wir die sacrale Grundlage des späteren Volksfestes gefunden: in den Ταυροκαθάψια dürfen wir dann die Entartung eines alten Cultgebrauches zum Sporte erkennen. Allein — sind wir berechtigt zu jener Annahme?

Zunächst ist zuzugeben, daß das Treiben von Rindern als Teil einer Opferhandlung nicht auf Kos, ja nicht einmal auf das Hel-

---

άψίαι· ἑορταί. Λάκωνες? Aber auf einer Inschrift aus Smyrna CIG. no. 3212 steht Ταυροκαθαψίων ἡμέρα β.

lenentum beschränkt ist. Um das Bekannteste anzuführen: Athen und Iguvium kennen die Sitte. In Athen werden an den Dipolien, also an einem ebenfalls dem Zeus Polieus geheiligten Feste, eine Anzahl Ochsen gegen des Gottes Altar getrieben, auf den die heilige Gerste gestreut ist; das erste Tier, das von der Gerste frißt, wird von dem *ἱερεὺς ὁ βουφόνος* erschlagen (Litteratur bei Band De Diipoliorum sacro Atheniensium, Leipziger Dissertation von 1873). Zu Iguvium bildet das Jagen und Opfern von Kühen den Abschluß der Entsühnung des Volks. Der Adfertor und seine beiden Gehülfen[1]) treiben nach der älteren Recension drei, nach der jüngeren zwölf[2]) Kühe über das Comitium (super kumne); unten am Forum (*hondra furo*) werden die drei, resp. drei von den zwölfen, eingefangen und der Tursa Iovia geopfert. Man beachte, daß es auch in Umbrien eine in den Kreis des alten Himmelsgottes gehörende Gottheit ist, der das Rindertreiben und Rinderopfern gilt.

Was mich aber bestimmt den thessalischen Sport und den koischen Opfergebrauch mit einander in Zusammenhang zu bringen, also den Cultus des Zeus Polieus mit seinem chrakteristischen Cäremoniell den Thessalern zuzuschreiben, ist die Tatsache, daß die uralte Verbindung zwischen Thessalien und Kos von der Sage behauptet, durch die Einbürgerung des in Thessalien heimischen Asklepiosdienstes auf Kos bewiesen wird (Wilamowitz Isyllos 52 ff.). Es ist also gerade ein religiöses Moment, in welchem die von der Sage vorausgesetzte Abhängigkeit der Insel von Thessalien ihren Ausdruck findet. Um so weniger darf die Uebereinstimmung in der Sitte des Stierjagens für Zufall gehalten werden. Der Cultus, bei dem sie auf Kos noch im 4. Jahrhundert bestand, ist von den gleichen Leuten ausgegangen, die den Cultus des Asklepios nach Kos brachten. Und so sehe ich in der Möglichkeit das profane thessalische Fest aus einer auf Kos geltenden sacralen Institution abzuleiten eine weitere Bestätigung der alten Sage, die zwei Söhne des Thessalos zu den Herren von Kos macht.

---

1) Dem *porse perca arsmatia habiest* entspricht auf Kos der *ἱερεὺς ἔχων τὰν ῥάβδον τὰν ἱεράν* (so von Hicks ergänzt), den *prinvatur* die *ἱεροποιοί*, deren Anzahl freilich nicht angegeben wird.

2) So nach Büchelers richtiger Auffassung (Umbrica 117). Aber seine Uebersetzung der Verbalform *ehiato* (Tafel VII b Z. 3) mit 'emissas' hätte Bücheler nicht wiederholen sollen, da umbr. *ehiato* sich Laut für Laut mit lat. *egeatur* deckt.

13. *Κυράνα.*

Unter den Argumenten, mit denen Studniczka (Kyrene, Eine altgriechische Göttin) die thessalische Herkunft der vordorischen Colonisten von Thera begründet, steht die Thatsache im Vordergrunde, daß „die Eponyme der neuen Stadt [Kyrene] die Tochter eines thessalischen Königs ist und von Thessalien nach Kyrene entführt wird" (132). Im Laufe der Untersuchung versucht Studniczka auch eine Etymologie des Namens *Κυράνα*: er stellt ihn zu *κύριος* (151). Ich halte diese Etymologie für verfehlt, schon aus dem Grunde, weil die Quantität der Vocale der ersten Silbe in unerklärbarer Weise differiert[1]). Denn *κῡ'ριος* gehört zunächst zu sskr. *çū'ras*; ein Ablaut *ū*: *u* wird für diese Wortsippe durch das Hineinziehen von gr. *ἐκυρός*, sskr. *çváçuras* nicht erwiesen, auch ist *κῦρος* nicht aus *κύρσος* entstanden, der Vocal der Wurzelsilbe vielmehr schon vorgriechisch *ū* gewesen. Auch andere Etymologien des gedankenreichen Buches sind nicht glücklich. Für *Κυράνα* glaube ich eine abweichende vorschlagen zu können, die den Lauten keine Gewalt antut: *Κυράνα* hängt aufs engste zusammen mit *Κορωνίς*, dem Namen der anderen Lapithenjungfrau, der Apollon seine Liebe schenkte.

Κορωνίς ist das Feminum zu *Κορωνός*, *Κορωνός* eine Erweiterung von *Κόρων*, *Κόρων* Koseform zu Vollnamen wie *Κόροιβος*. Auf der großen Inschrift von Larisa werden hinter einander *Ἀντιφάνεις Κορούνειος*, *Ἀρισ[το]φάνεις Κορούνειος* genannt; *Κορούνειος* kann Patronymicum zu *Κόρων* wie zu *Κορωνός* sein. Von *Κόρων* abgeleitet ist *Κορώνη*: so heißt eine Tochter des Apollon, und eine Stadt in Messene, in der nach Pausanias ein *Ἀπόλλων Κόρυδος* verehrt wurde (Baunack Stud. 1. 156 f.). Die Koseformen auf *-ν* sind dadurch ausgezeichnet, daß der volle Dreiklang *ᾱ η ω* als Ablaut in ihrer Endung erscheint. Für die Koseformen auf *-ων* bedarf es weiterer Belege nicht. Die auf *-ήν* sind bisher am häufigsten auf Münzen von Dyrrhachion und Apollonia beobachtet (Blass Coll. no. 3225). Sie sind von den erstgenannten deutlich durch den Accent geschieden: *Δάμων*, *Λύσων*, *Πύθων* neben *Δαμήν*, *Λυσήν*, *Πυθήν* (Fick GGA. 1880. 425). Die dritte Gruppe wird durch eine stattliche Reihe von Völkernamen gebildet: *Ἀζᾶνες*, *Ἀθαμᾶνες*, *Αἰνιᾶνες*, *Ἀκαρνᾶνες*, *Ἀτιντᾶνες*, *Εὐρυτᾶνες*, *Κεφαλλᾶνες*, *Φοιτιᾶνες* (Böckh zu CIG. no. 1793); wie man sieht,

---

1) Diese Schwierigkeit hat Wilamowitz in einer Unterhaltung mit mir hervorgehoben.

gehören sie größten Teils nordwestgriechischen Stämmen an. Daß $\bar{\alpha}$ nicht etwa, wie das $\bar{\alpha}$ von Ἀλκμάν, durch Contraction entstanden ist, beweist das ionisch-attische η in Ἀζῆνες und Κεφαλλῆνες. Nach Nordwestgriechenland gehört auch der wichtigste dieser Namen, Ἕλλᾱν; der wichtigste darum, weil wir zu ihm allein den Vollnamen kennen, Ἕλλοψ. Womit der Wechsel des Accents zusammenhänge, weiß ich nicht; eben so wenig, auf welche Weise das $\bar{\alpha}$ dieser dritten Gruppe mit dem η und ω der beiden ersten in Verbindung stehe. Hier handelt es sich nur um den Beweis, daß als Koseformen neben Κόρων sowol Κορήν wie Κόρᾱν oder Κορᾶ'ν theoretisch denkbar sind. Zu Κόρων nun ist das Feminum Κορώνᾱ, Κορώνη erhalten. Zu Κορήν würde analog Κορήνᾱ gehören; ein derartiges Femininum könnte in Ἀλκμήνα gesehen werden, wenn die Ueberlieferung bei Pindar (Ahrens Dial. Dor. 134) altes Sprachgut gewahrt haben sollte. Und endlich, das Femininum der dritten Koseform liegt in Κυρᾶ'νᾱ vor; υ für o ist thessalisch, die Ersetzung des o durch υ auch in dem Stadtnamen Γύρτων (ΓΥΡΤΩΝΙΩΝ auf Münzen von 400—200, Head Hist. num. 251) zu belegen, der von Γόρτυν nicht getrennt werden darf.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

November 1889.

(Fortsetzung.)

Società R. di Napoli. Atti d. A. d. scienze fisiche e matematiche. Serie seconda. Vol. III. 1889.
Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane. 1889. N. 92—94.
Archives Neerlandaises des sciences exactes et naturelles. Tome XXIII. Livr. 3. Harlem 1889.
Adam et Christus. Epistola ad Abraham. Carmina probata ab Academia Regia. Amsterdam.
Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Amsterdam.
a. Verhandelingen. Afdeeling Letterkunde. Deel 18. 1889.
b. Verslagen en Mededeelingen. Afdeeling Letterkunde. 3de Reeks. 5. Deel. 1889.
c. Verslagen en Mededeelingen. Afd. Letterkunde. 3de Reeks. 5. Deel. 1888.
d. Jaarboek voor 1888. Amsterdam.
Bergens Museums Aarsberetning for 1888. Bergen 1889.
Finlands Geologiska Undersökning
a. Kartbladed 12, 13, 14.
b. Beskrifning till kartbladed. N. 12, 13, 14, 15.

Journal de sciencias mathematicas e astronomicas. Vol. IX. N. 3. Coimbra 1889.
Anales de la sociedad cientifica Argentina. Jun—Agosto 1889 = T. 27. 6 und T. 28 i. 2. Buenos Aires. 1889.

Nachträge.

H. M. S. Challenger 1873—78. Zoology. Vol. XXXII.
Lotos. Jahrbuch für Naturwissenschaft. Neue Folge. Band X. D. g. R. 38ster Band. Wien 1890.
Jahrbuch der Hamburgischen wissenschaftlichen Anstalten. Jahrg. VI. 2te Hälfte. 1888. Hamburg 1889.
Natural history of Victoria. Prodromus of the Zoology of Victoria; etc. Decade XVIII. Melbourne and London 1889.

December 1889.

Sitzungsberichte d. K. Pr. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin. XLVII XLVIII. XLIX. L. LI. LII.
Festschrift der mathematischen Gesellschaft in Hamburg anläßlich ihres 200jährigen Jubelfestes 1890. Theil 1. Leipzig 1890.
Fünfzehn Vorträge aus der Brandenburgisch-Preußischen Rechts- u. Staatsgeschichte v. Ad. Stölzel. Berlin 1889.
Leopoldina. Heft XXV. N. 21—22. Halle a. d. Saale.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Band XIX. Jahrgang 1887. Heft 1. Berlin 1889.
Heinrich von Dechen, ein Lebensbild von H. Laspeyres. Bonn 1889.
Deutsches Meteorologisches Jahrbuch für 1887.
Beobachtungssystem des Königreiches Sachsen. Hälfte 1. Abth. 1 u. 2. Hälfte 2 od. Abth. III. V. Jahrg. 1887. Chemnitz 1888/89.
Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Jahrg. 24. Heft 4°. Leipzig 1889.
Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien:
a. Denkschriften Mathematisch-naturwissensch. Classe. Band 55. Wien 1889.
b. Sitzungsberichte.
  1. Philosophisch-historische Classe. Band CXVII. Jahrg. 1888. Band CXVIII. Jahrg. 1889.
  2. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Erste Abtheilung. 1888. Band XCVII. VI. u. VII. Heft. VIII. bis X. Heft. 1889. Band XCVIII. 1—3. Heft.
  3. Mathem.-naturwissensch. Classe. Abth. IIa. 1888. Band XCVII. Heft VIII. Heft IX—X. 1889. Band XCVIII. Heft I, II u. III.
  4. Math. u. naturw. Classe. Abtheilung IIb. 1888. Band XCVII. Heft VIII—X. 1889. Band XCVIII. Heft I—III.
  5. Math. u. naturw. Classe. Abtheilung III. 1888. Band XCVII. Heft VII —X. 1889. Band XCVIII. Heft 1—4.
c. Archiv für österreichische Geschichte. Band 74. Hälfte 1. Hälfte 2. 1889.
d. Almanach. Jahrg. 39. 1889.
e. Register zu den Bänden 91—96 der Sitzungsberichte. Math.-phys. Classe. XII. Wien 1888.
f. Mittheilungen aus dem Vaticanischen Archive. Band 1. Wien 1889.
g. Venetianische Depeschen vom Kaiserhofe. Band 1. Wien 1889.
Meteorologische Zeitschrift. Jahrg. 6. 1889. Heft 12. Dez. Band XXIV der Zeitschrift d. Oesterr. Ges. für Meteorologie. Wien.
Mittheilungen des Musealvereins für Krain. Jahrgang 1. Leibach 1866. Jahrg. II. Leibach 1889.
Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau 1889. Oktober, November. Krakau 1889.
Ungarische Revue. Heft X. 1889. Neunter Jahrgang. Budapest 1889.
The collected mathematical papers of Arthur Cayley. Vol. II. Cambridge 1889.

Nature. Vol. 41. N. 1049—1053.
Journal of the R. microscopical society 1889. Part 6. December. London and Edinburgh.
Monthly notices of the R. astronomical society. Vol. L. N. 1. 1889.
a. Teckeningar ur svenska etatens historiska Museum. Forsta häftet. Serie IV. Andra häftet. Serie VI. Tredje häftet. Serie V. By Br. E. Hildebrand och Hans Hildebrand. Stockholm.
b. Svenska Sigiller fran Medeltiden af Br. E. Hildebrand. 1. 2. Stockholm 1862—67.
c. Anglosachsiska mynt: Sv. Kongl. Mynt kabinet ordnade och beskrifna of Br. E. Hildebrand. Erste und zweite Auflage. Stockholm 1846 u. 1881.
d. Akademiens Månadsblad, årgånge 1882—1889.
e. Sveriges och svenska Konungahusets minne spenningar praktmynt och belönnings medaljer. Del 1 och 2. By Br. E. Hildebrand. Stockholm 1874—75.
f. Minnespenningar öfver enskilda svenska män och qvinnor af Bror. Emil Hildebrand. Stockholm 1860.
g. Antiqvarisk Tidskrift for Sverige del II, III 1, 2, 3—4. IV 1, 2, 3 u. 4. V 1, 2, 3. VI 1, 2, 3, 4. VII 1—3, 4. VIII 1 u. 2. IX 1 u. 2. X 1 u. 2, 3 u. 4, 5. By Br. E. Hildebrand och Hans Hildebrand. Stockholm.
Bulletin de l'Académie Imp. de sciences de St. Petersbourg. Nouvelle série 1. (XXXIII). N. 2.
Bulletin de la société Imp. des naturalistes de Moscou. Année 1889. N. 2. Moscou 1889.
Bulletin de l'Académie Royale de Belgique. Année 59. série 3. tome 18. N. 9—10, N. 11. Bruxelles 1889.
Atti della R. Accademia dei Lincei 1889. Rendiconti. Vol. V. fasc. 5, 6. Roma.
Biblioteca nazionale centrale di Firenze. Bollettino delle publicazioni italiane. 1889. N. 95. 96.
Mémoires de l'Académie des sciences et lettres de Montpellier. Tome VIII. fasc. III. Année 1888—89. Montpellier.
Journal de l'école polytechnique. 58. cahier. Paris 1889.
Société des Antiquaires de Picardie:
a. Mémoires. 3eme série. Tome X.
b. Bulletin. Année 1889. N. 1. Titelblatt u. Reg. zu B. XVI.
Annales du musée Guimet. Revue de l'histoire des religions. Xieme année. Tome XIX. N. 1, 2, 3. Paris.
Annales de la société Linnéenne de Lyon. Année 1885, 86, 87. Tome 32, 33, 34.
Annales de la société d'agriculture, histoire naturelle et arts utiles de Lyon. 5ieme série. Tome 9 et 10. 1886 et 1887. 6ieme série. Tome I. 1888. Lyon-Paris.
Mémoires de l'Académie des sciences, belles lettres et arts de Lyon:
a. Classe des sciences. Vol. 28 et Vol. 29.
b. Classe des lettres. Vol. 24, 25, 26. Paris et Lyon.
Le procès de la nomenclature botanique et zoologique par le Dr. Saint-Lager. Paris 1886.
Recherches sur les anciens herbaria par le Dr. Saint-Lager. Paris 1886.
Bulletin de la société mathématique de France. Tome XVII. N. 5.
Bibliothèque nationale. Manuscrits arabes. Fasc. 2. 1889. pag. 337—656.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

26. Februar. | **№ 2.** | 1890.

Universität.

Verzeichniß der Vorlesungen auf der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen während des Sommerhalbjahrs 1890.

Die Vorlesungen beginnen den 15. April und enden den 15. August.

Theologie.

Geschichte Israels: Prof. *Smend* viermal um 10 Uhr.

Alttestamentliche Theologie: Prof. *Schultz* fünfmal um 10 Uhr.

Erklärung der Psalmen: Prof. *Smend* viermal um 11 Uhr.

Einleitung in das Neue Testament: Lic. *Weiss* fünfmal um 7 Uhr.

Synoptische Erklärung der drei ersten Evangelien: Prof. *Lünemann* sechsstündig um 9 Uhr.

Erklärung des Evangeliums Johannis: Prof. *Wiesinger* fünfstündig um 9 Uhr.

Erklärung des Hebräerbriefs: Prof. *Häring* dreistündig, Montags, Dienstags und Mittwochs um 9 Uhr.

Kirchengeschichte des Alterthums und Mittelalters: Prof. *Wagenmann* sechsmal um 8 Uhr.

Kirchengeschichte der neueren Zeit von der Reformation bis zur Gegenwart: Prof. *Tschackert* fünfmal um 8 Uhr.

Kirchengeschichte von Hannover und Braunschweig: Prof. *Wagenmann* viermal um 7 Uhr.

Apologie des Christenthums: Prof. *Schultz* fünfmal um 12 Uhr.

Dogmatik II. Theil: Prof. *Häring* fünfmal um 11 Uhr.

Symbolik: Prof. *Tschackert* fünfmal um 4 Uhr.

Praktische Theologie: Prof. *Wiesinger* vierstündig um 3 Uhr.

Geschichte und System der Pädagogik: Prof. *Knoke* viermal um 5 Uhr.

Praktisch-theologische Erklärung des kleinen Katechismus von Martin Luther: *Derselbe* dreistündig, Montags, Dienstags und Donnerstags um 4 Uhr.

Kirchenrecht s. unter *Rechtswissenschaft* S. 43.

Die alttestamentlichen Uebungen der wissenschaftlichen Abtheilung des theologischen Seminars leitet Prof. *Smend* Dienst. um 6 Uhr; die neutestamentlichen Prof. *Wiesinger* Montags um 6; die kirchen- und dogmenhistorischen Prof. *Wagenmann* Freitags um 6; die dogmatischen Prof. *Schultz* Donnerstags um 6 Uhr.

Die homiletischen Uebungen der praktischen Abtheilung des theologischen Seminars leiten abwechslungsweise Prof. *Schultz* und Prof. *Knoke* Sonnabends 9—11 Uhr öffentlich; die katechetischen Uebungen Prof. *Wiesinger* am Mittwoch von 2—3 Uhr und Prof. *Knoke* Sonnabends 2—3 Uhr öffentlich; die liturgischen Uebungen *Derselbe* Sonnabends 9—10 und 11—12 Uhr öffentlich.

Ein dogmatisches Conversatorium hält Prof. *Häring* einmal öffentlich.

Kirchengeschichtliche Uebungen: Prof. *Tschackert* Montags von 5—7 Uhr privatissime und gratis.

Exegetische Uebungen hält privatissime und gratis Lic. *Weiss.*

Rechtswissenschaft.

Institutionen des römischen Rechts: Montag bis Freitag von 8—9 Uhr und Mittwoch von 7—8 Uhr Prof. *Regelsberger.*

Geschichte des römischen Rechts: Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 7—8 Uhr Prof. *J. Merkel.*

Pandekten I. Teil (Allgemeine Lehren, Sachenrecht, Obligationenrecht): Montag, Mittwoch, Donnerstag, Sonnabend von 8—10, Dienstag und Freitag von 8—9 Uhr Prof. *J. Merkel.*

Pandekten II. Teil (Familien- und Erbrecht): Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 7—8 Uhr Prof. *Regelsberger.*

Pandektenpraktikum: Mont., Mittw., Freitag von 12—1 Uhr Prof. *v. Jhering.*

Exegetische Uebungen in den Digesten: Montag von 5—7 Uhr Prof. *Regelsberger*.

Conversatorium über Pandekten: Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 4—5 Uhr Dr. *Goldschmidt*.

Deutsche Rechtsgeschichte: Montag bis Freitag von 7—8 Uhr Vorm. Prof. *Dove*.

Deutsches Privatrecht mit Lehnrecht: Montag bis Freitag von 12—1 Uhr Prof. *Ehrenberg*.

Handels- Wechsel- und Seerecht: Montag bis Freitag von 8—9 Uhr Prof. *Frensdorff*.

Preußisches Privatrecht: Dienstag bis Freitag von 10—11 Uhr Prof. *Ziebarth*.

Vergleichendes Erbrecht: Sonnabend von 10—11 Uhr Prof. *Ziebarth* (öffentlich).

Die Grundzüge des Entwurfs eines bürgerlichen Gesetzbuchs für das deutsche Reich II. Teil (Familien- und Erbrecht): Freit. von 5—6 Uhr Prof. *Planck* (öffentlich).

Der privatrechtliche Inhalt der deutschen Socialgesetzgebung: Sonnabend von 11—1 Uhr Dr. *Goldschmidt* (öffentlich).

Strafrecht: Dienst. bis Sonn. von 11—12 Uhr Prof. *Ziebarth*.

Deutsches Staatsrecht: Mont. bis Freit. von 9—10 Uhr Prof. *Frensdorff*.

Kirchenrecht: Montag bis Freitag von 8—9 Uhr Prof. *Dove*.

Civilprozeß: Montag bis Freit. von 10—11 Uhr Prof. *v. Bar*.

Strafprozeß: Mont., Dienst., Donnerst., Freit. von 11—12 Uhr Prof. *v. Bar*.

Vorlesungen über *Staatswissenschaft* s. S. 51.

Medicin.

Zoologie, Botanik, Chemie s. unter *Naturwissenschaften*.

Knochen- und Bänderlehre trägt Prof. *Fr. Merkel* am Dienst., Donnerstag u. Sonnabend von 11—12 Uhr vor.

Der systematischen Anatomie II. Theil, Gefäß- und Nervenlehre, lehrt Prof. *Fr. Merkel* täglich von 12—1 Uhr.

Allgemeine Anatomie lehrt Prof. *Fr. Merkel* Mont., Mittwoch u. Freitag, von 11—12 Uhr.

Mikroskopische Uebungen für Anfänger hält Prof. *Fr. Merkel* mit Dr. *Disse* Montag von 5—7 Uhr u. Donnerstag von 4—5 Uhr.

Anatomische Untersuchungen leitet Prof. *Fr. Merkel* öffentlich in zu bestimmenden Stunden.

Mikroskopische Uebungen für Geübtere hält vierstündlich Dr. *Disse.*

Mikroskopische Curse in der speciellen Histologie hält Prof. *Krause* viermal wöchentlich um 2 Uhr oder zu passender Zeit.

Physiologie mit Erläuterungen durch Versuche und mikroskopische Demonstrationen trägt Prof. *Herbst* 6 Stunden wöchentlich um 10 Uhr vor.

Experimentalphysiologie I. Theil lehrt Prof. *Meissner* täglich um 10 Uhr.

Physiologie der Zeugung und Embryologie lehrt Prof. *Meissner* Freitag von 5—7 Uhr.

Arbeiten im physiol. Institut leitet Prof. *Meissner*.

Allgemeine Aetiologie lehrt Prof. *Orth* Montag u. Mittwoch von 3—4 öffentlich.

Allgemeine Pathologie lehrt privatim Prof. *Orth* Montag bis Freitag von 12—1 Uhr.

Practische Uebungen in der patholog. Histologie hält Prof. *Orth* Dienstag und Freitag von 3—5 Uhr.

Sections- und diagnostische Uebungen leitet Prof. *Orth* in passenden Stunden.

Physikalische Diagnostik verbunden mit Uebungen lehrt Prof. *Damsch* Dienstag, Mittwoch u. Freitag von 4—5 Uhr.

Ueber physikalische Heilmethoden mit besoderer Berücksichtigung der Elektrotherapie und mit Uebungen am Krankenbett trägt Prof. *Damsch* Montag u. Donnerstag von 4—5 Uhr vor.

Laryngoskopische Uebungen hält Prof. *Damsch* Sonnabend von 12—1 Uhr.

Ueber Impftechnik, verbunden mit Uebungen im Impfen trägt Prof. *Damsch* zu passenden Stunden vor.

Arzneimittellehre und Receptirkunde verbunden mit Experimenten und Demonstrationen sowie mit praktischen Uebungen im Receptiren und Dispensiren lehrt Prof. *Marmé* dreimal wöchentlich, Montag, Dienstag und Donnerstag von 5—6 Uhr.

Specielle Toxicologie, I. Th., für ältere Mediciner lehrt in Verbindung mit Experimenten zweimal wöchentlich, Montag und Donnerstag von 2—3 Uhr, Prof. *Marmé.*

Die Arzneiverordnungslehre trägt Prof. *Husemann* 3 mal wöchentlich in später zu bestimmenden Stunden vor.

Ueber eßbare und giftige Pilze trägt Prof. *Husemann* öffentlich Donnerstag von 5—6 Uhr vor.

Ein pharmakognostisches Practicum mit mikroskopischen Uebungen hält für Pharmaceuten Prof. *Marmé* Mittwoch von 10—12 Uhr.

Arbeiten im pharmakologischen Institut leitet Prof. *Marmé* tägl.

Specielle Pathologie und Therapie I. Hälfte lehrt Prof. *Ebstein* täglich außer Montag, von 7—8 Uhr.

Die medicinische Klinik hält Prof. *Ebstein* täglich, und zwar fünfmal von 10¾—12 Uhr, Sonnabend von 9¼—10¾ Uhr.

Die Untersuchung des Harns und Sputums mit practischen Uebungen leitet Prof. *Ebstein* mit Dr. *Nicolaier* 1 mal wöchentlich in zu verabredender Stunde.

Allgemeine Chirurgie lehrt Prof. *Rosenbach* dreimal wöchentlich von 8—9 Uhr Morgens, Dienstag, Mittwoch und Freitag.

Allgemeine Chirurgie lehrt Prof. *Lohmeyer* fünfmal wöchentlich von 8—9 Uhr.

Chirurgische Klinik hält Prof. *König* täglich mit Ausnahme Sonnabends von 9½—10¾ Uhr.

Medicinische Poliklinik hält Prof. *Damsch* täglich von 12 Uhr an öffentlich.

Chirurgische Poliklinik hält Prof. *König* gemeinsam mit Prof. *Rosenbach* Sonnabend 10¾ Uhr öffentlich.

Einen chirurgisch-diagnostischen Cursus hält Prof. *Rosenbach* zweimal wöchentlich, Dienstag und Freitag von 3—4 Uhr.

Operationscursus an Leichen hält Prof. *König* täglich von 5—7 Uhr, Sonnabend ausgenommen.

Ueber Fracturen u. Luxationen liest Dr. *O. Hildebrand* zweimal wöchentlich.

Die Klinik der Augenkrankheiten hält Prof. *Leber* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 12—1 Uhr.

Augenspiegelcursus hält Dr. *Wagenmann* Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr.

Augenoperationscursus hält Dr. *Wagenmann* Sonnabend von 8—9 Uhr.

Einen Cursus über Functionsprüfung des Auges hält Dr. *Schirmer* Mittwoch u. Sonnabend von 7—8 Uhr.

Ueber die practisch wichtigen Abschnitte der Ohrenheilkunde mit Uebungen im Ohrenspiegel trägt Prof. *Bürkner* Dienstag und Freitag von 2—3 Uhr oder zu besser passender Zeit vor.

Poliklinik für Ohrenkranke hält Prof. *Bürkner* (für Geübtere) Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr.

Geburtshülflich-gynaekologische Klinik u. Poliklinik hält Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag um 8 Uhr Prof. *Runge.*

Einen gynaekologischen Operationscursus hält mit beschränkter Anzahl von Zuhörern Prof. *Runge* privatissime.

Diagnostischen und operativen Cursus am geburtshülflichen Phantom hält Prof. *Runge* Montag, Mittwoch, Donnerstag 3—4 Uhr.

Ueber Frauenkrankheiten liest dreistündig in zu verabredender Stunde Dr. *Droysen.*

Psychiatrische Klinik verbunden mit Vorlesungen über Geisteskrankheiten hält Prof. *Meyer* wöchentlich in vier Stunden Montag und Donnerstag von 3—5 Uhr.

Gerichtliche Psychiatrie mit casuistischen Demonstrationen lehrt (für Juristen) Prof. *Meyer* wöchentlich in zwei nach Verabredung festzusetzenden Stunden.

Hygiene, II. Theil, lehrt Dienstag, Donnerstag und Freitag früh 7—8 Uhr Prof. *Wolffhügel.*

Practische Uebungen und Excursionen im Anschluß an die Vorlesung über Hygiene hält unentgeltlich Prof. *Wolffhügel* Mittwoch und Sonnabend von 7—8 oder von 8—9 Uhr Vormittags.

Hygienische und bakteriologische Curse giebt Prof. *Wolffhügel* in passenden Stunden.

Arbeiten im hygienischen Institut leitet Prof. *Wolffhügel* täglich von 9—5 Uhr.

Die äußeren Krankheiten der Hausthiere, sowie Beurtheilungslehre des Pferdes und Rindes trägt Prof. *Esser* wöchentlich fünfmal von 8—9 Uhr vor.

Klinische Demonstrationen im Thierhospitale wird Prof. *Esser* in zu verabredenden Stunden halten.

Philosophie.

Geschichte der alten Philosophie mit Anhang über orientalische Philosophie: Prof. *Baumann*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 5 Uhr.

Geschichte der Philosophie: Prof. *Rehnisch*, 5 Stunden, 12 Uhr.

Logik: Prof. *G. E. Müller*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 4 Uhr.

Psychologie: Prof. *Peipers*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 7 Uhr, früh.

Ausgewählte Kapitel der Metaphysik: Prof. *Rehnisch*, zu passender Stunde, öffentlich.

Moralphilosophie mit der Lehre von der Willens- und Charakterbildung: Prof. *Baumann*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 9 Uhr.

Die Uebungen des K. pädagogischen Seminars leitet Prof. *Sauppe*, Mont. und Donnerst. 11 Uhr, öffentlich.

In einer philosophischen Societät wird Prof. *Baumann* Xenophons Denkwürdigkeiten des Socrates behandeln, Dienstag 6 Uhr.

In einer psychologischen Societät wird Prof. *G. E. Müller* Uebungen auf dem Gebiete der experimentellen Psychologie anstellen (in noch zu bestimmenden Stunden).

In einer philosophischen Societät erklärt Prof. *Peipers* ausgewählte Abschnitte aus Kants Kritik der reinen Vernunft, Freitag 6 Uhr, öffentlich.

Mathematik, Astronomie und theoretische Physik.

Algebraische Analysis: Dr. *Schönflies*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 8 Uhr. Dazu unentgeltlich eine Uebungsstunde.

Integralrechnung: Prof. *Schwarz*, Montag bis Freitag 11 Uhr.

Elemente der Theorie der bestimmten Integrale: Dr. *Schönflies*, Mittwoch und Sonnabend 8 Uhr.

Theorie der Flächen II. Grades: Dr. *Burkhardt*, Montag, Dienstag, Donnerstag 4 Uhr. (Uebungen dazu, privatissime, aber unentgeltlich: Freitag 4 Uhr).

Theorie der analytischen Funktionen, zweiter Theil: Prof. *Schwarz*, Mont. bis Freit. 9 Uhr.

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Prof. *Klein*, Montag. Dienst., Donnerst., Freitag 11 Uhr.

Nicht-Euklidische Geometrie, Fortsetzung: Prof. *Klein*, Mittwoch 11—1 Uhr.

Einleitung in die Potentialtheorie: Dr. *Drude*, Dienstag, Freitag 8 Uhr.

Molecular-Mechanik: Prof. *Schering*, Dienst., Mittw., Donnerst., Freitag 7 Uhr, früh.

Akustik: Prof. *Voigt*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 10 Uhr.

Theorie des Magnetismus: Dr. *Hugo Meyer*, Donnerstag und Freitag 11 Uhr.

Populäre Astronomie, II. Theil: Prof. *Schur*, Sonnabend 11 Uhr.

Ueber die Berechnung der Störungen der Planetenbahnen: Prof. *Schur*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 11 Uhr.

Geometrische Constructionsübungen: Prof. *Schwarz*, Mittwoch und Sonnabend 3—6 Uhr, öffentlich.

Mathematische Colloquien wird Prof. *Schwarz* privatissime, unentgeltlich, wie bisher zweistündig wöchentlich veranstalten.

Praktische Uebungen an den Instrumenten der Sternwarte: Prof. *Schur*, täglich.

Magnetische Beobachtungen im Gauss-Observatorium leitet Prof. *Schering* in Gemeinschaft mit dem Assistenten *W. Felgenträger*, Freitag 6 Uhr Abend.

Im K. mathematisch-physikalischen Seminar wird Prof. *Riecke* ausgewählte Kapitel der mathematischen und Experimentalphysik (Donnerst. 2 Uhr) behandeln, Prof. *Schering* mathematische Uebungen Freitag 5 Uhr leiten, Prof. *Schwarz* Sonnabend 9 Uhr solche veranstalten, Prof. *Voigt* ausgewählte Kapitel der Mechanik starrer Körper (Mittwoch 10 Uhr) und Prof. *Klein* ausgewählte Kapitel nichteuklidischer Geometrie behandeln (Sonnabend 11—1 Uhr), Prof. *Schur* astronomische Uebungen (Dienstag Abend 7 Uhr) veranstalten.

Experimentalphysik: siehe *Naturwissenschaften* S. 49.

Naturwissenschaften.

Allgemeine Zoologie: Prof. *Ehlers*, Mont. bis Donnerst. 8 Uhr.

Spezielle Zoologie, erster Theil (Protozoen und Coelenteraten): Prof. *Ehlers*, Freitag und Sonnabend 8 Uhr.

Entwickelungsgeschichte des Menschen, nebst unentgeltlichem Praktikum, Untersuchung und Anleitung zur Conservirung des Eies im Brutofen: Dr. *Hamann*, Montag und Donnerstag 5 Uhr.

Die Existenzbedingungen der Thiere (Biologie), einschließlich der Wechselbeziehungen zwischen Thieren und Pflanzen: Dr. *Hamann*, unentgeltlich.

Allgemeine Einführung in die Kenntniß der Insekten: Dr. *Henking*, Dienst. und Donnerst. 4 Uhr.

Zootomischer Curs: Prof. *Ehlers*, Dienst. u. Mittw. 10—12 Uhr.

Zoologische Uebungen: Prof. *Ehlers*, wie bisher, täglich (mit Ausnahme des Sonnabends) von 9—1 Uhr.

Demonstrationen in dem K. zoologischen Museum: Dr. *Henking*, Freitag 4 Uhr.

Grundzüge der Botanik: Prof. *Berthold*, Dienst. bis Sonnab., früh 7 Uhr.

Systematik und Morphologie der Blüthenpflanzen: Prof. *Peter*, Dienstag, Donnerstag, Freitag 3 Uhr.

Biologie der Pflanzen: Dr. *Koch*, 1 Stunde unentgeltlich.

Ueber Krankheiten der Culturpflanzen: Dr. *Koch*, Mont. 6 Uhr.

Uebungen im Untersuchen und Bestimmen der Phanerogamen: Prof. *Peter*, Donnerstag 5—7 Uhr.

Uebungen im Untersuchen und Bestimmen der Kryptogamen: Prof. *Peter*, Freitag 5—7 Uhr.

Botanische Excursionen und Demonstrationen: Prof. *Peter*, Sonnabend Nachmittag.

Demonstrationen im botanischen Garten: Prof. *Berthold*, öffentl.

Mikroskopisch-botanischer Kursus: Prof. *Berthold*, Sonnabend 9—1 Uhr.

Mikroskopisch-botanisches Practicum für Anfänger: Prof. *Peter*, Mittwoch Vormittag.

Tägliche Arbeiten im pflanzenphysiologischen Institut: Prof. *Berthold*.

Leitung botanischer Arbeiten, täglich: Prof. *Peter*.

Mineralogie, erster Theil: Prof. *Liebisch*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 12 Uhr.

Petrographie: Prof. *Liebisch*, dreistündig.

Tägliche Arbeiten im mineralogisch-petrographischen Institut: Prof. *Liebisch*, öffentlich.

Palaeontologie: Prof. *v. Koenen*, 5 St., Dienst. bis Sonnab. 7 Uhr.

Ueber die geologischen Verhältnisse Norddeutschlands: Prof. *v. Koenen*, Sonnabend 12 Uhr, verbunden mit Excursionen und Uebungen.

Geologische und palaeontologische Uebungen: Prof. *v. Koenen*, täglich, privatissime, aber unentgeltlich.

Experimentalphysik, erster Theil (Mechanik, Akustik, Optik): Prof. *Riecke*, Mont. und Freit. 4 Uhr, Dienst. und Donnerst. 5 Uhr.

Die praktischen Uebungen im physikalischen Institut werden die Prof. *Riecke* und *Voigt*, in Gemeinschaft mit den Assistenten Dr. *Drude* und Dr. *Nernst* leiten, Dienstag und Freitag 2—4 Uhr für Mathematiker und Physiker, Sonnabend 9—1 Uhr für Chemiker.

Akustik und Magnetismus: siehe *Mathematik* S. 47.

Physikalisches Colloquium für Pharmaceuten: Dr. *Hugo Meyer* in zwei zu verabredenden Stunden.

Mathematisch-physikalisches Seminar: vgl. *Mathematik* S. 48.

Allgemeine Chemie, organischer Theil (Organische Experimentalchemie): Prof. *Wallach*, täglich (außer Sonnabend), 9 Uhr.

Organische Chemie, für Mediciner: Prof. *von Uslar*, 4 Stunden, 9 Uhr.

Gerichtlich-chemische Analyse: Prof. *Polstorff*, Dienstag und Freitag 8 Uhr.

Pharmaceutische Chemie (anorgan. Theil): Prof. *Polstorff*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 4 Uhr.

Ueber die stickstoffhaltigen Kohlenstoffverbindungen mit ringförmiger Schließung des Moleküls: Dr. *Buchka*, Montag, Mittwoch, Donnerstag 8 Uhr.

Analytische Chemie: Dr. *Buchka*, Mittw. u. Donnerst. 12 Uhr.

Pharmacie: Prof. *von Uslar*, 4 Stunden, 3 Uhr. — Vgl. unter *Medicin* S. 45.

Pflanzenernährungslehre (Agriculturchemie): Prof. *Tollens*, Montag, Dienstag, Mittwoch 10 Uhr.

Grundzüge der Chemie, I. Theil: Dr. *Pfeiffer*, Dienst., Donnerst., Freit. 9 Uhr.

Die chemischen Uebungen und wissenschaftlichen Arbeiten im akademischen Laboratorium leitet Prof. *Wallach*, in Gemeinschaft mit Prof. *Polstorff* und Dr. *Buchka*, und zwar 1) Vollpracticum, Montag bis Freitag 8—12 und 3—6 Uhr; 2) Halbpracticum, je Vor- und Nachmittags, zu denselben Stunden; 3) Chemisches Anfänger-Practicum für Mediciner, Nachmittags.

Chemisches Colloquium für Mediciner mit Anschluß an das Practicum: Prof. *Wallach*, öffentlich, Montag 3 Uhr.

Praktische Uebungen im agricultur-chemischen Laboratorium leitet Prof. *Tollens*, in Gemeinschaft mit Dr. *Dubbers*, Montag bis Freitag 8—12 und 2—4 Uhr.

Historische Wissenschaften.

Lateinische Paläographie I. Theil (bis zum 13. Jahrhundert): Prof. *Steindorff*, Mont., Dienst., Donnerst. und Freit. 10 Uhr.

Diplomatische Uebungen: Prof. *Steindorff*, Mittwoch 10—12 Uhr, privatissime, unentgeltlich.

Geschichte des alten Aegyptens: Prof. *Pietschmann*, Dienst. und Freit. 5 Uhr.

Römische Geschichte bis zur Zeit der Bürgerkriege: Prof. *Volquardsen*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 8 Uhr.

Einleitung in die Culturgeschichte des Mittelalters: Dr. *von Kap-herr*, Dienstag und Freitag 11 Uhr, unentgeltlich.

Allgemeine Verfassungsgeschichte der germanischen und romanischen Völker des Mittelalters: Prof. *Weiland*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 9 Uhr.

Preußische Geschichte: Prof. *Kluckhohn*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 12 Uhr.

Geschichte der Jahre 1866—1871: Prof. *Kluckhohn*, Mittwoch 12 Uhr, öffentlich.

Geschichte Italiens seit dem Beginn des Mittelalters: Prof. *Th. Wüstenfeld*, Mont., Dienst., Donnerst. u. Freit. 10 Uhr, unentgeltlich, in seiner Wohnung.

Historische Uebungen leitet Prof. *Weiland*, Freitag 6 Uhr, privatissime, unentgeltlich.

Historische Uebungen leitet Prof. *Volquardsen*, Dienstag 6 Uhr, öffentlich.

Historische Uebungen leitet Prof. *Kluckhohn*, Montag 6 Uhr, privatissime, unentgeltlich.

Kirchengeschichte: s. unter *Theologie* S. 41.

Erd- und Völkerkunde.

Allgemeine physische Erdkunde I: Prof. *Wagner*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 11 Uhr.

Geographische Uebungen: Prof. *Wagner*, Sonnabend Vormittag, privatissime, unentgeltlich.

Staatswissenschaft und Landwirthschaftslehre.

Praktische Nationalökonomie (Wirthschaftspolitik) mit besonderer Rücksicht auf die Gesetzgebung des deutschen Reiches: Prof. *Cohn*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 5 Uhr.

Allgemeine Nationalökonomie: Prof. *Lexis*, Dienstag bis Freitag 10 Uhr.

Staatswissenschaftliche Uebungen: Prof. *Cohn*, Mittw. 5—7 Uhr, privatissime, unentgeltlich.

Statistische Uebungen: Prof. *Lexis*, 2 Stunden,

Landwirthschaftliche Bodenkunde: Prof. *Kirchner*, Mittwoch und Sonnabend 11 Uhr.

Specielle Ackerbaulehre (Pflanzenbaulehre): Dr. *Rümker*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 11 Uhr.

Allgemeine Thierzucht: Prof. *Kirchner*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 11 Uhr.

Besondere Thierzucht (Pferde- und Schafzucht): Prof. *Kirchner*, Freit. und Sonnabend 10 Uhr.

Allgemeine und specielle landwirthschaftliche Thierzüchtungslehre: Prof. *Griepenkerl*, Montag und Dienstag 5 Uhr.

Specielle landwirthschaftliche Rassenkunde: Prof. *Griepenkerl*, Mittw. 5 Uhr, öffentlich.

Die Ackerbausysteme (Feldgraswirthschaft, Felderwirthschaft, Fruchtwechselwirthschaft u. s. w.): Prof. *Griepenkerl*, Donnerstag und Freitag 4 Uhr.

Im Anschluß an diese Vorlesungen werden Excursionen nach benachbarten Landgütern und Fabriken veranstaltet von Prof. *Griepenkerl*.

Rassenkunde und Züchtungslehre der Kulturpflanzen: Dr. *Rümker*, Mittw. 12—1 Uhr.

Drainage und Wiesenbau: Dr. *Rümker*, Sonnabend 12 Uhr.

Demonstrationen und praktische Uebungen im Veredeln (Kreuzen) der Kulturpflanzen: Dr. *Rümker*, Donn. 5 Uhr, unentgeltlich.

Ausgewählte Kapitel aus der landwirthschaftlichen Thierernährungslehre: Dr. *Lehmann*, 1 Stunde.

Uebungen im landw.-physiologischen Laboratorium: Prof. *Kirchner*, Mont. bis Freit. 8—4 Uhr.

Landwirthschaftliche Excursionen: Prof. *Kirchner*, Sonnabend 3—6 Uhr.

Krankheiten der Hausthiere: Vgl. *Medicin* S. 46.

Agriculturchemie, Agriculturchemisches Practicum: Vgl. *Naturwissenschaften* S. 50.

Literatur- und Kunstgeschichte.

Buchwesen des Alterthums und des Mittelalters: Prof. *Dziatzko*, Montag, Dienstag, Donnerstag 8 Uhr.

Ausgewählte Kapitel aus der deutschen Literaturgeschichte des 19. Jahrhunderts: Prof. *Roethe*, Montag, Donnerstag 6 Uhr Abends.

Geschichte der romantischen Schule in Frankreich (in franz. Sprache): Lector *Ebray*, 2 mal wöchentlich, privatissime.

Shakspere's Vorgänger und Zeitgenossen: siehe *Neuere Sprachen* S. 55.

Vorträge über Pope und seine Zeitgenossen: Lector *Miller*, (in englischer Sprache).

Allgemeine europäische Kunstgeschichte des Mittelalters und der Renaissance: Prof. *Lange*, Dienstag und Freitag 6—8 Uhr Abends.

Rafaels Leben und Werke: Prof. *Lange*, Mittw. 12 Uhr, öffentl.

Kunstgeschichtliche Uebungen: Prof. *Lange*, privatissime, unentgeltlich, Montag 6—8 Uhr Abends.

Alterthumskunde.

Ueber die athenische Burg und andere griechische Cultstätten: Prof. *v. Wilamowitz-Moellendorff*, Mont. u. Dienst. 4 Uhr, öffentlich.

Museographie der griechischen und römischen Kunstwerke wird Prof. *Wieseler* vortragen und durch Abbildungen erläutern; 2 bis 3 Stunden, 12 Uhr.

Griechische Ikonographie: Prof. *Dilthey*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 12 Uhr.

Ausgewählte Kunstwerke läßt im K. archäolog. Seminar erklären Prof. *Wieseler*, Sonnabend 12 Uhr, öffentlich.

Die Abhandlungen der Mitglieder des K. archäolog. Seminars wird Prof. *Wieseler* privatissime beurtheilen, wie bisher.

Archäologische Uebungen: Prof. *Dilthey*, Sonnab. 10—12 Uhr.

Vgl. *Deutsche Sprache* S. 54.

Vergleichende Sprachlehre.

Vergleichende Lautlehre des Sanskrit, Griechischen und Deutschen: Prof. *Bechtel*, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 8—9 Uhr.

Altnordische Grammatik: siehe unter *Deutsche Sprache* S. 54.

Orientalische Sprachen.

Die Vorlesungen über das A. Testament s. u. *Theologie* S. 41.

Altaegyptische Schrift und Sprache: Prof. *Pietschmann*, in zu verabredenden Stunden.

Ausgewählte Stücke aus arabischen Schriftstellern erklärt Prof. *Wüstenfeld*, privatissime.

Syrisch lehrt dreimal, Mont. bis Mittw., 12 Uhr, Prof. *de Lagarde*.

Uebungen im Hebräisch Schreiben leitet zweimal, Donnerstag und Freitag 12 Uhr: Prof. *de Lagarde*.

Grammatik der Sanskritsprache: Prof. *Kielhorn*, Mont., Mittw., Sonnab. 7 Uhr.

Erklärung der Hymnen des 7. Mandala des Rigveda: Prof. *Kielhorn*, Mittw. und Sonnab. 8 Uhr.

In zwei Stunden wird Prof. *Kielhorn* Subandhu's Vâsavadattâ erklären lassen und Dandin's Kâvyâdars'a erklären, öffentlich.

Orientalische Kunst: vgl. *Literatur* und *Kunstgeschichte* S. 52.

Griechische und lateinische Sprache.

Metrik der Griechen und Römer: Prof. *Leo*, Mont., Mittw., Donnerst., 11 Uhr, Sonnab. 12 Uhr.

Erklärung der Gedichte des Kallimachos: Prof. *v. Wilamowitz-Moellendorff*, Mont., Mittw., Donn. 10 Uhr, Dienst. u. Freit. 4 Uhr.

Platons Gastmahl: Prof. *Sauppe*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 9 Uhr.

Tibullus: Prof. *Leo*, Dienst., Donnerst., Freit. 8 Uhr.

Im K. philologischen Seminar leiten die schriftlichen Arbeiten und Disputationen Prof. *Sauppe* und Prof. *v. Wilamowitz-Moellendorff*, Mittwoch 12 Uhr, lassen Lucretius B. 5 Prof. *Sauppe*, Dienstag und Freitag 11 Uhr, und die Gedichte des Solon Prof. *von Wilamowitz-Moellendorff* erklären, Dienstag und Freitag 10 Uhr, alles öffentlich.

Im K. philologischen Proseminar leitet die schriftlichen Uebungen und läßt Seneca de Beneficiis erklären Prof. *Leo*, Mittw. 8—10 Uhr, öffentlich.

Paläographische Uebungen zu lateinischen Classikern: Prof. *Dziatzko*, Freit. 3 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Philologische Uebungen: Prof. *Leo*, privatissime.

Deutsche Sprache.

Einleitung in das Studium des Mittelhochdeutschen (Grammatik mit Syntax, Metrik und Poetik, Handschriftenkunde, Synonymik, Alterthümer): Prof. *Roethe*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 3 Uhr.

Vergleichende Grammatik der altgermanischen Dialekte (Laut- und Flexionslehre): Prof. *Heyne*, 4 Stunden, Abends 5 Uhr.

Altnordische Grammatik: Prof. *Bechtel*, Dienstag und Freitag 6 Uhr, öffentlich.

Im K. deutschen Seminar hält Prof. *Heyne* altsächsische und altfriesische Uebungen, Freit. 12 Uhr, läßt Prof. *Roethe* des Minnesangs Frühling, herausg. von Lachmann und Haupt, erklären, Dienst. 12 Uhr, und bespricht Prof. *Roethe* die schriftlichen Arbeiten der Mitglieder, Donnerstag 12 Uhr, alles privatissime, aber unentgeltlich.

Im K. deutschen Proseminar läßt Prof. *Heyne* den Winsbeke erklären, Sonnabend 12 Uhr, öffentlich, und hält Prof. *Roethe* althochdeutsche Uebungen für Anfänger (Otfried nach Braune's Lesebuch) Mittw. 12 Uhr, öffentlich.

Geschichte der deutschen Literatur: Vgl. *Literaturgeschichte* S. 52.

Neuere Sprachen.

Geschichte der französischen Literatur: Vgl. *Literaturgesch.* S.52.

Historische Formenlehre der französischen Sprache I: Prof. *Vollmöller*, Mont., Dienst., Mittw., Donnerst. 12 Uhr.

Erklärung der ältesten französischen Sprachdenkmäler: Dr. *Cloetta*, Mont. und Freit. 11 Uhr.

Die Gedichte Bertran's de Born, nebst einer Einleitung über dessen Leben: Dr. *Andresen*, Mont. und Dienst. 10 Uhr.

Neufranzösische Uebungen auf historischer Grundlage: Dr. *Cloetta*, Dienst. und Donnerst. 11 Uhr.

Grundzüge der Lautphysiologie und wissenschaftliche Anleitung zur modern-englischen Aussprache: Prof. *Brandl*, Dienstag und Sonnab. 7 Uhr, früh.

Shakspere's Vorgänger und Zeitgenossen: Prof. *Brandl*, Mittwoch und Freitag 7 Uhr früh.

Anfangsgründe der angelsächsischen Grammatik: Dr. *Holthausen*, 2 mal wöchentlich.

Lektüre und Erklärung von Marlowe's Doctor Faustus: Dr. *Holthausen*, 2 mal wöchentlich.

Im Seminar für Romanische Sprachen hält Prof. *Vollmöller* grammatische Uebungen, Mittw. 10—12 Uhr; französische Uebungen Dr. *Andresen*, Montag 6 Uhr; leitet Dr. *Cloetta* die Erklärung von Dantes Komödie, Donnerst. 6—8 Uhr; hält Lector *Ebray* Neufranzösische Uebungen, unentgeltlich dreimal wöchentlich (a. Uebersetzung eines deutschen Schriftstellers ins Französische, b. eines französischen ins Deutsche, c. Konversation).

Im englischen Seminar hält Prof. *Brandl* Uebungen im kritischen Herausgeben mittelenglischer Texte, Freitag 6—8 Uhr Abends. Ferner stellt Prof. *Brandl* mit Lector *Miller* neuenglische Uebungen an, Montag und Freitag 6—8 Uhr, und zwar a) in Grammatik und Stilistik, b) Lectüre von Holme's Autocrat of the Breakfast Table, c) Uebersetzung von Heine, das Buch le Grand, d) Vorträge über Pope und seine Zeitgenossen, in englischer Sprache.

Schöne Künste. — Fertigkeiten.

Unterricht im Zeichnen ertheilt Zeichenlehrer *Peters*, Mittwoch 2—4 Uhr, unentgeltlich.

Unterricht im Malen *Derselbe* in zu verabredenden Stunden.

Harmonie- und Kompositionslehre, verbunden mit praktischen Uebungen: Prof. *Hille*, in passenden Stunden.

Harmonielehre: Prof. *Freiberg*, 2 Stunden wöchentlich, öffentlich.

Zur Theilnahme an den Uebungen der Singakademie und des Orchesterspielvereins ladet Prof. *Hille* ein.

Uebungen im Ensemblespiel hält Prof. *Freiberg*.

Reitunterricht ertheilt in der K. Universitäts-Reitbahn der Univ.-Stallmeister, Rittmeister a. D. *Schweppe*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, Sonnabend, Morgens von 7—11 und Nachm. (außer Sonnabend) von 4—5 Uhr.

Fechtkunst lehrt der Universitätsfechtmeister *Grüneklee*, in zu verabredenden Stunden, Tanzkunst der Universitätstanzmeister *Höltzke* (Montag und Donnerstag 8—10 Uhr Abends).

Oeffentliche Sammlungen.

In der *Universitätsbibliothek* ist das Ausleihezimmer an den Wochentagen von 11—1 und von 2—3 Uhr, der Lesesaal von 10—4 Uhr geöffnet. Verliehen werden Bücher nach Abgabe einer Semesterkarte mit der Bürgschaft eines Professors.

Die *Gemäldesammlung* (Aula, 1 Treppe hoch links) ist Sonntags von 11—1 Uhr geöffnet.

Der *botanische Garten* ist, die Sonn- und Festtage ausgenommen, täglich von 7—12 und von 2—6 Uhr geöffnet.

Die *mineralogische* und die *geologisch-paläontologische Schausammlung* sind im Sommerhalbjahr Sonnabends von 2 bis 4 Uhr dem Publikum geöffnet.

Die Sammlungen des *landwirthschaftlichen Instituts* sind dem Publicum Mittwoch Nachmittag von 2—4 Uhr zugänglich. Anmeldung im Institutsgebäude.

Besuchszeit des *agriculturchemischen Laboratoriums* Donnerst. v. 10—12 Uhr.

Ueber den Besuch und die Benutzung der *theologischen Seminarbibliothek*, des *Theatrum anatomicum*, des *physiologischen Instituts*, der *pathologischen Sammlung*, der *Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle*, des *zoologischen* und *ethnographischen Museums*, des *botanischen Gartens* und des *pflanzenphysiologischen Instituts*, der *Sternwarte*, des *physikalischen Kabinets* und *Laboratoriums*, der *mineralogischen* und der *geognostisch-paläontologischen Sammlung*, der *chemischen Laboratorien*, des *archäologischen Museums*, der *Gemäldesammlung*, der *Bibliothek des K. philologischen Seminars*, der *Bibliothek* und des *Arbeitszimmers des K. deutschen Seminars*, der *Bibliothek* und des *Lesezimmers des K. mathematisch-physikalischen Seminars*, des *diplomatischen Apparats*, der *Sammlungen des landwirthschaftlichen Instituts* bestimmen besondere Reglements das Nähere.

Bei dem Logiscommissar, Pedell *Mankel* (Jüdenstrasse 11), können die, welche Wohnungen suchen, sowohl über die Preise, als andere Umstände Auskunft erhalten und auch im voraus Bestellungen machen.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

26. Februar. № 3. 1890.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 1. Februar.

Riecke legt einen Aufsatz des Herrn Dr. Nernst vor: „über ein neues Prinzip der Molekulargewichtsbestimmung".

Wieseler kündigt einen kurzen Aufsatz an: „Verbesserungsvorschläge zu Euripides."

Sauppe legt eine „Etymologische Mittheilung Σήματ- (Σῆμα) Zeichen" von Herrn Professor Leo Meyer in Dorpat, Korrespondenten der Gesellschaft, vor.

Ueber ein neues Prinzip der Molekulargewichtsbestimmung.

Von

W. Nernst.

Vorgelegt von Riecke.

Bekanntlich können bei gleicher Temperatur nur dann verschiedenartige Gemische miteinander im Gleichgewicht sein, wenn der gesättigte Dampf jedes derselben gleiche Zusammensetzung und Dichte besitzt.

Zwei derartige coexistierende „Phasen", um den von W. Gibbs eingeführten Ausdruck zu gebrauchen, sind z. B. ein fester Körper in Berührung mit seiner gesättigten Lösung in irgend einem Lösungsmittel. Der Dampfdruck des festen Körpers ist also ebenso groß, wie der Partialdruck dieses Körpers in dem über seiner gesättigten

Lösung in einem beliebigen Lösungsmittel lagernden Gasgemische. Ersterer ist in den seltensten Fällen direkt zu bestimmen; letzteren hingegen könnte man unschwer ermitteln, wenn man die stets gesättigt erhaltene Lösung isotherm abdestillieren läßt. Dieselbe liefert dann ein Gasgemenge, in welchem die Bestandteile im Verhältnis des gesuchten Partialdrucks des gelösten Körpers zum Dampfdrucke des Lösungsmittels stehen; den letzteren kennt man aber mit Hülfe der van't Hoff'schen Dampfdruckformel aus der Konzentration des gelösten Körpers und dem Dampfdruck des Lösungsmittels, und wird so der Dampfdruck des festen Körpers der Messung zugänglich.

Auf zwei Flüssigkeiten A und B, die sich gegenseitig nur theilweise lösen, angewendet, führt das eingangs erwähnte Theorem zu dem von Konowalow[1]) begründeten Satz, daß sowohl die gesättigte Lösung von A in B wie diejenige von B in A Dampf von gleicher Zusammensetzung und Dichte entsendet.

Lösen sich die beiden Flüssigkeiten einander nur wenig, so läßt sich ihr Dampfdruck aus der van't Hoff'schen Dampfdruckformel berechnen, wonach die relative Dampfdruckerniedrigung, welche ein Lösungsmittel durch Auflösen eines fremden Körpers erfährt, gleich der Anzahl Moleküle des gelösten Körpers zu der des Lösungsmittels ist. Enthält nämlich die Flüssigkeit A b Moleküle von B auf 100 eigene, und ebenso die Flüssigkeit B a Moleküle von A auf 100 eigene bei gegenseitiger Sättigung, so besteht zwischen den Dampfdrucken P_0 und p_0 der reinen Lösungsmittel und denen P und p nach ihrer gegenseitigen Sättigung die Beziehung

$$(1) \qquad \frac{P_0 - P}{P} = \frac{b}{100}; \quad \frac{p_0 - p}{p} = \frac{a}{100}.$$

Sowohl die von van't Hoff wie die von Planck gegebene theoretische Ableitung läßt es unbestimmt, ob im Nenner P oder P_0 bez. p oder p_0 einzusetzen ist. Da aber Raoult's wie Beckmann's experimentelle Forschungen für die unter (1) gegebene Form sprechen, so soll mit ihr im Folgenden gerechnet werden. Beschränkt man sich auf große Verdünnungen, in unserm Falle auf einander nur verschwindend wenig lösende Flüssigkeiten, so wird natürlich P und P_0 bez. p und p_0 einander äußerst nahe gleich.

Es entsendet also jede der beiden Lösungen A und B Dampf von der Zusammensetzung den Drucken $P_0 \frac{100}{100+b} + p_0 \frac{100}{100+a}$

1) Wied. Ann. 14 219 (1881).

entsprechend. Man kann also aus der gegenseitigen Löslichkeit von A und B und den Dampfdrucken der reinen Lösungsmittel die Absorptionskoeffizienten des Dampfes von A gegenüber B — und vice versa — berechnen.

Bringen wir nun in das System einen dritten, in A und B löslichen Körper N, so wird er sich im allgemeinen zwischen den beiden „Phasen" theilen. Ist N in solcher Menge zugegen, daß er sich in den beiden Flüssigkeitschichten bis gerade zur Sättigung lösen kann, so vertheilt er sich, wie schon Ostwald[1]) gelegentlich hervorhob, im Verhältnis der Löslichkeit in den beiden flüssigen Gemischen multiplizirt mit ihren Volumen. In erster Annäherung wird dies nun auch der Fall sein, wenn N in geringerer Menge zugegen ist. Es würde dies, wie nebenbei bemerkt sei, genau der Fall sein, wenn der Dampf von N gegenüber A und B dem Henry'schen Absorptionsgesetze folgte.

Bleiben wir aber bei der vereinfachenden Voraussetzung stehen, daß N in A leicht, in B schwer löslich sei, also großentheils in das Flüssigkeitsgemisch A übergeht, gegenseitige chemische Einwirkung hier wie im Folgenden ausgeschlossen. N sei gelöst in A zur Konzentration n Moleküle auf 100 von A, in B hingegen sei seine Konzentration nahezu null; A hat also die Fähigkeit, den Körper N B zu entziehen, wie bekanntlich z. B. eine wässerige Jodlösung mit Aether geschüttelt, fast ihr gesamtes Jod an jenen abgiebt. Infolge des Dazwischentretens von N mögen sich nun die oben eingeführten Größen P, p, a, b in P', p', a', b', verwandeln. Nach van't Hoff's Formel erhalten wir

$$(2)\qquad \frac{P_0 - P'}{P'} = \frac{n + b'}{100}; \quad \frac{p_0 - p'}{p'} = \frac{a'}{100}.$$

Wir machen nun die Voraussetzung, daß der Dampf von A gegenüber B und vice versa dem Henry'schen Gasabsorptionsgesetz folge —, eine Voraussetzung, welche nach van't Hoff[2]) damit identisch ist, daß beide Flüssigkeiten in Lösung wie im Gaszustande das gleiche Molekulargewicht besitzen, und welche in der übergroßen Mehrzahl der Fälle (von Elektrolyten abgesehen) erfüllt ist. Dann wird

$$(3)\qquad \frac{a}{P} = \frac{a'}{P'}; \quad \frac{b}{p} = \frac{b}{p'}.$$

1) Lehrbuch d. allg. Chemie I S. 402 (1885).
2) Zeitschrift f. physikal. Chemie 4 S. 488 (1887).

Führen wir in (3) die aus (1) und (2) berechneten Werte von P, P' p, p' ein, so wird

$$\frac{a-a'}{a'} = \frac{n+b'-b}{100+b}; \quad \frac{b}{100+a} = \frac{b'}{100+a'}, \tag{4}$$

a, a', b, b' sind klein gegen 100; wenn also a sich auch erheblich (etwa 10 %) ändert, so wird trotzdem b' von b nur äußerst wenig verschieden sein; können wir außerdem b gegen 100 vernachlässigen, so wird einfach

$$\frac{a-a'}{a'} = \frac{n}{100} \tag{5}$$

in Worten: die relative Löslichkeitserniedrigung, welche A durch Auflösen eines fremden Körpers gegenüber B erfährt, ist gleich der Anzahl Moleküle des gelösten Körpers zur Anzahl Moleküle des Lösungsmittels A.

Ersetzen wir Flüssigkeit B durch das Vakuum, so tritt an Stelle der Löslichkeit die Dampftension von A, und obige Formel geht in die bekannte van't Hoff-Planck'sche Dampfdruckformel über. Die Analogie zwischen den Vorgängen der Auflösung und Verdampfung tritt also auch hier deutlich zu Tage, und man kann, wie ich bereits gelegentlich andeutete[1]), zu den Gleichungen (4) und (5) einfacher dadurch gelangen, daß man auf die gegenseitigen „Lösungstensionen" der beiden Flüssigkeiten die für die Dampftension gefundenen Beziehungen durch Analogieschluß einfach überträgt. Es liegt nahe, auch für die „elektrolytische Lösungstension" nach ähnlichen Beziehungen zu suchen.

Beobachtungen, an denen die Richtigkeit von Formel (5) zu prüfen wäre, liegen, soviel mir bekannt, nicht vor. Eine diesbezügliche Experimentaluntersuchung bot auch aus dem Grunde einiges Interesse, weil Gleichung (5) zu einer neuen Gattung von Molekulargewichtbestimmungen für in Lösung befindliche Körper führt. Aus der Abnahme der Löslichkeit kann man darnach das Molekulargewicht in ähnlicher Weise berechnen, wie aus der Abnahme des Dampfdrucks und dem Sinken des Gefrierpunkts des Lösungsmittels.

Zu einer genaueren quantitativen Prüfung wäre es erwünscht gewesen, zwei Flüssigkeiten aufzufinden, die sich gegenseitig nur wenig, etwa 1—2 %, lösen und von denen die eine in der andern

1) Zeitschrift f. physikal. Chemie 4 383 (1889).

scharf analysiert werden kann. Wäre die Ausführung der Analyse gleichzeitig eine bequeme und schnelle, so würde diese Methode vielleicht im Laboratorium praktische Anwendung finden können. Wenn sich eine solche Versuchanordnung nun auch noch nicht hat finden lassen, so setzen die Bestimmungen, welche mit den nachfolgend aufgeführten Lösungsmitteln angestellt sind, doch wenigstens die Richtigkeit der abgeleiteten Beziehungen außer Zweifel. Als Flüssigkeit *B*, dem gegenüber die Löslichkeit des Lösungsmittels zu bestimmen ist, diente in allen Fällen Wasser.

1. Valeriansäure.

Valeriansäure empfahl sich zunächst wegen ihrer leichten Analysirbarkeit, indem sie mit Phenolphtalein als Indikatur scharf mittelst Kalilauge titriert werden kann. Die gesättigte wässerige Lösung enthält etwa 5 % der Säure. Leider ist das Arbeiten mit diesem höchst übelriechenden Körper ein sehr widerwärtiges und außerdem seine Reindarstellung nicht einfach.

Ich verwendete ein von Dr. König-Leipzig bezogenes Präparat vom spezifischen Gewicht 0.928 bei 15°; 5 cc desselben mit 10 cc Wasser geschüttelt brachten letzteres auf den Säuretiter 0.541 normal. Die Säure war nicht einheitlich, sondern vermutlich ein Gemisch isomer Säuren; wendete ich statt 5 cc Säure 3 bez. 8 an, so ergab sich der Titer der wässerigen Lösung 1 % kleiner bez. 1.5 % größer. Aber indem ich stets unter gleichem Verhältnis von Säure zu Wasser arbeitete, nämlich immer 5 cc Valeriansäure in einem kleinen Reagenzgläschen mit 10 cc Wasser schüttelte, erhielt ich anscheinend wohl vergleichbare Resultate; ihre verhältnismäßig unerwartet gute Uebereinstimmung mit obigen Formeln veranlaßt mich, die folgenden, ursprünglich nur zur eigenen Orientierung angestellten Versuche kurz mitzuteilen.

Dieselben sind bei 13° angestellt; die Löslichkeit der reinen sowie der mit fremdem Zusatz versehenen Säure wurde in der Weise ermittelt, daß nach der Abscheidung einer klaren wässerigen Lösung unter der leichteren Valeriansäure 2 cc vorsichtig abpipettiert und mit Kalilauge titriert wurde; die Versuchsergebnisse sind in der folgenden Tabelle niedergelegt. Kolumne I enthält die in Valeriansäure gelösten, in Wasser unlöslichen Körper *N*, deren Einfluß auf die Löslichkeit derselben untersucht werden sollte; II enthält die Molekulargewichte, III die Mengen x in g, welche zu den 5 cc Valeriansäure hinzugefügt wurden, IV die beobachteten Löslichkeiten L, d. h. die Anzahl cc Kalilauge, die 2 cc der wässerigen Lösung entsprachen.

Tab. I.

I N	II M	III x	IV L	V $\frac{L_0 - L}{L} \cdot \frac{M}{x}$	VI M ber.
Benzol	78	0.182	9.90	25.2	75
"	78	0.431	9.39	20.9	89
Chloroform	119.5	0.150	10.17	24.2	118
Menthol	156	0.246	10.11	23.6	161
Campher	152	0.160	10.18	27.9	132
"	152	0.970	8.81	29.7	123
Xylol	106	0.376	9.76	20.9	122
Stearinsäure	284	0.165	10.34	23.4	291.

Tab. I lehrt zunächst, daß im Sinne unserer Entwickelungen die Löslichkeit infolge fremden Zusatzes stets kleiner wird, da L_0 die Löslichkeit der Valeriansäure ohne fremden Zusatz 10.48 betrug. Zur quantitativen Prüfung schreiben wir Gl. (5) in der Form

$$\frac{L_0 - L}{L} = \frac{x\,102}{M\,4.13} = 24.5\,\frac{x}{M}. \tag{6}$$

102 ist das Molekulargewicht der Valeriansäure und 4.13 die Anzahl g, welche x g des fremden Zusatzes gelöst enthielten, indem von den 5 cc Säure = 4.64 g 0.51 g an das Wasser abgegeben wurden. Der Ausdruck $\frac{L_0 - L}{L} \cdot \frac{M}{x}$ ist in Kolumne V berechnet; der theoretische Wert dieser Konstante beträgt 24.5 und thatsächlich weisen die Zahlen der Kolumne V eine immerhin bemerkenswerte Konstanz auf und entfernen sich von dem theoretischen Werte nicht zu sehr. Als wahrscheinlichsten empirischen Wert der Konstante wähle ich 24; berechnet man mit dieser umgekehrt die Molekulargewichte M, so findet man die unter VI verzeichneten Zahlen. Man erkennt, daß obige Methode trotz ihrer rohen Form immerhin auch praktisch brauchbare Werte liefern kann; an Handlichkeit ließe sie wenig zu wünschen übrig, da man ja das gesuchte Molekulargewicht mittelst einer Titration findet, doch stehen einer Anwendbarkeit die unangenehmen Eigenschaften der Valeriansäure sehr im Wege.

Aether.

In Ermangelung besserer Methoden bestimmte ich den Aethergehalt der wässerigen Lösungen aus ihrem spezifischen Gewicht. Ein Pyknometer der Sprengel-Ostwald'schen Form enthielt mit Wasser von 18° gefüllt 20.038 g; als anstatt Wasser eine mit

Aether gesättigte wässerige Lösung unter besonderen Vorsichtsmaßregeln, um Verdunstung zu vermeiden, eingeführt wurde, sank sein Gewicht um 284.3 mg, und als Wasser anstatt mit reinem Aether in Berührung mit Aether, welcher einen fremden, in Wasser nicht löslichen Körper enthielt, gebracht wurde, war die Gewichtsabnahme d stets kleiner als 284.3 mg, zum Zeichen, daß weniger Aether an das Wasser abgegeben war. Man kann d unbedenklich dem Aethergehalte proportional setzen, und so wird Gl. (5) für diesen Fall

$$M = \frac{d \cdot 74 \cdot \alpha}{(284.3 - d)}$$

wo α die Anzahl g des fremden Körpers auf 1 g Aether, und 74 das Molekulargewicht des Aethers bedeutet.

Tab. II.

I N	II M	III α	IV d	V M ber.
Benzol	78	0.078	265.5	81
„	78	0.212	235.0	75
Chloroform	119.5	0.083	269.6	113
Jod	254	0.087	276.3	222
Jodoform	394	0.095	279.8	437

Tab. II zeigt, daß auch hier die Löslichkeitserniedrigung der Theorie entspricht und daß dieselbe nach Maßgabe der Molekulargewichte der Körper N erfolgt. Die Abweichungen zwischen den gefundenen und den thatsächlichen Molekulargewichten liegen innerhalb der hier recht beträchtlichen Fehlerquellen bei Bestimmung von d. Der Jodmolekel kommt nach obigem in ätherischer Lösung die Molekulargröße J_2 zu, entsprechend den jüngst von Beckmann nach der Siedemethode erhaltenen Resultaten.

Phenol.

Phenol und Wasser lösen sich gegenseitig in zu beträchtlicher Menge, um einen genaueren Anschluß der Gl. (5) an die Erfahrung zu erwarten; gleichwohl ließ sich auch hier sicher nachweisen 1) daß in Phenol gelöste Körper dessen Löslichkeit in Wasser ihrem Molekulargewicht umgekehrt proportional erniedrigen, 2) daß die absolute Größe dieser Erniedrigung sich annähernd aus den Molekulargewichten des Lösungsmittels (Phenol) und der gelösten Körper (Benzol, Chloroform, Jodoform) berechnen läßt. Die Analyse des Phenols im Wasser geschah aus dem Brechungsvermögen der wässerigen Lösung, welches ich mit Hülfe des handlichen Pulfrich'schen Totalreflektometers bestimmte.

Aethylacetat.

Auch bei diesem Lösungsmittel überzeugte ich mich leicht durch Bestimmung des Brechungsvermögens der wässerigen Lösung, daß Zusatz eines fremden Körpers die Löslichkeit des Aethylacetats in Wasser herunterdrückt.

Zur quantitativen Messung der hier obwaltenden Verhältnisse bot sich jedoch ein anderer Weg dar, welche an Sicherheit und Bequemlichkeit wenig zu wünschen übrig läßt. Kühlt man nämlich ein Gemisch der gegenseitigen Lösungen von Wasser und Aethylacetat ab, so wird offenbar Eis bei der Temperatur auszufrieren beginnen, welche der durch die Konzentration des in das Wasser übergegangenen Aethylacetats hervorgerufenen Gefrierpunktserniedrigung entspricht. Löst man nun im Ester einen andern, in Wasser unlöslichen Körper auf, so wird nach unsern Formeln die Konzentration des Esters im Wasser eine geringere werden und demgemäß der Gefrierpunkt steigen. Unter der nahe zutreffenden Voraussetzung, daß die Gefrierpunktserniedrigung, die das Wasser durch seinen Gehalt an Ester erfährt, jenem proportional ist, wird nach Gl. (5)

$$\frac{t_0 - t}{t} = \frac{m}{100 \cdot M},$$

wo t_0 und t die Gefrierpunktserniedrigungen des Wassers vor und nach dem Zusatz eines fremden Körpers zum Ester, m die Anzahl Gramme des fremden Körpers auf 100 g Molekeln des Esters und M das Molekulargewicht des fremden Körpers bedeuten.

Aethylacetat besitzt in Wasser ein normales Molekulargewicht; Messungen nach Raoult's Methode, die ich mittelst des von Beckmann angegebenen Apparats ausführte, lieferten für die Molekulargröße dieses Körpers bei Erniedrigungen von 0.371 und 1.11° die Werte 86 und 88, dem aus der Formel des Esters berechneten (88) entsprechend. Indem ich zu Wasser so lange Aethylacetat zusetzte, bis letzteres ungelöst blieb und somit der Gefrierpunkt unabhängig von dessen Menge wurde, ermittelte ich, daß bei —2.430°, dem Gefrierpunkte einer gesättigten wässerigen Lösung, 10 g Wasser 1.1 g des Esters lösen. Wasser wird vom Ester nur wenig (2—3 %) gelöst.

Die Messungen wurden nun in der Weise ausgeführt, daß ich 20 cc Aethylacetat = 18.02 g und 4.4 g Wasser in Beckmann's

Gefrierapparat einführte; dann gehen 0.4 g Wasser in den Ester, und die zurückbleibenden 4 g Wasser lösen ihrerseits 0.44 des Esters. Nach Bestimmung der Temperatur, bei der Wasser auszufrieren beginnt und das Thermometer einen konstanten Stand annimmt, wurde der in Wasser unlösliche Körper, dessen Einfluß auf die Löslichkeit des Aethylacetats untersucht werden sollte, in successive immer größeren Mengen zugeführt, wobei ich genau, wie von Beckmann beschrieben[1]), verfuhr. Die Bestimmung des Gefrierpunkts konnte mit aller Schärfe, bis auf wenige tausendstel Grad, geschehen, und zwar nach meinen bisherigen Erfahrungen mit größerer Genauigkeit, als dies bei der Bestimmung des Gefrierpunkts gewöhnlicher Lösungen möglich ist. Es rührt dies wohl daher, daß man bei diesen Eis nicht in größerer Menge ausfrieren lassen kann, ohne gleichzeitig die Konzentration der Lösung erheblich zu ändern, was wiederum auf den Gefrierpunkt zurückwirkt; um aber konstante Temperatur zu erzielen, darf wieder die Menge des ausgeschiedenen Eises nicht unter eine gewisse Größe sinken. Wenn hingegen bei meiner Versuchsanordnung Wasser selbst in größeren Mengen ausfriert, so ändert sich die Konzentration des Esters, auf die es allein ankommt, äußerst unbedeutend. Wesentlich aber ist ein energisches Umrühren der beiden im Gefrierapparat vorhandenen Flüssigkeitsschichten, damit der etwas komplizierte Gleichgewichtszustand zwischen den drei Körpern, die zugegen sind, sich richtig einstellt.

Folgende Tabelle enthält die Versuchsresultate.

Tab. III.

I *N*	II M	III *m*	IV $t_0 - t$	V *M* ber.
Benzol	78	395	0.123	74
		580	0.170	77
		890	0.245	79
Naphthalin	128	309	0.061	120
		417	0.078	126
		710	0.118	139
		1180	0.184	144
Phenylbenzoat	198	195	0.022	213
		835	0.081	242

Wie man sieht, ist die Uebereinstimmung zwischen den durch die Gefrierpunktserhöhung gemessenen und den nach der chemischen

1) Zeitschrift f. physik. Chemie 2 (1889).

Formel berechneten Molekulargrößen nahe ebenso gut, wie es bei den nach Raoult's Methode ermittelten Molekulargewichten der Fall ist. Abweichungen bis zu 10 % kommen auch dort vor, ohne daß man sie sich erklären könnte. Größer scheinen die Abweichungen hier auch nicht zu sein, und beim Phenylbenzoat dürfte bei noch größerer Verdünnung der normale Wert erreicht werden. Es scheint so thatsächlich ermöglicht, Lösungsmittel wie Aethyläther, Aethylacetat u. dergl. zur Molekulargewichtsbestimmung im Gefrierapparate zu verwenden; doch darf nicht verschwiegen werden, daß die Gegenwart eines dritten Körpers außer Lösungsmittel und gelöstem Körper, des Wassers, bisweilen zu weiteren Komplikationen Veranlassung geben kann.

Wichtiger aber als die Aussicht, zu den bereits ziemlich zahlreich vorhandenen Methoden der Molekulargewichtsbestimmung von in Lösung befindlichen Körpern neue hinzuzufügen, scheint mir die durch die mitgetheilten Messungen wohl außer Zweifel gesetzte Thatsache zu sein, daß die von dem Vorgange der Verdampfung auf den der Auflösung in beliebigen Lösungsmitteln durch Analogieschluß übertragenen Gesetzmäßigkeiten, wie schon früher wiederholt, so auch hier an der Erfahrung sich bestätigen.

Verbesserungsvorschläge zu Euripides.

Von

Friedrich Wieseler.

Medea.

Die Vorschläge für die Medea sind meist unmittelbar nach dem Erscheinen der Arnim'schen Ausgabe dieses Drama geschrieben und in Beziehung auf dieselbe. H. von Arnim hat, wie auch andere Herausgeber, keine Kunde gehabt von meiner Recension der Schöne'schen Ausgabe der Medea in den Götting. gel. Anzeigen 1855 S. 1659 fg. Ich werde in dem Folgenden auch diejenigen von mir selbständig vorgeschlagenen Verbesserungen aufführen, die von ihm nach Anderen in den Text aufgenommen sind. Der hier ausgeschriebene Text und die Verszählung sind nach der Nauck'schen Ausgabe.

Vs 158

sagt der Chor zu Medea:

Ζεύς σοι τόδε συνδικήσει.

Darauf Medea:

> ὦ μεγάλα Θέμι καὶ πότνι' Ἄρτεμι
> λεύσσετ' ἃ πάσχω.

Endlich ihre Amme zum Chor:

> κλύεθ' οἷα λέγει κἀπιβοᾶται
> Θέμιν εὐκταίαν Ζῆνά θ' ὃς ὅρκων
> θνατοῖς ταμίας νενόμισται;

Daß man an den Worten der Medea keinen Anstoß genommen hat, ist mir unbegreiflich. Man hat zur Erklärung der Anrufung der Artemis gesagt: „zu Artemis stand Medea in einem speciellen Verhältniß, da sie in den *Πελιάδες* des Euripides als Priesterin derselben auftrat“. Es läßt sich noch hinzufügen, daß Artemis auch sonst als über das Thun der Menschen Aufsicht übend und ihre Frevel strafend vorkommt. Ob aber die vorliegende Stelle hierher gehört, ist mir mehr als zweifelhaft. Wie kommt es, daß die Amme von der Artemis gar nicht spricht? Mit welchem Scheine kann man sagen: „der Relativsatz ὃς ὅρκων u. s. w. soll rechtfertigen, daß die Amme hier den Zeus nennt, obgleich Medea ihn nicht namentlich angerufen hatte?“ Das könnte ja ganz aussehen wie ein Vorwurf gegen Medea, der um so schwerer wiegen würde, als der Chor unmittelbar vorher ihr den Zeus genannt hatte. Daß aber Medea den Zeus nicht etwa absichtlich ignorirt, geht hervor aus ihren Anrufungen in Vs 332 und 764 ὦ Ζεῦ Δίκη τε Ζηνός. Vgl. auch was der Chor Vs 207 fg. sagt. Sicherlich waren in Vs 160 Zeus und Themis erwähnt, nicht aber Artemis. Ich schlug in den Götting. gel. Anz. a. a. O. S. 1660 vor:

> ὦ μεγάλε Ζεῦ π ό τ ν ι ά τ' ὦ Θ έ μ ι.

Noch leichter würde es sein zu schreiben:

> ὦ μεγάλε Ζεῦ καὶ π ο τ ν ι ὰ ς Θ έ μ ι.

Die seltenere Form *ποτνὰς* für *πότνια* findet sich bei Euripides auch Orest. Vs 318.

Vs 282 fg.

lassen die Handschriften den Kreon zu Medea sagen:

> δέδοικά σ', οὐδὲν δεῖ παραμπέχειν λόγους,
> μή μοί τι δράσῃς παῖδ' ἀνήκεστον κακόν,
> σμμβάλλεται δὲ πόλλα τοῦδε δείματος.

Daß in dem letzten Vers ein Fehler steckt, ist schon längst bemerkt. Weil hat für σμμβάλλεται vermuthet συλλαμβάνει und H. von Arnim dieses, obwohl zweifelnd, in den Text aufgenommen. Er vergleicht Vs 946:

> συλλήψομαι δὲ τοῦδέ σοι κἀγὼ πόνοι.

Diese Stelle ist aber wesentlich verschieden. Ich habe in den

Gött. gel. Anz. a. a. O. S. 1661 vermuthet, daß für *δείματος* zu schreiben sei: *δείγματα*, ein Wort, das auch sonst bei Euripides vorkommt: „es treffen aber viele Anzeigen dafür zusammen“.

Vs 336 fg.

ΜΗ. μὴ δῆτα τοῦτό γ', ἀλλά σ' αἰτοῦμαι, Κρέον —
ΚΡ. ὄχλον παρέξεις, ὡς ἔοικας ὦ γύναι.
ΜΗ. φευξούμεθ' · οὐ τοῦθ' ἱκέτευσα σοῦ τυχεῖν.
ΚΡ. τί δ' αὖ βιάζει κοὐκ ἀπαλλάσσει χθονός;

Man nimmt an, daß Medea von Kreon Vs 337 unterbrochen werde. Ich möchte lieber in Vs 336 für *ἀλλά* schreiben: *ἄλλα*. Dafür spricht meines Erachtens auch Vs. 338, in Betreff dessen bei den Erklärern ein merkwürdiges Stillschweigen herrscht. Ich kann die Worte *οὐ τοῦθ'* u. s. w. nicht verstehen und glaube, daß in *σοῦ τυχεῖν* ein Fehler steckt, daß ursprünglich geschrieben war: *σ' εὐτυχεῖν* „nicht um in Betreff dieses, des *φεύγεσθαι*, gutes Gelingen zu haben“. Bei dem Worte *αἰτοῦμαι* soll Medea Kreons Hand ergreifen. Für *χθονός* in Vs. 339 soll zu schreiben sein: *χερός*. Bei dem *ἱκετεύειν* fanden allerdings verschiedene Geberden statt, auch das Fassen der rechten Hand, vgl. Eur. Hec. 752 fg.

'Αγάμεμνον, ἱκετεύω σε τῶνδε γουνάτων
Καὶ σοῦ γενείου δεξιᾶς τ' εὐδαίμονος.

Aber das Berühren der Knie ist die hauptsächlichste und daß dieses hier gemeint ist, geht nicht allein hervor aus Vs 324, sondern auch aus Vs 370:

οὐδ' ἂν προσεῖπον οὐδ' ἂν ἡψάμην χεροῖν.

Ist also *χθοιός* verderbt, was auch ich für wahrscheinlich halte, so wird *χροός* zu schreiben sein, was der handschriftlichen Lesart auch noch näher steht als *χερός*. *Χρὼς* ist vom ganzen Körper auch unten Vs. 689 und 787 gebraucht.

In Vs. 339 ist mit Andern *τί δ' οὖν* zu schreiben.

Vs 460

habe auch ich schon vorlängst *τὸ σὸν δὲ* für *τοσόνδε* vermuthet.

Vs 584

hat nach H. von Arnim (S. 117) „die Interpunktion nach *σύ*, welche der Stelle erst recht aufhilft, zuerst Witzschel gesetzt“. Ich behauptete schon in den Gött. gel. Anz. a. a. O. S. 1661 fg., daß zu schreiben sei: *ὥς καὶ σύ· μή νυν-γένῃ*, während Schöne herausgegeben hatte: *ὡς καὶ σὺ μὴ νῦν — φανεῖ.*

Vs 656

hat nicht bloß Nauck sondern auch H. von Arnim Musgrave's *ᾤκτισεν* statt des handschriftlichen ohne Zweifel verderbten *ᾤκτειρε* in den Text gesetzt. Ich habe schon in den Gött. gel. Anz. a. a. O. S. 1662 als das Wahrscheinlichste vorgeschlagen: οἰκτερεῖ, mit der Bemerkung, daß dieselbe Form auch bei Aeschylos Fragm. 210 Vs. 6 Herm. vorkomme. Dasselbe möchte lieber Nauck in der 1871 erschienenen Ausgabe des Euripides Vol. II, p. XXIV.

Vs 695

bezeichnet H. von Arnim das von ihm aufgenommene μή που als „Emendation von Schenkl“. Auch ich habe selbständig in den Gött. gel. Anz. so geschrieben.

Vs 723 fg.

steht in den Handschriften als von Aegeus zu Medea gesprochen

οὕτω δ' ἔχει μοι· σοῦ μὲν ἐλθούσης χθόνα,
πειράσομαί σου προξενεῖν δίκαιος ὤν.

Ich habe schon in den Gött. gel. Anz. a. a. O. bemerkt, daß χθόνα allein unmöglich geduldet werden kann, sondern Aegeus sein Land ausdrücklich bezeichnen muß. Von den beiden dort vorgeschlagenen Aenderungen ist die leichteste und wahrscheinlichste 'μοῦ für σοῦ.

Vs 734 fg.

sagt Medea zu Aegeus:

πέποιθα· Πελίου δ' ἐχθρός ἐστί μοι δόμος
Κρέων τε, τούτοις δ' ὁρκίοισι μὲν ζυγείς,
ἄγουσιν οὐ μεθεῖ' ἂν ἐκ γαίας ἐμέ·
λόγοις δὲ συμβὰς μὴ θεῶν ἐνώμοτος
φίλος γένοι' ἂν κἀπικηρυκεύματα
τάχ' ἂν πίθοι σε.

Für μὴ bieten in Vs 737 die Handschriften καὶ, für κἀπικηρυκεύματα in Vs 738 κἀπικηρυκεύμασι, jenes las aber der Scholiast.

In Vs 739 steht anstatt τάχ' in den Handschriften οὐκ und bieten dieselben πίθοιο statt πίθοι σε.

In dieser schwierigen Stelle habe ich in den Gött. gel. Anz. a. a. O. S. 1663, indem ich Vs 735 und 736 unverändert ließ, in Vs 737 für καὶ θεῶν ἀνώμοτος geschrieben: κατὰ θεῶν ἀνώμοτος. Die Redensart ὀμνύναι κατά τινος ist ja bekannt.

Für φίλος in Vs 738 schlug Nauck vor φηλός. Allerdings ist jenes Wort sicherlich verderbt. Aber ein Wort mit dem Begriffe von „betrügerisch“ darf man doch schwerlich der Medea dem Aegeus gegenüber in den Mund geben, wohl dagegen eins, durch welches Beweglichkeit, Schwanken bezeichnet wurde. Sollte etwa σφηλὸς geschrieben gewesen sein? Bei Hesychios finden wir: σφηλόν· λοξόν. πυκνόν. εἰκίνητον. Ἄσφηλον δὲ τὸ ἀκίνητον, also = ἀσφαλές·

Stesichoros nannte den Herakles ἐρίσφηλος, „sehr erschütternd“, nach Etym. Magn.

Im letzten Verse ist πίθοιο nicht zu ändern, wenn man nur die handschriftliche Lesart κἀπικηρυκεύμασι im vorletzten annimmt. Für οὐκ im letzten Verse paßt recht wohl τάχ᾽, „vielleicht wohl“; doch würde ἔτ᾽ leichter sein.

Vs 773

sagt Medea zum Chor:

δέχου δὲ μὴ πρὸς ἡδονὴν λόγους.

Man deutet: erwarte nicht, daß ich Fröhliches sagen werde. Dieser Gedanke ist meiner Ansicht nach unpassend. Ich schlage vor, für μὴ zu schreiben: μοι, „nimm meine Worte so auf, wie es mir Freude macht, wie ich es wünsche“.

Vs 789

bieten die Handschriften:

τοιοῖσδε χρίσω φαρμάκοις δωρήματα.

Daran hat keiner der Erklärer Anstoß genommen, wohl aber ein Mitglied meines archäologischen Seminars, welches in einer Arbeit über das Scenische in der Medea richtig bemerkte, daß die Sprecherin im Folgenden die Bühne nicht verläßt. Der Anstoß wird beseitigt, wenn man mit mir schreibt: τοιοῖσδ᾽ ἔχρισα.

Vs 1065

καὶ δὴ 'πὶ κρατὶ στέφανος, ἐν πέπλοισι δὲ
νύμφη τύραννος ὄλλυται, σάφ᾽ οἶδ᾽ ἐγώ.

Da Kreusa ebensowohl durch den Kranz auf dem Haupte als durch das angelegte Gewand ihren Untergang fand (s. Vs 784 fg., 983, 949 fg.), so ist es wahrscheinlich, daß geschrieben war: στέφανον (sc. ἔχουσα) ἐν πέπλοισί τε.

Vs 1077 fg.

sagt Medea zu ihren Kindern nach den besten Handschriften:

χωρεῖτε χωρεῖτ᾽· οὐκέτ᾽ εἰμὶ προσβλέπειν
οἵα 'τ᾽ ἐς ὑμᾶς, ἀλλὰ νικῶμαι κακοῖς.

Man hat hier mit Recht an der Verbindung von προσβλέπειν mit ἐς Anstoß genommen und Prinz deshalb vorgeschlagen: τε παῖδας. Aber leichter ist es doch jedenfalls zu schreiben: εἰμί πως βλέπειν. Daß die Kinder nach χωρεῖτ᾽ und vor οὐκέτ᾽ schon fortgegangen sein sollten, hat zudem keine Wahrscheinlichkeit.

Vs 1121

redet der Trabant des Iason die Medea an mit den Worten:

ὦ δεινὸν ἔργον παρανόμως εἰργασμένη.

Dieselben sind von Lenting für unecht erklärt und ihm stimmt H. von Arnim bei, indem er bemerkt, der Hauptgrund liege in *παρανόμως*, welches für Medeias That im Munde des Boten ein armseliger Ausdruck sei. Daß *παρανόμως* durchaus nicht passe, gebe auch ich zu. Aber läßt sich nicht an ein Adverbium denken, das „unsinnig, wahnsinnig“ bedeutete? Das Nächststehende wäre wohl *π α ρ α ν ό ω ς*. Das Adjektiv *παράνους* findet sich in Aeschyl. Agam. 1134.

Vs 1157 fg.

berichtet der Trabant des Iason über dessen Gemahlin der Medea:

ἀλλ᾽ ᾔνεσ᾽ ἀνδρὶ πάντα· καὶ πρὶν ἐκ δόμων
μακρὰν ἀπεῖναι πατέρα καὶ παῖδας σέθεν,
λαβοῦσα πέπλους ποικίλους ἠμπίσχετο.

In den besten Handschriften steht *πάτερα καὶ τέκνα σέθεν*, welches letzte Wort im cod. Laurent. fehlt, während der cod. S. es bietet. Die ursprüngliche Schreibart des zweiten Verses ist allerdings nicht mit Sicherheit zu erkennen. Indessen ist doch wohl das Wahrscheinlichste, daß *πατέρα* verderbt ist aus *κ ἄ ν δ ρ α*, wozu der Ausfall des $\bar{\nu}$ vor $\bar{\delta}$, der sich auch sonst nicht selten findet, Veranlassung gegeben haben mag.

Vs 1181 fg.:

ἤδη δ᾽ ἂν ἕλκων κῶλον ἐκπλέθρου δρόμοι
ταχὺς βαδιστὴς τερμόνων ἀνθήπτετο,
ἡ δ᾽ ἐξ ἀναύδου καὶ μύσαντος ὄμματος
δεινὸν στενάξασ᾽ ἡ τάλαιν᾽ ἠγείρετο.

Die handschriftliche Lesart in Vs. 1181 ist *ἀνέλκων*. Daß weder dieses noch *ἕλκων* paßt, ist wohl klar; aber dasselbe gilt auch von *ἕρπων*, einer Conjectur Usener's, welche H. von Arnim sogar in den Text aufgenommen hat. Dagegen scheint uns sehr passend: *ἀ ν ε λ θ ώ ν*. *᾿Ανέρχεσθαι* paßt in der Bedeutung von „zurückkehren“ vortrefflich, da es bei dem *δίαυλος* auf das Wiederanlangen am Auslaufsziel ankommt. Ja es scheint uns nöthig, daß ausdrücklich angedeutet war, daß es sich um *διαύλου θάτερον κῶλον* (Aesch. Agam. 344) handele. Da ein *ἂν* nicht fehlen kann, wird mit Musgrave in Vs. 1182 *ἂν ἥπτετο* zu schreiben sein. Wenn H. von Arnim den Ausdruck *βαδιστὴς* für auffallend hält, so glaube ich, daß derselbe absichtlich gewählt ist, um den Läufer zu Fuß gegenüber einem *δρομεύς*, welcher *δισσοὺς διαύλους ἱππικοὺς διήνυσε* (Eurip. Electr. Vs. 824) zu bezeichnen.

Daß Niemand an *ὄμματος* in Vs. 1183 Anstoß genommen hat, ist sonderbar. Gewiß war *κ ώ μ α τ ο ς* geschrieben. Das *μύειν* bezieht sich hier nicht auf die Augen, sondern auf die Lippen.

Vs 1185 fg.

heißt es weiter über die Glauke:

δικλοῦν γὰρ αὐτῇ πῆμ' ἐπεστρατεύετο.
χρυσοῦς μὲν ἀμφὶ κρατὶ κείμενος πλόκος
θαυμαστὸν ἵει νᾶμα παμφάγου πυρός·
πέπλοι δὲ λεπτοί, σῶν τέκνων δωρήματα,
λέπτην ἔδαπτον σάρκα τῆς δυσδαίμονος.
φεύγει δ' ἀναστᾶσ' ἐκ θρόνων πυρουμένη.

In Vs. 1188 wird ganz so gesprochen, als gehörte der χρυσοῦς πλόκος nicht zu den τέκνων δωρήματα. Sicherlich sollten aber diese Worte auch zu jenen Apposition bilden. Dazu bedarf es nicht bloß der Veränderung des δὲ hinter πέπλοι in τε, sondern auch einer, durch welche ἔδαπτον in Vs 1189 auch zum Prädicat von χρυσοῦς πλόκος wird. Zu diesem Behufe genügt eine sehr leichte Correctur in Vs 1187: θαυμαστὸν ἱείς. Das μὲν in Vs 1186 entspricht dem δ' in Vs 1190. Das διπλοῦν πῆμα besteht darin, daß der πλόκος und die πέπλοι λευκὴν (denn so ist statt λεπτὴν zu lesen) ἔδαπτον σάρκα und daß Glauke durch ihr Aufspringen und ihre Bewegung des Kopfes das Unheil noch vergrößert.

Vs 1204 fg.:

πατὴρ δ' ὁ τλήμων συμφορᾶς ἀγνωσίᾳ
ἄφνω παρελθὼν δῶμα, προσπίτνει νεκρῷ·
ᾤμωξε δ' εὐθύς, καὶ περιπτύξας δέμας
κυνεῖ.

Παρελθὼν in Vs 1205 hat Nauck für das handschriftlich überlieferte προσελθὼν eingesetzt. H. von Arnim ist ihm gefolgt, da dieses nicht das Eintreten bedeuten könne. Unter δῶμα könnte doch wohl nur die Gynaikonitis verstanden sein, die man sich als im Augenblick offen stehend zu denken hätte, und das hat wenig Wahrscheinlichkeit. Vermuthlich war δεῖμα geschrieben: „Schreckensbild", vgl. δεινὸν θέαμα Vs 1202. — Was εὐθὺς in Vs 1206 soll, ist gar nicht einzusehen. Ich dachte zunächst an εὔνις d. i. kindlos. Ueber dieses Wort und sein Vorkommen bei den Tragikern: Blomfield's Glossar. in Aesch. Persas vs 294. Aber es ist noch eine andere Veränderung möglich, ja wahrscheinlicher, nämlich ἐς τρίς, d. i. dreimal, was auch sonst bei den Tragikern in der Bedeutung von τρὶς vorkommt.

Vs 1296 fg.

sagte Iason in Beziehung auf Medea:

δεῖ γάρ νιν ἤτοι γῆς σφε κρυφθῆναι κάτω,
ἢ πτηνὸν ἆραι σῶμ' ἐς αἰθέρος βάθος.

Da σφε hier neben νιν nicht geduldet werden kann, so hat man Verschiedenes vorgeschlagen. Ich glaube nun, daß κρυφθῆναι hervorgegangen ist aus dem selteneren Aoristus sec. κρυφῆναι (Soph. Aj. 1145) und schlage vor zu schreiben: γῆς ὕ π ο κ ρ υ φ ῆ ν α ι. Der Tribrachys an der vierten Stelle finden wir in der Medea auch Vs 479 und 505.

Vs 1359

bieten die Handschriften:

καὶ Σκύλλαν ἣ Τυρσηνὸν ᾤκησεν πέδον.

Daß das letzte Wort verderbt ist, scheint zweifellos, obgleich H. von Arnim daran keinen Anstoß genommen hat. Man hat σπέος, πέτραν, πέτρον vermuthet. Uns ist das Wahrscheinlichste: π ό ρ ο ν. Vgl. Lycophr. Vs 1085: ὑπὲρ πόρον Ταρσηνόν. Die Verderbniß in πέδον entstand dadurch, daß πόρον in ΠΕΡΟΝ verschrieben war.

Rasender Herakles.

Vs 861 fg.:

εἶμί γ᾽· οὔτε πόντος οὕτω κύμασι στένων λάβρος
οὔτε γῆς σεισμὸς κεραυνοῦ τ᾽οἶστρος ὠδῖνας πνέων,
οἷ᾽ ἐγὼ στάδια δραμοῦμαι στέρνον εἰς Ἡρακλέους
καὶ καταρρήξω μέλαθρα καὶ δόμους ἐπεμβαλῶ,
τέκν᾽ ἀποκτείνασα πρῶτον· ὃ δὲ κανὼν οὐκ εἴσεται
παῖδας οὓς ἔτικτ᾽ ἐναίρων, πρὶν ἂν ἐμὰς λύσσας ἀφῇ,
ἢν ἰδοὺ καὶ δὴ τινάσσει κρᾶτα βαλβίδων ἄπο
καὶ διαστρόφους ἑλίσσει σῖγα γοργωποὺς κόρας,
ἀμπνοὰς δ᾽ οὐ σωφρονίζει, ταῦρος ὣς ἐς ἐμβολήν,
δεῖνα μυκᾶται δὲ Κῆρας ἀνακαλῶν τὰς Ταρτάρου.

Eine außerordentlich verderbte Stelle, in welcher die zahlreichen Fehler meist nicht geahnt sind.

Daß man in Vs. 862 ὠδῖνας sich hat gefallen lassen, ist höchst wunderbar. Ohne Zweifel war von einer besonders gewaltigen Wirkung des κεραυνὸς die Rede. Der κεραυνὸς setzt die Luft in Bewegung, bringt Wind, im Besonderen Sturmwind, Wirbelwind zuwege. Man erinnere sich nur des Wortes πρηστήρ, das sowohl von diesem als dem Blitze gebraucht wurde, und an die Redensarten fulminis ventis afflare (Verg. Aen. IV, 246), fulminis turbo (Ammian. Marc. XVII, 8), an den κεραυνὸς ἑλικίας (Tzetzes zu Lykophron Vs 156), ὁ συστροφὰς (doch wohl ἀνέμου Phrynich. p. 178) καὶ ἕλικας ποιῶν, vgl. Schol. zu Aeschyl. Prometh. Vs 359 bei C. G. Haupt, Aeschyl. quaest. spec. primum p. 264 und 373, und Aristot. de mundo 4, p. 395 Bekker. So konnte der Dichter sehr wohl ein Hauchen von Wirbelwinden erwähnt haben und das ist der Fall, wenn man schreibt: *κεραυνοῦ γ' οἶστρος ο ὐ, δ ί ν α ς πνέων.* Durch das *γε* wird der *κεραυνὸς* sehr passend besonders hervorgehoben.

Was dann Vs 864 fg. betrifft, so ist es schon an sich lächerlich, die Lytta sagen zu lassen, daß sie die *δόμοι* auf die niedergerissenen *μέλαθρα* werfen werde. Es widerspricht aber auch dem Thatbestand, wie wir ihn unten finden, indem das Dach niedergerissen wird, der Palast selbst aber mit Ausnahme einer zerbrochenen Säule stehen bleibt, vgl. Vs 904 fg. und 1006 fg. *Δόμους* in Vs 864 muß also verderbt sein. Ferner paßt nicht, daß Lytta sagt, das Niederreißen der *μέλαθρα* werde geschehen, nachdem sie die Kinder getödtet habe, und noch weniger, daß sie sich das Tödten zuschreibt, da dasselbe, wenn es auch durch ihre Einwirkung geschah (Vs 886), doch ausdrücklich dem Herakles zugeschrieben werden müßte, wie es auch in den Worten ὃ *δὲ κανὼν* der Fall ist. Die handschriftliche Schreibart *ἀποκτείνασα* kann unmöglich richtig sein. Was endlich das *πρῶτον* soll, ist gar nicht einzusehen. Herakles tödtet ja nicht die Kinder zuerst, wenigstens das dritte erst zugleich mit seiner Gemahlin Megara, vgl. Vs 1000. Das *συμπίπτειν στέγης* (Vs 905), die *πεσήματα στέγης* (Vs 1007) haben jedenfalls schon vor der Tödtung die Kinder statt. Also auch *πρῶτον* kann unmöglich von dem Dichter herrühren. Ich schlage vor zu schreiben: *καὶ καταρρήξω μέλαθρα κἂς νόσους* (oder *καὶ νόσοις*) *σ φ' ἐ π ε μ β α λ ῶ τέκν' ἀ π ο κ τ ε ί ν ε ι ν τ α ρ α κ τ ό ν.*

Νόσοι bezieht sich auf den Wahnsinn, den Lytta einflößt (Soph. Aj. 59: *μανιάδες νόσοι*, 452: *λυσσώδης νόσος*). Mit dem Ausdruck *ἐς νόσους* oder *νόσοις ἐμβάλλειν* vgl. man die bekannten *ἐς νόσον πίπτειν, νόσος ἐμπίπτει τινί.*

Σφὲ soll sich natürlich auf den im vorhergehenden Verse ausdrücklich genannten Herakles beziehen.

Ταρακτὸν bedurfte des Zusatzes von *φρένας* nicht, nicht bloß deshalb, weil durch *νόσοι* der Wahnsinn bezeichnet ist, sondern auch insofern, als Iris vorher in Vs 835 fg. der Lytta aufgetragen hatte, dem Herakles einzuflößen *μανίας καὶ παιδοκτόνους φ ρ ε ν ῶ ν τ α ρ α γ μ ο ύ ς.*

In Vs 866 hat wenigstens G. Hermann Anstoß genommen an den Worten *πρὶν ἂν ἐμὰς λύσσας ἀφῇ.* Er vermuthete: *ἐμῆς λύσσης ὑφῇ.* Nach meinem Dafürhalten mußte ausdrücklich bezeichnet sein, daß Lytta die von ihr eingeflößte Raserei von dem Herakles genommen habe. Ich schlage also vor zu schreiben: *ἀ φ ῶ*, ohne andersweitige Aenderung.

Daß man in Vs. 867 den Ausdruck *βαλβίδων ἄπο* sich hat gefallen lassen können, ist staunenswerth. Was soll denn der Gedanke „von der Stufe, Schwelle her“, wie man gedeutet hat? Offenbar war für *βαλβίδων* geschrieben: *Βακχίδων.* Die Form *Βακχὶς* gebraucht unter den Tragikern auch Sophokles Antig. 1129. *Ἄπο* wird wohl aus *νόμῳ* entstanden sein, wenigstens ist diese Herstellung die leichteste, da das *ν̄* am Anfang des Wortes wegen des *ν̄* am Schlusse des vorhergehenden leicht ausfallen konnte und *π̄* mit *μ̄* oft genug verwechselt wird. Doch kann für *ἄπο* auch *τρόπον* geschrieben gewesen sein. Daß gerade bei den Mänaden das *τινάσσειν κρᾶτα* in Schrift und Bild besonders hervorgehoben wird, ist bekannt genug.

Kaum weniger auffallend ist es, daß man an *σῖγα* im Vs 868 keinen Anstoß genommen hat. Wie paßt jenes Wort zu den Worten *δεινὰ μυκᾶται* im Vs 870? Will man etwa glauben, daß Herakles beim Verdrehen der Augen noch schweigt, unmittelbar darauf aber zu schnaufen und zu brüllen beginnt wie ein Stier? Gewiß sollen das Verdrehen der Augen und das Brüllen gleichzeitig nebeneinander ergehen. Statt *σῖγα* wird geschrieben gewesen sein: *σίλλα,* der adverbial gebrauchte Plural. neutr. von *σίλλος.* Dieses Wort kommt vor bei Lucian Lexiph. C. 3: *ἐγὼ δέ, ἦ δ' ὅς, σίλλος ὦ δέσποτα γεγένημαι σὲ περιορῶν.* Das Verbum *σιλλοῦν* erklärt Photius Lex. p. 512, 1: *τοὺς ὀφθαλμοὺς ἠρέμα παραφέρειν· οὕτως Ἄρχιππος.* Dieselbe Erklärung giebt Ael. Dion. bei Eustath. p. 204, 27, indem er nach *παραφέρειν* hinzufügt *ἐν τῷ διαφαυλίζειν καὶ διασύρειν.*

Vs 906 fg.:

ἢ ἢ τί δρᾷς, ὦ Διὸς παῖ; μελάθρων
τάραγμα ταρτάρειον, ὡς
ἐπ' Ἐγκελάδῳ ποτὲ Παλλάς, εἰς δόμους πέμπεις.

Daß in diesen Worten des Chors kein Fehler stecke, ist mir unglaublich. Wenn *δρᾷς* in Vs 906 und *πέμπεις* in Vs 908 das Richtige wäre, wer könnte dann mit *Διὸς παῖ* in Vs 906 gemeint sein? Man müßte annehmen, daß Lytta bezeichnet sei und etwa schreiben: *Νυκτὸς ὦ παῖ,* also eine ziemlich starke Veränderung vornehmen, die aber nöthig sein würde, weil es nach Vs 864 keinem Zweifel unterliegen kann, daß das *δρᾶν* und das *πέμπειν* von der Lytta ausgehe. Selbst wenn es glaublich wäre, daß die in Vs 906 angeredete Person Hera sein solle, unter deren Einwirkung Lytta handele, müßte für *παῖ* ein Wort in der Bedeutung von *δάμαρ* eingesetzt werden. Man kann aber mit einer viel leichteren Veränderung abkommen, indem man in Vers 906 schreibt:

τί δρᾷ σ' und in Vs 908 πέμπει. Dann ist mit Διὸς παῖ Herakles gemeint und zu δρᾷ und πέμπει das Subjekt Lytta, welche noch Vs 899 ausdrücklich erwähnt wird in den Worten:

οὔποτ' ἄκραντα δόμοισι Λύσσα βακχεύσει.

Unter μέλαθρα ist wie in Vs 864 nur das Dach, die Decke zu verstehen, ebenso wie in Vs 905 und 1007 unter στέγη.

Etymologische Mittheilung.

Von

Leo Meyer.

Σῆματ-(Σῆμα) ‚Zeichen'.

Fast alle zunächst zu vergleichenden Bildungen haben im Griechischen noch lebendige Verbalformen zur Seite, so ἧματ- ‚Wurf' (Il. 23, 891; — ἧκε Il. 1, 382; 2, 309; ἵησιν Il. 3, 12; 21, 158; ἵη Il. 1, 479; 4, 397), βῆματ- ‚Schritt, Gang' (Aesch. Ch. 799; Soph. Oed. Kol. 193; El. 163; — ἔβη Il. 1, 311; 424; βῆ Il. 1, 34; 44; βήτην Il. 8, 115; 12, 330), -δῆματ- ‚Gebundenes' (in ὑπό-δηματ- ‚Sohle' Od. 15, 369; 18, 361; ἄν-δηματ- ‚Stirnband' Pind. Bruchst. 179; — δῆσεν Il. 5, 730; 23, 854; δίδη Il. 11, 105), θῆματ- ‚Gesetztes' (Soph. Bruchst. 498; auch in ἀνά-θηματ- ‚Aufgesetztes, Schmuck' Od. 1, 152; 21, 430; ἐπί-θηματ- ‚Deckel' Il. 24, 228; — ἔθηκεν Il. 1, 2; 3, 330; τίθησιν Il. 4, 83; 11, 392; τίθη Il. 1, 441; 446), νῆματ- ‚Gesponnenes, Faden' (Od. 2, 98; 4, 134; — ἐπ-ένησε Il. 20, 128; νηθέντα Plat. Polit. 282, E; νήει Hes. Werke 777), λῆματ- ‚Wille, Entschlossenheit' (Pind. Pyth. 3, 25; 8, 45; Nem. 1, 57; 3, 83; Aesch. Sieben 448; 616; 706; — λῇς Epich. 44; 94, 7; Ar. Lys. 95; λῇ Epich. 94, 8; Ar. Lys. 1163), ἄηματ- (aus altem ἄ-ϝηματ-) ‚das Wehen' (Aesch. Ag. 1418; Eum. 905; Soph. Ai. 674; — ἄϝησι Her. Werke 516, = altind. *vâti* ‚er weht' RV. 4, 7, 10; 10, 142, 4; ἄϝητον Il. 9, 5; ἄϝη Od. 12, 325; 14, 458), κτῆματ- ‚Besitzthum' (Il. 3, 70; 72; — κτήσατο Od. 14, 4; 450; ἐκτῆσθαι Il. 9, 402), -στῆματ- ‚das Stehende' (in Zusamensetzungen wie ἐπί-στηματ- ‚das Draufstehende, Grabdenkmal' Plat. legg. 12, 958, E; σύ-στηματ- ‚aus Theilen bestehendes Ganzes' Plat. Phil. 17, D; Epin. 991, E; διά-στηματ- ‚Zwischenraum' Plat. Tim. 36, A; Phil. 17, C; — ἔστη ‚er stellte sich' Il. 5, 108; 309; στῆ Il. 1, 197; 2, 20; στῆθι Il. 22, 222; 23, 97; καθ-ίστη ‚stelle' Il. 9, 202), σμῆματ- ‚Gestrichenes, Salbe' (Philox. bei Athen. 9, 409, E. — σμησάμενοι Hdt. 4, 73; ἐπι-σμῇ Ar. Thesm. 389; σμῆν Luk. Lexiphan. 3), κνῆματ- ‚Abgeschabtes' (κνήματα· ξύσματα Hippokr. in Galens Lex. — κνῇ Il. 11, 639; κνῆσθαι Plat. Gorg. 494, C; ἐξ-έκνησε Hdt. 7, 239), τρῆματ- ‚Loch' (Ar. Wespen 141; Plat. Gorg. 494, B; — ξυν-έτρησαν Plat. Tim. 91, A; τέτρηται Hdt. 4, 158; δι-ετίτρη Appian Lib. 122), χρῆματ- ‚Gebrauchtes, Besitzthum' (Od. 2, 78; 203; — χρῆται Aesch. Ag. 953; ἐχρήσατο Soph. Kön. Oed. 117; κέχρητο Od. 14, 421; 16, 398), ῥῆματ- (aus altem ϝρῆματ-) ‚Gesagtes, Wort' (Pind. Pyth. 4, 278; Nem. 4, 6; — ϝέϝρηται Il. 4, 363; ϝρηθέντι Od. 18, 413 = 20, 322), πλῆματ- ‚Füllung' (Hesych: πλῆμα· πλήρωμα. — πλῆτο Il. 17, 499; 21, 16; ἐν-έπλησαν Od. 17, 503; πίμπλησι Aesch. Bruchst. 57, 4), βλῆματ- ‚Wurf, Schuß' (Hdt. 3, 35; Eur. Schutzfl. 330; auch in Zusammensetzungen wie πρό-βληματ- ‚Vorgehaltenes, Schirm' Aesch. Sieben 540; 676; — βλῆτο Il. 4, 518; 16, 570; βέβληται Il. 5, 103; ἐβλήθη Thuk. 8, 84), κλῆματ- ‚Gerufenes, Angeführtes' (in ἔγ-κληματ- ‚Beschuldigung, Vorwurf' Soph. Phil. 323; Trach. 361, und ἐπί-κληματ- ‚Beschuldigung, Vorwurf' Soph. Kön. Oed. 227; 529; — κέκληται Il. 10, 259; ἐκλήθην Soph. Kön. Oed. 1359), σκλῆματ- ‚Austrocknung' (Galen. lex. Hippokr.: σκηλήματι· σκελετείᾳ, συμπτώσει, wo zu lesen sein wird σκλήματι. — ἀπο-σκλῆναι Ar. Wespen 160; ἐξ-εσκληκότες Epich. 106; ἀπο-σκλήσῃ Antipatr. in Anth. 11, 37, 6), μνῆματ- ‚Andenken' (Il. 23, 619; Od. 15, 126; — μέμνηται Il. 8, 362; μνήσει Od. 12, 38; μίμνησκε Od. 14, 169), τμῆματ- ‚Abgeschnittenes, Stück' (Plat. Polit. 267, B; — τετμημένον Od. 17, 195; κατ-ετμήθη Hdt. 2, 108), πτῆματ- ‚Flug' (Suidas: πτῆμα· πτῆσις οἰωνῶν. — ἐξ-έπτη Hes. Werke 98; ἐπι-πτήσεται Hdt. 7, 15), σχῆματ- ‚Haltung, das Aeußere' (Aesch. Sieben 488; Soph. Phil. 223; — σχήσω Il. 17, 182; 24, 670; ἐσχήκασι Plat. legg. 6, 765, A; παρ-εσχημένος Xen. an. 7, 6, 11). — Zu πῆματ- ‚Leid' (Il. 3, 50; 160) scheint παθ- ‚leiden' (πάθεν Il. 24, 7; Od. 1, 4) die nächste Grundlage zu bilden; ein Hervorgehen von πῆματ- aus πάθματ- aber, wie es gewöhnlich angenommen wird, ist sehr wenig wahrscheinlich. —

Neben κλῆματ- ‚Zweig' (Ar. Ekkl. 1031; Xen. Oek. 19, 8; Plat. Staat 1, 353, A), das mit κλῶν- ‚Zweig' (Eur. El. 324; Ion 423; Xen. Jagd 10, 7) und κλάδο-ς ‚Zweig' (Aesch. Schutzfl. 23; 159; Eum. 43) ohne Zweifel nahe zusammenhängt, bietet sich kein unmittelbar zugehöriges Verb, da κλᾶν ‚abbrechen' (ἐνι-κλᾶν Il. 8, 408; δια-κλάσσας Il. 5, 216; κλάσε Od. 6, 128; ἐκλάσθη Il. 11, 584; ἐναπο-κέκλαστο Thuk. 4, 34), von dem das substantivische κλάσματ- ‚Abgebrochenes, Bruchstück' (Plut. Tib. Gr. 19; Lukill. in Anth. 11, 153, 3) ausging, als solches nicht gelten kann.

Die gegebene Uebersicht weist den Weg zur Beurtheilung der Verbalgrundform, von der σῆματ- ausgegangen sein wird. Es bleibt nun noch die Frage nach der Vorgeschichte seines anlautenden Zischlauts zu erwägen.

Rein — das heißt vor unmittelbar folgendem Vocal — anlautendes σ steht so gut wie niemals an der Stelle von altem Zischlaut. Es ging vielmehr aus sehr verschiedenartigen Lautverbindungen hervor und zwar wesentlich in Folge von Lautassimilationen. Die homerische Sprache zeigt das darin noch sehr deutlich, daß sie bei Vorfügung von kurzen Vocalen, sei es präfixalen oder wortstammauslautenden, sei es dem Augment oder dem ε einer Reduplicationssilbe, das σ der in Frage stehenden Wortformen gewöhnlich verdoppelt.

So stehen neben den versbeginnenden σεύωνται ‚sie setzen sich in rasche Bewegung, sie rennen, sie stürmen daher' (Il. 11, 415) und causativ σεῦε ‚er setzte in rasche Bewegung, trieb fort' Il. 6, 133) die Formen ἐπι-σσεύεσθαι (Il. 15, 347), λαϝο-σσόϝο-ς ‚das Kriegsvolk erregend oder antreibend' (Il. 13, 128; 17, 398; 20, 48; 79), ἔσσευα (Il. 5, 208), ἔσσευε (Il. 11, 147; 14, 413), ἐσσεύοντο (Il. 2, 150; 808; 9, 80), ἐσσεύαντο (Il. 11, 549 = 15, 272), ἔσσυμαι (Il. 13, 79), ἔσσυται (Od. 10, 484; ἐπ-έσσυται Il. 1, 173; 6, 361; 9, 42), ἐσσυμένο-ς (Il. 11, 554 = 17, 663; 13, 142), ἐσσυμένως (Il. 3, 85; 15, 698; 23, 55). Zum Perfectstamm gehören wohl auch ἔσσυτο (Il. 2, 809 = 8, 58; 14, 519), ἔσσυο (Il. 16, 585; Od. 9, 447) und ἀπ-εσσύμεθα (Od. 9, 236 und 396; ἐπ-εσσύμεθα Od. 4, 454). Unzweifelhaft aoristische Form aber ist das vereinzelte augmentlose σύτο (Il. 21, 167). Bei freierer Stellung im Satz findet sich vor dem anlautenden σ des in Frage stehenden Verbs kurzer Vocal metrisch lang gebraucht Il. 17, 463 (φῶτας, ὅτε σεύαιτο) und Il. 23, 198 (ὕλη τε σεύαιτο καϝήμεναι), an welchen beiden Stellen aber die Ueberlieferung sehr schwankt.

Neben σείων ‚schüttelnd, schwingend' (Il. 5, 563; 9, 583) begegnen ἐπι-σσείων (Il. 15, 230), ἐπι-σσείησιν (Il. 4, 167), περι-σσείοντο (Il. 19, 382 und 22, 315), ὑπο-σσείουσιν (Od. 9, 385) und ἐσσείοντο (Il. 20, 59), dagegen bei freierer Stellung im Satz Il. 14, 285: ἀκροτάτη δὲ ποδῶν ὕπο σαίετο ὕλη ohne durch das σ bewirkte metrische Dehnung.

Weiter sind hier anzuführen περι-σσαίνουσι (Od. 16, 10), περί-σσαινον (Od. 16, 4) und περι-σσαίνοντες (Od. 10, 215) neben σαῖνον ‚sie wedelten' (Od. 10, 219), denen gegenüber ein augmentirtes ἔσηνε (Od. 17, 302: οὐρῇ μέν ῥ' ὅ γ' ἔσηνε) sehr auffällt. Man darf dafür wohl ἔσσηνε (? οὐρῇ μέν ῥ' ἔσσηνε) vermuthen.

Ferner gehört hieher κονί-σσαλο-ς ‚aufgewirbelter Staub' (Il. 3, 13; 5, 503; 22, 401), als dessen Schlußtheil das einfache σάλο-ς ‚unruhige, schwankende Bewegung' (Eur. Hek. 28: ἐν πόντου σάλῳ, Iph. Taur. 1443: ποντίῳ λαβὼν σάλῳ) wird gelten dürfen.

Noch ist hier zu nennen das häufige Beiwort der Schiffe ἐύ-σσελμο-ς ‚mit gutem Verdeck' oder ‚mit guten Ruderbänken' (Il. 2, 170; 358; 390; 613), als dessen Schlußtheil eine Nebenform zu σέλματ- ‚Verdeck, Ruderbank' (Hom. hymn. 6, 47; Aesch. Ag. 1442; Pers. 358) sich ergiebt, die sich von Hesych (σελμῶν· σανίδων) aufbewahrt findet.

Aus ἐπί-σσωτρο-ν ‚Metallbeschlag der Radfelgen' (Il. 5, 725; 11, 537; 20, 394; 502; 23, 505; 519. — Pollux 1, 144: τῶν δὲ περιειλουμένων τῷ ἄξονι τροχῶν τὸ μὲν περὶ ταῖς ἀψῖσι σιδηροῦν ἐπίσωτρον, ἡ δὲ ἀψὶς καὶ σῶτρα καλεῖται) ist das einfache σῶτρο-ν ‚Radfelge' (Pollux an der angeführten Stelle und 10, 53) zu entnehmen.

Weiter gehört hieher auch noch der Eigenname Ἐύ-σσωρο-ς (Il. 6, 8: υἱὸν Ἐυσσώρου Ἀκάμαντ' ἠύν τε μέγαν τε), der mit σωρό-ς ‚Haufen, Vorrath' (Hes. Werke 778; Hdt. 1, 22; 6, 125) als Schlußtheil gebildet sein wird. —

Eine von der so eben dargelegten abweichende Behandlung des σ zeigt sich in drei homerischen Zusammensetzungen mit dem beraubenden ἀν- (ἀ-), nämlich ἀ-σήμαντο-ς ‚ungeleitet, ungeführt' (Il. 10, 485: ὡς δὲ λέων μήλοισιν ἀσημάντοισιν ἐπελθών, wo vielleicht vermuthet werden darf μήλοισ' ἀσσημάντοισιν), ἄ-σιτο-ς ‚ohne Essen' (Od. 4, 788: κεῖτ' ἄρ' ἄσιτος ἄπαστος, wo etwa zu lesen sein würde κεῖτ' ἄσσιτος) und ἀσινέσ- ‚unverletzt' (Od. 11, 110 = 12, 137: τὰς εἰ μέν κ' ἀσινέας ἐϝάᾳς, wo etwa gemuthmaßt werden kann τὰς εἴ κ' ἀσσινέας).

Dann giebt es aber auch noch ein paar weitere das σ betreffende Ausnahmen, nämlich das reduplicirte σέσηπε (Il. 2, 135; daneben σήπεται Il. 24, 414) und die folgenden augmentirten Formen: ἐσημήναντο (Il. 7, 175), ἐσύλευον (Il. 5, 48), ἐσύλα (Il. 4, 105; 5, 164; 6, 28; 11, 110; 15, 524; 17, 60; 22, 368), ἐσάωσε (Il. 4, 12; 11, 752; 14, 259 und öfter; ἐσάωσα Od. 5, 130) und ἐσάωθεν (Od. 3, 185).

Wie weit etwa κολοσυρτό-ς ‚Lärm, Getümmel' (Il. 12, 147; 13, 472; Hes. theog. 880), ἀσύφηλο-ς ‚schnöde, ungebührlich' (Il. 9, 647; 24, 767), οὐδενόσωρο-ς ‚werthlos, verächtlich' (Il. 8, 178) und ἁλοσύδνη ‚meerentsprossen' (?) (Il. 20, 207; Od. 4, 404) hier noch in Frage kommen können, lassen wir bei ihrer geringeren etymologischen Durchsichtigkeit ununtersucht.

Ohne auf eine etymologische Untersuchung der Mehrzahl der oben aufgeführten Wörter, wie sie jüngst von einem meiner Schüler, Herrn Ludwig Weidenbaum, in einer vortrefflichen des Druckes werthen Candidatenschrift ausgeführt worden, hier näher einzugehen, mag nur einmal wieder darauf hingewiesen sein, daß das griechische *σεύεσθαι* auf dem selben Grunde ruht mit altind. *cjav-: cjávatai* ,er setzt sich in Bewegung', für das ein paar Stellen aus dem Rgvêdas angeführt sein mögen: 1, 167, 8: *cjavantai ácjutâ dhruvā́ni* ,es geräth in Bewegung das unbewegliche Feste'; 10, 124, 4: *agnís sáumas váruṇas tái cjavanti* ,Agnis, Somas, Varunas, die bewegen sich'. Das Causativ (*cjâvájati* ,er setzt in Bewegung') dazu findet sich beispielsweise RV. 5, 56, 4: *girím prá cjâvajanti jā́mabhis* ,(die Marute) bewegen den Berg auf ihren Fahrten' und RV. 2, 24, 2: *prá acjâvajat ácjutâ bráhmaṇas pátis* ,Brahmanaspatis hat das Unbewegliche in Bewegung gebracht'. Von weiter zugehörigen Wörtern nennen wir noch die zusammengesetzten *hásta-cjuti-* ,rasche Bewegung der Hände' (RV. 7, 1, 1) und *bhuvana-cjavá-* ,weltbewegend, welterschütternd' (RV. 10, 103, 9), welches letztere in seinem Schlußtheil genau mit dem von *λαϝο-σσόϝο-ς* übereinstimmt.

Der altindischen Lautverbindung *cj* stellt sich im Griechischen auf Grund des sogenannten assibilirenden (d. i. den Zischlaut hervorrufenden) Einflusses des *j* und dann von Assimilation *σσ* (dafür im Anlaut einfaches *σ*) gegenüber, ganz wie zum Beispiel in *πέσσει* ,er kocht' (Il. 4, 513; 24, 617), das in altindischem Gewande *pácjati* (die Medialform begegnet RV. 1, 135, 8: *pácjatai jávas* ,es kocht' — oder ,es reift'? — ,die Gerste') lauten würde.

Gar nicht selten hat sich *σσ* auch aus der Verbindung des *j* mit dem aspirirten Guttural entwickelt, wie zum Beispiel in *ὀρύσσειν* ,graben' (Od. 10, 305) aus *ὀρύχjειν*, oder in *θᾶσσον* ,schneller, sehr schnell' (Il. 2, 440; 4, 64; 6, 143) aus *θάχjον*. Auch für *νύσσειν* ,stoßen, stechen' (*νύσσων* Il. 16, 704; *νύξε* ,er stieß' Il. 5, 46; 579; 11, 96) darf man solchen Ursprung des *σσ* muthmaßen, da der Gedanke an etymologischen Zusammenhang mit *ὄνυχ-* ,Klaue, Kralle, Fingernagel' (Il. 8, 248; 12, 202; Hes. Schild 266) und altind. *nakhá-* ,Fingernagel, Fußzehe, Vogelkralle' (RV. 1, 162, 9; 10, 28, 10) sehr nahe liegt.

Das Gegebene führt uns auch zu dem gesuchten Aufschluß über *σῆματ-*: sein anlautendes *σ* (für *σσ*) führt auf eine alte Verbindung von *j* mit aspirirtem Guttural zurück und als ihm zu Grunde liegende Verbalform ergiebt sich das altindische *khjâ: khjáti* ,er sieht, er schaut, er betrachtet', das im Rgvêdas nur in

Verbindung mit Präfixen, später auch in unzusammengesetzten passivischen oder causativen Formen, wie dem participiellen *khjâtá-* ‚bekannt' (eigentlich ‚gesehen', oder dann auch ‚gezeigt, verkündet, angesagt'), begegnet. Wir geben einige Beispiele: RV. 8, 47, 11: *ā́ditjâ áva hí khjáta ádhi kū́lât iva spáças* ‚Âditja, schauet herab, wie von der Höhe die Späher'; RV. 7, 13, 3: *ǧâtás jád agnai bhúvanâ ví ákhjas paçū́n ná gaupā́s* ‚als du geboren, o Agnis, die Wesen beschautest, wie ein Hirt das Vieh'; RV. 10, 10, 2: *vīrā́s ... urvijā́ pári khjan* ‚die Helden schauten weit umher'; RV. 9, 101, 7: *pátis víçvasja bhū́manas ví akhjat ráudasî ubhái* ‚als Herr der ganzen Welt betrachtete er (Sômas) beide Welthälften'.

Die Bedeutung des ‚Sehens, Aufblickens' ging bei *khjâ* ohne Zweifel von der des ‚Aufleuchtens' aus, da auch diese mehrere Male im Rgvêdas entgegentritt, wie RV. 1, 46, 10: *ví akhjat ǧihvájâ ásitas*, wo Ludwig übersetzt ‚der Schwarze leuchtete empor mit der Zunge' und Graßmann ‚schwarz an der Zunge flammt die Gluth'. Weiter gehören hieher auch wohl RV. 10, 45, 4: *sadjás ǧaǧnânás ví hí îm iddhás akhjat* ‚(Agnis) im Augenblick geboren leuchtete auf (so nach Böhtl.-R.; L. ‚schaute auf', Gr. ‚erblickt er') entflammt'; RV. 10, 127, 1: *rā́trî ví akhjat âjatī́ purutrā́ daivī́ akshábhis* ‚die Nacht leuchtete auf' (so nach B.-R.; L. ‚hat ausgeblickt') ‚hinkommend nach vielen Seiten, die Göttinn, mit ihren Augen'; RV. 1, 123, 2: *uccā́ ví akhjat juvatís punarbhū́s ā́ ushā́s agam* ‚hoch leuchtete sie auf' (so nach B.-R.; L. ‚hat sie ausgeblickt'; Gr. ‚sie blickt empor') ‚die jugendliche wiederkehrende, die Morgenröthe, sie kam heran'.

Man darf darnach für σῆματ-, das in altindischem Gewande als **khjā́man-* zu erwarten gewesen wäre, als Grundbedeutung wohl ‚das Leuchtende' vermuthen.

Dorpat, Januar 1890.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

December 1889.

(Fortsetzung.)

United States coast and geodetic survey. Report 1887. Part I Text. Part II Plates (sketches). Washington 1889.

a. Pennsylvania geological survey 1889. Dictionary of fossils. Vol. I. A—M. P. 4. Harrisburg 1889.

b. Annual report 1887.
c. Museum catalogue 3.
d. Atlas Northern Anthracite field. Part III, IV. A. A.
e. Atlas to report H H, and H H H.
f. South mountain sheets C. 1, 2, 3, 4. D. 2, 3, 4, 5. D. 6. Harrisbury.

Johns Hopkins Universtity studies.
a. American journal of Mathematics. Vol. XI. N. 4.
b. Historical and political science. Seventh series. VII—VIII—IX. The River towns of Connecticut. Baltimore.
c. Circulars. Vol. IX. — N. 76. Nov. 1889.

Bulletin of the Museum of comparative Zoology. Vol. XVII. N. 5. Vol. XVIII. Cambridge. U. S. A.

Proceedings of the California Academy of sciences. Second series. Vol. 1. Part 1. 2. 1888. San Francisco.

Proceedings of the Academy of natural science of Philadelphia. Part 1. Jan. Febr.—April 1889. Philadelphia 1889.

Journal of the Trenton natural history society. Vol. II. N. 1. Jan. 1889. Trenton 1889.

a. Bulletin of the Essex Institute. Vol. 20, 1—3, 4—6, 7—12. Vol. 21, 1—2 —3, 4—5. 6.
b. Charter and By-laws and a list of its officers and members. Salem. Mass.

Anuario del observatorio astronómico nacional de Taenbaya para el Año de 1890. Año 10. Mexico 1889.

China. Catalogue of the Chinese Imp. maritime customs collection at the U. S international exibition. Philadelphia 1876. Shanghai 1876.

Nachträge.

Untersuchungen über die stickstofffreien Reservestoffe der Samen von Lupinus luteus und über die Umwandlungen derselben während des Keimungsprocesses von E. Schulze u. E. Steiger. Preisgekrönt von d. K. G. d. W. zu Göttingen. 3 Exemplare. Berlin 1889.

Process da strieng H. Caviezel. Chur 1889.

Proceedings of the London mathematical society. N. 359—363.

Proceedings of the R. physical society. Session 1888—89. Edinburgh 1889.

Die Indogermanischen Verwandtschaften von Berthold Delbrück. Des XI. Bandes der Abh. d. philolog.-histor. Classe d. K. Sächs. Ges. der Wissensch. N. V. Leipzig 1889.

Berichte und Verhandlungen d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Leipzig. Philolog.-hist. Classe. II. III. 1889.

Januar 1890.

Sitzungsberichte d. K. Pr. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin. 1889. LIII u. 1890. I II.

Nova acta academiae Caesareae Leopoldino-Carolinae Germanicae naturae curiosorum. Band 52 u. 53. Halle 1888 u. 89.

Katalog der Bibliothek der K. Leopoldinischen-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher. Liefr. 2. 1889.

Verhandlungen des historischen Vereins von Oberpfalz und Regensburg. Band 43 der gesammten Verhandlungen. Band 35 der neuen Folge. Regensburg 1889.

Jahresbericht des physikalischen Vereins zu Frankfurt a. Main für 1887—1888. Frankfurt a. M. 1889.

Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaften, herausgegeben vom naturwissenschaftlichen Verein in Hamburg. Band XI Heft 1. Hamburg 1889.

Festschrift, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg zu ihrem 200jährigen Jubelfest 1890. Theil I1, wissenschaftl. Abhandlungen, zugl. Band II der »Mittheilungen«. Leipzig 1890.

Mittheilungen des Geschichts- und Alterthumsvereins für Leisnig im Königreich Sachsen. Heft 8. Leisnig 1889.

Leopoldina. Heft XXV, Jahrg. 1889, N. 23—24. Titel u. Register. Halle a. S. 1889.

Bemerkungen zu dem Aufsatze: Untersuchung der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen v. R. Lipschitz in Bonn. Sonderabdruck aus »Journal für reine und angewandte Mathematik«. Heft 1. B. 106.
v. Kölliker, Histologische Mittheilungen aus den Sitzungsberichten der Würzburger Phys.-med. Gesellschaft. 1889. 15. Sitzung vom 23. Nov. 1889.
Urkundliche Geschichte des Reichsritterlichen Geschlechts Eberstein. Aus den Quellen bearb. v. L. F. Freiherr von Eberstein. Band 1, 2, 3. Berlin 1889. 2. Ausgabe.
Historische Nachrichten über den zur Gräflich-Mansfeld'schen Herrschaft Heldrungen gehörenden Marktflecken Gehofen und die Aemter Leinungen und Morungen. Von Fr. v. Eberstein. Berlin 1889.
Kriegsberichte des Kön. Dän. Generalfeldmarschalls Ernst Albrecht von Eberstein aus dem zweiten schwedisch-dänischen Kriege. Herausgeg. v. L. F. Freiherr von Eberstein. Berlin 1889.
Korrespondenz zwischen Landgraf Georg II. von Hessen-Darmstadt u. s. General-Lieutenant E. A. v. Eberstein auf Gehofen und Reinsdorf. Herausgeg. von L. F. Freiherr von Eberstein. Berlin 1889.
Memoirs and proceedings of the Manchester literary and philosophical society. Vol. II fourth series. Manchester 1889.
Records of the geological survey of India. Vol. XXII. Pars 4. Calcutta 1889.
Nature. Vol. 41. 1054—1057.
Proceedings of the Royal society. Vol. XLVI N. 284.
Monthly notices of the Royal astronomical society. Vol. L. N. 2. Dec. 1889.
Verhandlungen der Kaiserl. Königl. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Jahrg. 1889. Band XXXIX. III. u. IV. Quartal. Wien 1889.
Verhandlungen der K. K. geologischen Reichsanstalt 1889. N. 13, 14, 15, 16 u. 17.
Meteorologische Zeitschrift zu Jahrgang 6. XXIV. Band der Zeitschrift der Oesterr. Ges. für Meteorologie 1889. Namen- u. Sachregister. Wien.
Ungarische Revue. Heft I. Januar 1890. 10. Jahrgang. Budapest 1890.
Foldtani Kózlöny 1889. Kótet XIX, füzet 7—8, 9—10, 11—12. Budapest 1889.
Zweiter Nachtrag zum Katalog der Bibliothek und allgemeinen Kartensammlung der Kgl. Ung. geol. Anstalt 1886—1888. Budapest 1889.
Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau 1889. December. Krakau 1889.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXVI 1889. Serie quarta Rendiconti. Vol. V. fasc. 7. 8. 2. semestre. Roma 1889.
Rendiconti del circolo matematico di Palermo. Tomo III fasc. VI. Nov.-Dec. Anno 1889.
Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XXV. Disp. 1. 2. 1889—90. Torino.
Memorie della R. Accademia delle scienze del istitut. di Bologna. Serie IV. Tomo IX. fasc. 1, 2, 3, 4. Bologna 1888—1889.
Nouveaux progrès de la question du calendrier universel et du méridian universel. R. Académie des sciences de l'institut de Bologne. Bologne 1889.
Bibliotheca nazionale centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane 1890. N. 97. Firenze 1890.
Annuaire de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1890. 56. Année. Bruxelles 1890.
Envoi de la part de l'Académie des sciences de Stockholm.
  a. Mémoires. Bd. 20 1—2. 21 1—2 et Atlas (Handlingar). Stockholm 1883—87.
  b. Supplement aux mémoires. Bd. 9 1—2, 10 1—2, 11 1—2, 12 1—4, 13 1—4 (Bihang). Stockholm 1884—88.
  c. Bulletin Årg.: 41—45. 1884—1888 (Öfverreigt). Stockholm 1885—89.
  d. Observations météorologiques. Bd. 22—26. 2. Ser. Bd. 8—12. 1880—1884. (Meteorologiska Jak Hagelser). Stockholm 1885—89.
  e. Biographies des membres. Bd. 2 Heft 3. (Lefnadsteckningar). Stockholm 1885.
  f. Table des matières 1826—1883. (Förteckning). Stockholm 1884.
  g. Mitgliederverzeichniß 1885—1889.
Academie Roy. de Copenhague
  a. Mémoires. Série 6. Classe des sciences. Vol. 5 N. 12. 1889.

b. Mémoires. Série 6. Classe des lettres. Vol. II N. 6. Vol. III N. 1. 1889.
c. Oversigt over det Kongelige D. Videnskabernes Selskabsforhandlinger i. Aaret 1889. N. 2. Kobenhavn.

Bijdragen tot de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 5. Volgreeks 5. Deel. 1 Aflever. S'Gravenhage 1890.

Flora Batava. Aflever 287, 288. Titel and register van het 18e Deel. Leiden.

Mémoires de l'Academie Imp. des sciences de St. Petersbourg. Serie VII. Tome XXXVII N. 2. St. Pétersbourg 1889.

Repertorium für Meteorologie, hrsg. von der Kais. Akad. d. W. Band XII. St. Petersburg 1889.

Annalen des Physikalischen Central-Observatoriums. Jahrg. 1888. Theil 1. St. Petersburg 1889.

U. S. geological Survey:
Monographies: a. Geology of Quicksilver deposits of the pacific slope, and Atlas, accompanying it. Washington 1888.
b. XIV. Fossil fisches and fossil plants. Washington 1888.
c. Bulletin N. 48—53. Washington 1888—1889.

Proceedings of the American pharmaceutical association 1889. Vol. 37. Philadelphia 1889.

Bulletin of the American Geographical society. Vol. XXI N. 4. 1889. New York.

Annual report of the Curator of the Museum of comparative Zoology at Harvard College 1888—89. Cambridge U. S. A. 1889.

Die fossilen Pferde der Pampasformation. Nachtrag beschr. v. Dr. Hermann Burmeister. Buenos Aires 1889.

Journal of the college of science Imp. University Japan. Vol. III. Part. III. Tokyo 1889.

Nachträge.

Report of the scientific results of the exploring voyage of H. M. S. Challenger 1873—76. Physics and Chemistry. Vol. II. 1889.

Astronomische Beobachtungen an der K. K. Sternwarte zu Prag in den Jahren 1885, 1886 und 1887. Enthaltend Originalzeichnungen des Mondes. Appendix zum 46., 47. und 48. Jahrgang. Prag 1890.

Orvos Természettudomanyi Ertesitö
a. I. Orvosi Szak II—III fúzet.
b. II. Természettudomanyi szak III fúzet.
c. III. Népszerii szak III fúzet. Kolozsvart 1889.

Astronomische Mittheilungen von Dr. Rud. Wolf. N. 74. October 1889.

Mémorial des cinquante premières années de la société d'histoire et d'archéologie de Genève 1838—1888 par Ed. Favre. Genève 1889.

(Fortsetzung folgt.)

Druckfehler.

Nachrichten S. 55 ist I hinter Formenlehre der französischen Sprache zu tilgen.

Inhalt von No. 3.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

19. März. № 4. 1890.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 1. März 1890.

Klein, Zur Theorie der Laméschen Functionen.

Wüstenfeld legt eine Abhandlung vor: »Der Imâm el Schâfi'í, seine Schüler und Anhänger bis zum J. 300 d. H.« (Erscheint im Band 36.)

de Lagarde, I. »Das älteste Glied der masoretischen Traditionskette«.
II. Psalm 114 im Sidrâ rabbâ.

Hertz, Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper. (Nachträglich vorgelegt von Voigt.)

Zur Theorie der Laméschen Functionen.

Von

F. Klein.

Eine Vorlesung über Lamésche Functionen, welche ich während des nun zu Ende gehenden Wintersemesters hielt, gab mir Gelegenheit, zu Auffassungen und Fragestellungen zurückzukehren, mit denen ich mich im Winter 1880—81 beschäftigt hatte [1]). Ich zweifelte von vornherein nicht, daß es gelingen müsse, auf dem damals eingeschlagenen Wege noch ein Stück weiter zu kommen. Ich hatte mir auch die Ansicht gebildet, daß eine richtige, von geometrischen, beziehungsweise physikalischen Gesichtspuncten ausgehende Theorie der Laméschen Functionen für die allgemeine Lehre von den linearen Differentialgleichungen zweiter

1) Vergl. zwei Aufsätze im 18ten Bande der mathematischen Annalen: »Ueber Lemésche Functionen«, »Ueber Körper, welche von confocalen Flächen zweiten Grades begränzt sind«.

Ordnung vorbildlich sein müsse. Der K. Gesellschaft der Wissenschaften möchte ich nachstehend einige Resultate vorlegen, welche ich in der hiermit bezeichneten Richtung gefunden habe.

Wir fragen zunächst nach der zweckmäßigsten Definition der zu einem n-fach ausgedehnten Raume (R_n) gehörigen Laméschen Differentialgleichung. In dieser Hinsicht beginnt man herkömmlicher Weise mit dem System der confocalen Flächen zweiten Grades

$$\frac{x_1^2}{\lambda - e_1} + \ldots . \quad \frac{x_n^2}{\lambda - e_n} = 1 \tag{1}$$

und findet durch bekannte Umformungen der Potentialgleichung die Lamésche Gleichung in der Gestalt:

$$\frac{d^2E}{dt^2} = (A\lambda^{n-2} + B\lambda^{n-3} + \ldots . N)\, E, \tag{2}$$

wo

$$t = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, \quad f(\lambda) = (\lambda - e_1) \ldots . (\lambda - e_n); \tag{3}$$

ich habe schon bei früherer Gelegenheit hervorgehoben (in dem zweiten der soeben citirten Aufsätze), daß es zweckmäßig ist, die hier auftretenden Constanten A, B, . . . N zunächst als unbeschränkt veränderlich zu betrachten und dadurch der gewöhnlichen Begriffsbestimmung der Laméschen Functionen gegenüber eine Erweiterung eintreten zu lassen [1]). Nun kann man aber den durch (1) gegebenen Ausgangspunkt beanstanden. In der Potentialtheorie, wo fortgesetzt Transformationen durch reciproke Radien in Betracht zu ziehen sind, ist das System der confocalen Flächen zweiten Grades kein wirklich allgemeines Orthogonalsystem; als solches erscheint vielmehr erst das von Darboux und Moutard im Jahre 1864 aufgestellte System der confocalen Cycliden, ein System von Flächen vierter Ordnung, das sich bei Verwendung überzähliger, homogener Coordinaten ($x_1 \ldots . x_{n+2}$) [sogenannter polysphärischer Coordinaten] durch die zwei Gleichungen darstellen läßt:

$$\sum_1^{n+2} x_\varkappa^2 = 0, \qquad \sum_1^{n+2} \frac{x_\varkappa^2}{\lambda - e_\varkappa} = 0. \tag{4}$$

---

1) Lamé und Heine bestimmen A, B, . . . bekanntlich so, daß eine Particularlösung von (2) algebraisch wird; Hermite führt bei seinen allgemeineren, auf $n = 3$ bezüglichen Untersuchungen, für A immer noch den besonderen im algebraischen Falle eintretenden Werth $\frac{n(n+1)}{4}$ ein (wo n eine positive ganze Zahl) und läßt dann freilich B beliebig.

Herr Wangerin ist der Erste gewesen, der nachwies, daß man unter Zugrundelegung eines solchen Cyclidensystems in der That eine Theorie ganz ähnlich der Laméschen aufbauen kann[1]). Seine Rechnungen beziehen sich allerdings nur auf $n = 3$; es ist aber nicht schwer, sein Resultat auf beliebiges n zu übertragen; es tritt dann an Stelle von (2) die folgende Differentialgleichung:

$$(5)\qquad \frac{d^2E}{dt^2} = \left(\frac{4-n^2}{16}\cdot\lambda^n + \frac{n^2-2n}{16}\cdot\sum_1^{n+2} e_\varkappa\cdot\lambda^{n-1} + A\lambda^{n-2} + \cdots N\right)E,$$

wo t wiederum das Integral bezeichnet:

$$(6)\qquad t = \int\frac{d\lambda}{\sqrt{f.(\lambda)}},$$

$f(\lambda)$ aber die Function $(n+2)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet:

$$(7)\qquad f(\lambda) = (\lambda - e_1)\;.\;.\;.\;.\;.\;(\lambda - e_{n+2}).$$

Offenbar kann man statt (5) auch schreiben:

$$(8)\qquad \frac{d^2E}{dt^2} = \left(\frac{2-n}{16\,(n+1)}f''(\lambda) + a\lambda^{n-2} + \cdots + n\right)E,$$

wo nun die $a, \cdots n$ beliebig. Es scheint fast, als habe man diesen Gleichungen (5), (8) bisher nur wenig Bedeutung beigelegt. Sicher kann man die Gleichung (2) als Specialfall derselben auffassen (der entsteht, wenn man e_{n+1} und e_{n+2} unendlich werden läßt), aber es lag näher, (5) oder (8) als besonderen Fall derjenigen Gleichungen (2) zu deuten, die dem Raume von $(n+2)$ Dimensionen entsprechen. Und dieser Fall schien kein besonderes Interesse darzubieten, weil man die $(n-1)$ bei ihm noch zur Verfügung stehenden Constanten keineswegs so bestimmen kann, daß eins der zugehörigen E algebraisch wird. Auch hat die Form der neuen Differentialgleichung zunächst wenig Ansprechendes. Singuläre Puncte hat dieselbe, wie dies natürlich scheint, bei $\lambda = e_1, \ldots e_{n+2}$; aber auch $\lambda = \infty$, d. h. ein Werth, der für das Cyclidensystem (4) vom geometrischen Standpuncte aus ohne jede specifische Bedeutung ist, erscheint als singulärer Punct. Die zu $e_1 \ldots e_{n+2}$ gehörigen Exponenten berechnen sich dabei als $^1/_2$ und 0, die zu ∞ gehörigen als

1) Journal für Mathematik, Bd. 82, 1876. Vergl. auch Darboux in den Comptes Rendus der Pariser Akademie, 1876, II.

$$\frac{n-2}{4}+1 \text{ und } \frac{n-2}{4}.$$

Inzwischen gelingt es durch eine ganz unbedeutende formale Abänderung unsere Gleichung in ganz anderem Lichte erscheinen zu lassen. Die bei $\lambda = \infty$ auftretenden Exponenten leiten auf den richtigen Weg. Man setze nämlich, homogen machend,

$$\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$$

und schreibe

(9) $$E(\lambda) = \lambda_2^{\frac{n-2}{4}} \cdot F(\lambda_1, \lambda_2),$$

wo F jetzt eine homogene Function (eine Form) von λ_1, λ_2 vom Grade

$$\frac{2-n}{4}$$

sein wird, die ich gleich als Lamésche Form bezeichnen will. Sei ferner jetzt unter f die Form $(n+2)^{\text{ten}}$ Grades verstanden:

(10) $$f = (\lambda_1 - e_1 \lambda_2) \, . \, . \, . \, . \, . \, (\lambda_1 - e_{n+2} \lambda_2).$$

Man erhält dann (nach kurzer Umrechnung mittelst des Euler'schen Theorems) ein Resultat, welches nur noch von der Form f als solcher abhängig ist; man findet nämlich:

(11) $$(f, F)_2 = \varphi \cdot F,$$

wo $(f, F)_2$ die zweite Ueberschiebung der Formen f und F vorstellt, φ aber eine durchaus beliebige rationale ganze Form $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades ist. Dieses Resultat erscheint so einfach, daß man nicht umhin kann, dasselbe überhaupt an die Spitze der Theorie der Laméschen Functionen zu stellen und dementsprechend Lamésche Functionen, oder vielmehr Lamésche Formen, des R_n geradezu als solche Formen $\left(\frac{2-n}{4}\right)^{\text{ten}}$ Grades von $\lambda_1 \lambda_2$ zu definiren, welche, zweimal über eine gegebene f_{n+2} geschoben, sich selbst bis auf einen Factor φ_{n-2} reproduciren[1]). Die einzigen sin-

1) Das gleiche Mittel der Einführung homogener Variabler gebrauchen bereits in demselben Sinne Pick und Halphen (Berichte der Wiener Akademie, von 1887; Traité des fonctions elliptiques, Bd. II, 1888); nur handelt es sich bei ihnen um eine ganz specielle Untersuchung, nämlich um eine geschickte (nur in diesem Falle mögliche) Transformation höheren Grades der für $n = 3$ geltenden

gulären Stellen der so definirten F sind, wie bereits angedeutet, die Wurzeln von $f = 0$. Sind diese Wurzeln alle getrennt (wie wir bisher stillschweigend voraussetzten), so gehören zu jeder einzelnen derselben die soeben genannten Exponenten $^1/_2$ und 0, — rücken aber irgendwo zwei oder mehrere derselben zusammen, so erhält man höhere Exponenten, bez. irreguläres Verhalten. Der gewöhnliche Fall der durch (2) definirten Functionen entsteht, wenn f eine Doppelwurzel erhält (die man dann nach $\lambda = \infty$ wirft). Uebrigens kann man, wenn f mit beliebig vielfachen Wurzeln ausstatten will und sich vorhält, von der Form F der homogenen Variabelen λ_1, λ_2 durch Zufügung irgend welcher Factoren zu Functionen von λ zurückzugehen, sämmtliche lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Coëfficienten unter (11) rubriciren. Die Lamésche Differentialgleichung hat also in der That eine wesentlich allgemeine Bedeutung. Die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe z. B. entsteht aus (11), wenn man f als eine Form sechsten Grades einführt, die ein volles Quadrat ist. Noch ein weiterer Gesichtspunct spielt hier herein. Wählt man f wieder als Form sechsten Grades, aber nun mit getrennten Wurzeln, so definirt (11) solche Formen F vom Grade $-^1/_2$, welche auf dem hyperelliptischen Gebilde $\sqrt{f}$ durchaus unverzweigt sind. Man überzeugt sich leicht, daß diese F unter allen Formen, die einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coëfficienten genügen, die einzigen sind, welche die genannte Eigenschaft besitzen. Nicht so bei höherem Grade von f. Sei $n = 2p$ gesetzt, p aber > 2 genommen, so werden die allgemeinsten zum hyperelliptischen Gebilde $\sqrt{f_{2p+2}}$ gehörigen unverzweigten F durch die Gleichung geliefert:

$$(f, F)_2 = (\varphi_{2p-2} + \psi_{p-3}\sqrt{f}) \cdot F, \tag{12}$$

die sich von (11) durch das Glied mit $\sqrt{f}$ unterscheidet. Die Anzahl der hier in φ und ψ zusammen enthaltenen willkürlichen Constanten ist $3p-3$, der Grad von F gleich $-\frac{p-1}{2}$. Die Theorie von (11) wird als Vorbereitung der allgemeinen Theorie der Gleichungen (12) erachtet werden können[1]).

Differentialgleichung (2). Es ist wohl kein Zweifel, daß die geeignete Verwendung homogener Variabler in der Theorie der linearen Differentialgleichungen noch vielfache Vereinfachungen nach sich ziehen wird.

1) Sind F_1, F_2 irgend zwei Particularlösungen von (12), so ist der Quotient

Ich muß nun etwas genauer auf die zweite der beiden zu Anfang genannten Arbeiten aus Band 18 der mathematischen Annalen eingehen (Ueber Körper, welche von confocalen Flächen zweiten Grades begränzt sind). Indem ich mir, für den besonderen Fall $n = 3$, unter Zugrundelegung der confocalen Flächen zweiten Grades (1) die geometrische Bedeutung der in der Potentialtheorie auftretenden Producte Laméscher Functionen klar machte, wurde ich dort für die zugehörige Lamésche Differentialgleichung:

$$\frac{d^2E}{dt^2} = (A\lambda + B)E \tag{13}$$

zu einem Theorem geführt, welches ich kurz als Oscillationstheorem bezeichnen möchte, weil in demselben von den Oscillationen die Rede ist, welche geeignete Particularlösungen $E(\lambda)$ von (13) in gegebenen Intervallen der λ-Axe ausführen. Ich bemerkte nämlich, daß man die in (13) auftretenden Constanten A, B gerade auf eine Weise so bestimmen kann, daß für zwei beliebig gegebene Segmente S, T der λ-Axe (welche nur über keinen singulären Punct hinausgreifen sollen) je eine Particularlösung $E(\lambda)$ existirt, welche, für ihr Segment, die Bedingungen befriedigt: an den beiden Enden des Segmentes gegebene Werthe von $\frac{E'}{E}$ darzubieten $\left(\text{wo } E' = \frac{dE}{dt}\right)$, innerhalb des Segmentes aber eine vorgeschriebene Anzahl von Malen zu verschwinden. Die gewöhnlich allein betrachteten, zur Gleichungsform (13) gehörigen algebraischen $E(\lambda)$ erhielt ich dabei, indem ich die Segmente S, T mit den von e_1 bis e_2, bez. von e_2 bis e_3 reichenden Stücken der

---

$\eta = F_1 : F_2$ eine auf dem hyperelliptischen Gebilde unverzweigte »Function«, welche bei jedem geschlossenen Umlaufe über die zu $\sqrt{f}$ gehörige Riemann'sche Fläche hin sich in der Gestalt $\frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$ reproducirt. Daß es auf jedem algebraischen Gebilde, dessen $p > 1$, ∞^{3p-3} wesentlich verschiedene (durch ihre Differentialgleichung unterschiedene) derartige η-Functionen gibt, ist bekannt (vergl. z. B. meine »Neuen Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie« im 21ten Bande der math. Annalen, 1882); man hatte aber bisher, so viel ich weiß, diese η noch nicht in zwei Formen F_1, F_2 als Zähler und Nenner derart gespalten, daß F_1 und F_2 für sich genommen auf dem algebraischen Gebilde gleichfalls unverzweigt sind. Dies gelingt aber sofort allgemein, wenn man diejenigen Erläuterungen heranzieht, die ich über die auf beliebigen algebraischen Gebilden existirenden Formen neuerdings gegeben habe (Zur Theorie der Abel'schen Functionen, Math. Annalen Bd. 36). Der Grad der betr. F_1, F_2 in den zum Gebilde gehörigen Formen φ ist allemal gleich $-{}^1/_2$, — in Uebereinstimmung mit dem, was im Texte speciell für hyperelliptische Gebilde bemerkt ist.

λ-Axe zusammenfallen ließ, und bei jedem einzelnen e_i $E = 0$ oder auch $E' = 0$ als Gränzbedingung vorschrieb. Hieran schloß sich der Nachweis, daß man bei allgemeiner Wahl der S, T Functionen E erhält, mittelst deren man für einen beliebigen von sechs confocalen Flächen zweiten Grades begränzten Körper Reihenentwickelungen aufstellen kann, die für diesen das fundamentale Potentialproblem in derselben Weise lösen, wie dies Lamé's eigene Reihen für das dreiaxige Ellipsoid thun. Es ist leicht, alle diese Betrachtungen mutatis mutandis an die allgemeine (einem beliebigen Werthe von n zugehörige) Differentialgleichung (11) anzuknüpfen: die $(n-1)$ dortselbst in φ enthaltenen unbestimmten Constanten werden festgelegt werden können, indem man betreffs $(n-1)$ auf der λ-Axe gegebener Segmente geeignete Forderungen stellt; die fundamentale Potentialaufgabe wird sich dann für solche Raumtheile des R_n behandelen lassen, die von $2n$ confocalen Cycliden begränzt sind. Die solchergestalt entstehenden Lösungen begreifen die große Mehrzahl aller Reihenentwickelungen (und Integraldarstellungen) in sich, welche die Potentialtheorie kennt; es wird so in einem Gebiete, in welchem bislang viele Einzelheiten unvermittelt neben einander standen, Uebersicht und Ordnung eingeführt. Es ist nicht meine Absicht, dies hier genauer durchzuführen; es muß dies einer ausführlichen Einzeldarstellung vorbehalten bleiben. Die folgenden Bemerkungen sollen sich vielmehr darauf beziehen, aus dem genannten Oscillationstheoreme Folgerungen nach einer anderen Seite zu ziehen. Ich werde nämlich λ fortan als eine complexe Variable betrachten und von der conformen Abbildung handeln, welche der Quotient η irgend zweier Particularlösungen F_1, F_2 einer durch das Oscillationstheorem festgelegten Laméschen Differentialgleichung von der Halbebene λ entwirft.

Sei $f = 0$ der Einfachheit halber mit durchaus reellen, getrennten Wurzeln vorausgesetzt. Der allgemeine Charakter des in der η-Ebene gelegenen Abbildes ist dann mit Rücksicht auf die über die singulären Punkte $e_1, \ldots e_{n+2}$ früher gemachten Angaben durch ein bekanntes, zuerst von Hrn. Schwarz aufgestelltes Theorem festgelegt. Es wird sich in der η-Ebene um ein Kreisbogenpolygon handeln, dessen Inneres keinen Windungspunct einschließt, dessen sämmtliche Winkel rechte sind, und dessen $(n+2)$ Seiten selbstverständlich den aufeinanderfolgenden Stücken der λ-Axe von e_1 bis e_2, von e_2 bis e_3, ..., von e_{n+2} bis e_1 entsprechen. Ich will nun weiter, der Einfachheit halber, annehmen, daß die Segmente $S, T, \ldots$, von denen das Oscillationstheorem handelt, je von einem singulären Puncte e_i bis zum nächstfolgenden e_{i+1} hinreichen; daß ferner die Particularlösungen F, welche den einzelnen Segmenten zugehören (und die also innerhalb dieser Segmente je eine vorgeschriebene Anzahl von Nullstellen haben) an den Enden des Segmentes $F = 0$ oder $F' = 0$ befriedigen sollen. Die Behauptung ist, daß unter so bewandten Umständen *die Länge desjenigen Kreisbogenstückes der* η-*Ebene, welches dem einzelnen Segmente* $e_i - e_{i+1}$ *zugehört, genau angegeben werden kann.* Es genügt zu dem Zwecke, neben dem zu unserem Segmente gehörigen, in diesem Segmente reellen F irgend eine andere im Segmente reelle Particularlösung (F) zu betrachten und zunächst $\eta = \frac{F}{(F)}$ zu setzen. Indem sich die Nullstellen von F und (F) innerhalb des Segmentes nothwendig wechselseitig separiren, ergibt sich sofort:

Satz 1. Wenn in e_i und e_{i+1} für die zum Segmente gehörige Particularlösung übereinstimmend $F = 0$ vorgeschrieben ist, so *überschlägt sich der dem Segmente in der* η-*Ebene zugehörige Kreisbogen genau* $(m+1)$*mal* (unter m die Anzahl der Nullstellen von F im Segmente verstanden). Die Bilder von e_i und e_{i+1} fallen also auf dem betreffenden Kreisbogen zusammen. Von ihnen aus biegen dann die weiteren Kreisbogen, die den jenseits e_i und e_{i+1} folgenden Stücken der λ-Axe entsprechen, rechtwinklig ab, berühren sich also in ihrer gemeinsamen Einmündungsstelle.

trouble

Etwas mehr Mühe verursacht die Erledigung der anderen Fälle; ich führe dies nicht im Einzelnen aus, sondern gebe gleich die Resultate. Man erhält:

Satz 2. Ist in e_i $F = 0$, dagegen in e_{i+1} $F' = 0$ vorgeschrieben, so wird es sich in der η-Ebene, sozusagen, nur noch *um* $(m + 1/2)$*malige Umspannung eines Kreises* handeln. Die Bilder von e_i und e_{i+1} werden nämlich auf dem sie verbinden Kreisbogen derartig getrennt liegen, daß der in e_{i+1} rechtwinklig abbiegende Kreisbogen (welcher dem jenseits e_{i+1} folgenden Stücke der λ-Axe entspricht) verlängert durch e_i hindurchgeht (und dort dann den anderen, von e_i rechtwinklig abbiegenden Kreisbogen berührt).

Satz 3. Ist endlich sowohl in e_i wie in e_{i+1} $F' = 0$ gegeben, so wird unsere Polygonseite ihren Kreis nur noch *wenig mehr als* m-*fach umspannen*; die beiden weiteren Polygonseiten, welche in e_i und e_{i+1} rechtwinkelig abbiegen, werden sich auch jetzt berühren, *aber in einem von* e_i *und* e_{i+1} *verschiedenen Puncte* (der übrigens selbstverständlich seinerseits auch

intelligable

dem Kreise angehört, längst dessen sich die erste Polygonseite erstreckt).

Die Bedeutung des Oscillationstheorems aber wird die, daß bei gegebenem f, d. h. bei gegebenen $e_1 \ldots\ldots e_{n+2}$, das zugehörige Kreisbogenpolygon der η-Ebene völlig bestimmt ist[1]), sobald ich von $(n-1)$ seiner Seiten ein Verhalten im Sinne von Satz 1, 2 oder 3 vorschreibe. Ich zweifele nicht, daß dieser Satz eine allgemeine Bedeutung für die Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung besitzt. Denn er führt dazu, wenn die singulären Stellen einer Differentialgleichung mit den zugehörigen Exponenten gegeben sind, als weitere Bestimmungsstücke der Differentialgleichung allgemein die Längen der in der η-Ebene auftretenden Polygonseiten einzuführen.

Möge hier aus unserem Satze nur eine, ganz particuläre Folgerung gezogen werden. Sei f insbesondere vom sechsten Grade; wir nehmen die Verschwindungspuncte von f wieder getrennt und reell, und benennen sie nach ihrer Aufeinanderfolge auf der λ-Axe mit $e_1, e_2, \ldots e_6$. Ich werde nun die drei Intervalle von e_1 bis e_2, von e_3 bis e_4, von e_5 bis e_6 in's Auge fassen und für jedes derselben ein Verhalten im Sinne von Satz 2) vorschreiben, indem ich gleichzeitig die zugehörigen m sämmtlich gleich Null setze. Mögen wir jetzt η insbesondere so wählen, daß das Bild des von e_6 bis e_1 reichenden Stückes der λ-Axe in der η-Ebene geradlinig wird. Eine leichte geometrische Ueberlegung zeigt dann, daß in Folge von 2) und der allgemeinen dadurch entstehenden Lageverhältnisse, die Bilder der Intervalle von e_2 bis e_3 und von e_4 bis e_5 gleichfalls geradlinig werden und in dieselbe gerade Linie hineinfallen. Den Intervallen $e_1 - e_2$, $e_3 - e_4$, $e_5 - e_6$ aber entsprechen einfach von dieser geraden Linie begränzte Halbkreise. (Das Polygon der η-Ebene läßt sich am kürzesten beschreiben als eine von einer Geraden begränzte Halbebene, aus welcher man, vom Rande aus, drei halbe Kreisscheiben herausgeschnitten hat). Wollen wir jetzt die ganze λ-Ebene in Betracht ziehen, nachdem wir dieselbe längs der drei Segmente $e_1 - e_2$, $e_3 - e_4$, $e_5 - e_6$ der reellen Axe mit Einschnitten versehen haben! Offenbar entspricht derselben jetzt ein schlichtes, von drei Vollkreisen umgränztes Stück der η-Ebene. Wir erhalten hieraus ein Bild der zur hyperelliptischen Irrationalität $\sqrt{f}$ gehörigen Riemann'schen Fläche, indem wir dem genannten Stücke

1) d. h. von linearen Transformationen des η abgesehen völlig bestimmt ist.

der η-Ebene noch eines derjenigen hinzufügen, welche sich aus ihm durch Inversion an einem seiner drei Begränzungskreise ergeben. Hiermit aber ist für den Fall des hyperelliptischen Gebildes $\sqrt{f}$ diejenige conforme Abbildung geleistet, deren Möglichkeit und Bestimmtheit ich in Band 19 der mathematischen Annalen (Weihnachten 1881) für beliebige algebraische Gebilde behauptet habe[1]). Es war bis jetzt nicht gelungen, dieses letztere Theorem auf andere Art als durch Continuitätsbetrachtungen zu erweisen, die von der in der η-Ebene gelegenen Figur ihren Ausgang nehmen: hier haben wir, allerdings nur für den einfachen Fall eines hyperelliptischen Gebildes mit sechs reellen Verzweigungspuncten, eine Construction des betr. η vom gegebenen algebraischen Gebilde aus.

Es knüpft sich hieran noch eine weitere neue Bemerkung, welche auf die oben gegebene Einführung homogener Variabler zurückgeht. Bekanntlich sind λ und $\sqrt{f(\lambda)}$ in dem soeben gefundenen η eindeutig; sie stellen solche eindeutige Functionen von η vor, welche sich bei unendlich vielen linearen Substitutionen von η reproduciren (ich möchte vorschlagen, solche Functionen überhaupt automorphe Functionen von η zu nennen). Auch die Integrale

$$u_1 = \int \lambda_1 d\omega, \qquad u_2 = \int \lambda_2 d\omega,$$

wo

$$d\omega = \frac{(\lambda d\lambda)}{\sqrt{f(\lambda)}},$$

werden eindeutig in η. Nun hatten wir doch von vorneherein $\eta = F_1 : F_2$ gesetzt, wo F_1, F_2 Formen $(-{}^1/_2)^{\text{ter}}$ Dimension in λ_1, λ_2 waren. Man findet hieraus unter Benutzung der Differentialgleichung (11):

$$F_2 dF_1 - F_1 dF_2 = \varkappa d\omega, \tag{14}$$

wo $\varkappa$ eine unbestimmt bleibende numerische Constante. Jetzt ist

$$d\eta = \frac{F_2 dF_1 - F_1 dF_2}{F_2^2}.$$

Wir erhalten also:

$$\lambda_1 = \frac{\varkappa}{F_2^2} \cdot \frac{du_1}{d\eta}, \qquad \lambda_2 = \frac{\varkappa}{F_2^2} \cdot \frac{du_2}{d\eta}, \tag{15}$$

1) Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich.

so daß sich λ_1, λ_2 als eindeutige Formen $(-2)^{\text{ten}}$ Grades von F_1, F_2 darstellen. Uebrigens weist man leicht nach (oder schließt es aus (14)), daß F_1, F_2 den unendlich vielen linearen Substitutionen von η entsprechend selber binäre lineare Substitutionen von der Determinante 1 erleiden. Bei diesen bleiben dann λ_1, λ_2 ungeändert; ich schlage dementsprechend vor, dieselben als automorphe Formen von F_1, F_2 zu bezeichnen.

Auch dieses Resultat verallgemeinert sich auf beliebige algebraische Gebilde. Sei nämlich η auf einem solchen Gebilde unverzweigt. Setzt man dann η gleich dem Quotienten zweier Formen F_1, F_2, welche auf dem algebraischen Gebilde selber unverzweigt sind (vergl. die Note zu p. 90), so hat man immer Formel (14). Dabei bedeutet $d\omega$ denjenigen zum algebraischen Gebilde gehörigen Differentialausdruck, welchen ich im vorigen Jahre in meiner ersten der Societät vorgelegten Note: »Zur Theorie der Abelschen Functionen« eingeführt habe [1]).

»Das älteste Glied der masoretischen Traditionskette«

von

Paul de Lagarde.

Man weiß aus meinen Mittheilungen **1** 91 ff., daß ich einiges Interesse für die Geschichte der מסורה habe, obwohl ich nicht einmal ihren Namen sicher auszusprechen verstehe. Man kann sich meine Freude denken, als ich im LCB vom 25 Januar 1890 Folgendes las:

> In der alten masoretischen [so] Traditionskette, zuletzt mitgetheilt in Dikduke ha-Teamim, ed. Baer und Strack, S. 56, figuriert als das älteste Glied derselben ein מנקיי. Wie viele Verschlimmbesserungen dieser Name erlitten hat, weil man mit ihm nichts anzufangen wußte, ersieht man aus den verzweifelten [so] Versuchen, welche die Varianten bieten. Wir treffen aber denselben Namen, allerdings wiederum vielfach entstellt, in einer Erzählung, die in beiden Talmuden und in mehreren Midrasch-Parallelen mitgetheilt wird. Nur an einer dieser Stellen, in der alten Pesikta nämlich, hrsg. von Buber, Bl. 90, erscheint der Name richtig, wie bereits angegeben. Wir lernen den

1) Vergl. auch den schon oben genannten Aufsatz in Bd. 36 der mathematischen Annalen.

Träger desselben als Safra kennen, d. h. [so] als Gelehrter [so] der Massorah [so], er lebt unmittelbar in der Nähe von Tiberias, wo eben [so] der Sitz jener massoretischen [so] Studien war, und er tritt dort gegen seinen Zeitgenossen Simon ben Iochai auf. Wir können somit [so] die Persönlichkeit des ältesten Massoreten [so] sicher feststellen. Aber auch den Namen selbst können wir als einen bei den Römern [so] üblichen nachweisen. Denn er wird als Mannachius auf einer Inschrift (Corp. Inscr. Lat. IX, 1128) erwähnt; ist als Mannacius sogar der Name eines römischen Juden [so], auf einer Inschrift in der jüdischen Katakombe an der Vigna Randanini in Rom (Garrucci, Nuove Epitaf. 24).

Der in Rede stehende Artikel des LCB ist mit »A. Br.« unterzeichnet.

Auf der von Herrn »Br« angezogenen Seite der דִּקְדּוּקֵי הַטְּעָמִים findet sich als § 69 Folgendes:

Das ist die [oder: eine] Ueberlieferung, welche דוסא בר אלעזר בר אפסי überliefert hat, der [nämlich דוסא] sie von »Rabbi« יהודה dem Babylonier empfangen hat, der sie von שמעון seinem Vater empfangen hat: und dieser hat sie vom »Rab« אדא empfangen: und »Rab« אדא hat sie vom »Rab« המנונא empfangen, welcher sie an einen Mann aus »נְהַרְדְּעַ« weitergegeben hat: und er [wer?] hat sie von מְנַקְּדֵי [das sind Punctatoren: nach der aaO. unter dem Texte stehenden Glosse der Herren Baer und Strack נקדנים] empfangen, welche aus dem Lande Israels nach Babylonien vertrieben worden waren [Plural], welchen [Singular] Rufus vertrieben hatte, damit nicht im Lande Israel das Gesetz sei. Und sie summierten das Gesetz und die Propheten und die Hagiographen, die 24 Bücher, welche sie summierten ohne sich zu versehen, zwei Myriaden und drei Tausende und zweihundert und drei, nicht weniger und nicht mehr.

Wo ich nur *damit* geschrieben habe, steht im Urtexte כי היכי דלא: ich finde in mir zugänglichen Büchern keine Belehrung über כי היכי. Ich habe אפיקה für إِفقُه genommen: auch dies mag unsicher sein. Alles Andere steht fest.

Und damit steht erstens fest, daß am angezogenen Orte gar nicht von »der masoretischen Traditionskette« im Ganzen, sondern nur (wie in § 68, wo ein Generaltitel) davon gehandelt wird, wie viel »Verse« im jüdischen Canon vorhanden sind. Es steht zweitens fest, daß Herr »Br« מנקיר gelesen hat, wo מְנַקְּדֵי gedruckt ist: die Herausgeber haben die Vokabel selbst punktiert, und das Wort ausdrücklich erklärt. Herr »Br« hat unmöglich das Buch der Herren Strack und Baer genau angesehen, und wagt gleichwohl zu »entdecken«, und das Wörterbuch des Herrn Levy, das an wenig zuverlässiger Waare reich genug ist, mit noch mehr unzuverlässiger Waare zu »bereichern«.

Jetzt zu Bubers Pesikta [welche 1868 zu Lyck gedruckt ist]. Herr Wünsche dient den Juden sogar vor Gericht als »Sachverständiger«: er ist aber ein hastiger Dilettant schlimmster Art, und das wissen die Juden natürlich selbst in mancher Beziehung noch genauer als die NichtJuden. Ich rufe trotz dieses Urtheils hier die Hülfe des Herrn Wünsche an, um nicht sachverständigen Lesern das Urtheil zu erleichtern. Herr Wünsche hat nämlich die von Buber herausgegebene Pesikta 1885 in das Deutsche übersetzt. Bubers Seite 90[1] lautet bei Herrn Wünsche wie folgt [113 Zeile 6 von unten]:

> Ich gehe und werde mich an diesem alten Juden belustigen. Was machte er? Er nahm einen Todten und verscharrte ihn auf einer Strasse, welche der Rabbi gereinigt hatte. Der Cuthäer ging zu R. Simeon ben Jochai und sprach zu ihm: Hast du nicht die und die Strasse gereinigt? Ja wohl, versetzte der Rabbi. Wie denn aber, fuhr der Cuthäer fort, wenn nach dir noch ein Todter zum Vorschein kommt? Zeige ihn mir! sprach der Rabbi. R. Simeon ben Jochai erschaute aber im heiligen Geiste, dass der Todte von jenem Manne dahin gelegt worden war. Daher sprach er: Ich verhänge über die Oberen, dass sie hinabsinken, und über die Unteren, dass sie heraufkommen. Und so geschah es. Als er fortging, kam er an dem Versammlungshause vorüber und hörte die Stimme der Kinder der Schule von Magdala. Da sprach einer (wahrscheinlich der Lehrer der Schule): [1]) Siehe, Bar Jochai

Die Anmerkung des Herrn Wünsche lautet:

> Nach Schabb. fol. 34[a] sprach ein Alter diese Worte und er wurde zu einem Knochenhaufen.

Der Name מנקייר steht, trotz der Versicherung des Herrn »Br« in Bubers Texte nicht, und auch in des Herrn Wünsche Uebersetzung nicht. Der gemeinte Satz lautet ושמע קליה דמינקי ספרא דמגדלא. Bubers Anmerkung 180 berichtet, man lese auch (in den Parallelstellen) קליה דספרא und דנקאי ספרא [קליה], wo in נקאי ein Eigenname gesehen werde. Buber lehnt letzteres anzunehmen ab: er selbst erklärt שמע קול של תינוק מבית הספר, und beruft sich auf eine Stelle im Midrasch zu den Threnis, welche er unartiger Weise nicht genauer citiert: חד מאתינס אתא לירושלים · על לבי ספרא · אשכח מינוקי דיתבין, was er hebräisch gibt בא לבית הספר ומצא ילדים יושבים. Was Herr Wünsche mit dem Suffixe in קליה anfangen will, ist Seine Sache.

Also in Bubers Pesikta erscheint der Name מנקייר nicht, sondern im Texte דמינקי *der Kinder*, und am Rande als eine, aber verworfene Variante נקאי [vgl. Levy[2] 3 438[2]]. Davon, daß es sich in der Pesikta um einen »Masoreten« handele, ist nicht ein Schimmer zu entdecken.

In des Herrn Wünsche Uebersetzung des Buches בראשית רבה 389 hat ein Herr Fürst ausführlich über die in der Peṣîqтâ stehende Sage gehandelt, auch dem Citate aus איכה רבתי eine Seitenzahl beigefügt. Den ausgesucht albernen Text der בראשית רבה mag man bei Herrn Wünsche nachlesen: man soll nur nicht vergessen, daß weniger als Herr Wünsche gelehrte Leute (Wilnaer Ausgabe קנא[1] 12) קלא דנקאי ספרא kaum »die Stimme eines Schreibers, Namens Dankai« übersetzen werden, da das mit dem Artikel versehene קלא, falls jener Schreiber Dankai hieße, דדנקאי nach sich ziehen müßte: Symmicta **1** 92$_{20}$.

Aber die Herren Baer und Strack verweisen — was Herr »Br« nicht erwähnt — auf ihrer von Herrn »Br« angeführten Seite 56 auf ein zu vergleichendes Buch RKirchheims: »ein Commentar zur Chronik aus dem 10[ten]. Jahrhundert, Frankfurt a. M. 1874, S. 56«. In diesem, nicht in den Diqdûqæ haθθeqomîm, erscheint מנקיי allerdings, und zwar, neben dem נקיי der Turiner Handschrift 56$_8$, aus einem Venediger Drucke 56$_{23}$, neben handschriftlichem נקרי 56$_{32}$ und נַקְדִי 56$_{36}$ und נקי' 57$_{11}$ deutlich als Eigennamen da, wo die Herren Baer und Strack ohne Variante מְנַקְדִי drucken, und *Punctatoren* übersetzt haben wollen. Der Turiner Codex »124« wird der sein, welcher in dem 1880 erschienenen Kataloge des Herrn Bernardino Peyron Seite 2 **2** A 1. 2. heißt. Allerdings enthält dieser »Rasci«-Codex nach Peyron die Paralipomena »mutila in fine«, während der Gelehrte des Herrn Buber aus 124 ein Stück abgeschrieben hat, das nur das Ende sein kann. Es lohnt aus Kirchheims Buch iij[r] Folgendes herzusetzen:

> Wenn auch, was diese Traditionskette betrifft, die individuelle Existenz der darin aufgeführten Namen nicht anzuzweifeln wäre, so ist doch unzweifelhaft diese überlieferte Tradition nur fictiv und hat nicht mehr historischen Werth als die sinaitische und karäische; denn eine Wissenschaft wie die Massoreth, die in Schrift und Wort verbreitet wurde, ist keine Geheimlehre, die nur Einzelnen anvertraut wäre.

Da die Paralipomena den Canon der Juden schließen, ist in der Ordnung, daß an ihrem Ende die Schreiber melden, wie viel Verse im ganzen Canon enthalten sind. Die Turiner Hds. gibt mutatis mutandis was Baer-Strack als § 69 drucken, die Rostocker gibt es nicht. Beide Hdss. haben als wirklichen Schluß ein Stück, daß ich in beiden Redactionen, aber so drucke, daß das Entsprechende sich gegenübersteht:

Turin		Rostock
ונתעסקו בספר כללות		
קבוצות קבוצות תלתלים		
ואחריהם נתעסקו בו יראם		בספר הזה נתעסקו בו יראם
ומגדיאל ומאיר ועדריאל		המגדאלי ומאיר מעדריאלי
פרטו וחרטו בשבילי		פרטן חטרן בשמלן
		ללות קווצות תלתלים
האסטרטו חניטי	חטרן	
בנקרת פסילים		בנקרת פסילים
וחקקו		
להעמיד על עיקרו		להעמידן על עיקרן
ואשכרי ומשכרתיה שלמה		
מעם ה׳ אלהי ישראל		
		נפשם בגן עדן

Hier ist klar, daß sich T 1 2 R 6 auf Cant. 5_{11} bezieht: ich kann diese Worte wie die Segensformeln T 11 12 R 13 für meinen Zweck auf sich beruhen lassen. Es ist mir wahrscheinlich, daß בנקרת פסילים *in einer Höhle von Götzenbildern* eine Metropole des christlichen Cultus bezeichnet, vielleicht Rom selbst: man kennt ja die freundlichen Ausdrücke, welche die Religionsschriften der allezeit toleranten Juden für die Christen haben.

Die von RKirchheim benutzte Abschrift Ts ist ihm von Herrn ABerliner überlassen worden, welcher dafür von der nicht in den Buchhandel gelangten Arbeit Kirchheims 25 Exemplare bezogen hat (Vorrede viij): Eines dieser 25 werde ich besitzen, denn ich habe das Buch irgend wann erkauft. Die Abschrift Ts hat Herr Berliner nicht selbst gemacht (Vorrede ij): sie ist kaum verläßlicher als das von mir in den Mittheilungen 2 290ʳ besprochene Stück (wo טרא für Véoure). Kirchheim (Mittheilungen 2 155) las בספר הזה für ואחריהם, mehrfach ן für י, בשמלן für בשבילי: in T 7 suche ich στιχομετρία = אסטיכומטריא. Das scheint sicher, daß das von RKirchheim veröffentlichte Stück die sonst vielfach zu findende Liste der Verszähler durch vier neue Namen vervollständigt. »Jiream aus [der Stadt, oder aus der Familie] Magdiel« lebte nach Kirchheim v »in oder kurz nach der Zeit Saadia's«. Der in der Turiner Handschrift erscheinende נקיי wird sein Dasein vielleicht nur dem ungelehrten Freunde des Herrn Berliner verdanken, der vor מנקיי ein מן ausgelassen hat. Freilich fanden wir oben einen נקאי.

Daß der Verse zählende מנקיי in Magdala gewohnt hat, ist auffallend: ob man סָפְרָא דמַגְדְּלָא für *der Schriftgelehrte aus Magdala* sagen konnte, müssen jüdische Gelehrte wissen. Keines Falls spricht § 69 der Diqdûqæ haθθeqomîm von mehr als von Leuten, welche die Verse der Bibel gezählt haben: daß sie auch andere gleich nützliche und gleich geisttötende Künste getrieben haben, ist möglich, wird aber nicht gesagt.

מנקדי = נקרי [so] = נקי' [so] = מנקיי können sehr wohl ein und derselben Name, und מנקיי kann die ursprüngliche Gestalt dieses Namens sein. Von vorne herein bezweifele ich, daß ein auf יי, also auf konsonantisches y, ausgehendes מנקיי Mannac[h]ius sein könne: ich bezweifele, daß das nn und daß das erste a des Mannachius sich aus מנקיי erklären lasse. ARosenberg, das aramäische Verbum im babylonischen Talmud 52, weist mir die passiven מגליא und מכסיין מגליין nach. Bis auf Weiteres glaube ich מנקיי, wenn es überhaupt richtig ist, Mẹnaqqay sprechen zu müssen, also *gereinigt*: ܡܢܩܝܐ *oblatus*, *consecratus*. Die Variante נקאי spricht durch ihr א für mich.

Was nun das Citat anlangt, welches Herr »Br« aus Garrucci gibt, so ist ein Buch dieses Jesuiten, das »Nuove Epitaf.« hieße, ich will nicht sagen: mir, der ich ein Bibliograph nicht bin, sondern den Beamten der Goettinger Bibliothek nicht bekannt. Ich kannte nur (aus Schuerers Programm vom Jahre 1879) Garruccis dissertazioni archeologiche, welche Herr »Br« auch in des Herrn Ascoli in den Schriften des zu Florenz abgehaltenen Orientalistencongresses zu findendem Aufsatze angeführt finden wird. In diesen dissertazioni steht seit dem Jahre 1865 »post« 2 166 folgende in der Vigna Randanini gefundene Inschrift (siehe unten):

Mannacius. sorori. Crysidi. dulcissime. proselyte.

Klar ist, daß Chrysis keine geborene Jüdin war: und darum wird auch wohl ihr Bruder Mannacius ein geborener Jude nicht sein.

Es würde sich empfohlen haben, nicht »epitaf. 24« zu citieren, sondern jenes Buch Garruccis, oder den Urdruck der betreffenden Abhandlung Garruccis in der Civiltà cattolica Serie 5 Band 6 Seite 102 ff. (vom Jahre 1863), wobei es sich verlohnt hätte zu sagen, daß 24 nicht eine Seite, sondern die Nummer der fraglichen Inschrift ist, unter den nuove epigrafi ebraiche di Vigna Randanini die vierundzwanzigste.

Der neunte Band des Corpus inscriptionum latinarum bietet auf Seite 103 unter Nummer 1128 aus Mirabella eine vom ordo civitatis Aeclanensium (le Grotte im Lande der alten Hirpiner) angeordnete Inschrift, welche anzeigt, daß dem fabricator Umbonius Mannachius eine Statue gesetzt werden solle. Juden im Lande der Hirpiner zu suchen, ist wohl trotz der Allgegenwart dieser Nation hoffnungslos: falls ein Jude je Mannachius geheißen hat, so bleibt der Name immer unsemitisch, wie die Flavius, Aurelia, Iulianus usw. der römischen Zeit, die *Μενέλαος* = מְנַחֵם, *'Ιάσων* = יְשׁוּעַ, *'Ισίδωρος* = יִצְחָק der unter Griechen, die Adolf und Otto = אַבְרָהָם, Ludwig und Levin = לֵוִי, Herman = חַיִּים, Moriz = מֹשֶׁה der unter Deutschen angesiedelten Juden dadurch, daß Juden sie sich beigelegt haben, nicht jüdische Namen werden. Der Schluß wäre doch wohl unzulässig, daß, weil irgend welcher לֵוִי sich im deutschen Reiche Ludwig schreibt, der Name Ludwig in dem Galilaea der Tage Hadrians gesucht werden dürfe.

Mit den Inschriften der Vigna Randanini hat sich vor Anderen Herr Nicolaus Müller in Kiel beschäftigt. Ich habe mich an diesen mir von Rom her bekannten vortrefflichsten Kenner mit der Bitte um seine Ansicht über Mannacius gewendet. Herr NMüller hat mich zunächst belehrt, daß die Inschrift (nach Garrucci) auch von Engeström om Judarne S. 41 Nummer 43 behandelt werde: er hat mir Garruccis Fehler proselyti verbessert, die Punkte, welche ich oben gedruckt, ergänzt (ein schönes Blatt hinter dulcissime kann ich nicht nachahmen), und berichtet, die auf einer weißen, 0_{18} hohen, 0_{49} breiten, von unten nach oben gebrochenen Marmortafel stehende Inschrift sei seit 1885 an der Hinterseite eines Erwachsenen-Loculus in der Katakombe der Vigna Randanini befestigt. Herr Müller »möchte annehmen, daß die Thatsache der Nennung des Mannacius innerhalb eines jüdischen Coemeteriums die Vermuthung nahe legt, daß er in einem gleichen oder ähnlichen Verhältnisse zum Judenthume stand wie seine Schwester«, also nicht von Geburt Jude war (Brief vom 16 Februar 1890).

Bis auf Weiteres wird der Hirpinische Eigenname in den Stammtafeln der Masoreten eine Stelle nicht finden dürfen.

Psalm 114 im Sidrâ rabbâ.

Herr Pfarrer Wilhelm Brandt hat in seinem Buche über die mandäische Religion 134 ff. darauf aufmerksam gemacht, daß gewisse Stellen des zuerst von dem Schweden MNorberg als liber Adami, dann von IHPetermann als Thesaurus sive liber magnus herausgegebenen Werkes sich sehr nahe mit Stellen unseres alten Testaments berühren. Ich habe die Thatsache erst durch Brandts Buch erfahren, und weiß mich nicht zu erinnern, sie früher irgendwo, etwa bei Euting oder Noeldeke, erwähnt gefunden zu haben. Selbstverständlich wird für mich zunächst nichts Anderes möglich sein, als weitere Kreise mit Einem der von Brandt angeführten Abschnitte des Sidra rabbâ bekannt zu machen: einige Bemerkungen daran zu knüpfen, scheint schon jetzt erlaubt.

Ich setze den vermuthlich den Lesern dieser Blätter schwer zugänglichen Text her. Petermanns nur in hundert Exemplaren abgezogene Autographie ruht auf dem A genannten, 1560 geschriebenen Pariser Codex 1, Norbergs recht seltener Druck auf dem als B bezeichneten, 1632/3 vollendeten Pariser Codex 2.

Ich bediene mich, rein mechanisch umschreibend, des hebräischen Alphabets. Ich setze Sinnzeilen ab, und interpungiere. Brandts Uebersetzung füge ich bei, soweit sie reicht, indem ich zwei Sprachfehler des meist richtig Deutsch schreibenden Holländers stillschweigend beseitige. Die Zeilen 21 22 meines Texts habe ich selbst übersetzt.

Daß ich nicht wie Norberg כדי, sondern wie Brandt כד, nur nicht mit gehaktem ד lese, merke ich nur an.[1])

Die Parallelstellen des Psalms 114 führe ich am Rande der Uebersetzung auf.

Ich schicke dem Texte eine Bemerkung zur mandäischen Grammatik vorauf, welche sich an die in meiner Uebersicht 216 gegebene Anschauung anknüpft, daß taqattala = הִתְקַטֵּל, und aus itaqattala verkürzt ist.

ThNoeldeke sucht in seiner mandäischen Grammatik 222 ff. in Formen wie עתאפראש *wird belehrt, scheidet aus* ein Ettafal. Falls Friedrich Delitzsch, was zu entscheiden ich außer Stande bin, berechtigt ist, das assyrische ittafal zur arabischen Siebenten zu ziehen (ippariš *flog*, ittapraš *flog*), so dürfte עתאפראש auch Medium einer Siebenten sein können.

Aber weder Noeldekes Erklärung der עתא Formen noch ein etwa zu machender Versuch, solche Formen aus dem assyrischen Ittafal zu deuten, reicht für alle mandäischen עתא aus, welche ja füglich — ich behaupte nicht, daß sie es sind — aus verschiedenen Urformen zusammengefallen sein können. עתאהזאיתון in meiner Zeile 23 ist ܐܬܐܚܙܝܬܘܢ*, und gewis ist ܐܬܐܚܙܝ* und ܐܬܚܙܝ* an ܐܬܐܚܙܝܬܘܢ* (= jetzigem ܐܬܚܙܝܬܘܢ) durchaus unschuldig.

Wie wäre es, wenn man עתא wenigstens in einzelnen Fällen als jenes von mir vermuthete *ita* ansähe? Man dürfte ttẹ in ܐܬܐܬܙܝܚܬ (bei mir 10 עתאזיהאת) doch wohl wie die von mir in der

---

1) Da HZotenberg im Catalogue § 5 versichert, es erhelle aus dem von ihm beschriebenen Codex, daß die beiden ד nur graphisch verschieden seien, bezeichne ich das Relativum nicht ausdrücklich, etwa durch einen RapheStrich.

Uebersicht 11 8 ff. behandelten Bildungen auffassen. Mein aus Pedro de Alcala geschöpftes Material ist reich, meine Lesung mandäischer Texte noch nicht ausgedehnt. Vielleicht äußert sich Noeldeke einmal über die Frage.

Meines Erachtens wäre der Beweis so zu führen, daß man alle die Fälle sammelte, in denen eine arabische Fünfte einem hebräischen Hitpaqqél, einem syrischen ܐܶܬܦܰܥܰܠ und einem mandäischen —עתא entspricht, ohne daß Letzterem ein Afqél oder Tafqél passender Bedeutung zur Seite stünde. Es ist überhaupt längst Zeit, ein vergleichendes Wörterbuch der semitischen Sprachen vorzulegen.

עתיגלון חייא לתיביל.
Norberg 320 — דנא | זיוא נהורא וחייא:
יאמא דהיזויא אפאך.
ויארדנא עהדאר לעוהורא:
טוריא ראקדיא כד איליא.
ואילאתא בדבאר משאהטא עולאואיהין:
וארא‌מתא מאמללא כד בנאת אנאניא בעקארא:
טוריא פאהתיא פומאיהון ויאהביא תושביהתא.
וארזיא בלילבאן מיתאבריא:
ארקא דהזאתאן זאהאת ועתאזיהאת.
ומליך יאמא דהיזיאן אפאך:
יאמא .. למאן הזית ואפאכת ⁘
יארדנא .. למאן הזית ועהדארת לעוהוראך ⁘
טוריא .. למאן הזאיתון וראקדיתון כד איליא ⁘
ואילאתא בדבאר .. למאן משאהטיתין עולאואיכין ⁘
ואראמאתא כד בנאת אנאניא .. למאן מאמליליתין בעקארא ⁘
טוריא .. למאן פאהתיתון פומאיכון בתושביהתא ⁘
ארזיא בלילבאן .. למאן עתאברתון ⁘
A = Petermann 175 — ארקא .. למאן | הזית יעתאזיהית ⁘
מליך יאמא .. למאן הזית ואפאכת ⁘
ואנגאויא יאמא .. למאן עשתאגאשתון ⁘
ונסיסיא יאמא .. למאן עתאהזאיתון ⁘
מן קודאם זיוא ונהורא ומאנדא דחייא
יזיוא ותוקנא דאלבישתינון לבהיריא:

1 Geoffenbart ist das Leben der [*Dativus*] Tibil,
aufgegangen Glanz und Licht und Leben.
Das Meer, als es ihn sahe, kehrte um, 3^{1}
und der Jordan wandte sich rückwärts: 3^{2}
5 die Berge sprangen wie Hirsche, 4^{1}
und die Hinden auf dem Felde verderbten ihre Jungen.
Und die Hügel redeten mit Ehre wie die Wolkensöhne. 4^{2}

Die Berge öffneten ihren Mund und gaben Lobpreis,
und die Cedern auf dem Libanon wurden gebrochen.
Die Erde, als sie mich sahe, zitterte und ward erschüttert.
Der König des Meeres, als er mich sahe, kehrte um. 5^1
Meer, wen sahest du, und kehrtest um?
Jordan, wen sahest du, und wandtest dich rückwärts? 5^2
Berge, wen sahet ihr, und spranget wie Hirsche? 6^1
und [ihr] Hinden auf dem Felde, warum verderbtet ihr eure Jungen?
Hügel, für wen redetet ihr wie die Wolkensöhne mit Ehre? 6^2
Berge, für wen öffnetet ihr euern Mund mit Lobpreis?
Cedern auf dem Libanon, für wen wurdet ihr gebrochen?
Erde, wen sahest du, und wurdest erschüttert?
König des Meeres, wen sahest du, und kehrtest um?
und [ihr] Tiefen des Meeres, warum geriethet ihr in Verwirrung?
und [ihr] Wogen des Meeres, wem wurdet ihr sichtbar?
Vor dem Glanz und Licht und dem Wissen des Lebens
und dem Glanze und der Vollkommenheit, mit der ich die Erwählten bekleidet habe.

Petermann 1 174_{11}, Norberg 1 318 Ende, Brandt 134. Die von Petermann gesammelten Varianten 2 66 ff. sind stillschweigend benutzt.

WBrandt hat richtig gesehen, daß die Wolkensöhne der Zeile 7 dem Misverstehn eines ضبي وِجي = בְּנֵי צאן in ضبي وُحلي ihr Dasein verdanken. Er hat nicht gesehen, oder auszusprechen nicht der Mühe werth erachtet, daß der König des Meeres der Zeile 11 dadurch entstanden ist, daß מָה לְךָ unseres Canons in מֶלֶךְ zusammen gelesen worden ist. EBöhl hat 1873 von einer aramäischen Volksbibel geschrieben. Iob *ἑρμηνεύεται ἐκ τῆς συριακῆς βίβλου* (Nachwort): andere Bücher sind nach Ausweis der von ihnen gebrauchten Vokabeln (wie *ϑωδαϑα*) ebenfalls aus einem aramäischen Originale geflossen. Ein Targum hohen Alters hat sogar für den Pentateuch 𝔊s (Mittheilungen 2 361 ff.) *'Εννά* = חִיְנָא geliefert. Nichts hindert anzunehmen, daß die Mandäer einen alten Targum des Psalms 114 benutzt haben, der uns verloren ist.

Brandt hat auch nicht erkannt, daß was die Mandäer entlehnt haben, eine ursprünglichere, vollständigere, aber überladene Gestalt unseres Psalms 114 ist, den man erst später auf den wunderbaren Durchzug durch das rothe Meer gedeutet haben mag, und der sogar im Canon eine für eine PaschaLiturgie unpassende Stelle enthält, die vom Jordan, welche jetzt auf Iosue 3 bezogen wird. Es wäre recht nützlich, wenn man einsähe, daß der Satz »il prend son bien partout où il le trouve« auch von den Liturgikern gilt. Daraus, daß Psalm 114 ein Theil des PaschaRituals ist, folgt noch lange nicht, daß er von Hause aus geschrieben worden ist, um ein Theil eines solchen Rituals zu sein. Psalm 55 (= *νδ*) mag auf Abessalom, auf Achithophel, auf Doeg, auf die Feinde des Ieremias, auf Alcimus, auf Seleucus den Vierten gedichtet sein — die Kirche Aegyptens hat auf alle Fälle das Recht, seine Verse 5 bis 9 (meine von keinem Liturgiker je auch nur berochenen Orientalia **1** 46) über den Toten zu lesen:

> Das Herz bebt mir im Leibe:
> Todesgrauen überfiel mich:
> Zagen und Zittern[1]) kam über mich:
> mich übermochte Schwindel.
> Da sprach ich: Hätt' ich doch Flügel, Taubenflügel,
> wie wollt' ich mir eine Heimstatt erfliegen![2])
> gerne[3]) weit hin dehnend das Streifen,
> auf der Heide Rast suchen!
> wie wollt' ich eilends mir einen SchlupfOrt finden
> vor wüthendem[4]) Winde, vor Wetter!

Was die Christen Aegyptens mit dem Psalm 55 gethan haben, durften auch die Männer der Synagoge mit irgendwelchem Liede ihrer eigenen Vorzeit thun.

Mit Cedern und mit dem Libanon haben die Mandäer nichts zu schaffen gehabt. Cedern zu nennen war in Sûq eššiûḳ so unpassend, wie der berühmte Satz »wenn ich durch ein Dorf reite« im Munde Laskers unpassend war. Der Jordan, von dem der Psalm spricht, ist ein ganz anderer als der so oft von den Mandäern erwähnte.

Der Ueberschuß der Mandäer trägt hebräisches Gepräge. In Zeile 6 ist חִבֵּל misverstanden, das *ὠδίνειν* und *καταφθείρειν* bedeutete: zum mandäischen Worte vergleiche ܡܚܒܠ und »ܢܚܒܠܐ«, das beides zur Wurzel חטא gehört. Aber der Ueberschuß enthält außer dem echten Texte auch die Deutungen eines Targum: ich habe zwei Bände Targum herausgegeben, und scheide (wie ich meine, sicher) die Einlagen aus. Zum Beispiel lautete Zeile 10 vermuthlich וַתָּחֹל[5]) רַאְתַנִי הָאָרֶץ (vergleiche Psalm 114_6), und ܘܐܬܬܪܚܠ ist Glosse des Targum. Allerdings wird, wer den Urtext her-

---

1) Lies ראה ירעד, Prophetae chaldaice 48.
2) Uebersicht 209—214.
3) = הנה.
4) ܣܥܪ ἐπῆλθεν ἐφώδευσεν ἐπηρέασεν.
5) Ieremias 51_{29} gegen Psalm 97_4.

stellen will, um das Versmaß richtig zu erhalten, die Annahme nicht scheuen dürfen, daß hier und da Ein Wort oder zwei Worte uns fehlen.

Daß Psalm 114 3 רָאָה in רָאָהוּ zu ändern ist, scheint mir gewis. Man hatte sich mit רָאָה begnügt, um nicht zwei ו nebeneinander zu haben: denn וינס folgt.

Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper.

Von

H. Hertz.

Das System von Begriffen und Formeln, durch welches Maxwell die elektromagnetischen Erscheinungen darstellte, ist in seiner möglichen Entwicklung reicher und umfassender als ein anderes der zu gleichem Zwecke ersonnenen Systeme. Es ist gewiß wünschenswerth, daß ein der Sache nach so vollkommenes System auch der Form nach möglichst ausgebildet werde. Der Aufbau des Systems sollte durchsichtig seine logischen Grundlagen erkennen lassen; alle unwesentlichen Begriffe sollten aus demselben entfernt und die Beziehungen der wesentlichen Begriffe auf ihre einfachste Gestalt zurückgeführt sein. Die eigene Darstellung Maxwells bezeichnet in dieser Hinsicht nicht das erreichbare Ziel, sie schwankt häufig hin und her zwischen den Anschauungen, welche Maxwell vorfand, und denen, zu welchen er gelangte. Maxwell geht aus von der Annahme unvermittelter Fernkräfte, er untersucht die Gesetze, nach welchen sich unter dem Einfluß solcher Fernkräfte die hypothetischen Polarisationen des dielektrischen Aethers verändern und er endet mit der Behauptung, daß diese Polarisationen sich wirklich so verändern, ohne daß in Wahrheit Fernkräfte die Ursachen derselben seien [1]). Dieser Gang hinterläßt das unbefriedigende Gefühl, als müsse entweder das schließliche Ergebniß, oder der Weg unrichtig sein, auf welchem es gewonnen wurde. Auch läßt dieser Gang in den Formeln eine Anzahl überflüssiger, gewissermaßen rudimentärer Begriffe

---

1) Die gleiche Bemerkung trifft die durch v. Helmholtz im 72. Bande des Crelleschen Journals gegebene Ableitung, nicht zwar allgemein, aber doch für diejenigen besonderen Werthe der Constanten, welche in den Endresultaten die Fernkräfte verschwinden lassen, welche also auf die hier vertretene Theorie führen.

zurück, welche ihre eigentliche Bedeutung nur in der alten Theorie der unvermittelten Fernwirkung besaßen. Als solche rudimentäre Begriffe physikalischer Natur nenne ich die dielektrische Verschiebung im freien Aether, unterschieden von der erzeugenden elektrischen Kraft und das Verhältniß beider, die Dielektricitätsconstante des Aethers. Diese Unterscheidungen haben Sinn, wenn wir aus einem Raum den Aether entfernen, die Kraft aber in demselben bestehen lassen können. Nach der Anschauung, von welcher Maxwell ausging war dies denkbar, es ist nicht denkbar nach der Anschauung, zu welcher seine Arbeiten uns geführt haben. Als eine rudimentäre Erscheinung mathematischer Natur nenne ich das Vorherrschen des Vectorpotentiales in den Grundgleichungen. Bei dem Aufbau der neuen Theorien dienten die Potentiale als Gerüst, indem durch ihre Einführung die unstätig an einzelnen Punkten auftretenden Fernkräfte ersetzt wurden durch Größen, welche in jedem Punkte des Raumes nur durch die Zustände der benachbarten Punkte bedingt sind. Nachdem wir aber gelernt haben, die Kräfte selber als Größen der letzteren Art anzusehen, hat ihr Ersatz durch Potentiale nur dann einen Zweck, wenn damit ein mathematischer Vortheil erreicht wird. Und ein solcher scheint mir mit der Einführung des Vektorpotentiales in die Grundgleichungen nicht verbunden, in welcher man ohnehin erwarten darf, Beziehungen zwischen Größen der physikalischen Beobachtung, nicht zwischen Rechnungsgrößen zu finden.

Die erwähnten Unvollkommenheiten der Form erschweren auch die Anwendung der Maxwellschen Theorie auf besondre Fälle. Aus Anlaß solcher Anwendungen habe ich mich seit längerer Zeit bemüht, die Maxwellschen Formeln zu sichten und versucht, die wesentliche Meinung derselben von der zufälligen Form, in welcher sie zuerst auftraten, abzulösen. Das Folgende ist die geordnete Zusammenstellung meiner Ergebnisse. In gleicher Richtung hat bereits seit 1885 Herr Oliver Heaviside gearbeitet. Die Begriffe, welche er aus den Maxwellschen Gleichungen fortschafft, sind dieselben, welche auch ich fortschaffe; die einfachste Form, welche diese Gleichungen dadurch annehmen[1]), ist, von Nebendingen abgesehen, die gleiche zu welcher auch ich gelange. In dieser Hinsicht also gehört Herrn Heaviside die Priorität. Trotzdem wird man, hoffe ich, die folgende Darstellung nicht für über-

1) Diese Gleichungen findet man im Philosophical Magazine, Februar 1888. Daselbst wird auf frühere Arbeiten im Electrician, 1885 Bezug genommen, welche Quelle mir unzugänglich gewesen ist.

flüssig halten. Eine endgültige Darstellung beansprucht dieselbe nicht zu sein, sondern nur eine solche, von welcher sich leichter weitere Verbesserungen anknüpfen lassen, als an die bisher gegebenen Darstellungen.

Ich theile den Stoff in zwei Theile. In dem ersten Theile A gebe ich die Grundbegriffe und die sie verknüpfenden Formeln. Es werden den Formeln Erläuterungen hinzugefügt werden, aber diese Erläuterungen sollen nicht Beweise der Formeln sein. Die Aussagen werden vielmehr als Erfahrungsthatsachen gegeben, und die Erfahrung soll als ihr Beweis gelten. Allerdings läßt sich einstweilen nicht jede einzelne Formel besonders durch die Erfahrung prüfen, sondern nur das System als Ganzes. Mit dem Gleichungssystem der gewöhnlichen Mechanik liegt ja die Sache kaum anders. In dem zweiten Theile B gebe ich an, in welcher Weise die Thatsachen der unmittelbaren Wahrnehmung systematisch aus den Formeln abgeleitet werden können, durch welche Erfahrungen sich also die Richtigkeit des Systems erweist. Ausführlich behandelt würde dieser Theil einen sehr großen Umfang annehmen, es kann sich hier daher nur um Andeutungen handeln.

A. Die Grundbegriffe und ihr Zusammenhang.

1. Elektrische und magnetische Kraft.

Das Innere aller Körper, den freien Aether eingeschlossen, kann von der indifferenten Ruhe aus Störungen erfahren, welche wir als elektrische, und andere Störungen, welche wir als magnetische bezeichnen. Das Wesen dieser Zustandsänderungen kennen wir nicht, sondern nur die Erscheinungen welche ihr Vorhandensein hervorruft. Diese letzteren sehen wir als bekannt an, mit ihrer Hülfe bestimmen wir die geometrischen Verhältnisse der Zustandsänderungen selbst. Die Störungen der elektrischen und der magnetischen Art sind so mit einander verknüpft, daß Störungen der einen Art unabhängig von denen der andern dauernd zu bestehen vermögen, daß dagegen Störungen keiner der beiden Arten zeitliche Schwankungen erleiden können, ohne dadurch zugleich Störungen der anderen Art hervorzurufen. Die Erzeugung des geänderten Zustandes erfordert den Aufwand von Energie; diese Energie wird beim Verschwinden der Störung wiederersetzt; das Vorhandensein der Störung stellt also einen Vorrath von Energie dar. In einem und demselben Punkte können sich die Zustandsänderungen einer jeden Art unterscheiden nach Richtung, Sinn und Größe. Es ist also zur Bestimmung sowohl des elektrischen als des magnetischen Zustandes die Angabe einer gerichteten Größe oder der drei Componenten einer solchen nothwendig. Es ist aber eine erste wichtige Voraussetzung unserer gegenwärtigen Theorie, daß die Angabe einer einzigen Richtungsgröße auch hinreichend sei, um die betreffende Aenderung vollständig zu bestimmen. Gewisse Erscheinungen, z. B. die des permanenten Magnetismus, der Dispersion u. s. w. lassen sich von diesem Standpunkte aus nicht verstehen, sondern erfordern, daß die elektrischen bezw. magnetischen Zustände eines jeden Punktes durch mehr als eine Variabele dargestellt werden. Solche Erscheinungen treten dadurch selbst aus dem Rahmen unserer Betrachtung in ihrem gegenwärtigen Umfange heraus.

Diejenige Richtungsgröße, durch welche wir zunächst den elektrischen Zustand bestimmen, nennen wir die elektrische Kraft. Die Erscheinung durch welche wir sie definiren, ist die mechanische Kraft, welche ein bestimmter elektrisirter Körper im elektrisch gestörten leeren Raume erfährt. Für den leeren Raum selbst wollen wir nämlich die Componente der elektrischen Kraft in beliebiger Richtung proportional setzen der gleichgerichteten Componente jener mechanischen Kraft. Unter elektrischer Kraft in einem Punkte eines ponderabelen Körpers verstehen wir die elektrische Kraft, welche an dem betreffenden Punkte im Innern eines unendlich kleinen, unendlich gestreckten cylindrischen Hohlraumes sich findet, den wir in solcher Richtung in den Körper gebohrt haben, daß seine Richtung mit derjenigen der Kraft übereinstimmt, — eine Anforderung, welcher erfahrungsmäßig stets genügt werden kann. In welcher Beziehung auch immer die so gemessene Kraft zu der wirklichen Zustandsänderung des Körpers steht, sicherlich muß sie dieselbe gemäß unserer Voraussetzung eindeutig bestimmen. Setzen wir überall an Stelle des Wortes „elektrisch“ das Wort „magnetisch“ und an Stelle des elektrisirten Hülfskörpers den Pol einer Magnetnadel, so erhalten wir die Definition der magnetischen Kraft. Um den Sinn beider Kräfte in der conventionellen Weise festzulegen, bestimmen wir noch, daß der elektrisirte Hülfskörper mit Glaselektricität geladen und daß derjenige Pol der Magnetnadel benutzt werde, welcher nach Norden weist. Die Einheiten der Kräfte sind noch vorbehalten. Die Componenten der elektrischen Kraft in Richtung der x, y, z bezeichnen wir mit X, Y, Z, die gleichgerichteten Componenten der magnetischen Kraft mit L, M, N.

2. Die Energie des Feldes.

Der elektrische Energievorrath eines Köpervolums, in welchem die elektrische Kraft einen constanten Werth hat, ist eine homogene, quadratische Funktion der drei elektrischen Kraftcomponenten. Die entsprechende Aussage gilt für den Vorrath an magnetischer Energie. Den gesammten Energievorrath bezeichnen wir als den elektromagnetischen, er ist die Summe des elektrischen und des magnetischen.

Für einen isotropen Körper ist hiernach die Energiemenge jeder Art, berechnet auf die Volumeinheit gleich dem Produkt aus dem Quadrat der betreffenden Gesammtkraft und einer Constanten. Die Größe der letzteren kann verschieden sein für die elektrische und die magnetische Energie, sie hängt ab von dem Stoffe des Körpers und von der Wahl der Einheiten für die Energie und für die Kräfte. Die Energie wollen wir in absolutem Gaussischen Maaße messen und die Einheiten der Kräfte nunmehr festsetzen durch die Bestimmung, daß im freien Aether der Werth der Constanten gleich $\frac{1}{8\pi}$ werden soll, daß also sein soll die Energie der Volumeinheit des gestörten Aethers gleich

$$\frac{1}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2)+\frac{1}{8\pi}(L^2+M^2+N^2).$$

Messen wir die Kräfte in dieser Weise, so sagen wir, daß wir sie in absolutem Gaussischen Maaße messen [1]). Die Dimension der elektrischen Kraft wird dieselbe wie die der magnetischen, beide werden von solcher Art, daß ihr Quadrat die Dimension einer Energie in der Volumeneinheit hat, sie werden also in der üblichen Beziehungsweise gleich $M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$.

Für jeden isotropen ponderabelen Körper können wir nun nach dem Bisherigen setzen die Energie der Volumeinheit gleich

$$\frac{\varepsilon}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2)+\frac{\mu}{8\pi}(L^2+M^2+N^2).$$

Die neu eingeführten Constanten ε und μ sind nothwendig positive reine Zahlen. Wir nennen ε die Dielektricitätsconstante, μ die Magnetisirungsconstante des Stoffes. Offenbar sind ε und μ Verhältnißzahlen, durch welche wir die Energie eines Stoffes vergleichen mit der Energie eines anderen Stoffes. Aus der Natur eines Stoffes allein geht ein bestimmter Werth derselben nicht hervor. Dies meinen wir, wenn wir sagen, Dielektricitäts- und

1) Siehe H. Helmholtz, Wiedemanns Annalen Bd. 17 pag. 42. 1882.

Magnetisirungsconstante seien keine innere Constanten eines Stoffes. Es ist nicht unrichtig wenn wir sagen, diese Constanten seien gleich Eins für den Aether, aber es enthält diese Behauptung keine Thatsache der Erfahrung, sondern eine willkürliche Festsetzung unsererseits.

Für krystallinische Körper wird die Energie der Volumeinheit gleich

$$\frac{1}{8\pi}(\varepsilon_{11}X^2+\varepsilon_{22}Y^2+\varepsilon_{33}Z^2+2\,\varepsilon_{12}XY+2\,\varepsilon_{23}YZ+2\,\varepsilon_{13}XZ)$$
$$+\frac{1}{8\pi}(\mu_{11}L^2+\mu_{22}M^2+\mu_{33}N^2+2\mu_{12}LM+2\mu_{23}MN+2\mu_{13}LN).$$

Durch bestimmte Wahl der Axen läßt sich der eine oder der andere Theil dieses Ausdrucks in eine Summe von drei Quadraten transformiren. Es ist wohl wahrscheinlich daß dieselbe Wahl der Axen für den einen wie für den andern Theil diesen Dienst leistet. Die ε und μ müssen von solcher Beschaffenheit sein, daß bei der Transformation in eine Quadratsumme alle Coefficienten positiv werden.

3. Zusammenhang der Kräfte im Aether.

Wir nehmen an, daß das benutzte Coordinatensystem der x, y, z von solcher Beschaffenheit ist, daß wenn die Richtung der positiven x nach vorn, die der positiven z nach oben geht, alsdann die y von links nach rechts hin wachsen. Unter dieser Voraussetzung sind die elektrischen und magnetischen Kräfte im Aether mit einander verknüpft nach folgenden Gleichungen:

$$\text{3a.}\quad \begin{aligned} A\frac{dL}{dt} &= \frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz} \\ A\frac{dM}{dt} &= \frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx} \\ A\frac{dN}{dt} &= \frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy} \end{aligned} \qquad \text{3b.}\quad \begin{aligned} A\frac{dX}{dt} &= \frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy} \\ A\frac{dY}{dt} &= \frac{dN}{dx}-\frac{dL}{dz} \\ A\frac{dZ}{dt} &= \frac{dL}{dy}-\frac{dM}{dx} \end{aligned}$$

zu welchen die ihnen nicht widersprechenden Gleichungen

$$\text{3c.}\quad \frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dx}=0,\qquad \frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=0$$

als eine den Aether vor der ponderabelen Materie auszeichnende Ergänzung hinzutreten.

Nachdem diese Gleichungen einmal gefunden sind, erscheint es nicht mehr zweckmäßig, dieselben aus Vermuthungen über die elektrische und magnetische Constitution des Aethers und das

Wesen der wirkenden Kräfte als aus bekannteren Dingen herzuleiten, wie es allerdings dem historischen Gange entsprechen würde. Viel eher ist es zweckmäßig, an diese Gleichungen die weiteren Vermuthungen über die Constitution des Aethers anzuknüpfen.

Da die Dimensionen der L, M, N und der X, Y, Z die gleichen sind, so ist die Constante A eine reciproke Geschwindigkeit. Sie ist in Wahrheit eine innere Constante des Aethers; wir wollen damit sagen, daß ihre Größe weder von dem Vorhandensein eines andern Körpers noch von willkürlichen Festsetzungen unsererseits abhängig ist.

Wir multipliciren unsere Gleichungen sämmtlich mit $\frac{1}{4\pi A}d\tau$, ferner einzeln der Reihe nach mit bez. L, M, N, X, Y, Z und addiren sie sämmtlich. Wir integriren beide Seiten der entstehenden Gleichung über einen beliebig begrenzten Raum, dessen Oberflächenelement $d\omega$ mit den Coordinatenaxen die Winkel n,x, n,y, n,z bildet. Rechts läßt sich die Integration ausführen und wir erhalten:

$$\frac{d}{dt}\int\left\{\frac{1}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2)+\frac{1}{8\pi}(L^2+M^2+N^2)\right\}d\tau$$

$$=\frac{1}{4\pi A}\int\{(NY-MZ)\cos n,x+(LZ-NX)\cos n,y+(MX-LY)\cos n,z\}d\omega.$$

Das links stehende Integral ist die elektromagnetische Energie des Raumes; die Gleichung giebt uns also die Aenderung dieser Energie ausgedrückt durch Größen, welche sich allein auf die Oberfläche des Raumes beziehen.

4. Isotrope Nichtleiter.

In homogenen isotropen Nichtleitern verlaufen die Erscheinungen qualitativ vollkommen wie im freien Aether. Quantitativ sind Unterschiede insofern vorhanden, als erstens die innere Constante einen andern Werth hat als im Aether und als zweitens der Energievorrath der Volumeinheit in der bereits angegebenen Weise die Constanten ε und μ enthält. Wir entsprechen diesen Aussagen und genügen der Erfahrung indem wir setzen:

$$\text{4a.}\quad \begin{aligned} A\mu\frac{dL}{dt}&=\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\\ A\mu\frac{dM}{dt}&=\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}\\ A\mu\frac{dN}{dt}&=\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}\end{aligned}\qquad \text{4b.}\quad \begin{aligned} A\varepsilon\frac{dX}{dt}&=\frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy}\\ A\varepsilon\frac{dY}{dt}&=\frac{dN}{dx}-\frac{dL}{dz}\\ A\varepsilon\frac{dZ}{dt}&=\frac{dL}{dy}-\frac{dM}{dx}\end{aligned}$$

Denn wenn wir für einen Augenblick in dem Nichtleiter das Maaß der Kräfte so bestimmen, wie wir es im Aether gethan haben und demgemäß für X, Y, Z einführen $\frac{X}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{Y}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{Z}{\sqrt{\varepsilon}}$ und für L, M, N einführen $\frac{L}{\sqrt{\mu}}, \frac{M}{\sqrt{\mu}}, \frac{N}{\sqrt{\mu}}$, so nehmen die Gleichungen genau die Form der Gleichungen des Aethers an mit dem einzigen Unterschiede, daß an Stelle der Größe A die Größe $A\sqrt{\varepsilon\mu}$ tritt. Behalten wir auf der andern Seite unser Maaß der Kräfte bei, so können wir widerspruchsfrei der Energie den geforderten Werth beilegen. Denn die Ausführung der gleichen Operation, welche wir im vorigen Abschnitt anwandten, ergiebt uns hier:

$$\frac{d}{dt}\int\left\{\frac{\varepsilon}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2)+\frac{\mu}{8\pi}(L^2+M^2+N^2)\right\}d\tau$$

$$=\frac{1}{4\pi A}\int\left\{(NY-MZ)\cos n,x+(LZ-NX)\cos n,y+(MX-LY)\cos n,z\right\}_i d\omega.$$

Die allgemeinen Aussagen, durch welche wir uns auf unsere Gleichungen haben führen lassen, versagen, wenn wir den Nichtleiter nicht mehr als homogen betrachten. Es fragt sich also, ob in diesem Falle unsere Gleichungen noch gelten. Die Erfahrung beanwortet diese Frage in bejahendem Sinne; wir können also in den Gleichungen 4a. und 4b. die Größen ε und μ als von Punkt zu Punkt veränderlich betrachten.

5. Krystallinische Nichtleiter.

Eine Darstellung der Vorgänge in solchen Körpern, welche nach verschiedener Richtung verschieden entwickelt sind, deren elektromagnetische Eigenschaften aber bei verschwindendem Anisotropismus in die der isotropen Nichtleiter übergehen, erhalten wir, wenn wir die in unsern Gleichungen links stehenden zeitlichen Aenderungen der Kräfte als ganz allgemeine lineare Funktionen der rechts stehenden räumlichen Aenderungen der Kräfte entgegengesetzter Art betrachten. Die Allgemeinheit der Form dieser linearen Funktionen und die Auswahl ihrer Constanten wird indessen beschränkt durch die Vermuthung, daß dieselbe Operation, welche uns bisher eine Gleichung für die Aenderung der Energie lieferte, dies allgemein thun wird, und durch die Forderung, daß dabei die Energie selbst die bereits festgestellte Form annehmen muß. Durch diese Ueberlegungen werden wir auf die folgenden Gleichungen hingeleitet, welche in der That zur Darstellung der wichtigsten Erscheinungen genügen:

$$A\left(\mu_{11}\frac{dL}{dt}+\mu_{12}\frac{dM}{dt}+\mu_{13}\frac{dN}{dt}\right)=\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}$$

5a. $$A\left(\mu_{12}\frac{dL}{dt}+\mu_{22}\frac{dM}{dt}+\mu_{23}\frac{dN}{dt}\right)=\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}$$

$$A\left(\mu_{13}\frac{dL}{dt}+\mu_{23}\frac{dM}{dt}+\mu_{33}\frac{dN}{dt}\right)=\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}$$

$$A\left(\varepsilon_{11}\frac{dX}{dt}+\varepsilon_{12}\frac{dY}{dt}+\varepsilon_{13}\frac{dZ}{dt}\right)=\frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy}$$

5b. $$A\left(\varepsilon_{12}\frac{dX}{dt}+\varepsilon_{22}\frac{dY}{dt}+\varepsilon_{23}\frac{dZ}{dt}\right)=\frac{dN}{dx}-\frac{dL}{dz}$$

$$A\left(\varepsilon_{13}\frac{dX}{dt}+\varepsilon_{23}\frac{dY}{dt}+\varepsilon_{33}\frac{dZ}{dt}\right)=\frac{dL}{dy}-\frac{dM}{dx}.$$

Die Gleichung für die Aenderung der Energie eines Raumes ergiebt das gleiche Resultat wie in Abschnitt 3 und 4. Auch in den Gleichungen des gegenwärtigen Abschnittes ist es erfahrungsmäßig nicht nöthig, die ε und μ als constant in Hinsicht des Raumes anzusehen, vielmehr können dieselben beliebig von Punkt zu Punkt veränderliche Größen sein.

6. Vertheilung der Kräfte in Leitern.

In den Körpern, welche wir bisher betrachteten, erscheint jede Aenderung der elektrischen Kraft als bedingt durch das Vorhandensein magnetischer Kräfte. Sind in einem endlichen Bereich die magnetischen Kräfte gleich Null, so fällt jede Ursache für eine solche Aenderung fort und eine vorhandene Vertheilung elektrischer Kraft bleibt sich selbst überlassen dauernd bestehen, solange nicht von den Grenzen des Bereiches her eine Störung das Innere trifft. Nicht in allen Körpern zeigen die elektrischen Kräfte dies Verhalten. In vielen Körpern schwindet eine sich selbst überlassene elektrische Kraft mehr oder weniger schnell dahin, in solchen Körpern sind magnetische Kräfte oder andere Ursachen erforderlich, um eine vorhandene Vertheilung vor der Veränderung zu bewahren. Solche Körper bezeichnen wir aus Gründen, die später hervortreten, als Leiter. Die einfachsten Annahmen, welche wir in Hinsicht derselben machen können, sind diese, daß erstens der Verlust welchen eine sich selbst überlassene elektrische Kraft in der Zeiteinheit erleidet, der Kraft selbst proportional ist, und daß zweitens unabhängig von diesem Verlust die magnetischen Kräfte hier dieselben Aenderungen hervorzubringen streben, wie in den bisher betrachteten Körpern. Führen wir eine neue Constante λ ein, so erlaubt uns die erste Annahme zu behaupten, daß die sich selbst überlassene Kraftcomponente X sich ändern werde nach der Gleichung $A\varepsilon\frac{dX}{dt} = -4\pi\lambda AX$. Die zweite Annahme ergänzt diese erste dahin, daß, wenn magnetische Kräfte vorhanden sind, die Aenderung geschehen werde nach der Gleichung $A\varepsilon\frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi\lambda AX$. Die Constante λ heißt die specifische elektrostatisch gemessene Leitungsfähigkeit des Körpers. Ihre Dimension ist die einer reciproken Zeit. Die Größe $\frac{\varepsilon}{4\pi\lambda}$ ist daher eine Zeit; es ist diejenige Zeit, in welcher die sich selbst überlassene Kraft auf den $e$ten Theil ihres Anfangswerthes herabsinkt, die sogenannte Relaxationszeit. Die letztere, nicht etwa λ selbst, ist, wie zuerst Herr E. Cohn bemerkt und hervorgehoben hat [1]), neben der ersten eine zweite innere Constante des betrachteten Körpers, eindeutig festsetzbar ohne Zuhülfenahme eines zweiten Mediums.

Unsere Ueberlegungen führen uns nun vermuthungsweise auf folgende Gleichungen, welche den Erfahrungen genügen:

$$\text{6a.}\quad \begin{aligned} A\mu\frac{dL}{dt} &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \\ A\mu\frac{dM}{dt} &= \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \\ A\mu\frac{dN}{dt} &= \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \end{aligned} \qquad \text{6b.}\quad \begin{aligned} A\varepsilon\frac{dX}{dt} &= \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi\lambda AX \\ A\varepsilon\frac{dY}{dt} &= \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} - 4\pi\lambda AY \\ A\varepsilon\frac{dZ}{dt} &= \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} - 4\pi\lambda AZ. \end{aligned}$$

Offenbar beziehen sich diese Gleichungen nur auf isotrope Körper, dagegen ist es, was unsere bisherigen Voraussetzungen anlangt, nicht nothwendig, daß die Körper auch homogen seien. Um indessen in Wahrheit die Vertheilung der Kräfte in anhomogenen Körpern genau darzustellen, bedürfen unsere Gleichungen noch einer gewissen Ergänzung. Aendert sich nämlich die Beschaffenheit eines Körpers von Punkt zu Punkt, so sinkt im Allgemeinen die elektrische Kraft sich selbst überlassen nicht völlig auf Null ab, sondern nimmt einen gewissen von Null verschiedenen Endwerth an. Diesen Werth, dessen Componenten X' Y' Z' sein mögen, nennen wir die in dem betreffenden Punkte wirksame elektromotorische Kraft. Wir betrachten dieselbe als unabhängig von der Zeit, sie ist im Allgemeinen um so größer, je größer die Aenderung der

1) Vergleiche dieserhalb und in Hinsicht der Art, wie hier die Größe λ eingeführt wird: E. Cohn, Sitzungsber. d. Berl. Akad. Band XXVI pag. 405.

chemischen Beschaffenheit in der Längeneinheit ist. Wir tragen der Wirkung der elektromotorischen Kraft Rechnung, indem wir den Abfall der sich selbst überlassenen elektrischen Kraft nicht ihrem absoluten Werthe proportional setzen, sondern dem Unterschiede, welcher noch vorhanden ist zwischen diesem absoluten Werthe und dem Endwerthe. Unsre Gleichungen werden so für Leiter, deren Strucktur zum Auftreten elektromotorischer Kräfte Anlaß giebt.

$$\text{6c.}\quad \begin{aligned} A\mu\frac{dL}{dt} &= \frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz} \\ A\mu\frac{dM}{dt} &= \frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx} \\ A\mu\frac{dN}{dt} &= \frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy} \end{aligned} \qquad \text{6d.}\quad \begin{aligned} A\varepsilon\frac{dX}{dt} &= \frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy}-4\pi\lambda A(X-X') \\ A\varepsilon\frac{dY}{dt} &= \frac{dN}{dx}-\frac{dL}{dz}-4\pi\lambda A(Y-Y') \\ A\varepsilon\frac{dZ}{dt} &= \frac{dL}{dy}-\frac{dM}{dx}-4\pi\lambda A(Z-Z'). \end{aligned}$$

7. Anisotrope Leiter.

Verhält sich der Leiter nach verschiedenen Richtungen verschieden, so dürfen wir nicht mehr annehmen, daß der Abfall einer jeden Componente der sich selbst überlassenen Kraft nur abhänge von dem Werthe dieser Componente selbst, es liegt aber die Vermuthung nahe, daß er eine lineare Funktion der drei Componenten sei. Nehmen wir zu dieser Vermuthung die Voraussetzung, daß für verschwindendes Leitungsvermögen die Gleichungen sich auf die eines anisotropen Nichtleiters reduziren, so gelangen wir zu folgendem System:

$$\text{7a.}\quad \begin{aligned} A\left(\mu_{11}\frac{dL}{dt}+\mu_{12}\frac{dM}{dt}+\mu_{13}\frac{dN}{dt}\right) &= \frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz} \\ A\left(\mu_{12}\frac{dL}{dt}+\mu_{22}\frac{dM}{dt}+\mu_{23}\frac{dN}{dt}\right) &= \frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx} \\ A\left(\mu_{13}\frac{dL}{dt}+\mu_{23}\frac{dM}{dt}+\mu_{33}\frac{dN}{dt}\right) &= \frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy} \end{aligned}$$

$$\text{7b.}\quad \begin{aligned} A\left(\varepsilon_{11}\frac{dX}{dt}+\varepsilon_{12}\frac{dY}{dt}+\varepsilon_{13}\frac{dZ}{dt}\right) &= \frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy} \\ &\quad -4\pi A\{\lambda_{11}(X-X')+\lambda_{12}(Y-Y')+\lambda_{13}(Z-Z')\} \\ A\left(\varepsilon_{12}\frac{dX}{dt}+\varepsilon_{22}\frac{dY}{dt}+\varepsilon_{23}\frac{dZ}{dt}\right) &= \frac{dN}{dx}-\frac{dL}{dz} \\ &\quad -4\pi A\{\lambda_{21}(X-X')+\lambda_{22}(Y-Y')+\lambda_{23}(Z-Z')\} \\ A\left(\varepsilon_{13}\frac{dX}{dt}+\varepsilon_{23}\frac{dY}{dt}+\varepsilon_{33}\frac{dZ}{dt}\right) &= \frac{dL}{dy}-\frac{dM}{dx} \\ &\quad -4\pi A\{\lambda_{31}(X-X')+\lambda_{32}(Y-Y')+\lambda_{33}(Z-Z')\}. \end{aligned}$$

Es ist sehr wahrscheinlich, daß für alle wirklichen Körper $\lambda_{12} = \lambda_{21}$, $\lambda_{31} = \lambda_{13}$, $\lambda_{23} = \lambda_{32}$ sei. Auch in den Gleichungen dieses Abschnittes können die Constanten ε, μ, λ als von Ort zu Ort ihren Werth verändernd angesehen werden.

8. Grenzbedingungen.

Man bemerkt leicht, daß die Gleichungen 7a. und 7b. alle früheren als besondere Fälle umfassen und daß selbst die Gleichungen des freien Aethers aus ihnen durch besondere Verfügung über die Constanten hervorgehen. Da nun diese Constanten Functionen des Raumes sein können, so liegt es nahe, die Grenzfläche zweier heterogenen Körper anzusehen als eine Uebergangsschicht, in welcher zwar die Constanten außerordentlich rasch von einem Werth zu einem andern übergehen, in welcher dies jedoch in solcher Weise geschieht, daß auch in der Schicht selbst jene Gleichungen immer noch gelten und endliche Beziehungen zwischen den endlich bleibenden Werthen der Constanten und den ebenfalls endlich bleibenden Kräften ausdrücken. Um aus dieser der Erfahrung genügenden Vermuthung die Grenzbedingungen abzuleiten, lassen wir der Einfachheit halber das betrachtete Element der Trennungsfläche mit der xy-Ebene zusammenfallen.

Beachten wir zunächst das Auftreten elektromotorischer Kräfte zwischen den sich berührenden Körpern nicht, so ergiebt die Betrachtung der ersten beiden der Gleichungen 7a. und 7b. daß die Größen $\frac{dX}{dz}$, $\frac{dY}{dz}$, $\frac{dM}{dz}$, $\frac{dN}{dz}$ zufolge unserer Voraussetzung auch in der Uebergangsschicht endlich bleiben müssen. Bezieht sich also der Index 1 auf die eine, der Index 2 auf die andere Seite der Grenzschicht, so muß sein

$$\text{8a.}\quad \begin{aligned} Y_2 - Y_1 &= 0 \\ X_2 - X_1 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{8b.}\quad \begin{aligned} M_2 - M_1 &= 0 \\ L_2 - L_1 &= 0. \end{aligned}$$

Die zur Grenzfläche tangentialen Componenten der Kräfte pflanzen sich also stetig durch dieselbe fort. Die Anwendung hiervon auf die dritten der Gleichungen 7a. und 7b. ergiebt dann weiter daß die Ausdrücke

$$\mu_{13}\frac{dL}{dt} + \mu_{23}\frac{dM}{dt} + \mu_{33}\frac{dN}{dt} \quad \text{und}$$

$$\varepsilon_{13}\frac{dX}{dt} + \varepsilon_{23}\frac{dY}{dt} + \varepsilon_{33}\frac{dZ}{dt} + 4\pi(\lambda_{31}X + \lambda_{32}Y + \lambda_{33}Z)$$

den gleichen Werth haben müssen auf der einen und auf der andern Seite der Grenzschicht. Diese Aussage, welche die gegenseitige Abhängigkeit der Normalkomponenten der Kraft auf beiden Seiten der Grenzfläche giebt, nimmt für isotrope Körper die einfache Form an:

$$8c. \quad \mu_1 \frac{dN_1}{dt} - \mu_2 \frac{dN_2}{dt} = 0$$

$$8d. \quad \varepsilon_1 \frac{dZ_1}{dt} - \varepsilon_2 \frac{dZ_2}{dt} = -4\pi(\lambda_1 Z_1 - \lambda_2 Z_2).$$

Schließen wir demnächst das Auftreten elektromotorischer Kräfte in der Grenzfläche nicht aus, so haben wir zu beachten, daß erfahrungsmäßig die zur Grenzfläche normale Componente dieser Kräfte, also Z', in der Uebergangsschicht selbst unendlich wird, in solcher Weise jedoch, daß das durch die Grenzfläche hindurch erstreckte Integral $\int Z' dz$ einen endlichen Werth behält, welchen uns die Versuche angeben, während sie uns über den Verlauf von Z' selbst im Unklaren lassen. Wir genügen der Voraussetzung dieses Abschnittes nunmehr durch die Annahme, daß in der Uebergangsschicht neben $L, M, N, X, Y,$ die Größe $Z - Z'$ endlich bleibe. Z wird dann daselbst unendlich, $\frac{dZ}{dt}$ aber können wir nichtsdestoweniger endlich belassen. Wir setzen ferner

$$8e. \quad \int Z dz = \int Z' dz = \varphi_{1,2}.$$

Integriren wir nunmehr die ersten zwei der Gleichungen 7a. und 7b. nach Multiplication mit dz durch die Uebergangsschicht hindurch, so erhalten wir, da wegen der Kürze des Weges das Integral jeder endlichen Größe verschwindet, die Bedingungen:

$$8f. \quad \begin{aligned} Y_2 - Y_1 &= \frac{d\varphi_{1,2}}{dy}, \\ X_2 - X_1 &= \frac{d\varphi_{1,2}}{dx}, \end{aligned} \qquad 8g. \quad \begin{aligned} M_2 - M_1 &= 0 \\ N_2 - N_1 &= 0 \end{aligned}$$

Die Anwendung hiervon auf die dritten der Gleichungen 7a. und 7b. ergiebt dann als Bedingungen für die Normalkräfte, daß zu beiden Seiten der Grenzfläche die Werthe der Ausdrücke

$$\mu_{13} \frac{dL}{dt} + \mu_{23} \frac{dM}{dt} + \mu_{33} \frac{dN}{dt}$$

$$\varepsilon_{13} \frac{dX}{dt} + \varepsilon_{23} \frac{dY}{dt} + \varepsilon_{33} \frac{dZ}{dt} + 4\pi\{\lambda_{31}(X - X') + \lambda_{32}(Y - Y') + \lambda_{33}(Z - Z')\}$$

die gleichen sein müssen. Sind die Körper zu beiden Seiten der Grenzfläche homogen, so hat das Vorhandensein der elektromotorischen Kräfte keinen Einfluß auf die Bedingungen, durch welche die zu beiden Seiten herrschenden Kräfte mit einander verknüpft sind.

Da unsere Grenzbedingungen nichts andres sind, als die allgemeinen Gleichungen 7a. und 7b., transformirt für besondere Verhältnisse, so können wir jede Aussage und jede Operation, welche in einem bestimmten Bereich diese allgemeinen Gleichungen betrifft, ohne Weiteres auch über die in dem Bereich vorkommenden Grenzen heterogener Körper uns erstreckt denken, vorausgesetzt nur, daß dieses Verfahren nicht mathematische Unzulässigkeiten einschließt, vorausgesetzt also, daß sich unsre Aussagen und Operationen unmittelbar oder nach geeigneter Umformung beständig in endlichen und bestimmten Ausdrücken bewegen. Wir werden der hieraus entspringenden Bequemlichkeit des Oefteren uns bedienen. Wenn wir dabei im Allgemeinen darauf verzichten, den Beweis der Endlichkeit und Bestimmtheit aller vorkommenden Ausdrücke zu erbringen, so geschieht dies nicht, weil wir diesen Beweis für überflüssig hielten, sondern nur, weil für alle in Betracht kommenden Fälle der Beweis schon seit lange erbracht oder nach bekannten Mustern zu erbringen ist.

Von den bisherigen Abschnitten vermehrte ein jeder die Zahl der von der Theorie umfaßten Thatsachen. Im Gegensatz dazu handeln die nächstfolgenden Abschnitte von Namen und Bezeichnungen. Da durch Einführung derselben die Zahl der umfaßten Thatsachen nicht vermehrt wird, so sind sie nur ein Beiwerk der Theorie; ihr Werth besteht zum Theil in der Ermöglichung einer kürzeren Ausdrucksweise, zum Theil aber auch nur darin, daß sie die Verbindung unserer Theorie mit den älteren Anschauungen der Elektricitätslehre vermitteln.

9. Elektrische und magnetische Polarisation.

Soweit sich unsere Gleichungen auf isotrope Medien beziehen, giebt jede einzelne den im nächsten Augenblick statthabenden Werth einer einzigen der in Betracht kommenden physikalischen Größen ausgedrückt als eindeutige Function der im gegenwärtigen Augenblick vorhandenen Zustände. Diese Form der Gleichungen ist eine sehr vollkommene vom mathematischen Standpunkt aus, weil sie uns von vornherein übersehen läßt, daß die Gleichungen den Ablauf eines jeden willkürlich angeregten Prozesses eindeutig bestimmen. Sie ist sehr vollkommen auch von einem mehr philosophischen Standpunkt aus, weil sie uns sogleich in der linken Seite der Gleichung den zukünftigen Zustand, die Wirkung, erkennen läßt, in der rechten Seite der Gleichung aber als Ursache den gegenwärtigen Zustand aufweist. Diejenigen unserer Gleichungen, welche sich auf anisotrope Medien beziehen, haben nicht diese vollkommene Form, da sie auf der linken Seite nicht die Aenderungen einer einzelnen physikalischen Größe, sondern Functionen solcher Aenderungen enthalten. Da diese Functionen lineare sind, kann allerdings durch Auflösung der Gleichungen nach den einzelnen Aenderungen die gewünschte Form hergestellt werden. Ein anderes Mittel zu gleichem Zweck, welches zugleich die Gleichungen vereinfacht, ist die Einführung der Größen, welche wir Polarisationen nennen. Wir setzen:

$$\text{9c.}\quad \begin{aligned} \mathfrak{L} &= \mu_{11} L + \mu_{12} M + \mu_{13} N \\ \mathfrak{M} &= \mu_{12} L + \mu_{22} M + \mu_{23} N \\ \mathfrak{N} &= \mu_{13} L + \mu_{23} M + \mu_{33} N \end{aligned} \qquad \text{9d.}\quad \begin{aligned} \mathfrak{X} &= \varepsilon_{11} X + \varepsilon_{12} Y + \varepsilon_{13} Z \\ \mathfrak{Y} &= \varepsilon_{12} X + \varepsilon_{22} Y + \varepsilon_{23} Z \\ \mathfrak{Z} &= \varepsilon_{13} X + \varepsilon_{23} Y + \varepsilon_{33} Z \end{aligned}$$

und nennen die Resultante der $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ die magnetische, die Resultante der $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die elektrische Polarisation. Für isotrope Medien sind Polarisationen und Kräfte gleich gerichtet und das Verhältniß ersterer zu letzteren ist die Dielektricitäts- bezw. Magnetisirungsconstante. Für den Aether fallen Polarisationen und Kräfte zusammen. Führen wir die Polarisationen in die linken Seiten unserer Gleichungen ein, so giebt uns jede Gleichung die Aenderung einer einzigen Polarisationscomponente als Folge der augenblicklich vorhandenen Kräfte. Da die Kräfte lineare Functionen der Polarisationen sind, so hat es keine Schwierigkeit, auch auf der rechten Seite der Gleichungen die Polarisationen einzuführen. Wir würden hierdurch diejenige gerichtete Größe, durch welche wir die elektromagnetischen Zustände zuerst bestimmten, die Kraft, ersetzt haben durch eine andere gerichtete Größe, die Polarisation, welche uns das gleiche, aber wenig mehr leistet, als jene. Daß die Einführung der Polarisationen und Kräfte neben einander die Gleichungen wesentlich vereinfacht, ist eine erste Andeutung dafür, daß eine vollständige Darstellung der Zustände in ponderabeln Körpern die Angabe mindestens zweier gerichteten Größen für den elektrischen und zweier gerichteten Größen für den magnetischen Zustand erfordert.

Um unsere Gleichungen weiter zu vereinfachen, setzen wir

$$
\text{9e.}\quad
\begin{aligned}
u &= \lambda_{11}(X-X') + \lambda_{12}(Y-Y') + \lambda_{13}(Z-Z)\\
v &= \lambda_{21}(X-X') + \lambda_{22}(Y-Y') + \lambda_{23}(Z-Z')\\
w &= \lambda_{31}(X-X') + \lambda_{32}(Y-Y') + \lambda_{33}(Z-Z').
\end{aligned}
$$

Aus Gründen welche im folgenden Abschnitt hervortreten, nennen wir $u\ v\ w$ die (elektrostatisch gemessenen) Componenten der elektrischen Strömung.

Unsere allgemeinsten Gleichungen nehmen nunmehr die Form an:

$$
\text{9a.}\quad
\begin{aligned}
A\frac{d\mathfrak{L}}{dt} &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\\
A\frac{d\mathfrak{M}}{dt} &= \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}\\
A\frac{d\mathfrak{N}}{dt} &= \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}
\end{aligned}
\qquad
\text{9b.}\quad
\begin{aligned}
A\frac{d\mathfrak{X}}{dt} &= \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi A u\\
A\frac{d\mathfrak{Y}}{dt} &= \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} - 4\pi A v\\
A\frac{d\mathfrak{Z}}{dt} &= \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} - 4\pi A w
\end{aligned}
$$

und die elektromagnetische Energie der Volumeneinheit eines beliebigen Körpers erhält durch Einführung der Polarisationen die Gestalt:

$$
\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{X}X + \mathfrak{Y}Y + \mathfrak{Z}Z) + \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N).
$$

In diesen Aussagen kommen keine Größen mehr vor, welche sich auf einen besonderen Körper beziehen. Die Aussage, daß diese Gleichungen für alle Punkte des unendlichen Raumes erfüllt sein müssen, umfaßt alle in dies Gebiet einzureihenden Probleme, und die unendliche Mannigfaltigkeit dieser Probleme entsteht nur dadurch, daß die Constanten der linearen Relationen 9c, 9d, 9e, nämlich die ε, μ, λ, X', Y', Z' in mannigfaltiger Weise Funktionen des Raumes sein können, theils stätig, theils unstätig von Punkt zu Punkt sich verändernd.

10. Elektricität und Magnetismus.

Es sei ein System ponderabeler Körper, in welchem elektromagnetische Vorgänge sich abspielen, durch den leeren Raum abgegrenzt gegen andere Systeme. Differentiiren wir die drei Gleichungen 9b bezw. nach x, y, z und addiren, so erhalten wir für alle Punkte des Systems die Gleichung:

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right) = -4\pi\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right).
$$

Wir multipliciren diese Gleichung mit dem Raumelement $d\tau$ und integriren über den Raum bis zu einer beliebigen das ponderabele

System vollständig umschließenden Fläche. Das Element dieser Fläche sei $d\omega$, die auf $d\omega$ senkrechte Richtung bilden mit den Achsen die Winkel n,x, n,y, n,z. Wir erhalten, da die u, v, w an der Fläche gleich Null sind

$$\frac{d}{dt}\int\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)d\tau = \frac{d}{dt}\int(\mathfrak{X}\cos n,x+\mathfrak{Y}\cos n,y+\mathfrak{Z}\cos n,z)\,d\omega$$

$$= -4\pi\int\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)d\tau = -4\pi\int(u\cos n,x+v\cos n,y+w\cos n,z)\,d\omega$$

$$= 0.$$

Also:

10a. $$\int\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)d\tau = \int(\mathfrak{X}\cos n,x+\mathfrak{Y}\cos n,y+\mathfrak{Z}\cos n,z)\,d\omega = 4\pi e.$$

Die neu eingeführte Größe e ist offenbar eine Funktion des elektrischen Zustandes des Systems und zwar eine solche Funktion, welche durch keine inneren oder äußeren lediglich elektrodynamischen Vorgänge vermehrt oder vermindert werden kann. Diese Unzerstörbarkeit der Größe e, welche dieselbe auch gegenüber andern als rein elektrodynamischen Vorgängen bewahrt, so lange sich diese Vorgänge auf das Innere des Systems beschränken, hat die Vermuthung wachgerufen, daß e die Menge einer in dem System enthaltenen Substanz angebe. Entsprechend dieser Anschauung nennen wir e die Menge der in dem ponderabelen System enthaltenen Elektricität. Allerdings kann e positiv oder negativ sein, während die Menge einer Substanz nothwendig positiv ist. Man hat deshalb die Hypothese vervollständigt durch die Annahme zweier Elektricitäten von entgegengesetzten Eigenschaften und hat dem e dann die Bedeutung der Differenz beider beigelegt, oder man hat Hülfe gesucht in der Annahme, es bezeichne e nur die Abweichung des wirklichen Gehaltes an Elektricität von dem normalen. Stellt aber in einer dieser oder in einer andern Form e die Menge einer Substanz dar, so muß jedes Raumelement $d\tau$ seinen bestimmten Beitrag zu dem Gesammtwerthe von e liefern. Nur vermuthungsweise können wir das Raumintegral, welches uns e liefert auf die einzelnen Raumelemente vertheilen. Eine erste mögliche und augenblicklich naheliegende Vertheilung legt dem Raumelement $d\tau$ den Elektricitätsinhalt

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)d\tau$$

bei. Die so bestimmte Elektricitätsmenge des Raumelementes wollen wir die wahre Elektricität desselben nennen; dementsprechend nennen wir im Innern eines Körpers den Ausdruck

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)$$

die wahre räumliche Dichte und an der Grenzfläche verschiedenartiger Körper den Ausdruck

$$\frac{1}{4\pi}\left\{(\mathfrak{X}_2-\mathfrak{X}_1)\cos n,x+(\mathfrak{Y}_2-\mathfrak{Y}_1)\cos n,y+(\mathfrak{Z}_2-\mathfrak{Z}_1)\cos n,z\right\}$$

die wahre Flächendichte der Elektricität.

Eine andere mögliche und naheliegende Vertheilung von e auf die Raumelemente erhalten wir durch die Bemerkung, daß im leeren Raume Polarisationen und Kräfte identisch sind, daß wir dementsprechend also schreiben können an Stelle von 10a.

$$\text{10b.}\qquad \begin{aligned} 4\pi e &= \int (X\cos n,x+Y\cos n,y+Z\cos n,z)\,d\omega \\ &= \int\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)d\tau \end{aligned}$$

und weiterhin den Ausdruck

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)d\tau$$

als den Beitrag betrachten, welchen das Raumelement $d\tau$ zu e liefert. Die so bestimmte Elektricitätsmenge eines Raumelementes nennen wir die freie Elektricität desselben, dementsprechend

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)$$

die freie räumliche Dichte, und an Unstätigkeitsflächen

$$\frac{1}{4\pi}\left\{(X_2-X_1)\cos n,x+(Y_2-Y_1)\cos n,y+(Z_2-Z_1)\cos n,z\right\}$$

die freie Flächendichtigkeit der Elektricität. Den Unterschied zwischen der wahren und der freien Elektricität nennen wir die gebundene Elektricität. Unsere Bezeichnungsweise schließt sich derjenigen üblichen Bezeichnungsweise an, welche ihren Ursprung aus der bisherigen Anschauung von dem Zustandekommen der elektrischen Fernwirkungen nimmt. Nach dieser Anschauung wird ein Theil der in einen Nichtleiter eingeführten fremden oder „wahren" Elektricitätsmengen durch elektrische Verschiebungen[1]) in den Molekülen des umgebenden Mittels „gebunden", während der Rest

1) Welche nicht etwa mit unseren Polarisationen identisch sind.

„frei“ bleibt, seine Fernwirkungen nach außen zu entfalten. Doch weicht auch in manchen Aussagen unsere Bezeichnungsweise von der üblichen ab. Da aber die letztere schwankend und nicht immer consequent ist, so war es mir nicht möglich, eine Bezeichnungsweise zu finden, welche nicht in irgend einem Falle gegen den Sprachgebrauch verstieß. Auch insofern schwankt die übliche Ausdrucksweise, als sie unter Elektricität schlechthin ohne Unterschied bald die wahre, bald die freie Elektricität versteht, sogar in wichtigen Aussagen.

Nach dem Vorangegangenen bezeichnen wir das durch 4π dividirte und über eine beliebige geschlossene Fläche erstreckte Integral

$$\int(\mathfrak{X}\cos n,x+\mathfrak{Y}\cos n,y+\mathfrak{Z}\cos n,z)\,d\omega$$

als die von dieser Fläche umschlossene wahre Elektricität. Das gleiche Integral erstreckt über eine nichtgeschlossene Fläche wollen wir die Zahl der diese Fläche im Sinne der positiven Normalen durchschneidenden elektrischen Kraftlinien nennen. Durch diese Bezeichnung knüpfen wir an die Vorstellung Faradays an, derzufolge die Kraftlinien Linien sind, welche in isotropen homogenen Körpern überall in Richtung der herrschenden Kraft laufen und zwar in einer Fülle, welche der Größe der Kraft proportional ist. Wir haben allerdings durch unsere Bezeichnung diese Vorstellung dahin vervollständigt, bezw. präcisirt, daß die Kraftlinien in beliebigen Körpern überall in Richtung der Polarisation, nicht der Kraft, laufen sollen und haben allgemein ihre Dichte der Größe der Polarisation, nicht der Kraft proportional gesetzt. Unsere Definitionen bringen es mit sich, daß die mit 4π multiplicirte Menge der in einem beliebigen Raume enthaltenen wahren Elektricität gleich ist dem Ueberschuß der in den Raum eintretenden Kraftlinien über die austretenden. Jede Kraftlinie, welche überhaupt ein Ende findet, mündet demnach an wahrer Elektricität und wir könnten die wahren Elektricitäten definiren als die freien Enden der Kraftlinien. Ist ein gewisser Raum in der Nachbarschaft der Fläche über welche unser Integral erstreckt ist, frei von wahrer Elektricität, so ist der Werth des Integrales unabhängig von der besonderen Lage der Fläche innerhalb dieses Raumes und nur abhängig von der Lage der Grenzlinie der Fläche. Für diesen Fall bezeichnen wir dann den Werth des Integrales auch als die Zahl der die Umrißlinie durchsetzenden Kraftlinien, indem wir uns die in diesem Ausdruck bleibende Vieldeutigkeit soweit nöthig durch besondere Festsetzungen beseitigt denken.

Wir wollen weiter die Aenderung der wahren Elektricität e_w

in einem beliebig begrenzten Theile unseres Systems berechnen. Es möge $d\omega$ wiederum ein Element der Grenzfläche dieses Theiles sein. Wir erhalten

$$10c. \quad \frac{de_w}{dt} = -\int\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)d\tau = -\int(u\cos n,x + v\cos n,y + w\cos n,z)\,d\omega.$$

Verläuft nun unsere Grenzfläche lediglich in solchen Körpern, für welche die λ gleich Null sind, so verschwinden an der Fläche immer noch die u, v; w, es ist also der Inhalt des umspannten Raumes an wahrer Elektricität constant. Aus einem Raume, welcher vollständig von Körpern umgeben ist, für welche die λ gleich Null sind, vermag demnach die wahre Elektricität durch rein elektrodynamische Vorgänge nicht zu entweichen. Aus dieser Ursache nennen und nannten wir solche Körper Nichtleiter. Geht die Grenzfläche aber ganz oder theilweise durch Körper, in welchen die λ von Null verschieden sind, so ist eine Aenderung des Elektricitätsgehaltes des umschlossenen Raumes durch rein elektrische Bewegungen möglich, aus diesem Grunde bezeichnen wir Körper der letzteren Art als Leiter. Die Unterscheidung der Körper in Leiter und Nichtleiter bezieht sich also auf die wahre Elektricität, in Hinsicht der freien Elektricität können alle Körper als Leiter betrachtet werden (Verschiebungsströme). Die Menge einer Substanz kann sich in einem Raume nur mittelst Ein- und Austrittes durch die Oberfläche hindurch verändern und zwar muß durch jedes Oberflächenelement hindurch eine bestimmte Menge der Substanz treten. Mit der Thatsache, daß durch jede geschlossene Oberfläche in der Zeiteinheit die durch unser Integral angegebene Elektricitätsmenge tritt, ist die Annahme vereinbar, daß durch die Flächeneinheit jedes Oberflächenelementes die Menge

$$u\cos n,x + v\cos n,y + w\cos n,z$$

trete. Entsprechend dieser Annahme nennen und nannten wir u, v, w die Componenten der elektrischen Strömung und das über eine nicht geschlossene Oberfläche genommene Integral

$$\int(u\cos n,x + v\cos n,y + w\cos n,z)\,d\omega$$

den diese Fläche durchfließenden elektrischen Strom. Es muß indeß hervorgehoben werden, daß selbst wenn die Stofflichkeit der Elektricität zugegeben ist, die obige specielle Bestimmung ihrer Strömung in Leitern eine weitere Hypothese einschließt. Dem gefundenen Systeme der Bewegung kann ein willkürliches in jedem Augenblicke geschlossenes Stromsystem überdeckt werden, ohne daß dadurch die Ab- oder Zunahme der Elektricität in irgend einem Punkte sich änderte.

Ist ein Theil unseres Systemes durch lediglich elektromagnetische Vorgänge aus dem unelektrischen Zustand in seinen gegenwärtigen gelangt, oder kann er durch lediglich elektromagnetische Veränderungen in den unelektrischen Zustand zurückkehren, so ist in allen Nichtleitern dieses Theiles die wahre Elektricität gleich Null. Für solche Theile eines Systemes treten dann also zu den allgemeinen Gleichungen noch die folgenden, mit ihnen verträglichen als Beschränkungen der zulässigen Anfangszustände hinzu:

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}=0$$

für das Innere der Nichtleiter;

$$(\mathfrak{X}_2-\mathfrak{X}_1)\cos n,x+(\mathfrak{Y}_2-\mathfrak{Y}_1)\cos n,y+(\mathfrak{Z}_2-\mathfrak{Z}_1)\cos n,z=0$$

für die Grenze zweier heterogener Nichtleiter.

Ganz analoge Betrachtungen wie in Hinsicht der elektrischen, lassen sich anstellen in Hinsicht der magnetischen Erscheinungen. Indem wir auf diese eingehen und dabei die Gleichungen 9a. benutzen, nennen wir für das Innere eines Körpers

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\right)$$

die wahre räumliche Dichte, an der Grenze zweier Körper den Ausdruck

$$\frac{1}{4\pi}\left\{(\mathfrak{L}_2-\mathfrak{L}_1)\cos n,x+(\mathfrak{M}_2-\mathfrak{M}_1)\cos n,y+(\mathfrak{N}_2-\mathfrak{N}_1)\cos n,z\right\}$$

die wahre Flächendichtigkeit des Magnetismus und das über einen bestimmten Theil des Raumes genommene Integral dieser Größen den in diesem Theil enthaltenen wahren Magnetismus. Das über eine nicht geschlossene Fläche genommene Integral

$$\int(\mathfrak{L}\cos n,x+\mathfrak{M}\cos n,y+\mathfrak{N}\cos n,z)\,d\omega$$

nennen wir die Zahl der durch diese Fläche, bezw. den Umfang dieser Fläche tretenden magnetischen Kraftlinien. Ferner nennen wir für das Innere eines Körpers

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dz}\right)$$

die freie räumliche Dichte, an der Grenze zweier Körper

$$\frac{1}{4\pi}\left\{(L_2-L_1)\cos n,x+(M_2-M_1)\cos n,y+(N_2-N_1)\cos n,z\right\}$$

die freie Flächendichtigkeit des Magnetismus. Die Unterschiede zwischen Leitern und Nichtleitern fallen hier fort, da die Gleichungen 9a. keine den $u\,v\,w$ der Gleichungen 9b. entsprechende Glieder enthalten. In Hinsicht des freien Magnetismus können alle Körper als Leiter aufgefaßt werden.

Ist ein System oder ein Theil eines solchen durch lediglich elektromagnetische Vorgänge aus dem unmagnetischen Zustand hervorgegangen, oder kann es durch solche Vorgänge in denselben zurücksinken, so gelten für dies System oder diesen Theil des Systems die Gleichungen:

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}=0$$

für das Innere der Körper und

$$(\mathfrak{L}_2-\mathfrak{L}_1)\cos n,x+(\mathfrak{M}_2-\mathfrak{M}_1)\cos n,y+(\mathfrak{N}_2-\mathfrak{N}_1)\cos n,z=0$$

für die Grenzflächen heterogener Körper, welche Gleichungen zu den allgemeinen als mit diesen verträgliche Bestimmungen über die möglichen Anfangszustände hinzutreten.

11. Erhaltung der Energie.

Es bezeichne S die elektromagnetische Energie eines Raumes τ, welcher durch die Oberfläche ω begrenzt wird. Wir berechnen die Aenderung von S, indem wir die Gleichungen 9a. und 9b. multipliciren sämmtlich mit $\frac{1}{4\pi A}d\tau$, alsdann der Reihe nach mit L, M, N, X, Y, Z, Alles addiren und integriren über den Raum τ. Wir erhalten:

$$\text{11a.}\quad \begin{aligned}\frac{dS}{dt}=\frac{1}{4\pi A}\int\left\{(NY-MZ)\cos n,x+(LZ-NX)\cos n,y+(MX-LY)\cos n,z\right\}d\omega\\ -\int(uX+vY+wZ)\,d\tau.\end{aligned}$$

Erstrecken wir den Raum τ über ein vollständiges elektromagnetisches System, d. h. bis zu einer Fläche an welcher die Kräfte verschwinden, so wird unsere Gleichung

$$\frac{dS}{dt}=-\int(uX+vY+wZ)\,d\tau.$$

Die Erhaltung der Energie verlangt demnach, daß in jedem System, welches der Einwirkung von außen nicht unterliegt, in der Zeiteinheit ein Energiebetrag von der Größe des rechts stehenden Integrals in anderer als elektromagnetischer Form auftritt. Die Erfahrung genügt dieser Forderung, sie belehrt uns weitergehend, daß jedes einzelne Raumelement $d\tau$ zum Gesammtbetrage der umgesetzten Energie den Beitrag $(uX + vY + wZ)\,d\tau$ liefert und zeigt uns, in welchen neuen Formen diese Energie auftritt. Allerdings leistet dieses die Erfahrung genau gesprochen nicht allgemein, sondern einstweilen nur in Hinsicht der folgenden besonderen Fälle. Im Innern eines homogenen isotropen Leiters nimmt die in der Zeiteinheit und Volumeinheit auftretenden Energiemenge nach der Theorie sowohl als nach der Erfahrung die Formen an:

$$\lambda\,(X^2 + Y^2 + Z^2) = \frac{1}{\lambda}\,(u^2 + v^2 + w^2),$$

sie ist stets positiv und entspricht einer Wärmeentwickelung — der Joule'schen Wärme. An der Grenze zweier homogenen isotropen Körper nimmt in der Uebergangsschicht die in der Volumeinheit auftretende Energiemenge die Form an $uX' + vY' + wZ'$, eine Integration über die ganze Dicke der Uebergangsschicht ergiebt daraus für die in der Flächeneinheit der Grenze auftretende Energiemenge den Betrag

$$(u \cos n,x + v \cos n,y + w \cos n,z)\,.\,\varphi_{1,2}$$

welchen Ausdruck ebenfalls die Erfahrung bestätigt. Es kann dieser Ausdruck positiv oder negativ sein, er kann einem Verschwinden oder Entstehen fremder Energieformen entsprechen. Entweder ist die umgesetzte fremde Energie hier gleichfalls Wärme — Peltier'sche Wärme — in diesem Falle bezeichnen wir die thätigen elektromotorischen Kräfte als thermoelektrische. Oder es wird neben Wärme auch chemische Energie umgesetzt, in diesem Falle bezeichnen wir die Kräfte als elektrochemische. Fassen wir nunmehr einen beliebig begrenzten Theil unseres Systems ins Auge und berechnen die Zunahme der gesammten Energie dieses Theiles, also der Größe

$$\frac{dS}{dt} + \int (uX + vY + wZ)\,d\tau,$$

so finden wir nach dem Vorigen diese Zunahme gleich einem über die Oberfläche des Raumes genommenem Integral. Die Aenderung des Energievorrathes dieses und damit eines jeden Raumes wird also richtig berechnet, wenn wir annehmen, die Energie trete nach Art einer Substanz durch die Oberfläche ein, und zwar in solcher

Fülle, daß durch die Flächeneinheit einer jeden Oberfläche die Menge

$$\frac{1}{4\pi A}\{(NY-MZ)\cos n,x+(LZ-NX)\cos n,y+(MX-LY)\cos n,z\}$$

tritt. Eine geometrische Discussion dieses Ausdrucks ergiebt, daß unsere Annahme identisch ist mit der Aussage, die Energie bewege sich überall in einer Richtung, welche auf den Richtungen der magnetischen und der elektrischen Kraft senkrecht steht und in solcher Fülle, daß in dieser Richtung in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit eine Menge trete gleich dem Produkt der beiden Kräfte, dem Sinus des eingeschlossenen Winkels und dem Faktor $\frac{1}{4\pi A}$. Es ist dies die höchst bemerkenswerthe Theorie des Herrn Poynting über die Bewegung der Energie im elektromagnetischen Felde[1]). Bei Beurtheilung der physikalischen Bedeutung derselben muß erstens hervorgehoben werden, daß die Zerlegung unseres Oberflächenintegrales in seine Elemente eine hypothetische war und daß das Ergebniß derselben nicht immer ein wahrscheinliches ist. Ruht ein Magnet dauernd neben einem elektrisirten Körper, so muß zufolge dieses Resultats die Energie der Nachbarschaft sich in beständiger Bewegung befinden, allerdings in geschlossenen Bahnen. Ein größeres Bedenken scheint mir in der Frage zu liegen, wie weit bei unsern gegenwärtigen Kenntnissen von der Energie die Lokalisation derselben und ihre Verfolgung von Punkt zu Punkt überhaupt Sinn und Bedeutung hat. Derartige Betrachtungen sind noch nicht durchgeführt bei den einfachsten Energieumsätzen der gewöhnlichen Mechanik; es ist daher die Frage noch unerledigt, ob und in welchem Umfange der Begriff der Energie eine solche Behandlungsweise zuläßt.

12. Ponderomotorische Kräfte.

Die mechanischen Kräfte, welche wir im elektromagnetisch gestörten Felde zwischen den ponderabelen Körpern wahrnehmen, sehen wir an als die Resultanten mechanischer Druckkräfte, welche durch das Vorhandensein der elektromagnetischen Störungen im Aether und in den übrigen Körpern wachgerufen werden. Zufolge dieser Anschauung sind die auf einen ponderabeln Körper wirkenden mechanischen Kräfte vollständig bestimmt durch den elektromagnetischen Zustand seiner unmittelbaren Umgebung, ohne daß es darauf ankäme, welche Ursachen weiterhin diesen Zustand her-

1) J. H. Poynting, Phil. Transactions 1884. II. p. 343.

vorgerufen haben. Wir setzen ferner voraus, daß die unterstellten Druckkräfte von solcher Art sind, daß sie keine Resultanten ergeben, welche das Innere des Aethers selbst in Bewegung zu setzen streben. Ohne diese Voraussetzung wäre unser System nothwendig unrichtig oder doch unvollständig, denn ohne sie könnte man von elektromagnetischen Kräften im ruhenden Aether allgemein gar nicht reden. Eine nothwendige Folge dieser Voraussetzung ist es, daß die an den ponderabeln Körpern zu beobachtenden mechanischen Kräfte dem Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung genügen.

Es fragt sich nun ob sich Druckkräfte angeben lassen, welche diesen Anschauungen entsprechen und geeignet sind, die wirklich beobachteten Resultanten zu ergeben. Maxwell und in allgemeinerer Form von Helmholtz haben Formen der Druckkräfte angegeben, welche allen Ansprüchen genügen für statische und stationäre Zustände. Aber für den allgemeinen veränderlichen Zustand als gültig angenommen würden diese Drucke das Innere des Aethers selbst in Bewegung setzen. Wir nehmen deshalb an, daß die vollständigen Formen noch nicht gefunden seien, vermeiden es, bestimmte Angaben über die Größe der Drucke zu machen und ziehen es vor, die ponderomotorischen Kräfte abzuleiten mit Hülfe der Voraussetzungen, welche wir bereits angegeben haben, mit Hülfe des Prinzips von der Erhaltung der Energie und mit Hülfe der folgenden Erfahrungsthatsache: Werden die ponderabelen Körper eines elektrisch oder magnetisch erregten Systems, welches dem statischen Zustand stets unendlich nahe bleibt, gegen einander bewegt und gleichzeitig die in jedem Element der Körper befindliche Menge der wahren Elektricität und des wahren Magnetismus als unveränderlich und an dem Elemente haftend behandelt, so findet die zur Bewegung der Körper verbrauchte mechanische Arbeit ihre einzige Compensation in der Vermehrung der elektromagnetischen Energie des Systems, ist also dieser gleich.

Es bleibt die Frage offen, ob sich überhaupt Formen der Druckkräfte angeben lassen, welche den von uns gestellten Anforderungen allgemein und genau genügen. Sollte dies nicht der Fall sein, so enthält die Gesammtheit unserer Voraussetzungen einen innern Widerspruch, welche durch eine Correction an einer oder an mehreren dieser Voraussetzungen gehoben werden muß. Die erforderlichen Verbesserungen sind aber jedenfalls von solcher Art, daß sie in keiner der bisher beobachteten Erscheinungen ihre Wirkung geltend machen. Im Uebrigen ist hervorzuheben, daß wenn sich hier eine Lücke in unserer Theorie findet, dies nicht eine

Lücke in den Grundlagen, sondern eine solche in den Ausläufern der Theorie ist. Denn die erregten mechanischen Kräfte sind von unsern Standpunkte aus eine secundäre Folgeerscheinung der elektromagnetischen Kräfte; wir könnten die Theorie der letzteren behandeln, ohne die ersteren auch nur zu erwähnen, wie wir denn ja auch alle übrigen minder wichtigen Folgeerscheinungen des elektromagnetischen Zustandes von der Besprechung ausgeschlossen haben.

B. Ableitung der Erscheinungen aus den Grundgleichungen.

Wir theilen die durch unsre Gleichungen dargestellten Erscheinungen ein in statische, stationäre und dynamische. Damit eine Erscheinung zu den statischen oder stationären rechne, ist nöthig, daß sie keine Aenderungen der elektrischen und magnetischen Kräfte mit der Zeit bedinge, daß also die linken Seiten der Gleichungen 9a und 9b verschwinden. Damit eine Erscheinung weitergehend als eine statische bezeichnet werde, ist außerdem nöthig, daß sie überhaupt nicht von Aenderungen in der Zeit begleitet werde, daß also insbesondere durch sie kein dauernder Energieumsatz in andre Formen bedingt werde. Hierfür ist die hinreichende und nothwendige Bedingung, daß auch die Größen u, v, w in den Gleichungen 9a und 9b verschwinden.

Statische Erscheinungen.

Wenn in den Gleichungen 9a und 9b die linken Seiten und die u, v, w verschwinden, so zerfällt das System in zwei von einander unabhängige Systeme, von welchen das eine nur die elektrischen, das andere nur die magnetischen Kräfte enthält. Wir erhalten so zwei Gruppen von Problemen, von denen die eine als Elektrostatik, die andere als Lehre vom ruhenden Magnetismus bezeichnet zu werden pflegt.

13. Elektrostatik.

Vom Auftreten elektromotorischer Kräfte sehen wir in diesem Abschnitt ab, weil, wenn dieselben das Zustandekommen des statischen Zustandes überhaupt gestatten, ihre Wirkung zu schwach ist, um in den interessirenden Problemen in Betracht zu kommen. Hiernach müssen alsdann in den Leitern, woselbst die λ nicht verschwinden, die Kräfte $X\,Y\,Z$ verschwinden. In den Nichtleitern nehmen die Gleichungen 9a die Form an

13a. $$\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} = 0\,.$$

Die Kräfte besitzen demnach ein Potential φ, dessen negativen Differentialquotienten sie gleich gesetzt werden können. Da die Kräfte überall endlich sind, ist φ überall stetig, es kann auch durch die Leiter hindurch fortgesetzt werden und ist alsdann in diesen als constant zu betrachten. An einer Grenzfläche setzen sich die zur Grenzfläche tangentialen Differentialquotienten von φ stetig durch die Fläche fort. Bezeichnet im Uebrigen e_f die räumliche Dichte der freien Elektricität, so genügt nach Abschnitt 10 das Potential φ überall im Raume der Gleichung $\varDelta\varphi = -4\pi e_f$, welche im freien Aether die Form $\varDelta\varphi = 0$ annimmt, und deren sinngemäße Umformung für die Trennungsfläche heterogener Körper daselbst die Bedingung ergiebt

$$\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_2 - \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_1 = -4\pi e'_f,$$

unter e'_f die Flächendichtigkeit der freien Elektricität verstanden. Aus der Gesammtheit dieser Bedingungen folgt für φ der bis auf eine willkürlich bleibende Constante eindeutig bestimmte Werth: $\varphi = \int \frac{e_f}{r}\,d\tau$, das Integral über den ganzen Raum, unter sinngemäßer Berücksichtigung der Grenzflächen erstreckt. Bei gleicher Vertheilung des Potentials und der Kräfte in verschiedenen Nichtleitern sind also die freien Elektricitäten die gleichen. Die entsprechenden Mengen der wahren Elektricitäten aber sind verschieden und stehen für das Innere zweier homogenen Nichtleiter im Verhältniß der Dielektricitätsconstanten. Die Bedingung dafür, daß die Dichtigkeit der wahren Elektricität im Innern der Nichtleiter gegebene Werthe e_w habe, ist, wenn wir uns für den Augenblick auf isotrope Körper beschränken:

$$\frac{d}{dx}\left(\varepsilon\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\varepsilon\frac{d\varphi}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\varepsilon\frac{d\varphi}{dz}\right) = -4\pi e_w\,,$$

welche an der Grenze zweier isotroper Körper die Form annimmt

$$\varepsilon_2\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_2 - \varepsilon_1\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_1 = -4\pi e'_w,$$

unter e'_w die Flächendichte der wahren Elektricität verstanden.

Werfen wir noch unser Augenmerk auf den Energievorrath eines elektrostatischen Systemes. Wir erhalten denselben der Reihe nach in den Formen:

$$\frac{1}{8\pi}\int(\mathfrak{X}X+\mathfrak{Y}Y+\mathfrak{Z}Z)\,d\tau = -\frac{1}{8\pi}\int\left(\mathfrak{X}\frac{d\varphi}{dx}+\mathfrak{Y}\frac{d\varphi}{dy}+\mathfrak{Z}\frac{d\varphi}{dz}\right)d\tau$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int\varphi\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)d\tau = \tfrac{1}{2}\int\varphi e_w\,d\tau = \tfrac{1}{2}\int\int\frac{e_w e_{\prime}}{r}\,d\tau\,d\tau.$$

Die Integrationen sind dabei über allen Raum erstreckt gedacht, in welchem elektrische Störungen vorkommen, also bis zu Grenzen, an welchen die Störungen verschwinden, und die sinngemäße Umformung der Integrale an den Grenzflächen ist stillschweigend unterstellt. Die Zunahme, welche ein jeder dieser Ausdrücke erleidet, wenn bei eintretender Bewegung der ponderabelen Körper die an den Körperelementen haftenden Mengen der wahren Elektricität constant bleiben, ist nach Abschnitt 12 gleich der von den mechanischen Kräften bei dieser Bewegung geleisteten Arbeit. Besteht also unser System aus zwei Elektricitätsmengen E_1 und E_2, welche im Aether in einem gegen ihre eigenen Dimensionen sehr großen Abstand R von einander sich befinden, so vermindert sich bei Vermehrung des Abstandes beider um dR die elektrische Energie des Raumes um $\frac{1}{2}(E_1E_2+E_2E_1)\frac{dR}{R^2}$, der Ausdruck $\frac{E_1E_2}{R^2}$ stellt also die mechanische Kraft dar, mit welcher beide Elektricitäten sich von einander zu entfernen trachten. Das Coulombsche Gesetz, welches in den älteren Theorien den Ausgangspunkt aller Betrachtung bildete, erscheint jetzt als ein entferntes Endresultat.

In Hinsicht der allgemeinen Bestimmung der ponderomotorischen Kräfte müssen wir uns hier begnügen, darauf hinzuweisen, daß die letzten beiden für die Energie des Systems erlangten Ausdrücke dieselben sind, deren Aenderung auch nach der gewöhnlichen Elektrostatik die bei der Bewegung der Körper geleistete Arbeit ergiebt, und daraus zu folgern, daß wir aus den Aenderungen dieser Ausdrücke dieselben Kräfte berechnen werden, von welchen die gewöhnliche Elektrostatik ausgeht und welche an der Erfahrung geprüft sind. Insbesondere wird sich zeigen lassen, daß auf ein Körperelement, welches die Menge e an wahrer Elektricität enthält, die mechanischen Kraftcomponenten eX, eY, eZ einwirken. Wir kommen dadurch auf die Aussagen zurück, durch deren Hülfe wir zuerst die elektrischen Kräfte einführten.

14. Ruhender Magnetismus.

Die Gleichungen, welche die Componenten ruhender magnetischer Kräfte verbinden, sind die gleichen, welche zwischen den Componenten ruhender elektrischer Kräfte obwalten. Alle Bemerkungen des vorigen Abschnittes lassen sich daher hier unter entsprechender Aenderung der Bezeichnungen wiederholen. Wenn gleichwohl die in diesem Gebiet interessirenden Probleme sich auch in mathematischer Beziehung von denen der Elektrostatik unterscheiden, so liegt das vorzugsweise an folgenden Gründen:

1) Es fällt hier die Klasse der als Leiter zu bezeichnenden Körper fort.

2) In allen Körpern, mit Ausnahme solcher, welche permanenten oder remanenten Magnetismus zeigen, kommt wahrer Magnetismus nicht vor. Im Innern derartiger Körper, sofern sie isotrop sind, gilt daher für das magnetische Potential ψ nothwendig stets die Gleichung:

$$\frac{d}{dx}\left(\mu\frac{d\psi}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\mu\frac{d\psi}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(\mu\frac{d\psi}{dz}\right)=0$$

welche an der Grenze derartiger Körper übergeht in die Gleichung

$$\mu_2\left(\frac{d\psi}{dn}\right)_2-\mu_1\left(\frac{d\psi}{dn}\right)_1=0.$$

Etwas verwickeltere, aber leicht angebbare Gleichungen gelten für das Innere und die Grenzen krystallinischer Körper und kommen in Betracht, wenn wir die Erscheinungen der sogenannten Magnekrystallkraft behandeln wollen.

3) Während die Dielektricitätsconstante aller bekannten Körper größer als Eins ist, ist die Magnetisirungsconstante für viele Körper auch kleiner als Eins. Solche Körper bezeichnen wir als diamagnetische, im Gegensatz dazu die übrigen als paramagnetische. Die freie magnetische Dichte an der Oberfläche eines an den leeren Raum grenzenden isotropen Körpers ist gleich dem $(1-\mu)$ fachen der im Innern des Körpers normal zur Oberfläche gerichteten Kraft.

Bei gleichem Sinn der Kraft ist also das Vorzeichen der Belegung eines diamagnetischen Körpers demjenigen der Belegung eines paramagnetischen Körpers entgegengesetzt.

Die Lehre vom ruhenden Magnetismus gewinnt ferner ein besonderes Ansehen durch den Umstand, daß gerade die in Hinsicht der magnetischen Erscheinungen wichtigsten Körper, Eisen- und Stahlsorten, sich der Theorie nur in ganz roher Annäherung fügen. Diese Körper zeigen permanenten und remanenten Magnetismus, es ist also in ihnen die Polarisation des ponderabelen Stoffes theilweise unabhängig von der herrschenden Kraft, und also der magnetische Zustand nicht vollständig durch eine einzige Richtungsgröße zu definiren. Da außerdem die Beziehungen zwischen der Kraft und den durch sie bewirkten Störungen keine linearen sind, so treten diese Körper aus doppeltem Grunde aus dem Rahmen der gegenwärtigen Theorie heraus. Um sie nicht ganz von der Betrachtung ausschließen zu müssen, ersetzen wir sie durch den jedesmal nächststehenden zweier Idealkörper, des vollkommen weichen Eisens oder des vollkommen harten Stahles. Ersteres definiren wir als einen Körper, welcher unsern Gleichungen folgt, und für welchen μ einen sehr großen Werth hat. Indem wir diesen Werth je nach der Natur des behandelten Problems verschieden wählen, erzielen wir eine weitere Annäherung. Den vollkommen harten Stahl definiren wir als einen unsern Gleichungen folgenden Körper von den Magnetisirungsconstanten Eins, in dessen Innern wahrer Magnetismus vorkommen kann in beliebiger Vertheilung, jedoch so, daß die Gesammtmenge des in jedem Stahlstück vorhandenen wahren Magnetismus wiederum von Null nicht abweicht.

Stationäre Zustände.

Für den Zustand der stationären Bewegungen gelten in den Nichtleitern die gleichen Bedingungen, wie für den statischen Zustand; in den Leitern, welche wir in diesem Abschnitt der Einfachheit halber als isotrop voraussetzen, nehmen die in Betracht kommenden Gleichungen 9a, 9b, 9c die Form an:

$$\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}=0 \qquad\qquad \frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy}=4\pi Au$$

$$\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}=0 \quad 15a. \qquad \frac{dN}{dx}-\frac{dL}{dz}=4\pi Av \quad 15b.$$

$$\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}=0 \qquad\qquad \frac{dL}{dy}-\frac{dM}{dx}=4\pi Aw$$

15c. $u = \lambda(X - X'), \quad v = \lambda(Y - Y'), \quad w = \lambda(Z - Z')$.

Differenziren wir die Gleichungen 15b beziehlich nach x, y, z und addiren sie, so folgt

15d. $$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

welche Gleichung an Flächen, an welchen sich die Strömungen sprungweise ändern, die Form annimmt:

15e. $(u_2 - u_1)\cos n, x + (v_2 - v_1)\cos n, y + (w_2 - w_1)\cos n, z = 0.$

Fügen wir die Gleichungen 15d und 15e den Gleichungen 15a und 15c hinzu, so erhalten wir ein System, welches lediglich die elektrischen Kräfte enthält. Dasselbe kann ohne Rücksicht auf die magnetischen Kräfte behandelt werden und giebt uns die Theorie der Stromvertheilung. Sind die Componenten u, v, w der Strömung gefunden, so ergiebt uns weiter die Behandlung der Gleichungen 15b die von diesen Strömungen ausgeübten magnetischen Kräfte.

15. Vertheilung stationärer Ströme.

Es erhellt aus den Gleichungen 15a, daß die Kräfte auch im Innern der durchströmten Leiter noch als die negativen Differentialquotien einer Function φ, des Potentials, dargestellt werden können, welches durch die Bedingung bestimmt ist, daß überall sein muß:

15f. $$\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\lambda\frac{d\varphi}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\lambda\frac{d\varphi}{dz}\right) = -\frac{d}{dx}(\lambda X') - \frac{d}{dy}(\lambda Y') - \frac{d}{dz}(\lambda Z').$$

An der Grenzfläche zweier heterogener Leiter nimmt diese Gleichung die Form von

15g. $$\lambda_2\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_2 - \lambda_1\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_1 = -(\lambda_2 X_2' - \lambda_1 X_1')\cos n, x - (\lambda_2 Y_2' - \lambda_1 Y_1')\cos n, y - (\lambda_2 Z_2' - \lambda_1 Z_1')\cos n, z,$$

also an der Grenze eines Leiters gegen einen Nichtleiter die Form:

$$\frac{d\varphi}{dn} = -X' \cos n, x - Y' \cos n, y - Z' \cos n, z. \qquad 15\text{h}.$$

Zu diesen Grenzbedingungen kommt noch in solchen Grenzflächen, in welchen die elektromotorischen Kräfte unendlich werden, nach Abschnitt 8 die weitere Bedingung hinzu:

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= \int (X \cos n, x + Y \cos n, y + Z \cos n, z)\, dn \\ &= \int (X' \cos n, x + Y' \cos n, y + Z' \cos n, z)\, dn \qquad 15\text{i}. \\ &= \varphi_{1,2}. \end{aligned}$$

Die Gesammtheit dieser Bedingungen bestimmt φ eindeutig für das ganze Innere der Leiter bis auf eine Constante, welche von den Zuständen außerhalb der Leiter abhängig bleibt. Für homogene Leiter nehmen die Gleichungen 15f—15i die einfacheren Gestalten an:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0 \text{ für das Innere der Leiter,} \\ \lambda_1 \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_1 &= \lambda_2 \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_2 \text{ für die Grenze zweier Leiter,} \qquad 15\text{k}. \\ \frac{d\varphi}{dn} &= 0 \text{ für die Grenze gegen einen Nichtleiter,} \\ \varphi_1 - \varphi_2 &= \varphi_{1,2} \text{ an einer elektromotorisch wirksamen Grenzfläche.} \end{aligned}$$

Die so erlangten Gleichungen gestatten die unmittelbare Anwendung auf Probleme der Stromvertheilung in dreifach ausgedehnten Körpern. Ihre Anwendung auf die Strömung in flächenförmig ausgedehnten Leitern oder auf lineare Stromträger ist leicht und ergiebt die Definition des Widerstands, das Ohmsche Gesetz für geschlossene Strombahnen, die Kirchoffschen Sätze für beliebige Verzweigungen, sowie die übrigen allgemeinen Sätze über die Vertheilung stationärer Ströme.

16. Magnetische Kräfte stationärer Ströme.

Um zunächst überall aus den nunmehr bekannten Stromkomponenten u, v, w die durch sie hervorgerufenen Kräfte L, M, N zu bestimmen, führen wir als Hülfsgrößen die sogenannten Componenten des Vectropotentiales ein, indem wir setzen:

$$U = \int \frac{u}{r}\, d\tau, \quad V = \int \frac{v}{r}\, d\tau, \quad W = \int \frac{w}{r}\, d\tau.$$

Die Integrale sind über den ganzen Raum zu erstrecken, in Folge der Bedingungen des stationären Zustandes wird dabei

$$\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz}=0.$$

Wir setzen nun:

16a.
$$L = A\left(\frac{dV}{dz}-\frac{dW}{dy}\right)$$
$$M = A\left(\frac{dW}{dx}-\frac{dU}{dz}\right)$$
$$N = A\left(\frac{dU}{dy}-\frac{dV}{dx}\right).$$

Diese L, M, N sind Lösungen der Gleichungen 15b und genügen der Gleichung

$$\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dz}=0.$$

Wenn sich also auch die wirklich vorhandenen Kräfte von ihnen unterscheiden können, so genügen doch die Unterschiede beider den Bedingungen für die Kräfte ruhender Magnetismen, und können als von solchen herrührend angesehen werden, wobei nicht ausgeschlossen ist, daß diese Magnetismen ihrerseits wiederum durch die Strömungen veranlaßt seien. Sind aber insbesondere ruhende Magnetismen nicht vorhanden, so stellen die angegebenen Formen die vorhandenen magnetischen Kräfte vollständig dar.

Haben wir es nur mit linearen Stromleitern zu thun, in welcher die Stromstärke i herrscht, so treten in den Werthen der U, V, W an Stelle der Ausdrücke $ud\tau$, $vd\tau$, $wd\tau$ die Ausdrücke idx, idy, idz, wobei dx, dy, dy die Projectionen des Elementes ds der Strombahn auf die drei Axen sind, und die Integrationen alsdann längs der Stromwege um deren ganzen Umfang genommen werden müssen. Wollen wir die magnetischen Kräfte der gesammten Strömung als die Summen der Wirkungen der einzelnen Stromelemente ansehen, so giebt eine ihren Resultaten nach zulässige Zerlegung unserer Integrale für die Wirkung des Stromelementes idx auf den Punkt $x'\,y'\,z'$, wenn wir zur Vereinfachung der Formeln das Element in den Nullpunkt und den Punkt $x'\,y'\,z'$ in die xy Ebene bringen:

$$L = 0,\ M = 0,\ N = Aidx \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} = -\frac{Aidx}{r^2} \cdot \frac{y'}{r},$$

welche Formeln der Ampèreschen Regel und dem Biot-Savart'schen Gesetz Ausdruck verleihen.

Die gefundenen Werthe der Kräfte müssen zufolge der Gleichungen 15b überall da, wo die u, v, w verschwinden, also überall außerhalb der durchströmten Leiter ein Potential ψ besitzen, dessen negativen Differentialquotienten wir sie gleich setzen können. Rühren die Kräfte nur her von einer einzigen geschlossenen linearen Strombahn, so kann dies Potential dargestellt werden in der Form

$$\psi = -Ai \int \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\omega + \text{constans} \qquad 16\text{b}.$$

worin $d\omega$ das Element einer beliebigen durch die Strombahn gelegten Fläche, n die Normale dieser Fläche bedeutet und die Integration über den ganzen von der Strombahn begrenzten Bereich der Fläche zu erstrecken ist. Als positiv ist dabei diejenige Seite der Fläche gerechnet, von welcher aus gesehen der positiv gerechnete Strom im Sinne der Drehung des Uhrzeigers fließt. Durch bekannte Integraltransformationen werden nämlich die negativen Differentialquotienten des angegebenen Ausdrucks überall in die für L, M, N gefundenen Formen gebracht, diese Differentialquotienten sind also überall außer in der Strombahn selbst endlich und stätig, und wenn auch das in ψ enthaltene Integral an der Fläche ω unstätig wird, so kann dem ganzen ψ nichtsdestoweniger die erforderliche Stätigkeit verliehen werden, indem wir die darin enthaltene Constante als unendlich vieldeutig betrachten und jedesmal einen um $4\pi Ai$ geänderten Werth derselben benutzen, sobald wir die Fläche ω durchschreiten. Das Potential wird dadurch selbst unendlich vieldeutig und ändert sich um $4\pi Ai$, sobald wir nach einmaliger Umkreisung der Strombahn zum Ausgangspunkte zurückkehren.

Dem Integralausdruck, welcher in ψ vorkommt. können verschiedene Deutungen untergelegt werden. Er kann zunächst betrachtet werden als das Potential einer magnetischen Doppelschicht. Durch Verfolg dieser Auffassung gelangen wir zu der Ampèreschen Theorie des Magnetismus. Es kann andererseits mit Gauss der Werth jenes Integrals in einem bestimmten Punkte gedeutet werden als der sphärische Winkel, unter welchem von dem Punkte aus gesehen die Strombahn erscheint. Von hieraus ergiebt uns ein leichter Uebergang die Richtigkeit der Aussage: es stelle jenes Integral für einen Punkt die Zahl der Kraftlinien dar, welche ein in dem Punkte aufgestellter Einheitspol durch die Strombahn sendet. Das ganze Potential einschließlich seiner Vieldeutigkeit kann hieran anknüpfend gedeutet werden durch die Aussage: es sei die Differenz seiner Werthe in zwei Punkten gleich der mit Ai multiplicirten Zahl der Kraftlinien, welche in bestimmter Richtung die Strombahn durchschneiden, wenn ein Einheitspol auf beliebigem Wege aus dem einen Punkt in der andern übergeführt wird.

Die letztgenannte Deutung ist von unserm Standpunkte aus die angemessenste, auch erlaubt sie uns unter Berufung auf die Lehren der Abschnitte 12 und 14 die folgenden Schlüsse an einander zu reihen. Erstens: Die mechanische Arbeit, welche geleistet werden muß, um einen Magnetpol oder auch ein System unveränderlicher Magnetismen in der Nähe eines constant gehaltenen linearen Stromes zu verschieben, ist gleich der Zahl der Kraftlinien des Magnetpoles oder des magnetischen Systemes, welche bei der Bewegung die Strombahn in bestimmter Richtung durchschneiden, multiplicirt mit der Stromstärke und der Constanten A. Zweitens: Die mechanische Arbeit, welche geleistet werden muß, um einen constant gehaltenen Strom in einem beliebigen magnetischen Felde zu verschieben, ist gleich der Zahl der Kraftlinien, welche bei der Verschiebung von der Strombahn durchschnitten werden, multiplicirt mit der Stärke des Stromes und der Constanten A. Endlich also im Besonderen: Die mechanische Arbeit, welche geleistet werden muß, um einen constant gehaltenen Strom 1 in der Nähe eines constant gehaltenen Stromes 2 zu verschieben, ist gleich der Zahl der magnetischen Kraftlinien der Strombahn 2, welche von der Strombahn 1 bei der Bewegung durchschnitten werden, multiplicirt mit der Stromstärke in 1 und der Constanten A. Mit dem gleichen Rechte ist diese Arbeit auch gleich der Zahl der Kraftlinien des Stromes 1, welche bei der Verschiebung die Strombahn 2 durchschneiden, multiplicirt mit der Stromstärke in 2 und der Constanten A. Beide Aussagen führen zu dem gleichen Resultat; wir beweisen dies, indem wir das Produkt aus der Intensität der einen Strombahn und der Zahl der sie durchsetzenden Kraftlinien der andern Strombahn durch einen in Hinsicht beider symmetrischen Ausdruck darstellen. Beziehen sich nämlich die Bezeichnungen i, ds, auf die Strombahn 1, i', ds', U', V', W', L', M', N' auf die Strombahn 2, so ist die mit Ai multiplicirte Zahl der Kraftlinien von 2, welche 1 durchsetzen gleich:

$$Ai\int (L' \cos n, x + M' \cos n, y + N' \cos n, z)\, d\omega$$

$$= A^2 i \int \left\{ \left(\frac{dV'}{dz} - \frac{dW'}{dy}\right) \cos n, x + \left(\frac{dW'}{dx} - \frac{dU'}{dz}\right) \cos n, y + \left(\frac{dU'}{dy} - \frac{dV'}{dx}\right) \cos n, z \right\} d\omega$$

$$= -A^2 i \int (U' \cos s, x + V' \cos s, y + W' \cos s, z)\, ds$$

$$= -A^2 i i' \int\int \frac{\cos s, x \cos s', x + \cos s, y \cos s', y + \cos s, z \cos s', z}{r}\, ds\, ds'$$

$$= -A^2 i i' \int\int \frac{\cos \varepsilon}{r}\, ds\, ds',$$

worin ε den Winkel bezeichnet, welchen die beiden Stromelemente im Raum mit einander bilden. Der erlangte Ausdruck ist symmetrisch in Bezug auf beide Strombahnen. Man weiß, daß in der That die Aenderungen dieses Ausdrucks, des mit $A^2 i i'$ multiplicirten Neumannschen Potentiales der einen Strombahn auf die andre die zur gegenseitigen Verschiebung geschlossener Ströme erforderliche Arbeit und daraus die zwischen den ruhenden Strömen auftretenden ponderomotorischen Kräfte ergeben. Man weiß auch, daß diese Aussage Alles enthält, was man in Hinsicht der zwischen Strömen auftretenden ponderomotorischen Kräfte mit Sicherheit behaupten kann.

Wir berechnen noch die magnetische Energie eines Raumes, in welchem die stationären Stromkomponenten $u\ v\ w$ und die unveränderlichen magnetischen Dichten m vertheilt sind, unter der beschränkenden Voraussetzung, daß sich magnetisirbare Körper in dem Raume nicht vorfinden. Bezeichnen wir mit ψ das Potential der Magnetismen m, so erhalten wir die Energie successive in den Formen:

$$\frac{1}{8\pi}\int (L^2 + M^2 + N^2)\, d\tau = \qquad 16c.$$

$$= \frac{A}{8\pi}\int\Big\{L\Big(\frac{dV}{dz}-\frac{dW}{dy}-\frac{1}{A}\frac{d\psi}{dx}\Big)+M\Big(\frac{dW}{dx}-\frac{dU}{dz}-\frac{1}{A}\frac{d\psi}{dy}\Big)$$
$$+N\Big(\frac{dU}{dy}-\frac{dV}{dx}-\frac{1}{A}\frac{d\psi}{dz}\Big)\Big\}d\tau$$

$$= \frac{A}{8\pi}\int\Big\{U\Big(\frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy}\Big)+V\Big(\frac{dN}{dx}-\frac{dL}{dz}\Big)+W\Big(\frac{dL}{dy}-\frac{dM}{dx}\Big)\Big\}d\tau$$
$$+\frac{1}{8\pi}\int\psi\Big(\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dz}\Big)d\tau$$

$$= \tfrac{1}{2}A^2\int(Uu+Vv+Ww)\,d\tau+\tfrac{1}{2}\int\psi m\,d\tau\,,$$

oder in Anwendung auf lineare Ströme

$$= \tfrac{1}{2}A^2\int\int\frac{ii'\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds'+\tfrac{1}{2}\int\psi m\,d\tau\,,$$

wobei in dem ersten Theil der letzten Form die Integration sowohl nach ds als nach ds' über alle vorhandenen Ströme auszudehnen ist. Es erhellt aus dieser letzten Form, daß die Verschiebung unveränderlicher Magnete und unveränderlicher Ströme gegeneinander die magnetische Energie des Raumes nicht verändert. Es findet daher auch die mechanische Arbeit, welche bei solcher Verschiebung verbraucht wird, nicht in der Aenderung der magnetischen Energie des Raumes ihre Compensation, wie es bei der Verschiebung unveränderlicher Magnete gegen einander der Fall ist, sondern es muß von dem Verbleib der aufgewandten Arbeitsmenge anderweitig Rechenschaft abgelegt werden. Es erhellt ferner aus der gleichen Form, daß die Verschiebung constant gehaltener Ströme gegen einander allerdings eine Aenderung der Energie des Raumes bedingt, welche dem absoluten Werth nach der aufgewandten mechanischen Arbeit gleich ist. Aber die Berücksichtigung der Vorzeichen ergiebt, daß diese Aenderung nicht in solchem Sinne erfolgt, daß dieselbe als Compensation der verlorenen mechanischen Energie könnte angesehen werden, sondern in entgegengesetztem Sinne. Es ist also in diesem Falle noch Rechenschaft abzulegen über den Verbleib des Doppelten der Arbeitsmenge, welche die mechanischen Kräfte bei der relativen Verschiebung der Strombahnen leisten. Diese Rechenschaft wird am Ende des folgenden Abschnittes abgelegt werden.

Dynamische Erscheinungen.

Aus der unendlichen Mannigfaltigkeit der möglichen Formen des veränderlichen Zustandes sind bisher verhältnißmäßig wenige Gruppen von Erscheinungen der Beobachtung entgegengetreten. Wir führen diese Gruppen auf, ohne das Gebiet durch eine systematische Eintheilung damit erschöpfen zu wollen.

17. Induction in geschlossenen Bahnen.

In einem sich verändernden magnetischen Felde müssen zufolge der Gleichungen 9a nothwendiger Weise elektrische Kräfte verbreitet sein. Diese Kräfte sind im Allgemeinen sehr schwach, weil ihre Werthe den sehr kleinen Faktor A enthalten, sie sind aus diesem Grunde der Wahrnehmung nur zugänglich durch den Strom, welchen sie in geschlossenen Leitungsbahnen erregen oder dadurch, daß sich ihre Wirkung in sehr langen, bis auf einen kleinen Bruchtheil ihrer Länge geschlossenen linearen Bahnen addirt. Die in den Versuchen meßbar werdenden Wirkungen geben uns daher stets nur die Integralwirkung der elektrischen Kraft in einer geschlossenen Bahn, also das Integral $\int(X dx + Y dy + Z dz)$ genommen über eine in sich zurücklaufende Linie. Nach einer schon benutzten bekannten Integraltransformation ist dies Linienintegral gleich dem Flächenintegral

$$\int\left\{\left(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right)\cos n,x+\left(\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}\right)\cos n,y+\left(\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}\right)\cos n,z\right\}d\omega$$

genommen über eine von der fraglichen Linie rings begrenzte, übrigens aber beliebige Fläche ω. Unter Benutzung der Gleichungen 9a wird aber dieser Ausdruck gleich

$$A\frac{d}{dt}\int(\mathfrak{L}\cos n,x+\mathfrak{M}\cos n,y+\mathfrak{N}\cos n,z)\,d\omega\,.$$

In Worten ausgedrückt ist demnach die in einer geschlossenen Strombahn sich zeigende elektromotorische Kraft gleich der mit A multiplicirten Aenderung der Anzahl der die Strombahn durchsetzenden magnetischen Kraftlinien, berechnet auf die Zeiteinheit. Rührt insbesondere die Induction her von einem geschlossenen veränderlichen Strome, und ist die Nachbarschaft magnetisirbarer Körper ausgeschlossen, so ist die erregte elektromotorische Kraft nach den Ergebnissen des vorigen Abschnittes gleich dem mit A^2 multiplicirten Produkt des Neumannschen Potentials der beiden Strombahnen auf einander und der auf die Zeiteinheit berechneten Aenderung der Intensität des inducirenden Stromes. Diese Sätze, von welchen der erstere der allgemeinere ist, umfassen in ihren Folgerungen vollständig die thatsächlich beobachteten Erscheinungen in ruhenden Leitern.

Die Induction in bewegten Leitern liegt im Grunde außerhalb des Gebietes auf welches sich die gegenwärtige Untersuchung beschränkt. Handelt es sich aber um lineare Leiter, so können wir diese Form der Induction an die Induction in ruhenden Leitern anschließen durch die Aussage, daß es für die elektromotorische Kraft in einer geschlossenen Bahn gleichgültig sei, ob das unmittelbar umgebende magnetische Feld sich ändert in Folge von Bewegung ponderabeler Körper oder in Folge rein elektromagnetischer Zustandsänderungen, dafern nur die Aenderung des unmittelbar umgebenden magnetischen Feldes die gleiche sei. Zufolge dieser Aussage und des Vorangegangenen ist die in einer bewegten Stromleitung inducirte elektrische Kraft gleich der mit A multiplicirten Zahl der magnetischen Kraftlinien, welche in der Zeiteinheit von der Strombahn in bestimmter Richtung durchschnitten werden. Das Produkt aus dieser elektrischen Kraft und der Intensität des Stromes in der bewegten Strombahn giebt nach Abschnitt 11 die in der Strombahn vermittelst der Induction erzeugte thermische oder chemische Arbeit an. Dieselbe ist demnach zufolge der Ergebnisse des vorigen Abschnittes, ergänzt durch eine genaue Berücksichtigung der Vorzeichen gleich der mechanischen Arbeit, welche die den Stromkreis bewegenden äußeren Kräfte leisten müssen. Wird also ein constant gehaltener Strom bewegt gegen feste Magnete, so compensirt die in dem Stromkreis erzeugte thermische und chemische Energie die geleistete mechanische Arbeit, während die magnetische Energie des Systems unberührt bleibt. Wird dagegen ein constant gehaltener Strom bewegt gegen einen anderen constant gehaltenen Strom, so compensirt die in dem einen Stromkreise in Folge der Bewegung mehrauftretende chemische und thermische Energie die geleistete mechanische Arbeit; die gleiche in dem andern Stromkreise in Folge der Bewegung mehrauftretende Energie compensirt die Verminderung der magnetischen Energie des Feldes. Oder genauer gesprochen, es compensirt die Summe der erstgenannten Energiemengen die Summe der letztgenannten. Die am Schlusse des Abschnittes 16 geforderte Rechenschaft ist damit abgelegt.

18. Elektrodynamik ungeschlossener Ströme.

In Hinsicht der möglichen Erfahrung ist dieses Gebiet das reichste von allen, denn es umfaßt alle diejenigen Probleme, welche wir nicht als besondere Fälle anderen Gebieten zutheilen können. In Hinsicht der wirklichen Erfahrung ist es indessen bislang sehr arm. Die Schwingungen ungeschlossener Inductionsapparate oder sich entladender Leydener Flaschen können in hinreichender Annäherung nach den Grundsätzen des vorigen Abschnittes behandelt werden und im eigentlichen Verstande gehören demnach hierher bislang nur die elektrischen Wellen und Schwingungen von kurzer Wellenlänge, welche erst kürzlich die Aufmerksamkeit auf sich gezogen haben. Für die theoretische Behandlung dieses Abschnittes genüge es daher hervorzuheben, daß eine Eintheilung der elektrischen Kraft in einen elektrostatischen und einen elektrodynamischen Theil in diesen allgemeinen Problemen weder eine klar zu fassende physikalische Bedeutung noch einen nennenswerthen mathematischen Nutzen mit sich führt, daher von uns im Gegensatz zu früheren Behandlungsweisen zweckmäßig vermieden wird.

19. Lichtbewegung in isotropen Körpern.

In das Gebiet der Optik verweisen wir diejenigen elektrodynamischen Bewegungen, welche der Zeit nach rein periodisch sind und deren Periode einen sehr kleinen Bruchtheil der Secunde, sagen wir den billionten Theil derselben nicht überschreitet. Keines der Mittel, durch welches wir befähigt sind, solche Bewegungen wahrzunehmen, gestattet uns die magnetischen und elektrischen Kräfte als solche zu erkennen; was wir wahrzunehmen vermögen sind lediglich die geometrischen Verhältnisse nach welchen sich die vorhandene Bewegung in verschiedener Richtung mit verschiedener Intensität fortpflanzt. Auch die mathematische Darstellung der Erscheinungen wird sich daher darauf beschränken dürfen, nach Elimination der entgegengesetzten Art die Ausbreitung einer der beiden Kraftarten zu verfolgen, und es wird gleichgültig sein, an welche von beiden Arten dabei die Betrachtung anknüpft. Beschränken wir uns auf homogene isotrope Nichtleiter, so erhalten wir aus den Gleichungen 4a. und 4b. durch Elimination, das eine Mal der elektrischen, das andere Mal der magnetischen Kraftcomponenten die hier zu benutzen Formen

$$\text{19a.}\quad \begin{aligned} A^2\varepsilon\mu\frac{d^2L}{dt^2} &= \varDelta L \\ A^2\varepsilon\mu\frac{d^2M}{dt^2} &= \varDelta M \\ A^2\varepsilon\mu\frac{d^2N}{dt^2} &= \varDelta N \\ \frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dt} &= 0 \end{aligned} \qquad \text{19b.}\quad \begin{aligned} A^2\varepsilon\mu\frac{d^2X}{dt^2} &= \varDelta X \\ A^2\varepsilon\mu\frac{d^2Y}{dt^2} &= \varDelta Y \\ A^2\varepsilon\mu\frac{d^2Z}{dt^2} &= \varDelta Z \\ \frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz} &= 0 \end{aligned}$$

deren Lösungen, rein periodische Bewegungen vorausgesetzt, stets auch Lösungen der Gleichungen 4a. und 4b. sind. Jedes der beiden Gleichungssysteme 19a. und 19b. läßt die Möglichkeit von Transversalwellen, die Unmöglichkeit von Longitudinalwellen erkennen; jedes der beiden Systeme ergiebt für die Geschwindigkeit der möglichen Wellen den Werth $\frac{1}{A\sqrt{\varepsilon\mu}}$, aus jedem der beiden Systeme lassen sich die Erscheinungen der geradlinigen Ausbreitung, der Beugung, der Interferenz des natürlichen und des polarisirten Lichtes ableiten und die verschiedenen Arten der Polarisation verstehen. Ein Zurückgreifen auf die Gleichungen 4a. und 4b. ergiebt dabei, daß die Richtungen der gleichzeitigen elektrischen und magnetischen Kraft in einem jeden Punkte einer ebenen Welle beständig auf einander senkrecht stehen.

Lassen wir die Grenzebene zweier isotropen, homogenen Nichtleiter mit der xy-Ebene zusammenfallen, so gelten an dieser Grenzebene zufolge des Abschnittes 8 und unter Berücksichtigung des Umstandes, daß wir es nur mit periodischen Bewegungen zu thun haben, die Bedingungen:

$$\text{19c.}\quad \begin{aligned} L_1 &= L_2 \\ M_1 &= M_2 \\ \mu_1 N_1 &= \mu_2 N_2 \end{aligned} \qquad \text{19d.}\quad \begin{aligned} X_1 &= X_2 \\ Y_1 &= Y_2 \\ \varepsilon_1 Z_1 &= \varepsilon_2 Z_2 \end{aligned}$$

Jedes dieser Systeme von Grenzgleichungen ergiebt zusammen mit den zugehörigen Gleichungen für das Innere beider Körper die Gesetze der Reflexion, der Brechung, der totalen Reflexion, also die Grundlagen der geometrischen Optik. Jedes derselben läßt auch erkennen, daß die Intensität reflectirter und gebrochener Wellen von der Art ihrer Polarisation abhängig ist und ergiebt für diese Abhängigkeit sowie für die Phasenverzögerung der total reflectirten Wellen die Fresnel'schen Formeln. Leiten wir diese Formeln aus den Gleichungen der elektrischen Kräfte 19b. und 19d. her, so entspricht unsere Entwickelung der von Fresnel selbst gegebenen Ableitung dieser Formeln. Halten wir uns an die Gleichungen der magnetischen Kraft 19a. und 19c., so nähern wir uns dem von F. Neumann zur Ableitung der Fresnel'schen Gleichungen angegebenen Pfade. Von unserem allgemeineren Standpunkte aus läßt sich nicht allein von vorn herein überblicken, daß beide Wege zum gleichen Ziele führen müssen, sondern auch erkennen, daß beide mit gleicher Berechtigung beschritten werden können. Daß in den wirklich beobachteten Erscheinungen der Reflexion die elektrischen und magnetischen Kräfte nicht völlig mit einander vertauschbar sind und beide Wege verschieden erscheinen, hat seinen Grund in dem Umstande, daß für alle in Betracht kommenden Körper die Magnetisirungsconstanten fast gleich und gleich Eins sind, während die Dielektricitätsconstanten merklich verschieden sind und daß also hauptsächlich die elektrischen Eigenschaften der Körper deren optisches Verhalten bestimmen.

Bildet die xy-Ebene die Grenze unseres Nichtleiters gegen einen vollkommenen Leiter, so gelten in dieser Ebene die Gleichungen

$$19\text{e.}\quad N = 0 \qquad 19\text{f.}\quad \begin{matrix} X = 0 \\ Y = 0. \end{matrix}$$

Dieselben lassen zusammen mit den zugehörigen Gleichungen für das Innere des Nichtleiters erkennen, daß bei jedem Einfallswinkel und jedem Azimuth der Polarisation die Reflexion eine totale ist. Da die wirklichen Leiter zwischen den vollkommenen Leitern und den Nichtleitern die Mitte halten, so wird die Reflexion an ihnen einen Uebergang bilden zwischen der totalen Reflexion und der Reflexion an durchsichtigen Körpern. Da die Metallreflexion eine derartige Stellung einnimmt, so läßt sich übersehen, daß unsere Gleichungen geeignet sein werden, ein allgemeines Bild auch der Metallreflexion zu geben. Wie weit in die Einzelheiten hinein aber die Wiedergabe durch passende Wahl der Constanten sich erstrecken läßt, scheint bisher noch nicht genügend untersucht zu sein.

Daß die Erscheinungen der Dispersion die Einführung mindestens zweier elektrischen oder zweier magnetischen Größen erfordern und deshalb außerhalb des Bereichs unserer gegenwärtigen Theorie liegen, ist schon im ersten Abschnitt erwähnt worden.

20. Krystalloptik.

Wir beschränken unsere Betrachtung auf die Lichtbewegung im Innern eines homogenen vollkommen durchsichtigen Krystalles, von welchem wir des Weiteren voraussetzen, daß die Symmetrieaxen der elektrischen und der magnetischen Energie zusammenfallen. Legen wir die Coordinatenaxen diesen gemeinschaftlichen Symmetrieaxen parallel und setzen der Einfachheit halber für

$$\varepsilon_{11},\ \varepsilon_{22},\ \varepsilon_{33},\ \mu_{11},\ \mu_{22},\ \mu_{33} \quad \text{jetzt} \quad \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3$$

so nehmen die in Betracht kommenden Gleichungen 5a. und 5b. die Form an:

$$\text{20a.}\quad \begin{aligned} A\mu_1 \frac{dL}{dt} &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \\ A\mu_2 \frac{dM}{dt} &= \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \\ A\mu_3 \frac{dN}{dt} &= \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \end{aligned} \qquad \text{20b.}\quad \begin{aligned} A\varepsilon_1 \frac{dX}{dt} &= \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} \\ A\varepsilon_2 \frac{dY}{dt} &= \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} \\ A\varepsilon_3 \frac{dZ}{dt} &= \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen werden integrirt durch die Annahme ebener Wellen geradlinig polarisirten Lichtes, welche den folgenden Aussagen entsprechen: Auf der elektrischen Polarisation steht die magnetische Kraft, auf der magnetischen Polarisation die elektrische Kraft senkrecht. Die Richtung der beiden Kräfte tritt im Allgemeinen aus der Wellenebene heraus, die Richtung der beiden Polarisationen liegt in der Wellenebene. Die Richtung, welche auf den beiden Polarisationen senkrecht steht, ist also die Wellennormale; die Richtung, welche auf den beiden Kräften senkrecht steht, ist die Richtung, in welcher sich zufolge Abschnitt 11 die Energie fortpflanzt, sie heißt in der Optik der Strahl. Jeder gegebenen Lage der Wellennormale entsprechen im Allgemeinen zwei mögliche Wellen von verschiedener Polarisation, verschiedener Geschwindigkeit und verschiedener Lage des zugehörigen Strahles. Lassen wir in einem bestimmten Augenblicke vom Nullpunkt des Coordinatensystems ebene Wellen mit allen möglichen Lagen der Wellennormale ausgehen, so umhüllen diese Wellenebenen nach der Zeiteinheit eine Fläche, die sogenannte Wellenfläche. Jede einzelne Wellenebene berührt die Wellenfläche in einem Punkte des durch den Nullpunkt gelegten zugehörigen Strahles. Als Gleichung der von den Wellenebenen umhüllten Fläche wird gefunden:

$$\text{20c.}\quad \begin{aligned}&\left(\frac{x^2}{\varepsilon_1}+\frac{y^2}{\varepsilon_2}+\frac{z^2}{\varepsilon_3}\right)\left(\frac{x^2}{\mu_1}+\frac{y^2}{\mu_2}+\frac{z^2}{\mu_3}\right)-\frac{x^2}{\varepsilon_1\mu_1}\left(\frac{1}{\varepsilon_2\mu_3}+\frac{1}{\varepsilon_3\mu_2}\right)\\ &-\frac{y^2}{\varepsilon_2\mu_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1\mu_3}+\frac{1}{\varepsilon_3\mu_1}\right)-\frac{z^2}{\varepsilon_3\mu_3}\left(\frac{1}{\varepsilon_1\mu_2}+\frac{1}{\varepsilon_2\mu_1}\right)+\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\mu_1\mu_2\mu_3}=0.\end{aligned}$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Fläche vierten Grades schneidet die Coordinatenebenen in je zwei Ellipsen. In einer der Coordinatenebenen schneiden sich die beiden Ellipsen in vier Punkten, welches vier Nabelpunkte der Fläche sind; in den beiden andern Coordinatenebenen umschließt die eine Ellipse die andere, und zwar gelten diese Aussagen, welches auch die Werthe der ε und μ sind. Für alle wirklichen Krystalle ist mit sehr großer Annäherung $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$; für diesen Fall reduzirt sich die allgemeine Form der Gleichung auf die der Fresnel'schen Wellenfläche und von den beiden Ellipsen, in welchen die Fläche jede der Coordinatenebenen schneidet, reduzirt sich je eine auf einen Kreis.

Man weiß, daß sich an die Betrachtung der Wellenfläche und ihrer Ausartungen in besonderen Fällen die Erklärung der Doppelbrechung, der Reflexion an Krystallflächen, vieler der in Krystallen beobachteten Interferenzerscheinungen anknüpft. Andere Thatsachen der Krystalloptik lassen sich hinwiederum nicht bewältigen durch den Verfolg einer einzigen elektrischen und einer einzigen magnetischen Richtungsgröße, diese Thatsachen liegen daher außerhalb des Bereiches unserer Theorie in ihrem gegenwärtigen Umfang.

Wir haben in den Nummern 17—20 die Aufzählung derjenigen Fälle des veränderlichen Zustandes erschöpft, deren Wichtigkeit bislang zur Entwickelung besonderer Theorien Veranlassung gegeben hat.

Bonn, im März 1890.

Universität.

Beneke'sche Preisstiftung.

Am 11. März 1890, als dem Geburtstage des Stifters, Carl Gustav Beneke, wurde vorschriftsgemäß in öffentlicher Sitzung der Fakultät das Ergebniß der Preisbewerbung für das Jahr 1890 verkündet.

Die im Jahre 1887 gestellte Aufgabe lautete wie folgt:

Zenonis, Cleanthis, Chrysippi stoicorum principum et discipulorum quae supersunt reliquiae ad res ethicas politicas divinas spectantes colligantur et pertractentur ita, ut libri cujusque quantum quidem fieri possit et argumentum illustretur et vestigia apud posteriores scriptores latentia indagentur.

Es sind zwei Bewerbungsschriften rechtzeitig eingegangen, über welche das Urtheil der Fakultät folgendermaßen lautet:

Die erste Bewerbungsschrift, mit dem Motto:

Μέτρον τοῦ βίου τὸ καλόν

behandelt Zenon, Kleanthes, Ariston, Chrysippos. Sie kann aber nur für Zenon und allenfalls Ariston als vollendet gelten. Kleanthes und Mehreres von Chrysippos ist so gut wie eine bloße Reproduction älterer Arbeiten, anderes giebt nur wenig obenhin zusammengerafftes Material. Nur Chrysippos *περὶ παθῶν* ist noch sorgfältiger behandelt.

Der Verfasser ist auf die Textkritik der Bruchstücke und die literärgeschichtliche Forschung über die einzelnen Schriften und Schriftsteller fast gar nicht eingegangen, und auch die Analyse der Hauptautoren, denen die Bruchstücke entnommen sind, ist kaum gefördert. Der Verfasser hat vielmehr seiner eigenen Angabe nach nur einen sehr engen Kreis der einschläglichen Literatur selbst durchforscht. Sein Interesse ist fast ausschließlich dem Erfassen der Lehrmeinungen der Stoa zugewandt, jedoch auch nach dieser Seite treten bedeutende und gesicherte Ergebnisse nicht hervor. Der Preis kann ihm also nicht zuerkannt werden.

Die zweite Arbeit trägt das Motto:

Ἐν οἰκίαις μείζοσι παραπίπτει τινὰ πίτυρα καὶ ποσοὶ πυροὶ τινές.

Sie hat sich auf die Sammlung der Bruchstücke des Chrysippos beschränkt, von welchem sie allerdings alle Schriften, nicht bloß die in dem Thema bezeichneten, heranzieht.

Beigegeben ist eine Reihe von umfassenden und eindringenden Untersuchungen, vornehmlich über das Verhältniß der Quellenschriftsteller zu einander und zu den verlorenen Schriften.

Die Sammlung der Fragmente giebt die ausgeschriebenen Stellen nur mit kritischem Apparate versehen ohne jede Erklärung und nur durch die gewählte Anordnung verbunden. Die Bearbeitung ist also unvollendet. Das Fortlassen von Zenon und Kleanthes begründet der Verfasser damit, daß er nicht hätte reproduciren wollen und eine Vermehrung der Bruchstücke über das bisher gesammelte hinaus nicht zu leisten wäre.

Die Fakultät kann diese Ansicht nicht theilen, sie würde es vielmehr lebhaft bedauern, wenn der Verfasser bei der Veröffentlichung seines Werkes die Reste der älteren Stoa ausschließen wollte, ja es dürfte angezeigt sein, noch die nächsten Anhänger des Chrysippos bis auf Antipatros zuzuziehen. Indessen unter der Voraussetzung, welche sich der Verfasser von der singulären Bedeutung des Chrysippos gebildet hat, und angesichts der Masse antiker Literatur, welche er mit Recht zu durchforschen unternommen hat, steht die Fakultät nicht an, diese Einschränkung des Themas als praktisch zulässig gelten zu lassen und somit seine Chrysippea als den Versuch einer Lösung der gestellten Aufgabe anzusehen.

So unfertig hiernach die Fragmentsammlung auch noch erscheint, so ist doch des werthvollsten neuen Materials soviel erschlossen und ist in den Forschungen über die Quellenschriftsteller so viel theils festgestellt, theils mit Scharfsinn und Umsicht vermuthet, daß das Werk in seiner Vollendung eine bedeutende Förderung der Wissenschaft sowohl nach philologischer wie nach philosophischer Seite verspricht, und die Fakultät trägt deßhalb kein Bedenken, dem Verfasser den ersten Preis zuzuerkennen.

Die Eröffnung des mit dem Motto:

'Εν οἰκίαις μείζοσι παραπίπτει τινὰ πίτυρα καὶ ποσοὶ πυροὶ τινές

versehenen Briefes ergab als Verfasser Herrn

Dr. phil. Hans von Arnim Fredenwalde zu Halle a./Saale.

Für das Jahr 1893 stellt die philosophische Fakultät folgende neue

Beneke'sche philosophische Preisaufgabe:

Die Bahnbewegung des in mehrfacher Beziehung so sehr interessanten Biela'schen Kometen hat im Jahre 1861 durch Hubbard insofern eine ausgezeichnete Bearbeitung gefunden, als dieser Astronom die Beobachtungen der beiden Componenten des Kometen während der Erscheinungen in den Jahren 1845/46 und 1852 mit Berücksichtigung der inzwischen durch die großen Planeten verursachten Störungen mit einander in Verbindung gebracht und daraus Elementensysteme hergeleitet hat, welche den Vorausberechnungen für die freilich erfolglosen Nachforschungen während der zu erwartenden Wiedererscheinungen als Grundlage gedient haben.

Die philosophische Fakultät stellt nun die Aufgabe, daß eine strenge, nach einheitlichen Grundsätzen und mit Benutzung der neusten und besten Hülfsmittel in Bezug auf die Oerter der Vergleichsterne und die angewandten Sonnen- und Planeten-Tafeln sowie die Planetenmassen ausgeführte Untersuchung mit Berücksichtigung aller in Betracht kommenden Störungen auch über die vorhergegangenen Erscheinungen in den Jahren 1832, 1826, 1805/6 bis zu 1772 zurück ausgeführt werde und daß diese Untersuchung, wenn auch der Komet nach 1852 nicht wieder aufgefunden worden ist, mit Innehaltung der dazu erforderlichen Genauigkeitsgrenzen in der Rechnung und mit Rücksicht auf die fernerhin erfolgten größeren Störungen bis zum Jahre 1872 ausgedehnt werde, um neue Aufschlüsse über die noch nicht aufgeklärte Beziehung dieses Kometen zu dem nach Klinkerfues' Anzeige von Pogson aufgefundenen kometenartigen Object zu erhalten. Es wird dabei Gewicht darauf gelegt, daß die Störungswerthe in der einzureichenden Abhandlung nicht nur in ihrer Gesammtwirkung von einer Erscheinung zur andern, sondern wenigstens für die hauptsächlich in Betracht kommenden Planeten Erde und Jupiter in den Endresultaten in geeigneten Abständen für den ganzen Zeitraum mitgetheilt werden, um zu Zeiten der wiederholten großen Annäherungen des Kometen die Wirkungen einzeln erkennen zu können; ferner dürfte noch die Frage zu erörtern sein, ob die von Winnecke besprochenen Anzeichen einer schon im Jahre 1805 angedeuteten Duplicität des Kometen (siehe Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft Jahrgang 15) bei der gesonderten Behandlung der Bewegung der beiden Componenten eine Bestätigung finden.

Es wird hierbei daran erinnert, daß nach statutarischer Bestimmung bei der Stellung und der Bearbeitung der Beneke'schen Aufgaben das Gebiet der sogenannten speculativen Philosophie zu vermeiden ist.

Bewerbungsschriften sind entweder in deutscher oder in lateinischer oder in französischer oder in englischer Sprache, auf dem Titelblatte mit einem Spruche versehen, bis zum 31. August 1892 an uns einzusenden. Der Bewerbungsschrift ist ein versiegelter Brief beizugeben, welcher auf der Außenseite mit dem Spruche der Abhandlung bezeichnet ist und innerhalb Namen, Stand und Wohnort des Verfassers angiebt. In anderer Weise darf der Name des Verfassers nicht angegeben sein.

Auf dem Titelblatte der Arbeit muß ferner die Adresse bezeichnet sein, an welche die Arbeit für den Fall, daß sie nicht preiswürdig befunden wird, zurückzusenden ist.

Der erste Preis beträgt 1700 Mark, der zweite 680 Mark.

Die etwaige Zuerkennung dieser Preise erfolgt am 11. März 1893, dem Geburtstage des Stifters, in öffentlicher Sitzung der philosophischen Fakultät zu Göttingen.

Die gekrönten Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigenthum der Verfasser.

Die Preisaufgaben, für welche die Bewerbungsschriften bis zum 31. August 1890 und bis zum 31. August 1891 einzusenden sind, finden sich in den Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen im Jahrgange 1888 auf Seite 132 und im Jahrgange 1889 auf Seite 345.

Göttingen, den 1. April 1890.

Die philosophische Fakultät
der Dekan.
C. A. Volquardsen.

Preisstiftung
der Witwe Petsche geb. Labarre.

Gemäß den Statuten der genannten unterm 10. März 1873 genehmigten Stiftung schreibt die juristische Facultät folgende Preisaufgabe aus:

„Der Zwangsvergleich, seine geschichtliche Entwicklung und heutige Gestalt.“

Der Preis „250 Mk. Zweihundertfünfzig Mark“ kann nur einer solchen Arbeit zuerkannt werden, deren Verfasser in diesem oder dem folgenden Semester als Studierender unserer Universität angehört. Die Preisarbeiten müssen spätestens am 1. Januar 1891 dem Dekan der juristischen Fakultät übergeben werden, ohne Namensunterschrift, jedoch mit einem versiegelten den Namen des Verfassers enthaltenden Zettel. Arbeit und Zettel müssen ein gleichlautendes Motto tragen.

Göttingen, den 26. April 1890.

F. Regelsberger
z. Z. Dekan der juristischen Fakultät.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Februar 1890.

Sitzungsberichte der K. Preuss. Akademie der Wissensch. zu Berlin. III, IV, V, VI, VII, VIII, IX.
Preisschriften gekrönt u. herausgeg. von der Fürstlich Iablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig. N. X. Der mathematisch-naturwissensch. Section. XXVII. A. Looss. Leipzig 1889.
Deutsches meteorologisches Lehrbuch für 1888. Beobachtungssystem des Königr. Sachsen. 1. Hälfte. Abth. 1 u. 2 des Jahrbuches d. K. Sächsischen meteorologischen Instituts. VI. Jahrg. 1888. Chemnitz 1889.
Neues Lausitzisches Magazin. Band 65. Heft 2. Görlitz 1889.
Leopoldina. Heft XXVI. Nr. 1—2. Jan. 1890. Halle a. S.
Jahresbericht u. Abhandlungen des naturwissensch. Vereins in Magdeburg. 1888. Magdeburg 1889.
Eine Wächterstimme für die Gemeinde des wahren Christenthums. Febr. 1890. Heft 2. Jahrg. 2. 1890. Haydau b. Altmorschen.
Nature. Vol. 41. Nr. 1058—1060.
Proceedings of the Royal society. Vol. XLVI. Nr. 285, 286.
Proceedings of the London mathematical society. N. 364—367.
Monthly notices of the R. astronomical society. Vol. L. Nr. 3. Jan. 1890.
Journal of the R. microscopical society 1889. Part 6a. Supplementary number. December 1890. Part. 1.
Reports from the laboratory of the R. college of physicians, Edinburgh. Vol. II. Edinburgh and London 1890.
Proceedings of the Canadian Institute Toronto. Third series. Vol. VII. Fasc. Nr. 1. Whole N. Vol. XXV. Nr. 152. Toronto.
A bibliography of Indian geology: published by order of h. Ex. the Governor General of India in Council. Preliminary issue. Calcutta 1888.
Corpus inscriptionum Indicarum. Vol. III. By John Faithfull Fleet. Calcutta 1888.
Mémoires de l'academie Imp. des sciences de St. Petersbourg. VII. série. Tome XXXVII. N. 3. St. Petersbourg 1889.
Bulletin de l'Académie R. des sciences des lettres et des beaux arts de Belgique. Année 59. 3. série. Tome 18. Nr. 12. Année 60. 3. série. Tome 19. N. 1.
Annales de la faculté des lettres de Bordeaux 1888. N. 2. Paris 1888.
Archives Neerlandaises des sciences exactes et naturelles. Tome XXIV. Livr. 1. Harlem 1890.
Atti della società Toscana di science naturali in Pisa:
a. Memorie. Vol. X.
b. Processi verbali. Vol. VI adunanza del di 7 Juglio 1889.
c. » » Vol. VII » » » 17 Nov. 1889.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

28. Mai. № 5. 1890.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 3. Mai.

Ehlers legt vor: »Beitrag zur Kenntniß der Comatuliden-Fauna des indischen Archipels. Vorläufige Mittheilung von Dr. Clemens Hartlaub.«
Wieseler: Scenische Untersuchungen.
de Lagarde: Exodus 1_{11}.
Riecke: Ueber die Pyroelektricität des Turmalins.
Voigt: Ueber den Zusammenklang zweier einfacher Töne.

Exodus 1_{11}.

Von

Paul de Lagarde.

Der Eigenname רַעְמְסֵס findet sich in der in Palaestina heimischen Gestalt des jüdischen Canons fünf mal.

Der ältere Elohist, der nach meinen Mittheilungen 3 228 etwa um das Jahr 600 vor Christus schrieb, redet in der Genesis 47_{11} von אֶרֶץ רַעְמְסֵס, was man zunächst (vorausgesetzt, daß man die Punctation zu ändern sich entschließt) als die irgendwie mit einem Ramessês in Beziehung stehende Landschaft verstehn wird. Den Namen Ramesses schrieben die Aegypter[1]) mit zwei, Râ und mes zu lesenden, Ideogrammen und darauf folgenden zwei —‖—: mithin

1) Der Kürze halber verweise ich auf EAWallis Budges Catalogue of the Egyptian antiquities des Harrow School Museum (Sir Gardner Wilkinson) 21 § 37.

muß רַעְמֵסֵס gesprochen werden, wenn die Konsonanten רעמסס wirklich jenen Königsnamen wiederzugeben bestimmt sind. 𝔊 meint mit seinem *Ραμεσσῆ* wohl einen Genetiv, der sich zu *Ραμεσσῆς* verhielte, wie *τοῦ Μανασσῆ* zu einem nicht unbelegbaren *ὁ Μανασσῆς* (𝔥s *ռամեսսա* könnte von 𝔭s ܪܥܡܣܣ beeinflußt sein), wie *Μωυσῆ* zu *Μωυσῆς*: nähere Untersuchung muß vorbehalten bleiben.

רַעְמְסֵס ist Exodus 12_{37} wie Numeri 33_3 33_5 der Ort, von welchem der Auszug der in Aegypten utilisierten Israeliten ausgieng.

Exodus 1_{11} bauen die noch in Aegypten weilenden Israeliten dem Pharaon עָרֵי מִסְכְּנוֹת, und zwar אֶת־פִּתֹם וְאֶת־רַעַמְסֵס. Bei 𝔊 der römischen Ausgabe *πόλεις ὀχυράς, τήν τε πειθὼ καὶ ῥαμεσσῆ καὶ ὤν, ἥ ἐστιν ἡλιούπολις.* Seit 1868 ist es unerlaubt, diese Gestalt des Septuagintatextes für die echte zu halten. Denn seit 1868 ist aus Cerianis Monumenta sacra et profana 2 127 [seit 1880 aus meinen Fragmenta quinque 78, demnächst aus meiner B(ibliotheca) S(yriaca) 50_{31}] bekannt, daß die in einer Abschrift des Jahres 697 vorliegende syrische Uebersetzung der Septuaginta das vor *ῥαμεσσῆ* stehende *καὶ* als dem Aquila, Symmachus, Theodotion angehörig, also als eine dem Texte Aegyptens fremde Zuthat bezeichnet. Allerdings ist zu dem ※ ܗ̇ ܠ ܘ↙ܠܪ̈ܥܡܣܣ jenes Syrers zweierlei zu bemerken. Erstens, daß er dem Eigennamen die Form wenigstens halb bewahrt hat, in der er bei 𝔖 vorliegt (ܠܪ̈ܥܡܣܣܝ): das thut der Mann aber in den meisten Fällen sogar ganz. Zweitens, daß ※ܘ↙ܠܪ̈ܥܡܣܣ genau genommen ※*καὶ*↙ *τὴν ῥαμεσσῆ* wiedergibt. Allein das erklärt sich daraus, daß ohne den Zusatz des ܠ der Text unverständlich geworden wäre: ThSRoerdam libri Judicum et Ruth, Vorrede Seite 18 24. Danach hätte der Text 𝔐s zu lauten וְאֶת־פִּתֹם רַעְמְסֵס, das von Ramessês gegründete, im RamessêsLande belegene פתם. Mit Nothwendigkeit folgt, daß es auch noch andere פתם gegeben hat als dieses: was für die Deutung des Namens פתם von Erheblichkeit sein dürfte.

𝔊 hat das RamessesLand auch Genesis 46_{28}. Dort bietet 𝔐 וְאֶת־יְהוּדָה שָׁלַח לְפָנָיו אֶל־יוֹסֵף לְהוֹרֹת לְפָנָיו גֹּשְׁנָה וַיָּבֹאוּ אַרְצָה גֹּשֶׁן, und 𝔊 *τὸν δὲ Ἰούδαν ἀπέστειλεν ἔμπροσθεν αὐτοῦ πρὸς Ἰωσὴφ συναντῆσαι αὐτῷ καθ' Ἡρώων πόλιν εἰς γῆν Ῥαμεσσῆ*, wo in z *καθ' Ἡρώων πόλιν*, in D *εἰς γῆν Ῥαμεσσῆ* fehlt, und die letzten Worte 𝔐s [BS 49_7] von einem Späteren durch ※*καὶ ἦλθεν* [so] *ἐν γῇ Γεσέμ*↙ ergänzt werden.

So viel steht fest, daß גֹּשֶׁן und *γῆ Ῥαμεσσῆ* diesem Uebersetzer, der doch in Aegypten Bescheid wußte, für identisch galten.

𝔨 hat Genesis 46_{28} ⲉ̀ⲑⲣⲉϥⲓ ⲉ̀ⲃⲟⲗ ϧⲁϫⲱϥ ϩⲁ ⲡⲉⲑⲱⲙ ϯⲃⲁⲕⲓ ϧⲉⲛ ⲡⲕⲁϩⲓ ⲛ̀ⲣⲁⲙⲉⲥⲥⲏ, das bedeutet, *Ἡρώων πόλις* ist ihm ⲡⲉⲑⲱⲙ. Der

Unglückliche! sein Werk heißt deshalb bei dem Herrn Akademiker ADillmann, Exodus [2] 7 [1880], »die hier ganz unzuverlässige memphitische Uebersetzung«. Herr Dillmann weiß, daß diese Uebersetzung »῾Ηρώων πόλις, wie sonst auch Etham, durch Pithom wiedergibt«. Zunächst: 𝔣 schreibt Genes. 46_{28} nicht ⲡⲓⲑⲱⲙ, sondern ⲡⲉⲑⲱⲙ, was zu denken gibt. Weiter: אֵתָם kommt nach Brecher 10, Jones 120[1] [Hiller 805, Simonis 458] vier Mal vor: 𝔣 bietet Exod 13_{20} ⲟⲑⲟⲙ (ich setze für die Feigen, die stets nicht lesen können, wann sie nicht verstehn wollen, die griechischen Cursiven daneben) = *οϑομ*, Num 33_6 33_7 ⲃⲟⲩⲑⲁⲛ = *βουϑαν*, und Num 33_8 gar nichts, da dort 𝔊, und also auch seine Töchter, nicht 𝔐s Text haben.

Jenes לְהוֹרֹת לְפָנָיו der Genesis 46_{28} ist von Allen, denen der Glaube in den Knochen liegt »Gottes Wort« müsse, weil »Gottes Wort«, auch verständlich sein, Jahrhunderte hindurch verstanden worden. 𝔊s *συναντῆσαι αὐτῷ* steht oben: wer Tromm befragt, wird an dem Glauben irre werden, daß לְהוֹרֹת לְפָנָיו und *συναντῆσαι αὐτῷ* sich decken. Aquila (*φωτίζειν εἰς τὸ πρόσωπον αὐτοῦ*) und Symmachus (*δηλῶσαι αὐτῷ*) sind sogar ohne Tromm an 𝔊 irre geworden. Herr Dillmann meint, 𝔊 habe לְהֵרָאֹת gefunden: dies hat (wie Dillmann bemerkt) 𝔖 = ܠܡܬܚܙܝܘ ܩܕܡܘܗܝ, und der Samariter = למתחזי לקדמיו. Herr Dillmann hier:

> durch וירא אליו 29 wird diese Lesart gesichert: also: mit dem Auftrag, *dass er* (Jos.) *vor ihm erscheinen*, ihm entgegenkommen *solle nach Goschen.*

und zu 29

und

Ioseph

gab sich ihm

dem Iacob

zu sehen: zeigte sich ihm; ein gewählterer Ausdruck, wie er sich für die Erscheinung eines so hohen Herrn wohl ziemt.

Herr Dillmann hat nicht genau gelesen: וַיֵּרָא אֵלָיו und לְהֵראוֹת לְפָנָיו zeigen verschiedene Construction, haben mithin auch verschiedenen Sinn, und darum ist das von Plüschke aufgestellte Gesetz, das Dillmann zu Genesis [5] 19 in maiorem apologetarum gloriam wohl hätte citieren dürfen (mein Psalterium Hieronymi 163), hier auch nicht einmal in einer Modification anwendbar.

Vater Iacob (so etwa denkt sich Herr Dillmann den Hergang) schickt seiner Durchlaucht dem Reichskanzler (ϫⲉ ⲫⲛⲟⲩϯ ⲉϥⲱⲛϩ) Ioseph die Weisung, vor ihm (in Gala?) zu »erscheinen« — hier ist offenbar Iacob der »hohe Herr« (man las HvKleist) —, und

Ioseph zieht sich zum Wiedersehen mit dem lange entbehrten alten Vater die große Uniform an, und »erscheint« — hier ist abermals Iacob »der hohe Herr«. Isaias 1 12.

נִרְאָה לִפְנֵי und נִרְאָה אֶל und ihren Unterschied zu besprechen, gestattet der beschränkte Raum dieser Blätter nicht.

EKautzsch und ASocin bemerken in ihrer Uebersetzung der Genesis: »Mit להורות ist nichts anzufangen, aber mit dem להראות bei .... ebensowenig«. Sie führen das mit seltenem, und gewis unbekömmlichem Muthe weiter aus.

Herr ADillmann ist in den SBAW 1885 889 ff. noch einmal auf die Angelegenheit zurückgekommen. Daselbst 891:

> Nimmt man dann zu dem bis jetzt Gesagten noch hinzu (Naville [the Store-City of Pithom ... London 1885] p. 6. f.), dass für *καθ᾽ Ἡρώων πόλιν εἰς γῆν Ῥαμεσσῆ*, was die LXX in Gen. 46, 28f. für גֹּשְׁנָה setzen, die Memphitische Uebersetzung ϩⲁⲡⲉⲑⲱⲙ[so] ϯⲃⲁⲕⲓ ϧⲉⲛ ⲡⲕⲁϩⲓ ⲛⲣⲁⲙⲁⲥⲥⲏ, d. h. »bei

Stern § 551.

> Pithom[so] der Stadt im Lande des Ramses« gibt, man also damals noch gewusst zu haben scheint, dass das spätere Hero

bei oder an der Stelle des älteren Pithom gelegen hat, so ......
Erfreulich ist, daß f nicht mehr denunciiert wird, und daß nicht mehr ⲡⲓⲑⲱⲙ, sondern ⲡⲉⲑⲱⲙ erscheint. Aber daß jene sechs griechischen Worte zu nichts da sein sollen als um גֹּשְׁנָה zu übertragen, das will mir nicht einleuchten.

Unter der Regierung der Kaiser Valentinian und Theodosius ereignete sich nach Sozomenus ζ 15 10 (Hussey) Folgendes: *φασὶ τοῦ ναοῦ τούτου τότε καθαιρουμένου, τινὰ τῶν καλουμένων ἱερογλυφικῶν χαρακτήρων, σταυροῦ σημείῳ ἐμφερεῖς ἐγκεχαραγμένοις τοῖς λίθοις ἀναφανῆναι· παρ᾽ ἐπιστημόνων δὲ τὰ τοιάδε ἑρμηνευθεῖσαν σημᾶναι ταύτην τὴν γραφὴν ζωὴν ἐπερχομένην.* Späte *ἐπιστήμονες τὰ τοιάδε* werden sonst verschollene Königsnamen Aegyptens mittelbar an Masqûdî gebracht haben.

So ist wohl möglich, daß als die Genesis in das Griechische übersetzt wurde — das wird mehr als ein halbes Jahrtausend vor jenem Valentinianus geschehen sein —, man noch gewußt hat, daß *Ἡρώων πόλις* und ⲡⲉⲑⲱⲙ Ein und dieselbe Stadt bezeichnen. Als charakteristisch hebe ich hervor, daß Herr ADillmann Exodus [2] (1880) **7** Genesis [5] (1886) 432 Numeri [2] (1886) 203 für *Ἡρώων πόλις*, und was daranhängt, EQuatremères mémoires sur l'Egypte **1** 151—189 nicht citiert, während er am 30 Juli 1885 SBAW 895 »die bekannte Abhandlung von Quatremère ... hier voraussetzt«: Lehrer und Lernende der ersten Fakultät werden im Allgemeinen kaum den

Namen Quatremères, geschweige denn Quatremères Bücher, oder gar den Inhalt dieser Bücher kennen: es war mithin schon früher nothwendig jene »bekannte« Abhandlung anzuziehen.

𝔐s Text ist doch wohl verderbter — und herstellbarer — als Herr Dillmann meint.

Daß 28[2] ויבאו ארצה גשן in 𝔊 fehlt, habe ich schon angemerkt. Ich vermuthe, daß auch 29 גשנה zu viel ist.

28 להורת לפניו ist = *καϑ' Ἡρώων πόλιν*, und enthält den Accusativ להירו..פלין, nur mit hebräischen Zeichen geschrieben. גשנה ist, wie schon bemerkt, = *εἰς γῆν Ραμεσσῆ*.

Ich übersetze: Den Iuda entsandte er vor sich her an Ioseph nach Heroopolis in der Provinz des Ramesses. Als Iuda den Thatbestand gemeldet hatte, hieß Ioseph anspannen, und fuhr seinem Vater Iacob [an die Landesgrenze] entgegen.

Für die Aegyptologen wird hier noch viel zu thun sein: meines Erachtens nur für sie.

[*Hero* zu ⲡⲓ-ⲁ̀ϩⲱⲣ Peyron 17[1] = الاهراء Castle 884?] $\frac{27}{5}$ 89

Ueber den Zusammenklang zweier einfacher Töne.

Von

W. Voigt.

Bezüglich des in der Ueberschrift genannten Problemes liegen einander scheinbar stark widersprechende Beobachtungen vor.

Während Herr von Helmholtz[1]) u. A. beim gleichzeitigen Erklingen zweier einfacher Töne von den Schwingungszahlen n_1 und n_2, von denen $n_2 < n_1$ sein mag, noch Töne von den Schwingungszahlen

$$n_2 - n_1 \text{ und } n_2 + n_1$$

wahrgenommen hat, so findet Herr R. König[2]) Töne von den Schwingungszahlen

$$n_2 - \nu n_1, \quad (\nu+1) n_1 - n_2,$$

— vorausgesetzt, daß ν eine ganze Zahl ist, also νn_1 und $(\nu+1) n_1$ die Schwingungszahlen derjenigen beiden harmonischen Obertöne

---

1) v. Helmholtz, Pogg. Ann. XCIX p. 497, 1865, Akustik (Braunschweig 1870) p. 239.

2) R. König, Pogg. Ann. CLVII p. 177, 1876, Quelques expériences d'Acoustique, (Paris 1882) p. 87, Wied. Ann. XXXIX p. 395, 1890.

des tieferen Tones sind, welche den höheren unmittelbar einschließen; die vorgenannten Töne dagegen vermochte Herr König in so wenigen und unsichern Fällen zu hören, daß er die Ansicht ausspricht:

L'existence de sons différentiels et de sons d'addition ne peut être démontrée jusqu'à présent avec quelque certitude par aucune expérience [1]).

Was die Erklärung der beobachteten Erscheinungen angeht, so hat Herr von Helmholtz bekanntlich die Annahme gemacht, daß in den Fällen, wo Combinationstöne gehört werden, die primären Töne durch Schwingungen von so großer Amplitude hervorgebracht werden, daß die Anwendung der gewöhnlichen lineären Differentialgleichungen nicht mehr zulässig ist. Zugegeben indeß, daß in dem Fall der Sirene und der Zungenpfeifen, wo neben den Schwingungen zugleich Luftströmungen stattfinden, diese Voraussetzungen zutreffen, so ist doch in dem besonders wichtigen Falle von Stimmgabeltönen, die fast allein einfache Sinusschwingen liefern, diese Annahme umsomehr abzuweisen, als durch neue Beobachtungen von Herrn Kayser [2]) gezeigt ist, daß bei solchen innerhalb weitester Grenzen der Intensität die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles constant ist, also die lineären Schallgleichungen merklich erfüllt sind.

Herr König hingegen erklärt die von ihm beobachteten Töne, wie zuerst Lagrange [3]), aus den Stößen der primären Töne und weist durch besondere sinnreiche Experimente nach, daß unser Ohr die Eigenschaft besitzt, regelmäßig wiederkehrende einzelne Impulse, deren Intensität periodisch wechselt, zu einem Ton zusammenzufassen von der Höhe, welche ein einfacher Ton mit gleicher Periode besitzt.

Das Princip der Erklärung scheint mir hierdurch für diejenigen Fälle der Zusammenwirkung zweier einfacher Töne, welche die Benutzung der lineären Schallgleichungen gestatten, völlig sichergestellt zu sein, — es fehlte aber bisher noch die strenge theoretische Ableitung der verschiedenen möglichen Combinations- oder Stoßtöne aus demselben.

Als ich diese nun kürzlich versuchte, bemerkte ich sehr bald, daß aus dem aufgestellten Princip je nach Umständen sowohl

---

1) Berichtigung des Pogg. Ann. CLVII p. 236 unter III ausgesprochenen Satzes in des Autors Buch „Quelques expériences d'Acoustique“, p. 147, No. III.

2) H. Kayser, Wied. Ann. VI p. 465, 1879.

3) Lagrange, Misc. Soc. Taur. 1759.

die Helmholtz'schen — ich benutze der Kürze wegen diese Bezeichnung — Differenz- und Summationstöne als die König'schen Stoßtöne folgen, und daß die für das eine und andere maßgebenden Bedingungen sicher bei den König'schen, sehr wahrscheinlich bei den Helmholtz'schen Beobachtungen vorgelegen haben.

Die Ableitung der hiermit skizzirten Resultate bildet den Inhalt der folgenden Mittheilung. —

Der allgemeinste Ansatz für eine aus zwei einfachen Sinusschwingungen zusammengesetzte Bewegung ist:

$$u = a_1 \sin(\tau_1 t - \delta_1) + a_2 \sin(\tau_2 t - \delta_2). \qquad 1.)$$

Hierin ist τ_h kurz für $2\pi/T_h$ gesetzt; es ist τ_h also mit der Schwingungszahl n_h proportional und mag beiläufig „Schwingungsindex“ genannt werden. Der absolute Werth der Verzögerungen δ_1 und δ_2 kann durch Veränderung des Anfangspunktes für die Zeit t um gleiche Beträge geändert worden; gegeben zu denken ist nur die Differenz $\delta_2 - \delta_1 = \delta$. Wir setzen demgemäß $\delta_1 = 0$ $\delta_2 = \delta$.

Maxima und Minima von u finden statt für Werthe t_h von t, gegeben durch die Gleichung:

$$0 = a_1\tau_1 \cos \tau_1 t_h + a_2\tau_2 \cos(\tau_2 t_h - \delta); \qquad 2.)$$

die ihnen entsprechenden Werthe von u seien mit U_h bezeichnet, sodaß also gilt:

$$U_h = a_1 \sin \tau_1 t_h + a_2 \sin(\tau_2 t_h - \delta). \qquad 3.)$$

Die Wurzeln t_h der Gleichung (2) folgen im Allgemeinen keinem einfachen Gesetz, indessen sind zwei specielle, in gewisser Hinsicht extreme Fälle leicht zu erledigen.

I. Es sei

$$a_1\tau_1 = a_2\tau_2$$

d. h. die lebendige Kraft beider zur Wechselwirkung gelangenden einfachen Schwingungen sei gleich[1]).

Dann schreibt sich die Gleichung (2)

$$\cos\tfrac{1}{2}((\tau_2 + \tau_1)t_h - \delta) \,.\, \cos\tfrac{1}{2}((\tau_2 - \tau_1)t_h - \delta) = 0;$$

sie ergiebt zwei Gattungen von Wurzeln, die durch t_h' und t_h'' bezeichnet seien und deren Werthe folgen aus

---

1) Dieser Fall ist von demjenigen gleicher Amplitude $a_1 = a_2$, der mitunter für theoretische Betrachtungen benutzt wird, wohl zu unterscheiden.

$$\text{4.)} \quad \begin{aligned} (\tau_2+\tau_1)\,t'_h - \delta &= (2h+1)\pi, \\ (\tau_2-\tau_1)\,t''_h - \delta &= (2h+1)\pi. \end{aligned}$$

Die ihnen entsprechenden beiden Gattungen extremer Werthe von u, nämlich U'_h und U''_h finden wir am einfachsten, indem wir schreiben:

$$\begin{aligned} U_h = (a_2+a_1)\sin\frac{(\tau_2+\tau_1)\,t_h-\delta}{2}\cos\frac{(\tau_2-\tau_1)\,t_h-\delta}{2} \\ +(a_2-a_1)\sin\frac{(\tau_2-\tau_1)\,t_h-\delta}{2}\cos\frac{(\tau_2+\tau_1)\,t_h-\delta}{2}. \end{aligned}$$

Da nämlich $\sin\left(\frac{2h+1}{2}\pi\right) = (-1)^h$ ist, so giebt sich:

$$\text{5.)} \quad \begin{aligned} U'_h &= (-1)^h (a_2+a_1)\cos\frac{(\tau_2-\tau_1)\,t'_h-\delta}{2}, \\ U''_h &= (-1)^h (a_2-a_1)\cos\frac{(\tau_2+\tau_1)\,t''_h-\delta}{2}. \end{aligned}$$

Diese Werthe ergeben aber, wenn man sie durch die stetig wachsenden t_h entsprechende Sinuslinien verbindet, wegen des Factors $(-1)^h$ keine einfache Sinuscurve, sondern die Superposition je zweier gleicher, welche um die halbe betreffende Periode gegeneinander verschoben sind; diese Combination besitzt die halbe Periode einer einfachen Reihe.

Hieraus folgt, daß bei der gemachten Voraussetzung gleicher lebendiger Kraft die beiden einfachen Sinusschwingungen absolute Maxima und Minima der resultirenden Amplituden liefern, in Perioden, wie sie zwei einfachen Tönen mit den Indices

$$\tau_2-\tau_1 \text{ und } \tau_2+\tau_1$$

entsprechen.

Die Wahrnehmung der beiden Gattungen von Perioden durch das Ohr wird um so deutlicher sein, je mehr Glieder der ganzen Reihen der U'_h resp. U''_h in einer jeden Periode vorhanden sind.

Man erkennt aus den Formeln (5) sogleich, daß wegen der Nenner, welche t'_h und t''_h in den Ausdrücken

$$\text{6.)} \quad t'_h = \frac{(2h+1)\pi+\delta}{\tau_2+\tau_1}, \quad t''_h = \frac{(2h+1)\pi+\delta}{\tau_2-\tau_1}$$

besitzen, stets eine erheblich größere Zahl Glieder der U'_h in eine Periode fallen, als der U''_h; daraus folgt aber schon allein und ganz abgesehen von der Amplitude, daß bei den gemachten Annahmen die Differenztöne $(\tau_2-\tau_1)$ ungleich deutlicher wahrnehmbar sein müssen, als die Summationstöne.

Dies übersieht man noch deutlicher, wenn man die Schwingungszeiten dieser Töne und die Perioden der sie bildenden U_h in's Auge faßt. Für die Differenztöne sind die Schwingungsdauern T_- nämlich resp.

$$T_- = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}$$

die Perioden P_- der U'_h gleich

$$P_- = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2},$$

für die Summationstöne umgekehrt, sodaß bei letzteren **höchstens** ein extremer Werth U''_h in jede Periode fällt.

Bildet man den vollständigen Werth

$$U''_h = (-1)^h (a_2 - a_1) \cos\left(\frac{\tau_2 + \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}(2h+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\tau_1 \delta}{\tau_2 - \tau_1}\right), \qquad 7.)$$

so erkennt man, daß für Töne, deren Indices dem Gesetz

$$\tau_1 : \tau_2 = n : n+1$$

folgen, wie dies bei den Gliedern der Oktave, Quinte, Quarte, großer und kleiner Terz gilt, U''_h die Form annimmt:

$$\begin{aligned} U''_h &= (-1)^h (a_2 - a_1) \cos\left((2n+1)(2h+1)\frac{\pi}{2} + n\delta\right), \\ &= (-1)^n (a_2 - a_1) \sin(n\delta). \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß in den angegebenen Fällen die Glieder der Reihe der U''_h sämmtlich gleich sind; die dem Summationston entsprechende Periode dürfte hiernach für das Ohr ganz unwahrnehmbar sein, denn dieses wird eine Reihe gleicher Impulse offenbar nur als ein Ton derjenigen Schwingungsdauer empfunden werden, die dem Abstand der Impulse entspricht, d.h. hier als **Differenzton**.

Gilt ferner

$$\tau_1 : \tau_2 = n : n+2,$$

wie dies bei der Duodecime und großen Sexte stattfindet, so haben wir

$$U''_h = (-1)^h (a_2 - a_1) \cos\left((n+1)(2h+1)\frac{\pi}{2} + \frac{n\delta}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} (-1)^{(h+n)} (a_2 - a_1) \sin\left(\frac{n\delta}{2}\right) & \text{für gerades } n, \\ (-1)^{\left(h + \frac{n+1}{2}\right)} (a_2 - a_1) \cos\left(\frac{n\delta}{2}\right) & \text{für ungerades } n. \end{cases}$$

Hier treten die Glieder der Reihe der U_h'' zwar absolut gleich, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen auf; wenn auch im Ganzen sehr unwahrscheinlich, dürfte hier schon eher die Wahrnehmung eines Summationstones möglich sein.

Erst Töne mit dem Verhältniß

$$\tau_1 : \tau_2 = n : n + m \text{ für } m \geqq 3$$

geben den U_h'' verschiedene absolute Werthe; von den Intervallen mit $m = 3$ kommt besonders die kleine Sexte in Betracht.

Nach dem im Vorstehenden Entwickelten kann es nicht Wunder nehmen, wenn die Frage der Wahrnehmbarkeit, ja der „Existenz" der Summationstöne sehr häufig in durchaus negativer Weise beantwortet wird. Selbst bei den im Obigen gemachten, wie wir sehen werden, günstigen Annahmen erscheint ihre Beobachtung im Falle die primären Töne das Intervall der Octave, Quinte, Quarte und Terz besitzen, fast ausgeschlossen, bei großer Sexte und Duodecime sehr fraglich.

Wenn also trotzdem von einzelnen Beobachtern Summationstöne gehört worden sind, so ist, falls diese Töne objectiv im äußern Luftraum nachweisbar waren, wahrscheinlich, daß bei ihren Experimenten die Schwingungen so große Elongationen besaßen, daß die lineäre Form der Schallgleichungen nicht mehr zulässig waren, — falls sie nur im Ohre zu Stande kamen, daß sie zu meist durch dessen anatomische Eigenthümlichkeiten bedingt waren[1]).

Wesentlich aber ist das Resultat, daß bei zwei einfachen Tönen gleicher lebendiger Kraft Differenztöne und Summationstöne theoretisch auch in Fällen auftreten können, wo das Princip der Coexistenz der Schwingungen anwendbar ist.

II. Sind die Amplituden des höheren Tones (τ_2) so viel kleiner, als die des tieferen (τ_1), daß die Zusammenwirkung beider nur eine Veränderung der Maxima und Minima der dem letzteren entsprechenden Elongationen u_1, aber keine neuen Maxima und Minima hervorruft, so ist in der Gleichung (2) $a_2\tau_2$ als klein gegen $a_1\tau_1$ zu betrachten.

Damit ist noch nicht vorausgesetzt, daß die wahrgenommene Intensität des höheren Tones erheblich unterhalb derjenigen des tieferen sein muß; es scheint vielmehr, daß bei zwei Tönen, die sich beträchtlich in ihrer Höhe unterscheiden — und auf diesen Fall kommt es im Folgenden besonders an — der tiefere uns erst

1) Vergl. übrigens W. Preyer, Wied. Ann. XXXVIII, p. 131, 1889.

bei erheblich größerer lebendigen Kraft der ausgesandten Bewegung vernehmbar wird, als der höhere.

Die Gleichung (2) läßt sich in diesem Falle durch eine Annährung behandeln, indem man die Wurzeln t_h, welche sich aus dem Verschwinden des ersten Gliedes allein als erste Näherung ergeben, nämlich

$$t_h = \frac{(2h+1)\pi}{2\tau_1}$$

in das zweite einsetzt, um dadurch eine zweite Näherung zu erhalten. Dies führt zu

$$a_1\tau_1 \cos \tau_1 t_h + a_2\tau_2 \cos\left(\frac{(2h+1)\tau_2\pi}{2\tau_1} - \delta\right) = 0$$

woraus folgt, wenn man das zweite Glied mit dem Factor $(-1)^h \sin \tau_1 t_h$, welcher in erster Näherung gleich 1 ist, multiplicirt:

$$\cos\left[\tau_1 t_h - \frac{a_2\tau_2}{a_1\tau_1}(-1)^h \cos\left(\frac{(2h+1)\tau_2\pi}{2\tau_1} - \delta\right)\right] = 0. \qquad 8.)$$

Wir erhalten also, indem wir das zweite Glied, welches erster Ordnung ist, kurz mit η_h bezeichnen, als Resultat:

$$\tau_1 t_h = \frac{2h+1}{2}\pi + \eta_h. \qquad 9.)$$

Der Werth von η_h ist hier nur für die Beurtheilung des Grades der Annährung von Bedeutung. Setzen wir nämlich das Resultat (8) in die Gleichung (3) ein, so folgt, wenn wir wieder zweite Ordnung vernachlässigen, der von η_h freie Werth:

$$U_h = a_1(-1)^h + a_2 \sin\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\,\frac{2h+1}{2}\pi - \delta\right). \qquad 10.)$$

Diesen Ausdruck können wir umformen, indem wir entweder

$$\tau_2 = \nu\tau_1 + \Delta' \qquad 11.)$$

oder

$$\tau_2 = (\nu+1)\tau_1 - \Delta''$$

setzen, worin also $\Delta' + \Delta'' = \tau_1$ sein muß und Δ' und Δ'' positiv sein mag.

Ist ν eine ganze Zahl, so sind $\nu\tau_1$ und $(\nu+1)\tau_1$ die Indices derjenigen harmonischen Obertönen des tieferen Tones, welche den höheren Ton direct einschließen.

Zugleich treten dann Glieder unter dem sinus in (10) hervor, sodaß die Periode des zweiten Gliedes variirt. Wir erhalten nämlich

I.) falls ν gerade, $= 2\mu$ ist,
die beiden Formen

$$12.)\quad \begin{aligned} (U'_h)_I &= a_1(-1)^h + a_2(-1)^\mu \sin\left(\frac{\Delta'}{\tau_1}\frac{2h+1}{2}\pi - \delta\right), \\ (U''_h)_I &= a_1(-1)^h + a_2(-1)^{\mu+h} \cos\left(\frac{\Delta''}{\tau_1}\frac{2h+1}{2}\pi + \delta\right), \end{aligned}$$

II.) falls ν ungerade, $= 2\mu + 1$ ist, die anderen

$$13.)\quad \begin{aligned} (U'_h)_{II} &= a_1(-1)^h + a_2(-1)^{\mu+h} \cos\left(\frac{\Delta'}{\tau_1}\frac{2h+1}{2}\pi - \delta\right), \\ (U''_h)_{II} &= a_1(-1)^h + a_2(-1)^\mu \sin\left(\frac{\Delta''}{\tau_1}\frac{2h+1}{2}\pi + \delta\right). \end{aligned}$$

Die Periode dieser Ausdrücke, welche wegen der mit h wechselnden Vorzeichen einiger Glieder nicht sofort hervortritt, erkennt man am besten durch Betrachtung einer schematischen Figur, welche die U_h als Ordinaten über einer Abscisse, auf welcher h (oder t_h) aufgetragen ist, darstellt. Die sämmtlichen Werthe U_h stellen sich dann dar als discrete Punkte zweier gleicher Sinuslinien, deren eine um a oberhalb, die andere um a unterhalb der Abscissenaxe liegt. Bei $(U'_h)_I$ und $(U''_h)_{II}$ besitzen die vertical übereinanderliegenden Punkte gleiche Phase, bei $(U'_h)_{II}$ und $(U''_h)_I$ um π verschiedene.

Die Periode in Bezug auf t_h ist

für $(U'_h)_I$ und $(U'_h)_{II}$ gleich $2\pi/\Delta'$

für $(U''_h)_I$ und $(U''_h)_{II}$ gleich $2\pi/\Delta''$

also übereinstimmend mit der zweier einfacher Töne von den Indices

$$\Delta' = \tau_2 - \nu\tau_1, \quad \Delta'' = (\nu + 1)\tau_1 - \tau_2.$$

Wiederum wird diejenige Periode von beiden am hervortretendsten, derjenige Ton am deutlichsten sein, für welchen die größte Zahl von Werthen U_h innerhalb einer Periode auftritt, und dies ist ersichtlich immer derjenige, für welchen der Index Δ' resp. Δ'' der kleinere ist.

Wenn hierin eine vollständige Analogie zu den Resultaten des vorigen Abschnittes besteht, so findet in anderer Hinsicht eine wichtige Abweichung statt.

Dort ergab sich das Vorhandensein von zwei Arten extremer Werthe U_h, die für sich je eine verschiedene Periode besitzen.

Hier ergiebt sich nur eine Art von extremen Werthen, aber sie haben die Eigenschaft, sich als Ordinaten zweier verschiedener Curven mit zwei verschiedenen Perioden ansehen zu lassen. Offenbar liegt hierin ein Moment, welches es dem Ohr erschweren muß, die beiden Perioden gesondert wahrzunehmen.

Daß Herr König unter Umständen beobachtet hat, welche den vorstehend gemachten Voraussetzungen nahe entsprechen, möchte man schon daraus schließen, daß bei angeschlagenen Stimmgabeln die höheren Töne wegen der inneren Reibung schneller zur Ruhe kommen, als die tieferen, — die Betrachtung der Curven, die er mit seinen Stimmgabeln aufgezeichnet hat, macht es zur Gewißheit. Denn obwohl dieselben natürlich mit möglichst großen Elongationen, also im Anfang des Zusammenklanges hergestellt sind und kaum das Intervall einiger Secunden umfassen dürften, ist nach dem Ende desselben hin das Eintreten des von uns vorausgesetzten Zustandes, daß der höhere Ton nur die Maxima der Elongationen des tieferen verändert, aber keine neuen hervorbringt, deutlich vorbereitet, bei einigen schon eingetreten, indem nämlich die Kräuselungen der Curven keine Gipfel mehr haben, sondern nur die Gestalt abgerundeter Stufen besitzen.

In der That stimmen alle oben gezogenen theoretischen Folgerungen auf das Genauste mit den von Herrn König gemachten Beobachtungen, was ich des Raumes wegen hier auszuführen unterlassen will. —

In den Fällen, die zwischen den oben betrachteten extremen liegen, wird sich ein mittlerer Zustand einstellen. Je mehr die lebendige Kraft des obern Tones von der Gleichheit mit der des tieferen aus abnimmt, um so mehr müssen die Helmholtz'schen Differenz- und Summationstöne verschwinden und die König'schen hervortreten und umgekehrt.

Damit stimmt überein, daß Herr König in einigen wenigen Fällen neben seinen „Stoßtönen" einen von ihnen abweichenden Differenzton gehört hat.

Göttingen, 3. Mai 1890.

Beitrag zur Kenntniß der Comatuliden-Fauna des Indischen Archipels.

Vorläufige Mittheilung

von

Clemens Hartlaub.

(Vorgelegt von Ehlers.)

Unter der reichen zoologischen Ausbeute, welche der leider so früh verstorbene Prof. J. Brock im Indischen Archipel, und zwar vorwiegend auf Amboina gesammelt, und der Sammlung des zoolog.-zootomischen Instituts in Göttingen überwiesen hat, nehmen die Comatuliden einen hervorragenden Platz ein sowohl durch eine verhältnißmäßig große Artenzahl als auch durch die Menge der von einzelnen Species mitgebrachten Exemplare.

Da die Bearbeitung dieser Sammlung Veranlassung zu einem Besuch einiger größerer Museen gab, stellte es sich als wünschenswerth heraus, auch das Material dieser in den Kreis der Untersuchung zu ziehen. So wurden besonders die neuen Arten des Berliner und Hamburger Museums beschrieben und unter ihnen auch manche unter Lütkenschen M. S. Namen bereits bekannte Form.

Bis zur Veröffentlichung meiner mit zahlreichen Abbildungen versehenen Arbeit dürfte noch einige Zeit hingehen, und erlaube ich mir daher die Beschreibungen der neuen Arten in Kürze schon jetzt mitzutheilen.

Uebersicht der neuen Arten.

I. Genus Antedon de Fréminville.

A. 10 Arme.

I. »Langgliedrige untere Pinnulae« (**Tenella-Gruppe** Carp.)

a. Pinnulae des zweiten und vierten Brachiale ganz kurz 1) nana

b. Pinnula des 2ten Br. 3 mal so lang wie die des 4ten . . 2) Hupferi.

II. »das erste Paar Pinnulae relativ klein und die sie zusammensetzenden Glieder nur wenig länger wie breit; Eine oder mehrere Pinnulae des zweiten dritten und vierten Paares sind länger und massiver mit dickeren Gliedern als die darauf folgenden« (**Milberti-Gruppe** Carp.)

a. 40—50 Cirren ohne Dornen. Armglieder scheibenförmig. — (Große, plumpe Form) . . . . 3) afra Ltk.M.S.

b. circa 19 Cirren; die äußeren Glieder dornig. Armglieder stumpf keilförmig. — (Kleine zierliche Form.) . . . . 4) japonica.

B. Mehr als 10 Arme.

I. »Arten mit zweigliedrigen Distichalstämmen, deren radiale Axillaria und zunächst folgende Glieder abgeplattete Seiten haben und deren Pinnulae ein deutliches Ambulacralskelett besitzen« (**Spinifera-Gruppe** Carp.)

Centrodorsale conisch. Cirren in 10 vertikalen Reihen . 5) conifera.

II. »Arten mit zweigliedrigen Distichalstämmen, einer nicht getäfelten Scheibe und keinem bestimmten Ambulacralskelett. Die Seiten der unteren Brachialia sind nicht oder nur sehr wenig abgeplattet. Die erste Pinnula kleiner als die folgenden« (**Palmata-Gruppe** Carp.)

a. Keine Pinnula am 3ten Brachiale . . . . 6) Clarae.

b. Eine Pinnula am 3ten Brachiale; Zwei oder mehrere postradiale Axillaria; zweite Pinnula länger wie die dritte.

1) die Radien seitlich mehr oder minder frei.

α) die zweite Pinnula hat 25 oder mehr Glieder, die nicht besonders verlängert sind.

α') Die unteren Pinnulae nicht steif und griffelförmig.

i) Zweite Radialia vollkommen frei.

i') Nicht über 20 Arme. Die Radien weichen stark auseinander.

Glieder der unteren Pinnulae mit vorstehenden distalen Rändern . . . . 7) bella.

Glieder der unteren Pinnulae glatt . . . 8) Klunzingeri.

i'') Ueber 20 Arme; die Radien weichen schwach auseinander . . . . 9) lepida.

ii) Zweite Radialia mehr oder minder vereinigt. Ueber 20 Arme. 60—80 Cirrusglieder. Die Seiten der Radien häufig abgeplattet . . . . 10) Finschii.

β') Die ersten vier Paar Pinnulae steif und griffelförmig . . . . 11) erinacea.

β) Die zweite Pinnula steif und griffelförmig mit 12—18 stark verlängerten Gliedern.

α') Erste Pinnula wie die zweite . . . . 12) tenuipinna.

β') Erste Pinnula kürzer wie die zweite, aber aus zahlreicheren Gliedern zusammengesetzt.

i) Die Radien haben Erhabenheiten an ihrem Rande. Dritte äußere Pinnula von dem Charakter der zweiten und wenig oder gar nicht kürzer . . 13) oxyacantha.

Dritte Pinnula viel kürzer als die zweite und nicht steif und griffelförmig . . . . 14) monacantha.

ii) Die Radien haben keine Erhabenheiten an ihrem Rande.

12 Arme. Zweite Pinnula mit 8—10 langen Gliedern . . . . 15) spinipinna.

2) die Radien seitlich mehr oder minder in Berührung.

α) Die unteren Pinnulae größer an den äußeren Armen eines jeden Distichums als an den inneren.

α′) Zweite Pinnula kräftig; dritte ganz kurz . . . 16) protecta.
β′) Untere Pinnulae sehr dünn, mit Neigung zur Kielung . . . . 17) tenera. (Ltk. M.S.)
β) Die unteren Pinnulae annähernd gleich groß an allen Armen.
α′) Keine Postpalmaria . . . . 18) amboinensis.
β′) Postpalmaria . . . . tenera. (Ltk. M.S.)

III. »Drei Distichalia; Scheibe ungetäfelt; kein bestimmtes Ambulacralskelett; die Basis der Radien seitlich nicht abgeplattet« (**Savignyi-Gruppe** Carp.)
a. Keine Palmaria.
Untere Pinnulae gekielt. Aeußere Cirrusglieder dornig. 19) bengalensis.
b. Palmaria.
1) Zwei Palmaria, das Axillare ohne Syzygie.
α) Distichale Pinnula sehr dick.
Die Armglieder haben vom dritten an stark aufgeworfene distale Ränder. Die Gliedergröße der distichalen Pinnula nimmt sprungweise ab. 20) Martensi.
Die basalen Armglieder sind glatter verbunden als die übrigen. Die Dicke der distichalen Pinnula nimmt nach ihrem Ende allmälig ab. 21) Kraepelini.
β) Distichale Pinnula nicht durch besondere Dicke ausgezeichnet.
α′) 25—35 Cirrusglieder.
Glieder der unteren Pinnulae mit vorstehenden, dornigen distalen Rändern . . . . 22) Brockii
Pinnulae der proximalen Armregion gekielt . . 23) affinis
β′) 35—55 Cirrusglieder, äußere Cirrusglieder dornig 24) nematodon (Ltk. M. S.)
2) Zweigliedrige und dreigliedrige Palmarserien . . . 25) crassipinna

II. Genus Actinometra J. Müller.

I. »Drei distichale Arten mit einer Pinnula am ersten Brachiale und einer Syzygie im zweiten. Die palmaren und postpalmaren Stämme, wenn vorhanden, bestehen aus zwei Gliedern, von denen das erste eine Pinnula trägt und das zweite (Axillare) eine Syzygie enthält.« (**Fimbriata-Gruppe** Carp.)
Centrodorsale klein, flach, ohne eine Spur von Cirren . 26) macrobrachius (Ltk. M. S.)

II. Drei Distichalia. Zwei Palmaria; letztere durch Syzygie verbunden. Erste Armsyzygie zwischen erstem und zweitem Brachiale.
Centrodorsale klein; keine Spur von Cirren . . . . . 27) gracilis.

1. Antedon nana n. sp.

Syn. *Antedon macropygus* Ltk. M. S.

Centrodorsale ziemlich groß, convex. 30—40 zarte Cirren in

3 Reihen. Cirren 6 mm lang mit 10—12 stundenglasförmigen, stark verlängerten Gliedern; vorletzte mit starkem Dorn.

Erste Radiale verborgen, zweite auch ein wenig. Axillare rhombisch.

10 glatte Arme mit ziemlich großen Gliedern. Erstes Glied ganz kurz, in geringer Berührung mit dem des Nachbararmes. Zweite bedeutend länger, von unregelmäßiger Form. Glieder vom 9ten an fast dreieckig mit einer spitzen, übergreifenden Hervorragung auf der langen Seite. Syzygiale Glieder ziemlich lang.

Zweite Syzygie im 8ten Brachiale, dann eine im 12ten und die folgenden in Zwischenräumen von 2.

Die unteren Pinnulae haben stark verlängerte Glieder, die beiden ersten Paare ganz kurz und ziemlich gleichförmig; 25 mm lang; 7—9 Glieder. Pin. des 6ten Br. 7 mm lang mit —16 stark verlängerten Gliedern. Die folgende (8te Br.) beträchtlich kürzer; dann nimmt die Länge wieder zu und erreicht 7 mm.

Scheibe: 3 mm Dm.

Klafterung: 5—6 cm.

Amboina (Göttingen). Tonga-Inseln (Hamburg).

2. **Antedon Hupferi** n. sp.

Centrodorsale scheibenförmig von mäßiger Größe. Etwa 25 dünne Cirren in drei Reihen. Die Cirren messen 11 mm; 15 ziemlich stark verlängerte Glieder; nur das vorletzte mit Dorn.

Erste Radialia ein wenig sichtbar; die zweiten breit und kurz, durch einen dünnen plattenförmigen Seitenfortsatz des äußeren Randes verbunden. Axillare dreieckig, mit sehr spitzem distalen Winkel. Seine Basis ein wenig nach hinten ausgeschweift, die Seiten leicht eingekrümmt.

10 Arme von ziemlich glatter Oberfläche. Glieder vom 10ten an dreieckig, weiterhin stumpfer keilförmig.

Zweite Syzygie im 8ten Br., die folgenden in Zwischenräumen von 2—3 Gliedern.

Pin. des 2ten Br. etwa 10 mm lang mit etwa 20 stark verlängerten Gliedern, von denen die äußeren vortretende, Dörnchen tragende distale Ränder besitzen. Pin. des 4ten Br. meist nur $^1/_3$ so lang mit etwa 8 Gliedern, von denen die 3 basalen ziemlich verbreitert, die übrigen aber lang sind. Die distalen Pin. erreichen 9 mm Länge. Sacculi an den Pin. ziemlich weitläufig stehend und klein.

Scheibe: 7 mm Dm. nicht eingeschnitten.

Klafterung: 7 cm.

Farbe: schmutzig weiß.

Wapoo. (W. Africa.) 21 Faden. Ein Exemplar. (Hamburg, durch Capitain Hupfer.)

---

3. **Antedon afra** (Ltk. M. S.) n. sp.

Centrodorsale dick, abgestumpft conisch. 40—50 Cirren in 2 oder stellenweise 3 regelmäßigen Reihen. Cirren sehr dick; 30 mm lang, mit etwa 30 sehr gleichförmigen, dornenlosen, kurzen Gliedern. Auch das vorletzte Glied meist ohne Dorn.

Erste Radialia ein wenig sichtbar; die zweiten kurz, in seitlicher Berührung. Axillaria kurz, dreieckig.

10 sehr massive Arme, von rauher Oberfläche. Sämmtliche Glieder scheibenförmig. Die beiden ersten beträchtlich größer als die übrigen. Glieder vom 9ten an sehr kurz, mit stark vorstehendem, häufig etwas wellig gebogenem distalen Rande.

Zweite Syzygie im 8ten Br., die folgenden in Zwischenräumen von 2—3.

Die Pin. des 2ten Br. 28 mm, die des 3ten 20 mm lang. Beide in ihrer proximalen Hälfte mit der Scheibe verwachsen. Sie verdünnen sich stark in ihrer distalen Hälfte und sind nicht so dick und fleischig wie die folgenden. Pin. des 4ten Br. so lang wie die des zweiten. Pin. des 6ten Br. etwas länger. Dann nimmt die Länge ganz allmälig ab bis zum Ende des ersten Armviertels, wo sie noch 14 mm beträgt. Mit Ausnahme des ersten Paares haben alle diese Pinnulae stark entwickelte Genitaldrüsen. Die Pinnulae messen am Ende des ersten Armviertels etwa 24 mm.

Scheibe: 25 mm Dm., nicht eingeschnitten.

Klafterung: wahrscheinlich 38 cm.

Farbe: schwarz.

Bowen. Ein Exemplar. (Hamburg.)

4. **Antedon japonica** n. sp.

Centrodorsale ziemlich dick scheibenförmig mit leicht eingesenkter Oberfläche. Ungefähr 19 randständige Cirren in 2 Reihen; circa 20 kurze Glieder, von denen die äußeren kleine dornige Transversalleisten haben können.

Erste Radialia etwas sichtbar; zweite seitlich frei. Axillare kurz, pentagonal. Ein kleiner Höcker auf der Verbindung des zweiten mit dem Axillare.

10 Arme von ziemlich rauher Oberfläche. Auf der Verbindung der beiden ersten Glieder ein kleiner Höcker. Glieder vom 10ten an,

mit Ausnahme der syzygialen, keilförmig, etwas übergreifend, mit vorstehenden distalen Rändern.

Zweite Syzygie meist im 8ten Gliede; die folgenden häufig in Zwischenräumen von 2—3.

Pinnula des 2ten Brachiale sich schnell verdünnend nach den basalen Gliedern, die Neigung zur Kielung haben; $^2/_3$ oder fast so lang wie die Pin. des 4ten und 6ten Br., die sich allmäliger verdünnen. Diese messen 5 mm und bestehen, wie die erste aus etwa 12 ziemlich flachen, breiten Gliedern. Die zwei folgenden Pinnulae (8te und 10te Br.) nehmen an Länge ab.

Scheibe: verloren.

Klafterung: circa 8 cm.

Japan. Ein Exemplar. (Berlin, durch F. Hilgendorf).

Die Art steht am nächsten *Antedon serripinna* Carp.

---

5. **Antedon conifera** n. sp.

Centrodorsale conisch, mit weiter, pentagonal sternförmiger Basis und interradial nach abwärts vorspringenden Ecken. Gegen 40 Cirrusdillen in 10 verticalen Reihen, jede zu 4 Cirren. Die Reihen sind getrennt durch ziemlich niedrige radiale und interradiale Leisten, von denen die letzteren länger sind und bis an die Ecken der pentagonalen Basis des Centrodorsale reichen. Die 10 Leisten sind von gleicher Stärke. Cirren ziemlich dick, 45 mm lang. Circa 70 Glieder; an den äußeren ein dorsales Knöpfchen; keine eigentlichen Dornen. Cirren sind, wenn trocken, elfenbeinähnlich.

Erste Radialia eben sichtbar; die zweiten kurz, seitlich vereinigt. Axillare rhombisch. Theilung der Radien zweifach. 2 Distichalia, das Axillare ohne Syzygie. Radialia, Distichalia und erste Brachialia haben abgeplattete Seiten. Auf der Verbindung der Axillaria mit dem vorhergehenden Gliede ein Höcker.

20 dicke Arme von rauher Oberfläche. Erstes Glied ziemlich kurz, rhombisch, eng vereinigt mit dem Nachbargliede. Zweites Glied bedeutend länger. Glieder, etwa vom 10ten an, dreieckig, übergreifend; weiterhin stumpfer keilförmig. Alle Glieder haben vorstehende, fein gezähnte distale Ränder. Der äußerste Theil des Armes hat eine scharfe dorsale Längsleiste.

Zweite Syzygie vom 18ten—25sten Br., meist im 25sten. Die folgenden in Zwischenräumen von 3—7. Die syzygialen Verbindungen sind nicht glatt, sondern ganz ähnlich den gelenkigen.

Das erste Paar Pinnulae 11 mm lang mit 15—20 relativ rundlichen Gliedern, von denen die basalen ziemlich dick, die übrigen dünn sind. Die drei folgenden Paare nehmen allmälig an Länge ab. Ihre Glieder flacher und breiter. Pin. des 9ten Br. 4 mm. Die äußeren Pinnulae erreichen 11 mm. Sacculi klein und spärlich. Pin. Ambulacra getäfelt.

Scheibe: 14 mm Dm.

Klafterung: wahrscheinlich 14 cm.

Färbung des Skelettes: bräunlich weiß.

Japan. Ein Exemplar. (Berlin durch F. Hilgendorf.)

Die nächstverwandte Art ist *Antedon quinquecostata* Carp.

Distichalia 2gliedrig.

6. **Antedon Clarae** n. sp.

Centrodorsale mäßig groß, leicht gehöhlt. 21 randständige Cirren in einer regelmäßigen Reihe; ungefähr 25 kurze und ziemlich gleichförmige Glieder. Dieselben tragen im proximalen Cirrustheile eine dorsale Querleiste, die im distalen Theile allmälig in kleine Dornen übergeht.

Erste Radialia ein wenig sichtbar; zweite ganz frei seitlich. Axillaria pentagonal. Keine Palmaria. Zwei Distichalserien vorhanden, eine zweigliedrig, die andere dreigliedrig, Axillaria ohne Syzygie. Aeußerer Rand der Radien glatt. Verbindungen der Axillaria mit dem vorhergehenden Gliede etwas buckelig.

12 glatte Arme mit kurzen Gliedern. Glieder keilförmig.

Zweite Syzygie vom 8ten—13ten Gliede, die folgenden in Zwischenräumen von 4—8.

Das 3te Brachiale trägt keine Pinnula. Pin. des 2ten Br. nahezu so lang wie die des 4ten. Diese ist ziemlich schlank, mißt 7 mm und besteht aus 15—20 cylindrischen Gliedern. Die darauf zunächst folgenden Pinnulae bedeutend kürzer. Länge nimmt vom 10ten Gliede an wieder zu und erreicht 12 mm.

Scheibe nur schwach eingeschnitten. 12 mm. Dm.

Klafterung: 20 cm.

Amboina. Ein Exemplar.

7. **Antedon bella** n. sp.

Centrodorsale mäßig dick. Cirrusfreie Oberfläche klein. 10—20 dicke Cirren von circa 40 gleichförmigen Gliedern und 23 mm Länge. Aeußere Glieder mit zwei dorsalen Dörnchen.

Erste Radiale zuweilen theilweise verborgen; die zweiten manchmal ganz frei seitlich. Radien treten weit auseinander. Ihr äußerer Rand zeigt ziemlich starke Verdickungen. Verbindung der Axillaria mit dem ihnen vorangehenden Gliede buckelig. Keine Postpalmaria.

Nicht mehr als 20 Arme, von denen gelegentlich einige erster

Ordnung[1]). Glieder dreieckig und weiterhin stumpfer keilförmig; Ihre Ränder vortretend, fein gezähnt, und etwas übergreifend.

Zweite Syzygie vom 23sten—50sten Gliede, die folgenden in Zwischenräumen von meist 9—10.

Pinnula des 2ten Brachiale halb so lang wie die folgende, von relativ glatten Gliedern. Die des 4ten Br. bedeutend dicker und ziemlich steif; Länge 8—9 mm; 12—22 Glieder mit stark vortretenden distalen Rändern, die fein gezähnt oder selbst dornig sind. Die folgende Pin. (6te Br.) viel kleiner, kürzer als die des 2ten Br., von glatten Gliedern und dem Charakter der nachstehenden Pinnulae, welche an Länge zunehmen.

Skelett der Arme und Pinnulae von einer eigenthümlichen dicken, graublauen Haut bekleidet, die sich auch auf die Randblättchen der Pin. erstreckt und sie sehr augenfällig macht.

Scheibe stark eingeschnitten; 11 mm Dm.

Klafterung: 23 cm.

Färbung des Skelettes graublau mit rothbrauner Punktirung von theilweise regelmäßiger Vertheilung.

Noordwachter Eiland. 15—20 Faden. (Göttingen.)

8. **Antedon Klunzingeri** n. sp.

Centrodorsale annähernd halbkuglig, ganz bedeckt mit Cirrusdillen. Zahl der Cirren wahrscheinlich etwa 30.

Erste Radialia etwas sichtbar; zweite vollkommen frei seitlich; Axillaria pentagonal, nicht doppelt so lang wie die zweiten Radialia, mit ziemlich spitzem Winkel und leicht eingebogenen distalen Gelenkseiten. Theilungsart der Radien unregelmäßig. Keine Postpalmaria. Höchste Armzahl eines Radius 4.

17 Arme von glatter Oberfläche und ziemlich kurzen Gliedern. Glieder vom 9ten an zuerst dreieckig aber bald in mehr scheibenförmige übergehend.

Zweite Syzygie im 14ten Brachiale; die folgenden in Zwischenräumen von 7—10 Gliedern.

Erste Pinnula etwa 8 mm lang, etwas dünner und kürzer als die folgende. Diese (4te Br.) mißt etwa 10 mm mit 15—20, der Mehrzahl nach länglichen, glatten Gliedern. Die folgende Pin.

---

1) Arme erster Ordnung nenne ich solche, die von einem Radiale axillare entspringen, Arme zweiter Ordnung solche, die von einem Distichale axillare ihren Ursprung nehmen u. s. f. Die radialen, distichalen, palmaren etc. Theilungsserien bezeichne ich im Gegensatz zu den sich nicht weitertheilenden »Armen« als »Stämme« und zwar die radialen als Stämme erster Ordnung, die distichalen als Stämme zweiter Ordnung u. s. w.

(6te Br.) hat die Größe der ersten. Dann kommt die kürzeste, nach welcher die Länge wieder zunimmt und etwa 13 mm erreicht, so daß also die größte Länge der äußeren Pinnulae die des zweiten Paares übertrifft.

Scheibe fehlt.

Klafterung: 20 cm.

Färbung: schmutzig weiß, mit hellbraunen Binden auf den Armen.

Koseir. Ein Exemplar, (Stuttgart durch Klunzinger.)

9. Antedon lepida n. sp.

Centrodorsale convex, etwa 18 Cirren von 12 mm Länge und 20—25 Gliedern. Aeußere Glieder dornig.

Erste Radialia etwas sichtbar; die zweiten kurz, frei an den Seiten. Axillaria kurz. Keine Postpalmaria. Palmaria nur von der Außenseite der distichalen Axillaria. 6 Arme zu jedem Radius. Radien weichen nur wenig auseinander.

30 Arme von glatter Oberfläche. Glieder dreieckig, weiterhin stumpfer keilförmig.

Zweite Syzygie um das 14te Brachiale; die folgenden in Zwischenräumen von 5—6 Gliedern.

Untere Pinnulae von sehr zartem Bau. Pin. des 2ten Br. 4 mm; die des 4ten Br. 9 mm, mit etwa 20 Gliedern, von denen die äußeren etwas länglich sind. Die folgende Pin. (6te Br.) annähernd von gleicher Länge, ein bischen kleiner. Die des 8ten Br. beträchtlich kleiner; die des 10ten u. 12ten Br. 3 mm. Dann nimmt die Länge zu und erreicht 5 mm.

Scheibe: 10 mm Dm. Tief eingeschnitten.

Klafterung: 8 cm.

Tonga-Inseln. 2 Exemplare. (Hamburg.)

Die Art ist durch sehr zierlichen Bau ausgezeichnet sowie dadurch, daß die 3te Pin. fast die Länge der zweiten hat. Charakteristisch sind ferner die Dornen der äußeren Cirrusglieder, sowie der Umstand, daß die zweiten Radialia sich seitlich nicht berühren, trotzdem die Radien sehr wenig auseinanderweichen.

10. Antedon Finschii n. sp.

Centrodorsale halbkuglig, mehr oder minder vollständig bedeckt mit langen, dünnen Cirren, von 6 cm Länge und 60—80 Gliedern; äußere Glieder dornig.

Erste Radialia zuweilen ganz sichtbar, ziemlich vertical stehend; die zweiten theilweise seitlich vereinigt. Axillaria relativ lang, pentagonal. Theilung der Radien dreifach, einzeln vierfach. Postpalmaria, wenn vorhanden, entspringen von der Innenseite der inneren palmaren Axillaria. Verbindung der Axillaria mit dem ihnen vorangehenden Gliede buckelig. An den Außenrändern der Radien gelegentlich stark vorspringende Leisten mit abgeplatteter Außenseite oder starken Kerben.

Etwa 40 glatte, lange, ziemlich dünne Arme, deren unterste Glieder abgeplattete Seiten haben. 3tes Glied (Syzygie) länger wie breit. Mehrzahl der Glieder ziemlich kurz, dreieckig.

Zweite Syzygie vom 38sten—45sten Gliede. Die folgenden häufig in Zwischenräumen von 4—9.

Untere Pinnulae auf beiden Armseiten gleich lang. Pin. des 2ten Br. meist so lang wie die des 4ten. Diese ist etwas dicker, 11 mm. lang und von 20 ziemlich gleichförmigen Gliedern. Die 3 oder 4 folgenden Pinnulae nehmen an Länge ab; kleinste 5 mm.

Scheibe: stark eingeschnitten. 16 mm Dm.

Klafterung: 28 cm.

Neu - Britannien. Vier Exemplare, (Berlin, durch Dr. O. Finsch).

11. **Antedon erinacea** n. sp.

Centrodorsale groß, halbkuglig, fast ganz mit Cirren bedeckt; Die Cirren, etwa 25 an Zahl, ziemlich dünn und schlank; Länge 4 cm; Gliederzahl 50—60; an den äußeren Gliedern manchmal kleine Dornen.

Erste Radialia fast verborgen; die zweiten seitlich halb vereinigt. Axillaria pentagonal. Theilung der Radien vierfach. Postpalmaria nur von der Außenseite der palmaren Axillaria entspringend. Aeußerer Rand der Radien glatt. Auf der Verbindung der Axillaria mit dem ihnen vorangehenden Gliede ein kleiner Höcker.

51, vollkommen glatte, dünne Arme von relativ geringer Länge. Glieder ziemlich scharf keilförmig, weiterhin abgestumpfter.

Zweite Syzygie vom 40sten—50sten Gliede; die folgenden in Zwischenräumen von 8—9.

Die Scheibe ist umgeben von einem dichten Kranz gestreckt dornartiger Pinnulae. Pin. des 2ten und 4ten Brachiale etwa 14 mm lang; ganz steif und spitz dornförmig; beide mit 25 kurzen Gliedern. Die folgenden zwei Pinnulae von gleichem Charakter, an Länge abnehmend. Am äußeren Arme auch die Pinnula des 10ten Br. noch steif; 5 mm lang. Pin. des 12ten u. 14ten Br. ganz klein, dann nimmt die Länge zu.

Scheibe fehlt.

Klafterung etwa 21 cm.

Cebu Islands. Ein Exemplar. (Hamburg, durch Capitän Ringe.)

12. **Antedon tenuipinna** n. sp.

Centrodorsale convex. 15 Cirren; circa 20 Glieder, davon das 6te—8te verlängert; vom 9ten an mit einem aufgerichteten, scharfen Dorne und zwei horizontalen Dornen, je einem an jedem Ende des Gliedes.

Erste Radialia sichtbar; zweite seitlich ganz frei. Axillaria pentagonal. Zwei Radiën theilen sich zweifach, einer dreifach und zwei einfach. Aeußerer Rand gekerbt. — Dorsal keine Höcker.

16 glatte, schlanke Arme, von ziemlich langen Gliedern. Glieder stumpf keilförmig. Die syzygialen Glieder lang.

Die zweite Syzygie (mit Ausnahme der Arme erster Ordnung) um das 15te Glied herum, die folgenden in Zwischenräumen von 4—7.

Die zwei ersten Pinnulae (2te u. 4te Br.) gleich lang und dick, 7 mm, steif und gerade dornförmig; etwa 8 stark verlängerte Glieder. Folgende von gleichem Charakter, aber nur 4 mm lang. Pin. des 8ten Br. weniger steif und nicht 3 mm erreichend. — Die distalen Pinnulae sehr zart und haarähnlich; bis 7 mm. Sacculi nicht zahlreich.

Scheibe: 11 mm Dm. nur wenig eingeschnitten.

Klafterung: 12,5 cm.

Neu-Britannien. Ein Exemplar. (Berlin, durch Dr. O. Finsch.)

13. **Antedon oxyacantha** n. sp.

Centrodorsale dick, seitlich gewölbt. 30—35 ziemlich dünne, etwas comprimirte Cirren in 2 unregelmäßigen Reihen; circa 25 Glieder; Länge 28 mm.

Erste Radialia verborgen; zweite seitlich ganz frei. Keine Postpalmaria; Palmaria entspringen nur von der Außenseite der distichalen Axillaria, so daß zu jedem Radius 6 Arme gehören. Auf der Verbindung der Axillaria mit dem vorangehenden Gliede ein Höcker. Aeußerer Rand der Radien mit kleinen Verdickungen.

In der Regel 30 Arme, von ziemlich glatter Oberfläche. Glieder kurz, dreieckig und weiterhin stumpfer keilförmig.

Zweite Syzygie vom 12ten bis 25sten Brachiale; die folgenden in Zwischenräumen von 7—10 Gliedern.

Erste Pinnula schlank und geißelförmig; 27 etwas längliche Glieder; 15 mm lang. Die drei oder vier folgenden Pin. dicker, ganz steif und gestreckt dornförmig, mit wenigen, stark verlängerten Gliedern. Pin. des 4ten u. 6ten Br. bis 20 mm lang; 12—13 Glieder.

Scheibe: eingeschnitten; 15 mm Dm.

Klafterung: 20—28 cm.

Amboina.

Die Art unterscheidet sich von der nahe verwandten *Antedon spicata* Carp. durch die Beschaffenheit ihrer äußeren Pinulae, die nicht „slender and filiform“ sind, und ferner dadurch, daß die Pin. des 4ten—10ten Br. steif und dornförmig sein können, während bei *Antedon spicata* nur die des 4ten und 6ten Br. diesen Charakter besitzen. Auch ist die Gliederzahl der Pin. des 4ten Br. bei letzterer Art eine größere („16 und mehr“). Durch die geringe Gliederzahl und große Länge der Glieder dieser Pinnula nähert sich die neue Species der *Antedon tuberculata* Carp. Bemerkenswerth ist schließlich die geringe Längendifferenz zwischen der 2ten und 3ten Pin. unsrer Art; die Pin. des 4ten Br. kann sogar die des 6ten an Länge übertreffen.

14. **Antedon monacantha** n. sp.

Centrodorsale gewölbt. Etwa 30 Cirren in 3 unregelmäßigen Reihen. Gliederzahl circa 20.

Erste Radialia ein bischen sichtbar; zweite ganz frei seitlich. Keine Palmaria. Aeußerer Rand der Radien (vom 2ten Radiale bis 1. Br.) mit ziemlich starken unregelmäßigen Verdickungen. Verbindung der Axillaria mit dem ihnen vorangehenden Gliede etwas buckelig.

17 glatte Arme, wovon 3 erster Ordnung. Glieder vom 8ten an fast dreieckig, aber weiterhin bald stumpfer keilförmig.

Zweite Syzygie (mit Ausnahme von Armen erster Ordnung) um das 12te Glied herum. Die folgenden in Zwischenräumen von 2—4.

Pinnula des 2ten Br. schlank und biegsam, etwa halb so lang wie die folgende; 15 Glieder, Mehrzahl länger wie dick. Pin. des 4ten Br. viel dicker, dabei ganz steif, grade und dornförmig; 9—10 mm lang; circa 12 sehr verlängerte Glieder. Pin. des 6ten Br. nicht halb so lang, biegsam und vom Charakter der folgenden Pinnulae. Länge dieser nimmt zu vom 7ten Paare an.

Scheibe: 11 mm Dm. Stark eingeschnitten.

Klafterung: 17 cm.

Mortlock-Inseln. (Göttingen; Hamburg.) Torres-Str.

15. **Antedon spinipinna** n. sp.

Centrodorsale convex. 15—20 feine und etwas comprimirte Cirren, in 2 unregelmäßigen Reihen; etwa 15 Glieder, 4te—9te verlängert.

Erste Radialia sichtbar; zweite frei seitlich. Mehrzahl der Radien theilt sich einfach. Keine Palmaria. Aeußerer Rand glatt; keine Höcker auf den Verbindungen der Stammglieder.

12 glatte Arme. Glieder keilförmig.

Zweite Syzygie im 8ten Brachiale; dann in Zwischenräumen von 2—3 Gliedern.

Pinnula des 2ten Br. etwas steif und griffelförmig; ungefähr 12 verlängerte Glieder. Die des 4ten Br. bedeutend dicker und ein gutes Theil länger; ganz steif und griffelförmig, einem graden spitzen Dorne gleichend; Länge 6 mm; 8—10 sehr lange Glieder. Die beiden folgenden Pinnulae weniger steif und an Länge abnehmend.

Scheibe: 7 mm Dm. Nicht eingeschnitten.

Klafterung: 7 cm.

Amboina. Ein Exemplar.

16. **Antedon protecta** (Ltk. M. S.) n. sp.

? Syn.: Antedon imparipinna Carp.

Centrodorsale mäßig groß bis groß. 25—46 Cirren in 2 oder theilweise 3 Reihen; 22—25 ziemlich gleichmäßige Glieder; Dorn des vorletzten gewöhnlich schwach.

Erste Radialia theilweise oder ganz verborgen; zweite meist in partieller Berührung; kurz. Axillaria pentagonal. Die Radien meist in ziemlich enger Berührung. Radien theilen sich dreifach. Außenrand der Stämme gelegentlich gekerbt.

Gewöhnlich gegen 40 Arme. Mehrzahl der Glieder dreieckig und stumpfer keilförmig.

Zweite Armsyzygie vom 12ten—16ten Gliede; die folgenden in Zwischenräumen von 7—10.

Die beiden äußeren der 4 zu einer distichalen Gruppe gehörenden Arme tragen größere untere Pinnulae als die inneren.

Pinnula des 2ten Brachiale dünn; 12—35 Glieder; etwa so lang wie die folgende. Pin. des 4ten Br. viel dicker, ziemlich steif und bei weitem die stärkste Pin. des Armes; 14 bis über 30 glatte, cylindrische Glieder; Länge 10—17 mm. Pin. des 6ten Br. ganz klein und die folgende noch kleiner.

Scheibe: Tief eingeschnitten. Ungefähr 17 mm Dm.

Klafterung: 14 cm.

Indischer Archipel und Polynesien.

17. **Antedon tenera** (Ltk. M. S.) n. sp.

Centrodorsale mäßig groß und flach. 30—40 zierlich gebaute

Cirren, in 2, oder stellenweise 3 Reihen; 20—30 Glieder; die äußeren mit einem dorsalen Knöpfchen.

Erste Radialia theilweise sichtbar; zweite ganz frei. Axillaria pentagonal. Theilung der Radien nicht mehr wie 4fach. Aeußerer Rand derselben glatt.

32—43 glatte, dünne Arme. Glieder dreieckig und später stumpfer keilförmig.

Zweite Syzygie meist im 15ten Br., folgende in Zwischenräumen von 9—17 Gliedern.

Untere Pinnulae stets dünn und gewöhnlich klein; mit Neigung zur Kielung. Die der äußeren Arme manchmal länger wie die der inneren. Pin. des 2ten Br. am äußeren Arme 8 mm; die des 4ten Br. meist 10 mm mit circa 25 länglichen Gliedern; kaum dicker als die des 2ten. Die 3 folgenden Paare klein, von ziemlich gleicher Länge, 4—5 mm.

Scheibe: 10 mm Dm. Stark eingeschnitten.

Klafterung: 13 cm.

Queensland. (Göttingen.) Torres-Str.

18. **Antedon amboinensis** n. sp.

Centrodorsale flach scheibenförmig. 25 randständige Cirren in 2 Reihen; 14—17 mm lang; 20—25 Glieder, äußere zuweilen gekielt oder mit Dorn.

Erste Radialia fast ganz verborgen; zweite seitlich vollständig vereinigt. Axillaria kurz. Keine Postpalmaria. Palmaria nur von der Außenseite der distichalen Axillaria. 6 Arme zu jedem Radius. Die benachbarten Radien in Berührung.

Nicht über 30 Arme, meist gegen 30. Kurze Glieder, dreieckige und stumpfer keilförmige.

Zweite Syzygie vom 13ten—22sten Gliede, die folgenden gewöhnlich in Zwischenräumen von 8—9.

Untere Pinnulae ziemlich steif, aber nicht gestreckt; an beiden Armseiten ziemlich gleich lang. Pin. des 2ten Br. dünn, namentlich gegen die Spitze; 16—20 längliche Glieder; ein gutes Theil kürzer als die folgende. Diese (4te Br.) ist bedeutend steifer und dicker; 10—12 mm lang, mit 12—20 Gliedern, von denen die Mehrzahl länger wie breit ist. Pin. des 6ten Br. kürzer und schwächer, aber länger wie die erste. Die zwei folgenden nehmen noch an Länge ab.

Scheibe stark eingeschnitten. 14—16 mm Dm.

Klafterung: 15—19 cm.

Amboina.

Die Art erinnert an *Ant. brevicuneata* Carp., unterscheidet sich aber von dieser durch den gänzlichen Mangel einer seitlichen Abplattung der Armbasis.

Distichalia 3gliedrig.

19. **Antedon bengalensis** n. sp.

Centrodorsale ziemlich groß, convex. 17 Cirren, in einer oder stellenweise zwei Reihen; 13 mm lang; 22—24 Glieder, die vom 9ten an dornig sind.

Erste Radialia theilweise sichtbar; zweite kurz und breit; frei oder in partieller Berührung seitlich. Axillaria kurz, breit, pentagonal. Nur eine distichale Serie.

11 Arme. Die Rückenlinie stumpf gesägt. Sehr kurze Glieder; die ersten 8 oder 9, das 3te nicht ausgenommen, so kurz wie die übrigen. Glieder vom 10ten an abgestumpft keilförmig und weiterhin mehr scheibenförmig.

Zweite Syzygie im 8ten Br., die folgenden in Zwischenräumen von 2—5. Zweite Syzygie in Armen zweiter Ordnung im 15ten Gliede, die folgenden in Zwischenräumen von 7—9.

Untere Pinnula ziemlich steif; distichale resp. die des 2ten Br. kurz, 20 Glieder. Die zweite und dritte derselben Seite 7 mm; die folgenden Pinnulae nehmen an Länge ab bis zum 6ten Paare. Die proximalen Glieder aller dieser Pinnulae sind kurz und breit und an den 8—9 ersten Paaren deutlich gekielt.

Scheibe: 8 mm Dm. Stark eingeschnitten.

Klafterung: wahrscheinlich 10 cm.

Golf von Bengalen. Ein Exemplar. (Göttingen.)

20. **Antedon Martensi** n. sp.

Centrodorsale dick scheibenförmig, mit flacher Oberfläche. Etwa 20 dicke Cirren in 2 Reihen; 18 mm lang; circa 25 Glieder, die äußeren einzeln mit schwachen Dornen; Distale Ränder der Glieder vortretend.

Erste Radiale eben sichtbar; zweite ganz frei seitlich. Axillare pentagonal. Palmare Serien zweigliedrig, das Axillare ohne Syzygie. Die Verbindungen der Axillaria mit dem vorangehenden Gliede glatt. Der äußere Rand der Radien mit schwachen Verdickungen an dem Rad. Axill. und dem ersten Distichale.

Wahrscheinlich nicht mehr als 30 Arme. Kurze übergreifende Glieder mit stark vorstehenden distalen Rändern.

Zweite Syzygie um das 23ste Brachiale.

Die distichale Pinnula ist sehr dick und steif, etwa 9 mm lang, mit 12—15 Gliedern, von denen die 3 basalen sehr groß sind. Die folgenden Glieder werden sprungweise kleiner. Pin. des 2ten Br.

kleiner mit ebenfalls relativ großen basalen Gliedern. Die Pin. des 4ten Br. viel kleiner und nicht ganz 4 mm lang. Sacculi spärlich.

Scheibe: 10 mm Dm. Stark eingeschnitten.

Färbung des Skelettes: graubraun.

Singapore. Ein schlecht erhaltenes Exemplar (Berlin, durch Ed. v. Martens).

21. **Antedon Kraepelini** n. sp.

Centrodorsale dick, in der Mitte stark ausgehöhlt, die Seiten gewölbt. Circa 30 Cirren (nur 2 Stummel erhalten).

Erste Radialia nur wenig sichtbar; zweite vollkommen frei seitlich. Axillaria ziemlich kurz, pentagonal. Palmar-Serien, innere stets zweigliedrig, äußere oft dreigliedrig das Axillare mit Syzygie. Keine Postpalmaria. Proximale Verbindung der Axillaria glatt.

33 rauhe, ziemlich kurze Arme, die sich rasch verjüngen. Glieder vom 8ten an sehr kurz, und abgestumpft keilförmig mit ziemlich stark vorspringenden distalen Rändern; in der zweiten Armhälfte mehr scheibenförmig, mit glatterer Verbindung.

Zweite Syzygie um das 23ste Brachiale herum. Dann in Zwischenräumen von 8 Gliedern.

Distichale und palmare Pinnula dick. Erstere 13 mm lang mit etwa 18 annähernd quadratischen rundlichen Gliedern, die gegen das Ende der Pinnula allmälig dünner werden. Die folgende Pin. derselben Seite von gleichem Charakter, etwas kürzer. Die nächste viel kürzer, nach den basalen Gliedern schnell dünner werdend. Pin. des 3ten Br. außerordentlich klein. Die folgenden Pin., besonders vom 6ten Br. ab, sehr winzig; ihre Länge nimmt erst vom 14ten Br. wieder zu und erreicht nicht mehr als 5 mm. Sacculi klein und spärlich.

Scheibe fehlt.

Klafterung: 8—10 cm.

Akyab. Ein Exemplar. (Hamburg.)

22. **Antedon Brockii** n. sp.

Centrodorsale groß und dick mit flacher Oberfläche. Circa 30 kräftige Cirren in 2 oder stellenweise 3 Reihen; Länge 30 mm; 30—37 Glieder mit starkem Dorn vom 10ten oder 12ten an.

Erste Radialia sehr wenig zu sehen; zweite kurz, theilweise vereinigt. Axillaria sehr kurz, pentagonal. Palmaria zweigliedrig, das Axillare nicht syzygial, nur von der Innenseite der distichalen Axillaria entspringend. Die Verbindung zweier auf ein Axillare folgenden Glieder etwas buckelig, am meisten die der beiden ersten Brachialia. Keine Postpalmaria.

28 Arme mit ziemlich langen Pinnulae. Kurze Glieder mit vorstehenden distalen Rändern. Vom 10ten etwa an abgestumpft keilförmig und bald mehr scheibenförmig. Basis des Armes von unebener Oberfläche in Folge von alternirend seitlich gelegenen Höckern auf den Verbindungen der unteren Glieder.

Zweite Syzygie vom 22sten—26sten Brachiale, die folgenden in Zwischenräumen von 7—9.

Distichale Pinnula (oder die des 2ten Br. in Armen erster Ordnung) schlank und fein, 11 mm. Die darauf folgende Pin. des 2ten Br. (resp. 4ten Br.) beträchtlich größer und fast so lang wie die des 4ten. Diese ist die längste und erreicht 20 mm mit 30—35 Gliedern. Dieselbe ist schlank und wird sehr dünn in ihrem äußeren Theile. Die Glieder dieser längeren Pinnulae haben vorstehende gezähnte distale Ränder. Pin. des 6ten Br. bedeutend kürzer als die des 4ten. Die äußeren Pin. erreichen 12 mm.

Scheibe: 15 mm Dm. Stark eingeschnitten.

Klafterung: 25 cm.

Farbe: schwärzlich braun.

Amboina. Ein Exemplar.

23. **Antedon affinis** n. sp.

Centrodorsale ziemlich klein, scheibenförmig; etwa 24 Cirren in 2 unregelmäßigen Reihen. Länge 20 mm. 25—30 Glieder, die äußeren stark comprimirt, gekielt oder mit kleinem Dorn.

Erste Radialia sehr wenig zu sehen; zweite theilweise mit einander vereinigt. Axillaria ziemlich kurz, pentagonal. Es entspringt von ihnen ein definitiver Arm, neben einem sich weitertheilenden Stamm. Palmare Stämme zweigliedrig. Keine Postpalmaria. — 18 schlanke ziemlich glatte Arme. Drittes Glied (Syzygie) breiter als lang. Vom 10ten an dreieckige Glieder, die weiterhin stumpfer keilförmig und endlich scheibenförmig werden.

Zweite Syzygie vom 10ten—13ten Gliede; die folgenden in Zwischenräumen von 8—10. Die Zwischenräume in Armen erster Ordnung betragen 4—5 Glieder.

Die erste Pinnula an der äußeren Seite des Radius klein und zart, mit relativ großen gekielten Gliedern an der Basis. Die auf eine distichale Pin. folgende Pin. des 2ten Br. beträchtlich länger, — 9 mm. Pin. des 3ten Br. stets sehr klein. Pin. der 4ten Br. 12 mm. Dann nimmt die Länge ab bis zum 12ten Gliede. An Armen erster Ordnung ist die Pin. des 6ten Br. fast so lang wie die des 4ten. Die

Pin. etwa der ersten 20 Br. haben einige gekielte Glieder an der Basis. Länge der äußeren Pin. 7 mm.

Scheibe: eingeschnitten; 13 mm Dm.

Klafterung: wahrscheinlich nur 13 cm.

Färbung des Skelettes: hell chokoladebraun.

Amboina. Ein Exemplar.

Die Art ist aufs nächste verwandt mit *Antedon Ludovici* Carp. Möglicherweise wird sie sich später als identisch mit dieser erweisen lassen.

24. **Antedon nematodon** (Ltk. M. S.) n. sp.

Centrodorsale dick, convex. 30 Cirren in 2 und stellenweise 3 unregelmäßigen Reihen. 40—50 annähernd gleichförmige Glieder, von denen keins länger als breit; die äußeren mit kräftigen Dornen. Länge der Cirren 25 mm.

Erste Radialia nicht sichtbar; zweite sehr kurz, vollkommen frei seitlich. Axillaria fast dreieckig. Einzelne distichale Serien 2-gliedrig. Palmarserien 2-gliedrig, aber 3-gliedrig, wenn sie auf 2-gliedrige Distichalserien folgen. Keine Postpalmaria. — 38 rauhe Arme von kurzen scheibenförmigen Gliedern, deren distale Ränder ziemlich stark vortreten.

Zweite Syzygie oft um das 30ste Brachiale herum, manchmal erst um das 40ste. Die folgenden in Zwischenräumen von 12—20.

Die unteren Pinnulae von feiner Struktur. Distichale Pin. 12 mm lang, mit circa 25 Gliedern, von denen die unteren ziemlich dick, die äußeren sehr dünn sind. Pin. des 2ten Br. von ähnlichem Aussehen, 13 mm lang; verjüngt sich allmäliger. Die Pin. des 3ten Br. sehr klein. Die auf das 2te Br. folgenden Pin. nehmen ziemlich sprungweise an Länge ab bis zum 12ten Gliede. Die äußeren Pin. erreichen 10 mm.

Scheibe: 15 mm Dm. Tief eingeschnitten.

Farbe: tief schwärzlich braun.

Bowen. Ein Exemplar. (Hamburg.)

25. **Antedon crassipinna** n. sp.

Centrodorsale dick und groß, manchmal tief ausgehöhlt. Ungefähr 37 dicke, ziemlich lange, randständige Cirren in 3 Reihen; Länge 46 mm; 30—40 gleichförmige Glieder, von denen keins länger wie breit ist. Aeußerste Glieder manchmal ein wenig dornig.

Erste Radialia zuweilen ganz verborgen; zweite seitlich theilweise vereinigt. Axillaria pentagonal. Einzelne distichale Stämme zweigliedrig, das Axillare ohne Syzygie. Zwei oder drei post-distichale Axillaria. Dreigliedrige und zweigliedrige Palmarserien von gelegentlich gesetzmäßiger Vertheilung, der Art, daß die inneren zweigliedrig, die äußeren dreigliedrig sind; zuweilen die dreigliedrigen an Zahl überwiegend. Alle Postpalmaria dreigliedrig, das Axillare mit Syzygie. Die Verbindungen der Axillaria mit dem ihnen vorangehenden Gliede buckelig.

46—56 Arme von rauher Oberfläche und kurzen scheibenförmigen Gliedern.

Zweite Syzygie vom 22sten—30sten Brachiale; die folgenden in Zwischenräumen von 12—15.

Distichale, palmare und postpalmare Pinnulae steif und sehr dick. 20 mm lang. Die Pin. des 2ten Br. hat denselben Charakter, ist aber kleiner, 16 mm. Die Glieder dieser Pin. haben vortretende distale Ränder. Pin. des 4ten Br. beträchtlich kleiner. Die Länge nimmt ab bis zum 10ten Br.

Scheibe: 32 mm. Dm.

Klafterung: 40 cm.

Färbung des Skelettes: purpurviolett oder Chokoladebraun.

Amboina. 3 Exemplare. (Göttingen.) Cochinchina. (Hamburg.)

---

26. **Actinometra macrobrachius** (Ltk. M. S.) n. sp.

Centrodorsale klein, flach, fünfeckig, ohne eine Spur von Cirren. Erste Radialia vollkommen sichtbar; zweite ziemlich kurz und breit, seitlich vereinigt. Axillaria fünfeckig, breit und kurz; ihr distaler Winkel spitz. Die Radien theilen sich 3 mal, einzelne 4 mal. Die distichalen Serien dreigliedrig, das Axillare syzygial. Die folgenden Theilungsserien zweigliedrig, ohne Syzygie im Axillare.

42 lange Arme von nur mäßig rauher Oberfläche. Glieder ziemlich kurz. Vom 6ten an keilförmig, nach dem proximalen Armdrittel abgestumpfter keilförmig und bald einfach scheibenförmig. Die Basis des Armes ist dünn, größte Dicke des Armes um das 12te Glied.

Erste Syzygie im 2ten Brachiale; die nächste vom 20sten—25sten Gliede; dann in Zwischenräumen von 7—10 Gliedern.

Distichale Pinnula 16 mm lang, schlank und dünn, mit kurzem schwach entwickelten Kamm. Palmare Pin. nur etwa 10 mm. Pin. des 2ten Br. bedeutend dünner, 8—9 mm. Die des 3ten Br. 5 mm.

Die nächst folgenden von gleicher Größe und auch dann nur wenig länger werdend und überall von feiner Struktur.

Scheibe nackt. 16 mm Dm.

Mund: radial.

Färbung des Skelettes: hellgelblichbraun.

Klafterung: 34 cm.

China-See. Ein Exemplar. (Hamburg.)

Die neue Species gehört zu Carpenters „Fimbriata-Gruppe".

27. **Actinometra gracilis** n. sp.

Centrodorsale klein, ganz flach, kaum erhaben über dem Niveau der ersten Radialia; von fünfeckigem Umriß, mit leicht eingebogenen Seiten; im Centrum eine Aushöhlung; keine Spur von Cirren.

Erste Radialia vollkommen sichtbar; zweite seitlich ganz frei, von der Länge des pentagonalen Axillare. Die Radien weichen beträchtlich auseinander und theilen sich nicht mehr wie viermal. Die Stämme und Arme sind dünn. Die distichalen Serien dreigliedrig, das Axillare mit Syzygie. Die postdistichalen Serien zweigliedrig; das Axillare ohne Syzygie, aber mit dem vorhergehenden Gliede durch Syzygie verbunden.

48 Arme, die sehr schlank sind und sich besonders in ihrem äußeren Theile außerordentlich verdünnen. Glieder ziemlich lang, vom etwa 8ten an stumpf keilförmig mit etwas vorstehendem, feingezähntem distalen Rande.

Erste Syzygie zwischen erstem und zweitem Brachiale; die nächste im 9ten oder 10ten Gliede. Dann in Zwischenräumen von 2.

Die unteren Pinnulae dünn. Kamm unbedeutend. Distichale Pinnula 13 mm lang, mit zahlreichen Gliedern. Die nächste kürzer, die dann folgenden drei ganz bedeutend kleiner. Dann nimmt die Länge erheblich zu und erreicht etwa 10 mm. Die Glieder der äußeren Pin. sehr dornig.

Scheibe 15 mm Dm.; etwas eingeschnitten, mit feinen Kalkborsten bedeckt. Mund fast central.

Klafterung: 22 cm.

Färbung: hellgraubrauner Gesammtton mit sehr hübscher Zeichnung.

Pulo Edam. Ein Exemplar. (Göttingen.)

Die Species ist nahe verwandt mit Antedon typica Lovén.

Ueber die Pyroëlectricität des Turmalins.

Von

Eduard Riecke.

Die Untersuchungen über die Pyroëlektricität des Turmalins, von welchen ich früher [1]) berichtet habe, führten zu der Erkenntniß, daß die elektrische Erregung der Crystalle nicht allein abhängig ist von der Abkühlung beziehungsweise der Erwärmung, sondern wesentlich mitbedingt wird durch die elektrische Leitungsfähigkeit, deren Einfluß bei den gewöhnlichen Methoden der Beobachtung nicht ausgeschlossen werden kann. Ich habe daher in der ersten Abhandlung eine Beobachtungsmethode befolgt, welche eine Berechnung der Leitungsfähigkeit aus dem zeitlichen Verlaufe der elektrischen Ladung ermöglicht; ich habe gezeigt, wie man bei gegebener Leitungsfähigkeit die ganze bei der Abkühlung entwickelte Elektricitätsmenge berechnen kann aus der wirklich beobachteten. Die Leitungsfähigkeit selbst hat aber einen doppelten Ursprung; entweder hat man es mit einer durch die höhere Temperatur bedingten Leitungsfähigkeit der ganzen Masse des Turmalins zu thun, oder mit einer Leitung seiner Oberfläche, welche wohl als Folge einer an derselben stattfindenden Condensation von Wasserdampf oder Gas anzusehen ist. Das schnellere oder langsamere Verschwinden der bei der Abkühlung auftretenden Ladung ist bedingt durch diese letztere; in dem Maase, in welchem die Bildung einer adsorbirten Gasschichte verzögert wird, muß auch die elektrische Ladung langsamer verschwinden. Diese Vermuthung fand ihre Bestätigung durch die in der zweiten Abhandlung beschriebenen Versuche, bei welchen Turmaline in wohlgetrocknetem, luftverdünntem Raume die bei der Abkühlung entwickelte elektrische Ladung tagelang behielten. Die Formeln, welche ich für die Elektricitätsentwicklung eines frei sich abkühlenden Turmalines aufgestellt hatte, konnten indeß nur auf einen Theil der Beobachtungen in Anwendung gebracht werden, da sie auf der Voraussetzung einer von der Zeit unabhängigen Leitungsfähigkeit beruhen; bei einer größeren Zahl von Beobachtungen, so insbesondere bei den mit einem Elbaer Turmaline angestellten, war aber die Leitungsfähigkeit während der Abkühlung einer fortdauernden Aenderung unterworfen. Eine andere Erscheinung,

1) Gött. Nachr. 1885 S. 405, 1887 S. 151.

welche im Allgemeinen gleichfalls die Anwendung der Theorie unmöglich macht, trat bei einem brasilianischen Turmaline (BI) hinzu; die elektrische Ladung desselben erlitt insbesondere bei stärkerer Erhitzung plötzliche Abfälle, welche wohl nur durch eine Selbstentladung des Turmalines erklärt werden können.

Die Methode der freien Abkühlung der isolirt aufgehängten Turmaline hat den großen Vorzug, daß sie wenigstens principiell die Möglichkeit gewährt, alle für die Pyroëlektricität wichtigen Größen, die elektrische Ladung, die elektrische Leitungsfähigkeit, die Abkühlungskonstante gleichzeitig zu ermitteln. Gegenüber den praktischen Schwierigkeiten aber, welche der allgemeinen Durchführung ihrer Theorie aus den angeführten Gründen erwachsen, erschien es zweckmäßig, auch die von Gaugain zuerst benutzte Beobachtungsmethode weiter zu verfolgen, als deren Ziel wir die Elimination des von der Leitungsfähigkeit ausgehenden Einflusses bezeichnen können. Am vollständigsten würde dieser Zweck erreicht, wenn man die mit metallischen Belegen versehenen Endflächen der Turmaline während der Abkühlung mit einem Galvanometer verbände. Statt dessen wurde bei den Versuchen von Gaugain und ebenso bei den meinigen das eine Ende der Turmaline mit der Erde, das andere mit einem zur Selbstentladung eingerichteten Elektroskop verbunden; die entwickelte Elektricität wurde gemessen durch die Zahl der aufeinanderfolgenden Selbstentladungen. Daß dabei das Resultat der Beobachtung durch eine etwaige Leitungsfähigkeit des Turmalines beeinflußt wird, leuchtet ein. Durch eine solche wird einmal die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Selbstentladungen verlängert, andererseits die Zahl der Selbstentladungen verkleinert. Wenn der Turmalin vollkommen isolirt, so gilt nach der von mir entwickelten Theorie für die elektrische Ladung während der Abkühlung die Formel

$$\varepsilon = E(1-e^{-az})$$

wo z die Zeit bezeichnet. Eine stärkere Leitungsfähigkeit des Turmalines muß sich dadurch verrathen, daß der beobachtete Verlauf der elektrischen Ladung von dem durch die Formel gegebenen Typus einer einfachen Exponentialkurve abweicht; eine geringere Leitungsfähigkeit aber braucht die Anwendbarkeit der Formel nicht wesentlich zu beeinträchtigen und könnte trotzdem den Gesammtbetrag der beobachteten Ladung in etwas verkleinern. Wenn aber auch die absoluten Werthe der elektrischen Ladungen, wie sie bei dem Gaugain'schen Verfahren beobachtet werden, voraussichtlich etwas zu klein sind, so erscheint dasselbe doch wohl anwendbar, wenn es sich um die Vergleichung der Elektricitätsmengen handelt, welche ein und derselbe Turmalin nach verschiedener Erhitzung entwickelt, oder um diejenigen, welche verschiedene Turmaline unter gleichen Umständen erzeugen. Von diesem Gesichtspunkt aus sind die zahlreichen Beobachtungen zu beurtheilen, deren Resultate im Folgenden vorgelegt werden. Für die Ausführung derselben bin ich den Herren H. Meyer, Krüger und Meissner zu Danke verpflichtet, ebenso Herrn Pockels für die Ausführung einer Reihe von Controlrechnungen.

Die Absicht, welche bei den folgenden Untersuchungen verfolgt wurde, war eine doppelte. Es sollte einmal die Gültigkeit der Formel

$$\varepsilon = E(1-e^{-az})$$

in weiterem Umfange geprüft werden, andererseits sollte für eine grössere Zahl von Turmalinen die Abhängigkeit der bei der Abkühlung entwickelten Elektricitätsmenge von der Differenz zwischen der Anfangs- und der End-temperatur ermittelt werden.

Die Prüfung der für die entwickelte Elektricitätsmenge aufgestellten Formel erstreckte sich nach drei verschiedenen Richtungen. Zuerst wurde untersucht, in wie weit jede einzelne Abkühlungsbeobachtung dem Gesetze folgte. Dabei ergab schon der oberflächliche Anblick der Beobachtungsreihen die Existenz zweier typisch verschiedener Fälle, von welchen die in Fig. 1 und Fig. 2 gezeichneten Curven eine Anschauung gewähren. Die erste bezieht sich auf den Turmalin M II. Die Abkühlungszeiten sind auf der Horizontalen aufgetragen, die Menge der entwickelten Elektricität, d. h. die Zahl der Selbstentladungen des Elektroskopes in der dazu senkrechten Richtung; die den einzelnen Beobachtungen entsprechenden Punkte sind markirt, die ausgezogene Curve entspricht der aus den Beobachtungen berechneten Formel

$$\varepsilon = 49{,}2\,(1-e^{-0{,}217\,z}).$$

Die Figur giebt also für diesen Fall gleichzeitig ein Bild von der zwischen Beobachtung und Rechnung herrschenden Uebereinstimmung. Die Fig. 2 bezieht sich auf den Turmalin P I. Die Curve besitzt in diesem Fall einen Wendepunkt, sie ist zu Anfang gegen die Axe z konvex und weicht nur ganz langsam von derselben ab in Folge der auffallenden Verzögerung, welche der Eintritt der ersten Selbstentladung des Elektroskopes erleidet. Von 22 untersuchten Crystallen gehörten 12 vollständig dem ersten Typus an; es sind dieß 5 Crystalle von Brasilien, 2 rothe Crystalle von Mursinsk, ein Turmalin von Elba, *E* III, einer von Prevale, *P* II, einer von Unterdrauburg, und einer vom Gouverneur. Einen Uebergang zum zweiten Typus bilden 4 schwarze Crystalle von Mursinsk. Bis zu Erhitzungen von etwa 140° zeigen dieselben keine Verzögerung der ersten Entladung; bei höheren Temperaturen tritt eine Verzögerung ein; immer aber bleibt dieselbe so klein, daß der Gesammtcharakter der den Verlauf der elektrischen Ladung darstellenden Curven durch die anfängliche Störung kaum beeinflußt wird. Dasselbe Verhalten zeigt ein Turmalin von Hörlberg. Eine der mit diesem Turmalin angestellten Beobachtungsreihen wird dargestellt durch Fig. 3. Mit Bezug auf die Turmaline von Mursinsk ist noch hervorzuheben, daß die Verzögerung der ersten Entladung zu Anfang der ganzen Untersuchung auch bei den höchsten Temperaturen kaum merklich war, daß sie erst im Verlauf der Untersuchung deutlicher hervortrat. Es scheint, daß in der Natur dieser Crystalle durch die wiederholten bis auf 190° steigenden Erhitzungen eine Aenderung hervorgebracht wurde. Dasselbe ist, nur in sehr viel höherem Maase, der Fall bei 3 Crystallen von Elba; auch diese zeigten anfangs nur geringe Abweichungen von dem ersten Typus, bei welchem die elektrische Ladung während der Abkühlung durch eine Exponentialkurve dargestellt wird; während der Untersuchung aber nahm die Verzögerung der ersten Entladung zu und erreichte schließlich ziemlich erhebliche Beträge. Endlich bleiben nun noch 3 Crystalle übrig, ein schwarzer von Mursinsk (*M* I, a), der bereits erwähnte von Prevale, *P* I, und einer von Sarapulsk; die beiden ersten ergaben von vornherein und unter allen Umständen sehr große Verzögerungen der ersten Entladung und erscheinen daher als vollständige Repräsentanten des zweiten Typus, welcher in seinem Verhalten der Curve der Fig. 2 entspricht.

Der Crystall von Sarapulsk dagegen nimmt eine besondere Stellung ein, indem er in höheren Temperaturen eine kleine, dagegen in tieferen eine sehr erhebliche Verzögerung der ersten Entladung erleidet, wie sich dieß aus der folgenden Tabelle ergiebt.

T	1	2	3	4	5
167.9	0.84	1.04	1.20	1.38	1.53
105.6	3.41	4.11	4.87	5.73	6.88

In derselben sind für zwei verschiedene Erhitzungstemperaturen die Zeiten der 5 ersten Entladungen angegeben.

Zu einer genaueren Prüfung der Formel

$$\varepsilon = E(1-e^{-az})$$

wurden nun Beobachtungen mit denjenigen Turmalinen verwandt, welche dem ersten Typus angehören oder doch nur geringere Abweichungen von demselben zeigen. Es wurden also die Beobachtungen mit den zuletzt genannten Crystallen P I und M I a zunächst ausgeschlossen. Der Theorie zufolge sollte a während der Abkühlung einen konstanten Werth behalten; es traf dieß nur bei einem Theil der Turmaline zu, während bei anderen der Werth von a bei der Abkühlung gewissen Veränderungen unterworfen war. Nach dem Verhalten von a während der Abkühlung konnten die Turmaline des ersten Typus ihrerseits wieder in drei Gruppen geschieden werden. Bei der ersten erwies sich a während der Abkühlung als vollkommen konstant. Es gehören in diese Gruppe die 5 Crystalle von Brasilien, der Turmalin P II, die Crystalle von Unterdrauburg und vom Gouverneur. Bei einer zweiten Gruppe war a während der Abkühlung konstant, so lange die Erhitzung einen bestimmten Betrag nicht überschritt; bei höheren Anfangstemperaturen dagegen war der Werth von a während der ersten Minuten der Abkühlung kleiner, erhob sich dann aber schnell zu einem konstant bleibenden Betrage. Zu dieser zweiten Gruppe gehören 5 Crystalle von Mursinsk, der Elbaer Turmalin E III, der Crystall vom Hörlberg. Die bei denselben vorhandene Veränderlichkeit von a möge durch die in der folgenden Tabelle beispielsweise mitgetheilten Zahlenwerthe erläutert werden.

	$z =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
M II	190°	0.113	0.148	0.166	0.177	0.185	0.190	0.194	0.195	0.196	0.196	0.196
	142°	0.200	0.205	0.209	0.211	0.212	0.213	0.213	0.213	0.214	0.215	0.215
MR I	173°	0.134	0.139	0.143	0.146	0.149	0.150	0.151	0.152	0.152	0.152	0.152
	155°	0.145	0.150	0.152	0.154	0.155	0.156	0.157	0.157	0.157	0.156	0.156

In der ersten Horizontalreihe sind die Abkühlungszeiten in Minuten, in den darunter stehenden die entsprechenden Werthe der Abkühlungskoëfficienten angegeben; die in der ersten Vertikalreihe stehenden Zahlen geben die Erhitzungstemperaturen an.

Die dritte Gruppe wird gebildet durch drei Crystalle von Elba, *E*IV, *E*V und *E*VI. Bei diesen steigt gleichfalls der Werth von a während der Abkühlung aber ohne einen konstanten Grenzwerth zu erreichen; es wird dieses Verhalten anschaulich gemacht durch die Zahlen der folgenden Tabelle.

	$z =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
*E*IV	168°	0.138	0.143	0.150	0.156	0.165	0.173	0.180	0.184	0.186	0.190	0.193
	122°	0.185	0.190	0.192	0.195	0.196	0.198	0.199	0.199	0.200	0.202	
*E*V	161°	0.178	0.185	0.191	0.200	0.206	0.212	0.220	0.225			
	122°	0.226	0.230	0.231	0.235	0.240	0.245	0.249				

Der Crystall von Sarapulsk kann ebensogut zu der zweiten, wie zu der dritten Gruppe gerechnet werden. In höheren Temperaturen erreicht der Werth von a bei der Abkühlung ein Maximum; bei tieferen Temperaturen tritt die Annäherung an ein Maximum nicht mehr hervor, die Verzögerung der ersten Entladung nimmt wie schon erwähnt bei abnehmender Anfangstemperatur stark zu.

Untersucht man die Crystalle dieser 3 Gruppen mit Rücksicht auf den verzögerten Eintritt der ersten Entladung so bemerkt man, daß die Crystalle der ersten Gruppe keine Verzögerung aufweisen; die der zweiten Gruppe zeigen eine Verzögerung bei höherer Temperatur; die der dritten Gruppe gaben nach wiederholter Erhitzung Verzögerung auch bei tieferen Temperaturen. Es ist hiernach wahrscheinlich, daß die Veränderlichkeit von a durch dieselbe Ursache bedingt wird, wie die Verzögerung der ersten Entladung und zwar dürfte es das natürlichste sein, die Ursache in einer bei höherer Temperatur eintretenden Leitungsfähigkeit des Turmalines zu suchen.

Die im Vorhergehenden besprochene Eintheilung der Turmaline, welche auf der Verzögerung der ersten Entladung und auf dem Verhalten des Coëfficienten a während der einzelnen Abkühlung beruht, wird bestätigt durch das Ergebniß einer dritten Untersuchung. Für alle einzelnen Abkühlungsbeobachtungen wurden die Coëfficienten a berechnet; bei den Turmalinen der ersten Gruppe wurden aus den einzelnen von einander nur wenig abweichenden Werthen die Mittel genommen; bei den Turmalinen der zweiten Gruppe wurden die konstanten Grenzwerthe von a bei der weiteren Betrachtung benutzt; bei den Crystallen der dritten Gruppe wurden die für die Mitte der Abkühlungsperiode geltenden Werthe von a durch Interpolation bestimmt und weiterhin der Untersuchung zu Grunde gelegt. Diese war darauf gerichtet, ob die den einzelnen Abkühlungen entsprechenden Werthe von a konstant, d. h. von der anfänglichen Erhitzung der Turmaline unabhängig sind, oder ob der Abkühlungskoëfficient mit der Temperatur sich verändert.

Es wurden im Ganzen 239 Abkühlungsbeobachtungen benutzt und dementsprechend 239 Werthe des Coëfficienten a in der angegebenen Weise berechnet.

Constanz der Abkühlungskoëfficienten ergab sich bei den Crystallen von Brasilien, von Unterdrauburg, vom Gouverneur, vom Hörlberg, bei *P* II und *MR* II, im Allgemeinen also bei den Crystallen der ersten Gruppe.

Constanz bis zu Erhitzungstemperaturen von beiläufig 140° Graden, Abnahme bei höheren Temperaturen ergab sich bei den Turmalinen von Mursinsk, und Sarapulsk, im Wesentlichen also bei den Crystallen der zweiten Gruppe.

Einen unregelmäßigeren Verlauf zeigen die Werthe von a bei den Turmalinen von Elba. Sie erweisen sich als ziemlich konstant bis zu Temperaturen von etwa 100°, dann nehmen sie rasch ab, erreichen einen Minimalwerth bei einer Erhitzung auf etwa 140° und nehmen bei stärkerer Erhitzung wieder zu.

Diese Verhältnisse werden anschaulich gemacht durch die folgende Tabelle.

1. Turmaline von Brasilien.

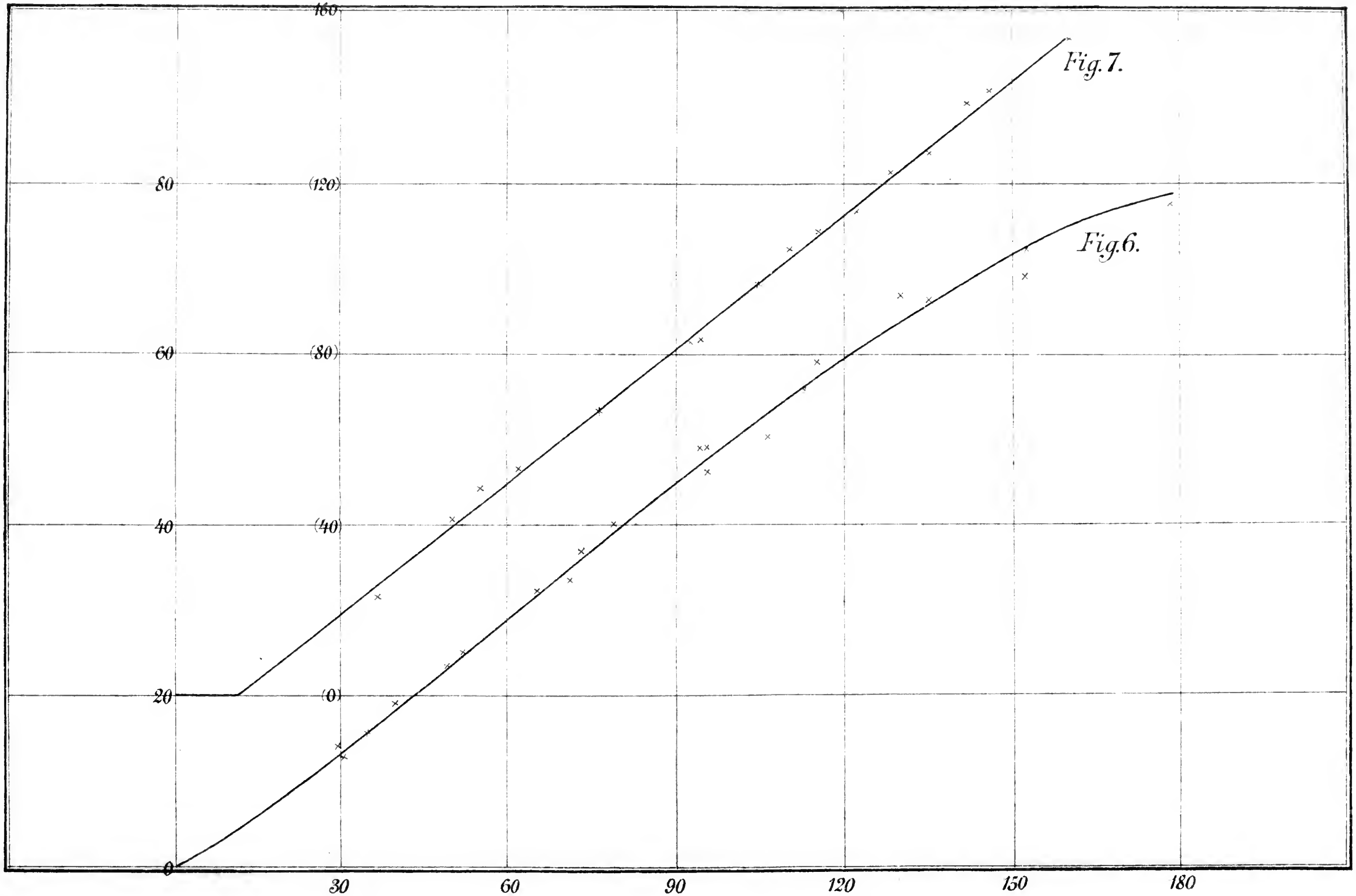
T	175°	153°	130°	106°	82°	56°
B III	0.249	0.248	0.249	0.246	0.248	0.245
B V	0.227	0.235	0.228	0.228	0.228	0.231

2. Turmalin vom Gouverneur.

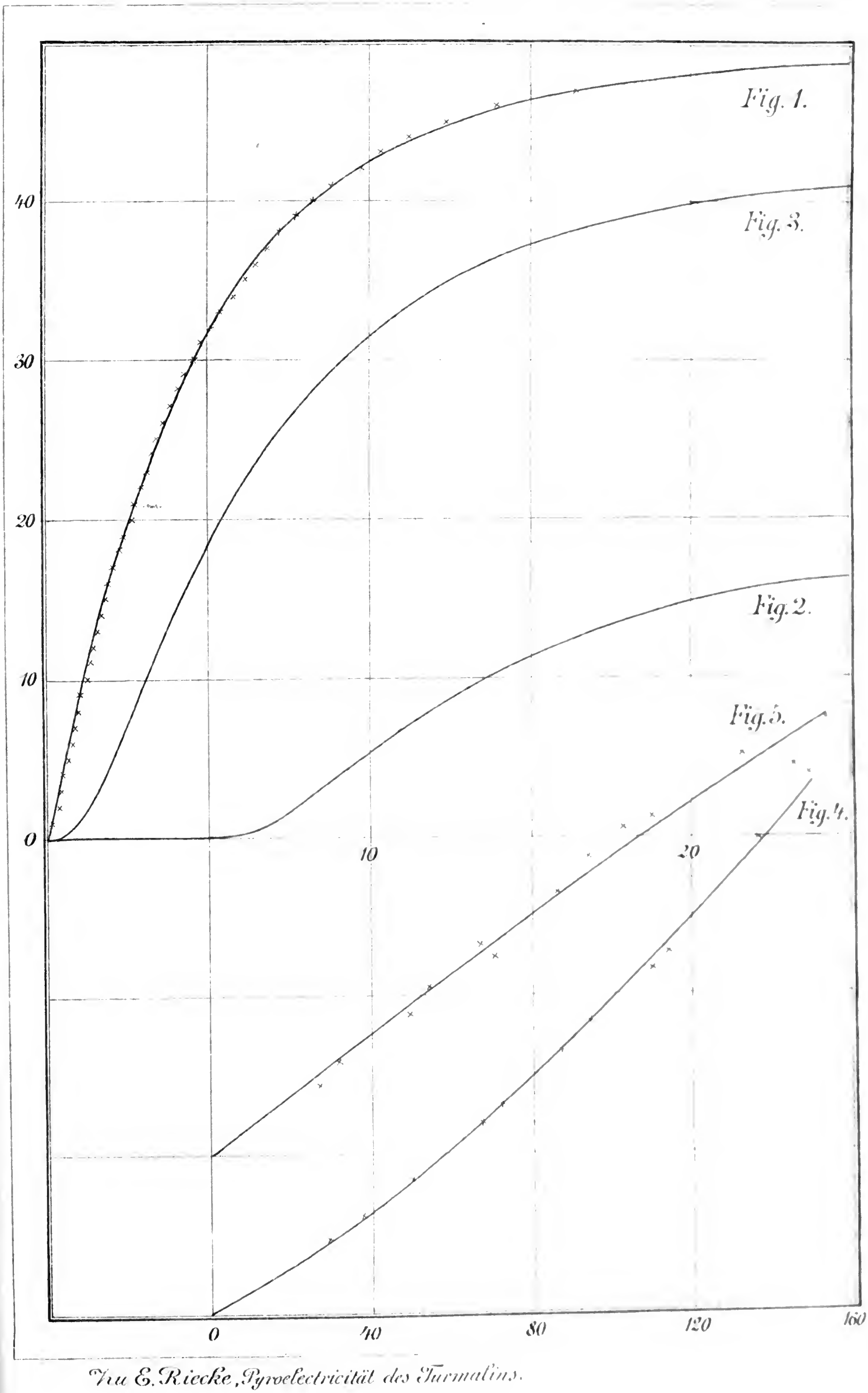
T	172°	159°	155°	145°	139°	121°	110°	91°
a	0.267	0.266	0.267	0.266	0.267	0.266	0.268	0.268

3. Schwarze Turmaline von Mursinsk.

T	190°	170°	145°	125°	110°	85°	70°	45°
M II	0.195	0.194	0.214	0.223	2.223	0.221	0.224	0.222
M III	0.213	0.210	0.225	0.241	0.241	0.241	0.243	0.247



Zu E. Riecke, Pyroelectricität des Turmalins.



Zu E. Riecke, Pyroelectricität des Turmalins.

4. Rothe Crystalle von Mursinsk.

T	172°	159°	155°	145°	139°	130°	126°	110°	91°
MR I	0.152	0.154	0.157	0.157	0.159	0.160	0.161	0.161	0.153
MR II	0.111	0.113	0.116	0.115	0.112	0.115	0.115	0.111	0.109

5. Turmaline von Elba.

T	164°	147°	122°	104°	82°	67°	59°	45°
E III	0.404	0.378	0.449	0.446	0.472	0.433	0.472	
E V	0.205	0.175	0.241	0.255	0.245			0.241

Wir schließen hiermit den Bericht über den ersten Theil der Untersuchung, welcher sich auf die Prüfung der Formel

$$\varepsilon = E(1-e^{-az})$$

und auf das Verhalten der Abkühlungskoëfficienten a richtet, und gehen nun über zu der Frage nach der Abhängigkeit der entwickelten Elektricitätsmenge von der Temperatur der Erhitzung. Zunächst traten dabei wieder Verschiedenheiten hervor, welche der früheren Eintheilung der Turmaline in drei Gruppen entsprachen. Bezeichnet man mit Θ die Differenz zwischen der Anfangs- und der End-temperatur der Turmaline, so konnte bei den Turmalinen von Brasilien die fragliche Abhängigkeit dargestellt werden durch eine Formel von der Gestalt

$$E = a\Theta + b\Theta^2.$$

Dagegen ergab sich bei den Turmalinen von Elba die Formel

$$E = a\Theta - b\Theta^2.$$

Bei den schwarzen Crystallen von Mursinsk mußte zur Darstellung der Beobachtungen ein dreigliedriger Ausdruck benutzt werden

$$E = a\Theta + b\Theta^2 - c\Theta^3.$$

Die Gruppirung der Turmaline, wie sie sich auf Grund der für die entwickelten Elektricitätsmengen geltenden Interpolationsformeln ausführen läßt, stimmt aber mit der durch das Verhalten des Abkühlungskoëfficienten bedingten doch nicht ganz überein in Folge eines abweichenden Verhaltens der rothen Turmaline von Mursinsk, der Turmaline P II, S und G, welche bei der früheren Untersuchung in unsere erste oder zweite Gruppe sich eingeordnet hatten. Bei diesen Crystallen konnte unterhalb gewisser Temperaturen überhaupt keine meßbare elektrische Erregung erhalten werden, während nach Ueberschreitung derselben die entwickelten Elektricitätsmengen sehr schnell mit der Temperatur wuchsen. Die zur Darstellung der elektrischen Ladungen benutzte Formel ist

$$E = a\Theta - A.$$

Es dürfte dieses Verhalten durch die Annahme zu erklären sein, daß diese Turmaline bei gewöhnlicher Temperatur eine erhebliche Leitungsfähigkeit besitzen, welche durch Erhitzung auf Temperaturen von 30^0 bis 50^0 keine Veränderung erleidet, dagegen in höheren Temperaturen verschwindet und sich dann auch während der Dauer der Abkühlung nicht wieder herstellt.

Die Abhängigkeit der elektrischen Ladung von der Temperatur der Erhitzung führt hiernach zu der Aufstellung von 4 verschiedenen Gruppen von Turmalinen; die vierte Gruppe enthält Turmaline, welche nach dem Verhalten des Abkühlungskoëfficienten zu den Turmalinen von Brasilien oder Mursinsk zu stellen sein würden. Beispiele für das Verhalten der 4 Gruppen geben die Fig. 4—7, in welchen die beobachteten Werthe der Ladung den berechneten Curven hinzugefügt sind.

Würde die Form der Turmaline die eines Cylinders mit Geradendflächen, würde überdieß die elektrische Ladung vollständig auf diese Flächen koncentrirt sein, so wäre das elektrische Moment gleich der Ladung der positiven Endfläche multiplicirt mit der Länge der Turmaline. Durch Division mit der Masse würde man dann das elektrische Moment der Masseneinheit erhalten und würde damit eine für die einzelnen Turmaline charakteristische Größe gefunden haben. In Wirklichkeit treffen die gemachten Voraussetzungen nicht zu; das specifische elektrische Moment kann nur dadurch bestimmt werden, daß man an Stelle der Länge den Mittelwerth aus einer gewissen Anzahl von Kantenlängen oder Abständen parallel der Axe einführt. Die Werthe, welche man erhält, wenn man die beobachteten Electricitätsmengen mit jenen mittleren Längen multiplicirt und mit der Masse dividirt, werden von den wahren specifischen Momenten um einen Betrag abweichen, der wesentlich abhängig ist von der Gestalt der Turmaline und von der Ausbreitung der Ladung auf die Seitenflächen. Immerhin werden die erhaltenen Werthe eine wenn auch nicht vollkommen exakte Vergleichung der Erregbarkeit der einzelnen Turmaline ermöglichen. In der folgenden Tabelle sind daher die in der angegebenen Weise berechneten specifischen Momente als Funktionen der Abkühlung Θ dargestellt.

B I	$0.1123\ \Theta$	$+0.000182\ \Theta^2$	
B III	$0.1071\ \Theta$	$+0.000374\ \Theta^2$	
B IV	$0.0951\ \Theta$	$+0.000415\ \Theta^2$	
B V	$0.0564\ \Theta$	$+0.000676\ \Theta^2$	
B VI	$0.0840\ \Theta$	$+0.000450\ \Theta^2$	
H	$0.1058\ \Theta$		
M I *a*	$0.0404\ \Theta$	$+0.000911\ \Theta^2$	$-0.00000452\ \Theta^3$
M I *b*	$0.1138\ \Theta$		$-0.00000061\ \Theta^3$
M II	$0.0972\ \Theta$	$+0.000473\ \Theta^2$	$-0.00000263\ \Theta^3$
M III	$0.0678\ \Theta$	$+0.000901\ \Theta^2$	$-0.00000439\ \Theta^3$
M IV	$0.0786\ \Theta$	$+0.000186\ \Theta^2$	$-0.00000141\ \Theta^3$
E III	$0.1165\ \Theta$	$-0.000021\ \Theta^2$	
E IV	$0.0971\ \Theta$	$-0.000062\ \Theta^2$	
E V	$0.0550\ \Theta^2$	$-0.000114\ \Theta^2$	
E VI	$0.0860\ \Theta^2$	$-0.000197\ \Theta^2$	
P I	$0.0736\ \Theta$	-2.3	
P II	$0.1200\ \Theta$	-1.9	
MR I	$0.165\ \Theta$	-1.8	
MR II	$0.151\ \Theta$	-4.8	
S	$0.172\ \Theta$	-9.3	
G	$0.128\ \Theta$	-4.1	
	$0.092\ \Theta$	-0.6	

Wir fügen endlich noch eine Tabelle hinzu, in welcher die Turmaline geordnet sind nach der Größe der elektrischen Momente, welche einer Abkühlung um 100° entsprechen.

MR I	*B* III	*B* IV	*B* I	*B* VI	*B* V	*M* II	*U*	*M* III	*E* III	*M* I *b*
14.7	14.4	13.6	13.0	12.9	12.4	12.1	11.8	11.4	11.4	10.8
H	*MR* II	*P* II	*E* IV	*M* I *a*	*G*	*M* IV	*S*	*E* VI	*P* I	*E* V
10.6	10.3	10.1	9.1	8.6	8.6	8.3	7.9	6.6	5.1	4.4

Es stimmt diese Tabelle wohl überein mit einer Zusammenstellung elektrischer Momente, welche ich in der Abhandlung des Jahres 1887 veröffentlicht habe. Dieselbe bezieht sich auf einen Theil der Turmaline, welche in der gegenwärtigen Arbeit behandelt worden sind. Die Abkühlungstemperatur, welche damals benutzt wurde, war im Mittel gleich 84°; doch ist die Größe der Abkühlung bei den verschiedenen Turmalinen um einige Grade verschieden, da nur auf eine einzige Temperatur erhitzt und auf die Gleichheit derselben bei den verschiedenen Turmalinen kein besonderes Gewicht gelegt worden war.

Zur Erläuterung der Tabellen mögen noch einige Bemerkungen hinzugefügt werden, von welchen die erste die Turmaline PI und MIa betrifft. Die in den Tabellen benutzten Werthe der elektrischen Ladung sind nicht unmittelbar beobachtet, sondern in der folgenden Weise berechnet. Wir haben bemerkt, daß die Curven, welche bei diesen Turmalinen die elektrische Ladung während der Abkühlung darstellen, einen Wendepunkt besitzen. Nun zeigt sich, daß die Curven in einigem Abstande von dem Wendepunkte der gewöhnlichen Exponentialformel entsprechen. Verlängert man die durch die Rechnung bestimmten Curven rückwärts bis zum Schnitt mit der Axe der ε, so erhält man diejenigen elektrischen Ladungen, welche bei abwesender Leitungsfähigkeit eingetreten sein würden, indem man zu den beobachteten Werthen von ε den für $z = 0$ geltenden Werth hinzufügt. In dieser Weise sind die in den Tabellen benutzten Werthe gefunden. Es ist dadurch die Ausnahmestellung beseitigt, welche der Turmalin MIa in der früheren Tabelle eingenommen hatte.

Immerhin bleibt die Verschiedenheit, welche in dem Verhalten der beiden Bruchstücke MIa und MIb desselben Crystalls zu Tage tritt, auffallend genug.

Was den Crystall vom Gouverneur anbelangt, so führten die zwei Beobachtungsreihen, welche mit demselben angestellt worden waren, zu Resultaten, welche nicht in einer Formel vereinigt werden konnten. Es müssen Veränderungen in der Natur dieses Crystalls während der Dauer der Untersuchung angenommen werden und zwar im Sinne einer Verminderung der Leitungsfähigkeit, welche der Crystall bei niedriger Temperatur besitzt. Höheren Erhitzungen gegenüber machen sich die Unterschiede wenig bemerklich; die für eine Temperaturdifferenz von 100^0 auftretende elektrische Ladung ist bei beiden Reihen nahezu dieselbe, so daß in der letzten Tabelle nur ein Mittelwerth angenommen worden ist.

Bei dem Crystalle von Sarapulsk genügt die Zahl der Beobachtungen nicht zur Aufstellung einer Interpolationsformel; der in der letzten Tabelle enthaltene Werth ist aus den bei benachbarten Temperaturen erhaltenen Ladungen abgeleitet.

Es erübrigt endlich noch die Frage nach dem Werthe der elektrischen Momente in absolutem elektrostatischem Maase. Um hie für einen Anhaltspunkt zu gewinnen gehen wir zurück auf die absoluten Bestimmungen, welche ich im Jahre 1885 für den Turmalin BI ausgeführt habe, indem derselbe über einem Goldblattelektroskop isolirt aufgehängt sich frei abkühlte. Die Verwerthung der Beobachtungen ist eine einigermaßen unsichere in Folge der Störungen, welche namentlich in höheren Temperaturen eintraten. Greift man aus den verschiedenen Beobachtungsreihen eine bei einer Abkühlung von $\Theta = 60.5^0$ angestellte ziemlich regelmäßig verlaufende heraus, so ergiebt sich eine Oberflächendichtigkeit von 32 elektrostatischen Einheiten im cm. g. s. System. Hiernach wird das unmittelbar beobachtete elektrische Moment der Gewichtseinheit nahezu gleich 10 (cm. g. s.).

Es entspricht aber dieser Werth keineswegs der ganzen während der Abkühlung des Turmalins entwickelten Elektricitätsmenge; das dieser entsprechende Moment ergiebt sich, wenn wir den beobachteten Werth mit dem Faktor $(q/a)^{q/q-a}$ multipliciren, in welchem q die Leitungsfähigkeit des Turmalines, a den Abkühlungskoëfficienten bezeichnet. Eine genaue Bestimmung von a und q aus den vorliegenden Beobachtungen ist nicht möglich. Dem ansteigenden Theile der Curve entspricht man durch die Annahme $a = 0.19$ und $q = 0.23$. Damit ergiebt sich dann für das elektrische Moment der Gewichtseinheit, wie es bei verschwindender Leitungsfähigkeit auftreten würde, der Werth von 30 Einheiten des cm. g. s. Systems. Andererseits ergiebt unsere Interpolationsformel für dieselbe Abkühlung den Betrag des Momentes zu 7.3 unserer willkürlichen Maaßeinheiten. Hiernach würden alle in den beiden letzten Tabellen enthaltene Zahlen mit dem Faktor 4 zu multipliciren sein, um die elektrischen Momente in Einheiten des cm. g. s. Systems zu geben.

Die elektrische Dichtigkeit, welche der Turmalin *MR* I bei einer Abkühlung um 100^0 und bei isolirender Masse und Oberfläche entwickelt, kann hiernach beiläufig zu 60 Einheiten des cm. g. s. Systems angenommen werden. Das bedeutet eine Stärke der elektrischen Ladung, welche die bei den gewöhnlichen elektrostatischen Apparaten auftretenden weit übertrifft; zum Beispiel habe ich bei einer Influenzmaschine zweiter Art die größte Dichtigkeit der auf den rotirenden Scheiben angesammelten Elektricität zu 6 Einheiten (cm. g. s.) bestimmt. Die scheinbar an der Oberfläche eines Turmalines auftretende Ladung bildet aber nach der von mir entwickelten Theorie der Pyroëlektricität nur einen sehr kleinen Bruchtheil seiner molekularen Elektricität. Die wahren elektrischen Momente, welche die Gewichtseinheiten der Turmaline in Folge der elektrischen Polarisation ihrer Molekeln besitzen, gehören ohne Zweifel einer wesentlich höheren Größenordnung an als die wirklich gemessenen.

Scaenica.

Von

Friedrich Wieseler.

I.

Es giebt noch manche Stellen bei den Gewährsmännern über das alte Theater, welche einer Berichtigung des Inhaltes oder einer Verbesserung des Textes und zugleich einer genaueren Erörterung bedürfen. Ueber einige derselben soll in dem Folgenden zunächst die Rede sein.

1.

Pollux Onom. IV, 129 fg.: *ἡ διστεγία ποτὲ μὲν ἐν οἴκῳ βασιλείῳ διῆρες δωμάτιον, οἷον ἀφ' οὗ ἐν Φοινίσσαις ἡ Ἀντιγόνη βλέπει τὸν στρατόν, ποτὲ δὲ καὶ κέραμος, ἀφ' οὗ βάλλουσι τῷ κεράμῳ· ἐν δὲ κωμῳδίᾳ ἀπὸ τῆς διστεγίας πορνοβοσκοί τι κατοπτεύουσιν ἢ γρᾴδια ἢ γύναια καταβλέπει.*

Antigone begiebt sich, wie der Pädagog in Eurip. Phoen. 90 sagt, *μελάθρων ἐς διῆρες ἔσχατον*, d. h. auf das flache Dach des zweistöckigen Palastes[1]). Der Ausdruck *δωμάτιον* bei Pollux paßt also durchaus nicht.

Albert Müller bezieht ihn in den Griech. Bühnenalterth. S. 141 auf einen „kleinen Oberbau“. Aber ein solcher läßt sich ohne Zweifel nicht annehmen. Wer wird glauben wollen, daß der Königspalast im Wesentlichen nur ein einstöckiger Bau war, kein über das ganze Unterstock hinlaufendes oberes hatte?[2]). Auch in sprachlicher Beziehung hat die Deutung des Ausdruckes *διῆρες δωμάτιον* auf einen besonderen Oberbau Bedenken. Wenn Pollux I, 81 schreibt: *εἶτα ὑπερῷα οἰκήματα τὰ δ' αὐτὰ καὶ διήρη*, so meint er Gemächer, Zimmer im zweiten Stockwerk. Ebenso ist der Ausdruck *ὑπερῷος οἶκος* zu verstehen im Etymol. M. 274, 26: *Διήρης, ὁ ὑπερῷος οἶκος*, und p. 780, 19, und der Ausdruck *δωμάτια* bei Herodian I, 12, 16: *εἴς τε τὰ δωμάτια ἀναβάντες λί-*

---

1) Eigenthümlich und ohne Zweifel irrig ist K. O. Müller's Meinung in dem Handb. d. Archäol. der Kunst S. 293, Anm. 2, daß Antigone „auf dem Söller über dem Parthenon in der *διστεγία*“ erscheine. Vgl. unten Anm. 3.

2) So etwas läßt sich für ein Privathaus in der alten Kommödie immerhin annehmen.

θοις καὶ κεράμοις ἔβαλλον τοὺς ἱππεῖς. Man könnte daran denken, daß bei Pollux IV, 129 geschrieben war: *διῆρες δωμάτων*, welches letztere Wort dem *μελάθρων* in den Phönissen durchaus entsprechen würde. Allein dieser Veränderung steht sowohl der Umstand entgegen, daß durch sie die Worte *ἐν οἴκῳ* fast überflüssig würden, jedenfalls eigenthümlich erschienen, als auch der, daß Pollux mit seiner Angabe nicht allein steht. Auch im Etym. M. 274, 26 finden wir dasselbe angegeben, indem hinter *οἶκος* hinzugefügt wird: *Εὐριπίδης ἐν Φοινίσσαις.* Die Stelle in den Phönissen wurde also schon von alten Erklärern falsch gedeutet. Wir bemerken noch, daß das Wort *διστεγία* nur das zweite Stockwerk, natürlich mit Inbegriff des Daches, bezeichnet, nicht auch, wie man gemeint hat, ein Haus mit zwei Stockwerken. Dasselbe gilt von den substantivisch gebrauchten Ausdrücken *διῆρες* und *ὑπερῷον.* Sollte das Dach genauer bezeichnet werden, so bedurfte es eines Beiwortes, wie *ἔσχατον* bei Euripides hinzugefügt ist.

Nicht minder auffallend ist die sonst nirgends vorkommende Angabe bei Pollux, nach welcher *διστεγία* und *κέραμος* gleich sein sollen, zumal wenn man mit A. Müller (a. a. O. Anm. 5) annehmen will, daß bei Pollux unter *κέραμος* schwerlich ein schräges Dach zu verstehen sei. Thut man dagegen dieses — was doch selbstverständlich erscheint — und nimmt man zugleich an, daß das Dach hoch zu denken sei, so ließe sich etwa sagen, daß der Raum unterhalb des Daches als eine Art von zweitem Stockwerk zu betrachten sei.

Ein anderer bedenklicher Umstand ist es, daß Pollux ganz so spricht, als gehöre das über *κέραμος* Gesagte nur in die Tragödie, wie es denn außer A. Müller allein auf das „Ziegeldach in der Tragödie“ bezogen wird. Ich weiß mich in der That keines Falles in den erhaltenen Tragödien zu erinnern; wohl aber eines nahe stehenden aus der Komödie, vgl. Aristoph. Vesp. Vs 203 fg.

Wenn A. Müller a. a. O. äußert, die *διστεγία* werde in der Komödie als einfaches plattes Dach bezeichnet, so ist das in Betreff des Pollux eben so wenig richtig als hinsichtlich der von ihm in Anm. 8 angeführten Stellen aus Aristophanes' Ekklesiazusen. Es wird vielmehr bei beiden Schriftstellern an Gemächer im oberen Stockwerk gedacht, die nach außen hin Fenster haben, auf welche sich die Ausdrücke *παρακύπτειν* und *διακύπτειν* beziehen. So ist es auch klar und deutlich zu sehen auf den beiden den letzten Worten des Pollux entsprechenden Vasenbildern in meinen Denkmälern des Bühnenwesens Taf. IX, n. 11 u. 12. Uebrigens beachte man, daß Pollux das Herausblicken aus den Fenstern in der Distegie nur von der Komödie berichtet, und darin hat er Recht [1]).

2.

Pollux fährt unmittelbar nach den obigen Worten IV, 130 fort über das *κεραυνοσκοπεῖον* zu sprechen, über welches er aber nichts Weiteres sagt, als daß es *πρίακτος ὑψηλή* sei. Er meint, da er das *κεραυνοσκοπεῖον* auf das Engste mit dem *βροντεῖον* zusammenstellt, ohne Zweifel die Maschine zur Herstellung des *κεραυνός*. Aber diese Bedeutung liegt nicht in jenem Worte. Somit halte ich dafür, daß dasselbe verderbt sei. Ein äußerlich nahe stehendes Wort würde sein *κεραυνοσκηπτεῖον*, das sich freilich sonst nicht nachweisen läßt (wie ja auch *κεραυνοσκοπεῖον* nicht), aber untadelhaft gebildet ist und hinsichtlich der Bedeutung vortrefflich passen würde. Man denke nur an die Redensart *σκήπτειν βέλος* bei Aeschylos Agam. 378 Weckl.

Auch die Worte, welche die Erklärung enthalten, sind ohne Zweifel verderbt. Daß die von Vitruv V, 68 als zur Herstellung plötzlichen Donners dienend erwähnte Periakte nicht gemeint sein kann, liegt wohl auf der Hand. Der Ausdruck *ὑψηλή* befremdet durchaus.

Die Vorkehrungen zur Herstellung der Blitze waren gewiß verschieden, je nach der Verschiedenheit der Blitze selbst. Von sonstigen Angaben alter Gewährsmänner hat A. Müller a. a. O. S. 157, A. 2 nur eine beigebracht, nämlich die des Grammat. de comoed. bei Dübner, Scholia Gr. in Aristophanem p. XX, 31 fg., wo von *βύρσαις παταγούσαις* und *χειροτινάκτῳ πυρί* die Rede ist (hinsichtlich welches letzteren der von Müller angeführte Muhl sicherlich irrt). Lucian erwähnt Philopatris 24 *τὸ κεραυνοβόλον ἀγγεῖον καὶ τὸ βροντοποιὸν δοχεῖον*. Hier erhalten wir also die Kunde, daß man den *κεραυνός* aus einem Gefäße warf. Die Bezeichnung dieses wird bei Pollux in dem verderbten *ὑψηλή* ent-

---

1) In den erhaltenen Tragödien kommt nichts Aehnliches vor. Denn wenn Geppert Altgr. Bühne S. 144 meint, daß Antigone im Anfang der Phönissen aus ihrem Gemach im oberen Stocke des Palastes erscheine und das Dach besteige, und J. Geel Eurip. Phoen. p 87 äußert: Apparent Paedagogus et Antigone in ostio *τοῦ διήρους*, quod habueritne portam necne nihil refert; non habuisse probabilius est. Ante hoc ostium est prominens tabulatum (nostrum balcon) unde Paedagogus prospicit ad explorandam viam, dum Antigone in ostio adstat. — Ab hoc tabulato per scalam oblique parieti appositam escenditur in tectum: per hanc igitur scalam Antigone ope senis altiorem locum petit, so ist daß sicherlich irrig. Antigone erscheint mit dem Pädagogen vor der Hauptthür des Palastes und die alte Treppe aus Cedernholz führt von dem Vorplatze dieses unmittelbar auf das Dach.

halten gewesen sein. Das nächstliegende Wort ist gewiß κυψέλη, mit welchem jedes leere Gefäß bezeichnet werden konnte, wohl auch ein cylindrisches, bienenkorbförmiges, unserem in der Hauswirthschaft und im Kriege gebräuchlichen Mörser entsprechendes. Dann wird περίακτος zum Adjectiv. Philo Vet. mathemat. opera ed. Thevenot. p. 97 erwähnt μηχανήματα περίακτα, „drehbare Wurfmaschienen", im Kriege. Sollte nicht die περίακτος κυψέλη bei Pollux eine gewisse Aehnlichkeit mit denselben gehabt haben?

3.

Der Grammat. de comoedia bei Dübner Schol. Gr. in Aristophanem berichtet p. XX, 28 fg.: κατεσκευάζετο ἡ σκηνὴ τριορόφοις οἰκοδομήμασι, πεποικιλμένη παραπετάσμασι καὶ ὀθόναις λευκαῖς καὶ μελαίναις — εἰς τύπον θαλάσσης, ταρτάρου, ᾅδου, κεραυνῶν καὶ βροντῶν, γῆς καὶ νυκτός, οὐρανοῦ, ἡμέρας καὶ ἀνακτόρων, καὶ πάντων ἁπλῶς· αὐλάς τε οὐ μικρὰς εἶχεν ἐξειργασμένας καὶ ἁψῖδας εἰς τύπον ὀρῶν. Daß die Worte von γῆς an nicht in Ordnung sind, liegt auf der Hand. Muhl hat die ersten mit Billigung A. Müller's a. a. O. S. 111, A. 8 so geordnet: ἡμέρας καὶ νυκτός, γῆς καὶ οὐρανοῦ, ἀνακτόρων. Ich halte es für wahrscheinlicher daß die Folge der Worte war: γῆς καὶ οὐρ., ἡμ. καὶ νυκτός. An ἀνακτόρων haben Muhl und Müller keinen Anstoß genommen. Wie kommen aber die ἀνάκτορα hieher, wo von den Weltkörpern und Naturerscheinungen die Rede ist, nachdem die Paläste schon gleich am Anfange erwähnt waren? Gewiß ist ἀνακτόρων verderbt und am Wahrscheinlichsten aus ἀστέρων. Dieses Wort paßt gerade in Verbindung mit νυκτὸς besonders gut. Unmittelbar vor ihm wird καὶ gestanden haben, wie es noch bei Dübner vor ἀνακτόρων steht, während es in dem Vorhergehenden einmal ausgefallen ist. Daß selbst in den erhaltenen Dramen des Euripides noch Stellen vorkommen, welche auf eine bildliche Darstellung der Gestirne deuten, habe ich schon in den scenischen und kritischen Bemerkungen zum Kyklops, Gött. 1881, S. 9 vermuthet.

Endlich ist es mir auffallend, daß Niemand an αὐλάς in dem letzten Satze Anstoß genommen hat. Was soll das Wort hier, in welcher Bedeutung man auch αὐλάς fassen möge? Sicherlich war ὕλας „waldige Partieen" geschrieben, welche zu den im folgenden erwähnten Bergen vortrefflich passen. Aehnlich erwähnt Naevius bei Nonius p. 95, 27 zusammen saxa, silvas, lapides, montes. Das ἐξεργάζεσθαι geschah selbstverständlich durch Malerei.

II.

Zum Dionysostheater in Athen.

1.

Unter den auf dieses Theater bezüglichen Schriftstellen ist von besonderer Wichtigkeit Andocid. de myster. § 38, p. 19 Reisk., wo Diokleides hinsichtlich der Hermokopiden Folgendes aussagt: *ἀναστὰς δὲ πρωῒ ψευσθεὶς τῆς ὥρας βαδίζειν· εἶναι δὲ πανσέληνον· ἐπεὶ δὲ παρὰ τὸ προπύλαιον τοῦ Διονύσου ἦν, ὁρᾶν ἀνθρώπους πολλοὺς ἀπὸ τοῦ ᾠδείου καταβαίνοντας εἰς τὴν ὀρχήστραν· δείσας δὲ αὐτούς, εἰσελθὼν ὑπὸ τὴν σκιὰν καθέζεσθαι μεταξὺ τοῦ κίονος καὶ τῆς στήλης, ἐφ' ᾗ ὁ στρατηγός ἐστιν ὁ χαλκοῦς· ὁρᾶν δὲ ἀνθρώπους τὸν μὲν ἀριθμὸν μάλιστα τριακοσίους, ἑστάναι δὲ κύκλῳ ἀνὰ πέντε καὶ δέκα ἄνδρας, τοὺς δὲ ἀνὰ εἴκοσιν· ὁρῶν δὲ αὐτῶν πρὸς τὴν σελήνην τὰ πρόσωπα τῶν πλείστων γινώσκειν.*

Freilich hat Loeschke „Die Enneakrunosepisode bei Pausanias", Dorpater Universitätsprogr. 1883, S. 4 und 6 die Orchestra für die auf der Agora belegene gehalten. Aber schon Milchhöfer ist gegen ihn mit Recht für die des Dionysostheaters eingetreten, bei Baumeister Denkm. d. klass. Altert. I, S. 192, an welchem ich, der ich diese Stelle schon lange vorher in meinen Vorlesungen für die Kunde des Dionysostheaters benutzt habe, von Anfang an auch nicht den mindesten Zweifel hegte[1]).

Nach der Stelle des Andokides haben wir da, wo sich der östliche Eingang in die Orchestra befand, ein mit diesem in Zusammenhang stehendes Propyläon anzunehmen, über welches wir allerdings anderswoher keine Kunde haben. Der Platz, an welchem Diokleides sich niedersetzte, muß zwischen der letzten Säule des Propyläon nach der Ochestra zu und der Stele mit dem Strategen nach der Bühne zu belegen gedacht werden. Von diesem Schlupfwinkel aus konnte man den zwischen den untersten Zuschauersitzen liegenden Theil der Orchestra am Besten übersehen. Die Größe derselben erscheint nach dem, was der Sclave über die Zahl der in ihr stehenden Männer und die Art, wie sie in verschiedenen Partien zusammenstanden, angiebt, als eine recht bedeutende.

1) Wenn Loeschke daran Anstoß nahm, daß in der Orchestra eines Theaters ein Stratege aufgestellt sei, so erinnerte er sich nicht daran, daß im Theater zu Sikyon eine Statue des Aratos mit dem Schild sogar auf der Bühne stand (Pausan. II, 7, 5), um von der besonders schönen Gruppe von Kämpfenden im Theater von Argos (Pausan. II, 20, 6) zu schweigen, sowie von dem Diomed im Th. zu Athen (W. Gurlitt „Ueber Pausanias" S. 267).

Ein größerer steinerner Bau, als welcher die Thymele noch in Strack's Theatergebäude dargestellt ist, kann in ihr nicht vorhanden gewesen sein.

Hinsichtlich des „ehernen Strategen" erfahren wir durch die Scholien zu Aristides p. 202, Frommel, Vol. III, p. 535. Dindorf: *δύο εἰσὶν ἀνδριάντες ἐν τῷ Ἀθήνῃσι θεάτρῳ, ὁ μὲν ἐκ δεξιῶν Θεμιστοκλέους, ὁ δ' ἐξ εὐωνύμων Μιλτιάδου, πλησίον δὲ αὐτῶν ἑκατέρου Πέρσης αἰχμάλωτος.* Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß von diesen beiden Strategen einer der bei Andokides erwähnte ist, wenn auch bei dem Scholiasten weder das Material noch der Platz im Theater genauer angegeben ist, und bei Andokides nichts über den Persischen Gefangenen verlautet. Aus jenem erhellt, daß der eherne Stratege am östlichen Eingang in die Orchestra stand. Ist nun mit jenem der Miltiades oder der Themistokles gemeint?

Man könnte sagen, daß zu Andokides' Zeit erst e i n Stratege vorhanden gewesen sei. Aber das würde schon an sich ebenso unwahrscheinlich sein, als wenn man aus dem Schweigen des Redners den Schluß ziehen wollte, daß der Persische Gefangene in der Nähe des Strategen damals noch nicht dagewesen sei. Die beiden Gruppen von Miltiades und von Themistokles entsprechen sich so durchaus, daß die eine ohne die andere nicht wohl gedacht werden kann. Beide haben aber gewiß nicht an dem e i n e n östlichen Eingang in die Orchestra gestanden, die eine dort rechts, die andere links. Schon die Worte bei Andokides verbieten das anzunehmen; zudem würde die links (von der Orchestra aus gerechnet) den Zuschauern nur höchst ungenügend zu Gesicht gekommen sein. Also wird die andere der beiden Gruppen an dem anderen Eingang in die Orchestra aufgestellt gewesen sein und zwar an der ganz entsprechenden Stelle. Das Rechts und Links in der Orchestra bezieht sich aber auf die Zuschauer. Demnach war der Strateg links Miltiades, der rechts Themistokles.

Daß beide Gruppen aus demselben Material waren, also aus Erz, ist unzweifelhaft, und dieses Material spricht dafür, daß die Herstellung derselben nicht eben viel früher statthatte, als zur Zeit des Andokides, vgl. Demosthenes in Aristocrat. § 196: *οἱ πάλαι — Θεμιστοκλέα — καὶ Μιλτιάδην — καὶ πολλοὺς ἄλλους, οὐκ ἴσα τοῖς νῦν στρατηγοῖς ἀγαθὰ εἰργασμένους, οὐ χαλκοῦς ἔστασαν οὐδ' ὑπερηγάπων.*

Da das Propyläon gewiß nicht aus Holz hergestellt war, so darf man wohl voraussetzen, daß zu der Zeit des Andokides auch der Zuschauerraum und ein Theil des Bühnengebäudes aus Stein bestanden.

2.

Ein Scholiast zu Aristophanes' Frieden Vs 725 berichtet: *ἄγαλμα ἦν ἐν τῷ θεάτρῳ τῆς Ἀθηνᾶς.* Diese Worte dienen zur Begründung der Antwort, welche Hermes, der Thürhüter des Palastes des Zeus, dem Trygäos, der von dem Olymp wieder zur Erde hinabgehen will, auf seine Frage *πῶς δῆτ' ἐγὼ καταβήσομαι;* giebt, indem er sagt: *θάρσει καλῶς τῃδὶ παρ' αὐτὴν τὴν θεόν.* Der Scholiast bezieht nämlich den Ausdruck „die Göttin" auf die Athena. Fr. Volkm. Fritzsche, welcher der Angabe des Scholiasten durchaus Glauben schenkt, obgleich er keinen anderen Gewährsmann für das Vorhandensein dieser Statue im Theater zu Athen kennt, denkt sich dieselbe als auf der Bühne, dem Logeion aufgestellt in der Ausgabe der Thesmophoriazusen des Aristophanes p. 724. Auch Geppert (Die altgriech. Bühne S. 103, Anm. 5), der die Annahme des Scholiasten ebenfalls nicht bezweifelt, bemerkt, aus den Worten des Dichters selbst gehe hervor, daß sich Trygäos auf der Scene befand, wenn schon es allerdings nicht glaublich sei, daß man das Bild der Göttin auch während des Schauspiels hin stehen ließ. Die letzten Worte können allerdings dazu beitragen, anzunehmen, daß der Scholiast irrt, indem er annimmt, der Ausdruck *τὴν θεόν* beziehe sich auf ein Bild der Athena. In der That ist mit jenem Eirene gemeint, die einzige gegenwärtige weibliche Person, welche als „Göttin" bezeichnet werden konnte, auch die einzige, welche im Olymp zurückbleibt, während die beiden anderen, Opora und Theoria, mit Trygäos auf die Erde hinabgehen. Die richtige Beziehung jenes Ausdrucks findet sich schon bei einem Scholiasten zu Vs 725. Sie ist auch von A. Schönborn „Skene der Hellenen" S. 338 fg. mit Recht gebilligt. Die Meinung Fritzsche's und Geppert's, daß das Bild der Athena auf der gewöhnlichen Bühne gestanden habe, ist durchaus irrig. Die Handlung auf dem Olymp geht ja nicht auf dieser vor sich, sondern auf einer Bühne in der Höhe über jener, nämlich dem Theologeion. Dieses erkannte, wie ich hinterdrein sehe, schon G. Hermann in der Leipz. Litteratur-Ztg 1817, n. 59, S. 460. Das Theologeion im Frieden ist das einzige uns in dem erhaltenen Dramen überkommene Beispiel desselben. Man ersieht aus diesem Stücke auch, daß es sich um eine feste, dem Logeion entsprechende Bühne handelt, welche übrigens nur dann angebracht wurde, wenn die Handlung auch auf dem Olymp vor sich ging. Daß auf dieser Bühne nicht der Deus ex machina erschien (A. Müller S. 155 A. 3) ist unzweifelhaft.

Nach dem Obigen kann es scheinen, als beruhe die Athena im Theater zu Athen bloß auf einer irrigen Erklärung des Ausdrucks *τὴν θεόν* im Frieden Vs 725. Doch wagen wir das nicht zu behaupten. Nur das steht uns sicher, daß, wenn im Bühnengebäude des Dionysostheaters zu Athen sich ein Bild der Athena befand, dieses an der steinernen Hinterwand (dem Proskenion) in der Höhe angebracht war. So erhellt auch, wie jene irrige Erklärung der Worte des Aristophanes veranlaßt werden konnte. Daß das Bild schon zur Zeit des Dichters vorhanden war, steht aber keinesweges sicher.

III.

Platz der Handlung in Aeschylos' Persern und Platz der Grabmäler in den erhaltenen Tragödien.

Man nimmt an, daß in den Persern die Handlung auf dem Vorplatze des Königspalastes zu Susa vor sich gehe. Dieser Palast kommt als früher dem Dareios und jetzt der Atossa zur Wohnung dienend vor Vs 162 fg. Weckl., 33, 611, 835, 851 fg. Er ist derselbe, in welchem auch der neue Großkönig Xerxes, der bei dem Beginne des Drama noch abwesend ist, residirt. Daß es sich aber in den Decorationen an der Hinterwand der Bühne um diesen Palast nicht handelt, geht aus mehreren Gründen hervor. Zuerst daraus, daß Atossa, als sie zum ersten Male auf der Bühne erscheint, zu Wagen gekommen ist, vgl. Vs 610 fg. Freilich hat man in der vorgefaßten Meinung, daß der Königspalast am Proskenion dargestellt sei, das Wort *ὀχήματα* auf einen Thronsessel bezogen, auf welchen Atossa aus dem Palaste auf den Vorplatz desselben getragen werde. Aber diese schon in sprachlicher Hinsicht nicht unbedenkliche Erklärung würde auch die Anerkennung eines Verfahrens bedingen, von welchem sonst in keiner der uns erhaltenen Tragödien ein auch annähernd entsprechendes Beispiel vorkommt. Wenn Schönborn „Skena der Hell.“ S. 194 behauptet, ein mit Rossen bespannter Wagen sei auf der antiken Bühne nicht nachzuweisen, so ist das ein sehr großer Irrthum. Ich erinnere nur, um bloß ein Beispiel aus Aeschylos beizubringen, an Agamemnon und Kassandra im Agamemnon, wo der Wagen ohne Zweifel auf der Bühne erscheint. Natürlich kommt nichts darauf an, ob der Wagen mit Rossen oder mit Maulthieren bespannt ist, welche letztere wie bei dem des Agamemnon und der Kassandra, so auch bei den der Atossa vorauszusetzen sein werden[1]).

Wer, der die Stellen Vs 231 fg., 525 fg., 532 fg., 610 fg., 834 fg., 851 fg., 1077, aufmerksam durchliest und mit einander vergleicht, wird glauben, daß Atossa aus dem an der Hinterwand der Bühne dargestellten Gebäude komme und in dasselbe zurückkehre, oder daß Xerxes von dem Chore in dieses Gebäude und nicht in ein ferner liegendes geleitet werde? Endlich betrachte man besonders die Worte des Chorführers in Vs 143 fg.:

Ἀλλ' ἄγε, Πέρσαι,
τόδ' ἐνεζόμενοι στέγος ἀρχαῖον,
φροντίδα κεδνὴν καὶ βαθύβουλον
θώμεθα.

Wie können sich die Greise ohne Weiteres in den königlichen Palast setzen, wenn sie auch von Xerxes gewählt waren *χώρας ἐφορεύειν* (Vs 7)? Es liegt klar zu Tage, daß das *στέγος ἀρχαῖον* das Rathhaus sein soll.

Wie paßt es aber dazu, daß vor diesem Hause auf dem Logeion das Grabmal des Dareios sich befindet[2])?

Grabmäler von Fürsten finden wir in den erhaltenen Tragödien sonst noch in der Helena des Euripides und in Aeschylos' Choephoren.

In der Helena handelt es sich um das des Proteus, welches dicht vor seinem Palaste sich befindet, wo es von seinem Sohn und Nachfolger Theoklymenos errichtet ist, der Vs 1165 fg. Nauck selbst den Grund für diesen Platz angiebt:

ὦ χαῖρε πατρὸς μνῆμ'· ἐπ' ἐξόδοισι γὰρ
ἔθαψα, Πρωτεῦ, σ' ἕνεκ' ἐμῆς προσρήσεως·
ἀεὶ δέ σ' ἐξιών τε κεἰσιὼν δόμους
Θεοκλύμενος παῖς ὅδε προσεννέπει, πάτερ,

Was die Choephoren betrifft, so hat Schönborn Sk. d. Hell. S. 224 angenommen, daß die erste Abtheilung dieses Dramas, in welcher, und zwar gleich am Anfang Vs 4 fg., das Grabmal des

---

1) Daß der Wagen auf der Bühne erschien, ist jetzt allgemeine Annahme der Kenner, vgl. A. Müller a. a. O. S. 134, wo aber der der Atossa gar nicht erwähnt wird.

2) Einige haben freilich gemeint, daß das Grabmal sich neben dem Palaste an der Hinterwand der Bühne befinde, wie auch darüber verschiedene Meinungen geäußert sind, ob das Grabmal als tempelähnliches Heroon dargestellt gewesen sei oder als Tumulus. Ohne Zweifel ist an einen solchen zu denken, der freistehend dargestellt war. Doch diese Fragen berühren unsere Hauptfrage nicht und brauchen deshalb hier nicht weiter erörtert zu werden.

Agamemnon als auf der Bühne gegenwärtig erscheint, nicht vor dem Atridenpalaste spiele, sondern in einer öden Gegend. Erst nach Vs 648 Weckl. komme in den veränderten Decorationen jener Palast zum Vorschein. Das ist aber ohne Zweifel irrig. Ich will nur darauf aufmerksam machen, daß Orestes in Vs 552 äußert, Elektra solle *στείχειν ἔσω*, ein Ausdruck, welcher gewiß nicht zu dem Aufenthalt in der öden Gegend paßt, sondern nur dann, wenn Orestes und Elektra vor dem Atridenpalaste stehen, und daß in Vs 581 fg.:

τὰ δ' ἄλλα τούτῳ δεῦρ' ἐποπτεῦσαι λέγω
ξιφηφόρους ἀγῶνας ὀρθώσαντί μοι,

wo unter *οὗτος* Apollo zu verstehen ist und zwar aller Wahrscheinlichkeit nach derselbe Agyieus vor dem Atridenpalaste, welcher im Agamemnon von Kassandra angerufen wird, während nicht abzusehen ist, wie Apollon in die „öde Gegend" neben dem Grabmal versetzt werden konnte.

Aber wie paßt das Grabmal des Agamemnon vor den Palast, in welchem jetzt Klytämnestra und Aegisthos wohnen? Das Motiv, jenes hier anzulegen kann, kein solches gewesen sein, wie wir es oben in der Helena hinsichtlich des Theoklymenos gefunden haben. Aber die Mörder des Agamemnon durften sich nicht weigern, den Gemordeten auf dem Platze vor ihrem Wohnsitze zu bestatten, wenn jener ein solcher war, der zum Ehrenbegräbnisse des berühmten Anführers gegen Troja besonders geeignet war. Nehmen wir an, daß der vordere Theil des Logeion und die Orchestra die Agora vorstellt, so paßt diese als Begräbnißplatz des als Heros geltenden Agamemnon durchaus (Xenoph. Hell. VII, 2 a. E.). Ob die Orchestra und der vordere Theil des Logeion auch in der vor dem Atridenpalast spielenden Elektra die Agora repräsentirte, läßt sich allerdings bezweifeln (Comment. de Sophocl. in dem Ind. schol. in Academia Georgia Augusta per sem. hib. MDCCCLXXXV—MDCCCLXXXVI hab., p. 5). Das Grabmal von der Form eines Tumulus (*τύμβου ὄχθος* Vs 4) wird auf der rechten Seite des Logeion nach der Seite der Fremde hin etwas entfernt von dem Eingang in den Palast gestanden haben, sodaß Orestes und Pylades sich leicht unbemerkt, nachdem sie die aus der in der Mitte des Palastes befindlichen Thür nebst dem Chor herauskommende Elektra gesehen haben (Vs 10 fg.), in den von rechts auf die Bühne kommenden Eingang zurückziehen können (nach Vs 20). Da Orestes gleich am Anfang den Hermes Chthonios anredet und auch Elektra dasselbe thut (Vs 124), so ist es wahrscheinlich, daß ein Bild dieses Gottes auf dem Tumulus gestanden habe, wohl eine Herme, die nach Cicero de leg. II, 26, 65 auf Gräbern häufiger vorkam.

Entsprechend verhält es sich mit der Anbringung des Grabmals des Dareios auf dem Logeion in Aeschylos' Persern. Da das στέγος ἀρχαῖον an der Mitte der Hinterwand der Bühne das Rathhaus war, läßt es sich mit besonderem Scheine annehmen, daß Logeion und Orchestra als Agora betrachtet wurden. Als auf der Agora begraben gilt Dareios, der Heros der Perser, ganz nach Griechischem Gebrauche, wie die Todten- und Unterweltsgötter der Perser dieselben waren wie bei den Griechen (vgl. Vs 631 fg., 643 fg.). Sein Grabmal ist auch ein Tumulus, wie das des Agamemnon in den Choephoren vgl. Pers. Vs 650. Es befand sich aber gerade in der Mitte der Bühne, so daß es den Eingang in das Rathhaus den Zuschauern zum Theil verdeckte. Diesen Platz muß man ihm geben, damit Dareios, welcher auf seiner Höhe erscheint und von da aus längere Zeit spricht, so gehörig sichtbar war, und man könnte es um so mehr, als die Thür des Rathhauses überall ja nicht zum Gebrauch kommt. Dareios steigt aus seinem Grabe empor und erscheint den Zuschauern vollständig zuerst oben auf denselben. Das Grabmal brauchte hinten nicht ausgeführt zu sein. Aus dem Raume unter dem Logeion führte eine unsichtbare Treppe, die χαρώνιοι κλίμακες (Pollux IV, 132) den oben abgeplatteten Tumulus herauf.

IV.

Ueber die verschiedene Beziehung und Bedeutung des Logeion und der Orchestra, auch über die Decoration des ersteren in den Fällen, daß die Handlung in einem Heiligthum mit oder ohne Tempel dann vor sich geht.

Diese Gegenstände sind noch nicht genügend, namentlich nicht im Zusammenhange und übersichtlich behandelt.

Als erstes Beispiel betrachten wir das Apollinische Heiligthum zu Delphi bei Aeschylos in den Eumeniden und bei Euripides im Ion.

Bei Aeschylos finden sich nur einige Andeutungen, die mit größerer oder geringerer Wahrscheinlichkeit auf die Decorationen bezogen werden können. Doch fehlt es nicht an einigen Stellen, aus welchen die Beziehung und die Herstellung des Logeion sowie der Umstand, daß die Orchestra hinsichtlich jener von dem Logeion verschieden ist, ermittelt werden kann, wenn die betreffenden Stellen richtig gedeutet und zum Theil geändert sein werden.

In seiner Rede zu den Erinyen von Vs 179 Weckl. an sagt Apollon:

ἔξω, κελεύω, τῶνδε δωμάτων τάχος
χωρεῖτ', ἀπαλλάσσεσθε μαντικῶν μυχῶν,

und später:

οὔτοι δόμοισι τοῖσδε χρίμπτεσθαι πρέπει,

und nachher noch:

λέοντος ἄντρον αἱματορρόφου
οἰκεῖν τοιαύτας εἰκός, οὐ χρηστηρίοις
ἐν τοῖσδε πλησίοισι τρίβεσθαι μύσος.

Man hat aus den beiden ersten Stellen geschlossen, daß die Erinyen sich im Tempel des Apollon befinden und sogar angenommen, daß vor Vs 64 ein Ekkyklem stattgefunden habe (Schönborn a. a. O. S. 209 fg., A. Müller a. a. O. S. 145, A. 7). Jenem Umstande widerspricht aber die dritte Stelle durch den Ausdruck *χρηστηρίοις πλησίοισι*. Oder wollte man etwa annehmen, daß hier der hintere Theil des Tempels, das Adyton, in welchem die Orakel ertheilt wurden, bezeichnet werden solle? Uns ist diese Annahme der Unterscheidung zwischen dem Tempel und dem Adyton schon deshalb unwahrscheinlich, weil in Beziehung auf *χρηστήρια* dieselbe Hinweisung mit *τάδε* statthat, als hinsichtlich der *δώματα* und *δόμοι*, das Adyton aber nicht zum Vorschein kam, sondern nur die Fronte des Tempels. Das Wort *πλησίοισι* ist ohne Zweifel verderbt. Auch das Wort *δώματα* müßte verderbt sein, wenn es nichts Anderes als den Tempel bezeichnen könnte. Die Erinyen befinden sich ohne Zweifel auf dem Platze vor diesem und mit ihnen Apollon, Orestes und Hermes. An ein Ekkyklem ist gar nicht zu denken. Warum sollte aber ein eingefriedigter Platz vor dem Tempel, mit einem Altar und einem Bilde versehen, nicht *δῶμα, δόμος* genannt werden können?

In der Andromache des Euripides findet man jene unter freiem Himmel vor dem Thetideion an dem Altar der Göttin sitzen. Sie wird Vs 129 fg., Nauck, aufgefordert ihren Platz zu verlassen:

Λεῖπε δεξίμηλον
δόμον τᾶς ποντίας θεοῦ.

Daß der Vorplatz des Tempels zu Delphi, *ἁ Φοίβου θυμέλα ὑπὸ ναοῖς* (Eur. Ion Vs 114 fg.), auf welchem der große Opferaltar stand und der nicht Jedem ohne Weiteres zugänglich war, eine Umfriedigung hatte, erhellt aus Euripides' Ion, Vs 1320 fg., wo die Pythia zu Ion sagt:

ἐπίσχες, ὦ παῖ· τρίποδα γὰρ χρηστήριον
λιποῦσα θ ρ ι γ κ ο ῦ τ ο ῦ δ' ὑπερβάλλω πόδα.[1])

Diese Umfriedigung bezieht sich auf die Heiligkeit des Platzes, wie denn auch die Grabstätte der Semele in den Bakchen eingehegt war, vgl. Eur. Bacch. Vs 10 fg. In Betreff der Heiligkeit des Vorplatzes des Delphischen Tempels, welcher im Ion Vs 124 als δάπεδον θεοῦ bezeichnet wird, in Vs 104 als εἴσοδοι Φοίβου, in Vs 220 fg. als γυάλων[2]) βαλός, und Vs 79 als πυλώματα (denn hier ist für πρὸ ναοῦ gewiß nicht zu schreiben προνάου, obgleich der Delphische Tempel einen πρόναος hatte, da Ion Vs 124 selbst sagt, daß er dem Phöbos πρὸ δόμων diene), vgl. man Vs. 220 fg. und 226 fg. Natürlich hatte der θριγκός vorn nach der Orchestra und hinten nach dem Tempel zu je eine Thür, die geschlossen und geöffnet werden konnte.

Kehren wir jetzt zu den oben angeführten Stellen der Eumeniden zurück, so läßt sich mit Wahrscheinlichkeit eine Verbesserung des verderbten πλησίοισι in Vs 195 geben, welche zeigen kann, daß auch bei Aeschylos jene Umfriedigung erwähnt war Pauw wollte πλουσίοισι schreiben, Meineke im Philologus XIX, S. 400 πανδίοισι, Wecklein ληΐτοισι, von welchen Conjecturen ohne Zweifel keine das Richtige trifft. Ich glaube, daß zu lesen sei

---

1) Mit dieser Stelle ist zusammenzuhalten die Vs 156 fg.:

αὐδῶ μὴ χρίμπτειν θριγκοῖς
μηδ' εἰς χρυσήρεις οἴκους.

Es liegt ja deutlich zu Tage, daß die θριγκοί von den οἶκοι, dem Tempel, geschieden werden, jene sich nicht an diesem befanden. — Sollte nicht auch der αὐλά im Corp. inscr. Graec. n. 1688, Z. 35 (T. I, p. 807) hieher gehören?

2) Der Ausdruck γύαλα findet sich in Beziehung auf das Apollinische Heiligthum zu Delphi häufiger, vgl. Eur. Ion Vs 76 (δαφνώδη γύαλα τάδε), 235 (γύαλα τάδε), 245 (γ. θεοῦ), Phoen. 237 (μεσόμφαλα γ. Φοίβου), Androm. 1092 fg. (διαστείχει θεοῦ χρυσοῦ γέμοντα γ., θησαύρους βροτῶν). Er ist immer zur Bezeichnung des heiligen Peribolos zu Delphi gebraucht, und daher erklärt sich auch der zweite Theil der Bemerkung bei Hesychios: Γύαλον κοῖλον, ἄλλοι π ε ρ ί β ο λ ο ν. Dieselbe Beziehung hat er in den das Trojanische Heiligthum betreffenden Worten in Aristophanes' Thesm. 109 fg.

Φοῖβον, ὃς ἱδρύσατο χώρας
γύαλα Σιμουντίδι γᾷ.

Wenn Fritzsche (in d. Thesm. a. a. O.) zu den auf Delphi bezüglichen Stellen stets das Adyton verstanden wissen wollte, so ist das ein grosser Irrthum. Bei Aristophanes ist allerdings wohl der auf der Burg zu Troja verehrte (Homer. Il. V, 446, VII, 83) Apollo, auf welchen der Mauerbau zu beziehen ist, zu verstehen, aber der Ausdruck γύαλα nicht auf die Mauer zu beziehen, sondern auf den mit Höhlen versehenen Berg, auf welchem die Burg lag.

κλισίοισι oder *κλεισίοισι*. Dieses Wort wird bei Pausanias IV, 1, 5 von einem verschließbaren Ort, *σηκός*, saeptum gebraucht. In den Eumeniden ist unter *κλίσια* der besonders heilige Platz, wo die *θυμέλη* war, zu verstehen [1]).

An die Eumeniden und den Ion schließen wir zuerst die Schutzflehenden des Euripides.

Auch hier finden wir an der Hinterwand der Bühne in der Mitte ein Tempelgebäude dargestellt, den Tempel der Demeter und der Persephone (*ναούς* Vs 2).

Von diesem ist verschieden der *σηκός*, von welchem Aethra in Vs 28 fg. spricht:

> *τυγχάνω δ' ὑπὲρ χθονὸς*
> *ἀρότου προθύουσ' ἐκ δόμων ἐλθοῦσ' ἐμῶν*
> *πρὸς τόνδε σηκόν, ἔνθα πρῶτα φαίνεται* [2])
> *φρίξας ὑπὲρ γῆς τῆσδε κάρπιμος στάχυς.*
> *δεσμὸν δ' ἄδεσμον τόνδ' ἔχουσα φυλλάδος*
> *μένω πρὸς ἁγναῖς ἐσχάραις δυοῖν θεαῖν*
> *Κόρης τε καὶ Δήμητρος* [3]).

Die mit einem Zugange versehene Umfriedigung, der *σηκός*, ist derselbe Platz, welchen der Chor Vs 64 nennt *δεξιπύρους θεῶν θυμέλας*, und Vs 271 als *ἱερὰ δάπεδα Περσεφονείας* bezeichnet.

Nun erwähnen wir noch drei Tragödien, in denen das Vorhandensein eines Tempels an der Hinterwand der Bühne nicht statthat oder wenigstens nicht nachweisbar ist, aber es sich doch um ein Heiligthum handelt.

In den Schutzflehenden des Aeschylos geht die Handlung vor sich an der Küste des Argivischen Landes, und zwar, wie wir aus Vs 32 erfahren, einer *χέρσος ἀσώδης*. Vermuthlich ist der Platz jenes *χωρίον Ἀπόβαθμοι*, welches der Sage nach als die Stätte

---

1) An diesem wurden, nach Euripides zu urtheilen, auch Orakel gegeben. Vgl. Ion Vs 226 fg.:

> *εἰ μὲν ἐθύσατε πέλανον πρὸ δόμων*
> *καί τι πύθεσθαι χρῄζετε Φοίβου,*
> *πάριτ' εἰς θυμέλας,*

und Vs 413 fg.:

> *ΞΟΥ.* *ἀλλὰ τίς προφητεύει θεοῦ;*
> *ΙΩΝ.* *ἡμεῖς τά γ' ἔξω, τῶν δ' ἔσω ἄλλοις μέλει.*

Diese Bemerkung kann auch zur genaueren Deutung des Adj. *χρηστηρίοις* dienen.

2) Sollte nicht zu schreiben sein: *πρῶτ' ἐφαίνετο?*

3) Mit den letzten Worten ist zu vergleichen, daß Aethra von Theseus Vs 290 bezeichnet wird als *σεμναῖσι Δηοῦς ἐσχάραις παρημένη*.

galt, an der Danaos gelandet war (Pausan. II, 38, 4). Mitten an der Hinterwand der Bühne erblickt man einen Hügel (πάγος Vs. 195), der als Altar (βωμός, Vs 196, 377) der ἀγώνιοι θεοί (Vs 248, 335, 359) dient, deren Bilder, gewiß Rundwerke aus Holz (βρέτεα, Vs 436, 472) an dem Altar, etwa auf den Stufen desselben aufgestellt waren. Der Altar hatte eine nicht unbeträchtliche Höhe, da er Vs 721 als ἱκεταδόκος σκοπή bezeichnet wird. Die Bilder waren mit den Attributen der Götter versehen, Zeus mit dem Adler (Vs 218), wie man, schwerlich mit Recht, annimmt [1]), Poseidon mit der Triaina (Vs 224) [2]), Hermes vermuthlich mit dem Kerykeion (Vs 226 fg.). Wenn E. Curtius Att. Studien I, S. 39 fg. aus dem Ausdruck ἑδρᾶν πολυθέων (Vs 429 fg.) schließt, daß eine Anzahl anderer Altäre dargestellt sei, so irrt er sicherlich.

Der Altar, der im Hintergrunde der Bühne in der Mitte angebracht gewesen sein wird, lag ἐν ἁγνῷ (Vs 229). Die Orchestra wird als λευρόν und zwar βέβηλον ἄλσος, d. i. „eine flache, Jedem zugängliche, ungeweihte Gegend bezeichnet Vs 517 fg. An einen Hain mit Bäumen, wie Schönborn wollte, der nicht erkannte, daß es sich um die Orchestra handelt, ist natürlich nicht zu denken. Ob der Raum auf dem Logeion, wo der große Altar stand, eingehegt war, wird nicht angedeutet. Doch ist es durchaus wahrscheinlich.

In Aeschylos' Sieben gegen Theben geht die Handlung auf der Akropolis vor sich, vgl. den Chor Vs 226 fg. Weckl.

τάνδ' ἐν ἀκρόπτολιν,
τίμιον ἕδος, ἱκόμαν.

Gewöhnlich nimmt man an, daß an der Hinterwand der Bühne der königliche Palast dargestellt war. Allerdings erfahren wir durch Pausanias IX, 12, 3, daß der Palast des Kadmos sich auf der Akropolis befand an der Stelle der späteren Agora und neben ihm der Thalamos der Semele, welche beiden Baulichkeiten in Euripides' Bakchen dargestellt waren. Aber in den Sieben findet sich keine Spur von dem Königspalaste an der Hinterwand der

---

1) Vgl. Vs 218 fg.:

ΔΑ. καὶ Ζηνὸς ὄρνιν τόνδε νῦν κικλήσκετε.
ΧΟ. καλοῦμεν αὐγὰς ἡλίου σωτηρίους,
ἁγνόν τ' Ἀπόλλω, φυγάδ' ἀπ' οὐρανοῦ θεόν.

Dass im ersten Vers ein Fehler steckt, ist klar. Zeus ist schon in Vs 215 vom Chore angerufen. Was soll da noch die Anrufung des ihm heiligen Vogels? Ferner, wie können die αὐγαὶ ἡλίου als der Vogel des Zeus betrachtet werden? Ohne Zweifel war geschrieben: ἶνιν.

2) Die τρίαιναι, welche in Vs 763 erwähnt werden, gehören nicht hieher, da das betreffende Wort ohne Zweifel verderbt ist.

Bühne. Hier werden dagegen als vor Augen befindlich erwähnt die *ἀρχαῖα βρέτη πολισσούχων θεῶν* Vs 165, 195 fg., 93, (vgl. auch Vs 205 fg.: *θεῶν ἅδε πανάγυρις*), von welchen in keiner der Tragödien, in denen die Handlung auf dem Vorplatz des Thebanischen Königspalastes vor sich geht, die Rede ist. Ob man annehmen darf, daß diese Bilder auf der Agora aufgestellt waren, steht dahin, ist jedoch nicht unwahrscheinlich. Der Chor befand sich auf der Bühne innerhalb derselben. Eteokles weist ihn 251 fg. in die Orchestra hinab:

ἐκτὸς οὖσ' ἀγαλμάτων
εὔχου τὰ κρείσσω ξυμμάχους εἶναι θεούς.

Die Bilder waren also entweder auf dem vorderen Rande des Logeion in einer Reihe aufgestellt, oder auf dem Logeion weiter nach hinten in einem Kreise. Dieses ist gewiß das Wahrscheinlichere, da die Zuschauer sonst sämmtliche Bilder von hinten zu Gesicht bekommen haben würden. Das Logeion galt ohne Zweifel als heilige Stätte. Daß das in Betreff der Orchestra nicht der Fall war, wird nicht ausdrücklich angedeutet, ist jedoch mit Sicherheit anzunehmen.

Im Oedipus auf Kolonos des Sophokles ist nach der Seite der Fremde hin der Eumenidenhain an der Hinterwand der Bühne durch Malerei dargestellt. In das Innere des Hains, in welches sich Oedipus begiebt (Vs 113 fg.), gelangte derselbe durch eine Oeffnung etwa in der Mitte der Hinterwand, hinter welcher man gemalte Bäume erblickte, so daß man eine Art von Allee vor sich zu haben glauben konnte. Das Eumenidenheiligthum nahm auch einen Platz auf dem Logeion ein, der durch Steine bezeichnet war. Vgl. darüber meine Comment. de Sophocl. in dem Index lect. der G.-A. Univ. zum Wintersem. 1875—1876, p. 15 fg. Der vorderste Theil des Logeion enthält einen betretbaren Weg. Auch die Orchestra ist für Jeden zugänglich.

Nachtrag zu S. 214, Anm. 1.

Auf die Conjectur *ἶνιν* ist, wie ich hinterdrein aus Wecklein's Ausg. von Aesch. fab. Vol. II, p. 103 sehe, schon Kiehl verfallen.

Preisaufgaben der K. Gesellschaft der Wissenschaften.

Für das Jahr 1890 lautet die Aufgabe der Physikalischen Klasse:

Es ist allgemein bekannt und anerkannt, daß dichte oder krystallinische Kalke, zumal des Mittel-Devon, allerlei Umwandlungen erlitten haben, sei es durch Veränderung ihrer Structur, sei es durch Stoffaustausch u. s. w. Die mechanischen und chemischen Vorgänge, welche hierbei mitwirken, sind jedoch durchaus nicht genügend bekannt. Es wird daher gewünscht, daß diese Umwandlungen mit Hülfe chemischer und mikroskopischer Untersuchungen verfolgt und erklärt werden möchten.

Die Aufgabe für 1891 lautet nach dem Vorschlag der Mathematischen Klasse:

Die Aufgabe der conformen Abbildung eines ebenen Bereiches auf ein Stück einer krummen Fläche, deren Krümmungsmaß überall den constanten Werth k besitzt, hängt zusammen mit der Aufgabe die partielle Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2k \cdot e^u$$

vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen gemäß zu integriren.

Für diese Aufgabe kommen zunächst die von Riemann in seiner Theorie der Abelschen Functionen angegebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen in Betracht.

Die Königliche Gesellschaft wünscht die Frage, ob es möglich ist, die angegebene partielle Differentialgleichung für einen gegebenen Bereich unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen der angegebenen Art zu integriren, vorausgesetzt, daß der Konstanten k negative Werthe beigelegt werden, vollständig beantwortet zu sehen.

Insbesondere wünscht die Königliche Gesellschaft den Fall der angeführten Aufgabe behandelt zu sehen, in welchem der betrachtete ebene Bereich eine geschlossene mehrfach zusammenhängende Riemannsche Fläche ist, während die Function u keine anderen als logarithmische Unstetigkeiten annehmen soll.

Die Aufgabe der Historisch-Philologischen Klasse für 1892 ist folgende:

Für die älteste Geschichte Attikas ist es von außerordentlicher Bedeutung, zu wissen, an welchen Orten sich Heiligthümer der verschiedenen Götter und Heroen fanden, sowol in Athen selbst, als in der gesammten Landschaft, soweit es nach dem jetzigen

Stande der topographischen, epigraphischen, genealogischen Forschungen möglich ist. Die Historisch-philologische Klasse stellt daher für 1892 die Aufgabe, daß eine sorgfältige Uebersicht der Kultstätten in Attika nach den Oertlichkeiten, an denen sie sich fanden, gegeben und, was sich daraus für die älteste Geschichte Attikas folgern lasse, gegeben werde.

Die zur Bewerbung um einen der Preise bestimmten Arbeiten müssen, mit einem Spruch versehn, vor Ablauf des Septembers des bestimmten Jahres an die Kön. Gesellschaft der Wissenschaften portofrei eingesandt werden und von einem versiegelten Zettel begleitet sein, welcher außen den Spruch trägt, der die Arbeit bezeichnet, und innen Namen und Wohnort des Verfassers angiebt.

Der Preis für jede Aufgabe beträgt 500 Mk.

Preisaufgaben der **Wedekindschen Preisstiftung** für Deutsche Geschichte.

Wiederholt aus Nr. 4 der Nachrichten vom Jahr 1887 S. 69 ff.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung für Deutsche Geschichte macht hierdurch die Aufgaben bekannt, welche von ihm für den fünften Verwaltungszeitraum, vom 14. März 1886 bis zum 14. März 1896, nach den Ordnungen der Stiftung (§ 20) gestellt werden.

Für den ersten Preis

wiederholt der Verwaltungsrath die für den vorigen Verwaltungszeitraum gestellte Aufgabe: er verlangt eine allen Anforderungen der Wissenschaft entsprechende Ausgabe der von dem Mainzer **Eberhard Windeck** verfaßten **Denkwürdigkeiten über Leben und Zeit Kaiser Sigismunds.**

Es gilt den völlig werthlosen und unbrauchbaren Abdruck bei Mencken durch eine nach Seite der Sprache wie des Inhalts gleich tüchtige Ausgabe zu ersetzen.

Nach den älteren Vorarbeiten von Dümgé, Mone, Aschbach, Droysen hat neuerdings v. Hagen in der Einleitung zu seiner Uebersetzung (Geschichtschreiber der deutschen Vorzeit, Lief. 79. Leipzig 1886) über das Verhältniß von dreien der wichtigsten Handschriften (Gotha, Cheltenham, Hannover) zu einander gehandelt und danach zwei von dem Verfasser selbst herrührende Redactionen unterschieden, auch die Annahme abgewiesen, daß die

Handschrift zu Cheltenham ein Original sei. Für den Bearbeiter ist die Heranziehung der anderen bekannten und von v. Hagen S. VII, Anm. 2 aufgeführten Hdsch. schon deßhalb erforderlich, um die Richtigkeit der Aufstellung v. Hagen's zu prüfen und festzustellen, ob etwa noch mehr als zwei Ausgaben des Werkes vorliegen.

Von den drei im Archiv III, 429 verzeichneten Vaticanischen Hdsch. wird der Verwaltungsrath demnächst Beschreibungen anfertigen lassen, welche ihre Classificirung ermöglichen. Diese Beschreibungen sollen dem Bearbeiter durch Vermittelung der Verwaltung der Kgl. Universitätsbibliothek zur Verfügung stehen. Von der Heranziehung dieser drei Hdsch. zur Textconstitution glaubt der Verwaltungsrath im übrigen den Bearbeiter befreien zu sollen [1]).

Bei der Bearbeitung des Textes wird es vor allem darauf ankommen, daß die von dem Verfasser herrührenden Unterschiede der verschiedenen Redactionen klar und übersichtlich zur Erscheinung kommen, davon auch äußerlich dasjenige geschieden und gekennzeichnet werde, was etwa fremder Ueberarbeitung seinen Ursprung verdankt. Die originalen Rubriken und Capitelüberschriften sind in die Ausgabe aufzunehmen.

Die Urkunden und Aktenstücke aller Art, welche dem Werke zahlreich eingefügt sind, erfordern genaue Untersuchung in Bezug auf Herkunft, Wiedergabe und anderweitige Benutzung. Sind von denselben abweichende Texte oder die Originale bekannt, so ist darauf in den Anmerkungen hinzuweisen, geeigneten Falls der abweichende Text zum Abdruck in der Anmerkung zu bringen. Desgleichen ist wenigstens annäherungsweise der Versuch zu machen für die rein erzählenden Theile Ursprung oder Quelle beizubringen, namentlich in Bezug auf An- und Abwesenheit des Verfassers. Es darf dem Text an Erläuterung in sprachlicher und sachlicher Hinsicht nicht fehlen.

Die Einleitung soll sowohl die bei der Untersuchung und Herstellung des Textes befolgte Methode klarlegen, als auch eine eingehende Erörterung über die Lebensschicksale des Verfassers, die Beziehungen zu seiner Vaterstadt, seine Reisen, sein Verhältniß zum Kaiser und anderen namhaften Zeitgenossen, seine übrigen Werke in Prosa und Dichtung geben.

Die sprachliche Behandlung des Textes hat sich, falls nicht etwa eine Originalhandschrilt auftauchen sollte, nach den von Weizsäcker im I. Bande der Reichstagsakten für die Vereinfachung

1) Vgl. den Bericht über diese Hss. in den Nachrichten 1888 S. 11 ff.

der Schreibung spätmittelalterlicher deutscher Texte aufgestellten Grundsätzen zu richten.

Der Ausgabe ist ein Wortverzeichniß, entsprechend demjenigen des 1. Bandes der Mainzer Chroniken (Städtechroniken Bd. XVII), sowie ein ungetrenntes Verzeichniß der Personen- und Ortsnamen beizufügen.

Von der Cheltenhamer Handschrift befindet sich eine genaue Abschrift auf der Kgl. Universitätsbibliothek, welche bereitwilligst von der Bibliotheksverwaltung zur Benutzung ausgeliehen wird.

Für den zweiten Preis
schreibt der Verwaltungsrath

eine Geschichte des Herzogthums Schwaben vom Beginn des 10. bis in die zweite Hälfte des 13. Jahrhunderts

aus.

Nach einem einleitenden Rückblicke auf die karolingische Zeit ist der Schwerpunkt der Arbeit in die Verfassungsgeschichte des bezeichneten Zeitraums zu legen, da die politische Geschichte Schwabens zur Genüge behandelt worden ist. Das schwäbische Herzogthum ist in seiner Entwicklung bis zur Auflösung zu verfolgen, sein Verhältnis zu der königlichen Gewalt einerseits wie zu den Bisthümern, Grafschaften, Herrschaften und Städten andererseits darzulegen. Nach der gründlichen und erschöpfenden Untersuchung des Einzelnen erwartet der Verwaltungsrath eine zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse der Untersuchung. Neben den Nachrichten der Geschichtsschreiber hat der Bearbeiter dem reichen Urkundenmaterial eingehendste Aufmerksamkeit zu widmen und es nach allen Richtungen für den bezeichneten Zweck auszubeuten. Als Beilage der Arbeit wünscht der Verwaltungsrath Regesten der Urkunden, an welchen die Herzöge von Schwaben in irgend einer Eigenschaft betheiligt sind oder in welchen sie Erwähnung finden.

In Beziehung auf die Bewerbung um diese Preise, die Ertheilung des dritten Preises und die Rechte der Preisgewinnenden wird aus den Ordnungen der Stiftung Folgendes wiederholt:

1. **Ueber die zwei ersten Preise.** Die Arbeiten können in deutscher oder lateinischer Sprache abgefaßt sein.

Jeder dieser Preise beträgt 1000 Thaler in Gold (3300 Reichsmark) und muß jedesmal ganz, oder kann gar nicht zuerkannt werden.

2. **Ueber den dritten Preis.** Für den dritten Preis wird keine bestimmte Aufgabe ausgeschrieben, sondern die Wahl des Stoffes bleibt den Bewerbern nach Maßgabe der folgenden Bestimmungen überlassen.

Vorzugsweise verlangt der Stifter für denselben ein deutsch geschriebenes Geschichtsbuch, für welches sorgfältige und geprüfte Zusammenstellung der Thatsachen zur ersten, und Kunst der Darstellung zur zweiten Hauptbedingung gemacht wird. Es ist aber damit nicht bloß eine gut geschriebene historische Abhandlung, sondern ein umfassendes historisches Werk gemeint. Speciallandesgeschichten sind nicht ausgeschlossen, doch werden vorzugsweise nur diejenigen der größten (15) deutschen Staaten berücksichtigt.

Zur Erlangung des Preises sind die zu diesem Zwecke handschriftlich eingeschickten Arbeiten und die von dem Einsendungstage des vorigen Verwaltungszeitraums bis zu demselben Tage des laufenden Zeitraums (dem 14. März des neunten Jahres) gedruckt erschienenen Werke dieser Art gleichmäßig berechtigt. Dabei findet indessen der Unterschied statt, daß die ersteren, sofern sie in das Eigenthum der Stiftung übergehen, den vollen Preis von 1000 Thalern in Gold, die bereits gedruckten aber, welche Eigenthum des Verfassers bleiben, oder über welche als sein Eigenthum er bereits verfügt hat, die Hälfte des Preises mit 500 Thalern Gold empfangen.

Wenn keine preiswürdigen Schriften der bezeichneten Art vorhanden sind, so darf der dritte Preis angewendet werden, um die Verfasser solcher Schriften zu belohnen, welche durch Entdeckung und zweckmäßige Bearbeitung unbekannter oder unbenutzter historischer Quellen, Denkmäler und Urkundensammlungen sich um die deutsche Geschichte verdient gemacht haben. Solchen Schriften darf aber nur die Hälfte des Preises zuerkannt werden.

Es steht Jedem frei, für diesen zweiten Fall Werke der bezeichneten Art auch handschriftlich einzusenden. Mit denselben sind aber ebenfalls alle gleichartigen Werke, welche vor dem Einsendungstage des laufenden Zeitraums gedruckt erschienen sind, für diesen Preis gleich berechtigt. Wird ein handschriftliches Werk gekrönt, so erhält dasselbe einen Preis von 500 Thalern in Gold; gedruckt erschienenen Schriften können nach dem Grade ihrer Bedeutung Preise von 250 Thlr. oder 500 Thlr. Gold zuerkannt werden.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich von selbst, daß der dritte Preis auch Mehreren zugleich zu Theil werden kann.

3. **Rechte der Erben der gekrönten Schriftsteller.** Sämmtliche Preise fallen, wenn die Verfasser der Preisschriften bereits gestorben sein sollten, deren Erben zu. Der dritte Preis kann auch gedruckten Schriften zuerkannt werden, deren Verfasser schon gestorben sind, und fällt alsdann den Erben derselben zu.

4. **Form der Preisschriften und ihrer Einsendung.** Bei den handschriftlichen Werken, welche sich um die beiden ersten Preise bewerben, müssen alle äußeren Zeichen vermieden werden, an welchen die Verfasser erkannt werden können. Wird ein Verfasser durch eigene Schuld erkannt, so ist seine Schrift zur Preisbewerbung nicht mehr zulässig. Daher wird ein jeder, der nicht gewiß sein kann, daß seine Handschrift den Preisrichtern unbekannt ist, wohlthun, sein Werk von fremder Hand abschreiben zu lassen. Jede Schrift ist mit einem Sinnspruche zu versehen, und es ist derselben ein versiegelter Zettel beizulegen, auf dessen Außenseite derselbe Sinnspruch sich findet, während inwendig Name, Stand und Wohnort des Verfassers angegeben sind.

Die handschriftlichen Werke, welche sich um den dritten Preis bewerben, können mit dem Namen des Verfassers versehen, oder ohne denselben eingesandt werden.

Alle diese Schriften müssen im Laufe des neunten Jahres, vor dem 14. März 1895, dem Direktor zugesendet sein, welcher auf Verlangen an die Vermittler der Uebersendung Empfangsbescheinigungen auszustellen hat.

5. **Ueber Zulässigkeit zur Preisbewerbung.** Die Mitglieder der Königlichen Societät, welche nicht zum Preisgerichte gehören, dürfen sich wie jeder Andere um alle Preise bewerben. Dagegen leisten die Mitglieder des Preisgerichts auf jede Preisbewerbung Verzicht.

6. **Verkündigung der Preise.** An dem 14. März, mit welchem der neue Verwaltungszeitraum beginnt, werden in einer Sitzung der Societät die Berichte über die Preisarbeiten vorgetragen, die Zettel, welche zu den gekrönten Schriften gehören, eröffnet, und die Namen der Sieger verkündet, die übrigen Zettel aber verbrannt. Jene Berichte werden in den Nachrichten über die Königliche Societät, dem Beiblatte der Göttingischen gelehrten Anzeigen, abgedruckt. Die Verfasser der gekrönten Schriften oder deren Erben werden noch besonders durch den Direktor von den ihnen zugefallenen Preisen benachrichtigt, und können dieselben bei dem letzteren gegen Quittung sogleich in Empfang nehmen.

7. **Zurückforderung der nicht gekrönten Schriften.** Die Verfasser der nicht gekrönten Schriften können dieselben unter Angabe ihres Sinnspruches und Einsendung des etwa erhaltenen Empfangsscheines innerhalb eines halben Jahres zurückfordern oder zurückfordern lassen. Sofern sich innerhalb dieses halben Jahres kein Anstand ergiebt, werden dieselben am 14. October von dem Direktor den zur Empfangnahme bezeichneten Personen

portofrei zugesendet. Nach Ablauf dieser Frist ist das Recht zur Zurückforderung erloschen.

8. **Druck der Preisschriften.** Die handschriftlichen Werke, welche den Preis erhalten haben, gehen in das Eigenthum der Stiftung für diejenige Zeit über, in welcher dasselbe den Verfassern und deren Erben gesetzlich zustehen würde. Der Verwaltungsrath wird dieselben einem Verleger gegen einen Ehrensold überlassen oder, wenn sich ein solcher nicht findet, auf Kosten der Stiftung drucken lassen, und in diesem letzteren Falle den Vertrieb einer zuverlässigen und thätigen Buchhandlung übertragen. Die Aufsicht über Verlag und Verkauf führt der Director.

Der Ertrag der ersten Auflage, welche aussschließlich der Freiexemplare höchstens 1000 Exemplare stark sein darf, fällt dem verfügbaren Capitale zu, da der Verfasser den erhaltenen Preis als sein Honorar zu betrachten hat. Wenn indessen jener Ertrag ungewöhnlich groß ist, d. h. wenn derselbe die Druckkosten um das Doppelte übersteigt, so wird die Königliche Societät auf den Vortrag des Verwaltungsrathes erwägen, ob dem Verfasser nicht eine außerordentliche Vergeltung zuzubilligen sei.

Findet die Königliche Societät fernere Auflagen erforderlich, so wird sie den Verfasser oder, falls derselbe nicht mehr leben sollte, einen andern dazu geeigneten Gelehrten zur Bearbeitung derselben veranlassen. Der reine Ertrag der neuen Auflagen soll alsdann zu außerordentlichen Bewilligungen für den Verfasser, oder, falls derselbe verstorben ist, für dessen Erben, und den neuen Bearbeiter nach einem von der Königlichen Societät festzustellenden Verhältnisse bestimmt werden.

9. **Bemerkung auf dem Titel derselben.** Jede von der Stiftung gekrönte und herausgegebene Schrift wird auf dem Titel die Bemerkung haben:

> Von der Königlichen Societät der Wissenschaften in Göttingen mit einem Wedekindschen Preise gekrönt und herausgegeben.

10. **Freiexemplare.** Von den Preisschriften, welche die Stiftung herausgiebt, erhalten die Verfasser je zehn Freiexemplare.

Göttingen, den 14. März 1887.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

25. Juni. | № 6. | 1890.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 7. Juni 1890.

Riecke: Beiträge zu der von Gibbs entworfenen Theorie der Zustandsänderungen eines aus einer Mehrzahl von Phasen bestehenden Systems.

Klein legt vor:

a) Franc. Brioschi in Mailand, ausw. Mitglied der mathem. Klasse: Ueber die Reihenentwickelung der Sigmafunctionen zweier Veränderlichen.

b) Dr. Schoenfliess: Ueber das gegenseitige Verhältniß der Theorieen über die Structur der Krystalle.

de Lagarde: Septuagintastudien. I. (Für die Abhandlungen.)

Kielhorn: Die Mandasor-Inschrift vom Mâlava Jahre 529 (= 472 n. Chr.) und Kâlidâsa's Ṛitusaṁhra.

Beiträge zu der von Gibbs entworfenen Theorie der Zustandsänderungen eines aus einer Mehrzahl von Phasen bestehenden Systems.

Von

Eduard Riecke.

Die Untersuchungen, welche von den Herren van't Hoff und Reicher, Roozeboom, Meyerhoffer und Stortenbeker im Laufe der letzten Jahre veröffentlicht worden sind, haben auf einem früher kaum betretenen Gebiete ein reiches Material von experimentellen Thatsachen zu Tage gefördert. Dabei haben sich die allgemeinen Sätze, welche von Willard Gibbs über Gleichgewichtszustände eines aus einer Mehrzahl von Phasen bestehenden

Systemes aufgestellt worden sind, als ein wichtiger Leitfaden für die Untersuchung und als ein werthvolles Hülfsmittel für die Darstellung der beobachteten Erscheinungen erwiesen. Mit Bezug hierauf dürften die folgenden Betrachtungen, welche, auf dem von Gibbs gelegten Fundamente ruhend, eine weitere Ausführung seiner Sätze besonders nach der geometrischen Seite enthalten, nicht ohne Interesse sein. Des leichteren Verständnisses halber mußten auch die Grundgleichungen der Gibbs'schen Theorie reproducirt werden; dabei habe ich eine Darstellung befolgt, welche von der von Gibbs selbst gegebenen in einigen Punkten abweicht.

I. Erinnerung an die Fundamentalgleichungen von Gibbs.

Wir betrachten eine Substanz, welche aus mehreren chemischen Componenten zusammengesetzt, welche aber in physikalischer wie in chemischer Hinsicht in ihrer ganzen Ausdehnung homogen ist. Wir bezeichnen durch ε die Energie, durch η die Entropie, durch v das Volumen, durch m_1, m_2, $m_3 \ldots$ die Massen der einzelnen chemischen Componenten; dann wird eine Vergrößerung der Entropie, des Volumens, der Massen m_1, $m_2 \ldots$ nach einem beliebigen Verhältniß eine Vergrößerung von ε nach demselben Verhältniß zur Folge haben, d. h. es wird ε eine homogene lineare Funktion von η, v, m_1, $m_2 \ldots$ sein, welche der Gleichung genügt

$$\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}\eta + \frac{\partial \varepsilon}{\partial v}v + \frac{\partial \varepsilon}{\partial m_1}m_1 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial m_2}m_2 + \ldots$$

Bezeichnen wir durch μ_1, $\mu_2 \ldots$ die partiellen Differentialquotienten von ε nach m_1, $m_2 \ldots$, so ist andererseits der Zuwachs der Energie gegeben durch

$$1. \qquad d\varepsilon = Td\eta - pdv + \mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2 + \ldots$$

Die Verbindung beider Gleichungen giebt:

$$\varepsilon = T\eta - pv + \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \ldots$$

und

$$2. \qquad 0 = \eta dT - vdp + m_1 d\mu_1 + m_2 d\mu_2 + \ldots$$

Ist entsprechend Gleichung 1 die Energie gegeben als Funktion von η, v, m_1, $m_2 \ldots$, so ist:

$$T = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta},\ p = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial v},\ \mu_1 = \frac{\partial \varepsilon}{\partial m_1},\ \mu_2 = \frac{\partial \varepsilon}{\partial m_2} \ldots$$

Ist in Gleichung 2 p gegeben als Funktion von T, μ_1, $\mu_2 \ldots$, so ist

$$\frac{\eta}{v} = \frac{\partial p}{\partial T}, \quad \frac{m_1}{v} = \frac{\partial p}{\partial \mu_1}, \quad \frac{m_2}{v} = \frac{\partial p}{\partial \mu_2}, \ldots$$

Gleichungen von der Form $f(\varepsilon, \eta, v, m_1, m_2 \ldots) = 0$ und von der Form $f(p, T, \mu_1, \mu_2 \ldots) = 0$ können demnach benützt werden, um die in der Gleichung selbst nicht auftretenden Zustandsgrößen, beziehungsweise ihre Verhältnisse, zu bestimmen. Gibbs nennt sie Fundamentalgleichungen.

Führen wir an Stelle der gesammten Energie die freie Energie $\varepsilon - T\eta$ ein, welche durch ψ bezeichnet werden möge, so ergiebt sich

$$d\psi = -\eta dT - p dv + \mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2 + \ldots$$

Es besitzt demnach auch eine Gleichung zwischen $\psi, T, v, m_1, m_2 \ldots$ den Charakter einer Fundamentalgleichung.

Dasselbe gilt endlich von den Gleichungen, welche man erhält, wenn man in der Gleichung 1 an Stelle von ε die Funktionen $\chi = \varepsilon + pv$ oder $\zeta = \varepsilon - T\eta + pv$ einführt, deren letztere identisch ist mit Duhem's thermodynamischem Potential bei konstantem Druck.

II. Gleichgewicht eines Systems von Körpern.

Gegeben sei ein System von Körpern, welche in verschiedener Weise aus einer bestimmten Zahl von chemischen Componenten zusammengesetzt sind und welche gleichzeitig in verschiedenen Aggregatzuständen sich befinden. Ein solches System kann demnach enthalten: einen Theil, in welchem die verschiedenen gasförmigen Körper gleichmäßig mit einander gemischt sind, verschiedene flüssige Theile, entsprechend der Existenz von flüssigen Körpern oder Lösungen, welche mit einander nicht mischbar sind, verschiedene feste Theile, entsprechend den in festem Aggregatzustand vorhandenen Körpern.

Jeden solchen physikalisch und chemisch homogenen Theil des Systems bezeichnen wir nach Gibbs als eine Phase desselben.

Gleichgewicht kann in einem System von der Art des betrachteten nur dann vorhanden sein, wenn Temperatur und Druck überall dieselben sind. Die Gesammtenergie des Systems, welche gleich der Summe der Energieen der einzelnen Phasen ist, bezeichnen wir durch ε, die Gesammtentropie, gleich der Summe der Entropieen der einzelnen Phasen, durch η, das Gesammtvolumen durch v. Bleiben die Massenverhältnisse der einzelnen Phasen ungeändert, und wird die Energie in umkehrbarer Weise durch eine Vermehrung der Entropie und des Volumens geändert, so ist

$$\delta\varepsilon = Td\eta - pdv.$$

Allgemein haben wir die Energie ε aufzufassen als eine Funktion der Entropie η, des Volumens v und der Massen der chemischen Componenten, welche in den einzelnen Phasen vorhanden sind. Bezeichnen wir die in der ersten Phase vorhandenen Massen durch m_1', m_2', m_3', .., die in der zweiten vorhandenen durch m_1'', m_2'', m_3'' ... u. s. w., so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} D\varepsilon = Td\eta - pdv &+ \mu_1' dm_1' + \mu_2' dm_2' + \mu_3' dm_3' + .. \\ &+ \mu_1'' dm_1'' + \mu_2'' dm_2'' + \mu_3'' dm_3'' + .. \\ &+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \end{aligned}$$

Nach dem Princip von der Vermehrung der Entropie befindet sich unser System im neutralen Gleichgewicht, d. h. es sind alle mit den Bedingungen desselben verträglichen Variationen umkehrbar, wenn

$$D\varepsilon - Td\eta + pdv = 0.$$

Zerlegen wir die Aenderung der Energie in denjenigen Theil $\delta\varepsilon$, welcher lediglich durch eine etwa zuerst vorgenommene Aenderung von η und v, und denjenigen Theil $d\varepsilon$, welcher durch die nachfolgende Aenderung der Massen bedingt wird, so erhalten wir, wenn das System während der ganzen Aenderung im Gleichgewicht sich befand:

$$\delta\varepsilon + d\varepsilon - Td\eta + pdv = 0.$$

Wenn aber die Aenderungen von η und v für sich umkehrbar sind, so ist $\delta\varepsilon - Td\eta + pdv = 0$. Es ergiebt sich daher als Bedingung für das neutrale Gleichgewicht:

$$\begin{aligned} d\varepsilon = &\ \mu_1' dm_1' + \mu_2' dm_2' + \mu_3' dm_3' + \ldots \\ &+ \mu_1'' dm_1'' + \mu_2'' dm_2'' + \mu_3'' dm_3'' + \ldots \\ &+ \; . \; . \; . \; . \\ = &\ 0. \end{aligned}$$

Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so verläuft der natürliche Proceß stets so, daß

$$D\varepsilon - Td\eta + pdv < 0$$

oder $$\Sigma\mu' dm' + \Sigma\mu'' dm'' + \Sigma\mu''' dm''' + .. < 0.$$

Hier beziehen sich die Summen auf die einzelnen Phasen, welche in dem System vorhanden sind; für jede Phase ist die Summe zu erstrecken über alle in derselben vertretenen chemischen

Componenten. Die Faktoren μ, mit welchen die Zuwüchse der einzelnen Massen multiplicirt erscheinen, sind nichts anderes als die partiellen Differentialquotienten der Energie nach jenen Massen. Gibbs bezeichnet dieselben als die Potentiale der chemischen Componenten.

III. Die geometrische Repräsentation der coëxistirenden Phasen.

Die Zahl der nebeneinander in dem gegebenen Systeme vorhandenen Phasen sei i, die Zahl der chemischen Componenten k. Das System ist im Gleichgewicht, wenn

$$\Sigma \mu' dm' + \Sigma \mu'' dm'' + \Sigma \mu''' dm''' + \ldots = 0,$$

während gleichzeitig die Zuwüchse dm den Bedingungen unterworfen sind

$$\Sigma dm_1 = 0, \; \Sigma dm_2 = 0, \; \Sigma dm_3 = 0 \ldots$$

Es muß daher, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$ konstante Faktoren bedeuten,

$$\Sigma(\mu_1 - \lambda_1) dm_1 + \Sigma(\mu_2 - \lambda_2) dm_2 + \Sigma(\mu_3 - \lambda_3) dm_3 + \ldots = 0$$

sein. Somit besitzen im Gleichgewichtszustand die Potentiale der einzelnen chemischen Componenten in allen Phasen des Systems je einen bestimmten konstanten Werth; ist Gleichgewicht vorhanden, so sind die Bedingungen erfüllt

$$\begin{array}{l}
\mu_1' = \mu_1'' = \mu_1''' = \ldots = \mu_1^i \\
\mu_2' = \mu_2'' = \mu_2''' = \ldots = \mu_2^i \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\mu_k^1 = \mu_k'' = \mu_k''' = \ldots = \mu_k^i
\end{array}$$

Ein System von $ik - k$ Gleichungen.

Für jede einzelne Phase muß außerdem eine Zustandsgleichung existiren, welche man in verschiedenen Formen aufstellen kann. Der gewöhnlichen Darstellung wird es entsprechen, wenn wir den Druck ausdrücken durch eine Funktion von

$$T, \frac{m_1}{v}, \frac{m_2}{v}, \frac{m_3}{v}, \ldots$$

Wir erhalten dann die weiteren i Gleichungen

$$p = f'\left(T, \frac{m_1'}{v'}, \frac{m_2'}{v'}, \ldots\right) = f''\left(T, \frac{m_1''}{v''}, \frac{m_2''}{v''}, \ldots\right)$$
$$= f^i\left(T, \frac{m_1^i}{v^i}, \frac{m_2^i}{v^i}, \ldots\right)$$

Als Unbekannte sind zu betrachten

$$p,\ T,\ \frac{m_1'}{v'},\ \frac{m_2'}{v'},\ ..\ \frac{m_1''}{v''},\ \frac{m_2''}{v''},\ ...\ \frac{m_1^i}{v^i},\ \frac{m_2^i}{v^i},\ ...;$$

ihre Zahl ist $ik + 2$. Die Bedingungen des Gleichgewichtes werden durch ein bestimmtes Werthsystem der Veränderlichen befriedigt werden, wenn die Zahl dieser letzteren gleich ist der Zahl der Gleichungen, d. h. wenn

$$ik - k + i = ik + 2$$

oder

$$i = k + 2.$$

Ist die Zahl der chemischen Componenten gleich k, so existirt ein bestimmtes System von zusammengehörigen Werthen des Druckes, der Temperatur, der Dichtigkeiten $\frac{m}{v}$, bei welchem $k + 2$ verschiedene Phasen im Gleichgewicht sich befinden.

Coëxistenz einer größeren Phasenzahl ist nicht möglich, da sonst die Zahl der Gleichungen die der Unbekannten übertreffen würde. Ist die Zahl der coëxistirenden Phasen kleiner als $k + 2$, so bleibt eine entsprechende Zahl von Variabeln unbestimmt.

Zu demselben Resultate gelangt man in einfacherer Weise, wenn man, wie dies im Folgenden in der Regel geschehen wird, den Druck darstellt durch eine Funktion von T, μ_1, μ_2, ... μ_k und wenn man dementsprechend die Größen p, T, μ_1', μ_2', ... μ_1'', μ_2'', ... μ_1^i, μ_2^i, ... als unabhängige Veränderliche behandelt. Beachtet man nun, daß $\mu_1' = \mu_1'' = \dots \mu_1^i$, $\mu_2' = \mu_2'' = \dots = \mu_2^i$, ... $\mu_k' = \mu_k'' = \dots = \mu_k^i$, so reducirt sich die Zahl der Unbekannten auf $k + 2$, nämlich p, T, μ_1, μ_2, ... μ_k. Zu ihrer Bestimmung sind $k + 2$ Gleichungen erforderlich; im Falle der Coëxistenz von $k + 2$ Phasen sind diese gegeben durch die $k + 2$ Zustandsgleichungen. Im Falle eines Gleichgewichtes zwischen $k + 1$ Phasen bleibt eine Variable, im Falle des Gleichgewichtes zwischen k Phasen bleiben zwei Variable willkürlich.

Wir nehmen an, es seien diejenigen Werthe des Druckes, der Temperatur, der Potentiale μ oder der Dichtigkeiten $\frac{m}{v}$ berechnet, bei welchen $k + 2$ bestimmte Phasen unseres Systems coëxistiren können. Benützen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem mit den Axen p, T, so werden wir durch die gefundenen Werthe von p und T einen Punkt in der Coordinatenebene bestimmen können, welcher als ein

Bild für den Zustand des Systems während der Coëxistenz jener $k+2$ Phasen betrachtet werden kann. Derselbe wird im Folgenden durch A bezeichnet. Nehmen wir aus der ganzen Zahl der Phasen eine, etwa die Phase 1, weg, so sind die Bedingungen für die Coëxistenz der übrig bleibenden Phasen

$$\begin{array}{l} \mu_1'' = \mu_1''' = \ldots = \mu_1^{k+2} \\ \mu_2'' = \mu_2''' = \ldots = \mu_2^{k+2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mu_k'' = \mu_k''' = \ldots = \mu_k^{k+2} \end{array}$$

Hiezu kommen noch die Zustandsgleichungen der Phasen

$$\begin{aligned} p &= f''(T, \mu_1'', \mu_2'' \ldots \mu_k'') = f'''(T, \mu_1''', \mu_2''' \ldots \mu_k''') \\ &= \ldots . \qquad\qquad\qquad = f^{k+2}(T, \mu_1^{k+2}, \mu_2^{k+2} \ldots \mu_h^{k+2}) \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die gemeinsamen Werthe, welche die Potentiale der verschiedenen chemischen Componenten in den einzelnen Phasen besitzen durch μ_1', μ_2', $\ldots \mu_k'$, so reducirt sich die Zahl der Unbekannten wie früher auf $k+2$, die Zahl der Zustandsgleichungen beträgt $k+1$, sie ist um 1 kleiner als die Zahl der Variabeln. Eliminiren wir aus den Gleichungen die k Variabeln μ, so bleibt eine Gleichung zwischen p und T übrig, welche in der Coordinatenebene durch eine Curve dargestellt wird.

In jedem Punkte dieser Curve können die betrachteten $k+1$ Phasen nebeneinander im Gleichgewichte bestehen, in jedem Punkte sind aber außer den Werthen von Temperatur und Druck auch die Potentiale μ_1, $\mu_2 \ldots \mu_k$, beziehungsweise die Dichtigkeiten $\frac{m}{v}$ der Componenten bestimmt.

Lassen wir aus der Zahl der in dem Punkte A coëxistirenden $k+2$ Phasen der Reihe nach je eine weg, so erhalten wir $k+2$ Curven in der Coordinatenebene, welche sich in dem Punkte A durchschneiden müssen. Greift man nämlich aus der ganzen Zahl der Curven zwei beliebige heraus, so sind in ihrem Schnittpunkt alle Bedingungen erfüllt, durch welche wir früher den Punkt A bestimmt haben; der Punkt A ist also der Schnittpunkt von je zwei jener Curven, d. h. der gemeinsame Schnittpunkt aller.

Wir bezeichnen im Folgenden die von dem Punkte A auslaufenden $k+2$ Curven durch c', c'', $c''' \ldots c^{k+2}$ und zwar verstehen wir unter einem beliebigen c^h diejenige Curve, längs welcher die Phase h fehlt. In dem Punkte A sind die Dichten der Componenten in den einzelnen

Phasen, die Werthe von $\frac{m_1'}{v'}$, $\frac{m_2'}{v'}$ .. $\frac{m_1''}{v''}$, $\frac{m_2''}{v''}$, ... ferner die Dichten der Entropie in den einzelnen Phasen, die Werthe von $\frac{\eta'}{v'}$, $\frac{\eta''}{v''}$, .. gegeben. Schreiten wir von dem Punkte A aus auf der Curve c' fort um die Strecke dp', dT', so gilt für die Veränderung jeder einzelnen Phase die Gleichung 2. Wir erhalten also für die Phasen 2 bis $k+2$ die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
-dp' + \frac{\eta''}{v''}dT' + \frac{m_1''}{v''}d\mu_1' + \frac{m_2''}{v''}d\mu_2' + \ldots + \frac{m_k''}{v''}d\mu_k' &= 0\\
-dp' + \frac{\eta'''}{v'''}dT' + \frac{m_1'''}{v'''}d\mu_1' + \frac{m_2'''}{v'''}d\mu_2' + \ldots + \frac{m_k'''}{v'''}d\mu_k' &= 0\\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot\\
-dp' + \frac{\eta^{k+2}}{v^{k+2}}dT' + \frac{m_1^{k+2}}{v^{k+2}}d\mu_1' + \frac{m_2^{k+2}}{v^{k+2}}d\mu_2' + \ldots + \frac{m_k^{k+2}}{v^{k+2}}d\mu_k' &= 0
\end{aligned}
$$

Da die $k+1$ Phasen 2 bis $k+2$ längs c' miteinander im Gleichgewichte sind, so hat jede einzelne chemische Componente in allen Phasen dasselbe Potential; es hat somit auch $d\mu_1'$ in all den vorhergehenden Gleichungen denselben Werth; ebenso $d\mu_2'$, $d\mu_3'$ .. $d\mu_k'$. Durch Elimination dieser Differentiale ergiebt sich die Gleichung:

$$
3. \qquad \left(\frac{dp}{dT}\right)' \begin{vmatrix} 1 & \frac{m_1''}{v''} & \frac{m_2''}{v''} & \ldots & \frac{m_k''}{v''} \\ 1 & \frac{m_1'''}{v'''} & \frac{m_2'''}{v'''} & \ldots & \frac{m_k'''}{v'''} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \frac{m_1^{k+2}}{v^{k+2}} & \frac{m_2^{k+2}}{v^{k+2}} & \ldots & \frac{m_k^{k+2}}{v^{k+2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\eta''}{v''} & \frac{m_1''}{v''} & \frac{m_2''}{v''} & \ldots & \frac{m_k''}{v''} \\ \frac{\eta'''}{v'''} & \frac{m_1'''}{v'''} & \frac{m_2'''}{v'''} & \ldots & \frac{m_k'''}{v'''} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\eta^{k+2}}{v^{k+2}} & \frac{m_1^{k+2}}{v^{k+2}} & \frac{m_2^{k+2}}{v^{k+2}} & \ldots & \frac{m^{k+2}}{v^{k+2}} \end{vmatrix}
$$

Diese schon von Gibbs aufgestellte Gleichung bestimmt in unserem Falle die Tangente des Winkels, welchen die Curve c' in ihrem Ausgangspunkte A mit der Axe T einschließt; sie giebt allgemein die Neigung der Curve in einem beliebigen ihrer Punkte, wenn man in derselben an Stelle von $\frac{\eta}{v}$ und $\frac{m}{v}$ die jenem Punkte entsprechenden Werthe setzt.

Zwischen den Richtungstangenten $\left(\frac{dp}{dT}\right)'$, $\left(\frac{dp}{dT}\right)''$, $\left(\frac{dp}{dT}\right)'''$ .... $\left(\frac{dp}{dT}\right)^{k+2}$, welche die $k+2$ Curven c', c'', c'''... c^{k+2} in ihrem gemeinsamen Ausgangspunkte A besitzen, bestehen $k+2$ Gleichungen, welche in symbolischer Form folgendermaßen geschrieben werden können:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{dT}{dp}\ \frac{\eta}{v}\ \frac{m_1}{v}\ \frac{m_2}{v}\ \ldots\ \frac{m_k}{v}\right)=0\\
&\left(\frac{dp}{dT}\ \frac{v}{\eta}\ \frac{m_1}{\eta}\ \frac{m_2}{\eta}\ \ldots\ \frac{m_k}{\eta}\right)=0\\
&\left(\frac{dp}{dT}\ \frac{v}{m_1}\ 1\ \frac{m_2}{m_1}\ \ldots\ \frac{m_k}{m_1}\right)=0\\
&\left(\frac{dp}{dT}\ \frac{v}{m_2}\ \frac{m_1}{m_2}\ 1\ \ldots\ \frac{m_k}{m_2}\right)=0\\
&\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&\left(\frac{dp}{dT}\ \frac{v}{m_k}\ \frac{m_1}{m_k}\ \frac{m_2}{m_k}\ \ldots\ 1\right)=0
\end{aligned}
\qquad 4.
$$

Hier sind die Klammern gesetzt an Stelle von $k+2$ gliedrigen Determinanten, welche aus den in den Klammern stehenden Ausdrücken in folgender Weise zu entwickeln sind. Man ertheilt beispielsweise in der ersten Klammer dem Differentialquotienten $\frac{dT}{dp}$ den der Curve c' entsprechenden Werth; gleichzeitig setzt man für $\frac{\eta}{v}$, $\frac{m_1}{v}$, $\frac{m_2}{v}$, $\ldots \frac{m_k}{v}$ diejenigen Werthe, welche diese Ausdrücke in dem Punkte A für die erste Phase besitzen. Die Reihe

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)'\ \frac{\eta'}{v'},\ \frac{m_1'}{v'},\ \frac{m_2'}{v'}\ \ldots\ \frac{m_k'}{v'}$$

repräsentirt dann die erste Horizontalreihe der entsprechenden Determinante; in derselben Weise ergeben sich die folgenden Reihen und demzufolge erhält man:

$$
\left(\frac{dT}{dp}\ \frac{\eta}{v}\ \frac{m_1}{v}\ \frac{m_2}{v}\ \ldots\ \frac{m_k}{v}\right)=
$$

$$
\begin{vmatrix}
\left(\frac{dT}{dp}\right)' & \frac{\eta'}{v'} & \frac{m_1'}{v'} & \frac{m_2'}{v'} & \ldots & \frac{m_k'}{v'}\\
\left(\frac{dT}{dp}\right)'' & \frac{\eta''}{v''} & \frac{m_1''}{v''} & \frac{m_2''}{v''} & \ldots & \frac{m_k''}{v''}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\
\left(\frac{dT}{dp}\right)^{k+2} & \frac{\eta^{k+2}}{v^{k+2}} & \frac{m_1^{k+2}}{v^{k+2}} & \frac{m_2^{k+2}}{v^{k+2}} & \ldots & \frac{m_k^{k+2}}{v^{k+2}}
\end{vmatrix}=0.
$$

In derselben Weise ergeben sich die übrigen Determinanten.

Aus dem ganzen Büschel der von A auslaufenden Curven greifen wir wiederum die Curve c' heraus. In jedem Punkt derselben haben nicht nur p und T, sondern auch die Potentiale μ_1', μ_2', μ_3', ... μ_k' bestimmte Werthe. Tragen wir in jedem Punkt der Curve c' den zugehörigen Werth von μ_1' senkrecht zu der Ebene p, T auf, so erhalten wir eine Raumcurve, deren einzelne Punkte die zusammengehörigen Werthe von p, T und μ_1' repräsentiren. Eine ebensolche Curve repräsentirt die zusammengehörigen Werthe von p, T, μ_2', von p, T, μ_3' u. s. w.; wir erhalten also über der Curve c' ein System von k Raumcurven entsprechend den k verschiedenen chemischen Componenten.

Gehen wir auf der ersten dieser Curven von einem beliebigen Punkte aus um die Strecken dp', dT', $d\mu_1'$ weiter, so finden die Beziehungen statt

$$dp' : dT' : d\mu_1'$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\eta''}{v''} & \frac{m_1''}{v''} & \frac{m_2''}{v''} & \cdots \\ \frac{\eta'''}{v'''} & \frac{m_1'''}{v'''} & \frac{m_2'''}{v'''} & \cdots \\ . & . & . & \cdots \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & \frac{m_1''}{v''} & \frac{m_2''}{v''} & \cdots \\ 1 & \frac{m_1'''}{v'''} & \frac{m_2'''}{v'''} & \cdots \\ . & . & . & \cdots \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\eta''}{v''} & 1 & \frac{m_2''}{v''} & \cdots \\ \frac{\eta'''}{v'''} & 1 & \frac{m_2'''}{v'''} & \cdots \\ . & . & . & \cdots \end{vmatrix}$$

Die durch die zusammengehörigen Werthe von p', T', μ_1' bestimmte Raumcurve, auf welche sich die vorhergehenden Formeln beziehen, möge im Folgenden durch A' bezeichnet werden.

Nehmen wir aus der Zahl der $k+1$ Phasen, welche längs der Curve c' im Gleichgewichte mit einander sich befinden, eine weitere hinweg, so bleiben zwischen unseren $k+2$ Variabeln p, T, μ_1 .... μ_k noch k Gleichungen bestehen; aus diesen werden die Potentiale μ zu berechnen sein als Funktionen von p und T, während diese letzteren Variabeln unbestimmt bleiben. Richten wir unsere Aufmerksamkeit insbesondere auf denjenigen Ausdruck, durch welchen μ_1 gegeben wird als Funktion von p und T, so wird derselbe in einem rechtwinkligen Coordinatensystem mit den Axen p, T und μ_1 dargestellt werden durch eine Fläche. Lassen wir aus der Zahl der Phasen, welche in c' coëxistiren, der Reihe nach die Phasen $2, 3 \ldots k+2$ weg, so erhalten wir $k+1$ verschiedene Systeme von Gleichungen; jedem derselben entspricht eine besondere Beziehung zwischen p, T und μ_1, jedem derselben eine besondere durch jene Beziehung dargestellte Oberfläche. Wir bezeichnen diese Flächen der Reihe nach durch $f^{1,2}$, $f^{1,3}$, .. $f^{1,k+2}$ die ihnen angehörenden Werthe der Variabeln durch p^{12}, T^{12}, μ_1^{12}; p^{13}, T^{13}, μ_1^{13}; .... In der Schnittlinie von irgend zweien dieser Flächen sind alle diejenigen Gleichungen erfüllt, durch welche wir die Curve A' bestimmt haben. Die Curve A' ist somit die Schnittlinie jener Flächen und ebenso der übrigen durch die zusammengehörigen Werthe von p, T, μ_1 gegebenen. Die Curve A' bildet somit die gemeinsame Schnittlinie der $k+1$ Flächen f^{12}, f^{13} ... $f^{1,k+2}$, längs welcher je k Phasen im Gleichgewichte sich befinden, aus deren Zahl die Phase 1 ein für allemal ausgeschlossen ist.

Ebenso, wie wir der Curve c' eine Raumkurve A' zugeordnet haben, können wir der Curve c'' eine Raumkurve A'' zuordnen. Wir erhalten, indem wir dies für alle Curven c ausführen, ein System von $k+2$ Raumkurven, welche sich alle in einem und demselben senkrecht über A gelegenen Punkte durchschneiden müssen. Jede dieser Curven bildet ihrerseits wieder die Axe für $k+1$ fächerförmig von derselben ausstrahlende Flächen, längs welcher je k Phasen mit einander im Gleichgewichte sich befinden. Die Zahl dieser Flächen ist demnach $\dfrac{(k+2)(k+1)}{2}$ und jede derselben geht durch zwei von den Curven A hindurch.

Kehren wir zurück zu der Fläche f^{12}, so ergiebt sich aus der Anwendung der Gleichung 2 auf die in derselben coëxistirenden Phasen die folgende Beziehung zwischen den Coordinatenunterschieden zweier auf der Fläche benachbarter Punkte:

$$
5)\quad dp^{12}\begin{vmatrix} 1 & \frac{m_2'''}{v'''} & \frac{m_3'''}{v'''} & \cdot\cdot \\ 1 & \frac{m_2^{IV}}{v^{IV}} & & \cdot\cdot\cdot \\ 1 & \cdot & & \cdot\cdot\cdot \end{vmatrix} = d\,T^{12}\begin{vmatrix} \frac{\eta'''}{v'''} & \frac{m_2'''}{v'''} & \frac{m_3'''}{v'''} & \cdot\cdot \\ \frac{\eta^{IV}}{v^{IV}} & \frac{m_2^{IV}}{v^{IV}} & & \cdot\cdot\cdot \\ \frac{\eta^{V}}{v^{V}} & \cdot & & \cdot\cdot\cdot \end{vmatrix} + d\mu^{12}\begin{vmatrix} \frac{m_1'''}{v'''} & \frac{m_2'''}{v'''} & \frac{m_3'''}{v'''} & \cdot\cdot \\ \frac{m_1^{IV}}{v^{IV}} & \frac{m_2^{IV}}{v^{IV}} & & \cdot\cdot\cdot \\ \frac{m_1^{V}}{v^{V}} & \cdot & & \cdot\cdot\cdot \end{vmatrix}
$$

Liegt das die beiden Punkte verbindende Linienelement in einer zu der Ebene p, T parallelen Ebene, so ist $d\mu^{12} = 0$ und wir erhalten:

$$6)\qquad \delta p^{12} \begin{vmatrix} 1 & \frac{m_2'''}{v'''} & \frac{m_3'''}{v'''} & \cdot\,\cdot \\ 1 & \frac{m_2^{IV}}{v^{IV}} & \cdot & \cdot\,\cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot \end{vmatrix} = \delta T^{12} \begin{vmatrix} \frac{\eta'''}{v'''} & \frac{m_2'''}{v'''} & \frac{m_3'''}{v'''} & \cdot\,\cdot \\ \frac{\eta^{IV}}{v^{IV}} & \frac{m_2^{IV}}{v^{IV}} & & \cdot\,\cdot\,\cdot \\ \frac{\eta^{V}}{v^{V}} & \cdot & & \cdot\,\cdot\,\cdot \end{vmatrix}$$

Auf der Curve A', längs welcher die $k+1$ Phasen $2, 3 \ldots k+2$ im Gleichgewichte sich befinden, nehmen wir einen beliebigen Punkt B, welchem der Potentialwerth μ_1' angehören möge. Ohne dass der Zustand des Systems aus dem Punkte B sich entfernt, können wir nun eine der Phasen etwa 2 zum Verschwinden bringen. Ist dies erreicht, so wird bei einer nunmehr eintretenden Aenderung von Temperatur und Druck der Zustand des Systems längs der Fläche f^{12} sich fortbewegen. Wir setzen voraus, daß jene Aenderungen so vorgenommen werden, daß dabei das Potential μ_1' seinen Werth nicht ändert, dann bewegt sich der Zustand des Systems auf der Linie, in welcher die Fläche f^{12} von der Ebene $\mu_1' =$ Const. durchschnitten wird. Die Neigung, welche diese Linie in dem Punkt B gegen die Axen p und T besitzt, wird bestimmt durch die Gleichung, welche wir im Vorhergehenden zwischen δp^{12} und δT^{12} aufgestellt haben. Wir können nun in derselben Weise die Phase 3 zum Verschwinden bringen; ändern wir dann wiederum bei konstant erhaltenem Werthe μ_1' die Werthe von p und T, so bewegt sich der Zustand des Systems auf der Curve, in welcher die Fläche f^{13} von der Ebene $\mu_1' =$ Const. geschnitten wird. In dem Punkte B wird die Neigung der Curve gegen die Axen p und T bestimmt durch die Gleichung:

$$6')\qquad \delta p^{13} \begin{vmatrix} 1 & \frac{m_1''}{v''} & \frac{m_2''}{v''} & \cdot\,\cdot \\ 1 & \frac{m^{IV}}{v^{IV}} & \cdot & \cdot\,\cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot \end{vmatrix} = \delta T^{13} \begin{vmatrix} \frac{\eta''}{v''} & \frac{m_1''}{v''} & \frac{m_2''}{v''} & \cdot\,\cdot \\ \frac{\eta^{IV}}{v^{IV}} & \frac{m^{IV}}{v^{IV}} & & \cdot\,\cdot\,\cdot \\ \frac{\eta^{V}}{v^{V}} & \cdot & & \cdot\,\cdot\,\cdot \end{vmatrix}$$

Wenn wir in derselben Weise weitergehen, so erhalten wir in der durch den Punkt B hindurchgelegten Ebene $\mu_1' =$ Const. ein System von $k+1$ Curven, welche durch gewisse Gleichungen zwischen den Veränderlichen p und T bestimmt sein werden. Auf der Curve d^{12} findet Gleichgewicht statt zwischen den Phasen 3, 4 ... $k+2$, auf der Curve d^{13} Gleichgewicht zwischen 2, 4 ... $k+2$ u. s. w. immer unter der Voraussetzung, daß die Veränderungen von p und T so gewählt werden, daß dabei μ_1' konstant bleibt. Die Neigungen der Curven gegen die Axen p und T werden in ihrem Ausgangspunkte B bestimmt durch Gleichungen von der Art der im Vorhergehenden gegebenen; die in denselben auftretenden Determinanten sind ganz ebenso gebaut, wie die in den Gleichungen 3 und 4 vorkommenden. Daraus ergiebt sich, dass zwischen den $k+1$ Richtungstangenten der Curven d^{12}, d^{13} ... $d^{1,k+2}$ $k+1$ Gleichungen bestehen, welche den Gleichungen 4 vollkommen analog sind.

Wir kommen auf diesem Wege zu dem folgenden geometrischen Bild für den Zusammenhang unseres Phasensystemes. Den Ausgangspunkt bildet der Punkt A, in welchem die Maximalzahl von $k+2$ Phasen im Gleichgewichte sich befindet. Wir ziehen von diesem Punkte aus die $k+2$ Curven c, längs welcher je $k+1$ Phasen im Gleichgewichte sind. Indem wir nun als weitere Variable das Potential einer beliebigen unter unseren chemischen Componenten einführen, etwa μ_1, konstruiren wir über dem System der Curven c das System der Raumkurven A. Wir verbinden diese durch die $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ Flächen, längs welcher je k von unseren Phasen mit einander im Gleichgewicht sind.

Nehmen wir nun auf einer der Raumkurven A etwa A', längs welcher die Phase 1 fehlt, einen Punkt B, legen wir durch diesen eine Ebene parallel zu der Coordinatenebene $p\,T$, so erhalten wir $k+1$ Schnittkurven d^1 mit den durch A' hindurchgehenden Flächen. Auf diesen Curven sind je k Phasen mit einander im Gleichgewicht; die Phase 1 fehlt auf allen und alle Veränderungen des Systems sind der Bedingung unterworfen, daß das Potential der ersten chemischen Componente denselben Werth behält.

In dem Curvensystem d^1 finden sich die Eigenschaften des Systemes c hinsichtlich der Neigungen, welche die einzelnen Curven in ihrem Ausgangspunkte gegen die Axen p und T besitzen vollständig reproducirt. Man kann an das Curvensystem d^1 ganz dieselben Betrachtungen anknüpfen wie an das System c und gelangt so zu dem Satze:

Ein System von $k+1$ Phasen, in welchem das Potential einer chemischen Componente konstant erhalten wird, verhält sich gerade so, wie ein System von $k+2$ Phasen bei unbeschränkter Veränderlichkeit der Potentiale.

Die Fortsetzung derselben Betrachtungen führt zu dem allgemeinen Satze:

Ein System von i Phasen, in welchem die Potentiale von $k+2-i$ chemischen Komponenten festgehalten werden, besitzt dieselben Eigenschaften, wie ein System von $k+2$ Phasen bei unbeschränkter Veränderlichkeit der Potentiale. Die Maximalzahl der coëxistirenden Phasen bleibt dabei immer um 2 größer als die Zahl der chemischen Componenten mit veränderlichem Potential.

Man sieht, daß durch die vorhergehenden Sätze ein Schema gegeben wird, in welches alle möglichen Zustände eines aus k chemischen Componenten zusammengesetzten Systemes eingeordnet werden können.

Ueber die Reihenentwickelung der geraden Sigmafunctionen zweier Veränderlichen.

(Aus einem Briefe an Herrn Prof. Wiltheiss in Halle[1]).)

Von

Fr. Brioschi in Mailand.

(Vorgelegt von F. Klein.)

Nachstehend wünsche ich, Ihnen eine Transformation der Differentialgleichung für die geraden Funktionen $\sigma(u_1, u_2)$ mitzutheilen, welche, wie mir scheint, das Problem der Reihenentwicklung vollständig löst.

Wie Sie wissen, wenn man mit a_i eine Wurzel der Gleichung $f=0$ bezeichnet und

$$P_0 = \sum_i \frac{d}{da_i}, \quad P_1 = \sum_i a_i \frac{d}{da_i}, \quad P_2 = \sum_i a_i^2 \frac{d}{da_i}$$

setzt, so hat man bei der Bezeichnung eines Gliedes der Reihenentwicklung mit N die Beziehungen

---

1) Die Resultate des Herrn Wiltheiss, auf welche Herr Brioschi im Texte Bezug nimmt, sind in dessen Abhandlung: „Ueber eine Covarianten bildende Operation, Theil II“ enthalten und in Bd. 36, Heft 1 der mathematischen Annalen bereits veröffentlicht. Kl.

$$P_0(N) = -u_2 \frac{dN}{du_1}, \quad P_1(N) = u_2 \frac{dN}{du_2} + mN,$$

$$P_2(N) = u_1 \frac{dN}{du_2} + \tfrac{1}{2} m S_1 N,$$

wo die gerade Zahl m die Ordnung von N bedeutet und $S_1 = \sum_i a_i$ ist.

Es sei nun $f = \varphi . \psi$ und a_r eine der Wurzeln von $\varphi = 0$, a_s eine der Wurzeln von $\psi = 0$. Ich bezeichne mit G_0, G_1, G_2 die drei Operationssymbole

$$G_0(N) = \sum_r \frac{dN}{da_r} - \sum_s \frac{dN}{da_s},$$

$$G_1(N) = \sum_r a_r \frac{dN}{da_r} - \sum_s a_s \frac{dN}{da_s},$$

$$G_2(N) = \sum_r a_r^2 \frac{dN}{da_r} - \tfrac{1}{2} m s_1 N - \left[\sum_s a_r^2 \frac{dN}{da_r} - \tfrac{1}{2} m \sigma_1 N\right],$$

wo

$$s_1 = \sum_r a_r, \quad \sigma_1 = \sum_s a_s,$$

setze

$$(\varphi\,\psi) = \vartheta, \quad (\varphi\,\psi)_3 = J,$$

und verstehe unter D das Operationszeichen

$$D = 6[\vartheta_{22} G_0 + 2\vartheta_{12} G_1 + \vartheta_{11} G_2] + J[u_1^2 G_0 - 2u_1 u_2 G_1 + u_2^2 G_2],$$

wo

$$\vartheta_{11} = \frac{1}{3.4} \frac{d^2\vartheta}{du_1^2}, \ldots .$$

Sei nun

$$\sigma(u_1, u_2) = 1 + \frac{S_1}{2!} + \frac{S_2}{4!} + \frac{S_3}{6!}, \ldots,$$

so besteht zwischen den drei Funktionen S_n, S_{n-1}, S_{n-2} die Relation

$$(1) \quad S_n = D(S_{n-1}) + (4n-3) S_1 S_{n-1} - 24(n-1)(2n-3) k S_{n-2},$$

(wo $k = \frac{1}{2}(f\,f)_4$); eine Relation, die ganz analog ist derjenigen für die elliptischen σ-Functionen. Man kann leicht zeigen, daß, wenn M eine simultane Invariante ρten Grades von φ und ψ ist, $D(M)$ eine simultane Covariante zweiter Ordnung und $(\rho+2)$ten Grades wird und daß, wenn M eine simultane Covariante vom ρten Grade und $m$ter Ordnung ist, $D(M)$ eine simultane Covariante $(\rho+2)$ten Grades und $(m+2)$ter Ordnung wird. Und da nun

$$S_1 = \tfrac{9}{5}(\varphi\psi)_2$$

eine simultane Covariante zweiten Grades und zweiter Ordnung ist, so wird S_n eine solche vom $2n$ten Grade und $2n$ter Ordnung sein.

Die Operation D beschränkt die Anzahl der simultanen Invarianten und Covarianten, welche die Glieder der Reihenentwicklung, S_1, S_2, ... bilden. Sie theilen mir in Ihrem Briefe mit, daß Sie auf anderm Wege zu demselbem Resultate gelangt seien. Aber es scheint mir, daß die Operation D diesen wichtigen Punkt besser präcisirt.

Angenommen

$$\begin{array}{llll} \tfrac{1}{2}(\varphi\varphi)_2 = a, & (\varphi\psi)_2 = b, & \tfrac{1}{2}(\psi\psi)_2 = c, & \\ (ca) = \beta, & (ca)_2 = \gamma, & (b\beta)_2 = & \tfrac{1}{2}(\lambda\mu) = \varkappa, \\ (\psi a)_2 = & -(\varphi b)_2 = \lambda, & (\varphi c)_2 = & -(\psi b)_2 = \mu, \end{array}$$

so bestehen die Glieder S_1, S_2. ... aus

drei simultanen Invarianten: J, γ, $\varkappa$,
drei simultanen Covarianten: b, β, $\lambda\mu$ von der zweiten Ordnung,
zwei simultanen Covarianten: d, ac von der vierten Ordnung,
einer simultanen Covariante: $\varphi\psi$ von der sechsten Ordnung,

d. h. aus neun simultanen Formen. Man hat in der That

$$\begin{aligned} D(b) &= 2(J\vartheta + 24ac - 6b^2), \\ D(J) &= -6(Jb + 6\beta), \\ D(\vartheta) &= 4J\varphi\psi - 18b\vartheta, \\ D(ac) &= 12\beta\vartheta, \\ D(\varphi\psi) &= -18\vartheta^2, \\ D(\beta) &= 2(Jac + 6\gamma\vartheta - 3b\beta), \\ D(\gamma) &= -8J\beta + 12\lambda\mu, \\ D(\lambda\mu) &= 8(3\varkappa - J\gamma)\vartheta + 4Jb\beta + 36(\beta^2 - \gamma b^2) + 12(12\gamma - J^2)ac, \\ D(k) &= -6\varkappa b + 36\gamma\beta - 2J\lambda\mu, \end{aligned}$$

welche Ausdrücke zeigen, daß der Kreis der Formen, die durch die Operation D entstehen, ein geschlossener ist. Man hat überdies

$$10\varkappa = -J\vartheta + 6ac + \tfrac{6}{5}b^2,$$

und demnach muß man zu Folge der Relation (1) dasselbe von S_n sagen.

Mailand, den 6. April 1890.

Ueber das gegenseitige Verhältniß der Theorieen über die Structur der Krystalle.

Von

A. Schoenflies [1].

(Vorgelegt von F. Klein.)

1. Die folgende Mittheilung ist bestimmt, für diejenigen geometrischen Fragen, welche das Verhältniß der Structurtheorieen zu einander betreffen, eine übersichtliche Darstellung zu geben, zu dem Zweck, eine abschließende Beurtheilung derselben zu ermöglichen. In der Auffassung der einschlägigen Verhältnisse hat es bislang an der erwünschten Uebereinstimmung sehr gefehlt. Es dürfte genügen, wenn ich hierfür auf die vor kurzem erschienene Arbeit des Herrn Blasius verweise [2], in welcher Herr Blasius sich ebenfalls die Aufgabe stellt, die bisher bekannten Structurtheorieen nach geometrisch-krystallographischen Gesichtspunkten mit einander zu vergleichen. Wenn das Ergebniß dieses Vergleichs weder als überzeugend noch als abschließend bezeichnet werden kann, so liegt dies daran, daß einerseits gewisse gruppentheoretische Thatsachen, die auf diesem Gebiet an erster Stelle figuriren sollten, nicht berücksichtigt werden und daß andrerseits, wie dies übrigens bisher stets üblich gewesen ist, bei der Prüfung der Symmetrieverhältnisse ausschließlich mit Punktsystemen operirt wird. Zur Vermeidung von Irrthümern scheint es jedoch zweckmäßig, für die geometrischen Untersuchungen die Molekeln selbst in's Auge zu fassen; wenigstens ist es diesem Umstande zu danken, wenn es mir, wie ich hoffe, gelungen ist, zu einem endgiltigen Resultat zu kommen.

2. Drei verschiedene Theorieen kommen in Frage, nämlich 1) die Theorie von Bravais und Wulff, 2) die Theorie von Wiener und Sohncke, und 3) diejenige, welche ich selbst in diesen Nachrichten kürzlich dargestellt habe [3]. Ich bemerke, daß die Nothwendigkeit, die Theorie so weiterzubilden, wie es dort geschehen ist, mir gegenüber zuerst von Herrn Klein betont worden ist. Auf die a. a. O. benutzten Punktsysteme war übrigens

1) Die ausführliche Darstellung wird binnen Kurzem erscheinen.

2) Ueber die Beziehungen zwischen den Theorieen der Krystallstructur etc. Ber. d. Münch. Akad. 1889. Bd. 19. S. 47.

3) Jahrg. 1889. S. 483.

schon vorher von Herrn P. Curie[1]), und wie ich erst kürzlich erfahren habe, auch von Herrn Fedoroff[2]) hingewiesen worden.

Vom geometrischen Gesichtspunkt aus handelt es sich bei jeder Theorie in erster Linie um die Erklärung der Krystallsymmetrie aus der Natur und der Anordnung der Krystallmolekeln. In dieser Hinsicht ist zu verlangen, daß jede Theorie — soll sie anders als zulässig zu betrachten sein — für alle bekannten, resp. theoretisch möglichen Krystallgestalten Molekelhaufen von unbegrenzter Ausdehnung zu construiren vermag, welche genau dieselbe Symmetrie[3]) aufweisen, wie der bezügliche Krystall selbst[4]). Nun zerfallen bekanntlich die Krystalle rücksichtlich ihrer Symmetrie in 32 von einander verschiedene Klassen, welche den 32 Gruppen von Symmetrieen um einen Punkt entsprechen[5]). Danach ist evident, daß eine Structurtheorie der eben gestellten Forderung immer und nur dann genügt, wenn sie für jede dieser 32 Klassen Molekelhaufen[6]) von analogem Symmetriecharacter enthält.

Diese Bedingung ist für jede der genannten drei Theorieen ausnahmslos erfüllt.

3. Die Fragen, welche an dieser Stelle beantwortet werden sollen, präcisire ich nun folgendermaßen:

In welchen mathematischen Thatsachen ist es begründet, daß — auf Grund der Hypothese über den regelmäßigen Aufbau der Krystallmasse — verschiedene Theorieen neben einander existiren können, die in dem eben genannten Sinne gleichwerthig sind; und zweitens, wie viel Theorieen dieser Art sind überhaupt möglich.

Die Antwort, die hierauf zu ertheilen ist, beruht auf einigen wenigen gruppentheoretischen Ueberlegungen.

Die regelmässigen Molekelhaufen, in welche sich die Krystallmasse auflösen läßt, entstehen bekanntlich in jedem Fall dadurch,

---

1) On n'a pas encore étudié d'une façon complète la symétrie d'une matière cristallisée etc. Bull. de la soc. min. de France. Bd. 7. S. 453 (1884).

2) Vgl. die russisch geschriebenen „Elemente der Lehre von den Figuren". Petersburg 1885. S. 239 und 240.

3) Das Wort „Symmetrie" ist hier, wie im Folgenden immer im krystallographischen Sinn gebraucht.

4) Dieser Standpunkt deckt sich allerdings nicht mit demjenigen des Herrn Blasius. Hierauf gehe ich in der ausführlichen Darstellung genauer ein.

5) Diese 32 Gruppen werde ich, da sie gruppentheoretisch zuerst von Herrn Minnigerode abgeleitet sind, im Folgenden stets als die Minnigerodeschen Gruppen bezeichnen.

6) Es sind immer Molekelhaufen von unbegrenzter Ausdehnung gemeint.

daß eine beliebige Molekel $\mathfrak{M}$ den sämmtlichen Operationen einer Gruppe von Raumtransformationen — sie heisse Γ — unterworfen wird. In jeden Fundamentalbereich der zugehörigen Raumtheilung fällt eine Molekel. Ist die Gruppe eine Bewegungsgruppe, so sind alle Molekeln in Form und Qualität einander congruent; im allgemeinen Fall dagegen ist der Molekelhaufen offenbar zur Hälfte aus congruenten Molekeln aufgebaut, zur Hälfte aus solchen, welche der Ausgangsmolekel spiegelbildlich gleich sind.

Jede Gruppe Γ von Raumtransformationen ist, wie ich bewiesen habe, einer der 32 Minnigerodeschen Gruppen G isomorph[1]). Dies findet so statt, daß jeder Operation von G unendlich viele analoge Operationen von Γ entsprechen; beispielsweise finden sich zu jeder n-zähligen Symmetrieaxe von G unendlich viele ihr parallele n-zählige Drehungsaxen resp. Schraubenaxen von Γ. Nun wird der Symmetriecharacter eines Molekelhaufens, wie unmittelbar einleuchtet, genau durch diejenigen Operationen bestimmt, welche ihn so in sich überführen, daß jede Molekel wieder mit einer Molekel zur Deckung gelangt[2]). Dies sind, wenn wir eine beliebig gewählte Ausgangsmolekel benutzen, keine andern als diejenigen, durch welche der Molekelhaufen erzeugt wurde, d. h. die Operationen von Γ. Die vorstehend genannten Molekelhaufen sind also bezüglich ihrer Symmetrie genau den 32 Krystallclassen zuzuordnen.

Dies ist die Auffassung, welche der von mir selbst dargestellten Theorie zu Grunde liegt. Krystallographisch läuft sie darauf hinaus, daß jede der Molekeln als isolirter Krystallbaustein zu betrachten ist, und daß die Symmetrie der Krystallmasse ausschließlich auf der Anordnung der Molekeln, d. h. auf der Structur[3]) beruht.

4. Wenn der besondere Fall eintritt, daß die Molekel $\mathfrak{M}$ selbst mit Symmetrieeigenschaften begabt ist, so kann der aus ihr vermittelst der Gruppe Γ erzeugte Molekelhaufen dadurch ebenfalls höheren Symmetriecharacter erhalten; d. h. es kann der Fall eintreten, daß er noch durch andere Operationen in sich übergeht, als diejenigen von Γ. Hierin liegt, wie sich zeigen wird, die gruppentheoretische Erklärung der Thatsache, daß mehrere Structurtheorieen nebeneinander bestehen können. Dieser Punkt soll nun genauer analysirt

1) Vgl. Math. Annalen, Bd. 29, S. 50 u. Bd. 34, S. 179.

2) Dabei bleibt es zunächst eine offene Frage, ob die bezüglichen Operationen jede Molekel $\mathfrak{M}$ in eine andere überführen, oder nicht.

3) Es dürfte dem allgemeinen Sprachgebrauch entsprechen, wenn unter Structur nur die Anordnung der Molekeln im Raum verstanden wird.

werden. Zu diesem Zweck wollen wir zunächst ganz allgemein die Frage untersuchen, auf welchen geometrischen Verhältnissen überhaupt die Symmetrie eines Molekelhaufens beruhen kann.

Um an Bekanntes anzuknüpfen, möge zunächst auf die bezüglichen Verhältnisse der Bravaisschen Gitter hingewiesen werden. Die Bravaisschen Molekelhaufen, welche irgend einer der 32 Gruppen G entsprechen, werden stets so gebildet, daß zur Erzeugung eine Molekel benutzt wird, welche bei allen Operationen der Gruppe G in sich übergeht, deren Symmetrie also durch die Gruppe G gekennzeichnet ist. Diese wird den sämmtlichen Bewegungen einer gewissen Translationsgruppe T unterworfen. Bilden wir nun diejenige Gruppe Γ, welche sich durch Multiplication von G und T ergiebt; so ist klar, daß jede ihrer Operationen den Molekelhaufen in sich überführt. Die Symmetrie des Molekelhaufens ist daher durch die Gruppe Γ characterisirt; andrerseits ist evident, daß sie nur zum Theil auf der Structur, zum Theil aber auch auf der Qualität der Molekel beruht.

Es wird sich zeigen, daß allemal, wenn die Qualität der Molekel von Einfluß auf die Symmetrie des Molekelhaufens ist, Verhältnisse vorliegen, die den eben geschilderten analog sind. Dies ergiebt sich wie folgt.

5. Es sei $\mathfrak{H}$ irgend ein regelmäßiger Molekelhaufen, $\mathfrak{M}$ eine seiner Molekeln, und Γ die Gruppe von Raumtransformationen, die ihn in sich überführen. Diese Gruppe bestimmt, wie bereits oben hervorgehoben, die Symmetrie des Molekelhaufens. Nun sind zwei Fälle möglich. Entweder giebt es unter den Operationen von Γ — abgesehen von der Identität — keine, welche die Molekel $\mathfrak{M}$ mit sich selbst zur Deckung bringt, oder es giebt solche Operationen. Im ersteren Fall entsteht der Molekelhaufen, wie die oben erwähnten so, daß die Molekel $\mathfrak{M}$ den sämmtlichen Operationen von Γ unterworfen wird, und seine Symmetrie ist nur von der Structur abhängig. Im letzteren Fall gilt dies nicht mehr. Die Operationen, welche die Molekel $\mathfrak{M}$ in sich überführen, bilden alsdann offenbar stets eine der 32 Minnigerodeschen Gruppen G, welche in Γ als Untergruppe enthalten ist. In diesem Fall giebt es aber stets eine in Γ enthaltene Untergruppe Γ' von der Art, daß Γ durch Multiplication von G und Γ' gebildet werden kann[1]);

1) Dies läßt sich leicht einsehen, wenn statt Γ — was ja ausreicht — ebenfalls eine der 32 Minnigerodeschen Gruppen gesetzt wird. Man vgl. übrigens auch meine Mittheilung über „reguläre Gebietstheilungen des Raumes“ (diese

der Molekelhaufen $\mathfrak{H}$ kann daher einfach so erzeugt werden, daß die symmetrische Molekel $\mathfrak{M}$ allein den Operationen der Gruppe Γ' unterworfen wird.

Der Symmetriecharakter dieses Molekelhaufens hängt nun nicht mehr von der Structur allein ab, sondern theils von der Structur, theils von der Qualität der Molekel, mit welcher er aufgebaut ist; die Structur ist durch die Gruppe Γ', die Molekelqualität durch die Gruppe G charakterisirt. Damit ist bewiesen, daß die Molekelqualität in der That die Symmetrie nur in der Weise beeinflussen kann, wie es bei den Bravaisschen Gittern der Fall ist.

6. Geometrisch resp. gruppentheoretisch ist es offenbar gleichgiltig, ob wir uns die Molekel $\mathfrak{M}$ als eine körperliche Einheit vorstellen, oder ob wir annehmen, daß dieselbe aus einzelnen kleineren Bestandtheilen besteht. Im Besondern ist es zulässig zu bestimmen, daß sie aus einem Körperelement $\mathfrak{M}_1$ mittelst der verschiedenen Operationen von G gebildet ist, also gleichsam als Complex kleinerer Molekeln aufzufassen ist. Wenn wir dieser Auffassung für jede Molekel folgen, und nun die Elemente $\mathfrak{M}_1$ als die letzten Bestandtheile des Krystallaufbaues betrachten, so geht der Molekelhaufen $\mathfrak{H}$ in einen solchen über, dessen Symmetrie nach wie vor durch die Gruppe Γ gegeben ist, aber einzig und allein auf der Structur beruht.

Aus den vorstehenden Erörterungen ziehen wir noch eine letzte Folgerung. Es sei wieder $\mathfrak{H}$ ein Molekelhaufen, welcher mittelst einer Gruppe Γ aus einer beliebigen Ausgangsmolekel $\mathfrak{M}$ abgeleitet ist. Wir nehmen an, daß die Gruppe Γ Untergruppen G und Γ' enthält, wie wir sie eben betrachtet haben[1]). Ist dies der Fall, so steht, wie aus dem Obigen folgt, geometrisch nichts im Wege, den Molekelcomplex, welcher sich aus $\mathfrak{M}$ mittelst der Operationen von G ergiebt, als eine höhere Einheit aufzufassen und anzunehmen, daß der Molekelhaufen mittelst der Untergruppe Γ' aus diesem Molekelcomplex erzeugt ist. Es läuft dies übrigens darauf hinaus, bei der Raumtheilung, welche durch Γ bestimmt ist, nicht den Fundamentalbereich von Γ selbst als letzten individuellen Gebiets-

---

Nachr. 1888. S. 231). Den gruppentheoretischen Satz, der hier zu Grunde liegt, findet man bei Netto, Theorie der Substitutionen, § 38.

Ich bemerke noch, daß solcher Gruppen Γ' im Allgemeinen mehrere innerhalb der Gruppe Γ gleichberechtigte existiren. Jede derselben kann zu dem obigen Zweck benutzt werden.

1) Diese Bedingung ist bekanntlich für die meisten Gruppen Γ erfüllt.

theil anzusehen, sondern das Aggregat solcher n-Bereiche, welche durch die Operationen von G in sich übergehen [1]).

Ist somit die Vorstellung, welche wir mit dem Molekelhaufen $\mathfrak{H}$ verbinden können, wechselnder Natur, so kann doch, wie das Vorstehende zeigt, die Symmetrie von $\mathfrak{H}$ dadurch in keiner Weise beeinflußt werden. Dieselbe ist ja auch eine innere geometrische Eigenschaft und kann daher unmöglich von dem subjectiven Ermessen abhängig sein, was wir als letzte individuelle Einheit des Krystallaufbaues betrachten wollen.

7. An der Hand der vorstehenden Bemerkungen läßt sich die oben aufgeworfene Frage nunmehr leicht beantworten. Wir denken uns wieder den mittelst Γ erzeugten Molekelhaufen $\mathfrak{H}$. Derselbe hat einen ganz bestimmten Symmetriecharakter, und entspricht daher den Krystallgestalten einer gewissen Krystallklasse, nämlich derjenigen, deren Symmetrie mit Γ isomorph ist. Dagegen ist, wie das Vorstehende zeigt, die Auffassung, welche wir uns über die Structur, d. h. über den Krystallaufbau, zu bilden haben, im Allgemeinen keineswegs bestimmt und kann noch mannigfach variirt werden. Dies hängt davon ab, ob sich für Γ Untergruppen G und Γ' der oben genannten Art finden lassen. Durch jedes derartige Paar von Gruppen G und Γ' wird eine andere Auffassung über den Aufbau der Krystallmasse ermöglicht. Sie ist, wie bereits oben bemerkt, in jedem Fall dadurch gekennzeichnet, daß die Structur immer durch Γ' charakterisirt ist, während die Gruppe G den Krystallbausteinen eine gewisse Symmetrie aufprägt.

8. An und für sich läßt sich von geometrischer Seite keine der hiermit angedeuteten Auffassungen abweisen und man kann daher bei den bezüglichen Molekelhaufen die Symmetrie in mannigfacher Weise begründen. Historisch liegt allerdings die Sache so, daß im Wesentlichen nur zwei dieser Auffassungen zur Ausgestaltung von Structurtheorieen benutzt worden sind, nämlich diejenigen, für welche Γ' eine gewisse ausgezeichnete Untergruppe von Γ wird [2]), und zwar entweder die Translationsgruppe oder die größte in Γ enthaltene Bewegungsgruppe. Ist diese Untergruppe die Gruppe der Translationen, so haben wir die

1) Vgl. „Reguläre Gebietstheilungen des Raumes", a. a. O. S. 231.

2) Allerdings kommen auch andere Zusammenfassungen vor, besonders bei Herrn Wulff; vgl. über die regelmäßigen Punktsysteme, Zeitschr. f. Krystallogr. Bd. 13, S. 505ff. Vgl. auch die von Herrn Barlow erörterten Punktsysteme. (Nature, Bd. 29, S. 186 u. 205.)

Bravaissche Gittertheorie, und die Gruppe G ist, wie schon oben erwähnt, allemal mit derjenigen unter den 32 Minnigerodeschen Gruppen identisch, welche für die bezügliche Krystallform charakteristisch ist. Für jede dieser Gruppen G giebt es bekanntlich Gruppen Γ, welche eine solche Auffassung der Molekelhaufen zulassen. Andrerseits ist aber zu bemerken, daß dies nicht bei jedem Molekelhaufen $\mathfrak{H}$ möglich ist; es trifft eben nur für diejenigen Transformationsgruppen Γ zu, welche durch Multiplication der 32 Gruppen G mit einer Translationsgruppe gebildet werden können [1]).

9. Für die Sohnckesche Theorie sind die einschlägigen Verhältnisse noch nicht hinreichend erörtert worden. Ich gebe zunächst an, zu welchem Resultat eine eingehende Betrachtung hinführt.

Die Sohnckesche Theorie stimmt theilweise mit der von mir dargestellten Theorie überein, erklärt also zum Theil die Symmetrie nur aus der Structur. Dies trifft z. B. für alle diejenigen Krystalle zu, welche nur Axensymmetrie besitzen. Für die andern Krystalle ist dies aber nicht immer der Fall; im Besondern wird (vgl. 10b) für die mit Ebenensymmetrie begabten Krystallgestalten durchgehends die Symmetrie nur zum Theil aus der Structur, zum Theil aus der Molekelqualität abgeleitet; und zwar ist die ausgezeichnete Untergruppe von Γ, welche die Structur definirt, diejenige Bewegungsgruppe Γ', aus welcher Γ durch Multiplication mit einer Spiegelung erzeugt werden kann, während die Molekel des Aufbaues, wie die Natur der Gruppe G zeigt, sich selbst spiegelbildlich gleich ist.

Die vorstehenden Behauptungen ergeben sich bei richtiger molekularer Interpretation der Sohnckeschen Anschauungen als nothwendige Consequenzen der Theorie. Sie beruhen auf Folgerungen, auf welche zwar noch nicht hingewiesen wurde, die aber implicite mit der Theorie verbunden sind. Sie ergeben sich nämlich aus der besonderen Eigenschaft des Punktes, daß er als geometrisches Gebilde die Symmetrie einer homogenen Kugel besitzt. Diese Thatsache ist bisher übersehen worden; sie zeigt aber, daß, wenn man bloß mit Punktsystemen operirt, dies nicht mehr und nicht weniger bedeutet, als daß man den Molekeln stillschweigend die höchste Symmetrie beilegt, die es giebt. Natürlich können die für

1) Diese Verhältnisse sind bereits mehrfach erörtert worden. Vgl. z. B. Blasius, a. a. O. S. 56.

Punktsysteme abgeleiteten Resultate auch für beliebige Molekeln giltig bleiben; es kann aber auch umgekehrt die Einführung der Punkte von Einfluß auf die Qualität der Molekel sein, welche durch den Punkt repräsentirt wird.

10. Hierüber sind einige ausführlichere Bemerkungen am Platze, und zwar scheint es am zweckmäßigsten, damit eine eingehendere Erörterung der Sohncke schen Theorie zu verbinden.

Da die obige Charakteristik sowohl die ursprüngliche als die erweiterte Form der Sohnckeschen Theorie trifft, so genügt es, wenn wir unsere Bemerkungen an die letztere anschließen.

Die erweiterte Sohnckesche Theorie[1]) operirt bekanntlich mit Punktsystemen, die mit n-Punktnern gebildet sind. Die bezüglichen Molekelhaufen entstehen so, daß n Constructionspunkte den sämmtlichen Bewegungen einer Bewegungsgruppe unterworfen werden. Jeder dieser Punkte bedeutet einen Krystallbaustein; in jeden Fundamentalbereich der zugehörigen Raumtheilung kommt ein Complex von n solchen Punkten. Diese Molekelhaufen zeigen, so lange der n-Punktner beliebig bleibt, in ihrer Structur nur Axensymmetrie. Höhere Symmetrie erhalten sie nur dadurch, daß der Atomcomplex, welchen der n-Punktner vertritt, aus zwei Atomen besteht, die sich selbst spiegelbildlich gleich sind.

Der Sohnckesche n-Punktner wird aber keineswegs immer in dem eben genannten Sinne benutzt, ebensowenig wird dem mit der Bewegungsgruppe erzeugten Molekelhaufen der höhere Symmetriecharakter stets durch Benutzung eines geeigneten n-Punktners aufgeprägt. Mit Bezug hierauf haben wir Folgendes zu unterscheiden.

a) Es giebt eine Krystallklasse, für welche die von Herrn Sohncke angegebene Construction des Molekelhaufens mit der von mir dargestellten Theorie so gut wie ganz übereinstimmt. Dies ist für die rhomboedrische Tetartoedrie des hexagonalen Systems der Fall; für sie werden Zweipunktner resp. zwei Molekeln eingeführt, die nach Form und Qualität spiegelbildlich gleich anzunehmen sind[2]).

b) Molekelhaufen mit Ebenensymmetrie werden durchgängig so construirt, daß ein Ausgangspunkt in einer besonderen Lage angenommen wird, nämlich in derjenigen Ebene, welche Symmetrieebene werden soll[3]). Dadurch wird aber den bezüg-

---

1) Vgl. Zeitschrift für Krystall. Bd. 14, S. 433.

2) Vgl. a. a. O. S. 438.

3) a. a. O. S. 436. Vgl. auch Entwickelung einer Theorie der Krystallstructur, z. B. S. 187, 193 u. s. w.

lichen Molekeln Symmetrie beigelegt; denn die Molekel muß ja durch Spiegelung an dieser Ebene in sich übergeben. Ueberhaupt ist zu sagen, daß jede Ortsbeschränkung des Constructionspunktes auf eine Specialisirung der Molekel hinausläuft. Die genannten Sohnckeschen Punktsysteme haben also den ihnen eigenthümlichen Symmetriecharakter in der That nur dann, wenn jeder Punkt eine symmetrische Molekel vertritt.

c) Die Verwendung der n-Punktner hat in den meisten Fällen gar nicht den Zweck, die Symmetrie des Molekelhaufens positiv zu beeinflussen, sie dient vielmehr dazu, Molekeln anzudeuten, die gewisse Eigenschaften nicht besitzen. Dies findet z. B. bei solchen Punktsystemen statt, welche nur Drehungsaxen einer einzigen Richtung besitzen, deren Gruppen also durch Multiplication einer einfachen cyclischen Gruppe mit einer geeigneten Translationsgruppe entstehen. Für diese Punktsysteme giebt es Symmetrieebenen senkrecht zur Axenrichtung, was daraus ersichtlich ist, daß sowohl die cyclische Gruppe wie auch die Translationsgruppe und der Punkt durch Spiegelung an diesen Ebenen in sich übergeht. Jede Netzebene ist eine solche Symmetrieebene; aber natürlich nur so lange, als wir mit wirklichen Punkten operiren; der Molekelhaufen, der mit beliebigen Molekeln gebildet ist, besitzt diese Symmetrieebenen im Allgemeinen nicht[1]). Um nun ein Punktsystem zu erhalten, welches ebenfalls von der genannten Symmetrie frei wird, verwendet Herr Sohncke einen Zweipunkter als Element des Aufbaues[2]). Es ist aber evident, daß der Zweipunkter der Molekel, die er vertritt, keine positive Qualität auferlegt; er soll vielmehr nur ausdrücken, daß ihr eine gewisse Qualität nicht zukommen darf. Die hierdurch skizzirte Benutzung von n-Punktnern ist daher, sobald man festhält, daß der Punkt eine beliebige Molekel andeuten soll, überflüssig.

d) Endlich bemerke ich, daß die Sohncke sche Theorie, wenn als n-Punktner ein geeigneter Zweipunktner gewählt wird, oder präciser gesprochen, wenn wir zum Aufbau des Molekelhaufens zwei einander spiegelbildlich gleiche Bausteine in passender Lage verwenden, auch wirklich zu allen oben (3) charakterisirten Molekelhaufen hinführt, d. h. zu allen, welche für die Begründung der Symmetrieverhältnisse einzig und allein in Frage kommen. Diese

1) Die in meinem Beitrag zur Krystallstructur (diese Nachr. 1889, S. 495) enthaltenen Bemerkungen werden dadurch hinfällig.

2) a. a. O. S. 435 ff.

Bausteine müssen immer so gewählt werden, daß durch gewisse Deckoperationen zweiter Art einer aus dem andern hervorgeht[1]). Für die Symmetrie des Molekelhaufens sind daher beide Bausteine als geometrisch gleichwerthig anzusehen, genau wie in dem oben unter a) erwähnten Fall. Für derartige Molekelhaufen ist daher eine Differenz zwischen der Sohnckeschen und der von mir vertretenen Auffassung kaum mehr vorhanden, sie läuft schließlich auf Unterschiede in der Benennung heraus. Dagegen betreffen die unter b) und c) angestellten Erwägungen sachliche Irrthümer der Sohnckeschen Auffassung, deren Quelle, wie oben erwähnt, darin liegt, daß die molekulare Uebersetzung der geometrischen Annahmen bisher von keiner Seite gegeben worden ist.

11. Für die Entscheidung über den Werth der Theorieen können verschiedene Gesichtspunkte in Frage kommen. Daß sie sämmtlich eine ausnahmslose Begründung der Symmetrieverhältnisse geben, haben wir bereits oben gesehen. In gewissem Sinne lassen sich diejenigen Theorieen, welche mit allgemeinen regelmäßigen Molekelhaufen operiren, der Gittertheorie als übergeordnet betrachten, aus dem Grunde, weil die Gittertheorie nicht zu allen regelmäßigen Structuren führt[2]). Endlich könnte man auch das Verlangen stellen, daß die Theorie die Symmetrieverhältnisse für alle Krystallgestalten auf gleiche Weise begründen soll. Läßt man sich von dieser Forderung leiten, so würde wieder die Sohnckesche Theorie sowohl gegen die allgemeine wie auch gegen die Bravaissche Theorie zurückstehen.

Das letzte Wort kann meines Erachtens allerdings nur an der Hand krystallographischer Erfahrungen gesprochen werden. Es genügt nämlich nicht, wenn der Molekelhaufen, welcher den Krystall darzustellen bestimmt ist, die Symmetrie des Krystalles wiederspiegelt; es müssen sich vielmehr auch die sämmtlichen physikalischen resp. chemischen Eigenschaften aus seiner Eigenart erklären lassen. Dies wird einerseits von der Structur des Haufens, andererseits von der besonderen Natur der Molekel abhängen; Structur und Molekelqualität müssen daher, soll die Theorie wirklich brauchbar sein, zweckentsprechend angenommen werden können. Eine Theorie wird demnach nur dann eigentlichen krystallographischen Werth beanspruchen dürfen, wenn es im Rahmen derselben in allen Fällen mög-

1) Welche Lagenverhältnisse zu diesem Zweck nothwendig und hinreichend sind, habe ich in den math. Annalen, Bd. 34, S. 172 ff. entwickelt.

2) Vgl. hierüber Sohncke, Theorie der Krystallstructur, S. 23.

lich ist, die Structur so auszuwählen, und Form wie Qualität der Molekeln so zu specialisiren, wie es durch die Natur der physikalischen resp. chemischen Erscheinungen unbedingt gefordert wird[1]).

Es ist daher als unerläßlich zu betrachten, daß für jede Theorie genau bekannt ist, welche speciellen Annahmen über die Molekelqualität sie implicite enthält. Da dies bei der Darstellung der Theorieen bisher nicht immer angegeben wurde, so möge hier noch eine kurze Darstellung der drei Theorieen folgen, welche im Besondern auch die Molekelqualität berücksichtigt[2]).

I. Die Bravaissche Theorie. Die Molekeln sind raumgitterartig angeordnet. Jede Molekel ist mit Symmetrie begabt, im übrigen aber beliebig; sie kann als Polyeder, als Atomcomplex etc. gedacht werden. Ihre Symmetrie entspricht genau der Symmetrie des Krystalles. Dies gilt für jede mögliche Krystallklasse.

II. Die Sohnckesche Theorie. Alle Molekeln resp. Molekelcomplexe[3]) sind nach Form und Qualität absolut congruent. Die Symmetrie der Molekelhaufen beruht in einigen Fällen allein anf der Structur; für die Mehrzahl der Krystallklassen, nämlich für diejenigen, welche auch Ebenensymmetrie besitzen, werden jedoch Molekeln benutzt, die sich selbst spiegelbildlich gleich sind. Im übrigen sind die Krystallbausteine ganz beliebig. Sie können sowohl eine einheitliche Partikel bilden, als auch auf jede mögliche Art in kleinere Einzelbestandtheile zerfallen, und jede weitere Bestimmung, die sich physikalisch als nothwendig oder zweckmäßig erweisen sollte, kann ihnen beigelegt werden.

III. Die erweiterte Theorie. Sie bedarf keinerlei Annahmen über die Qualität der Molekeln resp. der letzten Bausteine; sowohl ihre Form und Zusammensetzung als auch ihre Wirkungsweise unterliegt keinerlei Beschränkung[4]). Dagegen nimmt sie

---

1) Bekanntlich wird diese Möglichkeit für die Bravaissche Theorie bestritten.

2) Es scheint um so mehr angemessen, die Bedingungen, welche jede Theorie für die Natur der Molekel statuiren muß, genau zu kennen, als Speculationen hierüber von krystallographischer Seite bereits mehrfach mit Erfolg angestellt sind. Vgl. z. B. die Grothsche Rede über die Molekularbeschaffenheit der Krystalle. München 1888.

3) Welche Molekelkomplexe allein in Betracht zu ziehen sind, ist oben unter 10a und d angegeben.

4) Allerdings ist für gewisse Molekelhaufen (vgl. 10c) auszuschließen, daß die Molekel sich spiegelbildlich gleich ist und überdies eine bestimmte Lage hat. Analoge Beschränkungen gelten übrigens für jede Theorie. Beispielsweise darf man auch innerhalb der Bravaisschen Theorie den Molekeln im Allgemeinen

an, daß dieselben in zwei verschiedene Arten zerfallen, die der einen Art sind denen der andern Art spiegelbildlich gleich. Aus ihnen sind die Krystalle zu gleichen Theilen aufgebaut; mit Ausnahme derjenigen, welche nur Symmetrieaxen besitzen, die also in enantiomorphen Gestalten auftreten können. Diese bestehen aus lauter unter sich congruenten Molekeln. Von zwei enantiomorphen Krystallen wird der eine allein von Molekeln der einen Art, der andere von Molekeln der andern Art gebildet [1]). Die Symmetrie des Molekelhaufens beruht für alle Krystallklassen allein auf der Structur.

Erst mit dieser Theorie ist also das Ziel erreicht, daß die Symmetrie ihre Erklärung einzig und allein in der Structur findet, während im Gegensatz hierzu für jede specielle physikalische oder chemische Eigenschaft des Krystalles die Qualität der Molekel zur Disposition steht. Dies ist aber auch das Resultat, welches den jetzigen Wünschen der Krystallographen entsprechen dürfte; denn das Feld für die Speculationen über die Molekelqualität ist damit absolut freigemacht.

Bemerkung. Für diejenigen Krystalle, welche nur Symmetrieaxen besitzen, stimmt die Sohnckesche Theorie mit der erweiterten überein. Im besondern muß die Sohnckesche Theorie zum Aufbau zweier enantiomorphen Krystalle ebenfalls Molekeln von zweierlei Typus verwenden [2]). Wenn wir ferner diejenigen Sohnckeschen Molekeln, welche sich selbst spiegelbildlich gleich sind, in zwei getrennte Bestandtheile auflösen, und diese als die letzten Bausteine betrachten und das Gleiche für die bezüglichen Zweipunktner thun, deren die Sohnckesche Theorie allein bedarf (vgl. 10a und d), so geht die Sohnckesche Theorie direct in die von mir dargestellte Theorie über.

---

keine höhere Symmetrie beilegen, als ihnen in jedem bezüglichen Fall zukommt. Eine eigentliche Beschränkung liegt also darin nicht vor.

1) Läßt man Molekeln zu, die sich selbst spiegelbildlich gleich sind, so kann die Enantiomorphie auch auf der Structur allein beruhen; die bezüglichen Punktsysteme sind eigentliche Schraubensysteme.

2) Vgl. vorstehende Anmerkung.

Die Mandasor Inschrift vom Mâlava Jahre 529 (= 472 n. Chr.) und Kâlidâsa's Ṛitusaṁhâra.

Von

F. Kielhorn.

Dr. Bhâṇḍârkar hat in einem der Asiatischen Gesellschaft von Bombay am 1. August 1889 vorgelegten Aufsatze über die Epoche der Gupta Aera einen Vers der Mandasor Inschrift des Kumâragupta und Bandhuvarman behandelt, der in Fleet's Texte also lautet[1]: —

> Râmâ-sanâtha-[ra]chane dara-bhâskar-âṁçu-vahni-pratâpa-subhage jala-lîna-mîne | chandrâṁçu-harmyatala-chandana-tâlavṛinta-hâr-opabhodha(ga)-rahite hima-dagdha-padme ||

Die fünf Composita dieses Verses sind Adjective, die das im folgenden Verse stehende Substantivum *kâle* näher bestimmen, und sind zusammen mit diesem von Fleet übersetzt worden: —

> „In that season which unites men with (*their*) lovely mistresses; which is agreeable with the warmth of the fire of the rays of the sun (*shining*) in the glens; in which the fishes lie low down in the water; which (*on account of the cold*) is destitute of the enjoyment of the beams of the moon, and (*sitting in the open air on*) the flat roofs of houses, and sandal-wood perfumes, and palmleaf fans, and necklaces; in which the water-lilies are bitten by the frost.“

Bhâṇḍârkar hat gezeigt, daß Fleet's Uebersetzung des ersten Compositums (râmâ-sanâtha-[ra]chane) falsch ist, und daß die richtige Uebersetzung desselben keinen Sinn gibt. Er hat ferner darauf aufmerksam gemacht, daß die von Fleet in jenem Worte *cha* gelesene Sylbe im Originale *va* ist, hat, statt der von Fleet ergänzten Sylbe *ra*, *bha* ergänzt, und das so von ihm restituirte

râmâ-sanâtha-[bha]vane

übersetzt durch „that [time] in which there are lovely women in the houses, *i. e.* when there is no separation between husband and wife“. Außerdem hat er Einspruch erhoben gegen Fleet's Uebersetzung des ersten Wortes (*dara*) des zweiten Compositums durch „in the glens“, weil es nicht bloß die Thäler seien, die die Sonne in der kalten Jahreszeit erwärme. *Dara* sei vielmehr gleichbe-

1) Corpus Inscr. Ind., Bd. III, S. 83, Zeile 17.

deutend mit *îshad* „little, in a small degree, moderate", und das zweite Compositum sei demnach zu übersetzen — „which is agreeable with the moderated heat of the fire of the rays of the sun".

Auch ich halte Fleet's Text und Uebersetzung für falsch, und ich stimme mit Bhâṇḍârkar darin überein, daß wir im ersten Compositum *bha* statt *ra* ergänzen und die folgende Sylbe *va* lesen müssen. Aber Bhâṇḍârkar's Erklärung des zweiten Compositums befriedigt mich ebenso wenig wie Fleet's. *Dara* ist zu weit von *pratâpa* entfernt als daß wir es auf dies beziehen könnten; und es scheint mir unpassend die geringe Wärme der Sonnenstrahlen zu loben, gerade wenn wir uns wärmen wollen. Außerdem wäre bei Bhâṇḍârkar's (und Fleet's) Erklärung das Wort *vahni* überflüssig. Natürlicher wäre es zu sagen, daß uns im Winter die Strahlen der Sonne und die Wärme eines Feuers angenehm sind. Aber auch bei dieser Erklärung wäre *dara* unpassend, denn kein Dichter würde von kleinen (*svalpa*) Sonnenstrahlen reden.

Prüfen wir in der Photographie das (von Fleet und Bhâṇḍârkar *ne* gelesene) Zeichen für die letzte Sylbe des ersten Compositums sorgfältiger, so finden wir, daß dasselbe genau so aussieht wie das Zeichen für die zweite Sylbe des Wortes *manoharaiḥ* in Zeile 20. Die Sylbe ist also *no*, nicht *ne*, und die richtige Lesung des Eingangs des Verses ist —

Râmâ-sanâtha-[bha]vanodara-bhâskarâṁçu-vahnipratâpa-subhage.

Hiermit ist jegliche Schwierigkeit entfernt. Die kalte Jahreszeit ist dem Manne dadurch angenehm daß sie ihn im Innern des Hauses hält wo er mit der Frau oder Geliebten zusammen ist; wenn es kalt ist, freut er sich der Strahlen der Sonne und der Wärme eines Feuers.

Der Vers der Inschrift lautet also —

Râmâ-sanâtha-bhavanodara-bhâskarâṁçu-
vahnipratâpa-subhage jala-lîna-mîne |
Chandrâṁçu-harmyatala-chandana-tâlavṛinta-
hâr-opabhogarahite hima-dagdha-padme ||

Betrachten wir den Bau und den Wortlaut dieses Verses näher, so ergibt sich, denke ich, mit Sicherheit, daß der Dichter bei Abfassung desselben die folgenden Verse aus Kâlidâsa's Ṛitusaṁhâra [1]) vor Augen hatte: —

1) Ṛitusaṃhâra, Sarga V, 2 und 3.

Niruddhavâtâyana-mandirodaraṁ
hutâçano bhânumato gabhastayaḥ |
Gurûṇi vâsâṁsy=abalâḥ sayauvanâḥ
prayânti kâle=tra janasya sevyatâm ||
Na chandanaṁ chandramarîchi-çîtalaṁ
na harmyapṛishṭhaṁ çaradindu-nirmalam |
Na vâyavaḥ sândratushâra-çîtalâ
janasya chittaṁ ramayanti sâmpratam ||

Es wäre überflüssig meine Fachgenossen auf die genaue Uebereinstimmung der Gedanken und des Ausdrucks im Einzelnen aufmerksam zu machen, und ich will nur bemerken, daß der Verfasser der Inschrift dem ersten Verse Kâlidâsa's im Wesentlichen nur den durch *jala-lîna-mîne*, und dem zweiten Verse den durch *hima-dagdha-padme* ausgedrückten Gedanken hinzugefügt hat.

Das Resultat ist, daß Kâlidâsa's Ṛitusaṁhâra vor dem Jahre 472 n. Chr. verfaßt sein muß.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Februar 1890.

(Fortsetzung.)

Atti della R. Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXVI. 1889. Rendiconti. Vol. V. Fasc. 9, 10, 11, 12. 2. semestre. Roma 1889.
Ematite di Stromboli d. G. Struever (estratto dalle Memorie d. Classe di sc. fis. mat. e nat. Vol. VI. 1889).
Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Schlusslieferung zu Tomo XX. Ind. = p. 697—749. Roma 1890.
Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche (sezione della società R. di Napoli. Serie 2a. Vol. III. Fasc. 1—12. 1889. Napoli.
Bollettino delle publicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. 1890. Nr. 98, 90. Firenze 1890.
Transactions of the astronomical observatory of Yale University. Vol. 1. Part II. New Haven 1889.
Bulletin of the Museum of Comparative Zoology at Harvard college. Whole series. Vol. XVI. Nr. 6. Geol. Ser. Vol. II. Vol. XVII. Nr. 6. Cambridge. U. S. A. 1889.
Transactions of the Wagner free Institute of science of Philadelphia. Vol. II. Philadelphia 1889.
Johns Hopkins university circulars. Vol. IX. Nr. 78. Baltimore 1890.
Anales de la soziedad cientifica Argentina. Tomo XXVIII. Entrega III, IV. Buenos-Aires 1889.

Nachtrag.

Verhandlungen d. K. K. geologischen Reichsanstalt. Nr. 18. 1889. Nr. 1. 2. 1890.
Anzeiger d. Akademie der Wissenschaften in Krakau 1890. Januar. Krakau 1890.
Ungarische Revue. Heft 2. 1890. Jahrg. 10. Budapest 1890.

Tijdschrift voor Nederlandsche Taal- en Letterkunde, uitgeven vanwege de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. Jaarg. 1—8. Leiden 1881—88.

a. Notulen van de Algemeene en Bestuerrs-Vergaderingen van het Bataviaasche Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel XXVII. 1889. Aflevering II, III.

b. Register op de notulen der Vergaderingen over de Jaren 1879 t/m. 1888. Batavia, s'Hage 1889.

c. Tijdschrift door Indische Taal- Land- en Volkenkunde. Deel XXXIII. Aflevering 2, 3 en 4. Batavia, s'Hage 1889.

d. De Derde Javaansche Successie-Orlog 1746—1755. Voor P. J. F. Louro. Uitgegeven door het Bat. Genoots v. K. en W.

Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indie. Jaarg. 10. 1888. Batavia 1889.

Nederlandsch-Indie Plakaatboek. 1602—1811. Deel VI. 1750—1754. Batavia, s'Hage 1889.

Observations made as the Magnesical and Meteorological observatory at Batavia. Vol. XI. 1888. Batavia 1889.

Herbarium musei fennici editio secunda. I. Plantae vasculares.

Meddelanden af societas pro fauna et flora fennica 15 häftet (1889).

Acta societatis pro fauna et flora fennica. Vol. V. Pars I.

Notae conspectus florae fennicae auctore Hj. Hjelt. Helsingforsiae 1888—89.

März und April.

Sitzungsberichte der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften in Berlin. X—XIX. 1890.

Bemerkungen über den Bau der Menschen- und Affenplacenta. Von W. Waldeyer. Bonn 1890.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Herausgeg. im Auftrage des naturw. Vereins für Sachsen und Thüringen. D. ganzen Reihe LXII. Band; Vierte Folge; Achter Band; Heft 3/4. 5 u. 6. Halle a. S. 1889.

Leopoldina. Heft XXVI, No. 3—4, 5—6.

Acta Mathematica. 14, 1. Stockholm-Berlin 1890.

Rede zum Geburtstage S. M. d. K.K. Wilhelm II. in der Aula d. K. Technischen Hochschule zu Berlin. Von E. Jacobsthal. Berlin 1890.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Band XIX; Jahrgang 1887; Heft 2. Berlin 1890.

Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Jahrgang 25; Heft 1. Leipzig 1890.

Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft. Band 43; Heft 4. Leipzig 1889.

Berichte über die Verhandlungen der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Philologisch-historische Classe. 1889. IV. Leipzig 1890.

Die technische Produktion und die bezüglichen römisch-rechtlichen Erwerbtitel. Von Moritz Voigt. (Des XI. Bandes der Abhandlungen der philologisch-historischen Classe der Kön. Sächs. Gesellsch. d. Wissenschaften No. VI.) Leipzig 1890.

Sitzungsberichte d. Kön. Baier. Akademie d. Wissensch. zu München

a. Philosophisch-philologische u. historische Classe. 1889, Band II, Heft 2; 1890, Heft 1.

b. Mathematisch-physikalische Classe. 1889, Heft 3.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

5. Juli. **№ 7.** 1890.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 5. Juli 1890.

Merkel: Ueber argentinische Gräberschädel.

Liebisch legt einen Aufsatz des Herrn Dr. Fr. Pockels vor: Ueber die Interferenzerscheinungen, welche Zwillingsplatten optisch einaxiger Krystalle im convergenten homogenen polarisirten Lichte zeigen.

Schwarz legt vor:

a) einen Aufsatz von Prof. Julius Weingarten in Charlottenburg, Korrespond. der mathem. Klasse: Ueber particuläre Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

und eine mit der Theorie der Minimalflächen zusammenhängende Gattung von Flüssigkeitsbewegungen.

b) einen Aufsatz von O. Venske: Ueber eine Abänderung des ersten Hermiteschen Beweises für die Transcendenz der Zahl e.

Voigt legt vor: Bestimmung der Elasticitätsconstanten des brasilianischen Turmalins.

Wieseler legt vor: Weibliche Satyrn und Pane in der Kunst der Griechen und Römer.

de Lagarde kündigt für den Band 36 der Abhandlungen an: Nachträge und Regesten zu der im Band 35 erschienenen Uebersicht über die Bildung der Nomina im Aramaeischen, Arabischen und Hebräischen.

Wagner legt einen Aufsatz vor: Ueber ein spät mittelalterliches Verzeichniß geographischer Coordinatenwerte.

Ueber argentinische Gräberschädel.

Von

Fr. Merkel.

Die Schädel-Sammlung des hiesigen anatomischen Institutes, welche unter dem Namen der „Blumenbach'schen Sammlung" einen Weltruf genießt, erhielt im Frühling dieses Jahres durch die freundliche und sehr dankenswerthe Schenkung[1]) des Herrn Professor Bodenbender in Cordoba, Argentinien, drei Indianer-Schädel aus einer Grabstätte zwischen Rio Agrio und Rio Catanlil, am oberen Arroyo Corunco in Argentinien, welche der freundliche Geber von einer wissenschaftlichen Expedition in jene fast völlig unbekannten Gegenden mitgebracht hatte. Die Schädel sind um so werthvoller, da solche aus dem Innern Südamerikas überhaupt nur äußerst spärlich in europäischen Sammlungen vertreten sind und solche aus jenen kaum von Weißen betretenen Theilen Argentiniens überhaupt nicht vorhanden sein dürften. Alle drei Schädel sind defect, doch lassen sich an ihnen die wichtigsten Maaße ohne Schwierigkeit nehmen. Ihr Erhaltungszustand ist ein verschiedener, während einer (No. III) noch ziemlich recent erscheint, sehen die beiden anderen so aus, als hätten sie sehr lange in der Erde gelegen. Doch möchte ich ihnen dieses Aussehens wegen noch nicht ein sehr hohes Alter vindiciren, da man ja weiß, wie zuweilen die Bodenbeschaffenheit die Knochensubstanz zu verändern geeignet ist und wie der Stoffwechsel einer tropischen Vegetation es vermag, deren Textur anzugreifen.

Zwei Schädel gehören erwachsenen Personen, vermuthlich männlichen Geschlechtes, an, der dritte ist der eines Kindes, nach Ausweis der Zähne und anderer Merkmale, von 8—9 Jahren. Bei allen Schädeln sind die Zähne, soweit sie vorhanden sind, zwar gesprungen, im Uebrigen aber wohlerhalten und weder cariös verändert, noch abgeschliffen, noch auch gefeilt. Die Nähte von No. I sind zum guten Theil verstrichen, diejenigen von No. II und III sind vollständig erhalten. Von anatomischen Eigenthümlichkeiten der Schädel ist zu berichten, daß bei No. I die Lineae nuchae suprema und superior am Seitenwinkel der Hinterhauptsschuppe in einen leistenförmigen Knochenlappen ausgezogen ist, während das System der Hinterhauptslinien im Uebrigen nichts Auffallendes zeigt. Bei den beiden andereren Schädeln ist Nichts dergleichen zu bemerken, auch die Indianerschädel unserer Sammlung, welche

1) Für die Vermittelung der Schenkung ist das Institut Herrn Prof. v. Könen zu Dank verpflichtet.

ich daraufhin durchgesehen habe, zeigen die beschriebene Eigenthümlichkeit nicht.

Was die ganze Form der Schädel anlangt, so sehe ich von dem kindlichen (No. III) ab und benutze nur die beiden erwachsenen zur Vergleichung. Nach Ausweis der unten angeführten Maaße ist No. I brachycephal und an der Grenze der Orthocephalie stehend, No. II hyperbrachycephal zu nennen. Das Obergesicht ist bei beiden breit, dabei erweist sich aber der eine (No. I) leptorrhin, der andere (No. II) platyrrhin. Die Augenhöhlen von No. I sind mesokonch die von No. II hypsikonch. Der Gaumen ist bei No. I mesostaphylin, fast brachystaphylin, bei No. II wirklich brachystaphylin. Prognathie ist weder bei dem Schädel No. I vorhanden, noch auch bei No. II, wo der Profilwinkel wegen Beschädigung nicht gemessen werden konnte. Vergleicht man die Schädel mit anderen Amerikanerschädeln, dann findet man, daß bei letzteren neben Langschädeln ganz abweichender Form auch solche vorkommen, welche mit den in Rede stehenden viel Verwandtes zeigen und zwar findet man sie sowohl in der nördlichen, wie der südlichen Hälfte des Continentes. Aber doch ist die Form der Argentinischen Cranien eine sehr eigenthümliche, in der Norma verticalis fast viereckige, ein Bild, welches wesentlich durch eine außerordentlich starke Abplattung des Hinterhauptes hervorgerufen wird. Besonders bei dem sehr brachycephalen Schädel No. II kann man sich des Argwohnes nicht erwehren, daß man es mit einer künstlichen Abplattung zu thun hat. Es würde dies für Amerika nichts Auffallendes sein, da ja sowohl bei gewissen Stämmen Nordamerikas, wie bei den Peruanern und Mexicanern die künstliche Deformirung des Schädels im Schwange war. Die Gründe, welche mich zweifeln lassen, sind drei. Erstens zeigt der kindliche Schädel ein normal gewölbtes Hinterhaupt, an welchem von einer Verunstaltung Nichts wahrnehmbar ist und zweitens sind auch bei dem besonders kurzen Schädel No. II Gaumen, Nase und Augenhöhlen so gestaltet, wie sie einem sehr kurzen Schädel zukommen. Drittens muß hervorgehoben werden, daß die Form des Schädels an sich von der aller anderen deformirten Schädel abweicht. Man müßte daher annehmen, daß in den argentinischen Gegenden eine ganz eigenthümliche, sonst nicht geübte Umformungsweise im Gebrauch war. Zu einer solchen Annahme wird man sich jedoch erst dann entschließen, wenn noch mehr Objecte zum Vergleich zu Gebote stehen; es ist daher sehr zu wünschen, daß es gelingen möchte, noch neues anthropologisches Material vom Arroyo Corunco herbeizuschaffen.

Argentinien*)	Größte Länge	Länge	Breite	Stirnbreite	Höhe	Ohrhöhe	Länge der Schädel-Basis	Horizontalumfang	Sagittalumfang	Querumfang	Gesichtsbreite	Obergesichtshöhe	Jochbreite	Nase		Orbita		Gaumen		Profilwinkel
														Höhe	Breite	Breite	Höhe	Länge	Breite	
I.	171,0	168,5	141,5	93	125	106	96	50,5	34,6	31,2	103	67	134	47	21,6	41	33	50	42	91,0
II.	168,0	159,0	143,0	88	139,5	—	97	49,5	37,0	—	98	68	—	51,5	29,0	42	37	43,5	37	—

	I.	II.
Längenbreitenindex . .	83,9	89,9
Längenhöhenindex . .	74,1	87,7
Obergesichtsindex . . .	49	—
Index der Nasenmündung	46,0	56,3
Index der Augenhöhle .	80,4	88,0
Index des Gaumens .	84,0	85,0

*) Die Maaße sind nach den Vorschriften der Frankfurter craniometrischen Verständigung (Corresp.-Blatt d. Ges. f. Anthrop., XIV. Jahrg., No. 1, Jan. 1883) genommen.

Ueber die Interferenzerscheinungen, welche Zwillingsplatten optisch einaxiger Krystalle im convergenten homogenen polarisirten Lichte zeigen.

Von

Fr. Pockels.

(Vorgelegt von Th. Liebisch.).

In der vorliegenden Abhandlung sollen diejenigen Interferenzerscheinungen berechnet und discutirt werden, welche man in einem Polarisationsapparate bei Anwendung von convergentem homogenem Lichte an einer Combination von zwei planparallelen, aus einem einaxigen Krystall unter gleicher Neigung gegen die optische Axe geschnittenen Platten beobachtet, welche so übereinander gelegt sind, daß ihre Hauptschnitte zusammenfallen, die optischen Axen aber in entgegengesetztem Sinne gegen die gemeinsame Plattennormale geneigt sind, so daß die Combination eine künstliche Zwillingsplatte darstellt. — Diese Interferenzerscheinungen sind zum ersten Male von Langberg theoretisch untersucht (und auch wohl zuerst beobachtet) worden[1]. Derselbe hat eine allgemeine Formel für die Intensität des durch zwei übereinander liegende, beliebig orientirte einaxige Krystallplatten hindurchgegangenen Lichtes aufgestellt, aber bei deren Anwendung auf specielle Fälle immer die Schwingungsrichtungen im ganzen Gesichtsfelde als constant angenommen. Daher fand er in dem einzigen von ihm untersuchten Falle einer Zwillingsplatte, nämlich in demjenigen, wo die optischen Axen der beiden Platten $\pm 45^0$ mit der Plattennormale bilden, nur ein System von Ellipsen (Curven gleichen Gangunterschiedes), deren Discussion (l. c. p. 541) bei ihm übrigens auch unvollständig geblieben ist.

Eine im Jahre 1853 erschienene sehr umfangreiche Arbeit von Ohm („Erklärung aller in Platten einaxiger Krystalle im geradlinig polarisirten Lichte warnehmbaren Interferenzerscheinungen") [2]) enthält unter Anderem eine mathematische Behandlung der Inter-

1) Analyse der Interferenzerscheinungen in combinirten einaxigen Krystallen. Pogg. Ann. Erg.-Bd. I, 1842, p. 529—565.

2) Abhandl. der Bayerischen Akad., math.-phys. Classe, Bd. VII, p. 43—149 und 265—370. Ein übersichtliches Referat über diese Arbeit hat C. Neumann in den Fortschr. d. Phys. Bd. XI, 1855, p. 287—294, gegeben.

ferenzerscheinungen in Zwillingsplatten von beliebiger Neigung der optischen Axen. Auch Ohm hat die resultirende Intensität allgemein berechnet, aber bei der Anwendung der Intensitätsformel, welcher er übrigens eine recht übersichtliche Form gegeben hat, die veränderliche Lage der Schwingungsrichtungen für convergente Strahlen nicht berücksichtigt. Daher konnte er nur die Curven gleichen Gangunterschiedes erklären, welche man nahe der Mitte des Gesichtsfeldes wahrnimmt. Er fand, daß die am Schlusse seiner Arbeit beschriebenen Erscheinungen, welche er an einer Zwillingsplatte mit kleinem Neigungswinkel (5^0) der optischen Axen gegen die Plattennormale beobachtete, gänzlich im Widerspruch zu seinen Formeln ständen (p. 363—364); übrigens hat er p. 366—367 selbst den wahren Grund dieses Widerspruches, wenn auch etwas unbestimmt, angedeutet. — Später hat van der Willigen[1]) den Gangunterschied der durch einaxige Krystallplatten hindurchgegangenen Strahlen mit möglichster Strenge berechnet und auch für den speciellen Fall einer Zwillingsplatte, in welcher die optischen Axen $\pm 45^0$ mit der Plattennormale bilden, diejenigen vier Curvensysteme discutirt, auf denen der Gangunterschied, welchen die beiden Strahlen in je einer der beiden combinirten Platten erleiden, bezw. die Summe und die Differenz dieser Gangunterschiede constant sind. Er sagt schließlich, die an der Zwillingsplatte beobachtete Interferenzerscheinung bestehe aus einer Ueberlagerung jener vier Curvensysteme, und es müsse noch die Intensität berechnet werden, mit welcher dabei jedes von ihnen auftritt.

Eine vollständige und übersichtliche Discussion über die Curven, auf welchen die Summe der Gangunterschiede constant ist, (sowie vorher über die jeder einzelnen Platte zukommenden Curven gleichen Gangunterschiedes), hat Bertin[2]) gegeben. Derselbe hat aber die resultirende Intensität gar nicht allgemein berechnet und daher auch die Unterbrechungen der dunklen Ellipsen und Hyperbeln, welche bei den in Rede stehenden Erscheinungen gerade auffallen, nicht erklären können, ebensowenig die unter Umständen auftretenden geradlinigen Streifen. Bertin hat, wie er l. c. p. 508 erwähnt, die Interferenzerscheinungen in homogenem (violettem) Lichte photographirt; die seiner Abhandlung beigefügten Figuren sind aber, einer Bemerkung p. 506 zufolge, nur Zeichnungen und stellen auch, höchstens die Fig. 8 ausgenommen, die Erschei-

1) Arch. du musée Teyler, III, p. 241, 1873. Pogg. Ann. Jubelbd. p. 491—497, 1874.
2) Ann. de Chim. et de Phys., (6), II, 1884, p. 485—508.

nungen unrichtig dar; die in diesen Figuren hervortretende Asymmetrie ist vermuthlich einer ungenauen Orientirung der beiden Platten gegeneinander bei den Beobachtungen Bertin's zuzuschreiben. —

Wenn nun auch von den genannten Autoren die vier Systeme von Curven gleichen Gangunterschiedes, welche in Zwillingsplatten der betrachteten Art überhaupt unter Umständen auftreten können, an und für sich bereits berechnet worden sind, so fehlt doch bisher eine auf Berücksichtigung der innerhalb des Gesichtsfeldes veränderlichen Lage der Schwingungsrichtungen beruhende Untersuchung darüber, in welcher Weise sich jene Curvensysteme scheinbar überlagern bezw. sich gegenseitig unterbrechen, und unter welchen Umständen oder in welchen Theilen des Gesichtsfeldes das eine oder andere Curvensystem allein auftritt. Durch eine solche Untersuchung die Einzelheiten der merkwürdigen, von Zwillingsplatten der bezeichneten Art dargebotenen Interferenzerscheinungen zu erklären, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit. Die unmittelbare Veranlassung zu derselben bot die von Herrn Prof. Liebisch im hiesigen mineralogischen Institut ausgeführte photographische Aufnahme jener Erscheinungen im Natriumlicht; auf die nach diesen Photographieen hergestellten Lichtdrucktafeln [1]) wird bei der Discussion wiederholt hingewiesen werden. Die der vorliegenden Abhandlung beigefügten Figuren 3—6 haben nur schematische Bedeutung; sie sollen erläutern, wie die Gebiete, wo die einzelnen Curvensysteme bezw. dunkle Flecke auftreten, im Gesichtsfelde zu einander liegen.

Es wird vorausgesetzt, daß die optischen Axen der beiden übereinanderliegenden Platten gegen die Plattennormale gleich geneigt sind, daß also, wenn auf der Kugelfläche durch O die Plattennormale, durch A_1, A_2 die optischen Axen der beiden Platten dargestellt werden (Fig. 1), $OA_1 = OA_2 = \Omega$ ist.

Ist N eine beliebige Wellennormale in der Platte, so werde gesetzt

$$ON = \vartheta,\ A_1ON = \varphi,$$
$$OA_1N = 180^0 - \psi_1,\ OA_2N = \psi_2.$$

In erster Annäherung kann angenommen werden, daß die Richtung N in beiden Platten dieselbe ist, d. h. daß beim Eintritt einer Welle aus der ersten in die zweite Platte keine merkliche Brechung stattfindet.

1) Th. Liebisch, Physikalische Krystallographie, Leipzig 1890. Tafel VII und VIII.

Die Ebenen NA_1 und NA_2 sind die Schwingungs- (Polarisations-) Ebenen der ordinären Welle in der ersten und zweiten Platte. Die von der Axenebene an gerechneten Azimuthe ψ_1 und ψ_2 dieser Schwingungsebenen bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$\text{I.}\quad \sin\psi_1 = \frac{\sin\vartheta\sin\varphi}{\sin NA_1},\quad \sin\psi_2 = \frac{\sin\vartheta\sin\varphi}{\sin NA_2}.$$

Ferner ist

$$\text{II.}\quad \begin{aligned} \cos NA_1 &= \cos\vartheta\cos\Omega + \sin\vartheta\sin\Omega\cos\varphi,\\ \cos NA_2 &= \cos\vartheta\cos\Omega - \sin\vartheta\sin\Omega\cos\varphi. \end{aligned}$$

Das Azimuth der Schwingungsebene des Polarisators (P) bezw. des Analysators (A) sei α bezw. β, immer von der Ebene A_2A_1 an in positivem Sinne gerechnet (vergl. Fig. 2).

Die einfallende Schwingung $A\cos\tau$ wird beim Eintritt in die erste Platte zerlegt in die Componenten:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= A\cos(\psi_1-\alpha)\cos\tau \text{ parallel } NA_1\\ \text{und }\eta_1 &= A\sin(\psi_1-\alpha)\cos\tau \text{ senkrecht zu } NA_1. \end{aligned}$$

Beim Austritt aus der ersten Platte ist:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= A\cos(\psi_1-\alpha)\cos(\tau-\delta_o'),\\ \eta_1 &= A\sin(\psi_1-\alpha)\cos(\tau-\delta_e'), \end{aligned}$$

wo δ_o', δ_e' die Verzögerungen der ordinären bezw. extraordinären Welle in der ersten Platte sind.

Diese Schwingung wird beim Eintritt in die zweite Platte zerlegt in:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \xi_1\cos(\psi_2-\psi_1) + \eta_1\sin(\psi_2-\psi_1) \text{ parallel zu } NA_2,\\ \eta_2 &= -\xi_1\sin(\psi_2-\psi_1) + \eta_1\cos(\psi_2-\psi_1) \text{ senkrecht zu } NA_2. \end{aligned}$$

Sind δ_o'', δ_e'' die Verzögerungen der ordinären und extraordinären Welle in der Richtung N in der zweiten Platte, so sind demnach die Componenten der aus der Zwillingsplatte austretenden Schwingung:

$$\begin{aligned} \xi_2' = A\,\{&\cos(\alpha-\psi_1)\cos(\psi_2-\psi_1)\cos(\tau-\delta_o'-\delta_o'')\\ &+\sin(\alpha-\psi_1)\sin(\psi_2-\psi_1)\cos(\tau-\delta_e'-\delta_o'')\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_2' = A\,\{&-\cos(\alpha-\psi_1)\sin(\psi_2-\psi_1)\cos(\tau-\delta_o'-\delta_e'')\\ &+\sin(\alpha-\psi_1)\cos(\psi_2-\psi_1)\cos(\tau-\delta_e'-\delta_e'')\}. \end{aligned}$$

Nach dem Durchgang durch den Analysator resultirt schließlich die Schwingung:

$$\xi_2' \cos(\psi_2 - \beta) - \eta_2' \sin(\psi_2 - \beta),$$

deren Intensität J nun berechnet werden soll.

Dieselbe ist $= A^2 (C^2 + S^2)$, wenn $\xi_2' \cos(\psi_2 - \beta) - \eta_2' \sin(\psi_2 - \beta)$ auf die Form $C \cos\tau + S \sin\tau$ gebracht ist.

Man findet:

$$\begin{aligned}
C = & \Big\{\cos(\alpha - \psi_1)\cos(\psi_2 - \psi_1)\cos(\delta_o' + \delta_o'') \\
& \quad + \sin(\alpha - \psi_1)\sin(\psi_2 - \psi_1)\cos(\delta_e' + \delta_o'')\Big\}\cos(\beta - \psi_2) \\
& + \Big\{\cos(\alpha - \psi_1)\sin(\psi_1 - \psi_2)\cos(\delta_o' + \delta_e'') \\
& \quad + \sin(\alpha - \psi_1)\cos(\psi_2 - \psi_1)\cos(\delta_e' + \delta_e'')\Big\}\sin(\beta - \psi_2), \\
S = & \Big\{\cos(\alpha - \psi_1)\cos(\psi_2 - \psi_1)\sin(\delta_o' + \delta_o'') \\
& \quad + \sin(\alpha - \psi_1)\sin(\psi_2 - \psi_1)\sin(\delta_e' + \delta_o'')\Big\}\cos(\beta - \psi_2) \\
& + \Big\{\cos(\alpha - \psi_1)\sin(\psi_1 - \psi_2)\sin(\delta_o' + \delta_e'') \\
& \quad + \cos(\alpha - \psi_1)\cos(\psi_2 - \psi_1)\sin(\delta_e' + \delta_e'')\Big\}\sin(\beta - \psi_2).
\end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich

$$\begin{aligned}
& C^2 + S^2 = \\
& \cos^2(\beta - \psi_2)\Big\{\cos^2(\alpha - \psi_2) - \tfrac{1}{2}\sin 2(\alpha - \psi_1)\sin 2(\psi_2 - \psi_1)\big(1 - \cos(\delta_o' - \delta_e')\big)\Big\} \\
& + \sin^2(\beta - \psi_2)\Big\{\sin^2(\alpha - \psi_2) + \tfrac{1}{2}\sin 2(\alpha - \psi_1)\sin 2(\psi_2 - \psi_1)\big(1 - \cos(\delta_o' - \delta_e')\big)\Big\} \\
& \quad + \sin 2(\beta - \psi_2)\Big\{\cos 2(\alpha - \psi_1)\sin 2(\psi_1 - \psi_2)\cos(\delta_o'' - \delta_e'') \\
& \quad + \tfrac{1}{2}\sin 2(\alpha - \psi_1)\cos 2(\psi_2 - \psi_1)\cos(\delta_o' - \delta_e')\cos(\delta_o'' - \delta_e'') \\
& \qquad - \tfrac{1}{2}\sin 2(\alpha - \psi_1)\sin(\delta_o' - \delta_e')\sin(\delta_o'' - \delta_e'')\Big\}.
\end{aligned}$$

Führt man die Bezeichnungen:

$$\varDelta_1 = \delta_o' - \delta_e', \quad \varDelta_2 = \delta_o'' - \delta_e''$$

ein und nimmt mit obigem Ausdrucke für $C^2 + S^2$ einige weitere Umformungen vor, so erhält man für J schließlich die Formel:

$$\begin{aligned}
J = A^2 \Big\{ & \cos^2(\beta - \alpha) - \sin 2(\alpha - \psi_1)\sin 2(\beta - \psi_1)\sin^2\frac{\varDelta_1}{2} \\
& - \sin 2(\alpha - \psi_2)\sin 2(\beta - \psi_2)\sin^2\frac{\varDelta_2}{2} \\
- 2\sin 2(\alpha - \psi_1)\sin 2(\beta - \psi_2)\sin\frac{\varDelta_1}{2}\sin\frac{\varDelta_2}{2} & \Big(\cos\frac{\varDelta_1}{2}\cos\frac{\varDelta_2}{2} - \sin\frac{\varDelta_1}{2}\sin\frac{\varDelta_2}{2}\cos 2(\psi_2 - \psi_1)\Big)\Big\}.
\end{aligned}$$

Die Größen $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$, d. h. die relative Verzögerung der ordinären Welle gegen die extraordinäre in der 1. und 2. Platte, sind gegeben durch die Ausdrücke:

$$\text{III.}\quad \begin{aligned} \varDelta_1 &= 2\pi \frac{D_1 n^3}{2\lambda} \frac{\omega_e^2 - \omega_o^2}{v^2} \frac{\sin^2 NA_1}{\cos\vartheta} = 2\pi \frac{D_1}{\lambda} (n_o - n_e) \frac{\sin^2 NA_1}{\cos\vartheta}, \\ \varDelta_2 &= 2\pi \frac{D_2 n^3}{2\lambda} \frac{\omega_e^2 - \omega_o^2}{v^2} \frac{\sin^2 NA_2}{\cos\vartheta} = 2\pi \frac{D_2}{\lambda} (n_o - n_e) \frac{\sin^2 NA_2}{\cos\vartheta}, \end{aligned}$$

worin ω_o, ω_e die beiden Hauptlichtgeschwindigkeiten, n_o, n_e die Hauptbrechungsindices, n den mittleren Brechungsindex des Krystalles, v und λ die Lichtgeschwindigkeit und Wellenlänge in Luft, D_1, D_2 die Dicken der beiden Platten bezeichnen.

$\sin^2 NA_1$ und $\sin^2 NA_2$ sind mittelst der Formln II durch φ und ϑ, d. h. durch die Bestimmungsstücke der Richtung N, auszudrücken.

Bei schwach convergentem Lichte kann man ϑ und φ direkt als die Polarcoordinaten der betrachteten Stelle der Zwillingsplatte ansehen; im Allgemeinen sind $\sin\vartheta$ und φ jene Polarcoordinaten.

Im Folgenden sollen nur die beiden speciellen Fälle näher untersucht werden, daß die Nicols gekreuzt sind, also $\beta - \alpha = \pm 90^0$ ist, und zugleich die Axenebene $A_1 A_2$ entweder 0^0 und 90^0 oder $\pm 45^0$ mit den Schwingungsebenen der Nicols bildet.

Im ersten Falle, d. h. bei der Normalstellung der Platte, wird

$$\text{IV.}\quad J = A^2 \Big\{ \sin^2 2\psi_1 \sin^2\frac{\varDelta_1}{2} + \sin^2 2\psi_2 \sin^2\frac{\varDelta_2}{2}$$

$$+ 2\sin 2\psi_1 \sin 2\psi_2 \sin\frac{\varDelta_1}{2} \sin\frac{\varDelta_2}{2}\Big[\cos\frac{\varDelta_1}{2}\cos\frac{\varDelta_2}{2} - \sin\frac{\varDelta_1}{2}\sin\frac{\varDelta_2}{2}\cos 2(\psi_2 - \psi_1)\Big]\Big\},$$

dagegen im zweiten Falle, also bei der Diagonalstellung,

$$\text{V.}\quad J = A^2 \Big\{ \cos^2 2\psi_1 \sin^2\frac{\varDelta_1}{2} + \cos^2 2\psi_2 \sin^2\frac{\varDelta_2}{2}$$

$$+ 2\cos 2\psi_1 \cos 2\psi_2 \sin\frac{\varDelta_1}{2} \sin\frac{\varDelta_2}{2}\Big[\cos\frac{\varDelta_1}{2}\cos\frac{\varDelta_2}{2} - \sin\frac{\varDelta_1}{2}\sin\frac{\varDelta_2}{2}\cos 2(\psi_2 - \psi_1)\Big]\Big\}.$$

In beiden Fällen hat J die Form

$$a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma,$$

wo im ersten Falle

$$a = A\sin 2\psi_1 \sin\frac{\varDelta_1}{2},\quad b = A\sin 2\psi_2 \sin\frac{\varDelta_2}{2},$$

im zweiten

$$a = A\cos 2\psi_1 \sin\frac{\varDelta_1}{2},\quad b = A\cos 2\psi_2 \sin\frac{\varDelta_2}{2},$$

und in beiden Fällen

$$\cos\gamma = \cos\frac{\Delta_1}{2}\cos\frac{\Delta_2}{2} - \sin\frac{\Delta_1}{2}\sin\frac{\Delta_2}{2}\cos 2(\psi_2 - \psi_1)$$

ist.

Die Intensität kann $= 0$ werden nur für

$$\text{VI.} \qquad \begin{array}{rl} a = +b, & \cos\gamma = -1, \\ \text{oder } a = -b, & \cos\gamma = +1. \end{array}$$

Dies sind, wenn man sich ψ_1, ψ_2, Δ_1, Δ_2 mittelst der Formeln I, II und III durch ϑ und φ ausgedrückt denkt, je 2 Gleichungen zwischen ϑ und φ; es giebt also eine Anzahl von Werthepaaren ϑ, φ, für welche $J = 0$ wird. Dies bedeutet, daß es (bei Anwendung homogenen Lichtes) nicht ganz dunkle Curven, sondern nur ganz dunkle Punkte giebt, welche die Schnittpunkte der Curvensysteme mit den Gleichungen $a = \pm b$, $\cos\gamma = \mp 1$ sind.

Diese letzteren würden aber, wenn man sie als Gleichungen zwischen ϑ und φ schriebe, viel zu complicirt, um zur Discussion brauchbar zu sein. Noch weniger gestatten die Formeln die Untersuchung der Curven constanter Intensität, welche übrigens auch für die Ableitung der wahrgenommenen Erscheinungen nicht wesentlich ist. —

Bevor die beiden Fälle der Normalstellung und der Diagonalstellung getrennt näher betrachtet werden, sei bemerkt, daß, wie die Formeln IV und V zeigen, bei gekreuzten Nicols immer vollkommene Dunkelheit herrscht in den Schnittpunkten derjenigen beiden Curvensysteme, für welche

$$\sin\frac{\Delta_1}{2} = 0, \text{ also } \frac{\Delta_1}{2} = h\pi$$

$$\text{bezw. } \sin\frac{\Delta_2}{2} = 0, \text{ also } \frac{\Delta_2}{2} = k\pi$$

ist. Dies sind diejenigen Curven, welche in jeder einzelnen Platte ganz dunkel erscheinen würden; sie mögen daher im Folgenden als das erste und zweite „primäre“ Curvensystem bezeichnet werden.

Die Gleichung des ersten von ihnen ist

$$\frac{\sin^2 NA_1}{\cos\vartheta} = \frac{h}{c}, \quad \text{wo } c = \frac{D_1}{\lambda}(n_o - n_e) \text{ ist, oder}$$

$$\sin^2\Omega+\cos^2\Omega\sin^2\vartheta-\sin^2\Omega\cos^2\varphi\sin^2\vartheta-\tfrac{1}{2}\sin2\Omega\sin2\vartheta\cos\varphi=\frac{h}{c}\cos\vartheta.$$

Man kann $\sin\vartheta\cos\varphi$ und $\sin\vartheta\sin\varphi$ als rechtwinklige Coordinaten x und y eines Punktes des Gesichtsfeldes betrachten, indem man sich die Erscheinung auf eine Ebene im Abstande 1 vom Divergenzpunkt der Strahlen projicirt denkt; ferner kann man, wenn, wie künftig immer vorausgesetzt werden soll, nicht sehr stark convergentes Licht angewendet wird,

$$\frac{1}{\cos\vartheta}=1+\tfrac{1}{2}\sin^2\vartheta=1+\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)$$

setzen, wodurch man für die der ersten Platte zugehörigen primären dunklen Curven näherungsweise folgende Gleichung erhält:

$$\sin^2\Omega(1+\tfrac{1}{2}(x^2+y^2))+\cos^2\Omega(x^2+y^2)-\sin^2\Omega\cdot x^2-\sin2\Omega\cdot x=\frac{h}{c},$$

$$x^2(\cos^2\Omega-\tfrac{1}{2}\sin^2\Omega)+y^2(\cos^2\Omega+\tfrac{1}{2}\sin^2\Omega)-x\sin2\Omega=\frac{h}{c}-\sin^2\Omega.$$

Diese Gleichung stellt eine Schaar ähnlicher und concentrischer Curven zweiten Grades dar, deren gemeinsamer Mittelpunkt weder mit dem Mittelpunkte des Gesichtsfeldes, noch mit dem Axenaustrittspunkte zusammenfällt, aber im Hauptschnitte (auf der X-Axe) liegt. Die Curven sind:

Ellipsen, wenn $\Omega<\operatorname{arctg}\sqrt{2}$ oder $<54^0\,44'$ ist,

Parabeln, wenn $\Omega=\operatorname{arctg}\sqrt{2}=54^0\,44'$ ist,

Hyperbeln, wenn $\Omega>$ artcg $\sqrt{2}$ ist.

Das Axenverhältniß der Ellipsen ist $=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\Omega}{1+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\Omega}}$, der durch die X-Axe halbirte Asymptotenwinkel der Hyperbeln

$$=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\Omega-1}{\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\Omega+1}}.$$

Diese Curven sind bereits von Ohm, van der Willigen und Bertin discutirt worden.

Das der zweiten Platte angehörende primäre Curvensystem geht bei gleicher Dicke der Platten aus dem primären Curvensysteme der ersten Platte natürlich durch eine Drehung von 180^0 um die Plattennormale hervor; dementsprechend hat Ω entgegengesetztes Vorzeichen.

Für die weitere Untersuchung ist es nützlich, die Formeln IV und V umzugestalten, indem man in dieselben einsetzt

$$2\sin\frac{\Delta_1}{2}\sin\frac{\Delta_2}{2}\cos\frac{\Delta_1}{2}\cos\frac{\Delta_2}{2} = \tfrac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} - \sin^2\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}\right),$$

$$2\sin^2\frac{\Delta_1}{2}\sin^2\frac{\Delta_2}{2} = \sin^2\frac{\Delta_1}{2} + \sin^2\frac{\Delta_2}{2} - \tfrac{1}{2}\sin^2\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} - \tfrac{1}{2}\sin^2\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}$$

und nun die Glieder mit $\sin^2\frac{\Delta_1}{2}$, bezw. $\sin^2\frac{\Delta_2}{2}$, $\sin^2\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}$ und $\sin^2\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}$ zusammenfaßt. Die Formeln IV und V nehmen dann die Form an[1]):

$$\text{VII.}\quad J = J_0\left\{a_1\sin^2\frac{\Delta_1}{2} + a_2\sin^2\frac{\Delta_2}{2} + b_1\sin^2\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} + b_2\sin^2\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}\right\};$$

darin ist J_0 für A^2 gesetzt und, wie sich nach einigen einfachen Umformungen ergiebt, für die Normalstellung

$$\text{VIII.}\quad \left|\begin{aligned} a_1 &= a_1^0 = \sin 2\psi_1\cos 2\psi_2\sin 2(\psi_1-\psi_2),\\ a_2 &= a_2^0 = \sin 2\psi_2\cos 2\psi_1\sin 2(\psi_2-\psi_1),\\ b_1 &= b_1^0 = \sin 2\psi_1\sin 2\psi_2\cos^2(\psi_2-\psi_1),\\ b_2 &= b_2^0 = -\sin 2\psi_1\sin 2\psi_2\sin^2(\psi_2-\psi_1),\end{aligned}\right.$$

dagegen für die Diagonalstellung

$$\text{IX.}\quad \left|\begin{aligned} a_1 &= a_1' = \sin 2\psi_2\cos 2\psi_1\sin 2(\psi_2-\psi_1) = a_2^0,\\ a_2 &= a_2' = \sin 2\psi_1\cos 2\psi_2\sin 2(\psi_1-\psi_2) = a_1^0,\\ b_1 &= b_1' = \cos 2\psi_1\cos 2\psi_2\cos^2(\psi_2-\psi_1),\\ b_2 &= b_2' = -\cos 2\psi_1\cos\psi_2\sin^2(\psi_2-\psi_1).\end{aligned}\right.$$

Aus dieser Darstellung von J als Summe von 4 Gliedern geht hervor, daß man die ganze Erscheinung auffassen kann als Superposition von 4 Curvensystemen, deren Intensitäten gegeben sind durch

$$a_1\sin^2\frac{\Delta_1}{2},\quad a_2\sin^2\frac{\Delta_2}{2},\quad b_1\sin^2\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2},\quad b_2\sin^2\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}.$$

Diese Superposition hat indessen im Allgemeinen nur mathematische Bedeutung, da von den Größen a_1, a_2, b_1, b_2 immer zwei negativ sind. Wenn aber z. B. eine der Größen a_1, a_2, b_1, b_2 nahe $= 1$ ist, während die drei anderen sehr klein sind, so kann man schließen, daß dasjenige Curvensystem, dessen Intensität jene erstere Größe als Faktor enthält, allein wahrnehmbar sein muß. Da nun immer je drei der Größen a_1, a_2, b_1, b_2 einen Faktor ge-

1) **Ohm**, Art. XXXVI, XXXVII.

meinsam haben, so giebt es in der That im Allgemeinen solche Stellen des Gesichtsfeldes, wo nur eine der vier Größen von 0 verschieden und folglich nur eines der vier Curvensysteme sichtbar ist. Bevor hierauf näher eingegangen wird, sollen aber jene vier Curvensysteme, welche überhaupt auftreten können, untersucht werden. Die dunklen Curven, mit den Gleichungen

$$\sin\frac{\Delta_1}{2} = 0 \text{ und } \sin\frac{\Delta_2}{2} = 0$$

sind die bereits oben discutirten beiden „primären“ Curvensysteme.

Das dritte Curvensystem ist gegeben durch

$$\sin\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} = \text{Const.}$$

und möge das secundäre Curvensystem erster Art genannt werden. Die Gleichung der Curven dieses Systems ist in rechtwinkligen Coordinaten

$$x^2(\cos^2\Omega-\tfrac{1}{2}\sin^2\Omega)+y^2(\cos^2\Omega+\tfrac{1}{2}\sin^2\Omega)-x\frac{D_1-D_2}{D_1+D_2}\sin 2\Omega = C-\sin^2\Omega;$$

speciell für die dunklen Curven ist $C = h\,\dfrac{\lambda}{D_1+D_2}\cdot\dfrac{1}{n_o-n_e}$.

Diese Gleichung gilt in derselben Annäherung, wie die oben für die primären Curven angegebene, und unterscheidet sich von der letzteren nur durch den Faktor von x und die Größe von C. Die Curven des secundären Systems erster Art unterscheiden sich demnach von den primären Curven nur durch die Lage des Mittelpunktes und die absolute Größe[1]). Ist $D_1 = D_2$, sind also die Platten gleich dick, so fällt der Mittelpunkt der Curven mit demjenigen des Gesichtsfeldes zusammen, da dann das lineare Glied verschwindet. In dem Grenzfalle $\Omega = 54^0\,44'$, wo der Coefficient von x^2 verschwindet, werden dann die Curven keine Parabeln, sondern

1) Daß in den Fig. 3 u. 5, Tafel VII, in Liebisch's „Physikalischer Krystallographie“ die primären Curven noch sehr kreisähnlich erscheinen, während die secundären Curven erster Art deutlich elliptisch sind, rührt wohl von der Verzerrung der ersteren in Folge ihrer Lage nahe dem Rande des Gesichtsfeldes her.

gerade Linien, welche der die beiden Axen enthaltenden Ebene parallel sind[1]).

Das Curvensystem, welches durch

$$\sin\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2} = \text{Const.}$$

gegeben ist, möge das secundäre zweiter Art genannt werden.

Die Gleichung desselben ist

$$x^2(\cos^2\Omega-\tfrac{1}{2}\sin^2\Omega)+y^2(\cos^2\Omega+\tfrac{1}{2}\sin^2\Omega)-x\frac{D_1+D_2}{D_1-D_2}\sin2\Omega = C'-\sin^2\Omega,$$

wo $C' = h\,\dfrac{\lambda}{D_1-D_2}\,\dfrac{1}{n_o-n_e}$ ist für die dunklen Curven.

Demnach unterscheiden sich auch diese Curven von den primären nur durch die Lage des Mittelpunktes auf der x-Axe.

Wird aber $D_1 = D_2$, so rückt der Mittelpunkt in unendliche Entfernung und die Gleichung der Curven wird

$$x = -\frac{C''}{\sin2\Omega},$$

wo für die dunklen Curven

$$C'' = h\,\frac{\lambda}{D_1+D_2}\,\frac{1}{n_o-n_e} = C$$

ist. Bei gleicher Dicke der beiden Platten sind also die secundären Curven zweiter Art immer zur Axenebene senkrechte gerade Linien; die Größe des Winkels Ω hat nur auf den gegenseitigen Abstand der dunklen Streifen Einfluß; sie sind um so gedrängter, je größer Ω ist[2]).

Es soll nun erörtert werden, welche Erscheinungen in den beiden Fällen der Normal- und Diagonalstellung an verschiedenen Stellen des Gesichtsfeldes auftreten. Diese Untersuchung muß sich indessen auf die gesonderte Betrachtung solcher Stellen des Gesichtsfeldes beschränken, wo ψ_1, ψ_2 oder $\psi_2-\psi_1$ be-

---

1) Diesen Fall hat Ohm besonders hervorgehoben; die obige Gleichung nebst einer Discussion für den Fall $D_1 = D_2$ findet sich in der angeführten Abhandlung Bertin's S. 501—503.

2) Diese parallelen Streifen hat für den speciellen Fall $\Omega = 45^0$ van der Willigen berechnet; Ohm und Bertin erwähnen ihr Auftreten, ohne dasselbe zu erklären; Bertin nennt sie „franges de Delezenne.“

stimmte als constant anzusehende Werthe haben; denn die allgemeine Discussion der Formeln für J würde sehr umständlich sein und wahrscheinlich auch wenig anschauliche Resultate liefern.

I. Normalstellung.

Es war gefunden (Formeln VII und VIII)

$$J = J_0 \left\{ a_1^0 \sin^2 \frac{\varDelta_1}{2} + a_2^0 \sin^2 \frac{\varDelta_2}{2} + b_1^0 \sin^2 \frac{\varDelta_1 + \varDelta_2}{2} + b_2^0 \sin^2 \frac{\varDelta_1 - \varDelta_2}{2} \right\},$$

$$\begin{aligned} a_1^0 &= \sin 2\psi_1 \cos 2\psi_2 \sin 2(\psi_1 - \psi_2), \\ a_2^0 &= \sin 2\psi_2 \cos 2\psi_1 \sin 2(\psi_2 - \psi_1), \\ b_1^0 &= \sin 2\psi_1 \sin 2\psi_2 \cos^2(\psi_2 - \psi_1), \\ b_2^0 &= -\sin 2\psi_1 \sin 2\psi_2 \sin^2(\psi_2 - \psi_1). \end{aligned}$$

1. Zunächst ist ersichtlich, daß a_1^0, a_2^0, b_1^0, b_2^0 sämmtlich verschwinden, wenn $\psi_1 = 0$ oder 180^0 und mithin zugleich $\psi_2 = 0$ oder 180^0 ist, was auf der X-Axe eintritt; demnach erscheint ein durch den Mittelpunkt des Gesichtsfeldes gehender, der Axenebene paralleler, schwarzer Balken, welcher um so breiter ist, je größer die Neigung Ω ist[1]).

2. Für $\psi_2 = \pm 90^0$ ist nur $a_1^0 = \sin^2 2\psi_1$, und für $\psi_1 = \pm 90^0$ nur $a_2^0 = \sin^2 2\psi_2$ von 0 verschieden; folglich sind auf den zur Axenebene senkrechten Linien, welche die dunklen Balken der zweiten bezw. ersten primären Interferenzfigur sein würden, nur das erste bezw. zweite primäre Curvensystem sichtbar, und zwar mit einer Intensität der hellen Curven, welche mit der Entfernung von den Axenpunkten wächst. In letzteren selbst ist jene Intensität 0 und auch auf einer beträchtlichen Strecke seitwärts noch sehr gering, und da dies die Intensität der hellsten Curven ist, so müssen die betrachteten Balken der primären Kreuze relativ dunkel erscheinen, namentlich in der Nähe der Axenpunkte. — Diese Erscheinung kommt natürlich nur dann in Betracht, wenn Ω so klein ist, daß die optischen Axen im Gesichtsfelde austreten[2]).

3. Für $\psi_2 - \psi_1 = \pm 90^0$ bleibt nur $b_2^0 = \sin^2 2\psi_1$ übrig.

Es ist nun $\psi_2 - \psi_1 = \pm 90^0$ auf demjenigen Kreise, welcher durch die Axenpunkte geht und deren Ver-

---

1) Vergl. Liebisch, Physikalische Krystallographie, Tafel VII, Fig. 3, 5 und VIII, 1, 3. — Schematische Fig. 3, a; 4, a.

2) Liebisch, Phys. Kryst., Tafel VII, Fig. 3. — Schematische Fig. 3, b.

bindungslinie zum Durchmesser hat. Auf diesem Kreise und in seiner nächsten Umgebung ist also das secundäre Curvensystem zweiter Art allein vorhanden[1]. Die Intensitätsmaxima sind am größten $= J_0$ an denjenigen Stellen, welche auf dem zur Axenebene senkrechten Durchmesser liegen; dort ist auch bei nahezu gleicher Dicke der Platten $\frac{\varDelta_1-\varDelta_2}{2}$ für einen der Streifen $= 0$, und es sind daher an diesen Stellen im weißen Lichte farbige geradlinige Streifen sichtbar. Eine Krümmung dieser Streifen deutet auf einen Dickenunterschied der beiden Platten hin. — Der Fall, daß nur b_1^0 von 0 verschieden ist, ist bei der Normalstellung nicht möglich; daher können keine ganz dunklen Curven des secundären Systems erster Art auftreten. Es soll nun untersucht werden, welche Erscheinung in der Nähe des schwarzen Balkens und des eben erwähnten Kreises wahrzunehmen sein muß.

4. Für die dem schwarzen Balken benachbarten Stellen in der Mitte des Gesichtsfeldes kann man setzen

$$\psi_1 = \pm(180^0-\varepsilon),\ \psi_2 = \pm\,\varepsilon,$$

unter ε einen kleinen Winkel verstanden.

Dann wird

$$a_1^0 = a_2^0 = 8\varepsilon^2,\quad b_2^0 = -16\varepsilon^4,\quad b_1^0 = -4\varepsilon^2,$$

man kann daher b_2^0 vernachlässigen und erhält

$$J = J_0 4\varepsilon^2 \left\{2\sin^2\frac{\varDelta_1}{2} + 2\sin^2\frac{\varDelta_2}{2} - \sin^2\frac{\varDelta_1+\varDelta_2}{2}\right\}$$

$$= J_m \left\{\tfrac{1}{2}\sin^2\frac{\varDelta_1}{2} + \tfrac{1}{2}\sin^2\frac{\varDelta_2}{2} - \tfrac{1}{4}\sin^2\frac{\varDelta_1+\varDelta_2}{2}\right\}.$$

Für $\frac{\varDelta_1+\varDelta_2}{2} = (2h+1)\frac{\pi}{2}$ wird

$$J = J_m\left\{\tfrac{1}{2}\sin^2\frac{\varDelta_1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos^2\frac{\varDelta_1}{2} - \tfrac{1}{4}\right\} = \tfrac{1}{4}J_m;$$

es sind also Curven des secundären Systems erster Art vorhanden, auf welchen die Intensisät constant $= \frac{1}{4}$ der

1) Liebisch, Phys. Kryst., T. VII, 3. — Schematische Fig. 3, c.

Maximalintensität ist, und welche daher als **relativ dunkle continuirliche Curven** sichtbar sein müssen[1]).

Auf den zwischen denselben liegenden secundären Curven erster Art:

$$\frac{\varDelta_1+\varDelta_2}{2}=h\pi$$

ist

$J=J_m\sin^2\frac{\varDelta_1}{2}$ oder $=J_m\sin^2\frac{\varDelta_1-\varDelta_2}{4}$ für gerades h, $=J_m\cos^2\frac{\varDelta_1-\varDelta_2}{4}$ für ungerades h. Auf diesen Curven wechselt daher J zwischen 0 und J_m und zwar in der Weise, daß die Strecken, wo $0<J<\frac{1}{2}J_m$, und diejenigen, wo $\frac{1}{2}J_m<J<J_m$ ist, gleich breit sind. Rechnet man, daß diejenigen Stellen als dunkle erscheinen, wo $J<\frac{1}{4}J_m$ ist, so sind demnach die dunklen Strecken auf den secundären Curven erster Art schmaler als die hellen.

Für $\frac{\varDelta_1-\varDelta_2}{2}=2h\pi$ wird

$$J=J_m\left(\sin^2\frac{\varDelta_1+\varDelta_2}{4}-\frac{1}{4}\sin^2\frac{\varDelta_1+\varDelta_2}{2}\right)=J_m\sin^4\frac{\varDelta_1+\varDelta_2}{4},$$

und für $\frac{\varDelta_1-\varDelta_2}{2}=(2h+1)\pi$

$$J=J_m\cos^4\frac{\varDelta_1+\varDelta_2}{4}.$$

Hieraus folgt, daß die gleich langen Stücke, welche durch die Curven constanter Intensität $\frac{\varDelta_1+\varDelta_2}{2}=\frac{2h+1}{2}\pi$ auf den secundären Curven zweiter Art $\frac{\varDelta_1-\varDelta_2}{2}=h\pi$ abgeschnitten werden, abwechselnd dunkel (von einer Intensität zwischen 0 und $\frac{1}{4}J_m$) und hell (von einer Intensität zwischen $\frac{1}{4}J_m$ und J_m) sind. Da nun die secundären Curven zweiter Art diejenigen erster Art in der Mitte des Gesichtsfeldes nahezu senkrecht schneiden (— gleiche Dicken der Platten vorausgesetzt —), und da ferner die ersteren viel geringere gegenseitige Abstände haben, als die letzteren (— weil $\varDelta_1+\varDelta_2$ im Mittelpunkte des Gesichtsfeldes ein Minimum hat, $\varDelta_1-\varDelta_2$ aber nicht —), so wird die wahrgenommene Erscheinung im We-

---

1) **Liebisch**, Phys. Kryst., T. VII, Fig. 3, 5 und VIII, 1, 3. — Schemat. Fig. 4, b; diese und Fig. 6 sind für den speciellen Fall gezeichnet, wo die secundären Curven 1. Art zur Axenebene **parallele Gerade** sind.

sentlichen aus den relativ dunklen continuirlichen secundären Curven erster Art und aus zwischen denselben liegenden dunklen Flecken bestehen, welche etwa wie die dunklen Felder eines Schachbrettes angeordnet sind, aber in der zur Axenebene senkrechten Richtung gestreckt erscheinen [1]).

Wenn der Winkel Ω groß ist, etwa $> 45^0$, so sind im ganzen Gesichtsfelde ψ_1 und ψ_2 wenig von $\pm\ 180^0$ bezw. 0^0 verschieden, und die beschriebene Erscheinung ist daher im ganzen Gesichtsfelde allein wahrzunehmen; der schwarze Balken ist dann sehr breit wegen der langsamen Aenderung von ψ_1 und ψ_2 beim Fortschreiten nach den Seiten hin. Dies gilt also immer, wenn die secundären Curven erster Art sehr gestreckte Ellipsen oder Hyperbeln sind [2]).

5. An denjenigen Stellen des Gesichtsfeldes, welche in der Nachbarschaft des oben erwähnten, durch die Axenpunkte gehenden Kreises liegen, ist, $\psi_2 - \psi_1$ wenig von 90^0 verschieden, und man kann, wenn $\psi_2 - \psi_1 = \pm\ 90^0 \pm \varepsilon$ gesetzt wird, nach Potenzen von ε entwickeln.

Dann wird

$$\begin{aligned}
a_1^0 &= \mp \sin 2\psi_1 \cos(2\psi_1 \pm 2\varepsilon) \cdot 2\varepsilon = \mp\, \varepsilon \cdot \sin 4\psi_1 + 4\varepsilon^2 \sin^2 2\psi_1,\\
a_2^0 &= \pm \cos 2\psi_1 \sin(2\psi_1 \pm 2\varepsilon) \cdot 2\varepsilon = \pm\, \varepsilon \cdot \sin 4\psi_1 + 4\varepsilon^2 \cos^2 2\psi_1,\\
b_1^0 &= -\sin^2 2\psi_1 \cdot \varepsilon^2,\\
b_2^0 &= \sin 2\psi_1 \sin(2\psi_1 \pm 2\varepsilon) \cdot (1-\varepsilon^2) = \sin^2 2\psi_1 \pm \varepsilon \cdot \sin 4\psi_1 - 2\varepsilon^2 \sin^2 2\psi_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J = J_0 \Big\{ &\sin^2 2\psi_1 (1 \pm 2\varepsilon \cos 2\psi_1 - 2\varepsilon^2 \sin 2\psi_1) \cdot \sin^2 \frac{\varDelta_1 - \varDelta_2}{2}\\
&\mp \varepsilon \cdot \sin 4\psi_1 \left(\sin^2 \frac{\varDelta_1}{2} - \sin^2 \frac{\varDelta_2}{2} \right)\\
&+ \varepsilon^2 \left(4 \sin^2 2\psi_1 \sin^2 \frac{\varDelta_1}{2} + 4 \cos^2 2\psi_1 \sin^2 \frac{\varDelta_2}{2} - \sin^2 2\psi_1 \sin^2 \frac{\varDelta_1 + \varDelta_2}{2} \right) \Big\}.
\end{aligned}$$

Nun ist $\sin^2 \frac{\varDelta_1}{2} - \sin^2 \frac{\varDelta_2}{2} = \sin \frac{\varDelta_1 - \varDelta_2}{2} \sin \frac{\varDelta_1 + \varDelta_2}{2}$, folglich verschwindet das Glied mit ε auf den secundären Curven zweiter Art, für welche $\frac{\varDelta_1 - \varDelta_2}{2} = h\pi$ ist, und die Intensität auf diesen Curven wird durch das Glied mit ε^2 allein gegeben, welches

1) Vergl. die Mitte der Fig. 3, 5, Tafel VII, in Liebisch, Phys. Kryst. — Schemat. Fig. 4.

2) Liebisch, Phys. Kryst., VIII, 1 u. 3.

für das betrachtete Gebiet sehr klein ist. Daraus folgt, daß die secundären Curven zweiter Art auf einer ziemlich beträchtlichen Strecke zu beiden Seiten des mehrerwähnten Kreises noch merklich ganz dunkel erscheinen[1]).

6. Um zu sehen, wie der Uebergang von der unter 4) beschriebenen Erscheinung zu den ganz dunklen secundären Curven zweiter Art stattfindet, werde noch diejenige Stelle betrachtet, wo $\psi_1 = 180^0 - 22\frac{1}{2}^0$, $\psi_2 = 22\frac{1}{2}^0$ ist. Es wird

$$a_1^0 = \tfrac{1}{2},\ a_2^0 = \tfrac{1}{2},\ b_1^0 = -\tfrac{1}{4},\ b_2^0 = +\tfrac{1}{4},$$

$$J = \tfrac{1}{2} J_0 \left\{ \sin^2 \frac{\varDelta_1}{2} + \sin^2 \frac{\varDelta_2}{2} - \tfrac{1}{2} \sin^2 \frac{\varDelta_1 + \varDelta_2}{2} + \tfrac{1}{2} \sin^2 \frac{\varDelta_1 - \varDelta_2}{2} \right\}.$$

Man erhält daher

$$\text{für } \frac{\varDelta_1 + \varDelta_2}{2} = \frac{2h+1}{2}$$

$$J = \tfrac{1}{4} J_o \left(1 + \sin^2 \frac{\varDelta_1 - \varDelta_2}{2} \right);$$

die Curven $\frac{\varDelta_1 + \varDelta_2}{2}$ haben also nicht mehr constante, sondern eine zwischen $\frac{1}{4} J_o$ und $\frac{1}{2} J_o$ wechselnde Intensität, so daß sie für die Wahrnehmung nicht mehr so stark wie im Falle 4) hervortreten.

Ferner wird

$$\text{für } \frac{\varDelta_1 + \varDelta_2}{2} = 2h\pi \qquad J = J_o \sin^2 \frac{\varDelta_1 - \varDelta_2}{4} \left(1 + \cos^2 \frac{\varDelta_1 - \varDelta_2}{4} \right),$$

$$\text{für } \frac{\varDelta_1 + \varDelta_2}{2} = (2h+1)\pi \quad J = J_o \cos^2 \frac{\varDelta_1 - \varDelta_2}{4} \left(1 + \sin^2 \frac{\varDelta_1 - \varDelta_2}{4} \right),$$

woraus folgt, daß beim Fortschreiten längs der Curven

$$\frac{\varDelta_1 + \varDelta_2}{2} = h\pi$$

von einem dunklen Punkte aus die Intensität jetzt schneller zunimmt, als im Falle 4, so daß die dunklen Stücke der Curven $\frac{\varDelta_1 - \varDelta_2}{2} = h\pi$ in der Richtung der secundären Curven erster Art noch schmaler erscheinen, als dort. Endlich ist:

$$\text{für } \frac{\varDelta_1 - \varDelta_2}{2} = 2h\pi \qquad J = J_o \sin^4 \frac{\varDelta_1 + \varDelta_2}{2},$$

1) l. c. T. VII, Fig. 3. — Schemat. Fig. 3, c.

$$\text{für } \frac{\Delta_1-\Delta_2}{2} = (2h+1)\pi \qquad J = J_o \cos^4 \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2};$$

für den Wechsel der Intensität auf den secundären Curven zweiter Art gilt also das unter 4) Gesagte.

Bei der Beobachtung werden demnach an der jetzt untersuchten Stelle des Gesichtsfeldes nur die isolirt liegenden dunklen Stücke der secundären Curven zweiter Art auffallen [1]).

7. Endlich ist noch zu erwähnen, daß für $\psi_1 = \pm 45^0$ oder $\pm 135^0$ und von $\pm 180^0$ wenig verschiedene Werthe von ψ_2 a_1^0 stark überwiegt, ebenso a_2^0 für kleines ψ_1 und $\psi_2 = \pm 45^0$, $\pm 135^0$, woraus folgt, daß das erste bezw. zweite primäre Curvensystem in der Nähe des ersten bezw. zweiten Axenpunktes in der Mitte der zwischen den primären dunklen Kreuzen liegenden Sectoren stark hervortritt [2]).

II. Diagonalstellung.

Es wurde gefunden

$$J = J_o \left\{ a_1' \sin^2 \frac{\Delta_1}{2} + a_2' \sin^2 \frac{\Delta_2}{2} + b_1' \sin^2 \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} + b_2' \sin^2 \frac{\Delta_1-\Delta_2}{2} \right\},$$

$$\begin{aligned} a_1' &= \sin 2\psi_2 \cos 2\psi_1 \sin 2(\psi_2-\psi_1), \\ a_2' &= \sin 2\psi_1 \cos 2\psi_2 \sin 2(\psi_1-\psi_2), \\ b_1' &= \cos 2\psi_1 \cos 2\psi_2 \cos^2 (\psi_2-\psi_1), \\ b_2' &= -\cos 2\psi_1 \cos 2\psi_2 \sin^2 (\psi_2-\psi_1). \end{aligned}$$

1. Für die Axenebene, wo $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = \pm 180^0$ ist (oder $\psi_1 = \psi_2 = 0$ oder 180^0), ist nur b_1' von 0 verschieden und zwar nahe $= 1$; es ist dort folglich das ungestörte secundäre Curvensystem erster Art sichtbar, und zwar mit der größten möglichen Intensität [3]).

2. Für $\psi_1 = \pm 45^0$ oder $\pm 135^0$ ist nur $a_2' = \cos^2 2\psi_2$ von 0 verschieden, ebenso für $\psi_2 = \pm 45^0$ oder $\pm 135^0$ nur $a_1' = \cos^2 2\psi_1$. Dies tritt ein auf den Balken der Kreuze, welche in der von der ersten bezw. zweiten Platte herrührenden primären Interferenzfigur schwarz erscheinen würden. Auf diesen Balken tritt also das zweite bezw. erste primäre Curvensystem

---

1) l. c. VII, 3; äußere Partieen von VIII, 1. — Schemat. Fig. 3, d.

2) l. c. T. VIII, 1, 3. — Schemat. Fig. 3, c.

3) l. c. am besten in Fig. 6, T. VII und Fig. 4, T. VIII. — Schemat. Fig. 5, a.

allein auf [1]), wobei die Intensität der hellen Curven nach den Axenpunkten hin zunimmt.

An denjenigen Stellen, wo $\psi_1 = \pm 135^0$, $\psi_2 = \pm 45^0$ ist, wo sich also je 2 Arme der primären Kreuze schneiden, wird $J = 0$, dort befinden sich also 2 absolut dunkle Punkte, deren Umgebungen wegen der langsamen Aenderung von ψ_1 und ψ_2 als zwei ziemlich ausgedehnte dunkle Flecke erscheinen [2]).

3. Für $\psi_2 - \psi_1 = \pm 90^0$, also auf dem durch die Axenpunkte gehenden Kreise, bleibt nur $b_2' = \cos^2 2\psi_1$ übrig; dort ist also das secundäre Curvensystem zweiter Art allein sichtbar, wie im Falle I, nur mit dem Unterschiede, daß die Maximalintensität jetzt nach den Axenpunkten hin zunimmt [3]).

4. In der Mitte des Gesichtsfeldes auf beiden Seiten der X-Axe ist $\psi_1 = \pm (180^0 - \varepsilon)$, $\psi_2 = \pm \varepsilon$, wo ε ein kleiner Winkel ist; es wird daher

$$a_1' = a_2' = 8\varepsilon^2, \quad b_2' = -4\varepsilon^2, \quad b_1' = 1 - 8\varepsilon^2.$$

Da b_1' stark überwiegt, so sind die secundären Curven erster Art, für welche $\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} = h\pi$ ist, noch als relativ dunkle Curven vorhanden, aber die Intensität ist auf denselben nicht mehr constant $= 0$, sondern

$$= 16\varepsilon^2 J_0 \left\{ \tfrac{1}{2} \sin^2 \frac{\Delta_1}{2} + \tfrac{1}{2} \sin^2 \frac{\Delta_2}{2} - \tfrac{1}{4} \sin^2 \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} \right\}$$

$$\text{oder} = 16\varepsilon^2 J_0 \sin^4 \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{4} \text{ für gerades } h,$$

$$= 16\varepsilon^2 J_0 \cos^4 \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} \text{ für ungerades } h.$$

Jede der erwähnten relativ dunklen Curven wird demnach durch die secundären Curven zweiter Art

---

1) l. c. VII, 4 u. 6. Die nach den Axenpunkten hin convergirenden relativ dunklen Büschel fallen nicht mit den Balken der primären Kreuze zusammen. — Schemat. Fig. 5, b.

2) l. c. VII, 4, 6. — Schemat. Fig. 5, c.

3) Schemat. Fig. 5, d. — l. c. VII, 4, 6, in letzterer Fig. nur ganz schwach sichtbar. Die scheinbare Unregelmäßigkeit der Curven in der Nähe der Axenpunkte, welche in Fig. VII, 4 auffällt, rührt daher, daß die Regionen, in welchen entweder nur ein primäres oder nur eines der beiden secundären Curvensysteme allein sichtbar ist, in den Axenpunkten zusammentreffen.

$$\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} = \frac{2h+1}{2}\pi$$

in abwechselnd hellere und dunklere Stücke getheilt; auf den dunklen ist $4\varepsilon^2 J_0 > J > 0$, auf den helleren $16\varepsilon^2 J_0 > J > 4\varepsilon^2 J_0$. Die relativ dunklen secundären Curven erster Art erscheinen also durch hellere Stellen unterbrochen[1]), und diese Unterbrechung wird schon in geringer Entfernung von der X-Axe merklich, weil $16 J_0 \varepsilon^2$ die Maximalintensität ist.

Die Curven $\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} = \frac{2h+1}{2}\pi$ erscheinen noch ziemlich gleichmäßig hell, solange $16\varepsilon^2$ klein gegen 1 ist, da dann $1 - 8\varepsilon^2$ gegenüber den drei variabeln Gliedern überwiegt. Beim Fortschreiten auf einer Curve

$$\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} = \text{Const.}$$

ändert sich die Intensität ungefähr wie $\sin^2 \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}$; hieraus und aus dem durch $\sin^4 \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{4}$ bezw. $\cos^4 \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{4}$ gegebenen Gesetze der Helligkeitsänderung längs der secundären Curven erster Art folgt, daß die dunklen Flecke viel weniger in der Richtung normal zur X-Axe gestreckt erscheinen, als bei der Normalstellung, und daß sie in größerer Entfernung von der Axenebene, wo der Abstand der secundären Curven erster Art im Verhältniß zu dem der secundären Curven zweiter Art nicht mehr so groß ist, sogar tangential zu den secundären Curven erster Art gestreckt erscheinen[2]). — Dies ist die bei großem Ω im ganzen Gesichtsfelde auftretende Erscheinung. Wird Ω nahe $= 90^0$, so erscheinen die Hyperbeln erster Art höchstens noch am äußersten Rande des Gesichtsfeldes unterbrochen und die Erscheinung unterscheidet sich von derjenigen, welche eine einfache Platte, die unter dem Winkel Ω gegen die optische Axe geschnitten ist, darbietet, nur noch durch die centrische Lage der Hyperbeln[3]).

5. Für die dem unter 3) erwähnten Kreise benachbarten Stellen gilt das im Falle I, 5) Gesagte; doch sind bei der Diagonalstellung die secundären Streifen zweiter Art weniger

---

1) Schemat. Fig. 5, e und 6.
2) l. c. VII, 6 und VIII, 2, 4. — Schemat. Fig. 6.
3) l. c. VIII, 5 und 6.

gut wahrnehmbar, als bei der Normalstellung, weil gerade dort, wo sonst jene Streifen am besten sichtbar sind, die unter 2) erwähnten dunklen Flecke liegen.

6. Für diejenigen Stellen, wo $\psi_1 = \pm(180^0 - 22\frac{1}{2}^0)$, $\psi_2 = \pm 22\frac{1}{2}^0$ ist, erhält man

$$a_1' = a_2' = \tfrac{1}{2}, \quad b_1' = \tfrac{1}{4}, \quad b_2' = -\tfrac{1}{4},$$

$$J = \tfrac{1}{2} J_o \left\{ \sin^2 \frac{\varDelta_1}{2} + \sin^2 \frac{\varDelta_2}{2} + \tfrac{1}{2} \sin^2 \frac{\varDelta_1 + \varDelta_2}{2} - \tfrac{1}{2} \sin^2 \frac{\varDelta_1 - \varDelta_2}{2} \right\}.$$

Diese Formel geht aus der für den Fall I, 6) angegebenen dadurch hervor, daß man $\frac{\varDelta_1 + \varDelta_2}{2}$ mit $\frac{\varDelta_1 - \varDelta_2}{2}$ vertauscht; die Betrachtungen, welche unter I, 6) angestellt wurden, werden also hier zutreffen, wenn man das zweite und erste secundäre Curvensystem mit einander vertauscht. Folglich unterscheidet sich die Interferenzfigur von der unter I, 6) beschriebenen nur dadurch, daß die Längsrichtung der dunklen Flecke oder Striche mehr tangential als normal zu den secundären Curven erster Art liegt, und daß statt der relativ dunklen Curven erster Art solche der zweiten Art auftreten[1]), nämlich die Curven

$$\frac{\varDelta_1 - \varDelta_2}{2} = \frac{2h+1}{2} \pi,$$

auf welchen $J = J_o \dfrac{1 + \sin^2 \frac{\varDelta_1 + \varDelta_2}{2}}{4}$ ist, also zwischen $\frac{J_o}{4}$ und $\frac{J_o}{2}$ variirt.

Der Uebergang dieser Interferenzfigur in die secundären Streifen zweiter Art wird bei der Diagonalstellung nicht gut zu verfolgen sein, weil bei wachsender Entfernung vom Centrum J_o bald sehr abnimmt, indem man sich den dunklen Flecken nähert.

1) Aeußere Partieen der Fig. 2, T. VIII, l. c. — Schemat. Fig. 6, a.

Fig. 1.

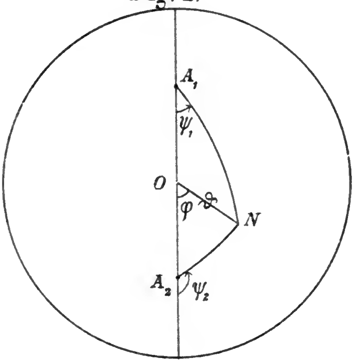


Fig. 2.

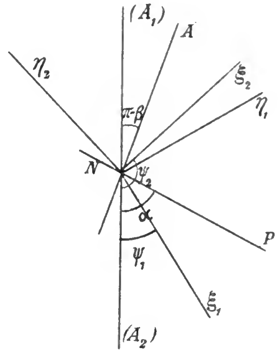


Fig. 3.

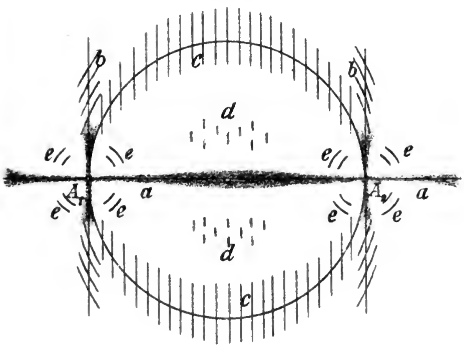


Fig. 4.

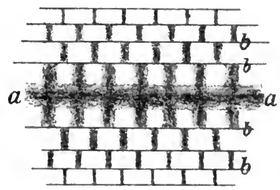


Fig. 5.

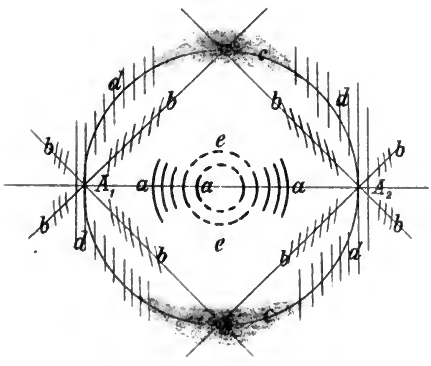
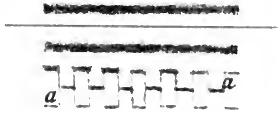


Fig. 6.



A. W. Pistor Nachf! Göttingen

Bestimmung der Elasticitäts-Constanten des brasilianischen Turmalines.

Von

W. Voigt.

Die bekannten Eigenschaften des Turmalines, durch Temperatur- oder Druckänderung electrisch erregt zu werden, geben den Bestimmungen seiner Elasticitäts-Constanten ein ganz besonderes Interesse, denn offenbar ist ihre Kenntniß für die genaue Beurtheilung der bei Compression oder Erwärmung in ihm auftretenden Deformationen und Spannungen nothwendig. Außerdem verspricht ihre Kenntniß einige Aufklärung darüber, ob die Polarität der Moleküle, welche wir zur Erklärung der elastischen Erscheinungen annehmen müssen, eine electrische ist, insofern sie in diesem Falle bei hervorragend pyroelectrischen Krystallen sich auch mit besonderer Stärke geltend machen müßte.

Geleitet durch diese Ueberlegungen habe ich schon seit Jahren versucht, für die Elasticitätsbeobachtungen genügendes Material von Turmalin zu beschaffen, aber erst vor Kurzem ist mir solches durch Vermittelung von Herrn C. F. Pech in Berlin zugegangen.

Der sehr kostbare Turmalinkrystall, den ich ihm verdanke, stammt aus Brasilien und maß bei einer Länge von ca. 9 cm nahe 3 cm in der Dicke; beide Enden waren verbrochen, die Seitenflächen durch abwechselndes Auftreten des trigonalen und hexagonalen Prismas in bekannter Weise gestreift; der Querschnitt zeigte ungefähr ein gleichseitiges Dreieck. Die Farbe des Krystalls war tiefgrün und in großen Strecken völlig homogen; in anderen deutete ein leichter Wechsel derselben auf schaaligen Aufbau in der Richtung der Hauptaxe. Sprünge waren leider mehrfach verhanden und konnten wegen der dunkeln Färbung erst wahrgenommen werden, nachdem der Krystall in Platten resp. in Stäbchen zerlegt war; sie ließen sich demgemäß also nur mit Schwierigkeit vermeiden.

Die zur Beobachtung benutzten Prismen hat Herr Dr. W. Steeg und Reuter in Bad Homburg angefertigt.

Den Krystall denke ich mir wie gewöhnlich aufgestellt, wähle die Hauptaxe zur Z-Axe, eine Symmetrieebene zur YZ-Ebene und lasse die $+Y$-Axe aus einer um die $+Z$-Richtung gelagerten Fläche des Rhomboëders $+R$ austreten. Bezeichne ich dann die Richtungscosinus der Länge L, Breite B, Dicke D des zu betrachtenden rechtwinkligen Prismas nach dem folgenden Schema

	X	Y	Z
L	α	β	γ
B	α_1	β_1	γ_1
D	α_2	β_2	γ_2

so ist die Bezeichnung und Orientirung der benutzten Gattungen von Stäbchen durch folgende Zusammenstellung gegeben

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{I}(0^0) & \alpha = \beta = 0,\ \gamma = 1,\ \gamma_1 = \gamma_2 = 0; \\
\mathrm{I}(+45^0) & \alpha = 0,\ \beta = \gamma = 1/\sqrt{2},\ \gamma_1 = 0; \\
\mathrm{I}(-45^0) & \alpha = 0,\ -\beta = +\gamma = 1/\sqrt{2},\ \gamma_1 = 0; \\
\mathrm{II}(90^0) & \alpha = 1,\ \beta = \gamma = 0,\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 1; \\
\mathrm{II}'(90^0) & \alpha = 1,\ \beta = \gamma = 0,\ \gamma_2 = 0,\ \gamma_1 = 1.
\end{array}$$

Hierbei deutet I auf die Lage der Längsaxe im ersten Hauptschnitt, nämlich der Symmetrieebene, II auf die Lage im zweiten zum ersten normalen Hauptschnitt.

Bezüglich der für rhomboëdrisch-hemiëdrische Krystalle gültigen Formeln — welche auch auf den hemimorphen Turmalin anwendbar sind — verweise ich auf die gelegentlich der Untersuchung des Kalkspaths gegebene Zusammenstellung[1]).

Hier sei nur noch der Ausdruck für den Dehnungscoefficienten E und den Drillungscoefficienten T angeführt; es gilt nämlich

$$1)\quad \mathrm{E} = s_{11}(1-\gamma^2)^2 + s_{33}\gamma^4 + (s_{44}+2s_{13})\gamma^2(1-\gamma^2) + 2s_{14}\beta\gamma(3\alpha^2-\beta^2),$$

$$2)\quad \begin{aligned} \mathrm{T} = {} & s_{44} + (2(s_{11}-s_{12})-s_{44})\gamma_2^2 + 4(s_{11}+s_{33}-s_{44}-2s_{13})\gamma^2\gamma_1^2 \\ & + 4s_{14}[(\gamma\beta_1+\beta\gamma_1)(3\alpha\alpha_1-\beta\beta_1)-\beta_2\gamma_2]. \end{aligned}$$

$E = 1/\mathrm{E}$, $T = 1/\mathrm{T}$ sind die bezüglichen Dehnungs- und Drillungswiderstände.

Aus den obigen allgemeinen Werthen folgen die für die beobachteten Stäbchen gültigen speciellen:

$$3)\quad \begin{aligned} & \mathrm{E}_0 = s_{33},\ \mathrm{E}_{\pm 45} = \tfrac{1}{4}(s_{11}+s_{33}+s_{44}+2(s_{13}\mp s_{14})),\ \mathrm{E}_{90} = \mathrm{E}'_{90} = s_{11}, \\ & \mathrm{T}_{90} = 2(s_{11}-s_{12}),\ \mathrm{T}'_{90} = s_{44}. \end{aligned}$$

1) W. Voigt, Gött. Nachr. v. 1889, No. 19, p. 483. Dort finden sich alle Formeln, auf welche im Folgenden Bezug genommen wird.

Sie gestatten die Bestimmung der s_{hk} oder „Elasticitätsmoduln" aus den beobachteten Deformationscoefficienten E und T; aus ihnen folgen dann die eigentlichen Elasticitäts-Constanten c_{hk} nach den Formeln:

$$\begin{aligned} c_{11}+c_{12} &= \frac{s_{33}}{s_{33}(s_{11}+s_{12})-2s_{13}^2}, & c_{11}-c_{12} &= \frac{s_{44}}{s_{44}(s_{11}-s_{12})-2s_{14}^2}, \\ c_{13} &= \frac{-s_{13}}{s_{33}(s_{11}+s_{12})-2s_{13}^2}, & c_{14} &= \frac{-s_{14}}{s_{44}(s_{11}-s_{12})-2s_{14}^2}, \\ c_{33} &= \frac{s_{11}+s_{12}}{s_{33}(s_{11}+s_{12})-2s_{13}^2}, & c_{44} &= \frac{s_{11}-s_{12}}{s_{44}(s_{11}-s_{12})-2s_{14}^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Die folgenden Beobachtungstabellen sind in derselben Anordnung und Bezeichnung aufgestellt, wie die entsprechenden in meinen früheren Arbeiten. Die Einheiten der Längen L des Stäbchens sind Millimeter, die der Breiten B und Dicken D Trommeltheile des Sphärometers gleich 1/992,6 mm. Die Art und Weise, wie die Beobachtungen der Dimensionen verwerthet sind, ist früher auseinandergesetzt worden.

Die Bestimmung der Dimensionen und eines Theiles der Biegungen hat, wie schon früher, Herr Dr. Drude ausgeführt.

Dimensionen.

I(0°) No. 1. $D = 900 + \delta$

$\delta =$	106,9	100,7	96,0	95,1	97,9	104,0	111,9
	108,1	101,5	97,5	97,2	99,8	105,4	112,9
	108,0	101,7	97,0	97,1	99,3	105,4	112,6
	114,8	103,4	99,8	98,8	101,7	107,8	116,1
Mittel	111,9	101,8	97,6	97,1	99,7	105,6	113,4
ber.	110,6	102,7	98,1	97,0	99,3	105,1	114,4

$\delta_0 = 97,0$, $\delta_1 = 0,62$, $\delta_2 = 1,72$.

$B = 5700 + \beta$

$\beta =$	59	79	98	123	149	178	199
	61	79	97	118	146	180	199
Mittel	60	79	98	120	147	179	199

I(0°) No. 2. $D = 900 + \delta$

$\delta =$	117,5	109,3	101,6	98,6	99,4	102,3	108,5
	118,3	110,3	104,4	99,7	100,3	103,4	108,2
	118,8	109,7	102,8	99,6	100,0	102,5	108,3
	121,2	109,1	103,5	100,2	99,5	102,8	108,1
Mittel	119,0	109,6	103,1	99,5	99,8	102,7	108,3
ber.	119,1	109,5	103,0	99,8	99,6	102,5	108,7

$\delta_0 = 99,8$, $\delta_1 = 1,74$, $\delta_2 = 1,58$.

$B = 5700 + \beta$

$\beta =$	45	68	88	107	136	164	193
	49	68	89	111	136	166	193
Mittel	47	68	89	109	136	165	193

I(0°) No. 3. $D = 700 + \delta$

$\delta =$	53,8	51,0	52,0	54,5	59,0	67,0	77,0
	56,0	54,9	54,9	57,3	63,0	70,3	79,5
	56,5	55,3	55,0	57,8	63,0	70,9	80,2
	59,0	57,5	58,0	61,1	67,0	74,5	82,7
Mittel	56,4	54,7	55,0	57,7	63,0	70,7	79,9
ber.	56,5	54,6	55,0	57,8	63,0	70,4	80,3

$\delta_0 = 57,8$, $\delta_1 = 3,96$, $\delta_2 = 1,18$

$B = 5400 + \beta$

$\beta =$	36	46	54	63	68	75	81
	38	47	55	62	70	76	79
Mittel	37	46	55	62	69	76	80

I(0°) No. 4. $D = 900 + \delta$

$\delta =$	79,8	80,2	80,1	85,3	92,2
	88,0	87,2	88,0	93,1	99,0
	90,3	90,2	89,9	95,8	100,5
	97,5	96,6	97,4	103,1	109,3
Mittel	88,9	88,5	88,8	94,3	100,2
ber.	89,4	87,4	89,2	93,6	100,8

$\delta_0 = 89{,}2, \ \delta_1 = 2{,}85, \ \delta_2 = 1{,}47.$

$B = 5400 + \beta$

$\beta =$	56	69	82	93	113
	58	71	86	95	108
Mittel	57	70	84	94	111

I(+ 45°) No. 1. $D = 700 + \delta$

$\delta =$	71,0	74,5	78,6	83,5	90,5
	74,2	75,5	81,0	86,0	92,2
	72,8	76,6	80,5	84,8	92,9
	73,0	76,3	80,9	85,9	95,2
Mittel	72,8	75,7	80,2	85,0	92,7
ber.	72,7	75,7	80,0	85,5	92,3

$\delta_0 = 80{,}0 \ \delta_1 = 4{,}9, \ \delta_2 = 0{,}62.$

$B = 4300 + \beta$

$\beta =$	67	75	80	87	97
	69	74	82	88	102
Mittel	68	75	81	87	100

I(+ 45°) No. 2. $D = 700 + \delta$

$\delta =$	81,9	82,1	81,9	84,0	88,0
	83,8	84,8	85,2	85,9	91,7
	85,0	85,6	84,6	87,0	90,7
	87,0	87,1	87,2	89,0	93,3
Mittel	84,4	84,9	84,7	86,5	90,9
ber.	85,1	84,1	84,8	86,9	90,5

$\delta_0 = 84{,}8, \ \delta_1 = 1{,}35, \ \delta_2 = 0{,}74$

$B = 4300 + \beta$

$\beta =$	83	89	96	106	115
	83	90	98	106	116
Mittel	83	90	97	106	115

I(+ 45°) No. 3. $D = 700 + \delta$

$\delta =$	91,0	90,0	89,0	90,4	92,2
	91,9	90,0	92,0	91,0	96,8
	92,8	91,7	91,4	90,7	93,5
	92,4	90,2	90,8	92,4	96,3
Mittel	92,0	90,5	90,8	91,1	94,7
ber.	91,9	90,6	90,6	91,8	94,1

$\delta_0 = 90{,}6, \ \delta_1 = 0{,}55, \ \delta_2 = 0{,}61.$

$B = 4300 + \beta$

$\beta =$	77	84	92	101	110
	78	87	93	102	109
Mittel	77	86	93	101	109

I(+ 45°) No. 4. $D = 700 + \delta$

$\delta =$	75,7	75,7	77,2	79,2	83,2
	80,1	79,8	80,5	85,0	88,0
	81,3	80,5	81,4	85,1	88,9
	85,1	85,0	85,5	88,3	91,7
Mittel	80,5	80,3	81,1	84,4	88,0
ber.	80,6	80,1	81,2	84,0	88,3

$\delta_0 = 81{,}25, \ \delta_1 = 1{,}93, \ \delta_2 = 0{,}80.$

$B = 4300 + \beta$

$\beta =$	69	73	79	86	92
	66	71	75	82	90
Mittel	67	72	77	84	91

I(− 45°) No. 1. $D = 700 + \delta$

$\delta =$	33,8	35,1	38,9	44,0	49,9
	50,2	51,0	55,2	60,8	65,3
	50,0	51,4	54,8	60,0	66,0
	65,9	65,6	69,0	75,0	81,2
Mittel	50,0	50,8	54,5	60,0	65,6
ber.	49,7	51,3	54,5	59,4	65,9

$\delta_0 = 54{,}5, \ \delta_1 = 4{,}1, \ \delta_2 = 0{,}83.$

$B = 4300 + \beta$

$\beta =$	29	37	45	58	68
	29	39	45	56	65
Mittel	29	38	45	57	67

I(—45°) No. 2. $D = 700 + \delta$

$\delta =$	48,4	51,5	56,7	63,1	73,4
	54,0	58,5	62,5	69,7	80,0
	55,9	58,3	64,0	71,6	81,8
	60,3	64,3	68,6	75,8	85,9
Mittel	54,6	58,1	62,9	70,0	80,3
ber.	54,9	57,7	62,9	70,3	80,1

$\delta_0 = 62{,}9$, $\delta_1 = 6{,}3$, $\delta_2 = 1{,}14$.

$B = 4300 + \beta$

$\beta =$	62	56	45	37	30
	61	54	46	36	29
Mittel	61	55	46	37	29

I(—45°) No. 3. $D = 700 + \delta$

$\delta =$	72,5	74,0	77,8	82,6	87,1
	73,9	75,7	78,5	83,3	90,0
	75,0	77,0	80,2	85,0	93,0
	77,2	79,9	82,0	86,0	92,0
Mittel	74,6	76,6	79,6	84,2	90,5
ber.	74,8	76,5	79,6	84,3	90,4

$\delta_0 = 79{,}6$, $\delta_1 = 3{,}9$, $\delta_2 = 0{,}74$.

$B = 4300 + \beta$

$\beta =$	71	60	51	43	36
	72	62	52	45	38
Mittel	71	61	52	44	37

I(—45°) No. 4. $D = 700 + \delta$

$\delta =$	76,9	76,9	76,0	80,8	85,3
	84,1	83,3	84,5	87,0	90,2
	83,7	83,1	84,2	86,5	90,0
	83,8	84,0	85,3	88,8	90,5
Mittel	82,1	81,8	83,0	85,8	89,0
ber.	82,0	81,9	83,1	85,5	89,3

$\delta_0 = 83{,}05$, $\delta_1 = 1{,}82$, $\delta_2 = 0{,}64$.

$B = 4300 + \beta$

$\beta =$	34	41	49	58	70
	32	41	48	57	67
Mittel	33	41	49	59	69

II(90°) No. 2. $D = 600 + \delta$

$\delta =$	76,1	78,0	81,4	82,9	86,2
	77,8	80,1	81,3	84,3	87,2
	78,6	79,5	81,6	84,3	87,4
	80,6	81,6	83,2	85,5	88,2
Mittel	78,3	79,8	81,9	84,2	87,2
ber.	78,3	79,8	81,9	84,3	87,1

$\delta_0 = 81{,}85$, $\delta_1 = 2{,}22$, $\delta_2 = 0{,}21$.

$B = 4300 + \beta$

$\beta =$	42	44	35	32	27
	40	47	33	33	30
Mittel	41	46	34	32	29

II(90°) No. 3. $D = 600 + \delta$

$\delta =$	78,2	80,0	81,3	82,1	83,0
	78,4	80,6	82,2	83,4	83,6
	78,6	80,7	82,8	83,5	83,5
	79,4	82,1	83,1	83,9	84,8
Mittel	78,7	80,8	82,3	83,2	83,7
ber.	78,7	80,8	82,3	83,2	83,7

$\delta_0 = 82{,}3$, $\delta_1 = 1{,}23$, $\delta_2 = -0{,}28$.

$B = 4200 + \beta$

$\beta =$	88	98	102	107	111
	90	100	105	107	112
Mittel	89	99	104	107	111

II(90°) No. 4. $D = 700 + \delta$

$\delta =$	92,6	96,0	100,1	105,8	110,2
	98,0	101,2	105,3	108,4	112,2
	99,0	103,4	108,0	112,2	114,3
	103,5	108,2	112,0	116,3	119,7
Mittel	98,3	102,2	106,3	110,7	114,1.

$B = 5000 + \beta$

$\beta =$	41	43	43	42	40
	42	44	44	42	39
Mittel	42	43	43	42	40

II(90°) No. 5. $D = 800 + \delta$ $B = 5000 + \beta$

$\delta =$	22,0	23,6	25,0	27,1	27,3
	24,0	25,0	26,1	27,4	30,2
	25,2	26,4	28,3	28,8	30,6
	23,9	26,4	28,1	28,9	30,7
Mittel	23,8	25,3	26,9	28,0	29,7.

$\beta =$	56	56	58	56	53
	58	58	59	58	55
Mittel	57	57	58	57	54

II′(90°) No. 1. $D = 600 + \delta$ $B = 5100 + \beta$

$\delta =$	80,1	82,6	84,5	87,8	93,3
	83,3	84,8	86,2	89,5	94,0
	83,3	84,8	86,8	89,5	94,0
	84,8	86,7	87,6	91,3	96,3
Mittel	82,9	84,7	86,3	89,5	94,4
ber.	83,4	84,3	86,4	89,7	94,2

$\delta_0 = 86{,}4$, $\delta_1 = 2{,}7$, $\delta_2 = 0{,}60$.

$\beta =$	21	29	42	49	58
	23	35	44	51	60
Mittel	22	32	43	50	59

II′(90°) No. 2. $D = 600 + \delta$ $B = 5100 + \beta$

$\delta =$	86,0	86,3	88,1	90,8	93,8
	89,1	89,0	90,4	92,2	95,4
	88,4	88,5	89,4	91,7	94,9
	88,9	90,3	91,4	92,7	96,0
Mittel	88,1	88,5	89,8	91,8	95,0
ber.	88,1	88,5	89,8	91,9	94,9

$\delta_0 = 89{,}8$, $\delta_1 = 1{,}7$, $\delta_2 = 0{,}44$.

$\beta =$	28	39	47	57	65
	28	39	49	56	65
Mittel	28	39	48	56	65

II′(90°) No. 3. $D = 600 + \delta$ $B = 5100 + \beta$

$\delta =$	91,5	90,9	92,3	94,7	98,7
	90,9	91,0	92,8	94,9	98,5
	91,9	90,9	92,8	95,6	98,0
	91,7	91,2	92,8	94,7	98,7
Mittel	91,5	91,0	92,7	95,0	98,5
ber.	91,1	91,4	92,7	95,0	98,3

$\delta_0 = 92{,}7$, $\delta_1 = 1{,}8$, $\delta_2 = 0{,}52$.

$\beta =$	69	62	55	51	36
	74	63	57	49	31
Mittel	72	62	56	50	34

Biegungen.

Die Einheiten für die Größe der Biegungen η sind Millimeter der Beobachtungsscala, welche je 0,0002954 mm am Apparat entsprechen. Durch Combination der Beobachtung desselben Stäbchens in zwei Längen ist die Eindrückung η' der Schneiden bestimmt; (η') ist der der Berechnung zum Grunde gelegte Mittelwerth aus den auf verschiedene Stäbchen derselben Gattung bezüglichen Resultaten. P ist die in Grammen ausgedrückte Belastung.

Die Beobachtungen sind bei etwa 18° C. angestellt.

I(0°) No. 1. $L = 60{,}07$, $B = 5825$, $D = 998{,}6$, $P = 105$,

1. Lage $\eta = 198{,}4 \quad 198{,}4 \quad 198{,}4$
2. Lage $\eta = 198{,}6 \quad 198{,}7 \quad 198{,}7$

$\eta_{105} = 198{,}5$, $(\eta') = 1{,}05$, $E = 16330000$.

I(0°) No. 2. $L = 60{,}07$, $B = 5814$, $D = 1001{,}2$, $P = 105$,
1. Lage $\eta = 197{,}8 \quad 197{,}7 \quad 197{,}8$
2. Lage $\eta = 197{,}3 \quad 197{,}3 \quad 197{,}2$
$\eta_{105} = 197{,}5$, $(\eta') = 1{,}05$, $E = 16320000$.

I(0°) No. 3. $L = 14{,}07$, $B = 5461$, $D = 758{,}8$, $P = 105$,
1. Lage $\eta = 7{,}2 \quad 7{,}2 \quad 7{,}3$
2. Lage $\eta = 7{,}2 \quad 7{,}3 \quad 7{,}2$
$\eta_{105} = 7{,}2$, $\eta' = 1{,}03$.
$L = 45{,}07$,
1. Lage $\eta = 203{,}6 \quad 203{,}8 \quad 203{,}7$
2. Lage $\eta = 203{,}6 \quad 203{,}6 \quad 203{,}6$
$\eta_{105} = 203{,}65$, $(\eta') = 1{,}05$, $E = 16310000$

I(0°) No. 4. $L = 14{,}07$, $B = 5483$, $D = 989{,}9$, $P = 105$,
1. Lage $\eta = 4{,}0 \quad 4{,}0 \quad 3{,}9$
2. Lage $\eta = 3{,}9 \quad 3{,}8 \quad 3{,}9$
$\eta_{105} = 3{,}9$, η' 1,08.
$L = 40{,}07$,
1. Lage $\eta = 66{,}1 \quad 66{,}1 \quad 66{,}2$
2. Lage $\eta = 66{,}1 \quad 66{,}3 \quad 66{,}1$
$\eta_{105} = 66{,}15$, $(\eta') = 1{,}05$, ($E = 16030000$.) 1)
Gesammtmittel $E_0 = 16330000$, $E_0 = 6{,}124 . 10^{-8}$
wahrscheinlicher Fehler ± 4000, $\pm 0{,}002$.

I(+45°) No. 1. $L = 28{,}07$, $B = 4382$, $D = 780{,}2$ $P = 135$,
1. Lage $\eta = 70{,}4 \quad 70{,}5 \quad 70{,}5$
2. Lage $\eta = 70{,}6 \quad 70{,}7 \quad 70{,}6$
$\eta_{135} = 70{,}55$, $(\eta') = 1{,}8$, $E = 17150000$.

I(+45°) No. 2. $L = 14{,}07$, $B = 4398$, $D = 785{,}1$, $P = 135$,
1. Lage $\eta = 10{,}4 \quad 10{,}7 \quad 10{,}6 \quad 10{,}6$
2. Lage $\eta = 10{,}4 \quad 10{,}5 \quad 10{,}7 \quad 10{,}8$
$\eta_{135} = 10{,}6$, $\eta' = 2{,}1$.
$L = 30{,}07$,
1. Lage $\eta = 84{,}8 \quad 84{,}8 \quad 84{,}9$
2. Lage $\eta = 84{,}7 \quad 84{,}9 \quad 84{,}9$
$\eta_{135} = 84{,}83$, $(\eta') = 1{,}8$, $E = 17070000$.

I(+45°) No. 3. $L = 14{,}07$, $B = 4393$, $D = 790{,}8$, $P = 135$,
1. Lage $\eta = 10{,}1 \quad 9{,}9 \quad 10{,}1 \quad 10{,}1$
2. Lage $\eta = 10{,}3 \quad 9{,}8 \quad 9{,}9 \quad 9{,}9$
$\eta_{135} = 10{,}02$, $\eta' = 1{,}7$.
$L = 30{,}07$,
1. Lage $\eta = 82{,}9 \quad 82{,}9 \quad 82{,}8$
2. Lage $\eta = 82{,}5 \quad 82{,}4 \quad 82{,}3$
$\eta_{135} = 82{,}63$, $(\eta') = 1{,}8$, $E = 17180000$.

---

1) Von der Berechnung des Mittelwerthes von E ausgeschlossen, da im Innern des Stäbchens kleine Sprünge sichtbar waren.

I(+45°) No. 4. $L = 14{,}07$, $B = 4378$, $D = 781{,}5$, $P = 135$,

1. Lage $\eta = 10{,}3 \quad 10{,}3 \quad 10{,}5$
2. Lage $\eta = 10{,}4 \quad 10{,}3 \quad 10{,}3$

$\eta_{135} = 10{,}35$, $\eta' = 1{,}7$.

$L = 25{,}07$,

1. Lage $\eta = 50{,}4 \quad 50{,}5 \quad 50{,}5$
2. Lage $\eta = 50{,}5 \quad 50{,}5 \quad 50{,}5$

$\eta_{135} = 50{,}5$, $(\eta') = 1{,}8$, $\mathbf{E} = 17170000$.

Gesammtmittel $\mathbf{E}_{+45} = 17160000$, $\mathrm{E}_{+45} = 5{,}828 . 10^{-8}$

wahrscheinlicher Fehler ± 18000. $\pm 0{,}006$.

(−45°) No. 1. $L = 34{,}07$, $B = 4347$, $D = 754{,}8$ $P = 135$,

1. Lage $\eta = 152{,}3 \quad 152{,}3 \quad 152{,}5$
2. Lage $\eta = 152{,}3 \quad 152{,}3 \quad 152{,}1$

$\eta_{135} = 152{,}3$, $(\eta') = 1{,}76$, $\mathbf{E} = 15600000$.

I(−45°) No. 2. $L = 29{,}07$, $B = 4346$, $D = 763{,}4$, $P = 135$,

1. Lage $\eta = 92{,}4 \quad 92{,}4 \quad 92{,}5$
2. Lage $\eta = 92{,}6 \quad 92{,}6 \quad 92{,}6$

$\eta_{135} = 92{,}5$, $(\eta') = 1{,}76$, $\mathbf{E} = 15550000$,

I(−45°) No. 3. $L = 14{,}07$, $B = 4350$, $D = 779{,}9$, $P = 135$,

1. Lage $\eta = 11{,}0 \quad 11{,}0 \quad 11{,}1$
2. Lage $\eta = 11{,}8 \quad 11{,}7 \quad 11{,}7$

$\eta_{135} = 11{,}4$, $\eta' = 1{,}79$.

$L = 32{,}07$,

1. Lage $\eta = 114{,}8 \quad 114{,}9 \quad 114{,}8$
2. Lage $\eta = 116{,}1 \quad 116{,}4 \quad 116{,}3$

$\eta_{135} = 115{,}55$ $(\eta') = 1{,}76$ $\mathbf{E} = 15590000$.

I(−45°) No. 4. $L = 14{,}07$ $B = 4349$, $D = 783{,}4$, $P = 135$,

1. Lage $\eta = 11{,}0 \quad 10{,}9 \quad 11{,}1$
2. Lage $\eta = 11{,}7 \quad 11{,}4 \quad 11{,}5$

$\eta_{135} = 11{,}3$, $\eta' = 1{,}73$.

$L = 34{,}07$

1. Lage $\eta = 137{,}9 \quad 137{,}8 \quad 137{,}9$
2. Lage $\eta = 137{,}4 \quad 137{,}7 \quad 137{,}6$

$\eta_{135} = 137{,}7$ $(\eta') = 1{,}76$, $\mathbf{E} = 15490000$.

Gesammtmittel $\mathbf{E}_{-45} = 15560000$, $\mathrm{E}_{-45} = 6{,}427 . 10^{-8}$

wahrscheinlicher Fehler ± 17000. $\pm 0{,}007$.

II (90°) No. 2. $L = 14{,}07$, $B = 4337$, $D = 682{,}0$, $P = 105$,

1. Lage $\eta = 8{,}3 \quad 8{,}4 \quad 8{,}4$
2. Lage $\eta = 8{,}5 \quad 8{,}3 \quad 8{,}3$

$\eta_{105} = 8{,}4$, $\eta' = 1{,}56$.

$L = 23{,}07$,

1. Lage $\eta = 31{,}7 \quad 31{,}7 \quad 31{,}7$
2. Lage $\eta = 31{,}8 \quad 31{,}7 \quad 31{,}6$

$\eta_{105} = 31{,}7$, $(\eta') = 1{,}5$, $\mathbf{E} = 25490000$.

II(90°) No. 3. $L = 14{,}07$, $B = 4302$, $D = 682{,}2$, $P = 105$,
1. Lage $\eta = 8{,}3 \quad 8{,}2 \quad 8{,}2$
2. Lage $\eta = 8{,}4 \quad 8{,}3 \quad 8{,}4$
$\eta_{105} = 8{,}3$, $\eta' = 1{,}42$.
$L = 23{,}07$,
1. Lage $\eta = 31{,}9 \quad 31{,}8 \quad 31{,}9$
2. Lage $\eta = 31{,}7 \quad 31{,}7 \quad 31{,}7$
$\eta_{105} = 31{,}77$, $(\eta') = 1{,}5$, $\quad E = 25610000$.

II'(90°) No. 1. $L = 14{,}07$, $B = 5141$, $D = 686{,}6$, $P = 105$,
1. Lage $\eta = 6{,}8 \quad 6{,}9 \quad 6{,}7$
2. Lage $\eta = 6{,}8 \quad 6{,}7 \quad 6{,}8$
$\eta_{105} = 6{,}8$, $\eta' = 1{,}15$.
$L = 27{,}07$,
1. Lage $\eta = 41{,}5 \quad 41{,}4 \quad 41{,}4$
2. Lage $\eta = 41{,}4 \quad 41{,}4 \quad 41{,}3$
$\eta_{105} = 41{,}40$, $\eta' = 1{,}19$, $\quad E = 25590000$.

II'(90°) No. 2. $L = 14{,}07$, $B = 5148$, $D = 690{,}0$, $P = 105$,
1. Lage $\eta = 6{,}9 \quad 6{,}9 \quad 6{,}8$
2. Lage $\eta = 6{,}7 \quad 6{,}6 \quad 6{,}6$
$\eta_{105} = 6{,}75$, $\eta' = 1{,}23$.
$L = 28{,}07$,
1. Lage $\eta = 44{,}9 \quad 44{,}9 \quad 44{,}8$
2. Lage $\eta = 45{,}4 \quad 45{,}3 \quad 45{,}1$
$\eta_{105} = 45{,}07$, $(\eta') = 1{,}19$, $\quad E = 25710000$.

II'(90°) No. 3. $L = 27{,}07$, $B = 5155$, $D = 692{,}9$, $P = 105$,
1. Lage $\eta = 40{,}4 \quad 40{,}4 \quad 40{,}4$
2. Lage $\eta = 40{,}5 \quad 40{,}5 \quad 40{,}5$
$\eta_{105} = 40{,}45$, $(\eta') = 1{,}19$, $\quad E = 25430000$.
Gesammtmittel $E_{90} = 25570000$, $E_{90} = 3.911 . 10^{-8}$
wahrscheinlicher Fehler ± 34000. $\quad \pm 0{,}005$.

Die vorstehenden Werthe sind nun noch deswegen zu corrigiren, daß die beobachteten Stäbchen nicht genau die vorausgesetzten Orientirungen besaßen. Für die Gattungen I(0°) und II(90°) hat ein Fehler der Richtung der Längsaxe nur einen Einfluß von zweiter Ordnung, aber bei den Gattungen I(+45°) und I(−45°) kommt er wesentlich in Betracht.

Da Turmalin keine deutliche Spaltbarkeit besitzt, so war der beste Weg, den Fehler der Orientirung zu bestimmen, der, mit dem Anlegegoniometer den Winkel der für die Herstellung der Stäbchen durch eine parallel der Axe hergestellte Platte des Krystalles ausgeführten Schnitte gegen eine Längskante zu messen; dabei ist vorausgesetzt, daß die Orientirung der Stäbchen durch das Abschleifen nicht merklich geändert ist — eine Annahme, die bei einem so harten Material wie Turmalin nahezu erfüllt gewesen sein wird.

Die angestellte Messung ergab für die Gattung $\mathrm{I}(+45^0)$ einen Winkel von

$$+44,^05,$$

für die Gattung $\mathrm{I}(-45^0)$ einen Winkel von

$$-44,^09$$

zwischen der Längsaxe des Stäbchens und der Hauptaxe des Krystalles. Dem entspricht eine Correction von $+0{,}024.10^{-8}$ für die erstere, von $-0{,}003.10^{-8}$ für die letztere Gattung, so daß nunmehr folgendes System von Werthen resultirt:

$$\begin{aligned} E_0 &= (6{,}124 \pm 0{,}002).10^{-8}, \\ E_{+45} &= (5{,}852 \pm 0{,}006).10^{-8}, \\ E_{-45} &= (6{,}424 \pm 0{,}007).10^{-8}, \\ E_{90} &= (3{,}911 \pm 0{,}005).10^{-8}. \end{aligned}$$

Aus ihm folgen die Werthe der in Formel (1) auftretenden Aggregate der s_{hk}; es ist nämlich:

$$5) \quad \begin{aligned} s_{11} &= (\ 3{,}911 \pm 0{,}005).10^{-8}, \\ s_{33} &= (\ 6{,}124 \pm 0{,}002).10^{-8}, \\ s_{14} &= (\ 0{,}572 \pm 0{,}009).10^{-8}, \\ s_{44}+2s_{13} &= (14{,}517 \pm 0{,}014).10^{-8}. \end{aligned}$$

Demgemäß lautet jetzt das allgemeine Gesetz des Dehnungscoefficienten für Turmalin:

$$6) \quad E = \big(3{,}911.(1-\gamma^2)^2 + 6{,}124.\gamma^4 + 14{,}517\,\gamma^2(1-\gamma^2) + 1{,}144.\beta\gamma(3\alpha^2-\beta^2)\big).10^{-8}.$$

Setzt man hierin

$$\alpha = 0, \quad \gamma = \cos\psi, \quad \beta = \sin\psi,$$

so erhält man das Entsprechende für die Symmetrieebene des Krystalles; Maxima und Minima liegen etwa bei den Winkeln

$$\psi_{\mathrm{I}} = -35^0, \quad \psi_{\mathrm{II}} = 0^0, \quad \psi_{\mathrm{III}} = 25^0, \quad \psi_{\mathrm{IV}} = 78{,}5^0$$

und haben die Werthe:

$$E_{\mathrm{I}} = 6{,}56.10^{-3}, \quad E_{\mathrm{II}} = 6{,}12.10^{-3}, \quad E_{\mathrm{III}} = 6{,}31.10^{-8}, \quad E_{\mathrm{IV}} = 3{,}96.10^{-8}.$$

Figur 1 auf der beigegebenen Tafel stellt den Verlauf von E in der Symmetrieebene oder dem ersten Hauptschnitt dar.

Setzt man in (6)

$$\beta = 0, \quad \gamma = \cos\psi, \quad \alpha = \sin\psi,$$

so resultirt das Gesetz für die Ebene normal zur Symmetrieebene oder den zweiten Hauptschnitt. Figur 2 giebt die entsprechende Curve.

Drillungen.

Die Drillungsbeobachtungen stießen bei den Stäbchen II(90°), deren Breitseiten normal zur Krystallaxe liegen, auf eine eigenthümliche Schwierigkeit.

An der einen Seite des Krystalles, dessen Querschnitt, wie oben gesagt, angenähert ein gleichseitiges Dreieck war, befand sich, wie es schien auf der ganzen Länge, eine etwas dunkler gefärbte Partie, welche gegen die Hauptmasse des Krystalles durch einige Flächen des hexagonalen Prismas begrenzt war. Längs dieser Flächen scheint eine Störung der Fortwachsung stattgefunden zu haben und zwar war besonders an dem einen Ende des Krystalles die Verbindung eine unvollkommene, denn die erste normal zur Krystallaxe abgeschnittene Platte zersprang von selbst in zwei Theile längs dieser Grenze. Aus einer zweiten derartigen Platte wurden die ersten drei Stäbchen der Gattung II(90°) hergestellt, die beim Schleifen und Poliren den Zusammenhang behielten. No. 2 und 3 gaben bei den Biegungsbeobachtungen gut übereinstimmende Werthe für E, No. 1 wurde seiner geringen Länge wegen nicht gebogen.

Bei der Drillung gab No. 3 den größten Werth für T, No. 2 einen viel kleineren und No. 1 zersprang längs einer der beschriebenen Grenzen bei einer Belastung, welche die beiden anderen Stäbchen bereits ausgehalten hatten. Da ich überdies in No. 2 mit der Loupe eine Störung in jener Grenze zu sehen glaubte, in No. 3 nicht, so nahm ich an, daß dieselbe von dem einen verbrochenen Ende des Krystalles her bis etwa in die Tiefe von No. 2 mit abnehmender Stärke sich fortgesetzt habe.

Um sichere Werthe für T zu erhalten, ließ ich aus einer dritten Platte parallel einer andern Kante noch drei Stäbchen (No. 4, 5, 6) herstellen. Freilich waren in denselben kleine Sprünge vorhanden, welche No. 6 völlig, No. 4 und 5 fast zur Hälfte unbrauchbar machten, aber die Reste gestatteten noch die Beobachtung und gaben mit No. 3 gut stimmende Werthe, welche, da die Stäbchen sichtlich ziemlich homogen waren, als die wahren der bezüglichen Orientirung entsprechenden zu betrachten sind. No. 3 und 5 als regelmäßiger in der Form sind je zwei Mal, No. 4 als unregelmäßiger nur ein Mal beobachtet.

Die Stäbchen der Gattung II′(90°) waren in der Farbe völlig homogen und gaben zu keinen Bedenken Anlaß.

Bei den Drillungsbeobachtungen war der Abstand zwischen Spiegel und Scala 5174 mm, die Millimeter der Scala waren um 0,00374 zu groß; der mittlere Hebelarm, an welchem die Belastung $G+P$ wirkte (G das Gewicht der Waagschaale), hatte die Länge von 36,80 mm. Die beobachteten Verschiebungen σ sind bereits von der Tangente auf den Bogen reducirt; ρ ist die Größe der Axenreibung in Millimetern der Scala.

Bezüglich der Berechnung von T und T' verweise ich auf die früheren Arbeiten.

II(90°) No. 2. $L = 18{,}89$, $B = 4337$, $D = 682{,}0$,

rR.	$G + 50$,	$\sigma = 95{,}6$	95,5	95,4	95,5,	$\rho = 2{,}2$
	$G + 25$,	$\sigma = 51{,}9$	51,7	51,3	51,5,	$\rho = 1{,}7$
	G ,	$\sigma = 7{,}8$	7,8	7,7	7,8,	$\rho = 2{,}1$
lR.	$G + 50$,	$\sigma = 96{,}5$	96,5	96,3	96,6,	$\rho = 0{,}8$
	$G + 25$,	$\sigma = 52{,}5$	52,5	52,3	52,4,	$\rho = 0{,}9$
	G ,	$\sigma = 8{,}7$	8,6	8,6	8,7,	$\rho = 0{,}9$

$\sigma_{50} = 87{,}73$ ($T' = 9870000$.)[1]

$L = 18{,}07$

lR.	$G + 50$,	$\sigma = 92{,}4$	92,3	92,1	92,3,	$\rho = 2{,}4$
	$G + 25$,	$\sigma = 50{,}5$	50,4	50,4	50,2,	$\rho = 2{,}2$
	G ,	$\sigma = 8{,}2$	8,2	8,0		$\rho = 2{,}0$

$\sigma_{50} = 84{,}33$ ($T' = 9820000$.)[1]

II(90°) No. 3. $L = 20{,}95$, $B = 4303$, $D = 682{,}1$,

rR.	$G + 50$,	$\sigma = 103{,}0$	102,8	102,8	102,6,	$\rho = 2{,}7$
	$G + 25$,	$\sigma = 55{,}2$	55,3	55,2	55,0,	$\rho = 3{,}2$
	G ,	$\sigma = 7{,}9$	8,1	8,0		$\rho = 3{,}3$
lR.	$G + 50$,	$\sigma = 103{,}7$	103,7	103,9	103,8,	$\rho = 2{,}4$
	$G + 25$,	$\sigma = 56{,}0$	56,1	55,9	56,1,	$\rho = 2{,}6$
	G ,	$\sigma = 8{,}4$	8,5	8,3	,	$\rho = 2{,}7$

$\sigma_{50} = 95{,}00$ $T' = 10190000$.

$L = 19{,}17$

lR.	$G + 50$,	$\sigma = 94{,}5$	94,8	94,5	94,7,	$\rho = 4{,}2$
	$G + 25$,	$\sigma = 50{,}8$	51,0	50,9	50,8,	$\rho = 4{,}4$
	G ,	$\sigma = 6{,}8$	6,8	6,5	,	$\rho = 4{,}6$
rR.	$G + 50$,	$\sigma = 96{,}2$	95,6	95,4	95,5,	$\rho = 1{,}8$
	$G + 25$,	$\sigma = 51{,}8$	51,8	51,7	51,7,	$\rho = 2{,}4$
	G ,	$\sigma = 8{,}0$	7,9	7,9	,	$\rho = 2{,}5$

$\sigma_{50} = 87{,}90$ $T' = 10070000$.

II(90°) No. 4. $L = 11{,}93$, $B = 5042$, $D = 806{,}3$

rR.	$G + 40$,	$\sigma = 24{,}7$	24,6	24,7	24,7,	$\rho = 0{,}7$
	$G + 20$,	$\sigma = 13{,}6$	13,5	13,5	13,5,	$\rho = 0{,}6$
	G ,	$\sigma = 2{,}5$	2,7	2,6	,	$\rho = 0{,}7$
lR.	$G + 40$,	$\sigma = 25{,}1$	25,2	25,1	25,0,	$\rho = 0{,}2$
	$G + 20$,	$\sigma = 13{,}9$	13,9	13,8	13,9,	$\rho = 0{,}2$
	G ,	$\sigma = 2{,}8$	2,7	2,7	,	$\rho = 0{,}2$

$\sigma_{40} = 22{,}37$ $T' = 10200000$.

---

1) Von der Berechnung des Gesammtmittels nach Obigem ausgeschlossen.

II(90°) No. 5. $L = 11{,}74$, $B = 5057$, $D = 826{,}7$

lR.	$G + 50$,	$\sigma =$ 28,0	27,8	27,9	27,8,	$\rho =$ 0,5	
	$G + 25$,	$\sigma =$ 15,3	15,0	15,1	15,2,	$\rho =$ 0,5	
	G ,	$\sigma =$ 2,4	2,3	2,4	2,4,	$\rho =$ 0,6	
		$\sigma_{50} =$ 25,50					$T = 10210000$.

$L = 10{,}91$

lR.	$G + 40$,	$\sigma =$ 21,6	21,5	21,3	21,4,	$\rho =$ 0,6	
	$G + 20$,	$\sigma =$ 11,7	11,8	11,8	11,9.	$\rho =$ 0,5	
	G ,	$\sigma =$ 2,2	2,2	2,2	,	$\rho =$ 0,6	
rR.	$G + 40$,	$\sigma =$ 21,4	21,4	21,3	21.4,	$\rho =$ 0,4	
	$G + 20$,	$\sigma =$ 11,7	11,6	11,7	11,6,	$\rho =$ 0,4	
	G ,	$\sigma =$ 2,4	2,4	2,4	,	$\beta =$ 0,5	
		$\sigma_{40} =$ 19,09					$T = 10140000$.

Gesammtmittel $T_{90} = 10160000$, $\mathrm{T}_{90} = 9.843 \cdot 10^{-8}$

wahrscheinlicher Fehler ± 17000. $\pm 0{,}016$.

II′(90°) No. 1. $L = 22{,}68$, $B = 5142$, $D = 686{,}8$,

lR.	$G + 50$,	$\sigma =$ 132,8	132,9	132,7	132,9,	$\rho =$ 1,2	
	$G + 25$,	$\sigma =$ 72,2	71,8	72,0	72,1,	$\rho =$ 1,3	
	G ,	$\sigma =$ 11,5	11,4	11,5	11,6	$\rho =$ 1,7	
rR.	$G + 50$,	(gestörte Beobachtung)					
	$G + 25$,	$\sigma =$ 71,2	71,1	71,0	70,9,	$\rho =$ 4,2	
	G ,	$\sigma =$ 10,7	10,5	10,4	10,6,	$\rho =$ 4,3	
		$\sigma_{50} =$ 121,1					($T = 6668000$.)[1]

$L = 22{,}75$

rR.	$G + 50$,	$\sigma =$ 128,9	128,9	128,6	128,6,	$\rho =$ 5,8	
	$G + 25$,	$\sigma =$ 68,9	68,9	68,5	68,7,	$\rho =$ 6,3	
	G ,	$\sigma =$ 9,0	9,2	9,0	9,0,	$\rho =$ 6,5	
lR.	$G + 50$,	$\sigma =$ 131,1	131,1	131,1	131,3,	$\rho =$ 1,5	
	$G + 25$,	$\sigma =$ 71,2	71,4	71,3	71,3,	$\rho =$ 1,7	
	G ,	$\sigma =$ 11,3	11,2	11,3	,	$\rho =$ 2,0	
		$\sigma_{50} =$ 119,8					$T = 6763000$.

II′(90°) No. 2. $L = 23{,}84$, $B = 5148$, $D = 690{,}0$

lR.	$G + 50$,	$\sigma =$ 136,6	136,6	136,9	136,7,	$\rho =$ 0,2	
	$G + 25$,	$\sigma =$ 74,3	74,3	74,4	74,4,	$\rho =$ 0	
	G ,	$\sigma =$ 12,5	12,1	12,2	,	$\rho =$ 0	
rR.	$G + 50$,	$\sigma =$ 135,9	136,4	136,4	136,5,	$\rho =$ 1,3	
	$G + 25$,	$\sigma =$ 74,1	74,0	74,2	74,0,	$\rho =$ 1,5	
	G ,	$\sigma =$ 12,0	11,8	11,9	,	$\rho =$ 2,0	
		$\sigma_{50} =$ 124,3					$T = 6738000$.

II′(90°) No. 3. $L = 22{,}69$, $B = 5156$, $D = 692{,}9$

rR.	$G + 50$,	$\sigma =$ 127,8	128,0	127,8	127,8,	$\rho =$ 2,2	
	$G + 25$,	$\sigma =$ 69,5	69,2	69,4	69,4,	$\rho =$ 2,4	
	G ,	$\sigma =$ 10,6	10,8	10,7	10,7,	$\rho =$ 2,9	
lR.	$G + 50$,	$\sigma =$ 128,7	128,7	128,7	128,6,	$\rho =$ 0,6	
	$G + 25$,	$\sigma =$ 70,2	70,2	70,0	70,1,	$\rho =$ 0,7	
	G ,	$\sigma =$ 11,8	11,9	11,8	11,8,	$\rho =$ 0,7	
		$\sigma_{50} =$ 117,0					$T = 6725000$.

Gesammtmittel $T'_{90} = 6740000$, $\mathrm{T}'_{90} = 14{,}837 \cdot 10^{-8}$

wahrscheinlicher Fehler ± 9000, $\pm 0{,}019$.

1) Die Beobachtung war sichtlich durch mangelhaftes Einkitten des Stäbchens in den Fassungen gestört und ist von der Berechnung ausgeschlossen.

Eine Abweichung der Längsaxe der Stäbchen II (90°) und II′(90°) von der Richtung normal zur Symmetrieebene giebt nur einen Fehler zweiter Ordnung in den Werthen von T; dagegen hat ein Fehler in der Orientirung der Querdimensionen größeren Einfluß. Leider giebt es kein Mittel, deren Genauigkeit mit Schärfe zu prüfen, und man kann höchstens die Größenordnung der Unsicherheit schätzen, welche in Folge des erwähnten Umstandes den obigen Resultaten anhaftet.

Der Einfluß der Orientirung der Querdimensionen auf T folgt aus Formel (2), wenn man in ihr $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, $\gamma_2 = \cos\varphi$, $\beta_2 = \sin\varphi$ setzt, also bildet

$$7) \qquad (\mathrm{T}) = s_{44} + (2(s_{11} - s_{12}) - s_{44}) \cos^2\varphi - 4 s_{14} \sin\varphi \cos\varphi$$

und dies nach φ differentiirt. Man erhält so

$$8) \qquad \delta(\mathrm{T}) = \big(-(2(s_{11} - s_{12}) - s_{44}) \sin 2\varphi - 4 s_{14} \cos 2\varphi\big)\, \delta\varphi$$

und, wenn man berücksichtigt, daß

$$\text{für die Gattung II}\,(90^0)\ \varphi = 0$$
$$\text{für die Gattung II}'(90^0)\ \varphi = \frac{\pi}{2}$$

ist,

$$\delta\mathrm{T}_{90} = \delta\mathrm{T}'_{90} = -4 s_{14}\, \delta\varphi.$$

Bei Kalkspath blieb der Fehler $\delta\varphi$ laut der früher mitgetheilten Beobachtung unter 30′; bei Turmalin liegen die Verhältnisse in sofern noch günstiger, als die prismatische Form des Krystalles die Schnitte normal zur Axe mit großer Genauigkeit herzustellen gestattet. Macht man aber die ungünstige Annahme $\pm\,\delta\varphi = 30'$ $= 0{,}0088$, so ergiebt sich wegen $s_{14} = 0{,}572$ der absolute Werth von $\delta\mathrm{T} = 0{,}020$, also nur wenig größer als der directe Beobachtungsfehler. Dieser geringe Einfluß hängt damit zusammen, daß die Maxima und Minima von (T) für Winkel φ eintreten, die nicht allzuweit von den benutzten beiden abweichen; die Formel (8) ergiebt nämlich, daß dieselben bei

$$\varphi = 12^0\, 18' \quad \text{und} \quad 102^0\, 18'$$

stattfinden.

Den ganzen Verlauf von (T) giebt die Figur (3) an; in ihr ist die Größe des Drillungscoefficienten für ein rechteckiges Prisma, dessen Längsaxe in die Normale zur Symmetrieebene fällt, als Function der Richtung der kleineren Querdimension (D) aufgetragen. —

Die durch Drillungsbeobachtungen gefundenen Resultate sind nach Obigem also:

$$\begin{aligned} 2(s_{11} - s_{12}) &= (\ 9,843 \pm 0,016)\,10^{-8}, \\ s_{44} &= (14,837 \pm 0,019)\,10^{-8}; \end{aligned} \qquad 9)$$

sie ergeben zusammen mit den durch Biegung erhaltenen (5) alle in der allgemeinen Formel (2) für den Drillungscoefficienten T eines rechteckigen Prismas auftretenden Coefficienten und somit das allgemeine Gesetz selbst. Uebersichtlicher ist der Werth des Drillungscoefficienten T^0 für einen Kreiscylinder, welcher nur von der Orientirung der Längsaxe abhängt. Man erhält hierfür

$$T^0 = \big(24,68 - 12,94\,\gamma^2 + 17,93\,\gamma^4 - 4,58\,\beta\gamma(3\alpha^2 - \beta^2)\big)\,10^{-8}; \qquad 10)$$

Figur 4 und 5 stellt den Verlauf dieser Function für den ersten und zweiten Hauptschnitt dar.

Resultate.

Aus den Werthen (5) und (9) folgt zunächst das ganze System der Moduln s_{hk}:

$$\begin{aligned} s_{11} &= (\ 3,911 \pm 0,005)\,.\,10^{-8}, & s_{12} &= -(1,011 \pm 0,009)\,.\,10^{-8}, \\ s_{33} &= (\ 6,124 \pm 0,002)\,.\,10^{-8}, & s_{13} &= -(0,160 \pm 0,017)\,.\,10^{-8}, \\ s_{44} &= (14,837 \pm 0,019)\,.\,10^{-8}, & s_{14} &= +(0,572 \pm 0,009)\,.\,10^{-8}. \end{aligned} \qquad 11)$$

Hieraus ergeben sich die Coefficienten der linearen Compression parallel den Coordinatenaxen bei allseitig gleichem Druck:

$$A_1 = A_2 = 2,74\,.\,10^{-8}, \quad A_3 = 5,80\,.\,10^{-8}, \qquad 12)$$

sowie desjenigen der cubischen Compression:

$$M = 11,28\,.\,10^{-3}.$$

Die Elasticitätsconstanten c_{hk} erhalten folgende Werthe:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 27,54\,.\,10^6, & c_{12} &= +\,7,04\,.\,10^6, \\ c_{33} &= 16,38\,.\,10^6, & c_{13} &= +\,0,90\,.\,10^6, \\ c_{44} &= \ \ 6,80\,.\,10^6, & c_{14} &= -\,0,79\,.\,10^6. \end{aligned} \qquad 13)$$

Alle vorstehenden Werthe gelten für brasilianischen Turmalin bei der Temperatur von ca. 18° C.

Bekanntlich verlangt die Poisson'sche Theorie, welche die elastischen Kräfte aus Wechselwirkungen der nicht polarisirten Moleküle ableitet, für alle Gruppen des hexagonalen Krystallsystems die Beziehungen

$$c_{13} = c_{44}, \qquad c_{11} = 3\,c_{12}.$$

Die zweite ist nicht erfüllt, wenn die Richtungen normal zur Hauptaxe Differenzen bezüglich der Attraction zeigen, die erste, wenn die Hauptaxe (Z) von der (X)- und (Y)-Axe abweicht.

Bildet man diese Werthe für die bisher von mir untersuchten hexagonalen Krystalle so erhält man folgende Tabelle.

Beryll	$c_{13} = 6,74$	$c_{44} = 6,66$	$c_{11} = 27,46$	$3c_{12} = 29,40$
Bergkrystall	$= 1,44$	$= 5,82$	$= 8,68$	$= 2,13$
Kalkspath	$= 4,60$	$= 3,49$	$= 13,97$	$= 13,95$
Turmalin	$= 0,90$	$= 6,80$	$= 27,54$	$= 21,12$

Man erkennt, daß bei Beryll und Kalkspath beide Relationen theils genau, theils angenähert gelten; bei Turmalin ist besonders die erste, bei Bergkrystall auch die zweite nicht erfüllt. Die hierin liegende Analogie mit der pyroëlectrischen Polarisation dieser Krystalle ist wohl nicht zufällig. —

Benutzt man die von Pfaff[1]) gegebenen Werthe der thermischen lineären Ausdehnungscoefficienten

$$a_1 = a_2 = 7{,}73 \,.\, 10^{-6}, \qquad a_3 = 9{,}37 \,.\, 10^{-6},$$

so folgen die Werthe der thermischen Drucke parallel den Axen:

$$14) \qquad q_1 = q_2 = 275{,}8, \qquad q_3 = 167{,}5.$$

Die Unterschiede der isothermischen und adiabatischen Elasticitätsmoduln (s_{hk} und σ_{hk}) und Elasticitätsconstanten (c_{hk} und γ_{hk}) berechnen sich bei Einführung des Werthes der absoluten Temperatur $\Theta = 291$, des mechanischen Wärmeäquivalentes $A = 426000$, der Dichte des Turmalins[2]) $\varepsilon = 3{,}116 \,.\, 10^{-3}$, der gewöhnlichen specifischen Wärme[3]) $c = 0{,}245$, nach den früher gegebenen Formeln folgendermaßen:

$$15) \qquad \begin{gathered} \gamma_{11} - c_{11} = \gamma_{12} - c_{12} = 0{,}068 \,.\, 10^6, \\ \gamma_{13} - c_{13} = 0{,}052 \,.\, 10^6, \quad \gamma_{33} - c_{33} = 0{,}031 \,.\, 10^6, \\ \gamma_{14} - c_{14} = \gamma_{44} - c_{44} = 0; \end{gathered}$$

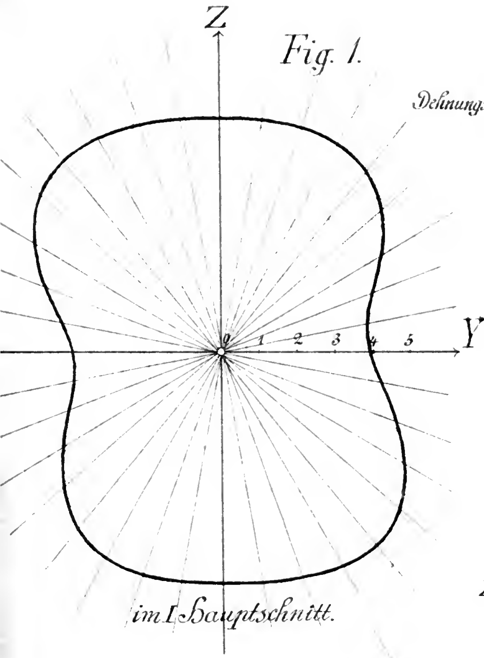
$$16) \qquad \begin{gathered} s_{11} - \sigma_{11} = s_{12} - \sigma_{12} = 0{,}0067 \,.\, 10^{-8}, \\ s_{13} - \sigma_{13} = 0{,}0081 \,.\, 10^{-8}; \quad s_{33} - \sigma_{33} = 0{,}0098 \,.\, 10^{-3}, \\ s_{14} - \sigma_{14} = s_{44} - \sigma_{44} = 0. \end{gathered}$$

Endlich findet sich die Differenz der specifischen Wärmen bei constanter Spannung c_p und constanter Deformation c_d

1) F. Pfaff, Pogg. Ann. CVII, 148, 1859.
2) E. Riecke, Gött. Nachr. 1885, p. 410.
3) E. Riecke, ib. p. 423.

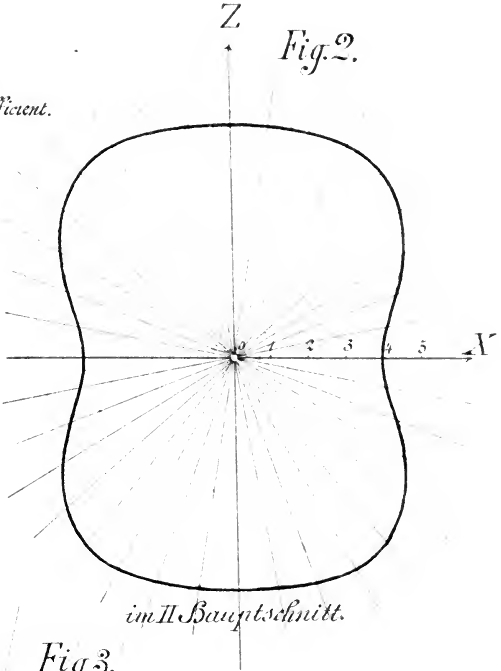
Dehnungscoefficient.

Fig. 1.



im I Hauptschnitt.

Fig. 2.



im II Hauptschnitt.

Fig. 3.

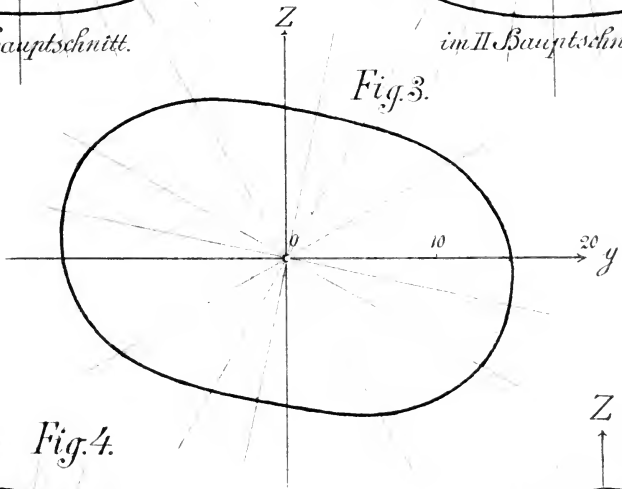
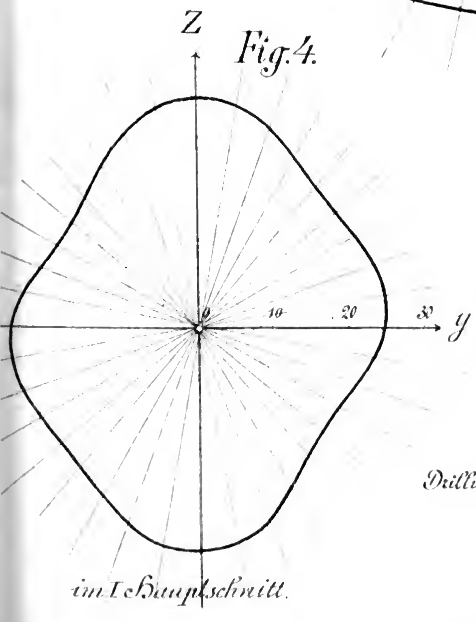
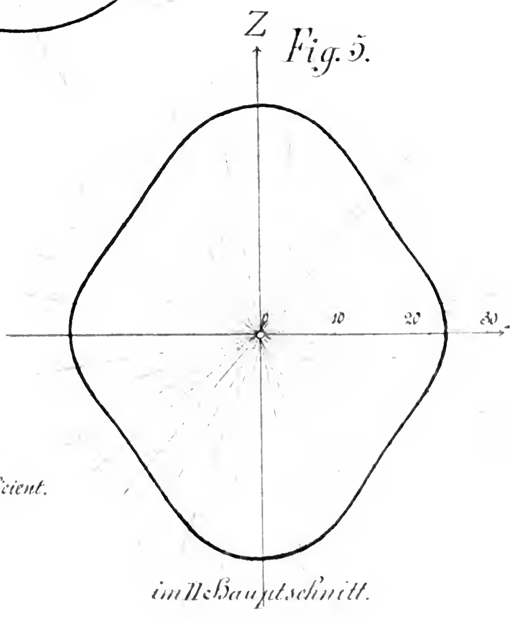


Fig. 4.



im I Hauptschnitt.

Fig. 5.



Drillungscoefficient.

im II Hauptschnitt.

Nachr. d. K. G. d. W. zu Göttingen 1890. № 7.

W. Voigt, Bestimmung der Elasticitätsconstanten für brasilianischen Turmalin.

$$c_p - c_d = 0{,}00128,$$

und ihr Verhältniß

$$\frac{c_p}{c_d} = \varkappa = 1{,}0052.$$

Bemerkung. Herr Elie[1]) hat versucht, die Anzahl der Constanten der rhomboëdrisch-hemiëdrischen Krystalle dadurch zu reduciren, daß er annahm, das elastische Potential besitze auf die Kanten eines Rhomboëders — dessen Wahl er, wie es scheint, freiläßt — als schiefwinklige Coordinatenaxen bezogen, die Rhomboëderflächen als analytische Symmetrieebenen.

So unwahrscheinlich diese Annahme von vorn herein erscheint, so habe ich doch im Falle des Kalkspathes, wo wohl kein Zweifel darüber sein kann, daß wenn überhaupt eines, so das Spaltungsrhomboëder eine ausgezeichnete Bedeutung besitzt, dieselbe unter Benutzung der früher von mir gefundenen Constantenwerthe durch Rechnung geprüft.

Die drei von Herrn Elie selbst aufgestellten Bedingungen für die Zulässigkeit seiner Annahme führen auf die Widersprüche

$$0{,}025 = -5{,}70, \quad 22{,}4 = -5{,}3, \quad 33{,}6 = -5{,}94,$$

woraus deren Unhaltbarkeit wohl klar hervorgeht.

1) B. Elie, J. de phys. (2) 5, p. 204, 1886.

Göttingen, am 5. Juli 1890.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

März und April 1890.

(Fortsetzung.)

A. Kölliker: Ueber den feineren Bau des Rückenmarkes. Aus den Sitzungsberichten der Würzburger Phys. med. Gesellschaft 1890. VI. Sitzung.
Mittheilungen aus dem naturwissenschaftlichen Verein für Neu-Vorpommern und Rügen in Greifswald. Jahrgang 21. 1889. Berlin 1890.
60. Jahresbericht des Voigtländischen Alterthumsforschenden Vereins zu Hohenleuben. Weida 1889.
Germanisches Museum in Nürnberg.
  a. Mittheilungen. II. Band. 3. Heft. Jahrgang 1889.
  b. Anzeiger. II. Band. 3. Heft. Seite 179 und 288. Jahrgang 1889.
  c. Katalog der im G. M. vorhandenen interessanten Bucheinbände. Nürnberg 1889.

Musikalische Werke Friedrich des Grossen. Leipzig.
Proceedings of the R. society. Vol. XLVII. Nr. 287. London.
Proceedings of the Cambridge philosophical society. Vol. VII. Part. 1. 1889. Appendices by Prof. J. C. Adams. M. A. T. R. S. Cambridge.
Journal of the R. Microscopical society 1890. Part II. April.
Proceedings of the London mathematical society. Nr. 368—369.
Monthly notices of the R. Astronomical society. Vol. L. Nro. 4, 5. 1890.
The transactions of the R. Irish Academy. Vol. XXIX. Part XII.
Proceedings of the R. Irish Academy. Third series. Vol. I. Nro. 2.
Nature. Vol. 41. Nro. 1061—1069.
Annual report of the Canadian Institute. Session 1888—1889. Toronto 1889.
Geological and natural history survey of Canada.
a) Annual report. (New series.) Vol. III. Part I, II. 1887—1888. Reports A. B. C. E. F.
b. Maps etc. to accompany Annual Report. Vol. III. N. S. 1887—1888. Montreal 1889.
Records of the Geological survey of India. Vol. XXIII. Part 1. Calcutta 1890.
Natural history of Victoria. Prodromus of the Zoology of Victoria. Decade XIX. Melbourne 1889.
Journal and proceedings of the R. society of New-South Wales. Vol. XXIII. 1889. Part 1. Sidney.
Catalogue of the scientific books in the library of the R. S. of New-South Wales. Part. 1. General catalogue. Sidney 1889.
Report of the first meeting of the Australian association for the advancement of science. Sidney 1887. Vol. I. Sidney 1889.
Abhandlungen der K. K. geologischen Reichsanstalt.
a. Die Liburnische Stufe und deren Grenzhorizonte. Heft 1. Abth. 1. Geologische Uebersicht und Beschreibung der Faunen und Florenreste. (Abhandl. d. geol. Reichsanst.) Band XIII. Heft 1.
b. Ueber die Liasischen Brachiopoden des Hierlatz bei Hallstadt. (Band XV. Heft 1. Abh. d. K. K. Geolog. Reichsanst.) Wien 1889.
Jahrbuch d. K. K. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1889. Band XXXIX. Heft 3, 4. Wien 1889.
Verhandlungen d. K. K. geologischen Reichsanstalt. Nro. 4. 5. 1890.
Sitzungsberichte d. K. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe 1889. II.
Philos.-histor.-philog. Classe 1889.
Jahresbericht d. K. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften für das Jahr 1889. I. Prag 1890.
Archiv des Vereines für siebenbürgische Landeskunde. Neue Folge. Band 22. 3. Heft. Hermannstadt 1890.
Jahresbericht d. Vereines für siebenbürg. Landeskunde. Vereinsjahr 1888—1890. Hermanstadt 1889.
Ungarische Revue 1890. Heft III, IV. Budapest 1890.
Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau 1890. Jan. Febr. März. Inhaltsverzeichniss von 1889.
Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Theil 8. Heft 3. Schluss. Basel 1890.
Mémoires de la société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève. Tome XXX. Seconde partie. Genève 1889—1890.
Wolf: Astronomische Mittheilungen. (LXXV.) Dezember 1889. Zürich.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

13. August. **№ 8.** 1890.

Universität.

Verzeichniß der Vorlesungen auf der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen während des Winterhalbjahrs 1890/91.

Die Vorlesungen beginnen den 15. October und enden den 14. März.

Theologie.

Einleitung in das Alte Testament: Prof. *Smend* fünfstündig um 4 Uhr.

Geschichte des Kanons und des Textes des alten Testaments: *Derselbe* Sonnabend um 12 Uhr publice.

Erklärung des Buches Jesajas: Prof. *Schultz* fünfstündig um 10 Uhr.

Neutestamentliche Theologie: Prof. *Wiesinger* fünfmal um 9 Uhr.

Ueber die Evangelienfrage: Prof. *Weiss* zweimal um 12 Uhr publice.

Erklärung der synoptischen Evangelien: Prof. *Weiss* fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung des Evangeliums Johannis: Prof. *Lünemann* vierstündig um 9 Uhr.

Erklärung der Apostelgeschichte: Prof. *Weiss* dreimal um 12 Uhr.

Erklärung des Briefes Pauli an die Philipper: Prof. *Häring*.

Kirchengeschichte der ersten acht Jahrhunderte: Prof. *Tschackert* fünfmal um 11 Uhr.

Kirchengeschichte Theil II.: Prof. *Wagenmann* fünfmal um 8 Uhr.

Kirchengeschichte des neunzehnten Jahrhunderts: *Derselbe* vier bis fünfmal um 4 Uhr.

Dogmengeschichte der alten Kirche und des Mittelalters: Prof. *Tschackert* fünfmal um 10 Uhr.

Dogmatik Theil I: Prof. *Schultz* fünfstündig um 12 Uhr.

Theologische Ethik: Prof. *Häring* fünfstündig um 11 Uhr.

Praktische Theologie: Prof. *Knoke* fünfstündig um 5 Uhr.

Praktische Auslegung der Perikopen verbunden mit homiletischen Meditationsübungen: *Derselbe* zweimal um 8 Uhr.

Kirchenrecht siehe unter Rechtswissenschaft S. 299.

Die alttestamentlichen Uebungen der wissenschaftlichen Abtheilung des theologischen Seminars leitet Prof. *Smend* Dienstag um 6 Uhr; die neutestamentlichen Prof. *Wiesinger* Montags um 6 Uhr; die kirchen- und dogmenhistorischen Prof. *Tschackert* Freitags um 6 Uhr; die dogmatischen Prof. *Häring* Mittwochs um 6 Uhr.

Die Uebungen des königl. homiletischen Seminars leiten Prof. *Schultz* und Prof. *Knoke* Sonnabends von 9—11 Uhr öffentlich; die Uebungen des liturgischen Seminars leitet Prof. *Knoke* Sonnabends um 9 und um 11 Uhr; die Uebungen des katechetischen Seminars Prof. *Wiesinger* Mittwochs von 2—3 Uhr, Prof. *Knoke* Sonnabends von 2—3 Uhr öffentlich.

Eine historisch-theologische Societät hält Prof. *Wagenmann* einmal in geeigneten Stunden; biblisch-theologische Uebungen Prof. *Weiss* einmal privatissime und gratis.

Rechtswissenschaft.

Institutionen des römischen Privatrechts: Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag von 9—10 Uhr Prof. *Merkel.*

Römische Rechtsgeschichte: Montag, Dienstag, Donnerstag von 3—4 Uhr Prof. *Regelsberger.*

Römischer Civilproceß: Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr Dr. *Goldschmidt.*

Lektüre eines juristischen Schriftstellers aus der römischen Kaiserzeit: Mittwoch von 10—11 Uhr Prof. *Merkel* (unentgeltlich).

Pandekten, I. Theil (Allgemeine Lehren, Obligationenrecht, Pfandrecht): Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 8—10 Uhr Prof. *Regelsberger.*

Römisches Sachenrecht: Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 12—1 Uhr Prof. *v. Jhering.*

Pandekten, II. Theil (Erbrecht und Familienrecht): Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 10—11 Uhr Prof. *Merkel.*

Conversatorium über Pandekten: Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag von 6—7 Uhr Dr. *Goldschmidt.*

Pandektenpraktieum: Freitag von 4—6 Uhr Prof. *Regelsberger.*

Exegetische Uebungen im corpus juris: Montag von 5—7 Uhr Prof. *Merkel.*

Deutsche Staats- und Rechtsgeschichte: Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 11—12 Uhr Prof. *Frensdorff.*

Deutsches Privatrecht: Montag bis Freitag von 9—10 Uhr Prof. *Ehrenberg.*

Handels-, Wechsel- und Seerecht: Montag bis Freitag von 10—11 Uhr Prof. *Ehrenberg.*

Preußisches Privatrecht: viermal von 11—12 Uhr Prof. *Ziebarth.*

Die neuen Rechtsbegriffe im deutschen Arbeiterversicherungsrecht: Sonnabend von 11—12 Uhr Dr. *Goldschmidt* öffentlich.

Uebungen im Anschluß an die deutsche Rechtsgeschichte: Donnerstag von 6—7 Uhr Prof. *Frensdorff* öffentlich.

Strafrecht: Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag von 3—4 Uhr Prof. *Ziebarth.*

Deutsches Reichs- und Landesstaatsrecht eingeleitet durch eine Uebersicht über das allgemeine Staatsrecht: fünfmal wöchentlich von 9—10 Uhr Prof. *Dove.*

Verwaltungsrecht: Dienstag, Donnerstag, Freitag von 12—1 Uhr Prof. *Frensdorff.*

Völkerrecht: Mittwoch von 12—1 Uhr und Sonnabend von 11—1 Uhr Prof. *v. Bar.*

Kirchenrecht: täglich von 8—9 Uhr Prof. *Dove.*

Civilproceß: Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag von 11—12 Uhr Prof. *Detmold.*

Strafproceß: Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 10—11 Uhr Prof. *Ziebarth.*

Civilproceßpraktieum: Dienstag von 4—6 Uhr Prof. *von Bar.*

Criminalistische Uebungen: Mittw. von 4—6 Uhr Prof. *Ziebarth.*

Vorlesungen über Staatswissenschaft s. S. 307.

Medicin.

Zoologie, vergleichende Anatomie, Botanik, Chemie, siehe unter *Naturwissenschaften.*

Knochen- u. Bänderlehre lehrt Dr. *Disse* Montag, Mittwoch und Freitag von 11—12 Uhr.

Systematische Anatomie, I. Theil, trägt vor Prof. *Fr. Merkel* tägl. von 12—1 Uhr.

Anatomie des Gehirns lehrt Dr. *Disse* Montag von 2—3 Uhr öffentlich.

Topographische Anatomie lehrt Prof. *Fr. Merkel* Dienstag, Donnerstag, Freitag von 2—3 Uhr.

Examinatorium der Anatomie hält Prof. *Merkel* in passenden Stunden.

Präparirübungen leitet Prof. *Fr. Merkel* täglich von 9—4 Uhr.

Mikroskopische Uebungen für Geübtere hält Dr. *Disse* Dienstag und Donnerstag von 4—6 Uhr.

Uebungen in der normalen Histologie hält Prof. *Krause* viermal wöchentlich für Anfänger um 11 Uhr, für Geübtere um 2 Uhr oder zu anderen passenden Stunden.

Specielle Histologie der Sinnesorgane lehrt Prof. *Krause* öffentlich am Mittwoch um 4 Uhr oder zu passender Stunde.

Physiologie mit Erläuterungen durch Experimente u. mikroskopische Demonstrationen lehrt Prof. *Herbst* in 6 Stunden wöchentlich um 10 Uhr.

Experimentalphysiologie, II. Theil (Physiologie des Nervensystems u. der Sinnesorgane) lehrt Prof. *Meissner* täglich von 10—11 Uhr.

Arbeiten im physiologischen Institut leitet Prof. *Meissner* täglich in passenden Stunden.

Pathologische Anatomie der Knochen und Muskeln trägt öffentlich vor Prof. *Orth* Montag von 6—7 Uhr.

Specielle pathologische Anatomie lehrt Prof. *Orth* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 2—3 Uhr.

Pathologisch-anatomische Demonstrationen hält Prof. *Orth* privatissime Mittwoch und Sonnabend von 2—4 Uhr.

Praktische Uebungen in der pathologischen Histologie leitet Prof. *Orth* Dienstag u. Freitag von 6—8 Uhr.

Physikalische Diagnostik verbunden mit Uebungen lehrt Prof. *Damsch* Montag, Mittwoch, Donnerstag von 5—6 Uhr.

Laryngoskopische Uebungen hält Prof. *Damsch* Sonnabend von 12—1 Uhr.

Arzneimittellehre und Receptirkunde verbunden mit Experimenten und praktischen Uebungen im Receptiren und Dispensiren lehrt Prof. *Marmé* Dienstag, Donnerstag u. Freitag von 12—1 Uhr.

Die gesammte Arzneimittellehre trägt Prof. *Husemann* viermal wöchentlich von 3—4 Uhr vor.

Uebungen im Verschreiben der Arzneimittel leitet Prof. *Husemann* Freitags von 3—4 Uhr.

Specielle Toxikologie, II. Theil, verbunden mit Experimente trägt Prof. *Marmé* für ältere Mediciner vor Montag u. Donnerstag von 3—4 Uhr.

Arbeiten im pharmakologischen Institut leitet Prof. *Marmé* täglich in passenden Stunden.

Pharmakognosie lehrt Prof. *Marmé* dreimal wöchentlich Dienstag bis Donnerstag von 8—9 Uhr.

Pharmakognotisch-mikroskopische Uebungen hält Prof. *Marmé* Mittwoch von 10—12 Uhr.

Specielle Pathologie und Therapie, II. Hälfte, trägt vor Prof. *Ebstein* Montag, Dienstag, Donnerstag u. Freitag von 4—5 Uhr.

Medicinische Klinik leitet Prof. *Ebstein* fünfmal wöchentlich von $10^1/_2$—12 Uhr, Sonnabend von $9^1/_4$—$10^3/_4$ Uhr.

Kinderheilkunde lehrt Montag u. Donnerstag von 6—7 Uhr und Dienstag von 5—6 Uhr Prof. *Damsch.*

Medicinische Poliklinik hält Prof. *Damsch* täglich um 12 Uhr öffentlich.

Die Untersuchung des Harns u. Sputums mit praktischen Uebungen leitet Prof. *Ebstein* mit Dr. *Nicolaier* einmal wöchentlich in zu verabredender Stunde.

Specielle Chirurgie, II. Theil, lehrt Prof. *König* viermal wöchentlich von 4—5 Uhr.

Specielle Chirurgie lehrt Prof. *Lohmeyer* fünfmal wöchentlich von 8—9 Uhr.

Einen chirurgisch-diagnotischen Cursus hält Prof. *Rosenbach* Dienstag u. Freitag von 3—4 Uhr.

Die Lehre von den chirurgischen Operationen trägt Prof. *Rosenbach* dreimal wöchentlich in zu verabredenden Stunden vor.

Chirurgische Klinik leitet Prof. *König* von $9^1/_2$ ohne academ. Viertel bis $10^1/_2$ Uhr täglich außer Sonnabend.

Chirurgische Poliklinik wird öffentlich Sonnabend von $10^3/_4$—12 Uhr von Prof. *König* u. Prof. *Rosenbach* gemeinschaftlich gehalten.

Einen Verbandcursus leitet Dr. *Hildebrand* dreimal wöchentlich in passenden Stunden.

Ausgewählte Capitel aus der speciellen Chirurgie liest Dr. *Hildebrand.*

Klinik der Augenkrankheiten hält Prof. *Schmidt-Rimpler* Montag, Dienstag, Donnerstag u. Freitag von 12—1 Uhr.

Augenspiegel- und Operationscursus hält Prof. *Schmidt-Rimpler* Mittwoch u. Sonnabend von 12—1 Uhr.

Ueber Krankheiten des vorderen Bulbusabschnittes liest Dr.

Schirmer Donnerstag von 8—9 Uhr und in einer zweiten zu bestimmenden Stunde privatim.

Ueber die praktisch wichtigen Abschnitte der Ohrenheilkunde mit Uebungen im Ohrenspiegeln spricht Prof. *Bürkner* Dienstag und Freitag von 2—3 Uhr oder zu besser passender Zeit.

Poliklinik für Ohrenkranke hält Prof. *Bürkner* (für Geübtere) Mittwoch u. Sonnabend von 12—1 Uhr.

Geburtshülflich-gynaekologische Klinik und Poliklinik leitet Prof. *Runge* Dienstag, Mittwoch, Freitag, Sonnabend von 8—9 Uhr.

Geburtshülflich.-gynäkologischen Untersuchungscursus hält Prof. *Runge* Dienstag, Freitag von 4—5 Uhr.

Geburtshülfe lehrt Montag u. Donnerstag von 3—4 Uhr Prof. *Runge.*

Physiologie und Pathologie des Wochenbetts bespricht Mittwoch von 4—5 Uhr Prof. *Runge.*

Ueber Frauenkrankheiten: Dr. *Droysen* Mittwoch und Sonnabend von 8—9 Uhr und in einer zu bestimmenden Stunde.

Psychiatrische Klinik in Verbindung mit systematischen Vorträgen über Geisteskrankheiten hält Prof. *L. Meyer* Montag und Donnerstag von 4—6 Uhr.

Forensische Psychiatrie mit casuistischen Demonstrationen lehrt (für Juristen) Prof. *L. Meyer* wöchentlich in 2 zu verabredenden Stunden.

Hygiene, I. Theil, lehrt Prof. *Wolffhügel* Montag, Mittwoch und Donnerstag von 5—6 Uhr.

Praktische Uebungen im Anschluß an die Vorlesung über Hygiene hält Prof. *Wolffhügel* unentgeltlich Dienstag und Freitag von 3—4 Uhr.

Hygienische u. bakteriologische Curse giebt Prof. *Wolffhügel* in passenden Stunden.

Arbeiten im hygienischen Institut leitet täglich von 9—5 Uhr Prof. *Wolffhügel.*

Anatomie u. Physiologie der Hausthiere sowie die Lehre von den inneren Krankheiten derselben trägt Prof. *Esser* fünfmal wöchentlich von 9—10 Uhr vor.

Klinische Demonstrationen im Thierhospitale hält Prof. *Esser* in zu verabredenden Stunden.

Philosophie.

Geschichte der neueren Philosophie mit Ueberblick über Patristik und Scholastik unter Zugrundelegung seines Buches „Geschichte der Philosophie nach Ideengehalt und Beweisen": Prof. *Baumann*, Donnerstag und Freitag 5 Uhr.

Kurze Uebersicht über die deutsche Philosophie seit Kant: Prof. *Rehnisch*, Sonnabend öffentlich.

Logik unter Zugrundelegung seines Buches: „Elemente der Philosophie": Prof. *Baumann*, Montag u. Dienstag 5 Uhr.

Logik: Prof. *Rehnisch*, 4 St. 12 Uhr.

Metaphysik und Erkenntnißtheorie: Prof. *Peipers*, Mont., Dienst., Donn., Freit., 10 Uhr.

Psychologie: Prof. *G. E. Müller*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 4 Uhr.

Ueber die Eigentümlichkeiten der lebenden Materie: Prof. *G. E. Müller*, Mittwoch 6 Uhr, öffentlich.

Darstellung und Kritik der neueren Theorien über das Wesen des Willens: Prof. *Peipers*, Freitag 6 Uhr, öffentlich.

Philosophische Uebungen hält Prof. *Baumann* im Anschluß an seine Vorlesungen 1) über Trendelenburgs elementa logices aristoteleae Mittw. 4 Uhr; 2) über Leibniz' Nouveaux essais sur l'entendement humain, Mittw. 5 Uhr, beide öffentlich.

Die Uebungen des K. pädagogischen Seminars leitet Prof. *Sauppe*, Dienstag und Freitag 11 Uhr öffentlich.

Mathematik, Astronomie und theoretische Physik.

Differentialrechnung: Dr. *Schönflies*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 9 Uhr.

Projective Geometrie: Dr. *Burkhardt*, Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag 8 Uhr.

Krumme Flächen und Curven doppelter Krümmung: Prof. *Schwarz*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 11 Uhr.

Theorie der elliptischen Functionen: Prof. *Schwarz*, Montag bis Freitag 9 Uhr.

Gewöhnliche Differentialgleichungen, Theil II: Prof. *Klein* Mittwoch 11—1 Uhr.

Die exacten Wissenschaften im Alterthume: Dr. *Burkhardt*, Mittwoch 6 Uhr, unentgeltlich.

Analytische Mechanik: Prof. *Klein*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 12 Uhr.

Elektrostatik: Dr. *Drude*, Montag und Donnerstag 3 Uhr.

Hydrodynamik: Prof. *Voigt*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 10 Uhr.

Mathematische Untersuchungen über die Constitution der Molecüle: Prof. *Schering*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 4 Uhr.

Theorie und Geschichte der Bestimmung von Doppelsternen: Prof. *Schur*, Montag, Donnerstag, Sonnabend 11 Uhr.

Ueber die Hülfsmittel der Berechnung historischer Sonnen- u. Mondfinsternisse: Prof. *Schur*, Dienstag, Freitag 11 Uhr.

Uebungen in geometrischen Constructionen: Prof. *Schwarz*, Mittwoch und Sonnabend 3–6 Uhr.

Uebungen in der Differentialrechnung: Dr. *Schönflies*, Mittwoch 9 Uhr.

Uebungen in projectiver Geometrie: Dr. *Burkhardt*, Freitag 8 Uhr, unentgeltlich.

Mathematische Colloquien wird Prof. *Schwarz* unentgeltlich, wie bisher Dienstag 5—7 Uhr, privatissime veranstalten.

Practische Uebungen an den Instrumenten der Königl. Sternwarte: Prof. *Schur*, täglich.

Erdmagnetische Beobachtungen wird im Gaussobservatorium Prof. *Schering*, Montag 7 Uhr zusammen mit dem Assistenten Herrn *Felgenträger* veranstalten.

Im Kgl. math.-phys. Seminare wird Prof. *Riecke* über Elektrooptik vortragen Donnerstag 2 Uhr, Prof. *Schering* mathem. Uebungen Montag 6 Uhr, Prof. *Schwarz* mathem. Uebungen Sonnabend 9 Uhr veranstalten, Prof. *Voigt* ausgewählte Kapitel aus der Lehre vom Galvanismus vortragen Mittwoch 10 Uhr, Prof. *Klein* ausgewählte Kapitel aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen Sonnabend 11—1 Uhr behandeln, Prof. *Schur* astronomische Uebungen veranstalten Dienstag 7 Uhr.

Experimentalphysik s. *Naturwissenschaften.*

Naturwissenschaften.

Specielle Zoologie II. Theil: Prof. *Ehlers*, Mont.—Freit. 9 Uhr.

Anthropologie: Prof. *Ehlers*, Mont., Dienst., Mittw. 6 Uhr.

Vergleichende Osteologie: Dr. *Henking*, Mont. u. Dienst. 3 Uhr.

Die Parasiten des Menschen mit Demonstrationen am Skioptikon: Dr. *Hamann*, Freitag 6 Uhr.

Kritik des Darwinismus (Descendenzlehre und Selektionshypothese): Dr. *Hamann*, Mittwoch 6 Uhr unentgeltlich.

Vergleichende Entwicklungsgeschichte der Wirbellosen, Dr. *Hamann* in 2 zu bestimmenden Stunden.

Ueber Darwinismus (mit Demonstrationen): Dr. *Henking*, Donnerstag 6 Uhr, unentgeltlich.

Zootomischer Kurs: Prof. *Ehlers*, Dienst. u. Mittw. 10—12 Uhr.

Zoologische Uebungen wird Prof. *Ehlers* täglich (mit Ausnahme des Sonnabend) von 10—1 Uhr anstellen.

Zoologische Societät für Vorgeschrittenere: Prof. *Ehlers* unentgeltlich.

Morphologie und Systematik der Thallophyten: Prof. *Peter*, Dienst., Mittw., Freit. 6 Uhr.

Pflanzengeographie: Prof. *Peter*, Mont., Dienst., Donn. 3 Uhr.

Pflanzenanatomie und Entwickelungsgeschichte: Prof. *Berthold*, Dienst., Donnerst., Freit. 12 Uhr.

Ueber die Vegetation des Meeres: Prof. *Berthold*, Mittwoch 12 Uhr, öffentlich.

Demonstrationen an lebenden Pflanzen und Präparaten: Prof. *Peter*, Mittwoch 10½—12 Uhr öffentlich.

Ueber Bakterien und Hefen: s. *Landwirthschaft* S. 308.

Mikroskopisch-botanischer Kursus für Anfänger: Prof. *Berthold*, Sonnabend von 9—1 Uhr.

Mikroskopisch-botanischer Kursus für Anfänger: Prof. *Peter*, vierstündig, Sonnabend Vormittag.

Tägliche Arbeiten im pflanzenphysiologischen Institut: Prof. *Berthold*.

Leitung botanischer Arbeiten für Vorgeschrittenere: Prof. *Peter*, täglich, privatissime.

Mineralogie 2. Theil: Prof. *Liebisch*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 12 Uhr.

Physikalische Krystallographie: Prof. *Liebisch*, Mittwoch und Sonnabend 12 Uhr.

Arbeiten im mineralogisch-petrographischen Institut: Prof. *Liebisch*, öffentlich.

Geologie: Prof. *von Koenen*, Montag bis Freitag 8 Uhr.

Ueber einzelne Klassen von Fossilien: Prof. *von Koenen*, Sonnabend 8 Uhr, öffentlich.

Geologische und palaeontologische Uebungen: Prof. *von Koenen* 2 Stunden, öffentlich.

Uebungen im Bestimmen: Prof. *von Koenen*, täglich privatissime, aber unentgeltlich.

Experimentalphysik, zweiter Theil: Magnetismus, Elektricität und Wärme: Prof. *Riecke*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit., 5 Uhr.

Die Uebungen im physikalischen Institute leiten die Prof. *Riecke* und *Voigt*, in Gemeinschaft mit den Assistenten Dr. *Drude* und Dr. *Nernst*. Für Mathematiker und Physiker: Dienstag und Freitag 2—4 Uhr; für Chemiker: Sonnabend 9—1 Uhr.

Vgl. Mathematisch-physikal. Seminar S. 304.

Allgemeine Chemie, unorganischer Theil (unorganische Experimentalchemie): Prof. *Wallach*, sechs Stunden 9 Uhr.

Die Lehre von der chemischen Verwandtschaft: Dr. *Nernst*, Dienst. und Freit. 6 Uhr.

Organische Chemie für Mediciner: Prof. *von Uslar*, 4 St., 9 Uhr.

Chemie der Benzolderivate: Dr. *Buchka*, Dienst., Mittw. und Donnerst. 8 Uhr.

Pharmaceutische Chemie (organischer Theil): Prof. *Polstorff*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 4 Uhr.

Ueber die Verunreinigungen und Verfälschungen der Nahrungs- und Genußmittel und deren Erkennung: Prof. *Polstorff*, Montag und Mittwoch 12 Uhr.

Pharmacie: Prof. *von Uslar*, viermal 3 Uhr.

Chemisches Colloquium für Mediciner (im Anschluß an das Practicum): Prof. *Wallach*, öffentlich, Mittwoch 3 Uhr.

Technische Chemie für Landwirthe (Zuckerfabrikation, Gährungsindustrien, Molkerei): Prof. *Tollens*, Mont., Dienst., Mittw. 10 Uhr.

Grundzüge der Chemie, II. Theil: Dr. *Pfeiffer*, Donnerstag und Freitag 10 Uhr.

Zuckerbestimmungen, besonders durch Polarisation: Prof. *Tollens*, 1 Stunde, öffentlich.

Agriculturchemische Untersuchungsmethoden: Dr. *Pfeiffer*, in zu verabredender Stunde.

Die chemischen Uebungen und wissenschaftlichen Arbeiten im akadem. Laboratorium leitet Prof. *Wallach* in Gemeinschaft mit Prof. *Polstorff* und Dr. *Buchka* und zwar: 1) Vollpraktikum, Mont. bis Freit. von 9—1 und von 3 bis 6 Uhr; 2) Halbpraktikum, je Vor- und Nachmittags zu denselben Stunden; 3) Chemisches Anfängerpraktikum für Mediciner Nachmittags.

Prof. *Tollens* leitet die praktischen Uebungen im agriculturchemischen Laboratorium in Gemeinschaft mit Dr. *Dubbers* Montags bis Freitags 8—12 und 2—4 Uhr.

Historische Wissenschaften.

Lateinische Paläographie, II. Theil: Prof. *Steindorff*, Mont. u. Dienst. 10 Uhr.

Mittelalterliche Siegelkunde: Prof. *Steindorff*, Donn. u. Freit. 10 Uhr.

Historisch-diplomatische Uebungen leitet Prof. *Steindorff*, Mittwoch 10 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Geschichte des alten Aegyptens: Prof. *Pietschmann*, Dienst. und Freitag 6 Uhr, öffentlich.

Allgemeine Geschichte des ausgehenden Mittelalters und der Reformationszeit: Prof. *Kluckhohn*, viermal wöchentlich 12 Uhr.

Deutsche Geschichte bis 1816: Prof. *Weiland*, 5 St. 9 Uhr.

Geschichte der deutschen Kaiserzeit: Dr. *v. Kap-herr*, Dienst. bis Freit. 11 Uhr.

Geschichte der deutschen Historiographie seit dem Ausgange des Mittelalters: Prof. *Kluckhohn*, zweimal wöchentlich 8 Uhr.

Geschichte Italiens im Mittelalter: Prof. *Theod. Wüstenfeld*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 10 Uhr, öffentlich in seiner Wohnung.

Historische Uebungen leitet Prof. *Volquardsen*, Dienstag 6 Uhr, öffentlich.

Historische Uebungen: Prof. *Weiland*, Freitag 6 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Historische Uebungen: Prof. *Kluckhohn*, Montag 6 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Kirchengeschichte: s. unter *Theologie* S. 297—298.

Erd- und Völkerkunde.

Allgemeine Erdkunde, Theil II (Morphologie der Erdoberfläche, Ozeanographie, Klimatologie: Prof. *Wagner*, Mont., Dienst, Donnerst., Freit. 11 Uhr.

Kartographischer Kursus für Anfänger: Prof. *Wagner*, Sonnabend 9—12 Uhr, privatissime.

Geographisches Colloquium: Prof. *Wagner*, privatissime, aber unentgeltlich, in später zu bestimmenden Stunden.

Staatswissenschaft.

Nationalökonomie, grundlegender Theil, als Einleitung in das Studium der Staatswissenschaften: Prof. *Cohn*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 4 Uhr.

Praktische Nationalökonomie oder Volkswirthschaftspolitik: Prof. *Lexis*, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag 10 Uhr.

Finanzwissenschaft, mit besonderer Rücksicht auf die deutsche und preußische Steuergesetzgebung: Prof. *Cohn*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 5 Uhr.

Statistische Uebungen: Prof. *Lexis*, 2 Stunden.

Nationalökonomische Zeitfragen: Prof. *Mithoff*, Mittw. 5 Uhr, öffentlich.

Staatswissenschaftliche Uebungen: Prof. *Cohn*, Mittw. 5—7 Uhr, privatissime, unentgeltlich.

Landwirthschaft.

Einleitung in das landwirthschaftliche Studium: Prof. *Liebscher*, in noch zu bestimmenden Stunden.

Allgemeine Ackerbaulehre: Prof. *Liebscher*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 12 Uhr.

Betriebslehre: Prof. *Liebscher*, an denselben Tagen, 11 Uhr.

Thierernährungslehre, I. Theil: Dr. *Lehmann*, Donn. u. Freit. 10 Uhr.

Die allgemeine und specielle landwirthschaftliche Thierzüchtungslehre: Prof. *Griepenkerl*, Montag, Dienstag, 5 Uhr.

Die landwirthschaftliche Rassenkunde: Prof. *Griepenkerl*, Mittwoch 5—7 Uhr, öffentlich.

Die Ackerbausysteme (Felderwirthschaft, Feldgraswirthschaft, Fruchtwechselwirthschaft u. s. w.): Prof. *Griepenkerl*, Donnerst. und Freit. 5 Uhr.

Im Anschluß an diese Vorlesungen werden Excursionen nach benachbarten Landgütern und Fabriken veranstaltet werden.

Ueber Bakterien und Hefen: Dr. *Koch*, Mont. 6 Uhr.

Praktische Uebungen im Cultiviren der Bakterien und Hefen hält für Studierende der Landwirthschaft im Anschluß an seine Vorlesung in 2 St. Dr. *Koch*.

Landwirthschaftliche Maschinenkunde: Dr. *Rümker*, Montag u. Donnerstag, 3 Uhr.

Prof. *Henneberg* wird Vorlesungen anzeigen, sobald er wieder hergestellt ist.

Molkereiwesen: Dr. *Rümker*, Mittwoch u. Sonnabend 12 Uhr.

Uebungen im landw. Laboratorium, Prof. *Liebscher*, Mittw. und Sonnabd. 9—1 Uhr, privatissime.

Landwirthschaftl. Seminar: Prof. *Liebscher*, in noch zu bestimmenden Stunden, privatissime, unentgeltlich.

Chemie und praktisch-chemische Uebungen für Landwirthe: vgl. *Naturwissenschaften* S. 306.

Anatomie, Physiologie und Pathologie der Hausthiere: vgl. *Medicin* S. 302.

Literär- und Kunstgeschichte.

Geschichte der Buchdruckerkunst und des Buchhandels im 15. Jahrh.: Prof. *Dziatzko*, Montag, Dienstag, Donnerst. 3 Uhr.

Bibliographische Uebungen: Prof. *Dziatzko*, Freit. 3 Uhr, privatissime, unentgeltlich.

Geschichte der indischen Grammatik: s. *Orienta l. Sprachen* S. 309 f.

Geschichte der griechischen Literatur von Alexander bis auf Mithradates: Prof. *von Wilamowitz-Moellendorff*, 4 Stunden, 4 Uhr.

Geschichte der deutschen Literatur von Anfang des 16. bis zu Ende des 18. Jahrh.: Prof. *Heyne*, 4 Stunden, 5 Uhr.

Ueber die Hauptströmungen der neuern deutschen Literatur seit Goethes Tode: Prof. *Roethe*, Donnerst. 6 Uhr.

Geschichte der altfranzösischen Literatur, II.: Prof. *Vollmöller*, Mont. Dienst. Mittw. Donn. 12 Uhr.

Geschichte der dramatischen Literatur in Frankreich im XVIII. Jahrh.: Lektor *Ebray*, 2 mal wöch. in franz. Sprache.

Shaksperes Leben und Dichtungen: Prof. *Brandl*, Mittwoch, Freitag und Sonnabend, 6 Uhr Abends.

Geschichte der europäischen Kunst im Mittelalter: Prof. *Lange*, Dienst. 6—8 Uhr Abends.

Kunstgeschichte Italiens und Deutschlands im Zeitalter der Renaissance: Prof. *Lange*, Montag 6—8 Uhr Abends.

Alterthumskunde.

Griechische Alterthümer: Prof. *Volquardsen*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 8 Uhr.

Ueber Pompei, mit besonderer Berücksichtigung der Wandmalereien: Prof. *Dilthey*, Dienst., Donn., Freit., 12 Uhr.

Im K. archäologischen Seminar wird Prof. *Wieseler* ausgewählte Kunstwerke, namentlich Griechische und Römische Münzen, zur Erklärung vorlegen, Sonnabend 12 Uhr öffentlich.

Die eingereichten Abhandlungen der Mitglieder des K. archäologischen Seminars wird er privatissime beurtheilen.

Archäologische Uebungen: Prof. *Dilthey*, Sonnabend 10—12 Uhr, öffentlich.

Vergleichende Sprachlehre.

Vergleichende Flexionslehre des Sanskrit, Griechischen und Germanischen: Prof. *Bechtel*, Dienst., Donnerst. u. Freitag, 9 Uhr.

Uebungen auf dem Gebiete der vergleichenden Lautlehre: Prof. *Bechtel*, privatissime, gratis, Sonnabend, 12 Uhr.

Orientalische Sprachen.

Die Vorlesungen über das alte Testament s. unter *Theologie* S. 297.

Anfangsgründe des Arabischen: Prof. *Wüstenfeld*, privatissime.

Die arabische Grammatik lehrt 5 mal um 11 Uhr Prof. *de Lagarde*, der auch den 1. Band der Beiruter Chrestomathie erklären läßt.

Eine syrische Gesellschaft leitet zu noch zu bestimmenden Stunden Prof. *de Lagarde*, privatissime, aber unentgeltlich.

Fortsetzung der Sanskritgrammatik und Erklärung des Hitopadeça: Prof. *Kielhorn*, Mittwoch und Sonnabend 8 Uhr.

Erklärung von Bhavabhûti's Uttararâmacharita: Prof. *Kielhorn*, Montag, Mittwoch 9 Uhr.

Erklärung ausgewählter Hymnen des Ṛigveda mit Sâyaṇa's Commentare: Prof. *Kielhorn*, Mont. 8 Uhr, und Sonnab. 9 Uhr, öffentl.

Erklärung der Lacqukaumudî: Prof. *Kielhorn*, einmal wöchentlich, privatissime u. gratis.

Schrift und Sprache des alten Aegypten, 2. Cursus: Prof. *Pietschmann*, in zu verabredender Stunde, privatissime, unentgeltlich.

Griechische und Lateinische Sprache.

Syntax der griechischen Sprache: Prof. *Sauppe*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit., 9 Uhr.

Euripides Schutzflehende: Prof *v. Wilamowitz-Moellendorff*, vierstündig 8 Uhr.

Ueber Cicero's Leben und Schriften, mit Interpretation der Briefe an Atticus: Prof. *Leo*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 10 Uhr.

Interpretation der ältesten italischen Sprachdenkmäler: Prof. *Leo*, privatissime.

Im K. philologischen Seminar leiten die schriftlichen Arbeiten und Disputationen Prof. *Sauppe* und Prof. *von Wilamowitz-Moellendorff*, Mittwoch 11 Uhr; läßt Lysias R. 13 erklären Prof. *Sauppe*, Mont. und Donn., 11 Uhr; läßt Catulls Hochzeitslieder erklären Prof. *v. Wilamowitz*, Dienst. und Freit., 11 Uhr, alles öffentlich.

Im K. philologischen Proseminar wird Prof. *Leo* Aristophanes Plutus interpretiren lassen, sowie die Disputationen über die Arbeiten der Mitglieder leiten, Mittw. 9—11 Uhr, öffentlich.

Deutsche Sprache.

Einleitung in die niederdeutsche Sprache und Literatur mit Erklärung ausgewählter Stellen des Heliand und Reineke Vos: Prof. *Roethe*, Mont., Mittw., Freit. 3 Uhr.

Erklärung der Gudrun (nach Martins kleiner Ausgabe): Prof. *Roethe*, Dienstag, Donnerstag 3 Uhr.

Im K. deutschen Seminar läßt Prof. *Heyne* den guten Gerhard des Rudolf von Ems erklären, Freitag 12 Uhr, behandelt Prof. *Roethe* Goethes Faust, Dienstag 12 Uhr, und bespricht Prof. *Roethe* die Arbeiten der Mitglieder, Donnerst. 12 Uhr, alles privatissime aber unentgeltlich.

Im deutschen Proseminar leitet Prof. *Heyne* althochdeutsche Uebungen, Sonnabend 12 Uhr, öffentlich; erklärt Prof. *Roethe* für Anfänger den Gregorius Hartmanns, von Aue nach Pauls Ausgabe, Mittwoch 12 Uhr, öffentlich.

Geschichte der deutschen Literatur: s. *Literärgeschichte* S. 309.

Neuere Sprachen.

Geschichte der altfranzösischen Litteratur: s. Lit. Gesch. S. 309.

Französische Metrik: Dr. *Andresen*, Mont. u. Dienst., 10 Uhr.

Einführung in die provenzalische Sprache und Erklärung ausgewählter provenzalischer Denkmäler: Dr. *Cloetta*, Mont. und Donnerst. 11 Uhr.

Erklärung verschiedenartiger altfranzösischer Texte: Dr. *Cloetta*.

Historische Grammatik des Alt- und Mittel-Englischen mit besonderer Rücksicht auf Dialekte und Schriftsprache: Prof. *Brandl*, Dienst., Donnerst. und Sonnabend 8 Uhr Morgens.

Shaksperes Leben und Dichtungen: s. Lit. Gesch. S. 309.

Erklärung von Cynewulfs Elene: Dr. *F. Holthausen*, 2 mal wöch.

Englische Metrik: Dr. *F. Holthausen*, 2 mal wöch.

Im romanischen Seminar giebt Prof. *Vollmöller*, Dienstag 6—8 Uhr, die Erklärung des Chevalier au Lyon von Christian von Troyes; provenzalische Uebungen leitet Dr. *Andresen*, Mont. 6 Uhr; Dr. *Cloetta* leitet die Erklärung von Dante's Komödie, Donnerst. 6—8 Uhr.

Neufranzösische Uebungen: Lektor *Ebray*, drei Stunden, im romanischen Seminar (a. Uebersetzung eines deutschen Schriftstellers ins Franz., b. eines französ. ins Deutsche, c. Conversation).

Im englischen Seminar hält Prof. *Brandl* Uebungen im Uebersetzen ins Altenglische: 6—8 Uhr Abends an einem zu bestimmenden Tage.

Neuenglische Uebungen stellt im englischen Seminar Lektor Dr. *Miller* an zwei Tagen 6—8 Uhr an, a) in Grammatik und Stilistik, b) Lektüre von Thackeray's Book of Snobs, c) Uebersetzung von Hauff „das Wirthshaus im Spessart“, d) Vorträge über Johnson und seine Zeitgenossen, in englischer Sprache.

Schöne Künste. — Fertigkeiten.

Uebungen im Erklären und Bestimmen der Handzeichnungen alter Meister in der Universitätssammlung: Prof. *Lange*, Sonnabend 12 Uhr.

Harmonielehre: Prof. *Freiberg*, wöch. 2 Stunden, öffentlich. — Auch hält er Uebungen im Ensemblespiel.

Harmonie- und Kompositionslehre, verbunden mit praktischen Uebungen: Prof. *Hille*, in passenden Stunden.

Zur Theilnahme an den Uebungen der Singakademie und des Orchesterspielvereins ladet Prof. *Hille* ein.

Unterricht im Zeichnen ertheilt Zeichenlehrer *Peters*, Sonnabend 2—4 Uhr, unentgeltlich.

Unterricht im Malen *Derselbe* in zu verabredenden Stunden.

Reitunterricht ertheilt in der K. Universitäts-Reitbahn der Univ. Stallmeister, Rittmeister a. D. *Schweppe*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, Sonnabend, Vormittags v. 8—12, und Nachm. (außer Sonnab.) v. 3—4 Uhr.

Fechtkunst lehrt der Universitätsfechtmeister *Grüneklee*, Tanzkunst der Universitätstanzmeister *Höltzke*, Montag und Donnerstag 8—10 Uhr Abends.

Oeffentliche Sammlungen.

In der *Universitätsbibliothek* ist das Ausleihezimmer an den Wochentagen von 11—1 und von 2—3 Uhr, der Lesesaal von 10—4 Uhr geöffnet. Verliehen werden Bücher nach Abgabe einer Semesterkarte mit der Bürgschaft eines Professors.

Die *Gemäldesammlung* (Aula, 1 Treppe hoch links) ist Sonntags von 11—1 Uhr geöffnet.

Der *botanische Garten* ist, die Sonn- und Festtage ausgenommen, täglich von 7—12 und von 2—6 Uhr geöffnet.

Die *mineralogische* und die *geologisch-paläontologische Schausammlung* sind im Winterhalbjahr bis zum 11. December Sonnabends von 2 bis 4 Uhr dem Publicum geöffnet.

Die Sammlungen des *landwirthschaftlichen Instituts* sind dem Publicum Mittwoch Nachmittag von 2—4 Uhr zugänglich. Anmeldung im Institutsgebäude.

Besuchszeit des *agriculturchemischen Laboratoriums* Donnerst. v. 10—12 Uhr.

Ueber den Besuch und die Benutzung der *theologischen Seminarbibliothek*, des *Theatrum anatomicum*, des *physiologischen Instituts*, der *pathologischen Sammlung*, der *Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle*, des *zoologischen* und *ethnographischen Museums*, des *botanischen Gartens* und des *pflanzenphysiologischen Instituts*, der *Sternwarte*, des *physikalischen Kabinets* und *Laboratoriums*, der *mineralogischen* und der *geognostisch-paläontologischen Sammlung*, der *chemischen Laboratorien*, des *archäologischen Museums*, der *Gemäldesammlung*, der *Bibliothek des K. philologischen Seminars*, der *Bibliothek* und des *Arbeitszimmers des K. deutschen Seminars*, der *Bibliothek* und des *Lesezimmers des K. mathematisch-physikalischen Seminars*, des *diplomatischen Apparats*, der *Sammlungen des landwirthschaftlichen Instituts* bestimmen besondere Reglements das Nähere.

Bei dem Logiscommissar, Pedell *Mankel* (Jüdenstrasse 11), können die, welche Wohnungen suchen, sowohl über die Preise, als andere Umstände Auskunft erhalten und auch im voraus Bestellungen machen.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

20. August. №. 9. 1890.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 5. Juli.

Ueber particuläre Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

und eine mit der Theorie der Minimalflächen zusammenhängende Gattung von Flüssigkeitsbewegungen.

Von

Julius Weingarten, Corresp.

Bekanntlich entspricht jeder in einem begrenzten Raume eindeutigen die Zeit nicht explicite enthaltenden Lösung der Laplace'schen Differentialgleichung eine in diesem Raume mögliche stationäre Bewegung einer äußeren Kräften nicht unterworfenen homogenen incompressiblen Flüssigkeit.

Für diese Bewegung sind die Flächen gleichen hydrodynamischen Druckes zugleich Flächen gleicher Geschwindigkeit der in ihnen enthaltenen Flüssigkeitstheilchen. Unter den mannigfachen Bewegungen, welche den verschiedenen Lösungen jener Differentialgleichung entsprechen, beanspruchen diejenigen ein besonderes Interesse, für welche eine oder mehrere der Flächen gleichen Druckes aus Stromlinien gebildet sind.

Herr von Helmholtz hat zuerst Beispiele solcher Bewegungen entdeckt und dargestellt, bei denen Stromflächen auftreten, deren Stromlinien nicht in ihrem ganzen Verlaufe, sondern nur theilweise mit derselben constanten Geschwindigkeit durchlaufen werden. Diese Beispiele entsprechen der Anwendung von Potentialfunctionen, die nur von zweien der rechtwinkligen Coordinaten der Punkte des Raumes abhängen, oder auf solche zurückführbar sind. Allein selbst wenn man auf die Bedingung verzichtet, daß nur einzelne Theile einer Stromfläche Flächen gleichen Druckes sein sollen, so scheint doch bisher kein Beispiel einer allgemeinen räumlichen Potentialfunction gegeben worden zu sein, welchem eine Flüssigkeitsbewegung entspricht, für die eine Stromfläche zugleich Fläche gleichen Druckes wird. Auch scheinen die bisher fast ausschließlich untersuchten im ganzen unendlichen Raume eindeutigen Potentialfunctionen zur Darstellung solcher Bewegungen nicht geeignet zu sein.

Für die von Herrn von Helmholtz entdeckten Bewegungen findet die Eigenthümlichkeit statt, daß zwischen den Componenten der Geschwindigkeit jedes bewegten Punktes der Flüssigkeit, d. h. zwischen den 3 ersten Derivirten des betreffenden Geschwindigkeitspotentials, eine und dieselbe lineare Gleichung mit constanten Coefficienten besteht. Diese Bemerkung führt dazu, zu untersuchen, ob unter denjenigen Potentialfunctionen, zwischen deren ersten Derivirten überhaupt eine und dieselbe Gleichung besteht, solche gefunden werden können, welche zur Darstellung von Bewegungen der in Rede stehenden Art geeignet sind. Der Erfolg bestätigt diese Vermuthung.

I.

Wir beschäftigen uns zunächst mit der Aufsuchung derjenigen Potentialfunctionen, zwischen deren ersten Derivirten in jedem durch rechtwinklige Coordinaten x, y, z bestimmten Punkte des Raumes eine und dieselbe Gleichung besteht, oder mit anderen Worten, derjenigen Potentialfunctionen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet.

Wenn für eine Function V der Variablen x, y, z, deren Differential durch die Gleichung

$$dV = \xi dx + \eta dy + \zeta dz \tag{1.}$$

gegeben sei, eine nicht lineare Gleichung zwischen den ersten Derivirten ξ, η, ζ besteht, so können die Größen ξ, η, ζ als die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte einer krummen Fläche aufgefaßt, und als Functionen zweier unabhängiger Variablen p, q dargestellt gedacht werden, welche Functionen wir, wenigstens in den in Betracht kommenden Gebieten der Argumente p, q, als eindeutig voraussetzen wollen.

Die Differentialgleichung (1) kann in die nachstehende:

$$d(x\xi+y\eta+z\zeta-V) = \left(x\frac{\partial\xi}{\partial p}+y\frac{\partial\eta}{\partial p}+z\frac{\partial\zeta}{\partial p}\right)dp+\left(x\frac{\partial\xi}{\partial q}+y\frac{\partial\eta}{\partial q}+z\frac{\partial\zeta}{\partial q}\right)dq$$

umgeformt werden, und diese sagt aus, daß unter der gemachten Voraussetzung die nachstehenden Gleichungen, in denen θ eine Function der Größen p, q allein bezeichnet,

$$\begin{aligned} x\xi+y\eta+z\zeta-V &= \theta \\ x\frac{\partial\xi}{\partial p}+y\frac{\partial\eta}{\partial p}+z\frac{\partial\zeta}{\partial p} &= \frac{\partial\theta}{\partial p} \\ x\frac{\partial\xi}{\partial q}+y\frac{\partial\eta}{\partial q}+z\frac{\partial\zeta}{\partial q} &= \frac{\partial\theta}{\partial q} \end{aligned} \tag{2.}$$

statthaben müssen. Hiernach bestimmen die Gleichungen

$$V = x\xi+y\eta+z\zeta-\theta = \Sigma x\xi-\theta \tag{3.}$$

$$0 = x\frac{\partial\xi}{\partial p}+y\frac{\partial\eta}{\partial p}+z\frac{\partial\zeta}{\partial p}-\frac{\partial\theta}{\partial p} = \Sigma x\frac{\partial\xi}{\partial p}-\frac{\partial\theta}{\partial p} \tag{4.}$$

$$0 = x\frac{\partial\xi}{\partial q}+y\frac{\partial\eta}{\partial q}+z\frac{\partial\zeta}{\partial q}-\frac{\partial\theta}{\partial q} = \Sigma x\frac{\partial\xi}{\partial q}-\frac{\partial\theta}{\partial q} \tag{5.}$$

in denen ξ, η, ζ und θ irgendwelche Functionen der Größen p, q bezeichnen, alle Functionen V, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet. Wird noch die Function θ als eindeutig vorausgesetzt, so folgt aus den Gleichungen (4) und (5), daß jedem bestimmten Werthepaare der Größen p, q eine und nur eine Gerade im Raume entspricht, und daß bei entsprechender Einschränkung des Größengebiets der Argumente p, q zweien von einander verschiedenen Werthepaaren nie dieselbe Gerade zugehört. In dem durch die Gleichungen (4, 5) dargestellten Strahlensystem entspricht daher bei solcher Einschränkung des Gebietes (p, q) jedem Strahle nur ein bestimmtes Werthepaar p, q.

Innerhalb eines Raumgebietes, für welches jeder Punkt (x, y, z) nur von einem Strahle des Systems getroffen wird, sind daher die

Werthe der Größen p und q eindeutig durch die Coordinaten x, y, z dieses Punktes bestimmt, und demnach vermöge der Gleichung (3) auch die Function V.

Zur Darstellung der zweiten Differentialquotienten der Function V sind zunächst vermöge der Gleichungen (4) und (5), welche die Veränderlichen p und q implicite als Functionen der Coordinaten x, y, z definiren, die ersten Differentialquotienten dieser Veränderlichen in Bezug auf die Coordinaten zu ermitteln. Man erhält durch partielle Differentiation in Bezug auf die Coordinate x die Gleichungen:

$$0 = \frac{\partial \xi}{\partial p} + \left(\Sigma x \frac{\partial^2 \xi}{\partial p^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial p^2}\right) \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\Sigma x \frac{\partial^2 \xi}{\partial p \partial q} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial p \partial q}\right) \frac{\partial q}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial \xi}{\partial q} + \left(\Sigma x \frac{\partial^2 \xi}{\partial p \partial q} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial p \partial q}\right) \frac{\partial p}{\partial z} + \left(\Sigma x \frac{\partial^2 \xi}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial q^2}\right) \frac{\partial q}{\partial x}$$

und zwei ähnliche zur Bestimmung der Derivirten in Bezug auf jede der Coordinaten y und z. Nach Einführung der Bezeichnungen:

$$C_{11} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial p^2} - \Sigma x \frac{\partial^2 \xi}{\partial p^2}, \quad C_{12} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial p \partial q} - \Sigma x \frac{\partial^2 \theta}{\partial p \partial q}, \quad C_{22} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial q^2} - \Sigma x \frac{\partial^2 \xi}{\partial q^2}$$

$$\delta = C_{11} C_{22} - C_{12}^2 \tag{6.}$$

ergeben sich:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{C_{22} \frac{\partial \xi}{\partial p} - C_{12} \frac{\partial \xi}{\partial q}}{\delta} \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{C_{11} \frac{\partial \xi}{\partial q} - C_{12} \frac{\partial \xi}{\partial p}}{\delta} \tag{7.}$$

und durch Vertauschung von ξ mit η oder ζ die betreffenden Derivirten von p, q in Bezug auf die Coordinaten y oder z.

Wenn man die Functionen ξ, η, ζ als die Coordinaten der Punkte einer krummen Fläche (ξ, η, ζ) betrachtet, so erweist es sich als vortheilhaft, die Ausdrücke für die Größen C_{ik} mit Hülfe einiger allgemeinen Formeln der Theorie der krummen Flächen umzugestalten. Ich werde diese Formeln in derjenigen Form benutzen, in der ich sie in der Abhandlung „Ueber die Deformation einer biegsamen unausdehnbaren Fläche." (Journal für Mathematik Bd. 100, pag. 300—301) mitgetheilt habe.

Bezeichnen noch X, Y, Z die Coordinaten der nach Gauss vermittelten Abbildung eines Punktes der Fläche (ξ, η, ζ) auf eine Kugel mit dem Radius Eins, und setzt man das Bestehen der Gleichungen

$$\begin{aligned} d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 &= a_{11}dp^2 + 2a_{12}dp\,dq + a_{22}dq^2 \\ dX d\xi + dY d\eta + dZ d\zeta &= c_{11}dp^2 + 2c_{12}dp\,dq + c_{22}dq^2 \end{aligned}$$

voraus, so ist bekanntlich die Summe der Hauptkrümmungen in einem bestimmten Punkte der Fläche (ξ, η, ζ) durch die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{c_{22}a_{11} - 2c_{12}a_{12} + c_{11}a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}$$

gegeben, und es gelten für die zweiten Differentialquotienten der Coordinate ξ die Relationen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\xi}{\partial p^2} &= \left\{ {11 \atop 1} \right\} \frac{\partial\xi}{\partial p} + \left\{ {11 \atop 2} \right\} \frac{\partial\xi}{\partial q} - c_{11}X \\ \frac{\partial^2\xi}{\partial p\,\partial q} &= \left\{ {12 \atop 1} \right\} \frac{\partial\xi}{\partial p} + \left\{ {12 \atop 2} \right\} \frac{\partial\xi}{\partial q} - c_{12}X \\ \frac{\partial^2\xi}{\partial q^2} &= \left\{ {22 \atop 1} \right\} \frac{\partial\xi}{\partial p} + \left\{ {22 \atop 2} \right\} \frac{\partial\xi}{\partial q} - c_{22}X \end{aligned} \tag{8.}$$

so wie die entsprechenden für die Coordinaten η, ζ. (A. a. O. pag. 301).

Mit Hilfe dieser letzteren Gleichungen gehen die Werthe der durch die Gleichungen (6) bestimmten Größen C_{ik} in die nachstehenden über:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{\partial^2\theta}{\partial p^2} - \left\{ {11 \atop 1} \right\} \frac{\partial\theta}{\partial p} - \left\{ {11 \atop 2} \right\} \frac{\partial\theta}{\partial q} + c_{11}R \\ C_{12} &= \frac{\partial^2\theta}{\partial p\,\partial q} - \left\{ {12 \atop 1} \right\} \frac{\partial\theta}{\partial p} - \left\{ {12 \atop 2} \right\} \frac{\partial\theta}{\partial q} + c_{12}R \\ C_{22} &= \frac{\partial^2\theta}{\partial q^2} - \left\{ {22 \atop 1} \right\} \frac{\partial\theta}{\partial p} - \left\{ {22 \atop 2} \right\} \frac{\partial\theta}{\partial q} + c_{22}R \\ R &= Xx + Yy + Zz = \Sigma Xx. \end{aligned} \tag{9.}$$

Vermöge der Gleichungen (7) erhält man nunmehr für die Differentialquotienten der Derivirten ξ, η, ζ in Bezug auf die Coordinaten x, y, z oder für die entsprechenden zweiten Differentialquotienten der Function V die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{1}{\delta}\left[C_{22}\left(\frac{\partial\xi}{\partial p}\right)^2 - 2C_{12}\left(\frac{\partial\xi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial q}\right) + C_{11}\left(\frac{\partial\xi}{\partial q}\right)^2\right] \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \frac{1}{\delta}\left[C_{22}\left(\frac{\partial\eta}{\partial p}\right)^2 - 2C_{12}\left(\frac{\partial\eta}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial q}\right) + C_{11}\left(\frac{\partial\eta}{\partial q}\right)^2\right] \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= \frac{1}{\delta}\left[C_{22}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial p}\right)^2 - 2C_{12}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\zeta}{\partial q}\right) + C_{11}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial q}\right)^2\right] \end{aligned}$$

aus deren Addition die Gleichung

$$(10.)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{1}{\delta}\Big[a_{11}C_{22}-2\,a_{12}C_{12}+a_{22}C_{11}\Big]$$

hervorgeht. Nach Einführung der Werthe der Ausdrücke C_{ik} aus (9.) und nachdem man bemerkt hat, daß einer bekannten Umformung zufolge

$$\begin{aligned} a_{22}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial q^2}-\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial p}-\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial q}\right)-2\,a_{12}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial p\,\partial q}-\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial p}-\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial q}\right)\\ +a_{22}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial p^2}-\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial p}-\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial q}\right) = \left(a_{11}\,a_{22}-a_{12}^2\right)\Delta(\theta) \end{aligned}$$

wenn $\Delta(\theta)$ den zweiten Differentialparameter der Function θ für die Fläche (ξ, η, ζ) bezeichnet, verwandelt sich die Gleichung (10.) in:

$$(11.)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{\delta}\left[\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}\right)R+\Delta(\theta)\right].$$

Diese Gleichung beweist, daß eine Function V, deren Hesse'sche Determinante verschwindet, die Potentialgleichung stets dann und nur dann erfüllt, wenn gleichzeitig den Bedingungen

$$\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'} = 0,\quad \Delta(\theta) = 0$$

Genüge geschieht, d. h. wenn erstens die Fläche (ξ, η, ζ) eine Minimalfläche ist, und zweitens der zweite Differentialparameter der Function θ identisch verschwindet. Diese letztere Bedingung erfordert, in anderer Form ausgesprochen, das θ irgend ein Integral der Differentialgleichung:

$$(12.)\qquad \frac{\partial\,\dfrac{a_{22}\dfrac{\partial\theta}{\partial p}-a_{12}\dfrac{\partial\theta}{\partial q}}{\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}}}{\partial p}+\frac{\partial\,\dfrac{a_{11}\dfrac{\partial\theta}{\partial q}-a_{12}\dfrac{\partial\theta}{\partial p}}{\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}}}{\partial q} = 0$$

sei, von welcher Gleichung im Falle der Minimalflächen ξ, η, ζ bekanntlich selbst Integrale sind.

Wenn andererseits die Hesse'sche Determinante einer Potentialfunction verschwindet, so besteht zwischen den ersten Derivirten dieser Function nothwendig eine Gleichung, welche mit einer Gleichung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten der Punkte einer Minimalfläche übereinstimmt.

Wir wollen nunmehr in der weiteren Folge unter ξ, η, ζ stets die Coordinaten eines Punktes einer Minimalfläche als Functionen der, zwei Curvenschaaren dieser Fläche bestimmenden, Parameter p, q dargestellt, verstehen, und unter θ irgend ein Integral der Differentialgleichung (12). Alsdann ergeben die Gleichungen:

$$V = x\xi + y\eta + z\zeta - \theta \tag{3.*}$$

$$0 = x\frac{\partial \xi}{\partial p} + y\frac{\partial \eta}{\partial p} + z\frac{\partial \zeta}{\partial p} - \frac{\partial \theta}{\partial p} \tag{4.*}$$

$$0 = x\frac{\partial \xi}{\partial q} + y\frac{\partial \eta}{\partial q} + z\frac{\partial \zeta}{\partial q} - \frac{\partial \theta}{\partial q} \tag{5.*}$$

eine, oder besser, jede Potentialfunction V von verschwindender Hesse'scher Determinante. Der analytische Charakter, die Verzweigung dieser Function im Raume, wird wesentlich durch die geometrischen Eigenschaften des durch die Gleichungen (4*, 5*) bestimmten Strahlensystems bedingt sein, welche Gleichungen die Parameter p, q als Function der Coordinaten x, y, z definiren.

Der Kürze wegen, und ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, wollen wir in den ferneren Entwickelungen die Parameter p, q durchweg als orthogonalen isothermen Curvenschaaren der Minimalfläche angehörig betrachten, mit anderen Worten, wir setzen voraus, daß das Quadrat der Länge des Linienelementes der Minimalfläche (ξ, η, ζ) durch Einführung dieser Parameter die Form

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \mu(dp^2 + dq^2) \tag{13.}$$

annehme. Diese Voraussetzung hat bekanntlich auch das Bestehen einer Gleichung von der Form

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \lambda(dp^2 + dq^2) \tag{14.}$$

zur nothwendigen Folge.

Alsdann verwandelt sich die Gleichung (12) in

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial q^2} = 0 \tag{12.*}$$

welcher Differentialgleichung die Function θ sowie die Functionen ξ, η, ζ der Gleichungen 3*, 4* und 5* zu genügen haben.

Es möge daran erinnert werden, daß für die Minimalflächen sowohl Parameter der Krümmungslinien wie auch Parameter der asymptotischen Linien die von nun an für die Parameter p, q vorausgesetzte Eigenschaft besitzen.

Ehe wir zur Untersuchung der geometrischen Eigenschaften des, bei der Bestimmung der Function V auftretenden Strahlensystems übergehen, wollen wir noch hervorheben, daß die isothermen Parameter p, q, wenn man sie den Gleichungen (4*, 5*) gemäß als Functionen der Coordinaten x, y, z auffaßt, selbst Potentialfunctionen sind. Der Beweis dieser Behauptung ergiebt sich leicht mit Hilfe eines Theorems von Jacobi (Jacobi Gesammelte Werke Bd. II. pag. 208)[1]), nach welchem jede Größe σ, die als Function von x, y, z durch die Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

bestimmt wird, in welcher A, B, C beliebige Functionen von σ bedeuten, die der Gleichung

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0$$

genügen, eine Potentialfunction ist.

Die zwei Gleichungen (4*, 5*) lassen sich nämlich durch die eine:

$$0 = x\left(\frac{\partial \xi}{\partial p} - i\frac{\partial \xi}{\partial q}\right) + y\left(\frac{\partial \eta}{\partial p} - i\frac{\partial \eta}{\partial q}\right) + z\left(\frac{\partial \zeta}{\partial p} - i\frac{\partial \zeta}{\partial q}\right) + \frac{\partial \theta}{\partial p} - i\frac{\partial \theta}{\partial q}$$

ersetzen. Für diese Gleichung verschwindet offenbar, wegen der Voraussetzung isothermer Parameter, die Summe der Quadrate der Coefficienten von x, y, z. Ferner sind sämmtliche Coefficienten derselben, in Folge der für die Functionen ξ, η, ζ und θ geltenden Gleichung (12*) der Differentialgleichung

$$i\frac{\partial \psi}{\partial p} = \frac{\partial \psi}{\partial q}$$

unterworfen, welche aussagt, daß diese Coefficienten Functionen der Größe $\sigma = p + qi$ sind. Es ist daher σ selbst, und folglich auch jede der Größen p, q eine Potentialfunction.

Um jetzt die Gleichungen (4*, 5*) des bei unseren Betrachtungen auftretenden Strahlensystems in eine angemessene Form zu setzen, wollen wir drei neue Functionen u, v, w der Parameter p, q in die Rechnung einführen, welche der Bedingung genügen, daß

$$(13.) \qquad d\theta = u d\xi + v d\eta + w d\zeta$$

wird. Bei Erfüllung dieser Bedingung gehen die Gleichungen des Strahlensystems über in die folgenden:

1) Journal für Mathematik. Bd. 36. pag. 113—134.

$$(x-u)\frac{\partial \xi}{\partial p}+(y-v)\frac{\partial \eta}{\partial p}+(z-w)\frac{\partial \zeta}{\partial p} = 0$$

$$(x-u)\frac{\partial \xi}{\partial q}+(y-v)\frac{\partial \eta}{\partial q}+(z-w)\frac{\partial \zeta}{\partial q} = 0$$

aus denen folgt:

$$x-u = rX, \qquad y-v = rY, \qquad z-w = rZ \qquad (4.^{**})$$

welche das Strahlensystem als ein von den Punkten einer Fläche (u, v, w) ausgehendes darstellen und zeigen, daß jeder von einem Punkte (u, v, w) ausgehende Strahl die Richtungscosinus X, Y, Z besitzt. Drei Functionen u, v, w, welche der Bedingung (13) genügen, verlieren offenbar diese Eigenschaft nicht, wenn man sie beziehungsweise um τX, τY, τZ vermehrt, unter τ eine willkürliche Function von p, q verstanden; eine Operation, durch welche das Strahlensystem nur auf eine andere Anfangsfläche bezogen wird.

Die Gleichung (13) erfordert erstens die Erfüllung der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial q}+\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial \eta}{\partial q}+\frac{\partial w}{\partial p}\frac{\partial \zeta}{\partial q} = \frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial \xi}{\partial p}+\frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial \eta}{\partial p}+\frac{\partial w}{\partial q}\frac{\partial \zeta}{\partial p} \qquad (14.)$$

und wegen der für die Function θ geltenden Gleichung (12*) die auch die Functionen ξ, η, ζ beherrscht, das Bestehen der Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial p}+\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial \eta}{\partial p}+\frac{\partial w}{\partial p}\frac{\partial \zeta}{\partial q}+\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial \xi}{\partial q}+\frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial \eta}{\partial q}+\frac{\partial w}{\partial q}\frac{\partial \zeta}{\partial q} = 0. \qquad (15.)$$

Um die Bedeutung dieser Gleichungen in einfacherer Form zu übersehen, wollen wir für einen Augenblick den isothermen Parametern p, q die Bedeutung von Parametern der Krümmungslinien der Minimalfläche ξ, η, ζ beilegen. Bezeichnet alsdann ϱ den Hauptkrümmungsradius dieser Minimalfläche im Punkte (p, q), so gelten die Gleichungen:

$$\frac{\partial \xi}{\partial p} = \varrho\frac{\partial X}{\partial p}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial q} = -\varrho\frac{\partial X}{\partial q}$$

und entsprechende für die Differentialquotienten von η und ζ. Die Gleichungen (15.) und (16.) gehen alsdann mit Hilfe der vorstehenden über in:

$$\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial X}{\partial q}+\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial Y}{\partial q}+\frac{\partial w}{\partial p}\frac{\partial Z}{\partial q}+\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial X}{\partial p}+\frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial Y}{\partial p}+\frac{\partial w}{\partial q}\frac{\partial Z}{\partial p} = 0 \quad (14.^{*})$$

$$(15.^*)\quad \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial X}{\partial p}+\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial Y}{\partial p}+\frac{\partial w}{\partial p}\frac{\partial Z}{\partial p} = \frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial X}{\partial q}+\frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial Y}{\partial q}+\frac{\partial w}{\partial q}\frac{\partial Z}{\partial q}$$

denen genügt wird, wenn man die Functionen u, v, w der Bedingung:

$$(16.)\qquad dXdu+dYdv+dZdw = 0$$

unterwirft, welche keine andere ist, als diejenige, die die unendlich kleinen Deformationen einer Kugel vom Radius Eins bestimmt. Die Linienelemente der durch sie bestimmten Fläche (u, v, w) correspondiren den betreffenden der Kugel rechtwinklig.

Aus dreien dieser Bedingung genügenden Functionen u, v, w kann man, wie oben bemerkt, drei andere allgemeinere ableiten. Allein es erweist sich als vortheilhaft, gerade diese Functionen u, v, w zur Bestimmung der Ausgangsfläche des betrachteten Strahlensystsms zu wählen, da sie die Coordinaten der Mittelfläche desselben bestimmen.

In der im Anfange angeführten Abhandlung über die unendlich kleinen Deformationen einer krummen Fläche ist die Bestimmung der durch die Gleichung (16) definirten Functionen u, v, w auf die Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, zurückgeführt worden. Auch ohne die dort gegebenen Entwickelungen verfolgen zu müssen, wird man aus den nachstehend mitgetheilten Formeln für die Functionen u, v, w das Bestehen der Gleichung (16) ohne Weiteres verificiren können.

Ergiebt sich für die betrachtete Minimalfläche, für irgend welche Parameter p, q zweier orthogonalen isothermen Curvenschaaren die Gleichung:

$$(14.)\qquad dX^2+dY^2+dZ^2 = \lambda(dp^2+dq^2)$$

und ist φ irgend ein Integral der partiellen Differentialgleichung

$$(17.)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}+2\lambda\varphi = 0$$

so bestimmen die Gleichungen

$$(18.)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial p} &= X\frac{\partial\varphi}{\partial q}-\varphi\frac{\partial X}{\partial q} & \frac{\partial u}{\partial q} &= -X\frac{\partial\varphi}{\partial p}+\varphi\frac{\partial X}{\partial p}\\ \frac{\partial v}{\partial p} &= Y\frac{\partial\varphi}{\partial q}-\varphi\frac{\partial Y}{\partial q} & \frac{\partial v}{\partial q} &= -Y\frac{\partial\varphi}{\partial p}+\varphi\frac{\partial Y}{\partial p}\\ \frac{\partial w}{\partial p} &= Z\frac{\partial\varphi}{\partial q}-\varphi\frac{\partial Z}{\partial q} & \frac{\partial w}{\partial q} &= -Z\frac{\partial\varphi}{\partial p}+\varphi\frac{\partial Z}{\partial p} \end{aligned}$$

die gesuchten Functionen u, v, w durch Quadraturen.

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (17) ist durch die Gleichung

$$\varphi = \frac{\partial^2\psi}{\partial p\,\partial q} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \log\lambda}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial p} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \log\lambda}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial q}$$

gegeben, wenn ψ irgend eine Lösung der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial q^2} = 0$$

bezeichnet, von welcher Behauptung man sich leicht durch eine directe Rechnung überzeugt. Wenn man den obigen Werth von φ zur Darstellung der Functionen u, v, w durch die Gleichungen (18) benutzt, so erweisen sich die erforderten Quadraturen als ausführbar, und man erhält für u, v, w die Bestimmungen

$$\begin{aligned}
u &= \Omega X - \frac{\partial\psi}{\partial p}\frac{\partial X}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\frac{\partial X}{\partial q}\\
v &= \Omega Y - \frac{\partial\psi}{\partial p}\frac{\partial Y}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\frac{\partial Y}{\partial q}\\
w &= \Omega Z - \frac{\partial\psi}{\partial p}\frac{\partial Z}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\frac{\partial Z}{\partial q}\\
\Omega &= \frac{\partial^2\psi}{\partial p^2} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \log\lambda}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial p} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial \log\lambda}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial q},
\end{aligned} \tag{18.*}$$

durch welche die Gleichung (16) sich nach unmittelbarer Rechnung allgemein erfüllt erweist.

Der Differentialgleichung (17) genügt bekanntlich das vom Anfangspunkte der Coordinaten ξ, η, ζ auf die im Punkte (p, q) der betrachteten Minimalfläche stattfindende Tangentialebene gefällte Loth

$$P = X\xi + Y\eta + Z\zeta.$$

Führt man dasselbe als gegebene unabhängige Variable in die Rechnung ein, so kann man aus den Gleichungen (18) die Folgerungen:

$$\begin{aligned}
\xi\frac{\partial u}{\partial p} + \eta\frac{\partial v}{\partial p} + \zeta\frac{\partial w}{\partial p} &= P\frac{\partial\varphi}{\partial q} - \varphi\frac{\partial P}{\partial q}\\
\xi\frac{\partial u}{\partial q} + \eta\frac{\partial v}{\partial q} + \zeta\frac{\partial w}{\partial q} &= -P\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \varphi\frac{\partial P}{\partial p}
\end{aligned}$$

ziehen, und hiernach der Function θ die Gestalt

$$\theta = u\xi + v\eta + w\zeta - \int(\xi du + \eta dv + \zeta dw)$$

$$= u\xi + v\eta\zeta + w - \int\left\{\left(P\frac{\partial\varphi}{\partial q} - \varphi\frac{\partial P}{\partial q}\right)dp + \left(-P\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \varphi\frac{\partial P}{\partial p}\right)dq\right\}$$

geben.

Das System der Gleichungen (3*, 4*, 5*), welches jede Potentialfunction V mit verschwindender Hesse'scher Determinante definirt, läßt sich hiernach unter Benutzung der Gleichungen (4**) auch in das nachstehende verwandeln:

$$\text{(A.)} \quad V = rP + \int\left\{\left(P\frac{\partial\varphi}{\partial q} - \varphi\frac{\partial P}{\partial q}\right)dp + \left(-P\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \varphi\frac{\partial P}{\partial p}\right)dq\right\}$$

$$\text{(B.)} \quad \begin{aligned} x &= u + rX \\ y &= v + rY \\ z &= w + rZ \end{aligned}$$

welches vermöge der Gleichungen (B) die Variablen p, q, r als Functionen der Coordinaten eines Punktes (x, y, z) des Raumes bestimmt, und nach geschehner Bestimmung für V eine Potentialfunction mit verschwindender Hesse'scher Determinante ergiebt.

Zur Darstellung dieser Gattung von Potentialfunctionen ist daher die Kenntniß irgend zweier orthogonalen isothermen Curvenschaaren der Kugel und die Kenntniß irgend zweier Integrale P, φ der Differentialgleichung (17) ausreichend. Das Strahlensystem (B) ist von der Wahl der Function P unabhängig, während die Differentialquotienten von V in Bezug auf die Coordinaten x, y, z die Coordinaten ξ, η, ζ eines Punktes irgend einer Minimalfläche angeben.

Von welcher besonderen Wahl einer Minimalfläche ξ, η, ζ man auch ausgehe, um eine Potentialfunction von verschwindender Hesse'scher Determinante zu bestimmen, so wird man doch stets zur Bestimmung der Parameter p, q als Functionen der Coordinaten x, y, z auf das nämliche Strahlensystem (B) geführt werden, das keine Beziehung zu dieser besonderen Wahl mehr enthält, sondern nur eine solche zur Wahl der Function θ.

Was dieses Strahlensystem selbst anbetrifft, so lassen sich vermöge der von Herrn Kummer gegebenen Formeln mit Hilfe der Gleichung

$$dXdu + dYdv + dZdw = 0$$

die allgemeinen geometrischen Eigenschaften desselben sofort übersehen. Diese Formeln ergeben für die Werthe r', r'' der Abscissen r der Brennpunkte dieses Systems unmittelbar die Gleichungen

$$r' + r'' = 0 \qquad r'r'' = \varphi^2,$$

welche zeigen, daß die Fläche u, v, w die Mittelfläche des Systems darstellt, und daß dasselbe ein Strahlensystem mit imaginären Brennpunkten ist. Nur für solche Werthe p, q, für welche die Function φ der Null gleich wird, findet ein Schneiden zweier Nachbarstrahlen in der Fläche (u, v, w) selbst statt, und alsdann stellt die Curve $r = 0$, $\varphi = 0$ eine in dieser Fläche liegende vereinzelte Brennlinie dar.

Das Strahlensystem (B) ist schon längst als ein mit der Theorie der Minimalflächen auf das Innigste verknüpftes von Herrn Ribaucour (Étude des élassoides ou surfaces à courbure moyenne nulle) erkannt und in die Theorie derselben eingeführt worden.

Um in der Folge nicht durch Nebenbetrachtungen aufgehalten zu werden, wollen wir noch die durch die Formeln (9) bestimmten Ausdrücke C_{ik} durch die Einführung der Function φ anstatt der Function θ in eine andere Form setzen.

Aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial \theta}{\partial p} = u\frac{\partial \xi}{\partial p} + v\frac{\partial \eta}{\partial p} + w\frac{\partial \zeta}{\partial p}$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial q} = u\frac{\partial \xi}{\partial q} + v\frac{\partial \eta}{\partial q} + w\frac{\partial \zeta}{\partial q}$$

ergeben sich durch Differentiation in Beziehung auf die Größen p und q die folgenden:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial p^2} = \Sigma\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial p} + \Sigma u\frac{\partial^2 \xi}{\partial p^2}$$
$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial p\,\partial q} = \Sigma\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial \xi}{\partial p} + \Sigma u\frac{\partial^2 \xi}{\partial p\,\partial q} = \Sigma\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial q} + \Sigma u\frac{\partial^2 \xi}{\partial p\,\partial q}$$
$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial q^2} = \Sigma\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial \xi}{\partial q} + \Sigma u\frac{\partial^2 \xi}{\partial q^2},$$

welche mit Hilfe der Gleichungen (8) und der Gleichungen (18) in die nachstehenden übergeben:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial p^2} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial \theta}{\partial p} - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial \theta}{\partial q} = -\varphi c_{12} - c_{11}\Sigma Xu$$
$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial p\,\partial q} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial \theta}{\partial p} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial \theta}{\partial q} = \varphi c_{11} - c_{12}\Sigma Xu = -\varphi c_{22} - c_{12}\Sigma Xu$$
$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial q^2} - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial \theta}{\partial p} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial \theta}{\partial q} = \varphi c_{12} - c_{22}\Sigma Xu.$$

Aus ihnen ergeben sich die Ausdrücke C_{ik} als durch die Gleichungen

$$(19.)\qquad \begin{aligned} C_{11} &= -\varphi c_{12} - c_{11} r \\ C_{12} &= \varphi c_{11} - c_{12} r = -\varphi c_{22} - c_{12} r \\ C_{22} &= \varphi c_{12} - c_{22} r \end{aligned}$$

bestimmt. Man bemerkt leicht die Beziehung $c_{11} + c_{22} = 0$, welche der Voraussetzung isothermer Parameter p, q für die betrachtete Minimalfläche entspricht.

Sind insbesondere p, q Parameter der asymptotischen Linien dieser Minimalfläche, so werden bekanntlich $c_{11} = c_{22} = 0$, $c_{12} = 1$ und die Ausdrücke C_{ik} ergeben sich als:

$$(19.^*)\qquad \begin{aligned} C_{11} &= -\varphi \\ C_{12} &= -r \\ C_{22} &= \varphi. \end{aligned}$$

II.

Bezeichnen ξ, η, ζ die drei nach den rechtwinkligen Coordinatenaxen x, y, z geschätzten Componenten der Geschwindigkeit eines Theilchens einer stationär bewegten und incompressiblen Flüssigkeit, auf welche äußere Kräfte nicht wirken, und werden diese Componenten als die Differentialquotienten eines Geschwindigkeitspotentials V vorausgesetzt, so besteht zwischen ihnen und dem Drucke Π in einen beliebigen Punkt (x, y, z) dieser Flüssigkeit bekanntlich die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho}\Pi = \text{Const} - \tfrac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

in welcher ϱ die constante Dichtigkeit der Flüssigkeit bezeichnet. In einer Fläche, für welche der Druck Π eine Constante ist, hat daher auch die Größe $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, welche wir durch 2τ bezeichnen wollen, einen constanten Werth, und es drückt die Gleichung

$$(20.)\qquad 2\tau = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2$$

die Gleichung einer bestimmten Fläche constanten Druckes in der Flüssigkeit aus, falls der Größe a ein bestimmter constanter Werth beigelegt wird. Soll für diesen bestimmten Werth a die durch die Gleichung (20) dargestellte Fläche gleichzeitig eine Stromfläche in der Flüssigkeit darstellen, so ist es nothwendig, daß jedes zur Zeit t im Punkte (x, y, z) dieser Fläche befindliche Theilchen, nach

Verlauf eines Zeitelementes dt wiederum in einen Punkt derselben Fläche geführt werde, oder mit anderen Worten, daß die Coordinaten $x + \xi dt$, $y + \eta dt$, $z + \zeta dt$, in welche nach Ablauf des Zeitelementes dt die Coordinaten x, y, z übergegangen sein werden, der Gleichung (20) Genüge leisten.

Diese Bedingung erfordert, daß für alle Werthe der Coordinaten x, y, z, für welche die Gleichung (20) besteht, auch die Gleichung

$$\xi \frac{\partial \tau}{\partial x} + \eta \frac{\partial \tau}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0 \tag{21.}$$

bestehe. Bezeichnet man die totale Aenderung, welche eine, an das Flüssigkeitstheilchen gebundene Function ψ der Coordinaten x, y, z desselben im Zeitelemente dt erleidet, durch $d\psi$, setzt also

$$\frac{d\psi}{dt} = \xi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \psi}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

so ist die vorstehende Gleichung gleichbedeutend mit der folgenden:

$$\frac{d\tau}{dt} = 0. \tag{22.}$$

Wir wollen voraussetzen, daß man als Geschwindigkeitspotential V eine Potentialfunction mit verschwindender Hesse'scher Determinante gewählt habe. Alsdann lassen sich die Geschwindigkeitscomponenten ξ, η, ζ als die durch Functionen zweier Parameter p, q auszudrückenden Coordinaten jedes Punktes einer Minimalfläche darstellen, für welche diese Parameter die Bedeutung von Parametern der asymptotischen Linien besitzen mögen. Man findet alsdann die totalen Aenderungen dieser Componenten im Zeitelemente dt durch die Gleichungen

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial \xi}{\partial q}\frac{dq}{dt} \tag{23.}$$

und zwei ähnliche für η, ζ, in denen die Werthe von $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$ durch die Formeln

$$\frac{dp}{dt} = \xi \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial p}{\partial y} + \zeta \frac{\partial p}{\partial z}$$
$$\frac{dq}{dt} = \xi \frac{\partial q}{\partial x} + \eta \frac{\partial q}{\partial y} + \zeta \frac{\partial q}{\partial z}$$

gegeben sind. Unter Hinzuziehung der Gleichungen (7) und mit

Hilfe der Formeln (19*) des ersten Abschnittes gehen die letzteren Gleichungen in

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{\varphi^2+r^2}\left(\varphi\frac{\partial\tau}{\partial p}+r\frac{\partial\tau}{\partial q}\right)$$
$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{\varphi^2+r^2}\left(r\frac{\partial\tau}{\partial p}-\varphi\frac{\partial\tau}{\partial q}\right)$$

über. Wenn man die linken Seiten der Gleichungen (23) der Reihe nach mit ξ, η, ζ multiplicirt und die Producte addirt, so ergiebt sich unter Benutzung der vorstehenden Gleichungen:

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{1}{\varphi^2+r^2}\left[\varphi\left(\frac{\partial\tau^2}{\partial q^2}-\frac{\partial\tau^2}{\partial p^2}\right)+2r\frac{\partial\tau}{\partial p}\frac{\partial\tau}{\partial q}\right].$$

Soll daher die dem eingeführten Geschwindigkeitspotentiale entsprechende Flüssigkeitsbewegung die Fläche $2\tau-a^2=0$ als eine Stromfläche enthalten, so müssen die Gleichungen

$$2\tau-a^2 = \xi^2+\eta^2+\zeta^2-a^2 = 0 \tag{20.}$$

$$\varphi\left(\frac{\partial\tau^2}{\partial q^2}-\frac{\partial\tau^2}{\partial p^2}\right)+2r\frac{\partial\tau}{\partial p}\frac{\partial\tau}{\partial q} = 0 \tag{22.}$$

für die betreffenden Werthe von p, q, r gleichzeitig bestehen. Die letzte beider Gleichungen verlangt hierfür die Bedingung:

$$\frac{\partial\tau}{\partial p}\frac{\partial\tau}{\partial q} = 0$$

welche lehrt, daß mit $2\tau-a^2$ gleichzeitig entweder nur einer, oder beide Differentialquotienten der Function τ verschwinden müssen.

Ist die erste dieser beiden Bedingungen erfüllt, und ist $\frac{\partial\tau}{\partial p}$ der nicht verschwindende Differentialquotient, so muß wegen $d\tau=0$ die Gleichung

$$\frac{\partial\tau}{\partial p}dp = 0$$

bestehen, also für $2\tau-a^2=0$, die Größe p selbst einen constanten Werth p_0 besitzen. Unter diesen Verhältnissen muß die Gleichung

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = a^2$$

für $p=p_0$ erfüllt sein, oder mit anderen Worten, die dem Geschwindigkeitspotential V entsprechende Minimalfläche muß eine sphärische Asymptotenlinie vom Kugelradius a besitzen.

Wird alsdann noch die der Gleichung (17) genügende, sonst willkürliche Function φ der Bedingung unterworfen, für $p = p_0$ zu verschwinden, die sich auf unendlich viele Arten erfüllen läßt, so bestehen die Gleichungen (20, 22) in der That gleichzeitig.

Der Bedingung $p = p_0$ entsprechen im Raume (x, y, z) die Punkte einer Fläche, welche den Gleichungen (4*, 5*) zufolge eine geradlinige sein wird. Da aber für $p = p_0$ die Function φ verschwindet, so werden sich zufolge der früheren Bemerkung hinsichtlich der Brennpunkte des betreffenden Strahlensystems die Geraden dieser Fläche auf der vereinzelten Abwickelbaren dieses Strahlensystems befinden.

Jeder Minimalfläche, welche eine sphärische Asymptotenlinie besitzt, lassen sich daher Potentialfunctionen zuordnen, welchen eine Flüssigkeitsbewegung entspricht, für die eine abwickelbare Oberfläche gleichzeitig Stromfläche und Fläche constanten Druckes der Flüssigkeit wird. Die Flüssigkeitstheilchen dieser Oberfläche bewegen sich längs geodätischer Linien derselben mit der Geschwindigkeit a.

Bei Erfüllung der zweiten der oben erwähnten Bedingungen, wenn nämlich für $2\tau - a^2 = 0$ beide Differentialquotienten von τ verschwinden, werden die Gleichungen (20, 22) für jede Function φ ohne Weiteres gleichzeitig erfüllt.

In diesem Falle sagen die Bedingungen

$$2\tau - a^2 = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial q} = 0$$

aus, daß die zu Grunde gelegte Minimalfläche durch eine Kugel vom Radius a längs einer in ihr liegenden Curve berührt werden müsse, und umgekehrt sind unter Zugrundelegung einer solchen Minimalfläche die vorstehenden Gleichungen stets gleichzeitig erfüllt.

Jeder Minimalfläche, die längs einer in ihr befindlichen Curve durch eine Kugel berührt werden kann, lassen sich daher unendlich viele Potentialfunctionen zuordnen, denen Flüssigkeitsbewegungen entsprechen, für welche eine geradlinige Fläche gleichzeitig Stromfläche und Fläche constanten Druckes der Flüssigkeit wird.

Da in Folge des gleichzeitigen Verschwindens der Differentialquotienten $\frac{\partial \tau}{\partial p}, \frac{\partial \tau}{\partial q}$ auch die totalen Differentiale dp und dq der betreffenden Veränderlichen p, q verschwinden, so behalten diejenigen Flüssigkeitstheilchen, welche auf dieser geradlinigen Fläche sich befinden, dieselben Parameter p, q, während ihrer weiteren

Bewegung bei und durchlaufen die geraden Linien dieser Fäche mit der constanten Geschwindigkeit a.

In Beziehung auf die, den Potentialfunctionen von verschwindender Hesse'scher Determinante entsprechenden Flüssigkeitsbewegungen ist es noch wesentlich hervorzuheben, daß für diejenigen Werthe der Parameter p, q, welche zu unendlich fernen Punkten der vorausgesetzten Minimalfläche führen, die Geschwindigkeitscomponenten in allen Punkten der betreffenden Strahlen des Strahlensystems (4*, 5*) unendlich große Werthe annehmen. Der von Flüssigkeit erfüllte Raum darf daher diese Strahlen nicht enthalten. Die Flüssigkeit muß in Folge dessen durch feste aus Stromlinien gebildete Wände auf einen sich ins Unendliche[1]) erstreckenden Raum beschränkt gedacht werden, innerhalb dessen gesammter, durch diese Wände und die freien Grenzen dargestellten, Begrenzung die erwähnten Strahlen nicht liegen.

Beispiele, welche die vorgetragenen Entwickelungen zu erläutern geeignet sind, erfordern die Darstellung solcher Minimalflächen, die entweder eine sphärische Asymptotenlinie besitzen, oder von einer Kugel längs einer Curve berührt werden. Beide Gruppen von Minimalflächen lassen sich in aller Allgemeinheit durch bekannte von Herrn Schwarz gegebene Formeln darstellen. Allein die Benutzung dieser Formeln ist wegen der in ihnen auftretenden Quadraturen auch für einfachere Beispiele mit mannigfachen Schwierigkeiten verknüpft, so daß man genöthigt wird, andere Wege zu betreten.

In endlicher Form ist mir nur die Angabe einer Minimalfläche gelungen, deren sphärische Asymptotenlinie eine sphärische Schraubenlinie ist. Das sich an dieselbe knüpfende Beispiel einer interessanten Flüssigkeitsbewegung erscheint für eine Mittheilung an dieser Stelle noch zu verwickelt. Dagegen bietet das Catenoid ein einfaches Beispiel für die Bewegungen der zweiten Art, für welche die Stromcurven in der Fläche constanten Drucks geradlinig sind.

Durch die Gleichungen:

$$(a.)\quad \xi = \frac{a}{C_0^2} C \cos q\,, \quad \eta = \frac{a}{C_0^2} C \sin q\,, \quad \zeta = \frac{a}{C_0^2}(p_0 - p + C_0 S_0)$$

in denen p_0 eine willkürliche positive Größe bezeichnet, während C, S und C_0, S_0 die Functionen

1) Eine stationäre Bewegung in einem endlichen Raume, der ein Geschwindigkeitspotential zukommt, besteht nach einem bekannten Satz von Herrn von Helmholtz nicht.

$$C = \tfrac{1}{2}(e^p + e^{-p}), \quad C_0 = \tfrac{1}{2}(e^{p_0} + e^{-p_0})$$
$$S = \tfrac{1}{2}(e^p - e^{-p}), \quad S_0 = \tfrac{1}{2}(e^{p_0} - e^{-p_0})$$

bedeuten, ist offenbar ein Catenoid dargestellt, für welches

$$2\tau = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{a^2}{C_0^4}[C^2 + (p_0 - p + C_0 S_0)^2] \tag{b.}$$

wird. Die Coordinaten X, Y, Z der sphärischen Abbildung desselben ergeben sich durch die Gleichungen

$$X = \frac{\cos q}{C}, \quad Y = \frac{\sin q}{C}, \quad Z = \frac{S}{C}.$$

Für die Functionen u, v, w wählen wir der Reihe nach die Werthe bY, $-bX$, 0, welche offenbar der für diese Functionen aufgestellten Bedingungsgleichung

$$du\,dX + dv\,dY + dw\,dZ = 0$$

genügen.

Diese Wahl entspricht allgemein der Annahme $\varphi = bZ$ oder $\theta = b\mathfrak{z}$, wenn durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Coordinaten der Bonnet'schen Adjungirten der Fläche ξ, η, ζ bezeichnet werden.

Das Strahlensystem, welches die Werthe der Parameter p, q den Punkten (x, y, z) des Raumes zuordnet, wird nunmehr durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= bY + rX \\ y &= -bX + rY \\ z &= \phantom{-bX+{}} rZ \end{aligned}$$

gegeben. Die Ausgangsfläche dieses Strahlensystems ist eine in der Ebene $z = 0$ liegende Kreisfläche, deren Radius gleich b ist und deren Mittelpunkt mit dem Coordinatenanfangspunkte zusammenfällt. Wenn man die Veränderlichkeit des Parameters p auf positive Werthe beschränkt, während der Parameter q jeden reellen Werth annehmen kann, so entspricht jedem Punkte dieser Kreisfläche nur ein von ihm ausgehender Strahl. Die Größe Z bleibt auf positive Werthe beschränkt. Durch Elimination der Größen r und q ergibt sich aus (c) die Gleichung:

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2(1 - Z^2)} - \frac{z^2}{b^2 Z^2} = 1,$$

welche zeigt, daß diejenigen Flächen, in denen der Parameter p constante Werthe annimmt, eine Schaar confocaler Rotationshyperboloide bilden, welche für $p = 0$ in eine den Kreis der Ausgangsfläche ausschließende Ebene, für $p = \infty$ in die Z-Axe ausarten. Diese Gleichung besitzt für bestimmt gegebene Werthe der Coordinaten x, y, z nur eine positive Wurzel Z. Es ist daher sowohl die Größe Z als auch die Größe p durch die Angabe der Werthe der Coordinaten x, y, z eindeutig bestimmt. Hiernach ergiebt sich die Größe r ebenfalls eindeutig bestimmt aus der Gleichung

$$r = \frac{z}{Z},$$

so lange $p > 0$ ist. Die Größe r verschwindet zugleich mit der Coordinate z in allen Punkten der Ausgangsfläche. In Folge dessen sind auch die Größen X, Y und $\cos q$, $\sin q$, durch die Coordinaten x, y, z eindeutig bestimmt. Durch die Gleichungen (a) des Catenoids, welches der Bildung der Geschwindigkeitscomponenten ξ, η, ζ zu Grunde liegt, sind die Bedingungen

$$2\tau = a^2, \quad \frac{\partial \tau}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial q} = 0$$

für $p = p_0$ offenbar erfüllt. Es wird daher für eine Flüssigkeitsbewegung, der in jedem Punkte des Raumes die durch die Größen ξ, η, ζ gegebenen Geschwindigkeitscomponenten zukommen, die Fläche $p = p_0$, oder das durch die Gleichung

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2(1 - Z_0^2)} + \frac{z^2}{b^2 Z_0^2} = 1$$

bestimmte Rotationshyperboloid, sowohl eine Stromfläche, als auch eine Fläche gleichen Druckes sein.

Die dritte der Gleichungen (a) zeigt, daß für alle Punkte des Raumes, in denen $p < p_0 + S_0 C_0$ ist, die Geschwindigkeitscomponente ζ positiv ausfällt, die in ihnen strömenden Flüssigkeitstheilchen also von kleineren zu größeren Werthen der Coordinate z übergehen. Wir bezeichnen der Kürze wegen durch p_1 den Werth von $p_0 + S_0 C_0$ und durch Z_1 den Werth von Z für $p = p_1$.

Man construire nunmehr in der Ebene $z = 0$ um den Coordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt einen Kreis, dessen Radius zwischen den Werthen $b\sqrt{1 - Z_0^2}$ und $b\sqrt{1 - Z_1^2}$ enthalten ist, und für jeden Punkt dieser Kreislinie die durch denselben hindurchgehende Stromcurve. Eine solche Stromcurve wendet sich zunächst nach der Seite der wachsenden Werthe der Coordinate z, da der Punkt, von dem sie ausgeht, in dem Raume der positiven Werthe der Größe ζ enthalten ist, und schreitet dauernd nach Orten abnehmender Werthe des Parameters p fort. Denn das Vorzeichen der Ableitung $\frac{dp}{dt}$ erweist sich für Werthe von p, die größer als p_0 sind und für positive Werthe von r, als stets negativ. Mit wachsender Zeit nähert sich für das betrachtete Flüssigkeitstheilchen der Werth des Parameters p dem Werthe p_0 unbegrenzt, und seine Bahn fällt immer näher mit einem Individuum derjenigen Schaar der Erzeugenden des Hyperboloids zusammen, längs welcher die Flüssigkeitstheilchen der unter constanten Druck stehenden Grenzfläche sich bewegen. Der Inbegriff der durch alle Punkte des construirten Kreises gezogenen Stromlinien führt zu einer nach zwei Seiten sich ins Unendliche erstreckenden Fläche, die sich im Unendlichen dem Hyperboloide $p = p_0$ unbegrenzt annähert. Wählt man diese Fläche zu einer festen Wand, und denkt man sich die Flüssigkeit auf den zwischen ihr und dem Rotationshyperboloid $p = p_0$ liegenden Theil des Raumes beschränkt, so erhält man das Beispiel eines sich ins Unendliche erstreckenden stationären Wasserstrahls von der äußeren Gestalt eines Rotationshyperboloids, der im Fließen einen sich ebenfalls ins Unendliche erstreckenden festen Körper bespült; in der freien Begrenzungsfläche dieses Strahles ist überall der Druck constant; die Bewegung der Flüssigkeitstheilchen in ihr ist geradlinig und erfolgt mit constanter Geschwindigkeit. Im Unendlichen ist die bespülende Wasserschicht unendlich dünn, und die Form des festen Körpers hyperboloidisch.

Construirt man andrerseits zwischen irgend zwei Punkten, welche auf demjenigen Kreise liegen, in dem das Hyperboloid $p = p_0$ von der Ebene $z = 0$ geschnitten wird, eine sich selbst nicht schneidende Curve, die nirgends in das Innere des in derselben Ebene mit dem Radius $b\sqrt{1-Z_1^2}$ gezeichneten concentrischen Kreises eintritt, und faßt den Inbegriff aller, die Punkte dieser Curve passirenden Stromlinien als eine feste Wand bildend auf, so erhält man das Beispiel einer stationären Flüssigkeitsbewegung in einem sich nach zwei Seiten ins Unendliche erstreckenden Bette, dessen Ufer durch zwei windschiefe Gerade gebildet werden. Die freie unter constantem Drucke stehende Oberfläche der strömenden Flüssigkeit hat die Gestalt eines Theils eines Rotationshyperboloids, und die Bewegung in ihr geschieht geradlinig. Das Bett selbst verflacht und erweitert sich im Unendlichen unbegrenzt.

Entsprechende Constructionen kann man auch für den Raum, der der äußeren Seite des Hyperboloids $p = p_0$ anliegt, ausführen, und Beispiele anderer Bewegungsformen darstellen. Man muß aber aus diesem Raume stets den Begrenzungskreis vom Radius b der Ausgangsfläche des Strahlensystems ausgeschlossen halten, in dessen Punkten die Beschleunigungen $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ unendlich große Werthe erlangen würden, in gleicher Weise wie bisher mit den Räumen, in denen ζ negativ wird, auch die z-Axe ausgeschlossen wurde, in welcher die Geschwindigkeitscomponenten selbst unendlich groß werden.

Längs der gesammten hyperboloidischen Oberfläche $p = p_0$ verschwinden in Folge der in ihr statthabenden geradlinigen gleichförmigen Bewegung der Flüssigkeitstheilchen die Werthe der Beschleunigungen $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, und daher auch die Differentialquotienten

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Es behält daher der Druck Π in unendlicher Nähe dieser Fläche denselben constanten Werth bei, der auf dem Hyperboloid selbst stattfindet. Es ist hiernach, den früheren Constructionen folgend, möglich, eine unendlich dünne Flüssigkeitsschale, deren Gestalt annähernd die eines hyperboloidischen Mantels ist, herauszuheben, welche einen freien Flüssigkeitsstrahl darstellt, auf dessen äußerer und innerer Seite der Druck Π denselben Werth hat, wie im ganzen Inneren desselben.

Die Bestimmung der endlichen Gleichungen der Stromlinien für das vorstehend behandelte Beispiel einer Flüssigkeitsbewegung ist, wie man leicht bemerkt, auf Quadraturen zurückführbar. Das Geschwindigkeitspotential der in Rede stehenden Bewegung erweist sich als eine vieldeutige Function der Coordinaten x, y, z.

Am Schlusse sei es gestattet, noch zu bemerken, daß den vorgetragenen ähnliche Betrachtungen sich auch an Potentialfunctionen von verschwindender Hesse'scher Determinante knüpfen lassen, welche die Zeit t explicite enthalten. Die durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
V &= x\xi + y\eta + z\zeta + t\vartheta - \theta \\
0 &= x\frac{\partial \xi}{\partial p} + y\frac{\partial \eta}{\partial p} + z\frac{\partial \zeta}{\partial p} + t\frac{\partial \vartheta}{\partial p} - \frac{\partial \theta}{\partial p} \\
0 &= x\frac{\partial \xi}{\partial q} + y\frac{\partial \eta}{\partial q} + z\frac{\partial \zeta}{\partial q} + t\frac{\partial \vartheta}{\partial q} - \frac{\partial \theta}{\partial q}
\end{aligned}$$

definirten Potentialfunctionen, in denen ξ, η, ζ die als Functionen zweier Variablen p, q gegebenen Coordinaten eines Punktes einer Minimalfläche, ϑ und θ zwei Functionen derselben Variablen mit verschwindendem zweiten Differentialparameter für diese Minimalfläche darstellen, erlauben Beispiele von nicht stationären Bewegungen einer incompressiblen Flüssigkeit mit freien Grenzen von constantem Drucke darzustellen, falls auf die Flüssigkeit äußere Kräfte nicht wirken.

Ueber eine Abänderung des ersten Hermite'schen Beweises für die Transcendenz der Zahl e.

Von

O. Venske.

(Vorgelegt von H. A. Schwarz.)

Die berühmte Hermite'sche Abhandlung „Sur la fonction exponentielle" (Paris 1874) enthält zwei Beweise für den Satz, daß die Grundzahl e des natürlichen Logarithmensystems keine algebraische Zahl ist. Bei dem ersten dieser beiden Beweise, welcher sich vor dem zweiten durch größere Einfachheit der angewendeten Hülfsmittel auszeichnet, handelt es sich hauptsächlich darum, den Nachweis zu führen, daß eine gewisse Determinante Δ_0, deren Elemente bestimmte Integrale sind, einen von Null verschiedenen Werth besitzt. Für den allgemeinen Fall hat Herr Hermite diesen Nachweis geführt; es giebt jedoch Ausnahmefälle, auf welche sich sein Nachweis nicht erstreckt. Dies ist wohl der Grund, weshalb Herr Hermite zu dem ersten Beweise, um seine eigenen Worte zu gebrauchen, „une seconde démonstration plus rigoureuse" hinzugefügt hat. Während Herr Hermite bei dem ersten Beweise von der besonderen Annahme ausgeht, daß gewissen in der erwähnten Abhandlung mit μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_n$ bezeichneten ganzzahligen Exponenten stets derselbe Werth μ beigelegt wird, giebt er bei seinem zweiten Beweise diesen Exponenten zwar auch specielle, aber doch solche Werthe, welche nicht sämmtlich einander gleich sind. Wie ich gefunden habe, ist es möglich, dadurch daß den Exponenten

$$\mu,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_n$$

$n+1$ von einander verschiedene passend gewählte Werthereihen beigelegt werden, den ersten der beiden Hermite'schen Beweise abzuändern, ohne die Einfachheit desselben zu beeinträchtigen, und, ohne daß es nöthig wird, einen Ausnahmefall zu berücksichtigen, allgemein den Nachweis zu führen, daß die in Betracht kommende Determinante einen von Null verschiedenen Werth besitzt.

Es seien

$$(\mu_{g,h}) \qquad (z_g) \qquad (g, h = 0, 1, \ldots, n)$$

zwei Systeme ganzer positiver Zahlen, welche nur der Beschränkung unterliegen, daß

$$\mu_{0,h} \leqq \mu_{g,h} \gtreqless \mu_{0,h}+1,$$
$$\mu_{0,h}-\mu_{0,i} = h-i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$
$$z_h < z_i; \qquad (h < i)$$

ferner sei

$$M_h = \sum\nolimits_g \mu_{g,h},$$
$$F_h(z) = \prod\nolimits_g (z-z_g)^{\mu_{g,h}},$$
$$F_h^{(\nu)}(z) = \frac{d^\nu F_h(z)}{dz^\nu},$$
$$P_{g,h} = \frac{1}{\mu_{0,h}!} \sum\nolimits_\nu F_h^{(\nu)}(z_g),$$
$$(\nu = \mu_{g,h},\ \mu_{g,h}+1,\ \ldots,\ M_h);$$

dann ist $P_{g,h}$ eine ganze Zahl, und es besteht nach einem bekannten Satze der Integralrechnung die Formel

$$\text{(1)} \qquad e^{z_g} P_{0,h} - e^{z_0} P_{g,h} = \frac{e^{z_0+z_g}}{\mu_{0,h}!} \int_{z_0}^{z_g} e^{-z} F_h(z)\, dz.$$

Unterwirft man $\mu_{0,0}$ der weiteren Bedingung, so groß zu sein, daß der absolute Betrag der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Größe hinreichend klein wird, so müßte, wenn e der ganzzahligen algebraischen Gleichung

$$\text{(2)} \qquad \sum\nolimits_g N_g e^{z_g} = 0$$

genügte, für jeden Werth des Index h auch

$$\text{(3)} \qquad \sum\nolimits_g N_g P_{g,h} = 0$$

sein.

Das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen (3) erfordert, daß die Determinante

$$|P_{g,h}| = 0 \tag{4}$$

ist. Eine einfache Rechnung ergiebt, daß die Größe $e^{-\Sigma z_g}|P_{g,h}|$ folgender Determinante gleich ist

$$|e^{-z_0}P_{0,h} - e^{-z_1}P_{1,h},\ e^{-z_1}P_{1,h} - e^{-z_2}P_{2,h},\ \ldots,\ e^{-z_{n-1}}P_{n-1,h} - e^{-z_n}P_{n,h},\ e^{-z_n}P_{n,h}|.$$

Benutzt man zur Abkürzung die Bezeichnung

$$J_{g,h} = \int_{z_g}^{z_{g+1}} e^{-z}F_h(z)\,dz, \qquad (z_{n+1} = \infty)$$

so ist mit Rücksicht auf (1) die Gleichung

$$|J_{g,h}| = 0$$

eine Folge der Gleichung (4).

Im Widerspruch hiermit lassen sich, wie sogleich gezeigt werden wird, den gestellten Bedingungen genügende Exponentensysteme $(\mu_{g,h})$ finden, für welche die Determinante der Integrale $J_{g,h}$ nicht verschwindet.

Es werde, unter m eine positive ganze Zahl verstanden, welche höchstens gleich n ist, für die Determinante

$$|J_{k,l}| \qquad (k, l = m, m+1, \ldots, n)$$

und für die Subdeterminanten ihrer ersten Horizontalreihe $(l = m)$ bezw. die Bezeichnung $\varDelta_m$ und $\varDelta_{k,m}$ eingeführt, nach welcher die Identitäten

$$\varDelta_m = \textstyle\sum_k J_{k,m}\varDelta_{k,m}$$

$$\varDelta_{m,m} = \varDelta_{m+1}$$

bestehen.

Setzt man die Determinante $\varDelta_{m+1}$ von Null verschieden voraus und wählt, was mindestens auf eine Art möglich ist, die Exponenten $\mu_{g,m}$ in der Weise, daß alle von Null verschiedenen Glieder der Reihe

$$\varDelta_{m,m}(-1)^{\mu_{m,m}},\ \varDelta_{m+1,m}(-1)^{\mu_{m,m}+\mu_{m+1,m}},\ \ldots,\ \varDelta_{n,m}(-1)^{\mu_{m,m}+\cdots+\mu_{n,m}}$$

dasselbe Zeichen haben, so erhält auch $\varDelta_m$ einen von Null verschiedenen Werth. Denn, da die Größen

$$J_{m,m}(-1)^{\mu_{m,m}},\ J_{m+1,m}(-1)^{\mu_{m,m}+\mu_{m+1,m}},\ \ldots,\ J_{n,m}(-1)^{\mu_{m,m}+\cdots+\mu_{n,m}}$$

zeichengleich sind, so gilt bei der angegebenen Wahl dasselbe von den Größen

$$J_{m,m}\Delta_{m,m}, \; J_{m+1,m}\Delta_{m+1,m}, \; \ldots, \; J_{n,m}\Delta_{n\,m}.$$

Die erste derselben ist von Null verschieden, also hat auch ihre Summe

$$\sum_k J_{k,m}\Delta_{k,m} = \Delta_m$$

einen von Null verschiedenen Werth.

Nun verschwindet

$$\Delta_n = J_{n,n}$$

bei keiner Wahl der Exponenten $\mu_{0,n}, \ldots, \mu_{n,n}$. Durch wiederholte Anwendung des angedeuteten Verfahrens gelangt man also zu Exponentensystemen, für welche die Determinanten

$$\Delta_{n-1}, \; \Delta_{n-2}, \; \ldots, \; \Delta_0$$

einzeln von Null verschieden sind.

Hierdurch ist die oben aufgestellte Behauptung gerechtfertigt und nachgewiesen, daß die Annahme (2) auf einen Widerspruch führt.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

März und April 1890.

(Fortsetzung.)

a. Mémoires de l'Académie Imp. de St. Petersbourg. VII. série. Tome XXXVII. N. 4. 5. 1889/90.
b. Bulletin de l'Acad. Imp. de St. P. Nouvelle série. I. (XXXIII). N. 3.

Annalen des physikalischen Central-Observatoriums. Jahrgang 1888. Theil II. St. Petersburg 1889.

Записки Кiебскаго Общества Естествоиспытателей. X, 2. Кiевъ 1889. (Mémoires de la Société des Naturalistes de Kiew. Tome X. livr. 2. Kiew 1889.)

Bulletin de la Société Imp. des Naturalistes de Moscou. Année 1889. N. 3. Moscou 1889.

Meteorologische Beobachtungen der landwirthschaftlichen Akademie bei Moskau. (Jahrg. 1889, erste Hälfte). Moskau 1889.

Записки математическаго отбѣленiя Новороссiйскаго Общества Естествоиспытателей. X. Одесса 1889. (Mémoires de la section mathématique de la Société des Naturalistes de la Nouvelle Russie. Odessa 1889. T. X.)

Записки новороссiйскаго общества естествоиспытателей XIV, 2. Одесса 1889. (Mémoires de la Société des Naturalistes de la Nouvelle Russie. (Odessa). T. XIV. Part. 2. Odessa 1889.)

Meteorologische Beobachtungen des Tifliser physikalischen Observatoriums in den Jahren 1887—1888. Tiflis 1889.
Différentes formes de grêlons observés au sud-ouest de la Russie. Notice par prof. A. Klossowsky.
Meteorologische Beobachtungen der Sternwarte in Dorpat. Ende 1888. Jan.—Mai 1889.
Académie Royale de Belgique. Bulletin. Année 60. 3. série. Tome 19. N. 2. 3. Bruxelles.
C. W. Borchardt et son oeuvre par M. M. d'Ocagne (Extraits de la Revue des questions scientifiques.) Bruxelles 1890.
Annales de la Société géologique de Belgique. Tome XVII. 1. Livr. Liège 1890.
Sur quelques plantes dans le Test calcaire des mollusques par M. Ed. Bornet. et Ch. Flahault. (Extrait du Bulletin de la Société botanique de France. Tome XXXVI.) Paris 1889.
Bulletin de la Société mathématique de France. Tome XVII. N. 6 et dernier Tome XVIII. N. 2. 3 et 4. Paris 1890.
Bijdragen tot de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 5. vol greeks — 5. deel. 2de Aflevering. S 'Gravenhage 1890.
Programma certaminis poetici ab Academia regia disciplinarum Nederlandica ex legato Hoeufftiano in annum 1891 indicti. Amsterdam 1890.
Kongl. vitterhets historie och antiquitets Akademiens Månadsblad. 9. 10 Argangen. 1880, 1881. Stockholm 1881, 82.
Néphoscope marin de C. C. Fineman. Upsala 1890.
Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas. Vol. IX. N. 4. Coimbra 1889.
Atti della R. Accademia dei Lincei. 1889. Rendiconti. Vol. V. fasc. 13. 1889. Rendiconti. Vol. VI. fasc. 1—4. Roma 1890.
Atti e rendiconti della Accademia medico-chirurgica di Perugia. Vol. II. fasc. 1. Perugia 1890.
Rendiconti del circolo matematico di Palermo. fasc. 1. 2. Tome IV. Anno 1890.
Annuario del circ. matem. di Palermo. 1890.
Annuario della Società R. di Napoli con le notizie istoriche. Napoli 1890.
La regione vulcanica fluorifera della Campania seconda edizione. (Estratto dal vol. IV. parte 1. delle memorie del Reg. Comitato Geologico d'Italia) per A. Scacchi. Firenze 1890.
Appendice alla prima memoria sulla Lava Vesuviana del 1631 per A. Scacchi. (Estratta dal Tomo VII, série 3a, N. 7 della Società Italiana delle Scienze (detta XL) per A. Scacchi.) Napoli 1889.
Atti della Società Toscana di Scienze Naturali. Processi verbali. Vol. VII. p. 21—48.
Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. Vol. XXV. Disp. 3, 4, 5, 6, 7. Elenco degli Academici. 1889—1890.
Rendiconti delle sessioni d. R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. Anno 1880—81, 1881—82, 1882—83, 1883—84, 1884—85, 1885—86, 1886—87, 1887—88, 1888—89.
Bollettino della Biblioteca nazionale centrale Vittorio Emanuele di Roma. Opere straniere. Vol. IV. N. 4. 1889.
Bollettino delle pubblicazioni italiane delle Bibliot. nationale centrale di Firenze. 1890. N. 100—103.
United States Geological Survey by J. W. Powell. 7th annual report 1885—1886. Washington 1888.
Proceedings of the U. S. National Museum. Vol. 10, 11. 1887, 88. Washington.
Bulletin of the United States National Museum. N. 33—37. Washington 1889.
Bulletin of the American Geographical Society. Vol. XXI supplement 1889. Vol. XXII. N. 1. March 31. 1890. New York.
Report on the observations of the total eclipse of the sun of jan. 1. 1889 publ. by the Lick observatory.
Proceedings of the American Philosophical Society. Vol. XXVI. N. 130. Philadelphia.
Proceedings of the Boston Society of Natural History. Part II. Vol XXIV. Part I, II. Boston 1888, 1889.

Resultados del Observatorio nacional Argentino en Córdoba. Vol. XI. Buenos Aires 1889.
Anales de la Sociedad Científica Argentina. Tomo XXVIII. Entrega V, VI. 1889. Tomo XXIX. Entrega 1. Buenos Aires 1890.
Boletin de la Academia Nacional de Ciencias en Córdoba. (Republica Argentina). Tomo X. Entrega 3. Buenos Aires. 1889.
Boletins da Commissão geographica e geologica da provincia de S. Paulo. N. 1. 2. 3. St. Paulo 1889.
Mittheilungen der deutschen Gesellschaft für Natur- u. Völkerkunde in Tokio. Heft 43. Band V. Seite 83—144. Yokohama 1890.

Nachträge.

I proietti agglutinanti dell' incendio vesuviano del 1631. Nota d. A. Scacchi. (Estratto dal Rendiconto della R. Accademia (delle Scienze fisiche e matematiche. fasc. 10. 1889).
Bulletin of the Museum of comparative Zoology at Harvard College. Vol. XVI. N. 7. Vol. XIX. N. 1.
Memoirs of the Mus. of comp. Zoology at H. College. Vol. XVII. N. 1. Cambridge U. S. A. 1890.
Proceedings and transactions of the Nova Scotian Institute of Natural Science. Vol. VII. 1888—89. Part III. Halifax 1889.
Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia. Part II. 1889. Philadelphia 1889.
North American Lepidoptera.
a. Revised check list of the North American Noctuidae. Part I. Bremen 1890.
b. The Hawk Moths of North America by Radcl. Grote. Bremen 1886.
Johns Hopkins University circulars. Vol. IX. N. 79. Baltimore.
Bulletin of the U. S. Coast and Geodetic Survey. N. 14, 15, 16, 17. 1889.
Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. N. S. vol. XV = Whole Ser. Vol. XXIII. Part II. Boston 1888.

Mai.

Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissensch. 1890. XX, XXI, XXII XXIII, XXIV, XXV.
Abhandlungen der Kön. Bair. Akad. der Wissenschaften.
a. Historische Klasse. Band 19. Abth. 1.
b. Mathematisch-physikalische Klasse. Band 17. Abth. 1. München 1889.
Physikalisch-medizinische Gesellschaft in Würzburg.
a. Sitzungsberichte. Jahrg. 1889.
b. Verhandlungen. Neue Folge. Band XXIII. Würzburg 1890.
Zur feineren Anatomie des centralen Nervensystems. Erster Beitrag: Das Kleinhirn von A. Kölliker. Separatabdr. aus: Zeitschrift für wissenschaftl. Zoologie. XLIX. 4.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

27. August. №. 10. 1890.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 2. August.

Riecke legt a. von sich vor: Ueber stufenweise Dissociation und über die Dampfdichte des Schwefels.

b. von sich: Ueber specielle Fälle von Gleichgewichtserscheinungen eines aus mehreren Phasen zusammengesetzten Systemes.

c. von Herrn Privatdocenten Dr. Nernst: Ueber die Theilung eines Stoffes zwischen zwei Lösungsmitteln.

Voigt a. eine kurze Notiz zur Theorie der Schwingungen gestrichener Saiten.

b. für den 36. Band der Abhandlungen: Allgemeine Theorie der piëzo- und pyroelectrischen Erscheinungen an Krystallen.

Schwarz: a. Bestimmung derjenigen Minimalflächen, welche eine Schaar reeller Curven zweiten Grades enthalten.

b. Ueber den Kreisbogen als Lösung einer von Delaunay gestellten Aufgabe der Variationsrechnung.

Klein: a. von Dr. Franz Meyer, Prof. in Clausthal: Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen. (Zweite Mittheilung.)

b. vom Privatdocenten Dr. Burckhardt: Zur Theorie der Jacobischen Gleichungen 40. Grades.

c. von sich: Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe.

Specielle Fälle von Gleichgewichtserscheinungen eines aus mehreren Phasen zusammengesetzten Systemes.

Von

Eduard Riecke.

Im Anschluß an die in einer früheren Mittheilung [1]) enthaltenen allgemeinen Sätze sollen im Folgenden einige specielle Fälle von Gleichgewichtserscheinungen einer etwas eingehenderen Untersuchung unterworfen werden. Es handelt sich zunächst darum, an bestimmten Beispielen zu untersuchen, wie die wirkliche Entwicklung der Zustandsänderungen und Gleichgewichtserscheinungen eines Körpers oder Körpersystems in das durch jene allgemeinen Sätze gegebene Schema sich einordnet. Dabei wird sich dann zeigen, daß jenes Schema noch einer gewissen Ergänzung bedarf, wenn eine vollständige Beschreibung jener Erscheinungen gegeben werden soll.

I. Zustandsänderungen einer einzigen Substanz.

Wenn die Zahl der chemischen Componenten sich auf 1 reducirt, so ist die größte mögliche Zahl koëxistirender Phasen gleich 3. Durch diejenigen Werthe von Druck und Temperatur, für welche 3 verschiedene Phasen im Gleichgewichte neben einander bestehen können, bestimmen wir ebenso wie in dem früher betrachteten allgemeinen Falle einen Punkt der pT-Ebene, welcher jetzt als ein dreifacher Punkt bezeichnet wird. Ist die Gesammtzahl der Phasen, welche die gegebene Substanz anzunehmen vermag, gleich n, so ist die Anzahl der möglichen Tripelpunkte gleich $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}$. Würden all diese Punkte in Wirklichkeit existiren, so würden sie verbunden sein durch $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Grenzcurven, längs welcher je zwei verschiedene Phasen im Gleichgewichte sich befinden. In den Feldern, in welche die Ebene p, T durch die Grenzcurven getheilt wird, würde endlich nur je eine Phase bestehen können.

Ist $n = 4$, so würde hiernach die Anzahl der möglichen Tripelpunkte gleich 4, die Anzahl der möglichen Grenzen gleich 6 sein.

1) Gött. Nachr. 1890, S. 223.

Als Beispiel für diesen Fall können wir den Phosphor benützen. Von den möglichen Tripelpunkten sind 2 bekannt, in dem einen bestehen im Gleichgewicht neben einander fester und flüssiger gelber und gasförmiger Phosphor; in dem anderen flüssiger gelber Phosphor, rother Phosphor und gasförmiger Phosphor.

Der Schmelzpunkt des gewöhnlichen Phosphors liegt bei dem Druck einer Atmosphäre bei 44°. Das specifische Gewicht ist bei 0° gleich 1,83. Die specifischen Volumina des flüssigen und festen gelben Phosphors bei der Schmelztemperatur ergeben sich zu 0,575 und 0,556 (g. cm). Die Schmelzwärme des gelben Phosphors bezogen auf 1 g und ausgedrückt in kleinen Kalorieen ist gleich 5,03. Benützen wir als Einheit des Drucks den Druck von 1 g auf 1 cm², so wird das Wärmeäquivalent gleich 42700, und somit die Aenderung der Schmelztemperatur mit dem Drucke

$$\frac{dt}{dp} = \frac{317 \times 0{,}019}{42700 \times 5{,}03}.$$

Nehmen wir als Einheit des Druckes den Druck von 1 Atmosphäre, so wird:

$$\frac{dt}{dp} = \frac{317 \times 0{,}019 \times 1033}{42700 \times 5{,}03} = 0{,}029,$$

d. h. für eine Zunahme des Druckes um 1 Atm. steigt die Schmelztemperatur um 0,03° Cels. Wenn wir den Druck nach Atmosphären rechnen, so ist hiernach die Grenzcurve zwischen dem flüssigen und festen gelben Phosphor eine gerade Linie, welche gegen die Axe des Druckes unter einem Winkel von 1,7° geneigt ist.

Den Beobachtungen von Schrötter und von Troost und Hautefeuille entsprechend kann die Grenze zwischen flüssigem gelbem und zwischen dampfförmigem Phosphor dargestellt werden durch die Gleichung

$$\log p = -2{,}7502 + 2{,}064 \log T - \frac{1530}{T}.$$

Setzen wir hier für T die absolute Schmelztemperatur des Phosphors, so ergeben sich für den ersten dreifachen Punkt desselben die Coordinaten $p = 0{,}0038$ Atm. $T = 317°$.

Bezeichnen wir die Phasen des dampfförmigen, des flüssigen und des festen gelben Phosphors als die Phasen 1, 2 und 3, so sind die specifischen Volumina derselben in dem dreifachen Punkt in ccm

$$v_1 = 55100, \qquad v_2 = 0{,}575, \qquad v_3 = 0{,}556.$$

Bezeichnen wir durch $\left(\frac{dp}{dt}\right)_{12}$, $\left(\frac{dp}{dt}\right)_{23}$, $\left(\frac{dp}{dt}\right)_{31}$ die Richtungstangenten der in dem dreifachen Punkte zusammenlaufenden Grenzcurven, so ist

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{12}(v_1-v_2)+\left(\frac{dp}{dt}\right)_{23}(v_2-v_3)+\left(\frac{dp}{dt}\right)_{31}(v_3-v_1)=0$$

oder

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{31}=\left(\frac{dp}{dt}\right)_{12}+\frac{v_2-v_3}{v_1}\left(\frac{dp}{dt}\right)_{23}.$$

Nun ist:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{12}=0{,}000826,\qquad \left(\frac{dp}{dt}\right)_{23}=34{,}5,$$

somit

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{31}=0{,}000838.$$

In dem zweiten dreifachen Punkt des Phosphors sind mit einander im Gleichgewicht gasförmiger Phosphor, fester rother und flüssiger gelber Phosphor. Die Coordinaten desselben sind:

$$p=0{,}56\ \text{Atm.},\qquad T=499^0.$$

Die Grenzcurve zwischen dem gasförmigen und flüssigen gelben Phosphor besitzt in diesem Punkte die Richtungstangente:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{12}=0{,}0103.$$

Die specifischen Volumina des gasförmigen, flüssigen gelben und festen rothen Phosphors haben in dem Tripelpunkte die Werthe

$$v_1=582,\qquad v_2=0{,}628,\qquad v_4=0{,}511\ \text{ccm}.$$

Die beiden letzteren Werthe sind unsicher in Folge unserer mangelhaften Kenntniß der Ausdehnungskoëfficienten. Die Uebergangswärme zwischen flüssigem gelbem und rothem Phosphor kann gleich 880 cal gesetzt werden. Hiernach wird die Neigung der Grenzcurve zwischen flüssigem gelbem und rothem Phosphor gegeben durch die Gleichung:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{24}=-\frac{42700\times 880}{499\times 0{,}117\times 1033}=-623.$$

Mit Hülfe dieser Werthe ergiebt sich dann für die Richtungstangente der die Phasen 1 und 4 trennenden Grenzcurven der Werth

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{14}=-0{,}115.$$

Benützt man außer den im vorhergehenden enthaltenen Angaben noch die von Troost und Hautefeuille beobachteten Werthe der Dampfspannungen über rothem Phosphor, so ergiebt sich für die Zustandsänderungen dieses Stoffes das in Figur 1 gezeichnete Bild. A und B sind die beiden dreifachen Punkte; die horizontalen geraden Linien sind die Grenzen zwischen festem gelbem und flüssigem gelbem Phosphor, sowie zwischen flüssigem gelbem und rothem Phosphor; AB ist die Curve der Dampfspannung des flüssigen gelben Phosphors; BD die labile Verlängerung derselben jenseits der Umwandlungstemperatur von gelbem und rothem Phosphor. EF ist die Curve der beobachteten Dampfspannungen des rothen Phosphors, BG die Tangente der Grenzcurve zwischen rothem Phosphor und Phosphordampf in dem Tripelpunkte. Die Dampfspannungscurve des rothen Phosphors würde hiernach durch eine Linie zu ergänzen sein, deren Verlauf durch das Curvenstück BE angedeutet ist. Das von der gasförmigen Phase des Phosphors eingenommene Gebiet I wird durch diese Curve in zwei Theile zerlegt, welche mit einander nur durch einen schmalen Streifen zusammenhängen. In dem an AB grenzenden Theile des Gebietes findet Sublimation des Phosphors von kälteren nach heißeren Stellen des von demselben eingenommenen Raumes statt.

II. Zwei chemische Componenten mit 5 verschiedenen Phasen.

Die Maximalzahl der Phasen, welche im Gleichgewicht neben einander existiren können, ist gleich 4; die mögliche Anzahl der vierfachen Punkte gleich 5, der sie verbindenden Grenzen gleich 10.

Das einfachste Beispiel für diesen Fall bieten zwei Substanzen, welche chemisch nicht auf einander wirken, und welche sich im flüssigen Zustande weder mischen noch lösen. Wir haben dann zwei feste, zwei flüssige und eine gasförmige Phase.

Die Zahl der vierfachen Punkte, welche wirklich existiren können, ist gleich 3; in dem ersten koëxistiren die festen und die flüssigen Phasen der beiden Componenten, in dem zweiten die dampfförmige Phase mit den beiden festen Phasen und der flüssigen Phase der ersten Componente, in dem dritten die dampfförmige Phase mit den beiden flüssigen Phasen und der festen Phase der zweiten Componente. Bezeichnen wir die verschiedenen Phasen durch die Buchstaben g, l_1, l_2, s_1, s_2, so können wir die drei vierfachen Punkte A, B, C charakterisiren durch die Symbole $(l_1\, l_2\, s_1\, s_2)$, $(g\, l_1\, s_1\, s_2)$, $(g\, l_1\, l_2\, s_2)$. In dem Quadrupelpunkt A (Fig. 2) durchschneiden sich die Schmelzcurven der beiden Substanzen; längs der vier von A ausgehenden Curven koëxistiren die Phasen $(l_1\, s_1\, s_2)$, $(l_2\, s_1\, s_2)$, $(l_1\, l_2\, s_2)$ und $(l_1\, l_2\, s_1)$, also immer zwei Phasen der einen mit einer Phase der anderen Componente. Gehen wir von den Grenzlinien nach der einen oder anderen Seite ab, so kann jene letztere Phase natürlich nicht verschwinden, da ja sonst die entsprechende Componente aus dem System ausscheiden würde. Dadurch werden die Phasen, welche in den 4 in A zusammenstoßenden Winkelräumen im Gleichgewicht sich befinden, vollkommen bestimmt, sobald nur auf stabile Zustände Rücksicht genommen wird. Man hat in dem einen die Phasen $(s_1\, s_2)$, in dem gegenüberliegenden $(l_1\, l_2)$, in den zwischenliegenden Winkeln $(l_1\, s_2)$ und $(l_2\, s_1)$.

Wir gehen über zu dem vierfachen Punkte B, in welchem die gasförmige Phase, g, koëxistirt mit den beiden festen Phasen s_1, s_2 und mit der flüssigen Phase der ersten Componente l_1. Betrachten wir die vier von B auslaufenden Grenzen, so findet auf der schon zuvor betrachteten Grenze BA Gleichgewicht statt zwischen den Phasen $(l_1\, s_1\, s_2)$; längs einer zweiten Grenze BF_1 koëxistiren die Phasen $(g\, l_1\, s_1)$; diese zweite Grenze wird bestimmt durch die Bedingung, daß auf derselben die Potentiale μ_1' und μ_1'', welche der flüssigen und festen Phase der Componente 1 entsprechen, einander gleich sind; die Grenze ist also nichts anderes als die Schmelzcurve dieser Componente und fällt mit der Verlängerung von AB zusammen. Auf einer dritten von B auslaufenden Curve BS haben wir Gleichgewicht zwischen den Phasen $(g\, s_1\, s_2)$. Setzen wir die Potentiale der beiden Componenten in ihrer gasförmigen Mischung gleich ihren Potentialen im festen Zustand, so werden durch die Gleichungen $\mu_1 = \mu_1''$ und $\mu_2 = \mu_2''$ die Partialdrucke der beiden gasförmigen Componenten als Funktionen der Temperatur bestimmt; der Gesammtdruck p ergiebt sich als Summe der Partialdrucke durch eine Gleichung von der Form

$$p = A_1'' T^{\frac{c_{p1} - c_1''}{c_{p1} - c_{v1}}} e^{-B_1''/T} + A_2'' T^{\frac{c_{p2} - c_2''}{c_{p2} - c_{v2}}} e^{-B_2''/T}$$

und diese ist dann auch die Gleichung der Grenze $(g\, s_1\, s_2)$. Durch c_{p1}, c_{v1} und c_{p2}, c_{v2} sind die specifischen Wärmen der beiden Componenten im Gaszustande, durch c_1'' und c_2'' ihre specifischen Wärmen im festen Zustande bezeichnet. Ganz ebenso ergiebt sich die Gleichung der vierten von B ausgehenden Grenze $BC = (g\, l_1\, s_2)$. Verstehen wir unter c_1' die specifische Wärme der ersten Componente im flüssigen Zustande, so wird dieselbe:

$$p = A_1' T^{\frac{c_1 - c_1'}{c_{p1} - c_{v1}}} e^{-B_1'/T} + A_2'' T^{\frac{c_{p2} - c_2''}{c_{p2} - c_{v2}}} e^{-B_2''/T}.$$

Gehen wir endlich noch über zu der Betrachtung des Punktes $C = (g\, l_1\, l_2\, s_2)$; die Grenzen $(l_1\, l_2\, s_2) = CA$ und $(g\, l_2\, s_2) = CF_2$ sind repräsentirt durch die Schmelzcurve der Componente 2; die Gleichung der Grenze $(g\, l_1\, s_2) = CB$ ist bereits angegeben; die Gleichung der Grenze $(g\, l_1\, l_2)$ ist

$$p = A_1' T^{\frac{c_{p1} - c_1'}{c_{p1} - c_{v1}}} e^{-B_1'/T} + A_2' T^{\frac{c_{p2} - c_2'}{c_{p2} - c_{v2}}} e^{-B_2'/T},$$

wo unter c_2' die specifische Wärme der zweiten Componente im flüssigen Zustande zu verstehen ist.

Während bei den in A zusammenstoßenden Winkelräumen die in denselben koëxistirenden Phasen vollkommen bestimmt waren, ist dies nicht der Fall bei den an B und C stoßenden jenseits der Curve $SBCL$ liegenden Räumen; in dem Raume SBF_1 können zusammenbestehen entweder die Phasen $(g\, s_1)$ oder $(g\, s_2)$; in F_1BCF_2 entweder $(g\, l_1)$ oder $(g\, s_2)$; in F_2CL entweder $(g\, l_1)$ oder $(g\, l_2)$. Welcher dieser verschiedenen Fälle in Wirklichkeit eintritt, das hängt ab von den besonderen Verhältnissen des Systems; dem allgemeinen Schema werden dadurch noch gewisse nähere Bestimmungen hinzugefügt, mit deren Entwicklung wir uns im Folgenden beschäftigen wollen.

Wir betrachten zunächst die Verhältnisse an der Grenze SB. In einem beliebigen Punkt derselben haben wir Gleichgewicht zwischen den festen Componenten und ihren Dämpfen. Wir bezeichnen den ganzen von dem System eingenommenen Raum mit V, den von Dämpfen erfüllten Theil desselben mit v, die Volumina der festen Theile der Componenten mit v_1'' und v_2''. Sind δ_1 und δ_2 die specifischen Gewichte der gesättigten Dämpfe, σ_1 und σ_2 die der festen Körper, M_1 und M_2 die gesammten Massen, welche von den beiden Componenten vorhanden sind, so ist

$$v = \frac{V - M_1/\sigma_1 - M_2/\sigma_2}{1 - \delta_1/\sigma_1 - \delta_2/\sigma_2}$$

$$v_1'' = \frac{M_1/\sigma_1 (1 - \delta_2/\sigma_2) - \delta_1/\sigma_1 (V - M_2/\sigma_2)}{1 - \delta_1/\sigma_1 - \delta_2/\sigma_2}$$

$$v_2'' = \frac{M_2/\sigma_2 (1 - \delta_1/\sigma_1) - \delta_2/\sigma_2 (V - M_1/\sigma_1)}{1 - \delta_1/\sigma_1 - \delta_2/\sigma_2}.$$

Bezeichnen wir durch m_1 und m_2 die Massen der dampfförmigen Theile beider Componenten, durch p_1 und p_2 ihre Partialdrucke, so findet jederzeit die Beziehung statt

$$v = m_1 \frac{R_1 T}{p_1} = m_2 \frac{R_2 T}{p_2}.$$

So lange wir uns in einem Punkt der Grenze SB befinden, sind für p_1 und p_2 die Sättigungsdrucke der beiden Componenten zu setzen, welche im Folgenden durch π_1 und π_2 bezeichnet werden mögen.

Lassen wir das Gesammtvolumen V wachsen, so wird das Volumen v der dampfförmigen Phase zunehmen, dagegen werden die Volumina der festen Phasen sich verringern, und zwar wird zuerst v_1'' gleich Null, wenn

$$\frac{M_1}{\delta_1}\left(1-\frac{\delta_2}{\sigma_2}\right)+\frac{M_2}{\sigma_2} < \frac{M_2}{\delta_2}\left(1-\frac{\delta_1}{\sigma_1}\right)+\frac{M_1}{\sigma_1}$$

oder
$$\frac{M_1}{\delta_1} < \frac{M_2}{\delta_2}$$

dagegen zuerst v_2'' gleich Null, wenn

$$\frac{M_1}{\delta_1}\left(1-\frac{\delta_2}{\sigma_2}\right)+\frac{M_2}{\sigma_2} > \frac{M_2}{\delta_2}\left(1-\frac{\delta_1}{\sigma_1}\right)+\frac{M_1}{\sigma_1}$$

oder
$$\frac{M_1}{\delta_1} > \frac{M_2}{\delta_2}.$$

Wir untersuchen zunächst den ersteren Fall; in dem Augenblick, in welchem v_1'' verschwindet, ist die erste Componente nur noch in der gasförmigen Phase enthalten. Ihr Partialdruck, welcher erst noch gleich dem Sättigungsdrucke π_1 war, nimmt ab, sobald das Gesammtvolumen V noch weiter vergrößert wird. Dagegen bleibt der Partialdruck der zweiten Componente gleich ihrem Sättigungsdrucke, so lange dieselbe noch in ihrer festen Phase vorhanden ist. Die Volumina der gasförmigen und der festen Phase bestimmen sich durch die Gleichungen

$$v = \frac{V - M_2/\sigma_2}{1-\delta_2/\sigma_2}, \quad v_2'' = \frac{M_2/\sigma_2 - \delta_2/\sigma_2 V}{1-\delta_2/\sigma_2}.$$

Der Partialdruck der ersten Componente ergiebt sich aus der Gleichung

$$v = \frac{M_1 R_1 T}{p_1} = \frac{m_2 R_2 T}{\pi_2}.$$

Lassen wir V fortwährend wachsen, so wird schließlich $V = \frac{M_2}{\delta_2}$ und damit v_2'' gleich Null; die beiden festen Phasen sind jetzt vollkommen verschwunden; in der gasförmigen Phase hat die erste Componente den Partialdruck $p_1 = \frac{M_1 R_1}{M_2 R_2}\pi_2$, der Gesammtdruck ist somit

$$p = \pi_2\left(1 + \frac{M_1 R_1}{M_2 R_2}\right)$$

er unterscheidet sich von dem Sättigungsdruck der zweiten Componente durch einen Faktor, welcher abhängig ist von der Natur der beiden Componenten und von dem Verhältniß ihrer Massen. Sobald man das Volumen V noch weiter wachsen läßt, kann nur die gasförmige Phase existiren, deren Druck von nun an durch das Boyle'sche Gesetz bestimmt wird. Die Curve

$$p = \left(1 + \frac{M_1 R_1}{M_2 R_2}\right) A_2'' T^{\frac{c_{p2} - c_2''}{c_{p2} - c_{v2}}} e^{-\frac{B_2''}{T}}$$

stellt hiernach eine weitere Grenzcurve dar, längs welcher die gasförmige Phase im Gleichgewicht sich befindet mit der festen Phase s_2 allein. Mit Bezug auf die Lage dieser Grenzcurve möge folgendes bemerkt werden. Ist $M_1 = 0$, so fällt dieselbe zusammen mit der Curve des Sättigungsdruckes der Componente 2; andererseits ist nach unserer Voraussetzung $\frac{M_1 R_1}{\pi_1}$ nothwendig kleiner als $\frac{M_2 R_2}{\pi_2}$, $\frac{M_1 R_1}{M_2 R_2} < \frac{\pi_1}{\pi_2}$ und

$$p = \pi_2\left(1 + \frac{M_1 R_1}{M_2 R_2}\right) < \pi_1 + \pi_2 .$$

Wird $\frac{M_1 R_1}{M_2 R_2} = \frac{\pi_1}{\pi_2}$ so ist $p = \pi_1 + \pi_2$.

Man sieht hieraus, daß die neue Grenzcurve (gs_2) unter allen Umständen beschränkt ist auf den Raum zwischen der Curve des Sättigungsdruckes π_2 und der Grenze SB.

Ganz in derselben Weise erledigt sich natürlich der zweite Fall, in welchem $\frac{M_1 R_1}{M_2 R_2} > \frac{\pi_1}{\pi_2}$. Jenseits der Grenze ist Gleichgewicht zwischen der gasförmigen Phase und der festen Phase s_1.

Bei einem bestimmten Drucke verschwindet aber die feste Phase und es existirt wieder eine Curve, längs welcher Gleichgewicht vorhanden ist zwischen g und s_1. Die Gleichung dieser Curve ist gegeben durch

$$p = \pi_1 \left(1 + \frac{M_2 R_2}{M_1 R_1}\right)$$

Sie ist unter allen Umständen eingeschlossen zwischen der Grenze SB und der Curve des Sättigungsdruckes π_1.

Ganz analog gestalten sich die Verhältnisse in den Räumen $F_1 BCF_2$ und $F_2 CL$.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen ergiebt sich, daß zu der graphischen Darstellung der Zustandsänderungen unseres Systems die zuerst betrachteten in den Quadrupelpunkten sich schneidenden Linien, auf welchen je drei Phasen im Gleichgewicht sich befinden, nicht genügen. Es treten vielmehr zu diesen Linien noch andere hinzu, auf welchen Gleichgewicht vorhanden ist zwischen zwei Phasen, jenseits welcher nur noch eine einzige Phase existirt. Zwischen den beiden Arten von Linien ist aber ein charakteristischer Unterschied; die ersten sind allein abhängig von den allgemeinen physikalischen Constanten der beiden Componenten, die letzteren außerdem von dem Verhältniß ihrer Massen, also von den speciellen Bedingungen des Versuches. Wir bezeichnen diese letzteren Grenzen als Grenzen zweiter Ordnung, die ersteren als Grenzen erster Ordnung oder Hauptgrenzen.

Mit Benutzung dieser verschiedenen Grenzlinien ist nun das Verhalten unserer Substanz Veränderungen der Temperatur und des Druckes gegenüber in folgender Weise darzustellen. Wir konstruiren die Curven der Schmelztemperatur für beide Componenten und die Curve des Dampfdruckes, $p = \pi_1 + \pi_2$, die Grenzen erster Ordnung. Wir zeichnen außerdem die Curven

$$p_2 = \pi_2 \left(1 + \frac{M_1 R_1}{M_2 R_2}\right) \text{ und } p_1 = \pi_1 \left(1 + \frac{M_2 R_2}{M_1 R_1}\right).$$

Nun sind drei Fälle denkbar.

1. Die Curve p_2 liegt in dem Raume, welcher von der Axe T einerseits, der Curve $p = \pi_1 + \pi_2$ andererseits begrenzt wird. In diesem Falle ist $\frac{M_1 R_1}{M_2 R_2} < \frac{\pi_1}{\pi_2}$; und die Componente 2 geht über die Grenze $SBCL$ hinüber; p_2 repräsentirt eine Grenze zweiter Ordnung, auf welcher Gleichgewicht besteht zwischen den Phasen

s_2, g unterhalb der Haupt-Grenze CF_2, zwischen den Phasen l_2, g oberhalb derselben. Die Grenze erster Ordnung BF_1 verliert in diesem Falle ihre reelle Bedeutung, da mit Ausnahme des Punktes B die Phasen g, l_1, s_1 nirgends zusammen existiren. Längs CF_2 haben wir Gleichgewicht zwischen l_2, s_2, g; da aber jenseits der Curve p_2 nur noch die Phase g existirt, so hat eine Verlängerung von CF_2 über die Curve p_2 hinaus keinen Zweck. Die Curve p_1 liegt von der Axe T überall weiter ab als die Curve $\pi_1 + \pi_2$ und kommt bei der Beschreibung der Zustandsänderungen nicht in Betracht.

2. Die Curve p_2 liegt von der Axe der Temperatur aus gerechnet jenseits der Curve $\pi_1 + \pi_2$, p_1 diesseits. Ueber die Grenze $SBCL$ geht in diesem Falle die Componente 1; p_1 ist eine Grenze zweiter Ordnung, auf welcher die Phasen g, s_1 beziehungsweise g, l_1 koëxistiren; auf dem bis zu derselben reichenden Stücke der Hauptgrenze BF_1 koëxistiren die Phasen g, l_1, s_1. Die Curve p_2 und die Grenze CF_2 sind ohne Bedeutung.

3. Die Curven p_1 und p_2 treffen in einem Punkte G der Grenze $\pi_1 + \pi_2$ zusammen, d. h. es existirt eine bestimmte Temperatur für welche $\frac{M_1 R_1}{M_2 R_2} = \frac{\pi_1}{\pi_2}$. In diesem Fall wird der Raum, welcher allein von der Phase g erfüllt wird, begrenzt durch die beiden von G ausgehenden und dießseits der Curve $\pi_1 + \pi_2$ liegenden Zweige der Curven p_1 und p_2; in dem durch $\pi_1 + \pi_2$ und p_1 begrenzten Streifen geht die Componente 1, in dem durch $\pi_1 + \pi_2$ und p_2 begrenzten die Componente 2 über die Grenze. Je nach der Lage von G und der Lage der in Betracht kommenden Curvenzweige p_1 und p_2 ist eine Reihe verschiedener Fälle möglich, mit deren Aufzählung wir uns nicht aufhalten wollen.

III. Zwei Componenten, welche mit einander ein Kryohydrat bilden.

In diesem Falle existiren 4 Phasen, eine gasförmige, g, eine flüssige, l, zwei feste, s_1 und s_2, und daher nur ein Quadrupelpunkt A, Fig. 3, dem Gleichgewichte $(g l s_1 s_2)$ entsprechend. Auf den 4 von A ausgehenden Grenzen erster Ordnung findet Gleichgewicht statt zwischen den Phasen $(l s_1 s_2)$, $(g s_1 s_2)$, $(g l s_1)$, $(g l s_2)$.

Wir betrachten zunächst die Grenze $AF = (l s_1 s_2)$. Bezeichnen wir durch μ_1'' und μ_2'' die Potentiale der beiden Componenten in ihrer flüssigen Mischung durch μ_1''' und μ_2''' ihre Potentiale im festen Zustande, so haben wir zur Bestimmung der Grenze die Gleichungen

$$\mu_1''\left(p,\ T, \frac{m_1''}{v''},\ \frac{m_2''}{v''}\right) = \mu_1'''(p,\ T)$$

$$\mu_2''\left(p,\ T, \frac{m_2''}{v''},\ \frac{m_1''}{v''}\right) = \mu_2'''(p,\ T)$$

$$p = p\left(T,\ \frac{m_1''}{v''},\ \frac{m_2''}{v''}\right)$$

$\frac{m_1''}{v''}$ und $\frac{m_2''}{v''}$ sind die Dichtigkeiten der beiden Componenten in der flüssigen Phase. Ist die Temperatur gegeben, so können wir aus diesen Gleichungen p, $\frac{m_1''}{v''}$ und $\frac{m_2''}{v''}$ als Funktionen der Temperatur berechnen. Wir erhalten also zunächst die Gleichung der Grenze, außerdem aber in jedem derselben angehörenden Punkt p, T vollständig bestimmte Werthe der Dichtigkeiten $\frac{m_1''}{v''}$ und $\frac{m_2''}{v''}$; in jedem Punkt der Grenze hat somit die flüssige Phase eine ganz bestimmte Zusammensetzung. Führen wir Wärme zu, so werden die beiden festen Körper schmelzen, aber in einem solchen Verhältniß, daß die Zusammensetzung der Phase l dieselbe bleibt.

Gehen wir über zu der Betrachtung der beiden längs der Grenze AF zusammenhängenden Flächenräume. Auf der unterhalb AF liegenden, tieferen Temperaturen entsprechenden Fläche existiren nebeneinander die beiden festen Phasen. In dem oberhalb AF liegenden Raume koëxistiren je nach den Verhältnissen des Versuches entweder die Phasen l und s_1 oder die Phasen l und s_2.

Wir setzen das im Allgemeinen von Temperatur und Druck abhängende Mischungsverhältniß der beiden Componenten in der flüssigen Phase $\frac{m_1''}{m_2''} = \alpha$; ist nun das Verhältniß der ganzen von beiden Componenten vorhandenen Mengen $\frac{M_1}{M_2} > \alpha$, so tritt die Componente 1 über die Grenze. In dem oberhalb der Grenze AF liegenden Raume sind dann die Bedingungen des Gleichgewichtes

$$\mu_1''\left(p,\ T, \frac{m_1''}{v''},\ \frac{M_2}{v''}\right) = \mu_1'''(p,\ T)$$

$$p = p\left(T, \frac{m_1''}{v''},\ \frac{M_2}{v''}\right).$$

Ist p und T gegeben, so bestimmen diese Gleichungen die Dichtigkeiten $\frac{m_1''}{v''}$ und $\frac{M_2}{v''}$, also auch das Volumen v'' der flüssigen

Phase. Halten wir den Druck konstant, so können wir den Zustand unseres Systems ändern durch Wärmezufuhr; ist der Zustand zuerst gegeben durch einen Punkt der Grenze AF, so bleibt die Temperatur bei Wärmezufuhr konstant, bis die Phase s_2 vollständig verschwunden ist. Von nun an steigt die Temperatur, und die feste Componente s_1 schmilzt in einem solchen Verhältniß ab, daß die flüssige Phase jederzeit die durch Temperatur und Druck bestimmte Zusammensetzung hat. Schließlich wird in Folge hievon auch die Phase s_1 verschwinden. Die Temperatur, bei welcher dieß geschieht, ergiebt sich aus der Zusammensetzung der flüssigen Phase nach dem Verschwinden von s_1, bei welcher jetzt auf M_1 Gewichtstheile der ersten Componente M_2 Gewichtstheile der zweiten kommen; der Concentration M_2/M_1 entspricht eine Erniedrigung des normalen Gefrierpunktes der Componente 1; ist diese bekannt, so ist damit auch die Temperatur bestimmt, bei welcher die Phase s_1 verschwindet; oberhalb dieser Temperatur existirt nur noch die Phase l. Wenn wir denselben Proceß bei anderen Drucken wiederholen, so gelangen wir zu anderen Verschwindungspunkten der Phase s_1. Es ergiebt sich auf diese Weise die Existenz einer Grenze zweiter Ordnung, oberhalb welcher nur noch die flüssige Phase existirt. Es ist diese Grenze nichts anderes als die Curve der Schmelztemperaturen der Componente 1 erniedrigt durch die Lösung von M_2 Theilen der Componente 2 in M_1 Theilen von 1. Die Curve ist andererseits dadurch bestimmt, daß für sie das Mischungsverhältniß α der beiden Componenten den konstanten Werth M_1/M_2 besitzt.

Besonders bemerkenswerth ist der Fall, daß das Mischungsverhältniß α der flüssigen Phase für einen Punkt der Grenze AF gleich ist M_1/M_2. Es bildet dann unser System in diesem Punkt ein reines Kryohydrat und schmilzt bei Wärmezufuhr ohne Rest wie ein homogener fester Körper. Ist nun für einen kleineren Werth des Druckes M_1/M_2 größer als das demselben entsprechende Mischungsverhältniß α, geht also hier bei Wärmezufuhr die Phase s_1 über die Grenze AF, so wird im Allgemeinen bei einem höheren Drucke M_1/M_2 kleiner als α sein; es geht also dann umgekehrt die Phase s_2 über die Grenze AF. Die zuvor betrachtete Grenze zweiter Ordnung berührt die Hauptgrenze AF in dem Punkte, für welchen $\alpha = \frac{M_1}{M_2}$; in dem zwischen den beiden Grenzen liegenden Raume koëxistiren auf der einen Seite von dem Berührungspunkte die Phasen l und s_1, auf der andern die Phasen l und s_2.

Bezeichnen wir die Richtungstangente der Curve AF durch $\left(\frac{dp}{dT}\right)'$ so ergiebt sich:

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)'\left(\frac{v''}{m_1''}-\frac{v_1'''}{m_1'''}-\frac{m_2''}{m_1''}\,\frac{v_2'''}{m_2'''}\right)=\frac{\eta''}{m_1''}-\frac{\eta_1'''}{m_1'''}-\frac{m_2''}{m_1''}\,\frac{\eta_2''}{m_2''}.$$

Setzen wir die Entropie der Phase l gleich $\eta_1''+\eta_2''$, so können wir diese Gleichung auf die Form bringen

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)'\left(\frac{v''}{m_1''}-\frac{v_1'''}{m_1'''}-\frac{m_2''}{m_1''}\,\frac{v_2'''}{m_2'''}\right)=\frac{\eta_1''}{m_1''}-\frac{\eta_1'''}{m_1'''}+\frac{m_2''}{m_1''}\left(\frac{\eta_2''}{m_2''}-\frac{\eta_2'''}{m_2'''}\right).$$

Die rechte Seite der Gleichung ist dann nichts anderes als die Wärme, welche konsumirt wird, so oft ein Gramm der Componente 1 aus dem festen Zustande in den Zustand der Lösung l übergeht, dieselbe noch dividirt durch die absolute Temperatur.

Wir gehen nun über zu der Grenze $AS = (g s_1 s_2)$. Mit Bezug auf diese gelten dieselben Bemerkungen, wie in dem vorhergehenden Falle zweier Substanzen, bei welchen nur die Dämpfe mischbar sind. Die Richtungstangente der Grenzkurve wird bestimmt durch die Gleichung

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)''\left(\frac{v'}{m_1'}-\frac{v_1'''}{m_1'''}-\frac{m_2'}{m_1'}\,\frac{v_2'''}{m_2'''}\right)=\frac{\eta_1'}{m_1'}-\frac{\eta_1'''}{m_1'''}+\frac{m_2'}{m_1'}\left(\frac{\eta_2'}{m_2'}-\frac{\eta_2'''}{m_2'''}\right).$$

Die Bedeutung der rechten Seite ist analog der bei der Curve AF angegebenen, das Verhältniß $\frac{m_2'}{m_1'}=\frac{\pi_2 R_1}{\pi_1 R_2}$. Es ergiebt sich ferner die selbstverständliche Beziehung

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)''=\frac{d\pi_1}{dT}+\frac{d\pi_2}{dT}.$$

Die dritte zu betrachtende Grenzcurve sei diejenige, auf welcher Gleichgewicht besteht zwischen den Phasen g, l und s_2. Die Bedingungen für das Gleichgewicht sind, wenn durch π_1 und π_2 wieder die Drucke der gesättigten Dämpfe bezeichnet werden

$$\mu_1'(\pi_1,\,T)=\mu_1''\left(p,\,T,\frac{m_1''}{v''},\,\frac{m_2''}{v''}\right)$$

$$\mu'(\pi_2,\,T)=\mu_2''\left(p,\,T,\frac{m_2''}{v''},\,\frac{m_1''}{v''}\right)=\mu_2'''(p,\,T)$$

$$p=\pi_1+\pi_2=p\left(T,\frac{m_1''}{v''},\,\frac{m_2''}{v''}\right).$$

Für die Richtungstangente der Curve ergiebt sich der Werth:

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)'''\left\{\frac{v'}{m_2'}-\frac{v_2'''}{m_2'''}-\frac{m_1'}{m_2'}\,\frac{m_2''}{m_1''}\left(\frac{v''}{m_2''}-\frac{v_2'''}{m_2'''}\right)\right\} =$$

$$\frac{\eta'}{m_2'}-\frac{\eta_2'''}{m_2'''}-\frac{m_1'}{m_2'}\cdot\frac{m_2''}{m_1''}\left(\frac{\eta''}{m_2''}-\frac{\eta_2'''}{m_2'''}\right).$$

Setzen wir $\eta' = \eta_1'+\eta_2'$, $\eta'' = \eta_1''+\eta_2''$ so ergiebt sich:

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)'''\left\{\frac{v'}{m_2'}-\frac{v_2'''}{m_2'''}-\frac{m_1'}{m_2'}\cdot\frac{m_2''}{m_1''}\left(\frac{v''}{m_2''}-\frac{v_2'''}{m_2'''}\right)\right\}$$

$$=\frac{\eta_2'}{m_2'}-\frac{\eta_2'''}{m_2'''}+\frac{m_1'}{m_2'}\left(\frac{\eta_1'}{m_1'}-\frac{\eta_1''}{m_1''}\right)-\frac{m_1'}{m_2'}\,\frac{m_2''}{m_1''}\left(\frac{\eta_2''}{m_2''}-\frac{\eta_2'''}{m_2'''}\right).$$

Multipliciren wir mit der absoluten Temperatur, so ist $\left(\frac{\eta_2'}{m_2'}-\frac{\eta_2'''}{m_2'''}\right)T$ die Wärmemenge, welche zur Verdampfung von 1 Gramm der Phase s_2 erforderlich ist; damit der Dampf die den vorhandenen Verhältnissen der Temperatur und des Druckes entsprechende Mischung behalte, ist gleichzeitig nothwendig, daß aus der Phase l von der ersten Componente die Menge $\frac{m_1'}{m_2'}$ verdampfe, wozu die Wärmemenge $\frac{m_1'}{m_2'}\left(\frac{\eta_1}{m_1'}-\frac{\eta_1''}{m_1''}\right)T$ erforderlich ist. Wenn aber aus der Flüssigkeit die Menge $\frac{m_1'}{m_2'}$ von der ersten Componente ausscheidet, so muß gleichzeitig von der zweiten die Menge $\frac{m_1'}{m_2'}\cdot\frac{m_2''}{m_1''}$ in fester Form ausscheiden, damit die Concentration der flüssigen Phase dieselbe bleibe. Die hierbei frei werdende Wärme ist

$$\frac{m_1'}{m_2'}\cdot\frac{m_2''}{m_1''}\left(\frac{\eta_2''}{m_2''}-\frac{\eta_2'''}{m_2'''}\right)T.$$

Es ergiebt sich hieraus, daß die auf der rechten Seite unserer Gleichung stehende Summe nichts anderes ist, als die Wärmemenge, welche konsumirt wird, so oft 1 Gramm der zweiten Componente aus dem festen Zustande in die gasförmige Phase übergeht, dieselbe noch dividirt durch die absolute Temperatur.

Die für $\left(\frac{dp}{dT}\right)'''$ aufgestellte Gleichung kann auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)^{\prime\prime\prime}\left\{\frac{v'}{m_1'}-\frac{m_2'}{m_1'}\frac{v_2'''}{m_2'''}-\frac{m_2''}{m_1''}\left(\frac{v''}{m_2''}-\frac{v_2'''}{m_2'''}\right)\right\}=$$

$$\frac{\eta_1'}{m_1'}-\frac{\eta_1''}{m_1''}+\frac{m_2'}{m_1'}\left(\frac{\eta_2'}{m_2'}-\frac{\eta_2'''}{m_2'''}\right)-\frac{m_2''}{m_1''}\left(\frac{\eta_2''}{m_2''}-\frac{\eta_2'''}{m_2'''}\right).$$

Der auf der rechten Seite der Gleichung stehende Ausdruck ist dann gleich der Wärme, welche konsumirt wird, sobald 1 Gramm der ersten Componente aus der Phase l übergeht in die Phase g, dieselbe noch dividirt durch die absolute Temperatur.

Ganz ebenso gestalten sich natürlich die Beziehungen für die vierte Grenzcurve, AB, auf welcher die Phasen g, l, s_1 koëxistiren. Für die Richtungstangente derselben ergiebt sich die Gleichung:

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)^{IV}\left\{\frac{v'}{m_1'}-\frac{v_1'''}{m_1'''}-\frac{m_2'}{m_1'}\frac{m_1''}{m_2''}\left(\frac{v''}{m_1''}-\frac{v_1'''}{m_1'''}\right)\right\}=$$

$$\frac{\eta_1'}{m_1'}-\frac{\eta_1'''}{m_1'''}+\frac{m_2'}{m_1'}\left(\frac{\eta_2'}{m_2'}-\frac{\eta_2''}{m_2''}\right)-\frac{m_2'}{m_1'}\cdot\frac{m_1''}{m_2''}\left(\frac{\eta_1''}{m_1''}-\frac{\eta_1'''}{m_1'''}\right).$$

Die mit T multiplicirte rechte Seite giebt die Wärme, welche für jedes Gramm der ersten Componente konsumirt wird, welches von der Phase s_1 übergeht in die Phase g.

Die zweite Form dieser Gleichung wird:

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)^{IV}\left\{\frac{v'}{m_2'}-\frac{m_1'}{m_2'}\frac{v_1'''}{m_1'''}-\frac{m_1''}{m_2''}\left(\frac{v''}{m_1''}-\frac{v_1'''}{m_1'''}\right)\right\}=$$

$$\frac{\eta_2'}{m_2'}-\frac{\eta_2''}{m_2''}+\frac{m_1'}{m_2'}\left(\frac{\eta_1'}{m_1'}-\frac{\eta_1'''}{m_1'''}\right)-\frac{m_1''}{m_2''}\left(\frac{\eta_1''}{m_1''}-\frac{\eta_1'''}{m_1'''}\right).$$

Zwischen den Richtungstangenten der 4 von A auslaufenden Grenzcurven finden die Beziehungen statt

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)^{\prime\prime\prime}\left\{\frac{v'}{m_1'}-\frac{m_2'}{m_1'}\frac{v_2'''}{m_2'''}-\frac{m_2''}{m_1''}\left(\frac{v''}{m_2''}-\frac{v_2'''}{m_2'''}\right)\right\}=$$

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^{\prime\prime}\left\{\frac{v'}{m_1'}-\frac{v_1'''}{m_1'''}-\frac{m_2'}{m_1'}\frac{v_2'''}{m_2'''}\right\}-\left(\frac{dp}{dt}\right)^{\prime}\left\{\frac{v}{m_1''}-\frac{v_1'''}{m_1'''}-\frac{m_2''}{m_1''}\frac{v_2'''}{m_2'''}\right\}$$

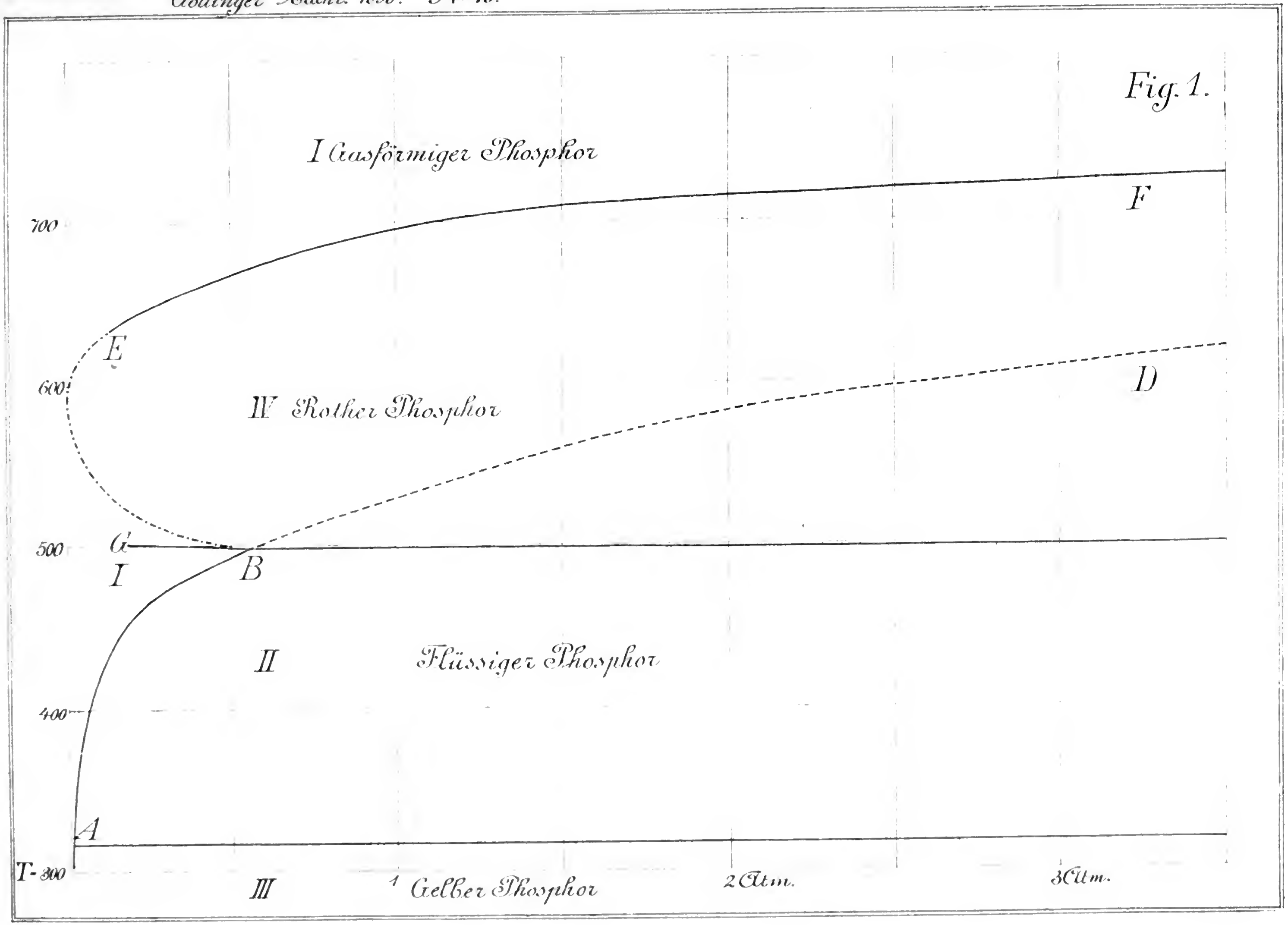
$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^{IV}\left\{\frac{v'}{m_2'}-\frac{m_1'}{m_2'}\frac{v_1'''}{m_1'''}-\frac{m_1''}{m_2''}\left(\frac{v''}{m_1''}-\frac{v_1'''}{m_1'''}\right)\right\}=$$

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^{\prime\prime}\left\{\frac{v'}{m_2'}-\frac{v_2'''}{m_2'''}-\frac{m_1'}{m_2'}\frac{v_1'''}{m_1'''}\right\}-\left(\frac{dp}{dt}\right)^{\prime}\left\{\frac{v''}{m_2''}-\frac{v_2'''}{m_2'''}-\frac{m_1''}{m_2''}\cdot\frac{v_1'''}{m_1'''}\right\}.$$

Näherungsweise

Zu: Eduard Riecke. Specielle Fälle von Gleichgewichtserscheinungen.

Göttinger Nachr. 1890. No. 10.



Zu: Eduard Riecke. Specielle Fälle von Gleichgewichtserscheinungen.
Göttinger Nachr. 1890. №. 10.

Fig. 2

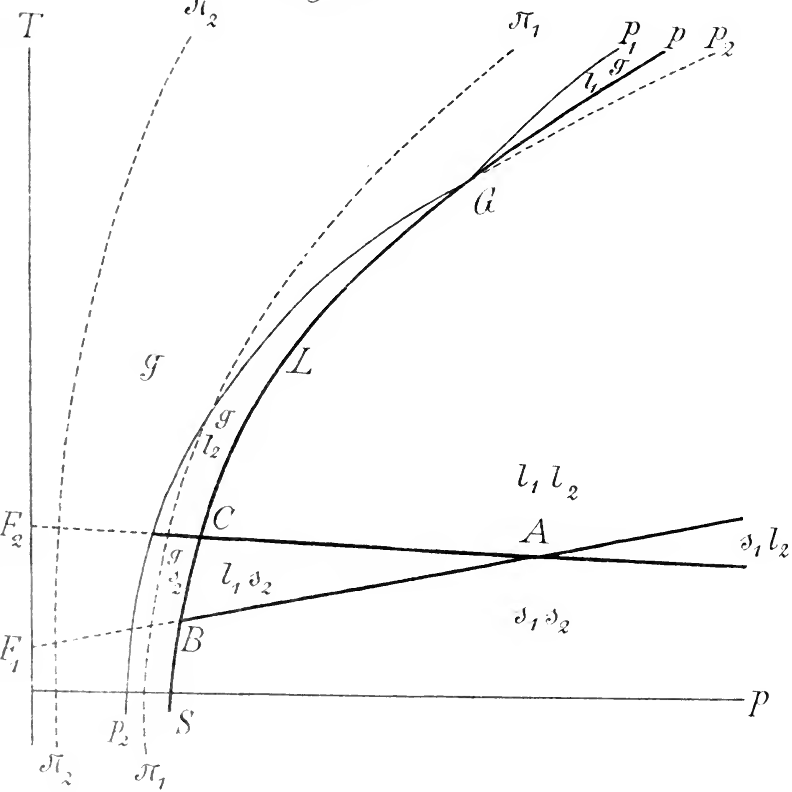
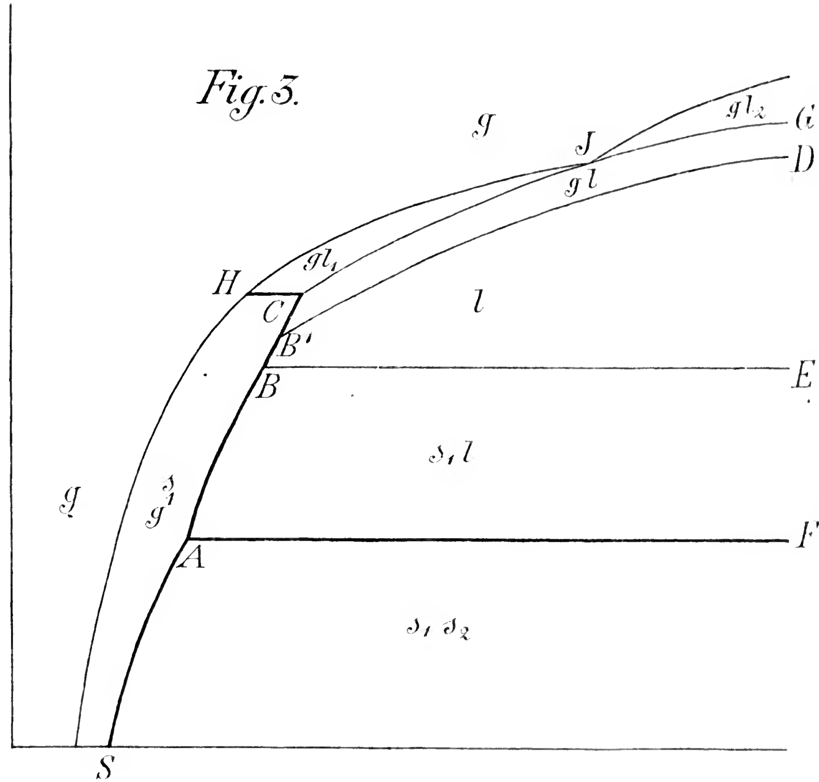


Fig. 3



$$\left(\frac{dp}{dt}\right)''' = \left(\frac{dp}{dt}\right)'' - \frac{m_1'}{v'}\left\{\frac{v''}{m_1''} - \frac{v_1'''}{m_1'''} - \frac{m_2''}{m_1''}\frac{v_2'''}{m_2'''}\right\}\left(\frac{dp}{dt}\right)'$$

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^{IV} = \left(\frac{dp}{dt}\right)'' - \frac{m_2'}{v'}\left\{\frac{v''}{m_2''} - \frac{v_2'''}{m_2'''} - \frac{m_1''}{m_2''}\frac{v_1'''}{m_1'''}\right\}\left(\frac{dp}{dt}\right)'$$

und:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)'' - \left(\frac{dp}{dt}\right)''' = \frac{m_1'}{m_2'}\frac{m_2''}{m_1''}\left\{\left(\frac{dp}{dt}\right)'' - \left(\frac{dp}{dt}\right)^{IV}\right\}.$$

Mit Benützung der früher für $\left(\frac{dp}{dt}\right)'$ gegebenen Gleichung ergeben sich noch die Formeln:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)''' = \left(\frac{dp}{dt}\right)'' - \frac{m_1'}{v'}\left\{\frac{\eta''}{m_1''} - \frac{\eta_1'''}{m_1'''} - \frac{m_2''}{m_1''}\frac{\eta_2'''}{m_2'''}\right\}$$

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^{IV} = \left(\frac{dp}{dt}\right)'' - \frac{m_2'}{v'}\left\{\frac{\eta''}{m_2''} - \frac{\eta_2'''}{m_2'''} - \frac{m_1''}{m_2''}\cdot\frac{\eta_1'''}{m_1'''}\right\}.$$

In dem Quadrupelpunkte A fallen hiernach die Grenzcurven (gls_1) und (gls_2) gegen die Axe des Druckes steiler ab als die Grenze (gs_1s_2).

Die vorhergehenden Formeln zeigen die bemerkenswerthe Eigenschaft, daß die eine nur die Richtungstangente $\left(\frac{dp}{dT}\right)'''$, die andere nur $\left(\frac{dp}{dT}\right)^{IV}$ enthält. Die allgemeinen Formeln, welche ich in einer vorhergehenden Mittheilung [1]) aufgestellt habe, lassen erkennen, daß ein solches Verhalten immer eintrifft, wenn eine Phase des Systems nur die eine oder die andere Componente enthält. Es hängt damit aber weiter zusammen, daß bei einem empirisch gegebenen System immer nur die eine der beiden Curven von reeller Bedeutung ist. Es ergiebt sich dieß aus der folgenden Ueberlegung. Wir bezeichnen diejenige Componente, deren feste Phase seitlich von dem Punkte A die Grenze AF überschreitet, mit 1. Es ist dann wenigstens für den ersten Theil der von A auslaufenden Curve $AF\ \frac{M_1}{M_2} > \alpha$; in dem oberhalb desselben liegenden Gebiete koëxistiren die Phasen l und s_1. Gegen die Axe der Temperaturen hin muß dieses Gebiet begrenzt sein von der Grenzcurve $AB = (gls_1)$. Nun kann die Phase l die Grenze nicht überschreiten; denn in diesem Fall müßte nach unten hin in dem

1) Gött. Nachrichten. 1890. S. 223.

Dampfgebiet eine Grenze auftreten, längs welcher entweder die Phasen g, l, s_1 oder die Phase g, l, s_2 koëxistirten; beides ist nicht möglich wegen der Neigungsverhältnisse der Curven (gs_1s_2), (gls_1) und (gls_2). Wenn wir also von einem Punkt der Grenze AB ausgehend den Zustand des Systems durch allmälige Vergrößerung des Volumens verändern, so muß zuerst die Phase l verschwinden, während die Phase s_1 die Grenze überschreitet. Daraus ergiebt sich, daß unter allen Umständen die Bedingung erfüllt ist

$$\alpha > \frac{m_1'}{m_2'}.$$

Würde nemlich umgekehrt α kleiner als m_1'/m_2' sein, so würde man das Verhältniß der gesammten Mengen der beiden Componenten so wählen können, daß $\alpha < \frac{M_1}{M_2} < \frac{m_1'}{m_2'}$; dann würde zuerst die feste Phase s_1 verschwinden und die Phase l die Grenze überschreiten. Die Verhältnisse der drei gleichzeitig aus den Phasen l und s_1 verdampfenden Mengen der zweiten und ersten Componente sind gegeben durch $\frac{m_2'}{m_1'} : \alpha\frac{m_2'}{m_1'} : 1-\alpha\frac{m_2'}{m_1'}$. Ist $\alpha > \frac{m_1'}{m_2'}$, so ist die letzte Differenz negativ, d. h. es tritt keine Verdampfung, sondern umgekehrt eine Condensation der Phase s_1 ein, wenn wir durch Volumvergrößerung eine Verdampfung der flüssigen Phase herbeiführen.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich nun, daß auf der Grenze AB nur die Phasen l und g zum Verschwinden gebracht werden können; es folgt daraus weiter, daß in dem Quadrupelpunkt A nur die Phasen s_2 und l gleichzeitig verschwinden können; dann kann aber auch auf der unteren Grenze AS nur s_2 und nicht s_1 zum Verschwinden gebracht werden. Wir sind somit zu dem Resultate gelangt.

W e n n in dem von den Curven $AF = (ls_1s_2)$ und $AB = (gls_1)$ zunächst dem vierfachen Punkte begrenzten Winkelraum Gleichgewicht besteht zwischen den Phasen l und s_1, so tritt die letztere Phase in den von Dampf erfüllten Raum über und wir haben in diesem zunächst der Grenze Gleichgewicht zwischen den Phasen g und s_1. Es folgt hieraus weiter die Existenz einer Grenze zweiter Ordnung, jenseits welcher nur noch die gasförmige Phase existirt. Die Gleichung dieser Grenze ist ebenso wie bei dem früheren Problem

$p_1 = \pi_1\left(1+\frac{M_2 R_2}{M_1 R_1}\right)$. Da nach unserer Voraussetzung $\frac{M_1}{M_2} > \alpha$ und $\alpha > \frac{\pi_1 R_2}{\pi_2 R_1}$ so ist auch $\frac{M_1 R_1}{M_2 R_2} > \frac{\pi_1}{\pi_2}$; die durch die vorhergehende Gleichung bestimmte Curve liegt somit ganz in der zwischen den Grenzen *SA*, *AB* und der Temperaturaxe eingeschlossenen Fläche.

Die Grenze *AB* wird die Curve durchschneiden, durch welche das Gebiet der Phasen s_1, l geschieden wird von demjenigen, in welchem nur noch die flüssige Phase existirt. Der Schnittpunkt sei *B*, die von demselben ausgehende Grenze zweiter Ordnung *BE*. Wenn wir von einem beliebigen Punkt dieser Grenze ausgehen, und die Temperatur erhöhen, so wird in jedem Punkt das Volumen der Phase l bestimmt sein durch eine Funktion des Drucks der Temperatur und der in der Phase vorhandenen Mengen der Componenten M_1 und M_2. Bei allmälig steigender Temperatur werden wir aber nothwendig einen Punkt erreichen, in welchem die flüssige Phase verdampft. In diesem Punkt sind die Bedingungen erfüllt:

$$\mu_1'(\pi_1, T) = \mu_1''\left(p, T, \frac{M_1}{v''}, \frac{M_2}{v''}\right)$$

$$\mu_2'(\pi_2, T) = \mu_2''\left(p, T, \frac{M_2}{v''}, \frac{M_1}{v''}\right)$$

$$p = \pi_1 + \pi_2 = p\left(T, \frac{M_1}{v''}, \frac{M_2}{v''}\right).$$

Eliminirt man aus denselben die Größen π_1, π_2, v'', so bleibt eine Gleichung zwischen p und T. Diese bestimmt eine neue Grenze zweiter Ordnung *B'D*, durch welche der Raum, in welchem allein die Phase l existirt, geschieden wird von demjenigen, in welchem l und g koëxistiren. Das Verhalten des aus der flüssigen Phase längs der Curve *B'D* gebildeten Dampfes ist im Allgemeinen folgendes. Bei steigender Temperatur entwickeln sich Dämpfe der beiden Componenten; da aber nach dem Vorhergehenden wenigstens zunächst der Grenze *AB* $\frac{M_1}{M_2} > \frac{\pi_1 R_2}{\pi_2 R_1}$ so wird schließlich noch ein Theil der Componente 1 in flüssigem Zustande übrig bleiben. Oberhalb der Curve *B'D* wird sich eine Grenze hinziehen, welche das Gebiet der koëxistirenden Phasen (lg) scheidet von dem Gebiete der Phasen ($l_1 g$). Gegen den allein von der gasförmigen Phase eingenommenen Raum wird das betreffende Gebiet abgegrenzt durch die schon früher betrachtete Curve $p_1 = \pi_1\left(1+\frac{M_2R_2}{M_1R_1}\right)$. Bezeichnen wir durch C den Punkt, in welchem die neue Grenze (gl_1) (gl) die Linie AB durchschneidet, so zieht sich durch diesen bis zu der Curve p eine Grenzlinie CH hin, oberhalb welcher g und l_1, unterhalb welcher g und s_1 koëxistiren und welche nichts anderes ist als ein Stück der gewöhnlichen Schmelzcurve der Componente 1. Es ist denkbar, daß die Curve p die Grenze (gl_1l) in einem Punkte J trifft. In diesem müßte dann die flüssige Phase l ohne Rest in Dampfform sich verwandeln. Für höheren Druck müßte dann umgekehrt die Componente 2 bei der Verdampfung im Rest bleiben; es würde also von J an das Gebiet des von Dampf allein erfüllten Raumes begrenzt sein durch die Curve $p_2 = \pi_2\left(1+\frac{M_1R_1}{M_2R_2}\right)$; $\frac{M_1R_1}{M_1R_2} < \pi_1/\pi_2$ in dem Schnittpunkt der beiden Curven müßte die Bedingung erfüllt sein $\frac{M_1R_1}{M_2R_2} = \frac{\pi_1}{\pi_2}$.

Ueber stufenweise Dissociation und über die Dampfdichte des Schwefels.

Von

Eduard Riecke.

Wenn eine Molekel einer chemischen Verbindung aus mehreren Theilmolekeln besteht, so ist der Fall denkbar, daß die Dissociation stufenweise sich vollzieht; beispielsweise kann eine Verbindung, deren Zusammensetzung durch das Symbol $(a\ b\ c\ d)$ angegeben wird, sich zunächst in die Molekeln $(a\ b\ c)$ und d spalten und weiterhin kann die Molekel $(a\ b\ c)$ sich in die Molekeln a, b, c dissociiren. Beispiele derartiger Erscheinungen bieten die mehrbasischen Säuren in wässriger Lösung und nach den Dampfdichtebestimmungen von Biltz[1]) wahrscheinlich auch der Schwefel.

Die Dissociationstheorie bietet die Mittel, die Gesetze derartiger Erscheinungen in großer Allgemeinheit zu entwickeln; wir beschränken uns im Folgenden auf den im Vorhergehenden schon als Beispiel angeführten Fall, welcher zu einer Vergleichung der Theorie mit der Erfahrung vorzugsweise Veranlassung bieten dürfte.

---

1) Biltz, Zeitschrift für physikalische Chemie. Bd. II. 1888.

I. Gesetz der stufenweise Dissociation.

Wir bezeichnen die unzersetzte Substanz durch $\mathfrak{S}$, ihr Molekulargewicht durch σ; die Theilmolekeln durch $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$ und $\mathfrak{E}_4$, ihre Molekulargewichte durch α_1, α_2, α_3 und α_4. Die chemische Zusammensetzung von $\mathfrak{S}$ wird dann gegeben durch die Formel

$$\sigma\mathfrak{S} = \alpha_1\mathfrak{E}_1 + \alpha_2\mathfrak{E}_2 + \alpha_3\mathfrak{E}_3 + \alpha_4\mathfrak{E}_4$$

Ebenso setzen wir:

$$\tau\mathfrak{T} = \alpha_1\mathfrak{E}_1 + \alpha_2\mathfrak{E}_2 + \alpha_3\mathfrak{E}_3.$$

Die Dissociation erfolge so, daß zuerst die gasförmigen Molekeln von $\mathfrak{S}$ zerfallen in die Gasmolekeln $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{E}_4$ und hierauf die Molekeln $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$. Die Potentiale von $\mathfrak{S}$ im gasförmigen, flüssigen und festen Zustand seien μ, μ', μ''; die Potentiale der Gase $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$, $\mathfrak{E}_4$ seien μ_a, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4. Die Mengen der einzelnen Bestandtheile m, m', m'', m_a, m_1, m_2, m_3, m_4. Dann sind die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\mu''dm'' + \mu'dm' + \mu dm + \mu_a dm_a + \mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2 + \mu_3 dm_3 + \mu_4 dm_4 = 0$$

$$dm_1 + \frac{\alpha_1}{\sigma}(dm'' + dm' + dm) + \frac{\alpha_1}{\tau} dm_a = 0$$

$$dm_2 + \frac{\alpha_2}{\sigma}(dm'' + dm' + dm) + \frac{\alpha_2}{\tau} dm_a = 0$$

$$dm_3 + \frac{\alpha_3}{\sigma}(dm'' + dm' + dm) + \frac{\alpha_3}{\tau} dm_a = 0$$

$$dm_4 + \frac{\alpha_4}{\sigma}(dm'' + dm' + dm) = 0.$$

Die Potentiale der verschiedenen Componenten müssen somit den Bedingungen genügen:

$$\mu = \mu' = \mu'' \qquad 1).$$

$$\left.\begin{aligned} \tau\mu_a + \alpha_4\mu_4 &= \sigma\mu \\ \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + \alpha_3\mu_3 &= \tau\mu_a. \end{aligned}\right\} \qquad 2).$$

Die erste Gleichung ist der Ausdruck des allgemeinen Satzes, daß das Potential einer chemischen Componente in allen Phasen eines Systems denselben Werth haben muß, wenn Gleichgewicht vorhanden ist. Der partielle Sättigungsdruck von $\mathfrak{S}$ hängt hiernach von der Temperatur nahezu in derselben Weise ab, wie wenn die gasförmigen Molekeln von $\mathfrak{S}$ der Dissociation nicht unterworfen sein würden.

Für den Gaszustand sind Potential und Entropie durch die Formeln gegeben

$$\mu = E + T\{R\log d - \mathfrak{A}c\,\log T + \mathfrak{A}c_p - H\}$$
$$\eta/m = H + \mathfrak{A}c_v\log T - R\log d$$

wo E und H gewisse durch den Normalzustand bestimmte Constanten, d die Dichte, c_v, c_p die specifischen Wärmen und T die absolute Temperatur bezeichnen. $\mathfrak{A}$ ist das mechanische Aequivalent der Wärme, R die Constante des Boyle-GayLussacschen Gesetzes. Mit Benützung dieser Werthe geben die Gleichungen 2

$$\tau E_a + \alpha_4 E_4 - \sigma E + \mathfrak{A}T\{\tau c_{pa} + \alpha_4 c_{p4} - \sigma c_p\}$$
$$= T\{\tau\eta_a/m_a + \alpha_4\eta_4/m_4 - \sigma\eta/m\} = Q$$

und

$$\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 - \tau E_a + \mathfrak{A}T\{\alpha_1 c_{p1} + \alpha_2 c_{p2} + \alpha_3 c_{p3} - \tau c_{pa}\}$$
$$= T\{\alpha_1\eta_1/m_1 + \alpha_2\eta_2/m_2 + \alpha_3\eta_3/m_3 - \tau\eta_a/m_a\} = Q_a.$$

Q und Q_a sind nichts anderes als die Umwandlungswärmen, welche den Uebergängen $\sigma\mathfrak{S} \to \tau\mathfrak{T} + \alpha_4\mathfrak{E}_4$ und

$$\tau\mathfrak{T} \to \alpha_1\mathfrak{E}_1 + \alpha_2\mathfrak{E}_2 + \alpha_3\mathfrak{E}_3$$

entsprechen, bezogen auf eine Grammmolekel der Substanzen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$.

Mit Benützung dieser Werthe von Q und Q_a und mit Rücksicht auf die Beziehung $R_1\alpha_1 = R_2\alpha_2 = R_3\alpha_3 = R_4\alpha_4 = R_a\tau = R\sigma$ lassen sich die Gleichungen 2 auf die Form bringen:

$$\text{3).}\qquad \frac{d_a d_4}{d} = \Theta \qquad \frac{d_1 d_2 d_3}{d_a} = \Theta_a$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\Theta = e^{\tau H_a + \alpha_4 H_4 - \sigma H}\, e^{-Q/T}\, T^{\mathfrak{A}(\tau c_{va} + \alpha_4 c_{v4} - \sigma c_v)}$$
$$\Theta' = e^{\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 + \alpha_3 H_3 - \tau H_a}\, e^{-Q_a/T}\, T^{\mathfrak{A}(\alpha_1 c_{v1} + \alpha_2 c_{v2} + \alpha_3 c_{v3} - \tau c_{va})}.$$

Zur Bestimmung der 6 in den Gleichungen 3 auftretenden Dichten hat man zunächst noch die Bedingung, daß die Summe der Partialdrucke der einzelnen gasförmigen Bestandtheile gleich ist dem Gesammtdruck. Verstehen wir, ebenso wie oben, unter R_1, R_2, R_3, R_4, R_a und R die Constanten des Boyle-GayLussac'schen Gesetzes für die einzelnen Componenten, so folgt hieraus die Gleichung:

$$R_1 d_1 + R_2 d_2 + R_3 d_3 + R_4 d_4 + R_a d_a + R d = p/T. \qquad 4).$$

Dazu kommen endlich noch die Gleichungen

$$\frac{d_1}{\alpha_1} = \frac{d_2}{\alpha_2} = \frac{d_3}{\alpha_3} \quad \text{und}$$
$$\frac{d_4}{\alpha_4} = \frac{d_1}{\alpha_1} + \frac{d'}{\tau} \qquad 5).$$

durch welche den Verhältnissen der chemischen Zusammensetzung Rechnung getragen wird. Die 6 Gleichungen 3, 4 und 5 bestimmen vollständig die Dichten der einzelnen gasförmigen Bestandtheile. Will man außerdem die Dampfdichte $\varDelta$ des in Dissociation begriffenen Gases einführen, so hat man die Gleichung hinzuzufügen

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_a + d = \varDelta \frac{p}{PT}. \qquad 6).$$

Hier bezeichnet $\varDelta$ die Dampfdichte bezogen auf Luft, P die Constante des Gasgesetzes für Luft.

II. Dampfdichte des Schwefels.

Die vorhergehenden allgemeinen Gleichungen mögen nun in Anwendung gebracht werden auf die Dissociation des Schwefels. Die Untersuchungen von Beckmann[1]) und Schall[2]) haben gezeigt, daß Schwefelmolekeln von der Formel S_8 existiren. Die Untersuchungen von Biltz machen es wahrscheinlich, daß bei der Verdampfung des Schwefels unter dem Drucke einer Atmosphäre zunächst Molekeln S_8 sich entwickeln, daß diese sich spalten in S_6 und S_2 und daß im weiteren Verlaufe der Dissociation auch die Molekeln S_6 sich auflösen in je drei Molekeln S_2. Dieser Annahme entsprechend haben wir in den allgemeinen Gleichungen zu setzen

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4, \quad \tau = 3\alpha_1, \quad \sigma = 4\alpha_1$$
$$d_1 = d_2 = d_3.$$

Wir erhalten dann zur Berechnung der unbekannten Dichten d, d_a, d_1 und d_4 die Gleichungen

$$d_a d_4 = \Theta d$$
$$d_1^3 = \Theta_a d_a$$
$$3 d_1 + d_4 + \tfrac{1}{3} d_a + \tfrac{1}{4} d = p/R_1 T \qquad 7).$$
$$d_4 = d_1 + \tfrac{1}{3} d_a.$$

1) Beckmann, Zeitschrift für phys. Chem. Bd. V. 1890.

2) Schall, Berichte der D. chem. Gesellschaft. Jahrg. 28.

Eliminiren wir aus diesen Gleichungen d und d_4, so ergiebt sich:

$$d_a(d_a+3d_1) = 4\Theta\left(\frac{3p}{R_1T}-2d_a-12d_1\right)$$

8). $$d = \frac{4p}{R_1T}-16d_1-\tfrac{8}{3}d_a$$

und durch Elimination von d_1

9). $$d_a^2+3d_a\sqrt[3]{\Theta_a d_a}+8\Theta d_a+18\Theta\sqrt[3]{\Theta_a d_a} = 12\Theta\frac{p}{R_1T}.$$

Nun ist für $T=0$ auch Θ und Θ_a gleich Null. Somit ergiebt sich aus den Gleichungen 9, 8 und 7 für $T=0$

$$d_a = d_1 = d_4 = 0 \quad \text{und}$$

$$d = \frac{4p}{R_1T}.$$

Die Dampfdichte des gasförmigen Schwefels bezogen auf Luft hat demnach für $T=0$ den Werth:

$$D_0 = \frac{4P}{R_1}.$$

Für $T=\infty$ ist $\Theta=\Theta_a=\infty$. Somit ergiebt sich aus den Gleichungen 8 und 9

$$d_a = 0,\quad d_1 = \tfrac{1}{4}\frac{p}{R_1T} \text{ und } d = 0,$$

ferner vermöge der letzten der Gleichungen 7

$$d_4 = \tfrac{1}{4}\frac{p}{R_1T}.$$

Die gesammte Dichte des gasförmigen Schwefels wird für $T=\infty$

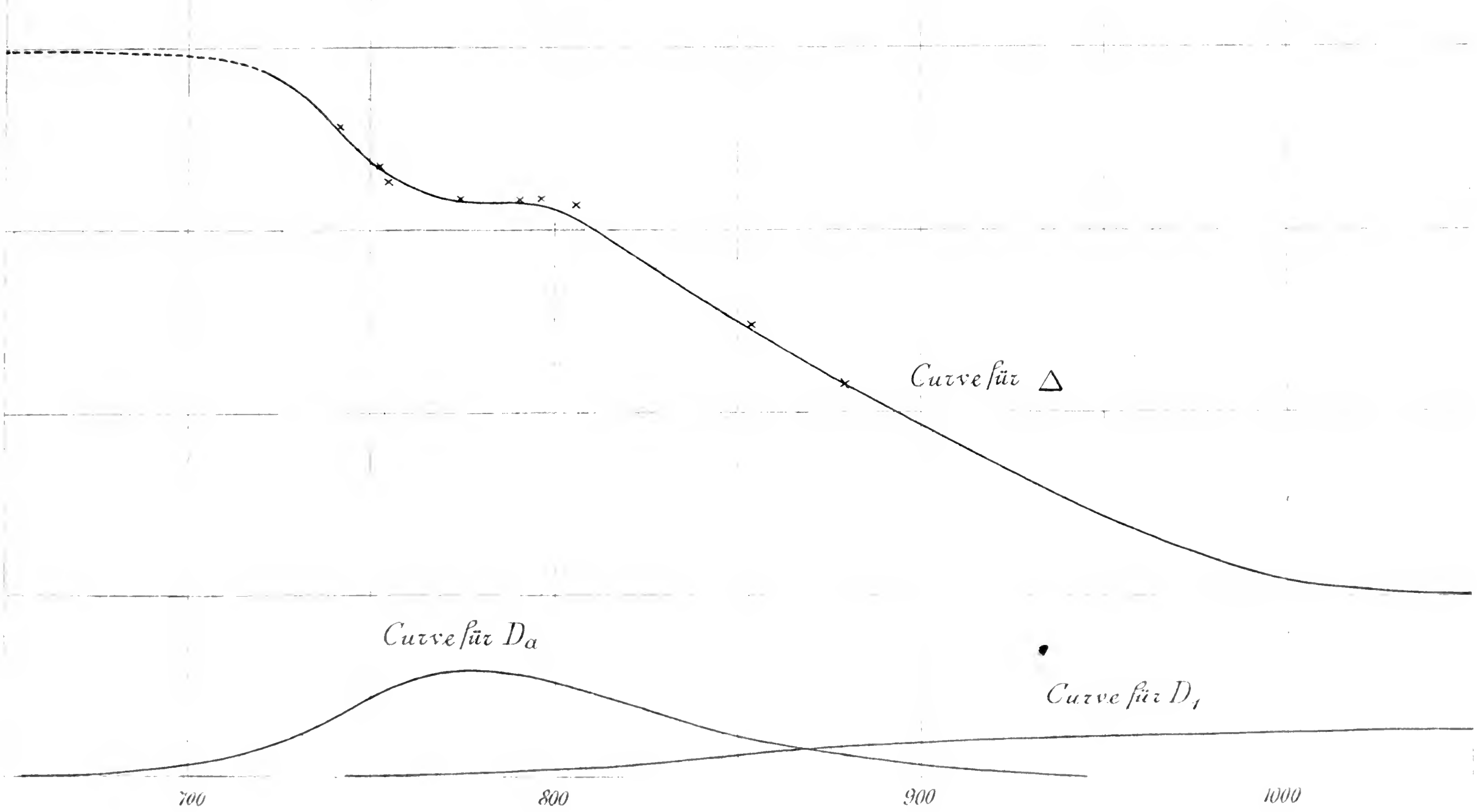
$$3d_1+d_4 = \frac{p}{R_1T} \text{ und die Dampfdichte}$$

$$D_\infty = \frac{P}{R_1}.$$

Wir denken uns aus den Gleichungen 9 und 7 die Dichten d_a und d_1 berechnet; wir lassen den Gesammtdruck p, unter welchem sich der gasförmige Schwefel befindet, unverändert und lassen die Temperatur wachsen von $T=0$ bis $T=\infty$. Die für eine beliebige Temperatur sich ergebenden Werthe von d_a und d_1 dividiren wir

Zu: Eduard Riecke. Dissociation und Dampfdichte des Schwefels.

Göttinger Nachr. 1890. No. 10.



durch die den gegebenen Werthen von T und p entsprechende Dichte der Luft und bezeichnen diese Quotienten durch D_a und D_1. Bei konstantem p wird dann D_a eine Function der Temperatur sein, welche für $T = 0$ ebenfalls Null ist, welche mit wachsender Temperatur bis zu einem gewissen Maximum ansteigt und für $T = \infty$ wieder zu Null wird. Gleichzeitig ist D_1 für $T = 0$ gleich Null und nähert sich bei wachsender Temperatur dem Grenzwerthe $D_1 = \frac{1}{4}\frac{P}{R_1}$.

Setzen wir weiter $d_4\frac{PT}{p} = D_4$, $d\frac{PT}{p} = D$ so ergiebt sich

$$3D_1 + D_4 + D_a + D = \varDelta$$

wo $\varDelta$ die Dampfdichte des gasförmigen Schwefels.

Die Größen D_4 und D werden durch die Gleichungen

$$D_4 = D_1 + \tfrac{1}{3}D_a$$

$$D = \frac{4P}{R_1} - 16D_1 - \tfrac{8}{3}D_a$$

bestimmt; mit Benützung derselben ergiebt sich

$$\varDelta = \frac{4P}{R_1} - 12D_1 - \tfrac{4}{3}D_a.$$

Sind D_1 und D_a bei einem konstanten Drucke als Funktionen der Temperatur gegeben, so ergiebt sich mit Hülfe dieser Gleichung die Dampfdichte des in der von uns angenommenen Weise sich dissociirenden Schwefels.

Da eine allgemeine Auflösung der Gleichung 9 nicht möglich ist, so wurden die für die Dissociation des Schwefels entwickelten Formeln dadurch geprüft, daß Curven für die Größen D_a und D_1 in einer den allgemeinen Bedingungen entsprechenden Weise gegezogen und mit Hülfe derselben die Curve für die Dampfdichte $\varDelta$ konstruirt wurde.

Daß es auf diesem Wege in der That möglich ist, eine mit den Beobachtungen übereinstimmende Curve zu erhalten, ergiebt sich aus der Betrachtung der Figur, in welcher die von Biltz bestimmten Werthe der Dampfdichte mit Kreuzen bezeichnet sind. Die numerische Vergleichung der beobachteten und berechneten Werthe der Dampfdichte ergiebt sich aus der folgenden Tabelle.

T	$D_a \frac{R_1}{P}$	$D_1 \frac{R_1}{P}$	$\Delta \frac{R_1}{P}$ ber.	$\Delta \frac{R_1}{P}$ beob.
741	0,31	0	3,59	3,58
753	0,47	0	3,37	3,36
755	0,50	0	3,33	3,29
775	0,58	0,005	3,17	3,17
791	0,55	0,010	3,15	3,17
797	0,52	0,015	3,13	3,19
807	0,48	0,025	3,06	3,15
854	0,20	0,110	2,41	2,49
879	0,11	0,14	2,17	2,14

Die der Zusammensetzung S_8 entsprechende Dampfdichte $\frac{4P}{R_1}$ wird von dem Schwefel bei dem Drucke einer Atmosphäre nicht erreicht, da schon vorher die Condensation zu flüssigem Schwefel eintritt.

Eine genauere Prüfung der entwickelten Formeln sowie eine Entscheidung der Frage, ob nicht außer den Molekeln von der Zusammensetzung S_8, S_6 und S_2 auch noch Molekeln S_4 oder S_8 existiren, ist ohne eine schwierige und zeitraubende Rechnung nicht ausführbar. Es müßten zu diesem Zweck aus den Werthen von D_a und D_1 noch die Werthe von D_4 und D berechnet werden; die entsprechenden Werthe von d_a, d_1, d_4 und d würden dann mit Hülfe der Gleichungen 7 zur Kenntniß von Θ und Θ_a führen. Endlich würde zu untersuchen sein, ob diese Größen in der durch die Theorie geforderten Weise als Functionen der Temperatur sich darstellen lassen.

Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen.

Von

Franz Meyer in Clausthal.

(Zweite Mittheilung)[1].

Vorgelegt von F. Klein.

Unsere Kenntnisse von den Singularitäten auf Raumcurven

1) Vgl. Göttinger Nachrichten 1888, pag. 73.

reichen wohl so weit, daß wir, wenigstens in den einfacheren Fällen, die Art ihres Entstehens übersehen können. Insbesondere erlaubt die geometrische Anschauung die vorschiedenen Möglichkeiten des Zusammenrückens je zweier „einfacher" Singularitäten (d. i. solcher, die bei jeder Curve vorkommen) zu erschöpfen.

Indessen bleibt die innere Seite derartiger Vorgänge davon unberührt: erweist sich schon die geometrische Abzählung bei der Bestimmung der Anzahl von elementaren Singularitäten, welche in eine höhere eintreten, als unzureichend, so wird die verschiedenartige Geschwindigkeit, mit der die einzelnen singulären Punkte, Geraden, Ebenen coincidiren, gar nicht berücksichtigt.

Im Folgenden wird ein erster Versuch in dieser Richtung gemacht, indem die einschlägigen Verhältnisse auf einer allgemeinen Ordnungscurve vom Geschlecht Null mit algebraischen Hülfsmitteln studirt werden.

In einer früheren Mittheilung [1]) hatte ich die Discriminanten und Resultanten der bei einer allgemeinen ebenen Ordnungscurve R_n^2 vom Geschlecht Null in Betracht kommenden Singularitätenformen in ihre Elementarfactoren zerlegt. Indem ich die analoge Aufgabe für die Raumcurven R_n^3 in Angriff nehme, beschränke ich mich auf die nächstliegende Erweiterung jener Singularitäten, nämlich auf die („Hyperosculations"-)Ebenen „α^4", die ("Schmiegungsberühr-")Ebenen „$\alpha^3\beta^2$" und die („Treff-")Tangenten „$(\alpha^2\beta)$".

Die binären Formen, welche, gleich Null gesetzt, die Argumente α der genannten drei Singularitäten liefern, mögen durch eckige Klammern [2]) bezeichnet werden. Alsdann lautet die in Rede stehende Aufgabe: „Sind die Punktcoordinaten einer punktallgemeinen, rationalen Raumcurve R_n^3 durch ein System von vier binären Formen $n$ter Ordnung gegeben:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = f_1(\lambda) : f_2(\lambda) : f_3(\lambda) : f_4(\lambda),$$

so sollen die Discriminanten und Resultanten der Singularitätenformen $[\alpha^4]$, $[\alpha^3\beta^2]$, $[(\alpha^2\beta)]$ in Elementar-

1) Vgl. Göttinger Nachrichten 1888, pag. 73.

2) Desgleichen sollen weiterhin eckige Klammern im Falle einer Coincidenz zweier Singularitäten die betr. Invariante selbst angeben, deren Verschwinden das Criterium für das Eintreten der fraglichen Coincidenz ist. Innerhalb einer derartigen Klammer sollen noch die singulären Ebenen, Geraden und Punkte sich dadurch von einander abheben, daß die auf eine Gerade bezüglichen Argumente durch eine runde, und die auf einen Punkt bezüglichen durch zwei runde Klammern eingeschlossen werden.

factoren zerlegt werden, welche in den vierreihigen Coefficientendeterminanten δ der $f_i(\lambda)$ ganz rational und irreducibel sind".

Um die gemeinten Factoren rein herzustellen, bedienen wir uns vor Allem zweierlei Hülfsmittel: Einmal werden die erforderlichen Eliminationen nicht sowohl an die $f_i(\lambda)$, sondern an das System ihrer conjugirten[1]) Formen „$\varphi_k(\lambda)$" geknüpft; sodann aber denken wir uns vielfach die Curven R_n^3 als Projectionen[2]) einer im vierdimensionalen Raume gelegenen R_n^4, und zwar wird der Punkt P, von dem aus die letztere projicirt wird, gerade der Bedingung unterworfen, daß für die Projectionscurve R_n^3 ein bestimmter unter jenen Elementarfactoren (und nur er allein) verschwindet.

Die bei dieser Projectionsmethode zur Anwendung gelangenden Hülfssätze sollen gleich hier im Zusammenhange besprochen werden.

Es liege eine punktallgemeine R_n^4 vor:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = g_1(\lambda) : g_2(\lambda) : g_3(\lambda) : g_4(\lambda) : g_5(\lambda).$$

Welches ist dann der geometrische Punktort („Raum"), der von solchen „Ebenen" $(\alpha^2\beta)$ beschrieben wird, daß die Argumente α, β noch einer algebraischen Bedingung $\varphi(\overset{\mu}{\alpha}, \overset{\nu}{\beta}) = 0$ genügen.

Die Coordinaten $p_{ikl} = |x_i x_k x_l|$ einer Ebene $(\alpha^2\beta)$ sind ganze Functionen von α, β; in α vom Grade $2(n-2)$, in β vom Grade $n-2$:

$$p_{ikl} = p_{ikl}(\overset{2(n-2),}{\alpha}, \overset{(n-2)}{\beta}).$$

Zur Ermittelung der Ordnung des fraglichen Raumes der (p) schneide man in bekannter Weise mit einer Geraden q_{mn}. Die beiden Gleichungen

$$\Sigma p_{ikl} q_{mn} = 0, \quad \varphi(\alpha, \beta) = 0$$

besitzen $(n-2)(\mu+2\nu)$ Lösungssysteme α, β: dies ist dann zugleich im Allgemeinen d. h. wenn jede der die Gerade q treffenden Ebenen p nur einmal[3]) zu zählen ist, die Ordnung unseres Raumes.

Als Beispiel diene der Ort der Ebenen $(\alpha^2\beta\gamma)$. Soll eine Ebene $(\alpha^2\beta)$ die Curve R_n^4 noch einmal, in γ treffen, so müssen, wenn man unter $\psi_{(k)}\lambda^n (k = 1, 2, .. n-4)$ die zu den $g_i(\lambda)$ conjugirten

---

1) Vgl. des Verfassers Schrift: „Apolarität und rationale Curven" Cap. I.

2) Diese Methode des Projicirens bezwecks Ausführung von Eliminationen ist wohl vereinzelt auch sonst schon angewendet; cf. z. B. Klein, Zur Theorie der Abel'schen Functionen, Math. Ann. XXXVI, § 19.

3) Zählt dagegen jede der betr. Ebenen ϱ-fach, so ist selbstredend die angegebene Anzahl durch ϱ zu dividiren.

Formen versteht, $(n-4)$ Gleichungen von der Form:

$$\psi_{\alpha^2 \beta \gamma \lambda_5 \lambda_6 \ldots \lambda_n} = 0$$

noch einfach unendlich viele Werthsysteme $(\lambda_5, \lambda_6, \ldots \lambda_n)$ bei constanten α, β, γ zulassen. Denkt man sich für den Augenblick der Größe α einen numerischen Werth beigelegt, so wird die vorliegende Eliminationsaufgabe äquivalent mit der einfacheren, die Gleichung für die Argumente β, γ der Doppelpunkte einer R^2_{n-1} aufzusuchen. Dieselbe ist (nach Elimination von γ) bekanntlich vom Grade $(n-3)(n-4)$ in β, mithin von doppelt so hohem Grade in α. Die Bedingungsgleichung $\varphi = 0$ lautet also:

$$\varphi(\overset{2(n-3)(n-4),}{\alpha}, \overset{(n-3)(n-4)}{\beta}) = 0,$$

und $(n-2)(\mu + 2\nu) = 4(n-2)(n-3)(n-4)$ Ebenen $(\alpha^2\beta\gamma)$ begegnen nach Obigem einer beliebigen Geraden. Da aber jede dieser Ebenen doppelt vorkommt, als Ebene $(\alpha^2\beta)$ und als Ebene $(\alpha^2\gamma)$, so ist die Ordnung des Raumes „$(\alpha^2\beta\gamma)$" nur gleich $2(n-2)(n-3)(n-4)$.

Für das Folgende ist noch die Ordnung des Ortes sämmtlicher Sehnen der R^4_n zu eruiren. Die Coordinaten $p_{ik} = |x_i x_k|$ einer Sehne $((\alpha, \beta))$ sind in α, β symmetrisch und vom Grade $n-1$. Schneidet man wiederum mit einer Graden $q_{lm} = |y z|$, so führt das auf die Aufgabe, alle Werthsysteme α, β zu bestimmen, für welche die sämmtlichen Determinanten der Matrix

$$|g_i(\alpha), g_i(\beta), y_i, z_i| = 0$$

verschwinden. Die nach bekannter Methode resultirende Anzahl 1) $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ist die Ordnung des Raumes $((\alpha, \beta))$.

Nunmehr kehren wir zur Curve R^3_n zurück, und nehmen an, daß für sie einer jener „Elementarfactoren" verschwinde, also das Criterium für ein bestimmtes Zusammenrücken zweier einfacher Singularitäten erfüllt sei. Dann ist es gestattet, und zwar noch auf mannigfaltige Art, die R^3_n als Projection einer allgemeinen R^4_n anzusehen, so, daß der Projectionspunkt P auf einem bestimmten „Raume" liegt, und eben dadurch das Zustandekommen der fraglichen höheren Singularität für die Projectionscurve, (oder auch den Projectionskegel) allein ermöglicht.

Hier gilt der fundamentale Satz:

„Der Grad irgend eines Elementarfactors der R^3_n in den δ ist genau gleich der Ordnung des Raumes,

1) Diese Anzahl als Grad der „Doppelpunktsinvariante" einer R^3_n findet sich auf andere Art abgeleitet bei H. Brill, Math. Ann. III, pag. 456.

dem der Projectionspunkt P der entsprechenden R_n^4 angehört".

Der Beweis fließt unmittelbar aus den Grundeigenschaften der zu den g conjugirten Formen ψ. Fügt man nämlich dem Systeme der $n-4$ Formen ψ eine beliebige weitere hinzu, so stellt das so erweiterte System in projectivischem Sinne diejenige R_n^3 dar, welche aus der R_n^4 durch Projection von einem bestimmten Punkte P auf eine beliebige Ebene hervorgeht: die Coefficienten der neu hinzugetretenen Form ψ sind geradezu die (polyedralen) Coordinaten von P. Die linke Seite der Gleichung des, einem bestimmten Elementarfactor der R_n^3 entsprechenden Raumes der Punkte P stimmt dann mit dem Elementarfactor selber überein.

Vermöge der beiden soeben explicirten Hülfssätze lassen sich die Criterien für singuläre Geraden und Punkte der R_n^3 bilden, insofern die jedesmal noch erforderlichen Eliminationen auf bekannte Art ausführbar sind. Das Letztere gilt auch ohne Weiteres für die singulären Ebenen, sowie für die Aufstellung der drei Singularitätenformen selbst.

Um auch hierfür ein Beispiel anzugeben, so ist zum Eintreten einer Ebene $\alpha^3\beta^2\gamma^2$ das gleichzeitige Bestehen von $n-3$ Gleichungen:

$$\varphi_{\alpha^3\beta^2\gamma^2\lambda_8\lambda_9\ldots\lambda_n} = 0$$

nothwendig und hinreichend: die Elimination sämmtlicher Argumente führt zu einer Bildung vom Grade $6(n-4)(n-5)(n-6)$ in den δ.

Es sei gestattet, mit Uebergehung der einzelnen Zwischenrechnungen, die Endergebnisse in Gestalt zweier Tabellen mitzutheilen.

I. Tabelle der Invarianten.

	Bezeichnung[1].	Grad in den δ.
1.	$[\alpha^5]$	$5(n-4)$
2.	$[\alpha^4\beta^2]$	$8(n-4)(n-5)$
3.	$[\alpha^3\beta^3]$	$\frac{9}{2}(n-4)(n-5)$
4.	$[\alpha^3\beta^2\gamma^2]$	$6(n-4)(n-5)(n-6)$
5.	$[(\alpha^3)]$	$3(n-2)$
6.	$[(\alpha^2\beta\gamma)]$	$2(n-2)(n-3)(n-4)$
7.	$[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$	$7(n-2)(n-4)$
8.	$[\alpha^4, (\alpha^2\beta)]$	$6(n-2)(n-4)$
9.	$[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\gamma)]$	$10(n-2)(n-4)(n-5)$
10.	$[((\alpha\beta))]$	$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

1) Wegen der Bezeichnungen verweise ich noch einmal auf die Anm. pag. 367.

II. Tabelle der Singularitätenformen.

Bezeichnung.	Grad in λ.	Grad in den δ.
$[\alpha^4]$	$4(n-3)$	f
$[\alpha^3\beta^2]$	$6(n-3)(n-4)$	$2(n-4)$
$[(\alpha^2\beta)]$	$2(n-2)(n-3)$	$(n-2)$.

So bedeutet in der I. Tabelle $[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$ die linke Seite des Criteriums für das Eintreten einer derartigen „Schmiegungsberührebene“ $\alpha^3\beta^2$, daß die Tangente (α^2) die Curve R_n^3 noch einmal in β trifft u. s. w.

Daran mögen gleich die beiden weiteren Tabellen für die Grade, wie für die Zerlegungen der Discriminanten und Resultanten der drei Singularitätenformen angeschlossen werden.

III. Die Discriminanten und Resultanten der Singularitätenformen.

A. Die Grade in den δ.

$$\begin{cases} D[\alpha^4] & 2(4n-13) \\ D[\alpha^3\beta^2] & 4(n-4)(6n^2-42n+71) \\ D[(\alpha^2\beta)] & 2(n-2)(2n^2-10n+11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R\{[\alpha^4], [\alpha^3\beta^2]\} & 14(n-3)(n-4) \\ R\{[\alpha^4], [(\alpha^2\beta)]\} & 6(n-2)(n-3) \\ R\{[\alpha^3\beta^2], [(\alpha^2\beta)]\} & 10(n-2)(n-3)(n-4) \end{cases}$$

B. Die Zerlegungen in Elementarfactoren.

$$\begin{cases} D[\alpha^4] & = [\alpha^5]\,.\,[(\alpha^3)]\ ^{1)} \\ D[\alpha^3\beta^2] & = [(\alpha^3)]^{(2n-8)(2n-9)}\,.\,[\alpha^5]\,.\,[\alpha^4\beta^2]\,.\,[\alpha^3\beta^3]^6\,[\alpha^3\beta^2\gamma^2]^2\,[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)] \\ D[(\alpha^2\beta)] & = [(\alpha^3)]\,.\,[(\alpha^2\beta\gamma)]^2\,[((\alpha\beta))]^2\,[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} R\{[\alpha^4], [\alpha^3\beta^2]\} & = [\alpha^4\beta^2]\,.\,[(\alpha^3)]^{2(n-4)}\,.\,[\alpha^5]^2 \\ R\{[\alpha^4], [(\alpha^2\beta)]\} & = [\alpha^4, (\alpha^2\beta)]\,.\,[(\alpha^3)]^2 \\ R\{[\alpha^2\beta^2], [(\alpha^2\beta)]\} & = [(\alpha^3)]^{2(n-4)}\,.\,[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]^2\,.\,[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\gamma)]. \end{cases}$$

Da die Existenz der einzelnen Elementarfactoren rein geometrisch

---

1) Diese Zerlegung gilt ganz allgemein, wie bereits von H. Brill bewiesen ist. Vgl. Math. Ann. XX, pag. 338. Aber auch die fünf weiteren Zerlegungen gestatten eine Ausdehnung auf Curven R_n^d im Raume von d Dimensionen. Diese Ausdehnung erklärt erst die Besonderheiten und Verschiedenheiten der Fälle $d=2$ und $d=3$.

a priori eingesehen werden kann, so handelt es sich nur um die Ermittelung ihrer Vielfachheit.

Nimmt man die bezüglichen Exponenten als Unbekannte, so wird die Gradvergleichung beider Seiten je auf eine Anzahl diophantischer Gleichungen führen. Daß die Auflösung der letzteren in der That immer nur auf eine einzige Art bewerkstelligt werden kann, soll nunmehr im Einzelnen nachgewiesen werden.

Die Zerfällung der Discriminante $D[\alpha^4]$ in der angegebenen Weise folgt unmittelbar aus den bezüglichen Formeln der Tabellen I und II.

Bezüglich der Discriminante $D[\alpha^3\beta^2]$ bemerke man vorab, daß durch eine Tangente (α^3) genau $2n-8$ Ebenen gehen, welche die Curve R_n^3 noch einmal berühren. Der Exponent des Factors $[(\alpha^3)]$ muß also, bis auf einen noch unbekannten positiv rationalzahligen Factor a, die Anzahl der Paare darstellen, welche sich aus jenen $2n-8$ Ebenen bilden lassen, somit die Form $a(n-4)(2n-9)$ besitzen.

Bedeuten des Weiteren b, c, d, e, f positive, ganze Zahlen, so kann der Character der fraglichen Zerlegung nur der folgende sein:

$$D[\alpha^3\beta^2] = [(\alpha^3)]^{a(n-4)(2n-9)}\cdot[\alpha^5]^b\,[\alpha^4\beta^2]^c\,[\alpha^3\beta^3]^d\,[\alpha^3\beta^2\gamma^2]^e\,[\alpha^3\beta^2,(\alpha^2\beta)]^f.$$

Mit Rücksicht auf die hier in Betracht kommenden Formeln in I und II herrscht demnach (nach beiderseitiger Hebung des Factors $n-4$) die Identität:

$$4(6n^2-42n+71) = 3a(n-2)(2n-9)+5b+8c(n-5)+\tfrac{9}{2}d(n-5)$$
$$+6e(n-5)(n-6)+7f(n-2).$$

Die Vergleichung der Coefficienten von n^2 liefert

$$a+e = 4,$$

sodaß auch a ganzzahlig ausfallen muß: ferner wird für $n=2$:

$$44 = 5b-24c-\frac{27}{2}d+72e,$$

endlich für $n=5$:

$$44 = 5b+9a+21f,$$

woraus durch Subtraction entsteht:

$$0 = 3a+8c+7f+\tfrac{9}{2}d-24e.$$

Für a und e sind vorerst die drei Möglichkeiten denkbar:

$$a=1,\ e=3;\quad a=e=2;\quad a=3,\ e=1.$$

Von diesen kommt die dritte wegen der letztbemerkten Relation in Wegfall, insofern die Summe $3a+8c+7f+\frac{9}{2}d$ sicher den Werth 24 übersteigt.

Wäre andererseits $a = 1$, so hätte man:

$$35 = 5b+21f,$$

was keine brauchbaren Lösungen für b und f zulassen würde. Somit bleibt nur die Annahme $a = e = 2$. Dadurch kommt nunmehr:

$$26 = 5b+21f, \quad 42 = 8c+7f+\tfrac{9}{2}d.$$

Die erste Beziehung hat $b = f = 1$ zur Folge, und dies wiederum, in die zweite eingesetzt:

$$35 = 8c+\tfrac{9}{2}d,$$

was sich nur mit den Werthen $c = 1$, $d = 6$ verträgt. Damit ist die zweite der Zerlegungen III B bewiesen. Bezeichnen hinsichtlich der dritten Discriminante $D[(\alpha^2\beta)]$ wiederum a, b, c, d positive ganze Zahlen, so kommt zunächst durch Gradvergleichung (nach Hebung von $n-2$):

$$2(2n^2-10n+11) = 3a+2b(n-3)(n-4)+\frac{c}{2}(n-1)+7d(n-4).$$

Unmittelbar geht daraus $2b = 4$ i. e. $b = 2$ hervor. Hierauf gestützt, erhält man für $n = 4$:

$$2 = a+\frac{c}{2},$$

also

$$a = 1, \quad c = 2.$$

Endlich liefert die Einsetzung der gefundenen Werthe in die für $n = 0$ resultirende Beziehung:

$$22 = 50-28d$$

d. i. $d = 1$, womit die dritte Formel von III B hergeleitet ist.

Aehnlich erledigen sich die drei Resultanten.

Die Form der ersten Zerlegung lautet:

$$R\{[\alpha^4], [\alpha^3\beta^2]\} = [\alpha^4\beta^2]^a.[(\alpha^3)]^{2b(n-4)}.[\alpha^5]^c,$$

wo a, b, c positive Zahlen, die erste und dritte ganz, die mittlere eventuell rational zu bestimmen sind. Die Eigenart des Exponenten von $[(\alpha^3)]$ rührt daher, daß für jede der oben bereits erwähnten $2(n-4)$ durch die Tangente (α^3) an die Curve gehenden Berührebenen $\alpha^3\beta^2$ eine Coincidenz des Argumentes α der Tangente mit dem Argument α der zugehörigen Hyperosculationsebene α^4 stattfindet.

Es wird jetzt identisch:

$$14n - 42 = n(8a + 6b) - (40a + 12b - 5c)$$

und demnach

$$7 = 4a + 3b, \quad 42 = 40a + 12b - 5c.$$

Die erstere Relation könnte nur durch $b = 1$, $a = 1$, oder aber durch $b = 2$, $a = \frac{1}{4}$ erfüllt werden; der letztere Fall ist nicht realisirbar, da er ein negatives c im Gefolge hätte, der erstere führt zum Werthe $c = 2$.

Die Zerspaltung der zweiten Resultante in IIIb gestaltet sich so einfach, daß sie übergangen werden kann. Für die letzte endlich gilt, ähnlich wie bei der ersten, der Ansatz:

$$R\{[\alpha^3\beta^2], [(\alpha^2\beta)]\} = [(\alpha^3)]^{2a(n-4)}.[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]^b.[\alpha^3\beta^2, \alpha^2\gamma)]^c$$

wo wieder b und c ganze, a möglicherweise eine rationale positive Zahl ist. Die Gleichheit der beiderseitigen Grade drückt sich hier in der Identität aus:

$$10(n-3) = 6a + 7b + 10c(n-5).$$

Es ist demgemäß sicher $c = 1$ und für a und b kommt:

$$20 = 6a + 7b$$

d. i. entweder $b = 1$, $a = \frac{13}{6}$, oder aber $b = 2$, $a = 1$.

Das Erstere ist unstatthaft, wie leicht zu sehen. Denn für $n = 5$ wird $n - 4$ gleich der Einheit, sodaß nothwendig $2a$ ganz sein muß.

Die Tabelle I der zehn Invarianten läßt sich noch durchsichtiger machen, wenn man statt der Grade in den δ geeignet normirte Gewichte einführt. Schreibt man die Darstellungsformen $f_i(\lambda)$ der R_n^3 explicite, wie folgt:

$$f_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^n + a_{i1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_{in}$$

und legt der Coefficientendeterminante $\delta_{iklm} = |a_i\, a_k\, a_l\, a_m|$ das Gewicht $i + k + l + m - 6$ bei, so lehrt eine leicht beweisbare Verallgemeinerung eines sehr bekannten Invariantensatzes, daß für jede Invariant-Combinante der f der Grad in den δ vermöge Multiplication mit $2(n-3)$ in das zugehörige Gewicht übergeht. Die demgemäß umgeformte Tabelle I ist:

	Bezeichnung.	Gewicht in den δ.
1.	$[\alpha^5]$	$10(n-3)(n-4)$
2.	$[\alpha^4\beta^2]$	$16(n-3)(n-4)(n-5)$
3.	$[\alpha^3\beta^3]$	$9(n-3)(n-4)(n-5)$
4.	$[\alpha^3\beta^2\gamma^2]$	$12(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$
5.	$[(\alpha^3)]$	$6(n-2)(n-3)$
6.	$[(\alpha^2\beta\gamma)]$	$4(n-2)(n-3)^2(n-4)$
7.	$[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$	$14(n-2)(n-3)(n-4)$
8.	$[\alpha^4, (\alpha^2\beta)]$	$12(n-2)(n-3)(n-4)$
9.	$[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\gamma)]$	$20(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$
10.	$[((\alpha\beta))]$	$(n-1)(n-2)(n-3)$

Es zeigen sich hier einige beachtenswerthe Eigenthümlichkeiten. Die Anzahl der Linearfactoren rechter Hand ist stets um Eins größer, als die Anzahl der links vorkommenden, von einander verschiedenen Argumente. Der Aufbau der Linearfactoren ist ein nach der Mitte zu symmetrischer. Durch ihr Verschwinden zeigen sie die Ordnung derjenigen R_n^3 an, für welche das jeweilige Vorkommniß noch nicht eintreten kann. Aber auch das Nichtauftreten des Factors $n-1$ resp. $n-2$ resp. beider erlaubt eine einfache Deutung. Nämlich sämmtliche Singularitäten, mit Ausnahme der letzten, können auch im Falle einer Geraden, wenn auch nur in uneigentlichem Sinne, zum Vorschein kommen, und das Gleiche gilt von den vier ersten, d. i. den singulären Ebenen im Falle eines Kegelschnitts.

Für die entsprechende Tabelle bei den R_n^2 können ähnliche Bemerkungen gemacht werden, nur daß es dort des Multiplicators $\frac{3}{2}(n-2)$ bedarf, um von den Graden zu den Gewichten überzugehen.

Die Analogien endlich, wie auch die Verschiedenheiten zwischen den sechs Zerlegungen hier und dort liegen so auf der Hand, daß ihre Verfolgung dem Leser überlassen werden kann.

Clausthal, Juli 1890.

Zur Theorie der Jacobi'schen Gleichungen 40. Grades, welche bei der Transformation 3. Ordnung der Thetafunctionen von zwei Veränderlichen auftreten.

Von

Heinrich Burkhardt in Göttingen.

(Vorgelegt von F. Klein.)

Die von Herrn F. Klein in seinen Vorlesungen eingeführten k^2 linear unabhängigen Jacobi'schen Functionen $k$ter (ungerader) Ordnung von zwei Veränderlichen, $X_{\alpha\beta}$, welche zu einer bestimmten geraden Charakteristik gehören, liefern $\frac{1}{2}(k^2-1)$ ungerade Functionen

$$Z_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta} - X_{-\alpha-\beta}$$

und $\frac{1}{2}(k^2+1)$ gerade Functionen:

$$1)\qquad Y_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(X_{\alpha\beta} + X_{-\alpha-\beta}).$$

Die ersteren sind von den Herrn Witting[1]) und Maschke[2]) untersucht worden; mit den letzteren habe ich mich beschäftigt im Anschluß an meine frühere Arbeit über eine hyperelliptische Multiplicatorgleichung, von der s. Z. in diesen Nachrichten ein Auszug erschien[3]). Indem ich mir erlaube, meine Resultate der Societät vorzulegen, muß ich für die Ableitung derselben wieder auf die später in den mathematischen Annalen erscheinende ausführliche Darstellung verweisen.

Seien die fünf für $k = 3$ verhandenen Functionen $Y_{\alpha\beta}$ kurz mit $Y_0 Y_1 Y_2 Y_3 Y_4$ bezeichnet. Bei linearer Transformation der Perioden, welche die Charakteristik festläßt, erfahren dieselben eine Gruppe G von 25920 linearen Substitutionen, welche aus folgenden vier Operationen erzeugt werden kann:

---

1) Ueber eine der Hesse'schen Configuration der ebenen Curve 3. Ordnung analoge Configuration im Raume, Gött. Diss. (Dresden 1887).

2) Vgl. (auch für Bezeichnungen und weitere Literaturangaben) die kurze Mitteilung im Jahrg. 1888 dieser Nachr. (p. 78 ff.), sowie die ausführlichere Darstellung in den mathem. Annalen, Bd. 33, p. 317 ff.

3) Jahrg. 1889, p. 553 ff. Die dort angekündigte ausführlichere Darstellung ist inzwischen in Bd. 36 der mathem. Ann. p. 371 ff. erschienen.

	B	C	D	S_2^{-1}
Y_0'	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0+2Y_1)$	Y_0	$-Y_0$	Y_0
Y_1'	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0-Y_1)$	Y_1	$-Y_2$	εY_1
Y_2'	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Y_2+Y_3+Y_4)$	Y_4	$-Y_1$	Y_2
Y_3'	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Y_2+\varepsilon\, Y_3+\varepsilon^2 Y_4)$	Y_2	$-Y_3$	εY_3
Y_4'	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Y_2+\varepsilon^2 Y_3+\varepsilon\, Y_4)$	Y_3	$-Y_4$	εY_4.

Dabei ist $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ gesetzt.

II. Zunächst mögen einige Angaben über Untergruppen dieser Gruppe zusammengestellt werden:

1) C, D, S_2^{-1} erzeugen eine Gruppe G_0 von 648 Substitutionen, welche Y_0 unär, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 unter sich quaternär umsetzen; die letzteren werden dabei auf alle möglichen Arten unter sich vertauscht und auf alle möglichen Arten so mit dritten Einheitswurzeln multiplicirt, daß das Produkt $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4$ ungeändert bleibt. Diese Untergruppe ist demnach zusammengesetzt; die Reihenfolge der Factoren ihrer Zusammensetzung ist:

$$2,\ 3,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3.$$

Aus dem Raume $Y_0 = 0$ gehen bei den Substitutionen von G 40 „Haupträume I. Art" hervor; ebenso aus dem Punkte $Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_4 = 0$ 40 „Hauptpunkte I. Art".

2) B, C, S_2^{-1} erzeugen eine Untergruppe H von ebenfalls 648 Substitutionen, welche Y_0, Y_1 binär nach einer Tetraedergruppe, Y_2, Y_3, Y_4 ternär nach einer Hesse'schen Gruppe umsetzen, die ein syzygetisches Büschel von Curven dritter Ordnung in sich überführt. Beide Gruppen sind dadurch mit einander verbunden, daß der Parameter dieses Büschels bei geeigneter Normirung sich ebenso substituirt wie Y_0, Y_1. Die Reihenfolge der Factoren der Zusammensetzung dieser Untergruppe H ist:

$$3,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3.$$

Aus $Y_0 = Y_1 = 0$ gehen 40 „Hauptebenen", aus $Y_2 = Y_3 = Y_4 = 0$ 40 „Hauptgerade" unserer Gruppe hervor.

3) B, D, S_2^{-1} erzeugen eine Untergruppe K von 576 Operatio-

nen, welche $Y_3 - Y_4$ unär, Y_0, Y_1, Y_2, $Y_3 + Y_4$ quaternär umsetzt, und zwar so, daß die Fläche II. Ordnung:

$$Y_0(Y_3+Y_4) - 2Y_1Y_2 = 0 \tag{2}$$

fest bleibt, während ihre beiden Geradenscharen sowol jede für sich nach einer Tetraedergruppe substituirt, als auch unter sich vertauscht werden können.

Die Zusammensetzung dieser Untergruppe wird durch das Schema:

$$2\left\{\begin{matrix}3,\,2,\,2\\3,\,2,\,2\end{matrix}\right\}2$$

dargestellt.

Aus $Y_3 - Y_4 = 0$ gehen bei den Operationen von G 45 „Haupträume II. Art", aus $Y_0 = Y_1 = Y_2 = Y_3 + Y_4 = 0$ 45 „Hauptpunkte II. Art" hervor. Jeder der ersteren enthält 12 der letzteren, jeder der letzteren liegt in 12 der ersteren.

4) Man kann auf 27 verschiedene Arten fünf Haupträume II. Art (ein „Pentatop II. Art") so auswählen, daß je zwei derselben keine Hauptgerade gemein haben. Ein solches Pentatop II. Art bleibt fest bei einer Untergruppe L von 960 Operationen, welche seine Räume auf jede gerade Art vertauschen (und außerdem die linken Seiten ihrer Gleichungen mit bestimmten 6. Einheitswurzeln multipliciren).

5) Je zwei solche Pentatope II. Art, welche keinen Raum gemein haben, sind einander gleichzeitig ein- und umbeschrieben und conjugirt in Bezug auf einen quadratischen Raum $u = 0$ (z. B. $Y_0^2 + 4Y_1Y_2 + 4Y_3Y_4 = 0$), der für noch 5 andere Paare von Pentatopen II. Art dieselbe Eigenschaft hat. Solcher quadratischen Räume gibt es 36; der einzelne derselben bleibt bei einer Untergruppe M von 720 Operationen invariant. Diese ist zwar zur Gruppe der Permutationen von 6 Dingen isomorph, kann aber nicht durch die Vertauschungen von 6 überzähligen Punktcoordinaten dargestellt werden.

III. Die Invarianten der Gruppe G habe ich davon ausgehend berechnet, daß sie zugleich Invarianten von G_0 und von H sein müssen. Invarianten von G_0 sind Y_0, das Produkt $Y_1Y_2Y_3Y_4$, die symmetrischen und alternirenden Functionen von Y_1^3, Y_2^3, Y_3^3, Y_4^3; Invarianten von H sind einmal die Tetraederformen in Y_0, Y_1, dann die (von Maschke a. a. O. mitgeteilten) Invarianten der Hesse'schen Gruppe in Y_2, Y_3, Y_4, endlich eine Anzahl Formen, welche beide Reihen von Variabeln enthalten und auf Grund der oben erwähnten Cogredienz des Büschelparameters mit $Y_0 : Y_1$ durch

Polarenbildung gewonnen werden können. Bildet man dann aus den Formen von H Combinationen mit unbestimmten Coefficienten und bestimmt letztere aus den durch G_0 geforderten Symmetrieeigenschaften, so erhält man Invarianten von G. So findet man[1]: eine Invariante vierten Grades:

$$J_4 = Y_0^4 + 8Y_0\Sigma Y_1^3 + 48Y_1Y_2Y_3Y_4; \tag{3}$$

eine Invariante sechsten Grades:

$$J_6 = Y_0^6 - 20Y_0^3\Sigma Y_1^3 + 360Y_0^2Y_1Y_2Y_3Y_4 + 80\Sigma Y_1^3Y_2^3 - 8\Sigma Y_1^6; \tag{4}$$

eine Invariante zehnten Grades:

$$\begin{aligned} J_{10} = {} & Y_0^6Y_1Y_2Y_3Y_4 - Y_0^4\Sigma Y_1^3Y_2^3 + Y_0^3\Sigma Y_1^3Y_2Y_3Y_4 \\ & + 9Y_0^2Y_1^2Y_2^2Y_3^2Y_4^2 + Y_0\Sigma Y_1^6Y_2^3 - 6Y_0\Sigma Y_1^3Y_2^3Y_3^3 \\ & - 2\Sigma Y_1^7Y_2Y_3Y_4 + 2\Sigma Y_1^4Y_2^4Y_3Y_4; \end{aligned} \tag{5}$$

eine Invariante zwölften Grades:

$$\begin{aligned} J_{12} = {} & 3Y_0^8Y_1Y_2Y_3Y_4 + 5Y_0^6\Sigma Y_1^3Y_2^3 - 33Y_0^5\Sigma Y_1^4Y_2Y_3Y_4 \\ & + 243Y_0^4Y_1^2Y_2^2Y_3^2Y_4^2 - Y_0^3\Sigma Y_1^6Y_2^3 - 102Y_0^3\Sigma Y_1^3Y_2^3Y_3^3 \\ & + 30Y_0^2\Sigma Y_1^7Y_2Y_3Y_4 + 78Y_0^2\Sigma Y_1^4Y_2^4Y_3Y_4 \\ & - 108Y_0\Sigma Y_1^5Y_2^2Y_3^2Y_4^2 - 4\Sigma Y_1^9Y_2^3 + 16\Sigma Y_1^6Y_2^6 \\ & - 8\Sigma Y_1^6Y_2^3Y_3^3 + 168Y_1^3Y_2^3Y_3^3Y_4^3; \end{aligned} \tag{6}$$

eine Invariante achtzehnten Grades:

$$\begin{aligned} J_{18} = {} & 3Y_0^{10}Y_1^2Y_2^2Y_3^2Y_4^2 - 4Y_0^9\Sigma Y_1^3Y_2^3Y_3^3 + 12Y_0^8\Sigma Y_1^4Y_2^4Y_3Y_4 \\ & - 36Y_0^7\Sigma Y_1^5Y_2^2Y_3^2Y_4^2 - Y_0^6\Sigma Y_1^6Y_2^6 + 10Y_0^6\Sigma Y_1^6Y_2^3Y_3^3 \\ & + 96Y_0^6Y_1^3Y_2^3Y_3^3Y_4^3 - 12Y_0^5\Sigma Y_1^7Y_2^4Y_3Y_4 \\ & - 90Y_0^5\Sigma Y_1^4Y_2^4Y_3^4Y_4 + 27Y_0^4\Sigma Y_1^8Y_2^2Y_3^2Y_4^2 \\ & + 108Y_0^4\Sigma Y_1^5Y_2^5Y_3^2Y_4^2 + 2Y_0^3\Sigma Y_1^9Y_2^6 - 8Y_0^3\Sigma Y_1^9Y_2^3Y_3^3 \\ & + 4Y_0^3\Sigma Y_1^6Y_2^6Y_3^3 - 168Y_0^3\Sigma Y_1^6Y_2^3Y_3^3Y_4^3 \\ & + 6Y_0^2\Sigma Y_1^{10}Y_2^4Y_3Y_4 - 24Y_0^2\Sigma Y_1^7Y_2^7Y_3Y_4 \\ & + 12Y_0^2\Sigma Y_1^7Y_2^4Y_3^4Y_4 + 315Y_0^2Y_1^4Y_2^4Y_3^4Y_4^4 \\ & + 12Y_0\Sigma Y_1^{11}Y_2^2Y_3^2Y_4^2 + 18Y_0\Sigma Y_1^8Y_2^5Y_3^2Y_4^2 \\ & - 27Y_0\Sigma Y_1^5Y_2^5Y_3^5Y_4^2 - \Sigma Y_1^{12}Y_2^6 + 2\Sigma Y_1^{12}Y_2^3Y_3^3 \\ & + 2\Sigma Y_1^9Y_2^9 - 2\Sigma Y_1^9Y_2^6Y_3^3 - 8\Sigma Y_1^9Y_2^3Y_3^3Y_4^3 \\ & + 6\Sigma Y_1^6Y_2^6Y_3^6 + 8\Sigma Y_1^6Y_2^6Y_3^3Y_4^3. \end{aligned} \tag{7}$$

Außerdem existirt eine Invariante 45. Grades J_{45}, nämlich die Functionaldeterminante der fünf ebengenannten Formen, zu-

---

1) Die Summen sind jedesmal zu erstrecken über alle diejenigen verschiedenen Ausdrücke, welche aus den angegebenen durch Permutation von Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 entstehen.

gleich bis auf einen Zahlenfactor das Produkt der linken Seiten der Gleichungen der 45 Haupträume II. Art (s. o. unter II, 3).

Mit diesen sechs Invarianten ist das Formensystem unserer Gruppe vollständig. Insbesondere läßt sich das Produkt J_{40} der linken Seiten der Gleichungen der 40 Haupträume I. Art (s. o. unter II, 1) durch diese Invarianten rational und ganz ausdrücken, und zwar wie folgt:

$$8)\quad 3^{33} J_{40} = [J_4^2(J_4^3 - 2^9 J_{12}) + 2^{18} J_{10}^2]^2 \\ - 2^{19}[J_4 J_6 - 2^8 3 J_{10}][J_4^3 J_{18} - 2^{11} 3 J_{10}^3] + 2^{37} J_{10}^4.$$

IV. Sind die Werte der Invarianten J_4, J_6, J_{10}, J_{12}, J_{18}, J_{45} gegeben, so stellt die Aufgabe, aus ihnen die Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 zu berechnen, ein „Formenproblem“ im Sinne der von Herrn Klein in seinen „Vorlesungen über das Ikosaeder“ [1]) eingeführten Terminologie dar. Die Lösungen dieses Formenproblems lassen sich rational aus den Lösungen des zugehörigen „Gleichungssystems“ berechnen.

Will man Resolventen dieses Problems aufstellen, so wird man sein Augenmerk zunächst auf solche resolvirenden Functionen richten, für welche das Produkt aus ihrem Grade in den Y in die Anzahl ihrer conjugirten Werte möglichst klein ist. Mit Rücksicht hierauf würde in erster Linie die Resolvente der unter II, 5 erwähnten quadratischen Formen u in Betracht kommen, deren Anfangsglieder sind:

$$9)\quad u^{36} - 6 J_4 u^{34} - \frac{8}{3} J_6 u^{33} + \frac{47}{3} J_4^2 u^{32} + \left(\frac{128}{9} J_4 J_6 + \frac{320}{3} J_{10}\right) u^{31} + \cdots = 0;$$

dann aber diejenige, welcher Y_0^2 genügt. Die Anfangsglieder der letzteren sind:

$$10)\quad Y_0^{80} - \frac{4}{3} J_4 Y_0^{76} - \frac{16}{3^4} J_6 Y_0^{74} + \frac{146}{3^5} J_4^2 Y_0^{72} \\ + \frac{1}{3^7}(160 J_4 J_6 - 153600 J_{10}) Y_0^{70} \\ + \frac{1}{3^{10}}(-8028 J_4^3 - 1472 J_6^2 + 952320 J_{12}) Y_0^{68} + \cdots;$$

ihr letztes Glied ist das Quadrat der unter III, Gleichung 8 angegebenen Form J_{40}.

V. Von der letzten Gleichung repraesentirt nun die früher

1) Leipzig, Teubner, 1884.

(s. o.) von mir untersuchte Multiplicatorgleichung einen Specialfall. Setzt man nämlich die Argumente $v_1 = v_2 = 0$, so reduciren sich die Y auf Modulformen, die mit y und nach Weglassung ihres gemeinsamen Nenners $\sqrt[8]{D^n}$ mit (y) bezeichnet werden sollen. Die aus diesen (y) gebildeten Invarianten (i) sind dann rationale und wie sich zeigt ganze Functionen der a. a. O. benutzten Simultaninvarianten von zwei cubischen Binärformen, $\sqrt[4]{D}$ eingerechnet; durch Vergleich der Reihenentwicklungen findet man:

$$(i_4) = 27 D^{\frac{1}{2}};\quad (i_6) = 9\sqrt{3}\, BD^{\frac{1}{4}};\quad (i_{12}) = \frac{81}{32} ED^{\frac{1}{2}}; \qquad 11)$$

$$(i_{18}) = \frac{3^5\sqrt{3}}{2^{10}} ZD^{\frac{3}{4}}.$$

Zwischen den 5 von nur 4 unabhängigen Veränderlichen abhängigen Größen (y) muß dabei eine Relation bestehen; es stellt sich heraus, daß dieselbe

$$(i_{10}) = 0 \qquad 12)$$

ist. Durch Einführung dieser Werthe reducirt sich Gleichung (10) in der That auf die damals mitgetheilte Multiplicatorgleichung; man hat nur zu beachten, daß das dort benutzte $x = 3(y_0)^2$ war.

Bei Gelegenheit dieser Untersuchungen ergab sich mir noch ein in anderer Richtung liegendes Resultat, dessen Mittheilung ich vielleicht anschließen darf. Eine Reduction der pag. 376 f. angegebenen erzeugenden Operationen der Gruppe auf eine geringere Anzahl erwies sich als zwar ausführbar, aber für die vorliegende Untersuchung nicht zweckmäßig. Darüber hinaus aber führten die hiebei sich ergebenden Resultate zu der Vermuthung, daß solche Reduction für die allgemeine Gruppe der linearen Periodentransformationen ($p = 2$) möglich sein müsse. In der That lassen sich die bisher benutzten 4 Erzeugenden dieser Gruppe, A, B, C, D [1]) aus nur zwei Operationen zusammensetzen, z. B. aus den beiden folgenden:

A (von der Periode 6):

$$\begin{aligned} \omega_1' &= -\omega_3, \\ \omega_2' &= -\omega_4, \\ \omega_3' &= \omega_1 - \omega_4, \\ \omega_4' &= \omega_2 - \omega_3; \end{aligned} \qquad 13)$$

---

1) Vgl. Mathem. Annalen, Bd. 35, p. 209, wo auch die Literatur angegeben ist. — Die A, B des Textes sind übrigens nur ein Beispiel (vielleicht nicht einmal das einfachste) eines Paares von Erzeugenden.

und:

B (von der Periode 10):

$$\begin{aligned} \omega_1' &= \qquad\quad -\omega_2+\omega_3 \qquad , \\ \omega_2' &= -\omega_1 \qquad\quad +\omega_3+\omega_4 , \\ \omega_3' &= -\omega_1 \qquad\quad +\omega_3 \qquad , \\ \omega_4' &= \qquad\quad -\omega_2 \qquad\qquad ; \end{aligned} \tag{14}$$

man erhält nämlich:

$$\begin{aligned} A &= B^9 A^5, \\ B &= A B A^2 B^2, \\ C &= (A^4 B^4 A)^2 (B^4 A^5)^2 (A^3 B)^3, \\ D &= A^3. \end{aligned}$$

Als Corollar ergibt sich hieraus, daß für $p > 2$ alle linearen Periodentransformationen aus drei Erzeugenden sich zusammensetzen lassen; ob auch schon aus zweien, habe ich nicht untersucht.

Göttingen, August 1890.

Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe.

Von

Felix Klein.

Eine Frage, die sich bei den Anwendungen sozusagen von selbst aufdrängt, die aber bislang, so viel ich weiß, von speciellen Fällen abgesehen noch nicht beantwortet wurde, ist folgende: Wie oft verschwindet die hypergeometrische Reihe

$$F(a, b, c, x) = 1 + \frac{a \,.\, b}{1 \,.\, c} x + \frac{a \,.\, a+1 \,.\, b \,.\, b+1}{1 \,.\, 2 \,.\, c \,.\, c+1} x^2 + \cdots$$

zwischen $x = 0$ und $x = 1$? Durch geometrische Betrachtungen über conforme Abbildung, welche sich an die Untersuchungen von Herrn Schwarz in Bd. 75 des Journals für Mathematik anschließen (1872), bin ich zu folgendem Resultat gelangt:

Es seien $[a-b]$ etc. die absoluten Beträge der jeweils eingeklammerten Größen, E aber bezeichne die größte ganze positive Zahl, welche von dem Ausdrucke

$$\frac{[a-b]-[1-c]-[c-a-b]+1}{2}$$

überschritten wird.

Ist nun $(1-c)$ negativ oder Null, so ist die gesuchte Zahl der Nullstellen von F gleich E.

Ist aber $(1-c)$ positiv, so ist dieselbe ebenfalls $= E$, falls F für $x = 1$ verschwinden sollte, anderenfalls aber wird man zwischen E und $E+1$ nach dem Grundsatze wählen, daß F zwischen 0 und 1 selbstverständlich eine gerade Anzahl von Nullstellen hat, wenn F für $x = 1$ positiv (endlich oder unendlich) ausfällt, dagegen eine ungerade Anzahl, wenn es für $x = 1$ negativ ist.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Mai 1890.

(Fortsetzung.)

Kön. S. Ges. d. Wissensch. zu Leipzig:
a. Berichte über die Verhandlungen d. Mathem.-physikalische Classe. II. III. IV.
b. Abhandlungen d. mathem.-physik. Classe: d. XV. Bandes N. VII, VIII, IX. 1890.
Register zu d. Jahrg. 1846—1885 der Berichte über die Verhandlungen u. zu den Bänden I—XII der Abhandlungen der math.-phys. Classe. Leipzig 1889.
Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft. Band 44. Heft 1. Leipzig 1890.
Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät in Erlangen. Heft 21. 1889. München 1890.
Leopoldina. Heft XXVI. N. 7. 8. Halle a. S.
74. Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft in Emden pro 1888/89 nebst Festschrift des 75jährigen Bestehens. Emden 1890.
Mittheilungen der Geschichts- und Alterthumsforschenden Gesellschaft des Osterlandes. Band X. Heft 2. Altenburg 1890.
Jahrbücher der K. Akademie gemeinnütziger Wissensch. zu Erfurt. Neue Folge. Heft XVI. 1890.
Abhandlungen d. K. K. geologischen Reichsanstalt. Band XV. Heft 2. Zur Kenntniss der Fauna der »Grauen Kalke der Süd-Alpen«. Wien 1890.
VII. Bericht der meteorologischen Commission des naturforschenden Vereins in Brünn. Brünn 1889.
Verhandlungen des naturforschenden Vereins in Brünn. Band XXVII. 1888. Brünn 1889.
Jahresbericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag für 1889. Prag 1890.
Anzeiger der Akademie d. Wissenschaften in Krakau. 1890. April. Krakau 1890.
Royal Irish Academy »Cunningham memoirs«. N. 5. The red stars: Observations and catalogue. New edition. Dublin 1890.
Zoological Society of London:
a. Proceedings of the scientific meetings. 1889. Part IV.
b. Transactions. Vol. XII. Part 10. London 1890.
Nature. Vol. 42. N. 1070—1074.
Proceedings of the London mathematical Society. N. 372—376.
Proceedings of the Royal Society. Vol. XLVII. N. 288. London 1890.
Monthly notices of the R. astronomical Society. Vol. L. N. 6. 1890.

Bibliotheca Indica a collection of oriental works published by the Asiatic Society of Bengal. New series. N. 711, 715—727, 729—746, 748. Calcutta 1889—90.

Oeuvres de Fourier publiés par Gaston Darboux. Tome II. Paris 1890.

Bulletin de la Société mathematique de France. Tome XVIII. N. 1. Paris 1890.

Mémoires de la Société R. des Sciences de Liège. Deuxième série. Tome XVI. Bruxelles 1890.

Bulletin de l'Académie R. des Sciences des lettres et des beaux arts de Belgique. 60e année, 3e série, tome 19. No. 4. Bruxelles 1890.

Observations de Poulkova. Vol. VIII. St. Petersbourg 1889.

Photometrische Bestimmung der Grössenclassen der Bonna-Durchmusterung von Ed. Lindemann. Supplément II aux observations de Poulkova. St. Petersbourg 1889.

Memoires de l'Académie Imp. des Sciences de St. Petersbourg. VII. série. Tome XXXVII. N. 6, 7. St. Petersbourg 1890.

Tabulae quantitatium Besselianarum pro annis 1890—1894 computatae, ed. O. Struve. Petropoli 1889.

Dorpater meteorologische Beobachtungen. Juni—Dezember 1889.

Fondation Teyler:

a. Archives du Musée Teyler. Série II, vol. 3. 4ime Partie.

b. Catalogue de la bibliothèque dressé par C. Ekama. Deuxieme volume. Auteurs Grecs et Latins. Livr. 1. 2. 3. Harlem 1889.

Dagh-Register gehonden int Casteel Batavia. Anno 1661. Batavia 1889.

Sur la température nocturne de l'air à différentes hauteurs par Julius Juhlin. Présenté à la Société R. des Sciences d'Upsal. Upsal 1890.

Om Caryophyllaceernes Blomster af C. Warming. Kjobenhavn 1890.

l'Académie R. de Copenhague:

a. Memoires. Classe des Sciences. Vol. VI. N. 1.

b. Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger. 1889, N 3. 1890, N. 1.

Lunde Domkapitels Gaveboger og Nekrologum II. Kjobenhavn 1889.

Atti della Reale Accademia dei Lincei 1890. Serie quarta. Rendiconti. Vol. VI. fasc. 5. 6. Roma 1890.

Atti della R. Accademia delle Science di Torino. Vol. XXV. Disp. 8. 9. 10a. 1889—90. Torino.

Osservationi meteorologiche fatte nell' anno 1888 all' osservatorio della università di Torino. Torino 1890.

Rendiconti del circolo matematico di Palermo. Tomo IV, fasc. III. IV.

Pubblicazioni del R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento di Firenze:

a. Sezione di medicina e chirurgia. Archivio della scuola d'anatomia patologica. Vol. III. IV. Firenze 1885—1886.

b. Sezione di filosofia e filologia. Maestri e scolari nell' India brahmanica, Saggio di Girolamo Donati. Firenze 1888.

c. Sezione di Scienze fisiche e naturali. 1. Osservazioni continue delln elettricità atmosferica fatte a Firenze nel 1884. Seconda memoria di L. Pasqualini e A. Róiti. ... fatte a Firenze negli anni 1883—86. Memoria del Dott. Franco Magrini. Firenze 1885/88. 2. Saggio sperimentale sul meccanismo dei movimenti volontari nella testuggine palustre del Dott. Giulio Fano. Firenze 1884.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

8. October. №. 11. 1890.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 5. Juli.

Weibliche Satyrn und Pane in der Kunst der Griechen und Römer.

Von

Friedrich Wieseler.

Die bildlichen Darstellungen weiblicher Satyrn und Pane sind keineswegs so sehr selten, wie noch in neuerer Zeit manche sonst sehr kundige Archäologen gemeint haben. Es dürfte deshalb zweckmäßig sein, die uns bekannt gewordenen Beispiele übersichtlich zusammenzustellen.

Man wird sehen, daß eine nicht unbeträchtliche Anzahl einschlägiger Darstellungen bis in das achtzehnte Jahrhundert und in die jetzige Zeit sich erhalten hat, von denen einige freilich unsicher sind, eine offenbar gefälscht ist.

Die ältesten der betreffenden Darstellungen reichen bis in die Hellenistische Zeit hinein, die meisten gehören erst der Römischen an.

I.

Satyrae.

Weibliche Satyrn finden sich in Bildwerken verschiedener Gattungen der Kunstübung. Am Meisten sind sie uns in Marmorwerken erhalten. Ja nach Em. Galichon Gaz. des Beaux-Arts, Bd. II, 1861, p. 232, soll eine ausgezeichnete fast lebensgrosse Gruppe eines Faune avec une Faunisque sich im Louvre befinden. Aber hier liegt ohne Zweifel ein Irrthum zu Grunde. Gemeint ist gewiß die von W. Fröhner Notice de la sculpt. ant. n. 260 verzeichnete Gruppe, die von mir im J. 1859 bei Louis Fould gesehen wurde und 1860 in den Louvre überging. Hier handelt es sich nicht um une Faunisque, sondern um ein Satyrknäbchen.

Ob eine Einzelstatue einer Satyra sicher steht, ist die Frage.

J. Burckhardt schrieb im Cicerone II, 1860, S. 482 „Eine junge Satyrin in der Villa Albani (Nebengalerie rechts) zeigt in ihrem zwar aufgesetzten aber doch wohl echten Köpfchen die Merkmale ihrer Gattung, auch das Stumpfnäschen, in das Mädchenhafte übersetzt; ihr schwebender Tanzschritt veranlaßte, vielleicht mit Recht, eine Restauration der Hände mit Klingplatten“. Ich muß diese Annahme ganz auf sich beruhen lassen, bezweifle aber die „Satyrin“, da die charakteristischen Ohren fehlen [1]).

Noch mehr gilt das in Betreff der von demselben Gelehrten a. a. O. als Satyrin betrachteten Statue im Conservatorenpalaste auf dem Capitol, deren Kopf er selbst für zweifelhaft hält.

In der Sammlung zu Broadlands befindet sich eine Herme (Terminal bust.) nach A. Michaelis Anc. marbles. in Great Britain p. 224, n. 26.

Bedeutender ist die Anzahl von Köpfen.

Schon vor längerer Zeit ist das zu einer Büste ergänzte Köpfchen zu Venedig abgebildet in Statue di S. Marco und danach in meinen Denkm. der a. Kst. II, 45, 562. Zuletzt besprochen von Dütschke Ant. Bildw. in Oberital. V, n. 68.

In derselben Sammlung, dem Mus. archeologico, befindet sich ein vortrefflicher Colossalkopf, Pendant zu einem Colossalkopf eines männlichen Satyrs. Jener besprochen von Valentinelli Marmi scolpiti del mus. arch. della Marciana, Prato 1866, p. 249 fg. zu n. 299, Wieseler Nachr. d. K. G. d. Wiss. zu Göttingen, 1874, S. 587, und zuletzt von Dütschke a. a. O. n. 363, beide abgebildet bei Valentinelli a. a. O. t. XLIV.

W. Fröhner verzeichnet in der Not. de la sculpt. ant. du Louvre, n. 286 als aus der Sammlung Campana stammend den Kopf mit oreilles de chèvre et deux touffes de poil (φήρεα) als den einen Satyra.

---

1) Allem Anscheine nach ist das von Platner in der Beschr. d. Stadt Rom III, 2, S. 498, n. 2 als „Statue einer Bakchantin“ aufgeführte Werk gemeint.

Mehr Beispiele lernen wir durch Benndorf's und Schöne's ausgezeichnetes Werk „Die ant. Bilder des Lateranens. Mus.“ kennen. Unter n. 140 geben dieselben eine Beschreibung und auf Taf. III, Fig. 2 eine Abbildung eines jugendlichen Satyrnköpfchens; unter n. 174 verzeichnen sie einen weiblichen Satyrkopf mit kleinen Ansätzen von Hörnern, unter n. 273 den Kopf einer Satyra mit zwei kleinen Hörnern und gespitzten Ohren; außerdem führen sie als aus Marmor bestehend S. 402, n. 594 an „Satyra (?) weibliches Kinderköpfchen mit satyreskem Ausdruck“.

Kekulé führt „Das akad. Kunstmus. zu Bonn“, 1872, n. 361 auch den von Benndorf und Schöne Taf. III, Fig. 1 abbildlich mitgetheilten und n. 96 als den einer jugendlichen Bakchantin bezeichneten Kopf wenigstens frageweise als „Kopf eines Satyrmädchens“ auf, was uns schon wegen der Stirnbinde bedenklich erscheint.

Die beiden genannten Beschreiber des Lateranens. Mus. bemerken S. 86 zu n. 140: „Unter den kleinen Marmorn im Museo nazionale eine Doppelherme eines Silen mit einer jugendlichen Satyra. — Weiblich scheint auch der Kopf zu sein, den L. Gerlach Wörlitzer Antiken Heft I Titelblatt als Satyr publicirt hat[1]). Ein schöner weiblicher Satyrkopf im Museum Kircherianum.“

Von Matz-Duhn Ant. Bildw. in Rom Bd. I, n. 470 wird als in Palazzo Corsini befindlich aufgeführt der Kopf eines lachenden Satyrmädchens“, aber mit dem Zusatz: „vielleicht modern“.

Ebenda erfahren wir unter n. 469, daß im Besitz des Stud. Jerichau sich befinde „ein ganz satyrhaft gebildeter weiblicher Kopf — der Mund geöffnet und augenscheinlich als Wasserspeier benutzt, wozu wohl paßt, daß der Kopf hinten maskenartig hohl ausgearbeitet ist. Die Ohren sind nicht sichtbar.“

Keller und Bursian haben in dem Anzeiger für Schweizerische Alterthumskunde III, 1870, S. 198 fg. einen bei Lausanne gefundenen, auf Taf. XXVII, Fig. 1 abgebildeten „Statuenkopf“ aus Pentelischem Marmor besprochen, indem sie äußern, man könne schwanken, ob er männlich oder weiblich sei.“

Auch an Darstellungen in Marmorreliefs fehlt es nicht. Zwei derselben kennen wir durch Besprechung und Abbildungen von Benndorf und Schöne a. a. O. n. 373, S. 252 und n. 408, S. 287, von denen auch die frühere Literatur angegeben ist. Beide Male handelt es sich um Bakchische Sarkophage. Auf dem unter n. 373 wird an der rechten Nebenseite „das Obertheil einer mit einem

1) Auch W. Hosaeus Wörlitzer Antiken, S. 18 fg., n. 6 spricht von „Kopf und Rumpf eines Faunen“, indem er bemerkt, die Bildung habe etwas Weichliches.

gegürteten ärmellosen Chiton bekleideten Satyra sichtbar", welche ihre Rechte auf die r. Schulter eines Satyrs legt und über seine Achsel dem Tränken eines Panthers von Seiten dieses zuschaut. Auf dem Sarkophag unter n. 408 ist an der rechten Nebenseite in der Mitte ein Baum dargestellt. Links von ihm tanzt ein Satyr lebhaft nach rechts. Rechts von ihm tanzt eine Satyra gleichfalls nach r., den Kopf dem Satyr zugewendet; sie trägt das Haar am Hinterkopf zusammengebunden und ist mit einem ärmellosen gegürteten Chiton und einem Obergewand bekleidet, das sie zierlich in der Rechten erhebt".

Auch auf dem Relieffragment eines Bakchischen Sarkophags im Cortile des Palazzo Riccardi zu Florenz hat sich nach Dütschke Ant. Bildw. in Oberitalien II, n. 153 erhalten „der Oberkörper einer vermuthlich sitzenden Satyressa, an ihren spitzen Ohren kenntlich; das lockige Haar ist zurückgestrichen und hinten in einen Knoten zusammengebunden. Sie trägt einen Chiton und ein Obergewand, das hinter ihr im Bogen flattert."

Wenn von Stephani in den Parerga arch. XXVI auf dem von ihm abbildlich mitgetheilten Bakchischen Sarkophag in der Ermitage zu St. Petersburg zwei musicirende Weiber im langen Chiton und mit bogenförmig flatterndem Obergewand, „denen, wie den Satyren, spitze Ohren verliehen sind", trotzdem als „Maenaden" bezeichnet werden, so sind dieselben vielmehr als Satyrae zu betrachten.

Auch auf anderen Reliefs als an solchen auf Römischen Sarkophagen kommen Satyrae vor.

Hieher gehört das Relief im Mus. Capitolinum IX, 36. Dann nach Dütschke a. a. O. IV, n. 860, S. 374 das bei Labus Museo della Reale accademia di Mantova II, t. XXIX abgebildete Relief zu Mantua, welches auch deshalb von Belang ist, wenn es, wie Dütschke annimmt, auf die Hellenistische Zeit zurückgeht. Auf ihm steht nach dieses Gelehrten Angaben hinter einem jungen Satyr „eine Satyra mit angesetztem aber wohl antikem und zugehörigem Kopfe (erg. Nase von Gips), welcher mit Weinlaub bekränzt ist. Auf dem Kranze, von welchem Bänder auf die Brust flattern, scheint ein Tuch zu liegen, wenn dies nicht erg. ist. Ihr Chiton ist etwas von der l. Schulter herabgesunken."

L. von Sybel erwähnt im Katalog der Skulpturen zu Athen n. 995 eine Satyressa als „Pfeilerfigur", doch ist im Index S. XIV die Angabe mit einem Fragezeichen versehen.

Daß die Darstellung einer ihr Kind auf ihrem Fuße tanzen lassenden Satyra in einem Relief aus rosso antico zu Wilton House moderne Copie einer Florentinischen Gemme (s. unten S. 389) sei, hat schon Michaelis Anc. marbles. in Great Britain p. 691, zu n. 101 bemerkt.

Ein fragmentirtes Marmorrelief zu Göttingen zeigt eine von G. Hubo „Originalwerke in der archäol. Abt. des arch.-numism. Instituts der Georg-Augusts-Univ. S. 127 fg. n. 760, erkannte „kauernde nackte Satyra.“

An einem großen Candelaber im Louvre, gewahrt man nach Fröhner Not. de la sculpt. ant. n. 312, S. 304 (der auch die Abbildungen angiebt), unter quatre masques colossaux d'une beauté achevée, posés sur des bases carrées celui d'une jeune Satyra, couronnée de lierre en fleur, reuni à un masque semblable.

Unter den Bronzewerken ist namentlich durch die Abbildung im Mus. Borb. X, 13 = Denkm. d. a. K. II, 561 bekannt die Doppelbüste eines pinienbekränzten gehörnten Satyrs mit aufgesträubtem Haare und einer epheubekränzten langlockigen Satyra.

Im Berliner Antiquarium befindet sich die Doppelherme eines Satyrs und Satyrmädchens mit Schaft unten am Ende, wahrscheinlich aus einem Gitter stammend.

Hoffmann erwähnt in den Antiquités, Sec. Partie, Paris 1888, p. 23 n. 480 eine zu Torre del Greco gefundene Panisca und Satyra, die als couronnement de terme gedient haben.

Eine im Brit. Mus. befindliche bekleidete Bronzebüste einer Satyra (female Faua) von guter römischer Arbeit mit Augen, Zähnen und φήρεα aus Silber ist in den Specim. of ant. sculpt. Vol. II, pl. LVII abbildlich mitgetheilt.

Auch zwei Terracottaköpfe sind uns bekannt, vgl. F. Dümmler De figuris plasticis quibusdam Tarenti repertis in den Ann. d. inst. T. LV, 1883, p. 203, n. 6.

Anscheinend giebt es auch eine hieher gehörende Goldmünze. Barclay Head führt in der Hist. numorum p. 456, n. 282 eine solche von Lampsakos an, die einen weiblichen Profilkopf mit einem Geißohr zeige. Er hält denselben für den einer Bakchantin oder des Dionysos, welche beiden Deutungen unzulässig sind. Ist ein wirklich weibliches Wesen gemeint, so kann nur eine Satyra gemeint sein.

Einige Beispiele finden sich auf geschnittenen Steinen. Am Meisten bekannt ist der Florentinische in den Denkm. d. a. K. II, 45, 563 abbildlich mitgetheilte, welcher die vollständige Figur in einer Handlung zeigt. Damit ist zusammenzustellen der bei de la Chausse Gemme ant. fig. t. 114, auf welchem die Satyra das in der Vorderansicht dargestellte Kind auf ihrem Fuße tanzen läßt, während sie ihm eine Traube hinhält. Beide Satyrae sind vollständig nackt und nur durch das Schwänzchen hinten zu erkennen.

Das dritte Beispiel bietet ein aus der Sammlung Blacas stammender Stein im Brit. Mus., welchen Murray A catal. of engrav. gems, London 1888, unter n. † 1061 so aufführt: Maenad (?) bust of, to front, with ears and face of satyr, but with female breasts; soy wreath on head, this drapery fastened on r. shoulder, Sard. Das Kreuzzeichen vor der Nummer bezieht sich auf zweifelhafte Echtheit der Gemme. Doch ist an jene in dem vorliegenden Falle wohl nicht zu denken, da Murray's Bezweifelung der Echtheit vermuthlich nur auf der ihn befremdenden Darstellung beruhte, welche wir schon oben als die einer Satyra nachgewiesen haben.

Selbst in einem Vasengemälde dürfen wir wohl die Darstellung einer Satyra annehmen. Wir meinen das mit gelblichen Figuren, welches die Rückführung des Hephästos durch Dionysos und seinen Thiasos darstellt und zuletzt in Ch. Lenormant's u. J. de Witte's Élite d. mon. céramogr. Vol. I pl. XLVII abbildlich mitgetheilt ist. Hier erblickt man ein epheubekränztes Weib in langem Gewande mit Oenochoë und brennender Fackel in den Händen, welches ganz deutlich Satyrohren hat. Die Vergleichung namentlich des oben S. 388 erwähnten Petersburger Sarkophagreliefs weist auf eine Satyra hin, wogegen nicht spricht, daß in der entsprechenden Darstellung in der Él. céramogr. Vol. I, pl. XLV A eine fackeltragende Maenade erscheint.

Auch auf Wandgemälden aus den verschütteten Städten am Vesuv finden sich Satyrae.

Helbig verzeichnet unter n. 442, b die „Herme einer zarten Satyriskin."

Auf dem mehrfach abgebildeten Wandgemälde (Mus. Borbon. III, 4, Ternite's Wandgem. erkl. von Welcker III, Taf. 2, Wieseler Theatergeb. u. Denkm. d. Bühnenwes. Taf. X, n. 1, Arch. Ztg. XIII, 1855, Taf. LXXXII, n. 1 ist unter den Genossen des Dionysos, welcher die Komödie einsetzt, ein mit Satyrohren versehenes, mit einem Chiton bekleidetes Mädchen zu sehen, welches man mit Recht als Satyra faßt. So auch Welcker noch in den A. Denkmälern, Th. IV, S. 7 und Otto Jahn in der Arch. Ztg. a. a. O. S. 146[1]).

A. Mau beschreibt eine Satiressa in Verbindung mit einer an-

---

1) Helbig erwähnt a. a. O. n. 408 die betreffende Figur wohl als Mädchen, nicht aber als Satyra, indem er die kennzeichnenden Ohren irrthümlich bei einer anderen, männlichen Figur voraussetzt.

dern weiblichen Figur Bullett. d. Inst. 1876 p. 241 fg., vgl. auch Fiorelli Giorn. d. Scavi Pomp. N. S. III, p. 152, A. Sogliano Le pitture murali Campane in Pompei e la regione sotterrata dal Vesuvio, Napoli MDCCCLXXIX, P. II, n. 236, p. 129 fg.

II.

Paniscae.

Auch weibliche Pane finden sich in erhaltenen Bildwerken und zwar wiederum auf denen verschiedener Gattungen der Kunstübung und häufiger als bisher allgemein bekannt ist.

Gehen wir zunächst von den Marmorwerken über, so haben wir auch hier eine zuvörderst statuarische Gruppe eine Panin mit Pankindern darstellend zu berühren.

Wir lernen dieselbe besonders kennen durch E. Braun's Besprechung in den Annali d. inst. arch. XVIII, 1846, p. 240 fg. und die dazu gehörende Abbildung auf tav. d'agg. N. I u. II, die nach einer Zeichnung gemacht ist, welche Conte Orti di Manara an Braun übersandte. Später ist das Monument spurlos verschwunden. Es unterliegt aber wohl keinem Zweifel, daß es modern war, wie auch Brunn Ann. d. inst. arch. XXXVI, 1864, p. 385 urtheilt, während Welcker zu Müllers Hdb. d. Arch. § 388 A. 2 an der Echtheit nicht zweifelt.

Als Einzelstatue ist an erster Stelle zu nennen die bekannte hübsche Statuette in Villa Albani-Torlonia zu Rom, von welcher Clarac Mus. de sculpt. T. IV, pl. 727, n. 1732 eine Abbildung giebt. Die behörnte ziegenbeinige jugendliche Figur, deren Tracht in einer um den Hals geknüpften Wolfshaut besteht, erscheint als Flötenspielerin dargestellt. Wenn auch dieser Umstand nur auf moderner Ergänzung beruht, so ist doch an der wesentlichen Richtigkeit dieser nicht zu zweifeln wegen der espressione della fisonomia (E. Braun Ann. a. a. O.).

„In der Gallerie zu Florenz ist die Marmorstatue einer Panin, die in dem ledernen Gewande, das um ihre Schultern befestigt ist, einen Paniscus trägt“: A. Hirt im Bilderbuch für Mythol. Archäol. und Kunst H. II, S. 163. Ueber dieses Werk hören wir sonst kein Wort und doch ist an dessen Vorhandensein in der Gal. d. Uffizj vor dem J. 1816 gewiß nicht zu zweifeln.

Dann erwähnen wir den „Kopf einer Paniska“ im Lateranischen Museum zu Rom, nach Benndorf und Schöne Ant. Bildw. d. Lateran. Mus. n. 101: „Die Ohren sind spitz; oberhalb der Stirn ziehen sich r. und l. von dem nur angedeuteten Scheitel zwei am

Kopf aufliegende, nicht von ihm abstehende Hörner in die Höhe. Das Gesicht mit mürrisch vorgeschobenem Munde ist von feinem liebenswürdigen Ausdruck."

Für den Kopf einer Panisca hält Bernoulli den in Wilton House bei Michaelis Anc. marbles in Great Britain p. 710, n. 180, während Michaelis denselben als Head of a young Pan or a Satyr bezeichnet.

Ob die Ansicht Benndorf's und Schöne's a. a. O. S. 106, n. 188 richtig sei, nach welcher die in Garrucci's Mus. Lateranense t. XXVI, n. 2 abbildlich mitgetheilte Herme für die einer Panin zu halten sein soll, müssen wir sehr bezweifeln. Nach der Abbildung sieht es ganz so aus, als ob die betreffende Figur bärtig sei.

Auch an Reliefdarstellungen von Paninnen fehlt es nicht.

In dem Museo archeologico zu Venedig befindet sich das Fragment eines Hochreliefs mit zwei Centauren und einer schlafenden weiblichen Figur, welche letztere man in neuerer Zeit als Centaurin gefaßt hat, vgl. Dütschke Ant. Bildw. in Oberitalien S. 108 fg., n. 286, während schon Zanetti zu der ersten Abbildung in den Statue di S. Marco II, 32 im J. 1743 dieselbe als Satirina faßte. Es handelt sich auf allen Abbildungen ganz deutlich um eine Panin [1]).

Außerdem kennen wir noch zwei Reliefdarstellungen, die auf der aus Tusculum stammenden runden Scheibe in den Denkm. d. a. Kst. II, 43, 536 und die auf dem berüchtigten Sarkophag im Mus. naz. zu Neapel, ebenda II, 44, 548.

Dort ist ein naschhaftes Panweibchen in Verbindung mit ihrem Manne dargestellt; hier die Unzucht einer Panin.

Endlich sind noch zwei nicht durch Abbildung, wohl aber durch Beschreibung bekannte Paninnen in Reliefdarstellungen zu erwähnen, vgl. Gerhard in der Beschr. der Stadt Rom von Platner, Bunsen, Gerhard u. s. w. Bd. II, Abth. 2, S. 251 und Bd. II, Abth. 2, S. 182, n. 59 (wo aber Kopf und Füße fehlen).

Wir wenden uns jetzt zu den einschlägigen Werken aus Bronze.

Wir erwähnen zunächst die isolirten Rundwerke.

---

1) Vermuthlich meint auch Hirt Bilderbuch S. 163 dieses Werk, wenn er nach den oben S. 391 ausgeschriebenen Worten fortfährt: „andere sind in der Villa Albani und in der Sammlung der Marcusbibliothek zu Venedig". Er hat sich nur nicht genau genug ausgedrückt, indem er nicht angab, daß es sich um eine Reliefdarstellung handele. Von dem Vorhandensein einer statuarischen Darstellung einer Panin in der Marciana zu irgendwelcher Zeit findet sich sonst keine Spur.

Ein Kopf, damals in der Sammlung Fejervari, ist bekannt gemacht und erklärt von E. Braun in den Monum. ined. Ann. d. Inst. arch. 1854, p. 89. Das nächst erscheinende Heft der Denkm. d. a. Kst. wird Taf. XLV, n. 561, a die Abbildung wiederholt bringen. Er zeigt nach Braun corna ed orecchie vaccine und wird von ihm als einer der Panische della specie vaccina zugehörig betrachtet. Von diesen findet sich aber unseres Wissens sonst keine Spur. Wohl aber werden die Satyrn von Nonnes als *βουκέραοι*, *βούκραιροι*, *ταυροφυεῖς* bezeichnet und ihnen eine *ταυρῶπις μορφή* zugeschrieben (Dionys. X, 209—247, 559). Sollte es also nicht gerathener sein, den Kopf für den einer Satyra zu halten? An den der Io, welchen man vor Braun annahm, ist gewiß nicht zu denken.

Die Darstellung einer Panisca aus Bronze, vermuthlich einer Herme, ist schon oben S. 389 nach Hoffmann angeführt.

Die vollständige Statuette einer begehrlichen Panin mit einem Apfel in der Hand gab schon Gori Mus. Etrusc. T. I, t. 64, n. 2 u. 3 heraus.

Eine andere hörnerlose ist von Bursian Aventicum Helv. in den Mitth. der antiquar. Gesellsch. zu Zürich Bd. XVI, Abth. 1, 1869, S. 43 fg. besprochen und Taf. XIV abbildlich mitgetheilt. Die mit Epheu bekränzte sitzende Figur von guter Römischer Arbeit bläst ebenso wie die Marmorstatuette der Villa Albani die Doppelflöte.

Welcker erwähnt zu Müller Handb. der Arch. § 388 Anm. 2 eine Panin in Bronze als in Florenz im Cab. der Münzen befindlich. Andererseits hören wir durch E. Braun in den Annali a. a. O. von einer im Mus. Florentino im Saale der geschnittenen Steine aufbewahrten Panin mit der Angabe, daß sie porta un secchio o paniera, aber ohne daß das Material angegeben wird. Weder jene noch diese Figur ist uns anderweitig bekannt. Es hat aber mehr als Wahrscheinlichkeit, daß eine und dieselbe Statuette gemeint und diese von Bronze ist.

Zu den nicht isolirten, sondern ursprünglich an einem Geräthe zur Decoration angebrachten Rundwerken gehört meines Erachtens ein von Montfaucon Ant. expl. T. I, P. 2, t. CLXVIII, n. 6 aus der Sammlung C. Fontaine herausgegebenes Werk, obgleich nicht gesagt wird, daß es von Bronze sei. Es stellt eine wohlgearbeitete Panin mit großen Hörnern und den bei den Panen mehrfach vorkommenden langen herabhängenden Ohren dar, mit welchen beiden Attributen auch der unter n. 5 abgebildete männliche Pan aus derselben Sammlung versehen ist.

Dann erwähnen wir ein ebenfalls schon vorlängst herausgegebenes, aber vergessenes Werk: die bis unterhalb der Brüste wohl erhaltene kleine Büste aus Bronze bei Caylus Recueil d'antiquité T. I, pl. LXXII n. II, von deren Aufenthaltsort nichts verlautet. Der Herausgeber bezeichnet dieses als von guter Römischer Arbeit, fin et delicat, gracieux. Er nennt es: femme d'un Faune. Es handelt sich um ein jugendliches Mädchen mit kleinen Hörnchen über der Stirn und wohlgeordnetem Haare, dessen Nase nicht die gewöhnliche Stumpfnase der Satyrae ist, sondern eine etwas längere, etwas gebogene, so daß die Panin wohl sicher steht.

Ein Rundwerk zum Theil, aber kein isolirtes, sondern ein zu einem Geräthe gehörendes ist die jetzt zu Brüssel im Musée Royal d'antiquités et d'armure befindliche Werk, welches herausgegeben ist von Brunn in den Monum. d. Inst. Vol. VIII, t. XII, n. 8 und besprochen von demselben in den Annali XXXVI, 1864, p. 385 fg.; außerdem ist das Werk beschrieben von dem früheren Besitzer sowohl in dem von ihm selbst verlegten Catalog unter dem Titel Musée de Ravestein, Bruxelles 1870, T. I p. 368, n. 883, als auch in dem von dem Mus. Roy. herausgegebenen Catalog. Mus. de Ravestein, notice par E. Meester de Ravestein, deuxième édition, Bruxelles 1884, p. 261, n. 884. Freilich stimmen die Angaben von Meester de Ravestein und von Brunn nicht ganz überein. Jener bezeichnet noch in der zweiten Ausg. den Gegenstand als une faune tenant sur le bras gauche un enfant auquel elle présente le sein, indem er des Weiteren bemerkt: cette charmante nymphe est placée dans un feuillage d'ornement qui cache une partie de ses cuisses et ses jambes. Elle est représentée ayant toute la forme humaine, moins les oreilles, qui, plus allongées à leur sommet, se terminent comme les oreilles des chèvres. Elle a à l'extremité de l'épine dorsale ni une queue, ni même un bouquet de poils. Brunn bezeichnet den Gegenstand „Panisca con Satiretto." Wir hören durch ihn noch Genaueres in Betreff des Kindes und der Panin: „il bambino ha bensì una piccola coda, ma non le gambe e le zampe, che dovremmo aspettar nel figlio d'una Panisca, ma che sarebbero brutte in un bambino tenuto sul braccio d'una donna di forme umane almeno nella parte superiore. La metamorphosi poi di questa comincia soltanto dalle coscie ed è accennata in oltre mediante le corna e le orecchie caprine. Zudem behauptet Brunn, che il Satiretto non vien allattato, ma soltanto tenuto in braccio, und darin hat er allem Anscheine nach Recht. Wie E. Meester vergessen hat, die ganz klar zu Tage liegenden Hörner der Panin anzugeben, so hat er auch übersehen, daß dieselbe an den Hüften der Vorderseite unverkennbare Haare hat, welche die Abbildung zeigt, deren Treue auch in dieser Beziehung gewiß nicht angezweifelt werden darf. Dieser Umstand beweist gewiß, daß man an eine ziegenbeinige und ziegenfüßige Panin zu denken habe. Eine bis auf die Hörner ganz menschlich gebildete Panin werden wir unten auf einem schon vorlängst herausgegebenen unteritalischen Vasenbilde kennen lernen, ist aber hier nicht anzunehmen. Der vermeintliche, bis auf das Schwänzchen scheinbar menschlich gebildete Satiretto soll gewiß das Kind der Panin sein. Der Fuss kommt nicht zum Vorschein, ist aber als Bocksfuss zu denken.

Wenn Brunn annimmt, daß die eben besprochene Gruppe von der früher im Besitz von Vescovali befindlichen nicht verschieden sei, so hat das nach unserem Dafürhalten die größte Wahrscheinlichkeit.

Auch an einem vermuthlich hieher gehörenden Bronzerelief fehlt es nicht. Auf einem bronzenen Kruge im Mus. nazion. zu Neapel ist nach Gerhard und Panofka ant. Bildw. S. 195 der Kopf einer Panin eher als der einer Satyra zu erkennen.

Selbst in Bildwerken aus Blei finden wir eine Panisca dargestellt.

Dütschke beschreibt in den Ant. Bildw. aus Oberitalien III, S. 252, n. 555 eine freilich stark ergänzte Statuette einer solchen.

Auch auf einem Griechischen Bleistempel ist eine Darstellung dieses Wesens entdeckt von Benndorf in den Götting. gel. Anz. 1869, II, S. 2075. Das Blei ist von Postolacca in den Monum. d. inst. VIII, t. LII unter n. 375 herausgegeben und wird in dem dritten nächstens zu veröffentlichenden Hefte der Denkm. d. a. Kst. Taf. XLIII, n. 538a wiederholt erscheinen. Man erblickt im Profil dargestellt eine nackte sitzende weibliche Figur, welche bis über das Knie ganz menschlich gestaltet ist und eine spitze Mütze trägt (wie sie auch sonst bei dem Pan vorkommt, vgl. D. a. K. a. a. O. n. 534), auf dem Trigonon spielend.

Von Werken aus Terracotta haben wir zwei zu Statuetten gehörende Köpfe beizubringen, für deren Echtheit wir freilich nicht einstehen können.

Fr(öhner) hat in dem Verkaufsverzeichniß der Collection Cam. Lecuyer, 1889, p. 52 des Textes als auf eine Panin bezüglich in Abbildung mitgetheilt einen alten und häßlichen Kopf mit sehr gesträubtem Haar, zwei Hörnern und zwei Ziegenohren, an dessen Halse sich unterhalb des Kinnes zwei φήρεα befinden, wie sie aus Bildwerken bei Satyrn häufiger, aber unseres Wissens sonst nicht bei Panen nachweisbar sind.

Ein anderer Kopf ist auf der beigegebenen Tafel XXIX, n. 7 abgebildet mit rundlicherem und jugendlicherem Gesicht, einer Stumpfnase, welcher gesträubtes Haar nur zwischen den Hörnern zeigt, ähnlich wie der Pankopf (nach Anderen Satyrkopf) aus Pompeji in meinen Denkm. d. a. K. II, 42, 522.

Endlich haben wir noch ein unteritalisches Vasenbild als hieher gehörig zu verzeichnen. Dasselbe ist schon in Avellino's Bullett. arch. Napol. T. IV, t. IV, n. 1 abbildlich mitgetheilt. Es stellt eine bis auf die Hörner vollkommen menschliche mit einem um den Hals geschlungenen Zeuggewande bekleidete Panin dar, welche einen Wedel auf der linken Achsel haltend und auf der Doppelflöte vor einem Thymiaterion stehend bläst.

Auch auf geschnittenen Steinen fehlt es nicht an Darstellungen von Paninnen.

Bei Gori Gemm. mus. Florent. I, 93, 1 ist eine Panin mit einem shawlartig über die Arme geworfenen Zeuggewande und hinter ihr ein Pan mit einer erhobenen brennenden Fackel auf einem brennenden Altar, wahrscheinlich des Priapus, dessen Bild hinter dem Altar sichtbar zu werden scheint, zuschreitend dargestellt.

Auf derselben Tafel des Gori'schen Werkes erblickt man unter n. 9 eine im Stehen auf der Doppelflöte blasende Panin.

In Lippert's Daktyliothek Supplem. n. 291 und Hirt's Bilderbuch Taf. XXI, n. 3, ist eine Gemme mit einer Unzucht treibenden Panin dargestellt, welche die größte Aehnlichkeit hat mit der einen entsprechenden Darstellung an dem schon oben S. 392 erwähnten Sarkophagrelief zu Neapel.

Endlich glauben wir auch auf einer Münze, oder zweien, den Kopf einer Panin voraussetzen zu dürfen.

Wir meinen die Silbermünze von Metapont, welche Reg. Stuart Poole Catal. of the Greek coins in the Brit. Mus., Italy, p. 249, n. 90 so beschreibt: Female Dionysiac head, r., with goat's horn above forehead, bound with ivy-wreath, indem er Carelli Num. Ital. vet. t. CLVII, n. 148 vergleicht. In der Erklärung dieses letzteren Exemplars p. 113 spricht Cavedoni nur von einem caput juveniile ohne des ganz deutlichen Horns Erwähnung zu thun. Dieses Horn gleicht aber nicht wohl denen der Satyrn, sondern denen der Pane. Demnach halten wir den Kopf für den einer Panin. Von thierischen Ohren ist weder bei Poole noch bei Cavedoni die Rede, in der Abbildung bei Carelli auch nichts zu sehen. Das thut aber der Annahme einer Panin keinen Eintrag, da Pane mit menschlichen Ohren grade auf unteritalischen Werken mehrfach vorkommen. Die Nase ist keine Stumpfnase.

Nachträge.

Zu S. 386, Z. 29. In dem Verzeichniß der Collection Castellani wird unter n. 277 und 278 eine Herme, gewiß von Marmor, erwähnt mit den Worten: deux Faunisques, mâle et jeune fille. Bel art grec.

Zu S. 386, Z. 32 fg. Einen mit kleinen Hörnern versehenen schönen sicher stehenden Kopf eines weiblichen Satyrkindes erwähnt A. Furtwaengler in den Annali dell' inst. arch. Vol. XLIX, p. 209, Anm. als in der Gall. dei candel. des Vatican. Mus. n. 136 befindlich.

Zu S. 389. Die Münze von Lampsakos ist bei Percy Gardner Types of Gr. coins Taf. X, 40 abgebildet. Er hält den Kopf für den einer Maenade und setzt die Prägung zwischen 371—335 v. Chr. an, gewiß zu früh.

Zu S. 391, nach Z. 9 v. u. Eine „stark ergänzte Statuette einer Paniska“ wird nach H. Dütschke in den unteren Räumen der Gall. der Uffizien zu Florenz aufbewahrt (Ant. Bildw. in Oberitalien III, S. 252, n. 555).

Zu S. 393. Im Museum zu Bern befindet sich nach F. Deycks in den Jahrb. von Alterthumsfr. im Rheinlande XI, 1847, S. 2 fg. eine „zu Muri im J. 1660 gefundene Bronze einer Panin mit Paniscus, leider durch Vergoldung und auch wohl andere Ergänzungen, welche der erste Besitzer damit vornehmen ließ, sehr entstellt.“

Zu S. 396, Mitte. Das Berliner Mus. besitzt nach Toelken Erkl. Verzeichn. d. vertieft geschn. Steine S. 212, Kl. III, Abth. 3, n. 1163 einen „Achatonyx“, dessen Darstellung so beschrieben wird: „zwei bocksfüßige weibliche Satyren, deren eine einen Palmenzweig hält, beschäftigen sich sehr eifrig bei einer Herme des Priap.“ Der mir vorliegende Abdruck des Steins zeigt, daß es sich um zwei Paninnen handelt, von denen die eine dasselbe vornimmt, wie die Panin auf dem oben S. 392 erwähnten Neapolitan. Relief und auf der S. 396 angeführten Gemme bei Lippert und Hirt, indem sie die linke Hand an den Kopf der nicht behörnten Herme legt, die andere auf einem Altar knieend zuschaut. Von einem Palmzweige kann ich nichts sehen. Ist er vorhanden, so kann er nur als Wedel gefaßt werden.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Mai 1890.

(Fortsetzung.)

Atti della Società Toscana di Scienze naturali. Processi verbali. Vol. VII, p. 49—80. Adunanza del di 2. marzo 1890.
Biblioteca nazionale centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane. 1890. N. 104. 105. 106. Firenze 1890.
Pennsylvanian Geological Survey 1889. A. A. Atlas. Southern Anthracite field. Part II. A. A. Atlas. Eastern Middle Anthracite field. Part III. A. A. Atlas. Northern Anthracite field. Part V.
The Geological and Natural History Survey of Minnesota Bulletin. N. 1. 5. St. Paul 1889.
Museum of comparative Zoölogy at Harvard college:
a. Bulletin. Vol. XIX. N. 2. 3.
b. Memoirs. Vol. XVI. N. 3. Cambridge 1889.

Juni 1890.

Sitzungsberichte der K. Pr. Akademie der Wissensch. zu Berlin. 1890. XXVI/XXVII.
Leopoldina. Heft XXVI. N. 9/10.
Physikalisch-medicinische Gesellschaft zu Würzburg:
a. Sitzungsberichte 1890. N. 1—5.
b. Verhandlungen. Neue Folge. Band XXIV. N. 1—4.
Acta mathematica. 14, 2. Stockholm 1890.
Sitzungsberichte der philosophisch-philol. u. historischen Classe d. k. b. Akademie d. W. zu München. 1890. Heft II.
Zeitschrift für Naturwissenschaften. Band 63. Heft 1. Halle-Saale 1890.
Jahresbericht des Physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. für 1888—89. Frankfurt a. M. 1890.
Neues Lausitzisches Magazin. Band 66. Heft 1. Görlitz 1890.
Naturwissenschaftlicher Verein zu Bremen:
a. Abhandlungen. Band XI. Heft 2. Schluß.
b. Festschrift zur Feier des 25jährigen Bestehens. Bremen 1890. 89.
Die Grenzschichten zwischen Hilsthon und Wealden bei Bersinghausen am Deister von C. Struckmann in Hannover. (Separatabdruck des Jahrb. d. k. preuß. geologischen Landesanstalt für 1889. Berlin 1890.
Ueber Feuerbestattung. Vortrag von Prof. Dr. Fr. Goppelsröder. Mühlhausen i. Els. 1890.
Abhandlungen der K. Sächs. Gesellschaft d. Wissensch. zu Leipzig:
a. Philol.-histor. Classe. Bd. XI. No. VII. Umrisse zur Naturlehre der Demokratie v. W. Roscher. Leipzig 1890.
b. Mathem.-physische Classe. Bd. XVI. No. II. 1. Ueber Aufnahme und Ausgabe ungelöster Körper. 2. Zur Kenntniß der Plasmahaut u. der Vacuolen etc. Ebd. 1890.
Beiträge zu der Theorie der gleichzeitigen Transformation von zwei quadratischen oder bilinearen Formen v. R. Lipschitz. (Aus den Sitzungsberichten d. K. Pr. Ak. d. W. zu Berlin 1890. XXVI.)
Jahresbericht der Fürstl. Iablonowski'schen Gesellschaft. Leipzig. März 1890.
Mittheilungen der antiquarischen Gesellschaft in Zürich. Band XXII. Heft 6. Leipzig 1890.

XIX. Jahresbericht der historisch-antiq. Gesellschaft von Graubünden. Jahrg. 1889. Chur.
Abhandlungen d. königl. böhmischen Ges. d. W. Prag 1890:
a. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. VII. Folge. 3. Bd.
b. Philosophische, geschichtliche u. philologische Classe. VII. Folge. 3. Band.
Die spekulative Idee der Freiheit etc. v. J. H. Loewe. Herausgegeben v. d. k. böhm. Ges. d. Wiss. Prag 1890.
Anzeiger der Akademie d. Wiss. in Krakau 1890. Mai. Krakau 1890.
Kgl. Ung. Geologische Anstalt:
a. Jahresbericht für 1888. Budapest 1890.
b. Mittheilungen aus d. Jahrbuche. IX. Band 1. Heft. Ebd. 1890.
Ungarische Revue 1890. V./VI. Heft. Mai/Juni. Budapest 1890.
Értesitö az Erdélyi Muzeum-Egylet orvos-természettudományi szakosztályából. 1890. XV. Evfolgam.
a. I. Orvosi szak. 1. füzet.
b. II. Természettudományi szak. 1. 2. füzet.
c. III. Népszerü szak. 1. füzet. Budapest 1890.
Földtani Közlöny. [Geolog. Mittheilungen.] XX. Kötet. Füzet 1—3, 4. Budapest 1890.
Nature. Vol. 42. N. 1075—78.
Monthly notices of the R. Astronomical Society. Vol. L. N. 7. Mai 1890.
Proceedings of the Royal Society. Vol. XLVII. N. 289. 290.
Journal of the R. Microscopical Society 1890. Part 3. June. London et Edinburgh.
Transactions and proceedings and report of the R. Society of South Australia. Vol. XII. 1888—89. Adelaide 1889.
Proceedings and Transactions of the Nova Scotian Institute of natural science of Halifax. Vol. VII. Part I. 1886—87. P. II. 1887—88. Halifax 1888.
Bulletin de l'Académie R. de Belgique. 60e année, 3e série, tome 19. N. 5. Bruxelles 1890.
Leçons sur la théorie générale des surfaces etc. par Gaston Darbous. IIIme partie. 1. fasc. Paris 1890.
Tijdschrift vor Nederlandsche Taal- en Letterkunde. Deel 9. (= Nieuwe Reeks 1. deel.) (1.) 2. Aflever. Leiden 1890.
Nachruf für F. C. Donders.
Onderzoekingen gedaan in het physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool. Uitgeg. door Th. W. Engelmann en C. A. Peckelharing. Vierde Reeks. I, 1. Utrecht 1890.
Bulletin de la Société Imp. des naturalistes de Moscou. Année 1889. N. 4. Moscou 1890.
Sällskapet för Finlands Geografi. Fennia 2. 3. Bulletin de la société de geographie de Finlande. Helsingfors 1890.
Sveriges geologiska undersökning:
a. Ser. Aa. N. 84, 100, 103, 104, 105/106. 107. Stockholm 1889.
b. Ser. Bb. N. 4. 6.
c. Ser. C. N. 92—111. 113—115.
Om apatitens förekomstsätt i Norrbottens Län jemfördb med dess uppträdande i Norge af G. Löfstrand. Stockholm 1890.
Liste systématique des publications de l'Institut R. géologique de Suède. 1862—1890. Stockholm 1890.
The Norwegian north-atlantic expedition 1876—1878. XIX. Zoology. Actinida. Christiania 1890.
a. Praktisk-Geologisk Karta öfver Farsta och Gustafsberg.
b. Karted zu Série Aa. N. 84, 100, 103, 104. N. 105/106. 107.
Atti della R. Academia dei Lincei 1890. Serie quarta. Rendiconti. Vol. VI. 1. Sem. Fasc. 7. Roma 1890.
Bollettino delle pubblicazioni italiane (Biblioteca Nationale Centrale di Firenze.) 1890. N. 107, 108. Firenze 1890.
Bollettino delle opere moderne straniere acquistate dalle biblioteche pubbl. govern. d'Italia. (Bibl. nazionale centrale Vittorio Emanuele di Roma). Vol. IV, N. 5. Sett./Ott. 1889. Roma 1890.

Bulletin of the Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College. Vol. XIX. N. 4 u. Vol. XVI. No. 8. Cambridge, U. S. A. 1890.
Johns Hopkins University circulars. Vol. IX. N. 81. Baltimore 1890.
Aperçú sur le Micro-graphophone de Gianni Bettini. New-York 1890. (3 Exemplare).

Nachträge.

Proceedings of the scientific meetings of the Zoological Society of London. 1890. Part. 1. Jan. and Febr. London 1890.
Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Entrega 2. 3. 1890. Febr. Marzo. Tomo XXIX. Buenos-Aires 1890.
Informe de la Direccion general de Estadística 1889. Guatemala.
Washington observations 1884. Appendix I. Catalogue of the stars observed at the U. S. naval observatory during 1845—1877. Washington 1889.
Transactions of the American philosophical society. Vol. XVI. New series. Part III. Philadelphia 1890.
a. American journal of Mathematics. Index to vol I—X.
b. American journal of Mathematics. Vol. XII. N. 1. 2. Baltimore 1890.
Johns Hopkins University circulars. Vol. VIII. N. 75. Vol. IX. N. 77. 80.
Johns Hopkins University studies. Seventh series. X—XI. XII. Federal government in Canada. Baltimore.
Mittheilungen des deutschen wissenschaftlichen Vereines in Mexico. Band 1. Heft 1. Mexico 1890.
Boletins mensaes do 1º Observatorio meteorologico da repartiçao dos Telegraphos do Brazil. Vol. 1886. Vol. II. 1887. Vol. III. 1888. Rio de Janeiro.
The geological and natural history survey of Minnesota. 7th annual report. St. Paul 1889.
The transactions of the R. Irish Academy. Vol. XXIX. Part XIII. Dublin.

Juli 1890.

Sitzungsberichte der Kgl. Preuß. Akademie der Wissensch. zu Berlin. 1890. XXXI. XXXII u. XXXIII. XXXIV. XXXV. XXXVI u. XXXVII.
Siebenundzwanzigster Bericht der oberhessischen Gesellsch. für Natur- u. Heilkunde. Gießen 1890.
Jahrbuch der Hamburgischen wissenschaftlichen Anstalten. Jahrg. VII. 1889. Hamburg 1890.
Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Jahrg. 25. Heft 2. Leipzig 1890.
Leopoldina. Heft XXVI. Nr. 11—12. Juni 1890. Halle a. S.
Jahresbericht u. Abhandlungen des Naturwissenschaftlichen Vereins in Magdeburg. 1889. Magdeburg 1890.
Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. Jahrgang 30. 1889. Königsberg 1890.
Paul Starke: Arbeitsleistung u. Wärmeentwicklung bei der verzögerten Muskelzuckung. (Des XVI. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Kön. Sächsischen Ges. d. Wiss. N. 1. Leipzig 1890.
Veröffentlichungen des Kgl. Preuß. Geodätischen Institutes. Astronomisch-geodätische Arbeiten 1. Ordnung. Telegraphische Längenbestimmmungen in den Jahren 1888 u. 1889 etc. Berlin 1890.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

15. October. № 12. 1890.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 2. August.

Ueber die Verteilung eines Stoffes zwischen zwei Lösungsmitteln.

Von

W. Nernst.

Henry's Absorptionsgesetz der Gase in Flüssigkeiten ist neuerdings zu ganz besonderer Bedeutung gelangt; von van 't Hoff[1]) nämlich wurde bekanntlich der Beweis erbracht, daß ein Gas, welches sich in einem beliebigen Lösungsmittel dem Drucke proportional löst, bei gleicher räumlicher Konzentration als solches und im Zustande der Lösung gleichen Gas- bez. osmotischen Druck ausübt.

Umgekehrt, wenn ein Stoff wie Rohrzucker Pfeffer's Messungen zufolge in wässeriger Lösung den gleichen Druck ausübt, wie ihn der Dampf des Rohrzuckers bei gleicher räumlicher Konzentration aufweisen würde, so kann daraus mit voller Sicherheit gefolgert werden, daß der Dampf des Rohrzuckers dem Wasser gegenüber Henry's Gesetze gehorcht, daß mit anderen Worten der Partialdruck des Rohrzuckers in dem über einer wässerigen

1) van t' Hoff, Zeitschrift für physik. Chemie. 7, 488 (1887).

Lösung lagernden Dampfe proportional der Konzentration des im Wasser gelösten Zuckers ist. Ein Stoff wie Chlorwasserstoff hingegen, welcher in Lösung einen dem entsprechenden Gasdrucke nahe um das doppelte überlegenen osmotischen Druck aufweist, ist demgemäß auch weit davon entfernt, sich unter Henry's Gesetz zu fügen, wie allgemein die exceptionelle Stellung der Elektrolyte u. A. sich darin zeigt, daß sie sich keineswegs ihrem Partialdrucke proportional in Wasser lösen.

In welcher Weise das Absorptionsgesetz unter solchen Umständen sich modifiziert, läßt sich unschwer mittelst eines dem von van 't Hoff mitgeteilten analogen Kreisprozesses unabhängig von jeder Molekularhypothese entwickeln; einfacher gestalten sich aber die Betrachtungen, wenn wir von dem Satze Gebrauch machen, daß in einer Lösung ebensoviel gelöste Moleküle sich befinden, wie im gleichen Gasvolum bei gleicher Temperatur, in welchem der Gasdruck ebensogroß ist wie dort der osmotische Druck. Dann lautet van 't Hoff's Satz einfach: Nur diejenigen Stoffe folgen Henry's Gesetz, welche mit unveränderter Molekulargröße in Lösung gehen.

Betrachten wir nun einen Stoff, welcher im Zustande der Lösung und als Gas verschiedenen Molekularzustand besitzt, d. h. sich sowohl in Lösung wie als Gas im Dissociationszustande befindet, der aber in beiden Fällen ein sehr verschiedener sein kann. Dann ist nach Analogie des Dalton'schen Gesetzes, wonach bei einem Gemisch von Gasen sich jedes einzeln seinem Partialdrucke und Absorptionskoeffizienten gemäß löst, auch hier vorauszusehen, daß obiger Satz für jede einzelne Molekülgattung Gültigkeit behält, d. h. daß für jede Molekülgattung das Verhältnis der räumlichen Konzentrationen im Gas- und im Lösungszustande bei gleicher Temperatur unabhängig von der Konzentration ist. In der That, betrachten wir z. B. die Bildung einer Doppelmolekel aus zwei Einzelmolekülen, und bezeichnen wir mit g_1 und g_2 den Partialdruck der einfachen und der verdoppelten Moleküle im Gaszustande, und mit l_1 und l_2 den entsprechenden osmotischen Druck der gleichen Moleküle in der Lösung, so muß nach der Gleichung der Dissociationsisotherme

$$g_1^2 = k' g_2 \text{ und } l_1^2 = k'' l_2$$

sein. Bringen wir das Gas und somit auch die damit in Berührung befindliche Lösung auf sehr große Verdünnung, so wird das Verhältnis der Konzentrationen gleich $\frac{g_1}{l_1}$ und von der Konzentration unabhängig; die einfachste Annahme ist nun die, daß dies auch bei größeren Drucken bestehen bleibt, und dann muß nach obigen Gleichungen auch $\frac{g_2}{l_2}$ konstant sein, d. h. für beide Molekülgattungen findet ein von der Konzentration unabhängiges Teilungsverhältnis statt.

Wenn ein Körper im Gaszustande fast vollständig aus Doppelmolekülen besteht, in Lösung aber fast vollständig in die Einzelmoleküle zerfallen ist, so muß die Konzentration desselben im Gaszustande der zweiten Potenz der Konzentration in der Lösung proportional sein; der Dampf der Essigsäure etwa, der bekanntlich bei niederen Temperaturen, nach seiner Dampfdichte zu schließen, aus Doppelmolekeln besteht, würde dem Wasser gegenüber, worin Essigsäure, von der geringfügigen elektrolytischen Dissociation abgesehen, aus Molekülen normaler Molekulargröße besteht, in so auffälliger Weise vom Henry'schen Gesetze abweichen, während er sich in Benzol, worin Essigsäure bimolekular ist, dem Drucke proportional lösen müßte. Die Notwendigkeit dieses Verhaltens läßt sich übrigens, worauf schon hingewiesen wurde, auch thermodynamisch in aller Strenge ableiten.

Ich hoffe alsbald die obigen Gesetze an einigen Fällen verifizieren zu können; man übersieht nämlich bereits, daß sich aus der Dampfspannung von Lösungen flüchtiger Stoffe in ihrer Abhängigkeit von der Konzentration Folgerungen über das Verhältnis der Molekulargrößen ergeben, welche dem gelösten Stoffe in der Lösung und im Gaszustande zukommen. Zur Messung der Dampfspannung könnte man sich wohl am besten des Beckmann'schen Siedeapparates bedienen, dessen Theorie sich unschwer mit Hülfe der obigen Prinzipien auch auf die Anwendung flüchtiger Stoffe als gelöster Körper erweitern läßt. Hier jedoch seien dieselben nach einer andern Seite hin weitergeführt, wobei man zu einigen einfachen und an der Erfahrung scharf zu prüfenden Resultaten gelangt.

Wir wollen unter dem Teilungskoeffizienten eines Stoffes zwischen zwei Lösungsmitteln dasjenige Konzentrationsverhältnis verstehen, bei welchem der betreffende Stoff in den über den beiden Lösungen lagernden Gasgemischen gleichen Partialdruck besitzt. In der That schaltet man zwischen zwei derartige Lösungen eine nur für den gelösten Stoff durchlässige Wand ein, so wird keine der andern von dem gelösten Stoffe entziehen, sondern ein Gleichgewichtszustand bestehen bleiben. Nach dem Früheren ergeben sich dann sofort die Sätze:

1) Besitzt der gelöste Stoff in beiden Lösungsmitteln gleiche Molekulargröße, so kommt ihm ein von der Konzentration unabhängiger Teilungskoeffizient zu und umgekehrt.

2) Besteht der gelöste Stoff aus Molekülen verschiedener Größe oder Zusammensetzung, so gilt der erste Satz für jede beliebig herausgegriffene Gattung von Molekülen.

3) Kommt dem gelösten Stoffe im zweiten Lösungsmittel also etwa die doppelte Molekulargröße zu (vorwiegend) wie im ersten, so ist $\frac{c_1^2}{c_2}$ von der Konzentration unabhängig, wobei c_1 und c_2 die Konzentration in beiden Lösungsmitteln bezeichnen.

Was nun die experimentelle Bestimmung des oben definierten Teilungskoeffizienten anlangt, so wäre dazu nur notwendig, die Dampfspannung des betreffenden Stoffes zu ermitteln, während derselbe in den beiden Lösungsmitteln zu wechselnden Konzentrationen gelöst ist, wobei man freilich häufig auf sehr bedeutende experimentelle Schwierigkeiten stoßen würde. Nur an einem Punkte ist die Bestimmung des Teilungskoeffizienten leicht ausführbar, bei derjenigen Dampfspannung nämlich, welche der reinen festen Substanz entspricht; denn die Löslichkeit des Dampfes von diesem Drucke ist ja gleich der Löslichkeit des festen Körpers und der Teilungskoeffizient demgemäß einfach gleich dem Verhältnis der Löslichkeiten.

Ganz einfach hingegen für jede beliebige Konzentration gestaltet sich die Bestimmung des Teilungskoefficienten eines Stoffes zwischen zwei einander nur äußerst wenig lösende Flüssigkeiten, indem hier nur mittelst Analyse der beiden Lösungen, welche mit einander im Gleichgewichte sind, zu ermitteln ist, wie viel von dem dritten Stoffe jedes der beiden Lösungsmittel enthält. In diesem Falle wird also der von uns eingeführte Teilungskoeffizient identisch mit dem Berthelot'schen[1]); aber er verliert keineswegs seine Bedeutung Flüssigkeiten gegenüber, welche sich stark einander lösen oder gar in allen Verhältnissen mischen; nur seine experimentelle Bestimmung wird unter solchen Umständen schwieriger.

Der Mittheilung der eigenen Versuchsresultate sei eine kurze Diskussion der von Berthelot und Jungfleisch erhaltenen Zahlen vorausgeschickt. Die genannten Forscher finden den Teilungskoefficienten unabhängig von den Mengenverhältnissen der

1) Berthelot und Jungfleisch, Ann. ch. ph. [4], 26, 396 (1872). Berthelot, ibidem 408.

beiden Lösungsmittel, jedoch, wenn auch nicht bedeutend, veränderlich mit der Konzentration und der Temperatur. Der erste Satz ist ohne weiteres einleuchtend; was die geringe Veränderlichkeit mit der Temperatur anbetrifft, so sei daran erinnert, daß auch der Absorptionskoeffizient der Gase mit der Temperatur selten beträchtlich variiert; die Veränderlichkeit mit der Konzentration haben wir auf verschiedene Molekularkonstitution zurückgeführt und kann dieselbe, wie wir später sehen werden, zuweilen außerordentlich bedeutend werden.

Berthelot[1]) konstatiert ferner, daß Gemische von gelösten Stoffen, die auf einander nicht chemisch reagiren, sich so verteilen, wie wenn jeder allein vorhanden wäre, ein völliges Analogon, worauf schon Berthelot selber hinweist, zu dem Satze der unabhängigen Löslichkeit der zu einem Gemische vereinigten Gase.

Im Einzelnen ergab sich Berthelot und Jungfleisch, daß Brom sowohl wie Jod sich zwischen Wasser und Schwefelkohlenstoff in fast konstantem Verhältnis teilen, und zwar schwankt letzteres nur um wenige Prozente, während die Konzentrationen wie 1 : 10 variieren. Beide Elemente besitzen also in diesen Lösungsmitteln gleiches Molekulargewicht; da für in Schwefelkohlenstoff gelöstes Jod die Molekulargröße J_2 erwiesen ist[2]), so kommt auch dem in Wasser gelöstem Jod die normale Molekulargröße zu und auch beim Brom kann es sich hier wohl nur um Br_2 handeln. Wir treffen hier also die erwarteten Verhältnisse an.

Außerdem finden sich in der genannten Abhandlung noch eine Anzahl Versuche über die Verteilung organischer Säuren zwischen Aether und Wasser. Allerdings findet hier eine Komplikation insofern statt, als diese beiden Lösungsmittel sich bekanntlich gegenseitig nicht unbeträchtlich lösen und ferner diese gegenseitige Löslichkeit sich infolge Gegenwart dritter Körper nach den neulich dargelegten Gesetzen[3]) (übrigens in einer der Berechnung völlig zugänglichen Weise) nicht unbeträchtlich ändert. Gleichwohl können wir über die Molekulargröße der betreffenden Säuren in ätherischer Lösung durchaus sichere Schlußfolgerungen ziehn.

Als in 10 cc Wasser 0·121, 0·070, 0·024 g Bernsteinsäure gelöst waren, betrug die entsprechende Menge in 10 cc der ätherischen Lösung 0·022, 0·013, 0·0046. Das Verhältnis dieser Zahlen ist recht konstant (5·4, 5·2, 5·2) und da bei obigen Konzentrationen nur wenige Prozent in wässeriger Lösung elektrolytisch dissociiert

1) l. c. 417.

2) E. Beckmann, Zeitschrift für physik. Chemie. 5, 76 (1890).

3) Nernst, diese Nachrichten vom 26. Februar 1890.

sind[1]), die in Wasser gelöste Bernsteinsäure also weitaus vorwiegend aus Molekülen normaler Größe besteht, so besitzt auch die in Aether gelöste Bernsteinsäure normale Molekulargröße, wie es ja auch nach aller Analogie zu erwarten stand.

Oxalsäure wies bei den Konzentrationen 0·473, 0·436, 0·304, 0·203 g die Teilungskoeffizienten (Verhältnis der in 10 cc Wasser zu der in 10 cc Aether gelösten Menge) 9·0, 9·5, 9·8, 9·9 auf. Bei obigen hohen Konzentrationen (0·45 g in 10 cc Lösung entspricht einer Normallösung) ist jedenfalls die elektrolytische Dissociation nicht übermäßig weit (wenigstens nicht über die Hälfte) fortgeschritten[2]); der Zunahme der elektrolytischen Dissociation mit der Verdünnung entspricht die, besonders wenn man die verhältnismäßig kleinen Aenderungen der Konzentration in Betracht zieht, nicht unerhebliche Zunahme der Teilungskoeffizienten, und man überzeugt sich leicht, daß, wenn man den Quotienten aus dem nicht dissociierten Anteile der Oxalsäure zu der im Aether befindlichen Mengen bildet, bedeutend weniger variierende Werthe des Teilungskoeffizienten resultieren. Demgemäß kann kein Zweifel darüber bestehen bleiben, daß auch die Oxalsäure in Aether gelöst normale Molekulargröße besitzt. Denn wenn sie etwa in Aether bimolekular wäre, müßte der Teilungskoeffizient von den Konzentrationen 0·473 bis 0.203 auf etwa das 5·4fache zunehmen, also eine Variation ganz anderer Größenordnung zeigen. Ebenso sprechen die mit Aepfelsäure und Weinsäure angestellten Messungen entschieden für die normale Molekulargröße dieser Stoffe in ätherischer Lösung, wenn auch hier die Konzentrationen in der wässerigen Lösung schon so bedeutend (bis 10 %) sind, daß die Anwendbarkeit der nur für verdünnte Lösungen streng gültigen Verteilungsgesetze einigermaßen eingeschränkt wird. Bei der Essigsäure, die bei den Konzentrationen 0·3 und 0·1 der wässerigen Lösung den Teilungskoefficienten 1·8 und 2·3 besitzt, dürfte sich die Abnahme desselben mit steigender Konzentration dadurch erklären, daß sich bei den entsprechenden Konzentrationen der ätherischen Lösung bereits theilweise Doppelmoleküle bilden, wozu ja dieser Stoff bekanntlich Neigung besitzt. Ebenso verschwindet bei der Benzoesäure, welche bei den Konzentrationen 0·00304, 0·00258, 0·00150, 0·00110 g auf 10 cc wässeriger Lösung die Teilungskoeffizienten $^1/_{91}$, $^1/_{88}$, $^1/_{80}$, $^1/_{71}$ besitzt, die Zunahme mit der Verdünnung zwar zum großen Theile, wenn man die mit der Verdünnung zunehmende

1) W. Ostwald, Zeitschrift für physikal. Chemie. 3, 370.

2) Ostwald, l. c. 281.

elektrolytische Dissociation in Betracht zieht (dieselbe beträgt bei der größten Konzentration 14, bei der kleinsten bereits 21 %), doch bleibt immerhin noch ein merkliches Anwachsen zurück, was auf eine, wenn auch nur nach wenigen Prozenten zählende Bildung von Doppelmolekeln in den verhältnismäßig konzentrierten (bis zu vierprozentigen) ätherischen Lösungen hindeutet. Natürlich setzen obige Zahlen es in Evidenz, daß auch Benzoesäure in Aether gelöst bei nicht zu hohem Gehalt sich normal verhält.

Bei meinen eigenen Versuchen habe ich solche Stoffe gewählt, welche ein besonders charakteristisches Verhalten vorhersehen ließen. Ganz auffallende Verhältnisse waren nämlich bei der Untersuchung eines Stoffes zu erwarten, welcher in den beiden Lösungsmitteln in ganz verschiedenen Molekularzustande sich befindet; während bei den Versuchen von Berthelot und Jungfleisch immerhin noch von einer wenigstens genäherten Konstanz des Teilungskoeffizienten gesprochen werden kann, darf nach der Theorie im obigen Falle auch nicht entfernt davon die Rede sein. Solche Stoffe sind u. A. Essigsäure und Phenol, die nach den Gefrierpunktsbestimmungen in Wasser sich normal verhalten, in Benzol hingegen bei nicht zu kleinen Konzentrationen bimolekular sind.

Der Versuch entsprach der Erwartung vollkommen; derselbe wurde bei der Essigsäure in der Weise ausgeführt, daß Beckmann's Gefrierapparat mit 5·075 g Wasser und 31·5 g Benzol beschickt, der Gefrierpunkt des Gemenges, welcher bei der geringen Löslichkeit des Wassers in Benzol von demjenigen des reinen Benzols (5·9 °) nur wenig verschieden war, ermittelt sowie das Sinken desselben verfolgt wurde, als man successive gewogene Mengen von Essigsäure hinzufügte. Letzteres erfolgt natürlich demjenigen Bruchteile der Essigsäure entsprechend, welcher in das Benzol übergeht; um diesen kennen zu lernen, wurde in einer besonderen Versuchsreihe der Einfluß hinzugefügter Essigsäure auf den Gefrierpunkt von mit nur wenig, zur Sättigung gerade hinreichendem Wasser versetztem Benzol untersucht. Auffallender Weise ergeben sich hier nicht unerheblich stärkere Depressionen, als die von Hentschel[1]), Beckmann u. A. bei Anwendung wasserfreien Benzols gefundenen. Als ich zu 31·5 g Benzol successive 0·0173, 0·0650, 0·292 g Essigsäure hinzusetzte, betrugen die Depressionen 0·033, 0·110, 0·450 °, während Beckmann bei entsprechendem Gehalte um 16 bis 17 % kleinere Werte erhielt. Die

1) Hentschel, Zeitschr. f. physik. Chemie. 2, 491 (1888); E. Beckmann, ib. 2, 729 (1888).

einfachste Erklärung dieser die Beobachtungsfehler weit übersteigenden Abweichung ist wohl die Annahme, daß Wasser sich in mit Essigsäure versetztem reichlicher löst als in reinem Benzol. Natürlich wird die Sicherheit der analytischen Bestimmung der Essigsäure in Benzol mittelst des Gefrierapparates dadurch in keiner Weise beeinträchtigt. In Tab. I finden sich die Versuchsresultate; unter t steht die beobachtete Gefrierpunktserniedrigung, unter c_1 die Anzahl g Essigsäure, welche hiernach in den 31·5 g Benzol vorhanden waren; c_2, die Anzahl g Essigsäure, welche in die 5·075 g Wasser übergegangen waren, ergaben sich, indem man c_1 von der hinzugesetzten Gesamtmenge subtrahierte. Strenge genommen sind die Zahlen nicht völlig vergleichbar, weil sie nicht bei der gleichen Temperatur gewonnen sind; doch dürfte der hierdurch erzeugte Fehler bei der geringen Veränderlichkeit der Verteilungskoeffizienten mit der Temperatur, von der auch ich mich wiederholt überzeugte, durchaus verschwindend sein.

Tabelle I.

t	c_1	c_2	$\frac{c_2}{c_1}$	$\frac{c_2^2}{c_1}$
0·075°	0·043	0·245	5·7	1·40
0·120	0·071	0·314	4·4	1·39
0·158	0·094	0·375	4·0	1·49
0·240	0·149	0·500	3·4	1·67

Wie vorauszusehn, ist der Teilungskoeffizient $\frac{c_2}{c_1}$ keineswegs konstant, sondern nimmt mit der Konzentration stark ab, wohingegen $\frac{c_2^2}{c_1}$ viel weniger variiert; daraus, daß letzterer Ausdruck umgekehrt mit steigender Konzentration merklich ansteigt, haben wir zu schließen, daß Essigsäure in Benzol gelöst zwar zum weitaus größten Teile aus Doppelmolekeln besteht, bei geringerer Konzentration aber auch Moleküle normaler Größe in nicht ganz unbeträchtlicher Menge enthält. Zu demselben Resultate gelangte bekanntlich Beckmann[1]) auf einem ganz anderen Wege, nämlich durch Molekulargewichtsbestimmungen nach Raoult's Methode.

Aehnliche Resultate lieferte Phenol, dessen Verteilungsweise zwischen Benzol und Wasser ich nach der gleichen Methode untersuchte. Als ich zunächst behufs Aichung des Apparats zu mit wenig Wasser versetzten Benzol gewogenen Mengen Phenol hin-

1) Beckmann, l. c. S. 730.

zufügte, beobachtete ich auch hier um 17 bis 20 % höhere Depressionen als die von Beckmann mit wasserfreien Substanzen erhaltenen. In folgender Tabelle sind die den daneben stehenden Prozentgehalten (g Phenol auf 100 g Benzol) entsprechenden Depressionen t verzeichnet.

Tabelle II.

% Gehalt	t
0·104	0·041°
0·352	0·139
0·68	0·257
0·89	0·354
2·20	0·765
3·68	1·270
4·90	1·472

Mit Hülfe dieser Zahlen sind aus den Gefrierpunktserniedrigungen, welche durch Hinzufügen von Phenol zu 13·46 g Benzol und 30 g Wasser erzeugt wurden, folgende Werte für c_1 und c_2 abgeleitet.

Tabelle III.

c_1	c_2	$\frac{c_2}{c_1}$	$\frac{c_2^2}{c_1}$
0·017	0·038	2·24	0·085
0·051	0·077	1.51	0.116
0·123	0·159	1·30	0·205
0.327	0·253	0·77	0·196
0·75	0·39	0·52	0·203

Die Beobachtungen, welche hier über ein weiteres Gebiet erstreckt werden konnten, zeigen bei außerordentlicher Veränderlichkeit von $\frac{c_2}{c_1}$ eine bei höherer Konzentration recht nahe erfüllte Konstanz von $\frac{c_2^2}{c_1}$. Da nun bekanntlich Phenol in Wasser gelöst normale Molekulargröße besitzt, muß es also in Benzol bei obigen Konzentrationen weitaus vorwiegend aus Doppelmolekeln bestehen, die jedoch bei den niederen Konzentrationen in erheblichem Maaße sich spalten. Hiermit stimmen wiederum Beckmann's Messungen trefflich überein, welcher bei einem dem größten und kleinsten Werte von c_1 in obiger Tabelle entsprechendem Gehalte die Molekulargrößen 178 und ca. 140 fand, während das normale Molekulargewicht 94 beträgt.

Man kann übrigens aus obigen Zahlen auch den Dissociationszustand ziemlich sicher berechnen; aus den bei großen Konzentrationen erhaltenen Zahlen schließen wir, daß die Anzahl von Doppelmolekeln des im Benzol gelösten Phenols $\frac{c_2^2}{0{\cdot}20}$ beträgt und sich daher für die beiden größten Verdünnungen zu 0·0072 und 0·0277 berechnet. Demgemäß ergiebt sich die Anzahl der dissociierten Molekeln zu 0·010 und 0·023. Gilt nun für die in Benzollösung sich abspielende Reaktion

$$(C_6H_5OH)_2 = C_6H_5OH + C_6H_5OH$$

die Gleichung der Dissociationsisotherme, so muß das Quadrat der Konzentration der Einzelmoleküle dividiert durch die Anzahl der Doppelmoleküle konstant sein. Thatsächlich finden wir

$$\frac{0{\cdot}01^2}{0{\cdot}0072} = 0{\cdot}014 \text{ und } \frac{(0{\cdot}023)^2}{0{\cdot}0277} = 0{\cdot}019$$

kaum über die Versuchsfehler hinaus verschieden, welche sich in obigen Ausdrücken in ganz außerordentlicher Weise vervielfältigen.

Schließlich sei noch erwähnt, daß Alkohol, welcher in Benzol bei nicht zu hohen Konzentrationen[1]) sowie in Wasser normale Molekulargröße besitzt, sich demgemäß auch unabhängig von der Konzentration zwischen die obigen Lösungsmittel verteilt, wenn auch die hier ausgeführten Messungen wegen der geringen Menge des in das Benzol übergehenden Alkohols (er verteilt sich zwischen gleiche Gewichtsteile Benzol und Wasser etwa im Verhältnis 1:60) und der infolgedessen nur sehr kleinen Gefrierpunktserniedrigungen keine große Genauigkeit beanspruchen können.

Obwohl das bisher mitgeteilte Zahlenmaterial den eingangs theoretisch abgeleiteten Sätzen bereits eine sichere experimentelle Unterlage verleihen dürfte, so empfahl es sich doch zur Entscheidung gewisser anderer Fragen einerseits die Verteilung eines Stoffes innerhalb weiterer Aenderungen der Konzentration und anderseits, was ja ganz besonderes Interesse beansprucht, den Einfluß der elektrolytischen Dissociation zu untersuchen. Ich habe derartige Messungen mit Benzoesäure und Salicylsäure ausgeführt, Stoffe, von denen der erstere als der Repräsentant eines nur wenig, der zweite als derjenige eines verhältnismäßig stark disso-

1) Beckmann, l. c. 728.

ciierten Elektrolyten dienen kann. In Benzol sind beide Stoffe bei denjenigen Konzentrationen, für welche die Raoult'sche Methoden noch genügende Genauigkeit liefern, bimolekular; doch liegen Anzeichen vor, daß sie bereits beginnen, sich in ihre Einzelmoleküle aufzulösen[1]). Thatsächlich werden wir denn auch konstatieren, daß die genannten Stoffe, bei Verdünnungen freilich erst, bei denen die früheren Methoden völlig versagen, normale Molekulargröße annehmen.

Es ist leicht auf Grund dieser Angaben sich im Voraus ein Bild von dem qualitativen Verlauf der Erscheinungen zu machen. Benzoesäure, welche bei großen Verdünnungen in beiden Lösungsmitteln, abgesehen von der geringfügigen elektrolytischen Dissociation, normale Molekulargröße besitzt, muß demgemäß hier sich in konstantem Verhältnisse theilen; bei höheren Konzentrationen, wo dieser Stoff im Benzol in Gestalt von Doppelmolekeln gelöst ist, haben wir Konstanz des Ausdruckes $\frac{c_1^2}{c_2}$ zu erwarten und dazwischen liegt das Dissociationsgebiet. Salicylsäure hingegen, welche bei höherer Konzentration, wo die elektrolytische Dissociation zu vernachlässigen ist, sich wie die Benzoesäure verhalten muß, wird bei großen Verdünnungen sich keineswegs in konstantem Verhältnisse theilen, sondern mit zunehmender Jonenspaltung immer reichlicher an das Wasser abgegeben werden.

Was die Versuche selber anlangt, so verfuhr ich bei der Benzoesäure einfach in der Weise, daß ich sie in gewogenen Mengen successive in einen Scheidetrichter einführte, welcher 250 cc Wasser und 100 cc Benzol enthielt. Nach Herstellung des Gleichgewichtszustandes[2]), welcher nach mehrmaligem Schütteln schnell und präcise sich einstellte, wurden 50 cc der wässerigen Schicht mittelst Barytwasser und Phenolphtalein als Indikator titriert; die dem Scheidetrichter entnommenen Wassermengen wurden stets wieder ersetzt, wobei darauf geachtet wurde, daß nur von Kohlensäure befreites, nämlich mit Phenolphtalein und Barytwasser bis zur schwachen Rosafärbung versetztes Wasser in Anwendung kam. Da man durch Wägung die gesamte zugeführte, durch Titration die an das Wasser abgegebene sowie auch die im Laufe des Ver-

1) Beckmann, l. c. 730.

2) Berthelot's Bemerkung (l. c. 398), wonach der Gleichgewichtszustand sich erst nach einigen Stunden herstellt, kann ich nach meinen Versuchen nicht bestätigen, war vielmehr in allen Fällen erstaunt über die Geschwindigkeit und Sicherheit, mit welcher das schließliche Teilungsverhältnis erreicht wird.

suches zur Titration verbrauchte Menge Benzoesäure kannte, so bot die Berechnung der Versuche keine Schwierigkeit. Mehrfache Wiederholungen zeigten, daß auf diese Weise scharfe Resultate zu erhalten sind; die Versuchsfehler werden um so geringer, je größer die an das Benzol abgegebene im Verhältnis zur gesamten Menge der Säure ist, und wenn die an das Wasser abgegebene Menge gegen jene verschwindet, so werden die Bestimmungen der Konzentration im Benzol so genau als man wägt, und derjenigen im Wasser so genau als man titriert. Schwankungen der nahe 20° betragenden Temperatur wurden während des Versuches nach Möglichkeit vermieden.

Bei der Salicylsäure, wo eine Ausdehnung der Messungen bis auf sehr große Verdünnungen wünschenswert erschien, geschah die Analyse mittelst des elektrischen Leitungsvermögens. Zunächst wurde durch Hinzufügen gewogener Mengen einer Salicylsäurelösung von bekanntem Gehalt zu einer ebenfalls gewogenen in einem Arrhenius'schen Widerstandsgefäße befindlichen Wassermenge eine empirische Skala für die Abhängigkeit des Widerstandes von der Konzentration gewonnen, welcher nach Kohlrausch's Methode unter Anwendung einer Brückenwalze bestimmt wurde. Die Messungen ließen sich bei größeren Konzentrationen vortrefflich durch folgende Formel darstellen, welche eine Umformung der Ostwald'schen Dissociationsgleichung der Elektrolyte darstellt:

$$G = \frac{A}{w} + \frac{B}{w^2}$$

G und w bedeuten den Gehalt und den Widerstand der Lösung, A und B sind Konstante. Bei größeren Verdünnungen ließ sich der Gehalt einfach durch Interpolation aus dem Leitungsvermögen mit hinreichender Sicherheit ermitteln. Mit der Darstellung genügend reinen Wassers hatte ich anfänglich Schwierigkeiten, erzielte schließlich aber solches ($k = 2 \times 10^{-10}$) einfach durch Ausfrieren des gewöhnlichen destillierten Wassers. Die Versuchstemperatur wurde stets auf 18° gehalten.

Die eigentlichen Messungen geschahen nun in der Weise, daß entweder zu einer im Widerstandsgefäße befindlichen Salicylsäurelösung gewogene Mengen Benzol hinzugefügt und die Abnahme des Leitungsvermögens bestimmt, oder zu im Widerstandsgefäße befindlichem Wasser und Benzol gewogene Mengen einer Salicylsäurelösung hinzugesetzt und die Zunahme des Leitungsvermögens der wässerigen Schicht ermittelt wurde. Das über dem Wasser befindliche Benzol hindert die Bestimmung des Widerstandes keineswegs, auch nicht, wie ich mich durch besondere Versuche überzeugte, etwa in der Weise, daß Benzol an den Platinplatten des Widerstandsgefäßes adhäriert und Veranlassung zu einem Uebergangswiderstande giebt. Einige Kontrollversuche wurden auch bei der Salicylsäure mittelst Titration ausgeführt. c_2 bedeutet die an das Wasser [100 bez. 544 g], c_1 die an das Benzol [100 cc bez. 544 g] abgegebene Menge der Säuren.

Tabelle IV.

Verteilung von Benzoesäure zwischen 100 cc Wasser u. 100 cc Benzol.

$t = 20^0$.

c_2 in g	c_1 in g	m	$c_2(1-m)$	m'	c_1-m'	$\frac{m'^2}{c_1-m'}$
0·0163	0·0535	0·190	0·0132	0·0377	0·0158	0·090
0·0197	0·0753	0·178	0·0162	0·0462	0·0291	0·073
0·0244	0·099	0·159	0·0205	0·0584	0·0306	0·111
0·0369	0·194	0·132	0·0321	0·0915	0·1025	0·081
0·0452	0·273	0·118	0·0398	0·1135	0·160	0·080
0·0596	0·444	0·104	0·0534	0·1522	0·292	0·079
0·0788	0·737	0·092	0·0716	0·2041	0·533	0·078
0·0976	1·050	0·081	0·0897	0·256	0·794	0·083
0·1500	2·42	0·066	0·1401	0·399	2·02	0·079
0·1952	4·12	0·058	0·1839	0·524	3·60	0·077
0·289	9·7	0·048	0·275	0·784	8·9	0·069

Tabelle V.

Verteilung der Salicylsäure zwischen 544 g Wasser u. 544 g Benzol.

$t = 18^0$.

c_2 in g	c_1 in g	m	$c_2(1-m)$	m'	c_1-m'	$\frac{m'^2}{c_1-m'}$
0·0363	0·0184	0·739	0·0095	—	—	—
0·0668	0·0504	0·626	0·0250	—	—	—
0·094	0·0977	0·563	0·0411	0·0863	0·0114	0·65
0·126	0·146	0·532	0·0590	0·124	0·022	0·70
0·210	0·329	0·446	0·1163	0·244	0·085	0·70
0·283	0·533	0·402	0·1693	0·354	0·179	0·70
0·558	1·65	0·307	0·387	0·813	0·84	0·79
0·756	2·81	0·271	0·551	1·16	1·65	0·81
0·912	4·34	0·251	0·683	1·43	2·91	0·70

Konstatieren wir zunächst, daß die Zahlen obiger Tabellen durchaus den erwarteten Verlauf zeigen; bei den drei höchsten Konzentrationen (die höchste ist in beiden Fällen der Sättigung nahe) nimmt der Ausdruck $\frac{c_2^2}{c_1}$ die Werte 0·0093, 92, 87 bei der Benzoesäure und 0·194, 0·203, 0·192 bei der Salicylsäure an; bei den größten Verdünnungen sind bei ersterem Stoffe c_2 und c_1 einander proportional, aber selbst nicht annähernd bei dem zweiten.

Behufs der genaueren Berechnung gehen wir am einfachsten von einer bestimmten Molekülgattung, etwa der normalen, aus. Bedeutet m den Grad der elektrolytischen Dissociation, so erhalten wir in dem Ausdruck $c_2(1-m)$ die Anzahl der normalen Moleküle im Wasser und nach unserem Gesetz muß dieser die entsprechende Größe für die Benzollösung proportional sein. Da elektrolytisch dissociierte Moleküle im Benzol jedenfalls nur in absolut verschwindender Anzahl vorkommen (ich überzeugte mich zum Ueberfluß, daß eine an Benzoesäure oder Salicylsäure gesättigte Benzollösung keine Spur elektrischer Leitfähigkeit zeigt) so erhält man durch Subtraktion der normalen Moleküle von der Gesamtmenge die Anzahl der im Benzol befindlichen Doppelmoleküle.

Der Dissociationsgrad[1]) m ist bekanntlich in seiner Abhängigkeit von dem Volumen v, in welchem eine g-Molekel gelöst ist, durch die Formel

$$\frac{m^2}{(1-m)v} = k$$

und demgemäß

$$m = \frac{kv}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4}{vk}}-1\right)$$

gegeben, worin k die Dissociationskonstante bedeutet. Für Benzoesäure und Salicylsäure besitzt nach Ostwald's Messungen[2]) k die Werte 0·000060 und 0·00102. Da ferner 122 und 138 die Molekulargewichte dieser beiden Substanzen betragen, so ergiebt sich für die Benzoesäure

$$m = \frac{0{\cdot}000366}{c_2}\left(\sqrt{1+\frac{c_2}{0{\cdot}000183}}-1\right)$$

und für die Salicylsäure

---

1) W. Ostwald, Zeitschrift f. phys. Chemie. 2, 270 (1888).
2) W. Ostwald, Zeitschr. f. physik. Chemie. 3, 246 (1889).

$$m = \frac{0{\cdot}0383}{c_2}\left(\sqrt{1+\frac{c_2}{0{\cdot}0192}}-1\right).$$

Der Umstand, daß sich Ostwald's Zahlen auf eine etwas höhere Temperatur (25°) beziehen als die, welche bei unsern Messungen inne gehalten wurde, dürfte bei der geringen Veränderlichkeit von k mit der Temperatur[1]) nicht zu sehr ins Gewicht fallen. In Kolumne III und IV obiger Tabellen finden sich die mit Hülfe obiger Formeln für m und für $c_2(1-m)$, die Anzahl der normalen Moleküle im Wasser, berechneten Werte.

Den bei geringeren Konzentrationen gefundenen Werten entnehmen wir für den Teilungskoeffizienten des normalen Benzoesäure- bez. Salicylsäuremoleküls die Werte 2·85 und 2·1; durch Multiplikation dieser Zahlen mit $c_2(1-m)$ finden wir die Konzentration m' der normalen Moleküle und im Ausdruck $c_1 - m'$ demgemäß die Konzentration der Doppelmoleküle im Benzol. Diese Größen sind in Kolumne V und VI verzeichnet.

Hiermit sind wir nun in die Lage versetzt, eine für die Theorie der Lösungen wohl nicht ganz unwichtige Frage zu entscheiden. Wenn nämlich die in Benzollösung vor sich gehenden umkehrbaren Reaktionen

$$(C_6H_5COOH)_2 = C_6H_5COOH + C_6H_5COOH \quad \text{und}$$
$$(C_6H_4(OH)COOH)_2 = C_6H_4(OH)COOH + C_6H_4(OH)COOH$$

dem Gesetze der chemischen Massenwirkung folgen, so muß der Ausdruck $\frac{m'^2}{c_1 - m}$ von der Konzentration unabhängig sein, die gewöhnlichen Dissociationsgesetze bewahren mit anderen Worten auch dann ihre Gültigkeit, wenn der Zerfall des zusammengesetzteren Moleküls in die einfacheren in Lösung vor sich geht. Bekanntlich würde dies bei der in wässeriger Lösung sich abspielenden elektrolytischen Dissociation im Allgemeinen nicht der Fall sein, wenn das elektrische Leitungsvermögen ein exaktes Maaß für den Dissociationszustand darstellt, und nur bei den schwachen Säuren fand Ostwald einen, hier allerdings vorzüglichen Anschluß der Gleichung der Dissociationsisotherme an die Beobachtungen. Die Erledigung der Frage, ob die beobachteten Abweichungen ihre Erklärung in dem Umstande finden, daß für den Dissociationszustand das Leitungsvermögen kein genaues Maaß liefert, oder ob thatsächlich unsere Anschauungen über die Konstitution der Salze in wässeriger Lösung noch einer kleinen Korrektur bedürfen,

1) S. Arrhenius, Zeitschr. f. phys. Chemie. 4, 96 (1889).

scheint mir von größter Wichtigkeit zu sein, und um so lieber nahm ich denn hier die Gelegenheit war, auf einem gänzlich unabhängigen Wege eine Prüfung der Frage vorzunehmen, ob die in Lösung sich abspielenden Dissociationen durch die bekannten Gesetze geregelt werden oder nicht. Die Antwort fiel entschieden bejahend aus; denn wenn die in der letzten Kolumne von Tab. IV und V verzeichneten Werte für $\frac{c_1 - m'}{m'^2}$ auch nicht unbedeutende Schwankungen aufweisen, so spricht die Regellosigkeit derselben einerseits zweifellos dafür, daß sie mindestens zum großen Theil von den in obigen Werten außerordentlich stark hervortretenden Unsicherheiten der Messungen herrühren, und andrerseits wird, wenn man die im Verhältnis von etwa 1 zu 200 variierenden Gesamtkonzentrationen in Betracht zieht, die bei alledem zu Tage tretende Konstanz einigermaaßen überraschen.

Schließlich sei noch auf die große Veränderlichkeit des Teilungskoeffizienten mit der Konzentration hingewiesen; während bei großen Gehalten Benzoesäure sowohl wie Salicylsäure zum weitaus größten Teile an das Benzol abgegeben werden, geht letzterer Stoff bei den erreichten Verdünnungsgraden zum größeren Teile in das Wasser über und der Gang der Zahlen läßt kaum einen Zweifel darüber aufkommen, daß bei außerordentlich geringen Konzentrationen beide Säuren überhaupt nur zu einem verschwindenden Bruchteil an das Benzol abgegeben werden; die ganz exceptionelle Stellung gerade des Wassers als Lösungsmittels, welche sich in der Fähigkeit zeigt, die in ihm gelösten Stoffe elektrolytisch zu dissociieren und ihnen ungewöhnliche Reaktionsfähigkeit zu erteilen, erscheint hier in einem neuem Lichte. Hand in Hand mit obigen Eigenschaften geht das deutlich ausgesprochene Vermögen des Wassers, die letzten Teile gelöster Substanz fremden Lösungsmitteln gegenüber mit außerordentlicher Zähigkeit fest zu halten.

Inhalt von No. 12.

W. Nernst, über die Verteilung eines Stoffes zwischen zwei Lösungsmitteln.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

19. November. № 13. 1890.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 8. November.

Riecke legt von sich vor a. „Das thermische Potential für verdünnte Lösungen". b. „Ueber elektrische Ladung durch gleitende Reibung." c. von den Herrn Privatdocenten P. Drude und W. Nernst „Ueber das Verhalten des Wismuth im Magnetfelde in seiner Abhängigkeit von der Temperatur und der molekularen Beschaffenheit".

Voigt legt vor a. von Herrn Privatdocenten P. Drude, „Ueber die Größe der Wirkungssphäre der Molekularkräfte und die Konstitutionskonstanten der Plateauxschen Glycerin - Seifen - Lösung". b. von Herrn Privatdocenten W. Venske „Zur Integration der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$".

Klein legt von Herrn Franz Meyer, Prof. in Clausthal, vor: „Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen". Dritte Mittheilung. (Vgl. Sitzung vom 2. August d. J.)

Wüstenfeld legt für die Abhandlungen (Bd. 37) vor: „Die gelehrten Schâfi'iten des IV. Jahrhunderts d. H."

Wieseler legt „Einige Nachträge zu dem Aufsatze über weibliche Satyrn und Pane in der Kunst der Griechen und Römer" vor. (Nachr. 1890 S. 385 ff.)

de Lagarde legt vor a. „Die Inschrift von Aduli". b. „Das hebräische Wort gêbhîm". c. „Der Fluß Orontes". d. „Die Stichometrie der syrisch-hexaplarischen Uebersetzung des alten Testaments". e. „Σεισαρα".

F. Kielhorn legt vor: „Erklärung zweier Stellen des Kâvyâdarça.

Weiland legt für die Abhandlungen (Bd. 37) vor: „Beiträge zur Kritik der Chronik des Matthias von Neuenburg".

Kleine Mittheilungen.

Von

Paul de Lagarde.

Die Inschrift von Aduli.

Es war meine Absicht, mich in den goettingischen gelehrten Anzeigen ausführlich über Eduard Glasers Skizzen der Geschichte und Geographie Arabiens zu äußern.

Diese Absicht habe ich nicht ausführen können. Einmal nicht, weil die zum Urtheilen nöthigen Akten (die ich übrigens, soweit sie aus Inschriften bestehn, nur mit großer Vorsicht würde haben brauchen dürfen) nicht allein noch nicht vollständig, sondern sogar sehr unvollständig vorliegen. Zweitens nicht, weil aus der Beurtheilung, wenn sie hätte taugen sollen, ein Buch hätte werden müssen, nicht ein Heft.

Ich greife daher für unsere Nachrichten Einen der vielen Punkte heraus, die in einer Recension jener Skizzen zu erörtern gewesen wären — man wird sehen, daß es so ganz leicht nicht ist, Glasers Werk zu recensieren —, aber ehe ich an die Arbeit gehe, spreche ich Herrn Eduard Glaser, dem hocherfreulicher Weise die Philosophen Greifswalds den Doctorhut honoris causa aufgesetzt haben, auch öffentlich meine Bewunderung für den Muth, die Opferwilligkeit und die Umsicht aus, mit denen er in Arabien gereist ist, und den Wunsch, daß er noch lange Jahre mit gleichem Erfolge wie bisher, und weniger als bisher angefeindet, der Wissenschaft möge dienen können.

Es handelt sich für mich jetzt um einen zwischen EGlaser und ADillmann (Glaser, Skizzen **2** 475 ff.) über die Inschrift von Aduli entbrannten Streit.

Aduli schreibe ich, weil die Griechen (siehe unten) einen Genetiv Ἀδούλεως brauchen, also Ἄδουλις gehört haben müssen. Daß Yâqût **3** 623$_{15}$ ådaulay sprechen heißt, weiß ich: ebenso weiß ich, daß mein Lehrer Friedrich Rückert in seiner, Symmicta **1** 198 ff. gedruckten, Uebersetzung der Muållaqa des Θarafa von *Schiffen von Adauli* redet. Adauli = Adôli wird sich zu Ἄδουλι-ς umgekehrt verhalten wie Ἄξωμα zu dem nachmals im Lande üblichen Aksûm, und عدول wird mit dem in der Uebersicht 54_9 ff. besprochenen עֲדֻלָּם zusammengehören.

Wer Aduli auf einer Karte aufsuchen will, bediene sich der englischen Admiralitätskarte[1]) „Red Sea, Sheet 4", und suche südlich des jetzt viel genannten „Massaua" (die Engländer schreiben Musawwa) die Annesley-Bay: an dieser — aber jetzt durch eine Stunde Sand von der See getrennt — lag und liegt Aduli, auf italienischem Gebiete.

In diesem Aduli fand sich einst eine von Ptolemaeus Euergetes und eine andere von einem eingeborenen, aber griechisch redenden, Könige gesetzte griechische Inschrift. Beide sind in der Urschrift verloren, aber der Anfang der ersten, das Ende der anderen ist in einem griechischen Werke des sechsten Jahrhunderts erhalten, durch einen Mann erhalten, der gar nicht merkte, daß er die Bruchstücke zweier durch viele Jahre von einander getrennten Titel vereinigte.

Dieser Mann heißt Κοσμᾶς ὁ Ἰνδικοπλεύστης, nicht, wie (meines Wissens ohne Vorlage) IBekker im Register zu Photius 556 schreibt, Ἰνδοπλεύστης: er schiffte ja nicht auf dem Ἰνδός, sondern auf dem ἰνδικὸν πέλαγος. Man sehe über ihn des IAFabricius bibliotheca graeca (Harles) **4** 251 ff.

Von wem alles das in Rede stehende Monstrum von Inschrift abgedruckt ist (sogar unser Lohenstein hat es in seine Cleopatra aufgenommen), lerne man von Fabricius a. a. O. und von Boeckh CIG **3** 5127. Das Buch des Cosmas, aus dem zuerst Leo Allatius die Inschrift herausfischte, ist vollständig von BdeMontfaucon in der Nova collectio patrum **2** im Jahre 1706 hinausgegeben worden. Eine neue Ausgabe thut dringend Noth: die ganze Cosmasfrage muß von Neuem aufgeworfen werden.

Daß August Boeckh nicht auf die Handschriften des Cosmas zurückgegangen ist, nimmt Wunder. Daß Herr August Dillmann es nicht gethan hat, nimmt nicht Wunder, da wer Abraham Berliners Onkelos als abschließende Meisterleistung feiern, wer die diplomatische Bezeugung des jüdischen Canons viâ ac ratione vor aller Exegese zu untersuchen für unnöthig, ja schädlich halten kann, offenbar andere Anschauungen von Kritik hegt, als seit Richard Bentley bei uns gewöhnlicheren Philologen verbreitet sind. Was ich 1882, mich auch auf FrField und FrDübner berufend, in meiner Ankündigung 50 über BdeMontfaucon geurtheilt habe, konnte der 1879

---

1) Zu kaufen bei JDPotter, 31 Poultry, London, und nicht theuer.

schreibende Herr Dillmann nicht gelesen, er würde es freilich auch wenn er es gelesen hätte, mit der allen meinen Arbeiten gegenüber bei ihm üblichen grimmen Unlust bei Seite geschoben haben. EGlaser war als Astronom nicht verbunden die Methode der Philologie und den Ruf Montfaucons zu kennen.

Was Herr August Dillmann zu thun für unnütz erachtet hat, habe ich jüngst gethan: mich um die Handschriften des Cosmas gekümmert.

Vaticanus graecus 699, wirklich quadratus, in zwei Spalten auf der Seite beschrieben, mit Bildern geziert, deren Farben starken Schaden gelitten haben, enthält auf Blatt $13^3{}_5$ bis Blatt $14^1{}_{19}$ die in Rede stehende Inschrift, soweit sie mich angeht. Die Accente sind zu der späten Unciale noch später zugesetzt: ich nehme auf sie so wenig Rücksicht wie auf die werthlosen und zum Theil selbstverständlichen Aenderungen des mit dem Accentuierenden wohl identischen Correctors: einiges Wenige, was ich gebe, schien nothwendig. Was ich mit Cursiva habe drucken heißen, steht 4 27—29 32/33 35 40—43, ausdrücklich als *παραγραφη* bezeichnet, im Texte, hingegen 10/11 16 21/22 von der Hand des Textes am Rande: wo sich im Texte *παραγραφη* findet, hören die Obelen auf, durch welche die Inschrift vor der Zeile als Citat bezeichnet wird. Die Anmerkungen, die als wirkliche *παραγραφαὶ* am Rande erscheinen, sind durch dasselbe QuecksilberRoth, mit dem vom Schreiber selbst *παραγραφη* geschrieben wird, sicher in den Text eingewiesen.

Florentinus der Laurentiana IX 28, Blatt $39^1{}_{11}$ bis $40^2{}_2$. Bandini ist leicht einzusehen. Angeblich aus dem zehnten Jahrhundert.

Der Wiener Codex kommt nicht in Betracht, da das kleine Stück über das schon Lambeck **3** 9 handelte, wie bereits Montfaucon berichtet hat, nur wenige Seiten umfaßt, und (was Montfaucon nicht gemeldet) die Inschrift von Aduli nicht enthält. Ich wandte mich mit der Bitte zu helfen an WvHartel, der seinen Schüler, Herrn Doctor Rudolf Beer, mit allem Weiteren betraute. Ich bin dem Herrn von Hartel wie Herrn Doctor Beer zu warmem Danke für ihre Unterstützung verpflichtet. Herr Rudolf Beer schrieb an Hartel:

> Ich habe mir den Codex, heute Theol. graec. 230, kommen lassen und folgendes gefunden.
>
> Nach dem von Lambeck und Nessel mitgetheilten Titel folgt noch der von ihnen ausgelassene Zusatz μερικά· μᾶλλον δὲ πρὸς τὸν ἔξω; also jedenfalls Bruchstücke, schon vom Abschreiber so gekennzeichnet. Die ersten Worte πρῶτον μὲν οὖν stimmen nicht mit dem Anfang; sie finden sich Montfaucon p. 117 D; dann geht der Text der Hds weiter bis

fol 32ᵃ τὰ πάντα οὐκ ἔστι (Montfaucon 124 B Anfang) und mit der Schlußnotiz τέλος τὰ περὶ τούτου.

Die zweite Abtheilung beginnt gleich darauf mit den Worten: λέγει τοίνυν ὁ θεῖος κοσμογράφος Μωϋσῆς (Montfaucon p. 126 A Ende) und geht — mit einigen Auslassungen — fort bis fol 34ᵃ (Montfauc. p. 130 B Ende) διηγοῦνται τὴν δόξαν θεοῦ mit einigen wenigen Zeilen, einem Appendix über ein erklärendes Schema.

Da nun der Text der Urschrift bei Montfaucon p. 141 beginnt, so ergibt sich klar, daß unsere Handschrift den gewünschten Text nicht enthält, beziehungsweise nicht so weit reicht.

Natürlich kam für eine von Cosmas mitgetheilte Urkunde der Styl des Cosmas nicht in Betracht: wohl aber kamen die παραγραφαὶ und σχόλια für mich in Betracht, die Cosmas in seinem Buche bietet. Ich habe, so lange ich auch Montfaucons nova collectio besitze und benutze, über diese παραγραφαὶ und σχόλια Studien nicht gemacht, weil ich sie ohne die Handschriften verglichen zu haben, nicht machen konnte. An diesem Punkte bin ich also verwundbar.

Ich theile zunächst den Text des Vaticanus [R] so wie er von der ersten Hand geschrieben ist, mit, und lege ihm die Varianten des Laurentianus [F] unter. Danach werde ich die Urschrift hergestellt geben, mit richtiger Eintheilung, und werde Erläuterungen beifügen, die für Dillmann gegen Glaser entscheiden. Auf Geographisches darf ich mich nicht einlassen: mir fehlt die Muße, mich ausreichend zu orientieren.

1 μεθ᾽ ἃ ἀνδριώσας τὰ μὲν ἔγγιστα τοῦ βασιλείου ἔθνη εἰρηνεύεσθαι κελεύσας, ἐπολέμησα καὶ ὑπέταξα μάχαις τὰ ὑπογεγραμμένα ἔθνη. Γαζη ἔθνος ἐπολέμησα, ἔπιτα Αγαμε καὶ Σιγυηνε νικήσας, τὴν ἡμίσιαν πάν-

---

1 ἀνδρειώσασ F

1 nach βασιλείου + μου F

2 zu γαζη hat die erste Hand in F später ein σ hinzugefügt. am rechts beschnittenen Rande hat F σχόλιον· γάζην λέγει τοὺς [ἀ]ξωμίτασ ἄχρι [γὰρ καὶ] τοῦ νῦν ἀγάζη αὐτοὺσ ὀνομά[ζου]σι

3 ἔθνη F

3 ἔπειτα F

3 αγαμη und dem vielleicht später ein ν nachgefügt F: mich däuchte (an einem dunkelen Morgen, an dem mir das Licht von zwei Seiten einfiel) das η dieses Worts auf einer Rasur zu stehn

3 σιγύην ἐνίκησα F. Zu seinem σιγύην hat F unmittelbar hinter dem zu 2 angeführten σχόλιον, aber mit eigenem Verweisungszeichen, am rechts beschnittenen Rande, σιγύην ** [**] σουσκινῖτα [***] καὶ τὰ ἐγγὺσ αὐτῶν ἔθνη

3 ἡμίσειαν F

3/4 παντων bis αυα Rs ersetzt F durch τῶν παρ᾽ αὐτοῖσ πάντων καὶ αὐτῶν ἐμερισάμην ἄυα των τῶν παρ' αὐτοῖς καὶ αυν ἐμερησαμ... Αυα *Τιαμα, τοὺς λεγομένους Τζιαμω, καὶ τοὺς Γαμβελα καὶ τὰ ἐγγὺς αὐτοῦ λέγει ἔθνη τὰ πέραν τοῦ Νείλου* καὶ Ζιγγαβηνε καὶ Αγγαβε καὶ Τιαμαα καὶ Αθαγαους καὶ Καλαα καὶ Σαμινε ἔθνος πέραν τοῦ Νείλου ἐν δυσβάτοις καὶ χιονώδεσι ὄρεσι οἰκοῦντας, ἐν οἷς διὰ παντὸς νιφετοὶ καὶ κρύη καὶ χιόνες βαθιαι, ὡς μέχρι γονάτων καταδύειν τὸν ἄνδρα, τὸν ποταμὸν διαβὰς ὑπέταξα. ἔπιτα Λασινε καὶ Ζαα καὶ Γαβαλα [*τα*]*υτα ἔθνη* [*ἕω*]*ς τῆς σήμε*[*ρον*] *οὕτως καλοῦνται* οἰκοῦντας παρ' ὄρεσι θερμῶν ὑδάτων βλύοντι καὶ καταρύτω, Αταλμω καὶ Βεγα καὶ τὰ σὺν αὐτοῖς ἔθνη πάντα. Ταγγαιτῶν τὰ μέχρι τῶν τῆς Αἰγύπτου ὁρίων οἰκοῦντας ὑποτάξας πεζεύεσθαι ἐποίησα τὴν ὁδὸν ἀπὸ τῶν τῆς ἐμῆς βασιλίας τόπων μέχρι

---

4 αυν von R^{c} zu αυτων ergänzt, ἀυτῶν F

4 R^{c} hat η von εμερησαμ zu ι radiert, und leider das Ende dieses Wortes so verschmiert, daß ich weder was Er gewollt noch was R geschrieben, entziffern kann. R^{c}s Accentuierung weist auf ἐμερισάμην, das F wirklich bietet

4—6 die παραγραφὴ hat F im Texte

4 τιαμα R, καὶ τιαμῶ F

5 F betont τζιαμῶ und γαμβελά

5 ἀυτῶν F

6 ζιγγαβηνε F

6 zu αγγαβε hat am Rande F σχόλιον τὰ ἐγγὺσ ἀδούλ λέγει ἔθνη τῶν τιγρητανῶν, wo der Name der Stadt am unteren rechten Ende des λ den bekannten Strich, und über dem λ eine mir unlesbare Abkürzung darbietet

6 τιαμα F

7 σεμῆναι F

7/8 χιονώδεσιν ὄρεσιν F

7 möglich daß die Rasur Rs den rechten Schenkel eines ω vertilgte: mir geht sie dafür allerdings zu tief nach unten: ο ist aus etwas Anderem hergestellt

9 βαθύτατοι [so] F

9 καταδύνειν ohne folgendes τὸν F

10 ἔπειτα F

10 das Verweisungszeichen in R schon bei λασινε. Der Rand links beschnitten: was ich ergänze, steht zwischen []. ταῦτα ἔθνη könnte sich hier finden, wie es sich 33 wirklich findet: vergleiche zu 23, aber auch 45. Die Beischrift 10/11 fehlt in F

11 ὄρεσι klar die Hdss. Wir brauchen einen Singular, da βλυοντι und καταρυτω folgt. Da der Mann 44 46 Ἄρεει schreibt, traue ich ihm hier ὄρεει zu

11/12 βλύζουσι F, aber ζουσ von erster Hand auf Rasur

12 natürlich leistet R^{c} καταρρυτω. καταρρύτοισ F, aber ο halb, ισ ganz, von erster Hand auf Rasur

12 zu αταλμῶ an dem links beschnittenen Rande F [το]ὺσ βλέμμυασ [*] ωσὶχ καλοῦσιν οἱ αἰθίοπεσ: ταγ[γαῖτα]σ καλεῖ τοὺσ ατια**′ καὶ τοὺσ ἄδρα**σ:—, wo das τι von ἀτια *mir* nicht sicher ist

13 .τ.αγγαῖτασ (das umpunktierte τ steht in der Hds. dicht am α) F, dessen Akut jünger als der Text ist, während der rechte Theil des letzten α und das ganze σ von erster Hand auf Rasur stehn

13 statt τὰ F jetzt τοὺσ, indem aus ο ein ȣ hergestellt ist. Der rechts unten liegende Theil des σ ist von erster Hand. Der über σ stehende Gravis ist jung. Vermuthlich stand zuerst τῶν da

13/14 ich merke an, daß auf dem Bilderblatte, das vor 13 vorhergeht, αιθιοπες πεζευοντες abgebildet sind: ein kupferfarbiger Mann, der über der linken Schulter einen Stab trägt, und am hinteren Ende des Stabes hangend, eine Last

14 βασιλείασ F

14 zu μέχρι fügte man in F später (nicht das in F meist auch am Schlusse der Wörter verwandte σ, sondern) c hinzu

Αἰγύπτου. ἔπιτα Αννηνε καὶ Μετινε ἐν ἀποκρίμνοις οἰκοῦντας ὄρεσι. Σεσεα [τ]*ὰ τῆς Βαρβα[ρ]ίας ἔθνη ἐνταῦθα δηλοῖ* ἔθνος ἐπολέμισα, οὓς καὶ μέγιστον καὶ δυσβατότατον ὄρος ἀνελθόντας περιφρουρήσας κατήγαγον καὶ ἀπελεξάμην ἐμαυτῷ τούς τε νέους αὐτῶν καὶ γυναῖκας καὶ παῖδας καὶ παρθένους καὶ πᾶσαν τὴν ὑπάρχουσαν αὐτοῖς κτισιν Ραυσῶ ἔθνη μεσόγια λιβανοτοφόρων βαρβάρων οἰκοῦντα ἐντὸς παιδίων μεγάλων ἀνύδρων. καὶ Σολατε *Σολατε λεγόμενοι αι οι ποροθ οι ἐπὶ τὴν Βαρβαρίαν* ἔθνος ὑπέταξα, οἷς καὶ τοὺς αἰγιαλοὺς τῆς θαλάσσης φυλάσσειν ἐκέλευσα. ταῦτα δὲ πάντα τὰ ἔθνη ὄρεσι ἰσχυροῖς πεφρουρημένα αὐτὸς ἐγὼ ἐν ταῖς μάχαις παρὼν νικήσας καὶ ὑποτάξας, ἐχαρισάμην αὐτοῖς πάσας τὰς χώρας ἐπὶ φόροις. ἄλλα δὲ πλιστα ἔθνη ἑκόντα ὑπετάγη μοι ἐπὶ φόροις. καὶ πέραν δὲ τῆς ἐρυθρᾶς θαλάσσης οἰκοῦντας Ἀρραβίτας καὶ Κινεδοκολπίτας *Ἀρραβίτας καὶ Κιναιδοκολπίτας τοὺς εἰς τὸν Ὁμηρίτην σημαίνει, τοῦτ' ἔστι τοῖς ἐν τῇ εὐδαίμονι Ἀρραβίᾳ*, στράτευμα ναυτικὸν καὶ πεζικὸν διαπεμψάμενος καὶ ὑποτάξας

---

15 ἔπειτα F

15 ἀννίνε F. dazu am links beschnittenen Rande [ἀννίνε] καὶ μετίνε: ἔ[τι καὶ] νῦν ταῦτα τὰ ἔ[θνη ο]ὕτω καλοῦνται: —, wo ἔ der Hds. gegen meine Ergänzung nichts beweist: vergleiche ἐτυμολογία = ἑτοιμολογία GHoffmann ZDMG 32 736

15 ἀποκρήμνοισ F

15 ὄρεσιν F

16 die Randschrift Rs links vom Buchbinder beschnitten: die Randschrift fehlt in F

16 ἐπολέμησα F

17 δυσβατώτατον F

18 ἀ von ἀπελεξάμην von R^c, der am rechten Ende der Columne seine Auffrischungskünste getrieben hat. ἐπελεξάμην F

19 κτῆσιν· F

19 ῥαυσῶν F. dazu am links beschnittenen Rande [τὰ] τῆσ βαρβαρίασ ἔ[θν]η λέγει, worin das erste βαρ von βαρβαρίασ, nicht von erster Hand, über der Zeile

20 μεσόγεια F

20 λειβανωτοφόρων F^1, λιβανωτοφόρων F^2

20 οἰκοῦντασ ἐντὸσ πεδίων μεγίστων F

21 σωλάτε F. dazu am links beschnittenen Rande [σ]ωλάτε γάρ, τοὺσ [κατὰ τ]ὴν βαρβαρίαν [τιγ]ρῆτασ τοὺσ πα[ραλ]ίουσ λέγει. die erste Zeile des Scholion war als erste eingezogen, daher nur Ein Buchstab ergänzt zu werden braucht. τιγ in τιγρῆτας und ραλ in παραλίουσ ist durch die zu 23 folgende Glosse sicher

21/22 die Glosse Rs fehlt in F. Sie steht am oberen Rande des Blatts, und ist sehr verblichen

21 ποροθ könnte πορεθ gelesen werden

23 zu ἐκέλευσα am unteren Rande Fs die Glosse μέχρι τοῦ νῦν ὅλοι οἱ τιγρῆται, τὰ παράλια οἰκοῦσι μέρη. ἀπὸ ἀδούλ/ [über λ noch ein Abkürzungszeichen, das ich, da darum umherradiert ist, nicht aufzulösen verstehe] μέχρι τῶν τῆσ βαρβαρίασ τόπων

23 τὰ R am ZeilenEnde: vielleicht Zusatz R^{c}s

23 ὄρεσιν F

25 πλεῖστα F

27 das andere ρ im ersten ἀρραβίτασ in F (vielleicht, aber kaum, von erster Hand) über der Zeile. Dazu am rechts beschnittenen Rande ἀραβίτασ (ein anderes ρ hinzugeschrieben) ἐντ[αῦθα] τοὺσ ὁμηρίτασ [κα]λεῖ: καὶ κιναιδοκ[ολπί]τασ, τοὺσ παρ' ἄλ[λοισ] ἀδανίτασ καλ[ουμένουσ]

27 Mitte κιναιδοκολπίτασ F

27—29 die Beischrift fehlt in F

28 τοις am ZeilenEnde in R^{c}s Hand R

αὐτῶν τοὺς βασιλέας, φόρους τῆς γῆς τελεῖν ἐκέλευσα καὶ ὁδεύεσθαι μετ᾽ εἰρήνης καὶ πλέεσθαι ἀπό τε λευκῆς κώμης ἕως τῶν Σαβαίων χώρας ἐπολέμησα *εἰς τὰ μέρη τῶν Βλεμμύων ἐστὶν κώμη καλουμένη τὸ Λευκογην.* πάντα δὲ ταῦτα ἔθνη πρῶτος καὶ μόνος βασιλέων τῶν πρὸ ἐμοῦ ὑπέταξα, δι᾽ ἣν ἔχω πρὸς τὸν μέγιστον θεόν μου Ἄρην εὐχαριστείαν *Σαβαίων χώρα πάλιν εἰς τὸν Ὁμηρίτην ἐστὶν* ὅς με καὶ ἐγέννησε, δι᾽ οὗ πάντα τὰ ἔθνη τὰ ὁμοροῦντα τῇ ἐμῇ γῇ ἀπὸ μὲν ἀνατολῆς μέχρη τῆς λιβανοτοφόρου, ἀπὸ δὲ δύσεως μέχρη τῶν τῆς Αἰθιοπίας καὶ Σασου τόπων ὑπ᾽ ἐμαυτὸν ἐποιησα..εν αὐτὸς ἐγὼ ἐλθὼν καὶ νικήσας, ἃ δὲ διαπεμπόμενος, καὶ ἐν εἰρήνῃ καταστήσας πάντα τὸν ὑπ᾽ ἐμοὶ κόσμον *αὕτη ἡ Σασου χώρα ὑστάτη ἐστὶν τῶν Αἰθιόπων, ἔνθα καὶ πολὺ χρυσίον ἐστὶν τὸ λεγόμενον ταγχαρας. ἐπέκεινα δὲ ταύτης ὁ ὠκεανὸς παράκειται, ὥσπερ καὶ τῶν Βαρβαρεωτῶν τῶν καὶ τὸν λίβανον ἐμπορευομένων,* κατῆλθον εἰς τὴν Αδουλι τῷ Διῒ καὶ τῷ Ἄρεει καὶ τῷ Ποσιδῶνι θυσιάσαι ὑπὲρ τῶν πλοϊζομένων. ἀθρύσας δέ μου τὰ στρατεύματα καὶ ἐφ᾽ ἓν ποιήσας ἐπὶ τούτῳ τῷ τόπῳ, καθήσας τόνδε τὸν δίφρον παραθήκην τῷ Ἄρεει ἐποίησα, ἔτι τῆς ἐμῆς βασιλείας κζ.

---

31 κόμησ F. zu λευκῆσ κόμησ F am rechts beschnittenen Rande λευκὴν κόμην κ[αλεῖ] τὸ λεγόμενον λευ[****] ἐπὶ τὰ μέρη τῶν β[λεμ]μύων, ὃν παρὰ θ[άλασσαν]

31 σαβέων F. dazu am rechts beschnittenen Rande σαβέων χωραυ** τὸν ὁμηρίτην. ich kann nur υ, nicht ν, lesen

32/33 die Beischrift fehlt in F

33 nach ταῦτα + τὰ F

34 πρὸς > F

35 εὐχαριστείαν auch F[1], εὐχαριστῖαν F[2]

35 die Glosse fehlt in F

36 zu ἀπὸ F am rechts beschnittenen Rande σάσου καὶ λιβανω[το]φόρον καλεῖ, τὰσ τῶν αἰθιόπων χώρα[σ] μησάσου, εἰσ νό[τον] καὶ δύσιν κειμένη[ν] τὴν δὲ βαρβαρ[ίαν] εἰσ νότον καὶ ἀνατ[ολὴν] κειμένην· βαρ[βαρία] δέ ἐστιν, ἡ τὸν λίβα[νον] ποιοῦσα γῆ. ἡ δ[ὲ] σάσου χώρα, ὑστ[άτη] ἐστὶ τῶν αἰθιόπων. ἔνθ[α καὶ] πολὺ χρυσίον ἐστὶ τ[ὸ λε]γόμενον τάγχαρας. [ἐπέ]κεινα δὲ ταύτησ [ὁ ὠ]κεανὸσ παράκειται. ὥσ[περ] καὶ τῶν βαρβαρεωτῶν [τῶν] τὸν λίβανον ἐμπορευομένων. Man sieht, daß die Ergänzungen nicht gleich groß sind: man wird sich auf die Nothwendigkeit, kleine Aenderungen aus einer vollständigen Hds. aufnehmen zu müssen, gefaßt zu halten haben. Die Worte τὸν λίβανον ἐμπορευομένων stehn nicht zur Seite, sondern unter der Kolumne

37 beide Male μέχρι F

37 λιβανωτοφόρου F

38 μην von εποιησαμην R[c]s jetzt verschmiert: vier Buchstaben sind in R dagewesen, vor ν jedenfalls ein ε. was R gehabt hat, das hat F noch heute, und druckte aus F Montfaucon, nämlich ἐποίησα ἃ μὲν

40—43 das kursiv Gedruckte fehlt in F

43 ἀδουλὴν F, in dem der Accent jetzt radiert ist

43 αδουλι von R[c] in αδουλη geändert

44 ἄρεϊ F

44 ποσειδῶνι F

44 ο von πλοϊζομένων in F auf Rasur: war wohl einst ω

44 ἀθροίσας F

45 ὑφ᾽ F

45 καθίσασ F

46 ἄρεϊ F

46 ἔτι auch F[1]: ἔτει F[2], in dem ει auf Rasur steht

47 εἰκοστῷ ἑβδόμῳ F (ohne ι adscr), wo ἑβδόμῳ alt auf Rasur

Ich heiße nunmehr die Inschrift in der Gestalt wiederholen, in der sie modernen Gelehrten, die wenigstens noch ein griechisches Wörterbuch zu benutzen verstehn, verständlich sein wird.

A 1 *μεθ' ἃ ἀνδρειώσας,*

2 *τὰ μὲν ἔγγιστα τοῦ βασιλείου μου ἔθνη εἰρηνεύεσθαι κελεύσας,*

3 *ἐπολέμησα, καὶ ὑπέταξα μάχαις, τὰ ὑπογεγραμμένα ἔθνη.*

1 *Γάζη*[a] *ἔθνη ἐπολέμησα.*

2 *ἔπειτα Αγαμε καὶ Σιγυηνε*[b] *νικήσας, τὴν ἡμίσειαν πάντων τῶν παρ' αὐτοῖς καὶ αὐτῶν ἐμερισάμην.*

3 *Αυα καὶ Ζιγγαβηνε καὶ Αγγαβε*[c] *καὶ Τιαμα*[d] *καὶ Αθαγαους καὶ Καλαα καὶ Σαμινε, ἔθνος πέραν τοῦ Νείλου ἐν δυσβάτοις καὶ χιονώδεσι ὄρεσι οἰκοῦντας, ἐν οἷς διὰ παντὸς νιφετοὶ καὶ κρύη καὶ χιόνες βαθεῖαι, ὡς μέχρι γονάτων καταδύειν τὸν ἄνδρα, τὸν ποταμὸν διαβὰς ὑπέταξα.*

4 *ἔπειτα Λασινε*[e] *καὶ Ζαα καὶ Γαβαλα, οἰκοῦντας παρ' ὄρεει θερμῶν ὑδάτων βλύοντι καὶ καταρύτῳ,*

5 *Αταλμω καὶ Βεγα καὶ τὰ σὺν αὐτοῖς ἔθνη πάντα.*

6 *Ταγγαϊτῶν τὰ μέχρι τῶν τῆς Αἰγύπτου ὁρίων οἰκοῦντας ὑποτάξας, πεζεύεσθαι ἐποίησα τὴν ὁδὸν ἀπὸ τῶν τῆς βασιλείας τόπων μέχρι Αἰγύπτου.*

7 *ἔπειτα Αννινε*[f] *καὶ Μετινε ἐν ἀποκρήμνοις οἰκοῦντας ὄρεσι.*

8 *Σεσεα ἔθνος ἐπολέμησα, οὓς καὶ μέγιστον καὶ δυσβατώτατον ὄρος ἀνελθόντας περιφρουρήσας κατήγαγον, καὶ ἐπελεξάμην ἐμαυτῷ τούς τε νέους αὐτῶν καὶ γυναῖκας καὶ παῖδας καὶ παρθένους καὶ πᾶσαν τὴν ὑπάρχουσαν αὐτοῖς κτῆσιν.*

9 *Ραυσων*[g] *ἔθνη, μεσόγεια λιβανωτοφόρων βαρβάρων οἰκοῦντα ἐντὸς πεδίων μεγάλων ἀνύδρων, καὶ Σολατε*[h] *ἔθνος ὑπέταξα, οἷς καὶ τοὺς αἰγιαλοὺς τῆς θαλάσσης φυλάσσειν ἐκέλευσα*[i].

---

a Γάζη λέγει τοὺς Ἀξωμίτας· ἄχρι γὰρ καὶ νῦν Ἀγάζη αὐτοὺς ὀνομάζουσι. Der Scholiast weiß sich also der Zeit nach von dem schreibenden Könige unterschieden. Cosmas selbst glaubte Sätze des Ptolemaeus Euergetes zu lesen. Ag:âzî, Dillmann WB 1189

b das Scholion zu Σιγυηνε ist (wenigstens von mir) nicht herstellbar: siehe oben

c τὰ ἐγγὺς Ἀδούλεως λέγει ἔθνη τῶν Τιγρητανῶν

d Τιαμα τοὺς λεγομένους Τζιαμῶ καὶ τοὺς Γαμβελὰ καὶ τὰ ἐγγὺς αὐτῶν λέγει ἔθνη τὰ πέραν τοῦ Νείλου. Aethiopisch geschrieben Çeyâm auf der Inschrift von Aksûm: Dillmann, die Anfänge des axumitischen Reichs 196. ظفار räth mir, Genesis 10_{30} טפר herzustellen, Mittheilungen 2 26

e ταῦτα τὰ ἔθνη ἕως τῆς σήμερον οὕτω καλοῦνται

f ἔτι καὶ νῦν ταῦτα τὰ ἔθνη οὕτω καλοῦνται

g τὰ τῆς Βαρβαρίας ἔθνη λέγει

h Σωλάτε γὰρ τοὺς κατὰ τὴν Βαρβαρίαν Τιγρῆτας τοὺς παραλίους λέγει F. Rs Glosse sehe man oben im Texte: sie ist zum Theil unleserlich, aber auch sie sucht ihre Σολατε in der Βαρβαρία

i μέχρι τοῦ νῦν ὅλοι οἱ Τιγρῆται τὰ παράλια οἰκοῦσι μέρη ἀπὸ Ἀδούλεως μέχρι τῶν τῆς Βαρβαρίας τόπων

4 *ταῦτα δὲ πάντα τὰ ἔθνη ὄρεσι ἰσχυροῖς πεφρουρημένα αὐτὸς ἐγὼ ἐν ταῖς μάχαις παρὼν νικήσας καὶ ὑποτάξας, ἐχαρισάμην αὐτοῖς πάσας τὰς χώρας ἐπὶ φόροις.*

5 *ἄλλα δὲ πλεῖστα ἔθνη ἑκόντα ὑπετάγη μοι ἐπὶ φόροις.*

B *Καὶ πέραν δὲ τῆς ἐρυθρᾶς θαλάσσης οἰκοῦντας Ἀραβίτας*[k] *καὶ Κιναιδοκολπίτας στράτευμα ναυτικὸν καὶ πεζικὸν διαπεμψάμενος, καὶ ὑποτάξας αὐτῶν τοὺς βασιλέας, φόρους τῆς γῆς τελεῖν ἐκέλευσα, καὶ ὁδεύεσθαι μετ' εἰρήνης καὶ πλέεσθαι ἀπό τε Λευκῆς κώμης*[l] *ἕως τῶν Σαβαίων*[m] *χώρας ἐπολέμησα.*

C *Πάντα δὲ ταῦτα τὰ ἔθνη πρῶτος καὶ μόνος βασιλέων τῶν πρὸ ἐμοῦ ὑπέταξα δι' ἣν ἔχω πρὸς τὸν μέγιστον θεόν μου Ἄρην εὐχαριστίαν, ὅς με καὶ ἐγέννησε, δι' οὗ πάντα τὰ ἔθνη τὰ ὁμοροῦντα τῇ ἐμῇ γῇ ἀπὸ μὲν ἀνατολῆς μέχρι τῆς λιβανωτοφόρου, ἀπὸ δὲ δύσεως μέχρι τῶν τῆς Αἰθιοπίας καὶ Σάσου*[n] *τόπων ὑπ' ἐμαυτὸν ἐποίησα, ἃ μὲν αὐτὸς ἐγὼ ἐλθὼν καὶ νικήσας, ἃ δὲ διαπεμπόμενος.*

D *Καὶ ἐν εἰρήνῃ καταστήσας πάντα τὸν ὑπ' ἐμοὶ κόσμον, κατῆλθον εἰς τὴν Αδουλι, τῷ Διῒ καὶ τῷ Ἄρεει καὶ τῷ Ποσειδῶνι θυσιάσαι ὑπὲρ τῶν πλωϊζομένων.*

ἀθροίσας δέ μου τὰ στρατεύματα καὶ ὑφ' ἓν ποιήσας ἐπὶ τούτῳ τῷ τόπῳ, καθίσας τόνδε τὸν δίφρον παραθήκην τῷ Ἄρεει ἐποίησα

ἔτει τῆς ἐμῆς βασιλείας κζ.

---

k Ἀραβίτας ἐνταῦθα τοὺς Ὁμηρίτας καλεῖ, καὶ Κιναιδοκολπίτας τοὺς παρ' ἄλλοις Ἀδανίτας καλουμένους F. Ἀραβίτας καὶ Κιναιδοκολπίτας τοὺς εἰς τὸν Ὁμηρίτην σημαίνει, τοῦτ' ἐστὶ τοὺς ἐν τῇ εὐδαίμονι Ἀραβίᾳ R

l λευκὴν κώμην καλεῖ τὸ λεγόμενον Λευ**** ἐπὶ τὰ μέρη τῶν Βλεμμύων ὃν παρὰ θάλασσαν F. Da die Blemmyer ohne Frage in Afrika wohnen, und Ḥaurâ ohne Frage in Arabien liegt, kann der Satz des Scholiasten nur bedeuten, Ḥaurâ liege der Stelle der africanischen Küste gegenüber, an der die Blemmyer sitzen. Εἰς τὰ μέρη τῶν Βλεμμύων ἐστὶν κώμη καλουμένη τὸ Λευκογην R

m Σαβαίων χώρα πάλιν εἰς τὸν Ὁμηρίτην ἐστίν R. über F siehe zu Zeile 31

n ἡ Σάσου χώρα ὑστάτη ἐστὶν τῶν Αἰθιόπων, ἔνθα καὶ πολὺ χρυσίον ἐστὶν τὸ λεγόμενον ταγχαρας. ἐπέκεινα δὲ ταύτης ὁ ὠκεανὸς παράκειται, ὥσπερ καὶ τῶν Βαρβαρεωτῶν τῶν καὶ τὸν λίβανον ἐμπορευομένων R. F Σάσου καὶ λιβανωτοφόρον καλεῖ τὰς τῶν Αἰθιόπων χώρας. καὶ τὴν μὲν Σάσου εἰς νότον καὶ δύσιν κειμένην, τὴν δε Βαρβαρίαν εἰς νότον καὶ ἀνατολὴν κειμένην. Βαρβαρία δὲ ἐστὶν ἡ τὸν λίβανον ποιοῦσα γῆ. ἡ δὲ Σάσου χώρα ὑστάτη ἐστὶ τῶν Αἰθιόπων, ἔνθα καὶ πολὺ χρυσίον ἐστὶ τὸ λεγόμενον ταγχαρας. ἐπέκεινα δὲ ταύτης ὁ ὠκεανὸς παράκειται, ὥσπερ καὶ τῶν Βαρβαρεώτων τῶν τὸν λίβανον ἐμπορευομένων. Ueber ταγχαρας vergleiche man was ich 1856 aus MVdeLaCrozes armenischem Wörterbuche in meinen Reliquiae iuris ecclesiastici antiquissimi graece ix x mitgetheilt und selbst gesammelt habe, ferner meine 1866 erschienenen gesammelten Abhandlungen 227_{18} ff., CHaeberlins Schrift de carminibus Graecorum figuratis und die eben erschienenen Nachträge zu derselben im Philologus von 1890 Seite 279 wegen der dort gegebenen Nachweise. ADillmann, über die Anfänge des axumitischen Reichs 200, hätte ausschreiben sollen, was er aus Cosmas [139^4] citiert χρυσίον ὡς θέρμια τὸ λεγόμενον ταγχάραν [Accusativ].

Der Barbarenfürst hat seine Inschrift, wie man nunmehr wohl zugeben wird, gut disponiert. Da manche Zeitgenossen die Disposition bisher noch nicht begriffen haben, wird es nützlich sein, außer durch die durch die Art meines Satzes gegebenen Hülfsmittel noch durch »adminiculierendes Beiwerk« den Gedanken des afrikanischen Königs Verständnis zu schaffen.

Wenn bei B mit καὶ — δὲ Arabien auftritt, so ist vor B von Arabien nicht die Rede. Folglich wohnen alle in A vorkommenden Völker in Africa. In C nennt unser König zuerst die von Osten bis zum Weihrauchlande, dann die vom Westen bis nach Aethiopien und dem Lande Σάσου an sein Stammgebiet grenzenden Völker. Da ich nicht weiß, wie weit seine Majestät Griechisch verstanden hat, möchte ich aus der von ihr zweimal angewandten Phrase ἀπὸ—μέχρι nichts schließen. Hier werden die Geographen uns das Griechische verstehn lehren müssen, nicht wird das Griechische der Inschrift Aufschluß über Probleme der Geographie geben. Der Usurpator gieng vom Binnenlande aus. Die λιβανωτοφόροι βάρβαροι, von denen die Inschrift redet, wohnten in Africa: Kenner der Pflanzengeographie und der Botanik müssen sagen wo dort die Weihrauchstaude vorkommt: dann werden wir auch wissen wo die A 3₉ genannten Ραυσοι gewohnt haben. Ich habe zu meiner Belehrung nur AErmans »Aegypten und aegyptisches Leben« 659 ff., Jacob Kralls Schrift über das Land Punt (Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften, historisch-philologische Klasse 1890) und JLiebleins Aufsatz »der Handel des Landes Pun« ZAegSpr **24** 7 ff. zur Verfügung: HBrugsch ebenda **20** 33.

Durch das Land der Ταγγαῖται hindurch sicherte sich der König eine von seinem Stammgebiete nach Aegypten führende Karawanenstraße, auf der man [durch Neger] Lasten tragen lassen konnte (A 3₆): er sicherte den Waaren in Arabien von Λευκὴ κώμη = alḤaurâ (bei dem die Ἀραβῖται gesucht werden müssen) bis Adan (wo nach der Glosse und nach dem Zusammenhange die Κιναιδοκολπῖται zu suchen sind) den Durchzug, und sicherte ihnen Fahrt auf dem mit dem Landwege parallel laufenden Meerwege.

Γάζη sind Ἀξωμῖται: daraus folgt mir, daß der Redende, der sie bekriegt, nicht zu ihnen gehörte, nicht in Aksum von Anfang an zu Hause war. Er mag ein Condottiere gewesen sein, der sich Aksums bemächtigte, und von da aus sich die Nachbaren dienstbar machte, so weit es für seine Pläne nöthig schien. Er behandelte die verschiedenen Völker verschieden.

Und die Zeit der Inschrift?

Hätte Deutschland nicht versäumt, zur rechten Stunde gegen Rußland Krieg zu führen, so würde England die sich ihm in Africa bietende Gelegenheit, für das auf alle Fälle einmal irgendwie ihm verloren gehende Indien Ersatz zu finden, nicht gegen Deutschland, Frankreich und Italien habe benutzen können. Indien wäre ihm dann auch kaum bedroht gewesen. Die Analogie ist schlagend. Unser Africaner wird durch die Lage der zwischen Parthern (oder aber Persern) und Römern schwebenden Politik in den Stand gesetzt worden sein, sich am rothen Meere einen Handelsstaat zu gründen, der dies Meer bis Bâb almandab schließen konnte. Er war also ein Feind der Römer, aber kein offener, da er mit Aegypten handelte: er hatte sich durch seine Politik die Möglichkeit geschaffen, den von Clysma und Aelana ausgehenden Handel Roms lahm zu legen. Er that das vermuthlich ohne darüber zu reden daß er es that. Sein Ἄρης ist der in meinen Mittheilungen 1 108r vorgestellte persische Vеретрагна = Bahrâm = Maḥram. Persien und Rom müssen beide gehindert gewesen sein, in Erythraea sich unnütz zu machen, als dieser Usurpator sein Reich gründete.

Βαρβαρία ist, was ausdrücklich zu sagen angezeigt scheint, nach Ptolemaeus (Αἰθιοπίας τῆς ὑπὸ Αἴγυπτον θέσις) zu verstehn: Μόσυλοι ὑπὲρ τὸ ὁμώνυμον ἄκρον καὶ ἐμπόριον· ἡ δὲ ἐντεῦθεν μέχρι τοῦ Ραπτοῦ ποταμοῦ παράλιος πᾶσα, Βαρβαρία μὲν ἡ παράλιος, Ἀζανία δὲ ἡ ἐνδοτέρω, ἐν ῇ πλεῖστοι ἐλέφαντες. Der Periplus und Cosmas 138 ff. lehren mehr. Barbara Yâqût 1 543 $_9$ ff., und die Quellen Yâqûts.

Das ε am Ende vieler Namen sehe ich wie ը am Ende neu-Armenischer Wörter, wie das endende ь ъ der slavischen Sprachen, als Rest eines volleren Vokals an. Daß Αθαγαους ein griechischer Accusativ ist, scheint bestreitbar. ⲉⲑⲁⲅϣ gäbe die Form her, in der γ für *w* eingetreten wäre: daß Αἰθίοπες neben Αθαγαους vorkommt, beweist für besonnene Forscher nicht gegen meine Vermuthung. Auf die Τιγρῆται der Noten, die zur Zeit unseres Königs wo anders wohnen als später, mache ich besonders aufmerksam.

Ueber das Wort gébhîm Regnorum γ 6 $_9$.

Als ich jüngst in Rom war, gieng in meinem Kreise außer über Anderes auch über die Kuppel des Pantheon die Rede hin und wieder. Ein verstorbener Genosse römischer Tage, Henri Jordan, hatte 1885 am Pantheon untersucht: ein Oesterreicher war unlängst weiter als Er gekommen. Ich erwähnte, daß ich ein Kuppel bedeutendes Wort im alten Testamente gefunden. Ueber den Fund soll ich ausführlicher berichten als bisher (armenische Studien § 499, Orientalia 2 8_9, Mittheilungen 1 211 ff., Uebersicht 155^r — von 1877 bis 1889) geschehen war.

Vorerst die sogenannte Ueberlieferung.

ℌ וַיִּסְפֹּן אֶת־הַבַּיִת גֵּבִים וּשְׂדֵרֹת בָּאֲרָזִים.

𝔊 καὶ ἐκοιλοστάθμησεν τὸν οἶκον κέδροις, ohne Variante, da As Zusatz φώτνώσεσιν (Andere φωτνώμασιν) καὶ διατάξεσιν in BS 198_{27} unter ⋇ steht, also erst aus ℌ nachgetragen ist.

𝔗^r וטליל ית ביתא בהנתוכין ועילא מינהון סידרא דריכפת רישי שרית ארזיא, was die Londoner Polyglotte »et operuit domum trabibus cavis, et supra illis erat ordo multiplex capitum tignorum cedrinorum« übersetzt. Nathan hat für הנתוכין keine Erklärung: Buxtorf leistet 626 cantherii, trabes, tigna .... trabes leviter incurvae et fornicatae. Levy^1 1 203 kanalartige^{so}, gehöhlte^{so} Balken. Beide ohne Beweis. הנתוך könnte persisch sein, und zu توختن und دوختن und اندوختن gehören: von tuč würde *hantôka = *हंतोक regelrecht gebildet werden, und Vernähung = Verzapfung, aber auch sehr vieles Andere, bedeuten können: zur Wurzel توجش = tôǧiš, Symmicta 2 14. Das ist natürlich nur eine Vermuthung. 𝔗 hat גְּבִים zu verstehn gemeint, was nicht gegen mich, er hat zur Uebersetzung eine eranische[?] Vokabel gebraucht, was in soferne für mich spricht als es lehrt, daß die Eranier in der Baukunst wenigstens in gewissen Punkten Lehrer der Semiten gewesen sind. Nicht gegen mich, da ja aus הנתוכין nichts darüber folgt, daß 𝔗 gerade גבים gelesen hat.

𝔖 ܘܛܠܠܗ. ܒܟܠܝܠܐ ܓܘܦ̈ܐ ܢܣܝܪ̈ܬܐ ܕܐܪ̈ܙܐ. Dies Wort bespricht PSmith 670 ff., indem er aus »Bar Ali« und Bar Bahlûl verschiedene Erklärungen beibringt: unter diesen leuchtet ihm دفاف منشورة am meisten ein. Mir nicht. Erstens nicht, weil nicht abzusehen ist, wie ܓܘܦ̈ܐ zu der Bedeutung Bretter hat kommen sollen. Zweitens nicht, weil die Bretter gesägte zu nennen wenig bezeichnet hätte. Drittens nicht, weil man die Decke eines Tempels doch kaum bloß aus »Brettern« herstellen wird. Ich greife also auf »Bar Ali«s ܣܘܣ̈ܠܐ ܕܓܘܦ̈ܐ ܡܠܘܬܐ ܦܣ̈ܝܣܬܐ, zumal گنبذ der Perser jenes ܓܘܦ̈ܐ bestätigt.

Mir ist nicht zweifelhaft — des Aggaeus 1_4 בָּתֵּיכֶם סְפוּנִים = οἴκος κοιλόσταθμος = տուն զմբեթեայ beweist es mir —, daß ℌ nichts als וַיִּסְפֹּן אֶת־הַבַּיִת בָּאֲרָזִים gehabt, und daß 𝔊 καὶ ἐκοιλοστάθμησεν τὸν οἶκον κέδροις übersetzt, daß dann eine Glosse jenes וַיִּסְפֹּן durch גְּבָדִים וּשְׂדֵרֹת erklärt, daß 𝔊^c [Aκ?] dies durch φατνώμασιν καὶ διατάξεσιν wiedergegeben hat, während 𝔖𝔗 schon die Glosse im Texte fanden, und daher, so gut sie vermochten, von Hause aus übersetzten.

גִּבֵּד = كُنْبد = գմբեթ würde also immerhin im alten Testamente vorkommen, aber in einer Glosse unbekannter Zeit. Falls κοιλοσταθμεῖν wölben bedeutet, würde סָפַן (vergleiche סְפִינָה die κοιλὴ ναῦς) genügen, um Wölbungen, nicht aber, um Kuppelbauten, auch in den guten Zeiten der israelitischen Nation deren Baumeistern bekannt zu glauben. Was ein werthvolles Ergebnis der Untersuchung nicht ist.

Wie sich das arabische جنبذ zu جنابث verhält, wird nur untersuchen dürfen, wer in arabischen Texten belesener ist als ich.

Der Fluß Orontes.

In der Zeitschrift für aegyptische Sprache und Alterthumskunde 27 39 ff. hat Adolf Erman unlängst (1889) den »syrischen Feldzug Amenophis des Zweiten« besprochen. Die Stele von Amada, auf der von diesem Feldzuge gehandelt wird, berichtet, der König sei über die mšdt von ʾirnṯ gesetzt. So, nicht ʾirsṯ, lesen Brugsch und Maspero. Diese beiden Gelehrten deuten ʾirnṯ als Orontes, und Erman nennt diese Vermuthung »gewis richtig«.

Der Orontes, um den es sich hier handelt, ist der عاصى, der Widerspenstige, der aus Trotz nicht den nächsten, sondern den weitesten Weg in die See laufende Fluß Coelesyriens. Er ergießt sich nördlich von Laodicea in das Meer, Socin[2] 456. Wie dieser Fluß in ältester Zeit geheißen hat, weiß man nicht sicher: den Namen ʾΟρόντης trug er [ἀπὸ] τοῦ γεφυρώσαντος αὐτὸν ʾΟρόντου, καλούμενος πρότερον Τυφών, nach Strabo ις 2_7 = 750 Casaubon. Ausführlich handelte über ʾΟρόντης EBurnouf commentaire sur le Yaçna 248 ff. Add. 181: später (LDindorf zu Stephanus s. v.) ʾΟρέντης. اروند noch bei Firdôsî der Tigris in seinem oberen Laufe.

Es wird also entweder die DoppelNachricht Strabos (und seiner von Burnouf citierten Genossen) als irrig nachzuweisen, oder aber die Deutung jenes Irnṯ durch ʾΟρόντης aufzugeben sein.

Die Stichometrie der syrisch-hexaplarischen Uebersetzung des alten Testaments.

Da ThBirt in seiner Arbeit über das antike Buchwesen [mein Specimen psalterii graeci 8[2]] die Stichometrie der Bibel nicht mit der gehörigen Sorgfalt behandelt hat, lege ich hier aus dem ersten Bande meiner Bibliotheca syriaca eine Probe derselben vor, und bin unter Umständen bereit, mehr mitzutheilen.

Schon vor fast einem Vierteljahrhundert hatte AMCeriani in seinen monumenta sacra et profana die syrisch-hexaplarische Uebersetzung der Genesis und eines Theils des Exodus, soweit beide erhalten sind, herausgegeben: ich veröffentlichte 1880 veteris testamenti ab Origene recensiti fragmenta apud Syros servata quinque, ein Buch, das für wirkliche, d. h. das Ethos mehr als das Dogma und die Partei schätzende Theologen allein schon um der Nöthe willen beachtenswerth war, unter denen es an das Licht getreten ist (siehe die Vorrede, und auch die Citate Mittheilungen **3** 80), das aber von den Mitgliedern der ersten Facultät selbstverständlich gar nicht beachtet, von einem berühmten Mitgliede einer vierten Facultät wegen seines hebräischen Kleides (ich hatte keine syrische Schrift zur Verfügung) mit Spott verfolgt worden ist. Herr Birt ist, wie die Sachen liegen, entschuldigt, daß er von ihm nichts erfahren hat.

Ich lese vom Rande meiner Bibliotheca Syriaca, deren erster Band vor dem October 1891 nicht wird ausgegeben werden können, die Stichennotierung ab, die von den syrischen Schreibern nicht zu Worten, sondern zu Zeilen, und auch das nur ungefähr genau, zugesetzt, von mir aber stets zu einem Sinnanfange bezogen worden ist. Die Syrer reden von ܦܬܓܡ̈ܐ = ἔπη, nicht von στίχοι.

Genesis	300:	Genesis 5_{9}	καὶ ἔζησεν:	BS 34_{6}
	400:	5_{21}	σὺ δὲ λήψῃ:	35_{21}
	500:	8_{16}	ἔξελθε:	37_{2}
		Lücken in der Handschrift		
	1400:	32_{1}	καὶ Ἰακὼβ:	39_{13}

Das Ende der Genesis, unvollständig erhalten, enthält zufälliger Weise gerade die Stellen nicht, auf welche die Stichennotierung getroffen hatte.

Exodus	100:	Exodus 2_{16}	παραγενόμεναι:	52_{3}
	200:	4_{3}	καὶ εἶπεν:	53_{18}
	300:	5_{5}	καὶ εἶπεν:	54_{32}
	400:	6_{20}	καὶ ἔλαβεν:	56_{12}
	500:	ungefähr 7_{28}:		57_{23}
	600:	9_{1}	εἶπεν δὲ:	59_{7}
	700:	10_{3}	εἰσῆλθεν δὲ:	61_{2}
	800:	11_{4}	καὶ εἶπεν:	62_{14}
	900:	12_{28}	καὶ ἀπελθόντες:	63_{33}
	1000 vom Schreiber nicht angemerkt			
	1100:	14_{24}	καὶ ἐπέβλεψεν:	66_{29}
	1200:	16_{2}	διεγόγγυζον:	68_{6}
	1300:	16_{36}	τὸ δὲ γομορ:	69_{23}
	1400:	18_{19}	νῦν οὖν:	71_{4}

Exodus	1500:	Exodus	20_{5}	ἐγὼ γὰρ:	BS 72_{26}
	1600:		21_{20}	ἐὰν δέ τις:	75_{1}
	1700:		22_{22}	καὶ κεκράξαντες:	76_{16}
	1800:		23_{31}	καὶ θήσω:	77_{30}
	1900:		25_{20}	συσκιάζοντες:	79_{10}
	2000:		26_{19}	δύο βάσεις:	80_{24}
	2100:		28_{1}	καὶ σὺ:	82_{7}
	2200:		28_{42}	καὶ ποιήσεις:	83_{30}
	2300:		29_{31}	καὶ τὸν κριὸν:	85_{3}
	2400:		30_{22}	καὶ ἐλάλησεν:	86_{17}
	2500:		32_{7}	καὶ ἐλάλησεν:	87_{32}
	2600 2700 vom Schreiber nicht angemerkt				
	2800:		35_{20}	καὶ ἐξῆλθεν:	92_{12}
	2900:		36_{20}		93_{33}
	3000:		37_{19}		95_{13}
	3100:		38_{27}	καὶ ἐγενήθη:	96_{23}
	3200:		39_{32}		97_{33}
	3300:		40_{32}		99_{10}
Numeri	100:	Numeri	1_{38}	πάντα ἀρσενικὰ:	99_{31}
	200:		2_{28}	δύναμις:	100_{38}
	300:		3_{33}	οὗτοι:	101_{30}
	Lücke in der Handschrift				
	1000:		10_{6}	ungefähr:	102_{32}
	1100:		11_{10}	καὶ ἤκουσε:	104_{5}
	1200:		12_{8}	στόμα κατὰ:	105_{15}
	1300:		14_{1}	καὶ ἀναλαβοῦσα:	106_{28}
	1400:		14_{36}	καὶ οἱ ἄνθρωποι:	108_{6}
	1500 1600 werden in eine Lücke der Hds. fallen				
	1700:		18_{1}	καὶ σὺ καὶ οἱ:	111_{18}
	1800:		19_{1}	καὶ ἐλάλησεν:	112_{29}
	1900:		20_{6}	καὶ ὤφθη:	113_{32}
	2000:		21_{15}	καὶ τοὺς χειμάρρους:	115_{17}
	2100:		22_{15}	ungefähr:	117_{2}
	2200 wird in eine Lücke der Hds. fallen				
	2300:		24_{20}	καὶ ἰδὼν:	119_{25}
Iosue	100 wird in eine Lücke der Hds. fallen				
	200:		4_{4}	καὶ ἀνακαλεσάμενος:	123_{11}
	300:		5_{11}	καὶ ἐφάγοσαν:	126_{6}
	400:		6_{27}	καὶ ἦν κύριος:	128_{7}
	500:		8_{3}	καὶ ἀνέστη:	129_{22}
	600:		8_{30}	τότε ᾠκοδόμησαν:	131_{18}
	700:		10_{1}	Ueberschrift:	134_{7}

Iosue	800 [codex 900]:	Iosue 10_{29}	καὶ ἀπῆλθον:	BS 135_{17}
	900:	11_{17}	καὶ ἕως Βααλγαδ:	138_{1}
	1000:	13_{9}	ἀπὸ Αρωηρ:	140_{3}
	1100:	14_{12}	ἐὰν οὖν:	142_{12}
	1200:	15_{45}	Ἀκκαρὼν:	144_{17}
	1300:	17_{12}	καὶ οὐκ:	147_{2}
	1400:	19_{1}	καὶ ἐξῆλθεν:	149_{8}
	1500:	19_{51}	καὶ ἐπορεύθησαν:	152_{2}
	1600:	21_{32}	καὶ ἐκ τῆς φυλῆς:	154_{3}
	1700:	22_{13}	καὶ ἀπέστειλαν:	155_{23}
	1800:	23_{3}	ὅτι κύριος:	157_{18}
	1900:	24_{14}	καὶ νῦν φοβήθητε:	159_{14}
	2000:	24_{29}	etwa	160_{13}
Iudices	100 wird in eine Lücke der Hds. fallen			
	200:	2_{20}	ἀνθ᾽ ὧν ὅσα:	163_{13}
	300:	3_{30}	καὶ ἐνετράπη:	164_{24}
	400:	5_{4}	κύριε ἐν τῇ ἐξόδῳ:	165_{31}
	500:	6_{7}	καὶ ἐγένετο ὡς:	167_{10}
	600:	6_{38}	καὶ ἐγένετο οὕτως:	168_{25}
	700:	7_{23}	καὶ ἐβόησαν:	169_{33}
	800:	8_{27}	καὶ ἐποίησεν:	171_{3}
	900:	9_{23}	καὶ ἐξαπέστειλεν:	172_{5}
	1000:	9_{52}	anderes καὶ ἤγγισεν:	173_{10}
	1100 vom Schreiber nicht angemerkt			
	1200:	12_{2}	καὶ οἱ υἱοὶ Ἀμμὼν:	175_{34}
	1300:	13_{20}	καὶ Μανωε:	177_{10}
	1400 1500 vom Schreiber nicht angemerkt			
	1600:	16_{31}	καὶ κατέβησαν:	180_{22}
	1700:	18_{18}	τί ὑμεῖς:	181_{36}
	1800:	19_{9}	καὶ ὀρθριεῖτε:	182_{36}
	1900:	20_{7}	δότε:	184_{8}
	2000:	20_{40}	καὶ ἐπέβλεψεν:	185_{18}
	2100:	21_{24}	ἀνὴρ:	186_{25}
Ruth	100:	Ruth 2_{10}	καὶ ἔπεσεν:	188_{8}

Σεισαρα

wird in den Hdss. entweder σεισάρα, oder (k) σεισαρά betont. Das Letztere ist das Richtige. Wenn der Ton auf der Letzten lag, mußte der Vokal der offenen Vorletzten vor betonter Letzter regelrecht halbiert werden. So entstand das סִיסְרָא der Tiberienser.

Zu Daṇḍin's Kâvyâdarça III, 150.

Von

F. Kielhorn.

Während des Druckes seiner Uebersetzung des Kâvyâdarça fragte mich von Böhtlingk nach der Bedeutung des vom indischen Commentator zu den Versen III, 150 und 151 citierten Satzes „karmâdi-vishaye 'py=avivakshite karmâdau sambandha-vivakshâyâm shashṭhî". Was ich dem verehrten Gelehrten damals antwortete, hat er in einer Anmerkung mitgetheilt. Seitdem habe ich Gelegenheit gehabt Daṇḍin's Werk wieder einmal sorgfältiger zu lesen, und habe gefunden, daß der Commentator seinen Autor an der bezeichneten Stelle nicht verstanden, und auch von Böhtlingk irre geführt hat.

Die beiden Verse, um die es sich handelt, lauten mit von Böhtlingk's Uebersetzung: —

Dakshiṇâdrer=upasaran=mârutaç=chûta-pâdapân |
kurute lalitâdhûta-prabâlâṅkura-çobhinaḥ || 150 ||
Ityâdi çâstra-mâhâtmya-darçan-âlasa-chetasâm |
apabhâshaṇavad=bhâti na cha saubhâgyam=ujjhati || 151 ||

150. „Der an das Malaja-Gebirge herankommende Wind macht, daß die Mangobäume mit ihren leise bewegten jungen Sprossen prangen".

151. Dieses und Aehnliches erscheint denjenigen, deren Geist zu träge ist die würdevollen Lehrbücher einzusehen, als fehlerhafte Sprache, bleibt aber trotzdem reizend.

Der Sinn des zweiten Verses ist klar. Leuten, die keine gründliche Kenntniß der Grammatik besitzen, mag Etwas fehlerhaft erscheinen, das in Wahrheit nicht nur correct ist, sondern dem Ausdrucke sogar einen besonderen Reiz verleiht. Ein Beispiel hierfür soll der erste Vers enthalten. Nach dem Commentare und der Uebersetzung wäre der Fehler, den der Vers enthält, der, daß der Dichter statt des zu erwartenden Accusativs *dakshiṇâdrim* den Genetiv *dakshiṇâdreḥ* gebraucht hätte. Der Fehler wäre aber nur ein scheinbarer, weil sich auch der Genetiv durch das Maxim der Grammatiker karmâdînâm=api sambandhamâtra-vivakshâyâm shashṭhy=eva erklären ließe.

Betrachten wir den Vers näher, so muß uns zunächst auffallen, daß der Dichter von dem an das Malaya-Gebirge herankommenden Winde reden soll. Denn gewöhnlich ist es der von

Süden kommende Wind, der im Frühlinge die Mangobäume sprossen macht; und hätten wir den Commentar nicht, so würden wir auch hier ohne Weiteres „der vom Malaya-Gebirge kommende Wind" übersetzen. Angenommen aber, Daṇḍin hätte wirklich den Genetiv statt des Accusativs gebraucht, so würden wir doch vergeblich nach dem besonderen Reize suchen, den der Genetiv an Stelle des Accusativs dem Verse verleihen sollte. Und endlich möchte ich behaupten, daß kein respectabler Grammatiker Indiens einen auf die Frage Wohin? gebrauchten Genetiv durch den vom Commentator citierten Satz rechtfertigen würde. Man mag über die indische Grammatik denken wie man will; sicher ist, daß der indische Grammatiker auch mit seinen Kunstgriffen nur den çishṭaprayoga zu erklären sucht. Der Satz karmâdînâm=avivakshâ çeshaḥ würde demnach zwar für den Genetiv *mâshâṇâm* in *mâshâṇâm=açnîyât* gelten[1]), weil der Gebildete wirklich so sagt; aber nicht für *adrêr=upasarati* „er kommt an den Berg heran", denn Niemand bedient sich auf die Frage Wohin? des Genetivs. Die Erklärung des Commentators ist also in jeder Hinsicht unhaltbar.

In Wirklichkeit liegt der scheinbare Fehler des ersten Verses in dem Worte *upasaran*, und gerade der Gebrauch dieses Wortes mußte dem gebildeten Leser reizend erscheinen. Pâṇini lehrt in VII, 3, 78, daß die Wurzel *sṛi* ihre Specialtempora von *dhau* bildet. Für den, der nur die Regeln der Ashṭâdhyâyî kennt, scheint *upasaran* deshalb fehlerhaft gebraucht zu sein statt des richtigen *upadhâvan*. Wer aber Grammatik gründlicher studiert hat, wer z. B. die Kâçikâ-Vṛitti oder die Grammatik des Çâkaṭâyana kennt, weiß, daß *dhau* für *sṛi* nur dann eintritt, wenn von einer schnellen oder stürmischen Bewegung die Rede ist[2]). *Upasaran* ist also grammatisch correct in der Bedeutung „langsam, oder sanft, oder leise herankommend", und die Worte *dakshiṇâdrer=upasaran=mârutaḥ* (wo *dakshiṇâdreḥ* natürlich Ablativ ist) bedeuten „der leise vom Malaya-Gebirge herankommende Wind". Das Ansprechende des Ausdrucks liegt darin, daß der Sinn des in Versen ähnlichen Inhalts gebrauchten Adjectivs *manda*[3]) schon durch das gewählte Verbum bezeichnet wird.

---

1) Vgl. z. B. Sâyaṇa zu Ṛigveda I, 20, 6.

2) Vgl. Kâçikâ-Vṛitti zu P. VII, 3, 78: sarter=vegitâyâṁ gatau dhâv-âdeçam=ichchhanti | anyatra sarati anusarat=îty=êva bhavati | . Çâkaṭâyana hat die Regel sarter=dhau vege; Hemachandra, vege sarter=dhâv, und das Gegenbeispiel priyâm=anusarati. In der Mâdhavîya Dhâtu-vṛitti lesen wir: yad=âyaṁ saratir=vegita-gamane vartate tadâ pâghrâdinâ çit-pratyaye dhâv-âdeçe dhâvat=îtyâdi.

3) Vgl. z. B. Çârṅgadhara's Paddhati 3789, 3791, 3808, 3813, 3816.

Mit Recht benutzt meines Erachtens der indische Commentator den oben erwähnten Satz der Grammatiker zur Erklärung eines Genetivs in Vers II, 149 des Kâvyâdarça, wo von Böhtlingk seinen eignen Weg gegangen ist. Der Vers lautet, mit der gedruckten Uebersetzung: —

Kshaṇaṁ darçana-vighnâya pakshma-spandâya kupyataḥ |
premṇaḥ prayâṇaṁ tvaṁ brûhi mayâ tasy=eshṭam=ishyate ||

„Verkünde, da mir erwünscht ist, was der Zuneigung erwünscht ist, daß diese sich auf die Reise begebe, diese Zuneigung, die schon über das Blinzeln der Augenlider, dieser flüchtigen Störung für's Sehen, zürnt“.

Von Böhtlingk macht hier den Genetiv *premṇaḥ* von *prayâṇam* abhängig. Der Commentator erklärt, der Genetiv stehe an Stelle des Accusativs, abhängig vom Verbum *brûhi*. Welche Erklärung die richtige sei, ist nicht schwer zu entscheiden. Der Vers ist ein Beispiel für den Paravaçâkshepa. Ein Verliebter bittet die Geliebte, ihn zu entlassen; sie, die ganz die Sklavin ihrer Liebe ist und darum selbst Nichts zu erlauben hat, antwortet: „Sag es meiner Liebe, daß Du gehn willst, — der Liebe, die schon dem Blinzeln der Augenlider grollt, wenn es Dich den Blicken einen Moment entzieht; ich will, was sie will“. Es ist klar, daß Daṇḍin hier, statt nach der Regel bruvi-çâsi-guṇena cha yat=sachate das Verbum *brû* mit doppeltem Accusative zu construieren, an Stelle des Accusativs den Genetiv der Person gesetzt hat, — ein Gebrauch, für den sich Beispiele genug beibringen ließen; und der Commentator war zweifellos berechtigt, sich diesen Genetiv durch das von ihm angeführte karmatv-âvivakshâyâṁ saṁbandha-vivakshayâ shashṭhî zu erklären.

Daß übrigens der Commentator selbst in Dingen, die er hätte verstehn sollen, keineswegs unfehlbar ist, mag man z. B. aus seiner Erklärung von I, 43 ersehen, wo er die Worte mâlatî-mâlâ lolâli-kalilâ für ein Beispiel des *çlishṭa* ausgibt, während sie doch von Daṇḍin gerade angeführt werden um zu zeigen, was unter *çithila*, dem Gegentheile von çlishṭa, zu verstehn sei. Die falsche Erklärung des Commentators hat in der Uebersetzung des Verses 44 natürlich die Hinzufügung eines doppelten „auch„ nothwendig gemacht, das sich im Originale nicht findet.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

10. December. № 14. 1890.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 8. November.

Das thermische Potential für verdünnte Lösungen.

Von

Eduard Riecke.

In der folgenden Mittheilung wird zunächst im Anschluß an die Untersuchungen von Planck[1]) das Potential für die Componenten einer verdünnten Lösung berechnet. Es werden sodann die gefundenen Werthe benützt, um die Gesetze der Dampfspannungs-, Gefrierpunkts- und Löslichkeitserniedrigung, der Dissociation in verdünnter Lösung, der Vertheilung eines Stoffes zwischen 2 Lösungsmitteln, das Gesetz des osmotischen Druckes und das Henry-Dalton'sche Gesetz zu ermitteln. Es deckt sich demnach der Inhalt der folgenden Zeilen zu einem Theile mit den Untersuchungen, welche Planck über verdünnte Lösungen angestellt hat; es schien mir aber nicht überflüssig, zu zeigen, wie die betreffenden Beweise auf dem Boden der Potentialtheorie zu führen sind. Daß die analytischen Entwicklungen, wie sie in der Theorie von Planck sich gestalten, jederzeit in die Potentialtheorie übertragen werden

1) Planck, Wied. Ann. Bd. 32. S. 485.

können, ergiebt sich daraus, daß der Unterschied der beiden Theorieen zunächst als ein rein formaler aufgefaßt werden kann. Mit Bezug hierauf möge noch Folgendes bemerkt werden.

Die Theorie von Gibbs geht aus von der Gleichung:

$$d\varepsilon = Td\eta - pdv + \mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2 + \ldots$$

in welcher die Entropie η, das Volumen v, und die Massen m der chemischen Componenten als unabhängige Veränderliche erscheinen; den Uebergang zu den Variabeln p, T, m_1, $m_2 \ldots$ macht Gibbs durch die Einführung der Function $\zeta = \varepsilon - \eta T + pv$, für welche

$$d\zeta = -\eta dT + v\,dp + \mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2 + \ldots$$

und

$$\frac{\partial \zeta}{\partial m_1} = \mu_1, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial m_2} = \mu_2, \ldots$$

Die Funktion ζ ist gleich der von Planck benützten Funktion Φ negativ genommen und multiplicirt mit der absoluten Temperatur. Der Vorzug, welchen die Darstellung von Gibbs besitzt, beruht auf der Einführung des Namens „Potential" für die Differentialquotienten μ, auf der Einfachheit des Ausdruckes, welcher hierdurch für den fundamentalen Satz der Theorie[1]), auf der Uebersichtlichkeit des Schemas, welches für die weiteren Rechnungen gewonnen wird.

I. Potentiale der Componenten eines Gasgemisches.

Der ganze von den Gasen eingenommene Raum sei v; die Massen der einzelnen Gase m_1, m_2, $m_3 \ldots$, ihre Partialdrucke p_1, p_2, $p_3 \ldots$, ihr Gesammtdruck p; bezeichnen wir durch n_1, n_2, $n_3 \ldots$ die Anzahl der Grammmolekeln, welche von den einzelnen Gasen in dem Volumen v enthalten sind, so ergiebt sich für g. und cm. als Einheiten nach dem Boyle-GayLussac'schen Gesetz:

$$vp_1 = 84511\, n_1 T, \quad vp_2 = 84511\, n_2 T, \ldots$$

und

1) $$vp = 84511\,(n_1 + n_2 + n_3 + \ldots)\,T.$$

Verstehen wir unter c_{p1}, c_{v1}, c_{p2}, c_{v2}, ... die specifischen Wärmen

1) Es ist dies der Satz: Zwischen den Phasen eines aus mehreren physikalisch und chemisch verschiedenen Theilen zusammengesetzten Systemes besteht Gleichgewicht, wenn das Potential jeder einzelnen chemischen Componente in allen Phasen je einen und denselben Werth hat.

der einzelnen Componenten, unter R_1, R_2 .. die denselben nach dem Boyle-GayLussac'schen Gesetze entsprechenden Constanten, so sind ihre Potentiale gegeben durch die Ausdrücke

$$\mu_1 = E_1 + T\left\{R_1 \log\frac{m_1}{v} - \mathfrak{A}c_{v1}\log T + \mathfrak{A}c_{p1} - H_1\right\}$$

$$\mu_2 = E_2 + T\left\{R_2 \log\frac{m_2}{v} - \mathfrak{A}c_{v2}\log T + \mathfrak{A}c_{p2} - H_2\right\}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Hier sind die E und H Constante, deren Werthe lediglich von den Normalzuständen der einzelnen Componenten abhängen, $\mathfrak{A}$ das mechanische Aequivalent der Wärme, T die Temperatur.

Setzen wir für v den aus der Gleichung 1 sich ergebenden Werth, so erhalten wir:

$$\mu_1 = E_1 + T\left\{R_1 \log\frac{m_1 p}{84511\,\Sigma n} - \mathfrak{A}c_{p1}\log T + \mathfrak{A}c_{p1} - H_1\right\}$$

oder, wenn wir durch γ_1 das Molekulargewicht der ersten Componente bezeichnen

$$\mu_1 = E_1 + T\left\{\begin{array}{c} R_1 \log\dfrac{\gamma_1 p}{84511} + R_1 \log\dfrac{n_1}{n_1+n_2+n_3+\ldots} \\ -\mathfrak{A}c_{p1}\log T + \mathfrak{A}c_{p1} - H_1. \end{array}\right\}$$

Nun ist $\gamma_1 R_1 = 84511$, und somit

$$\mu_1 = E_1 + T\left\{\begin{array}{c} R_1 \log\dfrac{p}{R_1} - \mathfrak{A}c_{p1}\log T + R_1 \log\dfrac{n_1}{n_1+n_2+n_3+\ldots} \\ +\mathfrak{A}c_{p1} - H_1 \end{array}\right\}. \quad 2)$$

Durch entsprechende Ausdrücke werden die Potentiale der übrigen Componenten dargestellt.

II. Potentiale der Componenten einer verdünnten Lösung.

Nach dem Vorgange von Planck[1]) setzen wir die Energie ε und das Volumen v der Lösung gleich linearen Funktionen der Massen der einzelnen Componenten;

$$\varepsilon = m_1\varepsilon_1 + m_2\varepsilon_2 + m_3\varepsilon_3 + \ldots$$

$$v = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + \ldots$$

1) l. c. S. 486.

Für die Entropie der Lösung ergiebt sich dann ein Ausdruck von der Form

$$\eta = m_1(\eta_1 + k_1) + m_2(\eta_2 + k_2) + \ldots$$

wo die Größen η_1, $\eta_2 \ldots$ nur von p und T, die Integrationskonstanten k_1, $k_2 \ldots$ nur von den Massen m abhängig sind. Nun genügen die Potentiale μ_1, $\mu_2 \ldots$ der einzelnen Componenten der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} m_1 d\mu_1 + m_2 d\mu_2 + \ldots &= v\,dp - \eta\,dT \\ &= m_1(v_1 dp - \eta_1 dT - k_1 dT) \\ &+ m_2(v_2 dp - \eta_2 dT - k_2 dT) \\ &+ \;\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Da diese Gleichung für alle möglichen Werthe von m_1, m_2.. erfüllt sein muß, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} d\mu_1 &= v_1 dp - \eta_1 dT - k_1 dT, \\ d\mu_2 &= v_2 dp - \eta_2 dT - k_2 dT \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und hieraus:

$$\mu_1 = M_1 - k_1 T, \quad \mu_2 = M_2 - k_2 T, \ldots$$

Uebertragen wir die von Planck mit Bezug auf die Entropie geführte Untersuchung auf das Potential, so ergiebt sich, daß das in μ_1 auftretende Glied $-k_1 T$ mit demjenigen Terme des Potentials der gasförmigen Componente übereinstimmen muß, welcher von den Massen, beziehungsweise den Anzahlen der Grammmolekeln abhängig ist. Die Größen k müssen also die Werthe besitzen

$$k_1 = -R_1 \log \frac{n_1}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots}, \quad k_2 = -R_2 \log \frac{n_2}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots}.$$
$$\ldots\ldots$$

Für die Potentiale der einzelnen Componenten der Lösung ergeben sich somit die Gleichungen:

$$\mu_1 = M_1 + R_1 T \log \frac{n_1}{n_1 + n_2 + \ldots}, \quad \mu_2 = M_2 + R_2 T \log \frac{n_2}{n_1 + n_2 + \ldots} \tag{4}$$

in welchen die Größen M_1, M_2, ... nur abhängig sind von p und T.

Zu dem Falle einer verdünnten Lösung, bei welcher die erste Componente durch das Lösungsmittel gebildet wird, gelangen wir, wenn wir die Zahlen n_2, $n_3 \ldots$ als sehr klein annehmen gegenüber von n_1. Für das Potential des Lösungsmittels ergiebt sich dann der Ausdruck:

$$\mu_1 = M_1 - R_1 \frac{n_2 + n_3 + \ldots}{n_1} T. \tag{4'}$$

Hier ist M_1 nichts anderes als das Potential des reinen Lösungsmittels entsprechend den gegebenen Werthen von Temperatur und Druck und kann daher durch den Ausdruck dargestellt werden

$$M_1 = E_1 + T(\mathfrak{A} c_{p1} - H_1 - \mathfrak{A} c_{p1} \log T) + \frac{v}{m_1} p\,. \tag{5}$$

III. Anwendung der Theorie von Gibbs auf verdünnte Lösungen.

1. Erniedrigung der Dampfspannung.

Die Temperatur werde konstant erhalten auf dem Betrage T. Dann wird die Dampfspannung p_0 des reinen Lösungsmittels nach dem Fundamentalsatze bestimmt durch die Gleichung

$$\mu(p_0, T) = \mu'(p_0, T)$$

wo μ und μ' die Potentiale des Lösungsmittels im gasförmigen und flüssigen Zustand bezeichnen. Es werden nun in dem gegebenen Mittel geringe Mengen irgend welcher Körper gelöst, so daß auf n Grammmolekeln des Lösungsmittels n_1, n_2, $n_3 \ldots$ Grammmolekeln von denselben kommen; ist die hierdurch bedingte Erniedrigung der Dampfspannung gleich π, so ist das neue Potential der gasförmigen Phase des Lösungsmittels gleich

$$\mu(p_0 - \pi, T) = \mu(p_0, T) - \frac{\partial \mu}{\partial p_0} \pi.$$

Andererseits ist das neue Potential der flüssigen Phase

$$\mu'(p_0 - \pi, T) - R \frac{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots}{n} T$$

$$= \mu'(p_0, T) - \frac{\partial \mu'}{\partial p_0} \pi - R \frac{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots}{n} T.$$

Gleichgewicht zwischen der flüssigen und gasförmigen Phase ist vorhanden, wenn das Potential des Lösungsmittels in beiden denselben Werth besitzt. Es ergiebt sich somit die Bedingung

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial p_0} - \frac{\partial \mu'}{\partial p_0}\right) \pi = R \frac{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots}{n} T.$$

Im Falle einer einzigen Componente ist aber nach Gl. 3) $\partial\mu/\partial p_0 = v/m$, $\partial\mu'/\partial p_0 = v'/m'$, wo v und v' die Volumina, m und m' die Massen der beiden Phasen bezeichnen; vernachlässigen wir v'/m' gegen v/m, so ergiebt sich

$$\frac{v}{m}\pi = R\frac{n_1+n_2+\,.\,.}{n}T$$

oder mit Rücksicht auf das Boyle GayLussac'sche Gesetz

$$\frac{\pi}{p_0} = \frac{n_1+n_2+\,.\,.}{n}.$$

Vernachlässigt man die Aenderung, welche das Potential der flüssigen Phase durch die Aenderung des Druckes erleidet, so ergiebt sich mit Hülfe des im ersten Abschnitte gegebenen Ausdruckes für das Potential eines gasförmigen Körpers die allgemeiner gültige Beziehung

$$\frac{p_0}{p} = \frac{n+n_1+n_2+\,.\,.}{n} \quad \text{oder} \quad \frac{\pi}{p} = \frac{n_1+n_2+\,.\,.}{n}.$$

wo p der erniedrigte Dampfdruck.

Nimmt man den Druck konstant, die Temperatur variabel, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die Beziehung $\partial\mu/\partial T = -\eta/m$ das Gesetz der Siedepunktserhöhung ϑ

$$\frac{\vartheta W}{R\Theta_0^2} = \frac{n_1+n_2+\,.\,.}{n}$$

wo W die Verdampfungswärme, Θ_0 der normale Siedepunkt.

2. Gefrierpunktserniedrigung.

Der Gefrierpunkt des reinen Lösungsmittels wird bestimmt durch die Gleichung

$$\mu'(p,T_0) = \mu''(p,T_0)$$

wo μ'' das Potential der festen Phase bezeichnet. Durch Lösung von $n_1, n_2, n_3 \ldots$ Grammmolekeln irgend welcher anderer Körper in n Grammmolekeln des Lösungsmittels wird der Gefrierpunkt erniedrigt um τ; die neuen Potentiale sind

$$\mu'(p,T_0-\tau) - RT_0\frac{n_1+n_2+\ldots}{n} = \mu'(p,T_0) - \frac{\partial\mu'}{\partial T_0}\tau - RT_0\frac{n_1+n_2+\ldots}{n}$$

$$\mu''(p,T_0-\tau) = \mu''(p,T_0) - \frac{\partial\mu''}{\partial T_0}\tau.$$

Die Gleichsetzung der Potentiale giebt:

$$\left(\frac{\partial \mu''}{\partial T_0} - \frac{\partial \mu'}{\partial T_0}\right)\tau = R\,T_0 \frac{n_1 + n_2 + \ldots}{n}$$

oder mit Benützung von Gleichung 3)

$$\left(\frac{\eta'}{m'} - \frac{\eta''}{m''}\right)\tau = R\,T_0 \frac{n_1 + n_2 + \ldots}{n}\,.$$

Bezeichnen wir durch Q die Schmelzwärme für die Gewichtseinheit des Lösungsmittels, so ergiebt sich:

$$\frac{\tau Q}{R T_0^2} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots}{n}\,.$$

Benützen wir als Einheit der Kraft den Druck von $1\,g$ auf $1\,cm^2$, so ist für Wasser als Lösungsmittel $Q = 80 \times 42800$, $R = \frac{84511}{18} = 4695$ und somit

$$\frac{\tau}{102} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots}{n}\,.$$

3. Dissociation in verdünnter Lösung.

In der Lösung sei eine beliebige Zahl von Stoffen enthalten, welche der Dissociation, beziehungsweise der wechselseitigen Umwandlung fähig sind; wir bezeichnen sie durch $\mathfrak{S}_a$, $\mathfrak{S}_b$, $\mathfrak{S}_c$, $\mathfrak{S}_d \ldots$ Dieselben seien in bekannter Weise zusammengesetzt aus einer gewissen Zahl anderer Stoffe, welche ihrerseits bei allen in der Lösung vor sich gehenden Umwandlungen völlig unzersetzt bleiben mögen; wir bezeichnen diese letzteren durch $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3 \ldots$

Die chemische Zusammensetzung der Componenten $\mathfrak{S}_a$, $\mathfrak{S}_b$, $\mathfrak{S}_c$, $\mathfrak{S}_d \ldots$ sei gegeben durch die Formeln:

$$\begin{aligned}
a\mathfrak{S}_a &= \alpha_1 \mathfrak{S}_1 + \alpha_2 \mathfrak{S}_2 + \alpha_3 \mathfrak{S}_3 + \ldots \\
b\mathfrak{S}_b &= \beta_1 \mathfrak{S}_1 + \beta_2 \mathfrak{S}_2 + \beta_3 \mathfrak{S}_3 + \ldots \\
c\mathfrak{S}_c &= \gamma_1 \mathfrak{S}_1 + \gamma_2 \mathfrak{S}_2 + \gamma_3 \mathfrak{S}_3 + \ldots \\
d\mathfrak{S}_d &= \delta_1 \mathfrak{S}_1 + \delta_2 \mathfrak{S}_2 + \delta_3 \mathfrak{S}_3 + \ldots \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir durch μ_a, μ_b, μ_c, $\mu_d \ldots$ die Potentiale der in der Lösung befindlichen Componenten, durch m_a, m_b, m_c, $m_d \ldots$ die von denselben vorhandenen Massen, so besteht Gleichgewicht wenn:

$$\mu_a\, dm_a + \mu_b\, dm_b + \mu_c\, dm_c + \mu_d\, dm_d + \ldots = 0$$

vorausgesetzt, daß das Lösungsmittel selbst an den Reaktionen der gelösten Stoffe nicht betheiligt ist. Nun sind aber die Veränderungen der Massen m der Bedingung unterworfen, daß durch dieselben die Masse der Stoffe $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ ... nicht verändert werden kann. Wir erhalten somit für die Variationen dm_a, dm_b, dm_c, dm_d ... die Gleichungen:

$$\frac{\alpha_1}{a} dm_a + \frac{\beta_1}{b} dm_b + \frac{\gamma_1}{c} dm_c + \frac{\delta_1}{d} dm_d + \ldots = 0$$

$$\frac{\alpha_2}{a} dm_a + \frac{\beta_2}{b} dm_b + \frac{\gamma_2}{c} dm_c + \frac{\delta_2}{d} dm_d + \ldots = 0$$

$$\frac{\alpha_3}{a} dm_a + \frac{\beta_3}{b} dm_b + \frac{\gamma_3}{c} dm_c + \frac{\delta_3}{d} dm_d + \ldots = 0$$

. . . .

Durch diese werden die Verhältnisse der dm im Allgemeinen nur dann bestimmt, wenn ihre Zahl um die Einheit kleiner ist als die Zahl der Componenten a, b, c, d ... Die Zahl der Gleichungen stimmt überein mit der Zahl der Stoffe $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ ... Die Verhältnisse der chemischen Umwandlung sind also im Allgemeinen nur dann in eindeutiger Weise bestimmt, wenn die Zahl der unveränderlichen Bestandtheile um eins kleiner ist, als die Zahl der veränderlichen Componenten. Verstehen wir unter λ_1, λ_2, λ_3 ... gewisse unbekannte Faktoren, so erhalten wir aus den obigen Bedingungen die Formeln:

$$\mu_a + \lambda_1 \frac{\alpha_1}{a} + \lambda_2 \frac{\alpha_2}{a} + \lambda_3 \frac{\alpha_3}{a} + \ldots = 0$$

$$\mu_b + \lambda_1 \frac{\beta_1}{b} + \lambda_2 \frac{\beta_2}{b} + \lambda_3 \frac{\beta_3}{b} + \ldots = 0$$

$$\mu_c + \lambda_1 \frac{\gamma_1}{c} + \lambda_2 \frac{\gamma_2}{c} + \lambda_3 \frac{\gamma_3}{c} + \ldots = 0$$

$$\mu_d + \lambda_1 \frac{\delta_1}{d} + \lambda_2 \frac{\delta_2}{d} + \lambda_3 \frac{\delta_3}{d} + \ldots = 0$$

. . . .

Ist die im Vorhergehenden besprochene Bedingung erfüllt, so ist die Zahl dieser Gleichungen um Eins größer als die Zahl der unbekannten Faktoren λ_1, λ_2, λ_3 ... und wir erhalten durch Elimimination derselben eine Gleichung von der Form

$$A\mu_a + B\mu_b + \Gamma\mu_c + \Delta\mu_d + \ldots . = 0.$$

Setzen wir für die Potentiale die in den Gleichungen 4 aufgestellten Ausdrücke, so ergiebt sich:

$$\log n_a^{AR_a} n_b^{BR_b} n_c^{\Gamma R_c} \ldots = \log N^{AR_a + BR_b + \Gamma R_c + \ldots} - \frac{AM_a + BM_b + \Gamma M_c + \ldots}{T}.$$

Die auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Funktion der Zahlen n ist dieselbe, wie in dem Falle einer Mischung gasförmiger Componenten, die auf der rechten Seite stehende Funktion von p und T ist eine andere.

Die Gleichungen

$$\frac{\alpha_1}{a} dm_a + \frac{\beta_1}{b} dm_b + \frac{\gamma_1}{c} dm_c + \ldots = 0$$

$$\frac{\alpha_2}{a} dm_a + \frac{\beta_2}{b} dm_b + \frac{\gamma_2}{c} dm_c + \ldots = 0$$

$$\frac{\alpha_3}{a} dm_a + \frac{\beta_3}{b} dm_b + \frac{\gamma_3}{c} dm_c + \ldots = 0$$

bestimmen die Verhältnisse der dm_a, dm_b, $dm_c \ldots$ auch bei gleicher Zahl der veränderlichen Componenten $\mathfrak{S}_a$, $\mathfrak{S}_b$, $\mathfrak{S}_c \ldots$ und der unveränderlichen Bestandtheile $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3 \ldots$, sobald die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\alpha_1}{a} & \frac{\beta_1}{b} & \frac{\gamma_1}{c} & \ldots \\ \frac{\alpha_2}{a} & \frac{\beta_2}{b} & \frac{\gamma_2}{c} & \ldots \\ \frac{\alpha_3}{a} & \frac{\beta_3}{b} & \frac{\gamma_3}{c} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

verschwindet. Es ist dieß der Fall bei den Umsetzungen in Folge doppelter Wahlverwandtschaft und das Problem der Dissociation ist daher auch in diesem Falle ein vollkommen bestimmtes.

Wir betrachten noch zwei allgemeinere Fälle von Dissociation. Zunächst nehmen wir an, es sei der eine der in der Lösung befindlichen Körper, etwa $\mathfrak{S}_a$, gleichzeitig auch in festem und in gasförmigem Zustand vorhanden. Wir bezeichnen die Massen, welche den verschiedenen Zuständen entsprechen durch m_a, m_a', m_a'', die Potentiale durch μ_a, μ_a', μ_a''. Wir erhalten die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\mu_a dm_a + \mu_a' dm_a' + \mu_a'' dm_a'' + \mu_b dm_b + \mu_c dm_c + \ldots = 0$$
$$\frac{\alpha_1}{a}(dm_a + dm_a' + dm_a'') + \frac{\beta_1}{b} dm_b + \frac{\gamma_1}{c} dm_c + \ldots = 0$$
$$\frac{\alpha_2}{a}(dm_a + dm_a' + dm_a'') + \frac{\beta_2}{b} dm_b + \frac{\gamma_2}{c} dm_c + \ldots = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Woraus

$$\mu_a + \lambda_1 \frac{\alpha_1}{a} + \lambda_2 \frac{\alpha_2}{a} + \ldots\ldots = 0$$
$$\mu_a' + \lambda_1 \frac{\alpha_1}{a} + \lambda_2 \frac{\alpha_2}{a} + \ldots\ldots = 0$$
$$\mu_a'' + \lambda_1 \frac{\alpha_1}{a} + \lambda_2 \frac{\alpha_2}{a} + \ldots\ldots = 0$$
$$\mu_b + \lambda_1 \frac{\beta_1}{b} + \lambda_2 \frac{\beta_2}{b} + \ldots\ldots = 0$$
$$\mu_c + \lambda_1 \frac{\gamma_1}{c} + \lambda_3 \frac{\gamma_2}{c} + \ldots\ldots = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Man sieht sofort daß $\mu_a'' = \mu_a' = \mu_a$ und daß außerdem zwischen den Potentialen μ_a, μ_b, $\mu_c \ldots$ dieselben Beziehungen bestehen wie früher.

Allgemein ergiebt sich das Resultat: Wenn irgend welche Componenten außer in der Lösung noch in festem oder gasförmigem Zustand vorhanden sind, so wird dadurch die Beziehung zwischen den Potentialen der gelößten Bestandtheile nicht verändert, es tritt zu derselben nur noch die Bedingung hinzu, daß für jede Componente das Potential in den verschiedenen Phasen denselben Werth besitzen muß.

Wir behandeln endlich noch den Fall, daß die chemische Reaktion in der Lösung keine bestimmte ist, d. h. daß die Zahl der unveränderlichen Bestandtheile um mehr als Eins kleiner ist, als die Zahl der veränderlichen Componenten. Wir erhalten in diesem Falle die Gleichungen:

$$\mu_a\, dm_a + \mu_b\, dm_b + \mu_c\, dm_c + \ldots\ldots = 0$$

$$\frac{\alpha_1}{a} dm_a + \frac{\beta_1}{b} dm_b + \frac{\gamma_1}{c} dm_c + \ldots\ldots = 0$$

$$\frac{\alpha_2}{a} dm_a + \frac{\beta_2}{b} dm_b + \frac{\gamma_2}{c} dm_c + \ldots\ldots = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nehmen wir an, die Zahl der unveränderlichen Bestandtheile $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3 \ldots$ sei um 2 kleiner als die Zahl der Componenten $\mathfrak{S}_a, \mathfrak{S}_b, \mathfrak{S}_c \ldots$ Die Zahl der Bedingungsgleichungen, welche sich auf Grund der stöchiometrischen Verhältnisse für die Zuwüchse $dm_a, dm_b, dm_c \ldots$ ergeben, ist dann gleichfalls um 2 kleiner als die Zahl der dm; werden 2 von den Zuwüchsen dm willkürlich gewählt, so sind die übrigen bestimmt. Wir können zunächst den Zuwachs dm_a gleich Null setzen; die ihm entsprechende chemische Componente scheidet dann aus der Reaktion aus, diese verläuft in vollkommen eindeutiger Weise zwischen den übrigen Componenten und ihre Potentiale genügen der früher entwickelten Gleichung; eine zweite solche Gleichung erhalten wir, wenn wir $dm_b = 0$ setzen u. s. f. Am übersichtlichsten ergiebt sich das System der von den Potentialen zu erfüllenden Gleichungen, wenn man zu dem System der Bedingungsgleichungen der dm noch eine lineare homogene Gleichung zwischen $dm_a, dm_b, dm_c \ldots$ hinzufügt.

$$u\, dm_a + v\, dm_b + w\, dm_c + \ldots = 0.$$

Die Zahl der Gleichungen stimmt dann überein mit der Zahl der Zuwüchse; bildet man nun die Determinante der Coëfficienten, so erhält man die gesuchten Gleichungen, indem man die Unterdeterminanten nach $u, v, w \ldots$ gleich Null setzt.

Ein einfaches Beispiel für den zuletzt betrachteten Fall giebt die Dissociation zweier binärer Elektrolyte mit einem gemeinsamen Bestandtheil. Die stöchiometrischen Gleichungen sind:

$$a\mathfrak{S}_a = \alpha_1 \mathfrak{S}_1 + \alpha_3 \mathfrak{S}_3$$
$$b\mathfrak{S}_b = \beta_2 \mathfrak{S}_2 + \beta_3 \mathfrak{S}_3$$

wo $\alpha_3 = \beta_3$. Bezeichnet man mit n_a, n_b die Anzahlen der nicht dissociirten g-Molekeln, mit n_1, n_2, n_3 die Zahl der durch Dissociation gebildeten g-Molekeln von $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$, mit N die Zahl der g-Molekeln des Lösungsmittels, so ergeben sich die Gleichungen

$$n_1 n_3 = N k_a n_a, \qquad n_2 n_3 = N k_b n_b$$

wo $n_3 = n_1 + n_2$; wir bezeichnen ferner durch $N_a = n_a + n_1$, $N_b = n_b + n_2$ die Zahl der ursprünglich vorhandenenen g-Molekeln der Stoffe $\mathfrak{S}_a$ und $\mathfrak{S}_b$. Zunächst ergiebt sich:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{k_a(N_a - n_1)}{k_b(N_b - n_2)}.$$

Setzt man hiernach

$$n_1 = xk_a(N_a - n_1), \qquad n_2 = xk_b(N_b - n_2)$$

so ergiebt sich

$$n_1 = \frac{k_a N_a x}{1 + k_a x}, \qquad n_a = \frac{N_a}{1 + k_a x}$$

$$n_2 = \frac{k_b N_b x}{1 + k_b x}, \qquad n_b = \frac{N_b}{1 + k_b x}.$$

Die Dissociationsgrade werden:

$$y_a = \frac{k_a x}{1 + k_a x}, \qquad y_b = \frac{k_b x}{1 + k_b x}.$$

Endlich ergiebt sich zur Bestimmung von x die Gleichung

$$\left(\frac{k_a N_a}{1 + k_a x} + \frac{k_b N_b}{1 + k_b x}\right) x^2 = N.$$

Befindet sich in der Lösung nur der eine Elektrolyt, etwa $\mathfrak{S}_a$, so gelten die auf Molekelzahlen und Dissociationsgrade sich beziehenden Gleichungen unverändert, nur die Gleichung zur Bestimmung von x wird eine andere, nemlich

$$\frac{k_a N_a x^2}{1 + k_a x} = N.$$

Betrachtet man N als eine veränderliche Ordinate, so gehen die durch die vorhergehenden Gleichungen bestimmten Curven für sehr kleine Werthe von x und N in Parabeln über, welche durch die Gleichungen gegeben sind

$$(k_a N_a + k_b N_b) x^2 = N \quad \text{und} \quad k_a N_a x^2 = N.$$

Für sehr große Werthe von x und N werden die Curven geradlinig und zwar sind ihre Richtungstangenten gegen die x-Axe gegeben durch $N_a + N_b$, beziehungsweise N_a.

Aus dem hierdurch bestimmten Verlauf der durch die beiden Gleichungen dargestellten Curven ergiebt sich, daß bei gegebenem Werthe von N die zweite Gleichung einen größeren Werth von x liefert als die erste. Daraus folgt aber weiter der Satz:

Wird der Lösung eines Elektrolyten ein zweiter Elektrolyt zugesetzt, welcher mit dem ersten ein Jon gemeinschaftlich besitzt, so wird der Dissociationsgrad des ersten vermindert.

Dieser Satz wurde von Nernst[1]) und von Arthur Noyes[2]) einer experimentellen Prüfung unterworfen. Die Verhältnisse der angestellten Versuche waren aber einfacher in so fern, als bei denselben gesättigte Lösungen zur Anwendung kamen. Dadurch ergeben sich für die Potentiale der gelößten und nicht dissociirten Componenten noch zwei weitere Gleichungen, welche sich auf die Form bringen lassen $n_a = Nl_a$ und $n_b = Nl_b$, unter l_a und l_b zwei nur von Temperatur und Druck abhängende Größen verstanden[3]).

4. Vertheilung eines Stoffes zwischen zwei Lösungsmitteln.

Von den beiden Lösungsmitteln, welche sich wechselseitig nicht lösen sollen, seien N und N' g-Molekeln gegeben; in dem ersten seien n, in dem zweiten n' g-Molekeln eines dritten Körpers gelößt. Gleichgewicht ist vorhanden, wenn

$$M(p, T) + RT \log \frac{n}{N} = M'(p, T) + RT \log \frac{n'}{N'}.$$

Die Brüche n/N und n'/N' bezeichnen wir als die Lößlichkeitskoëfficienten des dritten Körpers. Setzen wir sie gleich λ und λ', so ergiebt sich:

$$\log \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{1}{RT} \left\{ M'(p, T) - M(p, T) \right\}.$$

Das Verhältniß der Lößlichkeiten bleibt dasselbe, welches auch die Concentrationen, d. h. die Werthe von n und n', sind. Dieß gilt nicht mehr, wenn der gelößte Stoff in dem einen der beiden Lösungsmittel der Dissociation unterworfen ist. Wir nehmen an, daß von den n g-Molekeln des Stoffes, welche sich in dem ersten Lösungsmittel befinden, n_1 nicht dissociirt, n_2 dissociirt seien und zwar so daß jede Molekel in zwei zerfalle. Wir erhalten dann die Gleichungen

$$\frac{n_1}{N} \cdot \frac{N'}{n'} = A, \quad \left(\frac{n_2}{N}\right)^2 \cdot \frac{N}{n_1} = B$$

---

1) Zeitschr. f. phys. Chem. Bd. IV. S. 372.

2) Inauguraldiss. Leipzig 1890.

3) Vgl. noch: Arrhenius, Zeitschr. f. phys. Chem. Bd. II. S. 284. Bd. V. S. 1.

wo A und B gewisse Funktionen von Druck und Temperatur. Die Löslichkeitskoëfficienten sind:

$$\lambda = \frac{n_1 + n_2}{N} \text{ und } \lambda' = \frac{N'}{n'}.$$

Wir erhalten:

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = A + \sqrt{\frac{AB}{\lambda'}}.$$

Bezeichnen wir den Dissociationsgrad des Stoffes in dem ersten Lösungsmittel durch $x = \frac{n_2}{n_1 + n_2}$, so ergiebt sich:

$$x = \sqrt{AB}\frac{\sqrt{\lambda'}}{\lambda} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{A}{B}\lambda'}}.$$

Der Dissociationsgrad nimmt ab mit wachsender Concentration.

Noch etwas komplicirter gestalten sich die Verhältnisse in dem von Nernst[1]) behandelten Falle, in welchem der gelöste Körper in beiden Lösungsmitteln der Dissociation unterworfen ist. Wir beschränken uns dabei, mit Beziehung auf die von Nernst ausgeführten Experimentaluntersuchungen, auf die Dissociation einer Molekel in zwei unter sich gleiche. Es seien wieder N und N' die Anzahlen der g-Molekeln, welche von den beiden Lösungsmitteln gegeben sind, n_1 sei die Zahl der normalen, n_2 die Zahl der dissociirten Molekeln in dem ersten Lösungsmittel; n_1' und n_2' haben dieselbe Bedeutung für das zweite Mittel. Bezeichnen wir das Molekulargewicht für die normalen Molekeln durch γ_1, für die durch Dissociation entstehenden durch γ_2, so ist $\gamma_2 = \gamma_1/_2$. Ist R_1 die Constante des Gasgesetzes für die normalen Molekeln, R_2 dieselbe Constante für die durch Dissociation gebildeten, so ist $R_1\gamma_1 = R_2\gamma_2$, also $R_2 = 2R_1$. Die Werthe der vier in Betracht zu ziehenden Potentiale sind:

$$\mu_1 = M_1(p, T) + R_1 T \log\frac{n_1}{N}, \quad \mu_1' = M_1'(p, T) + R_1 T \log\frac{n_1'}{N'}$$

$$\mu_2 = M_2(p, T) + R_2 T \log\frac{n_2}{N}, \quad \mu_2' = M_2'(p, T) + R_2 T \log\frac{n_2'}{N'}.$$

Zwischen denselben bestehen die vier Gleichungen:

---

1) Nernst, Gött. Nachr. 1890. N. 12.

$$\mu_1 - \mu_1' = 0, \quad \mu_2 - \mu_2' = 0$$
$$\mu_2 - \mu_1 = 0, \quad \mu_2' - \mu_1' = 0.$$

Dieselben sind nicht von einander unabhängig, denn wenn man von der Summe der beiden links stehenden die Summe der beiden rechts stehenden abzieht, so ist das Resultat Null. Die Auflösung der Gleichungen giebt:

$$\frac{n_1}{n_1'} = \frac{N}{N'} e^{\frac{M_1' - M_1}{R_1 T}} = \frac{N}{N'} l_1; \quad \frac{n_2}{n_2'} = \frac{N}{N'} e^{\frac{M_2' - M_2}{R_2 T}} = \frac{N}{N'} l_2$$

$$\frac{n_2^2}{n_1} = N e^{\frac{M_1 - M_2}{R_1 T}} = Nk \ ; \quad \frac{n_2'^2}{n_1'} = N' e^{\frac{M_1' - M_2'}{R_1 T}} = N' k'.$$

Die nur von p und T abhängenden Größen l_1 und l_2 können wir als Theilungskonstanten, die ebenfalls nur von p und T abhängenden Größen k und k' als Dissociationskonstanten bezeichnen. Zwischen denselben besteht die Beziehung

$$\frac{l_2^2}{l_1} = \frac{k}{k'}.$$

Bezeichnen wir die Dissociationsgrade in den beiden Lösungsmitteln durch

$$x = \frac{n_2}{n_1 + n_2} \text{ und } x' = \frac{n_2'}{n_1' + n_2'}$$

so wird:

$$\frac{x^2 (n_1 + n_2)}{1 - x} = Nk, \quad \frac{x'^2 (n_1' + n_2')}{1 - x'} = N'k'.$$

Somit das Theilungsverhältniß:

$$\frac{n_1 + n_2}{n_1' + n_2'} = \frac{x'^2 (1 - x)}{x^2 (1 - x')} \cdot \frac{Nk}{N'k'}.$$

Da die Dissociationsgrade abhängig sind von der Concentration, so gilt gleiches von dem Theilungsverhältniß. Von den mannigfachen Ausdrücken, welche für dieses letztere aus den obigen Gleichungen abgeleitet werden können, möge noch der folgende angeführt werden:

$$\frac{n_1 + n_2}{n_1' + n_2'} = \frac{N}{N'} \frac{\sqrt{n_1} + \sqrt{Nk}}{\frac{\sqrt{n_1}}{l_1} + \frac{\sqrt{Nk}}{l_2}}$$

durch welchen das Teilungsverhältniß in seiner Abhängigkeit von der Zahl der normalen Molekeln in dem ersten Lösungsmittel dargestellt wird.

Betrachtet man n_1, n_2, n'_1, n'_2, k, k', l_1, l_2 als Unbekannte, so müssen zu den obigen Gleichungen noch 4 weitere hinzugefügt werden, um ihre Berechnung zu ermöglichen. Nernst hat zu diesem Zwecke die Gesammtzahl der in den beiden Lösungsmitteln enthaltenen g-Molekeln bestimmt $n_1 + n_2 = c_1$, $n'_1 + n'_2 = c'_2$; ferner betrachtet er k und l_1 als gegeben.

5. Gesetz des osmotischen Druckes.

Dieses Gesetz ist kürzlich von Planck[1]) aus den allgemeinen Principien der Thermodynamik hergeleitet worden. Ich füge im Folgenden den auf der Benützung des Potentiales beruhenden Beweis hinzu, welchen ich schon vor längerer Zeit gefunden hatte. Im Inneren einer von einer halbdurchlässigen Membran umschlossenen Zelle befinde sich eine Lösung, in welcher auf n g-Molekeln des Lösungsmittels n_1, n_2, n_3 . . . g-Molekeln der gelößten Körper kommen; der Druck sei p; außerhalb der Zelle stehe das reine Lösungsmittel unter dem Drucke p_0. Ist Gleichgewicht vorhanden, so muß das Potential des Lösungsmittels zu beiden Seiten der Zellwand nach Gibbs[2]) denselben Werth haben; es ergiebt sich somit die Gleichung:

$$M(p, T) - RT\frac{n_1 + n_2 + \ldots}{n} = M(p_0, T)$$

oder mit Rücksicht auf den für M in Gleichung 5 gegebenen Werth

$$\frac{v}{m}(p - p_0) = \frac{RT}{n}(n_1 + n_2 + \ldots).$$

Verstehen wir unter v das Volumen der Zelle, unter m das Gewicht des in derselben enthaltenen Lösungsmittels, so ist m/n gleich dem Molekulargewicht des Lösungsmittels und demnach $R\frac{m}{n} = 84511$; somit ergiebt sich für den osmotischen Druck $p - p_0 = \pi$ die Gleichung des Boyle-Gay Lussac'schen Gesetzes

$$v\pi = 84511(n_1 + n_2 + \ldots)\,T.$$

Diesem Resultat entsprechend liegt es nahe, die Ur-

1) Planck, Zeitschrift f. phys. Chem. V, S. 187.

2) Gibbs, Transactions of the Connecticut. Ac. III, 138.

sache des osmotischen Druckes in den Stößen zu suchen, welche von den Molekeln des gelößten Körpers auf die Membran ausgeübt werden. Daß nach dieser von van t'Hoff begründeten Anschauung der osmotische Druck in der That gleich ist der Differenz der hydrostatischen Drucke zu beiden Seiten der Membran ergiebt sich aus der folgenden Ueberlegung. Die Zelle sei hergestellt aus einer durch die Membran unten verschlossenen Glasröhre, welche mit Salzlösung gefüllt und in ein mit dem Lösungsmittel gefülltes Gefäß gestellt wird. Die freie Oberfläche der Salzlösung wird durch die gegen sie gerichteten Stöße gehoben, bis der Druck der gehobenen Säule gleich dem osmotischen durch die Stöße verursachten Druck ist. Der Druck der gehobenen Säule ist aber andererseits gleich der Differenz der hydrostatischen Drucke zu beiden Seiten der Membran, womit die Behauptung bewiesen ist.

Unter der Voraussetzung, daß der osmotische Druck durch die Stöße der Molekeln gegen die halbdurchlässige Membran, beziehungsweise gegen die freie Oberfläche der Flüssigkeit hervorgebracht werde, ergiebt sich aber andererseits

$$\pi = \frac{1}{3}\frac{n_1\mu_1 g_1^2 + n_2\mu_2 g_2^2 + \ldots}{v}$$

wo μ das Molekulargewicht, g die Geschwindigkeit der gelößten Molekeln. Ist diese letztere dieselbe wie im Gaszustande, so ist das Gesetz identisch mit dem entsprechenden Gesetze der Gastheorie. Der Unterschied zwischen einem freien und einem in Lösung befindlichen Gase würde dann wesentlich durch die verschiedene Länge der freien Wege begründet sein.

Wir geben endlich noch zwei Anwendungen der Potentialtheorie, welche nicht eben so sicher erscheinen, wie die im Vorhergehenden behandelten, da sie zwei weitere Annahmen von einigermaßen hypothetischer Natur nothwendig machen. Die erste Annahme besteht darin, daß wir die Potentialtheorie auch für solche Veränderungen als gültig betrachten, welche zu labilen Zuständen der Ueber- oder Untersättigung führen. Die zweite Annahme ist, daß die in den Gleichungen 4 gegebenen Ausdrücke auch für die Potentiale gesättigter Lösungen gelten, vorausgesetzt, daß die gelösten Körper in dem Lösungsmittel nur wenig lößlich sind.

6. Erniedrigung der Löslichkeit.

Wir betrachten mit Nernst[1]) zwei Flüssigkeiten a und b, welche nur wenig in einander löslich sind; schichten wir dieselben über einander, so bilden sich zwei Lösungen, von welchen die eine auf n_a g-Molekeln von a ν_b g-Molekeln von b, die zweite auf n_b g-Molekeln von b ν_a g-Molekeln von a enthalten möge. Die Gleichgewichtsbedingungen sind:

$$\mu_a(p, T) - R_a T \frac{\nu_b}{n_a} = M_a(p, T) + R_a T \log \frac{\nu_a}{n_b}$$

$$\mu_b(p, T) - R_b T \frac{\nu_a}{n_b} = M_b(p, T) + R_b T \log \frac{\nu_b}{n_a}.$$

Es mögen nun in der Componente a irgend welche in b nicht lösliche Körper in geringer Menge gelößt werden; die Folge davon wird sein, daß ein Theil der ν_a g-Molekeln von a, welche bisher in b gelößt waren, nach a zurückwandert; es bildet sich ein neuer Gleichgewichtszustand zwischen den beiden Lösungen aus, bei welchem einerseits auf n_a g-Molekeln von a ν'_b g-Molekeln von b, und $n_1, n_2, n_3 \ldots$ g-Molekeln der fremden Körper, andererseits auf n_b Molekeln b ν'_a Molekeln von a kommen. Die neuen Gleichgewichtsbedingungen sind:

$$\mu_a(p, T) - R_a T \frac{\nu'_b + n_1 + n_2 + \ldots}{n_a} = M_a(p, T) + R_a T \log \frac{\nu'_a}{n_b}$$

$$\mu_b(p, T) - R_b T \frac{\nu'_a}{n_b} = M_b(p, T) + R_b T \log \frac{\nu'_b}{n_a}.$$

Die Verbindung dieser Gleichungen mit den vorhergehenden giebt:

$$\frac{\nu_b - \nu'_b - (n_1 + n_2 + \ldots)}{n_a} = -\log \frac{\nu'_a}{\nu_a} = -\frac{\nu_a - \nu'_a}{\nu_a}.$$

Vernachlässigt man $\frac{\nu_b - \nu'_b}{n_a}$, so ergiebt sich

$$\frac{\nu_a - \nu'_a}{\nu_a} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots}{n_a}$$

oder allgemeiner mit Benützung der Gleichung 4

$$\frac{\nu_a - \nu'_a}{\nu'_a} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots}{n_a}$$

und dieß ist der von Nernst in einer Reihe von Fällen experimentell bestätigte Satz.

---

1) Zeitschr. f. phys. Chemie. VI, S. 16.

7. Das Henry'sche Absorptionsgesetz.

Betrachten wir den in Gleichung 4 gegebenen Ausdruck für das Potential eines in geringer Menge in einer Flüssigkeit gelößten Stoffes als gültig auch für den Fall der Absorption eines Gases durch eine Flüssigkeit, so ergiebt sich durch Gleichsetzen der Potentiale des freien und des absorbirten Gases

$$RT \log p/R + E + T(\mathfrak{A} c_p - H - \mathfrak{A} c_v \log T) = M + RT \log n/N.$$

Hier bezeichnet n die Anzahl der absorbirten Grammmolekeln des Gases, N die Zahl der Molekeln der absorbirenden Flüssigkeit. Setzen wir zur Abkürzung

$$\mathfrak{A} c_p - H - \mathfrak{A} c_v \log T = R\Theta, \text{ so ergiebt sich}$$

$$n = Np \frac{e^{\Theta + \frac{E-M}{RT}}}{R}.$$

Soll das Henry'sche Gesetz erfüllt sein, so muß in dem Falle eines absorbirten Gases die im allgemeinen von p und T abhängende Function M sich auf eine Function von T allein reduciren.

Mit Hülfe desselben Ansatzes ergiebt sich, wie man leicht sieht, auch das Dalton'sche Gesetz über die Absorption eines Gasgemenges.

Wir betrachten endlich noch den Fall eines Gases, welches sich bei der Absorption dissociirt. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß jede Molekel des Gases in zwei Theilmolekeln zerfalle. Ist n_1 die Anzahl der nicht dissociirten g-Molekeln in der Flüssigkeit, n_2 die Anzahl der dissociirten, so erhalten wir die beiden Gleichungen

$$n_1 = NAp \quad \text{und} \quad \frac{n_2^2}{n_1} = NB$$

wo A allein abhängig ist von der Temperatur, B von Temperatur und Druck. Hiernach ergiebt sich für die Gesammtzahl der absorbirten g-Molekeln der Werth

$$n_1 + n_2 = NAp\left(1 + \sqrt{\frac{B}{Ap}}\right)$$

dieselbe ist dem Drucke nicht mehr proportional.

Ueber elektrische Ladung durch gleitende Reibung.

Von

Eduard Riecke.

Riess[1]) hat im Jahre 1876 eine Reihe von Versuchen mitgetheilt, welche sich auf die Bestimmung der durch Reibung erregten Elektricitätsmengen bezogen. Die kreisförmige Fläche des Reibzeuges hatte einen Durchmesser von 4 cm; sie bestand aus Leder, welches mit einer dünnen Schichte von Kienmayers Amalgam überzogen war. Die geriebene Fläche bestand aus einer Tafel von Hartgummi mit glänzender Oberfläche, von 73 cm Länge und 32,5 cm Breite. Seine Versuche beschreibt Riess in folgender Weise. Das unbeschwerte Reibzeug wurde auf die Hartgummitafel gestellt und mit Hülfe eines isolirenden Handgriffes in gerader Linie um 1 Zoll = 2,7 cm behutsam fortgeführt. Die dabei stattgefundene Reibung wird zur Einheit der Reibungsmenge genommen. Dann wurde das Reibzeug behutsam abgenommen, auf eine frische Stelle der Platte gesetzt, wiederum einen Zoll weit fortgeführt u. s. w. Die Anzahl dieser Operationen bestimmte den Werth der Reibungsmenge. War die gewünschte Menge erreicht, so wurde mit dem Reiber der Knopf eines Sinuselektrometers berührt und die erregte Elektricitätsmenge gemessen. Bei einer zweiten Versuchsreihe wurden die Reibungsmengen dadurch gewonnen, daß der Reiber in einem Zuge über eine größere oder geringere Strecke der Hartgummitafel fortgezogen wurde. Als Resultat dieser Untersuchungen ergaben sich die folgenden Sätze:

„Durch fortgesetzte Reibung wird desto weniger Elektricität erregt, je größer die vorangegangene Reibung war.“

„An zwei vorläufig elektrisirten Flächen erregt die Reibung eine kleinere Elektricitätsmenge, als wenn die eine Fläche unelektrisch ist.“.

Durch die Versuche von Riess wurde ich veranlaßt zu dem Versuche einer Theorie der Elektricitätserregung durch Reibung[2]), welche auf den folgenden Grundlagen beruht. Es wird zunächst angenommen, daß der Reiber die Gestalt eines Rechteckes besitzt, dessen Breite äußerst klein ist im Vergleich zu seiner Länge. Wird ein solcher Reiber parallel mit seiner Breite über die geriebene Fläche fortgeführt, so wird die erregte Elektricitätsmenge

1) Berl. Monatsber. 1876. S. 301.

2) Gött. Nachr. 1877. Nr. 25. Wied. Ann. Bd. 3. S. 414.

proportional der Oberfläche des Reibers und proportional der geriebenen Fläche gesetzt: außerdem wird angenommen, daß eine fortdauernde Wiedervereinigung der geschiedenen Elektricitäten erfolge nach demselben Gesetze, welches für die Zerstreuung der Elektricität in der Luft gilt. Die theoretischen Folgerungen aus diesen Annahmen standen in Uebereinstimmung mit den Versuchen von Riess und ebenso mit den Beobachtungen, welche Carl Schering auf meine Veranlassung hin ausgeführt hat[1]).

Der Zweck von Beobachtungen, welche ich im Februar und März 1888 angestellt habe, war es, das zur Zeit noch sehr unzulängliche Beobachtungsmaterial zu vermehren; dabei wurde im Wesentlichen die von Riess angegebene Methode der Beobachtung beibehalten, dieselbe wurde nur auf eine größere Zahl verschiedenartiger Körper in Anwendung gebracht; zur Messung der erregten Elektricitätsmengen wurde ein Goldblattelektroskop benützt und es wurden endlich die an diesem Elektroskop beobachteten Ausschläge auf absolutes elektrostatisches Maaß reducirt.

1. Die reibenden Körper.

Als reibende Körper wurden benützt: Platten von Bernstein, Glas, Hartgummi, Holz, Nickel, Schellack, Schwefel und Siegellack. Dieselben hatten meist eine rechteckige beziehungsweise quadratische Form; eine von einem natürlichen Schwefelkrystall abgeschnittene Platte hatte die Gestalt eines Parallelogramms, eine zweite ebensolche die Gestalt eines Paralleltrapezes; zwei Holzplatten waren kreisförmig begrenzt. In der Mitte war an allen Platten ein dünner Stil von Hartgummi befestigt von einer Länge von beiläufig 15 mm; oben trug dieser Stil ein rechtwinkliges Kreuz von Hartgummi, dessen Arme eine Länge von 30 mm besaßen. Bei der Reibung wurden die Platten mit den Spitzen von 4 Fingern in den Endpunkten des Kreuzes gefaßt und mit mäßigem Drucke und geeigneter Geschwindigkeit über eine zuvor abgemessene Strecke der geriebenen Fläche hinweggeführt. Sie wurden sodann abgehoben und mit dem einen Arme des Kreuzes über dem Knopfe des Goldblattelektroskopes aufgehängt, welches zur Messung der Elektricitätsmengen diente. Die Entfernung zwischen den Platten und dem Knopfe des Elektroskops betrug etwa 6 cm.

2. Die geriebenen Flächen.

Als geriebene Körper wurden vorzugsweise verwandt Flanell und Seide; bei einer kleineren Zahl von Versuchen auch Katzen-

1) Wied. Ann. Bd. 3. S. 465.

pelz. Flanell und Seide wurden in rechteckigen Stücken verwandt, welche aus mehreren Lagen über einander bestanden; ihre Länge betrug 83 cm, ihre Breite 11 cm. An ihren breiten Seiten waren die Stücke auf Hartgummicylindern befestigt; diese wurden mit ihren vorstehenden Enden in zwei feste Lager eingelegt, so daß die geriebenen Flächen zwischen denselben in horizontaler Richtung sich ausdehnten. Um eine ebene Reibungsfläche von genügender Festigkeit herzustellen, wurde gegen die Flanell- oder Seidenstücke von unten eine horizontal gestellte Glasplatte gedrückt, so daß dieselben straff gespannt waren und keine Faltung zeigten. Wurde die Länge der geriebenen Flächen von dem Reiber mehrmals durchlaufen, so wurde darauf geachtet, daß dieß stets an einer neuen Stelle geschah. Nach jedem einzelnen Versuch wurde die geriebene Fläche durch Bestreichen mit einem Spitzenkamm, die Fläche des Reibers mit Hülfe einer Flamme entladen.

3. Das Elektroskop.

Das Elektroskop war ein einfaches Goldblattelektroskop, welches zum Schutze gegen äußere Störungen in einen metallenen Kasten eingeschlossen war. Dieser war an zwei einander gegenüberliegenden Stellen mit Oeffnungen versehen, so daß die Verbindungslinie derselben senkrecht zu der Divergenzebene der Blätter stand. Die hintere Oeffnung diente zur Beleuchtung der Blätter; die vordere trug eine Linse, durch welche das Bild der Blätter auf den Glasmaaßstab geworfen wurde, an welchem ihre Divergenz beobachtet wurde.

Die Reduktion der Ausschläge des Elektroskopes auf absolutes elektrostatisches Maaß geschah in folgender Weise. Ueber den Knopf des Elektroskops wurde die geladene Standkugel einer elektrischen Drehwage gestellt und der hierdurch erzeugte Ausschlag gemessen; es wurde hierauf die Standkugel in die Drehwage gebracht und die Abstoßung ihres Balkens beobachtet. Sodann wurde die Standkugel in das Elektroskop zurückgestellt und von neuem der Ausschlag gemessen; diese alternirenden Beobachtungen wurden fortgesetzt, bis die Ausschläge in Folge der Zerstreuung auf einen nur noch kleinen Betrag gesunken waren. Die elektrische Ladung der beweglichen Kugel der Drehwage war zu Anfang der ganzen Beobachtungsreihe in absolutem Maaße bestimmt worden; ihre Abnahme im Verlauf der Beobachtungen wurde berechnet mit Hülfe des Werthes, welcher sich aus den Messungen selbst für den Zerstreuungskoëfficienten in der Drehwage ergab.

Wir stellen zunächst die Ladungen e_1 der Standkugel (mm, mg, sec) zusammen mit den entsprechenden Ausschlägen A des Elektroskopes und dem Verhältniß e_1/A.

e_1	8770	5378	5203	4830	4200	2055
A	28.3	16.7	18.4	15.4	13.9	6.7
e_1/A	303	322	283	314	303	307.

Im Mittel ist $e_1/A = 304$.

Bezeichnen wir durch q_{11} die Capacität der Standkugel der Drehwage, wenn sie dem Knopfe des Elektroskops gegenübergestellt ist, durch q_{12} die Capacität dieses letzteren, so ergiebt sich für die Ladung der Goldblätter der Werth

$$e_3 = -\frac{q_{12}}{q_{11}} \cdot e_1 .$$

Die Capacitäten ergeben sich mit Hülfe der Formeln, welche ich in einer früheren Abhandlung[1]) entwickelt habe, aus den Durchmessern und dem Centralabstand der beiden Kugeln. Nun war der Halbmesser der Standkugel $a = 6{,}07$ mm, der Halbmesser der Kugel des Elektroskopes $b = 5{,}80$ mm; der Centralabstand $c = 18{,}62$ mm. Hiernach ergiebt sich:

$$q_{11} = 6{,}867 , \qquad q_{12} = -2{,}163$$

und somit die elektrische Ladung der Goldblätter in mm, mg, sec

$$e_3 = 96\,A .$$

Dieses Resultat stimmt nahe überein mit dem in der angeführten früheren Arbeit gefundenen, obwohl die Verhältnisse des Versuches wesentlich andere sind. Der früher gefundene Werth ist $e_3 = 97\,A$ (mm, mg, sec).

Es mögen endlich noch die Formeln angeführt werden, mit Hülfe deren die auf den Reiberflächen erzeugten elektrischen Dichtigkeiten aus den Ausschlägen des Elektroskops berechnet wurden.

Vorausgesetzt ist, daß die Fläche der Platten senkrecht stehe gegen die Linie, welche den Mittelpunkt der Elektroskopkugel mit dem Mittelpunkt der Platten verbindet. Bezeichnen wir den Abstand einer Platte von dem Mittelpunkt der Kugel durch d, den Halbmesser der Kugel durch a, die elektrische Dichtigkeit an der Oberfläche der Platte durch ε, so wird die Menge der in der Kugel inducirten ungleichnamigen, der in den Goldblättern sich sammelnden gleichnamigen Influenzelektricität gegeben durch

1) Gött. Nachr. 1885. S. 416. Wied. Ann. Bd. 28. S. 55.

$$e_3 = a\,\varepsilon \int_{-l/2}^{+l/2}\int_{-b/2}^{+b/2} \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{d^2+\xi^2+\eta^2}}\,.$$

ξ und η sind die rechtwinkligen Coordinaten mit Bezug auf zwei in der Ebene der Platte durch ihren Mittelpunkt hindurchgelegte Axen, l ist die Länge, b die Breite der Platte. Die Integration nach η giebt:

$$e_3 = a\,\varepsilon \int_{-l/2}^{+l/2} d\xi \log \frac{\sqrt{d^2+b^2/4+\xi^2}+b/2}{\sqrt{d^2+b^2/4+\xi^2}-b/2}\,.$$

Woraus durch partielle Integration:

$$e_3 = a\,l\,\varepsilon \log \frac{\sqrt{d^2+\frac{l^2+b^2}{4}}+b/2}{\sqrt{d^2+\frac{l^2+b^2}{4}}-b/2} - a\,b\,\varepsilon \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\xi^2 d\xi}{(d^2+\xi^2)\sqrt{d^2+b^2/4+\xi^2}}$$

und

$$e_3 = a\,l\,\varepsilon \log \frac{\sqrt{d^2+\frac{l^2+b^2}{4}}+b/2}{\sqrt{d^2+\frac{l^2+b^2}{4}}-b/2} + a\,b\,\varepsilon \log \frac{\sqrt{d^2+\frac{l^2+b^2}{4}}+l/2}{\sqrt{d^2+\frac{l^2+b^2}{4}}-l/2}$$

$$- 4\,a\,d\,\varepsilon \text{ arc sin} \frac{b\,l}{4\sqrt{d^2+b^2/4}\,\sqrt{d^2+l^2/4}}\,.$$

Sind die Dimensionen der Platte klein gegen die Entfernung d, so kann man setzen:

$$e_3 = \varepsilon\, b\, l \frac{a}{d}\left(1-\frac{l^2+b^2}{8d^2}\right).$$

Führt man an Stelle der elektrischen Ladung der Goldblätter ihre Divergenz A ein, so ergiebt sich zur Berechnung der elektrischen Dichtigkeit ε die Formel

$$\varepsilon\, b\, l \frac{a}{d}\left(1-\frac{l^2+b^2}{8d^2}\right) = 96\,A\,.$$

Ist die Platte durch einen Kreis vom Halbmesser r begrenzt, so lautet dieselbe:

$$\varepsilon \pi r^2 \frac{a}{d}\left(1-\frac{r^2}{4d^2}\right) = 96\,A\,.$$

4. Versuche mit Hartgummischeiben.

Es war nothwendig, zunächst mit Benützung eines und desselben Stoffes eine etwas größere Zahl von Versuchen auszuführen, um ein Urtheil über den gesetzmäßigen Verlauf derselben und die Constanz der Resultate zu erhalten. Es wurden zu diesem Zwecke drei Platten von Hartgummi benützt, welche aus einer Tafel von 6,5 mm Dicke herausgeschnitten waren. Die Ergebnisse der Versuche sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt. Die Länge der Platten ist mit l, ihre Breite mit b bezeichnet; T ist die Temperatur, ϱ die relative Feuchtigkeit, A der beobachtete Ausschlag des Elektroskops, s die von der Platte durchlaufene Strecke in cm. Bei zwei Scheiben wurden je drei, bei der dritten vier korrespondirende Versuchsreihen ausgeführt. Die geriebene Fläche bestand aus Flanell.

I. Scheibe. $l = 29{,}2$ (mm) $b = 10{,}4$ (mm)
$A_\infty = 15{,}5$ $\alpha = 25{,}2$ (cm).

T ϱ	19.9 52	19.1 51	19.5 47		
s (cm)		A		A Mittel	A berechn.
25	8.4	10.3	10.0	9.6	9.8
50	13.8	12.7	14.2	13.6	13.3
75	15.4	14.2	14.7	14.8	14.7
150	15.5	14.3	14.8	14.9	15.5
300	15.5	14.7	15.4	15.2	15.5

Die berechneten Werthe sind erhalten mittelst der Formel

$$A = A_\infty \left(1 - e^{-\frac{s}{\alpha}}\right).$$

Führt man die Platte über eine Strecke von $\alpha = 25{,}2$ cm der geriebenen Flanelloberfläche hinweg, so erhält man hiernach 63 % der schließlich erreichten elektrischen Ladung. In derselben Weise sind auch die Beobachtungen der folgenden Tabellen berechnet.

II. Scheibe. $l = 29.9$ (mm) $b = 19.9$ (mm)
$A_\infty = 22.7$ $\alpha = 29.9$ (cm).

T ϱ	17.2 51	17.5 53	18.8 50		
s (cm)		A		A Mittel	A berechn.
25	11.2	13.4	12.8	12.5	12.8
50	17.4	19.5	19.1	18.7	18.4
75	20.4	21.7	21.0	21.0	20.9
150	21.1	22.2	22.3	21.9	22.6
300	22.8	22.3		22.5	22.7

III. Scheibe. $l = b = 30.1$ (mm)
$A_\infty = 27.7$ $\alpha = 42.7$ (cm).

T ϱ	19.0 50	19.2 53	17.9 51	17.3 48		
s (cm)		A			A Mittel	A berechn.
25	6.5	12.1	15.4	14.6	12.1	12.3
50	14.8	19.6	20.3	22.6	19.3	19.1
75	20.7	26.3	24.2	25.7	24.2	23.0
150	25.6	27.2	27.6	27.2	26.9	26.8
300	27.8	28.8	27.8	27.2	27.7	27.7

Mit Bezug auf die Art und Weise in welcher die vorhergehenden Beobachtungsreihen gewonnen wurden, möge noch Folgendes bemerkt werden.

Aus einer Reihe von vorläufigen Versuchen ergab sich, daß die elektrische Erregbarkeit der Platten durch den Proceß der Reibung selbst vermehrt wurde. Von einem Versuche zum anderen wurden dieselben in einem mit koncentrirter Schwefelsäure getrockneten Recipienten aufbewahrt. Wurde nun eine Platte aus diesem Raume herausgenommen und über eine bestimmte Strecke des in derselben Weise aufbewahrten Flanellstückes weggeführt, so ergab sich zunächst eine ziemlich schwache elektrische Ladung. Diese steigerte sich aber bei jeder Wiederholung der Operation bis zu einem schließlichen konstant bleibenden Betrage.

Es möge dieß an einem Beispiele erläutert werden. Der Versuch wurde ausgeführt mit der quadratischen Hartgummischeibe; die geriebene Flanellstrecke hatte eine Länge von 75 cm. Die bei Wiederholung der Reibung der Reihe nach beobachteten Ausschläge des Elektroskopes waren folgende:

10.6	14.5	15.3	18.0	18.4	18.6
19.4	21.6	21.8	22.1	22.8	23.9
23.6	23.9	22.0	23.3	22.5	23.0.

Um nun die Beobachtungen von dem Einfluß dieser Veränderung zu befreien, wurde jede Beobachtungsreihe damit begonnen, daß die zu untersuchende Platte wiederholt über eine Strecke von 75 cm gerieben wurde, bis schließlich keine Vermehrung der elektrischen Ladung mehr zu beobachten war. Erst nachdem auf diese Weise eine konstante Oberflächenbeschaffenheit der Platte hergestellt war, wurde mit der eigentlichen Versuchsreihe begonnen, bei welcher in der Regel von kleinen Reibungsstrecken zu größeren fortgeschritten wurde. In dieser Weise schloß sich an die Versuche, deren Ergebniß in den obigen Zahlen enthalten ist, die folgende Beobachtungsreihe an.

Reibungsstrecke $s = 25$ cm.

Ausschläge des Elektroskops bei den einzelnen auf einanderfolgenden Versuchen:

$A =$	13.0	12.5	14.5	13.0	14.2	15.7
	13.9	13.6	15.3	13.7	14.7	16.7
	15.0	15.5	15.0	17.2	17.4	16.8

Mittel $A = 15.4$.

Reibungsstrecke $s = 50$ cm.

Ausschläge: $A =$	18.8	19.0	20.9	21.2	19.7	20.8
	20.1	21.6	20.3	20.3	20.6	20.3

Mittel $A = 20.3$.

Reibungsstrecke $s = 75$ cm.

Ausschläge: $A =$	25.7	23.2	26.0	24.5	25.0	24.7
	24.4	23.1	24.0	24.0	24.4	24.4

Mittel $A = 24.4$.

Reibungsstrecke $s = 150$ cm.

Ausschläge: $A =$	27.9	24.0	26.0	29.0	26.0	28.0
	27.0	29.9	26.3	29.3	27.5	27.6

Mittel 27.6.

Reibungsstrecke $s = 300$ cm.

Ausschläge: $A =$	26.3	27.6	29.3	28.0	28.1	27.0
	26.7	29.3	27.7	28.7	27.8	27.5

Mittel 27.8.

Man sieht daß bei dieser Beobachtungsreihe auch durch die vorausgegangene wiederholte Reibung keine vollkommen konstante Beschaffenheit der Oberfläche erreicht war; es findet bei den beiden kleinsten Reibungsstrecken noch ein deutliches Ansteigen der Ladung bei wiederholter Reibung statt, und der bei der Strecke

$s = 75$ cm erreichte Betrag der Ladung ist größer als bei den Vorversuchen. Uebrigens muß hervorgehoben werden, daß mit Bezug hierauf die Beobachtungsreihen im Ganzen günstigere Verhältnisse darbieten als die hier mitgetheilte.

5. Zusammenstellung der Dimensionen der bei den Versuchen benützten Platten.

Die Länge derselben ist ebenso wie früher mit l, die Breite mit b, die Dicke mit h bezeichnet; d ist der Abstand, in welchem die geriebene Fläche der in das Elektroskop gehängten Platten von dem Mittelpunkte der Kugel sich befand; die Angaben beziehen sich auf das mm als Längeneinheit.

		l	b	h	d
Bernstein	I	27.9	27.9	4.8	72.3
	II	25.4	20.1	2.4	73.9
	III	25.2	23.2	1.9	75.1
	IV	27.5	19.4	3.3	73.7
Glas	I	29.1	29.1	2.1	73.8
	II	29.8	14.7	2.1	73.7
	III	29.6	29.6	1.0	74.8
	IV	29.7	14.8	1.0	75.2
Hartgummi	I	30.1	30.1	6.5	69.8
	II	29.9	19.9	6.5	69.8
	III	29.2	10.4	6.5	69.9
	IV	29.7	29.7	2.0	74.8
	V	30.1	20.2	2.0	74.7
	VI	29.8	10.1	2.0	74.8
Holz	I	$r = 15.6$		6.0	70.0
	II	$r = 15.1$		6.0	70.0
Nickel	I	20.4	20.4	2.8	73.8
	II	20.4	20.4	2.8	73.7
Schellack	I	28.6	28.6	6.0	71.3
	II	29.7	14.4	6.0	70.9
Schwefel	I	30.6	30.6	6.2	70.7
	II	30.3	15.0	6.2	69.9
	III	22.9	14.8	5.0	68.8
	IV	24.6	12.8	5.4	69.5
Siegellack	I	29.4	29.4	6.0	70.9
	II	29.4	14.8	6.0	71.7

Von den beiden Holzplatten war die erste aus Buchsbaumholz, die zweite aus einem schwarzen, harten Holze kreisförmig ausgedreht. Von den Schwefelplatten bestanden die beiden ersten aus käuflichem Stangenschwefel, die dritte und vierte waren aus einem natürlichen Schwefelkrystall geschnitten, und zwar die dritte in der Form eines Paralleltrapezes parallel einer Oktaëderfläche, die vierte in der Form eines Parallelogramms parallel der Geradendfläche; bei der dritten bedeutet l die halbe Summe der parallelen Seiten, bei der vierten b die Höhe des Parallelogramms.

Von den Glasplatten stammten die beiden ersten von einer Scheibe farblosen, die dritte und vierte von einer Scheibe grünen Glases. Die beiden ersten Bernsteinplatten waren durchsichtig, gelb, die dritte und vierte milchig getrübt.

6. Die beobachteten Maxima der elektrischen Ladung und die Flächendichtigkeiten der Reibungselectricität.

Im Folgenden sind für die einzelnen Platten die Ausschläge, A_∞, zusammengestellt, welche sich bei fortgesetzter Vergrößerung der beim Reiben durchlaufenen Strecke schließlich ergaben; es sind außerdem die elektrischen Dichtigkeiten in cm. g. s. angegeben, welche mit Hülfe der früher angeführten Formel aus den betreffenden Werthen von A_∞ folgen.

		Wolle		Pelz		Seide	
		A_∞	ε_∞	A_∞	ε_∞	A_∞	ε_∞
Bernstein	I	24.5	3.89			22.3	3.55
	II	18.7	4.56	11.9	2.90	18.0	4.39
	III	17.0	3.69				
	IV	17.1	4.00			16.8	3.93
Glas	I					15.4	2.31
	II	11.3	3.21			11.8	3.35
	III	12.0	1.76			10.4	1.53
	IV	9.8	2.84			10.9	3.16
Hartgummi	I	27.7	3.88			23.6	3.30
	II	22.7	4.54	12.7	2.54	20.9	4.18
	III	15.5	6.00			13.8	5.34
	IV	22.9	3.34			20.6	3.01
	V	17.0	3.55	11.0	2.30	17.1	3.57
	VI	12.5	5.21			11.1	4.63
Holz	I	22.4	3.43			13.2	2.02
	II	6.8	1.11				
Nickel	I	10.8	3.45			11.0	3.52
	II					10.9	3.49
Schellack	I	23.0	3.47			22.0	3.32
	II	21.6	6.07	11.6	3.26	19.8	5.56
Schwefel	I	27.2	3.54			25.9	3.37
	II	21.6	5.64	14.0	3.65	21.3	5.56
	III					11.7	3.99
	IV					12.5	4.55
Siegellack	I	25.8	3.66			25.0	3.55
	II	22.0	6.11	13.3	3.70	20.8	5.78

Aus dieser Zusammenstellung ergiebt sich zunächst unzweideutig die Thatsache, daß die durch die Reibung erzeugte maximale elektrische Dichtigkeit um so kleiner ist, je größer die Fläche des Reibers. Man kann zunächst vermuthen, daß der Unterschied zwischen den beobachteten Dichtigkeiten nicht sowohl durch die Verschiedenheit der Größe, als durch die der Form bedingt ist; daß aber die Form für die schließlich erreichten elektrischen Dichtigkeiten wenigstens nur von untergeordneter Bedeutung ist, ergiebt sich aus Versuchen, bei welchen Platten von länglicher Form das eine mal der Breite, das andere mal der Länge nach fortgeführt wurden; die hierbei beobachteten Ausschläge A sind im Folgenden zusammengestellt.

		s	Der Breite nach	Der Länge nach
Hartgummi	II	225	20.0	20.4
	III	75	13.2	13.8
	III	150	13.2	12.3
	VI	150	10.6	11.1
Schwefel	IV	75	12.5	11.0

Um eine Vergleichung der bei den verschiedenen Körpern auftretenden elektrischen Dichtigkeiten zu erhalten, kann man die beobachteten Werthe von ε_∞ auf gleichen Inhalt der Reiberflächen reduciren. Es empfiehlt sich zu diesem Zwecke eine Fläche von 5 cm² und mit Bezug auf diese ergaben sich dann die folgenden Werthe.

Maximale elektrische Dichtigkeit bei einer Reiberfläche von 5 cm² Inhalt.

Reibung an Wolle	ε_∞	Reibung an Seide	ε_∞
Siegellack	5.70	Siegellack	5.40
Schellack	5.57	Schwefel	5.39
Schwefel	5.48	Schellack	5.12
Hartgummi I—III	4.82	Hartgummi I—III	4.43
Bernstein I u. II	4.60	Bernstein I u. II	4.40
Bernstein III u. IV	4.18	Bernstein III u. IV	4.11
Hartgummi IV—VI	3.90	Hartgummi IV—VI	3.80
		Glas I u. II	3.18
Glas III u. IV	2.65	Glas III u. IV	2.90

Bei den Holzplatten, den Nickelplatten und den aus einem Schwefelkrystall geschnittenen Platten ist eine Reduktion auf einen Flächeninhalt von 5 cm^2 nicht ausführbar. Bei einem Flächeninhalt von 7.6 cm^2 würden die Hartgummiplatten III—VI eine elektrische Dichtigkeit $\varepsilon_\infty = 3.42$ liefern; es würde also die erste Holzplatte eine elektrische Erregung zeigen von derselben Stärke wie die zweite Reihe der Hartgummiplatten. Die bei der Reibung der Nickelplatten an Seide erregte elektrische Dichtigkeit stimmt ebenso überein mit der durch die Reibung einer gleich großen Fläche der ersten Glassorte erzeugten. Die Erregbarkeit der nach der Geradendfläche des Crystalls geschnittenen Schwefelplatte erweist sich als nahezu gleich der Erregbarkeit der zweiten Hartgummisorte; die Erregbarkeit der der Oktaëderfläche parallelen Platte ist geringer. Eine sehr schwache Erregbarkeit zeigt endlich die Holzplatte II.

Aus der Betrachtung der im Vorhergehenden gegebenen Zusammenstellung ergiebt sich Folgendes.

Alle Körper, welche mit Wolle und Seide gerieben negativ elektrisch werden, geben mit Wolle größere elektrische Dichtigkeiten als mit Seide.

Glas, welches bei der Reibung an Wolle und Seide positiv elektrisch wurde, giebt mit Seide eine größere elektrische Dichtigkeit als mit Wolle.

Ordnet man die als Reiber benützten Stoffe nach der bei gleicher reibender Fläche erreichten elektrischen Dichtigkeit, so ist, mit einer einzigen kleinen Ausnahme, *die Reihenfolge dieselbe bei Wolle, wie bei Seide.*

Besteht für die Spannungen, welche durch Reibung verschiedenartiger Stoffe an ihrer Oberfläche erzeugt werden, ein dem Voltaschen Spannungsgesetze analoges Gesetz, so würde die Differenz der Dichtigkeiten, welche bei der Reibung eines und desselben Körpers an Wolle und Seide auftreten, der Dichtigkeit entsprechen, welche durch Reibung von Seide an Wolle erzeugt wird.

Den in der vorhergehenden Tabelle enthaltenen Zahlen zufolge schwankt jene Differenz zwischen 0.09 und 0.45; im Mittel ist sie gleich 0.23. *Hiernach lassen sich die Resultate, unserer Messungen in der einen Spannungsreihe vereinigen:*

Glas I—II	Glas III—IV	Wolle	Seide	Holz II	Nickel
2.95	2.65	0	0.23		

Hartgummi IV—VI Holz I	Bernstein III, IV	Bernstein I, II
3,90	4.18	4.60

Hartgummi I—III	Schwefel	Schellack	Siegellack
4.82	5.48	5.57	5.70.

Die unter den Stoffen stehenden Zahlen geben die elektrischen Dichtigkeiten in cm, g, sec, welche bei der Reibung von 5 cm² großen Flächen an Wolle erzeugt wurden.

7. Ueber die Zunahme der electrischen Ladung mit wachsender Reibungsstrecke.

Wir haben im vierten Abschnitte die mit den Hartgummiplatten bei der Reibung an Wolle erhaltenen Beobachtungen mit Hülfe der Exponentialformel

$$A = A_\infty\left(1 - e^{-\frac{s}{\alpha}}\right)$$

dargestellt. Die Zahl α, welche den Nenner des Exponenten bildet, giebt die Strecke an, über welche der Reiber hinweggeführt werden muß, damit die erreichte Ladung 63 % der schließlichen Ladung beträgt. In diesem Sinne würde die Angabe der Zahl α auch dann zur Charakterisirung der Versuchsergebnisse dienen, wenn das obige Gesetz nur näherungsweise gültig sein würde. Nur bei einem Theile der Beobachtungen lag eine solche Zahl zusammengehörender Werthe von A und s vor, daß eine Berechnung der Wege α versucht werden konnte. Für diese sind im Folgenden die maximalen elektrischen Dichtigkeiten mit den entsprechenden Werthen von α zusammengestellt; die letzteren sind in cm angegeben.

		Wolle		Seide	
		ε_∞	α	ε_∞	α
Bernstein	I			3.55	39
	III	3.69	41		
Glas	I			2.31	260
	II	3.21	350	3.35	160
	III	1.76	400		
Hartgummi	I	3.88	43	3.30	22
	II	4.54	30	4.18	55
	III	6.00	25	5.34	15
	IV	3.34	37	3.01	25
	V	3.55	33	3.57	37
	VI	5.21	28	4.63	16
Holz	I	3.43	52		
Nickel	I	3.45	32		

		Wolle		Seide	
		ε_∞	α	ε_∞	α
Schellack	I	3.47	46	3.32	35
	II	6.07	63		
Schwefel	I	3.54	83		
	II	5.64	37		
Siegellack	I			3.55	39

Nimmt man von den in dieser Tabelle enthaltenen Werthen die Mittel, so ergiebt sich die folgende Zusammenstellung, welche eine Vergleichung der den einzelnen Stoffen entsprechenden Wege wenigstens der Größen-Ordnung nach gestattet.

	Bernstein	Glas	Hartgummi I—III	Hartgummi IV—VI
α (cm)	40	290	32	29

	Holz	Nickel	Schellack	Schwefel	Siegellack
α (cm)	52	32	51	60	39.

Hiernach ist die Größenordnung von α bei der Mehrzahl der Stoffe dieselbe; nur das Glas zeichnet sich aus durch den großen Betrag, welchen α insbesondere bei der Reibung an Wolle erreicht. Dem entspricht der Umstand, daß bei den Glasplatten die Reibung in der Regel bis zu einer Strecke von 12 m ausgedehnt wurde, um den Maximalbetrag der Ladung zu erhalten, während bei den übrigen Platten eine Strecke von 3 m im Allgemeinen genügend war.

Den von mir früher auf theoretischem Wege abgeleiteten Formeln nach müßte zwischen den Größen ε_∞ und α ein gewisser Zusammenhang bestehen. Bezeichnet man nemlich durch u die Geschwindigkeit, mit welcher der Reiber gegen die geriebene Fläche bewegt wird, durch q den Coëfficienten der Zerstreuung bei der Berührung zwischen Reiber und Reibzeug, durch $\varkappa$ einen Coëfficienten, welcher der elektrischen Spannung zwischen den beiden sich berührenden Flächen proportional ist, so würden die Beziehungen stattfinden

$$\varepsilon_\infty = \varkappa u/q \quad \text{und} \quad \alpha = u/q$$

und es müßte hiernach $\varepsilon_\infty/\alpha$ eine für die Reibung zweier Stoffe charakteristische Constante sein. Man überzeugt sich leicht, daß diese Beziehung durch die in der vorhergehenden Tabelle zusammengestellten Zahlen nicht bestätigt wird. Es mag dieß seine Erklärung zunächst darin finden, daß die Voraussetzungen der Theorie bei den Versuchen nicht erfüllt sind. Diese letztere beruht auf der Annahme einer konstanten Geschwindigkeit u. Bei den Versuchen war die Geschwindigkeit am Anfang und Ende der Strecke von 75 cm, welche jeweilig in einem Zuge durchlaufen werden konnte, jedenfalls geringer als in der Mitte derselben. Die Theorie betrachtet ferner die an einander geriebenen Flächen als vollkommen isolirend; sie sieht ab von den Elektricitätsmengen, welche an die Luft und an die nicht berührten Stellen der geriebenen Oberflächen abgegeben werden; sie nimmt endlich keine Rücksicht auf die Aenderung der Ladungen, welche durch diëlektrische Polarisation der Platten bedingt ist. Außerdem muß aber hervorgehoben werden, daß die Werthe von α, wie sie aus den Beobachtungen abgeleitet wurden, mit einer ziemlichen Unsicherheit behaftet sind. Die für Hartgummi mitgetheilten Tabellen zeigen, daß in den einzelnen Beobachtungsreihen zwar die schließlich erreichten Ladungen nahezu dieselben sind, daß aber in der Art des Ansteigens der Ladung große Verschiedenheiten obwalten. Ferner ist die Zahl der zu der Berechnung von α verwendbaren Werthpaare A, s eine sehr kleine, in den meisten Fällen höchstens gleich 3, bei Glas gleich 4—6. Durch diese Umstände wird es bedingt, daß die mitgetheilten Werthe von α im Allgemeinen nur bis auf 10 Einheiten, bei Glas bis auf 50 Einheiten als richtig zu betrachten sind. Die genauere Bestimmung des Zerstreuungskoëfficienten erscheint als eine Aufgabe von großem Interesse. Man kann nemlich vermuthen, daß eine Spannungsreihe existirt für die Constanten $\varkappa$; mit dieser Reihe würden die aus der Beobachtung der maximalen Ladung sich ergebenden nur dann übereinstimmen, wenn die Zerstreuung für alle an einander geriebenen Stoffe die gleiche wäre; Abweichungen verschiedener Reihen können durch die Verschiedenheit der Zerstreuung bedingt sein. Durch die vorhergehenden Untersuchungen ist mit Sicherheit nachgewiesen, daß der Weg α für Glas wesentlich größer, die Zerstreuung also wesentlich kleiner ist als bei den anderen Stoffen. Würde man also den Uebergang machen von den maximalen Dichtigkeiten ε_∞ zu den Constanten $\varkappa$, so würde zwar die aufgestellte Reihe dieselbe bleiben, aber es würde das Glas der Wolle erheblich näher rücken.

Einfluß der Temperatur und des Aggregatzustandes auf das Verhalten des Wismuths im Magnetfelde.

(Mit 3 Fig.).

Von

P. Drude und **W. Nernst.**

In den letzten Jahren sind eine Anzahl eigentümlicher Erscheinungen aufgefunden worden, welche in aus metallisch leitendem Materiale gefertigten Platten auftreten, wenn dieselben sich senkrecht zu den Kraftlinien eines magnetischen Feldes befinden und entweder von einem galvanischen oder von einem Wärmestrome durchflossen werden. Es sind dies die von Hall entdeckte Drehung der Aequipotentiallinien eines galvanischen Stromes, die von Righi zuerst beobachtete Widerstandszunahme (Hall'scher Longitudinaleffekt); ferner die thermomagnetischen Transversal- und Longitudinaleffekte, welche in von einem Wärmestrome durchflossenen Platten auftreten (von Ettingshausen und Nernst), sowie die Umkehrungen derselben, nämlich der galvanomagnetische Transversaleffekt (von Ettingshausen) und der galvanomagnetische Longitudinaleffekt (Nernst), welche wiederum in von einem galvanischen Strome flurchflossenen Platten beobachtet werden.

Das Interesse, welches den soeben aufgeführten Phänomenen an sich dargebracht werden muß, weil sie einer neuen Wechselwirkung zwischen den magnetischen und elektrischen Kräften sowie der strömenden Wärme ihre Entstehung verdanken, wird noch erhöht dadurch, daß sie allen Anzeichen nach einst eine gewisse Bedeutung erlangen werden, wenn es sich um die Lösung der Frage nach der Natur der galvanischen Stromleitung in den Metallen handelt. So haben wir es denn unternommen, zu dem experimentellen Studium dieser Phänomene einen Beitrag nach einer Seite hin zu bringen, welche bisher nur ganz vereinzelt gestreift wurde, nämlich zu der Frage, wie dieselben, speciell beim Wismuth, von der Temperatur und dem Aggregatzustande beeinflußt werden, und zwar wählten wir unter ihnen die beiden zuerst aufgezählten, weil der Untersuchung der übrigen in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur nicht unbedeutende Schwierigkeiten im Wege stehen.

Der Elektromagnet, dessen wir uns bei unsern Versuchen bedienten, besitzt aufrechtstehende Schenkel, auf denen zwei Polschuhe horizontal verschoben werden können; dieselbe ist nach den Angaben von Herrn Prof. Riecke gebaut und hat einige Aehnlichkeit mit dem großen Elektromagneten der Berliner Akademie [1]). Der magnetisierende Strom wurde von einer Dynamomaschine geliefert und schwankte bei unsern sämtlichen Versuchen nur wenig um den Mittelwert 10 Ampère; die Intensität des magnetischen Feldes, welche dieser Stromstärke und dem bei unsern Versuchen ebenfalls konstant erhaltenen Abstande der beiden Polschuhe (Länge 20 cm, Breite und Dicke 4 cm) entsprach, betrug etwa 7000 cgs, wie wir aus der Größe des Halleffektes und der Widerstandszunahme des Wismuths schätzten.

Das Galvanometer, an dem der Halleffekt und die Widerstandszunahme gemessen wurde, war eines der bekannten Wiedemann'schen Form; es besitzt zwei dickdrähtige Rollen von zusammen etwa zwei S.E Widerstand und war durch Astasierung auf genügende Empfindlichkeit gebracht. Es befand sich außerdem in hinreichendem Abstande vom Elektromagneten, um nicht von der direkten Fernewirkung desselben in störender Weise beeinflußt zu werden.

Bei messenden Versuchen ist es natürlich unbedingt erforderlich, die zu untersuchenden Platten auf konstanter Temperatur zu erhalten, damit nicht durch Thermoströme und durch die Beeinflussung, welche diese und die in der Platte verlaufenden Wärmeströmungen durch den Magnetismus erfahren, die Beobachtung der betreffenden Wirkungen unmöglich gemacht oder wenigstens sehr gestört würde. Wir erzielten die gewünschten hohen Temperaturen durch Dampfbäder, in welche die Platten direkt eintauchten; als Heizflüssigkeiten verwendeten wir Wasser (Siedepunkt 100°) Benzoesäureamylester (254°) und Diphenylamin (310°).

Der Erhitzungsapparat mußte im Hinblick darauf konstruiert werden, daß der zur Verfügung stehende Raum bei der geringen Ausdehnung, welche man einem magnetischen Felde geben darf, wenn man nicht auf Homogenität und Stärke verzichten will, ein sehr beschränkbar ist. Wir haben schließlich den beistehend (Fig. 1) abgebildeten Apparat als in jeder Hinsicht zweckmäßig gefunden; dieselbe besteht aus einem 7 cm breiten, 23 cm hohen und 1 cm dicken Kasten, welcher aus 0·8 mm dicken Messingblech gefertigt und in allen seinen Theilen hart gelöthet war. Der Kasten wurde zwischen die Polschuhe *PP* des Elektromagnets

---

1) Man sehe die Zeichnung bei Quincke, Wied. Ann. 24. 359 (1885).

fest eingeklemmt (cf. Fig. 1), an der direkten Berührung jedoch durch Asbestpappe gehindert. Um ein Entweichen der siedenden Dämpfe zu verhüten, waren an sein oberes Ende zwei Messingkästen angelöthet, welche mit Wasser gefüllt nach Art eines Rückflußkühlers in so vollständiger Weise wirkten, daß ein Verschluß des mittleren Kasten überflüssig war, ein Umstand, welcher der bequemen Einführung der zu untersuchenden Platten im hohen Grade förderlich war. In die unmittelbare Nähe der Platten wurde stets die Quecksilberkugel eines Thermometers gebracht.

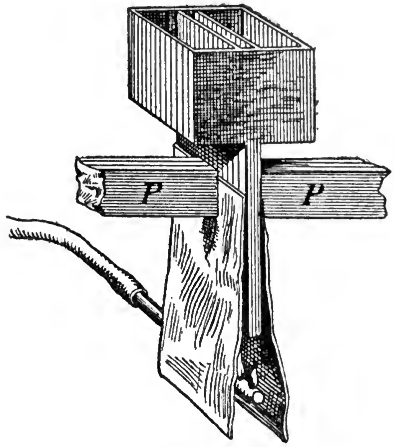


Fig. 1.

Um einerseits eine intensive Erwärmung des Kastens zu erzielen, andrerseits aber die Rollen des Elektromagnets, welche für die Anbringung der Heizflammen nur einen sehr beschränkten Raum übrig ließen, nicht der Gefahr des Verbrennens auszusetzen, konstruierten wir aus einem einseitig geschlossenen und seitwärts mit fünf Löchern versehenen Messingrohre einen Brenner, der mit einem Gemisch von Leuchtgas und Luft gespeist wurde; letzteres wurde dadurch erzeugt, daß ein vor den Brenner geschaltetes T-Rohr mit der Gasleitung und mit einem Wassergebläse kommunizierte. Diese Vorrichtung gefährdete die Umspinnung der Rollen, welche durch Messingbleche vor direkter Strahlung geschützt wurden, nicht im geringsten und lieferte zugleich Wärme genug, um auch die hochsiedenden Flüssigkeiten nach wenigen Minuten in heftiges Kochen zu bringen.

Das bei den nachstehend beschriebenen Versuchen benutzte Wismuth schmolz bei 267° und war jedenfalls sehr rein; es ist gleicher Herkunft wie dasjenige, welches das Material zu Platte No. II lieferte, die früher[1]) von mir bezüglich der Hall'schen Wirkung eingehend untersucht worden ist, und hat auch sonst mehrfach zu ähnlichen Versuchen gedient.

Hallphänomen im Wismuth. Eine quadratförmige, 0·5 cm dicke Wismuthplatte war mit vier an den Mitten ihrer

---

1) von Ettingshausen u. Nernst, Wiener Sitzungeber. **94**. 592 (1886). Vgl. auch Nernst, Wied. Ann. **31**. 772 (1887).

Seiten angeschmolzenen Kupferdrähten versehen, von denen alternierend zwei zu einem Bunsenelemente, welches den Primärstrom lieferte, und zwei zum Galvanometer führten, an dem der Transversaleffekt beobachtet wurde. Indem so die Anwendung von Loth vermieden war, konnte die Platte bis auf den Schmelzpunkt nahe Temperaturen erhitzt werden, ohne daß die Zuleitungen, welche gleichzeitig der Platte als Träger dienten, sich lösten. Als die letztere in der untenstehenden Reihenfolge auf die Temperaturen t gebracht wurde, beobachteten wir folgende, auf gleichen Primärstrom bezogene elektromotorischer Kräfte e des Hall'schen Stromes, diejenige bei der Anfangstemperatur gleich eins gesetzt.

t	e
20^0	1·000
254^0	0·418
23^0	1·005.

Da nach obigen Zahlen der Halleffekt kurz vor dem Schmelzpunkte, wenn auch erheblich schwächer wie bei gewöhnlicher Temperatur, doch immerhin in mit anderen Metallen verglichen großer Stärke zu konstatieren war, so erschien der Versuch, denselben auch in flüssigem Wismuth zu untersuchen, besonders verlockend, weil man aus dessen Verhalten am ehesten zu schließen geneigt sein wird, ob das Hall'sche Phänomen vorwiegend an den krystallinischen Zustand gebunden ist oder nicht. Der diesbezügliche Versuch ergab, daß bei der zur Verwendung gelangten Probe von geschmolzenen Wismuth das Hall'sche Drehungsvermögen, wenn überhaupt meßbar, so doch sicherlich weniger wie $^1/_{60}$, wahrscheinlich weniger wie $^1/_{100}$ von dem bei Zimmertemperatur beobachteten Werte beträgt.

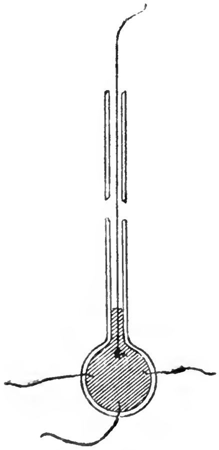


Fig. 2.

Die Untersuchung des geschmolzenen Wismuths gelang in einer unten zugeschmolzenen, aufgeblasenen und hierauf platt gedrückten Glasröhre, welche mit drei eingeschmolzenen Platindrähten versehen war (cf. Fig. 2). Die vierte Zuleitung geschah mittelst eines von oben eingeführten Platindrahtes. Das Rohr wurde leer in den Dampf des siedenden Diphenylamins gebracht, hierauf mit Wismuth beschickt, indem dieses in kleinen Stückchen durch das 0·5 cm weite Glasrohr hineingeworfen wurde, und sodann unter den gleichen Bedingungen wie die erste Platte untersucht. Mit Kommutieren des magnetisierenden Stromes trat allerdings eine deutliche Ablenkung auf, die jedoch mit der Richtung des Primärstromes nicht die eigne wechselte, also keinesfalls von einer Hall'schen Wirkung herrührte. Worauf dieselbe beruht, müssen wir vorläufig dahingestellt sein lassen; sie verschwand, als man den Primärstrom öffnete, schien jedoch im übrigen mehr sekundären Ursprungs zu sein. Aller Wahrscheinlichkeit nach ist sie an den flüssigen Zustand gebunden, wie daraus geschlossen werden kann, daß eine ähnliche Wirkung und zwar etwa gleich stark auch dann auftrat, als der Apparat mit Quecksilber anstatt mit flüssigem Wismuth beschickt war (s. u.), und daß sie verschwand, sowie das Wismuth erstarrte.

Unmittelbar nachdem das Wismuth fest geworden und bis auf 50° abgekühlt war, wobei wider Erwarten das Glasgefäß von dem beim Ersteren sich ausdehnenden Wismuth nicht gesprengt wurde, konnten wir den Halleffekt in einer der Dicke der Platte entsprechenden Größe beobachten; bei weiterer Abkühlung bis auf 15° wurde er um etwa 2 % kleiner.

Mit der unveränderten Platte stellten wir hierauf, um uns über die Abhängigkeit des Transversaleffektes von der Temperatur bis in die Nähe des Schmelzpunktes zu orientiren, folgende Messungen an:

t	e
14°	1·00
243°	0·23
100°	1·23
14°	1·16.

Das Wismuth kehrte beim Abkühlen somit nicht ganz in den früheren Zustand zurück, eine bei der vielfach beobachteten Abhängigkeit des Transversaleffektes von der Behandlung, welche man dem Metall hat angedeihen lassen, nicht unerwartete Erscheinung. Auch dieser Versuch zeigt, daß das Hall'sche Drehungsvermögen beim Abkühlen von 100° auf 14° abnimmt, was mit einer älteren Beobachtung in Uebereinstimmung sich befindet [1]; die Abnahme desselben bei höherer Temperatur ist hier nicht unerheblich größer wie bei der ersten Platte. Jedenfalls ist aber die Abnahme in dem Intervall von 243° bis 310°, in welches die Verflüssigung des Wismuths fällt, eine außerordentlich viel stärkere, wie in dem ganzen übrigen untersuchten.

Widerstandszunahme des Wismuths im Magnet-

1) von Ettingshausen und Nernst, Wiener Sitzungsber. **94**. 593 (1886). Eine zweite, aus Wismuth anderer Herkunft gefertigte Platte hingegen lieferte bei den Temperaturen 0, 21, 99° für das Drehungsvermögen die Werte 8·1, 7·3, 4·1, zeigte also eine starke Abnahme schon bei gewöhnlicher Temperatur. Vgl. auch Léduc, C.R. **102**. 358 (1886).

felde. Wie bekannt[1]) übt der Magnetismus außer dem Halleffekt noch eine zweite Wirkung auf ein von einem galvanischen Strome senkrecht zu den Kraftlinien des Feldes durchflossene Wismuthplatte aus, welche gewöhnlich als Widerstandsänderung gedeutet wird, aber natürlich mit gleichem Rechte als eine durch den Magnetismus erzeugte elektromotorische Gegenkraft, d. h. als longitudinaler Halleffekt aufgefaßt werden kann[2]).

Ueber den Einfluß der Temperatur auf die Größe dieses Effektes liegen bis jetzt nur einige vereinzelte Angaben vor, welche sich auf ein beschränktes Intervall erstrecken. So konstatierte bereits Righi (l. c.), daß bis 100° die Widerstandsvermehrung infolge Erregung des Magnetfeldes kleiner wird. E. von Aubel[3]) theilte kürzlich einen Versuch mit, wonach dieselbe bei 99·7° nur 0·415 % betrug, während sie unter sonst gleichen Umständen bei 0° 2·9 % war, konstatierte also eine sehr bedeutende Veränderlichkeit mit der Temperatur, was die nun mitzuteilenden eigenen Versuche durchaus bestätigen.

Bei unseren Messungen, welche sich wiederum bis über den Schmelzpunkt hinaus erstrecken, befand sich das Wismuth im Innern einer dünnwandigen Glaskapillare, welche senkrecht zu den Kraftlinien des Feldes in den Erhitzungsapparat eingeführt wurde (cf. Fig. 3). Die Zuleitungen des Primärstroms und die Ableitungen zum Galvanometer wurden durch je zwei, zur gegenseitigen Isolation mit Glaskapillaren überzogene Platindrähte vermittelt. Der Ausschlag, welchen das Galvanometer bei geschlossenem Primärstrome anzeigt, ist dem Widerstande des Wismuthstäbchens proportional und kann durch ihn die Zunahme dieses bequem gemessen werden. Zur besseren Ausnützung der Skala des Galvanometers wurde gewöhnlich mittelst einer durch Abzweigung von einem Hülfselemente erzeugten elektromotorischen Kraft der Aussschlag kompensiert. Diese Methode hat den großen Vortheil, unabhängig von etwaigen Uebergangswiderständen zu sein, welche an den Zuleitungen zum Wismuth ihren Sitz haben könnten. Auch die Glaskapillaren sprangen nicht, wenn das Wismuth wieder festen Aggregatzustand annahm.

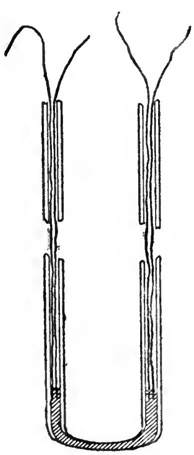


Fig. 3.

1) Righi, Journ. de Phys. [2]. 3. 355 (1884).
2) Nernst, Wied. Ann. 31. 783 (1887).
3) E. von Aubel, Phil. Mag. [5]. 28. 342 (1889).

In der folgenden Tabelle sind die bei den daneben stehenden Temperaturen t beobachteten Werthe für die Widerstandszunahme infolge der Magnetisierung Δw in $^0/_0$ verzeichnet; in der dritten Kolumne befindet sich der Widerstand w des Wismuthstäbchens in SE.

t	Δw	w
16°	21·9	0·250
100°	8·0	0·227
223°	0·96	0·250
290°	0·41	0·117
35°	15·1	0·207
18°	18·6	0·208.

Die Zahlen sind in der Reihenfolge mitgetheilt, in der wir sie erhielten; zwischen der vorletzten und letzten Messung lag ein Zeitraum von mehreren Stunden. Sowohl an der Widerstandszunahme wie besonders an seiner absoluten Größe ohne den Einfluß des Magnetismus ist deutlich erkennbar, daß beim Abkühlen sich der frühere Zustand nicht genau wieder herstellte. Möglicherweise wirkte hier eine Auflösung des Platins der Zuleitungsdrähte im geschmolzenen Wismuth mit, welche bei der leichten Legierbarkeit dieser Metalle mindestens spurenweise erfolgen muß.

Bei 290° war das Wismuth geschmolzen; die Erscheinung, daß der specifische Widerstand dieses Metalles beim Schmelzpunkte plötzlich sehr viel kleiner wird, ist bereits wiederholt [1]) beobachtet worden und findet sich auch in den von uns für w gefundenen Werten ganz auffallend wieder. Die Widerstandszunahme des flüssigen Wismuths infolge der Magnetisierung war unzweifelhaft vorhanden, wenn auch außerordentlich viel kleiner, wie die des festen Metalls bei gewöhnlicher Temperatur. Ob dieselbe in beiden Fällen einer gleichen Wirkung entspringt, oder ob vielleicht Strömungen, welche infolge der vom Elektromagneten auf den flüssigen Leiter ausgeübten ponderomotorischen Kraft entstehen können, eine sekundäre Rolle spielen, muß vorläufig dahingestellt werden [2]). Jedenfalls zeigen longitudinaler wie transversaler Hall-

---

1) Insbesondere sind unsere Resultate im Einklang mit den Beobachtungen von C. L. Weber (Wied. Ann. 27 1886, p. 145), sowohl was die bedeutende Widerstandsabnahme beim Schmelzen, wie den Umstand anlangt, daß beim Abkühlen sich häufig der frühere Zustand nicht wieder herstellt.

2) Für die letztere Annahme spricht ein inzwischen von uns angestellter Versuch, wonach auch Quecksilber bei Zimmertemperatur in gleicher Weise untersucht eine nach einigen $^0/_{00}$ zählende, unzweifelhafte Widerstandszunahme zeigte. (Anm. bei der Correktur.)

effekt beide die Erscheinung, daß sie bei hoher Temperatur an Intensität sehr stark abnehmen; aber der Grad der Abnahme geht keineswegs bei beiden parallel. Während die Widerstandszunahme schon bei erheblich unter dem Schmelzpunkte liegenden Temperaturen einen sehr kleinen Betrag annimmt, liegt beim Halleffekt das Gebiet der rapiden Abnahme entweder sehr nahe beim Schmelzpunkt oder aber er verschwindet plötzlich, wenn das Wismuth den flüssigen Aggregatzustand annimmt. Die Entscheidung zwischen letzteren beiden Möglichkeiten dürfte erhebliches Interesse bieten, war uns zu treffen bisher aber nicht möglich.

Mit einer zweiten von Wismuth gleicher Herkunft beschickten Kapillare fanden wir die Werte:

t	Δw
29°	16 %
310°	0·1 %
254°	1·2 %
32°	20 %
100°	9·1 %
34°	22,0 %

und mit einer dritten:

t	Δw
25°	33·3 %
310°	0·4 %.

Resultate, welche mit dem früheren Ergebnis in Uebereinstimmung sich befinden.

Aus den bisherigen Ergebnissen kann man wohl mit einiger Sicherheit den Schluß ziehen, daß auch die thermomagnetischen Phänomene bei hohen Temperaturen an Stärke bedeutend einbüßen werden; thatsächlich ist denn auch bereits früher von Einem von uns eine Abnahme derselben mit zunehmender Temperatur mehrfach konstatiert worden[1]). Denn wenn auch eine zahlenmäßige Beziehung zwischen den Intensitäten, mit welchen die verschiedenen magnetischen Effekte des Wismuths auftreten, bisher sich nicht hat auffinden lassen, so ist doch ein inniger Zusammenhang durch die Versuche an Wismuth-Zinnlegirungen[2]) wohl außer Zweifel gestellt.

Vielleicht wird einst bei der Beantwortung der Frage, welche Eigenschaften die Aktivität der Metalle im magnetischen Felde bestimmen, die große Veränderlichkeit derselben mit der Tempe-

1) Nernst, l. c. 772 und 781.

2) E. v. Ettinghausen und Nernst, Wied. Ann. 33. 790 (1888).

ratur beim Wismuth, des aktivsten aller Metalle, einen Fingerzeig bieten. Hier sei nur noch darauf hingewiesen, daß bekanntlich Wismuth bei höherer Temperatur die für dies Metall so charakteristische Sprödigkeit verliert und sich in Drathform pressen [1]), ja sogar bei Temperaturen von 230 bis 260° mit Anwendung einiger Kraft kneten läßt [2]). Es stimmt dies auch mit den sonstigen Erscheinungen überein; denn es läßt sich im Großen und Ganzen nicht verkennen, daß auch außer Wismuth gerade die durch ihre Sprödigkeit ausgezeichneten, metallisch leitenden Stoffe, wie Kohle, Antimon und besonders Tellur, sich besonders aktiv erweisen.

Hallphänomen im Antimon. In der gleichen Weise, wie beim Wismuth, bestimmten wir auch beim Antimon den Einfluß der Temperatur, wobei wir uns einer viereckigen Platte, welche mit vier am Rande als Elektroden mittelst einer Stichflamme angeschmolzenen Platindrähten versehen war und eine Dicke von 0·201 cm besaß, bedienten. Wir erhielten der Reihe nach folgende Werte:

t	e
17°	1
210°	0·78
250°	0·72
30°	0.76
23°	0.91.

Es fällt bei diesen Zahlen auf, wie geringfügig der Einfluß der Temperatur beim Antimon verglichen mit Wismuth ist. Hiermit steht vielleicht wieder der Umstand in Zusammenhang, daß Antimon sich erst bei erheblich höheren Temperaturen als Wismuth und auch da nur mit Anwendung viel größeren Druckes zu Draht pressen läßt [3]).

Hallphänomen im Quecksilber. In dem gleichen Apparate, in welchem geschmolzenes Wismuth zur Untersuchung gelangt war (Fig. 2), wurde Quecksilber der Messung unterworfen. Wir beobachteten, wie schon erwähnt, einen deutlichen Ausschlag bei Kommutieren des magnetisierenden Stromes, welcher jedoch mit der Richtung des das Quecksilber durchfließenden Stromes die eigene nicht wechselte und demgemäß nicht von einer Hall'schen Wirkung herrührte; und zwar betrugen die wegen der direkten Fernewirkung des Elektromagnets auf die Galvanometernadel korrigierten Nadelausweichungeen bei beiden Richtungen des

1) Matthiessen, Pogg. Ann. **100**. 177 (1857).
2) Ph. Lenard, Wied. Ann. **39**. 641 (1890).
3) Lenard l. c. 639.

Primärstromes 49 bez. 46 Skalentheile. Das Quecksilber hatte Zimmertemperatur. Als das Glasgefäß, in welchem sich jenes befand, zur Verminderung etwaiger durch Peltiereffekte oder Joule'schen Wärme erzeugter Temperaturverschiedenheiten in ein Gefäß mit Wasser gesetzt wurde, betrugen unter sonst gleichen Umständen die bei den Erregungen des Magneten auftretenden Ausschläge 53 bez. 48 Skalentheile. Bei der Größe der störenden Nebenwirkung wäre es gewagt, die halben Differenzen, welche in beiden Fällen mit gleichem Vorzeichen bei Umkehr des Primärstomes auftreten und 1·5 im ersten, 2·5 Skalentheile im zweiten Falle betragen, als Hall'sche Wirkung zu deuten; doch sei der Vollständigkeit halber angeführt, daß dieselben einer Hall'schen Wirkung entsprechen würden, welche in gleicher Richtung aber etwa 300 mal schwächer aufträte, wie beim Wismuth unter sonst gleichen Bedingungen.

Göttingen, Physikal. Inst. Oct. 1890.

Anhang.

Es wurde vor einiger Zeit das Wismuth auf eine eventuelle Aenderung seiner optischen Konstanten im Magnetfelde durch Beobachtung von reflectirtem Lichte untersucht[1]); das einfallende Licht war linear unter dem Azimuth 45^0 gegen die Einfallsebene polarisiert. Es wurde eine Wismuthsorte untersucht von großer Reinheit, welche bei den oben angeführten Versuchen eine starke Widerstandsänderung im Magnetfelde zeigte und eine weniger reine Sorte, welche nicht hinsichtlich des letzteren Verhaltens geprüft ist.

Die beiden Pole des Elektromagneten waren stets sehr genähert, zum Theil bis auf 3 mm. Wenn der Gang der Lichtstrahlen es gestattete, waren die Wismuthspiegel in der Mitte zwischen den Polen angebracht, sodaß sie sich in sehr starkem magnetischem Felde befanden.

Es wurden die drei Fälle untersucht: 1) daß die Kraftlinien senkrecht zum Spiegel verliefen, oder 2) parallel dem Spiegel und in der Einfallsebene des Lichtes oder 3) parallel dem Spiegel und senkrecht zur Einfallsebene. In keinem Falle war eine Aenderung der optischen Konstanten zu constatiren weder eine solche, welche sich mit der Magnetisirungs-Richtung umkehrte, noch eine solche, welche von der Richtung unabhängig und die eventuell nur an das Vorhandensein des magnetischen Feldes überhaupt geknüpft

1) Die hier beschriebenen Messungen sind von P. Drude angestellt.

gewesen wäre. Dieser letztere Fall wäre ja denkbar gewesen, wenn die Aenderung der optischen Konstanten des Wismuths ganz parallel verliefe mit der des elektrischen Widerstandes. Dieser ist ja bekanntlich von der Magnetisirungs-Richtung unabhängig, jedoch verschieden parallel oder senkrecht zu den Kraftlinien. Im letzteren Falle müßte der Wismuthspiegel sich wie ein reflectirender absorbirender Krystall verhalten und diese Erscheinung müßte daran zu erkennen sein, daß die elliptische Polarisation des reflectirten Lichtes durch Erregung des Magnetfeldes geändert und dann von der Lage der Einfallsebene abhängig würde. In keinem Falle war aber eine solche Modifikation deutlich zu bemerken, indem sowohl die relative Phasenverzögerung als auch das Amplitudenverhältniß des reflectirten Lichtes bei unerregtem magnetischen Felde dieselben waren, wie bei erregtem und zwar in allen oben angeführten drei Versuchsanordnungen.

Wenn eine Aenderung der Natur des reflectirten Lichtes eintreten sollte, welche sich mit der Magnetisirungs-Richtung umkehrt, so würde dies ein dem von Kerr entdeckten Verhalten der magnetischen Metalle Eisen, Nickel, Kobalt analoges Phänomen sein. Um eine solche eventuelle Aenderung noch besser entdecken zu können, wurde mit sehr intensivem weißen Lichte beobachtet, welches in oder senkrecht zur Einfallsebene polarisirt war. Eine Drehung der Polarisationsebene in dem Betrage von 1′ wäre noch zu constatiren gewesen. Es war aber eine solche nicht vorhanden. Bei einem Stahlspiegel war bei denselben Versuchsanordnungen das Kerr'sche Phänomen sehr deutlich zu beobachten, unter gewissen Bedingungen[1]) ergaben sich Drehungen der reflectirten Polarisationsebene bei commutirtem Magnetfeld bis zum Betrage von 32′.

Das sich aus meinen Beobachtungen ergebende negative Resultat am Wismuth befindet sich im Widerspruch mit Beobachtungen Herrn Hurion's[2]), nach welchem am Wismuth das Kerr'sche Phänomen bei senkrechter Incidenz den Betrage von 18′ erreichen soll. Ich halte indeß dieses Beobachtungsresultat nicht für sicher, da das Licht zweimal eine Glasplatte durchsetzte, welche der Polarisationsebene eine sehr starke elektromagnetische Drehung ertheilte. Bei meiner Versuchsanordnung waren solche Glasplatten vermieden und das Resultat ist aus derselben also jedenfalls in direkterer Weise abgeleitet, als bei Herrn Hurion.

1) Wenn nämlich die magnetische Axe senkrecht zum Spiegel stand, der Einfallswinkel 68° betrug und das einfallende Licht parallel zur Einfallsebene polarisirt war

2) Hurion, Journal de Physique 1884.

Ueber die Größe der Wirkungssphäre der Molecular-Kräfte und die Constitution von Lamellen der Plateau'schen Glycerin-Seifen-Lösung.

Von

P. Drude.

Die Untersuchung dünner Flüssigkeitslamellen bietet von zwei Gesichtspunkten aus gewisses physikalisches Interesse, insofern als dieselbe

1) zur Beantwortung der Frage dienen kann, an welche Bedingungen das Zustandekommen einer dünnen Lamelle geknüpft ist;

2) einen Beitrag zu der Vorstellung von der Größe der Wirkungssphäre der Molecularkräfte liefern kann.

Hinsichtlich des ersten Punktes geht bekanntlich die Plateau'schen Ansicht dahin[1]), daß eine Flüssigkeit dann im Stande ist, dauerhafte Lamellen zu bilden, wenn sich eine geringe Oberflächenspannung verknüpft mit einer großen Zähigkeit der Oberfläche. Diese Bedingungen sind bei der Glycerin-Seifenlösung erfüllt. Die Oberflächenspannung ist verhältnißmäßig gering und außerdem haben direkte Versuche Plateau's eine bedeutende Reibung in ihrer Oberfläche constatirt, die bei weitem größer ist, als im Innern derselben. Diese Versuche sind später von Herrn Oberbeck[2]) bestätigt.

Es würde demnach die genannte Flüssigkeit nicht im Ganzen homogen sein, sondern sie müßte eine Oberflächenschicht mit bedeutend gegen das Innere gesteigerter Zähigkeit, quasi ein festes Häutchen besitzen. Wie sich dieses bilden kann, mag hier unerörtert bleiben.

Die Ansicht, daß eine Seifenlösung mit einer Oberflächenschicht bedeckt sei, welche zu ihrer Bildung eine endliche Zeit nöthig hat, hat eine Stütze durch Versuche von Dupré[3]) und Lord Rayleigh[4]) gefunden, welche constatirten, daß die Oberflächenspannung von Seifenlösungen nach der Methode der Wellenlängenmessung eines frisch sich aus dem Innern der Lösung gebildeten ca-

1) Plateau, Statique des Liquides.
2) A. Oberbeck, Wied. Ann. 11, p. 634. 1887.
3) Dupré, Theorie mécanique de la chaleur. § 161.
4) Lord Rayleigh, Proc. Roy. Soc. 28. März 1890.

pillaren Strahles gemessen ungefähr der des reinen Wassers gleich ist, während sie nach den gewöhnlichen statischen Methoden viel kleiner ausfällt.

Um gewisse Anhaltspunkte für die Beurtheilung der Größe der Wirkungssphäre der Molecularkäfte zu gewinnen, hat man die Flüssigkeitslamellen auf Grund folgender Ueberlegungen benutzt:

Falls die Dicke einer Flüssigkeitsschicht kleiner wird, als der doppelte Radius der Wirkungssphäre, so muß ihre Oberflächenspannung abnehmen. Infolge hiervon würde die Lamelle an einer solchen Stelle, deren Dicke unterhalb jener Größe liegt, durch Wirkung der Nachbarstellen mit größerer Oberflächenspannung noch weiter verdünnt werden, d. h. die Lamelle wäre in instabilem Gleichgewicht und würde platzen. Aus der geringsten möglichen Dicke einer Seifenlamelle hat man daher eine obere Grenze für den Radius der Wirkungssphäre der Molecularkräfte abgeleitet, Plateau bestimmt sie so zu 59.10^{-6} mm, indem die kleinste beobachtete Dicke bei Seifenlamellen 118.10^{-6} mm war.

In neuerer Zeit hat Herr Sohncke[1]) eine untere Grenze für den genannten Radius aus Versuchen über die Ausbreitung von Oeltropfen auf Wasser abgeleitet, wobei man von der Ansicht ausgehen muß, daß das Zerplatzen des Tropfens wirklich erst dann stattfindet, wenn die Dicke oder die doppelte Dicke die Größe jenes Radius erreicht. Die gewonnenen Zahlen schließen sich nahe an die Plateau'sche obere Grenze an.

Mit diesen Werthen stimmen überraschend gut die von Herrn Quincke[2]) gegebenen Zahlen über die Größe der Wirkungssphäre in Metallen, welche aus Beobachtungen des Randwinkels von Flüssigkeiten an Metall-Keilen abgeleitet sind.

Wenn man der Vorstellung beipflichtet, daß die Wirkungssphäre der Molecularkräfte ungefähr unabhängig von der Substanz und besonderen Art der physikalischen Erscheinung, bei der sie in Wirksamkeit treten, sind, eine Vorstellung, welche die eben angeführten Versuche zu einer plausiblen machen können, so widersprechen ihr wieder Versuche von Hrn. Oberbeck[3]), welcher aus dem Verhalten der elektrischen Potentialdifferenz zweier Metalle die Wirkungssphäre zu nur 1 bis 2.10^{-6} mm angiebt. Auch konnten die Herren Warburg und Ihmori[4]) Spuren von mole-

1) L. Sohncke, Wied. Ann. 40. p. 345. 1890.
2) Q. Quincke, Pogg. Ann. 137. p. 402. 1869.
3) A. Oberbeck, Wied. Ann. 31. p. 337. 1887.
4) E. Warburg und T. Ihmori, Wied. Ann. 27. p. 481. 1886.

cularer Attraction des Wassers an Glas noch nicht in einer Entfernung von 2.10^{-6} mm nachweisen.

Ferner lehren neuere Versuche der Herren Röntgen[1]) und Lord Rayleigh[2]), daß sich Fettschichten auf reinem Wasser bis zu einer weit geringeren Dicke (etwas unter 2.10^{-6} mm) ausbreiten, als wie die oben citirten Sohncke'schen Versuche ergeben.

Schließlich können auch die Plateau'schen Zahlen hinsichtlich der geringstmöglichen Dicke von Seifenlamellen noch weit verkleinert werden. Unter geeigneten Versuchsbedingungen zeigen nämlich Seifenlamellen schwarze Flecke, deren Dicke weit unter 118.10^{-6} mm liegen muß. — Ich habe gefunden, daß sie sich am besten ausbilden als horizontale Lamellen an vertikalen Glaswänden. Ich habe so kreisrunde Flecke von 5 cm Durchmesser erhalten. Noch größere erhält man in einer verschlossenen Flasche, welche die Lösung enthält und in welcher durch Schütteln Lamellen gebildet werden.

Eigenthümlich ist das scharfe Absetzen des schwarzen Theiles gegenüber dem farbigen, was auf einen plötzlichen Sprung in der Dicke hindeutet.

Auf die mir denkbare Erklärung dieses Verhaltens will ich nachher eingehen.

Die Dicke dieser schwarzen Flecke ist von den Herren Reinold und Rücker[3]) aus der Beobachtung des elektrischen Leitungswiderstandes zu 12.10^{-6} mm bestimmt.

Hiernach müßte man, auf Grund der Ueberlegung, daß bei einer Lamelle die kleinste mögliche Dicke die doppelte obere Grenze der Wirkungssphäre ihrer Molecularkräfte sein muß, weil sie sonst unstabil wird, letztere zu 6.10^{-6} mm annehmen, also bedeutend kleiner als die oben angeführten Zahlen.

Am besten kann man die Frsge, ob die Molecularkräfte noch auf eine Distanz wirken, welche gleich der halben Dicke der schwarzen Flecke ist, beantworten, wenn man die Oberflächenspannung der schwarzen Flecke direkt vergleicht mit der der farbigen Theile.

Schon vor etlichen Jahren glaubte Hr. Lüdtge[4]) einen Unterschied in der Oberflächenspannung verschieden dicker Seifenlamellen constatirt zu haben. Durch Messung der Dimensionen von

1) W. C. Röntgen, Wied. Ann. 41. p. 321. 1890.
2) Lord Rayleigh, Proc. Roy. Soc. 28. März 1890.
3) A. W. Reinold and A. W. Rücker, Proc. Roy. Soc. p. 334. 1877.
4) Lüdtge, Pogg. Ann. 139. p. 628. 1844.

Seifenkalotten, die an den beiden Enden ein und desselben Rohres angebracht waren, erhielt er das Resultat, daß an der früher gebildeten, d. h. dünneren Lamelle der Krümmungsradius, d. h. auch die Oberflächenspannung größer sei, als an einer dickeren Lamelle. Dies Resultat würde mit den theoretischen Ansichten in Widerspruch stehen.

Diese Beobachtungen sind später von Hrn. Mensbrugghe[1]) wiederholt und zwar in der That mit ganz anderem Resultate: Es zeigte sich gar kein Unterschied im Krümmungsradius bei dünnen und dicken Lamellen, falls der Ueberdruck auf den Seiten der Lamelle der gleiche war. — Indeß bezogen sich diese Messungen immer nur auf noch gefärbte Lamellen und die Methode der Dimensionsbestimmung der Kugelkalotte gestattete nur einen Mittelwerth des Krümmungsradius im Ganzen, d. h. einen Mittelwerth der Oberflächenspannung der an verschiedenen Stellen verschieden dicken Lamelle zu bestimmen.

Ich habe durch Messung des Krümmungsradius einer über einem Gefäß gebildeten Lamelle, welches dasselbe abschloß und einen geringen Ueberdruck im Innern enthielt, die Oberflächenspannung derselben in verschiedenen Dicken bis zu der der schwarzen Flecke hin verglichen. — Die Methode war die, daß die Größe des virtuellen Bildes, welches die flachkugelförmig aufgeblasene Lamelle von einem Gegenstande entwarf, in einem stark vergrößernden Fernrohr mit einem Okular-Schrauben-Mikrometer gemessen wurde. Es konnte so eine Aenderung der Bildgröße um $^1/_4$ % noch constatirt werden. — Es wurde eine Lamelle von ungefähr 10 cm Krümmungsradius und eine zweite von ungefähr 14 cm Krümmungsradius untersucht. Bei der Versuchsanordnung hätte eine Aenderung der Größe des Bildes um 1 % einer Aenderung der Größe des Krümmungsradius, d. h. auch einer Aenderung der Größe der Oberflächenspannung um 1,11% resp. 1,16% entsprechen.

Durch eine vor das Objektiv des Fernrohrs gesetzte Blende war es möglich, den Krümmungsradius an einer Stelle der Lamelle von einer Ausdehnung von nur $2^1/_2$ mm im Durchmesser zu beobachten, und durch Verschiebung dieser Blende konnte ich in dicht aufeinander folgenden Zeitmomenten den Krümmungsradius an verschieden gefärbten, d. h. verschieden dicken Stellen der Lamelle messen. Hierdurch war ausgeschlossen, daß eine Temperaturschwankung in dem geschlossenen Gefäß und eine dadurch bedingte Druckschwankung das Resultat beeinflussen konnte.

1) v. d. Mensbrugghe, Pogg. Ann. 141. p. 608. 1845.

Durch die Versuche habe ich constatirt daß die Oberflächenspannung der Lamelle von sehr dicken Stellen, d. h. weiß gefärbten, bis zu den schwarzen Stellen hin sich jedenfalls um nicht $^1/_2$ $^0/_0$ ändert. Durch eine besondere Anordnung konnte ich mich noch überzeugen, daß bei der Einstellung der Blende auf die schwarzen Stellen wirklich nur Lichtstrahlen ins Fernrohr gelangten, welche allein von dem schwarzen Theile der Lamelle reflectirt wurden. Die schwarzen Theile hatten bei den Versuchen eine Größe von 3 resp. 5 mm im Durchmesser.

Aus diesen Versuchen könnte man geneigt sein, zu schließen, daß die halbe Dicke der schwarzen Flecke, d. h. wenn man die Reinold-Rücker'schen Zahlen benutzt, eine Dicke von 6.10^{-6} mm eine obere Grenze für die Wirkungssphäre der hier auftretenden Molecularkräfte sei, eine Zahl, die weit unter der Plateau'schen oberen Grenze und der Sohncke'schen unteren Grenze liegt. Diese untere Grenze müßte dann also jedenfalls zu groß sein.

Indeß ist dieser Schluß noch nicht einwandsfrei, weil die schwarzen Lamellentheile eine andere Eigenthümlichkeit besitzen, von welcher ich jetzt sprechen werde.

Durch Beobachtung des Polarisationswinkels kann man an einer dünnen Lamelle den Brechungsexponenten ebenso bestimmen, wie an einer Flüssigkeit, bei welcher Reflexion nur an einer Oberfläche stattfindet. Wir wollen eine solche Flüssigkeit im Gegensatz zur lamellar ausgebreiteten eine massive nennen.

Der Polarisationswinkel wurde mit Hülfe eines Spektrometers mit polarisirendem und analysirendem Nickel gemessen. Es wurde mit Sonnenlicht beleuchtet. Es tritt im Gesichtsfeld des Oculars ein schwarzer farbig gesäumter Streifen auf, durch dessen Einstellung auf das Fadenkreuz des Oculars man das Azimut des Analysators sehr bequem und genau bestimmen kann (bis auf 1′). Solange nun das Licht von einer farbigen Stelle einer Seifenlamelle reflectirt wurde, blieb der schwarze Streifen völlig unverrückt, sowie aber die Reflexion an einer schwarzen Stelle stattfand, sprang der Streifen aus dem Fadenkreuz, und das analysirende Nickel mußte um etwa 17′ gedreht werden, um den Streifen wieder ins Fadenkreuz zu bringen.

Bei den Versuchen kam es darauf an, daß der Gang der Lichtstrahlen in den verschiedenen Theilen des Spektrometers genau unverändert blieb, weil sonst sich der schwarze Streifen etwas verschob, allein durch veränderten Gang der Lichtstrahlen. Ferner kam es darauf an, möglichst schnell hintereinander die farbigen Stellen vergleichen zu können mit den schwarzen, um sich von störender Temperatur und eventuell Feuchtigkeitsänderungen der Umgebung frei zu machen. — Es wurde diesen Anforderungen entsprochen, durch eine geeignete Vorrichtung, die ich an anderer Stelle genauer zu beschreiben gedenke.

Es folgt aus diesem Resultat, das unter verschiedenen Umständen und oft wiederholt ist, daß die schwarzen Theile eine andere optische Natur besitzen, als die farbigen. Der Brechungsexponent der ersteren ist um 1 Einheit der zweiten Decimale kleiner, als der letzteren. Für die farbigen Theile war $n = 1{,}430$, für die schwarzen $n = 1{,}420$.

Ich stellte mir nun die Aufgabe, die Dicke dieser schwarzen Stellen unabhängig von jeder willkührlichen Annahme zu bestimmen. Das Reinold-Rücker'sche Verfahren, die Dicke aus der elektrischen Leitungsfähigkeit zu bestimmen, falls man das specif. Leitungsvermögen der Lösung, zu der man ein elektrolytisch leitendes Salz zusetzt, kennt, ist nicht einwandsfrei. Denn man muß dann die Annahme machen, daß die Concentration des Salzes und die Dissociation in der Lamelle und speciell in ihren schwarzen Theilen dieselbe sei, wie in der massiven Lösung und ebenso das specifische Leitungsvermögen. Letztere Annahme trifft aber sehr wahrscheinlich nicht zu, denn sowie die gewöhnliche innere Reibung an den Oberflächentheilen der Seifenlösung bedeutend größer ist, als im Innern, so würden auch die Salz-Jonen in der Oberfläche, d. h. auch in den schwarzen Stellen einer Lamelle größere Reibungswiderstände, als im Innern der Lösung zu überwinden haben, sodaß das spec. Leitungsvermögen der Lamelle geringer ist, als das der massiven Lösung. Sollte dies zutreffen, so müßten Reinold-Rücker die Dicke zu klein bestimmt haben.

Die Resultate indeß, die sie sonst gewonnen haben, daß nämlich die Dicke der schwarzen Stellen längs ihrer ganzen Ausdehnung constant sei, von der seit ihrer Bildung verflossenen Zeit unabhängig sowie von der Farbe, d. h. Dicke der angrenzenden Theile, ferner stets die gleiche bei verschiedenen Lamellen derselben Flüssigkeit, würden von der obigen Annahme nicht beeinflußt werden.

Ich habe nun in der That die letztgenannten Resultate bestätigt gefunden, während ich die Dicke selbst etwas größer fand, nämlich gleich 17.10^{-6} mm. Die Methode ist die, daß man unter schiefem Einfallswinkel (65—75^0) linear polarisirtes Licht von den schwarzen Theilen reflectiren läßt. Wenn der Brechungsexponent bekannt ist, so kann man aus der durch die Reflexion herbeigeführte Drehung der Polarisationsebene des Lichtes sowie der Ellipticität die Dicke berechnen. Der wahrscheinliche Fehler bei der gewonnenen Zahl ist kleiner als 5 %, ein Umstand, der die Methode empfiehlt, wenn es sich um die Bestimmung von Dicken handelt, welche klein gegen die Wellenlänge des Lichtes sind, wo also die sonst üblichen Methoden versagen.

Die gewonnenen Resultate können zu zwei verschiedenen Schlüssen führen, je nachdem man annimmt, daß die Schicht, welche den schwarzen Fleck bildet, denen n also $= 1,42$ ist, auch die farbigen Theile der Lamelle als Oberflächenschicht mit einer Dicke von $8^1/_2 . 10^{-6}$ mm bedeckt, oder daß sie wirklich nur an den Stellen der schwarzen Theile vorhanden ist. Im ersten Falle würde $8^1/_2 . 10^{-6}$ mm eine obere Grenze der Wirkungssphäre der Molecularkräfte sein, im letzteren eine untere, ja es könnte die untere Grenze des Molekularradius sogar noch größer sein.

Bleiben wir zunächst noch bei der Betrachtung der ersten Annahme stehen, so kann man sich die überall constante Dicke der schwarzen Stellen, welche sich auch mit der Zeit nicht ändert (ich konnte in einem Zeitraum von 3 Stunden diese Konstanz beobachten), so erklären: die Seifenlamellen, ebenso eine massive Seifenlösung bedeckt sich an der Oberfläche mit einer sehr zähen Haut, deren Brechungsexponent etwas niedriger ist, als der des homogenen Innern. Die schwarzen Stellen entstehen dadurch, daß diese auf beiden Seiten einer Lamelle gebildeten Häute zusammenstoßen, indem die Flüssigkeit zwischen ihnen fortgeschoben ist. Infolge der großen Zähigkeit der Häute bleibt die Dicke der schwarzen Stellen der Zeit nach constant. Daß sie längs der ganzen Ausdehnung dieselbe ist, ergiebt sich nach dieser Vorstellung von selbst. — Diese Ansicht würde eine Stütze erfahren durch die von Plateau und Oberbeck beobachtete Zunahme der inneren Reibung an der Oberfläche, sowie durch die Versuche von Dupré und Rayleigh über den Unterschied der Oberflächenspannung frisch gebildeter und alter Oberflächen von Seifenlösung.

Da eine alte Seifenlamelle nach dieser Ansicht aus einer oberflächlich überall gleichen Schicht besteht, so würde aus der Konstanz ihres Krümmungsradius folgen, daß die Dicke des Häutchens, d. h. $8 . 10^{-6}$ mm eine obere Grenze für die Wirkungssphäre der Molecular-Kräfte ist, d. h. daß sie weiter jedenfalls nicht wirken.

Die Möglichkeit einer Flüssigkeit, dauerhafte Lamellen zu bilden, wäre danach geknüpft an das Zustandekommen einer zähen Oberflächenschicht.

Ich wende mich jetzt zu der zweiten Annahme, daß nämlich die farbigen Lamellentheile eine homogene Schicht vom Brechungsexponenten 1,43 bilden, während die schwarzen Stellen eine davon verschiedene Zusammensetzung und den Brechungsexponenten 1,42 besitzen. — Man könnte dieser Annahme folgende Vorstellungen zu Grunde legen: Angenommen die farbige Lamelle erreicht durch allmähliges Herabrinnen der Flüssigkeitstheile eine Dicke, welche etwas kleiner als die doppelte Wirkungssphäre der Molecularkräfte ist. Die Oberflächenspannung wird dadurch kleiner, und infolge der größeren Oberflächenspannung der Nachbartheile wird die Dicke an der betrachteten Stelle rapide verringert. Falls die Dicke innerhalb des doppelten Wirkungsradius liegt, ist aber jedenfalls auch die Dampfspannung des in der Seifenlösung enthaltenen Wassers eine andere, als in der massiven Lösung, oder in einer dickeren Lamelle. Die Lamelle enthält nun im Gleichgewichtszustande soviel Wasser, daß der Dampfdruck in ihr gleich ist dem Dampfdruck des Wassers in der umgebenden Luft. Wenn der Dampfdruck einer unterhalb der fraglichen Dicke liegenden Lamelle kleiner ist, als der der farbigen, d. h. sehr dicken Lamellentheile, so wird eine solch dünne Stelle daher Wasser aus der umgebenden Luft aufnehmen. Durch einen größeren Wassergehalt wird die Oberflächenspannung zunehmen. Die Lamelle wird daher bis auf eine solche Dünne herabsinken, daß durch das aufgenommene Wasser die dünnen Stellen eine Oberflächenspannung besitzen, welche gleich ist der Oberflächenspannung der dickeren, weniger Wasser enthaltenden angrenzenden Lamellen-Theile. Dann ist nämlich der Zustand wieder ein stabiler, denn ein weiteres Abnehmen der Dicke würde eine Zunahme von Wasserdampf und ein Wachsen der Oberflächenspannung hervorrufen; infolge davon würde sich die betreffende Stelle wieder zu verdickern streben, da sie eine größere Oberflächenspannung besitzt, als die Nachbarschaft, — ein Wachsen der Dicke würde aber eine Abnahme von Wasser, d. h. eine Abnahme der Oberflächenspannung hervorrufen, und daher wurde eine solche Stelle durch Wirkung der Nachbarschaft mit größerer Oberflächenspannung gedehnt, d. h. die Dicke würde wieder abnehmen.

Diese Auffassung würde nicht nur die längs ihrer ganzen Ausdehnung und im Laufe der Zeit constante Dicke der schwarzen Stellen, sondern auch besonders natürlich den plötzlichen Sprung in der Dicke einer Lamelle, der sich in der Nachbarschaft einer schwarzen Stelle vollzieht, erklären. Die doppelte Wirkungssphäre der Molecularkträfte würde demnach schon merkbar sein für die geringste Dicke, welche in der Lamelle an die schwarzen Theile angrenzen kann und noch den höheren Brechungsexponenten besitzt. Es ist dies das Weiß 1. Ordnung, ich habe diese Decke zu ungefähr 120.10^{6-} mm gemessen. Es würde demnach 60.10^{-6} mm eine untere Grenze für die Wirkungsspsäre der Molecularkräfte sein.

Experimentell würde zwischen beiden auseinander gesetzten Ansichten entschieden werden können, wenn man durch Beobachtung nachweisen kann, ob auf einer massiven Seifenlösung oder auf einer farbigen Lamelle derselben eine Oberflächenschicht vom Brechungsexponenten gleich dem der schwarzen Theile und von deren halber Dicke existirt oder nicht. — Bei der Kleinheit des Unterschiedes der Brechungsexponenten der schwarzen und farbigen Lamellentheile hat indeß ein solcher experimenteller Nachweis mit großen Schwierigkeiten zu kämpfen.

Indeß ist auf Grund theoretischer Ueberlegungen die zweite Ansicht nicht zulässig. Dieselbe stützt sich auf die Annahme, daß der Druck des gesättigten Dampfes einer Lamelle, falls ihre Dicke unterhalb der doppelten Wirkungssphäre der Molekularkräfte sinkt, kleiner ist, als der Dampfdruck einer dickeren Lamelle. Jedoch hat Hr. Warburg[1] durch Betrachtung eines gewissen Kreisprocesses nachgewiesen, daß das Umgekehrte der Fall sein muß.

Es bleibt daher nur die erste Ansicht übrig und es können die Resultate wie folgt zusammengefaßt werden:

Resultate:

1) Die schwarzen Theile einer aus Plateau'scher Flüssigkeit gebildeten Lamelle besitzen einen Brechungsexponenten, welcher um eine Einheit der zweiten Decimale kleiner ist, als der Brechungsexponent der farbigen Theile.

2) Die Dicke der schwarzen Theile ist constant und gleich 17.10^{-6} mm.

3) Die Größe der Wirkungssphäre der Molekularkräfte liegt unterhalb $8{,}5.10^{-6}$ mm.

---

1) E. Warburg, Wied. Ann. 28. p. 399. 1886.

Göttingen, Phys. Inst. Sommer-Semester 1890.

Nachträge

zu dem Aufsatze über weibliche Satyrn und Pane in der Kunst der Griechen und Römer in den Nachr. vom 9. October 1890, No. 11, S. 385 fg.

Von

Friedrich Wieseler.

Die zuvorkommende Gefälligkeit der Herrn R. v. Schneider zu Wien und Th. Schreiber zu Leipzig hat mich in den Stand gesetzt, schon jetzt folgende Nachträge mittheilen zu können. Indem ich ihnen dafür den verbindlichsten Dank sage, bitte ich auch andere competente Gelehrte mir ähnliche Zusätze zukommen lassen zu wollen.

Zu S. 388, Z. 27 fg Hr. Schreiber bemerkt mir: „Die beiden mantuaner Reliefs Dütschke nr. 858 u. 860, von denen Sie das letztere auf S. 388 anführen, sind sicher modern, obgleich sie wiederholt neuerdings untersucht und nicht bezweifelt worden sind, z. B. ersteres nicht von Brunn.

Ueber diese Stücke notierte ich mir vor den Originalen:

Beide Reliefs sind modern und von Anfang an war nicht mehr gearbeitet, als vorhanden ist. Bei Vervollständigung der Reliefplatten würden in der Composition große, nicht auszufüllende Lücken entstehen. In nr. 858 bleibt zwischen dem Silen links und Faun rechts ein großer freier Platz auf der Platte. Die linke untere Ecke ist von dem Fälscher des Reliefs selbst angesetzt, ebenso die rechte obere Ecke des anderen Reliefs nr. 860. Die Komposition beidemale durchaus gegen griechische Gesetze. Die Proportionen zum Theil verfehlt. Die Arbeit nicht ungeschickt, aber der flotte Stil verräth die moderne Erfindung. Nicht antik ist der Gesichtstypus des jungen Fauns in nr. 858 und des Pans in 860.“

Zu S. 391, Z. 9 fg. (wo in Z. 9 für „von“ zu schreiben ist „zu“ und in Z. 10 „hier zuvörderst eine“) bemerkt Hr. Schreiber: „Das von Ihnen S. 391 erwähnte Monument Ann. d. Inst. 1846 tav. N. 1. 2 ist ein gutes Specimen alexandrinischer Plastik und wird durch eine große Reihe mehr oder weniger verwandter Bildwerke gestützt. Mit am nächsten steht die von Michaelis Arch. Z. 1879 Taf. 13 publicirte Gruppe Eros in der Weinlaube“. Den jetzigen Aufbewahrungsort des Monuments erwähnt Hr. Schreiber nicht.

Zu S. 392, Z. 14 fg. Das Relief zu Venedig erklärt sowohl Hr. Schreiber als Hr. von Schneider für modern. Dieser verweist auf G. Frizzoni: Notizia d'opere di disegno pubbl. da D. Jac. Morelli, 2da edizione riv. ed aum. Bologna: Zanichelli 1884, p. 37, 247 sq.; indem er hinzufügt: „Ich halte das Relief nämlich für eine italienische Arbeit aus dem Ende des 15. Jahrhunderts oder dem Anfange des 16. Auch darf ich versichern, daß das liegende weibliche Wesen wirklich eine Kentaurin ist. Die Vorderbeine sind nur in Folge der Verkürzung nicht sichtbar, aber vor dem Originale sieht man deutlich, daß der Frauenrücken als Pferdeleib endigt.“

Zu S. 392, unten. Ueber ein Relief mit einer Panin bemerkt Hr. Schreiber: „Leider habe ich bisher noch nichts genaueres über das merkwürdige Hochrelief nr. 183 des Museums in Toulouse erfahren, auch noch keine Photographie erlangen können. Stark, Städteleben in Frankreich p. 607 beschreibt es als Panin mit Kind an der Brust und ruhender Pan unter einem Palmbaum.“

Zu S. 393, nach Z. 23. Hr. Schreiber berichtet: „Eine prächtige kleine Bronze mit Büste eines Satyrmädchens skizzierte ich mir im Museo di Antichità zu Turin, Sala dei bronzi, Wandschrank G, comp. I. Rundes Köpfchen mit Stumpfnäschen und Grübchen im Kinn. Rechte Hand an die rechte entblöste Brust gelegt, linke Schulter mit Hasenfell bedeckt. Blätterwerk als Büstenabschluß.“

Inhalt von No. 14.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

17. December. № 15. 1890.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 8. November.

Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen.

Von

Franz Meyer in Clausthal.

(Dritte Mittheilung[1]).

Vorgelegt von F. Klein.

Die in der voraufgegangenen Note mitgetheilten Principien reichen aus, um die für Curven R_n^2 und R_n^3 angegebenen sechs Zerlegungsgleichungen allgemein für Curven R_n^d aufzustellen.

Was die Bezeichnungen angeht, so sei die rationale, punktallgemeine Curve R_n^d — im linearen Raume M_d von d Dimensionen — in Punktcoordinaten x dargestellt durch:

$$\begin{cases} x_0 : x_1 : x_2 : \ldots : x_d = f_0(\lambda) : f_1(\lambda) : f_2(\lambda) : \ldots : f_d(\lambda) \\ f_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^n + a_{i1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{in}. \end{cases}$$

Die aus irgend $d+1$ Verticalreihen der a gebildeten Determinante $| a_{k_0} a_{k_1} \ldots a_{k_d} |$ möge wiederum durch $\delta_{k_0, k_1, \ldots k_d} = \delta$ bezeichnet werden; wir legen ihr das Gewicht $\Sigma k - \frac{d(d+1)}{2}$ bei.

1) Vgl. Göttinger Nachrichten. 1888 No. 5 und 1890 No. 10.

Innerhalb des Raumes M_d gelegene Linearräume von $d-1$, $d-2$, $d-3$ Ausdehnungen (solche kommen allein hier in Betracht) erhalten die Zeichen M_{d-1}, M_{d-2}, M_{d-3}. Schnitt- und Berührungseigenschaften derselben, in ihrem Verhalten zur Curve R_n^d sollen resp. durch keine, eine, zwei runde Klammern angedeutet werden, endlich darauf bezügliche binäre Darstellungsformen, oder auch Invariantencriterien allgemein durch eine eckige Klammer.

Dann sind die unmittelbaren Analoga der in Ebene und Raum bereits betrachteten Singularitäten:

1. M_{d-1} „α^{d+1}“, welche mit der Curve R_n^d an einer Stelle α $d+1$ consecutive Punkte gemein haben,

2. M_{d-1} „$\alpha^d\beta^2$“, für welche an einer ersten Stelle α d Punkte, an einer zweiten (von α verschiedenen) Stelle β zwei Punkte der Curve coincidiren,

3. M_{d-2} „$(\alpha^{d-1}\beta)$“, welche der Curve in $d-1$ benachbarten Punkten α begegnen, und sie außerdem noch einmal, in β treffen.

Die Argumente α, und damit die Gesammtheit der jeweiligen singulären Mannigfaltigkeiten M werden durch drei binäre Formen $[\alpha^{d+1}]$, $[\alpha^d\beta^2]$, $[(\alpha^{d-1}\beta)]$ repräsentirt. Die Grade derselben, einmal in α, andererseits in den δ giebt die Zusammenstellung (A) an:

A. Singularitätenformen.

		Grad in α.	Grad in den δ.
1.	$[\alpha^{d+1}]$	$(d+1)(n-d)$	1
2.	$[\alpha^d\beta^2]$	$2d(n-d)(n-d-1)$	$2(n-d-1)$
3.	$[(\alpha^{d-1}\beta)]$	$(d-1)(n-d+1)(n-d)$	$n-d+1$.

Die Discriminanten und Resultanten dieser drei binären Formen lassen sich in „Elementarfactoren“ — welche bez. der δ irreducibel sind — zerlegen, wie folgt:

B. Zerlegungen der Discriminanten und Resultanten.

$$(1)\quad D[\alpha^{d+1}] = [(\alpha^d)]\cdot[\alpha^{d+2}]$$

$$(2)\quad D[\alpha^d\beta^2] = [(\alpha^d)]^{2(n-d-1)(2n-2d-3)}.[\alpha^d\beta^2,(\alpha^{d-1}\beta)].[\alpha^d\beta^2\gamma^2]^2[\alpha^{d+2}][\alpha^{d+1}\beta^2][\alpha^d\beta^3]^3$$

$$(3)\quad D[(\alpha^{d-1}\beta)] = [(\alpha^d)].\qquad [\alpha^d\beta^2,(\alpha^{d-1}\beta)].[(\alpha^{d-1}\beta\gamma)]^2.[((\alpha^{d-2}\beta))]$$

$$(1.2)\quad R\{[\alpha^{d+1}],[\alpha^d\beta^2]\} = [(\alpha^d)]^{2(n-d-1)}.[\alpha^{d+2}]^2.[\alpha^{d+1}\beta^2$$

$$(2.3)\quad R\{[\alpha^d\beta^2],[(\alpha^{d-1}\beta)\} = [(\alpha^d)]^{2(n-d-1)}.[\alpha^d\beta^2,(\alpha^{d-1}\beta)]^2.[\alpha^d\beta^2,(\alpha^{d-1}\gamma)]$$

$$(1.3)\quad R\{[\alpha^{d+1}],[(\alpha^{d-1}\beta)]\} = [(\alpha^d)]^2.\qquad [\alpha^{d+1},(\alpha^{d-1}\beta)].$$

Die geometrische Bedeutung der einzelnen Elementarfactoren geht aus ihrer Bezeichnung hervor: es sind die linken Seiten der invarianten Kriterien, welche aussagen, daß das innerhalb einer eckigen Klammer characterisirte singuläre Vorkommniß, resp. die beiden singulären Vorkommnisse gleichzeitig eintreten.

Endlich sind die Grade, wie Gewichte (in den δ) dieser zehn Invarianten, geordnet nach der Anzahl der darin auftretenden Argumente α, β, γ, in der Tabelle (C) niedergelegt:

C. Grad und Gewicht der 10 Elementarfactoren in den δ.

		Grad
(a_1)	$[\alpha^{d+2}]$	$(d+2)(n-d-1)$
(a_2)	$[(\alpha^{d})]$	$d(n-d+1)$
(b_1)	$[\alpha^{d+1}\beta^2]$	$2(d+1)(n-d-1)(n-d-2)$
(b_2)	$[\alpha^{d}\beta^3]$	$3d(n-d-1)(n-d-2)$
(b_3)	$[\alpha^{d+1}, (\alpha^{d-1}\beta)]$	$2d(n-d+1)(n-d-1)$
(b_4)	$[\alpha^{d}\beta^2, (\alpha^{d-1}\beta)]$	$(3d-2)(n-d+1)(n-d-1)$
(b_5)	$[((\alpha^{d-2}\beta))]$	$(d-2)(n-d+2)(n-d+1)$
(c_1)	$[\alpha^{d}\beta^2\gamma^2]$	$2d(n-d-1)(n-d-2)(n-d-3)$
(c_2)	$[(\alpha^{d-1}\beta\gamma)]$	$(d-1)(n-d+1)(n-d)(n-d-1)$
(c_3)	$[\alpha^{d}\beta^2, (\alpha^{d-1}\gamma)]$	$2(2d-1)(n-d+1)(n-d-1)(n-d-2)$

Gewicht

$\frac{1}{2}(d+1)(d+2)(n-d)(n-d-1)$

$\frac{1}{2}d(d+1)(n-d+1)(n-d)$

$(d+1)^2(n-d)(n-d-1)(n-d-2)$

$\frac{3}{2}d(d+1)(n-d)(n-d-1)(n-d-2)$

$d(d+1)(n-d+1)(n-d)(n-d-1)$

$\frac{1}{2}(3d-2)(d+1)(n-d+1)(n-d)(n-d-1)$

$\frac{1}{2}(d-2)(d+1)(n-d+2)(n-d+1)(n-d)$

$d(d+1)(n-d)(n-d-1)(n-d-2)(n-d-3)$

$\frac{1}{2}(d-1)(d+1)(n-d+1)(n-d)^2(n-d-1)$

$(2d-1)(d+1)(n-d+1)(n-d)(n-d-1)(n-d-2).$

Die Gradzahlen gehen durch einfache Multiplication mit $\frac{1}{2}(d+1)(n-d)$ in die betr. Gewichtszahlen über: die letzteren sind nur im Hinblick auf ihre größere Durchsichtigkeit explicite hinzugefügt worden. Im Uebrigen lassen sich die bei Gelegenheit des Falles $d=3$ gemachten Bemerkungen fast wörtlich auf den Fall eines beliebigen d übertragen.

Die soeben unter (B) notirten allgemeinen Zerlegungsformeln können vor Allem dazu dienen, einige auffällige Besonderheiten und Verschiedenheiten der früher behandelten Fälle $d = 2$ und $d = 3$ aufzuklären.

Für $d = 3$ wird zuvörderst der Factor $[\alpha^d\beta^3]$ wegen alsdann eintretender Symmetrie in α, β das Quadrat eines irreducibeln Ausdrucks: der letztere, damals selbst mit $[\alpha^3\beta^3]$ bezeichnet, kommt demnach unter den Elementarfactoren von $D[\alpha^3\beta^2]$ nicht drei- sondern sechsfach vor.

Genau das Entsprechende gilt für die Invariante $[((\alpha^{d-2}\beta))]$, sodaß bei der Zerfällung von $D[(\alpha^2\beta)]$ der unter $[(\alpha\beta)]$ aufgeführte Elementarfactor auf die zweite (statt der ersten) Potenz zu erheben ist.

Für $d = 2$ dagegen kann der gemeinte Factor überhaupt noch nicht erscheinen, was damit übereinstimmt, daß in der Gradzahl von $[(\alpha^{d-2}\beta)]$ $d-2$ als Factor enthalten ist.

Für $d = 2$ ist weiterhin zu bemerken, daß alsdann die beiden Invarianten $[\alpha^{d+1}\beta^2]$ und $[\alpha^d\beta^3]$ in ein- und dieselbe $[\alpha^3\beta^2] = [\alpha^2\beta^3]$ coincidiren. Somit vereinigen sich die in der allgemeinen Formel für $D[\alpha^d\beta^2]$ figurirenden Exponenten 1 und 3 jener beiden Factoren nunmehr zum Gesammtexponenten $1 + 3 = 4$.

Ferner wird der Ausdruck $[\alpha^d\beta^2, (\alpha^{d-1}\beta)]$ für $d = 2$ wiederum symmetrisch in α, β, also das Quadrat des damals als Selbstberührungsfactor $[\varDelta_2 T_2]$ verzeichneten Ausdrucks. Demnach erhöhen sich die in den allgemeinen Formeln stehenden Exponenten 1 resp. 2 der in Rede stehenden Invariante jetzt zu 2 resp. 4.

Endlich weisen die beiden Factoren $[\alpha^d\beta^2\gamma^2]$ und $[(\alpha^{d-1}\beta\gamma)]$ im Falle $d = 2$ eine dreifache Symmetrie auf, werden also dann zu Cuben irreducibler Größen, insofern jetzt jedes der drei Argumente α, β, γ die Rolle von α übernehmen kann. Jene beiden Elementarfactoren, damals mit den Zeichen $[T_3]$, $[\varDelta_3]$ versehen, zeigen somit den Exponenten 6 statt 2.

Nachdem so die formale Untersuchung der drei Singularitäten (A) einen Abschluß erreicht hat, kann man nunmehr der zu Beginn der vorigen Mittheilung aufgeworfenen Frage näher treten, in welcher Art und Weise sich das Zusammenrücken zweier einfacher Singularitäten in eine nächst höhere vollzieht. Es soll dazu ein Verfahren eingeschlagen werden, welches in einfacheren Fällen einen neuen, anschaulichen Beweis für die Vielfachheit der bezüglichen Elementarfactoren in den Zerlegungsformeln liefert, für welches indessen umgekehrt die letzteren in allen Fällen eine vollständige Controlle bieten, sodaß erst durch die vereinigte Wirkung beider Hülfsmittel eine ausreichende Einsicht in die gemeinten Vorgänge ermöglicht wird.

Der Deutlichkeit halber legen wir der Untersuchung zunächst wiederum den Fall d $= 2$[1]) unter.

Anstatt nun z. B. den „Cuspidalfactor" $[(\alpha^2)]$ allgemein zu berechnen, also das Kriterium für Eintreten einer Spitze überhaupt bei einer R_n^2, lege man dem Argument α den canonischen Werth Null (oder auch Unendlich) bei, und frage nach den Bedingungen dafür, daß die Curve gerade an der Stelle Null eine Spitze erhält. Dieselben sind offenbar durch das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen $\delta_{n,n-1,k} = 0$ $(k = 0, 1, 2 \,.\,.\, n-2)$ ausgedrückt. Man setze demnach

$$\delta_{n,n-1,k} = \varepsilon \tau_{n,n-1,k}, \ \lim \varepsilon = 0,$$

wo die Größen τ nicht zugleich mit ε verschwinden sollen. Dadurch wird die Invariante $[(\alpha^2)]$ sicher mit ε proportional; wie man leicht erkennt, ist aber auch nur die erste Potenz von ε in $[(\alpha^2)]$ als Factor enthalten.

Folglich muß sich aus den Discriminanten und Resultanten der drei Singularitätenformen der Factor ε in genau der nemlichen Vielfachheit abscheiden lassen, als der Exponent von $[(\alpha^2)]$ in den einzelnen Zerlegungsformeln angiebt. Andererseits erweist sich bei directer Berechnung das Bild für die Entwickelung der drei Singularitätenformen bei Anordnung nach steigenden Potenzen des Parameters α als das folgende:

$$\begin{cases} [\alpha^3] \equiv \Omega = \varepsilon\omega_0 + \varepsilon\omega_1\alpha + \omega_2\alpha^2 + \,.\,. \\ [\alpha^2\beta^2] \equiv M = \varepsilon^{2(n-3)}\mu_0 + \varepsilon^{2(n-3)-1}\mu_1\alpha + \ldots + \varepsilon\mu_{2(n-3)-1}\alpha^{2(n-3)-1} + \mu_{2(n-3)}\alpha^{2(n-3)} + \,.\,. \\ [(\alpha\beta)] \equiv \Lambda = \varepsilon\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1\alpha + \lambda_2\alpha^2 + \,.\,. \end{cases}$$

wo die Coefficienten ω, μ, λ nicht weiter durch ε theilbar sind. Aus der Bézout'schen Determinantenform der Discriminanten und Resultanten jener drei binären Formen liest man ab, daß die Größe ε in ihnen zum Mindesten in folgenden Potenzen vorkommt:

$$\begin{array}{lll} D[\alpha^3]: \ \varepsilon^1 & ; & R\{[\alpha^3], [\alpha^2\beta^2]\} : \varepsilon^{2(n-3)} \\ D[\alpha^2\beta^2]: \varepsilon^{(2n-6)(2n-7)} & ; & R\{[\alpha^2\beta^2], [(\alpha\beta\} : \varepsilon^{2(n-3)} \\ D[(\alpha\beta)]: \varepsilon^1 & ; & R\{[\alpha^3], [(\alpha\beta)]\} : \varepsilon^2 \quad . \end{array}$$

Es könnte in Folge der besonderen Natur der Größen ω, μ, λ aller-

1) Vgl. Brill „Ueber Singularitäten ebener algebraischer Curven und eine neue Curvenspecies". Math. Ann. XVI.

dings geschehen (und ein derartiger Ausnahmefall wird uns in der That weiterhin begegnen), daß der mit einer der angegebenen Potenzen von ε multiplicirte Entwickelungscoefficient (und eventuell noch einige nächstfolgende) verschwinden, und daß sich dadurch die heraustretende Potenz von ε erhöht.

Aber die dazu erforderliche, oft sehr mühsame Specialuntersuchung jener Anfangscoefficienten wird eben hier, wie in den meisten Fällen, durch Vergleichung mit den uns bereits bekannten Zerlegungsformeln von vornherein überflüssig: denn diese Vergleichung zeigt sofort, daß die obigen Potenzen von ε die genau richtigen sind.

Vermöge der Entwickelungsformen von $[\alpha^3]$, $[\alpha^2\beta^2]$, $[(\alpha\beta)]$ ist jetzt die gegenseitige Geschwindigkeit[1]) der zu einer Spitze sich vereinigenden Wendepunkts-, Doppeltangenten- und Doppelpunktselemente ohne Weiteres statuirbar. Denn während jedes der $2(n-3)$ Argumente von Doppeltangentenelementen mit ε selbst proportional wird, wenn man ε hinreichend klein werden läßt, so werden die der beiden Wendepunkte, wie auch der beiden Doppelpunktsschnittelemente mit $\sqrt{\varepsilon}$ vergleichbar. Die Geschwindigkeit, mit der die letztern zwei Punktepaare sich der schließlichen Spitze nähern, ist somit eine unendlich langsamere, als die jener erstgenannten $2(n-3)$ Punkte.

Dieses Sachverhältniß bleibt im Wesentlichen für ein beliebiges d bestehen, nur daß an Stelle der Zahl $n-3$ die Zahl $n-d-1$ tritt, also die Entwickelung der Form $[\alpha^d\beta^2]$ mit der $2(n-d-1)^{\text{ten}}$ Potenz von ε beginnt, gemäß den $2(n-d-1)$ Stellen α von M_{d-1}: $[\alpha^d\beta^2]$, welche im Grenzfalle in die Singularität $[(\alpha^d)]$ hineinrücken.

Weit einfacher läßt sich der Einfluß des Factors $[\alpha^{d+2}]$ verfolgen. Greift man wiederum auf $d=2$ zurück, so hat man als Bedingung für eine „Undulation" an der Stelle 0 das simultane Verschwinden der aus der Matrix $|\, a_n \; a_{n-1} \; a_{n-2} \; a_{n-3} \,|$ zu bildenden Determinanten δ. Macht man demnach die letzteren wieder mit einer beliebig kleinen Größe ε proportional, so lauten die Anfangsglieder der Formen Ω und M:

$$\begin{aligned}\Omega &\equiv [\alpha^3] = \varepsilon\omega_0 + \varepsilon\omega_1\alpha + \omega_2\alpha^2 + \ldots\\ M &\equiv [\alpha^2\beta^2] = \varepsilon\mu_0 + \varepsilon\mu_1\alpha + \mu_2\alpha^2 + \ldots\end{aligned}$$

Die beiden Discriminanten werden mit ε, die Resultante aber mit ε^2 vergleichbar, was mit den Exponenten des Elementarfactors $[\alpha^4]$ in den zugehörigen Zerlegungen völlig concordirt.

1) Als Maß der Geschwindigkeit wird dabei der Grad des Unendlichkleinwerdens von ε angesehen.

Das ist auf den Fall eines beliebigen d fast wörtlich übertragbar.

Der Kürze halber soll für die weiteren Singularitäten nur noch das Fortschreitungsgesetz der je zu berücksichtigenden Singularitätenformen nach Potenzen von ε angezeigt werden.

Bei einer Selbstberührung $[\varDelta_2 T_2] = [\alpha^2\beta^2, (\alpha\beta)]$ ist es zweckmäßig, das Argument α an die Stelle 0, das Argument β an die Stelle ∞ zu verlegen. Es wird:

$$M \equiv [\alpha^2\beta^2] = \varepsilon\mu_0 + \varepsilon\mu_1\alpha + \ldots + \varepsilon\alpha^{4(n-2)(n-3)-1}\mu_{4(n-2)(n-3)-1} + \varepsilon\alpha^{4(n-2)(n-3)}\mu_{4(n-2)(n-3)}$$

$$\varLambda \equiv [(\alpha\beta)] = \varepsilon\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1\alpha + \ldots + \varepsilon\alpha^{(n-1)(n-2)-1}\lambda_{(n-1)(n-2)-1} + \varepsilon\alpha^{(n-1)(n-2)}\lambda_{(n-1)(n-2)}.$$

Die Discriminanten enthalten ε zur zweiten, die Resultante zur vierten Potenz.

Für $d > 2$ tritt die Aenderung ein, daß nur noch die Anfangsglieder von $[\alpha^d\beta^2]$ und $[(\alpha^{d-1}\beta)]$ denselben Character beibehalten, während die Endglieder nicht mehr zugleich mit ε verschwinden. Folglich werden nunmehr die beiden Discriminanten nur noch mit ε, die Resultante mit ε^2 vergleichbar.

In ähnlicher Weise erledigt sich für $d = 2$ der „Trinodal“- und der „Tritangentenfactor“. Läßt man mit Uebergehung der Zwischenbetrachtung nur noch das eine Argument α einen canonischen Werth, nemlich Null, annehmen, so hat man für $\varDelta_3 = [(0\beta\gamma)]$:

$$\varLambda \equiv [(\alpha\beta)] = \varepsilon^2\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1\alpha + \ldots$$

und für $T_3 = [0^2\beta^2\gamma^2]$:

$$M \equiv [\alpha^2\beta^2] = \varepsilon^2\mu_0 + \varepsilon\mu_1\alpha + \ldots$$

Die Discriminante erhält also beidemal vom Argument $\alpha = 0$ her den Factor ε^2; da aber alle drei Argumente α, β, γ einen gleichmäßigen Einfluß ausüben, so tritt jener Factor ε^2 dreimal i. e. ε in der sechsten Potenz auf.

Für $d > 2$ kommt die letztere Bemerkung in Wegfall, der zweiten Potenz von ε correspondirt dann die zweite Potenz von $[(\alpha^{d-1}\beta\gamma)]$ resp. $[\alpha^d\beta^2\gamma^2]$.

Der Factor $[\Omega\varLambda] = [\alpha^3, (\alpha\beta)]$ führt zu den Entwickelungen:

$$\Omega \equiv [\alpha^3] = \varepsilon\omega_0 + \ldots, \quad \varLambda \equiv [(\alpha\beta)] = \varepsilon\lambda_0 + \ldots,$$

sodaß die Resultante mit ε selbst vergleichbar wird.

Der Fall eines beliebigen d verursacht hier keine Aenderung. Dieselbe Erscheinung bietet sich bezüglich $(\varLambda M) = [\alpha^2\beta^2, (\alpha\gamma)]$

bei den beiden in Betracht kommenden Formen A und M, und desgleichen im allgemeinen Falle.

Eigenartig wirkt der Factor $[\Omega M] = [\alpha^3\beta^2]$. Für $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ gestalten sich die Formen Ω und M, wie folgt:

$$\Omega \equiv [\alpha^3] = \varepsilon\omega_0 + \dots$$
$$M \equiv [\alpha^2\beta^2] = \varepsilon\mu_0 + \varepsilon\mu_1\alpha + \dots + \varepsilon\alpha^{4(n-2)(n-3)-1}\mu_{4(n-2)(n-3)-1} + \varepsilon^2\alpha^{4(n-2)(n-3)}\mu_{4(n-2)(n-3)}.$$

Die Resultante wird nur mit der ersten Potenz von ε vergleichbar, wie denn auch $]\Omega M]$ unter den Factoren von $R\{\Omega, M\}$ nur einmal vorkommt.

Der Beitrag von $[\Omega M]$ zur Discriminante von M setzt sich wiederum aus zwei Theilen zusammen. Von $\alpha = 0$ rührt die erste Potenz von ε als Factor her, während $\beta = \infty$ die zweite Potenz zu liefern scheint. Hier tritt indessen der Ausnahmefall wirklich ein, daß der Coefficient von $\varepsilon \cdot \varepsilon^2 = \varepsilon^3$ in der Entwickelung der Discriminante von M (nicht aber der nächstfolgende) verschwindet, und zwar eben durch die Kraft der in $\beta = \infty$ gelegenen Singularität.

Um sich davon zu überzeugen, gehe man in der Canonisirung noch einen Schritt weiter. Man lege nemlich je einem Doppeltangentenberührpunkt α, β von vornherein das Argument $0, \infty$ bei, und fordere demgemäß die Bedingungen dafür, daß die Tangente der Curve R_n^2 in $\beta = \infty$ an einer weiteren Stelle $\alpha = 0$ osculire. Dazu müssen sämmtliche Determinanten der Matrix $| \; a_0, \; a_1, \; a_{n-2}, \; a_{n-1}, \; a_n \; |$ verschwinden, während zugleich noch die Gleichung $M = 0$ eine Wurzel ∞, sowie eine Wurzel 0 besitzen soll.

Hält man sodann nur an der letztgenannten Bedingung[1]) fest, und macht vorderhand wiederum jene Determinanten soweit sie nicht schon verschwinden, einer beliebig kleinen Größe ε proportional, so resultirt zuvörderst, daß sich aus der Invariante $[\Omega M] = [\alpha^3\beta^2]$ die zweite Potenz von ε ausscheidet.

Die Form M nimmt aber jetzt folgende Gestalt an:

$$M \equiv [\alpha^3\beta^2] = 0 + \varepsilon\mu_1\alpha + \dots + \varepsilon^3\alpha^{4(n-2)(n-3)-1}\mu_{4(n-2)(n-3)-1} + 0 \cdot \alpha^{4(n-2)(n-3)}.$$

Die Folge ist, daß nunmehr in die Discriminante von M die Factoren ε^2 und ε^6 also im Ganzen der Factor ε^8 eintreten. Damit ist der gewünschte Beweis erbracht, denn dem letzteren Factor ε^6

1) Dieselbe ist ersichtlich dadurch fixirt, daß die Determinanten der Matrix $| \; a_0, \; a_1, \; a_{n-1}, \; a_n \; |$ fest gleich Null gesetzt werden.

muß bei der früheren Constellation, wo $[\Omega M]$ mit ε selbst vergleichbar war, die dritte Potenz von ε correspondiren.

Wie schon weiter oben bemerkt, treten die beiden, soeben für $d = 2$ erörterten Vorkommnisse völlig auseinander, sobald $d > 2$ wird. Man hat daher nur die angegebenen Entwickelungen in zwei Theile zu spalten: bezüglich des Factors $[\alpha^{d+1}\beta^2] = [0^{d+1}\beta^2]$ bewahren die Anfangsglieder ihren Character, während die Endglieder den Factor ε nicht mehr aufweisen, und genau umgekehrt verhält es sich bezüglich der Invariante $[\alpha^d\beta^3] = [\alpha^d\infty^3]$, wo übrigens nur die Form $[\alpha^d\beta^2]$ in Betracht kommt.

So erklärt es sich, weßhalb die Resultante der Singularitätenformen $[\alpha^{d+1}]$ und $[\alpha^d\beta^2]$ den Factor $[\alpha^{d+1}\beta^2]$ nur einfach, und die Discriminante von $[\alpha^d\beta^2]$ denselben Factor ebenfalls nur einfach, dagegen den Factor $[\alpha^d\beta^3]$ dreifach zuläßt.

Um in dem vornehmlich interessanten Falle $d = 2$ die letzten Ergebnisse noch einmal zusammenzufassen, so hat man sich die Singularität $[\alpha^3\beta^2]$ so entstanden zu denken, daß eine Wendetangente $\alpha + \varepsilon$ mit zwei Doppeltangenten vom Typus: $(\lim \varepsilon = 0)$

$$\left\{\begin{matrix} \alpha + d_1\varepsilon^{\frac{1}{2}} \\ \beta + d_2\varepsilon + d_3\varepsilon^{\frac{3}{2}} \end{matrix}\right\} \qquad \left\{\begin{matrix} \alpha + d_1'\varepsilon^{\frac{1}{2}} \\ \beta + d_2\varepsilon - d_3\varepsilon^{\frac{3}{2}} \end{matrix}\right\}$$

coincidirt, wo die d mit ε nicht verschwindende Größen bedeuten Der Unterschied der beiden in die Stelle β rückenden Doppeltangentenberührungspunkte ist mit $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$ vergleichbar. Man kann leicht eine Figur entwerfen, welche diese Verhältnisse wiederspiegelt.

Was endlich noch die Invariante $[((\alpha^{d-2}\beta))]$ angeht, so wird für $\lim \alpha = 0$:

$$[(\alpha^{d-1}\beta)] = \varepsilon\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1\alpha + \dots$$

und somit die Discriminante der Form mit ε selbst proportional. Für $d = 3$ liefert das Argument β den Factor ε noch einmal.

Damit hat die Erörterung der verschiedenen, nur eine Bedingung erfordernden Vereinigungen von Singularitäten α^{d+1}, $\alpha^d\beta^2$, $(\alpha^{d-1}\beta)$ auf „allgemeinen“ R_n^d einen gewissen Abschluß erhalten. Die auf Raumcurven R_n^3 sich weiter noch darbietenden Singularitäten $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ und $(\alpha\beta\gamma\delta)$ zu berücksichtigen, möge einer weiteren Mittheilung vorbehalten bleiben.

Clausthal 2. September 1890.

Zur Theorie der Schwingungen gestrichner Saiten.

Von

W. Voigt.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 2. August 1890.)

Herr von Helmholtz hat bekanntlich eine Theorie für die Bewegung einer mit einem Bogen gestrichenen Saite durch geistvolle Combination der Beobachtung mit der Berechnung entwickelt[1]). Diese Theorie ist vielfach acceptirt worden[2]), sie enthält aber einige Fehler, welche sie in der gegenwärtigen Form unhaltbar erscheinen lassen. Ich werde zunächst diese Behauptung nachweisen und sodann diejenige Aenderung resp. Verallgemeinerung der Grundannahmen des Herrn von Helmholtz, welche den von ihm angegebenen Weg der Entwickelung einwurfsfrei durchzuführen gestattet, mittheilen und in ihren Folgerungen untersuchen.

Herr von Helmholtz hat durch die Beobachtung mit dem Vibrationsmikroscop festgestellt, daß ein jeder Punkt der angestrichenen Saite eine Bewegung ausführt, gegeben durch das folgende Gesetz für die Elongation y innerhalb einer Periode T:

$$1)\qquad \begin{aligned} &0<t<\mathfrak{T} \qquad && y = ft+h, \\ &\mathfrak{T}<t<T \qquad && y = g(T-t)+h, \end{aligned}$$

wobei

$$2)\qquad f\mathfrak{T} = g(T-\mathfrak{T})$$

sein muß.

Die Entwickelung dieses Gesetzes in eine Fourier'sche Reihe ergiebt

$$3)\qquad y = \frac{(f+g)T}{\pi^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n\mathfrak{T}}{T}\sin\frac{2\pi n}{T}\left(t-\frac{\mathfrak{T}}{2}\right).$$

Diese Formel vergleicht Herr von Helmholtz mit dem allge-

1) H. v. Helmholtz, Phil. Mag. (4) 21, 393—396. 1860. Lehre von den Tonempfindungen, Braunschweig 1870, p. 595, Gesammelte Abhandlungen, Leipzig 1882, p. 410.

2) S. z. B. Rayleigh, Theorie des Schalles, deutsch v. Neesen, Braunschweig 1880, Bd. I, p. 225.

meinen Gesetz für die Bewegungen einer beiderseits befestigten Saite von der Länge L

$$y = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin \frac{2\pi n}{T}\left(t - \frac{\mathfrak{T}}{2}\right) \right.$$
$$\left. + D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos \frac{2\pi n}{T}\left(t - \frac{\mathfrak{T}}{2}\right) \right\} \qquad 4)$$

und gelangt zu dem Schlusse, daß zur Uebereinstimmung

$$D_n = 0, \quad \frac{\mathfrak{T}}{T} = \frac{x}{L}, \quad C_n = \frac{(f+g)\,T}{\pi^2 n^2}, \qquad 5)$$

also $f+g$ von x unabhängig sein muß. Durch Einführung der Amplitude p an der Stelle x und der Amplitude P in der Mitte der Saite erhält er noch die Beziehungen

$$p = \frac{4Px(L-x)}{L^2}, \quad f = \frac{8P(L-x)}{LT}, \quad g = \frac{8Px}{LT}. \qquad 6)$$

Die Discussion dieser Formeln liefert ihm die an der citirten Stelle mitgetheilten Gesetze für die Schwingungen gestrichner Saiten.

Allein diese Gesetze können schon deshalb nicht richtig sein, weil der Ansatz (4) keine Lösung der allgemeinen Differentialgleichung ist, sobald $\mathfrak{T}$ nicht constant sondern $= xT/L$ ist, und demnach ist unter Beibehaltung des von Helmholtz'schen Ansatzes (1) die Durchführung seines Weges überhaupt unmöglich. Der Grund ist leicht ersichtlich, — jener Ansatz ist so speciell, daß das Problem überbestimmt ist; denn es enthält die stillschweigende Annahme, daß alle Punkte der Saite mit gleicher Phase schwingen. Läßt man diese Annahme fallen, so bietet die Durchführung der Theorie keine Schwierigkeit.

Ich setze demgemäß

$$\begin{aligned} t_0 < t < \mathfrak{T} + t_0, \quad y &= f(t - t_0) + h, \\ \mathfrak{T} + t_0 < t < T + t_0, \quad y &= g(T - t + t_0) + h, \end{aligned} \qquad 7)$$

wo nun t_0 die Verschiedenheit der Phase an verschiedenen Stellen mißt und h und t_0 Functionen von x sein können. Entwickelt man diesen Ansatz in eine Fourier'sche Reihe, so erhält man

$$y = \frac{(f+g)\,T}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n \mathfrak{T}}{T} \sin \frac{2\pi n}{T}\left(t - t_0 - \frac{\mathfrak{T}}{2}\right). \qquad 8)$$

Hieraus kann man ebenso wie Herr von Helmholtz durch Vergleich mit (4) schließen, daß

$$\mathfrak{T}/T = x/L \tag{9}$$

sein muß, außerdem folgt aber, daß

$$t_0 + \frac{\mathfrak{T}}{2} = \mathrm{Const}(x)$$

also

$$t_0 = a - \frac{xT}{2L} \tag{10}$$

sein muß, falls a eine Constante bezeichnet, welche durch die Wahl des Anfangspunktes für t jederzeit zu Null gemacht werden kann.

Nunmehr sind die Folgerungen (6) berechtigt, aber die Gleichungen (1) werden durch ihr Einsetzen zunächst nicht lineär, sondern geben

$$\left.\begin{aligned} 0<t<\mathfrak{T}, \quad y &= \frac{8P(L-x)}{LT}\left(t+\frac{xT}{2L}\right)+h, \\ \mathfrak{T}<t<T, \quad y &= \frac{8Px}{LT}\left(T-t-\frac{xT}{2L}\right)+h. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Diese Resultate stehen aber mit der Formel

$$y = \frac{8P}{\pi^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n x}{T}\sin\frac{2\pi n t}{T} \tag{12}$$

im Widerspruch, so lange man h constant nimmt, denn diese Formel verglichen mit der bekannten Reihe

$$y_1 = \frac{2bL^2}{\pi^2 a(L-a)}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi a}{L},$$

welche

$$\left.\begin{aligned} &\text{für} \quad 0<x<a \qquad y_1 = \frac{bx}{a} \\ &\text{für} \quad a<x<L \qquad y_1 = b\frac{L-x}{L-a} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

giebt, zeigt, daß y für jedes t durch zwei lineäre Functionen von x gegeben sein muß. Für $0<t<T/2$ muß die Abscisse $a = 2tL/T$, die Amplitude

$$b = \frac{4Pa(L-a)}{L^2} = \frac{8Pt}{T^2}(T-2t) \tag{14}$$

sein; es läuft hiernach der Schnittpunkt der beiden Geraden in der Zeit $t = T/2$ über die ganze Länge der Saite und es wächst zugleich die Amplitude b von 0 bis P und nimmt wieder bis 0 ab.

Für $T/2 < t < T$ muß $a = 2L(T-t)/T$ sein und

$$b = -\frac{4Pa(L-a)}{L^2} = -\frac{8P}{T^2}(T-t)(2t-T); \tag{15}$$

der Schnittpunkt läuft also mit derselben Geschwindigkeit zum Anfangspunkt zurück, während die Amplituden die entsprechenden negativen Werthe annehmen.

Da der Ansatz (12) hiernach eine lineäre Relation zwischen x und y ergiebt, so muß h eine Function zweiten Grades in x sein.

Die Vergleichung von (12) und (13) ergiebt unter Rücksicht auf (14) und (15)

$$h = -p = -\frac{4Px(L-x)}{L^2},$$

wie dies auch der unmittelbaren Anschauung entspricht. Der Ansatz (7) ist hiernach in allen Theilen bestimmt und liefert für

$$-\frac{xT}{2L} < t < +\frac{xT}{2L} \qquad y = \frac{8P(L-x)t}{LT}$$

$$+\frac{xT}{2L} < t < \frac{(2L-x)T}{2L} \qquad y = \frac{8Px}{LT} \cdot \frac{(T-2t)}{2};$$

zur Zeit $t = xT/2L$ geben beide Ausdrücke für y denselben Werth p.

Göttingen, d. 1. August 1890.

Bemerkung. Nach Einreichung der vorstehenden Notiz ist mir die Arbeit von Herrn Lindemann[1]) über dasselbe Problem bekannt geworden. In derselben sind die richtigen Formeln für die Schwingungen der gestrichenen Saite auf einem andern als dem Helmholtz'schen Wege abgeleitet, die eigentliche Ursache der Abweichung des neuen Resultates von dem früheren ist aber nicht aufgedeckt. Die obige Notiz bildet somit eine Art Ergänzung jener Untersuchung.

1) F. Lindemann. Ber. d. naturf. Ges. in Freiburg i. B. VII, 500, 1880.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Juli 1890.

(Fortsetzung.)

Verhandlungen der neunten allgemeinen Conferenz der internationalen Erdmessung (in Paris) und deren permanente Commission. Redigirt von A. Hirsch. Berlin und Neuchatel 1890.
Mitteilungen der Pollichia. XLVIII. Jahresbericht. N. 3. 1889. Neustadt a. d. Hart 1889.
Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. N. 6—9. 1890. Wien 1890.
Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Jahrgang 1890. (XL. Band.) Quartal 1 und 2. Wien 1890.
Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau. 1890. Juni. Krakau 1890.
Mittheilungen des Musealvereines für Krain. Jahrg. 3. Laibach 1890.
Mittheiluugen des Vereines der Aerzte in Steiermark. XXVI. Vereinsjahr. 1889. Graz 1890.
Jahresbericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag für 1888. Prag 1889.
Archiv des Vereines für siebenbürgische Landeskunde. Neue Folge. Band 23. Heft 1. Hermannstadt 1890.
Programm des evangelischen Gymnasiums A. B. etc. zu Hermannstadt für 1889/90. Hermannstadt 1890.
Astronomische Mittheilungen von Dr. Rud. Wolf. LXXVI. Juni 1890. (Zürich 1890.)
Nature. Vol. 42. N. 1079—1082.
Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. XXI. N. 377—380.
Proceedings of the Royal Society. Vol. XLVII. N. 291. London 1890.
Monthly notices of the R. Astronomical Society. Vol. L. N. 8. (London.) 1890.
Geometry in religion and the exact dates in biblical history after the monuments; etc. London 1890.
Proceedings of the R. Irish Academy. Third series. Vol. I. N. 3. Dublin 1890.
Proceedings of the Canadian Institute, Toronto. April 1890. Vol. XXV. N. 153. Toronto 1890.
Notes on the peare and chank fisheries and marine fauna of the golf of Manoar by Edgar Thurston. Madras 1890.
Catalogue of the Batrachia Salientia and Apoda of Southern India by Edgar Thurston. Madras 1888s.
Records of the geological urvey of India. Vol. XXIII. Part 2. Mai 1890. (Calcutta 1890.)
Second systematic census of Australian plants by Baron F. v. Mueller. Part 1. Vasculares. Melbourne 1889.
Bulletin mensuel de l'observatoire météorologique de l'université d'Upsal. Vol. XXI. Année 1889. Upsal 1889—90.
Regiae societatis scientiarum Upsalensis:
a. Nova Acta: Seriei tertiae. Vol. XIV. Fasc. 1. Upsaliae 1890.
b. Catalogue méthodique des Acta et Nova Acta ... 1744—1889. Upsala (1889).
Publication der Norwegischen Commission der Europäischen Gradmessung. Geodätische Arbeiten. Heft VI und VII je zwei Exemplare. Christiania 1888—1890.
Bijdragen tot de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 5. volgreeks. 5. deel. (Deel XXXIX der geheele reeks.) Derde Afler. s'Gravenhage 1890.

Annales de l'école polytechnique de Delft. Tome V. 1890. 3me et 4me livr. Leide 1890.

Archives Neerlandaises des sciences exactes et naturelles. Tome XXIV. 2me et 3me livr. Harlem 1890.

Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 60. année. 3. série. Tome 19. N. 6. Bruxelles 1890.

Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas. Vol. IX. N. 5. Coimbra 1889.

Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy. Publiées par l'Academie des sciences etc. IIe série. Tome VII, VIII. Paris 1889/90.

Journal de l'Ecole Polytechnique. 59ième cahier. Paris 1889.

Mémoires de la Société académique Indo-chinoise de France. Tome I. Années 1877—1878. Paris 1879.

Annales du Musée Guimet.
- a. Revue de l'histoire des religions. Dixième année. Tome XX. N. 1. 2. 3. 1889. Onzième année. Tome XXI. N. 1. 1890. Paris 1889/90.
- b. Annales. Tome XV, XVI, 1. 2, XVII. Paris 1889.

Société des Antiquaires de Picardie.
- a. Mémoires. 3ème série. Tome VII. Paris et Amiens 1882.
- b. Bulletin. Tome IX (1865/67), XI (1871/73), XIV (1880/82). — 1887. N. 2. 3., Amiens (et Paris) 1867—89.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. 3e série. Tome IV, V. 1er cahier. Paris (et Bordeaux) 1888/89.

Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le département de la Gironde de Juin 1887 à Mai 1888, Juin 1888 à Mai 1889. Bordeaux 1888/89.

Reale Accademia dei Lincei.
- a. Atti. Anno CCLXXXVII. 1890. Serie IV. Rendiconti. Vol. VI. 1o semestre. Fasc. 8—10. Roma 1890.
- b. Contribuzioni allo studio dei graniti della Bassa Valcesia di Gio. Strueve r. Roma 1890.

Reale Accademia delle scienze di Torino.
- a. Atti. Vol. XXV. Disp. 11a, 12a. 1889/90. Torino.
- b. Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1889 all' osservatorio delle R. Università di Torino calcolate dal Dott. G. B. Rizzo. Torino 1890.

Atti della fondazione scientifica cagnola dalla sua istituzione in poi. Volume 8. 1882—88. Milano 1888.

Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendi conti. Serie II. Vol. XXI. Milano, Pisa, Napoli 1888.

Bollettino delle pubblicazioni italiane ricev. per diritto di stampa della Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze. 1890. N. 109. Firenze 1890.

Mémoirs of the National Academy of sciences. Vol. IV. Part 2. Washington 1889.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. Part III. Oct.—Dec. 1889. Philadelphia 1890.

Journal of the Elisha Mitchell scientific Society, 1889. Vol. VI. Part. 2. Raleigh N. C. 1890.

Bulletin of the American geographical Society Vol. XXII. N. 2. June 30. 1890. New York 1890.

United states coast and geodetic survey. Bulletin N. 18. 18. Febr. 1890. (Washington 1890.)

Bulletin of the Museum of comparative zoölogy. Vol. XX. N. 1. Cambridge U. S. A. 1890.

Johns Hopkins University circulars. Vol. IX. N. 82. Baltimore 1890.

Proceedings of the California Academy of sciences. Second series. Vol. II. 1889. San Francisco 1890.

Anales de la Sociedad científica Argentina. 1890. Entrega V, VI. Tomo XXIX. Buenos Aires 1890.

Nachträge.

Meteorologische Beobachtungen am meteorologischen Observatorium der Landwirthschaftlichen Akademie bei Moskau. Jahr 1889. Erste Hälfte. Moskau 1889.
Notulen van de algemeene en Bestuurs - Vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel XXVII. 1889. Aflev. IV. Batavia 1890.
Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde. Deel XXXIII. Aflev. 5 en 6. Batavia, 'sHage 1890.
Kgl. Bayerische Akademie der Wissenschaften:
 a. Abhandlungen der histor. Classe. Band 19. Abth. 2. München 1890.
 b. Almanach f. d. J. 1890. München.
 c. Griechische Münzen. Nene Beiträge und Untersuchungen von F. Imhoof-Blumer. (Abhhandl. d. k. Bayr. Ak. d. W. 1. Cl. XVIII. Bd. III. Abth.) München 1890.

August, September und Oktober 1890.

Kgl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.
 a. Sitzungsberichte. 1890. XXXVIII.
 b. Abhandlungen. 1889. Berlin 1890.
Politische Correspondenz Friedrichs des Grossen. 18. Bd. 1. Hälfte. (Jan. bis Juni 1759.) Berlin 1890.
Leopoldina. Heft XXVI. No. 13/14. 15/16. 17/18. Juli—Sept. 1890. Halle.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik begr. v. C. Ohrtmann. Bd. XIX. Jahrg. 1887. Heft 3. Berlin 1890.
Jahresbericht der Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. 1889 nebst Abhdl. VIII. Bd. Bogen 8—13. Nürnberg 1890.
67. Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft f. vaterländ. Cultur 1889. Breslau 1890.
Zeitschrift der Deutschen morgenländ. Gesellschaft. 44. Bd. 2. u. 3. Heft. Leipzig 1890.
Physikal.-medic. Gesellschaft zu Würzburg.
 a. Verhandlungen. N. F. XXIV. Bd. No. 5. Würzburg 1890.
 b. Sitzungsberichte. Jahrgang 1890. No. 6. 7.
Kgl. Bayer. Akademie der Wissenschaften zu München. München 1890.
 a. Sitzungsberichte. 1. Philos.-philol. u. hist. Classe. 1890. Bd. I. Heft III. Bd. II. Heft I.
 2. Mathem.-physik. Classe. 1890. Heft 1/2. 3.
 b. Bericht des Sekretariats über die 31. Plenarversammlung der histor. Kommission.
Kölliker, A.: Ueber die erste Entwicklung der Nervi olfactorii. (Aus d. Sitzgsber. d. physik.-medic. Gesellsch. zu Würzburg. 1890. XIV. Sitzung.)
Zeitschrift für Naturwissenschaften hrsg. v. O. Luedecke. 63. Bd. 2. u. 3. Heft. Halle 1890.
Mitteilungen der Pollichia. XLVII. Jahresber. 1888. No. 1. 2. Dürkheim a. H.
Veröffentlichung des Kgl. Preuss. Geodätischen Institutes. Das Mittelwasser der Ostsee bei Swinemünde. 2. Mittheil. (v. Prof. Dr. Wilh. Seibt.) Berlin 1890.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

31. December. | № 16. | 1890.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 6. December.

Riecke legt einen Aufsatz vor: Molekulartheorie der Diffusion und elektrolytischen Leitung.

Voigt legt a) von Herrn Prof. Auerbach in Jena eine Abhandlung vor: über absolute Härtemessung, und b) von sich und P. Drude, Privatdocenten. Bestimmung von den Elasticitätskonstanten einiger dichten Mineralien (2. Reihe)

Klein legt eine Abhandlung von Prof. Hurwitz in Königsberg i. Pr.: über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe vor.

Jahresbericht des beständigen Sekretärs.

Moleculartheorie der Diffusion und electrolytischen Leitung.

Von

Eduard Riecke.

Wie man in der allgemeinen Mechanik zuerst gelernt hat, Aufgaben des Gleichgewichtes der Körper unter der Wirkung verschiedenartiger Kräfte zu behandeln und erst sehr viel später in den Besitz der Mittel gekommen ist, welche die Vorausbestimmung der durch Kräfte erzeugten Bewegungen ermöglichen, so ist man auch in der Lehre von der molekularen Constitution der Körper ausgegangen von statischen Vorstellungen, bei welchen man von den Bewegungen, in welchen die kleinsten Theilchen der Körper ohne Zweifel begriffen sind, abgesehen hat. Bis jetzt ist es nur für die gasförmigen Körper gelungen, eine Theorie zu entwerfen, welche die Bewegungen der Molekeln nicht allein in Rechnung zieht, sondern zur Grundlage der ganzen Entwicklung macht.

Eine Ausdehnung der auf dem Boden der Gastheorie gewonnenen Anschauungen auf ein neues Gebiet von Erscheinungen verdanken wir einem überraschenden und glücklichen Gedanken von van t'Hoff, welcher nach verschiedenen Richtungen hin als fruchtbar und anregend sich erwiesen hat. In seiner im Jahre 1884 erschienenen Abhandlung „die Rolle des osmotischen Druckes in der Analogie zwischen Lösungen und Gasen" hat van t'Hoff gezeigt, daß der osmotische Druck in einer verdünnten Lösung durch dasselbe Gesetz bestimmt wird, wie der Druck eines Gases, und daß ebenso wie dieser letztere auch der osmotische Druck erklärt werden kann durch Stöße der Molekeln gegen die umschließende Wand. Um die Ideen, welche der Theorie von van t'Hoff zu Grunde liegen, verständlich zu machen, möge erinnert werden an den Grundversuch der Osmose. Wir füllen eine unten mit einer thierischen Blase verschlossene Röhre mit Salzlösung und setzen dieselbe in ein größeres mit Wasser gefülltes Gefäß, so daß das Niveau der Flüssigkeit in der Röhre ebenso hoch steht, wie in dem Gefäße. Es geht dann sofort Wasser durch die Membran hindurch zu der Salzlösung hinüber und die Folge hievon ist das bekannte Ansteigen der Flüssigkeit in der Röhre; hat die in der Röhre befindliche Flüssigkeitssäule ihre größte Höhe erreicht, so herrscht in ihr ein gewisser Ueberdruck, welcher durch das Gewicht der über das freie Niveau des Wassers gehobenen Säule gemessen wird. Diesen Druck nennen wir den osmotischen Druck; van t'Hoff hat nun uachgewiesen, daß dieser Druck genau derjenige ist, welchen die Molekeln des gelösten Salzes ausüben würden, falls sie im Gaszustande den von der Lösung eingenommenen Raum erfüllten. Dadurch wird nun eine von der früheren wesentlich verschiedene Auffassung der osmotischen Erscheinungen nahegelegt. Man pflegte die osmotischen Vorgänge aufzufassen als Diffusionserscheinungen, welche zunächst in einem wechselseitigen Uebergang von Molekeln der Salzlösung einerseits, des Wassers andererseits durch die Membran hindurch bestehen würden. Es sei nun die Diffusionsgeschwindigkeit des reinen Wassers eine sehr viel größere als die der Salzlösung; dann wird in Folge des überwiegenden Eintritts von Wasser die Flüssigkeit in der Röhre steigen; gleichzeitig wird aber ein Ueberdruck in derselben entstehen, welcher einen Rückstrom der Flüssigkeit durch die Poren der Membran hindurch veranlaßt; die Stärke desselben wird durch das Gesetz von Poiseuille zu bestimmen sein. Wenn die Einwanderung der Wassermolekeln mit diesem Rückstrom sich im Gleichgewicht befindet, so ist die maximale Steighöhe der Flüssigkeit erreicht; der osmotische Druck ist hiernach derjenige Druck, welcher den Diffusionsstrom zu kompensiren vermag. Zu einer vollständigen Erklärung der osmotischen Erscheinungen reichen diese Annahmen nicht aus, weil die Natur der trennenden Membran einen wesentlichen Einfluß auf den Verlauf der Erscheinungen ausübt; es muß also noch die Vorstellung von specifischen Affinitäten der Membran auf die Molekeln des Salzes einerseits, die Molekeln des Wassers andererseits hinzugenommen werden.

Demgegenüber würde nun nach van t'Hoff in dem Falle einer halbdurchlässigen Membran, welche nur den Molekeln des Wassers, aber nicht den Molekeln des Salzes den Durchgang gestattet, die Theorie der Osmose in folgender Weise zu entwickeln sein. In der Lösung befinden sich die Molekeln des Salzes in einer Bewegung, welche ihrer Bewegung im gasförmigen Zustand durchaus ähnlich ist, d. h. sie gehen in gerader Linie mit gleichförmiger Geschwindigkeit so lange fort, bis sie entweder mit einer Wassermolekel oder mit einer anderen Salzmolekel zusammenstoßen. Bei jedem Zusammenstoße erleiden sie eine Ablenkung aus der bisherigen Bewegungsrichtung, und es besteht daher die Bahn der Salzmolekeln in Lösung ebenso wie im Gaszustande aus lauter kleinen, geradlinigen, zickzackförmig unter den verschiedensten Winkeln aneinandergereihten Strecken. Wenn nun eine Molekel des Salzes im Verlauf ihrer Bewegung an die freie Oberfläche der Flüssigkeit kommt, so muß sie an dieser verhindert werden, aus dem Innern der Flüssigkeit herauszufliegen; wir werden also gezwungen sein, anziehende Kräfte zwischen den Molekeln des Salzes und denen des Wassers anzunehmen, welche sich in einer gegen den Molekularabstand großen Entfernung von der Oberfläche zu einer gegen diese senkrecht gerichteten Resultante vereinigen werden. Umgekehrt aber werden die Molekeln des Salzes, welche an die freie Oberfläche der Flüssigkeit gelangen, auf diese einen Druck ausüben, der von ihrer Masse, Geschwindigkeit und Anzahl in derselben Weise abhängt, wie der Druck eines Gases gegen die begrenzende Wand. Ganz ebenso erleidet auch die Membran durch die gegen sie stoßenden und von ihr zurückgeworfenen Molekeln einen Druck, dessen Größe gleich $\frac{1}{3} N m u^2$ ist, wo N die Zahl der in der Volumeinheit befindlichen Salzmolekeln, m ihre Masse, u ihre mittlere Geschwindigkeit. Die Membran wird durch diesen Druck in Spannung versetzt; die freie

Oberfläche der Salzlösung aber ist beweglich, da ja die Membran dem unterhalb befindlichen Wasser den freien Durchgang gestattet, sie wird also durch den gegen sie gerichteten Druck der Salzmolekeln gehoben, bis das Gewicht der gehobenen Säule, der osmotische Druck, gleich dem nach oben gerichteten Molekulardrucke ist. Der Satz, daß der osmotische Druck gleich dem entsprechenden Drucke gasförmiger Molekeln ist, steht mit den experimentellen Thatsachen in guter Uebereinstimmung. Bezeichnen wir nun das Volumen der in einem cm^3 enthaltenen Wassermolekeln durch ω, durch N die Zahl der Salzmolekeln, welche in 1 cm^3 der Lösung sich befinden, so ist der von diesen wirklich eingenommene Raum gleich $1-\omega$; die Zahl der in einem cm^3 enthaltenen Molekeln also thatsächlich $N = \frac{\mathsf{N}}{1-\omega}$. Denken wir uns das Wasser entfernt und die zurückbleibenden Molekeln des Salzes im Gaszustande den Raum der Flüssigkeit erfüllend, so ist der von ihnen ausgeübte Druck gleich $\frac{1}{3}\,\mathsf{N} m v^2$, wenn v die mittlere Geschwindigkeit der gasförmigen Molekeln bezeichnet; Gleichheit des osmotischen Druckes mit dem Gasdruck ist vorhanden, wenn $N u^2 = \mathsf{N} v^2$, $u = v\sqrt{1-\omega}$. Gleichheit der beiden Geschwindigkeiten, welche die Molekeln des Salzes in Lösung und im Gaszustande besitzen, ist vorhanden, wenn das Volumen der in 1 cm^3 enthaltenen Wassermolekeln vernachlässigt werden kann gegen 1. Diese Voraussetzung wird im Folgenden der Einfachheit halber festgehalten werden.

Wir werden nun die im Vorhergehenden entwickelten Principien zunächst in Anwendung bringen auf d i e D i f f u s i o n e i n e s i n w ä s s e r i g e r L ö s u n g n i c h t d i s s o c i i r t e n K ö r p e r s, etwa des Rohrzuckers. Die Geschwindigkeit, mit welcher die Molekeln des gelösten Körpers sich bewegen, betrachten wir als konstant und als gleich der Geschwindigkeit, welche die Molekeln im Gaszustand besitzen würden. Wir setzen ferner voraus, daß die Concentration der Lösung allenthalben eine so geringe sei, daß die Zusammenstöße zwischen zwei Molekeln des gelösten Körpers an Zahl verschwinden gegenüber den Zusammenstößen mit Molekeln des Lösungsmittels; jede einzelne Molekel des gelösten Körpers wird sich dann so bewegen, als ob sie allein in dem Lösungsmittel enthalten wäre; die mittlere Länge der geradlinigen Stücke, aus welchen die Zickzackbahnen der Molekeln sich zusammensetzen, wird lediglich bedingt durch die Anstöße der gelösten Molekeln an die Molekeln des Lösungsmittels; die mittlere molekulare Weglänge ist also unabhängig von der Concentration, Gleiches gilt natürlich auch von der Zeit T, welche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Anstößen vergeht oder von der Anzahl der Anstöße in der Zeiteinheit. Es möge nun die Lösung eingeschlossen sein in einem cylindrischen Gefäß; in jeder zu der Axe des Cylinders senkrechten Ebene sei die Concentration dieselbe, dagegen nehme die Concentration in der Richtung der Cylinderaxe nach einem gegebenen Gesetze ab. Betrachten wir irgend eine zu der Cylinderaxe senkrechte Ebene und in dieser eine Fläche von 1 cm^2 Inhalt, so werden von beiden Seiten her Molekeln des gelößten Körpers durch dieselbe hindurch gehen; es wird aber offenbar die Zahl der Molekeln, welche von der Seite größerer Concentration herkommen, größer sein, als die Zahl der von der Seite geringerer Concentration kommenden. Im Ganzen bleibt also ein Ueberschuß von Molekeln, welche von der Seite größerer nach der Seite kleinerer Concentration übergehen und dieser stellt den Diffusionsstrom dar. Bezeichnen wir die Concentration, d. h. die Zahl der Grammmolekeln, welche in 1 cm^3 der Lösung enthalten sind, durch N, die molekulare Geschwindigkeit der gelößten Molekeln durch u, die molekulare Weglänge, d. h. die mittlere Länge der geradlinigen Stücke der Zickzackwege, durch l, endlich durch z die Richtung der Cylinderaxe, so ergiebt sich für die Zahl der von der Seite größerer Concentration kommenden Grammmolekeln der Ausdruck

$$Q = \tfrac{1}{4} Nu + \frac{1}{2\cdot 3} \frac{\partial N}{\partial z} lu .$$

Für die Zahl der von Seiten kleinerer Concentration kommenden

$$Q' = \tfrac{1}{4} Nu - \frac{1}{2\cdot 3} \frac{\partial N}{\partial z} lu .$$

Hiernach wird der Diffusionsstrom gegeben sein durch

$$Q - Q' = \tfrac{1}{3} lu \frac{\partial N}{\partial z}$$

und der Diffusionskoëfficient für den Tag als Zeiteinheit:

$$k = 8{,}64 \times 10^4 \frac{lu}{3} .$$

Setzt man für u die aus dem Gasgesetze zu berechnende Geschwindigkeit, so ergiebt sich beispielsweise für Rohrzucker

$$l = 0{,}077 \times 10^{-8} \text{ cm.}$$

Wir gehen über zu dem Problem der elektrolytischen Leitung. Wir setzen dabei voraus, daß die Lösung des Elektrolyten so verdünnt sei, daß derselbe vollständig in die beiden Jonen gespalten ist. Wir können dann bei der Berechnung der Bewegungen die positiven und negativen Jonen vollständig unabhängig von einander behandeln und bestimmen schließlich die Stromstärke durch eine Superposition der gefundenen Einzel-Bewegungen. Die Zahl der positiven Jonen, welche in 1 cm^3 der Lösung sich befinden, sei N; die Masse eines Jons sei μ_p, die mit derselben verbundene Menge von positiver Elektricität ε. Wir denken uns den Elektrolyten eingeschlossen in einem Cylinder; die elektromotorische Kraft wirke längs seiner Axe, und besitze, bezogen auf die elektrostatische Einheit der positiven Elektricität, die Stärke Z.

Betrachten wir ein Volumelement $d\tau$ im Inneren des Elektrolyten, so wird von diesem in 1 sec eine Zahl von $N d\tau / T$ Jonen nach allen Seiten des Raumes ausgeschleudert werden, entsprechend der Zahl der Anstöße, welche die in dem Volumelement enthaltenen Jonen in 1 sec erhalten. Ein großer Theil der letzteren wird schon nach kurzer Zeit von benachbarten Molekeln des Lösungsmittels aufgefangen und von der ursprünglichen Wurfrichtung abgelenkt werden, andere Jonen werden sich weiter entfernen, aber schließlich werden alle der ablenkenden Wirkung von Molekeln des Lösungsmittels unterliegen. Verfolgen wir die von $d\tau$ ausgehenden Jonen nur bis zu den Endpunkten ihrer geraden Wurfrichtungen, so werden dieselben über eine um $d\tau$ beschriebene Kugel in koncentrischen Schichten sich vertheilen, deren Dichte nach außen hin rasch abnehmen wird. Die elektromotorische Kraft Z wirkt auf die von $d\tau$ ausgesandten Jonen ganz ebenso, wie die Schwerkraft auf einen geworfenen Stein, sie ertheilt allen Jonen eine Ablenkung von der geradlinigen Wurfrichtung, welche sich nach dem Fallgesetze berechnen läßt; dieselbe wächst mit dem Abstand bis zu dem sich die Jonen von dem Elemente $d\tau$ entfernen, sie ist größer für die äußeren, kleiner für die inneren Schichten der erwähnten Kugel. Mit Rücksicht hierauf wie auf die verschiedene Dichtigkeit der Jonen in den aufeinanderfolgenden koncentrischen Kugelschalen ergiebt sich der Mittelwerth ζ der Verschiebung, welche die in 1 sec von dem Volumelement $d\tau$ ausgesandten Jonen durch die elektromotorische Kraft erleiden,

$$\zeta = \frac{\varepsilon l_p^2}{\mu_p u_p^2} Z$$

wo l_p die Weglänge, u_p die molekulare Geschwindigkeit; multipliciren wir die Verschiebung ζ mit der Zahl N/T der Jonen, welche in der Volumeinheit während 1 sec neue Wege beginnen, so erhalten wir die Menge positiver Jonen, Q_p, welche in 1 sec durch die Querschnittseinheit des Leiters hindurchgehen

$$Q_p = \frac{N}{T_p} \frac{\varepsilon l_p^2}{\mu_p u_p^2} Z = N\varepsilon \frac{l_p}{\mu_p u_p} Z.$$

Ebenso findet man die entsprechende Menge negativer Jonen

$$Q_n = N\varepsilon \frac{l_n}{\mu_n u_n} Z.$$

Es wird somit die Ueberführungszahl

$$n = \frac{l_n/\mu_n u_n}{l_p/\mu_p u_p + l_n/\mu_n u_n}$$

oder mit Rücksicht auf die zwischen Molekulargewicht und molekularer Geschwindigkeit bestehende Beziehung

$$n = \frac{l_n u_n}{l_p u_p + l_n u_n}$$

und die elektrische Leitfähigkeit

$$k = N\varepsilon^2 \left(\frac{l_p}{\mu_p u_p} + \frac{l_n}{\mu_n u_n} \right).$$

Wir werden nun N auch betrachten können als die Zahl der Grammionen in 1 cm³ der Lösung; bezeichnen wir außerdem durch A die Anzahl der g Wasserstoff, welche in 1 sec durch einen Strom abgeschieden werden, der nach elektromagnetischem Maaße die Stärke 1 besitzt. ($\mathsf{A} = 0{,}0001047\ g$), so stellt der Bruch N/A die Anzahl der elektrolytischen Aequivalente dar, welche in 1 cm³ der Lösung enthalten sind. Drücken wir nun die Leitfähigkeit der Lösung aus in elektromagnetischem Maaße, dividiren wir dieselbe durch die in elektrolytischen Aequivalenten gemessene Concentration, so ergiebt sich die Größe, welche F. Kohlrausch als molekulare Leitfähigkeit bezeichnet hat. Wir finden

$$L = \frac{1}{\mathsf{A}} \left(\frac{l_p}{\mu_p u_p} + \frac{l_n}{\mu_n u_n} \right) = U + V.$$

Hier sind U und V die von F. Kohlrausch berechneten absoluten Beweglichkeiten der Jonen; für die letzteren ergeben sich somit aus unserer kinetischen Theorie die Werthe

$$U = \frac{l_p}{\mathsf{A}\mu_p u_p}, \qquad V = \frac{l_n}{\mathsf{A}\mu_n u_n}.$$

Bezeichnet man durch ω die Geschwindigkeit einer Wasserstoffmolekel bei der Temperatur unseres Elektrolyten, so ist

$$\mu_p u_p^2 = \mu_n u_n^2 = 2\omega^2.$$

Somit ergeben sich die Beziehungen:

$$\frac{l_p}{\mu_p u_p} = \frac{l_p u_p}{2\omega^2}, \quad \frac{l_n}{\mu_n u_n} = \frac{l_n u_n}{2\omega^2}$$

und

$$U = \frac{l_p u_p}{2\mathsf{A}\omega^2}, \qquad V = \frac{l_n u_n}{2\mathsf{A}\omega^2}.$$

Setzt man für u_p und u_n die dem Gaszustand entsprechenden Geschwindigkeiten, so ergeben sich beispielsweise die folgenden Werthe der molekularen Weglängen:

	Li	*Na*	*K*	*F*	*Cl*	*Br*	*J*
$l \times 10^8$ (cm)	0,16	0,44	0,88	0,12	0,86	1,39	1,76.

Die Anwendung der kinetischen Theorie auf die Theorie der elektrolytischen Leitung ist von Interesse deßhalb, weil hier eine Prüfung der Resultate durch die entsprechende Theorie der Diffusion des Elektrolyten ermöglicht wird. Wir denken uns den Elektrolyten wieder eingeschlossen in ein cylindrisches Gefäß; die Concentration nehme in der Richtung der Axe ab, sie sei aber überall so klein, daß die Molekeln des Elektrolyten vollständig in die beiden Jonen zerfallen sind. Wir könnten zunächst die Diffusion der beiden Arten von Jonen von einander unabhängig in der zu Anfang angegebenen Weise berechnen; wenn aber z.B. die Diffusionsgeschwindigkeit des negativen Jons eine größere ist, als die des positiven, so wird in Folge der Diffusion eine positive elektrische Ladung auf der einen, eine negative auf der anderen Seite des Cylinders sich einstellen und diese würde die Diffusionsgeschwindigkeit der negativen Jonen vermindern, die der positiven vermehren. Der Bewegungszustand ist ein stationärer offenbar nur dann, wenn der durch die Potentialdifferenz bedingte elektrische Strom sich zu dem Diffusionsstrom in ein solches Verhältniß gesetzt hat, daß durch den Querschnitt des Diffusionscylinders jederzeit ebenso viel positive wie negative Jonen hindurchgehen. Bezeichnen wir die hiezu nothwendige elektromotorische Kraft mit Z, so giebt die Verbindung der Formeln, welche wir im Vorhergehenden für Diffusion und Elektrolyse entwickelt haben, für die Anzahl der Grammmolekeln des positiven Jons, welche in 1 sec durch eine Fläche von 1 cm^2 hindurchgehen,

$$S_p = \frac{l_p u_p}{3} \frac{dN}{dz} + N\varepsilon \frac{l_p}{\mu_p u_p} Z.$$

Ebenso für das negative Jon

$$S_n = \frac{l_n u_n}{3} \frac{dN}{dz} - N\varepsilon \frac{l_n}{\mu_n u_n} Z.$$

Bestimmen wir den Werth von $N\varepsilon Z$ durch die Bedingung $S_p = S_n$ so ergiebt sich:

$$S_p = \tfrac{1}{3} l_p u_p \times 2n \frac{dN}{dz}$$

wo n die Ueberführungszahl bezeichnet. Der Diffusionskoëfficient bezogen auf die sec. als Zeiteinheit ist somit:

$$k' = 2n \frac{l_p u_p}{3}.$$

Drückt man n und $l_p u_p$ durch die absoluten Beweglichkeiten U und V aus, so ergiebt sich die Formel

$$k' = \tfrac{2}{3} \mathbf{A} \omega^2 \frac{2UV}{U+V}$$

welche mit der von Nernst auf anderem Wege gefundenen übereinstimmt; für die numerische Rechnung ist es am bequemsten, die Formel in der Form

$$k' = \tfrac{4}{3} \mathbf{A} \omega^2 n U$$

zu schreiben. Setzt man für $\mathbf{A}$ und ω ihre Werthe und berechnet man den Diffusionskoëfficienten für den Tag als Zeiteinheit, so ergiebt sich

$$k = 40{,}1\, n U \times 10^{10}.$$

Beispielsweise ist für HCl $n = 0{,}19$ und $U = 300 \times 10^{-13}$, somit

$$k = 2{,}44$$

während der beobachtete Werth 2,30 ist.

Man würde eine Prüfung der Formel natürlich auch in der Weise ausführen können, daß man mit Hülfe der Werthe von k, n und u die molekulare Weglänge berechnete. Die so aus der Diffusionskonstanten sich ergebenden Weglängen würden mit den aus der Leitfähigkeit berechneten in vollkommen befriedigender Uebereinstimmung stehen.

Absolute Härtemessung.

Von

F. Auerbach in Jena.

Einleitung.

In Anbetracht des Umstandes, daß die Härte eine der auffälligsten und wichtigsten Eigenschaften der festen Körper ist, muß es Wunder nehmen, daß das in ihr liegende Problem bis zum heutigen Tage ohne eine wissenschaftlich befriedigende Lösung geblieben ist. Zwar ist die Zahl der einschlägigen Bemühungen eine überaus große, aber der Erfolg steht hierzu in einem sehr ungünstigen Verhältnisse. Das Problem, das eine physikalische Eigenschaft der Körper darbietet, kann ganz allgemein in drei Theilprobleme zerlegt werden, nämlich erstens: die wissenschaftliche Definition des betreffenden Begriffs als einer mathematischen Größe; zweitens: die Angabe einer Methode und die Construktion eines Apparates zur Bestimmung dieser Größe; drittens: die wirkliche Ausführung derartiger Messungen. Dabei kommt es zunächst durchaus nicht auf die Einfachheit und praktische Brauchbarkeit des Verfahrens an — diese Frage gehört vielmehr einem viel späteren Stadium der Untersuchung an —, sondern lediglich auf die wissenschaftliche Exaktheit der Definition, der Methode, des Apparates und der Messungen.

Historisch-Kritisches.

Ein kurzer Blick auf die bisherigen Härtemessungen zeigt, daß sie begründeten Anspruch auf wissenschaftliche Exaktheit nicht erheben können. Der erste Versuch, die Härte zu definiren, liegt in dem bekannten Ausspruche: Ein Körper ist härter als ein andrer, wenn eine ebne Fläche des ersteren von dem in Form einer Spitze angewandten letzteren nicht geritzt wird; wird sie dagegen geritzt, so ist er weicher. Diese Definition würde, wenn sie überhaupt eine solche wäre, den fundamentalen Fehler haben, eine Spitze des einen Materials mit einer ebenen Fläche des andern zu vergleichen, also eine Vergleichung unter gar nicht vergleichbaren Umständen zu versuchen; und diesem Fehler reihen sich zahlreiche andre an. Aber der Ausspruch enthält gar keine mathematische Definition, er sowohl, wie die auf ihn gegründeten, allgemein verbreiteten Härteskalen, liefern keine Härtezahlen, sondern nur Härtenummern, und selbst diese haben aus den obigen Gründen oft einen zweifelhaften Werth.

Um wirkliche Härtezahlen zu erhalten, hat man dann an die Thatsache angeknüpft, daß das Auftreten eines Ritzes von dem Drucke abhängt, unter welchem die Spitze während ihrer Bewegung steht, und man hat geradezu diesen, in Gewichten ausgedrückten Druck als Maaß der Härte bezeichnet. Von äußeren Schwierigkeiten abgesehen ist dieser Definition ihre sehr spezielle Bedeutung vorzuwerfen; speziell ist dabei 1) das Material der Spitze, 2) ihre Form, also im wesentlichen der Grad ihrer Spitzigkeit, der sich überdies der exakten Angabe meist entzieht, endlich 3) ein fast völlig unbeachtet gebliebener Umstand, nämlich die Geschwindigkeit, mit welcher, und die Neigung, unter welcher die Spitze fortbewegt wird; auf die Größe des zu messenden normal zur Ebene wirkenden Druckes müssen beide Umstände von Einfluß sein. Diese Betrachtung führt zugleich auf einen den bisher genannten Methoden gemeinsamen principiellen Fehler, der darin liegt, daß man einen statischen Begriff, wie die Härte, durch einen Bewegungsvorgang, wie das Ritzen, messen wollte — ein Abweg, auf den man jedenfalls nur aus dem praktischen Grunde gerathen ist, daß ein linienförmiger Eindruck sich besser beobachten läßt, als ein punktförmiger. Am deutlichsten zeigt sich die Fehlerhaftigkeit dieser Auffassung in dem Umstande, daß die so definirte Härte für eine und dieselbe Krystallfläche in verschiedenen Richtungen verschiedene Werthe annimmt, was mit der wahren Härte nichts zu thun hat, und nur daher rührt, daß der ausgeübte schiefe Druck außer der normalen auch eine laterale, in verschiedenen Richtungen verschiedene Componente hat.

Es ist daher als ein Fortschritt zu bezeichnen, daß die statische Methode, die übrigens älter als die dynamische ist, in neuerer Zeit von verschiedenen Seiten wieder aufgenommen worden ist, wobei freilich hinzugefügt werden muß, daß diese Methoden statisch nur insoweit sind, als laterale Bewegungen dabei nicht auftreten. Man schlägt, bohrt oder preßt eine Spitze in eine ebene Fläche des zu untersuchenden Materials ein und definirt die Härte entweder als das zur Erreichung einer bestimmten Tiefe des Eindringens erforderliche Belastungsgewicht, oder als die Tiefe dieses Eindringens bei gegebner Belastung, oder auch als die Zeit, welche bei gegebner Belastung nothwendig ist, um bei gleichmäßigem Eindringen eine bestimmte Tiefe zu erreichen. Man ersieht aber schon aus dieser Zusammenstellung, daß hier verschiedene Momente ineinandergreifen, und zwar in einer nicht allgemein anzugebenden Weise. Dazu kommt als weiterer Uebelstand, daß hier das betreffende Material nicht nur sehr stark beansprucht, sondern an der zu untersuchenden Stelle geradezu zerstört wird, daß man also in dem Augenblicke, wo man die Härte mißt, gar nicht mehr den ursprünglichen Körper vor sich hat. Aus diesen Gründen ergiebt sich, daß auch die so erhaltene Größe ein die Härte in ausreichendem und nothwendigem Grade charakterisirendes Maaß nicht sein wird.

Das Verdienst, die principiellen Fehler, von denen hier die Rede war, richtig erkannt und durch eine neue Definition der Härte im wesentlichen vermieden zu haben, gebührt Hertz[1]). Erstens ersetzt er die Spitze durch eine kugelförmige Endfläche oder, richtiger gesagt — da doch die Spitze nichts anderes als eine derartige Kugelfläche mit sehr kleinem Radius ist — er giebt ihr eine beliebige, aber genau meßbare Krümmung; zweitens läßt er dahingestellt, aus welchem Material die Spitze bestehe, derart daß man hierfür, wenn man es für wünschenswerth erachtet, auch denjenigen Stoff wählen kann, aus welchem der zu untersuchende Körper besteht; das Ergebniß hängt alsdann überhaupt von keinem fremden Material ab; drittens endlich bringt er dem zu untersuchenden Körper keine Verletzung von bestimmtem Grade bei, sondern läßt ihn nur eben seine Elasticitätsgrenze erreichen. Hiernach lautet die Definition der Härte folgendermaßen: Die Härte ist die Elasticitätsgrenze eines Körpers bei Berührung einer ebenen Fläche desselben mit einer kugelförmigen Fläche eines andern Körpers. Damit ist zugleich der Begriff der Härte eingereiht unter die übrigen analogen Begriffe, welche sich auf die Vorgänge des Zuges, der Biegung u.s.w. beziehen. Während es Hertz gelang durch eine höchst scharfsinnige, exakte Entwickelung des Berührungsproblems[2]) die theoretische Grundlage des Härte-Problems zu sichern und somit das erste der eingangs genannten drei Theilprobleme vollständig zu lösen, war er bei seinen Versuchen, eine geeignete Methode festzustellen und wirkliche Härtemessungen vorzunehmen, weniger erfolgreich, sodaß er nach den ersten Vorversuchen die Angelegenheit fallen ließ. Ich will hier auf eine Untersuchung der Umstände, die dabei maaßgebend waren, nicht eingehen. Dagegen glaube ich, daß es mir gelungen

1) H. Hertz, Verh. Berl. physik. Ges. 1882, p. 67.

2) Hertz, Crelle's J. 92, p. 156. (1882).

ist, eine durchaus brauchbare und einer genügenden, zum Theil sogar überraschenden Genauigkeit fähige Methode aufzufinden, und will diese, ihre Theorie, den darauf gegründeten Apparat und einige Messungen hier mittheilen, bemerke aber, daß diese letzteren zunächst nur den Zweck haben, zu zeigen, daß die Methode und die Resultate, die sie liefert, als eine befriedigende Lösung des zweiten und dritten Theilproblems zu betrachten sind.

Theorie.

Wenn eine ebene Fläche eines Körpers und eine kugelförmige Fläche eines andern Körpers sich ohne Druck berühren, so thun sie dies in einem Punkte. Wird jetzt ein bestimmter, gegen die Ebene normaler Druck ausgeübt, so verändern sich beide Flächen, die Ebene krümmt sich, die Kugelfläche plattet sich bis zu einem gewissen Grade ab, und damit geht der Berührungspunkt in eine beiden Körpern gemeinsame Fläche über. Diese Fläche heißt die Druckfläche; sie ist weder eben, noch von der Krümmung der Kugelfläche, ihre Krümmung liegt vielmehr zwischen beiden Werthen; wie groß sie ist, hängt nicht nur von der Krümmung der Kugelfläche, sondern auch von den Elasticitätsverhältnissen der beiden Körper ab; begrenzt endlich ist die Druckfläche durch eine Kreislinie.

Wird der ausgeübte Druck gesteigert, so nimmt die Druckfläche an Größe zu, und der gesteigerte Druck vertheilt sich somit auf eine größere Fläche. Nun hängt die Beanspruchung des Materials offenbar nicht von dem ausgeübten Gesammtdruck, sondern von dem Druck auf die Flächeneinheit ab; es kommt daher darauf an, wie sich diese letztere Größe bei Steigerung des Gesammtdruckes verhält, resp. nach welchem Gesetze sie selbst wächst — denn daß auch der Druck pro Flächeneinheit wächst, folgt schon aus den bekanntesten Erfahrungsthatsachen. Nach welchem Gesetze der Einheitsdruck mit dem Gesammtdrucke zunehmen wird, hängt von dem Gesetze ab, nach welchem die Druckfläche mit dem Gesammtdrucke wächst. Die Theorie zeigt nun, daß der Radius der Druckfläche (genauer: der Radius der sie begrenzenden Kreislinie) wie die Kubikwurzel aus dem Gesammtdruck wächst, also die Druckfläche selbst wie die 2/3. Potenz desselben; so viel also geht durch Vertheilung verloren, und der Einheitsdruck steigt nur wie die Kubikwurzel aus dem Gesammtdruck. Auch die Frage, wie sich der Gesammtdruck auf die Fläche vertheilt, wird von der Theorie beantwortet, und zwar dahin, daß der Druck zu einer bestimmten Zeit vom Mittelpunkte der Druckfläche aus, wo er am größten ist, nach dem Rande hin, wo er null ist, allmälich abnimmt; der oben schlechthin als solcher bezeichnete Einheitsdruck hat also nur die Bedeutung eines Durchschnittswerthes, der im Mittelpunkt stattfindende Maximalwerth verhält sich zu ihm wie 3 : 2. Wächst nun der Gesammtdruck mehr und mehr, so wird auch der letztgenannte Maximaldruck immer größer, und bei einem bestimmten Werthe desselben wird der Eine der beiden Körper oder werden beide, falls sie aus demselben Stoffe bestehen, die Elasticitätsgrenze erreichen, was sich darin zeigen wird, daß, bei einem plastischen Körper, eine dauernde Deformation eintritt, also eine Doformation, die auch nach Aufhebung des Drucks bestehen bleibt, daß dagegen, bei einem spröden Körper, der Zusammenhang der Theile an gewissen Stellen, also durch einen Sprung, aufgehoben wird. Dieser Grenzwerth des im Mittelpunkte der Druckfläche herrschenden Einheitsdrucks ist nach der Definition von Hertz die Härte des betreffenden Körpers.

Bisher wurde ein bestimmtes System zweier sich berührenden Körper angenommen. Es entsteht jetzt die Frage, wie sich die Verhältnisse ändern, wenn es durch ein andres, in irgend einer Weise von jenem abweichendes, ersetzt wird. Die Abweichung kann im Wesentlichen nur zwei Punkte betreffen; es kann nämlich 1) die Kugelfläche eine andre Krümmung haben, und es können 2) die Körper aus Stoffen andrer Elasticität bestehen. Was den ersten Punkt betrifft, so zeigt die Theorie, daß, bei sonst gleichen Umständen, der Radius der Druckfläche der Kubikwurzel aus dem Krümmungsradius der Kugelfläche, also die Druckfläche selbst seiner 2/3. Potenz direkt proportional ist. Bei gleichem Gesammtdruck ist also der Einheitsdruck und folglich auch der Maximaldruck der Kubikwurzel aus dem Krümmungsradius proportional. Ist nun dieser Maximaldruck die maaßgebende Größe, so muß sein der Elasticitätsgrenze entsprechender Grenzwerth unabhängig vom Krümmungsradius sein. Es muß also der Grenzwerth des Gesammtdruckes dem Quadrate des Grenzradius der Druckfläche proportional sein, oder, wenn man hierin mit Hilfe der obigen Beziehungen den Radius der Druckfläche durch Gesammtdruck und Krümmungsradius ausdrückt, es muß der Grenzwerth des Gesammtdrucks mit dem Quadrate des Krümmungsradius wachsen. Auf den zweiten Punkt soll hier zunächst nicht näher eingegangen werden, es sei nur bemerkt, daß unter sonst gleichen Umständen die Größe der Druckfläche von einer Combination der Elasticitätsconstanten der Stoffe abhängt; in dem hier vorerst ausschließlich zu betrachtenden Falle, daß die beiden Körper aus dem gleichen Stoffe bestehen, wird diese Abhängigkeit natürlich eine besonders einfache.

Um die angeführten Gesetze in Formeln zu bringen, sollen folgende Bezeichnungen eingeführt werden. Es sei:

ϱ der Krümmungsradius der Kugelfläche in mm.

p der ausgeübte Druck in kgr.

P sein Grenzwerth, d. h. sein Werth im Augenblicke des Eintritts einer bleibenden Deformation.

p_1 der Einheitsdruck im Mittelpunkte der Druckfläche, also der Maximaldruck, in kgr pro qmm.

P_1 sein Grenzwerth, also die „theoretische Härte".

d der Durchmesser der Druckfläche in mm (da er in den Beobachtungen unmittelbar auftritt, ist er dem oben stets betrachteten Radius vorzuziehen).

D sein Grenzwerth in mm.

H die wahre Härte, die, wie sich zeigen wird, von der theoretischen in einer gewissen Hinsicht verschieden ist.

q zur Abkürzung der Quotient p/d^3.

Q sein Grenzwerth.

f die Größe der Druckfläche in qmm.

F ihr Grenzwerth.

E der Elasticitätsmodul des Materials in kgr. pro qmm.

μ seine Elasticitätszahl d. h. das Verhältniß der Quercontraktion zur Längsdilatation.

E' zur Abkürzung der Quotient $E/(1-\mu^2)$.

Schließlich sollen eckige Klammern bedeuten, daß die eingeschlossene Größe nicht in obigen absoluten Maaßen, sondern in den zufälligen Beobachtungsmaaßen ausgedrückt ist.

Hiernach ergeben sich folgende Formeln:

$$f = \frac{\pi}{4}\, d^2, \qquad F = \frac{\pi}{4}\, D^2$$

$$p_1 = \frac{3}{2}\,\frac{p}{f} = \frac{6}{\pi}\,\frac{p}{d^2}, \qquad P_1 = \frac{3}{2}\,\frac{P}{F} = \frac{6}{\pi}\,\frac{P}{D^2}$$

für ein und daselbe ϱ und E': $\dfrac{d}{\sqrt[3]{p}} = \text{const}$, also $\dfrac{d^3}{p} = \text{const}$. also

$$q = \text{const}, \tag{1}$$

ein constanter Werth, mit dem also auch der Grenzwerth Q übereinstimmt. Folglich für gleiches ϱ und E': $\frac{p_1}{\sqrt[3]{p}} = \text{const}$. Für verschiedene ϱ, aber ein und dasselbe E': $\frac{d}{\sqrt[3]{p\varrho}} = \text{const}$, also

$$(2) \qquad \varrho q = \text{const};$$

für verschiedene ϱ und E': $d = \sqrt[3]{\frac{12 p\varrho}{E'}}$, $D = \sqrt[3]{\frac{12 P\varrho}{E'}}$; für verschiedene ϱ, aber gleiches E':

$$(3) \qquad P_1 = \text{const, also} \left\{ \begin{array}{l} \frac{P}{D^2} = \text{const} \\ \frac{P}{\varrho^2} = \text{const} \\ \frac{D}{\varrho} = \text{const}; \end{array} \right\}$$

drei Gleichungen, welche nur verschiedene Ausdrucksweisen einer und derselben Beziehung sind. Endlich für ein bestimmtes ϱ und E' die theoretische Härte:

$$(4) \qquad P_1 = \frac{6}{\pi}\frac{P}{D^2} = \frac{1}{\pi}\sqrt[3]{\frac{3}{2}\frac{E'^2 P}{\varrho^2}} = \frac{6}{\pi}\sqrt[3]{Pq^2}$$

und nebenbei die Elasticitätsconstante E':

$$(5) \qquad E' = 12\varrho q.$$

Methode.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich, daß man, um aus den Erscheinungen bei der Berührung einer ebenen und einer kugelförmigen Fläche gleichen Materials die Härte desselben ableiten zu können, den Druck, unter welchem die Berührung stattfindet, bis zur Elasticitätsgrenze steigern, den Augenblick, in welchem diese erreicht ist, genau feststellen und in diesem Augenblicke zwei Größen: den Gesammtdruck und den Durchmesser der Druckfläche, messen muß. Die erste der Formeln (4) giebt dann die theoretische Härte. Für die Genauigkeit des Ergebnisses ist es offenbar mißlich, daß man jede der beiden Größen P und D nur einmal messen kann, und es erscheint wünschenswerth, wenigstens für die Größe D — denn für P ist es augenscheinlich nicht möglich — hierin Wandel zu schaffen; dazu können die beiden andern Formeln (4) Anwendung finden. Die eine von ihnen erfordert, außer der Messung von P noch die Kenntniß von ϱ und E'; während man nun ϱ als aus der Herstellung der Kugelfläche bekannt annehmen kann, würde man gezwungen sein, E', also E und μ entweder aus den für den betreffenden Stoff vorliegenden Messungen zu entlehnen, oder diese Messung an andern Stücken desselben Materials selbst vorzunehmen, beides wenig empfehlenswerthe Auskunftsmittel, da die Elasticitätsverhältnisse bekanntlich mit der kleinsten Verschiedenheit des Stoffs und selbst von individuellem Stück zu Stück oft nicht unerheblich variiren. Dagegen ist die letzte der Formeln (4) in jeder dieser Hinsichten durchaus brauchbar; sie setzt nämlich außer der Messung von P lediglich die Kenntniß von q voraus, die man sich, da bei zunehmendem Gesammtdruck q constant bleibt, aus einer größeren Zahl von Messungen bei wachsenden p verschaffen kann, für die man also nicht auf die Messung des einzigen Grenzwerthes beschränkt ist. Im Gegentheil, es kann sogar nur vortheilhaft sein, diesen Grenzwerth Q, falls er von den übrigen Werthen abweichen sollte, nicht mit zur Bildung des Mittelwerthes von q zu benutzen, da in dem Augenblicke, wo man ihn beobachten kann, der Körper schon eine bleibende Deformation erfahren hat. Daß man auf diese Weise gezwungen wird, die Drucksteigerung nach und nach vorzunehmen, kommt nicht in Betracht, da ein solches Verfahren ohnehin geboten ist, wenn man nicht für den Grenzdruck einen falschen Werth zu finden Gefahr laufen will.

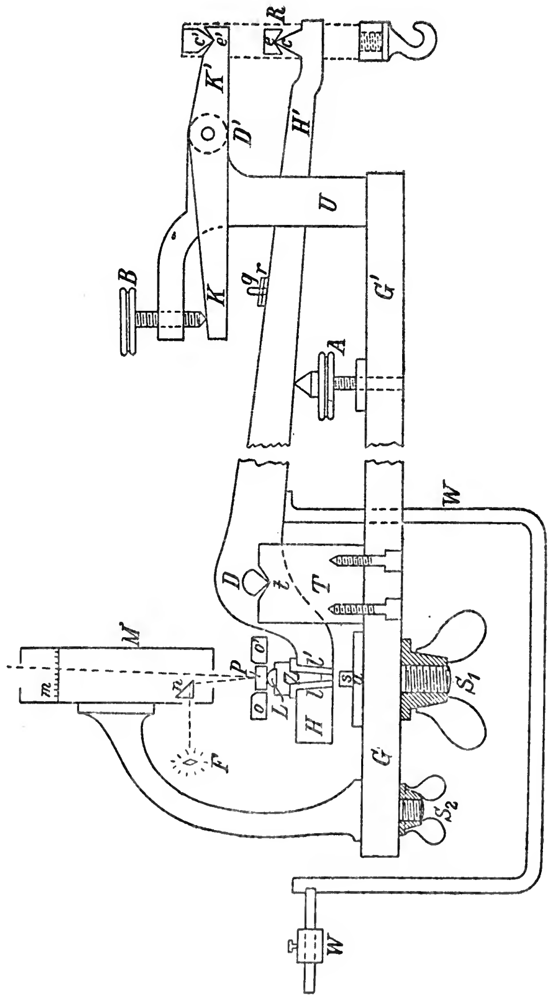
Der Eintritt der Elasticitätsgrenze ist am einfachsten bei sog. spröden Körpern mit Genauigkeit festzustellen, und zwar durch das plötzliche Auftreten eines Sprunges, von welchem gleich hier angeführt werden möge, daß er z. B. bei Glas genau kreisförmig, mit der Druckfläche concentrisch und sehr klein im Verhältniß zum Krümmungsradius der Kugelfläche ist. Demgemäß ist in dieser Mittheilung nur von spröden Körpern die Rede. Die meisten spröden Körper sind zugleich mehr oder weniger durchsichtig, und auf durchsichtige Körper allein ist die Methode in ihrer hier zu beschreibenden Form unmittelbar anwendbar. Diese Methode aber besteht in folgendem.

Der Körper mit kugelförmiger Fläche wird in Form einer Linse von 1 bis 30 mm Krümmungsradius, der Körper mit ebener Fläche in Form einer planparallelen Platte von rund 11,6 mm freiem Durchmesser und 8 mm Dicke angewendet, also von einer im Vergleich zur Breite hinreichenden Dicke, um eine Durchbiegung der Platte als solcher auszuschließen. Die Platte ist fest, die Linse frei aufgestellt; der Druck wird, durch Vermittelung eines Hebels, durch Gewichte erzeugt. Die Druckfläche und das Auftreten des Sprunges werden, um naheliegenden Einwänden zu begegnen, in unveränderter Drucklage von Platte und Linsen beobachtet, und zwar, da es sich um sehr kleine Größen handelt, mit einem Mikroskop, normal durch die Platte hindurch. Die Druckfläche erscheint dabei als ein dunkler, kreisförmiger Fleck, der ebenso wie die ihn umgebenden Ringe als Interferenzerscheinung aufzufassen ist; übrigens finden auch die Durchmesser dieser Ringe, wie sich zeigen wird, bei den Beobachtungen Verwerthung. Die Einzelheiten der Methode müssen an der Hand des Apparates besprochen werden.

Apparat.

Der durch freundliche Vermittelung von Herrn Abbe in dem hiesigen optischen Institute von Zeiss ausgeführte Apparat, bei dessen Construcktion meine hiesigen Fachgenossen, insbesondere aber Herr Abbe selbst, mir mit werthvollen Rathschlägen zur Hand gingen, ist in der Figur in einem schematischen Schnitt mit Fortlassung nebensächlicher Dinge dargestellt. Er ist so gebaut, daß er genügende Festigkeit besitzt, um den großen Drucken, denen er auszusetzen ist, gewachsen zu sein; zugleich ist er zur möglichsten Vermeidung von Erschütterungen an einem Pfeiler eines Kellerzimmers mittelst starker Bänder montirt. Die gußeiserne Grundplatte G G' hat T-förmigen Querschnitt, 730 mm Länge, 75 mm Breite und der Länge nach einen centralen Schlitz. Der auf ihr aufgeschraubte Träger T enthält die Lager t für die Schneiden D, welche den Drehpunkt für den schmiedeeisernen zweiarmigen Hebel $H\,H'$ bilden. Der kürzere linke Schenkel H hat in 50 mm horizontalem Abstand von der Drehaxe eine ringförmige Erweiterung $l\,l'$, deren konische Hohlung zur Aufnahme des die Linse L tragenden Zapfens Z dient. Von dem etwa zehnmal so langen rechten Hebelarm H', der in der Schneide c endet, ist in der Figur ein längeres Stück weggelassen. Die Platte P aus dem zu untersuchenden Material befindet sich in der centralen Durchbohrung der oberen Platte $o\,o'$ eines Trägers, welcher aus der untern Platte u und einem Paar sie verbindender starker Säulen besteht, von denen in der Figur, da sie mit dem Linsenzapfen in einer Linie liegen, nur ein Stumpf s angedeutet ist.

Zu S. 526



Die Platte $o\,o'$ ist 16 mm stark, mit ihrer unteren Fläche schließt diejenige der zu untersuchenden Platte P in einer Linie ab. Der ganze Kasten läßt sich in dem Schlitz der Grundplatte verschieben und mittelst der kräftigen Flügelschraube S_1 derart feststellen, daß ein gewünschter Punkt der Platte P genau über den höchsten Punkt der Linse L kommt. In ähnlicher Weise läßt sich das Mikroskop M verschieben und mittelst der Flügelschraube S_2, sowie auf Grund der Form des Statives ebenfalls genau vertikal über den höchsten Punkt der Linse aufstellen. Die Linse L ist in den Zapfen Z eingekittet, die Platte P in die Platte $o\,o'$ einfach eingesetzt, am Herausfallen wird sie durch zwei über ihren Rand geschobene Scharniere verhindert. Das Mikroskop enthält ein Okularmikrometer m und empfängt seine Beleuchtung, da sie von unten wegen Behinderung durch Platte und Linse nicht möglich ist, von der Seite, und zwar durch eine Gasflamme F, deren Strahlen durch eine Oeffnung im Rohr auf ein rechtwinkeliges, nur dessen eine Hälfte einnehmendes, Prisma n fallen, von hier nach unten und von dort wieder nach oben reflektirt werden, um endlich in der freien Hälfte des Rohres zum Auge des Beobachters zu gelangen. Der rechte Hebelarm H' kann mittelst der Schraube A in so hoher, und folglich der kurze Hebelarm H in so tiefer Stellung festgelegt werden, daß eine vorzeitige Berührung zwischen Linse und Platte ausgeschlossen ist. Wird A herabgelassen, so würde der lange Hebelarm bei weitem das Uebergewicht gewinnen, wenn dieses nicht durch den schmiedeeisernen Arm W mit dem Laufgewicht w ausgeglichen werden könnte; die Form von W war durch die Umstände geboten, ihre nachttheilige Wirkung auf die Empfindlichkeit des Hebels ist aber durch Hochlegung des letzten Armgliedes mit dem Laufgewicht w wieder aufgehoben. Letzteres wird so gestellt, daß zwischen Linse und Platte noch ein kleiner Zwischenraum bleibt, und alsdann durch Aufsetzen kleiner Ringe r auf den Stift q die Berührung eben hergestellt, was sich an der Verwandlung des bunten Interferenzcentrums in ein schwarzes zu erkennen giebt. Zur Wiederherstellung dieses Zustandes in jedem gewünschten Augenblicke und gleichzeitig zur Präcisirung des Verlaufes der Versuche dient der am Ende der Grundplatte mittelst des Trägers U aufgeschraubte Hebel $K\,K'$. Das Gehänge R, an dessen Haken verschieden große Waagschalen angehängt werden können, hat nämlich die Form eines Rahmens, in dessen Innerem, in gewissem Abstande übereinander, das Lager c und die Schneide c' angebracht sind; wird nun durch Senkung der Schraube B der Hebelarm K gesenkt, also K' gehoben, so nimmt das an diesem Hebel angebrachte Lager c' die Schneide c' des Gehänges auf, hebt dieses somit in die Höhe und entlastet dadurch den Haupthebel HH'; wird umgekehrt B hochgeschraubt, so senkt sich das Gehänge, die Schneide c nimmt e auf, und der Haupthebel wird belastet. Durch alle diese Einrichtungen wird es erreicht, daß im Laufe einer ganzen Versuchsreihe alle Stöße und plötzlichen Aenderungen ausgeschlossen bleiben, und es erfolgt die Belastung durch hinzugefügte Gewichte, durch Drehen der Schraube B und unter Mitwirkung der Federung des Hebelarms, in beliebig langsamer und allmählicher Weise. Im allgemeinen wurde hiernach vor jeder Steigerung des Druckes durch vollständige Entlastung die drucklose Berührung zwischen Linse und Platte wiederhergestellt; es wurde aber zur Controlle mehrfach auch umgekehrt verfahren, dabei aber, bei Annäherung an die Elasticitätsgrenze die Vorsicht gebraucht, das letzte Zusatzgewicht in der Gestalt von Sand auf die Waagschale aufzulegen.

Constanten und Fehlerquellen.

Die zunächst zu ermittelnden Constanten des Apparats sind der Werth eines Theiles des Okularmikrometers und das Verhältniß der Hebelarme. Jener wurde durch Vergleichung mit einem Objektmaaßstab ermittelt und zwar am genauesten schließlich in der Weise, daß eine Glasplatte, in deren Unterseite zehntel mm eingeritzt waren, in der Lage P beobachtet wurde. Es fand sich:

$$27 \text{ sc.} = 1 \text{ mm},$$

mit einer gleich zu besprechenden Abweichung am Rande. Das Verhältniß der Hebelarme hätte bei der Gestalt des Hebels auf direktem Wege nur ungenau ermittelt werden können; es wurde daher an die Stelle des Linsenzapfens Z ein Zapfen mit einer Spitze gebracht, auf diese eine kräftige Waagschale, die unter die Grundplatte herunterhing, gebracht und mit den aufgelegten Gewichten in's Gleichgewicht mit einer kleineren an das Gehänge R gehängten Waagschale nebst Gewichten gebracht. Es ergab sich auf diese Weise die Verhältnißzahl

$$v = 9{,}8$$

mit einem wahrscheinlichen Fehler von $\pm$ 0,01, d. h. etwa $^1/_{1000}$

des Werthes. Hiernach sind alle im Mikroskop gemessenen Längen mit 27 zu dividiren, und aus dem beobachteten Gewicht, in dem natürlich das Gewicht von Gehänge und Waagschale mit enthalten ist, ergiebt sich der wirkliche Druck zwischen Linse und Platte durch Multiplikation mit 9,8.

Eine wichtige Frage ist ferner die, ob der im Mikroskop beobachtete schwarze Fleck seiner Größe nach die Druckfläche unmittelbar wiedergiebt, oder ob, und eventuell welche Correktionen vorerst noch vorzunehmen sind. Es sind hier vier Correktionen denkbar:

1) Wegen des Umstandes, daß eine fast vollständige Auslöschung des Lichts bekanntlich nicht nur in der Berührungsfläche von Platte und Linse, sondern noch darüber hinaus bis zu der Stelle stattfindet, wo der vertikale Abstand beider etwa $^1/_6$ Wellenlänge beträgt, der Fleck also um so viel größer erscheint als die wirkliche Druckfläche. Man könnte diese Correktion aus der durch die Drucktheorie gegebnen Gestalt der Linse berechnen; einfacher und sicherer gelangt man zum Ziele, wenn man erwägt, daß der erste, den Fleck umgebende dunkle Ring, sich da befindet, wo der vertikale Abstand von Linse und Platte $^1/_2$ Wellenlänge beträgt. Auf Grund der Messung dieses Ringdurchmessers und einer Rechnung, die hier übergangen werden möge, kann man sich dann eine kleine Tabelle verschaffen, welche die gesuchte Correktion in Skalentheilen als Funktion der Linsenkrümmung und des scheinbaren Fleckdurchmessers angiebt. Hier sei nur angeführt, daß sie zwischen 0,0 und 0,8 sc. variirt, also in vielen Fällen nicht unberücksichtigt bleiben darf und in diesen thatsächlich berücksichtigt worden ist.

2) Wegen der astigmatischen Verzerrung des durch die Planplatte beobachteten Bildes. Es genüge hier die Bemerkung, daß bei der Kleinheit des Gesichtswinkels der betreffende Fehler über $^1/_{1000}$ des Werthes nicht hinausgeht, außer wenn, was nie geschehen ist, an der äußersten Peripherie des Gesichtsfeldes beobachtet wird.

3) Wegen des Umstandes, daß der Fleck nicht die gekrümmte Druckfläche selbst, sondern ihre ebene Projektion wiedergiebt; auch dieser Fehler ist verschwindend klein, da selbst bei den kleinsten zur Anwendung gelangten Linsen und den stärksten Drucken der Größenunterschied beider Flächen unter $^2/_{1000}$ bleibt.

4) Wegen der etwaigen Wirkung der durch den Druck deformirten Platte als Planconcavlinse. Eine solche Wirkung würde

sttattfinden, wenn das beobachtete Objekt um eine in Betracht kommende Strecke hinter der Concavfläche läge, was denkbar wäre, da dieses Objekt, d. h. die Peripherie des Flecks, nach dem obigen an einer Stelle liegt, wo Platte und Linse sicht nicht mehr berühren, und da keine Angaben darüber vorliegen, wo eigentlich in einem Falle, wie der vorliegende, die Interferenzerscheinung ihren Sitz hat. Durch verschiedene Beobachtungen, sowie durch eine Grenzrechnung, stellte sich nun aber heraus, daß diese Fehlerquelle die vorerwähnten an Einfluß nicht oder doch nicht wesentlich übertrifft.

Prüfung der Theorie.

Messung der Elasticität und der Härte.

Als Material für die Versuche dienten drei von der hiesigen Glasschmelze Schott u. Gen. herrührende Glassorten, von denen Sorte I als ziemlich weich, II als normal, III als ziemlich hart bezeichnet wurde; grade in Anbetracht des Umstandes, daß es sich hierbei um drei Sorten eines und desselben Materials handelte, also nur geringe Härteunterschiede zu erwarten waren, mußten diese Versuche zugleich auch über die Empfindlichkeit der Methode entscheiden. Als viertes Material diente senkrecht zur Axe geschnittener Bergkrystall (Quarz), und zwar ebenso wie bei den Glassorten in der Weise, daß Linse und Platte von einem einzigen Stück des Materials herrührten. Auf optischem Wege überzeugte man sich davon, daß die Abweichung der schließlich benutzten Gläser von der Isotropie, sowie die Abweichung der Quarzplatten von der gewünschten Richtung nur eine sehr geringfügige war; wäre es nicht der Fall gewesen, so hätte sich das übrigens auch in der Lage und Gestalt der Sprünge offenbaren müssen, wie dies bei einigen, eigens zu diesem Zweck angestellten, hier aber nicht näher zu besprechenden Versuchen in der That der Fall war. Auch eine andere interessante Erscheinung soll an dieser Stelle nur eben erwähnt werden, nämlich die, daß der Sprung zwar mit der Druckfläche concentrisch ist, mit ihrem Rande aber nicht zusammenfällt, sondern ihn in einem meßbaren und bestimmten Gesetzmäßigkeiten unterworfenen Abstande umschließt. Noch muß eine Frage beantwortet werden, die dem Leser sich unwillkürlich aufgedrängt haben wird, die Frage, wie es denn erlaubt sei, ein krystallisches Material zu wählen, während doch die Theorie nur für isotrope Körper gilt. Letzteres ist richtig; jedoch ist zu beachten, daß z. B. in der ersten der Formeln (4) lediglich der Zahlenfaktor unrichtig sein könnte; erweisen sich nun die Beziehungen (1) und (2) empirisch als für die betreffenden Krystallkörper erfüllt, so wird auch in der letzten Formel (4) nur der Zahlenfaktor zweifelhaft sein können, und auch diese Unsicherheit wird man durch Prüfung der Beziehungen (3) und der zweiten Formel (4), sowie unter Zuhilfenahme bekannter Werthe von E' auf ein sehr geringes Maaß zurückführen können, zumal schon aus der Bedeutung dieses Zahlenfaktors sich ergiebt, daß er in enge Grenzen eingeschlossen ist. Immerhin wird man zugeben müssen, daß die Genauigkeit der Resultate für Krystalle vielleicht nicht ganz so groß sein wird, wie für isotrope Stoffe. In qualitativer Hinsicht zeigt sich der Gegensatz zwischen isotropen Stoffen und Krystallen in sehr auffälliger Weise; während nämlich bei ersteren Druckfläche wie Sprung kreisförmig sind, ist beim Bergkrystall zwar die Druckfläche ebenfalls ein Kreis, der Sprung aber hat für senkrecht gegen die Axe geschnittene Platten eine Form, welche zwischen derjenigen eines Kreises und der eines regulären Sechseckes liegt, eine Erscheinung, deren Verfolgung einer späteren Mittheilung vorbehalten bleiben muß. Schließlich sei angeführt, daß die Linsen aus dem Glase II die Krümmungsradien $\varrho = 3, 5, 10, 15$ mm, die Linsen aus den übrigen Stoffen dagegen zunächst solche von $\varrho = 4$ und 12 mm hatten, und zwar bis auf 1%, meist aber kleinere Beträge, genau; von noch stärker gekrümmten Linsen wird später die Rede sein.

Die ersten Messungen mußten den Zweck haben, die Theorie zu prüfen, also im wesentlichen zu untersuchen, ob und in wie weit die obigen Formeln (1), (2) und (3) Bestätigung finden. Erst dann konnte dazu übergegangen werden, mittelst der Formeln (4) und (5) die Größen P_1 und E' zu messen.

1) Zur Prüfung der Formel (1) $q =$ const, also $p/d^3 =$ const wurden mit jedem Material zahlreiche Versuchsreihen unter wachsender Belastung ausgeführt. Hier genüge die Angabe einiger, weder besonders günstig, noch besonders ungünstig ausgewählter Beispiele:

Glas II $\varrho = 10$

$[p]$	$[d]$	$1000\,[q]$
227	8,9	321
354	10,5	306
554	12,1	313
754	13,5	307
954	14,6	306
1354	16,4	307
1554	17,1	311
1677	18,0	288
1925	18,7	294
3177	22,1	294
3225	22,2	295
3725	23,4	291
4547	24,6	306

Quarz $\varrho = 12$

$[p]$	$[d]$	$1000\,[q]$
754	12,4	396
1254	15,0	371
1677	17,0	342
2677	19,6	356
3177	20,5	369
3677	21,6	368
4390	23,0	359
4800	23,7	361
4887	23,9	357

Wie man sieht, ist q in beiden Reihen in erster Annäherung constant; bei genauerem Zusehen zeigt sich, von den unregelmäßigen Schwankungen abgesehen, eine geringfügige Abnahme, welche sich z. B. darin ausspricht, daß in der einen Tabelle das Mittel der 7 ersten Zahlen 310, das der 6 letzten 295, in der andern Tabelle das Mittel der 5 ersten Zahlen 367, das der 4 letzten 361 ist, eine Abnahme, welche nach Formel (5) auf eine Abnahme des Elasticitätsmoduls mit wachsendem Drucke hinweist, also durchaus plausibel ist. Da sie meist sehr unbeträchtlich ist, in vielen Reihen aber sogar überhaupt nicht auftritt, soll sie hier nicht weiter verfolgt, sondern, der Theorie entsprechend, q als constant betrachtet werden. Faßt man demgemäß sämmtliche Schwankungen von q in einer Reihe als unregelmäßige auf und berechnet hiernach Mittelwerth und wahrscheinlichen Fehler, so findet man in den beiden obigen Beispielen:

$$[q] = 0{,}3028 \pm 0{,}0016 \qquad [q] = 0{,}3643 \pm 0{,}0031;$$

der wahrscheinliche Fehler beträgt also in der auf Glas bezüglichen Reihe nur etwa $^1/_2$ Proc., in der auf Quarz bezüglichen immer noch weniger als 1 Proc.

Um diesen Fehler noch weiter zu verringern, wurde jede Versuchsreihe mehrmals wiederholt; die Linse durfte dabei, da sie eine Verletzung nur ausnahmsweise aufwies, immer wieder benutzt werden, die gesprungene Plattenstelle natürlich nicht; da aber die Sprünge außerordentlich klein waren, konnten nach einander 20 bis 30 verschiedene Stellen derselben Platte benutzt werden, und es zeigte sich dabei, daß durch jeden Sprung der Zustand der Platte nur in einer sehr beschränkten Umgebung desselben verändert worden war, so daß man selbst ziemlich benachbarte Stellen verwerthen konnte; nur wenn die Sprungkreise sich geradezu berühren oder gar schneiden, treten veränderte Resultate ein, die verwickelt genug sind, um den Gegenstand einer Untersuchung für sich zu bilden. Die für verschiedene Plattenstellen sich ergebenden Werthe von q weichen nun zwar von einander ab, und es ist daher zu schließen, daß diese Stellen wirklich etwas verschiedene Elasticität besitzen; die Differenzen und die wahrscheinlichen Fehler der Hauptmittel sind jedoch, wie die folgenden Beispiele zeigen,

a) Glas II ($\varrho = 10$)

$q = 58{,}5$
57,2
58,5
59,7
59,3
59,7
56,6
55,3
56,0

$q = 58{,}3 \pm 0{,}4$

b) Glas I ($\varrho = 12$)

$q = 39{,}4$
38,3
38,7
40,0

$q = 39{,}1 \pm 0{,}25$

c) Quarz ($\varrho = 4$)

$q = 208{,}3$
208,4
214,7
210,5
209,9

$q = 209{,}9 \pm 0{,}9$

immer noch klein genug, um weiter benutzt zu werden.

2) Daß auch die Gl. (2) der Theorie erfüllt ist, also $\varrho q =$ const, zeigen folgende Angaben:

a) Glas II.

$\varrho =$	3	5	10	15
$q =$	195,4	114,9	58,3	38,3
$\varrho q =$	586	575	583	575

$\varrho q = 580 \pm 2.$

b) Quarz.

$\varrho =$	1	4	12	
$q =$	838	210	69,8	$\varrho q = 839 \pm 0{,}5.$
$\varrho q =$	838	840	838	

Man kann hiernach, was gleich hier eingeschaltet werden möge, die Elasticitätsconstante E' ohne weiteres aus Gl. (5) berechnen.

Es ergeben sich dabei folgende Zahlen:

Material	E'
Glas I	5617 ± 39
„ II	6960 ± 24
„ III	7701 ± 45
Bergkrystall	$10072 \pm 46.$

Die Constante E' setzt sich nun freilich aus den beiden üblichen Elasticitätsconstanten E und μ zusammen, und diese kann man für sich bekanntlich immer erst durch Combination der Messung zweier verschiedenartiger Deformationen ermitteln; es läßt sich aber zeigen, daß die hier benutzte Methode auch für sich allein schon mindestens ungefähre, in Wahrheit aber sogar ziemlich genaue Werthe von E liefert. Es ist dies dem Umstande zu verdanken, daß μ in der Formel $(1 - \mu^2)$ in E' enthalten ist, diese Größe aber nur sehr wenig sich ändert, wenn für μ selbst die äußersten Werthe eingesetzt werden. Nach den Versuchen von Cornu, Everett, Voigt und Cantone liegt nämlich für Glas μ zwischen den extremen Werthen 0,208 und 0,264; und wenn man die Zahlen dieser Beobachter ihrem Gewichte gemäß combinirt, so findet man als Mittelwerth und wahrscheinlichen Fehler $\mu = 0{,}225 \pm 0{,}008$. Jenen Extremen entsprechen nun für $1 - \mu^2$ die Werthe 0,957 und 0,93; und nimmt man den dem obigen Mittelwerth von μ entsprechenden Mittelwerth

$$1 - \mu^2 = 0{,}95 \pm 0{,}003,$$

so wird man wahrscheinlich nur einen Fehler von $^1/_3$ Proc. begehen. Der obige Werth von μ gilt nun freilich nur für kleine Deformationen, und es folgt aus den Betrachtungen von Röntgen

u. A., daß μ nicht constant ist, sondern mit zunehmender Deformation abnimmt; bei incompressiblen Körpern, also solchen, bei denen für kleine Deformationen $\mu = 0{,}5$ ist, ist diese Abnahme sogar sehr beträchtlich; in unserem Falle wird sie viel unbedeutender sein, nach der Analogie kann man annehmen, daß man zu setzen hat:

$$1 - \mu^2 = 0{,}97 \pm 0{,}01,$$

wodurch der wahrscheinliche Fehler allerdings auf 1 Proc. gestiegen ist. Hiernach erhält man den Elasticitätsmodul E, indem man E' um 3 Proc. verkleinert; es wird also:

Material	E
Glas I	5449
„ II	6751
„ III	7470.

Eine eingehende Vergleichung mit den für verschiedene Glassorten von anderen Beobachtern gefundenen Werthen lassen diese Zahlen wegen der Unbestimmtheit der Charakteristik der meisten Glassorten nicht zu; sie halten sich aber mit jenen zwischen denselben Grenzen[1]). Es wird beabsichtigt, demnächst für eine größere Anzahl genau charakterisirter Glassorten die Bestimmung der Elasticitätsmoduln (im Zusammenhange mit der der Härten) systematisch durchzuführen.

Für Bergkrystall hat die Größe μ selbst keine Bedeutung; der Faktor aber, mit dem man E' multipliciren muß, um den Werth des Elasticitätsmoduls in der Axe E_0 zu erhalten, ist hier jedenfalls noch näher an 1 gelegen, sodaß man keinen wesentlichen Fehler begehen wird, wenn man ihn geradezu gleich 1 setzt. Es wird dann

$$\text{für Bergkrystall: } E_0 = 10072.$$

Gegenüber dem Voigt'schen Werthe 10304 ist dieser um reichlich 2% kleiner, eine Differenz, welche in Anbetracht der so verschiedenen Ableitung schon an sich nicht sonderlich groß erscheinen wird, zum Theil aber vermuthlich sich noch dadurch er-

1) Voigt fand z. B. für „grünliches" Glas 6480, für „weisses rheinisches Spiegelglas" 7358.

klärt, daß die Beanspruchung des Materials hier eine viel größere ist, als bei Voigt.

3) Es bleibt nun noch übrig, die Gleichungen (3) zu prüfen und im Anschluß daran absolute Härtezahlen zu erhalten. Hier zeigt sich nun ein völlig unerwartetes Resultat: die Gleichungen (3) sind nicht erfüllt, und zwar auch nicht näherungsweise; wohl aber lassen sich andre Beziehungen aufstellen, und zwar mit befriedigender Genauigkeit.

So ergab beispielsweise die Glassorte II:

$\varrho =$	3	5	10	15
$P:D^2$	81,7	67,0	56,6	49,8
$P:\varrho^2$	1,64	0,96	0,50	0,32
$D:\varrho$	0,142	0,119	0,094	0,080.

Alle drei Verhältnisse nehmen also, statt constant zu sein, mit wachsendem ϱ ganz beträchtlich ab, das will sagen: der Druck auf die Flächeneinheit, bei welchem ein Sprung in der Platte eintritt, ist bei gleichem Material nicht unter allen Umständen derselbe, sondern er ist desto größer, je gekrümmter die drückende Linse ist. Eine andre Formulirung ist die, daß der Gesammtdruck, bei welchem der Sprung eintritt, nicht dem Quadrat des Krümmungsradius proportional ist, eine dritte die, daß der Durchmeser der Druckfläche beim Eintritt des Sprunges nicht dem Krümmungsradius selbst proportional ist, sondern daß beide Größen langsamer wachsen. Ein Blick auf die obige Tabelle zeigt nun sofort, daß die Zahlen der zweiten Horizontalreihe fallen, wie die ϱ wachsen, und ähnlich einfache Wahrnehmungen lassen die andere Reihen zu. Hiernach ergiebt sich, daß die von der Theorie geforderten drei Beziehungen durch die folgenden der Beobachtung entprechenden zu ersetzen sind:

1) P proportional nicht mit D^2, sondern mit $D^{3/2}$
2) P „ „ „ „ ϱ^2, „ „ ϱ
3) Nicht D, sondern $D^{3/2}$ proportional mit ϱ.

In wie weit dies der Fall ist, zeigt die folgende Zusammenstellung

ϱ	3	5	10	15	Mittel
$P:D^{3/2}$	53,4	52,0	54,8	54,5	53,7 ± 0,4
$P:\varrho$	4,93	4,78	5,04	4,80	4,89 ± 0,04
$D^{3/2}:\varrho$	0,092	0,092	0,092	0,088	0,091 ± 0,001.

Die wahrscheinlichen Fehler betragen also sämmtlich nur 1%.

Für die drei anderen Stoffe fanden sich die Beziehungen zwar ebenfalls erfüllt, jedoch, da hier nur je zwei Werthe von ϱ (4 und 12 mm) vorlagen, mit geringerer beweisender Kraft. Es wurde daher aus zweien dieser Stoffe, dem weichsten Glase (I) und dem Bergkrystall, noch je eine Linse mit einem dritten Radius hergestellt, für dessen Wahl einmal der Wunsch maßgebend war, dem Begriff der Spitze näher zu kommen, also einen recht kleinen Radius zu nehmen, andrerseits die Erwägung, daß, wenn der Grenzwerth des Einheitsdrucks vom Linsenradius abhängt, derjenige Werth eine besondere absolute Bedeutung haben wird, welcher dem Werthe $\varrho = 1$ entspricht. Bei den Versuchen mit diesen stark gekrümmten Linsen traten nun zwar, wie zu erwarten war, etwas größere Unregelmäßigkeiten als bei den andern auf, das Gesammtergebniß aber war die volle Bestätigung der obigen Beziehung. Es genüge hier, noch die Zahlen für Bergkrystall anzuführen.

Theoretisch constante Verhältnisse.

ϱ	1	4	12
$P:D^2$	149,8	91,7	66,9
$P:\varrho^2$	5,05	1,31	0,42
$D:\varrho$	0,183	0,120	0,079

In Wahrheit constante Verhältnisse.

ϱ	1	4	12	Mittel
$P:D^{3/2}$	64,3	63,4	65,2	64,3 $\pm$ 0,4
$P:\varrho$	5,05	5,22	5,05	5,11 $\pm$ 0,04
$D^{3/2}:\varrho$	0,079	0,082	0,077	0,079 $\pm$ 0,001

Auch hier betragen die wahrscheinlichen Fehler rund 1%.

Somit ist die Thatsache constatiert, daß die Erfahrung zwar in allen übrigen Punkten die Theorie mit überraschender Genauigkeit bestätigt, in dem letzten und wichtigsten Punkte aber von ihr ganz erheblich, und zwar nach bestimmtem Gesetze abweicht. Diese Thatsache fordert zu erneuter Betrachtung der Voraussetzungen jener Theorie auf.

1) Es kann nämlich zweifelhaft erscheinen, ob die Forderung der Theorie, daß die Druckfläche nur ein kleiner Theil der Oberfläche sei, erfüllt ist. Nun steigt allerdings das Verhältniß R (Grenzradius der Druckfläche): ϱ (Linsenradius) bei obigen Versuchen bis zum Werthe 1 : 11, also zu einem Verhältnisse, welches an sich gewiß nicht mehr als sehr klein zu betrachten ist; aber schließlich kommt es lediglich darauf an, ob dieses Verhältniß so groß ist, daß die in der Theorie darauf basirten Annahmen, betreffend Druckrichtung, Druckcomponenten, Krümmung und Größe der Druckfläche, nicht mehr erfüllt sind. Das ist aber, wie zum Theil schon aus den obigen Andeutungen hervorgeht, und sich noch eingehender zeigen ließe, nicht der Fall; die Abweichungen liegen vielmehr innerhalb der Fehlergrenzen der Versuche oder fallen höchstens ein klein wenig aus ihnen heraus.

2) Nach der Theorie kann es ferner — obwohl eine nähere Betrachtung hierfür Anhaltspunkte giebt — befremden, daß der Sprung die Druckfläche in einem gewissen Abstande umgiebt, und man könnte den Vorschlag machen, bei der Berechnung der H statt der D einmal die Sprungdurchmesser zu benutzen; das gefundene empirische Gesetz bleibt dann aber unverändert bestehen.

3) Daß es nicht die relativ zu beträchtliche Größe der Druckfläche ist, welche die Abweichungen hervorbringt, ergiebt sich am besten daraus, daß alsdann die Abweichungen desto kleiner werden müßten, je günstiger d. h. je kleiner das Verhältniß $R:\varrho$ wird; das ist aber nicht der Fall, sie sind vielmehr einheitlich durch

die obigen Beziehungen bestimmt; und z. B. für Glas III werden die Verhältnisse $P:D^2$ noch für $\varrho = 4$ und $\varrho = 12$ kolossal verschieden, nämlich 83,9 und 56,4, obgleich hier das Verhältniß $R:\varrho$ nur noch 1 : 16, resp. 1 : 23 ist. Um es aber noch weiter zu verkleinern, wurde von diesem Glase eine Linse von $\varrho = 30$ mm hergestellt; für sie fand sich $R:\varrho$ wie 1 : 38, und es müßte sich daher für $P:D^2$ ein mit dem für $\varrho = 12$ gefundenen übereinstimmender oder höchstens wenig von ihm abweichender Werth ergeben, wenn jener Standpunkt richtig wäre; es findet sich aber 39,6 gegen 56,4, also ein wiederum ganz wesentlich kleinerer Werth, während das Verhältniß $P:D^{3/2}$ wieder denselben Werth annimmt.

4) Uebrigens ist zu beachten, daß die Endzahlen für verschiedene Stoffe in einem von ϱ ganz unabhängigen Verhältnisse zu einander stehen, nämlich für die untersuchten Stoffe in dem Verhältniß

Glas I		Glas II		Glas III		Bergkrystall
100	:	105	:	113	:	135.

Die Gewinnung von relativen Härtezahlen ist also von den berührten Verhältnissen gänzlich unabhängig, und für die praktische Anwendung ist hiermit schon ein wesentlicher Fortschritt erzielt.

5) Wie es kommt, daß die absoluten Werthe der Härte eine so starke Abhängigkeit vom Krümmungsradius zeigen, dafür kann ich Beweisendes vorläufig nicht anführen, und ich gebe zu, daß dies eine principielle Lücke in der Lösung des Problemes läßt. Ich möchte aber eine auf die Ausfüllung derselben bezügliche Vermuthung nicht unerwähnt lassen.

In Anbetracht der experimentell gefundenen Beziehungen liefert die letzte der Formeln (4) bei Benutzung verschiedener Linsen sehr verschiedene Werthe für P_1, also, wenn P_1 die Härte ist, für die Härte der betreffenden Platte. Da dies keinen Sinn hat, ist entweder die Definition der Härte zu verwerfen, oder es muß eine der Voraussetzungen, unter denen die Formel (4) anwendbar ist, nicht erfüllt sein. Dazu gehört namentlich die, daß Platte und Linse aus gleichem Stoff bestehen, also insbesondere auch gleich hart sind; ist dies nicht der Fall, so muß man entweder nach einer complicirteren Formel aus der bekannten Härte des einen Körpers die des andern auf Grund der Beobachtungen berechnen, oder man erhält, wenn man sich mit der Formel (4) begnügt, nur eine gewisse mittlere Härte von Platte und Linse. Nun bestanden zwar bei den hier behandelten Messungen Platte und Linse stets aus demselben Stoff, aber es ist sehr wohl denkbar, daß die Härte eines Körpers, außer von seinem Material, auch von seiner Oberflächenkrümmung abhänge, und zwar offenbar in dem Sinne, daß die Härte desto größer ist, je stärker die Krümmung ist. Eine experimentelle Bestätigung dieser Auffassung giebt der Umstand, daß bei richtiger und exacter Versuchsanordnung es immer die Platte ist, welche springt, und nicht die Linse. Je gekrümmter also die benutzte Linse ist, desto härter würde sie hiernach sein, und desto größer würde auch die nach (4) gefundene mittlere Härte von Platte und Linse sich ergeben, wie es thatsächlich der Fall ist. Die Härte einer Linse würde sich hiernach etwa durch eine Formel von der Gestalt

$$H = a + \frac{b}{\varrho}$$

darstellen, a würde hierin die Härte einer ebenen Fläche desselben Materials, also gewissermaßen die „Eigenhärte“ des Materials, b dagegen die von der Krümmung abhängige „Oberflächenhärte“ sein, also genau dem entsprechen, was man bei Flüssigkeiten „Oberflächenspannung“ nennt[1]).

Bis diese Gedanken fester begründet sind, muß es genügen, die vorliegende Untersuchung in begrenzterem Sinne zu Ende zu führen. Hierzu genügt die Bemerkung, daß, gemäß den gefundenen Beziehungen, die bei Anwendung verschiedener Linsen gefundenen Werthe von P_1 einander gleich werden, wenn man sie mit $\sqrt[3]{\varrho}$ multiplicirt, und daß man demzufolge die so erhaltene, auf die Einheit des Linsenradius bezogene Zahl als absolute Härte bezeichnen kann. Die Größe derselben für die untersuchten Stoffe läßt sich aus folgender Tabelle ersehen.

1) Eine andre Analogie ist die mit der Zugfestigkeit von Eisendrähten, welche nach Baumeister (Wied. Ann. 18, p. 578, 1883) desto größer ist, je kleiner die Dicke des Drahtes ist, und zwar, wie ich finde, nach dem, dem hier gefundenen gleichen Gesetze $F = \text{const.}/\sqrt[3]{d}$.

Stoff	1	3	4	5	10	12	15	Mittel
Glas I	210	—	216	—	—	215	—	214 ± 3
„ II	—	227	—	225	227	—	222	225 ± 2
„ III	—	—	245	—	—	237	—	241 ± 3
Bergkrystall	287	—	292	—	—	288	—	289 ± 1.

Diese Zahlen weisen zunächst die Reihenfolge auf, weche zu erwarten war. Sie zeigen ferner eine, für ein bisher noch garnicht quantitativ bearbeitetes Gebiet, sehr befriedigende Genauigkeit; es liegen z. B. selbst die extremsten, für benachbarte Glassorten gefundenen Werthe noch weit genug auseinander. Manchen wird es vielleicht Wunder nehmen, daß die Zahlen nicht noch verschiedener sind; aber man hat zu erwägen, daß die vier hier untersuchten Stoffe einander in Bezug auf die Härte nahe stehen, und daß die Ausdehnung der Methode auf besonders weiche und besonders harte Körper jedenfalls bedeutend größere Differenzen liefern wird.

Von Interesse ist schließlich noch eine Vergleichung der Härten mit den Elasticitätsmoduln (p. 535). Wie man sieht, ist von den untersuchten Stoffen der elastischere zwar auch der härtere, aber die Härte nimmt weniger stark zu als die Elasticität; drückt man nämlich H in Procenten von E aus, so erhält man die abnehmenden Zahlen:

Glas I	Glas II	Glas III	Bergkrystall
3,9	3,3	3,2	2,9.

Es macht sich das gleich bei den ersten Beobachtungen in charakteristischer und überraschender Weise geltend; während man nämlich hätte erwarten sollen, daß man bei dem härteren Stoffe einen stärkeren Gesammtdruck würde ausüben müssen, muß man dies meist grade bei dem weicheren thun, weil hier die Druckfläche sehr groß wird, also ein hoher Gesammtdruck erforderlich ist, um selbst einen mäßigen Einheitsdruck zu erzielen.

Jena, 19. November 1890.

Bestimmung der Elasticitätsconstanten einiger dichter Mineralien.

Von

W. Voigt und **P. Drude.**

Mitgetheilt von W. Voigt.

2. Reihe.

Während die Beobachtungen der ersten Reihe[1]) sich auf Mineralien bezogen, welche sowohl in dichten Varietäten als auch in für die Beobachtung ausreichenden regelmäßigen Krystallen vorkommen, sind die Messungen der folgenden Reihe an solchen, hauptsächlich glasartigen, Körpern angestellt, für welche eine krystallisirte Varietät nicht bekannt ist. Das Interesse der erhaltenen Resultate liegt daher zunächst nur darin, daß sie für Substanzen gelten, die in sehr großen Massen, langsam und gleichmäßig gebildet sind und demgemäß wahrscheinlich an Homogenität und Isotropie die künstlich hergestellten Gläser und Metalle übertreffen. Die bei ihnen gefundenen Werthe für das Verhältniß der beiden Elasticitätsconstanten a und b derselben Substanz gewinnen dadurch ein besonderes Gewicht und die theilweise ganz ungeheuerlichen Abweichungen von der Poisson'schen Relation $a = 3b$, welche sie zeigen, dürften wohl Jeden, der noch zweifelte, überzeugen, daß die Differenz zwischen der Poisson'schen Theorie und der Beobachtung durch Fehlerquellen irgend welcher Art nicht erklärbar ist.

Insofern stützen diese Resultate indirect die von mir früher für unkrystallinische Medien überhaupt und speciell für dichte Mineralien gegebene Elasticitätstheorie; in einigen Fällen gestatten sie aber auch eine directere Verwendung zu diesem Zwecke.

---

1) W. Voigt und P. Drude, Gött. Nachr. 1889, p. 519.

Die Beobachtungstafeln sind wiederum nur auszugsweise mitgetheilt, und zwar in derselben Anordnung und Bezeichnung wie diejenigen der ersten Reihe; ihre Erläuterung findet sich an dem oben angegebenen Orte. Die Herstellung der Stäbchen ist wie früher in der Werkstatt von Dr. W. Steeg und Reuter in Bad Homburg geschehen und die Präparate sind zum größten Theil vortrefflich ausgefallen.

1. Feuerstein

von der Insel Rügen; von Herrn Prof. Cohen in Greifswald mir freundlichst überlassen. Im ganzen Stück ziemlich dunkelgrau, zu Stäbchen geschnitten im durchgehenden Licht hellgelbbraun; darin einzelne lose schwärzliche Flocken von Markasit. Die Herstellung der Stäbchen hat in Folge der Zähigkeit des Materiales große Schwierigkeiten verursacht.

A I. $D = 1200 + \delta$ $B = 6200 + \beta$

$\delta = 25{,}4\ 23{,}0\ 24{,}2\ 26{,}0\ 29{,}3\ 34{,}2\ 42{,}4$ $\beta = 149\ 143\ 130\ 117\ 100\ 82\ 54$

ber. $25{,}0\ 23{,}6\ 23{,}9\ 25{,}9\ 29{,}5\ 34{,}8\ 41{,}8$

$\delta_0 = 25{,}9,\ \delta_1 = 2{,}8,\ \delta_2 = 0{,}83.$

Biegung. $L = 14{,}07,\ B = 6312,\ D = 1226{,}7,\ P = 110,\ \vartheta = 14.$

$\eta = 4{,}8\ 5{,}2.$

$L = 70{,}07,$

$\eta = 352{,}3,\ 354{,}4,\ \eta' = 2{,}1,$ $\quad \boldsymbol{E} = 7598000.$

Drillung. $L = 57{,}11,\ B = 6318,\ D = 1227{,}3,\ P = 50,\ \vartheta = 14{,}5.$

$\sigma = 88{,}1,\ 87{,}5,$ $\quad \boldsymbol{T} = 3510000$

A II. $D = 1200 + \delta$ $B = 6300 + \beta$

$\delta = 19{,}1\ 18{,}4\ 19{,}3\ 21{,}3\ 25{,}3\ 32{,}7\ 42{,}1$ $\beta = -8 + 9\ 23\ 36\ 48\ 67\ 100$

ber. $19{,}9\ 18{,}3\ 18{,}7\ 21{,}3\ 25{,}9\ 32{,}7\ 41{,}5$

$\delta_0 = 21{,}3,\ \delta_1 = 3{,}6,\ \delta_2 = 1{,}04.$

Biegung. $L = 66{,}07,\ B = 6338,\ D = 1222{,}2,\ P = 110,\ \vartheta = 15.$

$\eta = 300{,}2,\ 297{,}2,\ \eta' = 2{,}1,$ $\quad \boldsymbol{E} = 7596000.$

Drillung. $L = 52{,}23,\ B = 6337,\ D = 1223{,}4,\ P = 50,\ \vartheta = 16.$

$\sigma = 80{,}6,\ 80{,}4,$ $\quad \boldsymbol{T} = 3522000.$

A III. $D = 1100 + \delta$ $B = 5700 + \beta$

$\delta = 70{,}3\ 69{,}8\ 73{,}2\ 79{,}0\ 87{,}4\ 98{,}9\ 114{,}7$ $\beta = 40\ 42\ 40\ 39\ 39\ 40\ 40$

ber. $70{,}2\ 70{,}2\ 73{,}1\ 78{,}9\ 87{,}7\ 99{,}4\ 114{,}0$

$\delta_0 = 78{,}9,\ \delta_1 = 7{,}3,\ \delta_2 = 1{,}47.$

Biegung. $L = 66{,}07,\ B = 5740,\ D = 1180{,}2,\ P = 110,\ \vartheta = 14.$

$\eta = 368{,}8,\ 366{,}0,\ \eta' = 2{,}4,$ $\quad \boldsymbol{E} = 7583000.$

B I. $D = 1200 + \delta$ $B = 6400 + \beta$

$\delta = 22,1\ 15,3\ 13,2\ 14,0\ 18,7\ 24,3\ 33,3$ $\beta = -8 + 27\ 41\ 46\ 40\ 37\ 8$

ber. 21,4 16,0 13,6 14,2 17,8 24,4 34,0

$\delta_0 = 14,2,\ \delta_1 = 2,1,\ \delta_2 = 1,5.$

Biegung. $L = 14,07,\ B = 6432,\ D = 1215,6,\ P = 110,\ \vartheta = 14,5.$

$\eta = 5,3\ 4,7.$

$L = 64,07,$

$\eta = 272,4,\ 274,0,\ \eta' = 2,1,$ $\boldsymbol{E} = 7589000.$

Drillung. $L = 56,84,\ B = 6438,\ D = 1217,1,\ P = 50,\ \vartheta = 15.$

$\sigma = 86,9,\ 87,7,$ $\boldsymbol{T} = 3522000.$

B II. $D = 1200 + \delta$ $B = 6400 + \beta$

$\delta = 17,6\ 18,3\ 20,5\ 23,4\ 27,9\ 32,8\ 39,5$ $\beta = -16 + 29\ 37\ 41\ 41\ 38\ 30$

ber. 17,5 18,4 20,4 23,5 27,8 33,0 39,5

$\delta_0 = 23,5,\ \delta_1 = 3,65,\ \delta_2 = 0,55.$

Biegung. $L = 64,07,\ B = 6436,\ D = 1224,0,\ P = 110,\ \vartheta = 14,3.$

$\eta = 265,9,\ 265,8,\ \eta' = 2,1,$ $\boldsymbol{E} = 7640000$

Drillung. $L = 55,08,\ B = 6437,\ D = 1224,6,\ P = 50,\ \vartheta = 14,5.$

$\sigma = 82,9,\ 83,2,$ $\boldsymbol{T} = 3526000.$

B III. $D = 1200 + \delta$ $B = 6400 + \beta$

$\delta = 11,8\ 12,3\ 14,3\ 17,7\ 21,8\ 26,6\ 32,4$ $\beta = -6 + 29\ 43\ 48\ 44\ 40\ 12$

ber. 11,5 12,5 14,6 17,6 21,6 26,7 32,7

$\delta_0 = 17,6,\ \delta_1 = 3,53,\ \delta_2 = 0,5.$

Biegung. $L = 62,07,\ B = 6434,\ D = 1218,1,\ P = 110,\ \vartheta = 14.$

$\eta = 247,4,\ 248,0,\ \eta' = 2,1,$ $\boldsymbol{E} = 7568000.$

Drillung. $L = 48,00,\ B = 6441,\ D = 1218,5,\ P = 50,\ \vartheta = 13,2.$

$\sigma = 88,2,\ 88,0,$ $\boldsymbol{T} = 3523000.$

Gesammtmittel. $\boldsymbol{E} = 7597000,\ \mathrm{E} = 13,16 \,.\, 10^{-8},$
$\pm\ 7200,\qquad \pm\ 0,012.$

$\boldsymbol{T} = 3521000,\ \mathrm{T} = 28,41 \,.\, 10^{-8},$
$\mp\ 1800,\qquad \pm\ 0,015.$

Hieraus $\boldsymbol{E}/\boldsymbol{T} = 2,158$ und $\boldsymbol{a} = 7700000,\ \boldsymbol{b} = 523000,\ \boldsymbol{a} = 14,71 \,.\, \boldsymbol{b}.$

Die vortreffliche Uebereinstimmung der bei den verschiedenen Stäbchen erhaltenen Zahlen erweist die vollkommene Homogenität und Isotropie des Materiales und giebt den Endresultaten einen besonderen Werth. Um so schwerer wiegt der von dem Poisson'schen ($a = 3b$) enorm abweichende Werth des Verhältnisses der beiden Elasticitätsconstanten. Derselbe besitzt noch ein eigenartiges Interesse.

Nach der früher auseinander gesetzten Theorie der quasi-isotropen Körper[1]) ist es möglich aus den Elasticitätsconstanten eines homogenen Krystalles diejenigen eines Körpers zu berechnen,

1) W. Voigt, Gött. Abh., Bd. **34**, 48, 1887, Wied. Ann. **38**, 573, 1889.

der aus durcheinander gewürfelten Krystallfragmenten besteht, welche groß gegen die Molekularwirkungssphäre und klein gegen die Dimensionen des betrachteten Präparates sind; ihr Verhältniß muß dabei nahe denselben Werth behalten, wenn zwischen den Fragmenten kleine Lufträume geblieben sind.

Feuerstein gilt als ein inniges Gemenge von amorpher und krystallinischer Kieselsäure, in dem letztere erheblich überwiegt [1]). Für die eine krystallisirte Kieselsäure (Quarz) habe ich aber die Elasticitätsconstanten bestimmt und früher mitgetheilt [2]); berechnet man aus ihnen das Verhältniß a/b für quasi-isotropen Quarz, so erhält man [3]) (mit ziemlich beträchtlicher Unsicherheit)

$$a = 13{,}7 \, . \, b,$$

welches dem für Feuerstein gefundenen abnorm großen sehr nahe liegt. Die von mir entwickelte Theorie erhielt hierdurch eine neue Bestätigung.

2. Opal

von Mexiko; von Herrn Prof. Liebisch mir für diese Beobachtungen freundlichst überlassen.

Das Stück war wasserhell, ohne Farbenspiel, von einigen Sprüngen durchsetzt, die beim Zerlegen sich noch ausdehnten; daher war es nur möglich drei Stäbchen von derselben Orientirung herzustellen. Die Prüfung der Isotropie durch Beobachtung der beiden Gattungen B und A war daher nicht möglich; auch sind die Messungen der geringen Größe der Stäbchen wegen nicht sehr genau.

I. $D = 500 + \delta$ $\qquad$ $B = 6100 + \beta$

$\delta = 93{,}3 \;\; 100{,}7 \;\; 104{,}4 \;\; 103{,}4 \;\; 98{,}0$ $\qquad$ $\beta = 39 \;\; 43 \;\; 46 \;\; 48 \;\; 49$

ber. $93{,}2 \;\; 100{,}9 \;\; 104{,}3 \;\; 103{,}3 \;\; 98{,}0$

$\delta_0 = 104{,}3, \;\; \delta_1 = 1{,}2, \;\; \delta_2 = -\,2{,}17.$

Biegung. $L = 14{,}07, \;\; B = 6145, \;\; D = 603{,}4, \;\; P = 105, \;\; \vartheta = 14.$

$\eta = 49{,}4, \;\; 49{,}6.$

$L = 22{,}07,$

$\eta = 181{,}0, \;\; 181{,}3, \;\; \eta' = 3{,}7,$ $\qquad$ $\boldsymbol{E} = 3870000.$

Drillung. $L = 17{,}05, \;\; B = 6146, \;\; D = 602{,}8, \;\; P = 10, \;\; \vartheta = 13{,}5.$

$\sigma = 82{,}0 \;\; 81{,}0.$ $\qquad$ $\boldsymbol{T} = 1833000.$

---

1) Naumann-Zirkel, Mineralogie, Leipzig 1877, p. 342.

2) W. Voigt, Gött. Nachr. 1886, p. 289.

3) W. Voigt, Wied. Ann. 38, 582, 1889.

II. $D = 500 + \delta$ $B = 6100 + \beta$

$\delta = 97{,}6\ \ 108{,}3\ \ 102{,}1$ $\beta = 44\ \ 38\ \ 15$

$\delta_0 = 108{,}3,\ \delta_1 = 2{,}2,\ \delta_2 = -\ 8{,}3.$

Biegung. $L = 14{,}07,\ B = 6134,\ D = 607{,}5,\ P = 105,\ \vartheta = 14.$

$\eta = 48{,}1,\ 48{,}9.$

$L = 18{,}07,$

$\eta = 98{,}3,\ 98{,}5,\ \eta' = 3{,}7,$ $\boldsymbol{E} = 3908000.$

III. $D = 500 + \delta$ $B = 6100 + \beta$

$\delta = 89{,}1\ \ 97{,}6\ \ 101{,}5\ \ 99{,}7\ \ 90{,}9$ $\beta = 38\ \ 42\ \ 44\ \ 47\ \ 47$

ber. $88{,}8\ \ 98{,}0\ \ 101{,}5\ \ 99{,}2\ \ 91{,}2$

$\delta_0 = 101{,}5,\ \delta_1 = 0{,}6,\ \delta_2 = -\ 2{,}9.$

Biegung. $L = 20{,}07,\ B = 6144,\ D = 600{,}4,\ P = 105,\ \vartheta = 14.$

$\eta = 138{,}9,\ 139{,}7,\ \eta' = 3{,}7,$ $\boldsymbol{E} = 3870000.$

Drillung. $L = 15{,}65,\ B = 6144,\ D = 599{,}6,\ P = 10,\ \vartheta = 14{,}2.$

$\sigma = 76{,}6\ \ 76{,}6,$ $\boldsymbol{T} = 1824000.$

Gesammtmittel $\boldsymbol{E} = 3880000,\ \ \mathrm{E} = 25{,}8 \cdot 10^{-8}$

$\boldsymbol{T}' = 1829000,\ \ \mathrm{T} = 54{,}7 \cdot 10^{-8}$

Hieraus $\boldsymbol{E}/\boldsymbol{T}' = 2{,}12$ und $\boldsymbol{a} = 3910000,\ \boldsymbol{b} = 272000,\ \boldsymbol{a} = 14{,}4 \cdot \boldsymbol{b}.$

Es ist sehr bemerkenswerth, daß hiernach die amorphe Kieselsäure (Opal) äußerst nahe dasselbe Verhältniß der Elasticitätsconstanten ergiebt, wie Feuerstein und hierin sich also ähnlich verhält als beständе sie aus Krystallfragmenten der krystallinischen Modifikation (Quarz). Freilich sind die absoluten Werthe jener Constanten kaum halb so groß als sie sein müßten, wenn diese Fragmente sich lückenlos an einander schlössen.

3. Obsidian

von den liparischen Inseln; von Herrn Dr. Sella in Biella mir freundlichst besorgt.

Farbe unregelmäßig hell- und dunkelgrau gefleckt; die Stäbchen sind parallel der Dickenrichtung fast durchsichtig, die Färbung wird durch in der hellen Grundmasse suspendirte dunkle Flecken und Körnchen hervorgebracht. Dies Mineral ist also ein ziemlich grobes Gemisch und es kann demnach die äußerste Genauigkeit der Constantenwerthe nicht erreicht werden. Die mir verfügbaren Stücke gestatteten die Herstellung von Stäbchen in einer Länge von nahe 11 cm; da mein Torsionsapparat aber die Beobachtung so langer Stäbe nicht gestattet und die drei kürzeren unter sich gut stimmende Resultate ergaben, habe ich die längeren nicht um der Drillung willen kürzen mögen.

A I. $D = 1400 + \delta$ $B = 5900 + \beta$

$\delta = 62{,}7\ 60{,}4\ 60{,}6\ 62{,}1\ 64{,}9\ 69{,}7\ 76{,}5$ $\beta = 51\ 32\ 22\ 27\ 43\ 66\ 96$

ber. $62{,}3\ 60{,}6\ 60{,}5\ 62{,}0\ 65{,}1\ 69{,}8\ 76{,}1$

$\delta_0 = 62{,}0,\ \delta_1 = 2{,}3,\ \delta_2 = 0{,}8.$

Biegung. $L = 85{,}07,\ B = 5944,\ D = 1462{,}7,\ P = 60,\ \vartheta = 14.$

$\eta = 246{,}5,\ 245{,}7,\ \eta' = 1{,}5,$ $E = 6671000.$

Drillung. $L = 65{,}24,\ B = 5932,\ D = 1463{,}0,\ P = 50,\ \vartheta = 13.$

$\sigma = 80{,}7,\ 80{,}1,$ $T = 2859000$

A II. $D = 1400 + \delta$ $B = 5900 + \beta$

$\delta = 61{,}0\ 56{,}6\ 55{,}4\ 56{,}8\ 61{,}6\ 67{,}5\ 75{,}2$ $\beta = 89\ 52\ 28\ 19\ 26\ 58\ 102$

ber. $60{,}4\ 56{,}8\ 55{,}6\ 57{,}0\ 60{,}8\ 67{,}2\ 76{,}0$

$\delta_0 = 57{,}0,\ \delta_1 = 2{,}6,\ \delta_2 = 1{,}25.$

Biegung. $L = 105{,}07,\ B = 5946,\ D = 1458{,}1,\ P = 60,\ \vartheta = 14.$

$\eta = 470{,}3,\ 470{,}8,\ \eta' = 1{,}5,$ $E = 6615000.$

A III. $D = 1400 + \delta$ $B = 5900 + \beta$

$\delta = 36{,}1\ 36{,}0\ 37{,}4\ 41{,}0\ 48{,}4\ 57{,}2\ 68{,}8$ $\beta = 98\ 60\ 34\ 22\ 31\ 60\ 101$

ber. $36{,}6\ 35{,}6\ 37{,}2\ 41{,}3\ 48{,}0\ 57{,}2\ 69{,}0$

$\delta_0 = 41{,}3,\ \delta_1 = 5{,}4,\ \delta_2 = 1{,}28.$

Biegung. $L = 14{,}07,\ B = 5951,\ D = 1442{,}4,\ P = 60,\ \vartheta = 14.$

$\eta = 3{,}1,\ 2{,}9.$

$L = 105{,}07$

$\eta = 481{,}3,\ 479{,}7,\ \eta' = 1{,}5,$ $E = 6686000.$

B I. $D = 1400 + \delta$ $B = 6000 + \beta$

$\delta = 37{,}2\ 44{,}3\ 51{,}7\ 58{,}2\ 63{,}8\ 67{,}8\ 70{,}4$ $\beta = 14\ 10\ 8\ 4\ 3\ 4\ 3$

ber. $36{,}5\ 44{,}7\ 52{,}0\ 58{,}2\ 63{,}4\ 67{,}7\ 70{,}9$

$\delta_0 = 58{,}2,\ \delta_1 = 5{,}73,\ \delta_2 = -0{,}5.$

Biegung. $L = 14{,}07,\ B = 6006,\ D = 1457{,}7,\ P = 60,\ \vartheta = 14.$

$\eta = 2{,}1,\ 2{,}5.$

$L = 85{,}07,$

$\eta = 245{,}0,\ 247{,}8,\ \eta' = 1{,}5,$ $E = 6659000.$

Drillung. $L = 64{,}78,\ B = 6006,\ D = 1457{,}2,\ P = 50,\ \vartheta = 14{,}1.$

$\sigma = 79{,}9,\ 80{,}0,$ $T = 2846000.$

B II. $D = 1400 + \delta$ $B = 6000 + \beta$

$\delta = 63{,}3\ 61{,}8\ 61{,}6\ 63{,}0\ 64{,}2\ 66{,}6\ 67{,}4$ $\beta = 30\ 20\ 9\ 6\ 4\ 1\ 3$

ber. $62{,}8\ 62{,}2\ 62{,}2\ 62{,}8\ 64{,}0\ 65{,}8\ 68{,}2$

$\delta_0 = 62{,}8,\ \delta_1 = 0{,}9,\ \delta_2 = +0{,}3.$

Biegung. $L = 93{,}07,\ B = 6009,\ D = 1463{,}1,\ P = 60,\ \vartheta = 14.$

$\eta = 318{,}7,\ 317{,}0,\ \eta' = 1{,}5,$ $E = 6676000.$

B III. $D = 1400 + \delta$ $B = 6000 + \beta$

$\delta = 56{,}3\ 52{,}1\ 51{,}3\ 52{,}0\ 57{,}0\ 61{,}7\ 71{,}2$ $\beta = 32\ 25\ 15\ 6\ 3\ 1\ -2$

ber. $55{,}2\ 52{,}1\ 51{,}1\ 52{,}4\ 56{,}1\ 62{,}1\ 70{,}2$

$\delta_0 = 52{,}4,\ \delta_1 = 2{,}5,\ \delta_2 = +1{,}17.$

Drillung. $L = 58{,}27,\ B = 6010,\ D = 1454{,}8,\ P = 50,\ \vartheta = 13{,}2.$

$\sigma = 72{,}3,\ 73{,}2,$ $\boldsymbol{T} = 2819000.$

Gesammtmittel $\boldsymbol{E} = 6651000$, $\mathbf{E} = 15{,}03 \cdot 10^{-8}$,

± 9000, $\pm 0{,}02$.

$\boldsymbol{T} = 2841000$, $\mathbf{T} = 35{,}20 \cdot 10^{-8}$,

± 8000, $\pm 0{,}10$.

Hieraus $\boldsymbol{E}/\boldsymbol{T} = 2{,}34$ und $\boldsymbol{a} = 7153000$, $\boldsymbol{b} = 1470000$, $\boldsymbol{a} = 4{,}86 \cdot \boldsymbol{b}$.

4. Obsidian

von Arnarfells (Jökul auf Island); ich verdanke das Stück Herrn Prof. C. Klein in Berlin. Farbe tiefschwarz.

Ein Beobachtungsmaterial allerersten Ranges von seltener Homogenität, wie dies der Augenschein und die treffliche Uebereinstimmung der folgenden Zahlen erweist. Das schöne Stück gestattete die Herstellung von Stäben, deren Längen fast 13 cm erreichten; ihre Gestalt ist sehr regelmäßig ausgefallen.

Für die Drillungsbeobachtungen wurde ein kürzerer Stab der Gattung *B* und ein in der Mitte durchgeschnittener der Gattung A benutzt; da die an ihnen erhaltenen Zahlen sehr gut übereinstimmten, habe ich, um das schöne Material für andere Bestimmungen aufzusparen, weitere Beobachtungen unterlassen.

A I. $D = 1400 + \delta$ $B = 6000 + \beta$

$\delta = 67{,}4\ 65{,}8\ 65{,}6\ 67{,}3\ 70{,}9\ 76{,}3\ 81{,}7$ $\beta = 22\ 16\ 4\ 0\ 2\ 74$

ber. $67{,}4\ 65{,}7\ 65{,}7\ 67{,}4\ 70{,}7\ 75{,}7\ 82{,}4$

$\delta_0 = 67{,}4,\ \delta_1 = 2{,}5,\ \delta_2 = 0{,}83,$

Biegung. $L = 100{,}07,\ B = 6000{,}5,\ D = 1468{,}1,\ P = 60,\ \vartheta = 15{,}1.$

$\eta = 355{,}8,\ 355{,}6\ \eta' = 1{,}3,$ $\boldsymbol{E} = 7340000.$

A II. $D = 1400 + \delta$ $B = 6000 + \beta$

$\delta = 75{,}5\ 72{,}5\ 70{,}8\ 72{,}0\ 75{,}4\ 82{,}3\ 87{,}8$ $\beta = -2 - 1 - 6 - 4 + 2 + 12 - 22$

ber. $75{,}7\ 72{,}2\ 71{,}0\ 72{,}1\ 75{,}2\ 81{,}0\ 88{,}9$

$\delta_0 = 72{,}1,\ \delta_1 = 2{,}2,\ \delta_2 = 1{,}3.$

Biegung. $L = 14{,}07,\ B = 5999,\ D = 1473{,}3,\ P = 60,\ \vartheta = 15{,}1.$

$\eta = 2{,}2,\ 2{,}1.$

$L = 100{,}07,$

$\eta = 353{,}6,\ 352{,}4,\ \eta' = 1{,}3.$ $\boldsymbol{E} = 7323000.$

A III. $D = 1400 + \delta$ $B = 6000 + \beta$

$\delta = 72{,}6\ 71{,}7\ 73{,}0\ 73{,}4\ 71{,}7$ $\beta = -3 + 2 + 10 + 18 - 14.$

Drillung. $L = 43{,}99,\ B = 6010,\ D = 1472{,}7,\ P = 50,\ \vartheta = 14.$

$\sigma = 48{,}7,\ 48{,}6,$ $\boldsymbol{T} = 3085000.$

A IV. $D = 1400 + \delta$ $B = 6000 + \beta$

$\delta = 72{,}6\ 74{,}9\ 78{,}6\ 83{,}1\ 88{,}2$ $\beta = -3 + 4 + 2 - 2 - 3$

Drillung. $L = 46{,}62$, $B = 6001$, $D = 1478{,}9$, $P = 50$, $\vartheta = 13{,}5$.

$\sigma = 50{,}6,\ 50{,}7$, $\mathfrak{T} = 3100000$.

B I. $D = 1400 + \delta$ $B = 6000 + \beta$

$\delta = 83{,}8\ 82{,}2\ 82{,}0\ 82{,}5\ 85{,}0\ 88{,}9\ 93{,}5$ $\beta = 21\ 17\ 14\ 13\ 15\ 20\ 28$

ber. $84{,}2\ 82{,}3\ 81{,}8\ 82{,}7\ 85{,}0\ 88{,}7\ 93{,}8$

$\delta_0 = 82{,}7$, $\delta_1 = 1{,}6$, $\delta_2 = 0{,}7$.

Biegung. $L = 100{,}07$, $B = 6018$, $D = 1483{,}3$, $P = 60$, $\vartheta = 15{,}1$.

$\eta = 343{,}8,\ 343{,}3$, $\eta' = 1{,}3$, $\mathfrak{E} = 7345000$.

B II. $D = 1400 + \delta$ $B = 6000 + \beta$

$\delta = 85{,}7\ 82{,}0\ 80{,}7\ 81{,}4\ 83{,}9\ 90{,}3\ 94{,}5$ $\beta = 28\ 22\ 15\ 13\ 13\ 20\ 23$

ber. $85{,}5\ 82{,}1\ 80{,}7\ 81{,}4\ 84{,}1\ 88{,}9\ 95{,}7$

$\delta_0 = 81{,}4$, $\delta_1 = 1{,}7$, $\delta_2 = 1{,}02$.

Biegung. $L = 14{,}07$, $B = 6018$, $D = 1482{,}3$, $P = 60$, $\vartheta = 15{,}1$.

$\eta = 2{,}3,\ 2{,}7$.

$L = 100{,}07$,

$\eta = 344{,}0,\ 344{,}7$, $\eta' = 1{,}3$, $\mathfrak{E} = 7345000$.

B III. $D = 1400 + \delta$ $B = 6000 + \beta$

$\delta = 80{,}3\ 77{,}4\ 75{,}5\ 75{,}5\ 78{,}9\ 86{,}5\ 91{,}3$ $\beta = 28\ 23\ 18\ 16\ 18\ 24\ 26$

ber. $81{,}1\ 76{,}8\ 75{,}1\ 75{,}8\ 78{,}9\ 84{,}4\ 92{,}5$

$\delta_0 = 75{,}8$, $\delta_1 = 1{,}9$, $\delta_2 = 1{,}2$.

Biegung. $L = 100{,}07$, $B = 6021$, $D = 1476{,}9$, $P = 60$, $\vartheta = 15{,}1$.

$\eta = 348{,}1,\ 348{,}6$, $\eta' = 1{,}3$, $\mathfrak{E} = 7330000$.

B IV. $D = 1400 + \delta$ $B = 6000 + \beta$

$\delta = 78{,}8\ 77{,}7\ 77{,}3\ 78{,}3\ 80{,}7\ 84{,}4\ 90{,}9$ $\beta = 25\ 22\ 18\ 17\ 17\ 19\ 25$

Drillung. $L = 60{,}55$, $B = 6019$, $D = 1479{,}7$, $P = 50$, $\vartheta = 13{,}1$.

$\sigma = 65{,}4,\ 65{,}9$, $\mathfrak{T} = 3096000$.

Gesammtmittel $\mathfrak{E} = 7337000$, $\mathrm{E} = 13{,}63 \cdot 10^{-8}$,

± 3000, $\pm 0{,}005$.

$\mathfrak{T} = 3094000$ $\mathrm{T} = 32{,}31 \cdot 10^{-8}$

± 3000, $\pm 0{,}03$.

Hieraus $\mathfrak{E}/\mathfrak{T} = 2{,}37$, $\mathfrak{a} = 8017000$, $\mathfrak{b} = 1828000$, $\mathfrak{a} = 4{,}39 \cdot \mathfrak{b}$.

Die beiden für die zwei Sorten Obsidian gefundenen Werthsysteme liegen ziemlich nahe den von mir für zwei Sorten künstlichen Glases erhaltenen Zahlen[1]). Auch hier übertrifft das Verhältniß a/b die Zahl 3 recht erheblich.

Göttingen, December 1890.

---

1) W. Voigt, Wied. Ann. **15**, 497, 1882.

Bericht des Beständigen Sekretärs der Königl. Ges. d. Wiss. über das Jahr 1890.

Hoffentlich ist es Ihnen nicht unangenehm, wenn ich dem Herkommen gemäß auch in diesem Jahre die Nachrichten mit einem kurzen Bericht über das schließe, was uns in unsern Sitzungen beschäftigt hat oder irgendwie für unsere Gesellschaft von einiger Bedeutung gewesen ist.

Zunächst also eine Uebersicht über die wissenschaftlichen Mittheilungen, welche in den Sitzungen, von denen die heutige die 10. dieses Jahres ist, gemacht oder vorgelegt wurden.

In der Sitzung von 11. Januar gab de Lagarde Nachträge zu früheren Mittheilungen.

Riecke legte eine Arbeit des Herrn Galizine in Straßburg i/E. „Ueber das Daltonsche Gesetz", und

Bechtel, „Kleine Aufsätze" vor, III. Reihe.

Am 1. Febr. Riecke theilt einen Aufsatz des Herrn Dr. Nernst mit: „Ueber ein neues Princip der Molekulargewichtsbestimmung".

Wieseler kündigt einen kurzen Aufsatz an: „Verbesserungsvorschläge zu Euripides".

Sauppe legt von Herrn Professor Leo Meyer in Dorpat, Korrespondenten der Gesellschaft, eine „Etymologische Mittheilung *Σήματ-(Σῆμα)* Zeichen" vor.

Am 19. März. Klein legt einen Aufsatz vor: „Zur Theorie der Laméschen Functionen".

Wüstenfeld eine Abhandlung: „Der Imâm el Schâfi'í, seine Schüler und Anhänger bis zum Jahre 300 d. H.", die im Bd. 36 der Abhandlungen erscheint.

de Lagarde theilt 1. „Das älteste Glied der masoretischen Traditionskette" und 2. „Psalm 114 im Sidrâ rabbâ" mit.

Voigt legt von Hertz, Korrespondenten der G., eine Arbeit vor: „Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper".

Am 3. Mai. Ehlers legt eine vorläufige Mittheilung von Herrn Dr. Clemens Hartlaub vor: „Beitrag zur Kenntniß der Comatuliden-Fauna des indischen Archipels".

Wieseler theilt „scenische Untersuchungen" mit.

de Lagarde legt „Exodus 1, 11" vor.

Riecke eine Arbeit „Ueber die Pyroelektricität des Turmalins".

Voigt eine Abhandlung „Ueber den Zusammenklang zweier einfacher Töne“.

Am 7. Juni. Riecke giebt „Beiträge zu der von Gibbs entworfenen Theorie der Zustandsänderungen eines aus einer Mehrheit von Phasen bestehenden Systems“.

Klein legt a. eine Arbeit von Franc. Brioschi in Mailand, auswärtigem Mitglied der Gesellschaft, vor: „Ueber die Reihenentwickelung der Sigmafunctionen zweier Veränderlichen“ und b. von Dr. Schönfließ, Privatdocenten in Göttingen, eine Arbeit: „Ueber das gegenseitige Verhältniß der Theorieen über die Structur der Krystalle“.

de Lagarde legt „Septuagintastudien I“ für die Abhandlungen (Bd. 37) vor.

Kielhorn einen Aufsatz über „die Mandasor-Inschrift vom Mâlava Jahre (529) = 472 n. Chr.“

Am 5. Juli. Merkel spricht „Ueber argentinische Gräberschädel“.

Liebisch legt einen Aufsatz des Herrn Dr. Pockels vor: „Ueber die Interferenzerscheinungen, welche Zwillingsplatten optisch einaxiger Krystalle im convergenten homogenen polarisirten Lichte zeigen“.

Schwarz legt vor: a. einen Aufsatz von Prof. Julius Weingarten in Charlottenburg, Korresp. der Gesellschaft, „Ueber particuläre Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

und eine mit der Theorie der Minimalflächen zusammenhängende Gattung von Flüssigkeitsbewegungen“ und b. einen Aufsatz von O. Venske: „Ueber eine Abkürzung des ersten Hermiteschen Beweises der Transcendenz der Zahl e“.

Voigt legt vor: Bestimmung der Elasticitätsconstanten des brasilianischen Turmalins“.

Wieseler: „Weibliche Satyrn und Pane in der Kunst der Griechen und Römer“.

de Lagarde kündigt für den 36. Bd. der Abhandlungen an: „Nachträge und Regesten zu der im Band 35 erschienenen Uebersicht über die Bildung der Nomina im Aramaeischen, Arabischen und Hebräischen“.

Wagner legt einen Aufsatz vor: „Ueber ein spät mittelalterliches Verzeichniß geographischer Coordinatenwerte“.

Am 2. Aug. Riecke legt von sich vor: a. „Ueber stufenweise Dissociation und über die Dampfdichte des Schwefels.“ b. „Ueber specielle Fälle von Gleichgewichtserscheinungen eines aus mehreren Phasen zusammengesetzten Systemes“, und c. von Herrn Privatdocenten Dr. Nernst: „Ueber die Theilung eines Stoffes zwischen zwei Lösungsmitteln“.

Voigt legt a. „Eine kurze Notiz zur Theorie der Schwingungen gestrichener Saiten“. b. eine Abhandlung vor: „Allgemeine Theorie der piëzo- und pyroelektrischen Erscheinungen an Krystallen“ (erscheint im 36. Band der Abhandlungen.)

Schwarz theilt mit: a. „Bestimmung derjenigen Minimalflächen, welche eine Schaar reeller Curven zweiten Grades enthalten“. b. „Ueber den Kreisbogen als Lösung einer von Delaunay gestellten Aufgabe der Variationsrechnung“.

Klein legt vor: a. von Herrn Dr. Franz Meyer, Prof. in Clausthal: „Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen, II“. b. von Herrn Dr. Burckhardt, Privatdocenten: „Zur Theorie der Jacobischen Gleichungen 40. Grades“. c) von sich: „Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe“.

Am 8. Nov. Riecke legt von sich vor a) „Das thermische Potential für verdünnte Lösungen“, b. „Ueber elektrische Ladung durch gleitende Reibung“ und c. von den Herrn Privatdocenten P. Drude und W. Nernst: „Ueber das Verhalten des Wismuth im Magnetfelde in seiner Abhängigkeit von der Temperatur und der molekularen Beschaffenheit“.

Voigt legt vor: a. von Herrn Privatdocenten P. Drude: „Ueber die Größe der Wirkungsphäre der Molekularkräfte und die Konstitutionskonstanten der Plateauxschen Glycerin-Seifenlösung“, b. von Herrn W. Venske: „Zur Integration der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$“.

Klein legt vor: von Herrn Professor Franz Meyer in Clausthal: Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen, III“. (vgl. 2. August.)

Wüstenfeld legt für die Abhandlungen (Bd. 37) vor: „Die gelehrten Schâfi'iten des 4. Jahrhunderts d. H“.

Wieseler giebt „Einige Nachträge zu dem Aufsatze (Nachrichten 1890 S. 385 ff.) über weibliche Satyrn und Pane in der Kunst der Griechen und Römer“.

de Lagarde legt vor: a. „Die Inschrift von Aduli, b. Das hebräische Wort gébhîm, c. Der Fluß Orontes, d. Die Stichometrie der syrisch-hexaplarischen Uebersetzung des alten Testamentes. e. „Σεισαρα“.

Kielhorn legt vor: „Erklärung zweier Stellen des Kâvyâdarça“.

Weiland legt für die Abhandlungen (Bd. 37) seine „Beiträge zur Kritik der Chronik des Matthias von Neuenburg“ vor.

Die hier aufgeführten Mittheilungen sind, wenn nicht ausdrücklich angegeben ist, daß sie in dem 36. oder 37. Band der Abhandlungen gedruckt sind, in den bis jetzt erschienenen 13 Nummern der Nachrichten enthalten, die 436 Seiten füllen.

Der Band 36 der Abhandlungen, der in diesen Tagen ausgegeben wird, enthält folgende Arbeiten:

I. Mathematische Klasse.

1. Ueber die innere Reibung der festen Körper, insbesondere der Krystalle, I. von W. Voigt.
2. Allgemeine Theorie der piëzo- und pyroelektrischen Erscheinungen an Krystallen, von W. Voigt.

II. Historisch-Philologische Klasse.

3. Ueber einige phönikische Inschriften, von G. Hoffmann.
4. Die Sprache des Papyrus Westcar. Eine Vorarbeit zur Grammatik der älteren ägyptischen Sprache, von Adolf Erman.
5. Tafeln zur Berechnung der Jupiterjahre nach den Regeln des Sûrya Siddhânta und des Iyotistattva, von F. Kielhorn.
6. Der Imâm el Shâfi'í, seine Schüler und Anhänger bis zum J. 300 d. H., von F. Wüstenfeld.

III. Physikalische Klasse.

7. Zur Kenntniß der Pedicellineen, von E. Ehlers. Mit 5 Tafeln.

Gedächtnisrede.

8. Julius Weizsäcker († 3. September 1889), von Ludwig Weiland.

Außer den Nachrichten und Abhandlungen sind auch die Gelehrten Anzeigen fortdauernd bemüht gewesen in unparteiischer Gründlichkeit wissenschaftliche Kritik zu üben, soweit es der für unsere Blätter verfügbare Raum möglich macht.

Bei der Beschränktheit der Mittel, die uns für wissenschaftliche Zwecke zu Gebote stehn, haben wir für die gütige Fürsorge des Königlichen Staatsministeriums der Kultus-, Unterrichts- und Medicinalangelegenheiten, das uns für außerordentliche Ausgaben auf das Jahr 1. April 1890/91 3000 Mk. zur Verfügung gestellt hat, den lebhaftesten Dank auszusprechen.

Von Geschäften, welche in den Sitzungen erledigt worden sind, verdienen folgende kurze Erwähnung.

Die mathematische Gesellschaft in Hamburg feierte am 15. Februar ihr 200jähriges, die physikalisch-oeconomische in Königsberg i./Pr. am 22. Februar ihr 100jähriges Jubiläum. Die Kön. Gesellschaft sendete beiden ihre warmen Glückwünsche, denen Herr Schering für jene, Herr Peter für diese Worte geliehen hat.

In Tauschverkehr ist die Gesellschaft eingetreten mit der Akademie der Wissenschaften zu Stockholm, mit der Kuffnerschen Sternwarte in Ottenring bei Wien, mit dem Nova Scotian Institute of natural science in Halifax.

Die Universitätsbehörden zu Toronto (Canada) zeigten an, daß ihre ganze Bibliothek am 14. Februar ein Raub der Flammen geworden sei, und baten um Beiträge zu einer allmählichen Ersetzung derselben. In Erfüllung dieses Wunsches hat die Gesellschaft die Werke von Gauss in 6 Bänden und die Nachrichten von 1884—1889 durch die Buchhandlung F. A. Brockhaus in Leipzig nach Toronto abgesendet.

Mit Anfang Oktober ist das Direktorat der Gesellschaft an die Mathematische Klasse übergegangen und Herr Ernst Schering durch das Kön. Kuratorium als Director bestätigt worden.

Für dies Jahr hatte die Physikalische Klasse die Preisaufgabe gestellt:

Es ist allgemein bekannt und anerkannt, daß dichte oder krystallinische Kalke, zumal des Mittel-Devon, allerlei Umwandlungen erlitten haben, sei es durch Veränderung ihrer Structur, sei es durch Stoffaustausch u. s. w. Die mechanischen und chemischen Vorgänge, welche hierbei mitwirken, sind jedoch durchaus nicht genügend bekannt. Es wird daher gewünscht, daß diese Umwandlungen mit Hülfe chemischer und mikroskopischer Untersuchungen verfolgt und erklärt werden möchten.

Es ist keine Bewerbungsschrift eingegangen.

Die Aufgabe für 1891 lautet nach dem Vorschlag der Mathematischen Klasse:

Die Aufgabe der conformen Abbildung eines ebenen Bereiches auf ein Stück einer krummen Fläche, deren Krümmungsmaß überall den constanten Werth k besitzt, hängt zusammen mit der Aufgabe, die partielle Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2k \cdot e^u$$

vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen gemäss zu integriren.

Für diese Aufgabe kommen zunächst die von Riemann in seiner Theorie der Abelschen Functionen angegebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen in Betracht.

Die Königliche Gesellschaft wünscht die Frage, ob es möglich ist, die angegebene partielle Differentialgleichung für einen gegebenen Bereich unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen der angegebenen Art zu integriren, vorausgesetzt, daß der Konstanten k negative Werthe beigelegt werden, vollständig beantwortet zu sehen.

Insbesondere wünscht die Königliche Gesellschaft den Fall der angeführten Aufgabe behandelt zu sehen, in welchem der betrachtete ebene Bereich eine geschlossene mehrfach zusammenhängende Riemannsche Fläche ist, während die Function u keine anderen als logarithmische Unstetigkeiten annehmen soll.

Die Aufgabe der Historisch-philologischen Klasse für 1892 ist folgende (s. Nachrichten 1890 S. 116 f.):

Für die älteste Geschichte Attikas ist es von außerordentlicher Bedeutung zu wissen, an welchen Orten sich Heiligthümer der verschiedenen Götter und Heroen fanden, sowol in Athen selbst, als in der gesammten Landschaft, soweit es nach dem jetzigen Stande der topographischen, epigraphischen, genealogischen Forschungen möglich ist. Die Historisch-philologische Klasse stellt daher für 1892 die Aufgabe, daß eine sorgfältige Uebersicht der Kultstätten in Attika nach den Oertlichkeiten, an denen sie sich fanden, gegeben und, was sich daraus für die älteste Geschichte Attikas folgern lasse, dargestellt werde.

Für das Jahr 1893 stellt die Gesellschaft nach dem Vorschlag der Physikalischen Klasse die neue Aufgabe:

Aus den Untersuchungen von W. C. Röntgen und A. Kundt über die Aenderungen der optischen Eigenschaften des Quarzes im elektrischen Felde ergiebt sich ein enger Zusammenhang zwischen den elektrooptischen Erscheinungen und den elastischen Deforma-

tionen, welche jene piëzoelektrische Substanz unter der Einwirkung elektrostatischer Kräfte erfährt. Eine Ausdehnung dieser Forschungen auf eine größere Reihe piëzoelektrischer Krystalle von verschiedenen Symmetrieeigenschaften erscheint in hohem Grade erwünscht. Gleichzeitig würde die Untersuchung darauf zu richten sein, ob die elektrooptischen Erscheinungen in piëzoelektrischen Krystallen ausschließlich durch die im elektrischen Felde eintretenden Deformationen oder außerdem durch eine directe Einwirkung der elektrostatischen Kräfte auf die Lichtbewegung hervorgerufen werden.

Die zur Bewerbung um einen der Preise bestimmten Arbeiten müssen, mit einem Spruch versehen, vor Ablauf des Septembers des bestimmten Jahres an die Kön. Gesellschaft der Wissenschaften portofrei eingesandt werden und von einem versiegelten Zettel begleitet sein, welcher außen den Spruch trägt, der die Arbeit bezeichnet, und innen Namen und Wohnort des Verfassers angiebt.

Der Preis für jede Aufgabe beträgt 500 Mk.

Die von der Wedekindschen Preisstiftung für deutsche Geschichte zur Lösung in dem am 14. März 1886 begonnenen fünften Verwaltungszeitraum gestellten Aufgaben sind in den Nachrichten 1887 S. 69 f. bekannt gemacht, dann 1888 S. 134 ff., 1889 S. 403 ff., 1890 S. 217 ff. wiederholt worden. Die Summe von 3000 Mk., die Herrn Professor Kluckhohn für Aufsuchung und Sammlung von Akten zu einer Geschichte des Bauernkrieges in Thüringen, Sachsen und Hessen bewilligt worden war (Nachrichten 1889 S. 561), ist ganz zur Auszahlung gekommen und die Vorbereitungen für die Ausgabe der Chronik Hermann Korners sind fleißig gefördert worden, sie gehn ihrem Abschluß entgegen.

Durch den Tod verlor die Historisch-philologische Klasse der Gesellschaft am 11. März Johann Gildemeister in Bonn, der seit 1859 ihr als Korrespondent und seit 1884 als auswärtiges Mitglied angehört hatte. Geboren war er am 20. Juli 1812. Am 30. December 1889 starb in London Henry Yule, der 1883 von der Gesellschaft zum Korrespondenten der Historisch-philologischen Klasse gewählt worden war. Noch in frischer Trauer ist die Gesellschaft um den Verlust ihres ordentlichen Mitgliedes in der Physikalischen Klasse Wilhelm Henneberg, der am 22. November starb. Er war seit 1867 Assessor und ordentliches Mitglied seit 1877. Geboren war er am 10. Oktober 1825.

Dagegen wählte die Gesellschaft in ihrer Sitzung am 22. November zum ordentlichen Mitglied in der Physikalischen Klasse:

Dr. Otto Wallach, Professor der Chemie;

zum auswärtigen Mitglied der Historisch-philologischen Klasse:

Dr. Alexander Conze, Generalsekretär des kaiserlich deutschen archaeologischen Institutes in Berlin, seit 1875 Korrespondenten in derselben Klasse;

zu Korrespondenten in der Historisch-philologischen Klasse:

Clements Robert Markham in London, Kustos im Geographical Departement des India Office und Mitglied des Council der R. Geographical Society of London, und

Dr. Hermann Oldenberg, Professor in Kiel;

zum Korrespondenten in der Physikalischen Klasse:

Dr. Eduard Schnitzer, Emin Pascha, in Bagamoyo in Ostafrika.

Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe.

Von

A. Hurwitz in Königsberg i. Pr.

(Vorgelegt von F. Klein).

Wenn in der Gauß'schen hypergeometrischen Reihe

$$(1)\qquad F(l,m,n,x) = 1+\frac{l\cdot m}{n}\frac{x}{1!}+\frac{l(l+1)m(m+1)}{n(n+1)}\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

die Elemente l, m, n positive reelle Werte besitzen, so ist klar, daß die Reihe für jedes positive x einen positiven Wert annimmt, und daß es daher keinen zwischen 0 und 1 liegenden Wert von x geben kann, welcher die Gleichung

$$(2)\qquad F(l,m,n,x) = 0$$

befriedigt. Sind dagegen die Elemente l, m, n nicht sämmtlich positiv, so kann die Gleichung (2) möglicher Weise für einen oder mehrere zwischen 0 und 1 liegende Werte von x erfüllt sein, und es entsteht die Aufgabe, genau die Anzahl der zwischen 0 und 1 liegenden Wurzeln der Gleichung (2) zu ermitteln.

Diese Aufgabe hat Herr Klein neuerdings ganz allgemein erledigt und zwar durch eine sehr schöne Methode, welche die Bestimmung jener Anzahl auf die Bestimmung der möglichen Gestalten von Kreisbogendreiecken zurückführt[1]).

Vielleicht ist es nicht ohne Interesse, daß man die in Rede stehende Aufgabe auch auf Grund derjenigen Principien lösen kann, welche bei dem Sturm'schen Satze von der Anzahl der reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung zur Verwendung gelangen. Dieser Sturm'sche Satz beruht bekanntlich auf einem Lemma[2]), welches ich hier zunächst in der allgemeinen Fassung, wie ich es verwenden werde, angeben will.

Die reelle Veränderliche x werde auf das Intervall

$$(J) \ldots a \leqq x \leqq b$$

eingeschränkt. Ferner seien

$$(3) \qquad V_0,\ V_1,\ V_2, \ldots.\ V_k$$

reelle Functionen der Veränderlichen x, welche in dem Intervalle J eindeutig und stetig sind und überdies folgenden Bedingungen genügen:

1.) Die Function V_k soll für keinen Wert von x, welcher dem Intervalle J angehört, verschwinden.

2.) Wenn die Function V_i, wo i eine der Zahlen $1, 2, \ldots k-1$ bedeutet, an einer Stelle des Intervalles J verschwindet, so sollen an dieser Stelle die Functionen V_{i-1} und V_{i+1}, nicht verschwindende Werte von entgegengesetztem Vorzeichen besitzen.

3.) Wenn x das Intervall J von a bis b durchläuft, so soll beim Ueberschreiten einer Stelle, wo V_0 verschwindet, der Quotient $\frac{V_0}{V_1}$ von negativen zu positiven Werten übergehen.

Unter diesen Voraussetzungen ist nun die Anzahl der Stellen, an welchen V_0 in dem Intervalle J verschwindet, gleich

$$N_a - N_b,$$

wo N_a resp. N_b die Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe (3) für $x = a$ resp. $x = b$ bezeichnet.

Diese Zahlen N_a und N_b kann man, was für das Folgende wichtig ist, auch als die Anzahlen der negativen Werte erklären, welche in der Reihe

---

1) Vergl. die Mitteilung: „Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe" in No. 10 dieser Nachrichten vom Jahre 1890 (Sitzung vom 2. August), welche weiter ausgeführt demnächst in Heft 4 des 37. Bandes der Mathematischen Annalen erscheinen wird.

2) Vgl. etwa Serret, Cours d'algèbre supérieure, Paris 1877, Bd. 1 pag. 285.

(4) $$V_0 V_1,\ V_1 V_2,\ V_2 V_3, \ldots V_{k-1} V_k$$

für $x = a$ bez. $x = b$ auftreten.

Indem ich mich nunmehr der Betrachtung der hypergeometrischen Reihe (1) zuwende, bemerke ich zunächst, daß die Reihe offenbar sinnlos wird, wenn n gleich 0 oder gleich einer negativen ganzen Zahl ist. Das Element n unterliegt also der Beschränkung, daß es keinen Wert aus der Reihe

$$0, -1, -2, -3, \ldots$$

besitzen darf. Ich will nun, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, genau dieselbe Beschränkung auch den Elementen l und m auferlegen.

In den hierdurch ausgeschlossenen Fällen reducirt sich die hypergeometrische Reihe auf eine ganze rationale Function von x[1]) und die nachfolgenden Betrachtungen unterliegen dann einer leichten Modification.

Dies vorausgeschickt, stelle ich eine Reihe von Functionen (3) her, in welcher die ersten Glieder V_0 und V_1 bez. die hypergeometrische Reihe $F(l, m, n, x)$ und deren erste Ableitung

(5) $$\frac{dF}{dx} = \frac{lm}{n} F(l+1, m+1, n+1, x)$$

sind. Dies gelingt leicht auf Grund der Gauß'schen Relationen, welche zwischen je drei aufeinanderfolgenden der Functionen:

(6) $$F_0 = F(l, m, n, x),\ F_1 = F(l+1, m+1, n+1, x), \ldots,$$
$$F_i = F(l+i, m+i, n+i, x), \ldots$$

bestehen. In der That, man setze

(7) $$r_0 = -\frac{(l+1)(m+1)}{n(n+1)},\ r_1 = -\frac{(l+2)(m+2)}{(n+1)(n+2)}, \ldots,$$
$$r_i = -\frac{(l+i+1)(m+i+1)}{(n+i)(n+i+1)}, \ldots$$

und bilde nun die Functionen:

(8) $$\begin{cases} V_0 = F_0, \quad V_2 = r_0 F_2, \ldots\ldots, \quad V_{2i} = r_0 r_2 \ldots\ldots r_{2i-2} F_{2i}, \ldots\ldots, \\ V_1 = \dfrac{lm}{n} F_1,\ V_3 = \dfrac{lm}{n} r_1 F_3, \ldots,\ V_{2i+1} = \dfrac{lm}{n} r_1 r_3 \ldots r_{2i-1} F_{2i+1}, \ldots \end{cases}$$

1) Für diese Functionen hat Herr Stieltjes (Comptes Rendus, Bd. 100 p. 620) die zugehörigen Sturm'schen Reihen aufgestellt und bemerkt, daß man aus diesen Reihen die Anzahl der reellen Nullstellen der Functionen leicht ableiten kann. Auf anderem Wege gelangte Herr Hilbert (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 103 pag. 337) zur Bestimmung dieser Anzahlen.

Dann wird die Reihe

(9) $$V_0,\ V_1,\ V_2,\ \ldots\ V_k,$$

bei geeigneter Wahl der Zahl k, den oben genannten Bedingungen genügen, und zwar für jedes Intervall $a \ldots b$, welches ganz in dem Intervalle $0 \ldots 1$ enthalten ist.

Die erwähnten Gauß'schen Relationen ergeben nämlich das Gleichungssystem:

(10) $$\begin{cases} V_0 = Q_0\ V_1 - x(1-x)\,V_2, \\ V_1 = Q_1\ V_2 - x(1-x)\,V_3, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ V_{k-2} = Q_{k-2}\,V_{k-1} - x(1-x)\,V_k, \end{cases}$$

wobei zur Abkürzung

(11) $$\begin{cases} Q_0 = \dfrac{n}{lm}\left(1 - \dfrac{l+m+1}{n}x\right), \ldots, \\ Q_{2i} = \dfrac{n}{lm}\,\dfrac{r_0 r_2 \ldots r_{2i-2}}{r_1 r_3 \ldots r_{2i-1}}\left(1 - \dfrac{l+m+4i+1}{n+2i}x\right), \ldots \\ Q_1 = \dfrac{lm}{n}\cdot\dfrac{1}{r_0}\left(1 - \dfrac{l+m+3}{n+1}x\right), \ldots, \\ Q_{2i+1} = \dfrac{lm}{n}\cdot\dfrac{1}{r_0}\cdot\dfrac{r_1 r_3 \ldots r_{2i-1}}{r_2 r_4 \ldots r_{2i}}\left(1 - \dfrac{l+m+4i+3}{n+2i+1}x\right), \ldots \end{cases}$$

gesetzt ist.

Die Funktion V_k unterscheidet sich nur um einen constanten, nicht verschwindenden Factor von

$$F_k = F(l+k, m+k, n+k, x).$$

Wählen wir daher die k Zahl so, daß $l+k$, $m+k$, $n+k$ positiv werden, so ist V_k in dem Intervall $0 \ldots 1$ beständig von Null verschieden, und die Bedingung 1) ist also erfüllt. Indem wir beachten, daß die Factoren $Q_0, Q_1, \ldots$ sämmtlich endlich sind, schließen wir sodann aus dem Gleichungssystem (10), daß auch die Bedingung 2) erfüllt ist. Endlich genügt die Reihe (9) auch der Bedingung 3), weil V_1 die Ableitung der Function V_0 ist.

Beachten wir jetzt, daß

$$V_i\,V_{i+1} = \frac{lm}{n}\,r_0 r_1 r_2 \ldots r_{i-1}\,F_i\,F_{i+1}$$

dasselbe Vorzeichen besitzt, wie

$$(-1)^i \cdot \frac{l_{i+1}\,m_{i+1}}{n+i}\,F_i F_{i+1},$$

wo zur Abkürzung

(12) $\quad l_i = l(l+1)\dots(l+i-1), \; m_i = m(m+1)\dots(m+i-1)$

gesetzt ist, so erhalten wir den Satz:

Bedeuten a und $b > a$ zwei zwischen 0 und 1 liegende Größen, und bildet man die Reihe

(13) $$\frac{l_1 m_1}{n} F_0 F_1, \; -\frac{l_2 m_2}{n+1} F_1 F_2, \dots, (-1)^{k-1} \frac{l_k m_k}{n+k-1} F_{k-1} F_k,$$

so giebt $N_a - N_b$ die Anzahl der Nullstellen von

$$F_0 = F(l, m, n, x)$$

an, welche zwischen a und b liegen, wenn N_a bez. N_b die Anzahl der negativen Glieder bezeichnen, welche in der Reihe (13) für $x = a$ bez. $x = b$ auftreten.

Die Zahl k ist dabei nur der einen Bedingung unterworfen, daß die Größen

$$l+k, \; m+k, \; n+k$$

positiv sein müssen[1]). Die in dem Ausspruch des Satzes benutzten Abkürzungen werden durch die Gleichungen (6) und (12) erklärt.

Um die Gesammtzahl der Nullstellen von $F(l, m, n, x)$ in dem Intervall $0 < x < 1$ zu bestimmen, brauchen wir unseren Satz nur auf den Fall anzuwenden, wo a in der Nähe des Wertes $x = 0$ und b in der Nähe des Wertes $x = 1$ liegt.

Wir werden also

$$a = \varepsilon, \; b = 1 - \eta$$

setzen, wo ε und η genügend klein zu wählende positive Größen bezeichnen. Lassen wir x in 0 übergehen, so nehmen die Functionen (13) die Werte an:

(14) $$\frac{l_1 m_1}{n}, \; -\frac{l_2 m_2}{n+1}, \dots, (-1)^{k-1} \frac{l_k m_k}{n+k-1}.$$

Um die Werte jener Functionen in der Nähe der Stelle $x = 1$ zu beurtheilen, werde ich die bekannte Gleichung

(15) $$F(l, m, n, x) = (1-x)^{n-l-m} F(n-l, n-m, n, x)$$

1) Der Satz gilt auch noch, wenn eines oder jedes der Elemente l, m gleich Null oder gleich einer negativen ganzen Zahl ist. Nnr hat man dann für k die erste Zahl der Reihe $0, 1, 2, 3, \dots$ zu wählen, für welche eine der beiden Größen $l+k$, $m+k$ verschwindet.

benutzen. Dabei setze ich voraus, daß

(16) $$n \leqq l+m$$

sei. Diese Voraussetzung beeinträchtigt nicht die Allgemeinheit. Denn würde

$$n > l+m$$

sein, so wäre

$$n < (n-l)+(n-m)$$

und wir würden an Stelle von $F(l, m, n, x)$ die Function $F(n-l, n-m, n, x)$ betrachten, welche der Gleichung (15) zufolge zwischen 0 und 1 dieselben Nullstellen besitzt wie $F(l, m, n, x)$.

Lassen wir nun, unter der Voraussetzung, daß $n < l+m$ ist, x wachsend in 1 übergehen, so geht $F(n-l, n-m, n, x)$ stetig in

$$\frac{\Gamma(n)\,\Gamma(l+m-n)}{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}$$

über. Daher hat $F(l, m, n, x)$ in der Nähe von $x = 1$ dasselbe Vorzeichen wie

$$\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}.$$

Dieses gilt, wie man leicht erkennt, nicht nur für $n < l+m$, sondern auch für $n = l+m$. Da nun aus der Ungleichung (16) folgt, daß auch

$$n+i < (l+i)+(m+i) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist, so besitzt $F_i F_{i+1}$ in der Nähe von $x = 1$ dasselbe Vorzeichen, wie

$$\frac{\Gamma(n+i)\,\Gamma(n+i+1)}{\Gamma(l+i)\,\Gamma(m+i)\,\Gamma(l+i+1)\,\Gamma(m+i+1)} = \frac{n+i}{(l+i)(m+i)}\left[\frac{\Gamma(n+i)}{\Gamma(l+i)\,\Gamma(m+i)}\right]^2,$$

also dasselbe Vorzeichen wie

$$\frac{n+i}{(l+i)(m+i)}.$$

Daher haben die Glieder der Reihe (13) in der Nähe von $x = 1$ dieselben Vorzeichen, wie die entsprechenden Glieder der Reihe

(17) $$1,\ -l_1 m_1,\ l_2 m_2, \ldots\ (-1)^{k-1} l_{k-1} m_{k-1}.$$

Kommen also in der Reihe (14) N_0 negative Glieder, in der Reihe (17) N_1 negative Glieder vor, so ist

$$N = N_0 - N_1$$

die Anzahl der zwischen 0 und 1 liegenden Nullstellen von $F(l, m, n, x)$.

Die Zahlen N_0 und N_1 können wir sofort näher bestimmen, wenn wir die verschiedenen Fälle unterscheiden, welche den möglichen Vorzeichencombinationen der Elemente l, m, n entsprechen. Dabei wollen wir

$$l \geqq m \tag{18}$$

voraussetzen, was die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt, da $F(l, m, n, x)$ bei Vertauschung von l und m in sich übergeht. Ferner möge, wenn l negativ ist, λ die erste Zahl der Reihe $1, 2, 3, \ldots$ sein, für welche $l+\lambda$ positiv wird, so daß in der Reihe

$$l, l+1, l+2, \ldots . l+\lambda-1, l+\lambda, \ldots$$

$l+\lambda-1$ das letzte negative Glied ist. Die entsprechende Bedeutung mögen μ und ν in Rücksicht auf m und n erhalten.

Die Discussion der verschiedenen Fälle, bei welcher man die Ungleichungen (16) und (18) zu beachten hat, ergiebt nun die in der nachstehenden Tabelle zusammengestellten Resultate:

	l	m	n	N
I.	+	+	—	$\frac{1-(-1)^{\nu}}{2}$
II.	+	—	+	μ
III.	+	—	—	$\mu-\nu$, für $\mu \geqq \nu$ $\frac{1-(-1)^{\mu+\nu}}{2}$, für $\mu \leqq \nu$
IV.	—	—	—	$\frac{1-(-1)^{\lambda+\mu+\nu}}{2}$

Wie diese Tabelle aufzufassen ist, erhellt aus folgendem Satze:

Sind die Elemente l, m, n sämmtlich negativ (Fall IV der Tabelle), so verschwindet $F(l, m, n, x)$ zwischen 0 und 1 kein Mal oder ein Mal, je nachdem $\lambda+\mu+\nu$ gerade oder ungerade ist.

Man wird sich leicht überzeugen, daß die Tabelle mit den von Herrn Klein gefundenen Resultaten vollständig im Einklang steht.

Schließlich will ich noch bemerken, daß man die Frage nach der Gesammtheit der Nullstellen von $F(l, m, n, x)$, gleichgültig ob

l, m, n reelle oder complexe Werte besitzen, auch auf Grund der allgemeinen Sätze, welche ich an anderer Stelle entwickelt habe [1]), in Angriff nehmen kann. Man hat dann die Wurzeln der ganzen rationalen Functionen, welche als Nenner in den Näherungsbrüchen der Kettenbruch-Entwicklung von $\frac{F(l, m+1, n+1, x)}{F(l, m, n, x)}$ auftreten, zu untersuchen. Ob diese Untersuchung auch für die imaginären Nullstellen der hypergeometrischen Reihe zu einfachen Resultaten führt, vermag ich indessen nicht zu übersehen.

Königsberg in Pr., 30. November 1890.

1) „Ueber die Nullstellen der Bessel'schen Function". Mathematische Annalen, Bd. 33.

Inhalt von No. 16.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

149

Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

Aus dem Jahre 1891.

Nro. 1—11.

Göttingen,
Dieterichsche Verlags-Buchhandlung.
1891.

Man bittet die Verzeichnisse der Accessionen zugleich als Empfangsanzeigen für die der Königl. Societät übersandten Werke betrachten zu wollen.

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und

der Georg-Augusts-Universität

aus dem Jahre 1891.

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

25. Februar. №. 1. 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 7. Februar.

Riecke legt eine Abhandlung des Herrn Privatdocenten Dr. Nernst vor: „Ueber das Henry'sche Gesetz."

Voigt legt: „Beiträge zur Hydrodynamik" vor.

Klein legt die Abhandlung des Herrn Prof. Franz Meyer in Clausthal vor: „Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen." 4. Mittheilung.

de Lagarde spricht über Inhalt und Bedeutung seiner „Septuagintastudien II und III", die im Band 37 der Abhandlungen erscheinen werden.

Frensdorff legt einen Aufsatz vor: „Eine Krisis in der K. Gesellschaft der Wissenschaften."

Ueber das Henry'sche Gesetz.

Von

W. Nernst.

In der Abhandlung, welche der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in der Sitzung vom 2. August vorgelegt wurde, habe ich den Satz aufgestellt, daß jeder Molekülgattung zwischen zwei Phasen eines inhomogenen Systems ein konstantes Theilungsverhältnis zukomme, unabhängig insbesondere, welche anderen Stoffe (in nicht zu großer Konzentration) zugegen sind. Von den Folgerungen, welche sich aus diesem Satze für die Vertheilung eines Stoffes zwischen zwei Lösungsmitteln ergeben, konnte ich bereits durch die Berechnung älterer Versuche und durch eine Anzahl eigener Messungsreihen nachweisen, daß sie an der Erfahrung eine zahlenmäßige Bestätigung finden. Inzwischen habe ich nach einer in der erwähnten Mittheilung bereits angedeuteten Methode auch den Fall experimentell untersucht, daß ein Stoff sich zwischen einer flüssigen und einer gasförmigen Phase vertheilt, worüber im Folgenden nach einigen theoretischen Betrachtungen über diesen Fall zu berichten mir gestattet sei.

Die Anwendung obigen Satzes auf die Vertheilung von Stoffen zwischen Lösungsmittel und dem mit diesem in Berührung befindlichen Gasgemische, d. h. auf die Abhängigkeit des Partialdrucks, mit welchem ein in Lösung befindlicher Stoff in dem über der Lösung lagernden Gasgemische vorhanden ist, von der Konzentration jener, führt zu folgenden Gesetzmäßigkeiten.

1) Der Partialdruck eines gelösten Stoffes über einer Lösung ist bei konstanter Temperatur der Konzentration desselben in der Lösung direkt proportional, wenn derselbe in Lösung und im Gaszustande gleiche Molekulargröße besitzt; unter dieser Bedingung gilt mit andern Worten Henry's Gesetz.

2) Befindet sich der gelöste Stoff im Dissociationszusstande, so gilt der Satz für jede einzelne Molekülgattung, die in der Reaktionsgleichung der Dissociation vorkommt.

3) Es finde im allgemeinsten Falle zwischen den gleichzeitig in einem beliebigen Lösungsmittel gelösten und verflüchtigten Stoffen eine Reaktion nach dem Schema

$$n_1 A_1 + n_2 A_2 + \ldots = n_1' A_1' + n_2' A_2' + \ldots$$

statt, d. h. es treten n_1 Moleküle vom Körper A_1, n_2 Moleküle vom Körper A_2 u. s. w. zusammen, um n_1' Moleküle vom Körper A_1', n_2' Moleküle vom Körper A_2' u. s. w. zu bilden; Gleichgewicht sei eingetreten, wenn die Partialdrucke der einzelnen Molekülgattungen $p_1, p_2 \ldots, p_1', p_2' \ldots$ und ihre Konzentrationen in der Lösung $c_1, c_2 \ldots, c_1', c_2' \ldots$ betrogen. Dann liefert die Anwendung des Guldberg-Waage'schen Gesetzes der chemischen Massenwirkung, welche in gleicher Weise für das gasförmige und flüssige System gemäß den von van 't Hoff in seiner Schrift: „Lois de l'équilibre chimique dans l'état dilué, gazeux ou dissons“ (Stockholm 1885) entwickelten Grundsätzen zu erfolgen hat, die beiden

Gleichungen

$$\frac{p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots}{p_1'^{n_1'} p_2'^{n_2'} \dots} = K \tag{1}$$

$$\frac{c_1^{n_1} c_2^{n_2} \dots}{c_1'^{n_1'} c_2'^{n_2'} \dots} = K' \tag{2}$$

worin K und K', die Reaktionskoefficienten, nur von der Temperatur in der bekannten Weise abhängen. Der eingangs erwähnte Satz liefert uns eine Anzahl Gleichungen

$$c_1 = p_1 k_1,\ c_2 = p_2 k_2,\ \dots\ c_1' = p_1' k_1',\ c_2' = p_2' k_2' \dots \tag{3}$$

worin $k_1, k_2 \dots, k_1', k_2' \dots$ die Löslichkeitskoefficienten der einzelnen Molekülgattungen bedeuten, die wiederum nur von der Temperatur abhängen, und zwar in einer aus der Lösungswärme derselben leicht zu berechnenden Weise.

Aus (1) bis (3) erschließen wir

$$K = K' \frac{k_1'^{n_1'} k_2'^{n_2'} \dots}{k_1^{n_1}, k_1^{n_2} \dots}. \tag{4}$$

Dies Resultat ist vielleicht nicht ohne weiter gehende allgemeine Bedeutung. In den meisten Fällen lassen sich die Löslichkeitskoeffizienten einer Molekülgattung gegenüber einem beliebigen Lösungsmittel direkt bestimmen, und es wird bei Kenntnis dieser ermöglicht, vorherzusagen, wie eine Anzahl Stoffe in einem beliebigen Lösungsmittel auf einander einwirken, wenn ihre Reaktionsfähigkeit im Gaszustande bekannt ist, und umgekehrt.

Es muß jedoch betont werden, daß die Gleichungen (3) nur für elektrisch neutrale Moleküle gültig sind; für eine bestimmte Ionengattung nämlich kann der Theilungskoefficient im allgemeinen nicht unabhängig von der Gegenwart anderer Ionen sein, weil infolge Ausbildung elektrischer Doppelschichten an der Grenzfläche der verschiedenen Phasen die einfache Superposition der Gleichungen (3) aus dem gleichen Grunde aufhört, wie die Salze sich bei der Diffusion in wässeriger Lösung wegen der hierbei auftretenden Potentialdifferenzen beeinflussen. Außerdem wird vorausgesetzt, daß die betreffenden Stoffe weder in Lösung noch im Gaszustande in zu großer Konzentration vorhanden sind.

Satz 1) ist der bekannte van 't Hoff'sche Satz; nimmt man zur Bestimmung des Partialdruckes die van 't Hoff'sche Dampfdruckformel zu Hülfe, so gelangt man zu der von Planck[1]) ge-

1) M. Planck, Zeitschr. physik. Chem. **2.** 405 (1888).

gebenen Theorie der Dampfspannungen von verdünnten Lösungen flüchtiger Stoffe; die von Planck gemachte Voraussetzung, daß der Dampf des Lösungsmittels in großem Ueberschuß im Vergleich zu dem des gelösten Stoffes zugegen ist, kann man ohne Weiteres fallen lassen, da sie weder nothwendig ist noch eine merkliche Vereinfachung mit sich bringt. Von der weiteren Beschränkung in Planck's Theorie, daß nämlich der gelöste Stoff als solcher und im Gaszustande gleiche Molekulargröße besitzt, kann man sich mittelst des Satzes 2) befreien; durch wiederholte Hinzuziehung des Satzes 3) schließlich kann ohne weiteres eine allgemeine Theorie für die Dampfspannung einer Lösung gegeben werden, die beliebige Stoffe (in nicht zu großer Konzentration) enthält, zwischen denen außerdem beliebige chemische Einwirkungen stattfinden können. Die Formeln die sich bei Anwendung des Satzes 2) ergeben werden, (bezüglich des experimentell noch nicht untersuchten Satzes 3) mögen obige Andeutungen genügen) haben neuerdings eine strenge thermodynamische Begründung durch Herrn Professor Riecke erfahren[1]); die unten mitzutheilenden Messungen sind also gleichzeitig dazu geeignet, der Riecke'schen Betrachtungsweise dieser und verwandter Probleme eine neue experimentelle Bestätigung zu verleihen.

Zur Messung des Partialdruckes, mit welchem der gelöste Stoff über der Lösung vorhanden war, bediente ich mich des Beckmann'schen Siedeapparates[2]), dessen Theorie sich unschwer auch für den Fall erweitern läßt, daß der gelöste Stoff in merklicher Weise an der Verdampfung theilnimmt. Es seien in N Molekülen des Lösungsmittels n Moleküle eines fremden Stoffes gelöst, welche letzteren einheitlich sein können oder nicht, und im letzteren Falle mit einander beliebig reagieren mögen. Sei B der Barometerstand, P der Partialdruck des Lösungsmittels und p derjenige des gelösten Stoffes, so ist

$$p = B - P$$

und, wenn P_0 den Dampfdruck des reinen Lösungsmittels bei der betreffenden Temperatur bedeutet, so wird mit Einführung der van 't Hoff'schen Dampfdruckformel

$$\frac{P_0 - P}{P_0} = \frac{n}{N+n} \tag{5}$$

1) E. Riecke, Gött. Nachr. 1890 No. 14.
2) E. Beckmann, Zeitschr. f. physik. Chem. 4. 532 (1889).

$$p = B - P_0 \frac{N}{N+n}. \tag{6}$$

Es sei nun t die Aenderung, welche der Siedepunkt des Lösungsmittels durch Hinzufügen der n Moleküle des gelösten Stoffes erfahren hat und die bei nicht flüchtigen Stoffen immer positiv ist, bei flüchtigen aber sowohl positiv wie negativ sein kann; bedeutet α ferner die Zunahme des Dampfdruckes des Lösungsmittels, welche einer Temperatursteigerung um 1^0 entspricht, so wird

$$P_0 = B + \alpha t$$

und demgemäß

$$p = B\left[\frac{n}{N+n} - \frac{\alpha t}{B}\frac{N}{N+n}\right]. \tag{7}$$

α kann entweder den Dampfdrucktabellen direkt entnommen oder aus der Clausius'schen Dampfdruckformel mittelst der Verdampfungswärme berechnet werden; man erhält auf dem letzteren Wege

$$\alpha = \frac{BMw}{2T^2} \text{ mm Quecksilber} \tag{8}$$

worin M das Molekulargewicht, w die Verdampfungswärme in g-cal und T die absolute Siedetemperatur des Lösungsmittels bedeuten. Handelt es sich um größere Aenderungen des Siedepunktes, so muß natürlich berücksichtigt werden, daß dann der Dampfdruck mit der Temperatur nicht mehr linear variiert; im Folgenden, wo diese Aenderung immer nur nach Bruchtheilen eines Grades zählen wird, ist dies nicht erforderlich.

Für nicht flüchtige Substanzen wird $p = 0$ und es resultiert aus (7) die von Arrhenius abgeleitete und von Beckmann verificierte Formel, welche das Molekulargewicht einer nicht flüchtigen Substanz aus der Siedepunktserhöhung zu berechnen gestattet. Bei Anwendung flüchtiger Substanzen als gelöster Stoffe wird Proportionalität zwischen Konzentration und Temperaturänderung, die in einer Erhöhung oder Erniedrigung des Siedepunktes bestehen kann, nur dann stattfinden, wenn p und Konzentration proportional sind, d. h. wenn dem gelösten Stoffe als solchem und als Gas gleiche Molekulargröße zukommt. Ist dies nicht der Fall, so finden (genügende Flüchtigkeit der gelösten Substanz vorausgesetzt), sofort die grellsten Abweichungen von dieser Proportionalität statt.

Als Beispiel von Stoffen, die in Lösung und als Gas gleiche Molekulargröße besitzen, untersuchte ich Benzol und Chloroform in ätherischer Lösung mittelst des Beckmann'schen Siedeapparats. Thatsächlich waren denn auch die beobachteten Siedepunktserhöhungen der angewandten Konzentration proportional und um 20, bez. 10 % in beiden Fällen kleiner, als sich aus dem Molekulargewichte beider Substanzen unter Annahme von Nichtflüchtigkeit berechnen würde.

Wir gehen jetzt zu den Messungen über, welche mit Anwendung einer Substanz ausgeführt sind, die in Lösung und als Gas in merklich verschiedenem Molekularzustande sich befindet. Als Lösungsmittel wurde Benzol verwandt, als gelöste Substanz diente Essigsäure, die nach den Gefrierpunktsbestimmungen sowie nach den Resultaten, welche nach der Siedemethode mit anderen einbasischen organischen Säuren, wie Benzoesäure, Salicylsäure u. dgl. erhalten sind und einen sicheren Analogieschluß gestatten, bei den hier in Betracht kommenden Konzentrationen zum weitaus größten Theile in Benzollösung bimolekular ist; in Dampfform hingegen, wo ihr Dissociationszustand nach einer von Gibbs berechneten Formel sich sehr genau für alle Drucke und ein großes Temperaturintervall berechnen läßt, werden wir sie, den Bedingungen der Temperatur und der Druckverhältnisse entsprechend, erheblich stärker in die normalen Moleküle dissociiert vorfinden.

Bei Ausführung der Messungen wurde das Hauptaugenmerk auf Anwendung möglichst wasserfreier Substanzen gerichtet, weil Gegenwart selbst nur geringer Spuren von Wasser die Dampfspannung der Lösungen aus mancherlei Gründen erheblich beeinflussen muß. Demgemäß gelangte nur über Natiumdraht längere Zeit getrocknetes Benzol und durch mehrmaliges Ausfrieren vor jedem Versuch frisch gereinigte Essigsäure zur Verwendung. Es gelang so in der That, in fünf Versuchsreihen gut miteinander stimmende Resultate zu erhalten; zur Kontrolle des Apparats wurde außerdem eine Bestimmung mit einer kaum flüchtigen Substanz (Diphenylamin) gemacht, die folgendes befriedigende Resultat lieferte:

Tab. I.

Diphenylamin in Benzollösung.

m	t	M
1·51	0·229	175
3·11	0·463	179
5·61	0·828	181

m bedeutet die Anzahl g gelöster Substanz auf 100 g Benzol, t die beobachtete Siedepunktserhöhung und M das nach der Formel

$$M = 26{\cdot}7\ \frac{m}{t}$$

berechnete Molekulargewicht, welches sich nur wenig höher, der geringen Flüchtigkeit des Diphenylamins entsprechend, als das theoretische, 169, ergiebt.

Die Essigsäure wurde in der von Beckmann für Flüssigkeiten vorgeschlagenen Weise[1]) in das siedende Benzol successive eingeführt; auffallend war, daß sich, besonders bei größeren Konzentrationen, der Siedepunkt der Lösung etwas träge konstant einstellte, wie wenn es einiger Zeit bedurfte, damit das Gleichgewicht zwischen der in Lösung und im Gaszustande befindlichen Essigsäure sich herstellte. Gleichwohl dürften die nun mitzutheilenden Zahlen fast durchweg, besonders da sie großentheils das Mittel aus mehreren gut mit einander stimmenden, unabhängigen Versuchsreihen sind, bis auf weniger als $0{\cdot}01^0$ sicher sein. Der Barometerstand schwankte bei allen Versuchen nur so wenig um 750 mm, daß er unbedenklich für alle Messungen diesem Mittelwerthe gleichgesetzt werden kann, um so mehr, als ein außerdem bei einem ungewöhnlich niedrigen Barometerstande, 730 mm, ausgeführter Kontrollversuch keine merkliche Beeinflussung dieser großen Schwankung des äußeren Druckes auf die beobachteten Siedepunktsänderungen des Benzols durch Zusatz von Essigsäure erkennen ließ. Die Korrektion, welche infolge der durch die Verdampfung der Essigsäure bedingten Konzentrationsänderung anzubringen ist und sich aus der unten zu gewinnenden Kenntnis ihres Partialdrucks und der Angabe, daß das Volum der Lösung und dasjenige des Dampfraumes je ca. 50 cc betrug, leicht berechnet, liegt vollkommen innerhalb der Versuchsfehler.

Tab. II.

Essigsäure in Benzol.

m	t	m	t	
0·150	−0·070	4·13	−0·066	
0·663	−0·139	5·00	+0·032	
1·64	−0·152	6·83	+0·063	Barometerstand = 750 mm
1·87	−0·155	7·53	+0·118	
2·60	−0·132	8·42	+0·180.	

1) Beckmann l. c. 548.

Wie man sieht, ist von Proportionalität zwischen Konzentrationen und Siedepunktsänderung t gar nicht die Rede; vielmehr findet beim anfänglichen Zusatz eine Erniedrigung, beim weiteren eine Erhöhung des Siedepunktes statt und wir dürfen aus dem bloßen Anblick der Zahlen das erwartete Resultat schließen, daß nämlich Essigsäure in den beiden Phasen des untersuchten Systems sicherlich in merklich verschiedenem Molekularzustande sich befindet. Die strenge Berechnung wird uns sofort lehren, daß auch quantitativ der absonderliche Verlaut der Zahlen der von der Theorie geforderte ist.

Die Berechnung des Partialdruckes p der Essigsäure im Dampfraume geschieht nach Formel (7); α, die Aenderung des Dampfdruckes des Benzols, welche einer Aenderung um 1^0 entspricht, beträgt in der Nähe das dem Drucke von 750 mm entsprechenden Temperaturpunktes der Dampfspannungskurve 22·0 mm, wie sich aus der Formel (8)

$$\alpha = 750 \frac{78 \cdot 93{\cdot}4}{2 \cdot 353^2}$$

berechnet. Die Anzahl Moleküle n der Essigsäure, welche auf N Moleküle Benzol enthalten sind, ergiebt sich aus m, welche Größe die Anzahl g Essigsäure auf $N = \frac{100}{78}$ Moleküle Benzol (78 = Molekulargewicht des Benzols im Gaszustande) bedeutet, und dem Molekularzustande der Essigsäure im Benzol. Wie schon hervorgehoben, ist das Molekulargewicht der Essigsäure in Benzol $= 2 \times 60 = 120$ zu setzen (60 Molekulargewicht der Essigsäure bei hoher Temperatur und niederem Druck im Gaszustande), und bedeutet x den Dissociationskoefficienten der Doppelmoleküle, so wird

$$n = \frac{m}{120}(1+x) .$$

Da Essigsäure bei den hier in Betracht kommenden Konzentrationen nur wenig dissociiert ist, so spielt x die Rolle einer Korrektionsgröße, deren angenäherte Kenntnis wir uns aus den Gefrierpunktsbeobachtungen dieses Stoffes in Benzol sowie besonders aus den Messungen verschaffen, welche Beckmann[1]) an der Benzoesäure, die sich sicherlich analog der Essigsäure verhält, angestellt hat. Wir schließen daraus, daß letzterer Stoff bei dem $m = 0{\cdot}663$ entsprechenden

1) E. Beckmann, Zeitschr. f. physikal. Chem. 6. 440 (1890).

Gehalte zu rund 10 % dissociiert ist. Für die anderen Konzentrationen berechnet sich dann der Dissociationskoefficient aus der Gleichung der Dissociationsisotherme $\frac{m x^2}{1-x} = \frac{0{\cdot}663 \cdot 0{\cdot}1^2}{0{\cdot}9}$.

Setzen wir also

$$\frac{\frac{m}{120}(1+x)}{\frac{100}{78}+\frac{m}{120}(1+x)} = \frac{m(1+x)}{154{\cdot}4 + m(1+x)} = v \tag{9}$$

wo wir x im Nenner unbedenklich vernachlässigen können, so wird

$$p = 750\, v - 22{\cdot}2\, t\,(1-v) \text{ mm Quecksilber.} \tag{10}$$

Wir berechnen so folgende Partialdrucke der Essigsäure, welche den einzeln Konzentrationen entsprechen und unter p ber. 1 verzeichnet sind.

Tab. III.

Partialdruck des Essigsäuredampfes über dessen Lösung in Benzol bei 80°.

m	x	p ber. 1	p ber. 2	$\varDelta$	ξ
0·150	0·20	2·4	2·6	2·24	0·87
0·663	0·10	6·6	6·5	2·44	0·70
1·64	0·065	11·8	11·6	2·61	0 60
1·87	0·061	12·9	12·6	2·63	0·58
2·60	0·055	16·1	15·7	2·71	0·54
4·13	0·042	21·8	21·4	2·81	0·48
5·00	0·038	23·6	23·9	2·83	0·47
6·83	0·033	31·4	31·1	2·96	0·40
7·53	0·031	33·5	33·4	2·99	0·38
8·42	0·029	36·4	36·5	3·02	0·36

Was die Genauigkeit der nach Formel (10) berechneten Werthe von p anlangt, so ist zu beachten, daß ein Fehler von 0·01° in der Bestimmung von t in p mit einem Fehler von 0·2 mm Quecksilber eingeht; es darf wohl betont werden, daß einem Versuche, auf gewöhnliche Weise den Dampfdruck einer Lösung so genau zu messen, kaum überwindliche Schwierigkeiten gegenüberstehen, wie ich überhaupt der Meinung bin, daß mit Hülfe des ausgezeichneten Siedeapparates von Beckmann sich Absorptionskoefficienten häufig einfacher und viel genauer werden bestimmen lassen, als nach irgend einer anderen Methode. Der Partialdruck des Benzols ergiebt sich natürlich zu 750 $-p$.

Man ersieht aus Tab. III sofort, daß Proportionalität zwischen m und p im Sinne des Henry'schen Gesetzes in der gewöhnlichen Fassung nicht einmal angenähert stattfindet; wohl aber muß das Gesetz nach dem eingangs aufgeführten Satze gelten, wenn man eine bestimmte Molekülgattung, etwa die normale, welche der Formel CH_3COOH entspricht, in Betracht zieht.

In Lösung ist nun die Anzahl normaler Moleküle

$$m\sqrt{\frac{(1-x)}{m}} = \sqrt{m(1-x)}$$

proportional. Für den Gaszustand berechnet sich der Dissociationskoefficient ξ aus der Dampfdichte $\varDelta$ zu

$$\xi = \frac{4{\cdot}146 - \varDelta}{\varDelta} \tag{11}$$

wo 4·146 der dem Werte $\xi = 0$ entsprechende Grenzwert der Dampfdichte der Essigsäure darstellt; für die Abhängigkeit der Dampfdichte von Temperatur und Druck hat Gibbs[1]) folgende Formel gegeben:

$$\log \frac{2{\cdot}073(\varDelta - 2{\cdot}073)}{(4{\cdot}146 - \varDelta)^2 p} = \frac{3520}{T} - 11{\cdot}349 \tag{12}$$

worin T die absolute Temperatur bedeutet, welcher Ausdruck sich den zahlreichen Messungen von Bineau, Naumann, Horstmann u. A. gut anschließt.

Wenn wir $T = 273 + 80$ einsetzen (80° Siedepunkt des Benzols), so wird

$$\frac{\varDelta - 2{\cdot}073}{(7{\cdot}146 - \varDelta)p^2} = 0{\cdot}0201$$

eine Gleichung, welche die bekannte Form der Dissociationsisotherme besitzt und deren Berechnung zu den in Kolumne V verzeichneten Werthen von $\varDelta$ und mit Hinzuziehung von Gl. (11) zu den in Kolumne VI verzeichneten Werthen von ξ führt.

Die Anzahl normaler Moleküle in der Volumeinheit des Dampfes der Essigsäure ist nun proportional dem Produkte aus der in der Volumeinheit befindlichen Masse des Dampfes und seinem Disso-

---

1) W. Gibbs, Sil. Journ. 18. 371 (1879).

ciationskoefficienten, also proportional dem Ausdruck

$$\varDelta p \frac{4\cdot146-\varDelta}{\varDelta} = p(4\cdot146-\varDelta).$$

Die Gültigkeit des Henry'schen Gesetzes in der eingangs dargelegten Fassung verlangt also Proportionalität zwischen den Ausdrücken

$$\sqrt{m(1-x)} \quad \text{und} \quad p(4\cdot146-\varDelta).$$

Thatsächlich finden wir denn auch, daß die nach Formel

$$p = 14\cdot4 \frac{\sqrt{m(1-x)}}{4\cdot146-\varDelta} \text{ mm Quecksilber} \tag{13}$$

berechneten, in Kolumne IV der Tabelle III verzeichneten Druckwerthe mit dem unmittelbaren Ergebnis des Experiments in ausgezeichneter Weise übereinstimmen. Diese Messungen im Verein mit den über die Vertheilung eines Stoffes zwischen zwei Lösungsmitteln angestellten beweisen wohl zur Genüge, daß der Satz über die Konstanz der Theilungskoeffizienten einer bestimmten Molekülgattung zwischen zwei Phasen zu mit der Erfahrung völlig stimmenden Resultaten führt.

Der Proportionalitätsfaktor 14·4 entspricht (bei Berücksichtigung des in Gl. (13) befolgten Maaßsystems) dem Löslichkeitskoeffizienten der (CH_3COOH)-Moleküle; natürlich kann in gleicher Weise auch der Löslichkeitskoefficient der $(CH_3COOH)_2$-Moleküle gefunden werden. Vernachlässigt wurde in den obigen Rechnungen die bei den geringen Temperaturänderungen jedenfalls nur äußerst geringe Aenderung des Löslichkeitkoefficienten mit der Temperatur.

Einen zweiten Fall, der in genau der gleichen Weise behandelt werden kann, verdanke ich der gütigen Mittheilung von Herrn Professor Dr. Beckmann in Leipzig, welcher bei Zusatz von Wasser zu siedendem Aether folgende Siedepunktserniedrigungen erhielt:

Tab. IV.

Wasser in Aether.

m	t	
0·429	−0·206	
1·032	−0·206	Barometerstand = 752 mm
1·315	−0·324.	

Man sieht auch hier, daß zwischen m und t durchaus keine Proportionalität stattfindet, daß also Wasser unter den Bedingungen des Versuchs in Aether gelöst und als Gas nicht in gleichem Molekularzustande sich befindet. Im Wasserdampfe kommen nach Avogadro's Gesetz nun fast ausschließlich H_2O - Moleküle vor, wenn auch der ein wenig größer als dem Molekulargewichte 18 entsprechend gefundene Werth der Dampfdichte auf Bildung von Doppelmolekülen in sehr geringer Anzahl hindeutet. Es muß demnach das Wasser im Aether in einem anderen Molekularzustande wie dem normalen vorkommen.

Dies Resultat können wir auf einem unabhängigen zweiten Wege bestätigen. Bei der dritten Beobachtung nämlich war der Aether mit Wasser gesättigt; der Werth $m = 1{\cdot}315$ ist von mir mit Hülfe der von Walker[1]) neulich bis zu 30^0 gemessenen Löslichkeit des Wassers in Aether mittelst einer kleinen Extrapolation bis auf $35{\cdot}2^0$ berechnet worden. Nun können wir den Partialdruck des Wasserdampfes über mit Wasser gesättigten Aether anderweitig berechnen; er ist nämlich gleich dem Partialdruck des Wasserdampfes über mit Aether gesättigten Wasser bei der gleichen Temperatur und dieser ergiebt sich, indem wir beachten, daß durch die 9 % Aether, welche vom Wasser bei $35{\cdot}2^0$ gelöst werden, der Dampfdruck des reinen Wassers bei dieser Temperatur, 40·0 mm, um 2·5 % erniedrigt wird, zu 39·0 mm. Der Partialdruck des Aethers war nun bei dem dritten Versuch gleich $752{\cdot}0 - 39{\cdot}0 = 718$ mm; der Dampfdruck des reinen Aethers würde bei einer Temperaturerniedrigung um $0{\cdot}324^0$

$$752 - 26{\cdot}7 \times 0{\cdot}324 = 743{\cdot}4 \text{ mm Quecksilber}$$

betragen, weil der Dampfdruck des Aethers in der Nähe von $35{\cdot}5^0$ für 1^0 Temperaturerniedrigung um 26·7 mm sinkt. Aus der van 't Hoff'schen Dampfdruckformel finden wir, daß

$$\frac{743{\cdot}4 - 713}{713} = 0{\cdot}0426$$

beträgt, d. h. daß beim dritten Versuch auf 100 Molekele Aether 4·26 Wassermoleküle gelöst waren.

Wäre nun Wasser im Aether in Gestalt von Doppelmolekülen vorhanden, so müßte die relative Dampfspannungserniedrigung

$$\frac{1{\cdot}315 \cdot 74}{36 \cdot 100} = 0{\cdot}0270$$

1) Walker, Zeitschr. physik. Chem. 5. 196 (1890).

betragen, und sie würde doppelt so groß sein, wenn Wasser im Aether in Gestalt von normalen Molekülen gelöst wäre. Aus dem obigen Werth berechnet sich nun, daß bei dieser Konzentration der Dissociationskoeffizient 0·58 beträgt.

Für die beiden geringeren Konzentrationen läßt sich der Partialdruck des Wasserdampfes über der Lösung wiederum auf zwei Wegen berechnen; zunächst aus den beobachteten Siedepunktserniedrigungen nach Gl. (7), wo x für die betreffenden beiden Konzentrationen nach der Gleichung der Dissociationsisotherme zu ermitteln ist; sodann mit Hülfe des Vertheilungssatzes, demzufolge p der Anzahl der normalen Wassermoleküle proportional, also gleich

$$39{\cdot}0\frac{mx}{1{\cdot}315\cdot 0{\cdot}58}$$

sein muß. Auf diese Weise gelangen wir zu

Tab. V.

Partialdruck des Wasserdampfes über dessen Lösung in Aether bei 35·3°.

m	x	p ber. 1	p ber. 2
1·315	0·58	39·0	39·0
1·032	0·62	31·7	32·8
0·429	0·76	17·0	16·8

Die Uebereinstimmung zwischen den auf zwei Wegen berechneten p-Werthen kann wohl als genügend angesehen werden. Jedenfalls setzen es die obigen Zahlen außer Zweifel, daß Wasser in Aether gelöst zum größeren Theile aus normalen Molekülen besteht, weil andernfalls die Abhängigkeit der beobachteten Siedepunktserniedrigungen von der Konzentration eine gänzlich andere sein müßte.

Den obigen Messungen entnehmen wir gleichzeitig das praktische Resultat, daß auch bei Anwendung flüchtiger Stoffe als gelöster Körper der Beckmann'sche Siedeapparat sichere Auskunft über den Molekularzustand derselben zu liefern und uns gleichzeitig in den Besitz ihrer Absorptionskoefficienten zu setzen im Stande ist.

Es sei zum Schluß noch darauf hingewiesen, daß, obwohl die von mir gewählte Fassung des Vertheilungssatzes an molekulare

Vorstellungen anknüpft, er gleichwohl von diesen unabhängig ist, und daß alle Folgerungen aus ihm auch dann bestehen bleiben würden, wenn man Avogadro's Satz für Lösungen als nicht gültig annähme. Mit der Bezeichnung, ein Stoff hat in zwei verschiedenen Phasen gleiche Molekulargröße oder nicht, ist nämlich im Obigen wie früher bei ähnlicher Gelegenheit[1]) keine andere Vorstellung verbunden, als daß der betreffende Stoff in diesen beiden Phasen unter Partialdrucken steht, die sich wie seine Konzentrationen verhalten oder nicht, oder, allgemeiner ausgedrückt, daß die Aenderungen der freien Energie einer bestimmten Menge des Stoffes bei gleicher procentischer Konzentrationsänderung in beiden Phasen gleich sind oder nicht. Der methodische Verstoß, welchen ich hierdurch gegen das Grundprinzip der Naturwissenschaft, niemals mit einem größeren Aufwand an Hypothese zu operieren, als unbedingt für den vorliegenden Zweck erforderlich, begangen habe, möge im Hinblick darauf entschuldigt werden, daß durch Hinzuziehung molekularer Vorstellungen die Darstellung an Anschaulichkeit und der Ausdruck an Kürze ungemein gewinnt.

Physikal. Inst. Göttingen. Februar 1891.

1) Nernst, Zeitschr. f. physik. Chem. 6. 17 (1890).

Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen.

Von

Franz Meyer in Clausthal.

(Vierte Mittheilung[1]).

Vorgelegt von F. Klein.

In zwei voraufgegangenen Mittheilungen sind für rationale Raumcurven R_n^3 die Hyperosculationsebenen „α^4“, die Schmiegungsberührebenen „$\alpha^3\beta^2$“ und die Trefftangenten „$(\alpha^2\beta)$“ bezüglich der Coincidenzen ihrer Stellen α untersucht worden.

1) Vgl. diese Nachrichten. 1888 No. 5, 1890 No. 10, 1890 No. 15.

Im Nachfolgenden sollen die zwei noch übrigen Elementarsingularitäten einer Raumcurve, nämlich die Tritangentialebenen „$\alpha^2\beta^2\gamma^2$“ und die Quadrisecanten „$(\alpha\beta\gamma\delta)$“ in demselben Sinne ihre Erledigung finden, sowohl in ihren Beziehungen zu einander, wie zu den drei ersterwähnten Singularitäten.

Man wird wiederum die Discriminanten und Resultanten der binären Formen, welche, gleich Null gesetzt, die Werthe α zu Wurzeln besitzen, in Elementarfactoren auflösen, welche in dem zu Grunde gelegten Rationalitätsbereiche der Größen δ irreducibel sind.

Zu dem Zwecke sind vorerst die Grade der gemeinten Elementarfactoren in den δ festzustellen.

Hierzu erweisen sich indessen die bisher angewandten Hülfsmittel als nicht völlig zureichend, insofern bei einer Reihe von Zerlegungen immer je ein Factor übrig bleibt, für den eine directe Gradbestimmung auf unüberwindliche Schwierigkeiten zu stoßen scheint.

Man kann jedoch diese Schwierigkeiten umgehen sobald man die früher auseinandergesetzte Methode des Projicirens in geeigneter Weise mit dem Chasles'schen Correspondenzprincip verknüpft. Dadurch gelingt es, zwischen der jedesmal gesuchten Gradzahl und anderen, bereits bekannten eine Relation herzustellen.

Es möge das Verfahren an dem Beispiel der Discriminante der Tritangentialebenen -Form $[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$ ausführlicher erläutert werden.

Wie die geometrische Anschauung zeigt, existiren hier fünf verschiedene Möglichkeiten für ein (durch je eine einzige Bedingung herbeigeführtes) Zusammenrücken zweier Berührstellen.

Erstlich können zwei der Tritangentialebenen in der Weise consecutiv werden, daß die drei Berührungspunkte auf deren Schnittlinie zu liegen kommen (sodaß die letztere eine Trisecante der Curve R_n^3 wird).

Sodann können sich vier solcher Ebenen zu einer einzigen, viermal berührenden Ebene vereinigen. Des Weiteren zwei solcher Ebenen zu einer einmal osculirenden und noch zweimal berührenden.

Viertens kann eine Coincidenz zweier Berührstellen ein und derselben Tritangentialebene eintreten, sodaß die letztere einmal hyperosculirt und außerdem noch einmal berührt.

Endlich kann es noch vorkommen, daß durch eine Tangente der Curve zwei verschiedene Ebenen gehen, welche je noch zweimal berühren.

Man hat demnach, bei der eingeführten Bezeichnungsweise, für die Discriminante $D[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$ den Zerlegungsansatz:

$$D[\alpha^2\beta^2\gamma^2] = [\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]^a [\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2]^b [\alpha^3\beta^2\gamma^2]^c [\alpha^4\beta^2]^d [\alpha^2\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2]^e$$

wo die Exponenten a, b, c, d, e zu bestimmende ganze positive Zahlen sind.

Nun lassen sich die Grade der vier ersten Elementarfactoren, wie auch der Discriminante selbst, unter Benutzung der früher angegebenen Hülfsmittel finden (vgl. die weiter unten aufgestellte Tabelle) und es ist nur der letzte Factor rechterhand, dem man so nicht beikommen kann.

Zuvörderst denken wir uns wiederum im vierdimensionalen Raume eine punktallgemeine R_n^4 nebst einer beliebigen Geraden g und fragen: Von wieviel Punkten P auf g läßt sich die R_n^4 so in eine R_n^3 projiciren, daß die letztere der invarianten Bedingung $\alpha^2\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2] = 0$ genügt? Die Anzahl derartiger Punkte P ist zugleich der Grad der in Rede stehenden Invariante in den δ.

Man construire nunmehr auf der Curve R_n^4 folgende Correspondenz. Durch irgend eine Tangente $((\alpha_1^2))$ lassen sich $2(n-4)(n-5)$ Räume M_3 legen, welche die Curve noch zweimal berühren. Diese Räume M_3 treffen die Gerade g in ebensoviel Punkten Q. Von jedem solchen Punkte Q gehen, außer der jeweils ihn ausschneidenden M_3 noch $\frac{4}{3}(n-3)(n-4)(n-5) - 1$ weitere aus, welche die R_n^4 gleichfalls dreimal berühren. Ein Berührungspunkt der letzteren Art heiße β.

Dadurch entsprechen irgend einer Stelle α auf R_n^4 im Ganzen $2(n-4)(n-5)\{4(n-3)(n-4)(n-5) - 3\}$ Stellen β und umgekehrt, und es müssen demnach doppelt so viele Coincidenzen $\alpha = \beta$ existiren.

Diese Coincidenzen zerfallen in vier getrennte Klassen.

Die erste besteht aus Tripeln α_1, α_2, α_3, in denen eine M die R_n^4 berührt und deren Verbindungsebene $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ zugleich g trifft. Jede Stelle α repräsentirt eine einfache Coincidenz.

Die zweite enthält die Quadrupel α_1, α_2, α_3, α_4, in denen eine M_3 die R_n^4 berührt. Eine derartige Stelle α zählt aber als Coincidenz sechsfach. Denn durch eine Tangente $((\alpha_1^2))$ gehen zunächst die drei M_3: $\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2$, $\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_4^2$, $\alpha_1^2\alpha_3^2\alpha_4^2$. Greift man aus diesen etwa die erste heraus, so passiren durch den Treffpunkt Q auf g außer ihr noch zwei M_3, welche die Curve in α_1 und zudem noch zweimal berühren, nämlich $\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_4^2$, $\alpha_1^2\alpha_3^2\alpha_4^2$.

Die dritte Klasse umfaßt diejenigen Stellen α, wo eine M_3 osculirt und überdies noch zweimal, etwa in γ und δ, berührt. Coincidenzen dieser Klasse sind siebenfach zu rechnen. Zuvörderst entfällt von den durch eine Tangente $((\alpha^2))$ legbaren Tritangential-M_3 der R_n^4 nur eine einzige in die vorliegende: $[\alpha^3\gamma^2\delta^2]$ (wie an dem Beispiel einer R_6^4 leicht direct bestätigt werden kann), dagegen durch den Treffpunkt Q auf g außer jener noch eine zweite, wie aus dem früher studirten Verhalten der Discriminante $D[\alpha^3\beta^2]$ hervorgeht.

Andererseits lehrt das für die Discriminante der zu einer R_n^2 gehörigen Doppeltangentenform $[\alpha^2\beta^2]$ Hergeleitete, daß von den Tritangential-M_3 der R_n^4, welche sich in einer Tangente $((\gamma^2))$ schneiden, genau zwei mit $\alpha^3\gamma^2\delta^2$ zur Deckung kommen, während von dem Treffpunkt Q auf g das Nämliche gilt, wie oben. Trotzdem zählt die Coincidenz γ wiederum dreifach (wegen des Hineinrückens einer Verzweigung).

Wiederholt man die letzte Betrachtung für die Stelle δ, so erkennt man in der That, daß unsere Coincidenz $1+3+3=7$-mal zählt.

Der letzten Klasse endlich gehören die Stellen α an, für welche es zwei getrennte M_3: $\alpha^2\gamma^2\delta^2$, $\alpha^2\gamma_1^2\delta_1^2$ giebt, deren gemeinsame Ebene die Gerade g trifft.

Offenbar sind das doppelt zählende Coincidenzen. Projicirt man der Reihe nach für jede Klasse die R_n^4 von einem entsprechenden Punkte Q auf g, so ist die Projectionscurve R_n^3 der Art, daß für sie jeweils der erste, zweite, dritte und fünfte Elementarfactor der für $D[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$ angesetzten Zerlegung verschwindet.

Entnimmt man jetzt der Tabelle C die Grade der drei erstgenannten Factoren, so bestimmt sich vermöge des Correspondenzprincips der Grad des letzten:

$$\begin{aligned}[\alpha^2\beta^2\gamma^2,\ \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2] = 2(n-4)(n-5)\{4(n-3)(n-4)(n-5)-3\}& \\ -3(n-2)(n-4)(n-5)& \\ -21(n-4)(n-5)(n-6)-8(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)& \\ = 2(n-4)(n-5)(4n^3-52n^2+228n-345).&\end{aligned}$$

Das gefundene Ergebniß läßt sich noch auf eine zweite Art begründen, indem man sich eine ähnliche Correspondenz, statt auf der Curve R_n^4, auf der Geraden g bildet.

Durch einen Punkt P auf g gehen $\frac{4}{3}(n-3)(n-4)(n-5)$ M_3 von Typus $\alpha^2\beta^2\gamma^2$; man lege durch die Tangente $((\alpha^2))$ die weiteren M_3: $\alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2$, welche g in Punkten Q treffen mögen. So entsprechen jedem Punkte P $4(n-3)(n-4)(n-5)\{2(n-4)(n-5)-1\}$ Punkte Q u. umg., sodaß die Anzahl der Coincidenzen $P = Q$ doppelt so groß ist.

Man hat wiederum vier Klassen von Coincidenzen. Entweder wird die R_n^4 von der Tangente $((\alpha^2))$ aus in eine R_n^2 mit Selbstberührung projicirt — solcher Stellen α giebt es $2(n-4).2(n-3)(n-5)$ — oder von einem Punkte $P = Q$ aus in eine R_n^3 mit einer M_2: $\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta_{\bar{u}}^2$ resp. $\alpha^3\beta^2\gamma^2$ oder endlich mit einem M_2-Paare: $\alpha^2\beta^2\gamma^2$, $\alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2$. Diese vier Arten von Coincidenzen zählen der Reihe nach einfach, $4.3.2 = 24$ fach, $3+3 = 6$ fach, $1+1 = 2$ fach. Somit liefert das Correspondenzprincip als Grad der Invariante $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2]$ die obige Zahl:

$$4(n-3(n-4)(n-5)\{2(n-4)(n-5)-1\}-8(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)$$
$$-18(n-4)(n-5)(n-6)-4(n-3)(n-4)(n-5)$$
$$=2(n-4)(n-5)(4n^3-52n^2+228n-345)$$

q. e. d.

Nunmehr lassen sich die unbekannten Exponenten a, b, c, d, e des Zerlegungsansatzes:

$$D[\alpha^2\beta^2\gamma^2] = [\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]^a [\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2]^b [\alpha^3\beta^2\gamma^2]^c [\alpha^4\beta^2]^d [\alpha^2\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2]^e$$

durch Auflösung einfacher diophantischer Gleichungen ermitteln. Nach Gleichsetzung der beiderseitigen Grade und Weglassung des gemeinsamen Factors $2(n-4)(n-5)$ kommt:

$$8(n-3)(n-4)(n-5)-2 = \left(a-\frac{3\varepsilon}{2}\right)(n-2)+\frac{b-12\varepsilon}{3}(n-6)(n-7)$$
$$+3\left(c-\frac{7\varepsilon}{2}\right)(n-6)+4e(n-3)(n-4)(n-5)-3e+4d.$$

Der Coefficient von n^3 ist links 8, rechts $4e$, mithin $e = 2$. Setzt man dies ein, so bleibt:

$$0 = (a-3)(n-2)+\frac{b-24}{3}(n-6)(n-7)+3(c-7)(n-6)-4(1-d).$$

Da der Coefficient von n^2 verschwinden muß, so gilt $b = 24$. Für $n = 6$ ergiebt sich $4(a-3) = 4(1-d)$, oder $a + d = 4$, während für $n = 2 : 3(7-c) = 1-d$ wird.

Von den drei Möglichkeiten $a = 3$, $d = 1$; $a = d = 2$; $a = 1$, $d = 3$ sind die beiden letzteren auszuschließen, da sie keinen ganzzahligen Werth von c zulassen würden.

$d = 1$ hat aber $c = 7$ zur Folge.

Demnach existirt nur das einzige Lösungssystem:

$$a = 3, \quad b = 24, \quad c = 7, \quad d = 1, \quad e = 2.$$

Was die weiteren Zerlegungen unserer Discriminanten und Resultanten angeht, so möge nunmehr eine kürzere Fassung gestattet sein.

Für die Discriminante der Quadrisecantenform besteht die vorläufige Zerfällung:

$$D[(\alpha\beta\gamma\delta)] = [(\alpha\beta\gamma\delta)^2]^a\,[(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)]^b\,[(\alpha^2\beta\gamma)]^c \cdot$$
$$+ [((\alpha\beta))]^{d\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2}} \cdot [(\alpha\beta\gamma\delta),\ (\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1)]^e$$

wo die Zahl d ev. auch rational sein könnte.

Der erste Factor entspricht der Erscheinung, daß zwei Quadrisecanten consecutiv werden (ohne sich jedoch zu schneiden); die übrigen sind ohne Weiteres zu interpretiren. Der Grad des fünften Factors wird wieder indirect vermöge einer geeigneten Correspondenz auf der Curve R_n^4 gewonnen, und nimmt den Werth an:

$$\tfrac{4}{3}(n-2)(n-3)(n-4)\left\{\tfrac{1}{12}(n-2)(n-3)^2(n-4) - 1\right\}$$
$$- (n-1)(n-2)(n-4)(n-5)$$
$$- \tfrac{5}{4}(n-2)(n-3)(n-4)^2(n-5) - \tfrac{1}{8}(n-1)(n-2)^2(n-3)(n-4)(n-5)$$
$$= \tfrac{1}{72}(n-2)(n-4)(n-5)(n-6)(8n^3 - 41n^2 + 30n + 111).$$

Durch Gradvergleichung und Weglassung des Factors $(n-2$ $(n-4)$ gelangt man jetzt zur Identität:

$$\tfrac{2}{3}(n-3)\left\{\tfrac{1}{3}(n-2)(n-3)^2(n-4)-1\right\} = \frac{a-2e}{2}(n-1)(n-5)$$

$$+\frac{b-30e}{24}(n-3)(n-4)(n-5)+2c(n-3)+\frac{2d-e}{8}(n-1)(n-2)(n-5)$$

$$+\frac{e}{9}(n-2)(n-3)^3(n-4)-\frac{4e}{3}(n-3).$$

Die Gleichsetzung der Coefficienten von n^5 giebt $e=2$. Damit verwandelt sich die Identität in:

$$0 = \frac{a-4}{2}(n-1)(n-5)+\frac{b-60}{24}(n-3)(n-4)(n-5)$$

$$+\frac{d-1}{4}(n-1)(n-2)(n-5)$$

$$+2(c-1)(n-3).$$

Für $n=5$ schließt man $c=1$, sodann für $n=1: b=60$, endlich für $n=2: a=4$, was von selbst $d=1$ zur Folge hat. Es resultirt daher das einzige Werthsystem:

$$a=4,\quad b=60,\quad c=1,\quad d=1,\quad e=2.$$

Von den zehn Resultanten der fünf Singularitätenformen sind uns drei bereits von früher her bekannt; weitere drei stellen sich als irreducibel heraus, sodaß nur noch vier Zerlegungen in Betracht kommen.

Dies sind erstens $R[\alpha^4, \alpha^2\beta^2\gamma^2]$; zweitens $R[\alpha^3\beta^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2]$; drittens $R[(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha^2\beta)]$, viertens $R[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha^2\beta)]$.

Erstens. $R[\alpha^4, \alpha^2\beta^2\gamma^2] = [\alpha^4, \alpha^2\beta^2\gamma^2]^a . [\alpha^4\beta^2]^b.$

$$12(n-3)(n-4)(n-5) = 4a(n-4)(n-5)(3n-11)+8b(n-4)(n-5).$$

$$a=1,\quad b=1.$$

Zweitens. $R[\alpha^3\beta^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2] = [\alpha^3\delta^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2]^a . [\alpha^4\beta^2]^b . [\alpha^3\beta^2\gamma^2]^c.$

$$20(n-3)(n-4)^2(n-5) = 4a(n-4)(n-5)(5n^2-38n+74)$$

$$+8b(n-4)(n-5)+6c(n-4)(n-5)(n-6).$$

$$a=1,\quad b=2,\quad c=2.$$

Drittens. $R[(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha^2\beta)] = ((\alpha\beta))^{a(n-3)(n-4)} . [(\alpha^2\beta\gamma)]^b . [(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha^2\varepsilon)]^c.$

$$(n-2)^2(n-3)^2(n-4) = \frac{a}{2}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$
$$+ 2b(n-2)(n-3)(n-4) + c(n-\tfrac{1}{2})(n-2)(n-3)(n-4)(n-5).$$
$$a = 1,\quad b = 2,\quad c = 1.$$

Viertens $R[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha^2\beta)] = [\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha^2\beta)]^a \cdot [\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha^2\delta)]^b$.

$$8(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) = 12a(n-2)(n-4)(n-5)$$
$$+ 8b(n-2)(n-4)(n-5)(n-6).$$
$$a = 2,\ b = 1.$$

Im dritten Falle ist der letzte Elementarfactor, in den beiden ersten jedesmal der erste indirect untersucht worden, wiederum mit Hülfe von Correspondenzen auf der R_n^4.

In den folgenden drei Tabellen stellen wir noch einmal alle Ergebnisse übersichtlich zusammen; in der ersten die fünf Singularitätenformen mit ihren Graden in α, wie in den δ, in der zweiten die Zerlegungen der fünf Discriminanten und zehn Resultanten, in der letzten endlich der 24 Elementarfactoren Gewichte (aus denen vermöge Streichung des Factors $2(n-3)$ die bez. Grade hervorgehen), geordnet nach dem Grade in n.

Tabelle A.

Die fünf Singularitätenformen.

		Grad in α.	Grad in den δ.
Ebenen	$[\alpha^4]$	$4(n-3)$	1
„ „	$[\alpha^3\beta^2]$	$6(n-3)(n-4)$	$2(n-4)$
„ „	$[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$	$4(n-3)(n-4)(n-5)$	$2(n-4)(n-5)$
Gerade	$[(\alpha^2\beta)]$	$2(n-2)(n-3)$	$n-2$
„ „	$[(\alpha\beta\gamma\delta)]$	$\frac{1}{3}(n-2)(n-3)^2(n-4)$	$\frac{1}{3}(n-2)(n-3)(n-4)$.

Tabelle B.

Die Zerlegungen der fünf Discriminanten und zehn Resultanten.

Discriminanten.

$$D[\alpha^4] = [(\alpha^3)] \cdot [\alpha^5] \cdot$$
$$D[\alpha^3\beta^2 = [(\alpha^3)]^{(2n-8)(2n-9)}[\alpha^5] \cdot [\alpha^4\beta^2] \cdot [\alpha^3\beta^3]^6 \cdot [\alpha^3\beta^2\gamma^2]^2 \cdot [\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$$
$$D[\alpha^2\beta^2\gamma^2] = [\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]^3 [\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2)^{24} [\alpha^3\beta^2\gamma^2]^7 [\alpha^4\beta^2] \cdot [\alpha^2\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2]^2 \cdot$$
$$D[(\alpha^2\beta)] = [(\alpha^3)] \cdot [(\alpha^2\beta\gamma)]^2 [((\alpha\beta))]^2 [\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)] \cdot$$
$$D[(\alpha\beta\gamma\delta)] = [(\alpha\beta\gamma\delta)^2]^4 [(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)]^{60} [(\alpha^2\beta\gamma)] [((\alpha\beta))]^{\frac{1}{2}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} [(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1)]^2 \cdot$$

Resultanten.

$$R\{[\alpha^4], [\alpha^3\beta^2]\} = [\alpha^4\beta^2]\cdot[(\alpha^3)]^{2(n-4)}\cdot[\alpha^5]^2\cdot$$
$$R\{[\alpha^4], [\alpha^2\beta^2\gamma^2]\} = [\alpha^4, \alpha^2\beta^2\gamma^2]\cdot[\alpha^4\beta^2]$$
$$R\{[\alpha^4], [(\alpha^2\beta)]\} = [\alpha^4, (\alpha^2\beta)][(\alpha^3)]^2\cdot$$
$$R\{[\alpha^4], [(\alpha\beta\gamma\delta)]\} = [\alpha^4, \alpha\beta\gamma\delta)]\cdot$$
$$R\{[\alpha^3\beta^2], [\alpha^2\beta^2\gamma^2]\} = [\alpha^3\delta^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2][\alpha^4\beta^2]^2\cdot[\alpha^3\beta^2\gamma^2]^2$$
$$R\{[\alpha^3\beta^2], [(\alpha^2\beta)]\} = [(\alpha^3)]^{2(n-4)}[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]^2\cdot[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\gamma)]$$
$$R\{[\alpha^3\beta^2], [(\alpha\beta\gamma\delta)]\} = [\alpha^3\varepsilon^2, (\alpha\beta\gamma\delta)]$$
$$R\{[\alpha^2\beta^2\gamma^2], [(\alpha^2\beta)]\} = [(\alpha^2\delta), \alpha^2\beta^2\gamma^2]\cdot[(\alpha^2\beta), \alpha^2\beta^2\gamma^2]^2$$
$$R\{[\alpha^2\beta^2\gamma^2], [(\alpha\beta\gamma\delta)]\} = [\alpha^2\varepsilon^2\zeta^2, (\alpha\beta\gamma\delta)]$$
$$R\{[(\alpha^2\beta)], [(\alpha\beta\gamma\delta)]\} = [((\alpha\beta))]^{(n-3)(n-4)}[(\alpha^2\beta\gamma)]^2\cdot[(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha^2\varepsilon)].$$

Tabelle C.

Gewichte der 24 Invarianten.

1.	$[\alpha^5]$	$10(n-3)(n-4)$
2.	$[(\alpha^3)]$	$6(n-2)(n-3)$
3.	$[\alpha^4\beta^2]$	$16(n-3)(n-4)(n-5)$
4.	$[\alpha^3\beta^3]$	$9(n-3)(n-4)(n-5)$
5.	$[\alpha^4, (\alpha^2\beta)]$	$12(n-2)(n-3)(n-4)$
6.	$[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$	$14(n-2)(n-3)(n-4)$
7.	$[((\alpha\beta))]$	$(n-1)(n-2)(n-3)$
8.	$[\alpha^3\beta^2\gamma^2]$	$12(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$
9.	$[\alpha^4, \alpha^2\beta^2\gamma^2]$	$8(n-3)(n-4)(n-5)(3n-11)$
10.	$[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]$	$4(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$
11.	$[(\alpha^2\gamma), \alpha^3\beta^2]$	$20(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$
12.	$[(\alpha^2\beta\gamma)]$	$4(n-2)(n-3)^2(n-4)$
13.	$[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha^2\beta)]$	$24(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$
14.	$[\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2]$	$\frac{4}{3}(n-3)(n-4)(n-5)(n-5)(n-7)$
15.	$[\alpha^3\delta^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2]$	$8(n-3)(n-4)(n-5)(5n^2-38n+74)$
16.	$[(\alpha^2\delta), \alpha^2\beta^2\gamma^2]$	$16(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$
17.	$[\alpha^4, (\alpha\beta\gamma\delta)]$	$\frac{10}{3}(n-2)(n-3)^3(n-4)$
18.	$[(\alpha\beta\gamma\delta)^2]$	$(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$

19.	$[\alpha^2\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2]$	$4(n-3)(n-4)(n-5)(4n^3-52n^3+228n-345)$
20.	$[\alpha^3\varepsilon^2, (\alpha\beta\gamma\delta)]$	$\frac{16}{3}(n-2)(n-3)^3(n-4)^2$
21.	$[(\alpha^2\varepsilon), (\alpha\beta\gamma\delta)]$	$(2n-1)(n-2)(n-3)^2(n-4)(n-5)$
22.	$[(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)]$	$\frac{1}{12}(n-2)(n-3)^2(n-4)^2)(n-5)$
23.	$[\alpha^2\varepsilon^2\zeta^2, (\alpha\beta\gamma\delta)]$	$4(n-2)(n-3)^3(n-4)^2(n-5)$
24.	$[(\alpha\beta\gamma\delta),(\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1)]$	$\frac{1}{36}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(8n^3-41n^2+30n+111)$.

Man bemerkt, daß die an den Gewichtszahlen der früher berechneten zehn Invarianten gemachten Beobachtungen zum Theil auch für die neu hinzutretenden dreizehn Bildungen gültig bleiben, zum Theil aber auch verloren gehn.

Nach wie vor ist der Grad in n um die Einheit größer, als die Anzahl der jedesmal links stehenden, von einander verschiedenen Argumente. Dem Auftreten der linearen Factoren $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$, ... entspricht es, daß das bez. singuläre Ereigniß bei Curven von der Ordnung 1, 2, 3 ... noch nicht eintreten kann, während umgekehrt das Fehlen des Factors $n-1$ resp. $n-2$ ein Zeichen dafür ist, daß die Gerade resp. der Kegelschnit die gemeinte Singularität (in uneigentlichem Sinne) zuläßt.

Dagegen stößt man jetzt in einigen Fällen auch auf rationale Factoren von der Form $n-a$, wo a nicht mehr ganzzahlig ist, wie $n-\frac{11}{3}$ (No. 9) und $n-\frac{1}{2}$ (No. 21), weiterhin auf quadratische und cubische Factoren der Art (No. 15, 19, 24), die einer Zerspaltung in rationale Linearfactoren widerstehn. Endlich kann auch da, wo nur Factoren vom Typus $n-1$, $n-2$, $n-3$ ... eingehen, die Symmetrie nach der Mitte hin aufgehoben sein, wie bei No. 20, 23.

Wir gehen dazu über, nach Anleitung der letzten Mittheilung auch für die neu gewonnenen Zerlegungen die Vielfachheit der einzelnen Elementarfactoren unmittelbar aus dem Verhalten der Anfangsglieder der Singularitätenformen selbst zu erkennen. Indessen mag die Vorführung der Fälle, in denen der betr. Exponent die Einheit übersteigt, genügen.

Handelt es sich also z. B. um die Singularität $\alpha^4\beta^2$, so mache man die linken Seiten der Bedingungen, welche nothwendig und hinreichend sind, damit dieselbe in der canonischen Form $0^4\beta^2$ eintrete, mit einer beliebig kleinen Größe ε proportional, und entwickele die betheiligten Singularitätenformen nach aufsteigenden

Potenzen von α soweit, als die successiven Coefficienten den Factor ε (ein oder mehrmals) zulassen. So hat man hier:

$$[\alpha^4] = \varepsilon + \ldots; \; [\alpha^3\beta^2] = \varepsilon + a\varepsilon\alpha + \ldots; \; [\alpha^2\beta^2\gamma^2] = \varepsilon + b\varepsilon\alpha + \ldots$$

sodaß die Resultante der ersten und zweiten, wie der ersten und dritten Form, ferner die Discriminanten der beiden letzten Formen mit der ersten Potenz von ε vergleichbar werden, und allein die Resultante der beiden letzten Formen mit der zweiten Potenz von ε. Damit weiß man zugleich, daß der Elementarfactor $[\alpha^4\beta^2]$ überall nur einmal auftritt, ausgenommen die Zerlegung von $R\{[\alpha^3\beta^2], [\alpha^2\beta^2\gamma^2]\}$, wo er sich zum Quadrat erhebt.

Danach sollen die noch in Frage kommenden Vielfachheiten der Reihe nach kurz erledigt werden.

No. 8. $[\alpha^3\beta^2\gamma^2]$. Zunächst kommt, bei Verlegung von α nach der Stelle Null:

$$[\alpha^3\beta^2] = \varepsilon^2 + a\varepsilon\alpha + \ldots; \; [\alpha^2\beta^2\gamma^2] = \varepsilon + b\varepsilon a + \ldots$$

Somit steigt ε in der Discriminante der ersten, wie in der Resultante beider Formen bis zum zweiten Grade an. Dagegen ist für die Discriminante von $[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$ die erste Potenz von ε erst ein einzelner Beitrag. Die beiden weiteren Beiträge erzielt man, wenn man nunmehr β resp. γ zur Stelle Null macht. Dann wird:

$$[\alpha^2\beta^2\gamma^2] = \varepsilon^2 + \varepsilon c\beta + \ldots, \; [\alpha^2\beta^2\gamma^2] = \varepsilon^2 + \varepsilon d\gamma + \ldots$$

es muß indessen, wie eine genauere Untersuchung lehrt, ganz wie bei $n = 2$, beidemal die dritte Potenz von ε als Factor berücksichtigt werden. So entsteht durch Zusammenfassung die $1 + 3 + 3 = 7^{\text{te}}$ Potenz von $[\alpha^3\beta^2\gamma^2]$, wie die Tabelle B bestätigt.

No. 10. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]$. Jede der drei Stellen α, β, γ ist gleichberechtigt. Man hat etwa für $\alpha = 0$:

$$[\alpha^2\beta^2\gamma^2] = \varepsilon + a\varepsilon\alpha + \ldots$$

und die Discriminante wird also ε zur ersten, somit allgemein den Factor $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]$ zur $3 . 1 = 3^{\text{ten}}$ Potenz enthalten.

Dieselbe Betrachtung ist fast wörtlich für die Invariante No. 18: $[(\alpha\beta\gamma\delta)^2]$ zu wiederholen; ihre Vielfachheit in der Discriminante von $[(\alpha\beta\gamma\delta)]$ muß die $4 . 1 = 4$fache sein.

No. 12. $[(\alpha^2\beta\gamma)]$. Für $\alpha = 0$ sind die Entwickelungen:

$$[(\alpha^2\beta)] = \varepsilon^2 + a\varepsilon\alpha + \ldots; \; [\alpha\beta\gamma\delta)] = \varepsilon + b\varepsilon\alpha + \ldots,$$

und der Factor $[(\alpha^2\beta\gamma)]$ tritt in der That bei $D[(\alpha^2\beta)]$ und $R\{[(\alpha^2\beta)], [(\alpha\beta\gamma\delta)]\}$ doppelt, bei $D[\alpha\beta\gamma\delta)]$ nur einmal auf.

No. 14. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2]$.

$$[\alpha^2\beta^2\gamma^2] = \varepsilon^3 + a_1\varepsilon^2\alpha + a_2\varepsilon\alpha^2 + \dots$$

Die Discriminante wird mit ε^6 vergleichbar. Wegen der Gleichberechtigung der vier Argumente ist der Exponent von $[\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2]$ in der Zerlegung von $D[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$ gleich $4.6 = 24$.

Ganz analog gestaltet sich die Untersuchung von No. 22: $[(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)]$. Die Entwickelung von $[(\alpha\beta\gamma\delta)]$ beginnt mit ε^4, die Discriminante ist noch durch ε^{12} theilbar, also allgemein durch die $5.\ 12 = 60^{\text{te}}$ Potenz von $[(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)]$.

No. 19. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2]$.

$$[\alpha^2\beta^2\gamma^2] = \varepsilon^2 + a\varepsilon\alpha + \dots$$

Die Discriminante läßt ε, also auch die Invariante doppelt als Factor zu. Ganz analog für No. 24: $[(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1)]$.

Eine besondere Stellung nimmt der Elementarfactor No. 7: $[((\alpha\beta))]$ ein, insofern er zu Exponenten Veranlassung giebt, die von der Ordnung n der Curve abhängig sind. Es hat das darin seinen Grund, daß durch einen Doppelpunkt $((\alpha\beta))$ einer R_n^3 $\dfrac{(n-3)(n-4)}{2}$ Quadrisecanten $(\alpha\beta\gamma\delta)$ an dieselbe gehen. Es gilt:

$$[(\alpha^2\beta)] = \varepsilon + a\varepsilon\alpha + \dots;\ [(\alpha\beta\gamma\delta)] = \varepsilon^{\frac{1}{2}(n-3)(n-4)} + b\varepsilon^{\frac{1}{2}(n-3)(n-4)-1}.\alpha + \dots$$

Die Discriminante der ersten Form wird mit ε^1, die der zweiten mit $\varepsilon^{\frac{(n-3)(n-4)}{2}\cdot\frac{(n-3)(n-4)}{2}-1} = \varepsilon^{\frac{1}{4}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}$, endlich die Resultante beider mit $\varepsilon^{\frac{1}{2}(n-3)(n-4)}$ vergleichbar. Wegen der Gleichberechtigung von α und β erhöhen sich aber für den Elementarfactor $[((\alpha\beta))]$ selbst die angegebenen Exponenten auf das Doppelte.

Die bisher herangezogenen Methoden machen Verallgemeinerungen auf Curven R_n^d in Räumen von d Dimensionen ausführbar. (Vgl. die dritte Mittheilung). Es mögen hier noch zwei naheliegende und besonders interessante Fälle der Art eine Erwähnung finden, die Zerlegungen der Discriminanten $D[\alpha_1^2\alpha_2^2 \dots \alpha_d^2]$ und $D[(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2d-2})]$:

$$D[\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots\alpha_d^2] = [\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots\alpha_d^2, (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_d)]^d.[\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots\alpha_{d+1}^2]^{(d+1)d(d-1)}.[\alpha_1^3\alpha_2^2\ldots\alpha_d^2]^{3d-2}$$
$$+ [\alpha_1^4\alpha_2^2\ldots\alpha_{d-1}^2].[\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots\alpha_d^2, \alpha_1^2\beta_2^2\ldots\beta_d^2]^2.$$

$$D[(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2d-2})] = [(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2d-2})^2]^{2d-2}[(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2d-1})]^{(2d-1)(2d-2)(2d-3)}.$$
$$+ [(\alpha_1^2\alpha_2\ldots\alpha_{2d-3})].[(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2d-2}), (\alpha_1\beta_2\ldots\beta_{2d-2})]^2.$$

Lehrreich ist wiederum der Vergleich mit den untersten Fällen $d = 2$ und $d = 3$, die einige bemerkenswerthe Besonderheiten aufweisen.

Für $d = 2$ werden bei der ersten Zerlegung die Exponenten d, $(d+1)d(d-1)$, $3d-2$, 1 des ersten, zweiten, dritten und vierten Factors genau die früher abgeleiteten 2, 6, 4, 1.

Der letzte Factor: $[\alpha_1^2\alpha_2^2, \alpha_1^2\beta_2^2]^2$ dagegen ergiebt die Existenz einer Spitze (α_1^2), und liefert insofern den Bestandtheil $[(\alpha_1^2)]^{(2n-6)(2n-7)}$.

Für $d = 3$ entsteht aus der Zerlegung von $D[\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots\alpha_d^2]$ ohne Weiteres diejenige von $D[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$.

Die zweite Zerlegung ist bereits für $d = 3$ zu modificiren. Der letzte Factor spaltet sich nämlich in die beiden rationalen Theile $[((\alpha\beta))]^{\frac{1}{2}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}$ und $[(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1)]^2$, während er für $d = 2$ überhaupt noch nicht existiren kann. Dagegen verhalten sich die übrigen Factoren regulär.

Die hiermit geleisteten Zerfällungen der Discriminanten und Resultanten der fünf, für Raumcurven überhaupt in Betracht zu ziehenden Singularitätenformen bilden das Substrat für eine Untersuchung über die Realität der jeweils coincidirenden Singularitäten: in der That hängt dieselbe nach von H. Brill angegebenen Sätzen im Wesentlichen von den Exponenten der irreducibelen Factoren jener Formen, insbesondere von deren Gerade- resp. Ungeradesein, ab.

Clausthal, den 28. October 1890.

Zur Integration der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ für ebene Bereiche.

Von

O. Venske.

Vorgelegt in der Sitzung am 8. November 1890.

Ich werde im Folgenden einige für specielle ebene Bereiche zur Lösung der Randwertaufgabe der Gleichung

$$\Delta\Delta u = 0$$

führende Methoden auseinandersetzen.

Unter „Randwertaufgabe" verstehe ich folgende Aufgabe:

Es soll eine in einem berandeten Bereiche stetige Lösung obiger Differentialgleichung gefunden werden, welche auf dem Rande gegebene Werte $\bar{u}$ und $\frac{d\bar{u}}{dn}$ annimmt.

Eine Function, welche im Innern eines berandeten Bereiches mit Ausnahme eines Punktes, in welchem sie logarithmisch unendlich wird, der in Rede stehenden Differentialgleichung genügt, und welche auf dem Rande nebst der Ableitung nach der Normalen verschwindet, spielt in der Theorie der Differentialgleichung $\Delta\Delta u = 0$ eine ähnliche Rolle, wie die Green'sche Function in der Theorie des logarithmischen Potentials. Sie ermöglicht die Berechnung von Δu aus den Randwerten $\bar{u}$ und $\frac{d\bar{u}}{dn}$ durch bloße Quadratur[1]). Diese Function wird im Folgenden mit v bezeichnet und „zweite Green'sche Function" genannt.

1.

Lösung der Randwertaufgabe für den Kreis, den Kreisring und den Winkelraum.

Im Folgenden wird der Satz zu Grunde gelegt, daß sich jede Lösung der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ in die Form bringen läßt

$$u = U + r^2 V,$$

wo U und V logarithmische Potentiale bedeuten, und r der Radiusvector in einem Polarcoordinatensystem ist.

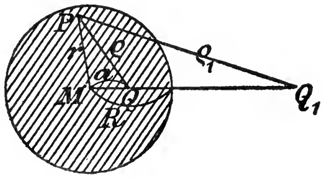
1) Vgl. Mathieu, Journal de Liouville 1869, pg. 385.

a) Lösung für den Kreis.

Entwickelt man U und V in Reihen, welche nach ganzen Potenzen von r fortschreiten, und macht den Ansatz

$$u = \sum_{i=0,1,2,\dots}^{\infty} \left\{(a_i r^i + a_i' r^{i+2}) \cos i\varphi + (b_i r^i + b_i' r^{i+2}) \sin i\varphi\right\},$$

so gelingt die Coefficientenbestimmung in der Weise, daß $\bar{u}$ und $\frac{d\bar{u}}{dn}$ auf der Kreisperipherie ($r = R$) gegebene Werte annehmen, mit Hülfe des Fourier'schen Satzes.



Die zweite Green'sche Function, deren Berechnung durch den obigen Ansatz ermöglicht ist, besitzt den Wert

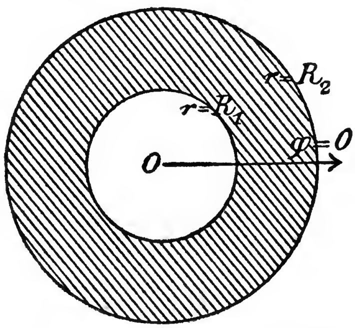
$$v = l\frac{\varrho R}{\varrho_1 a} + \left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right)\left(-\tfrac{1}{2} + \frac{dl\varrho_1}{dlr}\right).$$

In dieser Formel haben die Größen ϱ und ϱ_1 die Bedeutung der Abstände des Punktes $P = (r, \varphi)$ vom Pole Q der Function v und seinem Thomson'schen Bilde Q_1 bezüglich der Kreisperipherie.

b) Lösung für den Kreisring.

Wir nehmen für U und V Entwickelungen nach ansteigenden und absteigenden Potenzen von r und setzen

$$u = \sum_{i=0,1,2,\dots}^{\infty} \left\{\begin{array}{l}(a_i r^i + a_i' r^{i+2} + a_i'' r^{-i} + a_i''' r^{-i+2}) \cos i\varphi \\ + (b_i r^i + b_i' r^{i+2} + b_i'' r^{-i} + b_i''' r^{-i+2}) \sin i\varphi\end{array}\right\}.$$



Durch den Fourier'schen Satz lassen sich die Coefficienten so bestimmen, daß $\bar{u}$ und $\frac{d\bar{u}}{dn}$ auf den begrenzenden Kreisperipherieen gegebene Werte erhalten.

c) Lösung für den Winkelraum von der Oeffnung $\alpha\pi$.

Es werde die zu V conjugierte Function mit V_1 bezeichnet und folgende neue Benennung eingeführt:

$$r^2 V \cos\frac{2\varphi}{\alpha} - r^2 V_1 \sin\frac{2\varphi}{\alpha} = W.$$

Die Größen r und φ sind Polarcoordinaten in einem Systeme, dessen Anfangspunkt mit dem Scheitel, und dessen Axe mit der Halbierungslinie des gegebenen Winkels zusammenfällt. Infolge der Bedeutung, welche die Größen V und V_1 haben, ist W ein logarithmisches Potential, und die Randwertaufgabe kommt darauf hinaus, zwei logarithmische Potentiale U und W zu finden, welche die Eigenschaft haben, daß auf den Schenkeln des gegebenen Winkels die Größen

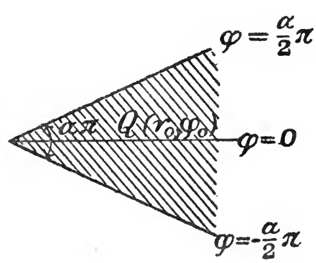
$$U - W, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{\partial W}{\partial \varphi} - \frac{2}{\alpha} W_1$$

gegebene Werte annehmen. Diese Aufgabe läßt sich durch den Ansatz

$$U = \int_0^\infty \left\{(a_\mu e^{\mu\varphi} + a'_\mu e^{-\mu\varphi}) \cos\mu l r + (b_\mu e^{\mu\varphi} + b'_\mu e^{-\mu\varphi}) \sin\mu l r\right\} d\mu$$

und einen ähnlichen für W lösen.

Die zweite Green'sche Function, deren Berechnung somit



möglich ist, besitzt, wenn α eine ganze Zahl ist, den Wert

$$v = 2\sin(\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha\pi)\left(\sin(\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha\pi)\frac{\partial l\left(r^{\frac{2}{\alpha}} + r_0^{\frac{2}{\alpha}} + 2r^{\frac{1}{\alpha}} r_0^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi + \varphi_0}{\alpha}\right)}{\partial l r}\right.$$

$$\left. + \cos(\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha\pi)\frac{\partial l\left(r^{\frac{2}{\alpha}} + r_0^{\frac{2}{\alpha}} + 2r^{\frac{1}{\alpha}} r_0^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi + \varphi_0}{\alpha}\right)}{\partial \varphi}\right)$$

$$+ l\,\frac{\left(r^{\frac{2}{\alpha}} + r_0^{\frac{2}{\alpha}} - 2r^{\frac{1}{\alpha}} r_0^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi - \varphi_0}{\alpha}\right)}{\left(r^{\frac{2}{\alpha}} + r_0^{\frac{2}{\alpha}} + 2r^{\frac{1}{\alpha}} r_0^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi + \varphi_0}{\alpha}\right)}.$$

Hierbei ist angenommen, daß der Pol Q der Function v im Punkte (r_0, φ_0) liegt.

2.

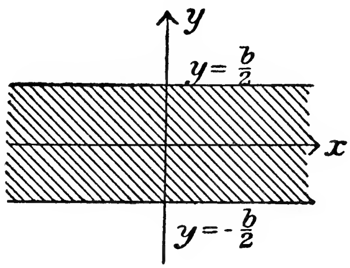
Lösung der Randwertaufgabe für den Parallelstreifen.

Es werde ein orthogonales Coordinatensystem zu Grunde gelegt.

Jede Function, welche der Differentialgleichung $\Delta\Delta u = 0$ genügt, läßt sich in die Form setzen

$$u = U + yV,$$

wo wiederum die Functionen U und V logarithmische Potentiale sind.



Macht man nun den Ansatz

$$U = \int_0^\infty \left\{ (a_\mu e^{\mu y} + a'_\mu e^{-\mu y}) \cos \mu x + (b_\mu e^{\mu y} + b'_\mu e^{-\mu y}) \sin \mu x \right\} d\mu$$

und einen ähnlichen für V, so stößt die Bestimmung der Functionen $a_\mu, \cdots, b'_\mu$ in der Weise, daß den Randbedingungen Genüge geleistet wird, auf keine Schwierigkeiten.

3.

Lösung der Randwertaufgabe für ein von zwei Radien und zwei concentrischen Kreisbogen begrenztes Kreisbogenrechteck.

Die beiden Kreisbogen mögen die Radien R_1 und R_2 besitzen. Ihr Mittelpunkt sei Anfangspunkt eines Systems von Polarcoordinaten (r, φ), dessen Axe mit den geradlinigen Begrenzungsstücken die Winkel $-\frac{1}{2}\alpha\pi$ und $+\frac{1}{2}\alpha\pi$ bildet.

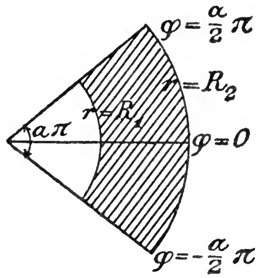
Setzt man

$$u_n = r^n V_n,$$

wobei V_n eine Function von φ allein bedeutet, und verlangt, daß

u eine Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta u = 0$$



sei, so muß V_n der Gleichung

$$\frac{d^4 V_n}{d\varphi^4} + (n^2 + (n-2)^2)\frac{d^2 V_n}{d\varphi^2} + n^2(n-2)^2 V_n \equiv$$

$$\frac{d^4 V_n}{d\varphi^4} + (2(n-1)^2 + 2)\frac{d^2 V_n}{d\varphi^2} + \left\{(n-1)^4 - 2(n-1)^2 + 1\right\} V_n = 0$$

genügen. Stellt man nun noch außerdem die Forderung, daß V_n im Allgemeinen von Null verschieden ist, für $\varphi = \pm\frac{1}{2}\alpha\pi$ aber die Bedingungen

$$V_n = \frac{\partial V_n}{\partial \varphi} = 0$$

erfüllt, so wird n auf eine discrete Mannigfaltigkeit von Werten beschränkt, und V_n ist bis auf einen constanten Factor bestimmt. Aus dem Ohm'schen Princip, angewandt auf einen unter dem Einfluß gewisser Energie vernichtender Kräfte schwingenden, an beiden Enden eingeklemmten Stab, ist zu schließen, daß sich eine beliebige Lösung u der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta u = 0,$$

welche für $\varphi = \pm\frac{1}{2}\alpha\pi$ nebst der Ableitung nach der Normalen verschwindet, in die Reihe

$$u = r\sum_n (a_n r^{n-1} + a'_n r^{-n+1}) V_n$$

entwickeln läßt. Die Coefficienten bestimmen sich aus den Randwerten

$$u_{r=R_1}, \quad \frac{d^2}{dlr^2}\left(\frac{1}{r}u\right)_{r=R_1},$$

$$u_{r=R_2}, \quad \frac{d^2}{dlr^2}\left(\frac{1}{r}u\right)_{r=R_2}$$

vermittels des Integralsatzes

$$\int_{-\frac{1}{2}\alpha\pi}^{+\frac{1}{2}\alpha\pi}\left[\{(n-1)^2+(n_1-1)^2-2\}V_n V_{n_1}-2\frac{\partial V_n}{\partial\varphi}\frac{\partial V_{n_1}}{\partial\varphi}\right]d\varphi=0,$$

$$(n \gtrless n_1)$$

$$2\int_{-\frac{1}{2}\alpha\pi}^{+\frac{1}{2}\alpha\pi}\left[\{(n-1)^2-1\}V_n^2-\left(\frac{\partial V_n}{\partial\varphi}\right)^2\right]d\varphi=\gamma^n,$$

wobei γ_n eine von Null verschiedene Größe ist. Nun läßt sich $\frac{u}{r}$ stets als Summe zweier Functionen darstellen, von denen unter der Voraussetzung $R_1 R_2 = 1$ die eine in Bezug auf den Einheitskreis symmetrisch, die andere antisymmetrisch ist. Für beide Functionen geschieht die Coefficientenbestimmung in gleicher Weise. Es ist daher genügend, wenn die Coefficientenbestimmung nur für Functionen der ersten Art durchgeführt wird. Diese Functionen besitzen die Entwickelung

$$u = r\sum_n a_n(r^{n-1}+r^{-n+1})V_n,$$

und man erhält

$$a_n=\frac{1}{\gamma_n(R_1^{n-1}+R_1^{-n+1})}\int_{-\frac{1}{2}\alpha\pi}^{+\frac{1}{2}\alpha\pi}\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{r}u\right)}{dlr^2}+((n-1)^2-2)\frac{u}{R_1}+2\frac{d^2u}{R_1 d\varphi^2}\right]_{r=R_1}V_n d\varphi.$$

Setzt man diesen Wert in die Entwickelung für $\frac{u}{r}$ ein, so ergiebt sich durch Differentiation

$$R_1\left(\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}u\right)\right)_{r=R_1}=$$

$$\int_{-\frac{1}{2}\alpha\pi}^{+\frac{1}{2}\alpha\pi}d\psi\sum_n(n-1)\frac{R_1^{n-1}-R_1^{-n+1}}{\gamma_n(R_1^{n-1}+R_1^{-n+1})}\left(((n-1)^2-2)\frac{u(R_1,\psi)}{R_1}+\frac{2}{R_1}\frac{d^2u(R_1,\psi)}{d\psi^2}\right)V_n(\varphi)V_n(\psi)$$

$$+\int_{-\frac{1}{2}\alpha\pi}^{+\frac{1}{2}\alpha\pi}d\psi\left(\frac{d^2\left(\frac{1}{r}u(r,\psi)\right)}{dlr^2}\right)_{r=R_1}\sum_n\frac{(n-1)}{\gamma_n}\frac{R_1^{n-1}-R_1^{-n+1}}{R_1^{n-1}+R_1^{-n+1}}V_n(\varphi)V_n(\psi).$$

Um aus dieser Gleichung

$$\left(\frac{d^2\left(\frac{1}{r}u\right)}{dlr^2}\right)_{r=R_1}$$

durch $u_{r=R_1}$ und $\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}u\right)_{r=R_1}$ ausgedrückt zu erhalten, setzen wir

$$R_1\left(\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}u\right)\right)_{r=R_1}$$

$$-\int_{-\frac{1}{2}\alpha\pi}^{+\frac{1}{2}\alpha\pi} d\psi \sum_n \frac{n-1}{\gamma_n}\frac{R_1^{n-1}-R_1^{-n+1}}{R_1^{n-1}+R_1^{-n+1}}\left(((n-1)^2-2)\frac{u(R_1,\psi)}{R_1}+\frac{2}{R_1}\left(\frac{d^2u(R_1,\psi)}{d\psi^2}\right)\right)V_n(\varphi)V_n(\psi)$$

$$= a_0\cos\frac{\varphi}{\alpha}+b_0\sin\frac{2\varphi}{\alpha}+c_0\cos\frac{3\varphi}{\alpha}+d_0\sin\frac{4\varphi}{\alpha}+\cdots,$$

$$\sum_n \frac{n-1}{\gamma_n}\frac{R_1^{n-1}-R_1^{-n+1}}{R_1^{n-1}+R_1^{-n+1}}V_n(\varphi)V_n(\psi) = \cos\frac{\varphi}{\alpha}\left(a_1\cos\frac{\psi}{\alpha}+a_2\sin\frac{2\psi}{\alpha}+a_3\cos\frac{3\psi}{\alpha}+\cdots\right)$$

$$+\sin\frac{2\varphi}{\alpha}\left(b_1\cos\frac{\psi}{\alpha}+b_2\sin\frac{2\psi}{\alpha}+b_3\cos\frac{3\psi}{\alpha}+\cdots\right)$$

$$+\cos\frac{3\varphi}{\alpha}\left(c_1\cos\frac{\psi}{\alpha}+c_2\sin\frac{2\psi}{\alpha}+c_3\cos\frac{3\psi}{\alpha}+\cdots\right)$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\int_{-\frac{1}{2}\alpha\pi}^{+\frac{1}{2}\alpha\pi}\left(\frac{d^2\left(\frac{1}{r}u(r,\psi)\right)}{dlr^2}\right)_{r=R_1}\sin i\frac{\frac{1}{2}i\alpha\pi-\psi}{\alpha}d\psi = \alpha_i \qquad (i=1,2,3,\cdots)$$

und gewinnen die Gleichungen

$$\begin{aligned}
a_0-a_1\alpha_1+a_2\alpha_2-a_3\alpha_3+\cdots &= 0,\\
b_0-b_1\alpha_1+b_2\alpha_2-b_3\alpha_3+\cdots &= 0,\\
c_0-c_1\alpha_1+c_2\alpha_2-c_3\alpha_3+\cdots &= 0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{aligned}$$

Aus denselben folgt bei Benutzung der Jacobi'schen Determinantenbezeichnung

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{a_0}{a_1}+\frac{(a_0b_1)(a_2)}{(a_1b_2)(a_1)}+\frac{(a_0b_1c_2)(a_2b_3)}{(a_1b_2c_3)(a_1b_2)}+\cdots,\\
\alpha_2 &= \frac{(a_0b_1)}{(a_1b_2)}+\frac{(a_0b_1c_2)(a_1b_3)}{(a_1b_2c_3)(a_1b_2)}+\frac{(a_0b_1c_2d_3)(a_1b_3c_4)}{(a_1b_2c_3d_4)(a_1b_2c_3)}+\cdots,\\
\alpha_3 &= \frac{(a_0b_1c_2)}{(a_1b_2c_3)}+\frac{(a_0b_1c_2d_3)(a_1b_2c_4)}{(a_1b_2c_3d_4)(a_1b_2c_3)}+\frac{(a_0b_1c_2d_3e_4)(a_1b_2c_4d_5)}{(a_1b_2c_3d_4e_5)(a_1b_2c_3d_4)}+\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Hat man die Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ berechnet, so findet man $\left(\frac{d^2\left(\frac{1}{r}u\right)}{dlr^2}\right)_{r=R_1}$

aus der Formel

$$\left(\frac{d^2\left(\frac{1}{r}u\right)}{dlr^2}\right)_{r=R_1} = \frac{2}{\alpha\pi}\sum_i \alpha_i \sin i\,\frac{\frac{1}{2}i\alpha\pi - \varphi}{\alpha}.$$

Durch das Vorhergehende ist die Bestimmung einer stetigen Function ermöglicht, welche der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta u = 0$$

genügt, für $\varphi = \pm\frac{1}{2}\alpha\pi$ nebst ihrer Ableitung nach der Normalen verschwindet und für $r = R_1, R_2$ sowohl selbst als auch bei Differentiation bezüglich der Normalen gegebene Werte annimmt.

Hierdurch ist aber der Weg gebahnt zur Herstellung der zweiten Green'schen Function für das Kreisbogenrechteck. Man bilde nämlich die zweite Green'sche Function für den Winkelraum von der Oeffnung $\alpha\pi$ und construiere auf die soeben auseinandergesetzte Weise eine stetige Function, welche der partiellen Differentialgleichung $\Delta\Delta = 0$ genügt und zu dieser Green'schen Function addiert eine Function erzeugt, die nebst ihrer Ableitung nach der Normalen auf den Begrenzungen des Kreisbogenrechtecks verschwindet. Diese letztere Function ist dann die zweite Green'sche Function für das Kreisbogenrechteck. Durch die Kenntnis derselben ist aber die Lösung der Randwertaufgabe vermittels Quadraturen ermöglicht.

Göttingen, August 1890.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September und Oktober 1890.

(Fortsetzung.)

Monographie der baltischen Bernsteinbäume v. H. Conwentz. Hrsg. v. d. Naturforschenden Gesellschaft zu Danzig. Danzig 1890.

Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Leipzig 1890.
- a. Berichte üb. d. Verhandlungen. Mathem.-phys. Classe. 1890. I.
- b. Abhandlungen der mathem.-phys. Classe. Bd. XVI. No. 2. (W. Pfeffer: I. Ueber die Aufnahme u. Ausgabe ungelöster Körper. II. Zur Kenntniss der Plasmahaut und der Vacuolen. . . .)

Catalog der Astronomischen Gesellschaft. 4. Stück. Zone + 55° bis + 65°. Beobachtet auf den Sternwarten Helsingfors u. Gotha. — 14. Stück. Zone + 1° bis + 5°. Beobachtet auf der Sternwarte Albany. Leipzig 1890.

Jahrbuch der k. k. Geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1890. XL. Bd. 1. u. 2. Heft. Wien 1890.

Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-naturwiss. Classe. 1890. I. Prag 1890.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag i. J. 1889. 50. Jahrg. Ebd. 1890.

Mittheilungen des Naturwiss. Vereines f. Steiermark. Jahrg. 1889 (d. g. Reihe 26. Heft.) Graz 1890.

Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau. Juli 1890. (2 Exempl.) Krakau 1890.

Jahres-Verwaltungs-Bericht der Akadem. Lesehalle an d. k. k. Franz-Josefs-Universität in Czernowitz. XXIX. u. XXX. Semester. Czernowitz 1890.

Ungarische Revue. IX. Jahrg. 1889. 4—10. Heft; X. Jahrg. 1890. 1—4. 7. 8. Heft. Budapest 1889/90.

Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Gesellschaft in Zürich. 35. Jahrg. 1. Heft. Zürich 1890.

Royal Society of London.
a. List of the fellows of the Society. Nov. 30. 1889.
b. Philosophical transactions f. the year 1889. Vol. 180 A. B. London 1890.

Memoirs of the R. Astronomical Society. Vol. XLIX. Part. II. 1887—1889. Ebd. 1890.

Proceedings of the scientific meetings of the Zoological Society of London f. the year 1890. Part II. March et April. London (1890).

Proceedings of the London Mathematical Society. (Vol. XXXI.) No. 381—387. (London).

Linnean Society of London.
a. List of the Linn. Soc. Jan. 1890. London 1890.
b. Transactions. 2. Ser. Zoology. Vol. V. Part 4. Ebd. 1890.
c. Proceedings May 1890. From Nov. 1887 to June 1888. Ebd. 1890.
d. Journal. Botany. Vol. XXV. No. 171. 172. Vol. XXVI. No. 174. Vol. XXVII. No. 181. 182. Ebd. 1889/90.
e. Journal. Zoology. Vol. XX. No. 122. 123. Vol. XXI. No. 133—135. Vol. XXIII. No. 141—144. Ebd. 1889/90.

Journal of the R. Microscop. Society. 1890. Part 4. (2. Exempl.) Part 5. London et Edinburgh.

Proceedings and transactions of the Liverpool Biological Society. Vol. IV. Session 1889/90. Liverpool 1890.

Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Liverpool. Vol. XLI. XLII. XLIII. 1886—1889. Ebd. 1887—1889.

Royal Society of Edinburgh.
a. Transactions. Vol. XXXIII. Part III. Vol. XXXV. Part I—IV. Ebd. 1888/90.
b. Proceedings. Vol. XV. (1887—88.) Vol. XVI. (1888—89.)

Scientific proceedings of the R. Dublin Society. Vol. VI. (N. S.) Part 7—9. Dublin 1889/90.

Nature. Vol. 42. No. 1083—1095. London 1890.

Records of the Geological Survey of India. Vol. XXIII. Part III. 1890. Calcutta.

Transactions of the R. Society of South Australia. Vol. XIII. Part I. Adelaide 1890.

Transactions of the R. Society of Victoria. Vol. I. Part II. Melbourne 1889.

Maiden, J. H.: Wattles and wattle-barks ... (Department of public instruction. Technical education Series No. 6.) Sidney 1890.

Kgl. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.
a. Jaarboek voor 1889. Amsterdam. s. a.
b. Verhandelingen. (Afd. Natuurkunde.) Deel XXVII. Ebd. 1890.
c. Verslagen en mededeelingen. Afd. Naturkunde. Derde Reeks. Deel 6. 7. Ebd. 1890.

d. Verslagen en mededeelingen. Afd. Letterkunde. Derde Reeks. Deel 6. Ebd. 1889.
e. Amor. Carmen elegiacum Rudolphi van Oppenraij ... in certamine Hoeufftiano praemio aureo ornatum. Ebd. 1890.

Tijdschrift voor nederlandsche Taal- en Letterkunde. 9. Deel. (N. Reeks. 1. Deel.) 3. Afl. Leiden 1890.

Verhandelingen rakende den natuurlijken en geopenbaarden Godsdienst uitg. door Teylers godsgeleerd Genootschap. N. Ser. 12. Deel. Haarlem 1890.

Bijdragen tot de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 5. Volgreeks. 5. Deel. 4. Afl. 'sGravenhage 1880.

Flora Batava v. J. Kops en F. W. van Eeden. 289 en 290. Aflev. Leiden. s. a.

Acta Universitatis Lundensis. — Lunds Universitets Års-Skrift. Tom. XXV. 1888/89. Theologi. — Medicin. — Philosophi, Språkvetenskap och Historia. — Mathematik och Naturvetenskap. Lund 1888/89.

Sveriges offentliga Bibliothek. Stockholm, Upsala, Lund, Göteborg. Accessions-Katalog utg. af E. W. Dahlgren. 4. 1889. Stockholm 1890.

Bugge, S.: Etruskisch und Armenisch. Sprachvergleichende Forschungen. 1. Reihe. Universitätsprogr. f. d. 1. Halbjahr 1890. Christiania.

Mémoires de l'Académie Impér. des sciences de St. Pétersbourg. VII. Sér. Tome XXXVII. No. 8—10. St. Petersbourg 1890.

Annalen des physikalischen Central-Observatoriums hrsg. von H. Wild. Jahrg. 1889. Theil 1. Ebd. 1890.

Fritsche, H.: On chronology and the construction of the calendar with special regard to the Chinese computation of time compared with the European. Ebd. 1886.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. Année 1890. No. 1. Moscou 1890.

Witterungs-Beobachtungen (des meteorolog. Observatoriums in Dorpat) vom Jahre 1881, 1882, 1883.

Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles 1890.
a. Bulletin. 60. Année, 3. Série, Tome 20. No. 7. 8.
b. Classe des lettres. Programme de concours pour 1891.

Annales de la Société géologique de Belgique. Tome XVII. 2. Livr. Liége 1890.

Atti del Museo civico di storia naturale di Trieste. VIII. (N. Ser. vol. II.) Trieste 1890.

R. Accademia dei Lincei.
a. Atti. Anno CCLXXXV. 1888. Serie quarta. Memorie della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. V. Roma 1888.
b. Atti. Anno CCLXXXVII. 1890. Serie quarta. Rendiconti. Vol. VI. 1° semestre, fasc. 11. 12. 2° semestre, fasc. 1—4. Roma 1890.

Atti della Società Toscana di scienze naturali. Processi verbali. Vol. VII. 4. maggio 1890.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XXV. Disp. 13ª. 14ª. 1889/90. Torino.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo IV. Anno 1890. Fasc. V. (Palermo.)

Atti e rendiconti della Accademia medico-chirurgica di Perugia. Vol. II. Fasc. II. Perugia 1890.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

25. März. **№ 2.** 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 7. März.

Voigt legt vor: „Beiträge zur Hydrodynamik. II. Reihe."

Klein legt von Herrn Prof. Franz Meyer an der Bergakademie in Clausthal vor: „Ueber Realitätseigenschaften von Raumcurven."

Schering legt von Herrn Dr. Heun in Berlin vor: „Die Schwingungsdauer des Gaussschen Bifilarpendels."

Beiträge zur Hydrodynamik. I.

Von

W. Voigt.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 7. Februar 1891.)

1. Pulsirende Kugeln oder Cylinder in einer unendlichen incompressibeln Flüssigkeit.

Die Bewegung einer unendlichen incompressibeln Flüssigkeit, welche dem Geschwindigkeitspotentiale

$$\varphi = \frac{A}{r} \cos \frac{2\pi t}{T}, \text{ worin } r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2, \quad 1)$$

entspricht, läßt sich bekanntlich durch eine pulsirende Kugel begrenzen. Denn man erhält aus φ zunächst

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{A}{r^2} \cos \frac{2\pi t}{T}, \quad 2)$$

und hieraus

$$r^3 = r_0^3 - \frac{3TA}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T},$$

worin r_0 den Werth von r zur Zeit $t = 0$ bezeichnet. Ist hierin TA klein neben r_0^3, so giebt dies auch

$$3)\qquad r = r_0 - \frac{TA}{2\pi r_0^2} \sin \frac{2\pi t}{T};$$

man kann also die obige Bewegung als hervorgebracht ansehen durch die abwechselnde Dilatation und Compression einer Kugel, deren Mittelpunkt in x', y', z' verharrt und deren Radius ϱ nach dem Gesetz

$$3')\qquad \varrho = R - a \sin \frac{2\pi t}{T}$$

variirt, welche Bewegung wir als „Pulsation" bezeichnen.

Es findet nun der merkwürdige Umstand statt, daß eine Summe von $(n+1)$ Gliedern der obigen Form (1), auf $(n+1)$ verschiedene Punkte $p_h(x_h, y_h, z_h)$ bezogen, ein Geschwindigkeitspotential ergiebt, welches eine Bewegung darstellt, die sich durch $(n+1)$ isochron pulsirende Kugeln von bestimmter Größenordnung begrenzen läßt; aber diese Kugeln haben ihre, übrigens ruhenden, Mittelpunkte nicht an den Stellen x_h, y_h, z_h sondern an anderen Orten.

Dieser Umstand ermöglicht eine sehr einfache Bestimmung der durch ein System pulsirender Kugeln erregten Bewegung der Flüssigkeit und speciell der in Folge dieser Bewegung eintretenden Wechselwirkung zwischen den einzelnen Kugeln, welche zuerst auf einem viel umständlicheren Wege von Bjerknes[1]) untersucht worden ist.

Für diese letztere Anwendung ist es bequem, in der Bezeichnung einen der $(n+1)$ Punkten $p_h(x_h, y_h, z_h)$, etwa $p_0(x_0, y_0, z_0)$, von den andern auszusondern, die übrigen in eine Summe, in Bezug auf h von 1 bis n zu nehmen, zusammenzufassen.

Wir machen demgemäß den Ansatz

$$4)\qquad \varphi = \left(\frac{A}{r} + \sum \frac{A_h}{r_h}\right) \cos \frac{2\pi t}{T},$$

wo nun ist

$$r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2,$$
$$r_h^2 = (x-x_h)^2 + (y-y_h)^2 + (z-z_h)^2.$$

---

1) Bjerknes, Gött. Nachr. 1876, 245; s. auch Basset, Hydrodynamik, Cambridge 1888, I, p. 248.

Zu dem Punkt p_0 wählen wir einen Nachbarpunkt p'_0, der um die verfügbare Strecke δ in einer verfügbaren Richtung von p_0 entfernt liegt. Die Entfernung von p'_0 nach $p(x, y, z)$ sei mit ϱ bezeichnet, der Winkel zwischen ϱ und δ — beide Strecken von p'_0 hinweg positiv gerechnet — mit ψ; dann ist

$$r^2 = \varrho^2 + \delta^2 - 2\varrho\delta\cos\psi.$$

Wird ferner die Entfernung von p'_0 nach p_h mit E_h, der Winkel zwischen E_h und ϱ mit ψ_h bezeichnet, so ist

$$r_h^2 = E_h^2 + \varrho^2 - 2E_h\varrho\cos\psi_h.$$

Wir wenden nun die Formel (4) an auf ein Bereich in der Nähe des Punktes p'_0, welches dadurch definirt ist, daß ϱ klein neben E_h, aber noch groß gegen δ sein soll, beides von einer sogleich zu bestimmenden Ordnung. Dann kann man φ entwickeln und schreiben

$$\varphi = \left[A\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{\delta\cos\psi}{\varrho^2} \pm \ldots\right) + \sum A_h\left(\frac{1}{E_h} + \frac{\varrho\cos\psi_h}{E_h^2} \pm \ldots\right)\right]\cos\frac{2\pi t}{T}. \quad 5)$$

Die Geschwindigkeit in der Richtung von ϱ folgt hieraus

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = \left[-A\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{2\delta\cos\psi}{\varrho^3} \pm \ldots\right) + \sum A_h\left(\frac{\cos\psi_h}{E_h^2} \pm \ldots\right)\right]\cos\frac{2\pi t}{T}. \quad 6)$$

Man kann für einen Werth $\bar{\varrho}$ von ϱ diese Geschwindigkeit bis auf Glieder von der Ordnung $\bar{\varrho}^3/E_h^3$ und $\delta^2/\bar{\varrho}^2$ von der Richtung von ϱ unabhängig machen, wenn man über die Richtung und Größe von δ so verfügt, daß

$$\frac{2A\delta\cos\psi}{\bar{\varrho}^3} = \sum A_h \frac{\cos\psi_h}{E_h^2}$$

wird. Bezeichnet man die Richtungscosinus von $\bar{\varrho}$ mit α, β, γ, die von E_h mit $\alpha_h, \beta_h, \gamma_h$, die Projectionen von δ mit ξ, η, ζ, so zerfällt die letzte Gleichung, da beiderseits die Factoren von α, β, γ für sich gleich sein müssen, in die drei:

$$\frac{2A\xi}{\bar{\varrho}^3} = \sum\frac{A_h\alpha_h}{E_h^2}, \quad \frac{2A\eta}{\bar{\varrho}^3} = \sum\frac{A_h\beta_h}{E_h^2}, \quad \frac{2A\zeta}{\bar{\varrho}^3} = \sum\frac{A_h\gamma_h}{E_h^2}, \quad 7)$$

und es wird zugleich, falls man $\bar{\varrho}^3$ neben E_h^3 vernachlässigen kann,

$$\frac{d\bar{\varrho}}{dt} = -\frac{A}{\bar{\varrho}^2}\cos\frac{2\pi t}{T}.$$

Diese Formel verglichen mit (2) zeigt, daß man die durch (4) gegebene Bewegung in der Nähe von p_0 begrenzen kann durch eine Kugel um den festen Punkt p_0' von einem Radius $\bar{\varrho}$ gegeben durch

$$\bar{\varrho}^3 = R^3 - \frac{3TA}{2\pi} \sin\frac{2\pi t}{T},$$

falls nur A so klein ist, daß innerhalb der festgesetzten Annäherung in den Gleichungen (7) $\bar{\varrho}$ als constant anzusehen ist. Dies findet jedenfalls statt, wenn $3TA/2\pi R^3$ von der Ordnung von δ/R ist, und in diesem Falle ist zugleich

$$8)\qquad \bar{\varrho} = R - a\sin\frac{2\pi t}{T},$$

worin $a = AT/2\pi R^2$ die Amplitude der Pulsation bezeichnet.

Da nun alle Punkte p_h dem Punkte p_0 völlig gleichwerthig sind, so ist die obige Entwickelung für alle anwendbar, und man kann zu jedem p_h einen Nachbarpunkt p_h' angeben, um den sich eine Kugel von wechselndem Radius

$$8')\qquad \varrho_h = R_h - a_h \sin\frac{2\pi t}{T},$$

construiren läßt, welche die Flüssigkeit in jenem Bereich begrenzt, wobei wieder die Amplitude der Pulsation $a_h = A_h T/2\pi R_h^2$ ist.

Den Ort der p_h' bestimmen dabei Formeln, welche den drei (7) analog sind; in ihnen kann man den Entfernungen E_h, welche zunächst den Abstand der Punkte p_h von p_0' bezeichneten, innerhalb der früheren Genauigkeitsgrenze die Bedeutung der Abstände der p_h von p_0 selbst beilegen, sodaß nunmehr auf den rechten Seiten der Gleichungen (7) nur direct gegebene Größen stehen.

Um die Kräfte zu bestimmen, welche die Kugel um p_0' seitens aller übrigen erleidet, hat man von der Formel für den Druck $\bar{p}$ gegen dieselbe, nämlich

$$9)\qquad \bar{p} = \varepsilon\left(C - \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial t}} - \frac{\overline{V^2}}{2}\right)$$

auszugehen und zu bilden:

$$X = \int \bar{p}\cos(n_i, x)\,do, \quad Y = \int \bar{p}\cos(n_i, y)\,do, \quad Z = \int \bar{p}\cos(n_i, z)\,do$$
$$= -\int \bar{p}\,\alpha\,do, \qquad\quad = -\int \bar{p}\,\beta\,do, \qquad\quad = -\int \bar{p}\,\gamma\,do.$$

Dabei ist

$$V^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2,$$

und nach (5) in der Nähe der Kugel um p'_0, deren Centrum jetzt zum Coordinatenanfang gewählt werden mag,

$$\varphi = \left[A\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{\xi x+\eta y+\zeta z}{\varrho^3}\right)+\sum A_h\left(\frac{1}{E_h}+\frac{x\alpha_h+y\beta_h+z\gamma_h}{E_h^2}\right)\right]\cos\frac{2\pi t}{T}; \quad 11)$$

hieraus folgt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \left[A\left(-\frac{(x-\xi)}{\varrho^3}-\frac{3x(\xi x+\eta y+\zeta z)}{\varrho^5}\right)+\sum\frac{A_h\alpha_h}{E_h^2}\right]\cos\frac{2\pi t}{T},$$

und bei Beschränkung auf die festgesetzte Annäherung

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 = \left[\frac{A^2x^2}{\varrho^6}-\frac{2A^2x}{\varrho^3}\left(\frac{\xi}{\varrho^3}-\frac{3x(\xi x+\eta y+\zeta z)}{\varrho^5}\right)-\frac{2Ax}{\varrho^3}\sum\frac{A_h\alpha_h}{E_h^2}\right]\cos^2\frac{2\pi t}{T},$$

so daß schließlich wird

$$V^2 = \left[\frac{A^2}{\varrho^4}+\frac{4A^2}{\varrho^6}(\xi x+\eta y+\zeta z)-\frac{2A}{\varrho^3}\sum\frac{A_h(\alpha_h x+\beta_h y+\gamma_h z)}{E_h^2}\right]\cos^2\frac{2\pi t}{T}. \quad 12)$$

Ferner ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{2\pi}{T}\left[A\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{\xi x+\eta y+\zeta z}{\varrho^3}\right)+\sum A_h\left(\frac{1}{E_h}+\frac{x\alpha_h+y\beta_h+z\gamma_h}{E_h^2}\right)\right]\sin\frac{2\pi t}{T}. \quad 12')$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Integrale für X, Y, Z ein, so erhält man für $\varrho = \bar\varrho$, da $\int\alpha^2 do = \int\beta^2 do = \int\gamma^2 do = 4\pi\bar\varrho^2/3$ ist,

$$X = -\left\{\frac{2\pi}{T}\left(A\xi+\bar\varrho^3\sum\frac{A_h\alpha_h}{E_h^2}\right)\sin\frac{2\pi t}{T}-\left(\frac{2A^2\xi}{\bar\varrho^3}-A\sum\frac{A_h\alpha_h}{E_h^2}\right)\cos^2\frac{2\pi t}{T}\right\}\frac{4\pi\varepsilon}{3}, \quad 13)$$

und ebenso die übrigen.

Nun setzen wir

$$\bar\varrho = R - a\sin\frac{2\pi t}{T},$$

entwickeln X nach Potenzen von a und bilden den Mittelwerth Ξ des Resultates für die Zeit T einer Periode; dabei verschwindet nach (7) Alles, was von dem letzten Glied herrührt, und es bleibt schließlich in der früher benutzten Annäherung:

$$\Xi = \frac{4\pi^2\varepsilon R^2 a}{T}\sum\frac{A_h\alpha_h}{E_h^2}.$$

Hierin benutzen wir endlich, daß die Amplitude a_h der Pulsation für die Kugel um p'_h gegeben ist durch $A_h = 2\pi R_h^2 a_h/T$, und erhalten so

$$14) \qquad \Xi = \frac{8\pi^3 \varepsilon R^2 a}{T^2} \sum \frac{R_h^2 a_h \alpha_h}{E_h^2}, \text{ ebenso } H \text{ und } Z.$$

Diese Formeln sagen aus, daß zwischen je zwei isochron pulsirenden Kugeln eine Kraft parallel der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte wirkt, proportional mit den Quadraten der Radien, proportional mit den Amplituden, indirect proportional dem Quadrat der Pulsationsdauer und dem Quadrat der Entfernung der Centra von einander. Die Kraft ist eine anziehende zwischen Kugeln, die mit gleicher Phase, eine abstoßende zwischen solchen, die mit um $T/2$ verschiedener Phase schwingen; denn im ersteren Falle haben die A_h oder a_h für beide gleiches, im letzteren entgegengesetztes Vorzeichen.

Daß Herr Riecke[1]) scheinbar andere Resultate erhalten hat, rührt davon her, daß die von ihm betrachteten bewegten Kugeln außer einer Aenderung ihrer Radien auch eine Verschiebung ihrer Mittelpunkte erfuhren, die Bewegung also nicht eine reine Pulsation war.

Die vorstehende Betrachtung läßt sich leicht auf den Fall ausdehnen, daß die gegebenen Kugeln nicht mit gleicher Phase pulsiren, wenn nur die Pulsationsdauer allen gemeinsam bleibt.

Setzt man nämlich

$$15) \qquad \varphi = \frac{A}{r} \cos \frac{2\pi(t - t_0)}{T} + \sum \frac{A_h}{r_h} \cos \frac{2\pi(t - t_h)}{T},$$

was identisch ist mit

$$\varphi = \left(\frac{A'}{r} + \sum \frac{A_h'}{r}\right) \cos \frac{2\pi t}{T} + \left(\frac{A''}{r} + \sum \frac{A_h''}{r_h}\right) \sin \frac{2\pi t}{T},$$

falls

$$A_h \cos \frac{2\pi t_h}{T} = A_h', \quad A_h \sin \frac{2\pi t_h}{T} = A_h''$$

gesetzt wird, so lassen sich die beiden Theile für sich genau so behandeln, wie oben der Ansatz (4). Allerdings lassen sich die Gleichungen (7) nicht für beide Theile durch dieselben Werthe ξ, η, ζ befriedigen, aber da sich ξ/ϱ, η/ϱ, ζ/ϱ selbst von der Ordnung ϱ^2/E_h^2 ergeben, bleibt die dadurch entstehende Ungenauigkeit innerhalb des Bereiches der oben vernachlässigten Größen.

Bei der Bestimmung der Kräfte X, Y, Z ist zu beachten, daß in dem Werth (9) des Druckes p der ganze Ausdruck V^2 auch jetzt keinen Antheil zu den Resultaten liefert, hingegen in $\partial\varphi/\partial t$ die

1) E. Riecke, Gött. Nachr. 1888, No. 13 p. 347.

mit A'_h und A''_h resp. a'_h und a''_h proportionalen Glieder sich einfach summiren. Da nun

$$a'a'_h + a''a''_h = a\,a_h \cos\frac{2\pi(t_h - t_0)}{T}$$

ist, so gewinnt man für die Einwirkungen, welche die Kugel vom Radius R von allen übrigen erfährt, sogleich die allgemeinen Werthe:

$$\begin{aligned}
\Xi &= \frac{8\pi^3 \varepsilon R^2 a}{T} \sum \frac{R_h^2 a_h \alpha_h}{E_h^2} \cos\frac{2\pi(t_h - t_0)}{T}, \\
H &= \frac{8\pi^3 \varepsilon R^2 a}{T} \sum \frac{R_h^2 a_h \beta_h}{E_h^2} \cos\frac{2\pi(t_h - t_0)}{T}, \\
Z &= \frac{8\pi^3 \varepsilon R^2 a}{T} \sum \frac{R_h^2 a_h \gamma_h}{E_h^2} \cos\frac{2\pi(t_h - t_0)}{T}.
\end{aligned} \qquad 16)$$

Zu den Ausdrücken (14) treten also unter den bez. Summen die Cosinus der Phasendifferenzen; die a_h sind in (16) sämmtlich als absolute Größen zu betrachten. —

Genau in derselben Weise führt sich die Bestimmung der Bewegung durch, welche in einer unendlichen incompressibeln Flüssigkeit durch ein System isochron pulsirender Cylinder mit parallelen Axen erregt wird.

Die Lösung des Problemes wird, wenn nur ein Cylinder vorhanden ist, geliefert durch

$$\varphi = A\,l(e)\cos\frac{2\pi t}{T}, \text{ worin } e^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 \text{ ist;} \qquad 17)$$

daraus folgt

$$\frac{de}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial e} = \frac{A}{e}\cos\frac{2\pi t}{T}, \qquad 18)$$

und daher

$$e^2 = e_0^2 + \frac{AT}{\pi}\sin\frac{2\pi t}{T},$$

oder angenähert bei kleinem A

$$e = e_0 + \frac{AT}{2\pi e_0}\sin\frac{2\pi t}{T}. \qquad 18')$$

Für $(n+1)$ isochron pulsirende Cylinder ist der Ansatz zu machen

$$\varphi = (A\,l(e) + \sum A_h\,l(e_h))\cos\frac{2\pi t}{T}, \qquad 19)$$

worin $e^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$, $e_h^2 = (x-x_h)^2 + (y-y_h)^2$ ist. Zu dem Punkt $p_0(x_0, y_0)$ werde wieder ein Nachbarpunkt $p'_0((x_0-\xi), (y_0-\eta))$ im Abstand δ gewählt und die Entfernung von p'_0 nach $p(x, y)$ mit

ϱ, die nach $p_h(x_h, y_h)$ mit E_h bezeichnet; die Winkel von ϱ und E_h mit δ — alle drei Richtungen von p'_0 hinweg positiv gerechnet — seien wieder ψ und ψ_h, es gelte also

$$e^2 = \varrho^2 + \delta^2 - 2\varrho\delta\cos\psi, \quad e_h^2 = E_h^2 + \varrho^2 - 2E_h\varrho\cos\psi_h.$$

Für Entfernungen ϱ, welche klein gegen die E_h, aber groß gegen δ sind, läßt sich φ schreiben

$$20)\quad \varphi = \left[A\left(l(\varrho) - \frac{2\delta\cos\psi}{\varrho} \pm ..\right) + \sum A_h\left(l(E_h) - \frac{\varrho\cos\psi_h}{E_h} \pm \ldots\right)\right]\cos\frac{2\pi t}{T},$$

und daraus bilden

$$21)\quad \frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = \left[A\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{2\delta\cos\psi}{\varrho^2} \pm ..\right) - \sum A_h\left(\frac{\cos\psi_h}{E_h} \pm \ldots\right)\right]\cos\frac{2\pi t}{T}.$$

$d\varrho/dt$ wird für einen bestimmten Werth $\bar{\varrho}$ von ϱ bis auf Glieder von der Ordnung ϱ^2/E_h^2 und δ^2/ϱ^2 von der Richtung unabhängig, wenn

$$\frac{2A\delta\cos\psi}{\bar{\varrho}^2} = \sum\frac{A_h\cos\psi_h}{E_h}$$

ist, d. h., falls α, β wieder die Richtungscosinus von ϱ, und α_h, β_h diejenigen von E_h sind, wenn zur Bestimmung der Richtung und Größe von δ die Gleichungen gelten:

$$22)\qquad \frac{2A\xi}{\bar{\varrho}^2} = \sum\frac{A_h\alpha_h}{E_h}, \quad \frac{2A\eta}{\bar{\varrho}^2} = \sum\frac{A_h\beta_h}{E_h}.$$

Zugleich wird, wenn man $\bar{\varrho}^2$ neben E_h^2 vernachlässigen kann,

$$\frac{d\bar{\varrho}}{dt} = \frac{A}{\bar{\varrho}}\cos\frac{2\pi t}{T},$$

woraus zu folgern ist:

$$23)\qquad \bar{\varrho} = R + \frac{AT}{2\pi R}\sin\frac{2\pi t}{T};$$

damit die Gleichungen (22) bei variabelem $\bar{\varrho}$ innerhalb der gestellten Genauigkeitsgrenze erfüllt sind, muß $AT/2\pi R^2$ von derselben Größenordnung sein wie δ/R. Die Flüssigkeit ist also in der Umgebung von p_0 durch einen Cylinder vom Radius $\bar{\varrho}$ um p'_0 zu begrenzen; dasselbe gilt für die Umgebung eines jeden andern Punktes p_h, und es wird für die bezüglichen Cylinder allgemein

$$\bar{\varrho}_h = R_h + a_h\sin\frac{2\pi t}{T}$$

sein, wobei $\qquad a_h = A_h T/2\pi R_h$ ist.

Zur Bestimmung der Druckcomponenten, welche die Längeneinheit des Cylinders um p_0' erfährt, sind die Gleichungen (9) und (10) zu benutzen. Dabei ist zu setzen, falls man den Coordinatenanfang nach p_0' legt:

$$\varphi = \left[A\left(l\varrho - \frac{2(x\xi + y\eta)}{\varrho^2}\right) + \sum A_h\left(lE_h - \frac{x\alpha_h + y\beta_h}{E_h}\right)\right]\cos\frac{2\pi t}{T},$$

woraus folgt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \left[A\left(\frac{x-2\xi}{\varrho^2} + \frac{4x(x\xi + y\eta)}{\varrho^4}\right) - \sum\frac{A_h\alpha_h}{E_h}\right]\cos\frac{2\pi t}{T},$$

also

$$V^2 = \left[\frac{A^2}{\varrho^2} + \frac{4A^2(x\xi + y\eta)}{\varrho^4} - \frac{2A}{\varrho^2}\sum\frac{A_h(\alpha_h x + \beta_h y)}{E_h}\right]\cos^2\frac{2\pi t}{T}; \quad 24)$$

ebenso ergiebt sich

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{2\pi}{T}\left[A\left(l\varrho - \frac{2(x\xi+y\eta)}{\varrho^2}\right) + \sum A_h\left(lE_h - \frac{x\alpha_h + y\beta_h}{E_h}\right)\right]\sin\frac{2\pi t}{T}. \quad 24')$$

Hieraus folgt, da $\int\alpha^2 ds = \int\beta^2 ds = \pi\varrho$ ist,

$$X = \frac{2\pi^2\varepsilon}{T}\left[2A\xi + \bar{\varrho}^2\sum\frac{A_h\alpha_h}{E_h}\right]\sin\frac{2\pi t}{T} + \pi\varepsilon\left[\frac{2A^2\xi}{\bar{\varrho}^2} - A\sum\frac{A_h\alpha_h}{E_h}\right]\cos^2\frac{2\pi t}{T}. \quad 25)$$

Darin ist zu setzen

$$\bar{\varrho} = R + a\sin\frac{2\pi t}{T},$$

X nach Potenzen von a zu entwickelen und der Mittelwerth über die Dauer einer Periode zu bilden. Man erhält so

$$\Xi = \frac{2\pi^2\varepsilon Ra}{T}\sum\frac{A_h\alpha_h}{E_h},$$

oder wenn man berücksichtigt, daß $A_h = 2\pi R_h a_h/T$ ist

$$\Xi = \frac{4\pi^3\varepsilon Ra}{T^2}\sum\frac{R_h a_h \alpha_h}{E_h}, \quad 26)$$

ebenso H und Z; das Resultat ist dem in den Formeln (16) gegebenen vollkommen analog, nur ist die Oberfläche der Kugeln mit der Oberfläche der Länge Eins der Cylinder vertauscht, und tritt die Attraction indirect proportional der Entfernung an Stelle derjenigen, welche das Newton'sche Gesetz befolgt.

Die Ausdehnung dieser Resultate auf Cylinder, die in verschiedener Phase pulsiren, geschieht ebenso, wie oben bei Kugeln gezeigt ist. Für φ ist der Ansatz zu machen

$$27)\quad \varphi = (A'le + \sum A'_h le_h)\cos\frac{2\pi t}{T} + (A''le + \sum A''_h le_h)\sin\frac{2\pi t}{T},$$

worin

$$A_h \cos\frac{2\pi t_h}{T} = A'_h, \quad A_h \sin\frac{2\pi t_h}{T} = A''_h$$

gesetzt ist; beide Theile von φ lassen sich behandeln wie der Ansatz (17), und das Resultat für die mittleren Kräfte, welche der Cylinder vom Radius R seitens aller übrigen erleidet, lautet

$$28)\quad \Xi = \frac{4\pi^3 \varepsilon Ra}{T^2} \sum \frac{R_h a_h \alpha_h}{E_h} \cos\frac{2\pi(t_h - t_0)}{T},$$

ebenso für die H- und Z-Componente.

Ganz ähnlich wie vorstehend die Pulsation, läßt sich auch die Oscillation von Kugeln oder Cylindern in einer unendlichen incompressibeln Flüssigkeit behandeln; die oben benutzte Methode bietet hier aber nicht so bedeutende Vortheile gegenüber der von Kirchhoff[1]) bei diesem Problem angewandten, als daß sich ihre Auseinandersetzung lohnte.

2. Stehende Wellen in einem Strome als Beispiel für die Kirchhoff'sche Theorie der Flüssigkeitsstrahlen.

Nach Kirchhoff[2]) erhält man bekanntlich für incompressible Flüssigkeiten, die der Einwirkung äußerer Kräfte nicht unterliegen, ebene Potentialbewegungen, welche durch freie Oberflächen begrenzt werden können, in folgender Weise.

Sei gesetzt $z = x + iy$, und sei $\omega = \varphi + i\psi$, worin φ das Geschwindigkeitspotential, ψ die Strömungsfunction bezeichnet, eine Function von z, dann hat

$$1)\quad \frac{dz}{d\omega} = \zeta = \xi + i\eta$$

die Eigenschaft, daß

$$2)\quad \xi = \frac{u}{V^2},\ \eta = \frac{v}{V^2},\ \text{also}\ \frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg}(V, x),\ \xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{V^2}$$

1) Kirchhoff, Mechanik, Leipzig 1876, p. 228.
2) Kirchhoff, Mechanik, p. 290.

ist. Wird nun eine Relation

$$\omega = f(\zeta) \text{ oder } \zeta = F(\omega)$$

aufgestellt, welche eine der Abscissenaxe in der ω-Ebene parallele Gerade $\psi = C$ in der ζ-Ebene als ein Stück eines Kreises $\xi^2 + \eta^2 = \varrho^2 = c^2$ um den Coordinatenanfang abbildet, so ist die durch

$$z = \int \zeta d\omega = \int F(\omega) d\omega \tag{3)}$$

gegebene Function φ von x und y das Geschwindigkeitspotential einer Bewegung, die längs der Strom-Curve $\psi = C$ eine freie Grenze haben kann; denn längs dieser Curve ist V constant und dies ist, wenn Kräfte auf die Flüssigkeit nicht wirken, die bekannte Bedingung dafür, daß in ihr der Druck constant ist.

Soll die Flüssigkeit strömen und dabei von einer wellenartig periodisch sich hebenden und senkenden Oberfläche begrenzt sein, deren Berge und Thäler wir der Bequemlichkeit halber in je einer Horizontalen liegend denken wollen, so muß die Beziehung $\zeta = F(\omega)$ einen Bogen des Kreises $\varrho = c$ um den Anfangspunkt der ζ-Ebene, welcher symmetrisch zur ξ-Axe liegt, in der Weise auf eine Curve $\psi = C$ der ω-Ebene abbilden, daß dem unendlich oft wiederholten Umlaufen des Kreisbogens die Durchmessung der ganzen Curve $\psi = C$ von $\varphi = -\infty$ bis $\varphi = +\infty$ entspricht. Dieser Kreisbogen bildet dann in der ζ-Ebene die eine Grenze der Flüssigkeit; eine zweite kann in der z-Ebene nur von einer andern Stromcurve $\psi = C'$ gebildet werden, und diese muß sich nothwendig in der ζ-Ebene als eine geschlossene Curve darstellen, welche den Kreisbogen völlig umschließt.

Bedenkt man die Beziehungen, welche durch die Gleichungen (2) zwischen den Coordinaten eines Punktes der ζ-Ebene und der Größe und Richtung der Geschwindigkeit an der dem Punkt ζ entsprechenden Stelle der z-Ebene gegeben sind, so erkennt man leicht Folgendes.

Sollen innerhalb der Flüssigkeit keine Quellen und Senken liegen, in denen die Geschwindigkeit unendlich wird, d. h. soll in der ζ-Ebene das von der zweiten Curve umschlossene Gebiet den Punkt $\zeta = 0$ nicht enthalten, so muß in der z-Ebene die zweite Grenze selbst eine wellenartige Gestalt haben; und zwar muß ihre stärkste Steigung stets steiler sein als diejenige der freien Oberfläche. Die Wellen kommen dann dadurch zu Stande, daß der Strom über einen unebenen Boden hinfließt, und der auf die freie Oberfläche wirkende Druck die Flüssigkeit verhindert, jenen Boden ganz zu verlassen. Von dieser Art sind die Wellchen, die in fließendem Wasser durch Unebenheiten des Grundes entstehen und die weder Ort noch Höhe mit der Zeit wechseln, vorausgesetzt nur, daß ihre Höhe so gering ist, daß in der strengen Bedingung für die freie Oberfläche

$$\frac{V^2}{2} + gy + \frac{p}{\varepsilon} = \text{Const.}$$

die Aenderung des Potentiales der Schwere gy längs der freien Oberfläche neben dem Quadrat der Geschwindigkeit V vernachlässigt werden kann.

Dürfen innerhalb oder an der Grenze der Flüssigkeit Quellen und Senken liegen, so kann die zweite (untere) Grenze der Flüssigkeit auch eine horizontale Ebene sein. In diesem Falle stellt sie sich in der ζ-Ebene als ein Stück der ξ-Axe dar, z. B. als deren ganze negative Hälfte.

Ein Beispiel für eine Wellenbewegung der besprochenen Art liefert die specielle Form der Beziehung zwischen ω und ζ:

$$4)\qquad 2ia\sin\omega b = \frac{c-\zeta}{c+\zeta} \quad \text{oder} \quad \zeta = c\frac{1-2ia\sin\omega b}{1+2ia\sin\omega b}.$$

Setzt man

$$2i\sin\omega b = e^{i\omega b} - e^{-i\omega b} = -\cos\varphi b\,(e^{+\psi b} - e^{-\psi b}) + i\sin\varphi b\,(e^{+\psi b} + e^{-\psi b})$$

abgekürzt

$$= m + in,$$

so wird

$$5)\qquad \xi = c\frac{1-a^2(m^2+n^2)}{(1+am)^2+a^2n^2},\quad \eta = -\frac{2anc}{(1+am)^2+a^2n^2}$$

oder

$$6)\qquad ma = \frac{c^2-\xi^2-\eta^2}{(c+\xi)^2+\eta^2},\quad na = -\frac{2c\eta}{(c+\xi)^2+\eta^2}.$$

Dem speciellen Werth $\psi = 0$ entspricht $m = 0$ und daher

$$\xi^2 + \eta^2 = c^2;$$

$\psi = 0$ giebt also eine Stromcurve, längs deren man die Flüssigkeit an einen Luftraum von constantem Druck grenzen lassen kann, denn ihr Bild in der ζ-Ebene ist ein Kreis um den Coordinatenanfang vom Radius c.

Aber von diesem Kreis ergiebt nur ein gewisser Bogen das Bild der Stromcurve $\psi = 0$. Denn während φ von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, pendelt n zwischen -2 und $+2$, und demgemäß bleibt ξ innerhalb des Intervalles zwischen

$$\xi_1 = c\frac{1-4a^2}{1+4a^2} \text{ und } \xi_2 = c,$$

dagegen η innerhalb desjenigen zwischen

$$\eta_1 = -\frac{4ac}{1+4a^2} \text{ und } \eta_2 = +\frac{4ac}{1+4a^2},$$

wo sich ξ_1 und η_1 resp. η_2 einerseits, $\xi_2 = c$ und $\eta = 0$ andererseits entsprechen.

$\xi_1 = 0$ bezeichnet eine verticale Geschwindigkeit; soll diese ausgeschlossen sein, so muß

$$4a^2 < 1 \text{ oder } -1 < 2a < +1$$

sein. Wenn a diese Grenzwerthe erreicht, wird $\eta_1 = \pm c$.

Jeder andere Werth C von ψ als $\psi = 0$ entspricht einer Stromcurve, längs deren man die Flüssigkeit nur durch eine feste Wand begrenzen kann.

Aus (4) folgt nun auch

$$z = \int \xi d\omega = c\left[\frac{2i}{kb} l\left(\frac{1+k+2ae^{i\omega b}}{1-k+2ae^{i\omega b}}\right) - \omega\right], \tag{7}$$

falls man kurz

$$\sqrt{1+4a^2} = k$$

setzt. Die Zerlegung in den reellen und den imaginären Theil giebt

$$\left.\begin{aligned} x &= -c\left[\frac{2}{kb}\operatorname{arctg}\left(\frac{k\sin\varphi b}{\cos\varphi b - a(e^{+\psi b} - e^{-\psi b})}\right) + \varphi\right], \\ y &= +c\left[\frac{1}{kb} l\frac{(1+k+2ae^{-\psi b}\cos\varphi b)^2 + 4a^2e^{-2\psi b}\sin^2\varphi b}{(1-k+2ae^{-\psi b}\cos\varphi b)^2 + 4a^2e^{-2\psi b}\sin^2\varphi b} - \psi\right]. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Da ξ und η, wie auch x und y, die Unabhängige φ nur in $\cos(\varphi b)$ oder $\sin(\varphi b)$ enthalten, so sind alle diese Größen um $\varphi = 2\pi/b$ periodisch. Wir brauchen daher nur das Intervall

$$0 \leqq \varphi b < 2\pi$$

zu betrachten.

Für $\varphi = 0$ ist $\eta = 0$, also die Geschwindigkeit in jeder Stromcurve horizontal, das gleiche gilt für $\varphi = \pi$. Der Unterschied der bezüglichen Y-Coordinaten ist die ganze Höhe der betreffenden Wellenlinie. Er läßt sich sehr einfach ausdrücken. Man erhält nämlich sogleich

$$y_1 - y_2 = \frac{c}{kb} l \left[\left(\frac{1+k+2ae^{-\psi b}}{1-k+2ae^{-\psi b}}\right)^2 \left(\frac{1-k-2ae^{-\psi b}}{1+k-2ae^{-\psi b}}\right)^2\right],$$

und dies ist

$$9)\qquad = \frac{2c}{kb} l \left(\frac{1-(k+2ae^{-\psi b})^2}{1-(k-2ae^{-\psi b})^2}\right).$$

Wegen der Bedeutung von k schreibt sich dies auch

$$9')\qquad = \frac{2c}{kb} l \left(\frac{1-(k+2ae^{+\psi b})^2}{1-(k-2ae^{+\psi b})^2}\right),$$

und dies zeigt, daß positive und negative Werthe von ψ dieselbe Wellenhöhe ergeben. Dem entspricht, daß $y_1 - y_2$ für $\psi = 0$, d. h. für die Stromcurve, welche die freie Oberfläche bildet, seinen größten Werth annimmt; man erhält nämlich hierfür

$$10)\qquad \bar{y}_1 - \bar{y}_2 = H = \frac{2c}{kb} l \frac{1-(k+2a)^2}{1-(k-2a)^2} = \frac{2c}{kb} l \frac{4a+\sqrt{1+4a^2}}{4a-\sqrt{1+4a^2}}.$$

Da nun zugleich für $\psi = 0$ die größten Steigungen der Stromcurven geringer sind als für alle anderen Werthe von ψ, so ergiebt sich, daß die periodischen Unebenheiten des Bodens, welche wir als Ursache der oben behandelten Wellenbewegung betrachteten, geringere Höhen, aber zugleich schärfere Krümmungen haben müssen, als die Wellenberge an der freien Oberfläche.

Soll innerhalb der Flüssigkeit die Geschwindigkeit nirgends unendlich werden, so darf ζ daselbst nicht verschwinden; dies giebt einen Grenzwerth für ψ an; nach (5) muß nämlich gelten

$$\frac{1}{a^2} > (e^{+\psi b} - e^{-\psi b}).$$

Für die freie Oberfläche, für welche $\psi = 0$ ist, folgt aus (8)

$$11)\qquad \begin{aligned} \bar{x} &= -c\left[\frac{2}{kb}\operatorname{arctg}(k \operatorname{tg} \varphi b) + \varphi\right], \\ \bar{y} &= \frac{c}{kb} l \frac{(k+1)(k+2a\cos\varphi b)}{(k-1)(k-2a\cos\varphi b)}; \end{aligned}$$

letzteres schreibt sich, wenn man $l(k+1)-l(k-1)$ mit in die Integrationsconstante zieht, einfacher

$$\bar{y} = \frac{c}{kb} l\left(\frac{k+2a\cos\varphi b}{k-2a\cos\varphi b}\right). - \qquad 11')$$

Auf Fälle, wo äußere Kräfte wirksam sind, ist die Kirchhoff'sche Methode bisher noch nicht angewandt; in der That verliert sie hier auch den größten Theil ihrer Vorzüge, da in der Grenzbedingung für die freie Oberfläche

$$\bar{V}^2 + 2\bar{\Phi} = \text{Const.} \qquad 12)$$

das Potential Φ der wirkenden Kraft sich nicht allgemein durch ξ und η ausdrücken läßt. Wirkt allein die Schwerkraft, und wird die $+Y$-Axe vertical nach oben gelegt, so lautet die Bedingung (12)

$$\bar{V}^2 = C - 2g\bar{y}, \qquad 12')$$

also unter Benutzung der Formeln (2) und (3)

$$\frac{1}{\xi^2+\eta^2} = C - \frac{2g}{i} J\left(\int \zeta\, d\omega\right), \qquad 13)$$

wo $J(\chi)$ den imaginären Theile von χ bezeichnet; $\zeta = F(\omega)$ liefert nunmehr allein in dem Falle eine Bewegung einer schweren Flüssigkeit, welche eine freie Grenze gestattet, wenn für irgend einen Werth von C die Gleichung $\psi = C$, in ξ und η ausgedrückt, dieselben Curven liefert, wie (13). Es giebt keine Methode, solche Beziehungen $\zeta = F(\omega)$ aufzufinden, und man ist ausschließlich auf Versuche angewiesen.

Die Gleichung (13) wird für die Behandlung etwas bequemer, wenn innerhalb der freien Oberfläche $\bar{y}$ so wenig variirt, daß $2g$ mal dieser Aenderung klein neben $\bar{V}^2$ ist. Legt man den Anfangspunkt für y ungefähr in die Mitte zwischen dem höchsten und tiefsten Punkt der Oberfläche und bezeichnet die dort stattfindende Geschwindigkeit mit V_0, so lautet (12')

$$\bar{V}^2 = \bar{V}_0^2 - 2g\bar{y}.$$

Läßt sich nun $(2g\bar{y})^2$ neben $\bar{V}_0^4$ vernachlässigen, so folgt hieraus auch

$$\frac{1}{\bar{V}^2} = \frac{1}{\bar{V}_0^2}\left(1 + \frac{2g\bar{y}}{\bar{V}_0^2}\right),$$

was wir abkürzen in

$$\frac{1}{\bar{V}^2} = m^2 + n^2\bar{y}; \qquad 14)$$

bei Einführung von ξ und η giebt dies

$$14'')\quad \xi^2+\eta^2 = m^2+\frac{n^2}{i}J\left(\int\zeta\,d\omega\right).$$

Jetzt gelingt es leichter, eine Function $\zeta = F(\omega)$ zu finden, welche der gestellten Bedingung genügt, daß $\psi(\xi,\eta) = C$ dieselben Curven in der ζ-Ebene bestimmt, wie die Gleichung (14).

Setzt man nämlich

$$15)\quad \zeta = a - b\,e^{-ic\omega},$$

worin a, b, c reelle Constanten sind, so wird

$$\xi - a = -b e^{c\psi}\cos c\varphi,\quad \eta = +b e^{c\psi}\sin c\varphi$$

und

$$16)\quad (\xi-a)^2+\eta^2 = b^2\,e^{2c\psi};$$

die Strömungscurven $\psi = C$ stellen sich also in der ζ-Ebene als Kreise um den Punkt $\xi = a$, $\eta = 0$ dar. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit für diejenige Stromcurve, welche die freie Grenze bildet, $\psi = 0$ setzen. Dann muß jedenfalls $a > b$ sein, damit der Punkt $\zeta = 0$ nicht in das Bereich der Flüssigkeit fällt, welches Werthen ψ zwischen 0 und $-\infty$ entspricht; $\psi = -\infty$ giebt den Punkt $\xi = a$, $\eta = 0$ selbst, demgemäß eine Stromcurve, welche die Gestalt einer horizontalen Geraden besitzt, längs deren die Flüssigkeit mit der constanten Geschwindigkeit $1/a$ hinströmt.

Für z erhält man nach (3)

$$17)\quad z = a\omega + \frac{i}{c}(\zeta - a),$$

wo die Integrationsconstante gleich Null gesetzt ist, da auf diese Weise, wie später hervortreten wird, der Anfangspunkt für $\bar{y}$ seine günstigste Lage erhält. Hieraus folgt allgemein

$$17')\quad x = a\varphi - \frac{\eta}{c},\quad y = a\psi + \frac{\xi - a}{c},$$

und die Oberflächenbedingung lautet in Rücksicht auf die Annahme $\psi = 0$ nach (14')

$$\xi^2+\eta^2 = m^2 + n^2\,\frac{\xi - a}{c};$$

damit dieselbe mit der aus (16) folgenden Formel

$$(\xi - a)^2 + \eta^2 = b^2$$

übereinstimmt, ist nur erforderlich, daß zwischen den drei verfügbaren Constanten a, b, c und den Constanten m^2 und n^2 der Gleichung (14') die beiden Relationen

$$2ac = n^2, \quad b^2 + a^2 = m^2 \tag{18}$$

bestehen; eine Constante, etwa c, bleibt also verfügbar, um verschiedene Wellenbewegungen darzustellen.

a, b, c können hiernach beliebiges Vorzeichen haben, nur muß jedenfalls ac positiv sein.

Die Gleichungen der Stromcurven werden nach (17′)

$$x = a\varphi - \frac{b}{c} e^{c\psi} \sin c\varphi, \quad y = a\psi - \frac{b}{c} e^{c\psi} \cos c\varphi,$$

und die Gleichungen der freien Oberfläche

$$x = a\varphi - \frac{b}{c} \sin c\varphi, \quad y = -\frac{b}{c} \cos c\varphi;$$

$y = 0$ entspricht also in der That der Mitte zwischen der höchsten und der tiefsten Stelle der freien Oberfläche.

Das sind, falls a, b, und c positiv sind, die Gleichungen von Trochoiden, wie solche schon bei einem andern Problem für die freie Oberfläche gefunden sind[1]). Es ist aber wohl zu beachten, daß in jenem Falle die Flüssigkeitstheilchen geschlossene Bahnen beschreiben und die Wellenhäupter mit der Zeit fortschreiten, hier aber die Wellen stille stehen und die Flüssigkeitstheilchen in's Unendliche fortschreiten. Demgemäß stehen die Trochoiden hier auch umgekehrt wie dort; hier nämlich rollt der erzeugende Kreis oberhalb, dort unterhalb der horizontalen Bahngeraden.

Auf den Fall, daß a, b, c positiv sind, lassen sich alle anderen Fälle zurückführen, indem man statt φ eine andere Variable, z. B. $\pi - \varphi$ oder $\pi + \varphi$ einführt; es genügt also, ihn allein in Betracht zu ziehen.

Der Radius R des rollenden Kreises und der Abstand r des erzeugenden Punktes von seinem Centrum sind gegeben durch

$$R = \frac{a}{c}, \quad r = \frac{b}{c} e^{c\psi};$$

der erstere ist also bei derselben Bewegung, d. h. demselben c für alle Stromcurven constant, der letztere nimmt mit abnehmendem ψ gleichfalls ab und verschwindet für $\psi = -\infty$, d. h. für $y = -\infty$; man kann also die Flüssigkeit in der Tiefe $y = -\infty$ durch eine horizontale Ebene begrenzt denken.

Die Geschwindigkeitscomponenten u und v werden nach (2) resp.

---

1) Kirchhoff, Mechanik p. 361.

$$u = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad v = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}$$

d. h.

$$u = \frac{a - b\, e^{c\psi} \cos c\varphi}{N} \quad v = \frac{b\, e^{c\psi} \sin c\varphi}{N},$$

wo

$$N = a^2 + b^2 e^{2c\psi} - 2ab\, e^{c\psi} \cos c\varphi.$$

Speciell in der Verticalen, wo $\bar{y}$ seinen größten oder kleinsten Werth hat, also $c\varphi = h\pi$ ist, gilt

$$u = \frac{1}{a \pm b\, e^{c\psi}}, \quad v = 0;$$

wird eine solche mit der Tiefe wechselnde horizontale Geschwindigkeit der Flüssigkeit in einem Querschnitt gegeben, so muß sie weiterhin unter der Wirkung der Schwere in denjenigen Wellen sich fortbewegen, deren Gesetze oben entwickelt sind.

Damit die Wellenlinie, welche die freie Oberfläche bildet, keine Schleifen oder Spitzen enthält, in denen die Geschwindigkeit unendlich wird, muß $b/a = \beta$ ein ächter Bruch, also nach (18) $c^2 = n^4 (1 + \beta^2)/4m^2$ sein.

3. Potential-Bewegungen einer schweren Flüssigkeit mit freier Oberfläche, behandelt durch successive Annäherung.

Die Bedingungsgleichung für die freie Oberfläche einer incompressibeln in stationärer Bewegung befindlichen Flüssigkeit

$$\text{1)} \qquad \frac{\bar{V}^2}{2} + \bar{\Phi} + \frac{\bar{p}}{\varepsilon} = C$$

bietet bekanntlich für die Behandlung sehr bedeutende Schwierigkeiten. Ich werde zeigen, daß in den Fällen, wo diese Fläche nur wenig von der Gleichgewichtsoberfläche abweicht, welche die Flüssigkeit unter der Wirkung desselben Potentiales und desselben äußeren Druckes besitzen würde, sich eine Lösung des Bewegungsproblemes mitunter vortheilhaft durch die Methode der successiven Annäherung gewinnen läßt.

Der Grundgedanke des einzuschlagenden Verfahrens ist der folgende.

Man suche ein Geschwindigkeitspotential φ_1, welches den sonst gestellten Bedingungen entspricht und gestattet, die Flüssigkeit längs ihrer Gleichgewichtsoberfläche durch eine starre Wand zu begrenzen. Diese Function giebt dann auch eine erste Annäherung für das eigentliche Problem, denn bei hinreichend kleiner Geschwindigkeit in der Oberfläche ist dann die Grenzbedingung (1) erfüllt. Das Einsetzen des aus φ_1 folgenden Werthes der Geschwindigkeit V_1 in jene Formel liefert für die Gleichung der freien Oberfläche eine zweite Annäherung, nämlich

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2\right] + \Phi + \frac{p}{\varepsilon} = C. \qquad 2)$$

Die hierdurch gegebene Oberfläche wird nun bei der Bestimmung der zweiten Annäherung $\varphi_1 + \varphi_2$ für das Geschwindigkeitspotential als eine feste Grenze der Flüssigkeit betrachtet; es wird nämlich eine Function φ_2 aufgesucht, welche zu φ_1 hinzugefügt ein System von Stromcurven ergiebt, von denen eine Schaar die durch (2) gegebene freie Oberfläche erfüllt. Die Benutzung dieses corrigirten Werthes $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ in der Grenzbedingung (1) giebt weiter die Gleichung der freien Oberfläche in der dritten Annäherung:

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial z}\right)^2\right] + \Phi + \frac{p}{\varepsilon} = C. \qquad 2')$$

Ebenso kann man weiter verfahren.

Auf diese Weise ist es in sehr vielen Fällen ohne Schwierigkeit möglich, die Gleichung der freien Oberfläche in zweiter Annäherung zu finden; aber auch der Werth des Geschwindigkeitspotentiales in zweiter und das Gesetz der freien Oberfläche in dritter Annäherung ist in einigen Fällen zu gewinnen möglich.

Ich betrachte im Folgenden als wirkende Kraft ausschließlich die Schwere, welche parallel der $+Z$-Axe wirken mag, und gebe zunächst die Lösung einiger ebener Probleme.

Bei ebenen Bewegungen gehört zu jedem Geschwindigkeitspotential φ eine Strömungsfunction σ, welche die Eigenschaft hat, daß σ = Const das System aller Stromcurven angiebt. Zwischen beiden Functionen besteht, falls die Bewegung in der XZ-Ebene stattfindet, der Zusammenhang

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = +\frac{\partial \sigma}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma}{\partial x}. \qquad 3)$$

Es sei eine schwere Flüssigkeit von unendlicher Tiefe gegeben, im Ruhezustand durch die Ebene $z = 0$ begrenzt; in derselben werde in der Tiefe $z = a$ unter der Oberfläche eine Quelle angebracht.

Setzt man dann

$$e^2 = (z-a)^2+x^2,$$
$$e_-^2 = (z+a)^2+x^2,$$

so ist

4) $$\varphi_1 = m\,l\,(e\cdot e_-)$$

bekanntlich die erste Annäherung für φ. Aus ihr folgen die Werthe der Geschwindigkeiten

$$u_1 = m\,x\left(\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e_-^2}\right), \quad w_1 = m\left(\frac{z-a}{e^2}+\frac{z+a}{e_-^2}\right),$$

sowie der Werth der Strömungsfunction

$$\sigma_1 = m\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{z-a}+\operatorname{arctg}\frac{x}{z+a}\right)$$

oder kurz

5) $$\sigma_1 = m\,(\vartheta+\vartheta_-),$$

falls mit ϑ und ϑ_- die Winkel von e und e_- gegen die Z-Axe bezeichnet werden.

Die freie Oberfläche ist in erster Näherung die XY-Ebene, in dieser ist

$$\bar{u}_1 = \frac{2m\,x}{E^2}, \quad \bar{w}_1 = 0, \quad \bar{V}_1^2 = \bar{u}_1^2,$$

falls $E^2 = a^2+x^2$ ist; die freie Oberfläche wird also in **zweiter** Annäherung gegeben sein durch

6) $$\frac{2m^2x^2}{E^4} = g\,z.$$

Sie fällt also an den Stellen $x=0$ und $x=\pm\infty$ in das ursprüngliche Niveau und ist im übrigen etwas darunter gesenkt, am stärksten, nämlich um $m^2/2a^2g$, an den Stellen $x = \pm a$.

Bildet man aus (6)

$$\frac{z}{a} = \frac{2m^2}{g\,a\,E^2}\cdot\left(\frac{x}{E}\right)^2$$

und beachtet, daß x/E stets ein ächter Bruch ist, so erkennt man, daß $2m^2/g\,a\,E^2$ von der Ordnung des Verhältnisses der Abweichung der Oberfläche von der Ebene zu der Tiefe der Quelle unter der Oberfläche ist.

Um zu dem Werthe des Geschwindigkeitspotentiales $\varphi = \varphi_1+\varphi_2$ in zweiter Annäherung überzugehen, beachte man, daß für φ_2 nur die logarithmischen Potentiale von Massen außerhalb der Flüssigkeit gewählt werden können, um nicht in Widerspruch mit der Annahme nur einer Quelle innerhalb der Flüssigkeit zu kommen; nach Symmetrie wird man diese supponirten Massen allein auf der negativen Z-Axe anbringen können. Ihre nähere Bestimmung hat so zu erfolgen, daß die ergänzte Strömungsfunction

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

für den Werth $\sigma = m\pi$ die Gleichung (6) der freien Oberfläche ergiebt. Man geht demgemäß am besten direct auf die Bestimmung von σ_2 aus.

Hierzu bemerken wir erstens, daß der Werth von σ_1 bis auf Glieder zweiter Ordnung des Verhältnisses z/a exclusive lautet

$$\sigma_1 = m\left(\pi + \frac{2zx}{E^2}\right), \tag{7}$$

und zweitens, daß Glieder von der Form $(\sigma_2) = \frac{\partial^h \vartheta_-}{\partial z^h}$, wo wieder $\vartheta_- = \operatorname{arctg}\frac{x}{z+a}$ ist, die Strömungsfunctionen geben zu den Geschwindigkeitspotentialen

$$(\varphi_2) = \frac{\partial^h}{\partial z^h} l e_-,$$

welche gewissen vielfachen Quellpaaren auf der $-Z$-Axe entsprechen.

Nun ist aber

$$\frac{\partial^2 \vartheta_-}{\partial z^2} = \frac{2x(z+a)}{e_-^4}, \quad \frac{\partial^3 \vartheta_-}{\partial z^3} = 2x\left(\frac{4x^2}{e_-^6} - \frac{3}{e_-^4}\right);$$

also wird

$$A\left(\frac{\partial^3 \vartheta_-}{\partial z^3} + \frac{3}{a}\frac{\partial^2 \vartheta_-}{\partial z^2}\right) = 2Ax\left(\frac{3z}{a e_-^4} + \frac{4x^2}{e_-^6}\right)$$

ein Ansatz sein, welcher der Bedingung für σ_2 genügt. Wählt man speciell

$$A = -m^3/2g$$

so ist das erste Glied des letzteren Ausdruckes $-3m^3 xz/g a e_-^4$ nach dem oben Gesagten nahe der freien Oberfläche von der Ordnung von $m z^2/a^2$, also bei der benutzten Annäherung zu vernachlässigen. In der Nähe der freien Oberfläche reducirt sich daher σ auf

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = m\left[\pi + \frac{2x}{E^2}\left(z - \frac{2x^2 m^2}{gE^4}\right)\right] \tag{8}$$

und dies giebt für $\sigma = m\pi$

$$z = \frac{2x^2 m^2}{g E^4},$$

wie verlangt.

Hiernach ist das Geschwindigkeitspotential in zweiter Annäherung

$$9) \qquad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = m\left[l(e \cdot e_-) - \frac{m^2}{2g}\left(\frac{\partial^3 l e_-}{\partial z^3} + \frac{3}{a}\frac{\partial^2 l e_-}{\partial z^2}\right)\right],$$

ihm entspricht der Werth der Strömungsfunction

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = m\left[\vartheta + \vartheta_- - \frac{m^2}{2g}\left(\frac{\partial^3 \vartheta_-}{\partial z^3} + \frac{3}{a}\frac{\partial^2 \vartheta_-}{\partial z^2}\right)\right].$$

Die Differentialquotienten nach z sind hierin beliebig mit denen nach a zu vertauschen.

Um endlich die Gleichung der freien Oberfläche in dritter Annäherung zu bestimmen, hat man für die Gleichung (2') nur $u = u_1 + u_2$ zu berechnen, da $w = w_1 + w_2$ von erster Ordnung, w^2 also in V^2 neben u^2 zu vernachlässigen ist. Die Berechnung ergiebt

$$u = \frac{2mx}{E^2}\left[1 + \frac{3m^3}{2g a E^2}\left(1 + \frac{8a^4}{E^4}\right)\right],$$

und hieraus folgt die gesuchte Gleichung der Oberfläche

$$10) \qquad \frac{2m^2 x^2}{E^4}\left[1 + \frac{3m^3}{g a E^2}\left(1 + \frac{8a^4}{E^4}\right)\right] = gz. -$$

Ist mehr als eine Quelle in der Flüssigkeit vorhanden, so erhält man die entsprechenden φ_1 und φ_2 durch einfache Superposition der für die einzelnen geltenden Werthe.

Diese Ueberlegung gestattet, aus den vorstehenden einfachen Formeln die Lösungen einer ganzen Zahl complicirterer Probleme abzuleiten.

Ein $\pm$ Quellpaar, dessen Verbindungslinie der X-Axe parallel ist, an einem beliebigen Punkte der $+Z$-Axe angebracht, dazu sein Spiegelbild in Bezug auf die X-Axe, ferner eine Quelle in $x = -\infty$, eine Senke in $x = +\infty$ geben zusammen eine Bewegung, die sich außer durch die X-Axe durch eine geschlossene Curve, die in gewisser Annäherung kreisförmig ist, begrenzen läßt. Man kann also setzen

$$11) \qquad \varphi_1 = m\alpha \frac{\partial}{\partial x} l(e e_-) + Ux,$$

wo wieder $e_+^2 = (z-a)^2 + x^2$, $e_-^2 = (z+a)^2 + x^2$ ist, um die erste Näherung für das Geschwindigkeitspotential zu haben, wenn ein unendlich tiefer Strom mit der Geschwindigkeit U über einen festen Cylinder wegströmt. Der Querschnitt des letzteren ist ein Kreis vom Radius R um den Punkt $x = 0$, $z = a$, falls R^3 neben $(2a)^3$ vernachlässigt werden kann und

$$m\alpha\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{4a^2}\right) = U$$

gesetzt wird. Die Gleichung der freien Oberfläche ist hier in zweiter Annäherung, falls wieder $E^2 = a^2 + x^2$,

$$\left[\frac{2m\alpha(a^2-x^2)}{E^4} + U\right]^2 = 2gz + U^2, \qquad 11')$$

wo die Constante U^2 rechts zugefügt ist, damit das Niveau im Unendlichen in die XY-Ebene fällt.

Wird statt eines Quellpaares bei $z = a$ eine unendliche Reihe einander gleicher in gleichen Abständen b längs der Geraden $z = a$ und $z = -a$ angebracht, so ergiebt sich

$$\varphi_1 = m\alpha \frac{\partial}{\partial x} l \prod_{-\infty}^{+\infty} (e_h e_{-h}) + Ux, \qquad 12)$$

worin

$$e_h^2 = (z-a)^2 + (x-hb)^2, \quad e_{-h}^2 = (z+a)^2 + (x-hb)^2$$

gesetzt ist. Das unendliche Product läßt sich nach bekannter Methode umformen und liefert schließlich

$$= m\alpha\left[\frac{\partial}{\partial x} l\left(\cos\frac{2\pi i(z-a)}{b} - \cos\frac{2\pi x}{b}\right) + \frac{\partial}{\partial x} l\left(\cos\frac{2\pi i(z+a)}{b} - \cos\frac{2\pi x}{b}\right)\right] + Ux,$$

$$= \frac{2\pi m\alpha}{b}\sin\frac{2\pi x}{b}\left[\frac{1}{\cos\frac{2\pi i(z-a)}{b} - \cos\frac{2\pi x}{b}} + \frac{1}{\cos\frac{2\pi i(z+a)}{b} - \cos\frac{2\pi x}{b}}\right] + Ux \qquad 12')$$

ıd

$$_1 = \frac{2\pi m\alpha i}{b}\left[\frac{\sin\frac{2\pi i(z-a)}{b}}{\cos\frac{2\pi i(z-a)}{b} - \cos\frac{2\pi x}{b}} + \frac{\sin\frac{2\pi i(z+a)}{b}}{\cos\frac{2\pi i(z+a)}{b} - \cos\frac{2\pi x}{b}}\right] + Uz.$$

Hieraus folgt die Gleichung der freien Oberfläche in zweiter Annäherung

$$\left[\frac{8\pi^2 m\alpha}{b^2}\,\frac{\cos\frac{2\pi x}{b}\cos\frac{2\pi i a}{b} - 1}{\left(\cos\frac{2\pi i a}{b} - \cos\frac{2\pi x}{b}\right)^2} + U\right]^2 = 2gz + \left[U - \frac{8\pi^2 m\alpha}{b^2\cos^2\frac{2\pi i a}{b}}\right]^2. \qquad 12'')$$

Die Bewegung ist nach unten zu begrenzen durch eine wellenförmige Stromcurve, welche zwischen $z = 0$ und $z = a$ liegt, und man kann das Resultat betrachten als die Darstellung von stehenden Wellen, die in einer strömenden schweren Flüssigkeit entstehen in Folge von periodischen Unebenheiten des Grundes. Die Bewegung ist aber durchaus verschieden von der im vorigen Abschnitte bei Nichtberücksichtigung der Schwere erhaltenen; z. B. liegen hier die Wellenberge an der freien Oberfläche über den Wellenthälern des Grundes und umgekehrt, während dort Berg über Berg, Thal über Thal liegt.

Die weitere Annäherung ist nach den Formeln (9) bis (10) sogleich hinzuschreiben, aber sehr complicirt.

Ist die Flüssigkeit in der Tiefe $z = a$ durch eine horizontale starre Ebene begrenzt, in welcher sich eine Quelle befindet, indem z. B. die Flüssigkeit durch einen Spalt von außen zuströmt, so erhält man φ_1 durch ein System einfacher gleicher Quellen, die sich in gleichen Abständen $2a$ auf der Z-Axe befinden, so daß wird

$$13)\qquad \varphi_1 = m\,l \prod_{-\infty}^{+\infty} e_h$$

worin $e_h^2 = (z + (2h+1)a)^2 + x^2$ ist. Dies formt sich um in

$$13')\qquad \varphi_1 = m\,l\left(\cos\frac{\pi z}{a} + \cos\frac{i\pi x}{a}\right),$$

woraus, da

$$u_1 = \frac{-m\frac{i\pi}{a}\sin\frac{i\pi x}{a}}{\cos\frac{\pi z}{a} + \cos\frac{i\pi x}{a}} \text{ ist,}$$

für die Gleichung der freien Oberfläche in zweiter Näherung folgt

$$13'')\qquad \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(i\,\mathrm{tg}\,\frac{i\pi x}{a}\right)^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{e^{\frac{\pi x}{a}} - e^{-\frac{\pi x}{a}}}{e^{\frac{\pi x}{a}} + e^{-\frac{\pi x}{a}}}\right) = 2gz.$$

Jetzt ist das Niveau im Unendlichen nicht mehr gleich dem in der Z-Axe, sondern um $m^2\pi^2/2ga^2$ tiefer, da dort die Geschwindigkeit nicht verschwindet.

Die weiteren Annäherungen sind ebenfalls nach der oben erörterten Methode zu bilden. —

Die Methode der successiven Annäherung ist ebenso bequem, wie auf ebene Flüssigkeitsbewegungen, auch auf solche, welche den Character eines Rotationskörpers besitzen, anwendbar.

Zwischen dem Geschwindigkeitspotential φ und der Strömungsfunction σ bestehen hier, falls man die Z-Axe zur Rotationsaxe wählt und den Abstand eines Punktes von ihr mit e bezeichnet, die Beziehungen

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = e\frac{\partial \varphi}{\partial e}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial e} = -e\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{14}$$

Sei nun zunächst wieder die schwere Flüssigkeit unendlich tief und in ihr im Punkte $z = a$ eine Quelle vorhanden, so ist die erste Näherung für φ

$$\varphi_1 = -m\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_-}\right) \tag{15}$$

falls $r^2 = (z-a)^2 + e^2$, $r_-^2 = (z+a)^2 + e^2$ ist. Hieraus folgt

$$\sigma_1 = m\left(\frac{z-a}{r} + \frac{z+a}{r_-}\right), \tag{15'}$$

und die Geschwindigkeiten s und w normal und parallel zur Z-Axe ergeben sich

$$s_1 = me\left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r_-^3}\right), \quad w_1 = m\left(\frac{z-a}{r^3} + \frac{z+a}{r_-^3}\right). \tag{16}$$

Daraus folgt die Gleichung der freien Oberfläche in zweiter Näherung, falls $a^2 + e^2 = E^2$ gesetzt wird,

$$\frac{2m^2 e^2}{E^6} = gz; \tag{17}$$

aus ihr ergiebt sich, daß für Punkte der freien Oberfläche z/a von der Ordnung von $2m^2/gaE^4$ ist.

Um zur zweiten Annäherung für φ und σ fortzuschreiten, beachte man, daß bis auf Größen der Ordnung von $(z/a)^2$ exclusive

$$\sigma_1 = \frac{2me^2 z}{E^3} \tag{18}$$

ist, sowie daß Glieder von der Form

$$(\sigma_2) = \frac{\partial^h \dfrac{z+a}{r_-}}{\partial z^h}$$

die Strömungsfunctionen ergeben, welche Geschwindigkeitspotentialen

$$(\varphi_2) = -\frac{\partial^h \frac{1}{r_-}}{\partial z^h}$$

entsprechen.

Nun ist

$$\frac{\partial^2 \left(\frac{z+a}{r_-}\right)}{\partial z^2} = -\frac{3e^2(z+a)}{r_-^5}, \quad \frac{\partial^3 \left(\frac{z+a}{r_-}\right)}{\partial z^3} = -3e^2\left(\frac{1}{r_-^5} - \frac{5(z+a)^2}{r_-^7}\right),$$

$$\frac{\partial^4 \left(\frac{z+a}{r_-}\right)}{\partial z^4} = 15e^2(z+a)\left(\frac{3}{r_-^7} - \frac{7(z+a)^2}{r_-^9}\right),$$

also wird

$$A\left(\frac{\partial^4 \left(\frac{z+a}{r_-}\right)}{\partial z^4} + \frac{4}{a}\frac{\partial^3 \left(\frac{z+a}{r_-}\right)}{\partial z^3} - \frac{4}{a^2}\frac{\partial^2 \left(\frac{z+a}{r_-}\right)}{\partial z^2}\right)$$

$$= 3Ae^2\left[\frac{4z}{a^2 r_-^5} + \frac{20z(a+z)}{a r_-^7} + \frac{35e^2(a+z)}{r_-^9}\right]$$

ein Ansatz sein, der den Bedingungen für σ_2 entspricht. Wählt man noch

$$A = -\frac{4m^3}{105ag},$$

so sind die in z multiplicirten Glieder des obigen Ausdrucks in der Nähe der freien Oberfläche zweiter Ordnung und demgemäß zu vernachlässigen. Das noch Uebrige aber ergiebt in der Nähe der freien Oberfläche

19) $$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{2me^2}{E^3}\left(z - \frac{2m^2e^2}{gE^6}\right),$$

sodaß für $\sigma = 0$ folgt

$$\frac{2m^2e^2}{E^6} = gz,$$

wie verlangt ist.

Die gefundenen zweiten Näherungswerthe sind also

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \tag{20)}$$
$$-m\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r_-} - \frac{4m^2}{105ag}\left(\frac{\partial^4 \frac{1}{r_-}}{\partial z^4} + \frac{4}{a}\frac{\partial^3 \frac{1}{r_-}}{\partial z^3} - \frac{4}{a^2}\frac{\partial^2 \frac{1}{r_-}}{\partial z^2}\right)\right],$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 =$$
$$+m\left[\frac{z-a}{r} + \frac{z+a}{r_-} - \frac{4m^2}{105ag}\left(\frac{\partial^4\left(\frac{z+a}{r_-}\right)}{\partial z^4} + \frac{4}{a}\frac{\partial^3\left(\frac{z+a}{r_-}\right)}{\partial z^3} - \frac{4}{a^2}\frac{\partial^2\left(\frac{z+a}{r}\right)}{\partial z^2}\right)\right],$$

worin die Differentialquotienten nach z auch mit solchen nach a zu vertauschen sind.

Aus ihnen folgt schließlich die Gleichung der freien Oberfläche in dritter Näherung wie oben.

Man hat nämlich

$$s = \frac{2me}{E^3}\left[1 + \frac{2m^2e^3}{gE^6}\left(2 - \frac{9e^2}{E^2}\right)\right],$$

während w von erster Ordnung in Bezug auf z/a bleibt. Demgemäß wird die Gleichung der freien Oberfläche in dritter Annäherung

$$\frac{2m^2e^2}{E^6}\left[1 + \frac{4m^2e^3}{gE^6}\left(2 - \frac{9e^2}{E^2}\right)\right] = gz. \tag{21)}$$

Sind mehrere Quellen vorhanden, so ist die einfache Superposition der Lösungen nur dann auch in zweiter Annäherung gestattet, wenn dabei die Bewegung der Flüssigkeit den Charakter eines Rotationskörpers behält, also die Quellen sämmtlich auf der Z-Axe liegen.

Besitzt die Flüssigkeit die endliche Tiefe a, und befindet sich im Boden eine kreisförmige Oeffnung um die Z-Axe vom Radius R, durch welche Flüssigkeit etwa aus einem Rohre zuströmt nach dem Gesetz

$$w = -\frac{S}{2\pi R\sqrt{R^2 - e^2}}, \tag{22)}$$

worin S das ganze in der Zeiteinheit eintretende Volumen bezeichnet, dann bestimmt sich leicht [1])

$$\varphi_1 = \frac{-S}{2\pi R}\int_0^\infty \frac{e^{\zeta z} + e^{-\zeta z}}{e^{\zeta a} - e^{-\zeta a}} J^0(\zeta e)\sin(\zeta R)\frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{23)}$$

---

1) Vergl. H. Weber, Crelle's Jour. 75, 76 1872.

wo J^h wie gewöhnlich die Bessel'sche Function h^{ter} Ordnung bezeichnet. Denn diese Function ist eine Lösung der Hauptgleichung $\Delta\varphi_1 = 0$ und ergiebt für $z = \pm a$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{\mp S}{2\pi R}\int_0^\infty J^0(\zeta e)\sin(\zeta R)\,d\zeta,$$

und dies Integral ist gleich Null, falls $e > R$ ist, und ist gleich

$$\mp S/2\pi R\sqrt{R^2-e^2},$$

falls $e < R$, erfüllt also für $z = +a$ die obige Bedingung (22).

Aus ihm folgt, da

$$\frac{\partial J^0 x}{\partial x} = -J^1 x$$

ist,

$$u_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial e} = +\frac{S}{2\pi R}\int_0^\infty \frac{e^{\zeta z}+e^{-\zeta z}}{e^{\zeta a}-e^{-\zeta a}} J^1(\zeta e)\sin(\zeta R)\,d\zeta$$

und hieraus durch Einsetzen in die Gleichung (2) für $z = 0$

$$24)\qquad \frac{S^2}{2\pi^2 R^2}\left[\int_0^\infty \frac{J^1(\zeta e)\sin(\zeta R)\,d\zeta}{e^{\zeta a}-e^{-\zeta a}}\right]^2 = gz.$$

Ist R verschwindend klein, so giebt dies

$$25)\qquad \frac{S^2}{2\pi^2}\left[\int_0^\infty \frac{J^1(\zeta e)\,\zeta\,d\zeta}{e^{\zeta a}-e^{-\zeta a}}\right]^2 = gz.$$

In diesem letzteren Fall kann man bekanntlich das Integral auch durch eine unendliche Reihe ausdrücken, denn für φ_1 gilt hier der Ansatz

$$\varphi_1 = -m\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{(z-(2h+1)a)^2+e^2}}$$

bei welchem die supponirten Massen m sich durch das einströmende Quantum S ausdrücken, sodaß $m = S/2\pi$ ist. —

Wir haben oben ausschließlich stationäre Bewegungen betrachtet; die Methode ist aber, wenngleich weniger einfach, auch auf nichtstationäre anwendbar, wenn nur $\partial\varphi/\partial t$ eine bestimmte Kleinheit besitzt. Probleme, welche in der erörterten Weise sich behandeln lassen, bietet die Pulsation oder die verticale Fortschreitung einer Kugel in einem unendlichen Teiche.

II. Reihe.

Vorgelegt am 7. März 1891.

4. Stationäre combinirte Bewegungen, welche nur von zwei Coordinaten abhängen, innerhalb einer incompressibeln Flüssigkeit unter der Wirkung äusserer Kräfte, welche ein Potential haben.

Faßt man in die Bezeichnung Ω zusammen das Aggregat

$$\Omega = \Phi + \frac{p}{\varepsilon} + \tfrac{1}{2} V^2, \tag{1}$$

worin Φ das äußere Potential und V die Lineargeschwindigkeit der Flüssigkeit ist, so lassen sich die Euler'schen Gleichungen für eine stationäre Bewegung schreiben [1])

$$\begin{aligned} 2(v\zeta - w\eta) &= +\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ 2(w\xi - u\zeta) &= +\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ 2(u\eta - v\xi) &= +\frac{\partial \Omega}{\partial z}. \end{aligned} \tag{2}$$

Aus ihnen folgt

$$\begin{aligned} u\frac{\partial \Omega}{\partial x} + v\frac{\partial \Omega}{\partial y} + w\frac{\partial \Omega}{\partial z} &= 0, \\ \xi\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \eta\frac{\partial \Omega}{\partial y} + \zeta\frac{\partial \Omega}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial n} &= 2V\tau \sin(V, \tau); \end{aligned} \tag{3}$$

in der letzten Gleichung bezeichnet τ die resultirende Rotationsgeschwindigkeit, (V, τ) den Winkel der Wirbelaxe gegen die Richtung von V. und $\partial\Omega/\partial n$ den Differentialquotienten von Ω nach der Richtung der Normalen auf der durch die Stelle x, y, z gehenden Fläche $\Omega = \text{Const.}$

Diese Fläche $\Omega = \text{Const.}$ hat hiernach die Eigenschaft, daß in ihr sowohl die Wirbel- als die Stromlinien liegen, welche durch den Punkt x, y, z hindurchgehen, und daß zwischen zwei Nach-

---

1) Lamb-Reiff, Hydrodynamik. Freiburg 1884 p. 482.

berflächen $\Omega = C$ und $\Omega = C + \delta C$ die Normale δn eine solche Länge besitzt, daß

$$V\tau\, \delta n \sin (V, \tau)$$

constant ist.

Zwei specielle Fälle von Bewegungen, welche mit diesen Bedingungen verträglich sind, hat Stokes[1]) angegeben. Ich werde im Folgenden sämmtliche stationäre Flüssigkeitsbewegungen ableiten, welche aus Wirbel- und Potentialbewegungen combinirt und nur von zwei Coordinaten abhängig sind.

a) Ebene combinirte Bewegungen lassen sich durch eine einzige Function ω darstellen, so daß

$$4)\qquad u = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \varDelta \omega = -2\tau$$

ist, falls τ die resultirende Wirbelgeschwindigkeit bezeichnet. Die Bewegung ist nämlich dann eine combinirte, wenn ω einen additiven Theil ω_1 enthält, welcher der Gleichung $\varDelta \omega_1 = 0$ genügt; dieser giebt für sich eine Potentialbewegung. $\omega =$ Const. giebt allgemein das System der Stromcurven.

Die Gleichungen (1) nehmen hier die Form an

$$5)\qquad 2\tau \frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad 2\tau \frac{\partial \omega}{\partial y} = -\frac{\partial \Omega}{\partial y},$$

woraus folgt, daß τ und Ω Functionen von ω allein, also längs jeder Stromcurve constant sein müssen; ein Resultat, das, soweit es τ betrifft, auch aus den bekannten von Helmholtz'schen Sätzen über Wirbelbewegungen folgt.

Enthält ω nur τ, so ist, falls man kurz

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \omega', \quad \frac{d^2\omega}{d\tau^2} = \omega''$$

setzt,

$$6)\qquad u = \omega' \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad v = -\omega' \frac{\partial \tau}{\partial x}, \quad V^2 = \omega'^2 E\tau,$$

falls

$$E\tau = \left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right)^2$$

ist, und die Hauptgleichung (4) für ω lautet:

$$7)\qquad \varDelta \omega + 2\tau = \omega'' E\tau + \omega' \varDelta \tau + 2\tau = 0.$$

Soll sich aus derselben ω als Function von τ allein bestimmen, so muß auch $E\tau$ und $\varDelta \tau$ nur von τ allein abhängen. $\omega'^2 E\tau$ ist aber

1) Stokes, Math. and Phys. Papers, Cambridge 1880, I p. 1.

gleich V^2 und ω' nach Annahme nur von τ abhängig. Sonach sagt unser Resultat aus, daß eine ebene combinirte stationäre Bewegung unter der Wirkung von Kräften, welche ein Potential haben, nur in der Weise stattfinden kann, daß längs jeder Stromcurve sowohl Wirbel- als Lineargeschwindigkeit constant ist. Benachbarte Stromcurven haben demzufolge in ihrem ganzen Verlauf auch gleichen Abstand von einander.

Um die allgemeinste Bewegung, für welche ω und demgemäß $E\tau$ und $\Delta\tau$ nur von τ abhängen, wirklich zu bestimmen, ist aber die Form (7) der Hauptgleichung für ω nicht bequem, sondern es empfiehlt sich dazu, die Ausgangsformel

$$\Delta\omega + 2\tau = 0$$

von den Coordinaten x, y auf ein anderes orthogonales System τ und σ zu transformiren.

Definirt man zwei Größen P und Q dadurch, daß die Linienelemente dt und ds, welche normal zu den Curven $\tau =$ Const. und $\sigma =$ Const. bis zu den betr. Nachbarcurven errichtet werden können, die Längen haben

$$dt = P d\tau, \quad ds = Q d\sigma, \tag{8}$$

so führt obige Gleichung bei der Transformation bekanntlich auf

$$\frac{1}{PQ}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{Q}{P}\frac{\partial\omega}{\partial\tau}\right) + \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{P}{Q}\frac{\partial\omega}{\partial\sigma}\right)\right] + 2\tau = 0. \tag{9}$$

Soll nun ω nur von τ abhängen, so gilt Gleiches von P und Q, und hieraus folgt, daß nicht nur die Linienelemente dt, welche auf den σ-Curven durch zwei Nachbarcurven τ abgegrenzt werden, längs derselben τ-Curven constant sind, sondern daß auch die σ-Curven, welche gleichen Zuwachsen $d\sigma$ des Parameters entsprechen, auf einer und derselben τ-Curve lauter gleiche Abschnitte bezeichnen. Letzteres läßt sich auch so aussprechen, daß ein System σ-Curven, welches eine bestimmte τ-Curve in gleich lange Elemente ds zerlegt, auch auf allen andern τ-Curven gleiche Stücke ds_h abgrenzen muß.

Dies genügt zur vollständigen Bestimmung der Natur beider Curvensysteme.

Denn ist ϱ der Krümmungsradius an einer beliebigen Stelle einer bestimmten τ-Curve, ds ein auf ihr abgegrenztes Linienelement, und sind dt und dt_1 die Normalenelemente in seinen Endpunkten bis zur Nachbarcurve, so grenzen dieselben auf der Nachbarcurve ein Element ds_1 ab, für welches nun

10) $$ds_1/ds = (\varrho \pm dt)/\varrho$$

ist. Nach den obigen Resultaten soll nun sowohl dt als ds_1/ds längs derselben τ-Curven den gleichen Werth haben, dies ergiebt aber, daß daselbst ϱ constant sein muß. Hieraus folgt das Resultat:

Die allgemeinsten mit den gestellten Bedingungen verträglichen ebenen Bewegungen sind Strömungen in concentrischen Kreisen oder parallelen Geraden, wobei das Gesetz, nach welchem die Geschwindigkeit von einer Stromcurve zur andern variirt, willkürlich bleibt.

Die σ-Curven sind hiernach von einem Punkt ausgehende oder parallele Gerade. —

Noch ist in Betracht zu ziehen, daß nach (5) wie ω, so auch Ω nur von τ oder, was jetzt dasselbe ist, von ω abhängen soll; da nun für V Gleiches gilt, so muß nach (1) auch $(\Phi + p/\varepsilon)$ nur ω enthalten. Besitzt die Flüssigkeit eine freie Grenze, so wird diese von einer Stromcurve gebildet und ist in ihr p constant. Man erkennt sonach, daß auch Φ in der freien Grenze constant sein muß.

Eine Art Ausnahmestellung innerhalb der obigen allgemeinen Betrachtung nimmt der von Stokes angegebene specielle Fall ein, in welchem τ in der ganzen Flüssigkeit constant ist; dann ist auch nicht nothwendig die Geschwindigkeit längs jeder Stromcurve constant. Ein Ansatz für ω ist hier

11) $$\omega = \omega_1 + ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

wo $\Delta\omega_1 = 0$ ist; hier ist dann

$$\Delta\omega = 2(a+c) = -2\tau.$$

b) Combinirte Bewegungen, welche in Ebenen durch eine Axe und zwar rings um dieselbe in gleicher Weise stattfinden, lassen sich gleichfalls durch eine einzige Function ω darstellen.

Ist die Z-Axe die ausgezeichnete Richtung, und bezeichnet man mit e den normalen Abstand eines Punktes von ihr, mit s die Geschwindigkeit parallel zu e, so kann man setzen

12) $$s = +\frac{1}{e}\frac{\partial\omega}{\partial z}, \quad w = -\frac{1}{e}\frac{\partial\omega}{\partial e}, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} + e\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{1}{e}\frac{\partial\omega}{\partial e}\right) + 2\tau e = 0,$$

falls wieder τ die resultirende Wirbelgeschwindigkeit bezeichnet.

Die Bewegung ist eine reine Potentialbewegung, wenn $\tau = 0$ ist, sie ist eine combinirte, wenn ω ein additives Glied enthält, welches für sich allein die letzte Gleichung (12) bei verschwindendem τ erfüllt.

$\omega =$ Const. giebt wiederum die Schaar der Stromcurven.

Die Eulerschen Gleichungen (2) nehmen hier die Form an

$$\frac{2\tau}{e}\frac{\partial\omega}{\partial e} = -\frac{\partial\Omega}{\partial e}, \quad \frac{2\tau}{e}\frac{\partial\omega}{\partial z} = -\frac{\partial\Omega}{\partial z}, \tag{13}$$

woraus folgt, daß $\tau/e = \vartheta$ und Ω die Coordinaten e und z nur in der Verbindung ω enthalten, also längs der Stromcurven $\omega =$ Const. auch constant sein müssen. Soweit dies Resultat die Wirbelgeschwindigkeit τ betrifft, folgt es ebenfalls aus den bekannten Helmholtz'schen Sätzen über diese Größe.

Enthält ϑ nur ω, so enthält auch ω nur ϑ und man erhält, wenn man wieder abkürzt $d\omega/d\tau = \omega'$, $d^2\omega/d\tau^2 = \omega''$:

$$s = +\frac{\omega'}{e}\frac{\partial\vartheta}{\partial z}, \quad w = -\frac{\omega'}{e}\frac{\partial\vartheta}{\partial e}, \text{ also } V^2 = \frac{\omega'^2}{e^2}E\vartheta, \tag{14}$$

während die Hauptgleichung für ω lautet

$$\frac{\omega''}{e^2}E\vartheta + \frac{\omega'}{e^2}\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} + e\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{1}{e}\frac{\partial\vartheta}{\partial e}\right)\right) + 2\vartheta = 0. \tag{15}$$

Soll dieselbe ω als Function von ϑ allein bestimmen, so muß sowohl der Factor von ω'', als der von ω' nur von ϑ abhängen, also längs einer Stromcurve constant sein. Ersterer unterscheidet sich daselbst nur durch eine Constante von V^2, folglich muß bei der betrachteten Bewegung wiederum die Geschwindigkeit längs jeder Stromcurve einen constanten Werth besitzen.

Die möglichen Bewegungen genauer zu erkennen, wenden wir das oben benutzte Verfahren an und transformiren die Hauptgleichung für ω auf ein orthogonales Coordinatensystem ϑ, σ. Diese Transformation läßt sich auch für diese Gleichung, welche nicht etwa mit der Formel $\Delta\omega + 2\vartheta = 0$ übereinstimmt, nach der bekannten Jacobi'schen Methode für jene Gleichung ausführen und liefert, falls analog mit (8) jetzt

$$dt = Pd\vartheta, \quad ds = Qd\sigma \tag{16}$$

gesetzt wird:

$$\frac{1}{ePQ}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{Q}{eP}\frac{\partial\omega}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{P}{eQ}\frac{\partial\omega}{\partial\sigma}\right)\right] + 2\vartheta = 0. \tag{17}$$

Soll ω nur von ϑ abhängen, so muß Gleiches von ePQ und eP/Q, d. h. also von eP und Q selbst gelten.

Hieraus folgt, daß die Normalenelemente dt zwischen zwei benachbarten τ-Curven mit e indirect proportional sein müssen — in Uebereinstimmung mit dem Inhalt der letzten Formel (3) —, und außerdem, daß ein System σ-Curven, deren Parameter sich um den constanten Betrag $d\sigma$ unterscheiden, auf einer und derselben τ-Curve gleiche Längen abgrenzen; oder anders ausgedrückt, daß ein System σ-Curven, welches auf einer τ-Curve gleiche Längen ds abschneidet, auf jeder anderen τ-Curve auch gleiche Längen ds_h abgrenzt.

Hierdurch bestimmt sich wiederum das System der τ- und σ-Curven; denn die an Formel (10) angeknüpften Folgerungen führen hier zu dem Resultat, daß längs derselben τ-Curve der Krümmungsradius ϱ mit e indirect proportional sein muß. Diese Bedingung ist dieselbe, welche die capillare Oberfläche einfacher Krümmung für eine schwere Flüssigkeit bestimmt, wenn man gegen e die Erhebung oder Senkung eines Oberflächenpunktes gegen das unendliche Niveau versteht; die bei jenem Problem möglichen Begrenzungscurven werden also in unserm Problem Stromcurven darstellen können, falls es möglich ist, mit ihnen irgend ein von $z = -\infty$ bis $z = +\infty$ reichendes oder ein im Endlichen liegendes ringförmiges Bereich zwischen zwei derartigen Curven den gestellten Bedingungen gemäß zu erfüllen; denn es soll nicht nur eine einzelne, sondern jede Stromcurve die gefundene Eigenschaft besitzen. Die einfache Betrachtung der bekannten capillaren Grenzcurven zeigt aber, daß dies nur in den beiden Fällen möglich ist, daß die Stromcurven zur Z-Axe parallele Gerade oder in unendlicher Entfernung von der Z-Axe befindliche concentrische Kreise sind; letzterer Fall gehört aber im Grunde zu dem vorigen und nicht zu diesem Problem.

Wir haben also das Resultat gewonnen:

Stationäre combinirte Bewegungen, welche in Meridianebenen und rings um die Axe gleichmäßig verlaufen, sind unter der Wirkung von Kräften, welche ein Potential haben, nur so möglich, daß die Stromcurven der Axe parallele Gerade sind.

Bezüglich des Potentiales der äußern Kräfte gilt dasselbe, was S. 68 schon erörtert ist.

Eine Ausnahme bildet hier, wie früher, der von Stokes angegebene specielle Fall, daß $\tau/e = \vartheta$ innerhalb der ganzen Flüssigkeit, also ganz von selbst auch längs der Stromcurven constant ist. Hier sind die Schlüsse von S. 69 nicht anzustellen, die Geschwindigkeit ist also auch nicht längs der Stromcurven constant.

Für ω kann man in diesem Fall z. B. setzen

$$\omega = \omega_1 + e^2 (ae^2 + bez + cz^2),$$

worin ω_1 eine beliebige Potentialbewegung darstellt.

Das speciellere Problem gestattet also eine viel allgemeinere Lösung als das allgemeine.

5. Eine aus Potential- und Wirbelbewegung combinirte, nicht stationäre Strömung innerhalb einer ruhenden ellipsoidischen Schaale.

Vollkommen durchführbare Probleme nichtstationärer Flüssigkeitsbewegungen derjenigen Art, welche ich als „combinirte" bezeichnet habe, sind überaus selten. Die von Herrn Kirchhoff[1]) und später von den Herrn Gröbli[2]) und Greenhill[3]) behandelten Bewegungen einzelner Wirbelfäden und eines elliptischen Wirbelcylinders gehören nicht direct hierher, weil sie in einem Theil des Raumes nur Wirbel-, in dem andern nur Potentialbewegungen voraussetzen; überdies sind sie speciell ebene Probleme.

Zu den combinirten Bewegungen gehört unter anderen der Fall des gravitirenden flüssigen Ellipsoides, wie er zuerst von Dirichlet, dann von Riemann u. A. behandelt ist; aber die Schwierigkeit dieses Problemes gestattet seine Durchführung nur in einzelnen speciellen Fällen und die in diesen erhaltenen Resultate sind nicht besonders anschaulich. Ueberdies liefert es kein Beispiel zu dem methodischen Weg der Durchführung solcher Probleme, wie er z. B. von Kirchhoff[4]) auseinander gesetzt ist.

Aus diesen Ursachen dürfte das folgende einfache und elegante Problem vielleicht einiges Interesse verdienen.

Es sei eine ellipsoidische Schaale, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ist, mit einer incompressibeln Flüssigkeit gefüllt

---

1) Kirchhoff, Mechanik. Leipzig 1876 p. 257 u. f.

2) Gröbli, Specielle Probleme etc. Zürich 1877.

3) Greenhill, Quaterly Journ. of Math. 1877.

4) Kirchhoff l. c. p. 253.

und derselben eine Anfangsgeschwindigkeit derartig ertheilt, daß die Componenten u, v, w lineäre Functionen der Coordinaten sind. Nach Wahrscheinlichkeit haben, wenn äußere Kräfte entweder garnicht wirken, oder nur solche vorhanden sind, die ein Potential besitzen, dann die Componenten zu jeder Zeit die genannte Form.

Wir setzen

$$\begin{aligned} u &= a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z, \\ v &= a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z, \\ w &= a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z, \end{aligned} \tag{2}$$

wo die a_{hk} die Zeit allein enthalten und nach der Incompressibilitätsbedingung

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \tag{3}$$

sein muß.

Soll diese Bewegung durch das feste Ellipsoid (1) begrenzt werden, so muß

$$\frac{xu}{a^2} + \frac{yv}{b^2} + \frac{zw}{c^2} = 0 \tag{4}$$

sein, d. h. für Werthe x, y, z, welche der Formel (1) genügen,

$$a_{11} \frac{x^2}{a^2} + a_{22} \frac{y^2}{b^2} + a_{33} \frac{z^2}{c^2} = 0$$

und

$$\frac{a_{23}}{b^2} + \frac{a_{32}}{c^2} = \frac{a_{31}}{c^2} + \frac{a_{13}}{a^2} = \frac{a_{12}}{a^2} + \frac{a_{21}}{b^2} = 0$$

sein. Erstere Bedingung führt mit (3) auf

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0,$$

und somit wird die Bedingung (4) jetzt allerorts erfüllt und findet die Strömung durchaus längs der Ellipsoide statt, welche zu (1) ähnlich sind.

Die letzteren Formeln, mit den Definitionen der Wirbelcomponenten

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

oder

$$2\xi = a_{32} - a_{23}, \quad 2\eta = a_{13} - a_{31}, \quad 2\zeta = a_{21} - a_{12}$$

combinirt, gestatten die übrigen a_{hk} durch ξ, η, ζ auszudrücken, so daß sich findet

$$\begin{aligned} a_{32} &= \frac{2c^2\xi}{b^2+c^2}, \quad a_{13} = \frac{2a^2\eta}{c^2+a^2}, \quad a_{21} = \frac{2b^2\zeta}{a^2+b^2}, \\ a_{23} &= \frac{-2b^2\xi}{b^2+c^2}, \quad a_{31} = \frac{-2c^2\eta}{c^2+a^2}, \quad a_{12} = \frac{-2a^2\zeta}{a^2+b^2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Nun gelten, wenn die Flüssigkeit unter der Wirkung von Kräften steht, welche ein Potential besitzen, bekanntlich die Formeln [1])

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \xi\frac{\partial u}{\partial x}+\eta\frac{\partial u}{\partial y}+\zeta\frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \xi\frac{\partial v}{\partial x}+\eta\frac{\partial v}{\partial y}+\zeta\frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \xi\frac{\partial w}{\partial x}+\eta\frac{\partial w}{\partial y}+\zeta\frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \tag{6}$$

Dieselben geben in unserm Falle, wo die ξ, η, ζ nur von der Zeit abhängen, die vollständigen Differentialgleichungen für diese Größen, welche unter Rücksicht auf die obigen Werthe (5) lauten:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= 2\eta\zeta a^2\left(\frac{1}{c^2+a^2}-\frac{1}{a^2+b^2}\right) = \eta\zeta\,\frac{2a^2(b^2-c^2)}{(c^2+a^2)(a^2+b^2)} \\ \frac{d\eta}{dt} &= 2\zeta\xi b^2\left(\frac{1}{a^2+b^2}-\frac{1}{b^2+c^2}\right) = \zeta\xi\,\frac{2b^2(c^2-a^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)} \\ \frac{d\zeta}{dt} &= 2\xi\eta c^2\left(\frac{1}{b^2+c^2}-\frac{1}{c^2+a^2}\right) = \xi\eta\,\frac{2c^2(a^2-b^2)}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Dieses System hat eine große Aehnlichkeit mit demjenigen, welches die Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt ohne Einwirkung äußerer Kräfte bestimmt, und gestattet auch eine ähnliche Behandlung.

Zwei Integrale erhält man, indem man die drei Gleichungen (7) resp. mit den Factoren

$$a^2\xi, \quad b^2\eta, \quad c^2\zeta$$

und

$$\frac{b^2c^2\xi}{b^2+c^2}, \quad \frac{c^2a^2\eta}{c^2+a^2}, \quad \frac{a^2b^2\zeta}{a^2+b^2}$$

zusammenfaßt, dieselben lauten

1) **Helmholtz**, Crelle's Journ. 55, 34, 1858; ges. Abh. I, p. 111, Leipzig 1882.

8) $$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 = k_1,$$

9) $$\frac{b^2c^2\xi^2}{b^2+c^2} + \frac{c^2a^2\eta^2}{c^2+a^2} + \frac{a^2b^2\zeta^2}{a^2+b^2} = k_2,$$

falls k_1 und k_2 Integrationsconstanten bezeichnen.

Multiplicirt man die letzte Gleichung mit

$$(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)/a^2b^2c^2,$$

zieht die erstere davon ab und dividirt das Resultat durch

$$(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2),$$

so resultirt

10) $$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = k_3,$$

wo k_3 für das rechts auftretende constante Glied gesetzt ist.

Nun lassen sich ξ, η, ζ deuten als die Coordinaten des Endpunktes eines Vectors, der in jedem Moment vom Coordinatenanfang aus parallel der Wirbelaxe in einer Länge gleich der resultirenden Wirbelgeschwindigkeit τ construirt ist; wir nennen ihn weiterhin kurz den Vector τ.

Die Gleichungen (8), (9) und (10) sagen nun aus, daß dieser Endpunkt bei der Bewegung der Flüssigkeit auf der Schnittcurve zweier dieser drei Ellipsoide, die sich hiernach sämmtlich in derselben Curve schneiden, verharren muß. Das letztere Ellipsoid ist der durch (1) gegebenen Begrenzung der Flüssigkeit ähnlich.

Bezüglich der Integrationsconstanten k_2 und k_3, welche sich durch den Anfangszustand bestimmen, läßt sich sagen, daß falls

$$a \gtrless b \gtrless c$$

ist, auch

11) $$(a^2+b^2) \gtrless \frac{k_3}{k_2} \gtrless (b^2+c^2)$$

sein muß. Die Halbaxenquadrate der Ellipsoide (9) und (10) sind resp.

$$a_2^2 = k_2\frac{(b^2+c^2)}{b^2c^2}, \quad b_2^2 = k_2\frac{(c^2+a^2)}{c^2a^2}, \quad c_2^2 = k_2\frac{(a^2+b^2)}{a^2b^2},$$

$$a_3^2 = a^2k_3, \quad b_3^2 = b^2k_3, \quad c_3^2 = c^2k_3.$$

Aus der Ungleichung (11) folgt sogleich, daß die beiden Ellipsoide einander stets schneiden, denn wenn $a_3^2 < a_2^2$ ist, so folgt umgekehrt $c_3^2 > c_2^2$.

Sind die a- oder c-Axen für beide nahe gleich, so hat die Schnittcurve elliptische Gestalt und die Wirbelaxe bleibt immer in der Nähe der bezüglichen Ellipsoidaxe; sind die b-Axen nahe gleich, so hat die Schnittcurve in der Nähe derselben den Charakter einer Hyperbel, die Wirbelaxe entfernt sich also um endliche Winkel von ihr, auch wenn sie ihr zu irgend einer Zeit unendlich nahe war. Dies stimmt vollständig mit den Sätzen über die Stabilität resp. Labilität der Rotation eines starren Körpers um die Axe größten, kleinsten oder mittleren Trägheitsmomentes überein.

Die vollständige Lösung des Problemes geschieht durch elliptische Functionen. Setzt man $am(\lambda t + \mu)$ kurz gleich ψ und

$$\xi = A \cos\psi, \quad \eta = B \sin\psi, \quad \zeta = C\Delta\psi \qquad 12)$$

und bezeichnet man den Modul mit $\varkappa$, so liefern die Gleichungen (7) folgende drei Relationen zwischen fünf von den sechs willkürlichen Constanten A, B, C, $\varkappa$, λ, μ:

$$\frac{A\lambda}{BC} = \frac{2a^2(c^4-b^4)}{N}, \quad \frac{B\lambda}{CA} = \frac{2b^2(c^4-a^4)}{N}, \quad \varkappa^2\frac{C\lambda}{AB} = \frac{2c^2(b^4-a^4)}{N}, \qquad 13)$$

worin $N = (b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)$ bedeutet. Aus ihnen lassen sich drei der sechs Constanten durch die übrigen ausdrücken, diese hinwiederum bestimmen sich durch den Anfangszustand.

Wir wollen B^2, λ^2, $\varkappa^2$ durch die übrigen geben und erhalten, indem wir das Verhältniß der ersten und zweiten, sowie der ersten und dritten Formel und das Product der ersten und zweiten bilden:

$$\begin{aligned} B^2 &= A^2\frac{b^2(c^4-a^4)}{a^2(c^4-b^4)}, \quad \varkappa^2 = \frac{A^2}{C^2}\frac{c^2(b^4-a^4)}{a^2(c^4-b^4)}, \\ \lambda^2 &= \frac{4C^2a^2b^2}{N^2}(c^4-a^4)(c^4-b^4). \end{aligned} \qquad 14)$$

Was die Bestimmung der noch verfügbaren drei Constanten A, B und μ durch den Anfangszustand anbetrifft, so liegen die Verhältnisse hier einfacher, als bei dem Problem der Rotation eines starren Körpers, weil zwischen den Geschwindigkeiten u, v, w und den Wirbelcomponenten nach (2) und (5) lineäre Beziehungen bestehen, welche, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten u_0, v_0, w_0 gegeben sind, ohne Schwierigkeiten die Anfangswerthe ξ_0, η_0, ζ_0 anzugeben gestatten, und umgekehrt.

Rechnen wir die Zeit von dem Moment an, wo $\psi = am(\lambda t + \mu)$ gleich Null ist, oder setzen wir, was dasselbe ist, $\mu = 0$, so ergeben die Ansätze (12)

$$\xi_0 = A, \quad \zeta_0 = C,$$

also A und C vollständig bestimmt. Das Vorzeichen von B bestimmt sich durch die erste Gleichung (13), wenn dasjenige von λ festgesetzt ist. Eine Umkehrung des Zeichens von λ hat Gleiches für B zur Folge, daher ist eines der beiden völlig willkürlich zu wählen. —

Sind die Wirbelcomponenten ξ, η, ζ, wie vorstehend gezeigt, durch elliptische Functionen der Zeit ausgedrückt, so folgen daraus sogleich die vollständigen Werthe der Geschwindigkeiten:

15)
$$\begin{aligned} u &= 2a^2\left(\frac{\eta z}{c^2+a^2} - \frac{\zeta y}{a^2+b^2}\right), \\ v &= 2b^2\left(\frac{\zeta x}{a^2+b^2} - \frac{\xi z}{b^2+c^2}\right), \\ w &= 2c^2\left(\frac{\xi y}{b^2+c^2} - \frac{\eta x}{c^2+a^2}\right). \end{aligned}$$

Wendet man diese Ausdrücke auf die Zeit $t = 0$ an, so erhält man unter Berücksichtigung des oben Entwickelten

$$u_0 = -\frac{2a^2 Cy}{a^2+b^2}, \quad v_0 = 2b^2\left(\frac{Cx}{a^2+b^2} - \frac{Az}{b^2+c^2}\right), \quad w_0 = +\frac{2c^2 Ay}{b^2+c^2};$$

diese Formeln zeigen, wie die Constanten A und C mit den Anfangsgeschwindigkeiten zusammenhängen und geben von dem Anfangszustand selbst eine anschauliche Vorstellung. Die XZ-Ebene dreht sich z. B. im ersten Moment wie eine starre Platte um die Gerade

$$\frac{Cx}{a^2+b^2} = \frac{Az}{b^2+c^2}$$

mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_1 = 2b^2\sqrt{\frac{A^2}{(b^2+c^2)^2} + \frac{C^2}{(b^2+a^2)^2}},$$

die Y-Axe um die Gerade

$$\frac{a^2 Cx}{a^2+b^2} = \frac{c^2 Az}{b^2+c^2}$$

mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_2 = 2\sqrt{\frac{c^4 A^2}{(b^2+c^2)^2} + \frac{a^4 C^2}{(a^2+b^2)^2}}.$$

Die Gleichungen der Strom- oder Geschwindigkeitscurven werden erhalten, indem man in (15)

$$u = Vdx/ds, \quad v = Vdy/ds, \quad w = Vdz/ds$$

setzt und die Gleichungen (15) bei constanten t nach s integrirt; ds bezeichnet dabei das Linienelement der Curven und V die resultirende Geschwindigkeit.

Integrable Combinationen erhält man aus (15), wenn man die drei Gleichungen resp. mit den Factoren

$$\frac{x}{a^2}, \quad \frac{y}{b^2}, \quad \frac{z}{c^2} \quad \text{und} \quad \frac{b^2c^2\xi}{b^2+c^2}, \quad \frac{c^2a^2\eta}{c^2+a^2}, \quad \frac{a^2b^2\zeta}{a^2+b^2}$$

zusammenfaßt. Sie liefern die Integrale

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = m, \tag{16}$$

$$\frac{x\xi b^2c^2}{b^2+c^2} + \frac{y\eta c^2a^2}{c^2+a^2} + \frac{z\zeta a^2b^2}{a^2+b^2} = m_1, \tag{17}$$

worin m und m_1 die Integrationsconstanten bezeichnen. Das erste ergiebt eine Schaar zu der Begrenzungsfläche (1) ähnlicher Ellipsoide, was nach S. 72 vorauszusehen war, das zweite eine Schaar Ebenen, welche parallel sind zu der Tangentenebene, die sich an das *zweite* Ellipsoid (9) im Endpunkt des Vectors τ, d. h. an der Stelle wo dasselbe von der augenblicklichen Wirbelaxe geschnitten wird, construiren läßt.

Dies ergiebt den anschaulichen Satz:

Die Strom- oder Geschwindigkeitscurven sind in jedem Moment gegeben durch die elliptischen Schnittlinien der Schaar zu dem begrenzenden ähnlichen Ellipsoide mit der Schaar Ebenen, welche parallel sind der Tangentenebene an dem zweiten Hülfsellipsoid in dem Punkte, wo dasselbe von der momentanen Wirbelaxe geschnitten wird.

Aber diese Ellipsen sind keineswegs zugleich die Bahncurven der einzelnen Flüssigkeitstheilchen, da ja die Bewegung nicht stationär ist.

Diese, sowie die Bewegung der Flüssigkeitstheilchen in ihrer Bahn zu erhalten, muß man in (15)

$$u = dx/dt, \quad v = dy/dt, \quad w = dz/dt$$

setzen und durch Integration x, y, z als Functionen von t bestimmen;

bildet man aus diesen Beziehungen durch Elimination von t zwei von der Zeit unabhängige Gleichungen zwischen x, y, z, so geben diese die Gleichungen der Bahn.

Wiederum sind zwei Integrale sehr leicht zu bestimmen. Denn die Factoren x/a^2, y/b^2, z/c^2 geben aus (15) eine auch nach t integrable Combination und damit das Integral

$$18)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=m,$$

welches nur aussagt, daß, wie jede Stromcurve in jedem Moment, so auch jedes einzelne Flüssigkeitstheilchen während seines ganzen Laufs auf einem zu dem begrenzenden ähnlichen Ellipsoid bleibt. Faßt man hingegen die Gleichungen (7) mit den Factoren x/a^2, y/b^2, z/c^2 und die Gleichungen (15) mit den Factoren ξ/a^2, η/b^2, ζ/c^2 zusammen, so erhält man eine zweite integrable Combination, welche liefert

$$19)\qquad \frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}+\frac{z\zeta}{c^2}=n;$$

n ist dabei die Integrationsconstante.

Die Gleichung giebt unendlich viele Ebenen, welche parallel sind der Tangentialebene, die sich in dem betreffenden Zeitpunkt an dem dritten Ellipsoid (10) im Endpunkt des Vectors τ ziehen läßt und sich mit diesem bewegt.

Ein gegebener Werth der Integrationsconstanten m und n bestimmt eine Reihe Flüssigkeitstheilchen, die zu irgend einer Zeit die Schnittellipse zweier bestimmter Flächen (18) und (19) erfüllen; die letzten Formeln zeigen, daß dieser Flüssigkeitsfaden zu jedem Zeitmoment die Gestalt der Schnittcurve dieser selben beiden Flächen besitzt, also mit der Ebene (19) auf dem Ellipsoid (18) herumwandert, dabei zwar immer eine elliptische Gestalt behält, aber seine Form von Moment zu Moment ändert.

Man kann mit Hülfe der bisher gefundenen Resultate sich schon eine recht deutliche Vorstellung von dem Verlauf der Bahnen auf einem der Ellipsoide (18) verschaffen. Construirt man nämlich auf demselben für gleiche und kleine Zeitintervalle alle Lagen σ_1, σ_2... der Schnittcurve desselben mit der Ebene (19), so geben diese die successiven Positionen eines und desselben Flüssigkeitsfadens. Legt man ferner durch den Mittelpunkt des Ellipsoides für jeden der gewählten Zeitpunkte die ihm entsprechende Ebene (17), so liegt ihr parallel die Geschwindigkeit, welche in dem betrachteten Moment alle Theile jenes Flüssigkeitsfadens haben. Man kann also leicht Linienelemente ds zwischen den Curven σ_1, $\sigma_2 \dots$ construiren in der Richtung der Bewegung, welche die benachbarten Flüssigkeitstheilchen besitzen, und so einen zusammenhängenden Zug von Elementen ds gewinnen, der die Bahncurve eines Theilchens angiebt.

Unter diesen Bahnen ist eine bestimmte Schaar von besonderer Einfachheit und sogleich angebbar.

Für die Gleichungen (15) ist nämlich

$$x = q\xi, \; y = q\eta, \; z = q\zeta \tag{20}$$

ein particuläres Integral, denn durch Substitution dieser Werthe geht das System (15) in (7) über; dieser Umstand ist ein Ausdruck des bekannten Helmholtz'schen Satzes, daß die Wirbellinien immer von denselben Theilchen gebildet werden, jene Coordinaten x, y, z entsprechen nämlich Flüssigkeitstheilchen auf dem Vector r. Hieraus folgt, daß die Schnittcurve der Ellipsoide (9) und (10) und die ihr auf den ähnlichen Ellipsoiden (18) entsprechenden specielle Bahncurven sind.

Was nun endlich die Darstellung der Coordinaten x, y, z eines jeden Flüssigkeitstheilchens als Functionen der Zeit allein anbetrifft, so ist ein particuläres Integral der Gleichungen (15), nämlich das Werthsystem (20)

$$x_1 = q\xi, \; y_1 = q\eta, \; z_1 = q\zeta,$$

bereits oben benutzt worden. Wie man aus diesen die allgemeinen Ausdrücke für x, y, z ableiten kann, hat Herr Dr. Venske in einer dieser Arbeit sich anschließenden Notiz gezeigt. Die allgemeinen Resultate, die sich durch elliptische Integrale ausdrücken, sind wenig übersichtlich.

Wir wollen uns daher eingehender nur mit dem speciellen Fall beschäftigen, daß das Ellipsoid (1) ein Rotationsellipsoid um die Z-Axe, also $a = b$ ist. Hier läßt sich die vollständige Integration der Gleichungen (15) nach t ohne Schwierigkeit ausführen.

Zunächst giebt die dritte der Gleichungen (7) $d\zeta/dt = 0$, woraus wir $\zeta = \nu$ schließen, falls ν eine Constante bezeichnet, und die ersten beiden nehmen die Form an:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\lambda\eta, \; \frac{d\eta}{dt} = +\lambda\xi, \tag{22}$$

worin kurz $\nu\dfrac{c^2-a^2}{c^2+a^2} = \lambda$ gesetzt ist.

Hieraus folgt bei geeigneter Verfügung über den Anfangspunkt der Zeit t

23) $$\xi = \mu \cos \lambda t, \quad \eta = \mu \sin \lambda t;$$

die Wirbelaxe wandert also mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einem Kreiskegel von der Oeffnung ϑ, wo $\operatorname{tg} \vartheta = \nu / \mu$ ist, um die Z-Axe; die Umlaufsdauer ist

24) $$T = \pm 2\pi / \lambda = \pm 2\pi (c^2 + a^2) / \nu (c^2 - a^2),$$

also um so kleiner, je mehr das Ellipsoid von der Kugel abweicht.

Für die Geschwindigkeiten erhält man nach (15) die Werthe:

25) $$\begin{aligned} u &= -\nu y + \frac{\nu - \lambda}{\nu} \mu z \sin \lambda t, \\ v &= +\nu x - \frac{\nu - \lambda}{\nu} \mu z \cos \lambda t, \\ w &= \frac{\nu + \lambda}{\nu} \mu (y \cos \lambda t - x \sin \lambda t). \end{aligned}$$

Eine particuläre Lösung dieser Gleichungen für x, y, z als Functionen der Zeit ist bereits oben angegeben, nämlich

26) $$x_1 = q_1 \xi = q_1 \mu \cos \lambda t, \quad y_1 = q_1 \eta = q_1 \mu \sin \lambda t, \quad z_1 = q_1 \zeta = q_1 \nu.$$

Eine weitere mit zwei Constanten findet man leicht direct, indem man

26′) $$z_2 = q_2 \cos (\sigma t + \delta)$$

setzt; dann werden die obigen Gleichungen befriedigt durch

26″) $$\begin{aligned} x_2 &= + \frac{\mu (\nu - \lambda)}{2\nu} q_2 \left[\frac{\cos ((\sigma - \lambda) t + \delta)}{\nu + (\sigma - \lambda)} + \frac{\cos ((\sigma + \lambda) t + \delta)}{\nu - (\sigma + \lambda)} \right], \\ y_2 &= - \frac{\mu (\nu - \lambda)}{2\nu} q_2 \left[\frac{\sin ((\sigma - \lambda) t + \delta)}{\nu + (\sigma - \lambda)} - \frac{\sin ((\sigma + \lambda) t + \delta)}{\nu - (\sigma + \lambda)} \right], \end{aligned}$$

falls $\sigma = \sqrt{(\nu - \lambda)^2 + (\nu^2 - \lambda^2) \dfrac{\mu^2}{\nu^2}} = \dfrac{2a}{c^2 + a^2} \sqrt{a^2 \nu^2 + c^2 \mu^2}$ ist.

Die Wurzel kann positiv genommen werden; das negative

Zeichen würde sachlich dieselben Lösungen ergeben. Da nun die gefundenen particulären Lösungen zusammen drei willkürliche Constanten enthalten, und die Gleichungen (15) in Bezug auf x, y, z lineär sind, so geben

$$x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2, \quad z = z_1 + z_2$$

die vollständigen Werthe der Coordinaten.

Sie lassen sich auch schreiben:

$$x = q_1 \mu \cos\lambda t - \frac{q_2 a}{\mu c^2}\left[a\nu\cos(\sigma t+\delta)\cos\lambda t - \sqrt{a^2\nu^2+c^2\mu^2}\sin(\sigma t+\delta)\sin\lambda t\right],$$

$$y = q_1 \mu \sin\lambda t - \frac{q_2 a}{\mu c^2}\left[a\nu\cos(\sigma t+\delta)\sin\lambda t + \sqrt{a^2\nu^2+c^2\mu^2}\sin(\sigma t+\delta)\cos\lambda t\right],$$

$$z = q_1\nu + q_2\cos(\sigma t+\delta). \tag{27}$$

Führt man ein Coordinatensystem X_1, Y_1, Z_1 ein, welches sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit, wie die Wirbelaxe, um die Z-Axe dreht, setzt man also

$$x_1 = x\cos\lambda t + y\sin\lambda t, \quad y_1 = -x\sin\lambda t + y\cos\lambda t, \quad z_1 = z,$$

so ergiebt sich

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1\mu - \frac{q_2\nu a^2}{\mu c^2}\cos(\sigma t+\delta), \\ y_1 &= -\frac{q_2 a}{\mu c^2}\sqrt{a^2\nu^2+c^2\mu^2}\sin(\sigma t+\delta), \\ z_1 &= q_1\nu + q_2\cos(\sigma t+\delta). \end{aligned} \tag{28}$$

Hieraus folgen für die Bahn des Flüssigkeitstheilchens die Gleichungen

$$(x_1 - q_1\mu)\frac{\mu}{a^2} + (z_1 - q_1\nu)\frac{\nu}{c^2} = 0 \tag{29}$$

und falls man

$$\frac{(x_1 - q_1\mu)\nu a^2 - (z_1 - q_1\nu)\mu c^2}{\sqrt{\nu^2 a^4 + \mu^2 c^4}} = x' \text{ setzt},$$

$$\frac{x'^2}{a^4\nu^2 + c^4\mu^2} + \frac{y_1^2}{a^2(a^2\nu^2 + c^2\mu^2)} = \frac{q_2^2}{\mu^2 c^4}. \tag{30}$$

Diese Formeln, deren erste sachlich mit (19) übereinstimmt, geben folgende Resultate, von denen ein Theil im allgemeinen Fall eines dreiaxigen Ellipsoides schon oben abgeleitet ist.

Die einzelnen Flüssigkeitstheilchen bewegen sich in Ellipsen, welche senkrecht zu einer Meridianebene durch die Z-Axe stehen, die ihrerseits mit derselben Winkelgeschwindigkeit λ, wie die Wirbelaxe, um die Z-Axe rotirt. Die Ebene dieser Bahnellipse ist die Tangentenebene an dem Ellipsoid (10) im Endpunkt der Wirbelaxe τ und demgemäß um einen constanten Winkel Θ gegen die Z-Axe geneigt, der sich bestimmt aus

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\nu a^2}{\mu c^2},$$

also für alle Theilchen den gleichen Werth hat; sie befindet sich vom Centrum des die Flüssigkeit begrenzenden Ellipsoides in dem Abstand

$$d = q_1 \frac{a^2 \nu^2 + c^2 \mu^2}{\sqrt{a^4 \nu^4 + c^4 \mu^2}},$$

der allein von der ersten Integrationsconstante q_1 abhängt.

Die Halbaxenquadrate A^2 und B^2 der Ellipse sind

$$A^2 = \frac{q_2^2 (a^4 \nu^2 + c^4 \mu^2)}{\mu^2 c^4}, \quad B^2 = \frac{q_2^2 a^2 (a^2 \nu^2 + c^2 \mu^2)}{\mu^2 c^4},$$

sie enthalten also nur die zweite Constante q_2; erstere Axe liegt in der Meridianebene, letztere normal dazu; ihr Verhältniß ist für alle Theilchen von gleicher Größe.

Diese rotirende Bahnellipse wird umlaufen in der Zeit

$$T' = \frac{2\pi}{\sigma} = \frac{\pi (a^2 + c^2)}{a \sqrt{a^2 \nu^2 + c^2 \mu^2}},$$

welche für alle Theilchen die gleiche Größe hat, aber von der Umlaufsdauer der Wirbelaxe verschieden ist. Die Bahnen der Flüssigkeitstheilchen sind also keine geschlossenen Curven. —

Für den Druck p, welcher innerhalb der bewegten Flüssigkeit stattfindet, ergeben die Euler'schen Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial\left(\Phi + \frac{p}{\varepsilon}\right)}{\partial x}$$

u. s. f., falls wir das Potential Φ, welches sich von p/ε nicht sondert, der Einfachheit halber gleich Null setzen, unter Benutzung der Werthe (5) und der Differentialgleichungen (7), die Beziehungen

$$4a^2b^2c^2\left[x\left(\frac{\zeta^2}{c^2(a^2+b^2)^2} + \frac{\eta^2}{b^2(c^2+a^2)^2}\right) - \frac{2\xi(\eta y + \zeta z)}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}\right] = +\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial x} \quad 31)$$

u. s. f. Aus ihnen folgt durch Integration:

$$p = C + 4a^2b^2c^2\varepsilon\left\{\frac{x^2}{2}\left(\frac{\zeta^2}{c^2(a^2+b^2)^2} + \frac{\eta^2}{b^2(c^2+a^2)^2}\right) + \frac{y^2}{2}\left(\frac{\xi^2}{a^2(b^2+c^2)^2} + \frac{\zeta^2}{c^2(a^2+b^2)^2}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{z^2}{2}\left(\frac{\eta^2}{b^2(c^2+a^2)^2} + \frac{\xi^2}{a^2(b^2+c^2)^2}\right) - \frac{2(\eta\zeta yz + \zeta\xi zx + \xi\eta xy)}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}\right\}. \quad 32)$$

Um hieraus die Kraftcomponenten und Drehungsmomente zu berechnen, welche die Schaale erfährt, beachte man, daß

$$X = \int p\cos(n_a, x)\,do, \quad L = \int p(y\cos(n_a, z) - z\cos(n_a, y))\,do$$

ist, und ähnlich die anderen.

Hieraus ist zu gewinnen

$$X = \int \frac{\partial p}{\partial x}\,dk, \quad L = \int\left(y\frac{\partial p}{\partial z} - z\frac{\partial p}{\partial y}\right)dk,$$

wo dk das Raumelement der Flüssigkeit bezeichnet. Da nun für das Ellipsoid (1)

$$\int x^2\,dk = \frac{4\pi}{15}a^3bc, \quad \int y^2\,dk = \frac{4\pi}{15}ab^3c, \quad \int z^2\,dk = \frac{4\pi}{15}abc^3$$

ist, so resultirt sogleich:

$$X = Y = Z = 0,$$

$$L = P\eta\zeta(c^2-b^2), \quad M = P\zeta\xi(a^2-c^2), \quad N = P\xi\eta(b^2-a^2), \quad 33)$$

worin

$$\frac{32\pi a^3b^3c^3\varepsilon}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)} = P$$

gesetzt ist.

Die ellipsoidische Schaale erfährt also seitens der bewegten Flüssigkeit ein Drehungsmoment um eine Axe, deren Richtungscosinus α, β, γ gegeben sind durch

$$34)\qquad \alpha : \beta : \gamma = \eta\zeta(c^2-b^2) : \zeta\xi(a^2-c^2) : \xi\eta(b^2-a^2),$$

von einer Größe

$$35)\qquad D = P\tau d \sin(\tau, d);$$

hierin ist τ die momentane Wirbelgeschwindigkeit, d die Länge des Lothes vom Centrum der Schaale auf die Tangentenebene, welche am ersten Ellipsoid (8) im Endpunkt der augenblicklichen Wirbelaxe construirt werden kann, (τ, d) der Winkel zwischen diesem Loth und der Wirbelaxe. Auch die Axe, um welche das resultirende Moment wirkt, hat eine Beziehung zu diesem Ellipsoid. Da nämlich nach (34) gilt

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0 \text{ und}$$
$$36)\qquad \alpha a^2\xi + \beta b^2\eta + \gamma c^2\zeta = 0,$$

so steht die Axe des resultirenden Momentes stets normal zur Ebene durch die momentane Wirbelaxe τ und das Loth d.

Es haben also alle drei Ellipsoide (8), (9), (10) bei diesem Problem eine gewisse geometrische Bedeutung.

Ihre gemeinsame Schnittcurve giebt den Verlauf der resultirenden Wirbelgeschwindigkeit mit der Zeit an, das Ellipsoid (9) kommt bei der Bestimmung der Strömungs- oder Geschwindigkeitscurven, (10) bei der Bestimmung der Bahnen der einzelnen Flüssigkeitstheilchen, endlich (8) bei der Bestimmung der Einwirkung in Betracht, welche die ellipsoidische Schaale seitens der Flüssigkeit erfährt.

Göttingen, Anfang März 1891.

Zusatz.

Integration eines speciellen Systems linearer, homogener Differentialgleichungen mit doppelt-periodischen Functionen als Coefficienten.

Von

O. Venske.

Bei einer Untersuchung über nicht stationäre Wirbelbewegungen einer idealen Flüssigkeit wurde Herr Prof. W. Voigt auf das folgende System simultaner Differentialgleichungen geführt:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2a^2\left(\frac{\eta z}{a^2+c^2} - \frac{y\zeta}{a^2+b^2}\right), \\ \frac{dy}{dt} &= 2b^2\left(\frac{\zeta x}{b^2+a^2} - \frac{z\xi}{b^2+c^2}\right), \\ \frac{dz}{dt} &= 2c^2\left(\frac{\xi y}{c^2+b^2} - \frac{x\eta}{c^2+a^2}\right). \end{aligned} \tag{A}$$

In demselben bedeuten a, b, c Constanten, und ξ, η, ζ elliptische Functionen von t, welche den folgenden Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{2a^2(b^2-c^2)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}\,\eta\zeta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \frac{2b^2(c^2-a^2)}{(b^2+c^2)(b^2+a^2)}\,\zeta\xi, \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \frac{2c^2(a^2-b^2)}{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}\,\xi\eta. \end{aligned} \tag{B}$$

Von Herrn Prof. W. Voigt aufgefordert habe ich mich mit der Integration des Systems (A) beschäftigt. Die Resultate, zu denen ich gelangte, teile ich im Folgenden mit.

Da das System (A) in das System (B) übergeht, wenn man ξ, η, ζ anstatt x, y, z setzt, ist

$$x = \xi,\quad y = \eta,\quad z = \zeta$$

ein particuläres Integral des Systems (A).

Ich werde nun zeigen, wie man aus einem particulären Integrale unendlich viele andere von demselben und von einander linear unabhängige particuläre Integrale gewinnen kann.

x_1, y_1, z_1 sei ein particuläres Integral des Systems (A), welches für einen bestimmten Wert t_0 der unabhängig Variablen t der Gleichung genügt

$$(\mathfrak{a}) \qquad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2} = 1 .$$

Es existieren jedenfalls unendlich viele Systeme particulärer Integrale x_2, y_2, z_2 und x_3, y_3, z_3 von der Art, daß für denselben Wert t_0 von t die Gleichungen bestehen

$$(\mathfrak{b}) \qquad \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}+\frac{z_2^2}{c^2} = 1,$$

$$(\mathfrak{c}) \qquad \frac{x_3^2}{a^2}+\frac{y_3^2}{b^2}+\frac{z_3^2}{c^2} = 1,$$

$$(\mathfrak{d}) \qquad \frac{x_1 x_2}{a^2}+\frac{y_1 y_2}{b^2}+\frac{z_1 z_2}{c^2} = 0,$$

$$(\mathfrak{e}) \qquad \frac{x_2 x_3}{a^2}+\frac{y_2 y_3}{b^2}+\frac{z_2 z_3}{c^2} = 0,$$

$$(\mathfrak{f}) \qquad \frac{x_3 x_1}{a^2}+\frac{y_3 y_1}{b^2}+\frac{z_3 z_1}{c^2} = 0.$$

Die linken Seiten der Gleichungen $(\mathfrak{a}), \cdots, (\mathfrak{f})$ sind aber Constanten, wie ich sogleich beweisen werde.

Der Voraussetzung nach bestehen die Relationen

$$\frac{dx_i}{dt} = 2a^2\left(\frac{\eta z_i}{a^2+c^2} - \frac{y_i \zeta}{a^2+b^2}\right),$$

$$\frac{dy_i}{dt} = 2b^2\left(\frac{\zeta x_i}{b^2+a^2} - \frac{z_i \xi}{b^2+c^2}\right),$$

$$\frac{dz_i}{dt} = 2c^2\left(\frac{\xi y_i}{c^2+b^2} - \frac{x_i \eta}{c^2+a^2}\right),$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Multipliciert man dieselben der Reihe nach mit

$$\frac{x_k}{a^2}, \quad \frac{y_k}{b^2}, \quad \frac{z_k}{c^2} \qquad (k = 1, 2, 3)$$

und addirt dann, so erhält man

$$\frac{x_k}{a^2}\frac{dx_i}{dt}+\frac{y_k}{b^2}\frac{dy_i}{dt}+\frac{z_k}{c^2}\frac{dz_i}{dt} = -\frac{x_i}{a^2}\frac{dx_k}{dt}-\frac{y_i}{b^2}\frac{dy_k}{dt}-\frac{z_i}{c^2}\frac{dz_k}{dt}$$

und hieraus

$$d\left(\frac{x_i x_k}{a^2}+\frac{y_i y_k}{b^2}+\frac{z_i z_k}{c^2}\right) = 0.$$

Die aufgestellte Behauptung ist also erwiesen, und damit ist dargethan, daß $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$ für jeden Wert des Argumentes t den Gleichungen $(\mathfrak{a}), \cdots, (\mathfrak{f})$ genügen.

Aus diesen Gleichungen folgt, wenn ε eine zweite Einheitswurzel bedeutet,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\varepsilon a}{bc}(y_2 z_3 - y_3 z_2), \\ x_2 &= \frac{\varepsilon a}{bc}(y_3 z_1 - y_1 z_3), \qquad (\mathfrak{g}) \\ x_3 &= \frac{\varepsilon a}{bc}(y_1 z_2 - y_2 z_1), \end{aligned}$$

$$|x_i, \; y_i, \; z_i| = \varepsilon \cdot abc. \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (\mathfrak{h})$$

Multipliciert man die Gleichungen $(\mathfrak{g})$ der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3, addiert sie und benutzt die Gleichung $(\mathfrak{h})$, so erhält man

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2. \qquad (\mathfrak{i})$$

Eine Relation, welche von den bisher zwischen $x_1, \cdots, z_3$ aufgestellten Relationen unabhängig ist, ergiebt sich durch geeignete Umformung des Ausdruckes

$$dl(x_2 + i x_3) = \frac{x_2 dx_2 + x_3 dx_3 + i(x_2 dx_3 - x_3 dx_2)}{x_2^2 + x_3^2}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung geht bei Benutzung von $(\mathfrak{i})$ und der Beziehungen

$$\frac{dx_2}{dt} = 2a^2\left(\frac{\eta z_2}{a^2+c^2} - \frac{\zeta y_2}{a^2+b^2}\right), \quad \frac{dx_3}{dt} = 2a^2\left(\frac{\eta z_3}{a^2+c^2} - \frac{\zeta y_3}{a^2+b^2}\right),$$

$$y_1 = \frac{\varepsilon b}{ac}(z_2 x_3 - z_3 x_2), \quad z_1 = \frac{\varepsilon c}{ab}(x_2 y_3 - x_3 y_2)$$

über in

$$\frac{1}{a^2 - x_1^2}\left(-x_1 \frac{dx_1}{dt} - 2 i \varepsilon a^3 bc\left(\frac{\eta y_1}{b^2(a^2+c^2)} + \frac{\zeta z_1}{c^2(a^2+b^2)}\right)\right) dt.$$

Also hat man

$$(\mathfrak{k}) \quad x_2 + i x_3 = e^{\int \left(-x_1 \frac{dx_1}{dt} - 2 i \varepsilon a^3 bc \left(\frac{\eta y_1}{b^2(c^2+a^2)} + \frac{\zeta z_1}{c^2(a^2+b^2)}\right)\right) \frac{dt}{a^2 - x_1^2}}.$$

Durch die sechs Gleichungen ($\mathfrak{b}$), $\cdots$, ($\mathfrak{f}$), ($\mathfrak{k}$) ist man in den Stand gesetzt, aus einem particulären Integrale zwei weitere von demselben und von einander linear unabhängige Integrale des Systems (A) herzuleiten. Da ich nun oben ein particuläres Integral dieses Systems angegeben habe, bietet das Vorhergehende die vollständigen Mittel zur Berechnung des allgemeinen Integrales desselben dar.

Göttingen, März 1891.

Ueber Realitätseigenschaften von Raumcurven.

Von

Franz Meyer in Clausthal.

Vorgelegt von F. Klein.

Unter einer „Raumcurve" sei der Ort von Punkten verstanden, deren rechtwinklige Coordinaten x, y, z als analytische Functionen eines Parameters gegeben seien.

Handelt es sich nur um die Umgebung[1]) einer irgendwie singulären Stelle der Curve, so läßt sich die letztere ersetzen durch eine rationale Raumcurve, die daselbst die nämliche Singularität besitzt und deren Ordnung zudem so niedrig angenommen werden darf, als es überhaupt die fragliche Singularität gestattet.

Die gemeinte Ersetzung ist auch dann noch erlaubt, wenn man sich die Coefficienten der ursprünglichen Functionen solchen Variationen unterworfen denkt, daß die Curve in benachbarte Curven übergeht, für welche sich die erwähnte Singularität in einfachere „aufgelöst" hat. Man hat dann nur die entsprechenden Variationen an den Coefficienten der rationalen Hülfscurve anzubringen.

Im Folgenden werden nur derartige benachbarte oder „penultimate" Zustände gewisser Singularitäten in Betracht kommen, welche dadurch entstehen mögen, daß zwei einfachere Singularitä-

---

1) Vgl. die nähere Ausführung ähnlicher Ueberlegungen für ebene Curven bei Brill „Ueber Singularitäten ebener Curven und eine neue Curvenspecies" Math. Annalen Bd. XVI § 2.

ten gleicher Art zusammenrücken; insbesondere soll festgestellt werden, wieweit die Realität resp. Nichtrealität coincidirender singulärer Curvenelemente beim Passiren des bez. Vorkommnisses bestehen bleibt, oder aber aufgehoben wird.

Um einen abgegrenzten Bezirk solcher Erscheinungen zu umfassen, verstehen wir unter „gewöhnlichen Singularitäten“ einer „Raumcurve“ C solche, die stets in endlicher Anzahl vorhanden sind und der Forderung entspringen, daß von den Schnittpunkten einer Ebene resp. Geraden mit C eine genügende Anzahl von Malen mehrere consecutiv werden.

Bezeichnet man getrennte Schnittpunkte mit verschiedenen griechischen (kleinen) Buchstaben, die Anzahl an einer Stelle α zusammengerückter durch einen Exponenten, endlich die auf eine Gerade sich beziehenden Punktgruppen mittelst einer Klammer, so hat man genau fünf derartiger Vorkommnisse zu verzeichnen, nemlich Ebenen α^4, $\alpha^3\beta^2$, $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ und Gerade $(\alpha^2\beta)$, $(\alpha\beta\gamma\delta)$.

Indem wir uns auf solche „Verdichtungen“ beschränken, für deren Zustandekommen das Erfülltsein einer einzigen Bedingung zwischen den Coefficienten der Curve hinreicht, haben wir die Coincidenzen zwischen zwei gleichberechtigten Elementen α entweder einer und derselben, oder aber zweier verschiedener Singularitäten des nämlichen Typus in's Auge zu fassen.

Dabei kommen uns die Zerlegungen zu Statten, die unlängst [1]) für die Discriminanten (und Resultanten) der zu rationalen Raumcurven R^3_n gehörigen Singularitätenformen $[\alpha^4]$, $[\alpha^3\beta^2]$, $[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$, $[(\alpha^2\beta)]$, $[\alpha\beta\gamma\delta]$ mitgetheilt sind, im Verein mit den Betrachtungen, die damals über die Gestalt der Anfangsglieder jener fünf Formen gemacht wurden.

Die Discriminanten zerfielen in Elementarfactoren, welche bezüglich der vierreihigen Coefficientendeterminanten „δ“ irreducibel waren. Solcher Elementarfactoren gab es 14, nemlich:

$$[\alpha^5],\ [(\alpha^3)],\ [\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)],\ [\alpha^4\beta^2],\ [\alpha^3\beta^2\gamma^2],\ [(\alpha^2\beta\gamma)],\ [((\alpha\beta))];\ [\alpha^3\beta^3],$$
$$[\alpha^3\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)],\ [\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2],\ [\alpha^2\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2],\ [(\alpha\beta\gamma\delta)^2],\ [(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)],$$
$$[(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1)],$$

von denen die ersten sieben zugleich als Theiler von Resultanten auftraten.

Jede dieser 14 Invarianten haben wir vermöge geeigneter Variationen der Coefficienten durch Null hindurchgehen zu lassen,

1) Vgl. diese Nachrichten 1890 Nr. 15 und 1891 Nr. 1, in letzterer Note insbesondere die Tabelle B.

und uns dann im Einzelnen über die Realität der ein- und austretenden Elemente Rechenschaft zu geben.

Einen derartigen „Durchgang“ bewerkstelligt man am Einfachsten so, daß man die Größen δ durch lineare Combinationen $\delta + \varkappa\delta'$ ersetzt, wo $\varkappa$ ein neuer variabler Parameter sei. Verschwindet nun irgend eine unserer Invarianten etwa für $\varkappa = \varkappa_1$, so ist das Verhalten der Curve für Werthe von $\varkappa$ zu prüfen, welche $\varkappa_1$ zu beiden Seiten benachbart sind.

Vollzieht man jetzt die gleiche Substitution $\delta + \varkappa\delta'$ an Stelle von δ in den fünf Singularitätenformen selbst, so werden dieselben zu ganzen, rationalen (und reducibeln) Functionen zweier Variabeln α und $\varkappa$. Als solche seien sie bezeichnet durch:

$$[\alpha^4] = S_1(\alpha, \varkappa) = S_1, \quad [\alpha^3\beta^2] = S_2, \quad [(\alpha^2\beta)] = S_3, \quad [\alpha^2\beta^2\gamma^2] = S_4,$$
$$[(\alpha\beta\gamma\delta)] = S_5.$$

Deutet man nunmehr α und $\varkappa$ als Cartesische Coordinaten in einer Hülfsebene, so gelangt man zu einer sehr nützlichen Abbildung der Discriminantenzerlegungen, die einen Theil der zu erforschenden Verhältnisse ohne Weiteres übersehen läßt.

Die Gleichungen $S = 0$ stellen nämlich in der $[\alpha, \varkappa]$-Ebene algebraische Curven dar, deren zur α-Axe parallele (eigentliche und uneigentliche) Tangenten vollständig durch Nullsetzen der (bez. α gebildeten) Discriminanten D der Formen S geliefert werden.

Greift man daher jedesmal eine reelle Wurzel $\varkappa_1$ einer der 14 Gleichungen heraus, welche durch das Verschwinden der oben zusammengestellten Elementarfactoren entstehen, so finden die Zerlegungen der fünf Discriminanten D (cf. Tabelle B l. c.) folgenden Ausdruck:

1. $[\alpha^5]$; die Curven S_1 und S_2 berühren sich einfach (und die gemeinsame Tangente ist $\varkappa = \varkappa_1$).

2. $[(\alpha^3)]$; S_1 und S_3 berühren sich in gleicher Weise einfach, während S_2 daselbst einen gewöhnlichen $2(n-4)$-fachen Punkt besitzt.

3. $[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$; S_2 und S_3 berühren sich einfach.

4. $[\alpha^4\beta^2]$; S_2 und S_4 haben eine einfache Berührung, während S_1 unter endlicher Neigung gegen S_2 und S_4 den Berührungspunkt einfach passirt.

5. $[\alpha^3\beta^2\gamma^2]$; im Punkte $(\alpha, \varkappa_1)$ wird die Gerade $\varkappa = \varkappa_1$ von S_4 einfach berührt, während S_2 daselbst einen gewöhnlichen[1]) Dop-

1) Die Tangenten der hier vorkommenden vielfachen Punkte sind stets gegen die betr. Gerade $\varkappa = \varkappa_1$ unter endlichem (auch von einem Rechten verschiedenen)

pelpunkt aufweist. Hingegen sind die beiden Stellen $(\beta, \varkappa_1)$ und $\gamma, \varkappa_1)$ gewöhnliche Rückkehrpunkte für S_4, deren Tangenten nicht die α-Richtung haben.

6. $[((\alpha\beta))]$; die Gerade $\varkappa = \varkappa_1$ ist Doppeltangente von S_3. In den Berührungspunkten $(\alpha, \varkappa_1)$ und $(\beta, \varkappa_1)$ hat S_5 je einen gewöhnlichen $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$-fachen Punkt.

7. $[(\alpha^2\beta\gamma)]$; $(\alpha, \varkappa_1)$ verhält sich ganz wie bei (5), nur daß an die Stelle von S_4, S_2 beziehungsweise jetzt S_5, S_3 treten.

Für die zweite Reihe der noch übrigen 7 Elementarfactoren ist immer nur jeweils eine einzige Curve S in Betracht zu ziehen. Es kommt:

8. $[\alpha^3\beta^3]$; $\varkappa = \varkappa_1$ verbindet zwei einfache Rückkehrpunkte von S_2, deren Tangente gegen jene Gerade geneigt sind.

9. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]$; $(\alpha, \varkappa_1)$, $(\beta, \varkappa_1)$, $(\gamma, \varkappa_1)$ sind drei einfache Berührstellen für S_4.

10. $[(\alpha\beta\gamma\delta)^2]$; in gleicher Weise zeigt S_5 vier einfache Berührungen.

11. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2]$; auf derselben Geraden $\varkappa = \varkappa_1$ existiren vier gewöhnliche dreifache Punkte von S_4.

12. $[(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)]$; desgleichen besitzt S_5 fünf gewöhnliche vierfache Punkte.

13. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2]$; $(\alpha, \varkappa_1)$ ist ein gewöhnlicher Doppelpunkt von S_4.

14. $(\alpha\beta\gamma\delta)$, $(\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1)]$; $(\alpha, \varkappa_1)$ ist ein ebensolcher von S_5.

Was nun die mehrmaligen Berührungen (Verzweigungen) ein- und derselben Curve S angeht, so ist unschwer abzuleiten, daß dieselben (soweit sie überhaupt reell ausfallen), mit Ausnahme der Fälle (6) und (8), stets auf der nämlichen Seite der bez. Tangenten $\varkappa = \varkappa_1$ stattfinden. Dies gilt also für die Berührung nebst den beiden Spitzen von S_4 bei (5), sowie für die bei (9), (10) eintretenden drei, resp. vier Berührungen.

Schwieriger ist indessen die Beantwortung der wichtigen Frage, wie sich einmal in den eben ausgeschlossenen Fällen (6), (8) die einzelne Curve S_3 resp. S_2, andererseits bei (1), (2), (3), (4) zwei verschiedene Curven S hinsichtlich ihrer Berührung verhalten, ob nemlich die letztere auf verschiedenen Seiten der gemeinsamen Tangente erfolgt, oder aber auf derselben Seite, oder endlich, ob bald das Eine, bald das Andere möglich ist.

Winkel geneigt, und mit Ausnahme der einfachen Spitzen alle verschieden von einander. Die Modificationen, welche eintreten, wenn ein resp. zwei Paare der singulären Argumente $\alpha, \beta, \ldots$ imaginär werden, lassen sich leicht angeben.

Es läßt sich nun darthun, daß wirklich alle drei Möglichkeiten vertreten sind. Bei $[\alpha^5]$ berühren sich S_1 und S_2 auf derselben Seite, desgleichen S_2 und S_4 bei $[\alpha^4\beta^2]$; bei $[(\alpha^3)]$ findet die Berührung von S_1 und S_3 stets auf verschiedenen Seiten statt; dagegen dürfen sich im Falle $[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$ S_2 und S_3 jenachdem auf derselben oder auch auf verschiedenen Seiten berühren, und das Entsprechende gilt für die beiden Berührungspunkte resp. Spitzen von S_3 resp. S_2 auf der bezüglichen Geraden $\varkappa = \varkappa_1$ in den Fällen $[((\alpha\beta))]$, $[\alpha^3\beta^3]$.

Um darauf näher einzugehen, legen wir, wie es erlaubt ist, jeweils eiae rationale Raumcurve R_n^3 von möglichst niedriger Ordnung n zu Grunde.

Für $n = 4$ sind $[(\alpha^3)]$ und $[((\alpha\beta))]$ zu untersuchen.

Von Singularitäten existiren hier nur α^4 und $(\alpha^2\beta)$ Sei die Form $[\alpha^4]$ als eine allgemeine binäre biquadratische Form

$$\varphi = \varphi_\alpha^4 = \varphi_0 + 4\varphi_1\alpha + 6\varphi_2\alpha^2 + 4\varphi_3\alpha^3 + \varphi_4\alpha^4$$

gegeben, so wird $[(\alpha^2\beta)]$ zur Hesse'schen Covariante H von φ, $[(\alpha^3)]$ zur Discriminante $D(\varphi)$ von φ, endlich $[((\alpha\beta))]$ zur Invariante j von φ.

In Uebereinstimmung mit der Zerlegungsformel für $[(\alpha^2\beta)]$ hat man, wie bekannt, für die Discriminante $D(H)$ von H:

$$D(H) = j^2 D(\varphi).$$

Bei nicht verschwindendem j bedingt also die Gleichheit zweier Wurzeln von φ das Nämliche für H u. umg.

Legt man der im Moment des Verschwindens von $D(\varphi)$ entstehenden gemeinsamen Doppelwurzel von φ und H den Werth Null bei, so wird ein penultimater Zustand durch

$$\varphi_0 = \varepsilon\varphi_0', \ \varphi_1 = \varepsilon\varphi_1'$$

bezeichnet, wo die φ' mit der beliebig kleinen Größe ε nicht zugleich verschwinden.

Dann sind, in erlaubter Annäherung, die beiden, in die Stelle Null hineinrückenden Wurzelpaare von φ und H bestimmt durch die quadratischen Gleichungen:

$$\varphi_0 + 4\varphi_1\alpha + 6\varphi_2\alpha^2 = 0,$$
$$(\varphi_0\varphi_2 - \varphi_1^2) + 2\alpha(\varphi_0\varphi_3 - \varphi_1\varphi_2) + \alpha^2(\varphi_0\varphi_4 + 2\varphi_1\varphi_3 - 3\varphi_2^2) = 0.$$

Die Discriminanten derselben nehmen, unter Vernachlässigung höherer Potenzen von ε, die Formen an:

$$D_\varepsilon(\varphi) = 6\varepsilon\varphi_0'\varphi_2, \quad D_\varepsilon(H) = -3\varepsilon\varphi_0'\varphi_2\cdot\varphi_2^2,$$

sind also, falls ε klein genug (positiv oder negativ) gewählt ist, stets von entgegengesetztem Vorzeichen.

Geht demnach das eine der beiden Wurzelpaare vom Reellen durch Null in's Imaginäre über, so befolgt das andere die umgekehrte Richtung.

Wir kommen zum zweiten Falle für $n = 4$, in dem man j die Null passiren läßt (während $D(\varphi)$ jetzt als endlich vorausgesetzt wird). Da die Coefficienten φ_1 und φ_3 jederzeit als verschwindend angesehen werden dürfen, so braucht man nur

$$\varphi_2 = \varepsilon \varphi_2'$$

anzusetzen, um Zustände kurz vor resp. nach Eintreten des reellen Doppelpunktes $((0, \infty))$ anzugeben.

Die Form $[(\alpha^2\beta)] = H(\varphi)$ vereinfacht sich für $\varphi_1 = \varphi_3 = 0$ zu:

$$[(\alpha^2\beta)] = \varphi_2\varphi_4\alpha^4 + (\varphi_0\varphi_4 - 3\varphi_2^2)\,\alpha^2 + \varphi_0\varphi_2.$$

Die vier Wurzeln der Gleichung $[(\alpha^2\beta)] = 0$ sind dann:

$$\pm\sqrt{\frac{(3\varphi_2^2 - \varphi_0\varphi_4) \pm \sqrt{(\varphi_0\varphi_4)^2 - \varphi_2^2(10\,\varphi_0\varphi_4 - 9\varphi_2^2)}}{2\varphi_2\varphi_4}},$$

somit, wenn man die innere Quadratwurzel nach dem binomischen Satze entwickelt und höhere Potenzen von ε unterdrückt,

$$\pm\sqrt{\frac{-\varphi_2}{\varphi_4}} = \pm\sqrt{\frac{-\varepsilon\varphi_2'}{\varphi_4}};\quad \pm\sqrt{\frac{-\varphi_0}{\varphi_2}} = \pm\sqrt{\frac{-\varphi_0}{\varepsilon\varphi_2'}}.$$

Diese Wurzeln von $[(\alpha^2\beta)] = 0$ bieten bei einem Durchgange von ε durch Null eine Alternative von zwei Möglichkeiten; je nachdem nämlich φ_0 und φ_4 von entgegengesetztem oder von gleichem Vorzeichen sind, gehen beide Wurzelpaare gleichzeitig vom Reellen in's Imaginäre über (resp. vice versa), oder aber die beiden Paare zeigen entgegengesetzte Bewegung.

Bezüglich eines Doppelpunktes mit (conjugirt) imaginären Argumenten braucht wohl kaum bemerkt zu werden, daß dann die vier coincidirenden Trefftangenten $(\alpha^2\beta)$ vor- wie nachher imaginär sind.

Im Wesentlichen ebenso, wie $[((\alpha\beta))]$, muß sich $[\alpha^3\beta^3]$ (als das dualistische Vorkommniß) verhalten.

Wir gehen daher gleich über zum Studium von $[\alpha^5]$ und $[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$ auf Curven R_5^3.

Die zugehörige Fundamentalinvolution wird durch das Büschel von zwei Formen φ_α^5, ψ_α^5 dargestellt. Die Singularitätenform $[\alpha^4]$, als Functionaldeterminante von φ und ψ, beginnt mit den Gliedern:

$$[\alpha^4] = \pi_{01} + 4\alpha\pi_{02} + 2\alpha^2(3\pi_{03} + 5\pi_{12}) + \cdots$$

wo zur Abkürzung steht:

$$\begin{vmatrix} \varphi_i & \psi_i \\ \varphi_k & \psi_k \end{vmatrix} = \pi_{ik}.$$

Andererseits ergiebt sich die Singularitätenform $[\alpha^3\beta^2]$ durch Elimination von β aus $\varphi_{\alpha^3\beta^2} = 0$, $\psi_{\alpha^3\beta^2} = 0$; die Anfangsglieder sind:

$$[\alpha^3\beta^2] = (4\pi_{01}\pi_{12} - \pi_{02}^2) + 4\alpha\{2\pi_{01}\pi_{13} + \pi_{02}(\pi_{12} - \pi_{03})\}$$
$$+ 2\alpha^2\{8\pi_{02}\pi_{13} + 2\pi_{12}(\pi_{03} + 3\pi_{12}) + 2\pi_{01}(\pi_{14} + 3\pi_{23}) - \pi_{02}(\pi_{04} + 4\pi_{13}) - 2(\pi_{03} + \pi_{12})^2\} + \cdots$$

Das Criterium für Eintreten der Coincidenz $[\alpha^5]$ ist ausgedrückt durch das Verschwinden der Resultante von φ und ψ, also im canonischen Falle $\alpha = 0$ durch das Verschwinden aller

$$\pi_{0k}\,(k = 1, 2, \ldots 5).$$

Demgemäß machen wir wiederum die π_{0k} mit einer beliebig kleinen Größe ε proportional:

$$\pi_{0k} = \varepsilon\pi'_{0k},$$

und vergleichen die Discriminanten der Formen $[\alpha^4]$ und $[\alpha^3\beta^2]$.

In erster Annäherung kommt:

$$D_\varepsilon[\alpha^4] = 10\varepsilon.\pi'_{01}\pi_{12}, \quad D_\varepsilon[\alpha^3\beta^2] = 4.8.\varepsilon\pi'_{01}\pi_{12}.\pi_{12}^2,$$

beide Discriminanten haben also in der Nähe von $\varepsilon = 0$ dasselbe Vorzeichen.

Es kommt die Coincidenz $[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$ an die Reihe. Da die Ermittelung der Anfangsglieder der Form $[\alpha^2\beta]$ mit Weitläuftigkeiten verbunden ist, gehen wir indirect vor, indem wir für die Argumente α, β der Trefftangente $(\alpha^2\beta)$ von vornherein die canonischen Werthe $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ festsetzen, und nun eine (und damit zugleich eine zweite) Schmiegungsberührebene $\alpha^3\beta^2$ allmählich in die Lage $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ hineinrücken lassen.

Die Tangente der R_5^3 an der Stelle 0 trifft die Curve an der Stelle ∞ unter den Bedingungen:

$$\pi_{12} = 0, \quad \pi_{13} = 0, \quad \pi_{23} = 0,$$

wodurch sich die Entwickelung der Form $[\alpha^3\beta^2]$ zur folgenden vereinfacht:

$$[\alpha^3\beta^2] = -\pi_{02}^2 - 4\alpha\pi_{02}\pi_{03} + 2\alpha^2(2\pi_{01}\pi_{14} - 2\pi_{03}^2 - \pi_{02}\pi_{04}) + \cdots$$

Soll jetzt das Vorkommniß $[\alpha^3\beta, (\alpha^2\beta)]$ für $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ eintreten, so haben außerdem noch alle übrigen $\pi_{2k}(\varkappa = 0, 4, 5)$ zu verschwinden.

Der bezügliche penultimate Zustand der Curve läßt sich wieder characterisiren durch

$$\pi_{2k} = \varepsilon\pi'_{2k}\ (\varkappa = 0, 4, 5).$$

Entwickelt man nunmehr die Discriminante von $[\alpha^3\beta^2]$ nach aufsteigenden Potenzen von ε, so lautet das erste Glied:

$$D_\varepsilon[\alpha^3\beta^2] = \varepsilon^2 . \pi_{02}'^2 . 4\pi_{01}\pi_{14}.$$

Da aber hier das Product $\pi_{01}\pi_{14}$ ebensowohl positiver, wie negativer Werthe fähig ist, so hat die Realität (resp. Imaginarität) eines der beiden coincidirenden Paare $\alpha^2\beta^2$, $(\alpha^2\beta)$ durchaus keinen Einfluß auf die Realität des anderen Paares.

Es erübrigt noch die Besprechung der Erscheinung $[\alpha^4\beta^2]$, bei der zwei Ebenen $\alpha^3\beta^2$ und zugleich zwei Berührungspunkte einer Ebene $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ consecutiv werden. Die kleinste zulässige Ordnung der R_n^3 ist $n = 6$. Die betreffende Involution setzt sich aus drei Formen φ_α^6, ψ_α^6, χ_α^6 zusammen, deren Coefficientendeterminanten $|\varphi_i\psi_k\chi_l|$ mit δ_{ikl} bezeichnet seien.

Die Berechnung der ersten Glieder von der Singularitätenform $[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$ stößt auf ungemeine Schwierigkeiten; man ist wiederum genöthigt, wie beim letzten Male zu verfahren, und anzunehmen, daß eine Ebene bereits an den Stellen $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ und dann noch an einer weiteren γ die Curve berühre; man hat auszudrücken, daß γ sich der Stelle 0 beliebig nähere.

Nun berührt eine Ebene die Curve R in $0, \infty, \gamma$, sobald:

$$\varphi_2 + 2\varphi_3\gamma + \varphi_4\gamma^2 = 0,\quad \psi_2 + 2\psi_3\gamma + \psi_4\gamma^2 = 0,\quad \chi_2 + 2\chi_3\gamma + \chi_4\gamma^2 = 0.$$

Andererseits müßten, wenn γ wirklich den Werth Null annehmen sollte, die Coefficienten $\varphi_2, \psi_2, \chi_2$ einzeln verschwinden. Im Grenzfalle darf man also ansetzen:

$$\varphi_2 = \varepsilon\varphi'_2,\quad \psi_2 = \varepsilon\psi'_2,\quad \chi_2 = \varepsilon\chi'_2,\quad \delta_{2ik} = \varepsilon\delta'_{2ik},$$

wo die $\varphi'_2, \psi'_2, \chi'_2$ und (vorderhand auch) die δ'_{2ik} mit ε nicht verschwindende Größen sind.

Combinirt man die beiderlei Ansätze, so erkennt man, daß die Größen γ und ε von derselben Ordnung der Kleinheit sind:

$$\gamma = \varkappa\varepsilon\ (\varkappa \text{ endlich}),$$

und es resultiren nach leichter Rechnung die Relationen

$$\delta_{i23} = -\frac{\varepsilon^2 \varkappa}{2}\,\delta'_{i24}\,, \quad \delta_{i34} = -\frac{1}{2\varkappa}\,\delta'_{i24}\,,$$

sodaß die δ_{i23} diejenigen unter den Größen δ_{2ik} sind, welche sogar mit der zweiten Potenz von ε proportional werden.

Auf diese Hülfsmittel gestützt, gelingt die Entscheidung über das Vorzeichen der Discriminante der Form $[\alpha^3\beta^2]$ für kleine Werthe von ε. Die Form $[\alpha^3\beta^2]$ ist selbst eine Discriminante, nemlich diejenige der Gleichung dritten Grades für die Restpunkte, welche die Ebene α^3 aus der R_6 noch ausschneidet.

Führt man die Bildung aus, indem man sich auf die drei ersten Coefficienten beschränkt, die letzteren nach steigenden Potenzen von ε entwickelt und sich wiederum mit der jeweils niedrigsten Potenz begnügt, so hat man:

$$\begin{aligned}[\alpha^3\beta^2] = &+ 4.3.\varepsilon^2\,\delta'_{124}\,\delta^3_{013}\,\frac{\varkappa}{2} + \cdots \\ &- 4.9.\varepsilon\,\delta'_{124}\,\delta^3_{013}\,\alpha + \cdots \\ &+ 4.18\,\delta'_{124}\,\delta^3_{013}\,\frac{1}{2\varkappa}\,\alpha^2 + \cdots\end{aligned}$$

und in Folge dessen für genügend kleine ε:

$$D_\varepsilon[\alpha^3\beta^2] = +27\,\varepsilon^2\,\delta^6_{013}\,\delta'^2_{124}$$

i. e. unbedingt positiv. Mithin ist das Ebenenpaar $\alpha^3\beta^2$, welches beim Eintreten von $[\alpha^4\beta^2]$ benachbart wird, stets zugleich mit dem Paare von coincidirenden Berührungspunkten einer Tritangentialebene reell (resp. imaginär).

Hiermit ist eine vollständige Einsicht in die Lage der fünf Singularitätencurven S längs ihrer Tangenten $\varkappa = \varkappa_1$ und im Besondern hinsichtlich der gegenseitigen Berührung zweier verschiedener Curven S gewonnen.

Das ist aber nur das Bild für die Thatsache, daß wir jetzt sämmtliche Möglichkeiten erschöpfen können, die sich bezüglich einer Realitätsveränderung unserer fünferlei singulären Curvenelemente darbieten.

Indem wir alle Uebergänge bei Seite lassen, bei denen die betheiligten reellen (imaginären) Elemente reell (imaginär) bleiben, beachten wir in erster Linie die isolirte Stellung, welche die vierfachen Sehnen $(\alpha\beta\gamma\delta)$ einnehmen.

Vermöge der Coincidenz $(\alpha^2\beta\gamma)$ geht eine solche Gerade mit vier reellen Treffpunkten über in eine solche mit nur zwei reellen, oder auch eine letztere über in eine solche mit keinem reellen Treffpunkt (resp. vice versa), ohne daß irgend ein Ersatz seitens der andern Singularitäten stattfindet.

Ebenso verhält es sich mit der Erscheinung $[(\alpha\beta\gamma\delta)^2]$, wo zwei reelle Gerade, die zugleich irgend einer der eben erwähnten Arten angehören, vom Reellen in's Imaginäre übergehen (oder auch umgekehrt).

Ein theilweise ähnliches, theilweise aber auch anderes Verhalten zeigen die Tritangentialebenen $\alpha^2\beta^2\gamma^2$.

Beim Eintreten von $[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$ oder von $[\alpha^3\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]$ rücken wiederum zwei reelle Ebenen $\alpha^2\beta^2\gamma^2$, sei es mit drei oder auch nur einem reellen Berührungspunkt, zusammen, um imaginär zu werden (resp. umg.), gleichfalls ohne Compensation.

Dagegen wird beim Passiren von $[\alpha^4\beta^2]$ der Uebergang von einem Paar reeller (imaginärer) Berührungspunkte einer Ebene $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ in's Imaginäre (Reelle) begleitet von einem durchaus gleichverlaufenden eines Paares von Ebenen $\alpha^3\beta^2$.

Dieselbe Begleiterscheinung bemerkt man beim Ueberschreiten von $[\alpha^5]$, wo sich ein Paar von Ebenen $\alpha^3\beta^2$ mit einem Paare von Ebenen α^4 in paralleler Bewegung befindet.

Bei $[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$ fand zwischen dem Paar von Ebenen $\alpha^3\beta^2$ und demjenigen von Geraden $(\alpha^2\beta)$ keine Realitätsabhängigkeit statt d. h. während etwa ein reelles Paar dort gewonnen wird, kann hier ein sslches ebensogut gewonnen wie verloren werden.

Eine entsprechende Zweideutigkeit kommt den Vorgängen $[\alpha^3\beta^3]$ und $[((\alpha\beta))]$ zu, an denen sich jedesmal zwei Paare von Ebenen $\alpha^3\beta^2$ resp. Geraden $(\alpha^2\beta)$ betheiligen. Entweder geht die Realität beider Paare zugleich verloren (oder wird gewonnen); es kann aber auch ein reelles Paar von einem imaginären begleitet sein, die dann nach dem Durchgange durch das bez. Vorkommniß nur ihre Rolle vertauscht haben.

Endlich hat die Coincidenz $[(\alpha^3)]$ wieder etwas ihr Eigenthümliches, hier gesellt sich ein reelles (imaginäres) Paar von Ebenen α^4 zu einem imaginären (reellen) Paar von Geraden $(\alpha^2\beta)$, um nach dem Durchgange je in den entgegengesetzten Zustand zu gerathen.

Um den Kern dieser Ergebnisse kurz in Zeichen zu fixiren, sei die Anzahl der reellen Ebenen α^4 einer Raumcurve C mit w' bezeichnet, der reellen Ebenen $\alpha^3\beta^2$ mit t', der reellen Geraden $(\alpha^2\beta)$ mit d', sowie endlich die Anzahl der reellen Ebenen $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ mit nur einem einzigen reellen Berührungspunkt mit T'''.

„Dann bleibt bei beliebigen Deformationen der Curve C das Aggregat[1])

$$w' + d' - t' - 2T''$$

entweder ganz unverändert — wie z. B. stets beim Passiren der Coincidenzen $[\alpha^5]$, $[(\alpha^3)]$, $[\alpha^4\beta^2]$ — oder es erfährt eine Zu- (resp. Ab-)nahme um ganze Vielfache von Vier, während es immer Fälle giebt, in denen einzelne Bestandtheile des Aggregates nur um Zwei sich ändern.“

Ein einfaches Beispiel liefert die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species R_4^3. Hier treten nur (vier) Ebenen α^4 und (vier) Gerade $(\alpha^2\beta)$ auf, sodaß sich unser Aggregat auf $w' + d'$ reducirt. Auf Grund des letzten Satzes bieten sich zwei Möglichkeiten; entweder könnte $w' + d' = 0, 4, 8$ sein, oder aber $= 2, 6$. Vermöge der oben erörterten Realitätseigenschaften der Form $[\alpha^4]$ und ihrer Hesse'schen: $[(\alpha^2\beta)]$, sowie vermöge der bekannten Bedeutung, welche das Verschwinden der Invariante j für die erstere Form besitzt, läßt sich die Entscheidung dahin abgeben, daß die zweite Möglichkeit $w' + d' = 2, 6$ überhaupt nie eintritt, und bei der ersten allein die beiden Fälle $w' + d' = 0, 4$ existiren. Des Näheren wird man, abgesehen von Uebergangscurven mit zusammengesetzten Singularitäten, auf vier verschiedene Typen von R_4^3 geführt.

Geht man nämlich von einer Curve mit isolirtem Doppelpunkt $((\alpha\beta))$ aus, und löst denselben auf, so hat man den ersten Typus $w' = 4$, $d' = 0$. Um den letzteren zu verlassen, muß man sich nothwendig der Brücke einer stationären Tangente (α^3) bedienen, dann kommt $w' = 2$, $d' = 2$.

In diesem Zustande kann wohl ein Doppelpunkt mit reellen Tangenten passirt werden, ohne indessen den Typus als solchen umzugestalten. Will man zu einer neuen Art von R_4^3 gelangen,

---

1) Wegen des Ansatzes sehe man nach bei Brill l. c. § 7.

Besitzt die Curve auch noch die zu α^4 und $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ dualistischen Singularitäten, so sind die bez. Realitätsanzahlen von w' resp. $2T''$ abzuziehen.

Will man nur die Aenderungen modulo 4 hervorheben, so werden selbstredend die Vorzeichen bedeutungslos.

Die Entwickelungen des Textes stützen sich zwar zunächst auf solche Deformationen der Curve, die von nur einem willkürlichen Parameter abhängen: indessen ist leicht zu sehen, daß auch Durchgänge durch complicirtere Coincidenzen zulässig sind, da man immer Nachbarwege einschlagen kann, welche jene vermeiden.

so muß man abermals durch (α^3) hindurch, und es wird drittens $w' = 0$, $d' = 4$. Um endlich von hier aus zum letzten Typus zu gelangen, ist als Uebergangsmittel ein Doppelpunkt mit reellen Tangenten erforderlich, dann entsteht $w' = 0$, $d' = 0$ mit der Summe $w' + d' = 0$, während in den drei zuvor angegebenen Fällen gleichmäßig $w' + d' = 4$ war.

Zum Schlusse möge ein Vergleich zwischen der bekannten, von H. Klein[1]) herrührenden Relation zwischen Realitätsanzahlen von Singularitäten ebener Curven und dem hier mitgetheilten entsprechenden Ergebniß für Raumcurven gezogen werden.

Da macht sich sofort ein auffälliger Unterschied bemerkbar.

Während nämlich die Klein'sche Formel im Wesentlichen aussagt, daß ein gewisses Aggregat von Realitätsanzahlen nur noch von der Ordnung und Klasse der ebenen Curve abhängt, und somit irgend welchen Deformationen der Curve gegenüber invariant bleibt, wenn nur Ordnung und Classe die alten geblieben sind, können wir für die bez. Realitätsanzahlen von Raumcurven nur eine Congruenz mod. 4 constatiren, wenn eben etwas hinsichtlich beliebiger Deformationen Allgemeingültiges behauptet werden soll.

Die Quelle des betonten Unterschiedes zwischen Ebene und Raum ist offenbar darin zu suchen, daß die räumliche Ausdehnung der Begriffe: Wendetangente „α^3“, Doppeltangente „$\alpha^2\beta^2$“ und Doppelpunkt „$(\alpha\beta)$“ für Curven je in doppelter Richtung vor sich gehen kann — α^3 spaltet sich in α^4 und $\alpha^3\beta^2$, $\alpha^2\beta^2$ in $\alpha^3\beta^2$ und $\alpha^2\beta^2\gamma$, endlich $(\alpha\beta)$ in $(\alpha^2\beta)$ und $(\alpha\beta\gamma\delta)$ — und daß infolge dessen die Zwischenstufe des „Isolirten“, wie sie bei $\alpha^2\beta^2$ und $(\alpha\beta)$ in der Ebene vorhanden ist, im Raume bei $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ und $(\alpha\beta\gamma\delta)$ zwar zwar noch ganz analog existirt, bei $\alpha^3\beta^2$ und $(\alpha^2\beta)$ aber nicht mehr.

Beispielsweise kann also bei einer Selbstberührung „$[\alpha^2\beta^2, (\alpha\beta)]$“ in der Ebene ein Paar von reellen, eigentlichen Doppelpunkten ebensowohl in Begleitung eines Paares von eben solchen Doppeltangenten, wie eines Paares von imaginären Doppeltangenten coincidiren — völlig in derselben Weise, wie im Raume bei $[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$ ein Paar $\alpha^3\beta^2$ und ein Paar $(\alpha^2\beta)$ — dagegen ist ein Paar von isolirten Doppelpunkten bei der Selbstberührung stets mit einem Paare von isolirten Doppeltangenten verknüpft, welche dann beide zugleich in's Imaginäre übergehen, und dazu fehlt die Parallele im Raume. Daher kann in der Ebene immer noch ein Ausgleich

---

1) Math. Annalen Bd. X.

zwischen den Anzahlen der isolirten Gebilde beiderlei Art stattfinden, während ein solcher im Raume unmöglich wird.

Hingegen tritt die Analogie hinsichtlich der Coincidenzen $[\alpha^4]$ und $[(\alpha^2)]$ (Undulation und Spitze) dort, und der Coincidenzen $[\alpha^5]$, $[\alpha^4\beta^2]$ und $[(\alpha^3)]$ hier besonders deutlich hervor.

Clausthal, den 21. Februar 1891.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September und Oktober 1890.

(Fortsetzung.)

Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. Scienze fisiche e matematiche. Vol. VI. (della serie vol. XII.) Pisa 1889.
Le opere di Galileo Galilei. Ediz. nazionale sotto gli auspicii di S. M. il Re d'Italia. Vol. I. (2 Exempl. No. 147. 161.) Firenze 1890.
Bollettino delle publicazioni italiane. (Bibliot. naz. di Firenze.) 1890. No. 110—115. Firenze 1890. — Indice alfabetico delle opere 1889. A-Sai.
Bollettino delle opere moderne straniere. Bibliot. naz. centr. Vittorio Emanuele di Roma.) Vol. IV. No. 6. Nov./Dic. 1889. Nebst Titelblatt. Vol. V. No. 1. Gennaio 1890. Roma 1890.
Annuaire de l'Observatoire municipal de Montsouris pour l'an 1890. Paris.
United States Geological Survey.
a. Eighth annual report. 1886—87. Part 1. 2. Washington 1889.
b. Bulletin. No. 54—57. Ebd. 1889/90.
c. Monographs. Vol. XV. Part 1. 2. Vol. XVI. Ebd. 1889.
Annual report of the board of regents of the Smithsonian Institution for the year ending June 30, 1886. Part 2. — . . . for the year ending June 30, 1887. Part. 1. 2. Washington 1889.
Annual report of the chief signal officer. War Department. 1889. Part 1. 2 (Appendix 15). Washington 1890.
U. S. Naval Observatory.
a. Observations made during the year 1884. Washington 1889.
b. Report of the superintendent for the year ending June 30, 1889. Ebd. 1889.
Bulletin of the Museum of comparative zoology at Harvard College. Whole Series. Vol. XVI. No. 9. Vol. XX. No. 2. Cambridge U. S. A. 1890.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

20. Mai. № 3. 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 7. März.

F. Kielhorn legt vor: „Die Colebrooke'schen Pâṇini-Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Göttingen."

Riecke legt eine Abhandlung des Herrn Dr. Gustav Tammann in Dorpat vor: „Ueber die Stromleitung durch Niederschlagsmembranen."

Die Colebrooke'schen Pâṇini-Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Göttingen.

Von

F. Kielhorn.

Die Göttinger Bibliothek hat die Ehre eine kleine Sammlung Colebrooke'scher Handschriften ihr eigen nennen zu dürfen. Durch welches tragische Geschick sie in den Besitz dieses Schatzes gekommen ist, zeigt ein in den Akten der Bibliothek befindlicher Brief[1]), dem ich folgende Stellen entnehme: —

„Mein vor 15 Jahren verstorbener ältester Sohn, der Professor Rosen in London, ordnete im Jahre 1837 auf Bitte des allmählig ganz erblindenden T. Colebrooke die Sammlung und den sorgfäl-

1) Der Schreiber des Briefes, Vater des zu früh verstorbenen Orientalisten F. A. Rosen, studierte in Göttingen zuerst Philologie 1793—98 (Dr. phil. 1798), dann seit 1802 Jurisprudenz (Dr. juris 1803), und war bis 1816 Docent in der juristischen Facultät.

tigen Wiederabdruck der, hauptsächlich in den Asiatick researches, zerstreueten, sich auf indische Sprache und Literatur beziehenden Aufsätze (Essays) desselben an, welche denn auch im Todesjahre Beider (1837) bekanntlich erschienen sind. Bei dieser Gelegenheit und in Anerkennung der Mühe, welche mein Sohn von diesem Geschäfte hatte, schenkte Colebrooke ihm einige Handschriften von Sanskritwerken, die reich mit seinen beigeschriebenen Anmerkungen grammaticalischen und lexicalischen Inhalts versehen sind, in denen man Vorarbeiten zu den Werken des berühmten Sanskritisten erkennen kann.

Diese Mspte befinden sich seit dem Tode meines Sohnes in meinem Besitze. Herr Prof. Lassen in Bonn hatte vor 13 Jahren die grosse Güte, für mich ein Verzeichniss dieser und anderer zum literarischen Nachlasse des Verstorbenen gehörigen Handschriften anzufertigen. Eine von diesen enthält

> A grammar of the Sanscrit language from the text of Pânini and the commentaries of Ramachandra, Bhattoji Dîkshita etc. — (Devanagari-Schrift). — Herr Pr. Lassen hat dabei bemerkt „es ist Pânini mit Colebrooke's handschriftlicher Uebersetzung und wahrscheinlich die vorbereitende Arbeit zu seiner Grammatik“.

Die Colebrooke'schen Anmerkungen scheinen aus den letzten neunziger Jahren des vorigen Jahrhunderts herzurühren und werden allerdings nicht mehr im Stande seyn, dem in den letzten 50 Jahren so weit geförderten Sanskritstudium noch irgend bedeutend zu statten zu kommen; allein die Handschriften haben sicher noch immer hohen Werth als autographische Denkmale jenes würdigen Gelehrten, und sie verdienen aus dem Privatbesitze eines Dilettanten, wo sie später manchen Gefahren ausgesetzt sind, in eine öffentliche Bibliothek überzugehen.

Ich biete sie dem Bücherschatze der noch immer dankbar von mir verehrten Georgia Augusta als Geschenk an.

. . . .

Bei dieser Schenkung mache ich eine einzige Bedingung. Es ist folgende. — Nach dem Tode meines unvergesslichen Sohns übersandten mir seine Londoner Freunde, unter andern rührenden Beweisen ihrer Theilnahme an meinem Verluste auch eine von Rd. Westmacott gearbeitete Marmorbüste des Verstorbenen. Dass ich diese Büste so lange ich lebe bewahren werde versteht sich von selbst. Ich werde aber anordnen, dass dieselbe nach meinem nicht mehr fernen Ableben ebenfalls an die Universitätsbibliothek in Göttingen übersandt werde. — Nun bitte ich mir nur von der vorgesetzten Behörde dieser Bibliothek ein schriftliches Versprechen aus, dass die Büste, wenn Ihr dieselbe übersandt worden, in einem der Bibliotheksäle aufgestellt werden solle. — Das Bild eines zu früh dahingerafften Mannes, der sich nicht bloß durch Gelehrsamkeit, sondern auch durch unermüdete Dienstfertigkeit gegen andere Gelehrte die Achtung und Liebe seiner Zeitgenossen erworben, und dessen Namen auch in Göttingen nicht vergessen ist, wird diesen Sälen nicht zur Unzier gereichen.

Detmold den 25sten Sept. 1852.

Dr. Ballhorn-Rosen,
F. Lipp. Canzler."

Die in diesem Briefe erwähnten Handschriften, neun Folio-Bände, wurden der Bibliothek im October und December des Jahres 1852 übersandt, zusammen mit einem Exemplare des 7ten Bandes der *Asiatic Researches*, das ebenfalls aus Colebrooke's Bibliothek stammt und manche Bemerkungen von seiner Hand enthält, und einem Exemplare seiner *Essays*. Die Büste Friedrich August Rosen's ziert seit Februar 1856 den großen historischen Saal der Bibliothek.

Es ist nicht meine Absicht, eine Beschreibung sämmtlicher Handschriften zu liefern, die so in den Besitz der Bibliothek übergegangen sind; und ich brauche dies um so weniger zu thun, als ein Verzeichniß aller unsrer Sanskṛit-Handschriften [1]) in Professor Wilhelm Meyer's Kataloge der Göttinger Handschriften seine Stelle finden wird. Aber ich halte es für meine Pflicht, hier wenigstens auf die darunter befindlichen Handschriften der Grammatik des Pâṇini aufmerksam zu machen; denn wegen der reichen Bemerkungen Colebrooke's, die sie enthalten, besitzen diese Handschriften noch immer einen grossen Werth. Colebrooke's Versuche die Grammatik des Pâṇini in eine europäische Sprache zu übertragen, mit denen wir hier bekannt werden, zeigen, daß er sich schon gegen das Ende des vergangenen Jahrhunderts wie kein andrer Europäer vor oder nach ihm mit der Technik der indischen Grammatik vertraut gemacht hatte. Und die Probe einer Uebersetzung des Pâṇini mit erklärendem Commentare in englischer Sprache, die eine dieser Handschriften im Anhange enthält, verräth überall, durch wie umfassende und tiefgehende Studien im Bereiche der grammatischen Literatur er sich für das von ihm beabsichtigte Werk vorbereitet hatte. Es ist darum nicht zu verwundern, daß Colebrooke's Uebersetzungen mancher schwierigen

1) Bearbeitet von einem meiner Schüler, Herrn H. Lüders.

Regel, die sich in den Handschriften zerstreut finden, bis heute kaum erreicht, viel weniger übertroffen sind; und daß das, was er uns bietet, fast immer geeignet ist uns das Verständniß einer Regel zu erleichtern oder den richtigen Ausdruck für ihre Uebersetzung finden zu lassen, auch wo wir ihm nicht ganz beistimmen können.

Diese Handschriften des Pâṇini sind in den Katalogen der Bibliothek als Cod. MS. Orient. 207, 208, und 209 bezeichnet. Alle drei sind von Eingebornen in Devanâgarî Schrift auf starkem europäischen Papiere großen Formats (etwa 48 Centimeter hoch und 29—32 Centimeter breit) nach Art europäischer Bücher geschrieben.

Das Papier von 208 und 209, um die weniger wichtigen Handschriften vorweg zu nehmen, enthält Wasserzeichen der Jahre 1801 und 1802. In beiden ist es auf beiden Seiten beschrieben, und jede Seite enthält zwei Columnen mit leeren Zwischenräumen, die von Colebrooke für eigne Bemerkungen bestimmt waren und für solche benutzt sind.

No. 208, aus 62 Blättern bestehend, enthält nach Colebrooke's Aufschrift „Pâṇini's Sûtras or Rules of Grammar“; in Wirklichkeit aber in schwarzer Schrift den Text der Sûtras, und in rother Schrift Zusatzregeln oder sonstige Bemerkungen (Vârttikas, Kârikâs etc.) aus der Kâśikâ-Vṛitti. Manche Regeln sind von Colebrooke kurz übersetzt; öfter hat er den Paragraphen seiner Grammatik angegeben, in dem sich die Uebersetzung findet oder wo der betreffende Gegenstand behandelt wird. Außerdem hat er vielen Regeln oder Bemerkungen des Sanskṛit Textes gewisse Zeichen (arbitrary marks, — eine Hand, einen Stern, einen Dolch, u. a.) vorgesetzt, durch welche er, wie er selbst angibt, andeuten wollte, unter welche der folgenden Rubriken eine Regel oder Bemerkung fällt: —

1. A rule premised (d. i. eine Adhikâra-regel).
2. A maxim (d. i. eine Paribhâshâ).
3. An exposition (d. i. eine Saṁjñâ-regel).
4. A rule peculiar to the Veda.
5. An emendatory rule or Vârttika.
6. A remark (Ishṭi) extracted from the Bhâshya.
7. A metrical rule or Kârikâ.
8. A memorial verse.
9. A list from the Gaṇapâṭha.

Colebrooke's in dieser Handschrift enthaltene Uebersetzungen einiger wichtigen Regeln hoffe ich an andrer Stelle nutzbar zu machen. Hier möchte ich nur noch bemerken, daß zwischen Blatt 1 und 2 dieser Handschrift ein Blatt mit dem Wasserzeichen des Jahres 1801 eingeheftet ist, auf dem Colebrooke die „Grammarians named in the Preface of the Gańaratna Mahódadhi, as explained by Bardhamána (Pupil of Góvinda Súri)" verzeichnet hat.

No. 209, aus 107 Blättern bestehend, wird am Anfange und am Schlusse vom Schreiber als Pâṇinisûtrabhâshyavârttika bezeichnet, und enthält in der That die Sûtras des Pâṇini mit Vârttikas und andern Auszügen aus dem Mahâbhâshya. Es unterliegt keinem Zweifel, daß wir in dieser Handschrift den ersten Versuch vor uns haben, der Grammatik des Pâṇini die Form zu geben, die sie später in der Calcuttaer Ausgabe der *Ashṭâdhyâyî* erhalten hat. Colebrooke's handschriftliche Bemerkungen sind nicht zahlreich. Doch kann ich auf zwei Punkte aufmerksam machen, welche beweisen wie weit er auch in dem Verständniß und der richtigen Erkenntniß der Natur des Mahâbhâshya seiner Zeit voraus war. Ein formeller Punkt besteht darin daß er, bei Regeln die er studiert hat, die Worte *kartavya* und *vaktavya*, wo sie der Schreiber oder Paṇḍit an das Ende eines Vârttika gesetzt hatte, als nicht zum Texte des Vârttika gehörig gestrichen hat. Und bedeutsamer noch ist der zweite Punkt, daß nämlich Colebrooke schon hier das Mahâbhâshya als einen Commentar zu den Vârttikas bezeichnet, und — wiederum durch arbitrary marks — dann und wann angedeutet hat, daß gewisse Vârttikas von Patañjali adoptiert, andere verbessert, und noch andre vermittelst einer künstlichen Erklärung der Regeln des Pâṇini zurückgewiesen werden.

Wichtiger ist die dritte Handschrift, No. 207 unsrer Kataloge, die von Colebrooke selbst als „A Grammar of the Sanscrit Language; from the text of Páńini, and the commentaries[1]) of Ráma-chandra, Bhattóji-díeshita, and others" bezeichnet wird. Diese Handschrift enthält zunächst auf 73 Blättern, die das Wasserzeichen des Jahres 1794 tragen, den Text der *Ashṭâdhyâyî*, so geschrieben daß rechts vom Texte reichlicher Raum für handschriftliche Bemerkungen blieb. Da dieser Raum indessen nicht genügte, wurden später noch 81 Blätter[2]),

1) Unter diesen Commentaren sind ohne Zweifel die *Prakriyá-kaumudí* und die *Siddhánta-kaumudí* zu verstehn, die besten Werke, die sich Colebrooke für den Anfang hätte wählen können.

2) Außerdem liegen in der Handschrift einige lose Blätter mit Uebersetzungen einzelner Regeln; und ein Briefkouvert mit dem Wasserzeichen 1797, das von Colebrooke an J. H. Harington Esq., und von diesem an H. Colebrooke Esq. zurück adressiert ist. John Herbert Harington, Civilbeamter im Dienste der East

mit dem Wasserzeichen des Jahres 1796, zwischen den Blättern des Textes eingefügt. Der neben dem Texte gelassene Raum und die so eingeschobenen Blätter enthalten Colebrooke's Uebersetzung von etwa drei Vierteln sämmtlicher Regeln der Grammatik des Pâṇini. Nahezu vollständig übersetzt ist Alles, was sich auf die Technik der indischen Grammatik, auf die Lautlehre, die Declination und Conjugation, die Bildung der Femininstämme, die Bedeutung der Suffixe und die Syntax bezieht; und in den Abschnitten, die von der Composition der Nomina, den kṛit und taddhita Suffixen handeln, sind wenigstens die Regeln allgemeinern Inhalts erklärt und die sich aus den Regeln ergebenden Resultate bisweilen durch tabellarische Uebersichten erläutert worden. Nicht übersetzt sind im Wesentlichen nur die Regeln über die Accente und die Sprache des Veda. Ich hege keinen Zweifel, daß der Anfang mit dieser Uebersetzung gemacht wurde, als Colebrooke zum ersten Male den Pâṇini mit seinen Paṇḍits studierte. Aber es ist sicher, daß er später, als er die Commentare selbst verstehn gelernt hatte, aber schon ehe er seine Sanskṛit Grammatik veröffentlichte, das zuerst Niedergeschriebene immer wieder zu verbessern gesucht hat. Ich könnte mehr als eine schwierige Regel anführen, von der uns die Handschrift drei oder vier Versuche einer Uebersetzung bietet, die aber alle von der in Colebrooke's Grammatik gedruckten Uebersetzung derselben Regel noch übertroffen werden.

Ich bin überzeugt, daß Colebrooke in den letzten Jahren des verflossenen Jahrhunderts die Absicht gehabt hat, den Text der Grammatik des Pâṇini mit einer englischen Uebersetzung und einem Commentare in englischer Sprache herauszugeben, und daß er sich erst später, durch äußere Umstände veranlaßt, entschloß, das von ihm gesammelte Material in seiner (leider nie vollendeten) Sanskṛit Grammatik zusammenzustellen und die Herausgabe des Textes des Pâṇini den Calcuttaer Paṇḍits zu überlassen. Auf jeden Fall enthält unsre Handschrift in einem Anhange auf 11 Blättern Colebrooke's Reinschrift einer Uebersetzung des größten Theiles des ersten Adhyâya von Pâṇini's Werke, und seinen Commentar zu einer beträchtlichen Anzahl von Regeln. Die hier übersetzten Regeln sind P. I, 1, 1—58 und 60—75; 2, 1—52 und 64—73; 3, 1—43; und 4, 1—12; commentiert sind I, 1—20, 27—37, 42—49,

India Company seit 1780, und zuletzt Member of the Supreme Council and President of the Board of Trade, „was also for some years honorary professor of the laws and regulations of the British government in India in the college of Fort William . . . and afterwards president of the council of the college" (*Dict. of Engl. Biogr.*)

und 51; 2, 27—29, und 64—73; und 3, 1—43. Außerdem ist bei vielen Regeln auf dem Rande bemerkt, wo sie oder die in ihnen gelehrten Termini zur Anwendung kommen. Vieles von dem, was unsre Handschrift bietet, hat Colebrooke in seiner Grammatik selbst veröffentlicht. Trotzdem dürfte die Handschrift auch jetzt noch dem, der die Grammatik des Pâṇini ins Englische übersetzen wollte, sehr werthvolle Dienste zu leisten im Stande sein. Zum Beweise hierfür gebe ich die Uebersetzung des ersten Pâda der *Ashṭâdhyâyî*, wie sie Colebrooke in seinen Handschriften selbst gegeben hat. Ich folge im Allgemeinen der erwähnten Reinschrift, gestatte mir aber einzelne Ausdrücke oder Wendungen aus andern Stellen der Handschriften aufzunehmen. Colebrooke's Anmerkungen zu veröffentlichen ist hier nicht der Ort.

Pâṇini Adhyâya I, Pâda 1.

1. *Â*, *ai* and *au* are named *vṛiddhi*;
2. and *a*, *e* and *o* are called *guṇa*.
3. When the substitution of such a letter is enjoined under these denominations, without specifying the letter which gives place thereto, such *guṇa* and *vṛiddhi* element shall be substituted for an *ik* vowel only.
4. The substitution of a *guṇa* or *vṛiddhi* letter, for an *ik* vowel, does not take effect in right of an *ârdhadhâtuka* suffix on account of which some part of the verb is expunged;
5. nor in right of an affix, which does really or fictitiously contain a mute *k* or *ṅ*;
6. nor does it take place in the verbs *dîdhîṅ* 'to shine', or 'to play', and *vevîṅ* 'to move, to pervade, to conceive, to desire, to throw', or 'to eat'; nor in the prefix *iṭ*.
7. Consonants, not separated by intervening vowels, are termed conjunct.
8. An element prolated by the nose and mouth is nasal.
9. Letters, articulated near the same organ of speech and with the same aperture for the voice, are homogeneous;
10. but a vowel and a consonant are not so.
11. *Î*, *û* and *e*, terminating a word in the dual number, are named *pragṛihya* (and are consequently unalterable, even though a vowel follow in connected orthography).
12. So are the same vowels following *m* in the inflections of the pronoun *adas* 'this';
13. and so is *śe* (which is employed in the Veda, in the inflections of the personal pronouns).

14. A particle consisting of a single vowel, except (*â* deduced from) *âṅ*, is likewise named *pragṛihya*;
15. and so is *o*, being the final of a particle.
16. In the vocative case a final *o* is likewise so named, according to Śâkalya, when *iti* follows, unless it be in a passage of holy writ.
17. So likewise (*u* deduced from) *uñ* is named *pragṛihya*, according to the same author, when that particle follows;
18. and so is the nasal vowel ũ, which may be substituted for *uñ* before the same term, according to the same authority.
19. *Î* and *û*, terminating a word that bears the sense of the seventh case, are likewise named *pragṛihya*.
20. The verbs *dâ* and *dhâ*, and such as assume those forms, except *dâp* 'to cut' and *daip* 'to cleanse', are called *ghu*; (*viz.* *ḍudâñ* and *dâṇ* 'to give'; *do* 'to cut'; *deṅ* 'to protect'; *ḍudhâñ* 'to hold, to nourish'; and *dheṭ* 'to drink'.)
21. A single letter is liable to the same inflections as if it were initial or final.
22. *Tarap* and *tamap* (terminations denoting the comparative and superlative degrees) are named *gha*.
23. The words *bahu* 'many' and *gaṇa* 'a set' or 'class' [1]), and terms ending in the suffixes *vatu* and *ḍati* are called numerals.
24. A numeral ending in *sh* or *n* [2]) is named *shaṭ*;
25. and so is one, the termination whereof is deduced from the suffix *ḍati*.
26. *Kta* and *ktavatu* (suffixes with which are formed the participles of the past tense) are called *nishṭhâ*.
27. *Sarva* and certain other words, whether single or terminating a compound, are termed pronouns.
28. They may at pleasure be, or not be, so named in a Bahuvrîhi compound formed of terms signifying regions of space.
29. They are not so named in any other Bahuvrîhi compound;
30. nor in a compound, which, if resolved, would exhibit its other term in the third case; [nor in a phrase equivalent to such a compound;]
31. nor in a Dvandva compound.
32. However, they may at pleasure be, or not be inflected as pro-

1) An andrer Stelle: „*bahu* and *gaṇa*, unless they signify greatness or assemblage“.

2) Oder „a numeral originally ending in *sh* or *n*“; oder „numerals which in their elementary form end in *sh* or *n*“. — Siehe P. I, 1, 24, Vârtt. 1.

nouns, in a Dvandva compound, with *jas*, the termination of the first case in the plural number.

33. *Prathama* 'first', *charama* 'last', derivatives ending in *taya* (deduced from the suffix *tayap*), *alpa* 'little', *ardha* 'half', *katipaya* 'few', and *nema* 'half', may at pleasure be, or not be, inflected as pronouns in the plural number of the first case. [*Ubhaya* 'both', derived from *ayach* substituted for *tayap*, must be inflected like a pronoun in this case and number. Ordinals ending in *tîya* may be inflected as pronouns with the suffixes distinguished by a mute *ṅ*].
34. So may *pûrva* 'east' or 'prior', *para* 'subsequent', *avara* 'west' or 'posterior', *dakshiṇa* 'south' or 'right', *uttara* 'north' or 'subsequent', *apara* 'other' or 'inferior', and *adhara* 'west' or 'inferior', denoting relative situation, unless they be used as appellatives.
35. So may *sva* 'own', unless it be used as an appellative and signify 'kinsman' or 'wealth';
36. and so may *antara* provided it signify 'external' or 'lower garment'.
37. *Svar* and certain other words are indeclinable; and so are particles.
38. So are words ending in a taddhita suffix, to which all the signs of cases cannot be subjoined;
39. and so are words terminated by a kṛit suffix ending in *m* or in a diphthong;
40. or terminated by the suffixes *ktvâ*, *tosun*, or *kasun*.
41. An adverbial compound too is indeclinable.
42. *Śi* (which is substituted for *jas* and *śas* in the inflections of neuter nouns) is called *sarvanâmasthâna*;
43. and so are *su*, *au*, *jas*, *am* and *auṭ*, except in the neuter gender. (The exception does not contradict the preceding rule.)
44. *Vibhâshâ* denotes prohibition together with option. (It signifies "not, optionally however".)
45. An *ik* vowel, which has been, or is to be, substituted for a semivowel (*yaṇ*)[1]), is called *saṁprasâraṇa*.

---

1) Bei einer etwas andern Fassung der Regel fügt Colebrooke hinzu „and the substitution of such a vowel for a semivowel"; and hat die Anmerkung „the rule admits of two interpretations, and must in fact be taken in both senses, as here translated". Er will offenbar sagen, daß *saṁprasâraṇa* nicht nur den für den Halbvocal substituierten Vocal bezeichnet, sondern auch gleichbedeutend ist mit dem Satze „*ik* tritt an die Stelle von *yaṇ*". Vgl. die Vârttikas zu der Regel.

46. That which is distinguished by a mute *ṭ*, is initial; by a mute *k*, is final;
47. and by a mute *m*, is subjoined to the last vowel, (whether this be, or be not, followed by a consonant).
48. When a short vowel must be substituted for a diphthong, only the *ik* element becomes short (but the other element is rejected) [1]).
49. In rules of grammar, the sixth case imports "instead of".
50. When an element is to be substituted for another, the most similar to the original one must be chosen out of those which are offered.
51. When an *aṇ* vowel is substituted for *ṛi*, *r* must be subjoined to it. [In like manner *l* is subjoined to such a vowel substituted for *ḷi*.]
52. What is thus (49) directed to be substituted for a term so exhibited in the sixth case, shall be put in the place of the last letter thereof;
53. and so shall a substitute containing a mute *ṅ* (even though it consist of several efficient letters, 55).
54. A variation of a subsequent term on account of a preceding one affects its initial letter only.
55. A substitute consisting of two or more efficient letters, (without a mute *ṅ*, 53,) or distinguished by a mute *ś*, shall be put in the place of the whole term so (49) exhibited in the sixth case.
56. The substitute is equal to the original, except in regard to operations depending on the particular letters of the original.
57. That, which is substituted for a vowel on account of a subsequent term, is equal to the original so far as the preceding element is concerned;
58. except in regard to operations on the termination of an inflected word; in regard to the duplication of elements; in regard to the preceding element in the instance of *vara*; in regard to the expunging of *y*; in regard to the tone of vowels; in regard to the substitution of a homogeneous element; in regard to the substitution of *anusvâra*; in regard to the lengthening of a vowel; in regard to the substitution of a *jaś* consonant; and in regard to the substitution of a *char* consonant.

---

1) An andrer Stelle: „when a short vowel must be substituted for a diphthong, it shall be an *ik* vowel“.

59. . . . .[1])

60. The expunging, obliterating, effacing, or omitting of an element, so that it shall be unheard and unpronounced, is called *lopa* or substitution of a blank.

61. *Luk, ślu* and *lup* are names for the expunging of suffixes with such consequent operations, as are denoted by these terms respectively [2]).

62. When the whole of a suffix is expunged, operations, depending on such a suffix, do nevertheless take place;

63. unless the term, by which the suffix is directed to be expunged, contains the syllable *lu*; for, in that case, the radical body [3]) remains unaffected.

64. The last vowel, together with a subsequent consonant (if any there be), is called *ṭi*, the last syllable.

65. The element, which precedes the last letter, is called penultimate.

66. When that, on account of which something is directed to be done, is exhibited in the seventh case, the consequent operation affects a preceding term only.

67. When it is exhibited in the fifth case, the operation affects a subsequent term only.

68. In grammar, the particular form only of a word (abstracted from its sense) is meant; excepting the technical denominations of words, for they, not the word which designates them, are thereby meant.

69. A vowel or a semivowel (*aṇ*), or a consonant to which a mute *u* is annexed, implies the homogeneous elements as well as the particular letter, which is expressed; excepting suffixes.

70. Preceded or followed by the letter *t*, an element implies the homogeneous sounds of the same length as well as the particular one which is expressed.

71. The first term of any set, together with a final mute letter, is a designation of all the intermediate elements as well as of that initial term itself.

---

1) Diese Regel ist nirgends vollständig übersetzt.

2) An andrer Stelle: „the expunging of a suffix with such further consequences as are severally denoted by the terms *luk*, *ślu*, and *lup*, is designated by these terms respectively".

3) Später hat Colebrooke *aṅga* mit „inflective root" übersetzt. Vgl. seine Grammatik, S. 14: „*Luk, ślu* and *lup* are also names for the expunging of affixes; and, when a blank is substituted under one of these denominations, the inflective root remains unaffected by the expunged affix".

72. That, by which, as a limitation[1]), a grammatical operation is directed, implies the whole term whereof it is the final.
73. A word, whereof the first vowel is *vṛiddhi*, is named *vṛiddha*;
74. and so are *tyad* and certain other pronouns;
75. and so is a word, whereof the first vowel is *e* or *o*, provided it be the name of an eastern country.

---

1) An andrer Stelle „as a restrictive term", oder „as an epithet".

Ueber die Stromleitung durch Niederschlagsmembranen.

Von

Gustav Tammann.

Vor kurzem hat Ostwald[1]) ein System aus Kupfersulfat und Ferrocyankaliumlösung, getrennt durch die semipermeable Membran von Ferrocyankupfer, electrolysirt und ist bei der Deutung dieses Versuches zur Ansicht gelangt, daß die semipermeabeln Niederschlagsmembranen die Electricität metallisch leiten. Zur selben Zeit hatte ich gefunden, daß die semipermeabele Membran einen außerordentlich geringen Widerstand dem Durchgange von Wechselströmen bietet[2]). Schon damals hatte ich mir vorgenommen, die Art der Electricitätsleitung durch semipermeable Membranen näher zu untersuchen, und speciell die von Ostwald aufgestellten Ansichten, die ich erst nach Abfassung meiner Mittheilung erfuhr, näher zu prüfen. Inzwischen sind von Oberbeck[3]) die electromotorischen Kräfte, deren Sitz die Niederschlagsmembranen sind, gemessen, es hat sich dabei herausgestellt, daß ihr Betrag von der Eigenschaft der Semipermeabilität wenig beeinflußt wird, ja bei nicht membranartigen Niederschlägen wurden zuweilen größere electromotorische Kräfte constatirt, als bei Systemen mit Niederschlagsmembranen, die nach Ostwald besonders große electromotorische Kräfte ergeben sollten. Die Frage nach der Art der Electricitätsleitung durch die Niederschlagsmembranen ist von

---

1) W. Ostwald, Zeitschrift f. physik. Chem. 6. p. 71. 1890.
2) G. Tammann, Zeitschrift f. physik. Chem. 6. p. 236. 1890.
3) A. Oberbeck, Wied. Ann. 42. p. 193. 1891.

Oberbeck nicht näher berührt worden; es scheint, daß er sich der Ansicht, die Niederschlagsmembranen seien Isolatoren, hinneigt. Wir sind über die Vorgänge bei der Electrolyse durch Niederschlagsmembranen, besonders was die quantitative Seite des Phänomens betrifft, so mangelhaft orientirt, daß die Frage nach Art und Weise der Stromleitung durch Niederschlagsmembranen nicht ohne neue Versuche zu entscheiden ist.

Sind die sogenannten semipermeabeln Membranen wirklich undurchlässig für die Membranogen-Jonen, so bleibt für diese Membranen nur die Wahl zwischen electrolytischer oder metallischer Leitung, sind dieselben aber ausnahmlos für, wenn auch nur geringe, Mengen anderer Stoffe und besonders für ihre Membranogene permeabel, so könnte man ihre gute Leitfähigkeit auch der Wechselwirkung der Jonen in den Membranporen, wie bei den permeabeln Membranen, erklären. Ich werde im Folgenden auf diese Hauptfrage, giebt es Niederschlagsmembranen, die für die Jonen ihrer Membranogene absolut undurchlässig sind? ein wenig näher eingehn, die Gesamtheit aller meiner diesen Punkt betreffenden Beobachtungen mir auf ein anderes Mal versparend. In vielen Fällen kann es keinem Zweifel unterliegen, daß die vorliegende Niederschlagsmembran für die Jonen ihrer Membranogene permeabel ist. Beispiele für diesen Fall sind außerordentlich zahlreich.

Lösungen von Alkalien, Carbonaten, Silicaten, Phosphaten und Sulfiden geben mit Salzen schwerer Metalle Membranen, die zuerst, gleich nach der Aufeinanderschichtung der Lösungen, dünn sind, sich aber bald augenscheinlich verdicken, so daß kein Zweifel darüber bleibt, daß sich in den Poren der Membran die Fällung fortdauernd vollzieht. Ich habe früher die Bilder, die solche Systeme, betrachtet durch den Schlierenapparat geben, beschrieben[1]). Diese Bilder sind nur im Sinne einer sich beständig vollziehenden Reaction zwischen den Membranogenen zu deuten. Die von Ostwald[2]) als semipermeabel angesprochene Membran aus Kupfersulfid, gebildet beim Aufeinanderschichten der Lösungen von Natriumsulfid und Kupfersulfat, verdickt sich ungemein rasch, ist also sicher nicht semipermeabel. Auch geronnenes Eiweiß, von dem Ostwald annimmt, daß es mit Kupfersulfatlösung eine für Kupferionen undurchdringliche Membran bildet, wird von Kupfersulfatlösung schnell und vollständig imprägnirt. Von diesen Membranen unter-

1) G. Tammann, Wied. Ann. 34. p. 299. 1888.
2) W. Ostwald l. c.

scheiden sich die Ferrocyankupfer, Ferrocyanzink und Ferrocyanquecksilbermembran schon ihrem Aussehn nach; dieselben sind außerordentlich dünn und dehnbar, sie verdicken sich während der ersten 5—10 Minuten lang nicht sichtbar. In concentrirten Lösungen ihrer Membranogene ist die dünne Ferrocyankupfermembran außerordentlich unbeständig, in verdünnten, 0.1 normal und verdünnteren, hält sie sich zuweilen monatelang. Die Verdickung der Ferrocyankupfermembran unterscheidet sich wesentlich von der aller anderen Niederschlagsmembranen; während die anderen sich gleichmäßig auf ihrer ganzen Fläche und etwa proportional der Zeit verdicken, bilden sich auf der Ferrocyankupfermembran warzenartige Auswüchse. Die Fällung geht von einzelnen Punkten der Membran aus, um dann, wenn sie einmal eingetreten ist, bald das ganze Probirglas zu füllen. Die Ferrocyankupfermembran ist also unter Umständen für die Jonen ihrer Membranogene impermeabel, befindet sich aber in einem labilen Zustande, der durch unbekannte Umstände leicht gestört wird. Die Ferrocyankupfermembran ist in der That für eine ganze Reihe von Salzen impermeabel; man kann von vielen Stoffen auch mit sehr empfindlichen analytischen Hülfsmitteln nicht Spuren derselben nachweisen, auch nachdem diesen mehrere Stunden lang Gelegenheit geboten war, die Membran zu durchdringen. Die Permeabilität der verschiedenen Niederschlagsmembranen für fremde Stoffe gedenke ich in einer anderen Mittheilung ausführlicher zu behandeln, und die Ansichten von Ostwald über diesen Punkt näher zu prüfen.

Drei verschiedene Arten des Electricitätstransportes wären durch eine Niederschlagsmembran denkbar. Erstens die Jonen der Lösung wandern durch die Poren der Membran. Auch für die Ferrocyankupfermembran, wäre nach dem beschriebenen Verhalten derselben dieser Fall nicht sofort von der Hand zu weisen. Zweitens die Niederschlagsmembranen leiten metallisch; und drittens dieselben leiten electrolytisch.

Untersuchen wir zur Entscheidung der Frage die Electrolyse eines Systems aus Kupfersulfatlösung und darüber geschichteter Ferrocyankaliumlösung, in die Kupferlösung tauche die Anode und in die Ferrocyankaliumlösung die Kathode:

Kathode | 4 K; 4 Cy, Fe Cy_2 | 2 Cu; 4 Cy, Fe Cy_2 | 2 Cu SO_4 | Anode.

Bei der Stromleitung gehn 2 Kupfer-Jonen an die Membran, ihnen entgegen kommt das Ferrocyan-Jon. Wenn die Membran metallisch leitet, so müssen sich auf ihr einerseits 2 Atome metallisches Kupfer und andererseits ein Ferrocyan abscheiden; letzteres geht unter Entwicklung von 2 respective 1.5 Sauerstoff-Atomen in Ferrocyan oder Ferrocyanwasserstoffsäure über. Das Kalium wandert zur Kathode und das Jon SO_4 zur Anode. Bei oberflächlicher Betrachtung scheint die Electrolyse, wenn an der Membran die Stromdichte groß ist, in der That so zu verlaufen.

In einem Probirglase (2 cm Durchmesser) wurde über eine Kupfersulfatlösung (1 Gramm-Molekel im Liter) eine Ferrocyankaliumlösung (0.37 G.-M.) geschichtet und mittelst, 1.5 cm von einander abstehender, Kupferelectroden der Strom von 4 Leclanché-elementen durchgeschickt. Es verdickte sich die Ferrocyankupfermembran stark und zwar sehr viel schneller, als wenn kein Strom durchgeschickt wurde. Unter der starken Fällung von Ferrocyankupfer fand sich eine cohärente Schicht von Kupfer, die nach der Anode hin blank und metallisch, nach der Kathode hin theils in Kupferoxyd verwandelt war. Vom Kupferoxyd aus entwickelte sich reichlich Sauerstoff, die Ferrocyankaliumlösung enthielt Ferricyankalium und reagirte alkalisch. An der Anode wurde Kupfer gelöst und an der Kathode Wasserstoff entwickelt.

Es scheidet sich metallisches Kupfer auf der Membran aus, gleichzeitig bildet sich aber viel Ferrocyankupfer. Leitet die Membran metallisch so ist nicht einzusehn, wozu sich noch eine reichliche Menge Ferrocyankupfer bildet. Wäre es nicht möglich, daß die Kupferabscheidung nur ein secundäres Phänomen ist?

Schaltet man in den Stromkreis der soeben benutzten Zersetzungszelle ein Silbervoltameter, so wurden in diesem während 24 Stunden 2.266 gr Silber abgeschieden, auf und in der Membran wurden nur 0.314 gr metallischen Kupfers gefunden, während 0.664 gr Kupfer der ausgeschiedenen Silbermenge entsprechen würden. Um das Kupfer vom Ferrocyankupfer zu trennen wurde das Gemenge mit Natronlauge, verdünnter Weinsäure und stark alkalischer Lösung von weinsaurem Natron behandelt. Schwarzes Kupferoxyd hat sich in diesem Falle bei geringerer Stromdichte gar nicht gebildet. Ein zweiter Versuch wurde in der Anordnung von Ostwald ausgeführt; ein mit Pergamentpapier überbundenes mit Ferrocyankaliumlösung gefülltes U-förmiges Rohr (1.5 cm Durchmesser) tauchte in zwei Gefäße mit Kupfersulfatlösung, in 24 Stunden hatten sich bei geringerer Stromdichte als im vorigen Versuch an der Kathode 0.211 gr Kupfer abgeschieden auf der Anoden-Pergamentmembran wurden nur 6 mg metallischen Kupfers gefunden.

Sorgt man für noch geringere Stromdichten an der Ferrocyankupfermembran, so ist auf dieser, auch nachdem 4 grm Silber im Silbervoltameter abgeschieden sind, keine Spur von metallischem Kupfer zu entdecken. Füllt man eine Platinschale, 9 cm Durchmesser, mit Kupfersulfat-Lösung (0.1 Gr.-M.) und legt auf diese Lösung ein die Schale allseitig überragendes Stück Pergamentpapier, auf welches man Ferrocyankaliumlösung (0.04 Gr.-M.) bringt, so scheiden 2 Lelauché - Elemente in 3 Tagen keine Spur von metallischem Kupfer auf dem Pergamentpapier ab und in der Ferrocyankaliumlösung ist kein Ferricyankalium nachzuweisen. In der Ferrocyankaliumlösung sind nur Spuren von SO_4-Jonen und in der Kupfersulfatlösung nur Spuren von Kaliumionen enthalten.

Die Metallabscheidung auf der Niederschlagsmembran hängt wohl von der Fähigkeit des Stoffes an der Kathode, unter Abgabe von negativer Electricität in ein anderes Jon überzugehn, ab. Folgende Systeme: Kathode | Schwefelnatrium | Schwefelkupfer | Kupfersulfat | Anode und Kathode | Ferrocyankalium | Ferrocyanzink | Zinksulfat | Anode gaben auf der Membran Metallabscheidungen, während Systeme: Kathode | Kalilauge | Kupferoxydhydrat | Kupfersulfat | Anode[1]) und Kathode | Kohlensaures Kali | Kupfercarbonat | Kupfersulfat | Anode, keine Metallabscheidung gaben. Die Ausscheidung von Kupfer auf der Ferrocyankupfermembran hat mit der Semipermeabilität der Membran nichts zu thun. Auf der Schwefelkupferausscheidung scheidet sich ja auch Kupfer aus und doch ist die Schwefelkupferausscheidung sowohl für Schwefelnatrium als auch für Kupfersulfat in hohem Grade durchlässig.

Durch Annahme metallischer Leitfähigkeit der Ferrocyankupfermembran wird die Electrolyse unseres Systems schwerlich erklärt. Betrachtet man die Niederschlagsmembran als Isolator und sucht den Electricitätsaustausch in den Poren der Membran, so müßten sich diese bald verstopfen und der Strom müßte sehr bedeutend geschwächt werden, ja nach einiger Zeit nothwendig vollkommen

---

1) Systeme aus Kalilauge und Kupfersulfat leiten nur so lange den Strom, als das ausgeschiedene blaue Kupferoxydhydrat sein Wasser nicht verloren hat; ist eine Schicht der Membran in schwarzes Kupferoxyd übergegangen, so geht durch diese Membran fast gar kein Strom, nur Systeme, deren Lösungen verdünnter als etwa $\frac{1}{4}$ normal sind, kann man längere Zeit electrolysiren. Bei concentrirteren Lösungen wächst der Widerstand so, daß der Strom schnell auf $\frac{1}{500}$ seines Werthes geschwächt wird.

aufhören. Aus den Beobachtungen von Overbeck[1]) ist ersichtlich, daß der Widerstand bei Membranen aus Ferrocyankupfer und Ferrocyanzink sehr erheblich wächst, derselbe wird aber nie so groß, daß der Strom auf mehr als $\frac{1}{8}$ seiner anfänglichen Intensität geschwächt wird; um die Stromschwächung hervorzurufen genügen die Concentrationsänderungen der Lösung um die Membran. Wir werden sehn, daß die Schichten an der Membran sich beständig verdünnen müssen. Außerdem konnte an der Ferrocyankupfermembran Nichts beobachtet werden, was zu Gunsten einer Abscheidung von Ferrocyankupfer in den Poren der Membran sprach. Wäre es nicht wahrscheinlich, daß in diesem Falle die Membran ein besonders festes Gefüge annehmen würde?

Die Ferrocyankupfermembran leite also den Strom electrolytisch. Die Kupferjonen dringen in die Ferrocyankupfermasse der Niederschlagsmembran ein und treiben auf der anderen Seite der Membran Kupferjonen heraus, die sich mit den ihnen begegnenden Ferrocyanjonen zu Ferrocyankupfer vereinigen. Die Kalium- und SO_4-Jonen wandern zu den Electroden und das Resultat ist, daß an der Membran beständig Schichten von reinem Wasser, in welches die Jonen beider Salze hineindiffundiren, gebildet werden.

Schickt man durch unser System den Strom in umgekehrter Richtung, also: Anode | 4 K; 4 Cy, $FeCy_2$ | 2 Cu; 4 Cy, $FeCy_2$ | 2 $CuSO_4$ | Kathode, so müßte, wenn die Membran sich wie eine Metallplatte verhielte, auf der zur Anode gewandten Seite der Membran Wasserstoff entwickelt werden und Kalilauge sich bilden, während auf der anderen Seite sich Sauerstoff entwickeln und Schwefelsäure entstehn würde. Nach Ostwald[2]) ist die metallisch leitende Membran aber für Kaliumjonen durchlässig. Warum die Kaliumjonen ihre Electricität nicht der metallisch leitenden Membran abgeben, ist von Ostwald nicht näher erörtert. Dieselben sollen jedenfalls unberaubt ihrer Electricität durch die Poren der Membran in der Kupfersulfatlösung gelangen, in der ihnen die SO_4-Jonen, die die Membran nicht durchdringen können, begegnen. So schwer auch dieser Ansicht beizustimmen ist, so hätte dieselbe doch etwas für sich, wenn in der Kupferlösung die der auf der Kathode abgeschiedenen Kupfermenge aequivalente Kaliummenge gefunden würde. Zwar dringt aus einer Lösung, die Kalium- und SO_4-Jonen enthält, ein geringer Theil derselben

---

1) A. Oberbech l. c.

2) W. Ostwald l. c.

durch die Ferrocyankupfermembran, aber bei unseren Versuchsbedingungen kann es sich, wie ich mich überzeugt habe, nur um wenige Milligramm Kaliumsulfat, die aus der Kupferlösung in die Ferrocyankaliumlösung hinüber diffundiren, handeln. Trotzdem müßte die der Summe der SO_4 Menge (in der Ferrocyankaliumlösung) und der Kaliummenge (in der Kupfersulfatlösung) aequivalente Menge von Kaliumsulfat der an der Kathode abgeschiedenen Kupfermenge entsprechen. Die Analyse ergiebt aber in der Kupfersulfatlösung nur etwa $\frac{1}{4}$ der erwarteten Menge von Kaliumsulfat und in der Ferrocyankaliumlösung ist nicht mehr als $\frac{1}{8}$ derselben vorhanden.

In eine Platinschale (9 cm Durchmesser) wurden 300 cbcm Kupfersulfatlösung (0.1 G.-M.) gebracht, die Lösung mit Pergamentpapier bedeckt und Ferrocyankaliumlösung auf das Papier geschichtet. Es hatten sich nach 24 Stunden auf der Platinschale 0.849 gr Kupfer abgeschieden. In der Kupfersulfatlösung wurden, nach Ausfällung des Kupfers mit Schwefelwasserstoff, 0.671 grm Kaliumsulfat gefunden, während die dem ausgeschiedenen Kupfer aequivalente Kaliumsulfatmenge 2.342 gr betragen würde. Aus der braunschwarz gefärbten Ferrocyankaliumlösung wurde das Jon SO_4 mit Baryumchlorid gefüllt, der ausgewaschene Niederschlag mit Kali und Salpeter geschmolzen und aus der Lösung der Schmelze die Schwefelsäure nochmals aus sauerer Lösung mit Chlorbaryum gefällt. Es wurden so erhalten 0.544 gr Baryumsulfat, entsprechend 0.406 Kaliumsulfat.

Nimmt man auch an, daß die in der Ferrocyankaliumlösung gefundene Menge von SO_4-Jonen mit Kaliumjonen zusammen durch die Membran zurück in die Ferrocyankaliumlösung getreten ist, so könnten im Ganzen doch nur 0.671 gr + 0.406 gr = 1.077 gr Kaliumsulfat in der Kupfersulfatlösung gebildet sein, während nach Ostwald 2.342 gr Kaliumsulfat in der Kupferlösung vorgefunden werden müßten.

Bemerkenswerth ist der Umstand, daß die Ferrocyankupfermembran bei dieser Richtung des Stromes viel dünner ist und bleibt, als wenn unter demselben Umständen kein Strom durch die Membran geht.

Jener und dieser Befund können in einfacher Weise erklärt werden, wenn man der Niederschlagsmembran electrolytisches Leitvermögen zuschreibt. Verfolgen wir den Strom von der Anode aus. Das Ferrocyan scheidet sich an der Anode ab, dieselbe sei aus Platin, und zersetzt das Wasser, indem sich Ferrocyanwasserstoffsäure und Sauerstoff bilden. Dabei treten complicirte Oxydationswirkungen ein, die hier nicht weiter interessiren. Die 4 Kaliumjonen wandern von der Anode zur Membran und treten in diese an Stelle zweier Kupferjonen ein, letztere wandern durch die Membran und die Kupfersulfatlösung zur Kathode. Von der Kathode aus wandern die SO_4-Jonen und treten in die Membran an Stelle der Ferrocyanjonen, die durch die Ferrocyankaliumlösung zur Anode wandern. Das Resultat dieses Processes ist eine beständige Auflösung der Ferrocyankupfermembran und Bildung von Kupfersulfat und Ferrocyankalium an der Membran. Natürlich verschwindet die Membran nicht, sondern bildet sich beständig aus den Membranogenen neu, was ja mit ihrer Feinheit unter diesen Versuchsbedingungen übereinstimmt. Bei dieser Neubildung der Membran gelangt ein Theil der Kaliumjonen in die Kupferlösung und ein Theil der SO_4-Jonen in die Ferrocyankaliumlösung. Würden die Kalium und SO_4-Jonen in den Poren der Membran zusammentreffen, so müßten, da beide Jonen gleiche Ueberführungszahlen haben, auf beiden Seiten der Membran aequivalente Mengen von Kalium und SO_4 gefunden werden. Die Summe der jenen aequivalenten Kaliumsulfatmengen müßte der ausgeschiedenen Kupfermenge entsprechen. Ferner ist, wenn der Membran ein Isolator wäre, kein Grund dafür vorhanden, daß die Membran an Substanz verliert.

Von Interesse erschien noch der Fall, in dem sich neben der Membran ein Salz bildet, das die Membran auch nicht in Spuren zu durchdringen vermag. Folgendes System: Anode | Ferrocyanmagnesium | Ferrocyankupfer | Kupfersulfat | Kathode, genügt jener Bedingung. Nach Ostwalds Ansichten wäre bei der Electrolyse dieses Systems eine Abscheidung von Magnesium oder Magnesia auf der Membran zu erwarten. Eine solche fand auch bei größeren Stromdichten nicht statt. Folgender Versuch spricht wie die vorigen für electrolytische Leitung der Membran. Die Versuchsanordnung war die früher beschriebene. Auf der Kathode wurden 1.897 gr metallisches Kupfer abgeschieden, in der Kupfersulfatlösung wurden 0.377 gr Magnesiumsulfat (der Kupfermenge aequivalent wären 3.63 $Mg\ SO_4$) gefunden und aus der Ferrocyanmagnesiumlösung wurden 2.124 gr Baryumsulfat erhalten. Der Kupfermenge aequivalent wären 7.03 gr Baryumsulfat und der in die Kupfersulfatlösung übergetretenen Menge Magnesium wären 0.731 gr Barymsulfat aequivalent. Es sind also bei der bestän-

1) G. Tammann, Zeitschrift f. physikal. Chem. 6. p. 236. 1890.

digen Neubildung der Membran, wenn ein Atom Magnesium in die Kupfersulfatlösung trat, 3 Atome SO_4 in die Ferrocyanmagnesiumlösung getreten. Systeme mit Niederschlagsmembranen entwickeln beim Durchgang des Stromes wohl ausnahmslos einen unipolaren Widerstand.

Wie früher gezeigt besitzen Niederschlagsmembranen, die sich nicht merkbar verdicken, für Wechselströme keinen Widerstand[1]). Anders verhalten sich aber solche Systeme gegen längere Zeit constant wirkende, besonders gegen starke Ströme; bei der Wirkung dieser bildet sich bei einer bestimmten Richtung des Stromes schnell ein starker Widerstand aus. Die oben auseinandergesetzten Verhältnisse bei der Stromleitung unserer Systeme lassen diese Erscheinung vollständig verstehn.

Nach Oberbeck[1]) sind die electromotorischen Kräfte der Polarisationsströme von Systemen mit Niederschlagsmembranen nie größer als ein Volt. Die Stromstärke aber nahm bei Oberbecks Systemen in 5 Minuten auf $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{10}$ ihres Betrages ab. Also wuchs der Widerstand aufs 7 bis 9 fache, da die electromotorische Kraft der Batterie 9 Volt betrug. Wie ich mich mehrfach bei oben beschriebener Versuchsanordnung, Uebereinanderschichtung der Lösungen in einer Röhre mit Electroden, überzeugt habe, entwickelt sich der große Widerstand nur dann, wenn die Jonen, die eine Membran oder nur einen Niederschlag bilden, sich gegen einander, die beiden anderen Jonen sich aber auseinander bewegen. Dadurch entsteht an der Membran oder im Niederschlage eine sehr verdünnte Lösung, in deren Bildung wohl die Hauptursache des großen Widerstandes zu suchen ist. Wendet man den Strom, so wandern die membranbildenden Jonen auseinander, die anderen Jonen aber zur Membran, so daß die Membran oder der Niederschlag jetzt von concentrirteren Schichten umgeben sein wird.

Bei der Electrolyse eines Systems aus Kupfersulfatlösung (1 G.-M.) und Ferrocyankaliumlösung (0.37 G.-M.) mit 4 Leclauché Elementen fiel, wenn die membranbildenden Jonen gegen einander wanderten, die Stromstärke in 2 Minuten auf den 10. Theil ihres anfänglichen Werthes; rückten die membranbildenden Jonen aber auseinander, so änderte sich die Stromstärke nur wenig. Natürlich hängt das Phänomen wesentlich von der Stromdichte an der Membran ab, ist dieselbe gering, so können sich die durch den Strom hervorgerufenen Concentrationsunterschiede sofort wieder durch Diffusion ausgleichen, und der unipolare Widerstand wird

1) A. Oberbeck l. c.

nicht auftreten. Der unipolare Widerstand verschwand bei einer Stromstärke von 10 Milli-Ampère in einem System von Kupfersulfat (0.05 G.-M.) und Ferrocyankaliumlösung (0.02 G.-M.). Für das Auftreten des unipolaren Widerstandes ist es gleichgültig, ob eine permeabele oder semipermeable Membran oder endlich nur ein Niederschlag gebildet wird.

Obige Untersuchung der Electrolyse eines Systems aus Kupfersulfat und Ferrocyankaliumlösung hat gelehrt, daß nur durch Annahme electrolytischer Leitfähigkeit der Membran die beobachteten Erscheinungen genügend erklärt werden. Die electrolytische Zersetzbarkeit der Membran hat im Lichte Hittorf'scher Anschauungen Nichts befremdendes. Sind doch alle Stoffe, die unter den Begriff Salz rubriciren, Electrolyte.

Dorpat im März 1891.

Ueber einen neuen Apparat zur Bestimmung der inneren Wärmeleitungsfähigkeit schlecht leitender Körper in absolutem Maße.

Von

O. Venske.

Bei den Schwierigkeiten, mit welchen noch heutzutage die Ermittelung genauer Werte der Wärmeleitungsfähigkeit in absolutem Maße verbunden ist, dürfte ein kurzer Bericht über einen neuen Apparat nicht ohne Interesse sein, welcher auf Veranlassung von Herrn Prof. W. Voigt construiert ist und die Bestimmung dieser Constante für schlecht leitende Substanzen in einfacher Weise ermöglicht.

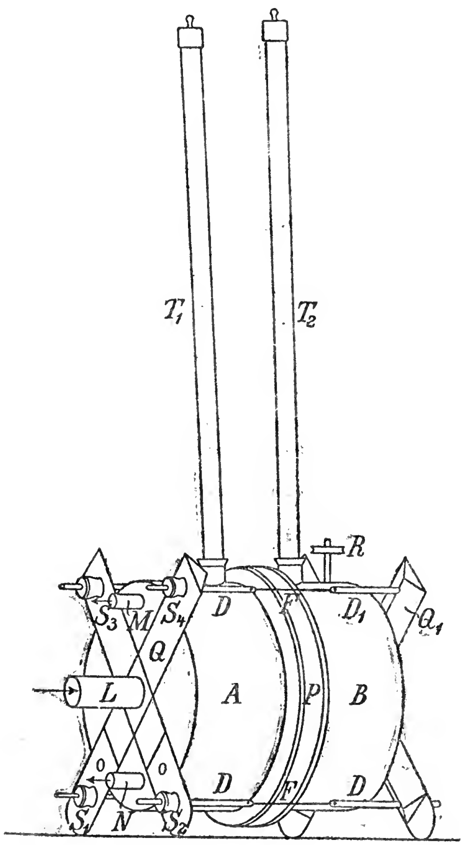
Die Messungsmethode des Herrn Prof. W. Voigt gründet sich auf die Bestimmung der Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit aus einer Wassermasse von der Temperatur ϑ_2 in eine andere von ihr durch eine planparallele Wand der zu untersuchenden Substanz getrennte Wassermasse von der Temperatur ϑ_1 übergeht. Führt man folgende Bezeichnung ein:

calorimetrische Wärmeleitungsfähigkeit der Wand k,
äußere Wärmeleitungsfähigkeit der Wand gegen die
Wassermasse von der Temperatur ϑ_1 bezw. ϑ_2 h_1 bez. h_2,
Dicke der Wand δ,

Stärke der Wärmeströmung berechnet für den Querschnitt 1 Q, so besteht, falls ϑ_1 und ϑ_2 sich so langsam mit der Zeit ändern, daß der Zustand in der Platte sich nur sehr wenig von dem stationären unterscheidet, der bei constanten Temperaturen der beiden Bäder eintreten würde, bekanntlich die Gleichung

$$\frac{1}{Q}(\vartheta_2 - \vartheta_1) = \frac{\delta}{k} + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}.$$

Bestimmt man experimentell die Werte, welche die linke Seite dieser Gleichung für verschiedene Wanddicken annimmt, so gewinnt man folglich Gleichungen, aus denen sich die Unbekannten k und $1/h_1 + 1/h_2$ berechnen lassen. Diese Bestimmungen können bequem und genau mit dem oben erwähnten Apparate ausgeführt werden.



A und B sind zwei mit ihren Mündungen einander zugekehrte cylinderförmige Gefäße, welche je eine Höhe von 5 cm und einen

Durchmesser von 10 cm haben. Dieselben befinden sich zwischen zwei Holzkreuzen Q, Q_1, welche durch die Drähte D, D_1 und die Seidenschnüre F mit einander verbunden sind. Die äußeren Enden der Drahtstücke D sind mit Schraubengewinden und Muttern S_1, S_2, S_3, S_4 ausgestattet. Durch Anziehen der letzteren werden die mit Gummi gefütterten Gefäßränder wasserdicht gegen eine dazwischengeschaltete kreisförmige Platte P aus der zu untersuchenden Substanz gepreßt. A und B sind mit zwei Stutzen versehen, welche dem Rande möglichst nahe liegen und zur Aufnahme zweier in zehntel Grade geteilter Thermometer, T_1 bezw. T_2, dienen. In dem rechten Gefäß befindet sich ein Rührer in Form einer Turbine, die durch das Rädchen R von außen bewegt wird; in die Wand des linken sind drei Röhren L, M, N eingelötet. Die Röhre L tritt in das Innere des Apparates und trägt an ihrem Ende eine dem Thermometer T_1 möglichst nahe stehende kreisförmige Scheibe von circa 8 cm Durchmesser, welche dazu bestimmt ist, einen eintretenden Flüssigkeitsstrahl dicht an der Platte P hinzuleiten.

Die Benutzungsweise des Apparates ist so einfach, daß wenige Angaben zur Klarlegung genügen werden. Durch einen Vorversuch hat man die äußere Wärmeleitungsfähigkeit der Gefäßwände gegen Luft zu bestimmen. Man verfährt hierbei so, daß man die Platte P entfernt, die unmittelbar an einander gepreßten Gefäße A und B mit warmem Wasser füllt und, während man den Rührer arbeiten läßt, die Abkühlung bestimmt. Da die beiden Hälften des Apparates sehr nahe gleiche Oberflächen besitzen, so ist die bei dem Vorversuch gefundene Wärmeabgabe an die Umgebung das Doppelte von derjenigen, die bei der Berechnung der eigentlichen Messungen in Betracht kommt. Nachdem dies geschehen, können die definitiven Beobachtungen angestellt werden. Man schaltet zwischen A und B eine Platte P der zu untersuchenden Substanz und läßt in das linke Gefäß Leitungswasser durch L ein, durch M, N ausströmen. Hat das Thermometer T_1 einen constanten Stand angenommen, so füllt man B mit warmem Wasser, setzt die Rührvorrichtung in Bewegung und bestimmt, während die Abkühlung vor sich geht, in geeigneten Zeitabschnitten die Lufttemperatur, die Temperatur ϑ_1 des Kühlwassers und die Temperatur ϑ_2 des warmen Wassers.

Von Herrn Prof. W. Voigt aufgefordert habe ich untersucht, wie man im Einzelnen verfahren muß, wenn man die Beobachtungen nach der oben aufgestellten einfachen Formel berechnen will. Es hat sich mir Folgendes ergeben. Die Grundvoraussetzung der bezeichneten Formel, daß in der Platte P die Isothermen zur Begrenzung parallele Ebenen sind, ist dann und nur dann erfüllt, wenn der Plattenrand durch Ueberkleben mit Stanniol gegen Wärmeverlust durch Strahlung geschützt wird, und die Stärke des Kühlwasserstromes sowie die des Rührens eine beträchtliche ist. Ferner fand ich, daß die Größen h_1 und h_2 nicht nur von der Temperatur, sondern auch von den beiden letztgenannten Factoren abhängen. Auf Grund dieser Erfahrungen achtete ich bei den Beobachtungen, welche ich mit einander combinierte, darauf, daß die Strömungsgeschwindigkeit des Kühlwassers, sowie die Umdrehungsgeschwindigkeit des Rührers stets gleich stark war, und zwar wurde bei denselben ein Querschnitt der Röhre L in einer Secunde von 47 cm^3 Wasser durchflossen, während der Rührer in derselben Zeit 40 Touren machte. Um mich von der Veränderlichkeit der äußeren Wärmeleitungsfähigkeiten h_1, h_2 mit der Temperatur zu befreien, berechnete ich aus meinen Messungen, welche ich an sieben verschieden dicken Spiegelglasplatten anstellte, die Größe

$$\frac{1}{Q}(\vartheta_2 - \vartheta_1)$$

für dieselbe bestimmte Stärke des Wärmestromes Q, nämlich für

$$Q = 0{,}0654 \left[\frac{\text{gr. Tem.}}{\text{sec. cm.}^2}\right].$$

Die Resultate, zu welchen ich gelangte, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

δ [cm.]	$\frac{1}{Q}(\vartheta_2 - \vartheta_1)\left[\frac{\text{sec. cm.}^2}{\text{gr.}}\right]$ beobachtet	berechnet
0,271	155	155
0,287	163	163
0,368	196	194
0,548	269	268
0,647	306	308
0,972	439	439
1,170	521	520.

Aus den Werten der zweiten Columne findet man bei Benutzung der Formel

$$\frac{1}{Q}(\vartheta_2 - \vartheta_1) = \frac{\delta}{k} + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}$$

für die innere Wärmeleitungsfähigkeit k und die Summe der beiden reciproken äußeren Wärmeleitungsfähigkeiten $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}$ die Werte

$$k = 0{,}00247 \left[\frac{\text{gr.}}{\text{sec. cm.}}\right],$$

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} = 46{,}0 \left[\frac{\text{sec. cm.}^2}{\text{gr.}}\right].$$

Mit diesen beiden Werten ist die dritte Columne berechnet.

Wie aus der guten Uebereinstimmung der Werte der 2ten und 3ten Columne hervorgeht, kann man bei Anwendung eines geeigneten Verfahrens die angestellten Beobachtungen nach der einfachen Formel für linearen Wärmefluß in der Platte berechnen. Mit Hülfe des beschriebenen Apparates läßt sich also die absolute Wärmeleitungsfähigkeit wenigstens schlecht leitender Körper in einfacher Weise ermitteln.

Universität.

Petsche-Stiftung.

Als Aufgabe zur Erlangung des Preises der Petschestiftung, soweit er diesmal von der Theologischen Fakultät zu verleihen war, (167 M.), hat die Fakultät die folgende gestellt: „Welche Stellung zur Lehre der Kirche hat Priscillian nach seinen neuerdings veröffentlichten Schriften eingenommen?“ — Es ist eine Bearbeitung derselben mit dem Motto: „Ich habs gewagt“ rechtzeitig eingegangen. Der Verfasser dieser Abhandlung hat das Thema nicht ganz dem Sinne desselben entsprechend aufgefaßt und es bei der Untersuchung im einzelnen an der rechten wissenschaftlichen Schärfe in der Bestimmung der zu untersuchenden Begriffe fehlen lassen, auch ist die Darstellungsweise in sprachlicher Hinsicht nicht ohne Mängel. Der Arbeit konnte darum der Preis nicht zuerkannt werden.

Da der Verfasser indessen auf dem von ihm eingeschlagenen Wege das Verhältnis Priscillians zur katholischen Kirche wenigstens in der Hauptsache richtig dargestellt hat, so war von der Fakultät beschlossen, ihm einen Teil des ausgesetzten Preises (120 M.) zu bewilligen, wenn er sich bei dem Dekane meldete. Diese Meldung ist inzwischen erfolgt, und hat ergeben, daß der

Cand. theol. und Stud. hist. H. Rüther aus Nordleda die Arbeit verfaßt hat.

Goettingen, den 1. März 1891.

Der Dekan der Theologischen Fakultät
Dr. K. Knoke.

Für das Jahr 1894 stellt die philosophische Fakultät folgende neue

Beneke'sche philosophische Preisaufgabe:

Der bedeutenden Rolle, die die Sprache der kaiserlichen Kanzlei in der Entstehungsgeschichte der neuhochdeutschen Schriftsprache gespielt hat, entspricht es nicht, daß uns eine zusammenhängende und umfassende philologische Untersuchung jener Sprache bisher noch völlig fehlt. Wir wünschen eine Geschichte der deutschen kaiserlichen Kanzleisprache von ihren Anfängen bis auf Maximilian, die in angemessenen, zeitlich begrenzten Abschnitten das Constante und das Schwankende in den Laut- und Flexionsverhältnissen, sowie möglichst auch in Wortbildung und Wortwahl zur Anschauung bringt und mundartlich erläutert; eine Beschränkung auf das Lautliche würde nicht genügen; Benutzung ungedruckten Materials wird nicht verlangt. Aeußere Verhältnisse, wie der wechselnde Sitz der Kanzlei, Heimat und litterarische Beziehungen der Kaiser und Kanzleivorstände, die Herkunft der Schreiber, der Einfluß wichtiger Reichstage, die etwaige Rücksicht auf die Mundart der Adressaten und ähnliches sind eingehend zu berücksichtigen und darzulegen. Auch das Verhältnis der kaiserlichen Kanzleisprache zu den Anfängen einer oberdeutschen *Κοινή* im 14. und 15. Jahrhundert darf nicht außer Acht bleiben: namentlich wird zu untersuchen sein, ob die Sprache der Nürnberger Kanzlei auf die der kaiserlichen eingewirkt habe, oder umgekehrt.

Erwünscht, wenn auch nicht unerläßlich, ist es endlich, daß an der Sprache der Urkunden und der ältesten Drucke einiger außerbairischen literarischen Centren Süddeutschlands die Bedeutung der kaiserlichen Kanzlei für die Milderung der mundartlichen Gegensätze im 15ten Jahrhundert geprüft werde: neben Nürnberg käme etwa Augsburg, für das Vorarbeiten vorliegen, und Straßburg in Betracht.

Bewerbungsschriften sind in deutscher Sprache abzufassen und bis zum 31. August 1893 mit einem Spruche auf dem Titelblatte an uns einzusenden zusammen mit einem versiegelten Briefe, welcher auf der Außenseite den Spruch der Abhandlung, innen Namen, Stand und Wohnort des Verfassers anzeigt. In anderer Weise darf der Name des Verfassers nicht angegeben sein.

Auf dem Titelblatte der Arbeit muß ferner die Adresse bezeichnet sein, an welches die Arbeit zurückzusenden ist, falls sie nicht preiswürdig befunden wird.

Der erste Preis beträgt 1700 Mk., der zweite 680 Mk.

Die Zuerkennung der Preise erfolgt am 11. März 1894, dem Geburtstage des Stifters, in öffentlicher Sitzung der philosophischen Fakultät zu Göttingen.

Die gekrönten Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigenthum der Verfasser.

Die Preisaufgaben, für welche die Bewerbungsschriften bis zum 31. August 1891 und 31. August 1892 einzusenden sind, finden sich in den Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen im Jahrgang 1889 Seite 345 und 1890 Seite 151.

Göttingen d. 1. April 1890.

Die philosophische Fakultät.
Der Dekan
A. von Koenen.

Preisaufgaben der **Wedekindschen Preisstiftung** für Deutsche Geschichte.

Wiederholt aus Nr. 4 der Nachrichten vom Jahr 1887 S. 69 ff.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung für Deutsche Geschichte macht hierdurch die Aufgaben bekannt, welche von ihm für den fünften Verwaltungszeitraum, vom 14. März 1886 bis zum 14. März 1896, nach den Ordnungen der Stiftung (§ 20) gestellt werden.

Für den ersten Preis

wiederholt der Verwaltungsrath die für den vorigen Verwaltungszeitraum gestellte Aufgabe: er verlangt eine allen Anforderungen der Wissenschaft entsprechende Ausgabe der von dem Mainzer **Eberhard Windeck** verfaßten **Denkwürdigkeiten über Leben und Zeit Kaiser Sigismunds.**

Es gilt den völlig werthlosen und unbrauchbaren Abdruck bei Mencken durch eine nach Seite der Sprache wie des Inhalts gleich tüchtige Ausgabe zu ersetzen.

Nach den älteren Vorarbeiten von Dümgé, Mone, Aschbach, Droysen hat neuerdings v. Hagen in der Einleitung zu seiner Uebersetzung (Geschichtschreiber der deutschen Vorzeit, Lief. 79. Leipzig 1886) über das Verhältniß von dreien der wichtigsten Handschriften (Gotha, Cheltenham, Hannover) zu einander gehandelt und danach zwei von dem Verfasser selbst herrührende Redactionen unterschieden, auch die Annahme abgewiesen, daß die Handschrift zu Cheltenham ein Original sei. Für den Bearbeiter ist die Heranziehung der anderen bekannten und von v. Hagen S. VII, Anm. 2 aufgeführten Hdsch. schon deßhalb erforderlich, um die Richtigkeit der Aufstellung v. Hagen's zu prüfen und festzustellen, ob etwa noch mehr als zwei Ausgaben des Werkes vorliegen.

Von den drei im Archiv III, 429 verzeichneten Vaticanischen Hdsch. wird der Verwaltungsrath demnächst Beschreibungen anfertigen lassen, welche ihre Classificirung ermöglichen. Diese Beschreibungen sollen dem Bearbeiter durch Vermittelung der Verwaltung der Kgl. Universitätsbibliothek zur Verfügung stehen. Von der Heranziehung dieser drei Hdsch. zur Textconstitution glaubt der Verwaltungsrath im übrigen den Bearbeiter befreien zu sollen[1]).

Bei der Bearbeitung des Textes wird es vor allem darauf ankommen, daß die von dem Verfasser herrührenden Unterschiede der verschiedenen Redactionen klar und übersichtlich zur Erscheinung kommen, davon auch äußerlich dasjenige geschieden und gekennzeichnet werde, was etwa fremder Ueberarbeitung seinen Ursprung verdankt. Die originalen Rubriken und Capitelüberschriften sind in die Ausgabe aufzunehmen.

Die Urkunden und Aktenstücke aller Art, welche dem Werke zahlreich eingefügt sind, erfordern genaue Untersuchung in Bezug auf Herkunft, Wiedergabe und anderweitige Benutzung. Sind von denselben abweichende Texte oder die Originale bekannt, so ist darauf in den Anmerkungen hinzuweisen, geeigneten Falls der

1) Vgl. den Bericht über diese Hss. in den Nachrichten 1888 S. 11 ff.

abweichende Text zum Abdruck in der Anmerkung zu bringen. Desgleichen ist wenigstens annäherungsweise der Versuch zu machen für die rein erzählenden Theile Ursprung oder Quelle beizubringen, namentlich in Bezug auf An- und Abwesenheit des Verfassers. Es darf dem Text an Erläuterung in sprachlicher und sachlicher Hinsicht nicht fehlen.

Die Einleitung soll sowohl die bei der Untersuchung und Herstellung des Textes befolgte Methode klarlegen, als auch eine eingehende Erörterung über die Lebensschicksale des Verfassers, die Beziehungen zu seiner Vaterstadt, seine Reisen, sein Verhältniß zum Kaiser und anderen namhaften Zeitgenossen, seine übrigen Werke in Prosa und Dichtung geben.

Die sprachliche Behandlung des Textes hat sich, falls nicht etwa eine Originalhandschrift auftauchen sollte, nach den von Weizsäcker im I. Bande der Reichstagsakten für die Vereinfachung der Schreibung spätmittelalterlicher deutscher Texte aufgestellten Grundsätzen zu richten.

Der Ausgabe ist ein Wortverzeichniß, entsprechend demjenigen des 1. Bandes der Mainzer Chroniken (Städtechroniken Bd. XVII), sowie ein ungetrenntes Verzeichniß der Personen- und Ortsnamen beizufügen.

Von der Cheltenhamer Handschrift befindet sich eine genaue Abschrift auf der Kgl. Universitätsbibliothek, welche bereitwilligst von der Bibliotheksverwaltung zur Benutzung ausgeliehen wird.

Für den zweiten Preis

schreibt der Verwaltungsrath

eine Geschichte des Herzogthums Schwaben vom Beginn des 10. bis in die zweite Hälfte des 13. Jahrhunderts

aus.

Nach einem einleitenden Rückblicke auf die karolingische Zeit ist der Schwerpunkt der Arbeit in die Verfassungsgeschichte des bezeichneten Zeitraums zu legen, da die politische Geschichte Schwabens zur Genüge behandelt worden ist. Das schwäbische Herzogthum ist in seiner Entwicklung bis zur Auflösung zu verfolgen, sein Verhältnis zu der königlichen Gewalt einerseits, wie zu den Bisthümern, Grafschaften, Herrschaften und Städten andererseits darzulegen. Nach der gründlichen und erschöpfenden Untersuchung des Einzelnen erwartet der Verwaltungsrath eine zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse der Untersuchung. Neben den Nachrichten der Geschichtschreiber hat der Bearbeiter dem reichen Urkundenmaterial eingehendste Aufmerksamkeit zu widmen und es nach allen Richtungen für den bezeichneten Zweck auszubeuten. Als Beilage der Arbeit wünscht der Verwaltungsrath Regesten der Urkunden, an welchen die Herzöge von Schwaben in irgend einer Eigenschaft betheiligt sind oder in welchen sie Erwähnung finden.

In Beziehung auf die Bewerbung um diese Preise, die Ertheilung des dritten Preises und die Rechte der Preisgewinnenden wird aus den Ordnungen der Stiftung Folgendes wiederholt:

1. **Ueber die zwei ersten Preise.** Die Arbeiten können in deutscher oder lateinischer Sprache abgefaßt sein.

Jeder dieser Preise beträgt 1000 Thaler in Gold (3300 Reichsmark) und muß jedesmal ganz, oder kann gar nicht zuerkannt werden.

2. **Ueber den dritten Preis.** Für den dritten Preis wird keine bestimmte Aufgabe ausgeschrieben, sondern die Wahl des Stoffes bleibt den Bewerbern nach Maßgabe der folgenden Bestimmungen überlassen.

Vorzugsweise verlangt der Stifter für denselben ein deutsch geschriebenes Geschichtsbuch, für welches sorgfältige und geprüfte Zusammenstellung der Thatsachen zur ersten, und Kunst der Darstellung zur zweiten Hauptbedingung gemacht wird. Es ist aber damit nicht bloß eine gut geschriebene historische Abhandlung, sondern ein umfassendes historisches Werk gemeint. Speciallandesgeschichten sind nicht ausgeschlossen, doch werden vorzugsweise nur diejenigen der größten (15) deutschen Staaten berücksichtigt.

Zur Erlangung des Preises sind die zu diesem Zwecke handschriftlich eingeschickten Arbeiten und die von dem Einsendungstage des vorigen Verwaltungszeitraums bis zu demselben Tage des laufenden Zeitraums (dem 14. März des neunten Jahres) gedruckt erschienenen Werke dieser Art gleichmäßig berechtigt. Dabei findet indessen der Unterschied statt, daß die ersteren, sofern sie in das Eigenthum der Stiftung übergehen, den vollen Preis von 1000 Thalern in Gold, die bereits gedruckten aber, welche Eigenthum des Verfassers bleiben, oder über welche als sein Eigenthum er bereits verfügt hat, die Hälfte des Preises mit 500 Thalern Gold empfangen.

Wenn keine preiswürdigen Schriften der bezeichneten Art vorhanden sind, so darf der dritte Preis angewendet werden, um die Verfasser solcher Schriften zu belohnen, welche durch Entdeckung und zweckmäßige Bearbeitung unbekannter oder unbenutzter historischer Quellen, Denkmäler und Urkundensammlungen sich um die deutsche Geschichte verdient gemacht haben. Solchen Schriften darf aber nur die Hälfte des Preises zuerkannt werden.

Es steht Jedem frei, für diesen zweiten Fall Werke der bezeichneten Art auch handschriftlich einzusenden. Mit denselben sind aber ebenfalls alle gleichartigen Werke, welche vor dem Einsendungstage des laufenden Zeitraums gedruckt erschienen sind, für diesen Preis gleich berechtigt. Wird ein handschriftliches Werk gekrönt, so erhält dasselbe einen Preis von 500 Thalern in Gold; gedruckt erschienenen Schriften können nach dem Grade ihrer Bedeutung Preise von 250 Thlr. oder 500 Thlr. Gold zuerkannt werden.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich von selbst, daß der dritte Preis auch Mehreren zugleich zu Theil werden kann.

3. **Rechte der Erben der gekrönten Schriftsteller.** Sämmtliche Preise fallen, wenn die Verfasser der Preisschriften bereits gestorben sein sollten, deren Erben zu. Der dritte Preis kann auch gedruckten Schriften zuerkannt werden, deren Verfasser schon gestorben sind, und fällt alsdann den Erben derselben zu.

4. **Form der Preisschriften und ihrer Einsendung.** Bei den handschriftlichen Werken, welche sich um die beiden ersten Preise bewerben, müssen alle äußeren Zeichen vermieden werden, an welchen die Verfasser erkannt werden können. Wird ein Verfasser durch eigene Schuld erkannt, so ist seine Schrift zur Preisbewerbung nicht mehr zulässig. Daher wird ein jeder, der nicht gewiß sein kann, daß seine Handschrift den Preisrichtern unbekannt ist, wohlthun, sein Werk von fremder Hand abschreiben zu lassen. Jede Schrift ist mit einem Sinnspruche zu versehen, und es ist derselben ein versiegelter Zettel beizulegen, auf dessen Außenseite derselbe Sinnspruch sich findet, während inwendig Name, Stand und Wohnort des Verfassers angegeben sind.

Die handschriftlichen Werke, welche sich um den dritten Preis bewerben, können mit dem Namen des Verfassers versehen, oder ohne denselben eingesandt werden.

Alle diese Schriften müssen im Laufe des neunten Jahres, vor dem 14. März 1896, mit dem das zehnte Jahr beginnt, dem Direktor zugesendet sein, welcher auf Verlangen an die Vermittler der Uebersendung Empfangsbescheinigungen auszustellen hat.

5. **Ueber Zulässigkeit zur Preisbewerbung.** Die Mitglieder

der Königlichen Societät, welche nicht zum Preisgerichte gehören, dürfen sich wie jeder Andere um alle Preise bewerben. Dagegen leisten die Mitglieder des Preisgerichts auf jede Preisbewerbung Verzicht.

6. **Verkündigung der Preise.** An dem 14. März, mit welchem der neue Verwaltungszeitraum beginnt, werden in einer Sitzung der Societät die Berichte über die Preisarbeiten vorgetragen, die Zettel, welche zu den gekrönten Schriften gehören, eröffnet, und die Namen der Sieger verkündet, die übrigen Zettel aber verbrannt. Jene Berichte werden in den Nachrichten über die Königliche Societät, dem Beiblatte der Göttingischen gelehrten Anzeigen, abgedruckt. Die Verfasser der gekrönten Schriften oder deren Erben werden noch besonders durch den Direktor von den ihnen zugefallenen Preisen benachrichtigt, und können dieselben bei dem letzteren gegen Quittung sogleich in Empfang nehmen.

7. **Zurückforderung der nicht gekrönten Schriften.** Die Verfasser der nicht gekrönten Schriften können dieselben unter Angabe ihres Sinnspruches und Einsendung des etwa erhaltenen Empfangsscheines innerhalb eines halben Jahres zurückfordern oder zurückfordern lassen. Sofern sich innerhalb dieses halben Jahres kein Anstand ergiebt, werden dieselben am 14. October von dem Direktor den zur Empfangnahme bezeichneten Personen portofrei zugesendet. Nach Ablauf dieser Frist ist das Recht zur Zurückforderung erloschen.

8. **Druck der Preisschriften.** Die handschriftlichen Werke, welche den Preis erhalten haben, gehen in das Eigenthum der Stiftung für diejenige Zeit über, in welcher dasselbe den Verfassern und deren Erben gesetzlich zustehen würde. Der Verwaltungsrath wird dieselben einem Verleger gegen einen Ehrensold überlassen oder, wenn sich ein solcher nicht findet, auf Kosten der Stiftung drucken lassen, und in diesem letzteren Falle den Vertrieb einer zuverlässigen und thätigen Buchhandlung übertragen. Die Aufsicht über Verlag und Verkauf führt der Direktor.

Der Ertrag der ersten Auflage, welche ausschließlich der Freiexemplare höchstens 1000 Exemplare stark sein darf, fällt dem verfügbaren Capitale zu, da der Verfasser den erhaltenen Preis als sein Honorar zu betrachten hat. Wenn indessen jener Ertrag ungewöhnlich groß ist, d. h. wenn derselbe die Druckkosten um das Doppelte übersteigt, so wird die Königliche Societät auf den Vortrag des Verwaltungsrathes erwägen, ob dem Verfasser nicht eine außerordentliche Vergeltung zuzubilligen sei.

Findet die Königliche Societät fernere Auflagen erforderlich, so wird sie den Verfasser oder, falls derselbe nicht mehr leben sollte, einen andern dazu geeigneten Gelehrten zur Bearbeitung derselben veranlassen. Der reine Ertrag der neuen Auflagen soll alsdann zu außerordentlichen Bewilligungen für den Verfasser, oder, falls derselbe verstorben ist, für dessen Erben, und den neuen Bearbeiter nach einem von der Königlichen Societät festzustellenden Verhältnisse bestimmt werden.

9. **Bemerkung auf dem Titel derselben.** Jede von der Stiftung gekrönte und herausgegebene Schrift wird auf dem Titel die Bemerkung haben:

> Von der Königlichen Societät der Wissenschaften in Göttingen mit einem Wedekindschen Preise gekrönt und herausgegeben.

10. **Freiexemplare.** Von den Preisschriften, welche die Stiftung herausgiebt, erhalten die Verfasser je zehn Freiexemplare.

Göttingen, den 14. März 1887.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September und Oktober 1890.

(Fortsetzung.)

John Hopkins University:
a. American Journal of mathematics. Vol. XII. No. 3. 4. Baltimore 1890.
b. Studies in historical and political science. Eighth Series 1/2. 3. 4. Ebd. 1890.
Transactions of the Wagner Free Institute of science of Philadelphia. Vol. III. August 1890. Philadelphia.
The Charlemagne Tower Collection of American colonial laws. Ebd. 1890.
Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. Part 1. Jan. —March 1890. Philadelphia 1890.
Proceedings of the American philosophical Society. Vol. XXVII. No. 131. Vol. XXVIII. No. 132. 133. Ebd. 1889. 90.
26th annual report of the Alumni Association ... for the year 1889—90. Ebd. 1890.
Proceedings of the American Academy of arts and sciences. New series. Vol. XVI. (Whole series vol. XXIV). From May 1888 to May 1889. Boston 1889.
Publications of the Washburn Observatory. Vol. VI. Part 1/2. Madison. Wis. 1890.
Annales de la Oficina meteorológica Argentina. Tomo VII. Buenos Aires 1889.
Annales de la Sociedad científica Argentina. Tomo XXX. 1890. Entr. 1, 2 u. Suppl., 3. Nebst: Indice general de las volúmenes I á XXIX. 1876—89. Ebd. 1890.
Actas de la Academia nacional de ciencias de la República Argentina en Cordoba. Tomo VI mit Atlas. Ebd. 1889.

Mittheilungen des Deutschen wissenschaftl. Vereins in Mexico. 1. Bd. 2. Heft. Mexico 1890.
Verhandlungen des Deutschen wissenschaftl. Vereins zu Santiago. 2. Bd. 2. Hft. Santiago 1890.
Mittheilungen der Deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio. 44. Heft. (Bd. 5 Seite 149—189.) Yokohama (u. Berlin) (1890).
Acta historica res gestas Poloniae illustrantia ab anno 1507 usque ad annum 1795. Tom. XII. Cracoviae 1890.
Akademya umiejętności w Krakowie.
Sprawozdanie komisyi fizyjograficznej. Tom. 22—24. Kraków 1888. 89.
Pamiętnik a. Wydziały: Filologiczny i historyczno-filozoficzny. Tom. VII. Ebd. 1889.
b. Wydział Matematyczno-przyrodniczy. Tom. XVI. XVII. Ebd. 1889. 90.
Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Akademii umiejętności.
a. Wydziału historyczno-filozoficznego. Tom. 22—24. Ebd. 1888. 89.
b. — matematyczno-przyrodniczego. Tom. 19. 20. Ebd. 1889. 90.
c. — filologicznego. Tom. 13. Ebd. 1889.
Rocznik zarządu Akademii umiejętności w Krakowie. Rok 1888. Ebd. 1889.
Starodawne prawa Polskiego pomniki. Tom. IX. X. Część I. Ebd. 1888. 89.
Scriptores rerum Polonicarum. Tom. XIII. XIV. Ebd. 1889.
Archiwum do dziejów literatury i oświaty w Polsce. Tom. VI. Ebd. 1890.
Zbiór wiadomości do antropologii Krakowej. Tom. XIII. Ebd. 1889.
Sprawozdania komisyi do badania historyi sztuki w Polsce. Tom. IV. Zeszyt 1. 2. 3. Ebd. 1889.
Atlas geologiczny Galicyi. Zeszyt 1. 2 nebst Karten. Ebd. 1887. 88.
Biblijoteka pisarzów Polskich. 8 Hefte. Ebd. 1889. 90.
Magyar tudományos Akademia:
Almanach 1890. Budapest 1890.
Évkönyv. (Jahrbuch). XVII. Köt. 7. Darab. Ebd. 1889.
Értesítö (Sitzungsberichte). (XIII.) 1889, 2—5. 1890. Füz. 1—5 (Jan.-Május). Ebd. 1889. 90.
Emlékbeszédek (Gedenkreden). V. Köt. 9. 10. Szám. VI. Köt. 1.—7. Szám. Ebd. 1889. 90.
Nyelvtudományi Értekezések (Sprachwissenschaftliche Abhandlungen). XIV. Köt. 11. 12. Szám. XV. Köt. 1.—5. Szam. Ebd. 1889. 90.
Sexti Pompei Festi de verborum significatu quae supersunt cum Pauli epitome ed. Aem. Thewrewk. Pars I. Ebd. 1889.
Simonyi Zsigmond: A magyar határozók. (Die Bestimmungsworte im Ungarischen). I, 2. Ebd. 1890.
Nyelvtudományi Közlemények. (Philolog. Mittheilungen). XXI. Köt. 3.—6. Füz. Ebd. 1889. 90.
Kúnos Ignacz: Oszmán-török népköltési gyüjtemény. (Sammlung osmano-türkischer Volksdichtungen). II. Köt. Ebd. 1889.
Abel Jenö: Magyarországi tanulók külföldön. (Studierende aus Ungarn im Auslande). I. Ebd. 1890.
Történettudományi Értekezések. (Historische Abhandlungen). XIV. Köt. 5.—9. Szám. Ebd. 1889. 90.
Társadalmi Értekezések. (Sozialwissenschaftl. Abhandlungen). X. Köt. 3. 5.—10. Szám. Ebd. 1889. 90.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

3. Juni. | № 4. | 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 2. Mai.

Schwarz legt einen Aufsatz des Herrn **Julius Petersen** in Kopenhagen vor: „Ueber Normalformen mehrfach zusammenhängender Flächen.“

Voigt legte einen Aufsatz des Herrn Dr. O. **Venske** vor: „Ueber einen neuen Apparat zur Bestimmung der inneren Wärmeleitungsfähigkeit schlecht leitender Körper in absolutem Maaße“.

de Lagarde zeigt schriftlich an

1. für die Nachrichten:
   a. „Thevenot's caffarre.“
   b. „Ueber das aramäische Evangeliar des Vatican.“
   c. „Neue Ausgabe der διατάξεις τῶν ἀποστόλων und der drei Gestalten der Clementinen.“
2. für die Abhandlungen (Band 38): „Septuagintastudien, 5. Stück.“

Thevenots caffarre.

Von

Paul de Lagarde.

In meiner Uebersicht 89 3 229—237 habe ich 1890 dargethan, daß כַּפֹּרֶת dem arabischen كفارة entspricht. Es war gewis ein Beweis, wie wenig sachverständig die Lexikographen des jüdischen Canons und die über die Theologie des alten Testaments schreibenden Leute sind, daß sie diese Gleichung nicht gekannt haben.

ARitschl hob 1870 sein erstes größeres Werk mit dem Satze an

> Die christliche Lehre von der Rechtfertigung und Versöhnung bildet die concrete Mitte des theologischen Systems.

In der Vorrede hatte er versichert, schon als Student darüber klar geworden zu sein, daß er

> für seine theologische Bildung vor Allem des Verständnisses der christlichen Idee der Versöhnung bedürfe.

Er hat später

> mit der nothwendigen biblisch-theologischen Substruction die dogmatische Darstellung der bezeichneten Lehren

unternommen.

Die ihm gelieferte „Substruction“ — trotz meiner Warnung hat er sich mit ihr begnügt — hatte selbst noch eine „Substruction“ nöthig: denn כַּפֹּרֶת ist kein Begriff des Mosaismus, sondern, weil Arabern und Juden gemeinsam, ein Begriff des Semitismus, der von der „Offenbarung“ umgebildet worden sein kann (ob und wie das geschehen, bleibt zu untersuchen), der aber von vorne herein der „Offenbarung“ nicht angehörte.

Dem für meine Arbeiten leider in Betracht kommenden Personale gegenüber ist nöthig, immer aufs Neue zu sagen, daß wie jedes Essen ein Verdauen zur Folge hat, so jede Aneignung eines Wortes eine Deutung dieses Wortes, jede Aneignung einer Anschauung eine Umbildung dieser Anschauung nach sich zieht. Ich verbitte mir die Verleumdung oder aber die Dummheit, welche glauben machen will, daß ich bei irgend einem Worte alter Zeit, wenn noch die neue Zeit es braucht, mit dem Worte ohne Weiteres in historischen Zeiten den ursprünglichen Begriff verbunden glaube.

Drei mal bin ich zu Ostern in Rom gewesen, und habe auf dem Pincio und auf der Salita di S. Onofrio den Iudasbaum blühen sehen. Der Baum heißt bei uns so, weil Iudas sich an ihm erhenkte, und er aus Scham über die Berührung des Verräthers über und über roth wurde. Ich wußte durch ChIosJagemann, daß er auf italiänisch albero di San Giuseppe genannt wird: näheres über diesen Namen zu erfahren begierig, fragte ich oft, aber nicht suggestiv, wie der dort blühende Baum heiße. Rothe Acacie oder Oleander, antworteten die „Gebildeten“, denen die Tracht des in Rede stehenden Beschämten nicht anders vorkam als die der rothen Acacie oder des Oleander. Endlich jetzt nannte ihn mir am 26 April 1891 auf dem Gianicolo ein Gärtner Scielsine sine quastume: der Mann buchstabierte auf meine Bitte den Namen, der aus drei Worten bestehe. Da hat Cercis siliquastrum den albero di San Giuseppe verdrängt. Scielsine aus Cercide: κερκίς hat κερκίδος.

Da hat ein neuer fremder Name den alten heimischen Namen verdrängt: die Sache ist dieselbe geblieben. Wir Deutschen (mit Ausnahmen natürlich) erzählen die Sage noch, die den Baum mit Iudas in Beziehung setzt: kein mir in den Weg gelaufener Italiäner kannte auch nur den Namen albero di San Giuseppe, geschweige, daß er die dazu gehörige Sage gekannt hätte.

Am 5 Januar 1891 verlangte in meiner Gegenwart in der Goettinger Universitätsapotheke eine Arbeiterfrau gegen den Husten ihres Knaben Fuchslungensaft und Schneckensaft: sie erhielt Lakrizen und Eibisch.

Da haben also früher unbekannte Arzneien die Namen in alter Zeit geschätzter Arzneimittel zu führen lernen müssen. Wir haben da alte Worte für neue Dinge.

Dies ist als Ergänzung des in meiner Uebersicht ad vocem גָּפְרִית Vorgetragenen, aber auch für die Religionsgeschichte, zu brauchen, in der Aehnliches vorkommt. Vergleiche meine Beiträge zur baktrischen Lexikographie 28, wo nachgewiesen wird, daß ein und dasselbe Wort Regenwasser, Kuhharn, Seifenkraut bedeutet hat. Vergleiche auch was CdeHarlez JAP 1879 **1** 161 auseinandersetzt.

Ich habe im Register zu meiner Uebersicht 69 aus Thevenot angeführt, daß „caffarre" eine Uebergangsgebühr bezeichne, und habe das gleichbedeutende gáffar Seetzens für identisch mit Thevenots caffárre erklärt.

Letzteres ist falsch. Herr Professor Albert Socin wies mich unter dem 11 April 1891 auf Dozy unter غفر und auf Berggrens Guide français-arabe unter péage غفر ghàffar hin, womit Burckhardts Reisen in Syrien 553 غفر „Steuer" zu vergleichen seien. Er hätte noch aus FrCañes anführen können

> peage el tributo que se paga por pasar algun puente ó barca غفر:

wer den ġafar bezahlt, وفى: wer ihn auferlegt, وضع. Entsprechend Cañes unter pontage pontazgo. ECastle 2847 غفر = vectigal, ital. gabello [so]: über gabella die von HvKap-herr in der Zeitschrift für Geschichtswissenschaft 1891 $_{38}{}^{r}$ citierten Stellen. Dies غفر erwähnt EWLane nicht: es gehört also der Volkssprache an, und ist gerade darum werthvoll: عامة ist mehr als لغة.

Daß غفر existiert, ist mithin sicher. Da das Zeitwort غفر *vergab* bedeutet, ist auch dies غفر für die Theologen von Wichtigkeit. Mir ist lieb, daß die nothwendige Berichtigung einer meiner Aussagen darauf hinweist, daß solche Dinge nur in großem Zusammenhange besprochen werden dürfen.

Thevenot (geboren 7. 6. 1633, † zu Miana, dreißig Stunden vor Tabrîz, 28. 11. 1667) behandelt kaffarre als Femininum: und sprach das Wort natürlich nach Analogie von bizarre. R double (lehrt die Académie française) se prononce comme si elle était simple: die drei Arten Ausnahmen, die diese Regel erleidet, treffen auf kaffarre nicht zu. Thevenot, ein sehr sorgsamer Mann, braucht ein Femininum caffarre wiederholentlich: wer französisch versteht, weiß, daß caffarre den Ton nur auf dem zweiten a gehabt haben kann. Bis auf Weiteres wird also kaffâre als Synonymum von ġafar zu gelten haben: doch werden die Theologen gut thun, vorläufig für sich als Gebühr für das Recht einen Fluß oder eine Brücke zu überschreiten nur ġafar zu verwenden. Was in der Uebersicht 229—237 steht, wird von der Beantwortung der Frage ob kaffârat neben ġafar vorkommt, oder aus ġafar nur verhört ist, nicht berührt. Der Interprète du Roi La Croix Paitis (oder de la Croix) bezeugt von Thevenot (es ist nicht ohne Werth dies hier zu wiederholen) vor dem zweiten Bande des Voyage de Levant

> Ces trois langues [Turquesque, Arabesque et Persienne] qu'il possedoit si bien, ... l'avoient rendu si profond dans toute cette erudition Orientale . . . .
>
> On ne doit pas se formaliser si l'on trouve quelque diversité de prononciation és mots Orientaux dans ce Livre, principalement lors qu'il est question de Voyelles ou des Consones Kha, hha, Kef et quelques autres: La différence des Païs fait qu'elles sont diversement prononcées; en des lieux l'on prononce Naméh, Bender et Bazerghian, et en d'autres Namah, Bendar, Bazerghion: les uns disent Kher et les autres Hher, les uns Gomron, les autres Komoron, et il en est ainsi de beaucoup d'autres; mais les lettres figuratives se rencontrent toûjours aux uns et aux autres mots.

Was doch wohl beweist, daß Thevenot auf den Klang der Worte aufmerkte.

Man wird übrigens nicht vergessen dürfen, daß Numeri 15 30 eine Versöhnung für die בְּיָד רָמָה begangenen Sünden nicht kennt. Es muß allerdings erst untersucht werden, ob Leviticus die Sache ebenso ansieht wie Numeri, und ob die Gesammtanschauung, die Israeliten und Semiten von der Schuld hatten, das Numeri 15 30 Ausgesprochene für ein Princip zu halten gestattet. Bis auf Weiteres wird aber behauptet werden dürfen, daß das Opfer sich nur auf בִּשְׁגָגָה begangene Verfehlungen beziehen durfte. Dann ist aber das Opfer nichts wesentlich Anderes als was das Recht Europas Recognitionsgebühr nennt. Wer zum Beispiel einen Wasserlauf aus seinem Gebiete unter einer öffentlichen Straße durchleitet, zahlt eine solche Gebühr, meist geringen Betrages, nur zu dem Erweise, daß er durch seine Leitung nicht ein Recht ausübt, sondern eine widerrufbare Vergünstigung genießt: es ist so eine Form gefunden, unter der als Ein Recht verstattet wird was Das Recht verbietet. Empörung gegen den König Gott ist unverzeihlich: wer aus Irrthum sündigt oder aus Leichtsinn, hat nur das dominium als dominium anzuerkennen, um straflos auszugehn. סְלַח־נָא = indulge: das Opfer des alten Testaments ist in der Kirche durch die indulgentiae vertreten: es wird nicht Sünde gesühnt, sondern die fällige Strafe der Sünde in Folge einer Satisfactio erlassen. Gesühnt wird durch das Anerkenntnis gefehlt zu haben nichts: Iohannes α 1_{9}. Das Opfer als כַּפֹּרֶת erkennt die Thatsache an, daß man durch die mittelst des Opfers zuzudeckende Handlung nicht hat die Rechtsordnung stören wollen: weiter thut es nichts. Die semitische Anschauung von der kaffârat = כַּפֹּרֶת faßt die sühnbare Sünde als etwas nicht Erhebliches, also nicht eigentlich als Sünde, und kennt auch nicht sühnbare Sünden. Daß die Kirche die Sache nicht ebenso ansieht, daß kein das Leben kennender Mensch sie so ansehen darf, liegt auf der Hand. Dogmatiker werden daher gut thun, ihre Urtheilsfähigkeit nicht entweder dadurch in übles Licht zu rücken, daß sie die christliche Anschauung für identisch mit der des alten Testaments und der Semiten halten, oder aber dadurch, daß sie objektive Unwerthe wie die Sünde durch eines, nur in Folge eines Werthurtheils geltenden, Menschen Tod beseitigen zu können meinen: es handelt sich nicht um „Zudecken“, sondern um Vernichten der Schuld, vor Allem aber um Vernichtung der Sünde, aus der die Schuld immer von Neuem emporwächst. Deutsche Schriften 58. Mit dem von RALipsius in dem theologischen Jahresberichte für 1883 auf Seite 272 ff. über Ritschls Theologie Vorgetragenen bin ich einverstanden.

So leicht wird jetzt niemand der mitzureden befugt ist, semitisches Wesen aus indoceltischen Texten und Sprachen erklären: Creuzer und Bähr, die in meiner Studentenzeit noch Auctoritäten waren, sind beseitigt. Aber was der Linguist und der Historiker nicht darf, darf mit Vorsicht der Psychologe. So setze ich aus der Zeitschrift für deutsches Alterthum und deutsche Litteratur **35** 262 her was mir während mein Aufsatz im Drucke ist, durch Edward Schröders Güte zugeht:

> Im gotischen ist gilstr zahlung abgabe, während die altertümlichere bedeutung opfer bei ahd. gelstar erhalten ist.

Das opfer wird als eine abgabe aufgefaßt, oder richtiger: es ist die älteste form der abgabe.

In den deutschen Schriften 379 385 unterscheide ich zwischen Steuern und Gebühren: Ulfilas Rom. 13_6 gilstr φόρος, Lucas 2_2 gilstrameleins ἀπογραφή. Jedermann verständlich gild φόρος Lucas 20_{22}, kaisaragild κῆνσος [ἐπικεφάλαιον?] Marcus 12_{14}. Vergelten, entgelten.

Ignoscere heißt „nicht kennen“: die romanischen Sprachen haben ignoscere durch pardonner und dessen Schwestern, also durch eine romanische Uebertragung des deutschen vergeben ersetzt, offenbar doch, weil sie eine andere Grundanschauung über die zu bezeichnende Sache hegten als die Römer: 1863 zu Proverb. 22_{21} (Seite 73).

Das aramäische Evangeliar des Vatican.

Das aramäische Evangeliar des Vatican ist durch den Catalog der Bibliotheca vaticana **1** 2_{70-103} seit 1758 bekannt, durch Iac GeChrAdlers Aufsatz in meines Vorgängers IDMichaelis Bibliothek **19** 126—131, durch desselben Gelehrten biblisch-kritische Reise nach Rom 118—127 und sein Buch novi testamenti versiones syriacae 135—202 in den Jahren 1782 1783 1789 bekannter geworden. Der Graf Francisco Miniscalchi-Erizzo hat es 1861 ganz gedruckt, und 1863 mit einem Glossare und anderen Zuthaten versehen, Herr Theodor Noeldeke hat 1868 ZDMG **22** 443—527 über den in ihm gebrauchten Dialect in einem sehr fleißigen Aufsatze Auskunft gegeben.

Ein Evangeliar ist ein Buch, in dem die für die kirchliche Lesung bestimmten Abschnitte der Evangelien in der Reihenfolge der Festtage des Kirchenjahrs zusammengeschrieben oder aber gedruckt sind. Es erhellt, daß man eine Stelle der Evangelien in einem solchen Buche nur findet, wenn man den Sonn- oder Feiertag kennt, an dem sie in den Kirchen gelesen wird. Ein Register kann das Finden erleichtern: immer sind von dem zur Benutzung eines Registers Gezwungenen zwei Stellen eines Evangeliars nachzuschlagen, nicht Eine, wann er es für die Zwecke der Grammatik, des Lexicons, der Kritik des Textes benutzen will.

Ich habe mir daher im Sommer 1877 eine Abschrift jenes Evangeliars gemacht, in der die Perikopen nach der Folge unserer Bibeln stehn. Hätte ich gewußt, daß ich je meine Abschrift mit dem Codex der Vaticana werde vergleichen können, so hätte ich mir viel Zeit und Mühe dadurch erspart, daß ich Miniscalchis nur auf der Einen Seite syrisch bedrucktes Werk zerschnitten und die Perikopen in der mir meine Arbeiten erleichternden Folge aufgeklebt hätte.

Da ich nach EBertheaus Tode mich zum Semitisten umarbeiten mußte, habe ich meine Abschrift, nachdem ich sie mit dem Originale verglichen hätte, in meiner Bibliotheca Syriaca zu drucken beschlossen: denn der Dialekt, den das Buch zeigt, ist wichtig. Ich habe allerdings auch die Absicht, durch meine Arbeit die Urkunde für die Kritik des Evangelientextes nutzbar zu machen: denn wenn auch der Gunst der ersten Facultäten mich nicht erfreuend, fühle ich mich doch stets als Theologe.

Ich bin deshalb den October 1890 wie den März und April 1891 in Rom gewesen, und werde im October 1891, um die Vergleichung zu Ende zu führen, noch einmal nach Rom müssen.

Da die für die Benutzung meiner Arbeit in Betracht kommenden Personen theils schwer von Begriffen sind, theils absichtlich misverstehn, gebe ich ein Jahr vor der Zeit, in der mein Band erscheinen kann, eine kurze Notiz, um jene an das Verstehn des Buchs zu gewöhnen, diesen das Geltendmachen ihrer „Misverständnisse" zu verleiden.

Die Handschrift ist nach 194[4] = BS 276 vom Schreiber حسب طاقتة (so gut wie sein Können es ihm gestattete) geschrieben worden. Schwiegersohn eines Oberen konnte ein Klosterbruder nicht sein, noch auch so leicht Sohn desselben: folglich wird man ihn wohl für das ihm aufgetragene (schwere) Geschäft wirklich tauglich gehalten haben: der Augenschein lehrt, daß der Abt sich in ihm nicht geirrt hatte, und dies festzustellen ist Pflicht. Daß der Mann die ihm zugemuthete Arbeit ungerne übernommen hat, und daß er bescheiden dachte, folgt mir daraus, daß er ausdrücklich sie als حسب طاقتة ausgeführt bezeichnet.

Ich habe Grund zu der Annahme, daß der Schreiber nicht den Befehl bekommen hat, ein älteres Evangeliar abzuschreiben, sondern den, aus einem Evangelium ein Evangeliar selbst herzustellen: denn offenbare Fehler wiederholen sich in mehrfach vorkommenden, räumlich von einander getrennten Lesestücken: da der sorgfältige Arbeiter sich nicht mehrfach in gleicher Weise verschrieben haben wird, nehme ich an, daß die Fehler in seiner Vorlage standen, die zu ändern er nicht wagte.

Der Schreiber, der im Jahre 1341 der SeleucidenAera mit seinem Buche fertig wurde, arbeitete zum Glücke für mich mit einer honiggelben Tinte. Was er geschrieben hat, ist fast auf allen Blättern, und zwar zu verschiedenen Zeiten und von verschiedenen Händen, schwarz überfahren, geändert und um Vokal-zeichen und Interpunctionen vermehrt worden: die honiggelbe Tinte scheint aber doch auch an vielen Stellen wo es nur auf das mit Ihr Geschriebene ankommt, durch.

Der erste Schreiber setzt Vocale nie, Interpunctionen selten. Er schreibt ܛ݂ sehr häufig, nicht selten ܦ̈, den Doppelpunkt als Bezeichnung des Plurals nicht regelmäßig.

ܦ̈ kann ܦ mit Pluralpunkten sein: in den meisten Fällen bedeutet es χ: wenn die Zunft nicht eine so große Nichtachtung meiner Arbeiten in ihr Programm aufgenommen hätte, würden wenigstens die Lehrer der hebräischen Grammatik aus meiner Genesis 6 das Scholion des Baseler Codex kennen, das zu Χοῦς = כּוּשׁ anmerkt οὔτε χ οὔτε κ, ἀλλὰ μέσον τῶν δύο· στοιχεῖον δὲ ἐστὶν ἁρμόττον τῇ τῶν Ἑβραίων καὶ Σύρων γλώττῃ: gequetscht wird ג̇ zu ts, ק über č zu ץ = ç. Der Dialekt des Evangeliars hatte wenigstens zu der Zeit, in der die Handschrift des Vatican punktiert wurde, eine (krankhafte) Neigung ܛ „weich" zu sprechen (geschrieben wird dann ܛ݂), und ܦ̈ mag durch seinen Doppelpunkt (der Codex kennt auch ܦ̇) eine noch größere „Weichheit" ausdrücken als durch ܦ̇. Das bleibt aber Alles noch zu untersuchen. ܟ ܟ̈ ܟ̣̈ scheinen sich nicht zu unterscheiden: ܟ sieht in der Hds. wie ܓ aus, da ܟ wie ein umgekehrtes ܓ aussieht.

Wenn die über das Buch gekommenen Späteren — die Tinte wie die Form der Schrift lehrt, daß ihrer mehrere waren,. die nicht zu gleicher Zeit lebten — wenn diese Späteren nur die, übrigens unnöthige, Mühe sich auferlegt hätten, die honiggelbe Schrift des Ersten anzuschwärzen, so würden sie dem Vorwurfe geschmacklose Dummköpfe gewesen zu sein nicht entgehn können. Sie änderten aber auch, und nur der Umstand, daß sie ohne es zu wollen, für die Geschichte der Sprache Nutzbares geliefert haben, macht nothwendig sich um sie bekümmern.

Der Dialekt braucht die Artikelform der Nomina nur da wo im Griechischen der Artikel steht. Allerdings habe ich gelegentlich auch falsche Artikelformen herausgegeben, weil ich nicht sah, daß ein Aelteres unter dem jetzt vorhandenen Texte stak: ich bin aber überzeugt, daß diese Stellen zu emendieren sind. Vorläufig wollte ich nur was ich sah, vorlegen.

Der Dialekt braucht noch gerne Verbindungen der Nomina mit einem Genetive ohne ܕ, sagt also ܐܢ̈ܫܬ ܦܛܘܪܝܢ, nicht ܐܢ̈ܫܬܐ ܕܦܛܘܪܝܢ: er braucht ܕ vor Genetiven auch wo die Verbindungs-Form vorhergeht. Dieses Alles ist von C geändert worden: die erste Hand ist in diesen Fällen allen erkennbar.

Der Dialekt braucht die Participien da wo man im Schrift-

Syrischen ܡܼ zuzusetzen hat, ohne ܡ̣, das erst die Späteren, nicht gleichmäßig, nachgetragen haben. Die Fälle liegen alle klar.

Es war meine Pflicht, was die erste Hand bot, in meinen Text zu setzen, was die Correctoren (die zu scheiden ich nicht unternehmen durfte) aus der ersten Schrift gemacht haben, am Rande zu geben.

Wo die honiggelbe Tinte des Ersten auch nur mit einem Scheinchen hervorleuchtete, ermöglichte Sie das Richtige zu finden. Wo die Stiefelwichse der Späteren alles deckte, mußte ich mich bescheiden. Und ich habe mich beschieden, weil nach langer und wiederholter Beschäftigung mit der Handschrift es mich verboten däuchte zu recensieren, es mir vorläufig allein erlaubt schien, die Urkunde als Urkunde vorzulegen.

Mehr wird sich thun lassen, nachdem mein Text erschienen, und eine Concordanz über ihn ausgearbeitet sein wird.

In der BS sind natürlich die Zeilen gezählt: die Concordanz wird ihre Citate nicht nach Evangelien, sondern nach Seiten und Zeilen der BS geben, weil viele Perikopen mehrfach vorkommen, jede andere Zählung also Weiterungen verursachen müßte. Am Rande der BS sind die Columnen der Handschrift angezeigt: jede Columne ist ungefähr fünf Zeilen meines (Quart)Druckes lang. Mithin ist jedes Wort, das in der Concordanz steht, ohne Mühe in der Handschrift nachzuschlagen.

Eine endgültige Ausgabe des Textes zu liefern behalte ich mir vor.

Die Punctation zeigt gelegentlich ostSyrische Vokale, gelegentlich Punkte die ich noch nicht begreife: im Allgemeinen ist ihr Princip leicht zu durchschauen. Mein Leben ist von vorne herein mit dadurch verwüstet worden, daß jemand der gar nichts von der Sache verstand, über die er schrieb, obwohl ich ausdrücklich gesagt hatte, ich wolle als Varianten nur geben was critici usus foret, die Zunft mit einer Sammlung von Schreibefehlern der Einen von mir benutzten Handschrift erfreute: die Zunft druckte und glaubte diese Liste, und der GORR Schulze veranlaßte den Herrn von Raumer sie zu benutzen: jetzt AErman Jahresbericht für 1880 [ZDMG] 193, verglichen mit dem für 1879 [ZDMG] 179. Ich bin also gewarnt, und habe pedantisch treu wiedergeben wollen was die Handschrift bietet. Ich habe in meiner Ausgabe der Didascalia (aus dem deutschen Gelehrtenleben 76) v/vj über meine Wiedergabe der in dem pariser Codex vorliegenden Punctation geredet: die dort angebotene Liste hat nie jemand verlangt: Universitätsprofessoren und ein unverheiratheter Direktor eines Gymnasiums erbaten lieber (wegen ihrer „Armuth“) von dem Schulamtscandidaten das ganze Buch als Geschenk, ohne jene Liste. In meiner Ausgabe der koptischen Uebersetzung des Pentateuch ix schrieb ich

> etwa zu notieren „ⲉ̇ⲣⲉ ist ohne Punkt, weil der Schwanz eines darüberstehenden ϣ (oder eines ähnlichen Kometen) gerade über ihm herabhängt“ oder „ⲛ̄ⲧ̄ⲉ ist ohne Punkt, weil ⲧ̄ wie ein Schirm über ⲛ und ⲉ übersteht“, das hieße denn doch mit der Zeit leichtsinniger umgehn als man verantworten kann.

Statt aber die Leute, die so etwas notiert verlangen, mit dem ḍanab fîl zu liebkosen, habe ich versucht, die Punkte genau wie die Handschrift zu setzen: als alter Mann wird man milde, und mehr noch als früher geneigt, gefällig zu sein. Der Setzer hat Feile und Messer anwenden müssen, um den Größen des Tages zu genügen: nicht mit dem die strengen Anforderungen gewissenhafter Arbeiter befriedigenden Erfolge: die Punkte stehn noch immer gelegentlich ein zehntel Millimeter schief, und da Typen, unliebenswürdiger als die heut zu Tage typischen Menschen, nicht zur Annahme des Grundsatzes zu bewegen sind „hier steh' ich, ich kann auch anders“, so habe ich diesem Mangel beim besten Willen nicht abhelfen können. Es wird sogar leider vorgekommen sein, daß ich, obwohl manches fünfmal verglichen worden ist, sowohl beim Lesen des Codex wie beim Lesen der Druckbogen Punkte übersehen habe. Man vergleiche was in meinen Analectis xiv steht. Ich habe 1860 in der Vorrede zu den Geoponicis drucken heißen, wir seien was die syrische Philologie anlange, jetzt im Zeitalter der Aldinen und Iuntinen: die Einsicht findet sich nunmehr auch bei HWinckler, Bezolds Zeitschrift für Assyriologie 5 311. Ich bitte meine Ausgabe des aramäischen Evangeliars als eine Art Aldina anzusehen.

Diese meine Aldina folgt nun der Handschrift gelegentlich auch da, wo ein Anderer als ich ihr nicht gefolgt wäre.

Die Handschrift wechselt zwischen ܠܟ̇ܘܢ und ܠܟ̣ܘܢ. Beides kann erklärt werden. Da der Punkt über ܟ̇ die „weiche“ Aussprache dieses Buchstaben anzeigt, ist ܠܟ̇ܘܢ = לָכֶם aus meiner Uebersicht 164 2 14 leicht begriffen: das *a* des Zielfalles in ܠ wirkte noch auf ܟ̇. Hingegen ܠܟ̣ܘܢ entspricht dem Gebrauche der OstSyrer, wie dem der WestSyrer, die den in dieser Handschrift vorliegenden Dialekt sprechen, und der durch Epiphanius (meine Mittheilungen 2 363) völlig sicheren Form ελιχων = עליכון der Elcesaiten.

Anders steht es mit ܠܗ̇ܘܢ und ܠܗ̣ܘܢ. Der Punkt in ܠܗ̇ܘܢ ist — mir — unerklärlich: ich habe gleichwohl ܠܗ̇ܘܢ, wo es in meiner Vorlage deutlich stand, erhalten, darum erhalten, weil ich meine

Leser mit dem Gedanken vertraut zu machen wünschte, daß die Handschrift nicht unfehlbar ist.

Ein Alter (vielleicht nicht oder nicht immer der erste Schreiber) braucht ∵ ∴ :· als Interpunctionszeichen, aber die Neuern können diese drei Punktgruppen nicht leiden, und, wo sie sie nicht auskratzen, decken sie sie durch einen Zornausbruch ihrer plumpen Feder oder durch eine Vergrößerung des nächst liegenden Consonanten zu: eine Rasur, in welcher es Vertiefungen gibt, ist gelegentlich der einzige Beweis für das Dasein jener drei. Dabei läßt sich nicht immer ausmachen, ob :. oder :· oder ∵ gemeint war: denn die Schrift dieser Schreiber steht nicht wie Druckschrift. Das Zeichen ⁝ scheint mir, da sein mittelster Punkt gelegentlich dicker ist als die anderen, oder eine Kleinigkeit ausweicht, nichts als eine durch den Raum veranlaßte Verderbnis von ·: oder :·. Wann : unter und über der Zeile vertheilt wird (= diducitur), ist es schwerlich Interpunction, sondern soll zu eng sich auf dem Halse stehende Wörter trennen.

Nicht selten (alle Fälle sind am Rande verzeichnet) hebt mit :· oder ·: die Zeile an: Kenner des griechischen Lesens werden vielleicht aus diesem Umstande etwas schließen können.

Unser Genosse, Herr Theodor Noeldeke, der selbst einige Seiten aramäischer Texte herausgegeben hat, nannte es ZDMG 29 89 einen „Luxus“, alle „Punkte und Pünktchen der Handschriften“ wiederzugeben. Dem Evangeliare des Vatican gegenüber stand auf jeden Fall die Sache anders, da aus dessen Punkten die noch unbekannte Aussprache eines Dialekts festgestellt werden muß. Zu meiner Sicherung gegen Leute wie die im zweiten Bande der Mittheilungen und sonst aufbewahrten setze ich her was Herr Noeldeke geschrieben hat.

ZDMG 27 492: Ich habe unten in dem ersten Textstück die Punctation der Handschrift möglichst genau wiedergegeben; hoffentlich gerieth der Druck einigermaßen und wird nicht zuletzt alles durch das unglückliche Abspringen der Punkte verdorben.

ZDMG 29 89: Mit den Ribbûi-Puncten wird grosse Verschwendung getrieben . . . . . Aber hier ist so wenig Consequenz wie bei den sonstigen Puncten, namentlich den Interpunctionszeichen. Ich halte es für ziemlich überflüssig, bei der Herausgabe grösserer Texte alle die für uns grösstentheils nur lästigen Puncte und Pünctchen wiederzugeben bei denen weder innere Consequenz noch Uebereinstimmung der verschiedenen Handschriften Statt zu finden pflegt. Bei so kleinen Stücken wie unseren hier kann man sich diesen Luxus eher erlauben. Allerdings ist es schon typographisch nicht ausführbar, die

Stellung der Puncte immer genau auszudrücken; auch will ich es nicht für unmöglich erklären, daß mir bei diesen Puncten trotz aller Achtsamkeit einzelne kleine Versehen begegnet sein sollten.

Ich war im October 1890 nahe daran, die Arbeit am Evangeliare aufzugeben, so schwierig fand ich sie, und ich habe mir nicht verhehlt, daß die unerfreuliche Hetzjagd, in der einem pflichttreuen Philologen und Historiker in Rom zu leben obliegt, die Güte gerade dieser Arbeit mehr als die anderer Studien beeinträchtigen könne. Da haben mich in ETezas Aufsatze cose armene (Atti del Istituto Veneto **7** 1) die Seiten 906—913 weiter zu arbeiten bestimmt: zufälliger Weise hatte mir Ignazio Guidi das Heft mitgetheilt. Allerdings ist den Agathangelus herauszugeben leichter als das aramäische Evangeliar des Vatican zu bearbeiten: jenes eine Rheinparthie um Pfingsten, dies eine Meerfahrt im Schneesturme wie ich sie am 10 und 11 Januar 1853 einmal 26 Stunden hindurch auszuhalten gehabt habe. Ich will aber Herrn Teza, den ich unlängst flüchtig auf der Straße gesehen, doch öffentlich für seinen Aufsatz danken, der in Deutschland freilich weder erscheinen noch, falls er erschienen wäre, beherzigt werden dürfte: die principes mediocritatis und die Fremden dulden bei uns nichts was mir helfen oder meine Arbeiten zur Geltung bringen könnte.

Die Liste der Perikopen habe ich vor meinem Texte zusammengestellt: jede Perikope trägt ihre Nummer, und diese Nummer ist vor der Perikope im Evangelientexte zwischen [] wiederholt: das Auffinden ist mithin ohne Mühe möglich, und eine Uebersicht über das Kirchenjahr unserer Aramäer erleichtert. Schade, daß diese verderbte Welt dabei um einen Heiligen gekommen ist: für „evangelia leguntur ieiunio sancto Banscira“ Miniscalchis 236 ist nämlich „evangelia quae leguntur in ieiunio sancto εἰς τὴν παννυχίδα“ zu lesen (Nilles **2** 237).

Das aramäische Evangeliar des Vatican gibt mir erwünschte Gelegenheit, einmal ein Glossar einer semitischen Sprache in der Gestalt herzustellen, die ich für die allein wissenschaftliche halte: mein Schüler ARahlfs hat in den von ihm angefertigten Register zu meiner Uebersicht, soweit es da thunlich war, meine Grundsätze schon befolgt: freilich nur intellegentibus. Vorab bitte ich Symmicta **1** 98 $_{37}$ ff. Orientalia **2** 1 ff. nachzulesen.

PSmith hat die Vokabeln des Evangeliars in seinen Thesaurus aufgenommen. Haben die Grimm Berolinismen oder Allemannisches in ihrem Werke?

Die arabischen Wörterbücher, die wir benutzen, ruhen auf den GlossenSammlungen und den Speculationen der arabischen Grammatiker. Das Vollkommenste was wir auf dem Gebiete besitzen, ist EWLanes Werk. Da an ein methodisches Studium der Quellen nicht zu denken ist — aus Handschriften kann man es nur zu eigenem Gebrauche vornehmen: die Vorlagen zu drucken ist der großen Kosten wegen unmöglich —, so muß man für das Arabische das thun was ich für das Persische zu thun vorgeschlagen habe (persische Studien 65, Mittheilungen **2** 246 (352)): das von den einheimischen Lexikographen gebotene Material sauber geordnet als das Fachwerk benutzen, in das hinein man den Wortschatz der Classiker und der technischen Schriftsteller sammelt: den ersten, weil die Classiker eben Classiker, also Muster und Typen für Andere sind, weil sie den Durchschnitt der Sprache geben: den andern, weil nur Techniker die Sprache des Lebens bieten, da wer classisch schreibt und für Gebildete mit deren an fünf Fingern herzuzählendem Lebensinhalte arbeitet, die Sprache nicht erschöpft. Also die Uebersetzungen des Galen, Avicenna: die Botaniker usw. Als das Fachwerk, in das hinein man auch Bemerkungen der Neueren einträgt, nur nicht so desultorisch wie das Dozy gethan hat: und wenn man Nachlässe veröffentlicht, den Quatremères, Fleischers, Thorbeckes mittelst der Zeichen QΦΘ geschieden, in einem und demselben Bande.

Aber den Pedro de Alcala, das Leidener Vocabular, Schiaparellis Buch, den in Petersburg liegenden Diwan von Granada hat man — und zwar falls es angeht, zusammen — in einem Sonderbande vorzulegen.

Für die aramäischen Dialekte sind Sonderwörterbücher nöthig, knappe aber concordantielle Bücher: das Ziel muß ein aramäisches Wörterbuch sein, das was dem Edessenischen, Palaestinischen, Babylonischen usw. (Uebersicht 91r 95r 238) gemeinsam ist als Text, das den Dialekten Eigenthümliche eingerückt in kleiner Schrift bietet: die kleine Schrift wird mit der Zeit vielfach zu Textschrift werden müssen.

Geht man so vor, so wird der Eine Bruder lehren was der andere weil er es vergessen hat, nicht mehr lehren kann.

Ich habe seit vierzig und mehr Jahren den Verdacht gehegt, daß زمن زرچ, die natürlich identisch sind, aus dem awestischen זרואן (Mittheilungen **2** 38 ff.) entstanden seien: Eznik und Elišê schreiben (Blender wollen sich die ihnen nöthige Gelahrtheit durch die Register beschaffen) *զրուան* = ζṛουαν, haben mithin wie das Awesta (und Justi 128) keinen Vokal zwischen z und r: meine gesammelten Abhandlungen 149 $_{20}$ ff. NeuPersisch (der von dem „großen" Jules Mohl einst gekrönte Vullers hält زمان *Zeit* für arabisch, nur in der Bedeutung *Tod* für êrânisch) زمان, armenisch ժամ *Stunde*, ժամանակ = زمانك. Wegen des ժ gegen des Elišê զ ist ժամանակ arsacidisch: die Wurzel जृ γερ- erscheint im Haikischen als ծեր. Herr SFränkel, CBezolds Zeitschrift für Assyriologie 3 52r, schrieb 1888

> Nicht selten erfolgte die Verwandlung eines ursprünglichen B in M unter dem Einflusse eines benachbarten N wie in זמן für zarvan ܙܒܢ.

Nur durch den Dialekt des Evangeliars wird erweisbar, daß ܙܒܢ (mit weichem B) aus dem awestischen זרואן entstanden ist: denn dies Buch schreibt ܙܒܢ, das bedeutet bei ihm, B ist nicht weich, sondern hart. ܙܒܢ mit hartem B, also etwa zabban, [für zanban] gesprochen, wurde zu zaban, danach zu zeвan.

In einem nach meinen Grundsätzen bearbeiteten arabischen Wörterbuche wäre das Stichwort زمان, und hinter diesem würden die Denominativa zamina zâmana azmana auftreten.

Warum זרואן in das Aramäische und Arabische aufgenommen worden ist, weiß ich nicht, noch weiß ich ܚܕܪ zu erklären, das im Evangeliare für *Zeit* durch mich gesichert »scheint« (ܚܕܪ C): schon jetzt vermag ich zwei für die Geschichte der Religion wichtige Vokabeln zu benutzen: ܩܒܠ = qiвal σκότος und ܢܒܚ προφήτης.

Das erste erweist, daß die „qibla“, die Himmelsgegend, nach der hin diese Aramäer beteten, der Westen war: denn es kann nur das arabische qibal *gegenüber* sein. Vergleiche Ezechiel 8 16, und erwäge daß die Praxis der Kirche den Altar zu „orientieren“, im Gegensatze zur Synagoge eingeführt ist, die nach Osten zu beten verboten hat.

ܢܒܚ (mit Artikel regelrecht ܢܒܚܐ) erweist, dass diese Aramäer ein einheimisches Wort für προφήτης hatten. Die Araber besaßen wie die Totenklagelieder erhärten, ein Zeitwort نبح *zeigte an*, aber ihr نبى ist, wie die entsprechende syrische Vokabel, Lehnwort, also für נָבִיא unverwendbar.

Ich möchte in Anknüpfung an eine oben ausgesprochene Klage hier noch einem Wunsche Ausdruck geben, dessen Erfüllung mich, da voraussichtlich Ich nur noch Einmal nach Rom zu gehn haben werde, persönlich nicht mehr interessiert, einem Wunsche, der vielen tüchtigen Männern aus der Seele gesprochen sein dürfte.

Ich habe in Folge meiner Beziehungen zu den ††Cardinälen Pitra und Hergenröther und meiner durch WWright vermittelten Bekanntschaft mit IohBollig S.I. in Rom Vergünstigungen genossen, für die ich in der Ankündigung 3 und in meiner pars prior iv v auch öffentlich gedankt habe. Daß ich, um den von mir und meinen Landsleuten für Pater Bollig gehegten Empfindungen einen bleibenden Ausdruck zu leihen, in den Schriften der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen die von Bollig für den Druck vorbereiteten Schriften des Iohannes von Euchaita herausgegeben habe, dürfte bekannt sein. Monsignore Isidoro Carini, des Monsignore Stefano Ciccolini Nachfolger, hat mich ebenso verpflichtet, wie der wohlwollende Mann, der vor ihm in der Bibliothek thätig war, jetzt an einer andern Stelle seinem Fürsten und seiner Kirche dient, und mir bis heute freundlich gesinnt geblieben ist. Ich habe mich aber stets geschämt, würdige Gelehrte, die mir an Eifer der Wissenschaft zu dienen nicht nachstehn, nicht derselben Gunst wie ich genießen zu sehen: ich habe zweitens nie vergessen können, daß jede facilità widerruflich, und zwar von Tage zu Tage widerruflich, also eine ArbeitsEintheilung auch für den privilegiato im Vatican nicht möglich ist. Da wir Alle Zeit wie Geld zu Rathe zu halten haben, ist dieser Zustand auch den privilegiati nicht erwünscht. Man darf nicht außer Acht lassen, daß für so gut wie alle Gäste der Bibliotheca Vaticana die Woche, deren Donnerstage (und Sonntage) stets wegfallen, nur zwanzig Arbeitsstunden hat.

Kein mir bekannter Gelehrter, der schon öfter in Rom gearbeitet hat, kann dem heiligen Stuhle die Anerkennung versagen, daß das Wohlwollen gegen die der Bibliothek des Vatican in immer größeren Schaaren zuströmenden Gelehrten von Jahre zu Jahre zugenommen hat: „mehr Zeit“ und „Studio auch an den Donnerstagen“ wird freilich der Anerkennung stets unmittelbar folgen. Wir hoffen Alle, weil wir erfahren haben, daß man unsere früheren Hoffnungen zu errathen wußte.

Was die im Vatican arbeitenden Gelehrten anlangt, so dürften sie mit dem Papste natürlich nur durch eine Bittschrift verkehren, und in dieser nur persönliche Bitten vortragen, deren Erfüllung meines Erachtens nicht füglich in Aussicht stehn kann. Aber da die weitaus größeste Zahl dieser Gelehrten von den „historischen Commissionen“ Deutschlands, Oesterreichs, Frankreichs oder aber von Akademien beauftragt ist, so brauchen die Herren doch nur ihren Vorgesetzten die Sachlage zu schildern: für recht viel Geld werde wenig geleistet: was geleistet werde, könne in der Zuverlässigkeit und in dem Umfange, in dem es wirklich zu Stande kommt, nur in Folge ganz außerordentlicher, aufreibender Anspannung aller Kräfte zu Stande gebracht werden, die man um so mehr vermeiden müsse als die Kost in Rom ungenügend sei, und schon die zurückzulegenden Entfernungen große Anstrengungen erforderten. Ich vermuthe, daß die Regierungen sehr wohl befähigt, und eigentlich auch verpflichtet sind mit dem heiligen Stuhle darüber zu verhandeln, daß die Arbeitszeit der Vaticana auf acht Stunden erhöht werde, daß man die Donnerstage in den ArbeitstagsStand erhebe, und außer den Sonntagen und den kirchlich gebotenen Festtagen vom ersten October bis zum letzten Juni ununterbrochen in der Bibliothek zu arbeiten gestatte. Die Diplomatie dürfte sich in der Wahl der für die Verhandlung zu benutzenden Ausdrücke weniger leicht vergreifen als unser einer, dem es freilich auf die Sache mehr ankommt, als einem ihm fremde gelehrte Interessen vertretenden Gesandten, der aber dafür die Kenntnis der in Betracht zu ziehenden Persönlichkeiten der päpstlichen Regierung, und Uebung im GeschäftsStyle nicht besitzt.

Daß ein durch Oberlicht, und nur durch dies, erleuchteter Kuppelsaal in ein cortile des Vatican einzubauen, daß die Sammlung gedruckter Bücher leicht zugänglich zu machen, daß sie auf den Gebieten der alten Philologie, der Romanistik, der Patristik, der Geschichte des Mittelalters auf dem Laufenden zu erhalten, daß gar manches Andere zu beschaffen sein wird, über das ich auf Befehl gerne Bericht erstatten werde, das versteht sich von selbst. Schon hier will ich versichern, daß ich an das allen Londonern bekannte Museum-head-ake sehr wohl denke, und an die, von mir sogar öffentlich ausgesprochene, Klage über die unter der (jetzt Niemanden mehr belästigenden) Kuppel der Laurentiana drückende Hitze ebenfalls: und ich will versichern, daß ich vorkommenden Falles nicht vergessen würde, auf eine genügende Ventilation des beantragten Kuppelsaales zu drängen.

Weiter versteht sich ganz von selbst, daß die verhandelnden Regierungen einen Theil der für die neuen Einrichtungen auflaufenden Kosten ebenso gewis werden übernehmen müssen, als die Fremden für den Zutritt zu den Kunstsammlungen des Vatican Gebühren zahlen. Die Regierungen sparen an Reisekosten und Diäten für die von ihnen Beauftragten, falls diese täglich mehr Zeit zur Verfügung haben als bisher, mehr als was sie etwa dem Vatican an Eintrittsgebühren für ihre Leute zu entrichten haben können.

Je mehr Regierungen sich zu dem von mir vorgeschlagenen Antrage vereinigen, desto mehr Aussicht hat er, angenommen zu werden, weil die Catholicität der Kirche durch ihn in der freundlichsten Form als eine Thatsache anerkannt werden würde, mit der auch die Welt zu rechnen gehabt hat.

Die zu erbittenden Erleichterungen sind aber durchaus auch im Interesse des heiligen Stuhls. Wer herrschen will, muß das Gute fördern: und wer irgend ein Gutes fördert, hat schließlich immer eine Stellung auch in der Welt. Die Vorsehung hat den Nach-folgern Petri eine Handschriftensammlung ohne Gleichen zu eigen gegeben: ich glaube, die Sammlung so allgemein und so bequem wie möglich zugänglich zu machen, müsse der Kirche als eine Aufgabe erscheinen, weil das Ansehen der Kirche durch die gewährte Erleichterung erheblich wachsen wird. Legen die Orden — Jesuiten, Dominicaner, Benedictiner — Werth darauf, ihre besten Leute in die Verwaltung der geradezu einzigen Sammlungen des Vatican zu bringen, weil der Ruhm der Congregation durch ihre so zu sagen vor die Front gerufenen Angehörigen wächst, warum sollte die ganze Kirche nicht dasselbe Mittel anwenden wie ihre Orden, um sich als eine Macht zu erweisen? Oesterreichs Ruf ist in der gelehrten Welt an dem Tage ich kann nicht sagen um wie viel gestiegen, an dem WvHartel Oberbibliothekar in Wien wurde: die Kirche wird ein Missionswerk thun, wenn sie ihre Bibliothek mit einem Introite hic dii sunt so weit wie möglich öffnet. Sie macht jetzt durch ihre Krankenpflege Propaganda: sie kann auch durch ihre Bibliotheksverwaltung Propaganda machen. Die Wissenschaft ist unbeeinflußbar unabhängig, aber dankbar, und μεγαλοψυχία sogar dem principiellen Akatholiken gegenüber das beste Mittel, dem jetzt fühlbaren Mangel an Gemeinschaft zwischen Katholiken und Akatholiken seine Schärfe zu nehmen.

Als Theodor von Sickel 1881 die bekannte Urkunde Ottos des Großen, über die er 1883 in einer berühmten Schrift gehandelt hat, für authentisch erklärte, freute sich (Cardinal Hergenröther hat mir das an dem Tage an dem es geschah, erzählt), der Papst Leo der Dreizehnte so, daß er so ehrlichen Akatholiken das Archiv weit zu öffnen befahl. Keiner von denen, die in der Bibliothek arbeiten, steht den im Archive forschenden Gelehrten in der von ThSickel natürlich für selbstverständlich erachteten Eigenschaft der Ehrlichkeit nach: wie wäre es, wenn die oben genannten Behörden dies vor dem heiligen Vater geltend machten, der, wenn auch kein Gelehrter, doch ein gelehrter Mann (eines seiner lateinischen Gedichte steht in der Nationalzeitung vom 27 April 1878 Nummer 195) und obenein ein wohlwollender Herr ist wie wenige?

Die biblioteca Vittorio Emanuele ermöglicht in ihren Räumen die Benutzung aller in den Staatsbibliotheken Italiens aufbewahrten Handschriften: es wird zu erwägen sein, ob nicht die Vaticana die den Kirchenbibliotheken gehörenden Codices zugänglich machen kann. Mittelpunkt muß man sein, wenn man wirken will: die Vaticana kann ein Mittelpunkt werden. Der heilige Vater genießt in Italien Portofreiheit: Kosten erwüchsen mithin aus der von mir so eben vorgeschlagenen Einrichtung nicht.

Nachtrag.

30 Mai 1891.

Ueber das so vielen Abschnitten des Evangeliars voraufgehende ܒܠܗܘ ܡܙܒܢܐ hat sich meines Wissens nur Herr Noeldeke ZDMG **22** 509 geäußert, und zwar nur durch eine Uebersetzung: „in *der* Zeit“.

Matth. 26_{44} ist ܠܗܘ ܡܠܬܐ ὁ αὐτὸς λόγος: darum darf ܒܠܗܘ ܡܙܒܢܐ ἐν τῷ αὐτῷ καιρῷ übersetzt werden. Ist diese Uebersetzung richtig, so sollen die mir bis heute unverständlich gebliebenen Worte ܒܠܗܘ ܡܙܒܢܐ anzeigen, daß der auf sie folgende Abschnitt an demselben Sonn- oder Festtage gelesen werde wie der [im Evangeliare] nicht mitgetheilte [nicht aus einem Evangelium entnommene], der ihm vorhergeht. Dann aber ist das vom Verfasser des Evangeliars benutzte Evangelium nicht die unmittelbare Vorlage des Schreibers gewesen, dessen Arbeit uns erhalten ist. Der Schreiber muß dann die „Rubriken“ eines Lectionars gedankenlos kopiert haben: erst der Verfasser des Lectionars (Proben sind aus meinen Orientalia **1** zu beziehen) hat eine nicht überall vollständige Handschrift eines Evangeliums für seine Arbeit benutzt.

Ueber die Plurale der Bildung מַלְכַיָּא sagt SDLuzzatto § 23 nichts Näheres. Herr EKautzsch sieht § 52[c] in מַלְכַיָּא „die ursprüngliche Endung des status constructus ַי“ + des „determinierenden ā“ (vergleiche GHoffmann, ZDMG **32** 759), faßt קַדְמָיֵא als קַדְמָיַיָּא. Ueber ܩܛܝܠܐ und die irgendwie ihm Analogen Herr Noeldeke § 72, Herr Duval § 259. Kautzsch hatte ַי [ai, nicht ay] zu schreiben.

Die auf ܝܐ endenden Plurale des Evangeliars setzt Herr Noeldeke ZDMG **22** 477[r] den auf ַיָּא auslaufenden der Chaldäer des alten Testaments gleich. Er behauptet das: ich beweise es.

ܦ̈ܝܣܝܐ = πεῖσαι hat seine Pluralpunkte, weil seine andere Sylbe wie αι = ε klang. Für Ἰουδαία schreibt das Evangeliar Matth. 24_{16} = BS 304_4 ܝܗ̈ܘܕܝܐ, Lucas 1_5 = BS 327_{20} ܝܗ̈ܘܕܝܐ [Lucas 1_{65} = BS 328_{27} ܝܗܘܕܝܐ], Lucas 3_1 = BS 332_{21} ܝܗ̈ܘܕܝܐ. Also noch C (denn diese Pluralpunkte hat C geschrieben) hat die Aussprache Ἰουδαία dadurch angedeutet, daß er zu den einen Singular wiedergebenden Consonanten Pluralpunkte setzte.

Folglich endete der Plural im Dialekte des Evangeliars auf αια.

Daß meine Abhandlungen 159_7, meine Symmicta **1** 37_{24} benutzt werden könnten, ist natürlich allen, die mit den Condottieri rechnen, undenkbar. Φουρδαια Mittheilungen **2** 380.

Als ich oben von ܙܒܢ sprach, habe ich *scheint* in » « gesetzt. Denn trotz des mitunter sicheren ܙܒܢ des Codex komme ich immer wieder auf die Vermuthung zurück, Zeit habe diesen Aramäern עֵד geheißen, das von وعد (zu dem auch מוֹעֵד gehört) hergeleitet, das Masculinum zu dem hebräischen, von Wetzstein zu وعد gestellten עֵת = עדת = ʿidat wäre. Die Zeitrechnung ist immer etwas Conventionelles, da man nach Sonne Mond oder Sternen messen, und von einem beliebigen Anfange an rechnen kann.

Neue Ausgabe Clementischer Schriften.

Wer weiß unter welchen Mühsalen ich die Didascalia, die relliquiae iuris ecclesiastici antiquissimae, die διατάξεις τῶν ἀποστόλων, die syrische Uebersetzung der Recognitiones Clementis und die Κλημέντια hinausgegeben habe, wird zugestehn, daß der Wunsch, die verbesserten Wiederholungen dieser Bücher selbst zu liefern, ein natürlicher ist.

Ich habe meine Rechte, die vielleicht nicht in vollem Umfange vor den Gerichten geltend zu machen sein, aber von jedem Gentleman als unantastbar anerkannt werden werden, stets vorbehalten: ich kann nicht gestatten, daß unter so vielen Schwierigkeiten und mit so vielen, nur durch große Entsagungen aufzubringenden Kosten gesammelte Materialien von dem ersten Besten ohne Weiteres angeeignet werden. Vorrede zum Ḥarîzî.

Im zweiten Bande der Bibliotheca Syriaca werden Recognitiones, Didascalia und andere Clementina 1893 neu erscheinen: eine die Urkunden scheidende Ausgabe der Constitutiones apostolorum soll (sie liegt seit vielen Jahren handschriftlich vor) im nächsten Winter unter die Presse kommen. Die recognitiones und Κλημέντια werden, erstere ohne die Handschriften von Verona und Vercelli, deren für JBLightfoot gemachte Vergleichungen in JARobinsons Händen sind, letztere ohne die Handschrift von Ierusalem, bearbeitet werden: es kommt mir nur darauf an zu zeigen, in welchem Verhältnisse der Grieche zum Syrer steht.

Sowie meine Kosten gedeckt sind, wird meine Texte zu neuen Ausgaben zu benutzen gestattet sein, aber nicht einen Augenblick früher. Mittheilungen **3** 254 **4** 138 = GGA **1890** 394ʳ.

Beiläufig berichte ich, daß die syrische Urschrift von Ephraims Commentare zur Evangelienharmonie des Tatian gefunden sein soll. Daß ich hinter ihr her bin, versteht sich von selbst. Constitutiones vijʳ.

Die Schwingungsdauer des Gauss'schen Bifilarpendels.

Von

Karl Heun in Berlin.

Die mathematische Theorie des Bifilarpendels kann mit Benutzung von hyperelliptischen Functionen, die durch zehn Verzweigungspunkte characterisirt sind, vollständig ausgeführt werden. Wenn auch einer solchen Untersuchung keineswegs unüberwindliche Schwierigkeiten entgegenstehen, so wäre doch damit dem Rechner wenig gedient, denn die allgemeinen Gleichungen müßten für die Bedürfnisse der Anwendungen wesentlich vereinfacht werden. Man hat sich bisher mit der von Gauss gegebenen Gleichung für die Schwingungsdauer begnügt und in denjenigen Fällen, wo eine Berücksichtigung der Amplitude nothwendig würde, nur die Gleichgewichtslage beobachtet. Diese Beschränkung hat aber, wie Gauss[1]) zuerst hervorgehoben hat, für feine Kräftemessungen nicht unbeträchtliche Nachtheile. Ich theile deßhalb im Folgenden für die Schwingungsdauer des Bifilarpendels eine Formel mit, welche auch für die verhältnißmäßig kurzen Pendel, welche man jetzt häufig bei electrodynamischen Messungen verwendet, ausreichen wird. Insbesondere mache ich auf die Fehlerschätzung aufmerksam, die für genauere Berechnungen dieser Art geradezu unentbehrlich ist.

1.

Die Aufhängefäden seien parallel und von gleicher Länge, welche wir im Folgenden gleich Eins setzen. Der Abstand der Fäden in der Ruhelage sei gleich $2l$. In der durch die unteren Fadenenden gehenden horizontalen Geraden werden im Abstand des Trägheitsradius (k) des Pendelkörpers in gleicher Entfernung (k) von der Mitte zwei materielle Punkte angenommen, auf deren Bewegung die Schwingungen des wirklichen Pendels reducirbar sind. Der Anfangspunkt des rechtwinkligen Coordinatensystems werde in der Mitte zwischen den beiden materiellen Punkten gewählt. Die z-Axe gehe durch die verticale Schwerpunktsaxe des Pendels nach oben und die x-Axe durch die schweren Punkte. Jeder derselben bewegt sich dann auf einer doppelt gekrümmten Bahn, welche bestimmt ist durch die Gleichungen:

1) Gauss Werke, herausgegeben von Schering, Bd. V p. 100.

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= k^2 \\ 2l^2(k-x) &= kz(2-z) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I)}$$

Ist g die Beschleunigung der Erdschwere ausgedrückt in Theilen der Fadenlänge, dann heißt die Differentialgleichung der Bewegung

$$\frac{s^2+4k^2(1-z)^2}{s^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2g(h-z) \ldots\ldots \quad \text{II)}$$

Hierin ist zur Abkürzung gesetzt:

$$s^2 = 4l^2z(2-z)-z^2(2-z)^2. \ldots\ldots \quad (1)$$

h bedeutet die Integrationsconstante erster Ordnung, welche durch das Princip der lebendigen Kraft eingeführt ist.

Wird der kleinste Werth von x gleich k cos α gesetzt, so bestimmt sich h als Function der „Amplitude“ α aus der Gleichung

$$h(2-h) = 2l^2\left((1-\frac{x}{k}\right).$$

Man erhält hieraus

$$h = 1-\sqrt{1-4l^2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha}. \ldots\ldots \quad (2)$$

Dies ist die verticale Erhebung des Pendelkörpers, wenn die Amplitude der Elongation gleich α wird.

Aus der Gleich. II) folgt durch Integration für die Schwingungsdauer T die Gleichung

$$\sqrt{2g}\,.\,T = 2\int_0^h \frac{s^2+4k^2(1-z)^2}{s\sqrt{h-z}\sqrt{s^2+4k^2(1-z)^2}}\,dz \ldots \quad \text{III)}$$

Die 10 Verzweigungspunkte dieses Integrals sind:

$$0,\ h,\ 1-\sqrt{1-4l^2},\quad 1+\sqrt{1-4l^2},\ 2,\ \infty$$
$$1\pm\sqrt{1+2(k^2-l^2)\mp 2\sqrt{(k^2-l^2)^2+k^2}}.$$

Für die meisten Anwendungen besitzt nun die Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$ in der Entwicklung

$$\frac{\sqrt{s^2+4k^2(1-z)^2}}{s\sqrt{h-z}} = \frac{1}{\sqrt{z(h-z)\,[4l^2-z(2-z)]}}\cdot\mathfrak{P}(z)$$

eine genügend starke Convergenz. Wir werden uns deßhalb im Folgenden auf diesen Fall beschränken und das ganze hyperelliptische Integral in dem Ausdruck für T nach der Gauss'schen

Quadraturmethode mit Benutzung eines einzigen zweckmäßig zu wählenden Argumentwerthes $z = z_1$ angenähert ausführen.

2.

Das nach der Gauss'schen Methode zur Quadratur vorgelegte Integral habe die Form

$$J = \int_\alpha^\beta \varphi(x) f(x) dx,$$

wo $\varphi(x)$ eine convergente Potenzreihe von der Form

$$\varphi(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \text{in inf.}$$

bedeutet. Die Function $f(x)$ besitzt die Verzweigungspunkte. Soll mit einem einzigen Argumentwerthe $x = x_1$ interpolirt werden, dann ist:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1) + \lambda_1(x - x_1) + \lambda_2(x^2 - x_1^2) + \cdots + \text{in inf.}$$

Folglich

$$J = a_1 . \varphi(x_1) + \lambda_1(a_2 - a_1 x_1) + \lambda_2(a_3 - a_1 x_1^2) + \cdots + \text{in inf.}$$

Hierin ist zur Abkürzung gesetzt

$$a_r = \int_\alpha^\beta x^{r+1} f(x) dx.$$

Damit nun der Fehler bei der approximativen Darstellung

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x) f(x) dx = a_1 \varphi(x_1)$$

möglichst klein werde, muß man x_1 so wählen, daß es der Gleich.

$$a_2 - a_1 x_1 = 0$$

genügt. Dann erhält man für den Fehler „zweiter" Ordnung C_2 den Ausdruck

$$C_2 = \frac{a_1 a_3 - a_2 a_2}{a_1} \cdot \lambda_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

3.

Durch die lineare Substitution

$$z = \frac{\varepsilon' h \xi}{\varepsilon' - h + h\xi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

nimmt der Ausdruck für T die Legendre'sche Form an:

$$\sqrt{2g}\,.\,T = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon'-h)}}\int_0^1 \varphi\left(\frac{\varepsilon' h \zeta}{\varepsilon'-h+h\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-m^2\zeta)}},$$

worin $\varepsilon = 1-\sqrt{1-4l^2};\quad \varepsilon' = 1+\sqrt{1-4l^2}\quad \ldots\ldots \quad (4)$

$$m^2 = \frac{h(\varepsilon'-\varepsilon)}{\varepsilon(\varepsilon'-h)}\quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

und

$$\varphi(z) = \sqrt{\frac{z^2+4k^2(1-z)^2}{2-z}}$$

ist.

Wendet man nun das eben entwickelte Gauss'sche Quadraturprincip auf das vorstehende Integral an, dann erhält man nach einigen leicht erkennbaren Reductionen das Resultat:

$$T = (1+\theta)\pi\frac{k}{l}\sqrt{\frac{1}{g}}\quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{IV)}$$

Die Größe θ ist bestimmt durch die Gleichung

$$1+\theta = \frac{2K}{\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon'-h}}\cdot\Phi(z_1)\quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{V)}$$

Ferner ist

$$\left.\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{z}{2}}}\cdot\sqrt{1-\frac{k^2-l^2}{k^2}z(2-z)-\frac{z^2(2-z)^2}{4k^2}}\\ z_1 &= \frac{\varepsilon' h\zeta_1}{\varepsilon'-h+h\zeta_1};\quad \zeta_1 = \frac{1}{m^2}\left(1-\frac{E}{K}\right)\end{aligned}\right\}\quad \ldots \quad \mathrm{VI)}$$

K und E sind die ganzen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung in der Legendre'schen Form für den Modul m.

Die Reihenentwicklung der Function $\Phi(z)$ und die Berechnung der Integrale a_2 und a_3 giebt nach Gleich. a) für die Fehlerfunction [1]) den Ausdruck

$$C_2 = -\frac{2-3(k^2-l^2)}{2k^2}\left[\tfrac{1}{3}\frac{2\zeta_1-1}{m^2}+(\tfrac{2}{3}-\zeta_1)\zeta_1\right]\frac{KK}{\pi}\cdot h^2.\quad . \quad \mathrm{A)}$$

Dies ist für positive Werthe von k^2-l^2 zugleich die „obere Fehlergrenze", wie die Betrachtung der Coefficienten λ_3, λ_4, etc. zeigt.

Für $\theta = 0$ geht die Gleichung IV) in die Gauss'sche Formel für unendlich kleine Schwingungen über. Die Function θ

1) Bei der Entwicklung von λ_2 konnten einige einflußlose Kürzungen angebracht werden, was jedoch bei den Hauptformeln V) und VI) unterblieb.

kann also nach einigen Vereinfachungen zur Fehlerschätzung bei der Verwendung dieser Formel dienen.

4.

Um die Genauigkeit der vorstehenden Formeln für die Bestimmung der Schwingungsdauer eines bifilaren Pendels von sehr ungünstigen Dimensionen anschaulich zu machen, habe ich die Rechnung für den Fall $l = \frac{1}{10}$ (die Länge der Fäden) $k = \frac{1}{5}$, $\alpha = 10^0$ durchgeführt, welche ich hier im Auszuge mittheile.

$$\begin{array}{llll}
\varepsilon & = 0{,}020\,204\,102\,86 & \varepsilon' & = 1{,}979\,795\,897\,14. \\
\lg(\varepsilon'-\varepsilon) & = 0{,}292\,165\,612\,1 & \lg h & = 6{,}181\,654\,971\,0 \\
\lg(\varepsilon'-h) & = 0{,}296\,587\,089\,6 & h & = 0{,}000\,151\,934\,0 \\
\lg m^2 & = 7{,}871\,793\,922\,7 & \lg K & = 0{,}196\,930\,742\,6 \\
\lg \frac{E}{K} & = 9{,}998\,379\,030\,7 & \frac{P}{K} & = 0{,}996\,274\,537\,1 \\
\lg \zeta_1 & = 9{,}699\,386\,329\,3 & \zeta_1 & = 0{,}500\,479\,539\,8 \\
\lg \Phi(z_1) & = 9{,}999\,977\,4 & \lg \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon'-h}} & = 0{,}000\,032\,8 \\
\lg(1+\theta) & = 0{,}000\,824\,0 & \theta & = 0{,}000\,189\,9
\end{array}$$

$$C_2 = -0{,}000\,000\,054\,8.$$

Es ist also in diesem Falle

$$T = 1{,}000\,189\,9 \,.\, \pi \frac{k}{l} \sqrt{\frac{1}{g}} \,.$$

Die Correction C_2 bleibt wegen der Kleinheit ohne Berücksichtigung.

In dem nur selten eintretenden Falle, wenn C_2 einen beträchtlichen Werth annimmt, kann man unter Anderem auch in der Weise eine erheblich schärfere Bestimmung von T als die oben ausgeführte erhalten, daß man in dem vorliegenden Beispiel die Verzweigungspunkte

$$0,\ h,\ \varepsilon,\ 1-\sqrt{1+2(k^2-l^2)+2\sqrt{(k^2-l^2)^2+k^2}},$$

$$1-\sqrt{1+2(k^2-l^2)-2\sqrt{(k^2-l^2)^2+k^2}}$$

bei der Quadratur berücksichtigt. Die Rechnung würde aber dann auf Rosenhain'sche Functionen führen.

Berlin, 8. Febr. 1891.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

9. Juli. | № 5. | 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 6. Juni.

Klein legt eine Arbeit des Herrn Schilling vor: Geometrische Bedeutung der Formeln der sphärischen Trigonometrie für den Fall complexer Argumente.

Riecke legt vor:

a. Eine eigene Arbeit: Zur Theorie der piëzoelektrischen und pyroelektrischen Erscheinungen.

b. Von Herrn Dr. G. Tammann: Ueber die Permeabilität von Niederschlagsmembranen.

c. Von den Herren Dr. G. Tammann und Dr. W. Nernst: Ueber die Maximaltension, mit welcher Wasserstoff aus Lösungen durch Metalle in Freiheit gesetzt wird.

Kielhorn legt zwei Aufsätze vor:

a. Die Vikrama-Aera.

b. Die Nîtimañjarî des Dyâ Dviveda.

de Lagarde legt vor:

a. eine Mittheilung über Arabes mitrati.

b. über Samech

und spricht

c. über den Inhalt des 5. Stückes seiner Septuagintastudien, die er in der Sitzung vom 2. Mai angekündigt hatte.

de Lagarde legt eine Mittheilung des Herrn Professor E. Nestle vor: Eine denkwürdige Sitzung der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften.

Weiland legt durch den beständigen Sekretär für den 37. Band der Abhandlungen die Abhandlung vor: Die Wiener Handschrift der Chronik des Matthias von Neuenburg.

Arabes mitrati.

Von

Paul de Lagarde.

In meinen Mittheilungen **1** 61 habe ich die Vermuthung ausgesprochen, das arabische تاج = tâǧ aus tâg, das armenische Թագ = *θαγ* in Թագաւոր = *θαγαvor Kronenträger*, *König* verhalte sich zu dem assyrischen agû *Krone* (das 1881 noch für ursprünglich sumerisch galt) wie tapdû tamlû zu den entsprechenden Stämmen. Ich erwähnte, daß nach einer Mittheilung PHaupts bereits vor mir an einen Zusammenhang der Wörter تاج und agû gedacht worden war, ohne daß man ihn hätte erklären können. Jetzt Friedrich Delitzsch, assyrische Grammatik § 65_{32}. Uebersicht 206_{25}.

Schon 1857 hatte JOppert ZDMG **11** 135 die Yaunâ takabarâ der Grabinschrift Darius des ersten, indem er sich auf die medoscythische und assyrische Uebersetzung des Textes berief, *bezopfte Ionier* übersetzt, da im Vendidad taka für *Pferdeschweif* gebraucht werde. 1864 wird in FJustis Handbuch der Zendsprache 130[1] ein awestisches taka *Pferdeschweif* nicht verzeichnet, aber noch 1882 bietet in seiner Ausgabe des babylonischen Textes der Achaemenideninschriften 34 35 Zeile 18 CBezold nach Oppert

Iamanu šanutú ša magiduta ina ḳaḳḳadišunu našúu:
andere Ionier, welche Flechtwerk auf ihrem Kopfe tragen.

1881 lieferte FvSpiegel, die altpersischen Keilinschriften 219, unter Berufung auf Oppert takabara *Kronen oder Flechten tragend*, und FJusti hat GGA 1882_{483} ff. dazu keine Bemerkung gemacht, obwohl die Kürze des ersten a von takabara vielleicht einer Erklärung bedurfte.

Um vollständig zu sein, füge ich Stellen bei, die mir meine Erinnerung bot, und Estienne zu ergänzen gestattet hätte. Thucydides *α* 6 *'Αθηναῖοι χρυσῶν τεττίγων ἐνέρσει κρωβύλον ἀναδούμενοι τῶν ἐν τῇ κεφαλῇ τριχῶν* [wozu der Scholiast (bei Schöne[1]) 9) *κρωβύλος ἐστὶν εἶδος πλέγματος τῶν τριχῶν, ἀπὸ ἑκατέρων εἰς ὀξὺ ἀπολῆγον*]· *ἀφ' οὗ καὶ 'Ιώνων τοὺς πρεσβυτέρους κατὰ τὸ συγγενὲς ἐπὶ πολὺ αὕτη ἡ σκευὴ κατέσχεν.* Estienne hat die andere Hälfte dieses Satzes nicht ausgeschrieben, die Dindorf haben sie charakteristischer Weise nicht ergänzt, und JOppert wie FrSpiegel sagen von der ganzen Stelle und von der Sache nichts: vor Paul Güßfeldt gebildet

1) der einst in meinem Hause Thuc. ε 50 βίᾳ θύσωσι in βιασθῶσι änderte.

wie sie sind: was wird erst nach Paul Güßfeldt werden? Xenophon Anabasis ε 4 13 εἶχον κράνη σκύτινα κρωβύλον ἔχοντα κατὰ μέσον ἐγγυτάτω τιαροειδῆ, wo also der κρωβύλος nahezu Tiaraförmig heißt. Neben κρωβύλος hat Hesychius κροβαλός, das MSchmidt in der kleineren Ausgabe 927 allerdings an den Rand verwiesen hat. Ich suche in der ersten Sylbe dieser Vokabeln शिरस् *Kopf*, und vergleiche սաղաւարտ = σαλαvαrτ *Helm*, woraus ich schon 1848 ܣܥܠܢ̈ܐ erklärt hatte: wenn PSmith aus meinen gesammelten Abhandlungen 72 180 unter Beschweigung des սաղաւարտ berichtet, ich habe سرنبك verglichen, so verleumdet er. Sarabara capitum tegmina, Isidorus ιϑ 23: סַרְבָּל Daniels? gesammelte Abhandlungen 206 15 ff., armenische Studien § 1937.

Ueber das aus ج entstandene ճ des Armenischen habe ich in den Mittheilungen 2 26 ff. gesprochen: ich darf es mit gleichem Rechte ǧ wie č umschreiben.

Տաճիկ = Taǧik der Armenier ist eine arsacidische Vokabel, das i derselben lang. NeuPersisch muß Տաճիկ تاجى oder تازى lauten. Eine Erklärung dieser Vokabeln ist nur dann richtig, wenn sie alle beide erklärt, da die Identität der Wörter nicht zu bezweifeln ist.

Տաճիկ Ἄραψ Maccab. β 12 10, der Isaias 13 20 15 7 9 Արաբացի heißt (armenische Studien § 231, wo nachgewiesen wird, daß der Akademiker FchMüller die Uncialen Ց = ց ﺡ und Ց = ց ﺝ nicht hat unterscheiden können). Das große Venediger Wörterbuch, das auch die Gleichung տաճիկ = تازى bietet, weist 2 842 [2] nach, daß տաճիկ Synonymum von Agarener, Saracene ist.

Տաճիկ übersetzt Ciakciak 1355 [3] außer durch *Arabo* auch durch *di veloci piedi*, *di rapido corso*. Er irrt: vermuthlich auf Grund der im großen Wörterbuche 2 842 [2] gegebenen Materialien. Die Scheidung zwischen haikischem, arsacidischem und sasanidischem Sprachgute, die ich für das Armenische 1866 in den gesammelten Abhandlungen 298 habe eintreten lassen, und die mir plaudente plebe doctâ in so bubenhafter Weise gestohlen worden ist, bewährt sich auch hier. Թաղել = ϑαζel, ein vulgärarmenisches Wort, zeigt durch sein Թ = ϑ wie durch sein ղ für ճ, daß es einer anderen Periode der Sprache als տաճիկ = tačik angehört. Թաղել ist allerdings ein persisches تاختن *laufen*, aber weder der Lautbestand noch das Suffix իկ = ى gestattet, տաճիկ mit تاختن zusammenzubringen. Ein ձի տաճիկ ist ein arabisches Pferd.

Endlich տաճկինակ *Kantschuh*, angeblich auch *Bastonade*, ist das persische تازيانه *Geißel*, *Peitsche*, ein Wort, das der von JMohl einst angekrönte JoAuVullers mit تاختن und تازيدن, wie es scheint als *das laufen machende*, zusammenbrachte, das aber leicht *Arabisch* bedeuten kann: die Semiten sind ja gegen unterworfene Völker nie sehr gütig gewesen.

Maccab. β 3_5 $4_{4\,22}$ steht Tačkastan für Φοινίκη, armenische Studien § 2182.

Wie Φοινίκη vom Armenier so übersetzt werden konnte, muß erklärt werden.

Theodoret kennt in der von mir in meiner Uebersicht 91 ausgehobenen Stelle einen in Φοινίκη gesprochenen aramäischen Dialekt. Ich habe die über Derartiges nicht unterrichteten Leser meines Buches auf die Notitia dignitatum, Orient § 32, verwiesen. Das genügt für Menschen, die wissen, daß ein Citat gegeben wird, um nachgeschlagen zu werden. Hier berufe ich mich noch auf Partheys Hierocles § 51 52 und Leos in den Mittheilungen **2** 176 von mir benutzte *τάξις τῆς προκαθεδρίας τῶν ἁγιωτάτων πατριαρχῶν*.

Es gab zwei Φοινίκη, die *παραλία* und die *λιβανησία*. Erstere lag da, wo jeder Schuljunge Phoenicien sucht, die andere enthielt die Städte Emesa, Laodicea (natürlich nicht die Küstenstadt, sondern das südlich von Emesa belegene: KFurrer ZDPV **8** 31, Schürer ²**1** 597), Damascus, Heliopolis = Baalbekk, Abila (*Ἀβελὰ τῆς Φοινίκης μεταξὺ Δαμασκοῦ καὶ Πανεάδος* Eusebius in meinen OS ² 243_9), Palmyra. Das *κλίμα Ἰαβρούδων* [Parthey falsch *Ἰαμβρούδων*] liegt um Yabrûd, SocinBenzinger 377, ohne daß die Angabe Leos 990, es habe zu Φοινίκη gehört, uns viel hülfe: wichtig ist das *κλίμα Μαγλούλων* (denn so muß man für *Μαγλούδων* Partheys lesen), da es beweist, daß Φοινίκη weit nördlich über Damascus hinausgriff (Fischer-Guthes Karte 36° 32′ O), da es den Syrern als ܡܥܠܘܠܐ bekannt ist, WWrights catalogue 1344, da es noch in später Zeit ع zeigt.

Die notitia dignitatum kennt equites Saraceni indigenae als Garnison von Betproclis, und equites Saraceni als Garnison von Thelsee. Nur in großem Zusammenhange wird die Frage beantwortet werden können, wann Araber in der Φοινίκη λιβανησία so zahlreich wurden, daß man die Provinz Tačkastan *Araberland* nennen durfte.

Das zweite Buch der Maccabäer setzt voraus, daß Φοινίκη nicht *κοίλη Συρία* ist, zu der doch nicht wenige der oben aufgeführten Städte gezählt werden müssen. Für den Historiker bleibt hier also noch viel aufzuklären. Für die Armenier scheint Φοινίκη *Araberland* nur in einer Zeit haben heißen zu können, in der ihnen Mitren tragende Araber nur aus der Φοινίκη λιβανησία bekannt waren.

Plinius ς 162 Arabes mitrati degunt aut intonso crime. barba abraditur praeterquam in superiore labro: aliis et haec intonsa.

Das heißt, ein Theil der Araber trug den tâǧ, und hieß daher tâǧî, was im pahlawî taǧik lauten mußte.

Wie dieser tâǧ ausgesehen hat, weiß ich nicht. Der Titel des Wörterbuchs tâǧ alârûs *die Brautkrone* [EWLane, ZDMG **3** 91 93] weist darauf hin, bei Hochzeiten sogar neuerer Zeit ein Bild des alten tâǧ aus der Zeit des Aelius Gallus zu suchen: denn Hochzeitsgebräuche erhalten sich. Allein EWLane, manners and customs of the modern Egyptians, sagt **1** 210 nur Upon the head of the bride is placed a small pasteboard cap, or crown. Daß die griechische Kirche für die ihr angehörende Braut ebenfalls eine Krone braucht, soll angemerkt werden.

Die Araber gelten für ein kriegerisches Volk, haben aber nach Wetzsteins Zeugnis die Vorsicht stets für den besseren Theil der Tapferkeit erachtet: die mitra, die einige von ihnen täglich trugen, war gewis kein Helm. Wie der Helm ausgesehen haben kann, muß sich nach der Waffe entscheiden lassen, gegen die er zu schützen hatte, und nach der Art, in der diese Waffe geführt wurde. Ich weiß darüber nichts, wenn es sich um die Zeit des Aelius Gallus, überhaupt um die ältere Kaiserzeit handelt.

Denn die arabische Litteratur ist jung. Alle Welt weiß wann Muḥammad gelebt hat: und was an arabischen Schriften älter als Muḥammad wäre, wie viel und wie authentisch ist es? Ein Paar Notizen über die Helme der Araber gibt GWFreytag, Einleitung in das Studium der arabischen Sprache, 255. Später entlehnten die Araber *κῶνος* als قونس, meine Symmicta **1** 59 $_{24}$ [1871], SFränkel, die aramäischen Fremdwörter im Arabischen 54 241 [1886][1]).

Das persische تاجيك oder تازيك ist offenbar mit Տաճիկ identisch: es bezeichnet Ureinwohner Erâns, solche die in Erân weder Araber noch Türken sind. EQuatremère hat zu Maqrîzîs histoire des sultans mamlouks 2^{2} 154 schon 1845 Տաճիկ تازى und تازيك für identisch erklärt. Ich habe nie etwas Anderes in diesen Tâǧîk gesehen, als Leute, welche die altpersische Kopfbedeckung gegen den Fez und Turban der semitischen Eroberer beibehalten haben.

EQuatremère erklärt anders. Er leitet die Worte von طى ab (er schreibt طاى), dem Namen einer Gruppe arabischer Stämme, der den Syrern ܛܝ̈ܝܐ *Araber* geliefert habe. Wie »Leute, die weder Araber noch Türken sind« und in OstErân wohnen, von dem arabischen Stamme θayy haben benannt werden können, wie aus طى je تازيك = تازى hat entstehn können, das dürfen wir den gelehrten

1) Herr Fränkel durfte 238 meine gesammelten Abhandlungen 24 $_{29}$ und die armenischen Studien § 524 für ܓܘܕܐ (in deutschen Eigennamen [auch *Gott* ist aus Eran entlehnt] Gund-), 239 meine Beiträge 75 $_{10}$ ff. für عسكر = لشكر nicht anführen.

Mann nicht fragen, der nicht einmal an رازی = *Einwohner von Rai* [= راجی ClHuart, JAP 1885 2 502] als Parallele zu seinem تازی طی gedacht hat. سکزی = սագչէկ *aus Sacastene gebürtig* heißt Rostom = * Uruçtataḳma, Symmicta 1 120 24. Auch Ḳâqânîs von Khanykow JAP 1864 2 155 nicht verstandenes مرغزی gehört hierher: es ist soviel wie مروزی Yâqût 4 507 7 *Margianer* (die gewis sehr boshafte Aeußerung Ḳâqânîs verstehe übrigens auch ich nicht). Ich vermuthe, daß زی = جی in راجی = رازی ungefähr dasselbe sei was زی in den Namen der awġânischen Stämme ist. Das زی der Kurden wechselt mit زا, da PLerch in den Mélanges asiatiques 2 631 berâzi *Neffe väterlicher*, xoarzi *Neffe mütterlicher Seite* schreibt, wo Justi 41 [2] brâzâ brâza, 161 [1] kvárzá bietet, und auf persisch برادرزاده und خواهرزاده deutet: bei Socin, Curdica 1 285 finde ich brâzîk *Nichte.*

Ich darf nicht wagen, die Gestalt der von den Arabern getragenen Mitren näher anzugeben: schon ARichs Wörterbuch des römischen Alterthums genügt zu erweisen, daß die Alten verschiedene mitrae kannten. Der den Darius begleitende Perser der Mosaik von Pompeii hat eine andere mitra als Paris und die Amazonen. Robert Sinker gibt in dem Dictionary of christian antiquities viel Material und die wichtigste Litteratur.

تغفور gesammelte Abhandlungen 84 3, تكفور Quatremères Maqrîzî 2 2 190.

Samech.

1

Der Name Samech findet sich als *Σάμεχ* dann und wann bei 𝔊, wo ein alphabetisch geordnetes Stück ihn zu nennen räth. Er findet sich in Folge davon auch bei christlichen Theologen, griechischer wie lateinischer Zunge. Samech mandatum humile, Hieronymus OS [2] 51 12. Samech firmamentum: quidam erectionem vel adiutorium sive fulturam putant, ebenda 79 29. Samech firmamentum, licet quidam erectionem vel adiutorium vel fulturam putant, ebenda 191 9. Samech enim auxilium nostro sermone vocatur, die alte Murbacher Hds. in meinem Psalterium Hieronymi xiv 15. Vergleiche Omont bibliothèque de l'école des chartes 1881 429, JBonnard revue des études juives 4 255, ADarmesteter ebenda 259. Isidorus Origines ξ. Hieronymus, Brief an Paula über Psalm ριη, Vallarsi [1] 1 144 ff., Ambrosius expositio in psalmum cxviij § 15, und die meist nur aus diesen zweien schöpfenden späteren Ausleger der Psalmen.

Zur Deutung צִו מָךְ mandatum humile[1]), G סָמַךְ *ἐστήριξεν* und

1) צו לצו Isaias 28 18 übersetzt Symmachus ἐντολὴ οὐκ ἐντολή, hat also in ל

dessen Zusammensetzungen, ἐπέθηκεν, ἀντελάβετο, ἀπηρείσατο: siehe Konrad Kirchers Concordanz. Ueber ܡܣܟܝܢ belehrt PSmith. Ein arabisches Aequivalent fehlt. *Σίγμα* müßte [§ 11] *סִמְכָה sein = dem archaischen (das Femininum noch durch ܬ ausdrückenden) ܣܡܟܬ.

2

Ich bin Historiker, meine Gegner sind Rationalisten. Unbequem für beide Theile ist, daß ich als Historiker durch einen Bericht über die Thaten meiner Vorgänger meine Versuche als erlaubt nachweisen muß.

Ueber ס reden HEwald[8] § 50 und FBöttcher **1** § 148 hin und her. IOlshausen schweigt. Herr BStade belehrt uns § 68

ס verhält sich zu ת wie ז zu ד, es entspricht unserem tonlosen *s*,

ohne zu wissen, daß in naturâ rerum ד sich zu ז verhält, wie ת zu שׁ, und daß in der Lehre von den Dentalen, Assibilaten, Sibilanten ס gar keine Rolle spielt. Herr König Seite 35

ס ist der tonlose Sibilant, das anlautende *s* im Deutschen.

Man sollte meinen, daß die Herrschaften Moses, David, Isaias, Aggaeus, diese durch viele Jahre von einander getrennten und doch die Buchstaben gleich aussprechenden Männer, bei sich zu Tische gehabt haben, oder daß sie vorEdisonsche Phonographen besitzen, in denen das von jenen Hineingesprochene jeder Zeit erweckbar aufgespeichert liegt.

3

Die Erfinder der semitischen Schrift haben die Entdeckung gemacht, die Consonanten ihrer Rede seien aus dieser Rede als Consonanten ausscheidbar, die Griechen sind ihnen mit der anderen Entdeckung gefolgt, daß es Vokale α ε η ι ο gebe, und sie haben den Muth gefunden, θέσει die Consonantenzeichen der Semiten א ה ח י ע, für welche sie eine Verwendung in ihrer Consonantenschrift nicht hatten, zu Zeichen der Vokale zu machen.

Was nach der Ausscheidung der zu Vokalen erklärten א ה ח י ע im phoenicischen Alphabete übrig bleibt, entspricht von β bis τ der Reihe nach den Consonanten der Hellenen.

4

Bemerkungen sind hier nur zu ס ץ שׂ zu machen.

Ich setze die bekannten Stellen her, auf die es ankommt.

---

die Negation לא gesehen, wie ich Mittheilungen **3** 257r in dem mit langem a gesprochenen ל des Namens ܠܥܙܪ Λάζαρος. Isaias 33_{21} derselbe Symmachus צִי ἐντολή. Da von צוה II kein Nomen çav herzuleiten, und Isaias 33_{21} צִי überliefert ist, muß Symmachus צִי gelesen haben, das sich zu צוה verhält wie כִּי *Brandmal* zu כוה, wie צִי *Steppe* zu צחה. Daß מך = ܡܣܟܝܢ ταπεινός sein kann, folgt aus Levit. 25_{39} 27_{8} und aus Aquilas מכתם ταπεινόφρων καὶ ἁπλοῦς Psalm 16_{1}.

Herodot berichtet *α* 139 von den Persern *τὰ οὐνόματά σφι ἐόντα ὁμοῖα τοῖσι σώμασι καὶ τῇ μεγαλοπρεπείῃ, τελευτῶσι πάντα ἐς τὠυτὸ γράμμα, τὸ Δωριέες μὲν σὰν καλέουσι, Ἴωνες δὲ σίγμα. ἐς τοῦτο διζήμενος εὑρήσεις τῶν Περσέων τὰ οὐνόματα, οὐ τὰ μέν, τὰ δ' οὔ, ἀλλὰ πάντα.*

Herr FrSpiegel hat 1867 in seiner Grammatik der altbaktrischen [wo gibt es NeuBaktrisch?] Sprache § 47 48 104 und 1881 in seinem Buche über die altpersischen Keilinschriften² 172 [1]) die Notiz Herodots nicht erwähnt. Herodots Angabe wird durch den Befund nicht bestätigt, soweit der Awesta und die Keilinschriften in Betracht kommen. Nur auf *u* oder *i* ausgehende Mannsnamen haben einen auf einen Sibilanten ausgehenden Nominativ. Das alte Testament aber zeigt, daß wenigstens auch der Name des Xerxes [2]) der von Herodot aufgestellten Regel folgte: denn zu כֹּרֶשׁ = Kuru-š und דָּרְיָוֶשׁ = Dârayâwu-š gesellt sich אֲחַשְׁוֵרשׁ als Nominativ von kšayâršâ = շաւարշ armenische Studien § 1688 [persische Studien 76].

ܡܓܘܫ der Syrer kann *μάγος* sein, wie ܐܕܘܫ *εἶδος* ist, und ܦܘܫܝ *παῦσαι*: es kann aber auch aus der Beobachtung Herodots erklärt werden. ܫܟܪ aus *αἰσχρός*.

Aus Herodots Worten folgt, daß dorisches *σαν*, ionisches *σιγμα*, das Nominativzeichen der persischen Mannsnamen und das ש der Hebräer einen und denselben Laut hatten.

Athenaeus bespricht *ια* 30 die *γραμματικὰ ἐκπώματα*, und citiert dabei Verse des Tragikers Achaeus, in denen *σαν* als ein im Namen des Gottes *Διώνυσος* vorkommender Buchstabe erwähnt wird.

---

1) Eine Schmach für Deutschland ist es, daß Spiegel noch 1881 Seite 139 dem verstorbenen ChrLassen »die Entdeckung« zuschreiben kann, daß »die bei Niebuhr mit I bezeichnete Inschrift ein Völkerverzeichnis enthalte«. Nicht ChrLassen hat das entdeckt, sondern Eugène Burnouf. Dies aufs Neue hervorzuheben, ist gerade jetzt Pflicht, da EBurnoufs Briefe, von seiner Tochter gesammelt, so eben erschienen sind, und das Bild des edlen Mannes, der von einem in Deutschland wohnenden Norweger so ehrlos bestohlen worden ist, frisch vor die Seele rufen. Ich habe schwer dafür zu leiden gehabt, daß ich im Januar 1854 vor dem Hefte »zur Urgeschichte der Armenier«, nachdem AHoltzmann aus Lassens eigenhändigen Briefen an PvBohlen des Bonner Professors Büberei öffentlich erwiesen hatte, den Satz drucken hieß »Nur einen großen Diebstahl hat die Zunft ohne obligate sittliche Entrüstung gelassen«. Meine Symmicta 2 129 ff., Mittheilungen 2 314 ff.. Lassens an PvBohlen geschriebener Satz »Burnouf hat die Namen aller altpersischen Provinzen aus einer der großen Keilinschriften entziffert« geht eben auf Niebuhrs I, die bei Herrn von Spiegel auf Seite 49 abgedruckt steht.

2) Herodot *ϛ* 98 ist von mir in den gesammelten Abhandlungen 182 besprochen worden: ich wünschte wohl, daß ein Philologe sich ansähe was da steht: es ist mit dem 45 Gesagten, mit Purim 51 ff. 40ʳ und Agathangelus 136 ff. zusammen zu benutzen.

Die bei Achaeus sprechenden *Σάτυροι*

> *τὸ σὰν ἀντὶ τοῦ σίγμα δωρικῶς εἰρήκασιν. οἱ γὰρ μουσικοί, καθάπερ πολλάκις Ἀριστόξενός φησι, τὸ σίγμα λέγειν παρῃτοῦντο διὰ τὸ σκληρόστομον εἶναι καὶ ἀνεπιτήδειον αὐλῷ, τὸ δὲ ῥῶ διὰ τὸ εὔκολον πολλάκις παραλαμβάνουσι. καὶ τοὺς ἵππους τοὺς τὸ* ϶ [1]) *ἐγκεχαραγμένον ἔχοντας σαμφόρας καλοῦσιν*,

was aus des Aristophanes Wolken 122 belegt wird.

> *καὶ Πίνδαρος δὲ φησὶ*
>
> *πρὶν μὲν εἷρπε σχοινοτένειά τ᾽ ἀοιδὰ*
>
> *καὶ τὸ σὰν κίβδηλον ἀπὸ στομάτων.*

Es darf aus Herodots Worten allerdings gefolgert werden, daß *σὰν* und *σίγμα* ihm als gleichlautend galten. Aus den von Athenaeus beigebrachten Zeugnissen des Aristoxenus ergibt sich aber das Gegentheil: diesem Sachverständigen ist *σαν* für die Musik bequemer als *σιγμα* erschienen. Distingue tempora [et regiones], et concordabit scriptura.

Später ist *σαν* der am WortEnde, *σιγμα* der in der Wortmitte stehende Sibilant. Philosophumena ϛ 49: vergleiche Epiphanius *λδ* 8, Irenaeus *α* 8_{11} = *α* 12_1 = *α* 15_1.

5

צ ist wie ש und ס in die Alphabete Griechenlands und Italiens übergegangen: es ist hier nicht meine Aufgabe über צ zu sprechen, da eine Verweisung auf AKirchhoffs bekanntes Buch und auf WCorssens Werk über Aussprache, Vokalismus und Betonung der lateinischen Sprache² **1** 277 für mich ausreicht. Ich merke an, daß 𝔊 den Namen des צ *τσαδη*, Hieronymus (ich habe nur wenige Hdss. zur Verfügung gehabt) OS² 79_1 191_{12} Sade schreibt, und füge zu den in den Mittheilungen **1** 234 384 von mir veröffentlichten Gleichungen צֳרִי ضرو [Uebersicht 179ʳ 2_3] *στύρ-αξ* und חֵץ *ὀϊστός* die neue سجرس *ἄγρωστι-ς*. Ueber die צ und ש vertretenden griechischen Zeichen wird meinem Leserkreise genügen was mir selbst genügt hat, Boeckhs Staatshaushaltung der Athener, an den durch das Register der anderen Ausgabe unter *Σ* zu suchenden Stellen.

6

Wie sich *σίγμα* und *σαν*, ס und ש wirklich zu einander verhalten, wird zu erforschen sein: aber man kann ohne Maßstab nicht messen. Man kann dies Verhältnis untersuchen, indem man ס und ש haltende Wörter untersucht, die in nichtSemitischer Schrift — der aegyptischen, assyrischen, griechischen — aufgezeichnet sind,

---

1) Ich habe ϶ eingesetzt, ich hätte auch ש einsetzen können. Noch Kaibel druckt C.

und indem man zweitens innerhalb des Semitismus studiert, wie ס שׂ שׁ sich zu einander verhalten.

Aber was wissen wir von der Aussprache der aegyptischen, assyrischen, griechischen Buchstaben?

Ich stehe der Aegyptologie und Assyriologie als Laie, aber doch mit dem Bewußtsein gegenüber, daß der Stand unserer Kenntnisse noch nicht hoch genug ist, um für Untersuchungen wie die hier zu führende, weit genug sehen zu lassen. Die Eine Bemerkung, die GSteindorff in den von FDelitzsch und PHaupt herausgegebenen Beiträgen zur Assyriologie **1** 344 über einen der verständlichsten Eigennamen פתרס = Patarisi = peterês *Südland* macht, wird zu meiner Entschuldigung ausreichen. Ich will aber noch hinzufügen, daß mir ein š in den Pronominibus šu ši šunu (Delitzsch § 56) gegen הוא היא هم an und für sich, und darum unwahrscheinlich ist, weil das altAegyptische bei Adolf Erman, die Sprache des Papyrus Westcar 21, als Aequivalent des »šunu« sn zeigt: ich kann mich von dem Glauben nicht losmachen, daß das älteste Aegyptische mit dem Semitischen näher zusammenhängt, als jetzt angenommen wird. Ich halte es für sehr schädlich, daß man sich gewöhnt hat, das Assyrische uns nur in lateinischem Gewande vorzustellen: der Entscheidung des Lesers ist dadurch noch weit schlimmer als in den von mir in den Mittheilungen **1** 157 zur Sprache gebrachten Fällen (Ղ und Ր) vorgegriffen: die Originalgestalt des Assyrischen nach den großen Londoner Drucken zu ermitteln habe Ich keine Muße.

Հերիսայ = עֲרִיסָה neben ܗܪܝܣܐ Mittheilungen **3** 208. Ղ = ܫ ש ሠ Mittheilungen **2** 15 **3** 23 **4** 192 und sonst.

Ich habe früher, wann ich für שׁ š setzte, nie einen Vorbehalt gemacht, da ich die allgemeine Annahme, daß שׁ š bedeute, als Theologe zu untersuchen keine Veranlassung gehabt hatte. Jetzt mache ich einen Vorbehalt, weil ich nicht mehr für sicher halte, daß שׁ den Laut š = sch überall und von jeher gehabt hat.

Ich habe 1883 (jetzt Mittheilungen **1** 152) aus des IFaber Stapulensis Psalterium (das 1509 erschien) die Notiz ausgezogen, daß die am Rheine vorkommenden Juden für שׁ š, die spanischen Juden s sagten. Herr DKaufmann »machte« den Herrn DHMüller, der natürlich von dem so eben Citierten nichts wissen darf, »aufmerksam« [derselbe Idiotismus wie im Dialekte von OberSitzko, Mittheilungen **2** 179], daß die in Littauen wohnenden Juden שׁ wie s, שׂ wie š sprechen. Seit 1864 konnte man aus ZDMG **18** 338 ff. [jetzt HLFleischer »kleinere« Schriften **3** 436 ff.] wissen, daß die im Maġrib (dem Kaiserreiche Marokko) vorhandenen Juden, wann sie (was oft geschieht) arabisch mit hebräischen Buchstaben schreiben, ס für ص und ش, ץ für س, ש für س setzen. Fleischer macht die Bemerkung

Die Vertauschung des . . . ش mit س und des س mit ش

das ist elend unlogisch ausgedrückt

gehört speciell dem Jüdisch-Arabischen

so steht wirklich da

an, und es ist merkwürdig, daß zwischen den beiden . . . Buchstaben hier dasselbe Verhältniss wie im Althebräischen und Arabischen wiederkehrt.

Auch hier läßt die Logik grüßen.

Fleischer versichert die Sache »merkwürdig« zu finden, wie er denn je und je auf dem Standpunkte der MirabiliaSchreiber gestanden hat, und meint damit alles Nothwendige gethan zu haben.

Auf das von mir am 15. 4. 1887 (Mittheilungen 2 259) über س ش Vorgetragene dürfen die kleinen Semitisten nicht Rücksicht nehmen, da sonst der Ruhm der »großen« Semitisten in die Brüche gienge. Das Alphabet dient auch als Zahlzeichenreihe. Auf ن = ν = 50 folgt im Nasḳî سعفص قرشت, in der Schrift des Maġrib, die ich auf das Kûfî zurückgeführt habe, صعفض قرست. Das heißt für den, der so etwas zu lesen versteht, ס ist bei einem Theile der Araber durch س, bei einem anderen Theile durch ص, ש bei einem Theile der Araber durch ش, bei einem anderen Theile, der ش als neu erfundenen Buchstaben an das Ende des Alphabets stellt, durch س vertreten.

Ich habe im Mai 1882 ς, das Ende des Wortes ἀριθμός, also das oben aus den Philosophumena von mir nachgewiesene σαν, als das Vorbild des ش erkannt, durch das die arabischen Mathematiker die Unbekannte bezeichnen: ich habe vermuthet, daß ش ϣⲉⲓ genannt worden, und so ϣⲉⲓ شى = cosa (die Kos des sechszehnten Jahrhunderts) der Name für die Unbekannte geworden sei. Ξ hieß nicht ξι, sondern ξει: der Murbacher Psalter vor meinem Psalterium Hieronymi xv 16 xei gradum viduae moderatur rite secundum, wozu ich der ersten Facultät durch Citierung der Constitutiones γ 1 zu der Uebersetzung verhelfen zu müssen geglaubt habe »Eine Witwe darf nicht vor ihrem sechzigsten Lebensjahre in das χηρικόν der Kirche aufgenommen werden«. Ich will erwähnen, daß die Syrer εἶδος als ܐܝܕܘܣ haben, wo ܘ nur Lesemutter ist: auffällig ist (mit Artikel) ܐܝܕܐ.

Die Juden des Maġrib haben nicht in der Schrift »س mit ش, س mit ش, ص mit س« vertauscht, sondern sie haben ס bald wie ص, bald wie ش, ץ wie ص [punktiert], ש wie س auszusprechen gelernt. Das heißt, die ihnen gewordene Ueberlieferung war eine andere als die Schule des †† Gesenius und Ewald, die sich grundsätzlich um

Geschichte nicht kümmert, annimmt. Hingegen eine andere Ueberlieferung anders dachte.

Welche der beiden vorhandenen Aussprachen die ursprüngliche ist, weiß noch Niemand, wird vielleicht auch nie jemand wissen. Die Frage nach den »Sibilanten« der semitischen Sprachen wird aber nicht eher beantwortet werden dürfen, als bis der von mir gestellten Vorfrage ihr Recht geworden sein wird. Die Wahrheitsliebe unserer »großen Männer« ist nicht erheblich: man wird sich schon Zeit nehmen und vorläufig zu der Waffe greifen (deutsche Schriften, Vorrede), die am nächsten liegt.

Wenn ich nun auf das Edessenische und das Targumische Bezug nehme, so finde ich, daß in

שְׂבָכָה	شبكة	ܣܒܟܐ [σαβαχα 𝔊 Regn. δ 25_{17}]
שָׂבֵעַ	شبع	ܣܒܥ
שָׂהֵד	شهد	ܣܗܕ
שָׂב	شب	ܣܐܒ
שִׂיחַ	شيح	ܣܝܚ [Orientalia 2 53 ff.]
שְׂמֹאל	شمال	ܣܡܐܠܐ
שָׂנֵא	شنئ	ܣܢܐ [𝔗 besser סני]
שֵׂעָר	شعر	ܣܥܪ
שָׂפָה	شفة	ܣܦܐ [oft ܣܦܬܐ ܕܣܦܬܐ : PSmith]

שׂ von den im Maġrib und in Littauen wohnenden Juden so gesprochen worden ist, daß sein Laut mit dem in den entsprechenden arabischen Vokabeln gebrauchten identisch war, daß ihm aber im Aramäischen, sowohl dem Edessas wie dem Palaestinas (denn der Targum ist in Palaestina zu Hause, nicht in Babylonien) ein ܣ ס gegenübersteht.

Wenn ich danach folgende Reihe überlege

שָׁאַל	سال	ܫܐܠ
שֶׁבַע	سبع	ܫܒܥ
שִׁבֹּלֶת	سنبلة	ܫܒܠܬܐ
שָׁלֹם	سلام	ܫܠܡ
שָׁנָה	سنة	ܫܢܬܐ

so erhellt, daß שׁ von den im Maġrib, in Spanien, in Littauen wohnenden Juden so gesprochen wurde, daß sein Laut mit dem in den entsprechenden arabischen Vokabeln identisch war, daß ihm aber im Aramäischen, sowohl dem Edessas wie dem Palaestinas, ein ܫ gegenübersteht.

Daß die Juden Littauens mit denen Maroccos und Spaniens übereinstimmen, ist ein Beweis dafür, daß wir es mit einer wirklichen

Ueberlieferung zu thun haben. Es muß untersucht werden, »woher haben die am Rheine angesiedelten Juden den ihnen 1509 von Jacques Lefèvre d'Étaples bezeugten Laut š für שׁ?«.

Was Herr Schreiner in des Herrn Stade Zeitschrift **6** 213—259 »zur Geschichte der Aussprache des Hebräischen« geschrieben, hilft uns sehr wenig.

Wären nicht die littauischen Juden, so wäre vielleicht die Annahme gestattet, daß die unter Arabern wohnenden Israeliten שָׁהֵד darum šáhéᴅ lasen, weil die Araber ihnen alle Tage šahida vorsprachen. Man kann aber auch behaupten, die nach Deutschland verschlagenen Juden seien aus aramäischen Gegenden hergekommen, und hätten dort שָׂהֵד nach ܣܳܗܶܕ gemodelt. »Auffassen« läßt sich Alles.

In den von französischen Juden hebräisch geschriebenen Büchern finden sich französische Vokabeln in hebräischer Schrift. Ein Glossar, das her gehört, ist durch Herr ANeubauer im ersten Bande der romanischen Studien des Herrn Boehmer veröffentlicht worden: zusammenfassend arbeitete Herr Darmesteter, glosses et glossaires hébreux français [Paris 1878] (über ihn ABerliner in meinen Mittheilungen **2** 290^{r}). Man wird in diesen Glossen und Glossaren für das französische s nicht ס, sondern שׁ finden.

Spanien liefert ähnliches Material.

Natürlich wird man die »rabbinische« Bibel, die man besitzt, bei Iudices 12 $_{6}$ einsehen. Ich gewinne dadurch aus Yiçḥáqî (Buxtorf Blatt רעח^{v}), daß die Ephraimiten מגמגמין: und David Qamḥî (ebenda) braucht denselben Ausdruck: Levy [2] **1** 339 vergleicht جمجم [= *he spoke indistinctly* Lane 449 [1] = غمغم Lane 2289 [3], Ḥarîzî Durra bei SdeSacy Anthologie 64 $_{1}$]. David Qamḥî macht dann die mich hier viel angehende Bemerkung über die Ephraimiten אולי היה אויר ארצם גורם להם זה כמו אנשי צרפת שאינן· מבינים לקרא השין וקוראין אותה כמו תיו רפה. Diese Stelle citiert Lipman Zunz, die synagogale Poesie des Mittelalters **2** [= die Ritus des synagogalen Gottesdiensts] 55 ohne sie auszuschreiben (ich verdanke das Citat Herrn Schreiner ZATW **6** 258^{r}), wo er lehrt

> in Aegypten, Palästina, Magreb, überhaupt bei den mostarabischen

مستعرب hier nicht christiano, sondern Judeo mezclado con los Alaraves, meine Evangelien arabisch xvj: ein in Deutschland lebender Jude wäre مستنمسى

> Gemeinden, wie man im Gegensatze zu den aus Europa eingewanderten die Eingeborenen in Aegypten, Tripolis, Syrien nennt, die später auch unter dem Namen Moriscos vorkom-

men. Sie unterscheiden sich in manchen bürgerlichen Einrichtungen, in der Sprache, in der Aussprache des Lautes Schin, welches die spanischen und französischen nicht von Sin unterschieden.

David Qamḥî (sein Satz steht oben) sagt von den jüdischen Gästen Çárẹᴘᴀᴛs aus, daß sie statt ש (ohne Punkt) weiches ת sprachen. Was LZunz weiß, dankt er also nicht diesem David Qamḥî, den er mithin gar nicht nennen durfte. Vielleicht steht es bei »Asulai בִּרְכֵּי יוֹסֵף zu Tur 1 50«, welches Buch ich nicht nachschlagen kann. בִּרְכֵּי יוֹסֵף *Kniee Josephs* stammt aus Genesis 50_{23}: der Titel sagt nur aus, daß das Buch von einem Joseph verfaßt worden ist. Den Titel ברכי יוסף bespricht Beniacob unter § 629: Ḥayyîm Iôséᴘ Dáwîᴅ Azûlâî aus Livorno hat ספרי שם הגדולים ועד לחכמים geschrieben, aus deren Wilnaer Drucke von 1852 ich mich nicht habe unterrichten können: seine in Livorno gedruckte *Kniee Josephs* sind mir unzugänglich. Meine Wilnaer Ausgabe der ארבע טורים enthält nichts mir hier Brauchbares. DHoffmann, der Schulchan Aruch [Berlin 1885], hat mich im Stiche gelassen: ebenso des Herrn von Pavly Uebersetzung **1** 212 ff. und Loewes Uebersetzung **4** 20 ff.[1]). Es wird mithin des † Zunz Ausgabe noch von Kundigeren auf ihre Begründung zu prüfen sein.

Auf einen in Chartres liegenden Psalter, der den Urtext in lateinischer Umschreibung bietet, verwies ich — ohne Nutzen, natürlich! — in der Vorrede zu meinem Psalterium iuxta Hebraeos Hieronymi.

Man wird sich aber bei diesen Untersuchungen gegenwärtig zu halten haben, daß wer die 1891 irgendwo — dies Wort gehört nothwendig in meinen Text — übliche Aussprache eines französischen Buchstaben kennt, darum noch lange nicht weiß, wie ihn Yiçḥáqî 1050 in Troyes ausgesprochen hat.

JFoerster, spanische Sprachlehre 13 § 9

wir finden im diálogo de las lenguas angegeben »en muchas partes de Castilla convierten la s en j [x] y por sastre dicen xastre« . . . d. h. man sprach es wie sch, denn so klang damals j oder x.

GrMayans y Siscar, origenes de la lengua española, Madrid 1737, **1** 150

S, mudada en J, que tiene el mismo valor que la G gutural.

1) Es handelt sich in den Paragraphen 46 bis 57 um das Hersagen der vorgeschriebenen Segenssprüche. Bei dieser Gelegenheit konnte es aber wohl kommen, daß die Aussprache gewisser Buchstaben berührt wurde. Von »Chajim Josef David Asulai« (etwa 1726 bis 1807) spricht DCassel, Lehrbuch 419.

A sapone jabon, salgma jalma, a Salone Jalòn rio, Saetabis Jativa, sirop Arabe jarope, a succo jugo .... Los Arabes regularmente pronuncian Jota donde nosotros S, diciendo Jan por San, Geñor por Señor, Gimon por Simon, pajas por passas.
Es genügt, im Yâqût, der seine Namen bequem nach den Anfangsbuchstaben ordnet, اشبونة = لشبون = Olyssipo = Lissabon, اشبيلية = Hispalis = Sevilla und die vielen mit شنت = Sant anhebenden Artikel aufzuschlagen, um zu wissen, daß das hispanische S dem Yâqût als ش zugekommen ist, die Hispanier also vor Yâqût ș wie š gesprochen haben. ش ist ohne Zweifel š, die Namenformen sind durch die Reihe, in der sie stehn, sicher.

Vorläufig ist unter Vorbehalt (unten warne ich) anzusetzen: שׂ wurde s gesprochen, und ist mit س identisch: für שׂ haben die Aramäer ܫ. שׁ wurde š gesprochen, und ist mit ش identisch: für שׁ = ش haben die Aramäer ܣ.

7

Es läßt sich denken, daß eine Hieroglyphenschrift, die vielleicht allerhand Geheimnisse anzudeuten oder Winke zu geben hätte, die auf gefällige, dem vorhandenen Raume entsprechende Anordnung ihrer Zeilen zu sinnen veranlaßt wäre, mehr als Ein Zeichen für ein und dasselbe Wort vorräthig hielte. Es läßt sich denken, daß ein Volk, das eine entlehnte Schrift verwandte, ebenso wohl überflüssigen Reichthum vor sich sähe, wie ich sehr viel mehr ر und ك von dem Gießzettellosen Drugulin erhalten habe, als ich verwenden kann: die Griechen haben ja drei Formen des »σ« zur Verfügung gehabt, ס צ ש. Es läßt sich aber nicht denken, daß die Semiten, wenn sie sich selbst eine Schrift erfanden, ס erfunden haben sollten, wenn sie für den durch ס bezeichneten Laut schon ש oder צ besaßen. Mit anderen Worten: ist ש oder צ *s*, so ist ס nicht *s*. Und umgekehrt.

Vergleichen wir das griechische Alphabet mit dem semitischen, so ist ס = ξ. So kann jeder Secundaner schließen. Ursprünglich ist ס ξ, schließt ein vorsichtiger Mann, und wenn er so viel grundböses und gedankenloses Volk vor sich hat, wie der arme Schreiber dieser Zeilen, so erläutert er sein »ursprünglich« durch die Anmerkung »so wenig aus dem Cicerone wie es Iosue Carducci oder Sansone (vulgo Salvatore) Barzilai der Galaadit spricht, folgt, daß *Κικέρων* der Griechen unrichtig sei, so wenig folgt daraus, daß ס, das, als vor der ersten Olympiade die Griechen es übernahmen, ξ ausdrückte, auch für Moses Maimonides oder Abraham Berliner wie ξ klang und klingt.

Als PHaupt was ich in meinen Symmicta 1 115 22 geschrieben, gelesen hatte, theilte er mir — NGGW 1883 99 r — mit (ich habe das in den Mittheilungen 1 152 weiter gegeben), daß 1866 auch EHinks die Secundanergleichung ס = ξ aufgestellt habe.

8

Seit Adolf Kirchhoffs bekanntem Buche ist leicht zu ersehen, daß die griechische Welt, was das von ihr gebrauchte Alphabet anlangt, in vier große Gruppen zerfällt:
in die, welche die nichtphoenicischen Zeichen φχψ und das phoenicische ξ nicht verwendet:
in die, welche ξ als ξ, und die nichtphoenicischen Zeichen φχψ in in dem uns geläufigen Sinne braucht:
in die, welche φ und χ wie wir benutzt, aber ξ durch χσ und ψ durch φσ ersetzt:
in die, welche ξ als x nicht kennt, und den nicht phoenicischen Zeichen φχψ die Werthung von φξψ verleiht,
wozu anzumerken lohnt, daß das lateinische X sein Dasein dieser letzten Uebung dankt.

Die Epigraphiker haben sich mit der Feststellung dieser Thatsache begnügt: nach dem Grunde der allgemein zugestandenen Thatsache hat meines Wissens noch keiner von ihnen gefragt.

Mir folgt aus dem von AKirchhoff formulierten Thatbestande, daß ס, so wie es ursprünglich gesprochen wurde, ein nicht allen Griechen bekannter oder genehmer Laut war. Wenn als Regel ausgesprochen wird (eine Ausnahme bei FBechtel, die Inschriften des ionischen Dialekts 41r), daß ξ da nicht vorkommt wo man χσ schrieb, so gilt mir als ausgemacht, daß das ס, wie es zur Zeit der Uebernahme des phoenicischen Alphabets bei den Phoeniciern lautete, nicht χσ lautete, sondern irgendwie, nur nicht so, daß ein Grieche des das Alphabet übernehmenden Stammes — dieser Genetiv ist das Wesentliche — den Laut in seiner Sprache vorfand.

Es folgt für mich aus der Vorlage weiter, daß da wo ξ geschrieben wurde, ursprünglich der Laut des ξ mit dem — phoenicischen? — ס sich deckte.

9

Zu meinem Bedauern bin ich, um mich über die älteste Schrift der Semiten zu belehren, auf die Tafel, die Euting 1882 Chwolsons Corpus inscriptionum hebraicarum, und auf die andere Tafel angewiesen, die eben dieser Euting 1889 des Herrn Kautzsch »Gesenius« beigegeben hat. Kautzsch lobte erstere 1884 in seiner Grammatik des biblisch-Aramäischen § 9, er fügte die letztere der Jubelausgabe seines Gesenius an, muß sie also für tadellos erklärt haben, und

Kautzsch ist, wie sein Buch über die Moabitica lehrt, Epigraphiker von Beruf. Das nabatäische ס bespricht ESachau, ZDMG **38** 537.

Mir ist allerdings gewis, daß Herr Euting 1889 die auf dem MesaSteine vorkommende Form des ס noch ebenso unrichtig widergibt wie 1882. Bei Smend-Socin 12 ואסחבה, 18 ואסחביהם, 21 לספת 25 באסרן, 26 המסלת, 29 יספתי (Smend-Socin arbeiteten 3 Jahre vor 1889) erblicke ich als moabitisch nicht das von Herrn Euting vorgestellte ס, sondern das ס der Cyprischen Fragmenta aenea, die Herr Euting auf Chwolsons Tafel »circa 700« ansetzt.

Man darf nicht so unbillig sein, zu verlangen, daß ich, als Mann von 61 Jahren gezwungen umzusatteln und den Semitisten zu machen, alsbald in allen Sätteln der Semologie gerecht sein solle: ich komme den semologischen Kattenbusch zuvor, und gestehe freiwillig ein, daß ich dilettiere: müssen die Männer der ersten Facultät entschuldigen, daß ich ab und zu etwa über das Weihnachtsfest oder den Bibeltext dilettiere, so können die Herren des vierten Ordo sehr wohl eine Duldung für meinen Dilettantismus in Semiticis gestatten.

Ich finde nun von Eutings »Meisterhand« zwei Formen des ס gezeichnet, die Ich für verschiedene Werthe anspreche, die in Moab und auf Cypern übliche, welche ersichtlich den Griechen ihr Ξ geliefert hat, und die in Phoenicien usw. vorkommende, welche ich für eine Ligatur aus ק und ש ansehe, welche die Griechen, weil sie Qoppa, nicht Kappa, enthielt, nicht brauchen konnten. So vermuthe ich. Wenn ich von Vermuthen rede, meine ich Vermuthen. Die an der Quelle Siloe gefundene Inschrift enthält kein ס.

10

Ich habe 1881 in den Mittheilungen **1** 69 HLFleischers Dissertatio de glossis Habichtianis 58, WSpittas Grammatik 18, GAWallin ZDMG **9** 60, Sacys anthologie grammaticale 267 zu dem Erweise citiert, daß die عامّة zwischen س und ش anders wechselt als die لغة. Fleischer bemerkt aaO., س werde mitunter in ش verwandelt, ut per pleniorem quandam pronuntiationem ipsa significatio quasi plenior fiat et validior. Ich habe bemerkt, daß Wallins von mir citierter Aufsatz »für ס = ع ganz besonders in Betracht kommt«. Länger als zehn Jahre will ich nun nicht abwarten, daß ein weniger als ich überbürdeter Mensch diese Bemerkung ausnutze: ich nutze sie selbst aus, wenigstens so weit Ich es vermag.

Gerade bei den echtesten Beduinen in Nagd und Irâq wird für ك jetzt, wie das vor Alters beim Stamme Rabî: der Fall war, war, kš gesprochen. Auch ks kommt vor. Ferner wird k zu tš, schließlich zu ts.

Ich setze die Gleichung an: ס zu כ wie צ zu ק. War das ס

irgend welcher Semiten — ich bitte die Gerechten, namentlich die Lautphysiologen, um Vergebung, wenn der Ausdruck dem gelahrten Jargon des laufenden Semesters nicht entspricht — war ס in der von Wallin geschilderten Weise eine Quetschung des כ, so konnten die Griechen dieses ס für ξ = kš schreiben. צ ist entweder Assibiation von ܛ = ط oder Quetschung von ק = č, Uebersicht 30ʳ 2_6 129ʳ 2_1: die Qarräer sprechen צ č, JHalévy Revue des études juives **21** 233 Ende, während in den Texten meiner persischen Studien erst das punktierte צ das č der Perser vertritt.

Bewährt sich was ich oben über שׂ und שׁ vorgetragen habe, so zeigt das Aramäische diesen zwei Buchstaben gegenüber eine Lautverschiebung. Es verhielte sich aber שׂ = س zu ܣ wie שׁ = ش zu ܫ, nicht wie שׁ = ث zu ܬ oder wie צ = ظ zu ܛ, nicht wie ז = ذ zu ܕ (wo die Stufen vorhanden sind), noch auch wie צ = ض = ܥ, oder ק = ء der Badawiyyîna (wo eine Lautspaltung [ç + ע = ض, k + ע = ק], nicht eine Lautverschiebung vorliegt).

Wie das ܫ der Aramäer in ältester Zeit ausgesprochen worden ist, weiß keine Seele: daß es spitz lautete, folgt nur daraus, daß ܣ dick lautete: es wäre kein gesunder Sachverhalt, wenn ܫ von ش nicht in derselben Entfernung abstände wie ܣ von س.

Ich muß, um nicht mehr unseres knappen und theuren Raumes zu verbrauchen, als unumgänglich ist, hier abbrechen, gebe aber noch zu bedenken, daß angeblich der ganze Canon, jedenfalls ein nicht kleiner Theil des Canons aus der althebräischen Schrift in die sogenannte assyrische, jetzt von uns benutzte Schrift umgeschrieben worden ist: man lese über כתב דעץ und des Epiphanius »deession« GHoffmann 1881 in ZWAT **1** 334 ff. Der einfache senkrechte Keil der Assyrer, auf den ich mich 1877 in den armenischen Studien § 2274ʳ zur Erläuterung des von mir gegen רעץ aus Nathans עָרוּךְ festgestellten דעץ berufen habe, steht 1889 bei FDelitzsch, Grammatik 35 Nummer 204, als diš ṭiš tiz tiš. Daß bei dieser Umschreibung allerhand vorgekommen ist was uns ärmsten Semologen, namentlich mir, dem ἔκτρωμα dieser Gesellschaft, unsere Arbeit erschwert, ist einem Manne nicht zweifelhaft, der, selbstloser als die regierenden Meister der Zunft, so viele Handschriften abgeschrieben und verglichen, und so viele Correcturbogen gelesen hat wie ich.

Ich weiß noch wie heute, mit welcher Freude Ernst Freiherr von Leutsch mir als Geschenk den Aufsatz über die cyprischen Inschriften brachte, den HLAhrens in den Band **35** des Philologus geschrieben hat. Ahrens bespricht § 13, 22 ff., das Zeichen, das Iohannes Brandis unter Nummer 14 (SBAW 1873_{658}) mit σ umschreibt, das Moriz Schmidt zuerst ξ, dann σσ oder σ gelesen hat;

Ahrens selbst lehrt 24, es sei nicht ein ξ, sondern ein dickerer Zischlaut gemeint.

Die cyprische Schrift ist stark stylisiert. In jenem hier nicht zu druckenden Zeichen erblicke ich das aus ק und ש zusammengesetzte ס Phoeniciens, das vom Ξ der Moabiter nicht bloß der Form nach verschieden sein dürfte.

Ahrens 23 zieht den von Hesychius erhaltenen paphischen Satz zur Erläuterung heran *ἐσπόθ' ἔρπες* = [*ἐκ*] *πόθεν ἥκεις* [= *ἕρπεις*]. Durch Georg Meyer, dessen ich in meiner Abhandlung NeuGriechisches aus KleinAsien 6 gedachte, habe ich (Bezzenbergers Beiträge zur Kunde der indogermanischen Sprachen **10** 177) erfahren, daß das karische *-ασσις* mit *-αξις* wechselt, also *'Αρύαξις* mit *'Αρύασσις*, *Βρύαξις* mit *Βρύασσις*, und daß wer archaisiert, ξ, nicht *σσ*, anwendet.

Da hätten wir also den Weg, auf dem von qs zu ss gegangen worden ist, vor uns. Ueber *σσ* der griechischen Steine FBlaß in der Satura philologa für Herman Sauppe 121 ff.

Falls סוס (Lotz, die Inschriften Tiglathpilesers des Ersten 160 ff.), das zuerst den Elephanten, erst nachher das Ross bezeichnete, ein Fremdwort ist, so kann die Sprache, der es entnommen wurde, noch einmal die Probe auf meine Rechnung machen. סוּף ist ϫοογϥ (Peyron 400 [1]), HBrugsch in meinen Mittheilungen 2 261.

Aus dem Buche der Richter 12_{6} ist bekannt, daß die östlich vom Jordan wohnenden Galaaditer שִׁבֹּלֶת, die westlich von ihm sitzenden Ephraimiten סִבֹּלֶת sagten, und letztere gar nicht im Stande waren שִׁבֹּלֶת auszusprechen. Mas:ûdî berichtet in der Histoire des Sultans Mamlouks EQuatremères 2 2_{189}, daß im Jahre 1302 die Ḥaçarî des Ça:îd [?] daran erkannt wurden, daß sie die ق in دقيق richtig leisten konnten.

Die Nachricht, daß Ephraim das ש Galaads durch ס ersetzte, oder aber Galaad das ס Ephraims durch ש — denn welche der beiden Formulierungen die richtige ist, weiß noch niemand: da auch die Iudäer שִׁבֹּלֶת haben, ist freilich die erste die wahrscheinlichere —, diese Nachricht ist werthvoll. Sie sagt allerdings nichts über die Lautung aus, aber sie mahnt, erstens, vorsichtig in der Annahme des oben über שׁ שׂ Vorgetragenen zu sein. Denn š kann sich leichter sowohl zu s als zu *σ-χ* ändern, als s zu x oder etwas Aehnlichem. Bei *σ-χ* denke ich an die Geschichte von dem Münsterländer, der im Palais Royal einen umhersuchenden Herrn mit der Frage anredete Que s-χers-χez Vous?, und die Antwort erhielt Je s-χers-χe mon s-χapeau, worauf dann das Gespräch auf Münsterländisch fortgesetzt wurde. Die Geschichte mahnt zweitens, vorsichtig in der Schätzung der Lautverschiebungen zu sein. Das hasa des c wie h sprechenden Florentiners verhält sich zu casa nicht, wie das deutsche Hund zum griechischen *κύων*: Galaaditer und Ephraimiten bleiben trotz des Wechsels von ש und ס beide Israeliten.

11

Σίγμα scheint mir zu beweisen, daß ܣܡܟܬ nicht der ursprüngliche Namen des ξ ist: habe ich darin Recht, so ist auch der Satz ܣܡܟ nicht in der ursprünglichen Gestalt erhalten. Auf die Gefahr hin, einem ribaldo irgend eines Condottiere in die Hände zu fallen, will ich bemerken, daß ich die ältere Form des Satzes ܣܡܟ in שְׁכֶם *Σίκιμα* (Uebersicht 57 15) *Schulter* zu erkennen glaube: *σίγμα* = שִׁכְמָה. Ich will weiter bekennen (und behalte mir Näheres vor), daß ich die bei den Griechen übliche Benennung des ξ, nämlich ξει, als Bestätigung meiner eben ausgesprochenen Ansicht ansehe, daß das ס der Moabiter und das ס der Phoenicier von Hause aus zwei verschiedene Buchstaben gewesen sind: von סמך führt kein Weg zu ξει. Ich will drittens bekennen, daß, wenn das sexagesimale Zahlensystem von seiner in Babylonien liegenden Heimath aus (ich bitte Lehmanns Aufsätze nachzulesen) sich weiter verbreitet hat, die Uebereinstimmung von षष् und שֵׁשׁ (σῶσσος) und deren so vielfach wechselnden, durch Volksetymologien entstellten Nebenformen sich daraus erklärt, daß der ursprüngliche Name für 6 und 60 mit dem sexagesimalen Systeme gewandert ist — ἕξ *sex*, die awestischen Formen dieser Zahlen mit ihrem aus drei Consonanten bestehenden Anlaute, usw., wären Lehnworte —: wüßte ich über die älteste Gestalt von ⲥⲟⲟⲩ Bescheid, so würde ich möglicher Weise ξει zu ⲥⲟⲟⲩ stellen. In das System der semitischen Zahlen passt die Vokabel שֵׁשׁ nicht hinein, da אחד, שנים, שלש, ארבע, חמש, שבע, שמנה, תשע, עשׂר, מאה, אלף drei Wurzelconsonanten zeigen, und sicher noch einmal deutbar werden werden: daß sie deuten zu können von höchstem Nutzen für die älteste Geschichte sein würde, bedarf keiner Auseinandersetzung. سادس ist eine künstliche Parallele zu ثالث, so zu sagen ein שָׁדשׁ neben שָׁלשׁ ܬܠܬ: ܫܬ fällt ebenso aus aller Lautverschiebung heraus wie die awestische Form כשואש [= *kšwakš?]

Σαν ist kaum šinn = שֵׁן, in welcher Vokabel der Vokal *i* haftet. *Ξει* = ϣⲉⲓ kann sich zu שין = שִׁין* verhalten wie sich zai (Psalterium Hieronymi xiv 1) zu זין = זַיִן verhält. שָׁן = *σαν* kann der (wegen â nicht hochSemitische) Nominativus Dualis des Genetivus Dualis שִׁין sein, wie דָּתָן, wenn nicht eine falsche Lesart, der Nominativus Dualis zu dem Genetivus Dualis דֹּתַיִן ist. דת zu دواة: Uebersicht 82 1. Es *χσεν* kann für *χσαιν* stehn.

12

Nach den Zeitungen besitzt man in Berlin aramäische Inschriften aus der Zeit des Isaias. Goettingen, die צָרָה Berlins, ist nicht in der Lage, von diesen Inschriften eher etwas zu erfahren als Buxtehude: ich muß mich daher darauf gefaßt machen, daß was ich so eben vorgetragen habe, vielleicht bald beseitigt oder geändert sein werde: ich hoffe auf alle Fälle einige neue Gesichtspunkte angegeben zu haben.

Die Vikrama Aera.

Von

F. Kielhorn.

Die Entdeckungen der letzten Jahre haben gezeigt, daß die von James Fergusson aufgestellte und durch Max Müller berühmt gewordene Hypothese, nach welcher die Vikrama Aera erst im sechsten Jahrhundert, oder genauer, nach dem Jahre 543 n. Chr. von einem Könige Vikramâditya erfunden sein sollte, unhaltbar ist. Mit Recht schrieb Max Müller im Jahre 1883, daß die ganze Theorie Fergussons zusammenbrechen würde, wenn sich ein einziger Stein finden sollte, der (zeitgenössisch) von 543 n. Chr., d. i. vom Vikrama Jahre 600, oder früher datiert wäre. Solche Steine, aus den Vikrama Jahren 529 und 589, um nur die in jeder Hinsicht sichern Daten hier zu erwähnen, haben sich gefunden [1]; und wir wissen jetzt, daß die Vikrama Aera in der That vor 543 n. Chr. im Gebrauche war, daß die Jahre derselben aber als Jahre nach der Zählung der Mâlavas, Jahre der Mâlava Herrscher u. s. w. bezeichnet wurden. Kann die Aera somit nicht erst im sechsten Jahrhundert von einem Könige Vikramâditya gestiftet sein, so tritt von Neuem die Frage an uns heran, wie es zuging, daß sie in späterer Zeit mit einem Könige jenes Namens in Verbindung gebracht wurde. Ich will mit wenigen Worten zu zeigen versuchen, wie ich mir die Lösung dieses Räthsels denke.

Das älteste bekannt gewordene Datum, in dem das Wort *vikrama* erscheint, findet sich auf der Dholpur Steininschrift des

1) Vgl. meine chronologische Liste der Vikrama Daten im *Ind. Antiquary*, Band XX, S. 125.

Chauhân Chaṇḍamahâsena[1]), in der das Jahr 898 durch die eigenthümliche Wendung —

vasu nava [a]shṭau varshâ gatasya *kâlasya vikramâkhyasya*

„898 Jahre der *vikrama-benannten* (verflossenen) *Zeit*" —

bezeichnet wird. Auch sonst ist gerade dieses Datum für uns von ganz besonderem Interesse. Es ist das frühste sichre Datum der sogenannten Vikrama Aera, dessen Correctheit wir beweisen können; und seine Berechnung zeigt, daß das in ihm erwähnte Jahr mit dem Monate Kârttika (October-November), nicht, wie das Śaka Jahr, mit Chaitra (März-April) angefangen haben muß. Anzunehmen, daß der Schreiber des Datums mit dem Worte *vikrama* eine Person bezeichnen wollte, die er sich als Stifter der Aera dachte, liegen zwingende Gründe nicht vor. Die älteste Steininschrift, deren Datum von einem Manne Vikrama spricht, ist die Gwâlior Sâsbahû Tempel Inschrift des Mahîpâla[2]) vom Jahre V. 1150.

Die älteste echte Kupferplatte, deren Datum das Wort *vikrama* enthält, ist die Râdhanpur Urkunde[3]) des Chaulukya Bhîmadeva I., deren Jahr als *vikrama-saṁvat* 1086 „das vikrama Jahr 1086" bezeichnet wird. Ihr folgt die Sûnak Kupferplatte[4]) des Chaulukya Karṇadeva von *vikrama-saṁvat* 1148. Auch bei diesen Daten würde keine Nothwendigkeit vorliegen das Wort *vikrama* auf eine Person zu beziehen; doch darf ich hierauf kein Gewicht legen, weil wir aus dem Datum von Amitagati's Subhâshita-ratna-saṁdoha[5]) wissen, daß die Aera, von der ich spreche, schon in V. 1050 mit einem Fürsten Vikrama in Verbindung gebracht war. Sicher aber ist, daß sich bis jetzt kein Datum vor V. 1050 gefunden hat, das einen König Vikrama erwähnt, und daß das frühste sichre Datum vom Jahre V. 898 zwar die Zeit, zu der es gehört, als die *vikrama-Zeit* bezeichnet, eine Beziehung auf einen persönlichen Vikrama aber nicht enthält.

Fragen wir, wodurch sich das Vikrama Jahr von dem Jahre der viel allgemeiner gebräuchlichen Śaka Aera in besonders auffälliger Weise unterschied, so kann die Antwort nur die sein, daß das Vikrama Jahr mit dem Monate Kârttika (October-November), das Śaka Jahr dagegen mit dem Monate Chaitra (März-

1) Vgl. *Ind. Antiquary*, Band XIX, S. 35, wo ich die Berechnung des Datums gegeben habe.

2) Ib., Band XX, S. 129, No. 58.

3) Ib., S. 128, No. 47.

4) Ib., S. 129, No. 57.

5) Ib., Band XIX, S. 361.

April) anfing. Auf diesen ursprünglichen Unterschied der Jahre der beiden großen Aeren haben schon Andere aufmerksam gemacht, und ich habe oben bemerkt, daß das Jahr des ältesten berechenbaren Vikrama Datums unzweifelhaft ein *Kârttikâdi*, nicht ein *Chaitrâdi* Jahr war. Das Vikrama Jahr fing im Herbst, das Śaka Jahr im Frühling an.

Nun ist der Herbst (*śarad*) die Zeit des Auszugs zum Kriege; er ist in eminentem Grade der *vikrama-kâla*. Das wissen die Dichter ebenso gut wie die Verfasser der Nîti- und Dharma-śâstras. Raghu unternimmt seinen *digvijaya* im Herbste. Der Herbst, geschmückt mit Lotusblumen, naht sich ihm wie eine zweite Râjalakshmî; er lädt ihn ein auszuziehen, noch ehe Raghu selbst einen Entschluß gefaßt hat; im Herbste suchen selbst die Stiere es ihm an *vikrama* gleich zu thun[1]). Wie Kâlidâsa hier, so spricht Bhâravi vom Herbste beim Auszuge Arjunas[2]). Im Herbste zieht Râma aus Râvaṇa zu erschlagen und Sîtâ wiederzugewinnen[3]). Im Gaüḍavaho bricht Yaśovarman am Ende der Regenzeit, im Herbste, auf, sich den ganzen Erdkreis botmäßig zu machen[4]). Im Harshacharita erklärt Bâṇa die graubärtigen Wangen eines greisen Feldherrn dadurch, daß er den Besitzer den mit seinen blühenden Gräsern weißen Herbstanfang (*śarad-ârambha*) wieder von sich geben läßt, den er zur Kriegszeit (*vikrama-kâle*) getrunken hatte[5]).

Vom Herbste (*śarad*), als dem eigentlichen *vikrama-kâla*, zum Jahre (*śarad*) als *vikrama-kâla* ist nur ein kurzer Schritt; und ich glaube, daß die Inder in der That diesen Schritt gethan haben, und daß die spätere Bezeichnung der Mâlava Aera

1) *Raghuvaṁśa* IV, 22.

2) *Kirâtârjunîya* IV.

3) Vgl. *Setubandha* I, 14 und 16; Goldschmidts Uebersetzung: —

„Mühsam gieng dem Dâçarathi dahin die Regenzeit — die Verfinsterung für die Sonne seines Entschlusses, die starke Fessel für den Elefanten seines Zornes, der Käfig für den Löwen seines Sieges."

„Da naht — für den Affenfürsten der Weg des Ruhms, für das Leben des Râghava die erste Stütze, für Sîtâ die Hemmung der Tränen, für den Zehnköpfigen der Tag des Todes — es naht der Herbst."

Vgl. auch I, 34, mit der Erklärung des Scholiasten.

4) *Gaüḍavaho* 192.

5) Die Stelle, welche im 6ten uchchhvâsa (auf S. 156 der schlechten Calcuttaer Ausgabe) steht, ist schon von S. P. Paṇḍit, Gaüḍavaho, Introduction, S. 102 Anm., erwähnt, aber von ihm in ganz andrer Weise erklärt worden. Auch der Text, den er citiert, giebt keinen Sinn. Ich lese: vamann iva vikramakâlapîtam akâlepi vikâsikâśakânanaviśadaṁ śaradârambham.

als der eines Königs Vikrama ihren Ursprung einem Mißverständnisse verdankt. War man gewohnt vom Herbste (*śarad*) als *vikrama-kâla* zu sprechen, so war durch das Wort *śarad* die Beziehung auf das Jahr gegeben; und die Bezeichnung des Jahres als *vikrama-kâla* lag um so näher als man dadurch zunächst gerade das zum Ausdruck brachte was das Mâlava Jahr vom Śaka Jahre unterschied: das Factum nämlich, daß das Mâlava Jahr im *Herbste* anfing. Hatte man sich aber gewöhnt von Jahren als *vikrama-kâla* oder von *vikrama*-Jahren zu reden, so war Nichts natürlicher als daß spätere Geschlechter sich diese Bezeichnung im Sinne ihrer Zeit zu deuten suchten und so die Stiftung der Aera einem Könige Vikrama zuschrieben, der die Jahre, wie ihre eignen Könige, von seinem Regierungsantritte[1]) gezählt hatte.

1) Was die Śaka Aera betrifft, so möchte ich hier bemerken, daß ich in den Worten *Śaka-nṛipati-râjyâbhisheka-saṁvatsareshu* der Bâdâmî Inschrift des Maṅgalîśvara in keiner Weise mit meinem Freunde Fleet eine Spur einer alten Tradition über den Anfang der Śaka Aera entdecken kann. Mir sagen die betreffenden Worte nur, — was uns aus der Haidarâbâd Urkunde des Pulikeśin II. bekannt ist —, daß es *zur Zeit des Schreibers* üblich war die Jahre vom *râjyâbhisheka* eines Königs zu zählen.

Die Nîtimañjarî des Dyâ Dviveda.

Von

F. Kielhorn.

Als ich vor funfzehn Jahren im 5ten Bande des *Indian Antiquary* einen kurzen Aufsatz über die Nîtimañjarî des Dyâ Dviveda veröffentlichte, glaubte ich nicht, daß ich mich nochmal mit diesem Werke, dem nur die im Commentare enthaltenen Citate einigen Werth verleihen, befassen würde. Der Grund, weshalb ich es jetzt dennoch thue, ist folgender. In dem erwähnten Aufsatze hatte ich behauptet, daß Dyâ Dviveda aus Sâyaṇas Commentar zum Ṛigveda abgeschrieben hätte und deshalb natürlich später als Sâyaṇa, also nach der Mitte des 14ten Jahrhunderts gelebt haben müsse. Seitdem hat Professor Peterson auf S. 8 seines *Second Report of operations in search of Sanskrit MSS.* über eine in der Bibliothek des Mahârâja von Alwar befindliche HS. der Nîtimañjarî berichtet, in der das Vikrama Jahr 1110 = 1053 n. Chr. als das Jahr bezeichnet sein soll, in dem Dyâ Dviveda sein Werk vollendete. Obgleich diese Mittheilung meines Erachtens auf einem Irrthum beruht, halte ich es doch für richtig, meinen Fachgenossen ein Specimen von Dyâ Dvivedas Commentare vorzulegen, aus dem sie selbst ersehen mögen, ob Sâyaṇa von Dyâ oder Dyâ von Sâyaṇa abgeschrieben hat. Was ich mittheile, ist nicht gerade sehr schön, wird aber einen Begriff von Dyâ Dvivedas Geschmacke geben.

Was das erwähnte Datum betrifft, so kann ich nur sagen, daß die von Professor Peterson auf S. 103 citierten Worte des Originals — *binduśivaikena mite saṁvaty ambudhivatsare* —, die 1110 bedeuten sollen, mir unverständlich sind. Es ist wahr, *bindu* bedeutet 0, *śiva* mag, wie *îśvara*, *śaṁkara*, 11 bedeuten, und *eka* ist 1; aber daß etwas mit diesem Datum nicht in Ordnung ist, zeigen die Worte *ambudhivatsare*, die, wenn *binduśivaika* 1110 bedeuten, keinen Sinn geben. Und ich möchte hinzufügen, daß ich das Wort *saṁvat*, decliniert, bis jetzt nur in ganz modernen Daten gefunden habe. Daß aber Dyâ Dviveda lange nach 1053 n. Chr. gelebt hat, folgt schon daraus, daß er Shaḍguruśishyas Commentar zur Sarvânukramaṇî citiert, für dessen Abfassungszeit der Verfasser selbst uns den Tag des Kaliyuga 1565132, d. i. den 24ten März 1184 n. Chr., oder, mit andern Worten, den Tag der Meshasaṁkrânti, mit dem Kaliyuga 4285 = Śaka 1106 endete, gegeben hat.

Die folgenden zwei Verse samt ihrer Erklärung sind dem zweiten Capitel der Nîtimañjarî entnommen.

Aprâptayauvanayâ saha saṅgo na kârya ita âha |
  Sahâromakayâ saṅgo na kartavyo naraiḥ striyâ |
  Bhâvayavyo bhajaj jñâtvâ Romaśâṁ prâptaromakâm ||
Aromakayâprâptalomnyâ striyâ saha saṅgo narair na kartavyaḥ | Bhâvayavyadṛishṭântena draḍhayati | yathâ Bhâvayavyo râjâ Romaśâṁ striyaṁ prâptaromakâṁ jâtalomnîṁ jñâtvâbhajat bheje ||
Âkhyânapûrvike ṛichau[1]) |
  Ágadhitâ párigadhitâ yấ kaśîkéva jáṅgahe |
  dádâti máhyaṁ yấdurî yấśûnâm bhojyầ śatấ ||
  úpopa me párâ mṛiśa mấ me dabhrấṇi manyathâḥ |
  sárvâhám asmi romaśấ gandhấrîṇâm ivâvikấ ||
Bhâvayavya-Romaśayor dampatyoḥ saṁvâda ity anukramaṇî ||
Tathâ Bṛihaddevatâ[2]) |
  Pañchâmandân Bhâvayavyasya gîtâ
    jâyâpatyor dve ṛichau saṁpravâdaḥ |

1) Ṛigveda I, 126, 6 und 7.
2) Vgl. Bṛihaddevatâ III, 155—IV, 3.

prâdâch cha tâṁ Romaśâṁ nâma sâmnâ
Bṛihaspatir Bhâvayavyâya râjñe ||
Tatas tat sarvaṁ Harivân viditvâ
priyaṁ sakhâyaṁ Svanayaṁ didṛikshuḥ |
abhyâjagâmâtha Śachîsametaḥ
pratyarchitas tad vidhinâ cha râjñâ ||
Abhyâjagâmâṅgirasî cha tatra
dṛishṭvâ tayoḥ sâ charaṇau vavande |
Indraḥ sakhitvâd atha tâm uvâcha
româṇi te santi [na santi][1]) râjñi ||
Sâ bâlabhâvâd atha saṁjagâda
româṇi me Śakra parâmṛiśeti |

Sambhogâya prârthito Bhâvayavyaḥ svabhâryâṁ[2]) Romaśâm aprauḍhâṁ matvâ parihasann anushṭubhâha || Ayam arthaḥ | bhojyâ bhogayogyaishâgadhitâ â samantâd gṛihîtâ svîkṛitâ[3]) | tathâ parigadhitâ parito gadhitâ | âdarârthaṁ punarvachanam | gadhyaṁ gṛihṇâter iti Yâskaḥ | yadvâ âgadhitâ â samantâd bhâvena miśrayantî | ântaraṁ prajananena[4]) bâhyaṁ bhujâdibhir ity arthaḥ | gadhyatir miśrîbhâvakarmeti Yâskaḥ | pûrvapakshe purushasya prâdhânyam uttarapakshe yoshita iti bhedaḥ | kîdṛiśî sâ | yâ[5]) jaṅgahe atyarthaṁ gṛihṇâti kadâpi na muñchati | atyâge dṛishṭântaḥ kaśîkeva | kaśîkâ nâma sûtavatsâ[6]) nakulî sâ yathâ patyâ saha chirakâlaṁ krîḍati kadâpi na muñchati tathaishâpi | kiṁchaishâ bhojyâ[7]) yâdurî | yâdur ity udakam | retolakshaṇam udakam râti[8]) âdadâti | bahuretoyuktety arthaḥ | tâdṛiśî satî yâśûnâṁ saṁbhogânâm | yâśur iti prajanananâma | tatsaṁbandhîni karmâṇi yâśûni bhogâḥ | teshâṁ śatâ śatâni mahyaṁ dadâtîti parihasantaṁ svabhartâraṁ praty âha | upopa ma iti | bhoḥ pate me mâm | dvitîyârthe chaturthî | upôpa upetyopetya parâmṛiśa samyak spṛiśa | bhogayogyâm avagachchhety arthaḥ | me mamâṅgâni dabhrâṇi alparomâṇi | dabhram arbhakam alpasyeti Yâskaḥ | mâ manyathâ mâ budhyasva | adabhratvaṁ viśadayati | ahaṁ sarvâ romaśâ bahuromayuktâsmi | yatoham îdṛiśy ataḥ saṁpûrṇâvayavâsmi | romaśatve dṛishṭânto gandhârîṇâm avikeva | Gandhârâ deśâs teshâṁ saṁbandhiny avijâtir iva | taddeśasthâ avayo meshâ

1) Die Worte in Klammern fehlen.
2) MS. svabhâvaṁ.
3) MS. tsvîkṛitâ; vielleicht matsvîkṛitâ.
4) MS. prajanena.
5) MS. om.
6) MS. sûtavatsâ yâ nakulî sâ kadâpi na muñchati yathâ.
7) MS. bhogyâ.
8) MS. udakaṁ eti.

yathâ romaśâs tathâham asmi | yadvâ yathâ gandhârîṇâṁ garbhadhâriṇînâṁ strîṇâm avikâtyantaṁ tarpayantî yonir iva | tâsâṁ âprasavaṁ româdikartanasya śâstre nishiddhatvâd yonî romaśâ bhavati | yatoham îdṛiśy ato mâm apraudhâṁ mâ budhyasveti || Sâmagṛihye[1]) | nâjâtalomnyopahâsam ichchhed iti || Tathâ Karmapradîpe |

ajâtavyañjanâlomnî na tayâ saha saṁviśed iti ||

Agnir ârâdhya ity artha âha |

Dhîmadbhir agnir ârâdhyo yaṁ vinâ na sukhî bhavet |
mukto Dîrghatamâḥ śâpâd agninâ hi Bṛihaspateḥ ||

Dhîmadbhir buddhimadbhir viprair agnir ârâdhyo yam agniṁ vinâ na sukhî bhavet | brâhmaṇasyâgneḥ sukhaṁ bhavatîty arthaḥ | hi yasmâd Dîrghatamâ ṛishir Bṛihaspateḥ śâpâd agninâ mochitaḥ[2]) || Taddarśanâyetihâsaḥ[3]) | Uchathya-Bṛihaspatinâmânau dvâv ṛishî âstâm | tatrochathyasya Mamatâ nâma bhâryâ sâ cha garbhiṇî tâṁ Bṛihaspatir gṛihîtvâramayat | śukranirgamanâvasare prâpte garbhasthaṁ retaḥ prâvâdît | he mune reto mâ tyâkshîḥ pûrvam ahaṁ saṁvasâmi retaḥsaṁkaraṁ mâ kârshîr iti | evam ukto Bṛihaspatir balât pratiruddharetaskaḥ sañ śaśâpa | he garbha tvaṁ yato retorodham akaror atas tvaṁ dîrghaṁ tamaḥ prâpnuhi jâtyandho bhaveti | evaṁ śâpato Dîrghatamâ ajâyata[4]) | sa utpannas tamovyayâyâgnim astaushît | sa cha stutyâ prîta ândhyaṁ paryaharad iti || Tathânukramaṇîbhâshye[5]) |

Itihâso hetubhûto vispashṭâya pravarṇyate ||
Prajâpateḥ putra âsîd Aṅgirâ nâma vai muniḥ |
tasya putrâs trayas tv âsaṁs tretâgnisamatejasaḥ ||
Uchathyo jyeshṭha ity eva madhyamas tu Bṛihaspatiḥ |
Saṁvartas tu kanishṭhotha jyeshṭho guṇagaṇair vibhuḥ ||
Uchathyabhâryâ Mamatâ nâmnâsîd varavarṇinî[6]) |
Uchathyâhitagarbhâṁ tâṁ chakametha Bṛihaspatiḥ ||
Uchathyaputro Mamatâgarbhasthovochad uttaram |
jyeshṭhapatnîṁ mâtṛikalpâṁ mainâṁ[7]) gantuṁ manaḥ kṛithâḥ ||
amogharetâs tvaṁ châsi na dvayor iha saṁbhavaḥ |
iti garbhavachaḥ śrutvâ śaśâpainaṁ Bṛihaspatiḥ ||
dîrghaṁ tamas tvaṁ [praviśa ma][8])dvâkyâd andha eva vâ |
tato Dîrghatamâ nâma Uchathyatanayobhavat ||

1) Vgl. Gobhilîyagṛihyasûtra III, 5, 3.
2) MS. hat hier noch agneḥ sukhî bhavety arthaḥ.
3) Vgl. Sâyaṇa zu Ṛigveda I, 147, 3.
4) MS. ajâyateti.
5) Vgl. Shaḍguruśishyas Vedârthadîpikâ, Macdonell's Ausgabe, S. 127.
6) MS. vaṁśavarṇinî.
7) MS. nainâṁ gantu mano kṛithâḥ.
8) Die Sylben in Klammern fehlen im MS.

Tathâ Bṛihaddevatâ[1]) |

Dvâ Uchathya-Bṛihaspatî ṛishiputrau babhûvatuḥ |
âsîd Uchathyabhâryâ tu Mamatâ nâma Bhârgavî ||
tâṁ yavîyân[2]) Bṛihaspatir maithunâyopachakrame |
s'ukrasyotsargakâle tu garbhas tam pratishedhati ||
ihâsmin[3]) pûrvasaṁbhûto na kâryaḥ s'ukrasaṁkaraḥ |
taṁ s'ukrapratighâtaṁ tu Bṛihaspatir amarshayat[4]) ||
sa vyâjahâra garbhaṁ taṁ tamas[5]) te dîrgham astv iti |
sa cha Dîrghatamâ nâma babhûvarshir Uchathyajaḥ ||
sa jâtobhyâtapad[6]) devân akasmâd andhatâṁ gataḥ |
dadau devaḥ stuto[7]) netre tatonandho babhûva saḥ || iti ||

Asminn artha ṛik[8]) |

Yé pâyávo mâmateyáṁ te agne pás'yanto andháṁ duritá'd árakshan |
raráksha tá'n sukṛíto vis'vávedâ dípsanta íd ripávo ná'ha debhuḥ ||

Dîrghatamâs trishṭubhâgniṁ tushṭâva | . . . . he agne te tava saṁbandhino ye pâyavaḥ prasiddhâḥ pâlayitâro ras'mayo mâmateyaṁ Mamatâyâḥ putram Dîrghatamasam andhaṁ pas'yanto[9]) rakshaṇîyosmâbhir ity avagachchhanto duritâd duḥkhâd ândhyâd[10]) arakshaṁs tân ras'mîn sukṛitaḥ sukhakartṛîn vis'vavedâ vis'vaprajñognî raraksha rakshati | asmatpâlanâyeti bhâvaḥ | tair asmân rakshatîty arthaḥ | evaṁ rakshitân asmân dipsanto dambhitum ichchhanto ripavaḥ kâmâdayo nâha debhuḥ | na khalu dambhituṁ s'aknuvanti || tân | âhuḥ sakârodayayos takâram[11]) iti nakârasya pakshe takârâgamaḥ || Evaṁ dhîmadbhir agnir ârâdhya iti siddham | uktaṁ cha |

Ekâham api karmastho yogniṁ s'us'rûshaṇaḥ s'uchiḥ |
nayaty atra tad evâsya s'atâhaṁ divi jâyate || iti ||

---

1) Vgl. Bṛihaddevatâ IV, 11—15.
2) MS. tâm abravîd Bṛihaspatir.
3) Lies ihâsmi.
4) Lies amarshayan (?), und vgl. die Ausgabe.
5) MS. tatas.
6) Lies abhyâpatad (?).
7) MS. stutaṁ.
8) Ṛigveda I, 147, 3.
9) MS. pas'yantaḥ îkshaṇîyo.
10) MS. ândhyatvâd.
11) Ṛikprâtis'âkhya IV, 6.

Eine denkwürdige Sitzung der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften.

Von

Eberhard Nestle.

Vorgelegt von Paul de Lagarde[1]).

Eine denkwürdige Sitzung der K. Gesellschaft der Wissenschaften war und bleibt diejenige, in welcher G. F. Grotefend seine praevia de cuneatis, quas vocant, inscriptionibus Persepolitanis legendis et explicandis relatio der Gesellschaft vorlegte und die Entzifferung der ganzen Keilschrift-Litteratur begründete. Da einer der Hauptassyriologen Deutschlands neuerdings zweimal das Datum jener Sitzung falsch angegeben hat — Friedrich Delitzsch 1889 in seiner *Assyrischen Grammatik* (S. 4) und nach 2 Jahren aufs neue in seiner »*Geschichte Babyloniens und Assyriens*« (Zweite Auflage des gleichnamigen Werks von F. Mürdter, Calw und Stuttgart 1891 S. 8), beidemal als 14. Sept. 1802 —, so sei gestattet, hier festzustellen, daß die andern Recht haben, welche als Tag jener Sitzung den 4. Sept. des genannten Jahrs verzeichnen. S. den 2. Band der Anzeigen von 1802, Stück 149 vom 18. Sept. Zu dem, was Fr. Hommel in seiner »*Geschichte Babyloniens und Assyriens*« S. 65 ff. aus der angeführten Nummer ausgezogen hat, möge weiter hier bemerkt werden, daß der Bericht über Grotefend's relatio nicht bloß »*wahrscheinlich* Prof. Tychsen zum Verf. hatte«, sondern sicher von demselben herrührt. Die Tübinger Universitätsbibliothek besitzt von den Anzeigen das Exemplar, das einst dem trefflichen Jerem. Reuß gehörte, dem Schwiegersohn ihres damaligen Herausgebers Heyne, in welchem Reuß durch lange Jahrgänge hindurch allen Anzeigen die Namen ihrer Verf. beigeschrieben hat, so dem hier genannten den Tychsens. Bestätigt wird dies durch die seither von Wüstenfeld veranstaltete Zusammenstellung: Die Mitarbeiter an den Göttingischen Gelehrten Anzeigen in den Jahren 1801—1830, (Beilage zu den Nachrichten von 1887 S. 80).

Einen weiteren Irrthum über jene »epochemachende Abhandlung Grotefend's« verbreitet Kaulen noch in der *vierten* Auflage

1) [*Vergleiche IohFlemming in den von FDelitzsch und PHaupt herausgegebenen Beiträgen zur Assyriologie 1 86.*]

seines Werks »Assyrien und Babylonien (1891)«, wenn er S. 118 sagt, daß erst nach 13 Jahren Heeren »*dieselbe* als Beilage zur dritten Auflage seiner bekannten Ideen über die Geschichte der alten Völker« veröffentlicht habe. Was das genannte Werk I, 1 563—603 von Grotefend enthält, ist nicht jene grundlegende praevia relatio selber. Endlich nennt keiner den Namen »des ersten Gehilfen und Freundes«, der ihn zu seinem Entzifferungsversuch überhaupt angeregt, ihm in den ersten 8—14 Tagen treulich beistand und die »für einen einzelnen Menschen ohnehin allzumühselige Arbeit sehr erleichtern half«, den des damaligen Bibliotheksekretärs, nachherigen mag. leg. Fiorillo (s. Grotefend bei Heeren, l. c. und noch »Tributverzeichnisse« 1852 S. 3. 89); und keiner erwähnt, was jene Sitzung doppelt denkwürdig erscheinen läßt, daß in derselben gleichzeitig über den *Stein von Rosette* die ersten genaueren Mitteilungen in Deutschland gemacht wurden. Heyne berichtete damals über das von London gekommene Faksimile des griechischen Teils der Inschrift »*welche vielleicht der Schlüssel werden kann, die heilige und die gemeine ägyptische Schrift, wo nicht zu enträthseln, doch etwas näheres davon zu errathen*« (s. Stück 148 der Anzeigen vom 16. Sept. 1802). So damals, und heute! Wären wir so weit, als wir sind, wenn jene Alten nicht vielfach etwas pünktlicher gewesen wären, als viele Neueren? denen man immer wieder das Wort Bengels zurufen muß, das Westcott-Hort nicht umsonst an den Schluß ihres Neuen Testaments gesetzt haben: »eorum qui praecessere neque defectum exagitabimus neque ad eum nos adstringemus; eorum qui sequentur profectum neque postulabimus in praesenti neque praecludemus in posterum: quaelibet aetas pro sua facultate veritatem investigare et amplecti fidelitatemque *in minimis* et maximis praestare debet.

Tübingen, 13. Mai 1891.

Ueber die geometrische Bedeutung der Formeln der sphärischen Trigonometrie im Falle complexer Argumente.

Von

Fr. Schilling.

(Vorgelegt von F. Klein).

Die Formeln der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie lassen sich bekanntlich ansehen als Relationen zwischen den 3 Kantenwinkeln λ, μ, ν und den 3 Seitenwinkeln l, m, n eines räumlichen Dreikants, dessen Scheitel im Kugelmittelpunkt liegt, und dessen Kanten die Schnittgeraden der 3 Seitenebenen des vorliegenden sphärischen Dreiecks sind. Von diesem Umstande ausgehend kann man die Frage stellen:

„Lassen die Formeln der sphärischen Trigonometrie nicht auch eine einfache geometrische Deutung zu, wenn man in denselben den Größen λ, μ, ν; l, m, n nicht mehr reelle, sondern komplexe Werte beilegt?"

Ich habe in Beantwortung dieser Frage folgendes gefunden:

Man setze zunächst:

$$\lambda = \lambda' + i\lambda'', \qquad l = l' + il'',$$

$$\mu = \mu' + i\mu'', \qquad m = m' + im'',$$

$$\nu = \nu' + i\nu''; \qquad n = n' + in''.$$

Man betrachte alsdann das Gebilde dreier beliebig im Raume gelegenen, gegen einander windschiefen Geraden I, II, III, welche die Kugel in reellen Punkten schneiden, und konstruiere die drei inneren kürzesten Abstände, welche im Sinne der nicht-Euklidischen Geometrie oder (um jedes Streifen metaphysischer Fragen zu vermeiden) im Sinne der auf die Kugel zu gründenden projektiven Maßgeometrie zwischen je zweien der Geraden I, II, III stattfinden. Es sei hierbei allgemein der Abstand zweier Punkte wie der Winkel zweier Ebenen definirt als $\frac{i}{2} \cdot \log DV$, wo DV das Doppelverhältnis bedeutet, welches die beiden Punkte resp. Ebenen mit den reellen oder imaginären Elementen ihres Trägers bilden, die der Fundamentalfläche angehören, [d.h. mit den Schnittpunkten der Verbindungslinie der beiden Punkte mit der Kugel resp. den Tangentialebenen durch die Schnittgerade der beiden Ebenen an die Kugel]. Man bezeichne dann den Winkel der jedesmaligen beiden Ebenen, welche durch je eine der Geraden I, II, III und die zu ihr gehörigen kürzesten Abstände sich legen lassen, bez. mit λ', μ', ν', dagegen die durch die kürzesten Abstände auf den Geraden I, II, III abgeschnittenen Längen mit $i\lambda''$, $i\mu''$, $i\nu''$. Entsprechend setze man den Winkel der beiden Ebenen, die sich durch je einen der kürzesten Abstände und die zugehörigen beiden Geraden legen lassen, gleich l', m', n', die Länge der kürzesten Abstände selbst gleich il'', im'', in'', wo sich l' und il'' z. B. auf den kürzesten Abstand der Geraden II, III beziehen sollen.

Das Resultat meiner Betrachtung war dann das folgende:

„Setzt man die so definirten Größen in der oben angegebenen Weise zu den 6 Größen λ, μ, ν; l, m, n zusammen, so bestehen zwischen den letzteren grade die Formeln, wie sie die Relationen der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie darstellen.“

Es ist nicht schwer, die hiermit angedeuteten allgemeinen Betrachtungen für den Fall, daß die drei Geraden I, II, III sich innerhalb oder außerhalb der Kugel in einem Punkte schneiden oder in einer Ebene liegen, zu spezialisieren.

Ich möchte diesen Angaben jedoch noch die folgende Bemerkung hinzufügen:

Die angegebene Erweiterung der Bedeutung der sphärischen Formeln hängt auf's engste zusammen mit folgender Beziehung:

Wenn man im Falle, daß die drei Geraden I, II, III sich im Mittelpunkte der Kugel schneiden, um dieselben nach einander Drehungen des Gesammtraumes (im nicht-Euklidischen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, im gewöhnlichen Euklidischen Sinne) ausführt entspr. um die doppelten Winkel des zugehörigen sphärischen Dreiecks, so geht der Raum bekanntlich in sich selbst über. (Vgl. Hamilton, Lectures on Quaternions 1853, Art. 280 und 346). Dem entspricht nun bei unseren windschiefen Geraden I, II, III der folgende Satz:

„Führt man um die Geraden I, II, III als Schraubenaxen nach einander drei nicht-Euklidische Schraubenbewegungen aus, deren Drehwinkel und Verschiebungsgröße beziehungsweise gegeben sind durch

$$2(\lambda'+i\lambda''),\quad 2(\mu'+i\mu''),\quad 2(\nu'+i\nu''),$$

so kommt der Raum gleichfalls in seine ursprüngliche Lage zurück.“

Der Beweis dieses letzten Satzes ist besonders einfach mit Benutzung des Hülfssatzes zu führen, daß jede Schraubenbewegung sich durch die Aufeinanderfolge zweier Rotationen von der Periode 2 ersetzen läßt.

Inhalt von Nr. 5.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

12. August. № 6. 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 6. Juni.

Zur Moleculartheorie der piëzoëlectrischen und pyroëlectrischen Erscheinungen.

Von

Eduard Riecke.

Als ich begann, mich mit den pyroëlektrischen Erscheinungen des Turmalins in ausführlicherer Weise zu beschäftigen, war meine Absicht später in entsprechender Weise die piëzoëlektrischen Erscheinungen desselben zu untersuchen und der Bearbeitung des Turmalins eine möglichst umfassende quantitative Erforschung der beim Quarz beobachteten Erscheinungen folgen zu lassen. Es war im Wesentlichen ein molekulartheoretisches Interesse, welches sich für mich an jene Studien knüpfte. Die längst bekannten Erscheinungen des Turmalins schienen zu der Auffassung zu drängen, daß den Molekeln desselben eine elektrische Polarität in der Richtung der Hauptaxe von Hause aus zukomme, eine Auffassung, welche zuerst von William Thomson ausgesprochen worden ist. Die Gesetze, welche auf Grund dieser Vorstellung für die pyroëlektrischen Erscheinungen des Turmalins sich ergeben, habe ich durch eine große Zahl von Beobachtungen bestätigt. Es lag nun die Vermuthung nahe, daß auch die elektrischen Erscheinungen anderer Crystalle durch die Annahme einer elektrischen Polarität ihrer Molekeln zu erklären sein würden; was die Vertheilung der Pole anbelangt, so war es natürlich, anzunehmen, daß dieselbe mit den Symmetrieverhältnissen des betreffenden Crystalls in Uebereinstimmung sich befinde; so habe ich gelegentlich [1]) die Vermuthung ausgesprochen, daß die Molekeln des Quarzes in einer zu der Axe desselben senkrechten Ebene von einem Systeme von Polen umgeben sein könnten, welche abwechselnd positiv und negativ die Ecken eines regulären Sechseckes bildeten. Zu einer weiteren Verfolgung dieser Vorstellung, zur Aufstellung irgend einer bestimmten Hypothese, wie aus derselben die bei elastischen oder thermischen Deformationen des Quarzes auftretenden elektrischen Wirkungen zu entwickeln sein würden, war ich noch nicht gelangt. Ich glaubte aber eine weitere Stütze für dieselbe in dem elastischen Verhalten der Crystalle finden zu dürfen. Mein verehrter Freund Voigt hat gezeigt, daß man die allgemeine Form des elastischen Potentiales, wie sie den Crystallen zukommt, auf Grund molekulartheoretischer Anschauungen gewinnen kann, sobald man den Molekeln eine polare Wechselwirkung zuschreibt. Auf der anderen Seite schienen mir die Beobachtungen von Voigt zu zeigen, daß diejenigen Crystalle, welche kräftige elektrische Wirkungen äußern, auch in ihrem elastischen Verhalten eine starke polare Wirkung der Molekeln erkennen lassen, und daran knüpfte ich die Vermuthung, daß die elastischen Eigenschaften der Crystalle gleichfalls auf einer elektrischen Polarität der Molekeln beruhen möchten [2]). Inzwischen hat die Lehre von den piëzoëlektrischen und pyroëlektrischen Erscheinungen einen ungemeinen Fortschritt gemacht durch die von Voigt aufgestellte allgemeine Theorie. Als das wesentliche Fundament derselben erscheint der Gedanke, daß bei Crystallen durch elastische oder thermische Deformationen elektrische Momente erzeugt werden können, deren Componenten lineare Functionen der Dilatationen sind. Indem Voigt diese letzteren den durch die Symmetrieverhältnisse der einzelnen Crystallgruppen gegebenen Bedingungen unterwarf, gelang es ihm, den Zusammenhang der elektrischen Erscheinungen für sämmtliche Crystallformen in übersichtlicher Weise zu entwickeln. Die von ihm aufgestellten Formeln sind von uns beiden bei Turmalin und Quarz einer experimentellen Prüfung unterworfen worden, durch welche ihre Rich-

1) Chem. Ber. 1888. S. 950.
2) Nachr. v. d. K. G. d. W. zu Göttingen. 1887. S. 151.

tigkeit erwiesen sein dürfte. Das Bedürfniß der experimentellen Physik ist hiernach durch die von Voigt gegebene Theorie vollständig befriedigt; alle Crystalle, welche kein Centrum der Symmetrie besitzen, erscheinen der elektrischen Erregung fähig; bei allen lassen sich die Erscheinungen, welche bei irgend einer gegebenen Vertheilung des Druckes oder der Temperatur eintreten müssen, zum Voraus berechnen, wenn gewisse piëzo- oder pyro-ëlektrische Constanten bestimmt sind, deren Anzahl von den Symmetrieeigenschaften des Crystalls abhängig ist. Immerhin ist es aber nicht ohne Interesse, die Frage weiter zu verfolgen, wie es möglich ist, daß eine einfache elastische oder thermische Verschiebung der Molekeln zur Entstehung von elektrischen Momenten, also zu elektrischen Verschiebungen Veranlassung giebt. Mit Bezug hierauf ist es von Wichtigkeit, daß die früher mit Bezug auf die elektrische Natur des Turmalins aufgestellte Anschauung ihrem wesentlichen Inhalte nach durch die allgemeinere Theorie von Voigt gleichfalls gefordert wird. Nach derselben existiert zwar für den Turmalin eine bestimmte Reihe zusammengehöriger, durch eine lineare Relation verbundener Werthe der Temperatur und des allseitig gleichen Druckes, bei welchen das elektrische Moment in der Richtung der Hauptaxe verschwindet; bei allen anderen Temperaturen und Drucken ist aber ein permanentes Moment in der Richtung der Axe vorhanden, welches durch eine entgegengesetzt elektrische Oberflächenschicht in seinen Fernwirkungen kompensiert sein muß. Die Existenz eines solchen permanenten Momentes wird aber kaum anders zu deuten sein, als durch die frühere Annahme einer elektrischen Polarisation der Molekeln in der Richtung der Axe. Was nun die Crystalle anbelangt, welchen wie dem Quarz ein permanentes elektrisches Moment nicht zukommen kann, so muß man doch jedenfalls annehmen, daß in denselben in Folge einer Deformation elektromotorische Kräfte enstehen, welche in den einzelnen Volumelementen elektrische Momente inducieren. Diese elektromotorischen Kräfte müssen ihre Existenz irgend einer Vertheilung elektrischer Massen verdanken und es liegt nun wiederum nahe, anzunehmen, daß diese elektrischen Massen nicht erst durch die Deformation ezeugt werden, sondern daß sie schon vorher vorhanden sind und nur in ihrer Wirkung modificiert werden, so daß inducierende Kräfte entstehen, welche den beobachteten elektrischen Ladungen entsprechen.

Somit gelangen wir zu der folgenden Vorstellung. Die Molekeln der Crystalle sind umgeben von Systemen elektrischer Pole, welche in ihrer Anordnung dieselben

Symmetrieeigenschaften besitzen wie die Crystalle selbst. Sofern die hierdurch gegebene Vertheilung elektrischer Massen an und für sich ein elektrisches Moment besitzt, sind ihre Fernwirkungen durch eine dem Crystall äußerlich aufliegende entgegengesetzt elektrische Schichte kompensiert. Wird der Zustand des Druckes und der Temperatur, unter welchen sich der Crystall befand, irgendwie geändert, so werden die Mittelpunkte der Molekeln bestimmte, gegenseitige Verschiebungen erleiden; es werden außerdem die Molekeln um ihre Mittelpunkte gedreht und es werden endlich auch die mit ihnen verbundenen Polsysteme Veränderungen erleiden können. Von dieser letzteren Möglichkeit werden wir im Folgenden absehen und uns beschränken auf die Untersuchung der Wirkung, welche von den beiden ersten Veränderungen herrührt. Es ergiebt sich, daß in Folge derselben auf die Mittelpunkte der Molekeln elektromotorische Kräfte ausgeübt werden, welche von den gegebenen Dilatationen abhängig und für alle Molekeln dieselben sind. Wir zerlegen diese Kräfte in Componenten nach den Axen eines Coordinatensystems, dessen Lage den Symmetrieverhältnissen des Crystalls entspricht; wir machen die Annahme, daß in den Molekeln des Crystalls elektrische Momente erzeugt werden, welche gleich den Componenten der inducierenden Kraft multipliciert mit gewissen dem Crystall eigenthümlichen Constanten sind. Man erhält auf diese Weise Formeln, durch welche die in der Richtung der Coordinatenaxen inducierten Momente mit Hilfe der gegebenen Dilatationen dargestellt werden und es ergiebt sich, daß diese Formeln identisch sind mit den Grundformeln der Voigt'schen Theorie. Es ist damit gezeigt, daß die von mir vorgeschlagene Molekulartheorie zu demselben Resultate führt, wie der allgemeine Ansatz der Voigt'schen Theorie in Verbindung mit den Symmetrieeigenschaften der Crystalle.

Wir beschränken uns im Folgenden auf die Betrachtung der Gestalten des quadratischen, hexagonalen und regulären Systems. In den beiden ersteren Fällen wählen wir die z-Axe so, daß sie mit der krystallographischen Hauptaxe zusammenfällt. Es sei A der Mittelpunkt einer Crystallmolekel, B der Mittelpunkt einer zweiten, deren Coordinaten mit Bezug auf ein System, dessen Mittelpunkt in A liegt, durch x_1, y_1, z_1 bezeichnet werden mögen. Die von der Molekel B auf den Punkt A ausgeübte elektrische Kraft habe die Componenten X_1, Y_1, Z_1; die Verschiebung der Molekel B mit Bezug auf A sei gegeben durch die Formeln:

$$u = a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1, \quad v = a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1$$
$$w = a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1$$

wo $a_{ik} = a_{ki}$ sein soll.

Im Falle des quadratischen und hexagonalen Systems tritt zu der Verschiebung der Molekeln eine Drehung um die Axen x und y, welche zufolge der von Voigt entwickelten Elasticitätstheorie gegeben ist durch $l = c a_{23}$, $m = -c a_{13}$, wo c eine durch die elastischen Verhältnisse bestimmte Constante ist. Bezeichnen wir durch Ξ, H, Z die Componenten der in Folge der Verschiebung, durch Ξ', H', Z' die Componenten der in Folge der Drehung neu entstehenden elektrischen Kräfte, so wird:

$$\begin{aligned}\Xi = a_{11}\sum\frac{\partial X_1}{\partial x_1}x_1 + a_{22}\sum\frac{\partial X_1}{\partial y_1}y_1 + a_{33}\sum\frac{\partial X_1}{\partial z_1}z_1 \\ + a_{23}\left(\sum\frac{\partial X_1}{\partial y_1}z_1 + \sum\frac{\partial X_1}{\partial z_1}y_1\right) + a_{31}\left(\sum\frac{\partial X_1}{\partial z_1}x_1 + \frac{\partial X_1}{\partial x_1}z_1\right) \\ + a_{12}\left(\sum\frac{\partial X_1}{\partial x_1}y_1 + \sum\frac{\partial X_1}{\partial y_1}x_1\right).\end{aligned}$$

Entsprechende Formeln gelten für H und Z. Ferner ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\Xi' &= -l\sum\left\{\frac{\partial X_1}{\partial y_1}z_1 - \frac{\partial X_1}{\partial z_1}y_1\right\} + m\sum\left\{\frac{\partial X_1}{\partial x_1}z_1 - \frac{\partial X_1}{\partial z_1}x_1 + Z_1\right\} \\ H' &= -l\sum\left\{\frac{\partial Y_1}{\partial y_1}z_1 - \frac{\partial Y_1}{\partial z_1}y_1 + Z_1\right\} + m\sum\left\{\frac{\partial Y_1}{\partial x_1}z_1 - \frac{\partial Y_1}{\partial z_1}x_1\right\} \\ Z' &= -l\sum\left\{\frac{\partial Z_1}{\partial y_1}z_1 - \frac{\partial Z_1}{\partial z_1}y_1 - Y_1\right\} + m\sum\left\{\frac{\partial Z_1}{\partial x_1}z_1 - \frac{\partial Z_1}{\partial z_1}x_1 - X_1\right\}.\end{aligned}$$

Wir wenden uns nun zu der Betrachtung gewisser specieller Systeme elektrischen Pole.

1. Einaxiges Polsystem.

Die Molekeln des Crystalls seien verbunden mit je zwei entgegengesetzten elektrischen Polen; die sie verbindende Axe habe bei allen dieselbe Richtung und sei parallel der z-Axe des Coordinatensystems; das von den Mittelpunkten der Molekeln gebildete Punktsystem, welches quadratischen oder hexagonalen Typus besitzen kann, sei symmetrisch mit Bezug auf die Coordinatenebenen. Verstehen wir unter x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Mittelpunktes für irgend eine Molekel, so ist das von derselben auf einen Punkt x, y, z ausgeübte Potential

$$V = \Gamma\frac{z - z_1}{r^3}$$

Der Mittelpunkt des Coordinatensystems falle zusammen mit dem Mittelpunkt einer Molekel, für diese ergiebt sich dann:

$$\Xi = 3\Gamma\left(\sum\frac{x_1^2+z_1^2}{r^5}-10\frac{x_1^2 z_1^2}{r^7}\right)a_{13},\quad H = 3\Gamma\left(\sum\frac{y_1^2+z_1^2}{r^5}-10\frac{y_1^2 z_1^2}{r^7}\right)a_{23}$$

$$Z = 3\Gamma\left(\sum\frac{x_1^2}{r^5}-5\frac{x_1^2 z_1^2}{r^7}\right)a_{11}+3\Gamma\left(\sum\frac{y_1^2}{r^5}-5\frac{y_1^2 z_1^2}{r^7}\right)a_{22}+3\Gamma\left(\sum 3\frac{z_1^2}{r^4}-5\frac{z_1^4}{r^7}\right)a_{33}$$

$$\Xi' = -\Gamma\left(\sum\frac{1}{r^3}+3\frac{x_1^2-2z_1^2}{r^5}\right)m,\quad H' = \Gamma\left(\sum\frac{1}{r^3}+3\frac{y_1^2-2z_1^2}{r^5}\right)l$$

$$Z' = 0.$$

Sowohl für das quadratische, als für das hexagonale System ist

$$\sum\frac{x_1^2}{r^k} = \sum\frac{y_1^2}{r^k},$$

somit ergeben sich für die inducierten elektrischen Momente die Formeln:

$$(1)\qquad a = 2p\,a_{13},\qquad b = 2p\,a_{23},\qquad c = q(a_{11}+a_{22})+r a_{33}.$$

Dieselben entsprechen den hemimorph-hemiëdrischen Gruppen des quadratischen und des hexagonalen Systems.

2. Trigonales Polsystem.

Durch den Mittelpunkt einer Molekel legen wir eine Ebene senkrecht zu der z-Axe des Coordinatensystems. In dieser zeichnen wir ein mit der Molekel koncentrisches gleichseitiges Dreieck, dessen Ecken mit positiven elektrischen Polen besetzt werden. Die Ecken eines zweiten gleichseitigen Dreiecks, welche mit den Ecken des ersten ein regelmäßiges Sechseck bilden, werden mit negativen Polen von gleicher Stärke besetzt. Die Mittelpunkte der Molekeln bilden ein regelmäßiges Punktsystem, dessen Projektion auf die xy-Ebene durch ein Netz von gleichseitigen Dreiecken gebildet wird. Die x-Axe sei parallel der einen Seite der Dreiecke, die y-Axe parallel der entsprechenden Höhe. Als erste Hauptlage der Polsysteme bezeichnen wir diejenige, bei welcher der von dem Mittelpunkt der Molekel nach einem positiven Pole gezogene Radius Vektor mit der x-Axe des Coordinatensystems parallel ist, als zweite Hauptlage die, bei welcher jener Radius Vektor der y-Axe parallel ist.

A. Erste Hauptlage.

Sind x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Mittelpunktes der Molekel, so ist ihr Potential auf einen Punkt mit den Coordinaten x, y, z gegeben durch die Kugelfunktion

$$V = A\frac{(x-x_1)^3 - 3(x-x_1)(y-y_1)^2}{r^7}.$$

Mit Rücksicht auf die Symmetrieeigenschaften eines hexagonalen Punktsystems ergiebt sich:

$$\Xi = A\left(\sum -6\frac{x_1^2}{r^7} + 28\frac{x_1^4}{r^9} + 63\frac{x_1^4 y_1^2 - 3x_1^2 y_1^4}{r^{11}}\right)(a_{11}-a_{22})$$

$$H = 2A\left(\sum 6\frac{x_1^2}{r^7} - 28\frac{x_1^4}{r^9} - 63\frac{x_1^4 y_1^2 - 3x_1^2 y_1^4}{r^{11}}\right)a_{12}$$

$$Z = 0 \text{ und ebenso } \Xi' = H' = Z' = 0.$$

Hieraus folgen dann für die inducierten elektrischen Momente die Formeln der sphenoidisch-hemiëdrischen Gruppe des hexagonalen Systems.

$$a = s(a_{11}-a_{22}), \qquad b = -2s\,a_{12}, \qquad c = 0. \tag{2A}$$

Zweite Hauptlage.

Es ergeben sich ebenso die Formeln

$$a = -2s'a_{12}, \qquad b = -\,s'(a_{11}-a_{22}), \qquad c = 0. \tag{2B}$$

Die Superposition der beiden Hauptlagen des trigonalen Polsystems führt zu den Formeln der sphenoidisch-tetardoëdrischen Gruppe des hexagonalen Systems

$$\begin{aligned} a &= s(a_{11}-a_{22}) - 2s'a_{12} \\ b &= -s'(a_{11}-a_{22}) - 2s\,a_{12} \\ c &= 0. \end{aligned} \tag{2A, 2B}$$

Combiniert man das trigonale Polsystem in der zweiten Hauptlage mit dem einaxigen Polsystem, so ergiebt sich durch Addition der Formeln 1 und 2B

$$\begin{gathered} a = 2p\,a_{13} - 2s'a_{12}, \qquad b = 2p\,a_{23} - s'(a_{11}-a_{22}) \\ c = q(a_{11}+a_{22}) + r\,a_{33}. \end{gathered} \tag{1, 2B}$$

Es sind dies die Formeln der zweiten hemimorph-tetartoëdrischen Gruppe des hexagonalen Systems, (Turmalin).

3. Dihexagonales Polsystem.

Durch den Mittelpunkt einer Molekel legen wir eine Axe parallel zu der z-Axe des Coordinatensystems; auf ihr nehmen wir in gleichem Abstand von dem Mittelpunkt zu beiden Seiten desselben zwei Punkte und legen durch sie Ebenen senkrecht zu der z-Axe. In der oberen zeichnen wir ein regelmäßiges Zwölfeck, dessen aufeinander folgende Ecken mit 1, 2, 3 . . . bezeichnet werden mögen. In der zweiten Ebene zeichnen wir ein mit dem ersten kongruentes Zwölfeck, dessen Ecken 13, 14, 15 . . . 24 senkrecht unter den Ecken 1, 2, 3 . . . 12 liegen. Die Ecken des Sechseckes 1, 3, 5, 7, 9, 11 besetzen wir mit positiven Polen, die Ecken des Sechseckes 2, 4, 6, 8, 10, 12 mit negativen Polen von gleicher Stärke. Umgekehrt die Ecken 13, 15, 17, 19, 21, 23, mit negativen, die Ecken 14, 16, 18, 20, 22, 24 mit positiven Polen; das ganze Polsystem sei so orientiert, daß die durch seine Hauptaxe und die Pole 1 und 13 hindurchgehende Ebene mit der zx-Ebene den Winkel $\pi/_{12}$ einschließt. Sind wieder $x_1 y_1 z_1$ die Coordinaten des Mittelpunktes der Molekel, so ist das Potential auf einen Punkt x, y, z gegeben durch die Kugelfunktion:

$$V = B\frac{\{3(x-x_1)^5(y-y_1)-10(x-x_1)^3(y-y_1)^3+3(x-x_1)(y-y_1)^5\}(z-z_1)}{r^{15}}.$$

Ferner ergiebt sich mit Benützung der Symmetrieeigenschaften des hexagonalen Punktsystems:

$$\Xi = -24B\left\{\sum\frac{x_1^4y_1^2-x_1^2y_1^4}{r^{15}}\left(1-15\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}a_{23}$$

$$H = 24B\left\{\sum\frac{x_1^4y_1^2-x_1^2y_1^4}{r^{15}}\left(1-15\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}a_{13}$$

$$\Xi' = -24Bc\left\{\sum\frac{x_1^4y_1^2-x_1^2y_1^4}{r^{15}}\left(1-15\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}a_{23}$$

$$H' = 24Bc\left\{\sum\frac{x_1^4y_1^2-x_1^2y_1^4}{r^{15}}\left(1-15\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}a_{13}.$$

Die inducierten elektrischen Momente werden dargestellt durch die Formeln:

$$(3) \qquad a = 2t\,a_{23}, \qquad b = -2t\,a_{13}, \qquad c = 0.$$

Es sind das die Gleichungen, welche der trapezoëdrisch-hemiëdrischen Gruppe des hexagonalen Systems entsprechen.

Combinieren wir das einaxige Polsystem mit dem dihexagonalen, so ergeben sich die entsprechenden Momente durch Addition der Gleichungen 1 und 3; es wird also:

$$a = 2p\,a_{13} + 2t\,a_{23}, \qquad b = 2p\,a_{23} - 2t\,a_{13}$$
$$c = q\,(a_{11} + a_{22}) + r a_{33}. \qquad (1,\ 3)$$

Formeln der ersten hemimorph tetartoëdrischen Gruppe des hexagonalen Systems.

Verbindet man das trigonale Polsystem in der ersten Hauptlage mit dem dihexagonalen, so ergiebt sich das Gleichungssystem der trapezoëdrisch tetartoëdrischen Gruppe des Hexagonalsystems

$$a = s(a_{11} - a_{22}) + 2t\,a_{23}, \qquad b = -2s\,a_{12} - 2t\,a_{13}, \qquad c = 0. \qquad (2\mathrm{A},\ 3)$$

Combiniert man endlich das einaxige Polsystem mit dem trigonalen in seinen beiden Hauptlagen und mit dem dihexagonalen, so gelangt man zu den Formeln der ogdoëdrischen Gruppe

$$\begin{aligned} a &= 2p\,a_{13} + s(a_{11} - a_{22}) - 2s' a_{12} + 2t a_{23} \\ b &= 2p a_{23} - s'(a_{11} - a_{22}) - 2s\,a_{12} - 2t\,a_{13} \qquad (1,\ 2\mathrm{A},\ 2\mathrm{B},\ 3) \\ c &= q\,(a_{11} + a_{22}) + r a_{33}, \end{aligned}$$

womit sämmtliche Formen des hexagonalen Systems, bei welchen piëzoëlektrische oder pyroëlektrische Erregung überhaupt möglich ist, erschöpft sind.

4. Tetraëdrisches Polsystem.

Vier positive Pole liegen in den Ecken eines Tetraëders, vier negative von gleicher Stärke in den Ecken eines zweiten Tetraëders, durch welches das erste zum Würfel ergänzt wird.

A. Erste Hauptlage.

Die z-Axe des Coordinatensystems steht senkrecht auf einer Würfelfläche, die Ebenen zx und zy sind parallel den Würfelseiten. Das Potential wird:

$$V = \varDelta \frac{(x - x_1)(y - y_1)(z - z_1)}{r^7}.$$

Ferner ergiebt sich:

$$\Xi = \varDelta \left\{ \sum 6 \frac{x_1^2 + z_1^2}{r^7} - 7 \frac{x_1^4 + z_1^4}{r^9} - 63 \frac{x_1^2 y_1^2 z_1^2}{r^{11}} \right\} a_{23}$$

$$H = \varDelta \left\{ \sum 6 \frac{x_1^2 + z_1^2}{r^7} - 7 \frac{x_1^4 + z_1^4}{r^9} - 63 \frac{x_1^2 y_1^2 z_1^2}{r^{11}} \right\} a_{13}$$

$$Z = \varDelta \left\{ \sum 6 \frac{x_1^2 + y_1^2}{r^7} - 7 \frac{x_1^4 + y_1^4}{r^9} - 63 \frac{x_1^2 y_1^2 z_1^2}{r^{11}} \right\} a_{12}$$

$$\Xi' = \varDelta \left\{ \sum 6 \frac{x_1^2 - z_1^2}{r^7} - 7 \frac{x_1^4 - z_1^4}{r^9} \right\} l, \quad H' = -\varDelta \left\{ \sum 6 \frac{x_1^2 - z_1^2}{r^7} - 7 \frac{x_1^4 - z_1^4}{r^9} \right\} m$$

$$Z' = 0$$

und dem entsprechend

$$(4A) \qquad a = k a_{23}, \qquad b = k a_{31}, \qquad c = k' a_{12}.$$

Diese Formeln gehören zu der sphenoidisch-hemiëdrischen Gruppe des quadratischen Systems. Ist das Punktsystem ein reguläres, so wird die z-Axe mit x und y gleichberechtigt und wir erhalten die Formeln des regulären Systems

$$(4A)' \qquad a = k a_{23}, \qquad b = k a_{13}, \qquad c = k a_{12}.$$

B. Zweite Hauptlage.

Die zx- und die zy-Ebene gehen durch die Kanten des Würfels hindurch, während die Stellung der z-Axe unverändert bleibt. Das Potential wird

$$V = \tfrac{1}{2}\Delta \frac{\{(x-x_1)^2-(y-y_1)^2\}(z-z_1)}{r^7}$$

Ferner ergiebt sich:

$$\Xi = -\Delta\left\{\sum \frac{x_1^2+z_1^2}{r^7} - 21\frac{x_1^2 z_1^2}{r^9} - \frac{7}{2}\frac{x_1^4-x_1^2y_1^2}{r^9}\left(1-18\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}a_{31}$$

$$H = \Delta\left\{\sum \frac{x_1^2+z_1^2}{r^7} - 21\frac{x_1^2 z_1^2}{r^9} - \frac{7}{2}\frac{x_1^4-x_1^2y_1^2}{r^9}\left(1-18\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}a_{32}$$

$$Z = -\Delta\left\{\sum \frac{x_1^2}{r^7}\left(1-7\frac{z_1^2}{r^2}\right) - \frac{7}{2}\frac{x_1^4-x_1^2y_1^2}{r^9}\left(1-9\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}(a_{11}-a_{22})$$

$$\Xi' = \Delta\left\{\sum \frac{x_1^2-z_1^2}{r^7} + 7\frac{x_1^2 z_1^2}{r^9} - \frac{7}{2}\frac{x_1^4-x_1^2y_1^2}{r^9}\right\}m$$

$$H' = \Delta\left\{\sum \frac{x_1^2-z_1^2}{r^7} + 7\frac{x_1^2 z_1^2}{r^9} - \frac{7}{2}\frac{x_1^4-x_1^2y_1^2}{r^9}\right\}l$$

$$Z' = 0,$$

und hieraus

$$(4B) \qquad a = u a_{13}, \qquad b = -u a_{23}, \qquad c = v(a_{11}-a_{22}).$$

Combinieren wir die beiden Hauptstellungen des tetraëdrischen Polsystems, so resultieren die Formeln der sphenoidisch tetartoëdrischen Gruppe des quadratischen Systems

$$(4A,\ 4B) \qquad \begin{gathered} a = k a_{23} + u a_{13}, \qquad b = k a_{13} - u a_{23}, \\ c = k' a_{12} + v(a_{11}-a_{22}). \end{gathered}$$

5. Ditetragonales Polsystem.

Zwei regelmäßige Achtecke stehen zu einander und zu der z-Axe des Coordinatensystems in derselben Beziehung wie die Zwölf-ecke des dihexagonalen Systems; sie werden in derselben Weise wie jene mit elektrischen Polen besetzt. Bezeichnen wir eine positive Ecke des oberen Achteckes mit 1, die darunter liegende negative Ecke des unteren Achteckes mit 9, so soll die Ebene, welche durch die Hauptaxe des Polsystems und die Punkte 1 und 9 hindurchgeht mit der zx-Ebene den Winkel $\pi/8$ einschließen. Das Potential wird:

$$V = \Theta_i \frac{\{(x-x_1)^3(y-y_1)-(x-x_1)(y-y_1)^3\}(z-z_1)}{r^{11}}.$$

Ferner ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
\Xi &= -\Theta\left\{\sum \frac{3x_1^2 y_1^2 - x_1^4}{r^{11}}\left(1-11\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\} a_{23} \\
H &= \quad \Theta\left\{\sum \frac{3x_1^2 y_1^2 - x_1^4}{r^{11}}\left(1-11\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\} a_{13} \\
\Xi' &= -\Theta\left\{\sum \frac{3x_1^2 y_1^2 - x_1^4}{r^{11}}\left(1-11\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\} l \\
H' &= -\Theta\left\{\sum \frac{3x_1^2 y_1^2 - x_1^4}{r^{11}}\left(1-11\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\} m \\
Z &= Z' = 0
\end{aligned}$$

und somit

$$a = 2w\,a_{23}, \quad b = -2w\,a_{13}, \quad c = 0 \tag{5}$$

die Formeln der trapezoëdrisch-hemiëdrischen Gruppe des quadratischen Systems.

Combiniert man diese Formeln mit denjenigen, welche dem einaxigen Polsystem entsprechen, so ergiebt sich:

$$\begin{gathered}
a = 2p\,a_{13} + 2w\,a_{23}, \qquad b = 2p\,a_{23} - 2w\,a_{13}, \\
c = q\,(a_{11}+a_{22}) + r\,a_{33}.
\end{gathered} \tag{1, 5}$$

Es sind dieß die Formeln der hemimorph-tetardoëdrischen Gruppe des quadratischen Systems und damit sind auch alle der elektrischen Erregung fähigen Gruppen dieses Systems erschöpft.

Alle auf die elektrische Erregung der Crystalle des regulären, des hexagonalen und des quadratischen Systems bezüglichen Formeln können hiernach durch die Combination von nur 5 verschiedenartigen elektrischen Polsystemen erhalten werden. Es ist zu übersehen, daß auf demselben Wege auch die Gleichungen für die noch übrigen 5 hemimorphen oder hemiëdrischen Formen, welche dem rhombischen, monoklinen und triklinen System angehören, zu gewinnen sind.

Ueber die Maximaltension, mit welcher Wasserstoff aus Lösungen durch Metalle in Freiheit gesetzt wird.

Mit 1 Figur.

Von

G. Tammann und **W. Nernst.**

(Aus dem physikalischen Institut zu Göttingen.)

(Vorgelegt von Eduard Riecke.)

A. Theoretischer Theil.

Bringt man ein Metall mit einer wässerigen Lösung in Berührung, so geschieht es häufig, daß jenes in Lösung geht und die elektrisch äquivalente Wasserstoffmenge in Freiheit setzt.

Diese Reaktion ist mit einer beträchtlichen Volumvermehrung verbunden; nach den bekannten Gesetzen über den Einfluß des Druckes auf die Reaktionsfähigkeit der Stoffe wird es möglich sein, durch Anwendung genügend großen Druckes die Reaktion in der Richtung vor sich gehen zu lassen, welche mit einer Volumverminderung verbunden ist, und es muß also im Allgemeinen zu erzielen sein, durch mit genügend hohem Druck in wässerige Lösungen gepreßten Wasserstoff die in Lösung befindlichen Metalle auszufällen.

Denjenigen Partialdruck des Wasserstoffs, bei welchem dieses Gas mit der Lösung und dem Metalle im Gleichgewicht sich befindet, wollen wir als die »Maximalspannung« des in Freiheit gesetzten Wasserstoffs bezeichnen; die Analogie dieser Druckgröße mit einer Dampf- oder Dissociationsspannung springt in die Augen.

Dieser Druck ist gleichzeitig das Maaß der Arbeit, welche in maximo bei der Auflösung der Metalle in Säuren gewonnen werden kann; da bekanntlich die elektromotorische Kraft der sogenannten umkehrbaren galvanischen Elemente ein Maaß für die gleiche Energiegröße ist, so erkennen wir bereits, daß jener Druck mit der elektromotorischen Wirksamkeit auf das innigste verknüpft sein muß, wie es auch die nähere Betrachtung alsbald ergeben wird.

Bei der Maximalspannung des Wasserstoffs ist die Reaktion vollkommen reversibel; die Aenderung jener mit der Temperatur muß also mit der Wärmetönung und der Volumänderung der Reaktion in der analogen Beziehung stehen, wie sie für die Verdampfung durch die bekannte Clausius'sche Formel

$$\varrho = -T\frac{dp}{dT}(v-v') \tag{1}$$

gegeben ist; nur bedeutet in unserem Falle ϱ die Wärmemenge, welche bei der Auflösung von z. B. 1 g-Aequivalent Zink in einer beliebigen Säurelösung entwickelt wird, v das der Maximalspannung p entsprechende Volum von 1 g Wasserstoff und v' die Volumabnahme, welche das aus Metall und Lösung bestehende System durch die Abgabe des Wasserstoffs erfährt. In den meisten Fällen wird man v' gegen v vernachlässigen dürfen.

Betrachten wir ein reversibeles galvanisches Element, z. B. das Daniell'sche nach den Typus

$$Zn \mid Zn\,SO_4\text{-}Lsg \mid Cu\,SO_4\text{-}Lsg \mid Cu$$

zusammengesetzte. Es betrage die Maximaltension des Wasserstoffes für das System Zink-Zinkvitriollösung p_1, für das System Kupfer-Kupfervitriollösung p_2. Dann können wir die maximale Arbeit, welche bei der Auflösung des Zinkes und Ausfällung der äquivalenten Menge Kupfer gewonnen werden kann, einmal aus der elektromotorischen Kraft des Elementes, sodann aus dem Unterschiede der beiden Maximaltensionen erhalten. Wir können also aus den Maximaltensionen der Metalle gegenüber den betreffenden Lösungen die elektromotorische Kraft des aus ihnen kombinirten Elementes berechnen.

Die Arbeit, welche bei der Entwickelung von 2 g Wasserstoff und der Ueberführung des entwickelten Gases unter Normaldruck P gewonnen werden kann, beträgt

$$A = pv + RTln\frac{p}{P},$$

worin p die Maximalspannung und R die Gaskonstante bedeutet; zählen wir das Volum in Litern und den Druck in Atmosphären, so ist für eine g-Molekel eines Gases bekanntlich

$$pv = RT = 0{,}0819\,T$$

und nach Einführung der Gasgleichung wird

$$A = 0{\cdot}0819\, T\left(1 + ln\,\frac{p}{P}\right)$$

Die Arbeit, welche im Daniellelemente bei Auflösung einer g-Molekel Zink und Ausfällung einer g-Molekel Kupfer gewonnen werden kann, beträgt also

$$A_1 - A_2 = 0{\cdot}0819\, T\, ln\,\frac{p_1}{p_2}.$$

Diese Arbeit ist gleich der elekromotorischen Kraft E; es wird also

$$E = 0{\cdot}0819\, T ln\,\frac{p_1}{p_2} \tag{2}$$

oder nach Einführung des üblichen Maaßsystems [1])

$$E = 0{\cdot}430\, T \times 10^{-4}\, ln\,\frac{p_1}{p_2}\ \text{Volt.}$$

Durch die vorstehende Gleichung ist zum ersten Male für die elektromotorische Kraft der umkehrbaren, aus zwei verschiedenen Metallen kombinierten galvanischen Elemente ein Ausdruck ermittelt worden, welcher dieselbe aus anderweitigen, der Messung direkt zugänglichen Größen im absoluten Maaße zu berechnen gestattet; doch sei daran erinnert, daß obige Gleichung nur unter der Voraussetzung gültig ist, daß auch bei dem der Maximaltension entsprechenden Wasserstoffdrucke der Austausch der Elektricität zwischen Metallen und Lösung nur durch die Ionen der betreffenden Metalle und nicht etwa gleichzeitig durch die in der Lösung befindlichen Wasserstoffionen oder durch den in den Metallen gelösten Wasserstoff vermittelt wird. Inwieweit und bei welchen Metallen diese Voraussetzung erfüllt ist, bedarf erst näherer Untersuchung. Ist die Maximaltension des Wasserstoffs zu groß, als daß letzterer noch den Gasgesetzen gehorcht, so läßt sich leicht ein strengerer Ausdruck ableiten.

Formel (1) schreibt sich bei Vernachlässigung von v'

$$\varrho = -0{\cdot}0819\, T^2\,\frac{d\, lnp}{dT}. \tag{3}$$

Die Wärmetönung im Elemente entspricht der Differenz der Auflösungswärme des Zinks und des Kupfers:

---

1) Vgl. z. B. Zeitschr. f. physik. Chem. 4 138 und 176 (1889).

$$W = \varrho_1 - \varrho_2 = -0{\cdot}0819\,T^2 \frac{d\,ln\frac{p_1}{p_2}}{d\,T}. \tag{4}$$

Differenzieren wir Gl (2), so wird

$$\frac{dE}{dT} = 0{\cdot}0819\,ln\,\frac{p_1}{p_2} + 0{\cdot}0819\,T\,\frac{d\,ln\,\frac{p_1}{p_2}}{d\,T}$$

oder in (4) eingeführt:

$$W - E = -T\frac{dE}{dT}.$$

Dies ist aber die bekannte Gleichung, welche v. Helmholtz direkt durch Anwendung der thermodynamischen Principien auf die umkehrbaren galvanischen Elemente gefunden hat, und zu der wir soeben auf einem zwar etwas umständlicheren aber dafür vielleicht in mancher Hinsicht anschaulicheren Wege gelangt sind.

Was den Mechanismus der von uns behandelten Reaktion betrifft, so lassen sich vom Standpunkte der neueren Lösungstheorie und in weiterer Fortführung der Anschauungen, welche einer von uns[1]) über den Vorgang der Auflösung von Metallen entwickelt hat, darüber folgende Bemerkungen machen. Das mit der Lösung in Berührung befindliche Metall sucht vermöge einer als »elektrolytischen Lösungstension« bezeichneten Expansivskraft seine positiv geladenen Ionen in die Lösung hineinzubefördern; der Vorgang kann zum Stillstand gebracht werden entweder durch die mit dem Uebertritt der metallischen Ionen in die Lösung hervorgerufenen elektrostatischen Ladungen, indem nämlich sich die Flüssigkeit positiv, das Metall negativ electrisch ladet und so durch die elektrostatische Wirkung der entstandenen Doppelschicht der Lösungstension das Gleichgewicht gehalten wird, oder aber durch den osmotischen Partialdruck der in Lösung befindlichen Ionen des betreffenden Metalls, welcher ebenfalls der Lösungstension entgegenwirkt. Im allgemeinen werden natürlich beide Wirkungen sich superponieren.

Die elektrolytische Lösungstension kann nun aber auch einen solchen Betrag erreichen, daß eine derartige Kompensation ausgeschlossen ist; es kann vorkommen, daß an Stelle der positiven Ionen, die aus dem Metalle austreten, anderweitige gleichartige Ionen aus der Lösung heraus gedrängt werden und sich auf dem Metalle niederschlagen. Dies geschieht bei der Verdrängung

1) **Nernst**, diese Zeitschr. 4 150 (1889).

eines Metalles durch ein anderes (z. B. des Kupfers durch Eisen) aus der Lösung und bei der Entwickelung von Wasserstoff, in welchem Falle für die metallischen Ionen, die in Lösung gehen, die äquivalente Menge Wasserstoffionen im Metalle sich lösen; daß die Löslichkeit des Wasserstoffs in Metallen eine allgemeine Erscheinung ist, haben ja u. A. die Untersuchungen von Thoma[1]) gelehrt. Aus seiner Lösung im Metalle vermag der Wasserstoff dann unelektrisch zu entweichen, sobald seine Tension hinreichend groß geworden ist. Freiwillige Wasserstoffentwickelung kann hiernach nur in dem Falle stattfinden, daß der Druck des Wasserstoffs über seiner »festen« Lösung im Metall größer wird als der einer Atmosphäre. Auch diese spezielleren Anschauungen führen zu den oben für die Maximaltension des entweichenden Wasserstoffs entwickelten Beziehungen, und sie lassen auch unmittelbar erkennen, daß obige Maximaltension ein Maaß der elektromotorischen Wirksamkeit des betreffenden Metalles sein muß. Auf die Folgerungen, welche sich hieraus für die galvanische Polarisation ergeben, kann hier nicht näher eingegangen werden.

B. Experimenteller Theil.

Das chemische Gleichgewicht, welches den Gegenstand unserer Untersuchung bildet, läßt sich von zwei Seiten her erreichen, indem man entweder in eine Metallsalzlösung Wasserstoff bis zu solchem Drucke einpreßt, daß das Metall ausfällt, oder aber indem man den Druck bestimmt, bei welchen die Wasserstoffentwickelung des aus Lösung und festem Metall gebildeten Systemes aufhört.

Von älteren diesbezüglichen Versuchen seien vor allen Dingen diejenigen N. N. Beketoffs[2]) erwähnt. Beketoff suchte den Druck zu bestimmen, unter dem der in die Lösung des Metallsalzes gepreßte Wasserstoff das Metall aus der Lösung zu fallen beginnt. Er zeigte, daß Wasserstoff beim Drucke einer Atmosphäre aus einer Lösung von Silberacetat metallisches Silber abscheidet, daß bei höheren Drucken bis zu 10 Atmosphären verdünnte Lösungen von Merkuronitrat, Silbernitrat, Silbersulfat und ammoniakalische Silberchloridlösung gefällt werden, ferner daß Kupfer- und Bleinitratlösung von Wasserstoff unter Drucken bis zu 10 Atmosphären nicht gefällt werden, daß aber die Fällung eintritt, wenn in die Lösungen ein Platindraht taucht. Betreffs der besonnenen und äußerst sorg-

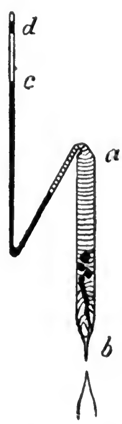
1) Zeitschr. f. physik. Chemie. **3** 69 (1889).

2) N. N. Beketoff, Compt. rend. 48, p. 442, 1859, und Untersuchungen über die Erscheinungen der gegenseitigen Ausscheidung der Elemente aus ihren Verbindungen. Dissertation, Charkow 1865.

fältigen Versuchstechnik Beketoffs muß auf seine Abhandlung verwiesen werden. C. Brunner[1]) fand, daß eine verdünnte Lösung von Silbernitrat von Platinchlorid und Palladiumchlorid schon beim Durchleiten von Wasserstoff das Metall abscheidet.

Cailletet[2]) brachte gewogene Zinkplatten in eine Lösung von Schwefelsäure und ließ die Wasserstoffentwickelung unter bestimmten Drucken vor sich gehen. Wie zu erwarten, fand Cailletet die Geschwindigkeit der Auflösung beim Wachsen des Wasserstoffdruckes stark abnehmend; schließlich hört bei einem gewissen Druck, für den aber die Zusammensetzung der Lösung leider nicht bestimmt wurde, die Wasserstoffentwickelung gänzlich auf. Ferner zeigte Cailletet, daß Natriumamalgam aus seinen Salzlösungen bei hohen Drucken nicht mehr Wasserstoff entwickelt; bricht man aber das Rohr, in dem sich alles im Gleichgewicht befand, auf, so tritt wiederum lebhafte Gasentwickelung ein.

Da es von vorneherein aussichtslos erschien, den Druck, bei welchem die Fällung des Metalls beginnt, auch nur annähernd zu bestimmen, so waren wir auf die Messung des Druckes, bei welchem die Wasserstoffentwickelung aufhört, angewiesen. Der Apparat, dessen wir uns bei unsern Versuchen bedienten, bestand aus einer starkwandigen Glasröhre *ab* (cf. Fig.) von etwa 1 cm innerer Weite und etwa 20 cm Länge, an welche ein geschlossenes von einer Kapillare gebildetes Luftmanometer angesetzt war. Die Füllung geschah in folgender Weise. Nachdem das Manometer mit trockner Luft erfüllt und mit Quecksilber beschickt war, wurde in dem in umgekehrter Stellung befindlichen Apparat durch *b* das zu untersuchende Metall, eine zum Bedecken desselben erforderliche Menge Chloroform, ein Glasstäbchen und schließlich die Lösung eingeführt; da das Metall vor dem Angriff seitens der Säure durch das Chloroform geschützt war, konnte keine Wasserstoffentwickelung stattfinden und das Abschmelzen bei *b* unter möglichster Vermeidung eines schädlichen Luftvolumens erfolgen. Drehte man den Apparat hingegen um, so fiel das schwerere Chloroform nach unten, während das Metall durch das Glasstäbchen oberhalb des Chloroforms und innerhalb der Lösung getragen wurde; es entwickelte sich Wasserstoff mit immer steigendem Drucke, der an dem Luftmanometer abgelesen wurde. Die



1) C. Brunner, Pogg. Ann. 122, p. 153, 1864.

2) Cailletet, Compt. rend. 68, p. 395, 1869.

Genauigkeit der Ablesung wurde übrigens sehr dadurch vergrößert, daß das zu messende Luftvolum *cd* beiderseits von Quecksilberfäden abgeschlossen war (cf. Figur), deren Differenz sich leicht bis auf 0·1 mm messen ließ, und so eine Berücksichtigung der Verjüngung des Lumens am oberen Ende der Kapillare vermieden war. Die Länge des abgeschlossenen Luftvolumens betrug bei Barometerdruck meistens gegen 40 cm.

Bei Beginn der Reaktion war die Wasserstoffentwickelung gewöhnlich sehr stürmisch, ließ aber bald nach und schien den Angaben des Manometers zufolge nach einigen Tagen, bisweilen auch Wochen, ihr Ende erreicht zu haben. Die Schnelligkeit, mit welcher das Gleichgewicht erreicht wurde, hing natürlich im höchsten Maaße von der Größe des bei *a* befindlichen Luftbläschens ab. Häufiges Umrühren der Lösung, welches durch wiederholtes Umkehren des Apparats und das Hin- und Hergleiten des darin befindlichen Metalles erzielt wurde, war unbedingt erforderlich.

Die Apparate befanden sich sämmtlich in einem großen Wasserbade, welches im ungeheizten Zimmer aufgestellt war und dessen Temperatur nur wenig um 4^0 variierte.

Die Messung des Druckes ließ sich mit mehr als hinreichender Genauigkeit ausführen; schwieriger war die Ermittelung der Endkonzentration der Lösung, welche von der ursprünglichen häufig merklich verschieden war. An eine Analyse der Lösung am Ende des Versuches war nicht zu denken, weil dieselbe beim Oeffnen des Apparats sich in Gestalt feiner Tröpfchen zerstäubte, und mußte daher die entwickelte Wasserstoffmenge geschätzt und so die Abnahme des Säuretiters und die entstandene Salzmenge berechnet werden.

Der entwickelte Wasserstoff befindet sich zum Theil gelöst, zum Theil in Luftbläschen bei *a*, dessen Größe im Vergleich zum Gesamtvolum der Lösung nur durch Schätzung sich ermitteln ließ. Der Absorptionskoefficient des Wasserstoffs beträgt bei 4^0 0·0208 [1]); die beim Druck P Atmosphären in Lösung befindliche Menge von Wasserstoff entspricht also einer Abnahme des Säuretiters der Lösung um

$$P\frac{0{\cdot}0208}{11{\cdot}2}\ \text{Aequivalente pro Liter}$$

weil 1 g H (= 1 Aequivalent) bei 0^0 im Raume = 1 Liter befindlich unter dem Drucke von 11·2 Atmosphären steht.

---

1) Timofeiew, Zeitschr. f. physik. Chemie. 6 147 (1890).

Bezeichnet ferner n den Bruchtheil, welchen das Volum des Luftbläschens vom Gesamtvolum der Lösung ausmacht, so sind

$$\frac{P}{11 \cdot 3 n} \text{ Aequivalente pro Liter}$$

Säure zur Erzeugung des der Lösung entzogenen Wasserstoffs verbraucht worden, weil bei der Versuchstemperatur von 4^0 1 g H im Raume = 1 Liter befindlich unter dem Drucke von 11·3 Atmosphären steht. Insgesamt beträgt also die Abnahme des Säuretiters

$$P\left(0 \cdot 00186 + \frac{1}{11 \cdot 3 n}\right)$$

und die äquivalente Menge Metall ist natürlich in das Salz der Säure übergegangen.

Im Folgenden sind die Drucke P angeführt, welche sich bei den einzelnen Metallen und den betreffenden Endkonzentrationen C, ausgedrückt in g-Aequivalenten pro Liter, ergeben haben und ihrer Konstanz zufolge als Maximaltensionen anzusehen waren. Häufig wandten wir die Metalle platiniert an, wodurch bekanntlich die Geschwindigkeit der Wasserstoffentwickelung sehr beschleunigt wird; daß Gegenwart von Platin den Absolutwerth der Maximalspannung ändern sollte, ist wohl von vornherein im höchsten Maaße unwahrscheinlich und gaben unsere Versuche auch keinen Anhalt zu dieser Annahme.

Zink. Dasselbe kam in auf der Drehbank aus Stücken reinen Metalls gedrehten Spiralen zur Verwendung.

1) $C = 0 \cdot 13\, H_2SO_4 + 1 \cdot 3\ ZnSO_4$; $P = 18$ Atm.
2) $C = 0 \cdot 11\, H_2SO_4 + 1 \cdot 2\ ZnSO_4$; $P = 23 \cdot 5$ Atm.
3) $C = 0 \cdot 29\, H_2SO_4 + 1 \cdot 7\ ZnSO_4$; $P = 25 \cdot 6$ Atm.
4) $C = 0 \cdot 20\, H_2SO_4 + 0 \cdot 36\ ZnSO_4$; $P = 57$ Atm.
5) $C = 0 \cdot 35\, H_2SO_4 + 1 \cdot 15\ ZnSO_4$; $P = 29$ Atm.
6) $C = 0 \cdot 34\, H_2SO_4 + 1 \cdot 16\ ZnSO_4$; $P = 40 \cdot 2$ Atm.

Apparate, die mit reiner normaler Schwefelsäure oder mit 1.5fach normaler Schwefelsäure und doppeltnormaler Zinkvitriollösung beschickt waren, explodierten bei Drucken von 70 bis 80 Atmosphären. Wenn die Zahlen untereinander auch zum Theil stark differieren, (vgl. z. B. 1 und 2, 5 und 6), so ersieht man doch mit Sicherheit, daß mit zunehmender Säurekonzentration der Druck stark zunimmt und anderseits durch Gegenwart von Neutralsalz stark heruntergedrückt wird. Leider erreichte die Korrektion wegen der Abnahme des Säuretiters einen sehr hohen Betrag;

da so die Endkonzentrationen der Säure mit einiger Unsicherheit behaftet sind, können die vorstehenden Zahlen nur zur ersten Orientirung dienen.

7) $C = 0{\cdot}68\, HCl + 0{\cdot}30\, ZnCl_2 + 1\, ZnSO_4$; $P = 48$ Atm.

8) $C =$ » » » » $P = 52$ Atm.

Apparate, die mit normaler Salzsäure beschickt waren, explodierten bei Drucken von 70 bis 80 Atm., wobei der Säuretiter etwa auf 0·7 bis 0·8 gesunken war. Dasselbe geschah bei einem mit normaler Essigsäure gefüllten Apparate.

Kadmium. $C = 0{\cdot}62\, HCl + 0{\cdot}3\, CdCl_2$, P ca. 44 Atm.

Eisen. Es kamen eiserne Nägel zur Verwendung.

$$C = 0.46\, H_2SO_4 + 1{\cdot}04\, FeSO_4;\ P = 6{\cdot}4 \text{ Atm.}$$

Während hier bereits nach 3 Tagen Konstanz eingetreten war, ließ ein mit normaler Schwefelsäure beschickter Apparat ein so langsames Ansteigen des Druckes erkennen, wie es in keinem andern Falle beobachtet war. Nach 8 Tagen betrug der Druck erst 5 Atm., nach 14 Tagen erst 6 Atm.; im Laufe eines Vierteljahrs erreichte er den Wert von 34 Atm., ohne daß jedoch der Gleichgewichtszustand erreicht zu sein schien. Die Abnahme des Säuretiters ist auf 11 % zu schätzen. Aehnlich verhielt sich ein mit normaler Salzsäure beschickter Apparat. Bei Anwendung doppeltnormaler Schwefelsäure fand bei einem Drucke von 90 Atm. Zertrümmerung des Apparats statt.

Mangan in Stückenform lieferte mit normaler Salzsäure in Berührung einen Druck von 52 Atm. Abnahme des Säuretiters ca. 11 %.

Nickel. Das Metall kam in Stückenform und platiniert zur Verwendung; die Konstanz des Druckes trat hier schneller ein als bei andern Metallen.

1) $C = 0{\cdot}94\, H_2SO_4 + 0{\cdot}07\, NiSO_4$; $P = 7{\cdot}5$ Atm.

2) $C = 1{\cdot}52\, H_2SO_4 + 0{\cdot}50\, NiSO_4$; $P = 42$ Atm.

3) $C = 0{\cdot}86\, HCl + 0{\cdot}15\, NiCl_2$; $P = 23{\cdot}1$ Atm.

4) $C = 0{\cdot}88\, HCl + 0{\cdot}15\, NiCl_2$; $P = 29{\cdot}0$ Atm.

Vielleicht ist gerade dieses Metall zu weiteren Versuchen über die Abhängigkeit der Maximaltension von der Konzentration, Temperatur etc. besonders geeignet.

Aluminium. Selbst bei Anwendung von 0·25 normaler Salzsäure waren die Apparate nicht widerstandsfähig genug, obwohl im Laufe der Reaktion der Titer sicherlich bis auf 0·15 heruntergieng. Die Zertrümmerung trat hier übrigens erst nach 20 Tagen ein; ein mit normaler *HCl* beschickter Apparat explodierte bereits wenige Stunden nach seiner Zusammensetzung.

Magnesium. Eine Anzahl mit 0·25 H_2SO_4, 0·25 HCl, 0·1 CH_3COOH mit und ohne Gegenwart von Neutralsalz beschickter Apparate explodierten theils nach einigen Stunden, theils nach einigen Wochen. Ein mit neutraler doppelt normaler Magnesiumsulfatlösung und mit von Platindraht umwickeltem Magnesiumdraht zusammengesetzter Apparat zeigte nach 8 Tagen einen Druck von 95 Atm. und zersprang schließlich.

Natrium. Selbst bei Anwendung eines einprocentigen Amalgams und einer zehnfachnormalen Natronlösung fand Zertrümmerung des Apparats infolge eines Drucks von 90 Atm. statt.

Kupfer und Silber, die mit Säuren bekanntlich Wasserstoff nicht entwickeln, können demgemäß nur nach Bruchtheilen einer Atmosphäre zählende Maximaltensionen besitzen.

Wir enthalten uns vorläufig, weitere Schlüsse aus dem vorliegenden Beobachtungsmaterial zu ziehen und wollen nur noch darauf hinweisen, daß die Spannungsreihe, in welche nach den Versuchen von Fr. Streintz[1]) die in Lösungen ihrer Nitrate oder Chloride befindlichen Metalle sich einordnen lassen,

$$Mg,\ Zn,\ Al,\ Cd,\ Fe,\ Ni,\ Cu,\ Ag$$

offenbar auch den auf vergleichbare Konzentrationen der Lösungen reducierten Werthen der Maximaltensionen entspricht; nur würde bei einer Ordnung der Metalle nach der Größe ihrer Maximaltensionen das Aluminium vor dem Zink zu stehen kommen.

Allerdings sind unsere Beobachtungen dem Einwande ausgesetzt, daß bei ihnen möglicherweise der Gleichgewichtszustand noch nicht erreicht und der Fortschritt der Reaktion nur stark verzögert sei. Wenn er auch in anbetracht des Umstandes, daß in vielen Fällen die Maximaltension ziemlich schnell erreicht wurde und daß einer rapiden Zunahme des Druckes ein Zustand folgte, wo er während sehr langer Zeit sich wenigstens nicht nachweisbar änderte, wenig Wahrscheinlichkeit für sich hat, so wäre es doch im höchsten Maaße erwünscht, denselben Gleichgewichtszustand von der anderen Seite her zu erreichen. Der direkte Weg wäre natürlich die Bestimmung des Druckes, mit welchem man Wasserstoff in Metallsalzlösungen hineinpressen muß, um gerade noch Metallabscheidung zu erhalten; allein in Anbetracht der Thatsache, die auch wir gelegentlich konstatierten, daß man nämlich mit Kupfersulfatlösung Tage lang Wasserstoffgas von nach mehreren Atmosphären zählenden Drucke in Berührung bringen kann, ohne Ausfällung metallischen Kupfers zu erzielen, trotzdem die Maximal-

1) Wien. Ber. 77 410 (1878).

tension von Kupfer in Berührung mit seinen neutralen Lösungen sicherlich nur nach kleinen Bruchtheilen einer Atmosphäre zählt, müssen wir schließen, daß der von uns studierte Gleichgewichtszustand von der entgegengesetzten Seite aus noch ungleich schwieriger zu erreichen ist.

Ein anderer Weg, der ebenfalls zur gesuchten Maximaltension führen dürfte, würde darin bestehen, daß man die Metallsalzlösung elektrolysiert und den Druck bestimmt, bei welchem an der Kathode die Wasserstoffentwickelung aufhört und die Metallabscheidung beginnt. Thatsächlich beobachteten wir denn auch, wie bei der Elektrolyse eine bezüglich des Gehaltes an Schwefelsäure und Zinksulfat je 0·5-normalen Lösung, wobei als Anode Zinkamalgam und als Kathode ein Platindraht diente, mit zunehmendem Druck eine immer reichlichere Zinkabscheidung stattfand; allein sie war immer noch von Wassenstoffentwickelung begleitet, bis der Apparat schließlich zersprang, und ein scharfer Uebergangspunkt ließ sich nicht konstatieren. Wahrscheinlich wirken die durch die Elektrolyse in der Nähe der Kathode hervorgerufenen Konzentrationsänderungen im hohen Maaße störend.

Wir wollen unsere Mittheilung nicht ohne den Hinweis schließen, daß wir in den Ergebnissen unserer bisherigen, übrigens nicht ganz einfachen und gefahrlosen Versuche nur den ersten Anfang einer eingehenderen Erforschung eines chemischen Gleichgewichtszustandes erblicken, dessen hohes theoretisches Interesse aus den im ersten Theile unserer Notiz mitgetheilten Beobachtungen wohl zur Genüge erhellt. Da wir äußerer Umstände willen die gemeinschaftliche Fortführung unserer Versuche abbrechen mußten, veröffentlichen wir jetzt schon die bisherigen Resultate, deren Unvollständigkeit Niemand mehr empfinden kann, als wir selber; doch wir entschlossen uns zur Publikation in der Hoffnung, die Aufmerksamkeit auf ein bisher zu wenig beachtetes Gebiet zu lenken, für dessen Erforschung wir die leitenden Prinzipien gegeben zu haben glauben, welches seinen experimentellen Ausbau jedoch noch fast völlig von der Zukunft zu erwarten hat.

Dorpat und Göttingen im. Juni 1891.

Ueber die Permeabilität von Niederschlagsmembranen.

Von

G. Tammann.

Um die Thatsache der Semipermeabilitität zu erklären, hat M. Traube[1]) in den Niederschlagsmembranen Poren angenommen, durch die wohl die Wassermoleküle hindurch diffundiren, die aber von den Molekülen gewisser anderer Stoffe nicht passirt werden können. Nach Traube sind die Niederschlagsmembranen Atomsiebe, mit deren Hülfe man die relative Größe der Moleküldurchmesser bestimmen kann. Aus der Porentheorie Traube's folgt der Satz: Moleküle, die durch die Niederschlagsmembranen mit weiten Poren nicht hindurchgehn, können durch Niederschlagsmembranen mit engen Poren erst recht nicht durchtreten. Sollten sich Thatsachen finden, die gegen diesen Satz sprechen, so wäre die Porentheorie Traube's hinfällig.

In jüngster Zeit hat Ostwald[2]) die Anschauungen Traube's auf die Ionen der gelösten Stoffe übertragen und darauf aufmerksam gemacht, daß man nicht von der Durchlässigkeit der Membran für ein Salz, sondern von der für bestimmte Ionen zu sprechen hätte. Ein Salz kann nur dann durch die Membran treten, wenn beide Ionen desselben die Membran zu durchdringen vermögen. Vermag auch nur eines der Ionen die Membren nicht zu durchdringen, so wird auf der anderen Seite der Membran das Salz nie nachgewiesen werden können. Aus Ostwalds Anschauungen ergiebt sich betreffs des Verhaltens von Salzen gegenüber Niederschlagsmembranen ein allgemeiner Satz, nämlich der: daß alle Verbindungen eines Ions, welches die Membran nicht durchdringt, ebenfalls nicht durch die Membran diffundiren. Dieser Satz könnte durch das Verhalten des nichtdissociirten Antheils mannigfache Einschränkungen erleiden, da ja immerhin der Fall denkbar wäre, daß, wenn auch beide Ionen durch die Membran nicht diffundiren, es doch der nicht dissociirte Antheil thut. Einen Satz zu schaffen, wie den: kann eine der Ionen oder beide Ionen die Membran nicht durchdringen, so kann es der nicht dissociirte Antheil auch nicht, wäre mindestens verfrüht, da die Beobachtungen von Pfeffer[3])

1) M. Traube, Archiv f. Anatomie und Physiologie 1867, p. 87.

2) W. Ostwald, Zeitschrift f. phys. Chem. VI, p. 71, 1890.

3) W. Pfeffer, Abhandlungen der sächsischen Gesellsch. 16, p. 338, 1890.

am Protoplasma strickt gegen die auf dem Boden der Porentheorie stehende Ansicht sprechen, nämlich die: ein Stoff geht um so leichter durch eine Membran, je weniger Atome in seinem Molekül enthalten sind. Es ist nicht bekannt, ob bei der Diffusion eines Elektrolyten durch eine Niederschlagsmembran die Ionen oder der nichtdissociirte Antheil oder beide Arten von Molekülen diffundiren. Es werden später einige Messungen über die durch eine Niederschlagsmembran durchdiffundirten Mengen verschiedener Säuren mitgetheilt werden, aus denen allerdings zu folgen scheint, daß hauptsächlich die Ionen die Membran durchdringen.

Zur Prüfung der Anschauungen von Traube und Ostwald habe ich eine Reihe von Versuchen, theils schon vor mehreren Jahren, ausgeführt. Die einzigen mir bekannten Angaben über die Permeabilität von Niederschlagsmembranen rühren von M. Traube[1]) und mir[2]) her; da unter denselben einige widersprechende Angaben vorkommen, so habe ich sie bei anderer Versuchsanordnung nochmals geprüft.

1. Ist man berechtigt die Niederschlagsmembranen als Molekülsiebe zu betrachten? Zur Entscheidung dieser Frage wurden mit den Membranen, die sich bei der Berührung der Lösungen von Gerbsäure und Leim, von Ferrocyankalium und Zinksulfat und von Ferrocyankalium und Cupfersulfat bilden, Versuche betreffs ihrer Permeabilität für Farbstoffe angestellt. Die Concentrationen der Membranogene waren folgende; Gerbsäure 1% Leim, 1% Lösung; Cupfersulfat, Zinksulfat und Ferrocyankalium 0.05 g Molekül in Liter. Zu den Lösungen der Gerbsäure und des Ferrocyankaliums wurde ein wenig der tabellirten Farbstoffe gesetzt, und deren Lösungen dann vorsichtig in einem Reagensrohr auf die Leim-, die Kupfer- und Zinksulfatlösung geschichtet. Nach einer Stunde wurde nachgesehen ob durch die Membran etwas vom Farbstoff durchgedrungen war. Blieb die Grenze zwischen der angefärbten Lösung und der farblosen scharf, wie gleich nach dem Uebereinanderschichten, so wurde in der Tabelle impermeabel verzeichnet. Hatte sich dagegen um die Membran ein nach unten hin heller abschattirter Hof gebildet, so wurde in der Tabelle permeabel notirt. Ich habe dabei drei verschiedene Grade der Permeabilität unterschieden; die Abkürzungen in der Tabelle bedeuten: perm. sp. nur eine leichte Andeutung des Hofes, perm. eine sehr deutliche Ausbildung

1) M. Traube, loc. cit. p. 133—141.

2) G. Tammann, Wied. Ann. 34, p. 310, 1888 und Mémoires de l'Acad. de St. Petersbourg 35, N. 9, p. 169, 1887.

des Hofes und sehr perm. ein sofortiges Erscheinen des Farbstoffes in der angefärbten Lösung. In diesem letzteren Falle wird die ganze farblose Lösung bald gefärbt. Geht der Farbstoff sehr langsam durch die Membran, so haben sich die osmotischen Druckdifferenzen schon ausgeglichen bevor der Farbstoff in deutlich wahrnehmbarer Menge durch die Membran diffundirt ist, und die Bedingung zur Ausbildung des gefärbten Hofes, das Fehlen störender Convectionsströme ist vorhanden. Geht aber Farbstoff in großen Quantitäten durch die Membran, so wird, da der osmotische Strom anfangs seine volle Thätigkeit entwickelt, die ganze Lösung durch die Convectionsströme gefärbt. In den ersten 6 Stunden war bei keinem Farbstoffe, wenn derselbe nicht innerhalb der ersten Stunde durchgetreten war, eine Diffusion durch die Membran zu bemerken. Nach 24 Stunden aber hatte sich an der gerbsauren Leim und der Ferrocyankupfermembran eine starke Fällung gebildet; in Folge dessen waren in die Leimlösung alle in der Tabelle verzeichneten Farbstoffe, mit Ausnahme von Lackmus gelangt; ebenso in die Kupferlösung alle mit Ausnahme von Methylviolett 2B, Brillantgrün, Baumwollenblau, Methylorange und Lackmus. In der Zinksulfatlösung war nach 24 Stunden nichts, was nicht schon in der ersten Stunde bemerkt wurde, durchgetreten. Die Ferrocyanzinkmembran hatte sich aber auch nur wenig verdickt, sie war trübe geworden, starke Fällungen bilden sich an ihr nie aus. Fast alle der untersuchten Farbstoffe sind Salze, nur Eosin und Methyleosin sind freie Säuren und gerade diese sind am reichlichsten durch alle Membranen hindurchgetreten. Wie wir später sehn werden, gehn alle Säuren durch die Niederschlagsmembranen. Alle anderen Farbstoffe sind Salze, und zwar haben wir 2 Gruppen zu unterscheiden: I. Salze, deren Basen gefärbt sind, untersucht wurden Chloride, Oxalate, Pikrate; II. Natronsalze, deren Säureradicale gefärbt sind und die größtentheils zu den Sulfonsäuren gehören. Die Stoffe sind der Kürze wegen mit ihren Handelsnamen bezeichnet, und innerhalb jeder Gruppe nach der Anzahl von Atomen im im gefärbten Ion geordnet.

I. Salze gefärbter Basen.	Membran aus gerbsaurem Leim;	aus Ferrocyanzink;	aus Ferrocyankupfer.	
Fuchsin Chlorid	perm.	imper.	perm.	1.
Diamantfuchsin Chlorid	perm. sp.	imper.	perm. sp.	2.
Safrania-Chlorid	perm.	imper.	imper.	
Methylviolett 2B Chlorid	imper.	imper.	imper.	
Brillantgrün-Oxalat	perm. sp.	imper.	imper.	
Anilingrün-Pikrat	perm.	perm. sp.	imper.	
Methylviolett-5BChlorid	imper.	imper.	imper.	

II. Natronsalze der Sulfonsäuren.	Membran aus gerbsaurem Leim;	aus Ferrocyanzink;	aus Ferrocyankupfer.	
Methylorange	perm.	imper.	imper.	
Orange 2	imperm.	imper.	imper.	
Bordeaux R	perm. sp.	perm.	imper.	3.
Ponceau 3R	perm. sp.	perm. sp.	perm.	4.
Marineblau	imper.	imper.	imper.	
Baumwollenblau	imper.	perm.	imper.	5.
Erytrosin extra, Tetrajodfluorescennatrium	perm.	sehr perm.	imper.	6.
Lackmussaures-Kali	imper.	imper.	imper.	
Säuren.				
Eosin	sehr perm.	perm.	sehr perm.	7.
Methylosin	sehr perm.	sehr perm.	sehr perm.	

Von 17 Farbstoffen gehen 11 durch die Membran aus Gerbsäure und Leim, 7 durch die Ferrocyanzinkmembran und nur 5 durch die Ferrocyankupfermembran. Betrachtet man die Membranen als Atomsiebe, so hätte man damit die Reihenfolge der Lochweiten in den Sieben festgestellt. Nothwendigerweise darf aber ein Atom, welches durchs Sieb mit größter Lochweite nicht hindurchgeht, ein Sieb mit engen Löchern erst recht nicht passiren. Man kann sich leicht in der Tabelle überzeugen, daß dieser Bedingung nicht genügt wird. Es kommen 7 Ausnahmen vor, die in der Tabelle mit Ziffern bezeichnet sind.

2. Diffusion der Säuren durch die Ferrocyankupfermembran. Alle Säuren durchdringen die Niederschlagsmembran aus Ferrocyankupfer, und zwar diffundiren die schwachen Säuren wenig, die starken Säuren in großer Menge durch die Membran. Man kann die Diffusion der Säuren durch eine Ferrocyankupfermembran leicht in folgender Weise verfolgen. Ueber eine Lösung der Säure (0.05 GM.) und des entsprechenden Kupfersalzes (0.05 GM.) wird in einem schief gehaltenen Reagensglase eine mit Lackmus gefärbte Lösung von Ferrocyankalium (0.1 GM.) geschichtet. Bei den starken Säuren: Salzsäure, Salpetersäure, Schwefelsäure, Pseudocumolsulfonsäure und Tribromessigsäure nimmt man dicht über der Ferrocyankupfermembran eine scharf ausgebildete rothe Zone wahr, aus der sich rothe Schlieren durch die Ferrocyankaliumlösung erheben, oben sammeln sich die verdünnten Lösungsschichten der Ferrocyankaliumlösung an, und in einer Minute färbt sich etwa 1 cm Lösungssäule von oben herab nach unten hin roth. Bei schwachen Säuren ist der rothe Saum über der Ferrocyankupfermembran nicht zu beobachten, sonst geht wie früher die Rothfärbung der Lösung

nur langsam, von oben herab vor sich. Die untersuchten schwachen Säuren sind: Essigsäure, Propionsäure, Isobuttersäure, Milchsäure, Bernsteinsäure, Malonsäure, Weinsäure, Citronensäure, Mono-, Di- und Trichloressigsäure. Natürlich kann man bei anders gewählten Concentrationen der Lösungen auch andere Bilder beobachten. Herrscht in der Lösung der Säure und des Kupfersalzes höherer osmotischer Druck als in der Ferrocyankaliumlösung, so tritt die Rothfärbung ebenfalls an der oberen Seite der Membran auf, um sich aber von unten nach oben langsam, entsprechend der Diffusion der Säure, zu verbreiten.

Die Beobachtung, daß starke Säuren augenscheinlich in bedeutend größerer Menge als die schwachen Säuren durch die Ferrocyankupfermembran treten, machte einige quantitative Parallelversuche mit verschiedenen Säuren wünschenswerth. In eine flache Schale von 10.5 cm Durchmesser wurden 80 cbcm einer Lösung von Ferrocyankalium (0.05 GM.) gebracht, die Lösung mit einem Stück Pergamentpapier überdeckt und auf dieses immer 100 cbcm einer Lösung von Säure mit dem Zusatz des entsprechenden Kupfersalzes gebracht. Nach einer kurzen Zeit wurde die überdiffundirte Säure in der ganzen Portion der Ferrocyankaliumlösung mit normaler Natronlauge titirt. In folgender Tabelle sind für jeden Versuch die Anzahl von verbrauchten cbcm Natronlauge neben der seit Beginn des Versuchs verflossenen Zeit in Minuten notirt.

0.5 GM. HCl + 0.05 GM. $CuCl_2$		0.5 GM. HNO_3 + 0.05 GM. $Cu(NO_3)_2$	
Zeit	cbcm norm. Natronl.	Zeit	cbcm norm. Natronl.
8	2.6	10	3.6
11	4.2	14	5.6
16	8.7	18	7.7
30	9.4	33	11.7
70	16.0	45	14.8
70	15.9	62	18.0
80	18.0	102	21.9
120	21.8		

0.25. GM. H_2SO_4 + 0.05 GM. $CuSO_4$		0.5 GM. CH_3COOH + 0.05 GM. $Cu(CH COO)_2$	
Zeit	cbcm norm. Natronl.	Zeit	cbcm norm. Natronl.
10	2.6	12	1.0
22	3.4	20	1.6
60	8.2	62	3.9
84	9.7	120	6.2
120	12.2	180	7.9
318	17.5	376	12.5

Nach Eintritt des Gleichgewichts, nachdem auf beiden Seiten der

Membran die Concentration der Säure dieselbe geworden ist, müßten 22 cbcm norm. Natronlauge zur Sättigung in den 80 cbcm Ferrocyankaliumlösung verbraucht werden. Am schnellsten wird dieser Gleichgewichtszustand bei Salpetersäure und Salzsäure erreicht. Die durch den osmotischen Wasserstrom hervorgerufenen Convectionsströme beschleunigen den Eintritt des Gleichgewichts in hohem Maasse. Durch ein Stück Pergamentpapier diffundirte von oben nach unten durch Pergamentpapier unter ganz ähnlichen Bedingungen, nur waren die beiden Membranogene nicht zugefügt worden, in 70 Minuten 0·0043 GM., während in derselben Zeit durch die Pergamentschicht mit einer Ferrocyankupfermembran 0.0160 GM., also die vierfache Menge hindurch diffundirte. Nach 15 Minuten sind in Grammmolekülen durch die Ferrocyankupfermembran hindurch diffundirt

Salzsäure	0.0070 GM
Salpetersäure	0.0060
Schwefelsäure	0.0034
Essigsäure	0.0011.

Unter denselben Bedingungen, mit der Abweichung, daß die Schale Ferrocyankaliumlösung von 0.025 GM. und die Lösung auf dem Pergamentpapier 0.25 GM. der folgenden Säuren plus 0.025 GM. des Kupfersalzes der entsprechenden Säure enthält, sind in 75 Minuten in Grammmolekülen durch die Ferrocyankupfermembran hindurchdiffundirt

Salzsäure	0.0090 GM.
Trichloressigsäure	0.0066
Monochloressigsäure	0.0033
Essigsäure	0.0026.

Bei verschiedenen Säuren ordnen sich die durch die Ferrocyankupfermembran hindurchdiffundirten Mengen in der Reihenfolge der Gehalte jener Lösungen an dissociirten Molekülen. Ob die diffundirten Mengen wirklich proportional der Anzahl von Ionen in den Lösungen sind, läßt sich nicht entscheiden, da man die Concentration der Säurelösung an der Ferrocyankupfermembran nicht kennt. Die Säurelösung wird ja beständig durch den osmotischen Strom verdünnt. Die Frage, ob die nicht dissociirten Antheile die Membran durchdringen, kann also auf Grund jener Versuche weder bejaht noch verneint werden. Man darf nur behaupten, daß hauptsächlich die Ionen die Membran durchdringen.

3. Diffusion von Salzen durch Niederschlagsmembranen. Traube[1]) hat von der Ferrocyankupfermembran angegeben,

1) M. Traube, loc. cit. p. 133—141.

daß sie für Chlorkalium, Chlornatrium und Chlorammonium permeabel, für Baryumchlorid und Nitrat, Calciumchlorid, Kalium und Ammoniumsulfat impermeabel ist. Ich habe früher die Angabe für Kaliumsulfat bestätigt, habe mich aber jetzt überzeugt, daß alle die von Traube angegebenen Salze, mit Ausnahme von Calciumchlorid, die Membran zu durchdringen vermögen. Von der Membran aus gerbsaurem Leim giebt Traube an, daß sie von Chlorammonium, Ammoniumsulfat, Baryumnitrat und Schwefelsäure durchdrungen wird; impermeabel soll dieselbe für Ferrocyankalium sein. Die letzte Angabe ist nicht richtig; denn eine Membran aus gerbsaurem Leim vermehrt den Widerstand einer Ferrocyankaliumlösung, die vor ihr in zwei untereinander nicht zusammenhängende Theile getrennt wird, und außerdem kann man leicht nach dem unten beschriebenen Verfahren zeigen, daß Ferrocyankalium wie auch Cupfersulfat in recht bedeutenden Mengen durch die Membran treten. Man kennt also für die Membran aus gerbsaurem Leim kein Metallsalz, für welches die Membran impermeabel ist.

Schichtet man in einem schief gehaltenen Probirglase über eine Lösung von Ferrocyankalium eine Lösung von Cupfersulfat und Kaliumsulfat, so kann man nach 10 Minuten in der Ferrocyankaliumlösung eine geringe Menge von Kaliumsulfat nachweisen. Da aber gewöhnlich während dieser Zeit eine stärkere Fällung von Ferrocyankupfer eintritt, und da auch ohne Zusatz von Kaliumsulfat zur Kupfersulfatlösung nach der Bildung einer starken Fällung Kaliumsulfat in der Ferrocyankaliumlösung nachweisbar ist, so bleibt man im Zweifel, ob das Kaliumsulfat durch die Membran hindurchdiffundirt oder bei der Bildung der Fällung in die Ferrocyankaliumlösung gelangt ist. Man kann Versuche über die Permeabilität der Ferrocyankupfermembran Salzen gegenüber mit viel größerer Sicherheit anstellen, wenn man die Ferrocyankupferhaut, wie es Pfeffer[1]) gethan, in Pergamentpapier einlagert. Dadurch verzögert man das Eintreten der störenden Fällung sehr bedeutend. Nach 1 Stunde ist auf dem Pergamentpapier nur eine braune Färbung entstanden, und auch nach 3 und 4 Stunden ist die Fällung von Ferrocyankupfer so gering, daß es nicht gelingt, in der Ferrocyankaliumlösung Kaliumsulfat nachzuweisen. All die untersuchten Salze gehen sehr leicht durch das Pergamentpapier hindurch, so daß diese die Resultate wenigstens in qualitativer Richtung hin nicht beeinflussen kann. Zur Ausführung der folgenden Prüfungen wurde auf ein kleines Uhrglas eine Lösung von Ferro-

1) W. Pfeffer, Osmotische Untersuchungen 1877, p. 12.

cyankalium (0.1 GM) gebracht, nach dem Bedecken dieser mit Pergamentpapier, wurde aufs Papier eine Lösung, die 0.1 GM. des zu prüfenden Salzes und 0.1 GM. des entsprechenden Kupfersalzes enthielt, gegossen. Entweder wurde auf das diesen beiden Salzen gemeinsame Ion, oder auf das dritte vorhandene Ion in der Ferrocyankaliumlösung geprüft. Die Concentrationen der Lösungen sind so gewählt, daß der osmotische Strom Convectionsströme veranlaßt, die für Vertheilung des durchgetretenen Stoffes in der Ferrocyankaliumlösung sorgten. Wenn nicht eine andere Zeit angegeben ist, so blieben die Lösungen eine Stunde lang in Berührung.

Von den Sulfaten diffundiren durch die Ferrocyankupfermembran in geringer Menge Ammoniumsulfat, in bedeutend geringerer Menge Kaliumsulfat und Natriumsulfat und in Spuren Lithiumsulfat. Für Magnesiumsulfat ist die Membran ganz impermeabel, auch nach 5 Stunden war in der Ferrocyankaliumlösung keine Schwefelsäure nachzuweisen. Ueber das Verhalten der Chloride, Bromide, Nitrate und Dithionate der alkalischen Erdmetalle giebt folgende Zusammenstellung einen Ueberblick. Es wurde nach 1 und 3 Stunden in der Ferrocyankaliumlösung auf das Vorhandensein des Salzes der alkalischen Erde mit kohlensaurem Natron geprüft.

	Cl_2	Br_2	$(NO_3)_2$	S_2O_6
Ba	perm.	perm.	perm.	imp.
S_2	perm.	perm.	imp.	perm.
Ca	imp.	imp.	imp.	imp.
Mg	imp.	imp.	imp.	—

Chlorbaryum war am meisten durchgetreten, von allen anderen Salzen nur Spuren. Von den Kalk- und Magnesiumsalzen diffundirt kein einziges durch die Membran. Die Chloride, Bromide und Nitrate von Kalium, Ammonium, Natrium und Lithium gehn alle in reichlicher Menge, vielmehr als die entsprechenden Sulfate, durch die Membran. Die folgenden Salze wurden zur Ferrocyankaliumlösung gesetzt und nach 1 und 3 Stunden wurde die Kupfersulfatlösung abgedampft und erhitzt; trat eine Verfärbung des hellblauen Kupfersulfats ein, so war damit der Durchtritt der Salze bewiesen. Von den Kalisalzen der Carbonsäuren geht am meisten ameisensaures, dann essigsaures, schließlich propionsaures und malonsaures Kalium durch. Isobuttersaures und isovaleransaures, bernsteinsaures, weinsaures und citronensaures Kalium diffundiren nicht durch die Membran.

Die Ferrocyanzinkmembran verhält sich, so weit dieselbe auf das Verhalten von Salzen geprüft wurde, ganz ähnlich der Ferrocyankupfermembran. So gelten die über das Verhalten der Sulfate gemachten Angaben im selben Wortlaut auch für die Ferrocyanzinkmembran.

Bernsteinsäure, Weinsäure, Citronensäure und Isobuttersäure durchdringen die Ferrocyankupfermembran, für die Kalisalze dieser Säure ist aber dieselbe Membran impermeabel. Die Chloride und Nitrate der Alkalien gehn in großen Mengen durch die Membran, ebenso tritt viel Schwefelsäure durch dieselbe. Also finden weder die Ionen Kalium, Natrium, Ammonium, Lithium und andererseits das Ion SO_4 an der Membran einen bedeutenden Widerstand, und doch gehn die Sulfate von Kalium, Natrium und Lithium nur in sehr geringer Menge durch die Membran. Kaliumdithionat durchwandert die Membran, nicht aber Strontiumdithionat, das ja auch diffundiren müßte, da ja Strontiumchlorid, -bromid und -nitrat die Membran durchdringen.

Diese Befunde sprechen gegen die Ansicht Ostwalds: alle Salze, in denen ein Ion enthalten ist, welches durch die Membran nicht diffundirt, können ebenfalls die Membran nicht passiren.

4. Um die Semipermeabilität von Niederschlagsmembranen zu erklären, hat Traube die Porentheorie aufgestellt. Es giebt aber noch eine Reihe von anderen semipermeabeln Substanzen, auf die man die Porentheorie nicht anzuwenden braucht, um ihre Semipermeabilität zu erklären. Nach Deville und Troost[1]) und Th. Graham[2]) durchdringt Wasserstoff, besonders leicht bei höherer Temperatur, Eisen, Platin und Palladium; von diesen Metallen wies Graham nach, daß sich in ihnen Wasserstoff auflöst. Lermite zeigte Osmose in einem System von Aether, Wasser und Chloroform. Schichtete er diese Flüssigkeit in einem Rohr übereinander, so nahm das Chloroform an Volumen zu, indem der Aether, der sich in Wasser löst, durch dieses zum Chloroform diffundirt. Für Stoffe, die sich in Membranen aus jenen Materialien lösen, sind diese Membranen permeabel, für solche, die in jenen Membranen sich nicht lösen, sind sie impermeabel. Nernst hat in dieser Weise die Semipermeabilität z. B. fürs Protoplasma erklärt. In ganz derselben Weise kann man auch die Semipermeabilität der Niederschlagsmembranen verstehn. Alle Niederschlagsmembranen sind hydratische Stoffe. Für diese Hydrate ist es, wie für Kieselsäurehydrat, wahrscheinlich, daß die Curven ihrer Dampfspannun-

1) M. Deville und Troost, Compt. rend. 56. 977. 1863.
2) Th. Graham, Phil. Mg. (4) 32 p. 401. 1866.
3) L'hermite Ann. chem. phys. [3] 43 p. 420. 1854.
4) W. Nernst, Zeitschrift f. phys. Chem. VI, p. 40, 1890.

gen nach dem Wassergehalt des Hydrats hin durch eine stetig gekrümmte Linie, ohne Sprünge wie bei gewissen Salzhydraten, dargestellt wird. Man darf ferner annehmen, daß durch das Imbitationswasser, das colloide Stoffe, zu denen die Niederschlagsmembran gehören, aufnehmen, die Dampfspannung einer solchen hydratischen Niederschlagsmembran sehr nahe der des reinen Wassers wird. Der osmotische Strom in einem System einer Lösung einer Niederschlagsmembran und einer Lösung, käme dann durch einen Destillationsproceß zustande. Der Wassergehalt der Membran müßte von den Dampfspannungen der sie umgebenden Lösungen abhängen. Hat die Lösung A größeren osmotischen Druck als die Lösung B, so würde zuerst Wasser von B in die Membran, durch diese in die Lösung A destilliren oder diffundiren. Ob ein Stoff außer Wasser die Membran passiren kann, hängt nur von der Löslichkeit jenes in der Membran ab. Wir haben früher gesehn, daß die Thatsachen den Folgerungen aus der Porentheorie nicht genügen. Regeln für die Permeabilität kann man aus den oben entwickelten Anschauungen nicht ableiten. Besitzen wir 'doch überhaupt keine Regeln, die uns in Stand setzen, etwas über die Löslichkeit zweier Stoffe in einander vorauszusagen.

Dorpat, 10. Mai 1891.

Inhalt von Nr. 6.

Eduard Riecke, zur Theorie der piëzoëlektrischen und pyroelektrischen Erscheinungen. — *G. Tammann und W. Nernst*, über die Maximaltension, mit welcher Wasserstoff aus Lösungen durch Metalle in Freiheit gesetzt wird. — *G. Tammann*, über die Permeabilität von Niederschlagsmembranen.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

19. August. № 7. 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 4. Juli.

Schering legt eine neue Lösung der Kepplerschen Gleichung vor.

Schwarz macht eine Mittheilung über ein demnächst zu veröffentlichendes Verzeichniß aller (oder wenigstens der Mehrzahl) derjenigen Schriften, welche seit dem Jahre 1761 veröffentlicht sind und sich mit der Theorie der Flächen kleinsten Flächeninhalts beschäftigen.

Riecke legt eine Abhandlung vor: »über eine mit den elektrischen Eigenschaften des Turmalins zusammenhängende Fläche 4. Ordnung«.

Klein legt eine Arbeit des Herrn Dr. Hilbert in Königsberg vor: »über die Theorie der algebraischen Invarianten«.

Wüstenfeld übergiebt für den Band 37 der Abhandlungen eine Fortsetzung seiner früheren Arbeiten über: »Die gelehrten Schâfi'iten des 5. Jahrhunderts der H.«

de Lagarde legt einen Aufsatz des Herrn Dr. Rahlfs: »über Lehrer und Schüler bei Junilius Africanus« vor.

Ueber eine mit den electrischen Eigenschaften des Turmalins zusammenhängende Fläche.

Von

Eduard Riecke.

Wir beziehen den Turmalin auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen z-Axe mit der dreizähligen Symmetrieaxe zusammenfällt, während die x-Axe auf einer Symmetrieebene senkrecht steht. Es sei eine beliebige Richtung dadurch bestimmt, daß ihre Cosinusse mit Bezug auf die Coordinatenaxen gleich γ_1, γ_2, γ_3 sind. Durch einen in dieser Richtung ausgeübten Druck p werden in den einzelnen Volumelementen des Turmalins elektrische Momente erzeugt, welche bezogen auf die Einheit des Volumens die Componenten a, b, c besitzen mögen. Nach den von Voigt aufgestellten Gleichungen ist:

$$\begin{aligned} a/p &= \gamma_1(2\gamma_2 Q + \gamma_3 R) \\ b/p &= (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)\, Q + \gamma_2\gamma_3 R \\ c/p &= S + \gamma_1^2 T \end{aligned}$$

wo Q, R, S und T gewisse dem Turmalin eigenthümliche Constante sind.

Trägt man nun die einem bestimmten Drucke entsprechenden Werthe von a/p, b/p, c/p auf den Coordinatenaxen auf, so bestimmen sie einen Punkt, p, welcher eine gewisse Fläche beschreiben wird, wenn man dem Druck alle möglichen Richtungen im Raume ertheilt. Die Eigenschaften dieser Fläche sollen im Folgenden untersucht werden. Man bemerkt zunächst, daß jeder gegebenen Druckrichtung ein bestimmter Punkt der Fläche entspricht; der Radius Vektor dieses Punktes giebt durch seine Richtung die Richtung des piëzoëlektrischen Momentes, durch seine Länge die Größe des Momentes an.

Es ist zweckmäßig, an Stelle der rechtwinkligen Coordinaten Polarkoordinaten einzuführen, indem man

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sin\Theta\cos\Phi, & \gamma_2 &= \sin\Theta\sin\Phi, & \gamma_3 &= \cos\Theta \\ a/p &= \varrho\sin\vartheta\cos\varphi, & b/p &= \varrho\sin\vartheta\sin\varphi, & c/p &= \varrho\cos\vartheta \end{aligned}$$

und zur Abkürzung noch

$$\varrho\sin\vartheta = \sigma$$

setzt. Die Voigt'schen Gleichungen werden dann:

$$\begin{aligned} \xi &= \sigma\cos\varphi = Q\sin^2\Theta\sin 2\Phi + R\sin\Theta\cos\Theta\cos\Phi \\ \eta &= \sigma\sin\varphi = Q\sin^2\Theta\cos 2\Phi + R\sin\Theta\cos\Theta\sin\Phi \\ \zeta &= \varrho\cos\vartheta = S + T\cos^2\Theta \end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst die Schnitte der Fläche durch Ebenen, welche senkrecht zu der z-Axe gelegt werden; die einer solchen Schnittkurve angehörenden Flächenpunkte entsprechen Druckrichtungen, welche einen um die z-Axe als Rotationsaxe beschriebenen Kreiskegel bilden. Es ergiebt sich dieß aus der für die z-Coordinate eines beliebigen Flächenpunktes geltenden Gleichung $\zeta - S = T \cos^2 \Theta$. Setzen wir:

$$Q \sin^2 \Theta = Q', \qquad R \sin \Theta \cos \Theta = R'$$

so wird

$$\xi = Q' \sin 2\Phi + R' \cos \Phi$$
$$\eta = Q' \cos 2\Phi + R' \sin \Phi.$$

Die Größen Q', R' und $\zeta - S$ können mit Hülfe einer einfachen geometrischen Construktion gefunden werden, sobald Q, R, T und Θ gegeben sind.

Die einem bestimmten Werthe des Winkels Θ entsprechende Schnittkurve, beziehungsweise ihre Projektion auf die xy-Ebene kann nun in folgender Weise konstruirt werden. Wir beschreiben in der xy-Ebene um den Anfangspunkt des Coordinatensystems einen Kreis mit dem Halbmesser R'; durch den Anfangspunkt ziehen wir einen Radius Vektor, welcher mit der x-Axe den Winkel Φ einschließt und welcher demzufolge in der durch die Druckrichtung gehenden Meridianebene liegt. Durchschneidet dieser Radius den mit R' beschriebenen Kreis in dem Punkte c, so ziehen wir durch c eine Linie, welche mit der y-Axe den Winkel 2Φ einschließt und schneiden auf dieser von c aus die Strecke Q' ab; der so erhaltene Punkt ist die Projektion eines Punktes der Oberfläche, welcher das der Druckrichtung (Θ, Φ) entsprechende elektrische Moment repräsentirt.

Wir wollen nun untersuchen, welche Werthe des Winkels Φ dem Winkel $\varphi = \pi/6$ entsprechen. Die Gleichungen sind

$$\sigma \cos \pi/6 = Q' \sin 2\Phi + R' \cos \Phi, \qquad \sigma \sin \pi/6 = Q' \cos 2\Phi + R' \sin \Phi$$

woraus

$$Q' \cos (2\Phi + \pi/6) = -R' \sin (\Phi - \pi/6) \text{ oder}$$
$$Q' \sin 2 (\Phi - \pi/6) = R' \sin (\Phi - \pi/6).$$

Eine Lösung dieser Gleichung erhält man, indem man $\Phi = \pi/6$ setzt; in diesem Falle liegt also die Richtung des piëzoëlektrischen Momentes in derselben durch die Hauptaxe gehenden Ebene, wie die Druckrichtung. Da allgemein

$$\sigma^2 = Q'^2 + R'^2 + 2Q' R' \sin 3\Phi,$$

so wird für $\Phi = \pi/6$: $\sigma = R' + Q'$.

Zwei weitere Wurzeln der für Φ geltenden Gleichung sind:

$$\Phi = \frac{\pi}{6} \pm \arccos \frac{R'}{2Q'}.$$

Ist $Q' < R'/2$ so sind die dieser Gleichung entsprechenden Winkel imaginär. Es existieren in diesem Falle keine weiteren Druckrichtungen, für welche das elektrische Moment in das Azimut $\pi/6$ fällt. Ist $Q' = R'/2$, so sind die beiden anderen Wurzeln der Gleichung ebenfalls gleich $\pi/6$. Wenn aber $Q' > R'/2$, so existieren noch zwei andere Azimute Φ, für welche das Azimut des elektrischen Momentes gleich $\pi/6$ wird. Es ergiebt sich in diesem Falle

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= R'^2 + Q'^2 + 2R'Q' \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm 3 \arccos \frac{R'}{2Q'}\right)\\ &= R'^2 + Q'^2 + 2R'Q' \cos\left(3 \arccos \frac{R'}{2Q'}\right)\\ &= R'^2 + Q'^2 + (R'^2 - 3Q'^2)\frac{R'^2}{Q'^2}.\end{aligned}$$

Setzen wir hier für R' und Q' ihre Werthe in Q, R und Θ, so ergiebt sich:

$$\sigma Q = R^2 \cos^2\Theta - Q^2 \sin^2\Theta.$$

Da nun

$$\cos^2\Theta = \frac{\zeta - S}{T},$$

so erhält man die Gleichung

$$TQ(\sigma + Q) = (R^2 + Q^2)(\zeta - S).$$

In dieser Gleichung ist die folgende merkwürdige Eigenschaft unserer Fläche ausgesprochen. Wir haben gesehen, daß die betrachtete Curve auf dem durch $\varphi = \pi/6$ bestimmten Radius Vektor jedenfalls einen Punkt besitzt, für welchen $\sigma = R' + Q'$ und Φ ebenfalls gleich $\pi/6$. Außerdem hat aber die Curve auf demselben Radius noch einen Doppelpunkt, wenn $Q' > 2R'$; für diesen ist $\sigma Q = R^2 \cos^2\Theta - Q^2 \sin^2\Theta$ und $\Phi = \pi/6 \pm \arccos R'/2Q'$. Auf der Oberfläche selbst liegt die betrachtete Curve in einer zur z-Axe senkrechten Ebene, deren Abstand von der xy-Ebene durch $\zeta = S + T\cos^2\Theta$ gegeben ist. Nun zeigt die letzte Gleichung, daß zwischen σ und ζ eine lineare Gleichung besteht; d. h. die Doppelpunkte der in den verschiedenen auf einanderfolgenden Schnittebenen befindlichen Curven liegen auf einer geraden Linie.

Für $Q' = R'$ oder $\operatorname{tg}\Theta = \frac{R}{Q}$ wird $\sigma = 0$ und $\Phi = \pi/2$ oder gleich $-\pi/6$.

Aus den Gleichungen $\xi = R'\cos\Phi + Q'\sin 2\Phi$ und $\eta = R'\sin\Phi + Q'\cos 2\Phi$ ergiebt sich, daß die zu untersuchenden Schnittkurven Hypocykloiden sind, welche in folgender Weise konstruirt werden können. In der xy-Ebene beschreiben wir um den Anfangspunkt 0 des Coordinatensystems einen Kreis mit dem Halbmesser $3R'/2$; in diesem lassen wir einen zweiten Kreis rollen, dessen Halbmesser gleich $R'/2$ ist; nehmen wir auf dem rollenden Kreis einen Punkt, π, im Abstande Q' von seinem Mittelpunkt c und stellen wir den Kreis so, daß die Azimute der Linien Oc und $O\pi$ gegen die x-Axe gleichzeitig den Werth $\pi/6$ annehmen, so beschreibt der Punkt π die zu untersuchende Schnittkurve.

Es ist hiernach leicht, einen Ueberblick über die verschiedenen Gestalten zu gewinnen, welche die Schnittkurve annimmt, wenn Θ von 0 bis $\pi/2$ wächst und dem entsprechend ζ von $S + T$ bis S abnimmt. Für sehr kleine Werthe von Θ ist $R' = R\Theta$ und $Q' = Q\Theta^2$; die entsprechende Hypocykloide weicht demnach nur sehr wenig ab von einem mit dem Halbmesser R' beschriebenen Kreise. Da der Halbmesser des rollenden Kreises gleich dem dritten Theil von demjenigen des Bahnkreises ist, so kehrt der erstere genau in seine Anfangslage zurück, wenn er drei Umwälzungen vollzogen hat. Die Hypocykloide bildet eine geschlossene Curve; sie ist symmetrisch mit Bezug auf drei durch den Mittelpunkt des Bahnkreises gezogene Durchmesser, welche mit der x-Axe die Winkel $\pi/6$, $5\pi/6$, $9\pi/6$ einschließen. Der Radius Vektor der Hypocykloide hat seinen größten Werth $R' + Q'$ in den Azimuten $\varphi = \pi/6$, $= 5\pi/6$, $= 9\pi/6$, seinen kleinsten Werth $R' - Q'$ in den Azimuten $\varphi = 3\pi/6$, $= 7\pi/6$, $= 11\pi/6$. Die Cykloide ist eine verkürzte, so lange $Q' < R'/2$. Wird $Q' = R'/2$, also $\operatorname{tg}\Theta = R/2Q$ und $\zeta = S + \frac{4Q^2 T}{4Q^2 + R^2}$, so erhalten wir eine gewöhnliche Hypocykloide mit 3 Spitzen. Wird $Q' > R'/2$, so wird die Hypocykloide eine verlängerte, mit Doppelpunkten in den Richtungen $\varphi = \pi/6$, $= 5\pi/6$, $= 9\pi/6$. Für $Q' = R'$ geht die Cykloide durch den Mittelpunkt des Bahnkreises hindurch, die drei Doppelpunkte fallen in einen dreifachen Punkt zusammen. Wird $Q' > R'$, so fallen die Doppelpunkte in die Azimute $\varphi = 7\pi/6$, $= 11\pi/6$, $= 3/\pi 6$. Wenn endlich Θ nahe an $\pi/2$ rückt, so wird $Q' = Q$ und $R' = R(\pi/2 - \Theta)$;

für $\Theta = \pi/2$ geht die Cykloide über in einen Kreis mit dem Halbmesser Q; gleichzeitig wird $\zeta = S$ und für die Doppelpunkte $\sigma = -Q$.

Wir wenden uns nun zu der Untersuchung der **Meridianschnitte der Fläche.** Zuerst mögen die in einer der Symmetrieebenen liegenden Curven betrachtet werden. Setzen wir $\varphi = \pi/6$, so wird für die Maximalwerthe $R' + Q'$ des Radius Vektors auch $\Phi = \pi/6$; lassen wir Θ wachsen von 0 bis $\pi/2$, so sind jene Maximalwerthe gegeben durch $\sigma = R \sin \Theta \cos \Theta + Q \sin^2 \Theta$, die entsprechenden Werthe der z-Coordinate durch $\zeta = S + T \cos^2 \Theta$. Die in derselben Symmetrieebene liegenden Minima der Radien Vektoren, $R' - Q' = R \sin \Theta \cos \Theta - Q \sin^2 \Theta$ erhalten wir, wenn wir $\varphi = 7\pi/6$, und dem entsprechend auch $\Phi = 7\pi/6$ setzen und dann wiederum Θ von 0 bis $\pi/2$ wachsen lassen. Die zugehörigen z-Coordinaten sind wieder gegeben durch $\zeta = S + T \cos^2 \Theta$. Wenn wir nun in der betrachteten Symmetrieebene für die beiden in Frage kommenden Quadranten die positive Richtung von σ so wählen, daß sie mit der Maximalrichtung des Radius Vektors übereinstimmt, so haben wir das Vorzeichen des Minimalwerthes umzukehren und erhalten, wenn Θ in dem Quadranten $z, +\sigma$ liegt: $\sigma = Q \sin^2 \Theta + R \sin \Theta \cos \Theta$, wenn Θ in dem Quadranten $z, -\sigma$ liegt: $\sigma = Q \sin^2 \Theta - R \sin \Theta \cos \Theta$. Beide Ausdrücke können in den einen $\sigma = Q \sin^2 \Theta + R \sin \Theta \cos \Theta$ zusammengefaßt werden, wenn wir Θ selbst in dem ersteren Quadranten positiv, in dem zweiten negativ nehmen. Bezeichnet man durch σ und σ' die beiden Radien, welche einem und demselben absoluten Werthe von Θ entsprechen, so wird

$$\frac{\sigma + \sigma'}{2} = Q \sin \Theta \text{ und daher } \frac{\sigma + \sigma'}{2Q} + \frac{\zeta - S}{T} = 1.$$

Es ergiebt sich somit der Satz: Zieht man in der Symmetrieebene Linien senkrecht zu der z-Axe, so schneiden diese die Oberfläche in zwei Punkten; die Halbierungspunkte der durch die Schnittpunkte gebildeten Segmente liegen in einer geraden Linie, welche die Punkte mit den Coordinaten $\zeta = S$, $\sigma = \sigma' = Q$ und $\zeta = S + T$, $\sigma = \sigma' = 0$ verbindet. Setzt man nun

$$\tau = \sigma - \frac{Q}{2}, \quad \zeta' = \zeta - S - \frac{T}{2},$$

so ergiebt sich durch Elimination von Θ:

$$(T\tau + Q\zeta')^2 + R^2 \zeta'^2 = R^2 T^2/4.$$

Die betrachtete Curve ist somit eine **Ellipse**, deren Mittelpunkt in dem ursprünglichen System die Coordinaten $\sigma = Q/2$, $\zeta = S + T/2$

hat und welche von einer zu der xy-Ebene in der Entfernung S gelegten Parallelebene im Abstande Q von der z-Axe, von einer in der Entfernung $S+T$ gelegten Parallelebene in der z-Axe selbst berührt wird.

Diese Ellipse repräsentiert aber nicht den ganzen Schnitt der Fläche durch die dem Azimut $\varphi = \pi/6$ entsprechende Symmetrieebene; denn in dieser Ebene liegen noch die Doppelpunkte der Hypocykloiden; die von diesen gebildete gerade Linie

$$TQ(\sigma + Q) = (R^2+Q^2)(\zeta - S)$$

genommen zwischen den Ordinaten $\zeta = S$ und $\zeta = S + \frac{4Q^2T}{4Q^2+R^2}$ muß der Ellipse noch hinzugefügt werden, um den vollständigen Schnitt zu erhalten. Aus dem Folgenden geht hervor, daß die gerade Linie als eine doppelt zählende zu betrachten ist.

Für eine beliebige Meridianebene erhält man die Gleichung der Schnittkurve am einfachsten, wenn man zunächst die Gleichung der zu der xy-Ebene parallelen Schnittkurven in rechtwinkeligen Coordinaten aufstellt. Setzt man zu diesem Zweck in den Gleichungen

$$\xi = R'\cos\Phi + 2Q'\sin\Phi\cos\Phi$$
$$\eta = R'\sin\Phi + Q'(\cos^2\Phi - \sin^2\Phi)$$
$$\cos\Phi = \frac{x}{z}, \quad \sin\Phi = \frac{y}{z},$$

so erhält man die in x, y und z homogenen Gleichungen

$$2Q'xy + R'xz - \xi z^2 = 0$$
$$Q'x^2 - Q'y^2 + R'yz - \eta z^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen x, y, z und setzt man zugleich für R' und Q' ihre Werthe in R, Q und Θ, so ergiebt sich als Gleichung der Hypocykloiden in rechtwinkligen Coordinaten:

$$\begin{aligned}&16Q^2(\xi^2+\eta^2)\xi^2 + 4QR^2\cos^2\Theta(4\eta^2 - 9\xi^2)\eta\\&- 8(2Q^2\sin^2\Theta + R^2\cos^2\Theta)(Q^2\sin^2\Theta - R^2\cos^2\Theta)\xi^2\\&+ (4Q^2\sin^2\Theta - R^2\cos^2\Theta)^2\eta^2 + 8\sin^2\Theta(Q^2\sin^2\Theta - R^2\cos^2\Theta)^3\\&= 0.\end{aligned}$$

Setzt man hier an Stelle von $\cos^2\Theta$ und $\sin^2\Theta$ die Ausdrücke

$$\cos^2\Theta = \frac{\zeta - S}{T}, \qquad \sin^2\Theta = \frac{S+T-\zeta}{T},$$

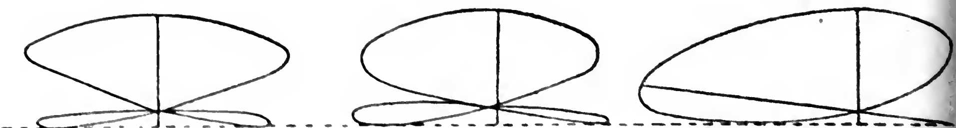
so erhält man die Gleichung der piëzoëlektrischen Fläche in rechtwinkligen Coordinaten, welche darnach von der vierten Ordnung ist.

Setzt man $\eta = 0$, so erhält man die Gleichung der Curve, in welcher die Fläche durch die xz-Ebene geschnitten wird:

$$16\,Q^2\xi^4 - 8\,(2\,Q^2\sin^2\Theta + R^2\cos^2\Theta)\,(Q^2\sin^2\Theta - R^2\cos^2\Theta)\,\xi^2$$
$$+ 8\sin^2\Theta\,(Q^2\sin^2\Theta - R^2\cos^2\Theta)^3 = 0.$$

Die Schnittkurve ist symmetrisch gegen die z-Axe. Ihre Gestalt wird durch die beistehende Figur 1 anschaulich gemacht; gleichzeitig giebt Figur 2 die Schnittkurve in einer Meridianebene, deren Azimut $\varphi = \pi/12$ ist, Figur 3 die Schnittkurve in der Symmetrieebene mit $\varphi = \pi/6$. Man sieht, daß die in der letzteren Figur auftretende gerade Linie in der That aus dem Zusammenfallen zweier Curvenzweige entsteht.

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.



Es bleibt endlich noch zu untersuchen, welche Curven der Endpunkt des elektrischen Momentes auf der piëzoëlektrischen Fläche beschreibt, wenn der Druck in einer und derselben Meridianebene alle möglichen Richtungen durchläuft. Eliminieren wir $\cos\Theta$ und $\sin\Theta$ aus je zweien der Gleichungen

$$\xi = R\cos\Phi\sin\Theta\cos\Theta + Q\sin 2\Phi\sin^2\Theta$$
$$\eta = R\sin\Phi\sin\Theta\cos\Theta + Q\cos 2\Phi\sin^2\Theta$$
$$\zeta = (S+T)\cos^2\Theta + S\sin^2\Theta,$$

so erhalten wir die Projektionen der gesuchten Curven auf die drei Coordinatenebenen.

Die Elimination aus den ersten beiden Gleichungen giebt:

$$(Q\sin 2\Phi\,\eta - Q\cos 2\Phi\,\xi)^2 + (R\cos\Phi\,\eta - R\sin\Phi\,\xi)\,(R\cos\Phi\,\eta - R\sin\Phi\,\xi - RQ\cos 3\Phi) = 0.$$

Die Projektion der Curve auf die xy-Ebene ist somit eine Ellipse, welche durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems hindurchgeht. Für $\Phi = \pi/6$ wird die Gleichung $\eta\cos\Phi - \xi\sin\Phi = 0$;

d. h. die Ellipse geht über in eine gerade Linie, welche der mit x-Axe den Winkel $\pi/6$ einschließt. Für $\Phi = 0$ ergiebt sich

$$\frac{\xi^2}{R^2/4} + \frac{(\eta - Q/2)^2}{Q^2/4} = 1.$$

Für $\Phi = \pi/2$: $\xi^2 = 0$, die Ellipse geht über in ein doppelt zu zählendes Stück der Axe η, ebenso wie in der ersten Symmetrieebene, für welche $\Phi = \pi/6$ ist.

Für die Projektionen der auf der piëzoëlektrischen Fläche verlaufenden Curven auf die beiden anderen Coordinatenebenen erhält man die Gleichungen:

$$\{Q\cos 2\Phi(S+T-\zeta) - T\eta\}^2 - R^2\sin^2\Phi(S+T-\zeta)(\zeta - S) = 0$$
$$\{Q\sin 2\Phi(S+T-\zeta) - T\xi\}^2 - R^2\cos^2\Phi(S+T-\zeta)(\zeta - S) = 0.$$

Multipliciert man dieselben beziehungsweise mit $\cos^2\Phi$ und $\sin^2\Phi$, so ergiebt sich durch Subtraktion:

$$(S+T-\zeta)\,Q\,(\cos 2\Phi\cos\Phi \mp \sin 2\Phi\sin\Phi) = T(\eta\cos \mp \xi\sin\Phi).$$

Die für konstante Werthe von Φ auf der piëzoëlektrischen Fläche sich ergebenden Curven sind somit ebene Curven; da aber ihre Projektion auf die xy-Ebene eine Ellipse ist, so müssen auch die auf der Fläche liegenden Curven selbst Ellipsen sein. Ob in der vorhergehenden Gleichung das positive oder negative Zeichen zu wählen ist, ergiebt sich, wenn man den aus derselben folgenden Werth von $S+T-\zeta$ in der Gleichung

$$\{Q\cos 2\Phi(S+T-\zeta) - T\eta\}^2 - R^2\sin^2\Phi(S+T-\zeta)(\zeta - S) = 0$$

substituiert; die resultierende Gleichung muß identisch sein mit der zuvor für die Projektion auf die xy-Ebene gefundenen. Aus dieser Bedingung ergiebt sich, daß das negative Zeichen das richtige ist. Die Gleichung der Ebenen der Ellipsen wird somit

$$(S+T-\zeta)\,Q\cos 3\Phi = T(\eta\cos\Phi - \xi\sin\Phi).$$

Für $\Phi = 0$ wird dieselbe

$$(S+T-\zeta)Q = T\eta.$$

Wenn der Druck alle möglichen Richtungen in der xz-Ebene annimmt, so beschreibt der Endpunkt des piëzoëlektrischen Momentes eine zur yz-Ebene senkrecht stehende Ellipse.

Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten.

Von

David Hilbert aus Königsberg in Pr.

(Vorgelegt von F. Klein.)

Es sei eine Grundform mit beliebig vielen Veränderlichen und Veränderlichenreihen vorgelegt. Wir betrachten die ganzen rationalen Invarianten dieser Grundform d. h. alle solchen ganzen rationalen homogenen Funktionen der Coefficienten C jener Form, welche sich nur um einen die Substitutionscoefficienten enthaltenden Faktor ändern, wenn man die Coefficienten C durch die entsprechenden Coefficienten C' der linear transformirten Grundform ersetzt. Diese Invarianten bilden ein System von ganzen rationalen homogenen Funktionen, denen folgende fundamentalen Eigenschaften zukommen:

1. Die Invarianten des Systems lassen die linearen Transformationen einer gewissen continuirlichen Gruppe zu.

2. Die Invarianten des Systems genügen gewissen partiellen linearen Differentialgleichungen.

3. Jede ganze rationale Funktion der Invarianten, welche in den Coefficienten C der Grundform homogen wird, ist wiederum eine Invariante: das System aller Invarianten bildet einen Integritätsbereich. Im Folgenden verstehen wir unter »Invariante« ohne weiteren Zusatz stets eine ganze rationale Invariante d. h. eine Invariante des eben definirten Integritätsbereiches.

4. Jede algebraische — sowie überhaupt jede analytische — Funktion von beliebig vielen Invarianten, welche einer ganzen rationalen homogenen Funktion der Coefficienten C gleich wird, ist wiederum eine Invariante.

5. Wenn das Produkt zweier ganzen rationalen Funktionen der Coefficienten C eine Invariante ist, so ist jeder der beiden Faktoren eine Invariante.

6. Es giebt eine endliche Anzahl von Invarianten, durch welche sich jede andere Invariante in ganzer rationaler Weise ausdrücken läßt; wir sagen kurz: der durch die Invarianten bestimmte Integritätsbereich besitzt eine endliche Basis.

Die Sätze 1 und 2 gestatten die Umkehrung. Satz 5 sagt aus, daß in dem durch die Invarianten bestimmten Integritätsbereiche die gewöhnlichen Teilbarkeitsgesetze gültig sind: Jede Invariante läßt sich auf eine und nur auf eine Weise als Produkt von nicht zerlegbaren Invarianten darstellen.

Es bietet sich die Aufgbabe, zu untersuchen, welche der aufgezählten Eigenschaften sich gegenseitig bedingen und welche getrennt von einander für ein Funktionensystem möglich sind. Ich hebe hier kurz hervor, daß es Systeme von unbegrenzt vielen ganzen rationalen homogenen Funktionen giebt, denen die Eigenschaft 3 zukommt, ohne daß der Satzt 6 gilt. Ein solches System ist beispielsweise das System aller derjenigen ganzen rationalen homogenen Funktionen von x und y, welche sich ganz und rational aus Funktionen der Reihe xy, x^2y^4, x^3y^9, x^4y^{16}, . . . zusammensetzen lassen. Denn angenommen, man könnte eine Funktion $x^k y^{k^2}$ durch die vorhergehenden Funktionem der Reihe ganz und rational ausdrücken und es wäre etwa $x^\alpha y^{\alpha^2}\cdot x^\beta y^{\beta^2}\ \dots\ x^\lambda y^{\lambda^2}$ ein Glied dieses Ausdruckes, so müssten für die ganzen positiven Zahlen α, β, . . ., λ die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\cdots+\lambda &= \varkappa \\ \alpha^2+\beta^2+\cdots+\lambda^2 &= \varkappa^2 \end{aligned}$$

erfüllt sein, was unmöglich ist.

Es giebt ferner Funktionensysteme, denen die Eigenschaften 2, 3, 4, 6 zukommen, ohne daß der Satz 5 für dieselben gilt. Als Beispiel diene das System aller ganzen rationalen homogenen Funktionen f von x, y, z, t, welche der Differentialgleichung

$$x\frac{\partial f}{\partial x}-y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}-t\frac{\partial f}{\partial t}=0$$

genügen. Der durch diese Funktionen bestimmte Integritätsbereich besitzt die endliche Basis xy, xt, yz, zt. Wie man sieht sind x, y, z, t Faktoren von Funktionen des Systems, ohne selbst zum System zu gehören: die Funktionen xy, xt, yz, zt sind sämtlich in dem betrachteten Integritätsbereiche unzerlegbar und die Identität

$$xy\cdot zt = xt\cdot yz$$

zeigt, daß die gewöhnlichen Teilbarkeitsgesetze in jenem Integritätsbereiche nicht gültig sind.

Der Satz 6 ist die Grundlage für die tiefer eindringenden Untersuchungen über Invariantensysteme. An diesen Satz schließen sich zunächst zwei weitere Sätze, welche unmittelbar aus meinen allgemeinen Untersuchungen über die Theorie der algebraischen Formen[1]) folgen, nämlich der Satz von der Endlichkeit der irreduciblen Syzygien und der Satz von der Syzygienkette, welche im Endlichen abbricht. Ich werde in der vorliegenden Note zeigen, daß diesen Endlichkeitstheoremen keineswegs lediglich eine principielle Bedeutung zukommt, sondern daß mit ihrer Hülfe die genaue Erledigung einer Reihe besonderer Fragen über die Aufstellung und Struktur voller Invariantensysteme möglich ist. Zugleich werden wir Methoden gewinnen zur Behandlung der bekannten Aufgabe, Formen zu bestimmen, deren Invarianten gegebene Werte besitzen.

Der Kürze und Anschaulichkeit wegen entwickle ich die folgenden Sätze nur für den Fall einer einzigen binären Grundform f von der n^{ten} Ordnung, obwohl die Methoden und Resultate ganz allgemein gültig sind. Die endliche Basis des Invariantensystems bestehe aus den Invarianten $i_1, i_2, \ldots, i_m$ und diese seien beziehungsweise von den Graden $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ in den Coefficienten der Grundform. Wir bezeichnen das Produkt dieser Grade $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ mit π und bilden die Invarianten

$$i_1' = i_1^{\frac{\pi}{\nu_1}}, \quad i_2' = i_2^{\frac{\pi}{\nu_2}}, \ldots, \quad i_m' = i_m^{\frac{\pi}{\nu_m}},$$

welche sämmtlich vom nämlichen Grade π in den Coefficienten der Grundform sind. Ist m größer als $n-2$, so besteht zwischen den m Invarianten $i_1', i_2', \ldots, i_m'$ jedenfalls eine Relation von der Gestalt

$$F(i_1', i_2', \ldots, i_m') = 0,$$

wo F eine ganze rationale homogene Funktion der Invarianten $i_1', i_2', \ldots, i_m'$ bedeutet. Wir führen nun eine lineare Transformation dieser m Invarianten aus, indem wir setzen

$$\begin{aligned} i_1'' &= \alpha_{11} i_1' + \alpha_{12} i_2' + \cdots + \alpha_{1m} i_m', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ i_m'' &= \alpha_{m1} i_1' + \alpha_{m2} i_2' + \cdots + \alpha_{mm} i_m', \end{aligned}$$

wo für die Coefficienten $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{mm}$ solche Zahlenwerte gewählt sein mögen, daß in der linear transformirten Funktion $G(i_1'', i_2'', \ldots, i_m'')$ der Coefficient der höchsten Potenz von i_m'' gleich Eins wird. Hieraus geht hervor, daß alle Invarianten der Grundform ganze algebraische Funktionen der $m-1$ Invarianten $i_1'', i_2'', \ldots, i_{m-1}''$

1) Mathematische Annalen Bd. 36. S. 534.

sind. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens gelangen wir zu dem Satze:

Es giebt $n-2$ Invarianten $I_1, I_2, \ldots I_{n-2}$ derart, daß eine jede andere Invariante sich als ganze algebraische Funktion derselben ausdrückt.

Hieraus folgt unmittelbar die weitere Thatsache:

Wenn man den Coefficienten der Grundform solche besonderen Werte erteilt, daß jene $n-2$ Invarianten gleich Null werden, so verschwinden auch zugleich sämmtliche übrigen Invarianten der Grundform.

Im allgemeineren Falle einer Grundform mit beliebig vielen Veränderlichenreihen tritt an Stelle der Zahl $n-2$ die Zahl σ der algebraisch unabhängigen Invarianten der Grundform.

Es ist nun von größter Bedeutung für die ganze hier zu entwickelnde Theorie, daß die in dem letzten Satze ausgesprochene Eigenschaft allemal nothwendig die im voranstehenden Satze ausgesprochene Eigenschaft bedingt. Um den Nachweis hiervon zu führen, entwickeln wir zunächst ein Theorem, welches sich als drittes allgemeines Theorem aus der Theorie der algebraischen Funktionen den beiden in Abschnitt I und III meiner vorhin citirten Arbeit zugesellt. Dieses Theorem lautet:

Es seien $F, F', F'', \ldots$ ganze rationale homogene Funktionen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von der Beschaffenheit, daß sie für alle diejenigen Wertsysteme dieser Veränderlichen verschwinden, für welche gewisse m vorgelegte ganze rationale homogene Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_m$ der nämlichen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gleich Null sind: dann ist es stets möglich eine ganze Zahl r zu bestimmen derart, daß jedes Produkt P von r beliebigen Funktionen der Reihe $F, F', F'', \ldots$ dargestellt werden kann in der Gestalt

$$P = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_m f_m,$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_m$ geeignet gewählte ganze rationale homogene Funktionen der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind.

Der Beweis dieses Satzes ist mir durch den Schluß von n auf $n+1$ Veränderliche gelungen. Im besonderen ist nach diesem Satze die r^{te} Potenz irgend einer von jenen Formen $F, F', F'', \ldots$ in der angegebenen Gestalt darstellbar, eine Thatsache, welche für den speciellen Fall zweier nicht homogenen Veränderlichen bereits von E. Netto[1]) ausgesprochen und bewiesen worden ist.

Es seien nun μ Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ der Grundform vorgelegt von der Beschaffenheit, daß allemal, wenn man den Coefficienten der Grundform solche besonderen Werte erteilt, welche diese μ Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ zu Null machen, nothwendig sämmtliche Invarianten der Grundform verschwinden. Es giebt dann dem vorigen allgemeinen Theoreme zufolge eine Zahl r derart, daß jedes Produkt P von irgend r oder mehr Invarianten der Grundform in der Gestalt

$$P = a_1 I_1 + a_2 I_2 + \cdots + a_\mu I_\mu$$

darstellbar ist, wo $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ ganze rationale Funktionen der Coefficienten der Grundform sind. Nunmehr denken wir uns die endliche Basis $i_1, i_2, \ldots, i_m$ der Invarianten des Systems ermittelt und es sei ν die größte von den Gradzahlen dieser Invarianten: dann stellt sich offenbar eine jede Invariante i, deren Grad $\geqq \nu r$ ist, als Summe von Produkten P dar und es gilt daher die Formel

$$i = b_1 I_1 + b_2 I_2 + \cdots + b_\mu I_\mu,$$

wo $b_1, b_2, \ldots, b_\mu$ wiederum ganze rationale Funktionen der Coefficienten der Grundform sind. Nach den Entwickelungen des letzten Abschnittes meiner oben citirten Abhandlung[2]) kann man in der letzten Formel die Ausdrücke $b_1, b_2, \ldots, b_\mu$ stets durch Invarianten $i'_1, i'_2, \ldots, i'_\mu$ ersetzen, so daß wir die Gleichung

$$i = i'_1 I_1 + i'_2 I_2 + \ldots + i'_\mu I_\mu$$

behalten. Die Invarianten $i'_1, i'_2, \ldots, i'_\mu$ sind sämmtlich von niederem Grade in den Coefficienten der Grundform als die Invariante i; sie können ihrerseits wiederum in der nämlichen Weise durch lineare Combination der Invarianten $I_1, I_2, \ldots I_\mu$ erhalten werden und dieses Verfahren läßt sich so lange fortsetzen, bis wir zu Invarianten gelangen, deren Grad $< \nu r$ ist. Wir denken uns sämmtliche linear unabhängige Invarianten, deren Grad $< \nu r$ ist, aufgestellt und bezeichnen dieselben mit $k_1, k_2, \cdots, k_w$. Für eine beliebige Invariante i der Grunform besteht dann ein System von w Gleichungen der folgenden Gestalt

1) Vgl. Acta mathematica Bd. 7, S. 101.

2) Vgl. Mathematische Annalen Bd. 36, S. 527.

$$\begin{aligned} i k_1 &= G_1^{(1)} k_1 + G_2^{(1)} k_2 + \cdots + G_w^{(1)} k_w, \\ i k_2 &= G_1^{(2)} k_1 + G_2^{(2)} k_2 + \cdots + G_w^{(2)} k_w, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ i k_w &= G_1^{(w)} k_1 + G_2^{(w)} k_2 + \cdots + G_w^{(w)} k_w, \end{aligned}$$

wo $G_1^{(1)}, \ldots, G_w^{(w)}$ ganze rationale Funktionen der Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ bedeuten. Durch Elimination von $k_1, k_2, \ldots k_w$ folgt die Gleichung

$$\begin{vmatrix} G_1^{(1)}-i & G_2^{(1)} & \ldots & G_w^{(1)} \\ G_1^{(2)} & G_2^{(2)}-i & \ldots & G_w^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_1^{(w)} & G_2^{(w)} & \ldots & G_w^{(w)}-i \end{vmatrix} = 0,$$

welche zeigt, daß i eine *ganze* algebraische Funktion von $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ ist. Wir gelangen somit zu folgendem Satze, welcher den Kern der zu entwickelnden Theorie der algebraischen Invarianten enthält:

Wenn irgend μ Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ die Eigenschaft besitzen, daß das Verschwinden derselben stets nothwendig das Verschwinden aller Invarianten der Grundform zur Folge hat, so sind alle Invarianten ganze algebraische Funktionen jener μ Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$.

Der Satz findet in allen besonderen bisher berechneten Fällen die schönste Bestätigung, wie folgende Beispiele zeigen.

Für die binäre Form 5ter Ordnung erfüllen die 3 Invarianten A, B, C von den Graden beziehentlich 4, 8, 12 die Bedingungen des Satzes. Denn das gleichzeitige Verschwinden derselben bedingt notwendig das Auftreten eines dreifachen Linearfaktors in f und dieser Umstand wiederum hat, wie man leicht einsieht, zur Folge, daß alle Invarianten der binären Form gleich Null sind. Nach unserem Satze müssen daher alle Invarianten *ganze* algebraische Funktionen von A, B, C sein und in der That enthält das volle System nur noch eine weitere Invariante nämlich die schiefe Invariante R, deren Quadrat bekanntlich eine ganze rationale Funktion von A, B, C ist.

Die binäre Form 6ter Ordnung besitzt, wie leicht einzusehen ist, 4 Invarianten A, B, C, D von den Graden beziehentlich 2, 4, 6, 10, deren gleichzeitiges Verschwinden nothwendig das Auftreten eines vierfachen Linearfaktors bedingt. Dieser Umstand hat zur Folge, daß alle Invarianten der Form gleich null sind: in der

That ist entsprechend unserem Satze die noch übrige schiefe Invariante R der Grundform eine ganze algebraische Funktion von A, B, C, D, nämlich gleich der Quadratwurzel aus einer ganzen rationalen Funktion dieser 4 Invarianten.

Um die simultanen Invarianten zweier binären cubischen Formen f, g aufzustellen, bilden wir eine lineare Combination $\varkappa f+\lambda g$ derselben und entwickeln die Diskriminante von dieser Form nach den unbestimmten Parametern $\varkappa$ und λ, wie folgt:

$$D(\varkappa f+\lambda g) = D_0\varkappa^4 + D_1\varkappa^3\lambda + D_2\varkappa^2\lambda^2 + D_3\varkappa\lambda^3 + D_4\lambda^4.$$

Die 5 Invarianten D_0, D_1, D_2, D_3, D_4 sind offenbar nur dann sämmtlich gleich null, wenn die cubischen Formen f und g beide den nämlichen Linearfaktor zweifach enthalten und dieser Umstand wiederum hat zur Folge, daß auch alle übrigen Simultaninvarianten null sind. Unserem Satze zufolge müssen daher alle simultanen Invarianten der beiden cubischen Formen f und g ganze algebraische Funktionen von D_0, D_1, D_2, D_3, D_4 sein. Das volle Invariantensystem enthält nun außer diesen 5 Invarianten nur noch 2 weitere Invarianten nämlich die Ueberschiebung $(f, g)_3$ und die Resultante R der beiden Formen: man findet in der That, daß diese beiden Invarianten ganze algebraische Funktionen jener 5 Invarianten sind.

Um die entsprechende Untersuchung für zwei binäre biquadratische Formen f und g durchzuführen, setzen wir

$$\begin{aligned} i(\varkappa f+\lambda g) &= i_0\varkappa^2 + i_1\varkappa\lambda + i_2\lambda^2, \\ j(\varkappa f+\lambda g) &= j_0\varkappa^3 + j_1\varkappa^2\lambda + j_2\varkappa\lambda^2 + j_3\lambda^3. \end{aligned}$$

Es folgt dann aus entsprechenden Gründen wie vorhin, daß jede Simultaninvariante der beiden Formen f und g eine ganze alge- Funktion der 7 Invarianten i_0, i_1, i_2, j_0, j_1, j_2, j_3 ist.

Wir betrachten ferner zwei ternäre cubische Formen f und g; wir combinieren dieselben linear und bilden die beiden Invarianten

$$\begin{aligned} S(\varkappa f+\lambda g) &= S_0\varkappa^4 + \ldots + S_4\lambda^4, \\ T(\varkappa f+\lambda g) &= T_0\varkappa^6 + \ldots + T_6\lambda^6. \end{aligned}$$

Aus unserem Satze folgt dann, daß alle simultanen Invarianten der beiden Formen f und g ganze algebraische Funktionen der 12 Invarianten $S_0, \ldots, S_4$, $T_0, \ldots, T_6$ sind und hieraus schließt man zugleich, daß dieselben von einander algebraisch unabhängig sind.

Betrachten wir eine binäre Form f von der 5ten Ordnung und eine lineare Form l, so ergiebt sich, daß alle simultanen Invarianten dieser beiden Formen ganze algebraische Funktionen von A, B, C,

$(f, l^5)_5$, $(h, l^6)_6$, $(i, l^2)_2$ sind, wo $h = (f, f)_2$ und $i = (f, f)_4$ gesetzt ist; es drücken sich also alle 23 Formen des vollen Invariantensystems einer binären Grundform als ganze algebraische Funktionen von sechs derselben aus.

Wir behandlen endlich noch ein allgemeineres Beispiel, nämlich das System von ν binären linearen Formen

$$l_1 = a_1 x + b_1 y, \quad l_2 = a_2 x + b_2 y, \ldots, \quad l_\nu = a_\nu x + b_\nu y.$$

Das volle Invariantensystem besteht aus den Determinanten

$$p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i \, (i, k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Wir bilden die beiden binären Formen $\nu - 1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\varphi = a_1 \xi^{\nu-1} + a_2 \xi^{\nu-2} \eta + \cdots + a_\nu \eta^{\nu-1},$$
$$\psi = b_1 \xi^{\nu-1} + b_2 \xi^{\nu-2} \eta + \cdots + b_\nu \eta^{\nu-1}$$

und berechnen die Funktionaldeterminante derselben

$$(\varphi, \psi)_1 = P_0 \xi^{2\nu-4} + P_1 \xi^{2\nu-5} \eta + \cdots + P_{2\nu-4} \eta^{2\nu-4}$$

Die Coefficienten $P_0, P_1, \ldots, P_{2\nu-4}$ sind als lineare Combinationen der Determinanten p_{ik} selber Invarianten der linearen Grundformen, und man erkennt leicht, daß, wenn diese Invarianten $P_0, P_1, \ldots, P_{2\nu-4}$ sämmtlich Null sind, nothwendig entweder alle Coefficienten der Form φ oder diejenigen von ψ verschwinden oder beide Formen bis auf einen numerischen Faktor mit einander übereinstimmen. In allen diesen Fällen sind sämmtliche Determinanten p_{ik} gleich null und hieraus folgt mit Hülfe unseres Satzes, daß die Determinanten p_{ik} ganze algebraische Funktionen von $P_0, P_1, \ldots P_{2\nu-4}$ sind[1]), woraus zugleich die Unabhängigkeit der letzteren $2\nu - 3$ Invarianten geschlossen werden kann.

Bei dem Beweise unseres allgemeinen Satzes wurde die Eigenschaft 6 der Invarianten wesentlich benutzt; aber es folgt auch umgekehrt aus diesem Satze die Endlichkeit des vollen Invariantensystems. Wenn nämlich $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ ein System von Invarianten ist, durch welche alle anderen Invarianten als ganze algebraische Funktionen dargestellt werden können, so kann man einen von L. Kronecker[2]) gegebenen fundamentalen Satz der Theorie der

1) Das nämliche Resultat habe ich auf einem völlig anderen Wege erhalten in meiner Arbeit: Ueber Büschel von binären Formen mit vorgeschriebener Funktionaldeterminante; Mathematische Annalen Bd. 33. S. 233.

2) Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen § 6.

algebraischen Funktionen anwenden und findet so in dem durch alle Invarianten bestimmten Rationalitätsbereiche eine endliche Zahl $i_1, i_2, \ldots, i_M$ von ganzen algebraischen Funktionen der Größen $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ von der Art, daß jede andere ganze algebraische Funktion I des betrachteten Rationalitätsbereiches in der Gestalt

$$I = a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_M i_M$$

dargestellt werden kann, wo $a_1, a_2, \ldots, a_M$ ganze rationale Funktionen von $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ sind. Nun sind $i_1, i_2, \ldots i_M$ ganze rationale Invarianten; denn es kann leicht gezeigt werden, daß jede rationale Invariante, welche eine ganze algebraische Funktion der ganzen rationalen Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ ist, nothwendig selber eine ganze rationale Invariante ist. Die Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$, $i_1, i_2, \ldots, i_M$ bilden folglich eine endliche Basis des Systems aller Invarianten der Grundform. Nach Kenntniß eines Systems von Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$, durch welche sich alle Invarianten als ganze algebraische Funktionen ausdrücken lassen, erfordert also die Aufstellung des vollen Invariantensystems nur noch die Lösung einer elementaren Aufgabe aus der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen. Bei der wirklichen Ausführung der Rechnung kommt es vor allem auf die Berechnung der Diskriminante einer den Rationalitätsbereich bestimmenden Gleichung an, da bei der Darstellung der Funktionen des Fundamentalsystems diese Diskriminante allein im Nenner auftreten kann.

Um beispielsweise zu dem bekannten vollen Formensysteme einer binären Form 5ter Ordnung zu gelangen, hat man ein Fundamentalsystem im Systeme aller derjenigen Funktionen zu bestimmen, welche ganze algebraische Funktionen der oben angegebenen invarianten Bildungen, A, B, C, f, $h = (f, f)_2$, $i = (f, f)_4$ und zugleich rationale Funktionen von f, h, $(f, h)_1$, i, $(f, h)_3$ sind.

Nach den obigen Entwickelungen ist es für das Studium der Invarianten einer Grundform von größter Wichtigkeit, dasjenige algebraische Gebilde Z zu kennen, welches durch Nullsetzen aller Invarianten bestimmt ist. Bedeutet σ die Anzahl der algebraisch unabhängigen Invarianten, so giebt es, wie oben gezeigt worden ist, stets σ Invarianten, durch deren Nullsetzen das Gebilde Z bereits völlig bestimmt ist; aus unserem allgemeinen Satze kann zugleich geschlossen werden, daß es nicht möglich ist, eine kleinere Zahl von Invarianten anzugeben, durch deren Nullsetzen das Gebilde Z ebenfalls schon bestimmt wird. Für den Fall einer binären Grundform läßt sich das Nullgebilde Z allgemein angeben, wie der folgende Satz zeigt:

Wenn alle Invarianten einer binären Grundform von der Ordnung $n = 2\nu$ beziehungsweise $n = 2\nu+1$ gleich null sind, so besitzt die Grundform einen $\nu+1$-fachen Linearfaktor und umgekehrt, wenn dieselbe einen $\nu+1$-fachen Linearfaktor besitzt, so sind sämmtliche Invarianten gleich null.

Auf entsprechende Untersuchungen für Formen mit mehr Veränderlichen gehe ich hier nicht ein.

Die Fruchtbarkeit der im Obigen dargelegten Principien bewährt sich insbesondere, wenn man dieselben mit denjenigen auf allgemeine Moduln bezüglichen Methoden in Verbindung bringt, welche ich in Abschnitt III und IV meiner Abhandlung »Ueber die Theorie der algebraischen Formen« entwickelt habe. Um das einzuschlagende Verfahren an einem Beispiele kurz zu kennzeichnen, stellen wir uns die Aufgabe, die »charakteristische Funktion« desjenigen algebraischen Gebildes zu bestimmen, welches man erhält, wenn man

$$p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i \, (i, k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

setzt und hierin die Größen p_{ik}, als die Veränderlichen und die Größen a_i, b_i als willkürliche Parameter auffaßt. Man sieht leicht ein, daß die charakteristische Funktion dieses Gebildes gleich ist der Anzahl der linear unabhängigen Invarianten vom Grade $2R$ in den Coefficienten der ν binären linearen Formen:

$$a_1 x + b_1 y, \qquad a_2 x + b_2 y, \; \ldots, \qquad a_\nu x + b_\nu y,$$

und diese Anzahl stellt sich nach dem Cayley-Sylvester'schen Abzählungssatze[1]) als Differenz zwischen Anzahlen von Lösungen gewisser linearer diophantischer Gleichung dar. Nach einer einfachen Rechnung erhalten wir für die gesuchte charakteristische Funktion den Wert

$$\chi(R) = \frac{1}{(\nu-1)!\,(\nu-2)!}(R+1)(R+2)^2 R+3)^2 \ldots (R+\nu-2)^2 (R+\nu-1).$$

Die Funktion ist, wie man sieht, vom $2\nu-4^{\text{ten}}$ Grade in R: jenes algebraische Gebilde ist mithin von der Dimension $d = 2\nu-4$.

1) Vgl. Cayley, Philosophical Transactions. London 1856, S. 107 und Sylvester, Crelle's Journal Bd. 85, S. 89.

Der Coefficient der $d$ten Potenz von R ist $\frac{1}{(\nu-1)!\,(\nu-2)!}$; derselbe giebt mit $d!$ multipliciert die Ordnung jenes algebraischen Gebildes an[1]). Diese beiden Resultate bestätigen die bekannten Thatsachen[2]), daß es zu jeder gegebenen binären Form gerader Ordnung $2\nu-4$ Büschel von binären Formen giebt, deren Funktionaldeterminante jener gegebenen Form gleich sind und daß die Anzahl dieser Formenbüschel gleich $\frac{(2\nu-4)!}{(\nu-1)!\,(\nu-2)!}$ wird.

1) Vgl. meine Abhandlung: »Ueber die Theorie der algebraischen Formen«. Mathematische Annalen Bd. 36, S. 520.

2) Vgl. meine Arbeit: »Ueber Büschel von binären Formen mit vorgeschriebener Funktionaldeterminante«, Mathematische Annalen Bd. 33, S. 227, sowie die dort ausführlich citirte Litteratur.

Königsberg i. Pr. den 30. Juni 1891.

Lehrer und Schüler bei Iunilius Africanus.

Von

Alfred Rahlfs.

Vorgelegt von Paul de Lagarde.

Die Instituta regularia divinae legis des Iunilius Africanus, deren kritische Ausgabe wir H. Kihn[1]) verdanken, sind in Form eines Gespräches zwischen Lehrer und Schülern abgefaßt. Das Gespräch verläuft in Fragen und Antworten; jenen hat Iunilius jedesmal ein $\varDelta$, diesen ein M vorgesetzt. Den Grund, welcher ihn veranlaßt hat, diese griechischen Buchstaben zu wählen, während er doch sonst sein Buch in lateinischer Sprache schreibt, gibt er selbst in der dem Buche vorausgeschickten Widmung an Primasius an. Die Worte lauten bei Kihn 468_{17}—469_{2}

> Et ne aliqua confusio per antiquariorum, ut adsolet, neglegentiam proveniret, magistro M graecam litteram, discipulis $\varDelta$ praeposui, ut ex peregrinis characteribus et quibus latina scriptura non utitur, error omnis penitus auferatur.

Wir sehen: Iunilius mistraut den Abschreibern gründlich, und er hat Recht mit seinem Mistrauen. Denn trotz seiner Vorsicht ha-

1) Theodor von Mopsuestia und Junilius Africanus, Freiburg i. B. 1880, S. 465—528.

ben sie ihm eine confusio in sein Buch gebracht, welche sich überall sehen lassen kann.

Es liegt auf der Hand, daß Iunilius, wenn er die griechischen Buchstaben *Δ* und *M* zur Bezeichnung von Lehrer und Schülern gebraucht, damit die griechischen Wörter *διδάσκαλος* und *μαθηταί* meint. Und bei dieser Deutung von *Δ* und *M* ist auch alles im Reinen. Denn da es zur Zeit des Iunilius, ebenso wie noch heut zu Tage, so hergegangen sein wird, daß der Lehrer fragte und die Schüler antworteten, so ist es ganz richtig, wenn die Fragen dem *Δ* = *διδάσκαλος*, die Antworten den *M* = *μαθηταί* zugewiesen werden.

Nun fangen aber unglücklicher Weise die Wörter für *Lehrer* und *Schüler* im Lateinischen mit denselben Buchstaben an, wie im Griechischen, und zwar umgekehrt mit denselben Buchstaben: der Lehrer, der im Griechischen *διδάσκαλος* heißt, heißt im Lateinischen *magister*, der Schüler, der sich dort *μαθητής* nennt, nennt sich hier *discipulus*. Dies hat die trefflichen antiquarii bewogen, *M* als magister, *Δ* als discipuli zu deuten und in der angeführten Stelle

> magistro *M* graecam litteram, discipulis *Δ* praeposui

zu schreiben, während es natürlich heißen muß

> magistro *Δ* graecam litteram, discipulis *M* praeposui.

Nur Eine Handschrift, Kihns D, hat das Richtige erhalten.

Wie aber überhaupt ein Unglück selten allein kommt, so ist es auch hier gegangen. Die erste Verwirrung hat eine zweite nach sich gezogen.

Iunilius spricht sich in den der oben ausgeschriebenen Stelle unmittelbar vorangehenden Worten über die Anlage seines Werkes aus. Er sagt, er habe demselben »ipsius dictionis, quantum potui, utilem formam« gegeben,

> ut velut magistro interrogante et respondentibus discipulis breviter singula et perlucide dicerentur.

Diese Worte, welche so nur in NF erhalten sind, geben die Anlage des Buches durchaus richtig und klar an. Aber sobald man *Δ* als discipuli, *M* als magister versteht, widersprechen sie dem Thatbestande, denn *Δ* fragt und *M* antwortet. Dieser Widerspruch hat den Schreiber von F nicht angefochten. Die übrigen haben ihn zu beseitigen gesucht. Zu diesem Zwecke haben sie zweierlei Wege eingeschlagen.

Das Gros der Handschriften, AGMD[1])LPR, dreht die Sache

1) Es ist sehr auffällig, daß D, welcher in der zuerst besprochenen Stelle allein das Richtige bewahrt hatte, hier (nach Kihn) das Falsche hat, da diese

einfach um und schreibt

ut velut discipulis interrogantibus et magistro respondente etc.

Doch hat A

discipulo interrogante

im Singular und verrät dadurch noch, daß dort ursprünglich magistro interrogante gestanden hat.

Dem Schreiber von N dagegen ist es zu dumm gewesen, die Schüler fragen und den Lehrer antworten zu lassen. Daher hat er eine Radikalkur gebraucht und die *Δ* und *M* im ganzen Buche vertauscht (Kihn $471_{6}{}^{r}$).

Alle älteren Ausgaben, welche ich verglichen habe, die editio princeps Basel 1545, und die Abdrücke bei de la Bigne[2] I Paris 1589, Gallandi XII Venedig 1778 und Migne LXVIII (vgl. Kihn 299—302), haben die falschen Lesarten, weil sie diese in ihrer Vorlage fanden. De la Bigne, Gallandi und Migne sind auf dem von den antiquarii eingeschlagenen Wege noch weiter gegangen: sie haben die — jetzt allerdings sinnlos gewordenen — griechischen Buchstaben durch lateinische ersetzt. Kihn fand das Ursprüngliche in einigen Handschriften vor, wurde aber jedenfalls durch die Menge und das Alter (vgl. unten) der dagegen stehenden Zeugen gehindert, es als ursprünglich zu erkennen und in den Text einzusetzen.

Man darf Kihn hieraus keinen Vorwurf machen, sondern muß ihm dankbar sein, daß er durch seine vollständige Mitteilung des textkritischen Materials auch diejenigen, welche die Handschriften nicht einsehen können, in den Stand gesetzt hat, seinen Text zu controllieren und eventuell zu berichtigen. Es versteht sich von selbst, daß der, welcher einen so verderbten Text, wie den des Iunilius, zum ersten Male kritisch herausgibt, nicht überall gleich das Richtige trifft. Trotzdem muß es auffällig erscheinen, daß Kihn hier an dem Richtigen so achtlos vorübergegangen ist, da er den alten Text nicht gedankenlos übernommen, sondern sich über die in demselben angegebene, sonderbare Anlage des Werkes Rechenschaft zu geben versucht hat. Er sagt 222:

Die Fragen der Schüler, welche sich unterrichten lassen, dienen lediglich zur Vermittlung der Uebergänge in dem Vortrage des Lehrers, der ihnen Belehrung ertheilt

und zieht am Rande als Parallele die »24 Collationes patrum« Cassians herbei,

---

zweite confusio erst eine Folge jener ersten ist. Falls Kihns Angabe nicht auf einem Irrtum beruht, muß Ds Text ein Mischtext sein.

wo die Freunde nach kurzen Zwischenreden vom fragenden oder befragten ,Vater' unterrichtet werden.

Aber mit dieser Erklärung ist Kihn ganz unglücklich gefahren. Die Fragen bei Iunilius sind keineswegs, wie die bei Cassian, gleichgültige Uebergangsformeln, vielmehr bilden sie das Gerippe des ganzen Werkes; nähme man sie fort, so würde das Uebrigbleibende in unzusammenhangende Stücke zerfallen. In den Fragen liegt die Disposition des Buches; nur derjenige kann sie stellen, welcher den ganzen Stoff beherrscht und das Gespräch völlig zielbewußt leitet, also nur der Lehrer, nicht die Schüler. Und dann die Form der Fragen! Man braucht nur einige derselben zu lesen, etwa im 4. Kapitel des 1. Buches

Quid est prophetia?
Da in praeteritis prophetiam!
Da in praesentibus!
Da in futuris!
Quare in definitione positum est ,latentium'?
Proba hoc divinae scripturae testimonio!
Quare addidimus ,ex divina inspiratione'?,

um zu sehen, daß so nicht der Schüler, sondern nur der Lehrer fragen kann. Das Buch des Iunilius ist ein »Katechismus«, dessen Antworten die Schüler auswendig zu lernen und dem Lehrer auf seine Fragen herzusagen haben. Das »Gespräch« zwischen Lehrer und Schülern hat nicht, wie ein platonischer Dialog, den Zweck, durch gemeinsames Forschen neue Wahrheiten zu entdecken, sondern den, die festgestellten Regeln den Schülern einzupauken, — lateinisch gesagt — *regulis discipulorum animos imbuere* (Iunilius' Widmung Kihn 468 6/8). Die entgegengesetzte Vorstellung, daß die Schüler — NB. im Plural — den Lehrer katechesieren, und er als geduldiges Opferlamm alle ihre unverschämten Fragen beantwortet, widerlegt sich selbst. Eine solche Vorstellung kann man nur so lange für möglich halten, als man sich ein lebendiges Bild von dem Hergange in praxi zu machen versäumt.

Ich schließe mit einer Nutzanwendung für die Textkritik insgemein.

Der vorliegende Fall beweist, daß Eine Handschrift allen anderen gegenüber Recht haben kann.

Er beweist ferner, daß selbst bei Stellen, die in so engem Zusammenhange stehn, wie die besprochenen, doch verschiedene Handschriften das Richtige bewahrt haben können, sodaß ein eklektisches Verfahren zur Herstellung des ursprünglichen Textes erforderlich ist.

Er beweist endlich, daß man in dem hohen Alter einer Handschrift keine Garantie für die Richtigkeit der von ihr gebotenen Lesarten sehen und bei der Reconstruction eines Textes sein Urteil nicht durch das Alter oder die Jugend der Handschriften bestimmen lassen darf. Kihns älteste Handschrift, G, welche nach ihm aus der zweiten Hälfte des 6. Jahrhunderts, also aus der Zeit kurz nach Abfassung des im Jahre 551 geschriebenen Buches (vgl. Kihn 275—289) stammt, hat an beiden Stellen das Falsche. Der Codex D, welcher an der ersten Stelle den ursprünglichen Text bewahrt hat, gehört dem 9. Jahrhundert an; die Codices NF, welche ihn an der anderen Stelle bewahrt haben, zählen, da N im 10. oder im Anfange des 11., F im 11. Jahrhundert geschrieben ist, sogar zu den jüngsten Handschriften: nur noch Eine Handschrift (R) stammt aus dem 11. Jahrhundert, alle übrigen sind älter.

Dies sind keine neuen Sätze, sondern neue Beweise für alte Sätze. Ich führe sie an, weil sie die Richtigkeit der alten Sätze so schlagend und unwiderleglich darthun.

Wenn man will, kann man aus dem ersten Satze weiter auf das Recht der Emendation, vulgo Conjectur, schließen: wäre D verloren, so müßten wir ohne Zeugen emendieren. Ich darf wohl erwähnen, daß ich wirklich in vorliegendem Falle die Emendation gemacht habe, ehe ich die Bestätigung ihrer Richtigkeit in Kihns Apparate fand; was ja in d i e s e m Falle nicht schwer war.

Inhalt von Nr. 7.

Eduard Riecke, über eine mit den electrischen Eigenschaften des Turmalins zusammenhängende Fläche. — *D. Hilbert*, über die Theorie der algebraischen Invarianten. — *Alfred Rahlfs*, über Lehrer und Schüler bei Junilius Africanus.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

11. November. **№ 8.** 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 1. August.

Riecke kündigt eine Arbeit von sich und Voigt an: „Bestimmung der elektrischen Constanten des Turmalins und Quarzes".

Voigt kündigt eine Abhandlung an: „Bestimmung der Constanten der innern Reibung für einige Krystalle".

Kielhorn kündigt „Tafeln aus indischen Inschriften und Handschriften" an.

Die piëzoëlectrischen Constanten des Quarzes und Turmalins.

Von

E. Riecke und **W. Voigt.**

1. Allgemeine Angaben über die Methode der Beobachtung.

Die untersuchten Crystallstücke besaßen die Form rechtwinkliger Prismen, deren Kanten gegen die Hauptaxen der Crystalle in bestimmter Weise orientirt waren. Die Anordnung des Apparates, welcher zur Belastung der Prismen diente, war eine etwas verschiedene, je nachdem die elektrische Erregung auf den gepreßten Flächen selbst beobachtet werden sollte oder auf den Seitenflächen. Im ersteren Falle war die Einrichtung folgende. Ein parallelepipedisches Messingstück M von $13\frac{1}{2}$ cm Länge, 3 cm Breite, $1\frac{1}{3}$ cm Höhe war auf einem großen mit Gewichten beschwerten Holzklotze so befestigt, daß es über den Rand des Klotzes um 3 cm vorstand. Die Crystalle wurden von einer Klemme gefaßt, deren Backen aus federnden Streifen von hartem Kupferblech bestanden und durch ein Hartgummistück von einander isolirt waren. An den Enden der Backen waren nach innen zu Blei- oder Kupferplatten angelöthet, deren Distanz so regulirt war, daß die Crystalle zwischen ihnen mit mäßigem Drucke festgehalten wurden. Auf der oberen Backe war nach außen ein kleines Stahlstück befestigt, dachförmig abgeschrägt, so daß sich in seiner Mitte eine scharfe Kante von etwa 0,3 cm Länge bildete, parallel zu der Längsrichtung der Klemme. Die Crystalle wurden so in die Klemme gebracht, daß jene Kante genau über der Mitte der gepreßten Crystallflächen lag. Die Klemme mit dem von ihr gehaltenen Crystall wurde auf das Messingstück M gestellt, so daß der Crystall auf dem überragenden Theile desselben sich befand und daß die Kante des Stahlklötzchens der Längsrichtung von M parallel war. Nun wurde ein aus einem rechteckigen Rahmen bestehender Bügel über die Klemme gehängt, dessen oberes horizontales Stück eine nach innen gekehrte scharfe Schneide besaß. Mit dieser wurde der Bügel über die an dem Stahlklötzchen befindliche Schneide gehängt, so daß der Berührungspunkt der beiden Schneiden genau über der Mitte der gepreßten Crystallflächen sich befand. An seinem unteren Ende trug der Bügel einen starken Draht, an welchen die zur Aufnahme der Gewichtsstücke dienende Wagschale angehängt wurde. Zufolge der geschilderten Einrichtung stand die untere Klemme in metallischer Berührung mit dem als Unterlage dienenden Messingstücke; sie wurde ein für allemal mit der Gasleitung verbunden. Der Holzblock, auf welchem die Vorrichtung ruhte, war mit Stanniolstreifen überzogen und gleichfalls abgeleitet. Die obere Feder und damit auch die obere Endfläche des Crystalls wurde mit dem einen Quadrantenpaar eines von Stöhrer konstruirten Thomson'schen Elektrometers verbunden; das andere Quadrantenpaar war abgeleitet, die Nadel mit Hülfe einer trockenen Säule geladen. Die ganze Einrichtung befand sich auf einem festen Tische in einem Glaskasten, welcher auf seiner inneren Seite mit Gittern von Messingdraht ausgekleidet war. Die Oberfläche des Tisches war gleichfalls mit Stanniol überzogen und abgeleitet; der die Wagschale tragende Draht gieng durch eine Auskehlung des Tischrandes nach unten. Durch einen federnden Contakt konnte der die obere Crystallfläche mit dem Elektrometer verbindende Draht abgeleitet werden. Die Bewegung des Contaktes erfolgte mit Hülfe einer Schnur, welche durch eine Durchbohrung der Decke in das Innere hineingeführt war.

Sollte die elektrische Ladung auf den Seitenflächen der Crystalle beobachtet werden, so wurden die Klemmen entfernt. Auf das Messingstück *M* wurde eine Hartgummiplatte als isolirende Unterlage gelegt, und auf diese der Crystall gestellt, so daß er sich wieder auf dem überragenden Theile von *M* befand. Die zur Aufnahme des Bügels dienenden Stahlklötzchen waren gleichfalls auf Hartgummiplatten befestigt; sie wurden mit diesen frei auf die oberen Flächen der Crystallprismen aufgesetzt, so daß die Schneiden über der Mitte der gepreßten Flächen sich befanden. Der Bügel und die zur Belastung dienenden Gewichte wurden ebenso angebracht wie früher. Die Seitenflächen, auf welchen die elektrische Erregung gemessen werden sollte, wurden mit Stanniol überzogen; sie wurden wieder von den beiden Backen einer federnden Klemme gefaßt, welche von der Seite her angeschoben wurde. Die eine der beiden von einander isolirten Federn wurde mit der Gasleitung, die andere mit dem Elektrometer verbunden.

Bei jeder Beobachtungsreihe wurde die Empfindlichkeit des Elektrometers bestimmt, indem dasselbe Quadrantenpaar, welches bei den piëzoëlektrischen Versuchen mit der Crystallfläche verbunden war, durch ein Clarkelement geladen wurde, dessen anderer Pol zur Erde abgeleitet war. Die Verbindungen der Pole konnten durch einen eingeschalteten Commutator vertauscht werden. Nachdem das Clarkelement entfernt war, wurde die Verbindung der Crystallfläche mit dem Quadrantenpaar hergestellt und durch Schließen des erwähnten Federkontaktes die Ableitung nach der Erde bewerkstelligt. Diejenige Stellung, welche das Elektrometer unter diesen Umständen annimmt, wird im Folgenden als Nullstellung bezeichnet. Die Crystallprismen wurden zunächst dauernd mit einem Gewichte belastet, welches je nach der Größe der gepreßten Fläche zwischen 3 und 4 kgm schwankte. Durch Aufheben des Federkontaktes wurde die Crystallfläche sammt dem mit ihr verbundenen Quadrantenpaar isolirt. Hierauf wurden 2 kgm auf der Wagschale zugelegt und der hierdurch verursachte Ausschlag gemessen. Die Nadel des Elektrometers wurde sodann durch Schließen des Contaktes in die Nullstellung zurückgeführt, der Contakt jetzt abermals unterbrochen, die zuvor aufgelegten 2 kgm wieder abgenommen und der nun nach der entgegengesetzten Seite erfolgende Ausschlag beobachtet. So wurde bei abwechselnder Belastung und Entlastung eine größere Zahl von Ausschlägen nach der einen und der anderen Seite hin beobachtet; die Differenz der beiderseitigen Ablesungen gab ein Maaß für die entwickelte Elektricitätsmenge. Dividirt man die Hälfte der Differenz d. h. den einer

Belastung von 1 kgm entsprechenden doppelten Ausschlag, durch den entsprechenden von dem Clarkelement bei der Vertauschung der Pole erzeugten, so erhält man das Potential V, bis zu welchem das Quadrantenpaar des Elektrometers bei einer Belastung von 1 kgm geladen wird, in der Einheit des Clark. Bezeichnet man durch Q die Kapacität des Quadrantenpaares, durch X die der Crystallfläche und der verbindenden Drähte, so ist die entwickelte Elektricitätsmenge

$$e = (Q + X) V.$$

Die Verhältnisse der auf den verschiedenen Crystallflächen entwickelten Elektricitätsmengen sind gegeben durch die entsprechenden Werthe von V, wenn die Verschiedenheiten von X für die verschiedenen Flächen zu vernachlässigen sind. Daß dies bei der gewählten Anordnung der Versuche in der That gestattet war, wurde durch eine besondere Versuchsreihe nachgewiesen. Bestimmt man die Kapacität $Q + X$ in elektrostatischem Maaße und drückt man ebenso das Potential V statt in Clark in absolutem elektrostatischem Maaße aus, so ergiebt sich die Menge der entwickelten Elektricität in den Einheiten der Elektrostatik.

2. Die piëzoëlectrischen Constanten des Quarzes.

Bei den Versuchen wurden zunächst 3 Prismen benutzt, welche im Folgenden durch B, C und D bezeichnet sind. Alle drei waren aus einer und derselben Platte geschnitten, welche senkrecht zu einer polaren Queraxe x des Crystalles lag. Die Dicken der Platten in der Richtung der x-Axe waren in cm.

B	C	D
1,921	1,912	1,919.

Die Lage der Prismen in der yz-Ebene werde dadurch bestimmt, daß die Winkel ihrer Höhen oder Seiten gegen die Hauptaxe z des Quarzes angegeben werden. Die Winkel sind positiv gerechnet im Sinne einer Drehung von der z-Axe zu der y-Axe.

Quarz	Höhe	Winkel gegen die z-Axe
B	5,402	45^0
C	5,239	135^0
D	3,437	$22\frac{1}{2}{}^0$
	3,501	$112\frac{1}{2}{}^0$.

Der Quarz B wurde später senkrecht zu seiner Höhe in zwei gleiche Stücke zerlegt, welche mit B_1 und B_2 bezeichnet werden mögen. Die Längen ihrer Seiten und ihre Orientirung gegen die z-Axe sind im Folgenden gegeben.

Quarz	Seite	Winkel gegen die z-Axe
B_1	2,498	45°
	2,279	135°
B_2	2,492	45°
	2,274	135°.

Als Einheit der Länge ist das cm benutzt.

Die belegten Flächen, auf welchen die Ladung gemessen wurde, waren bei allen Crystallen die zur x-Axe senkrecht stehenden. Die Prismen B und C wurden nur parallel ihren Höhen, also in den Azimuten 45° und 135° gepreßt; bei D wurde der Druck in der Richtung der beiden Seiten, also in den Azimuten $22\frac{1}{2}°$ und $112\frac{1}{2}°$, ausgeübt. Ebenso bei den beiden Stücken B_1 und B_2 entsprechend den Azimuten 45° und 135°. Endlich wurden die Prismen B_1 und B_2 auch noch in der Richtung der x-Axe gepreßt und die auf den gedrückten Flächen selbst erzeugten Electricitätsmengen gemessen. Man erhält dadurch indirekt die Ladung für das Azimut von 90° eines in der Ebene zy ausgeübten Druckes, d. h. die Ladung, welche durch einen Druck in der Richtung der y-Axe auf einer zur x-Axe senkrechten Seitenfläche erzeugt wird.

Bezeichnet man mit m_x die auf der belegten zur x-Axe senkrechten Fläche erzeugte Ladung, durch q_x ihren Flächeninhalt, durch p die Belastung, durch q den Querschnitt der gepreßten Fläche, durch ϑ das Azimut der Druckrichtung, so ist

$$-\frac{m_x}{p} \times \frac{q}{q_x} = -\delta_{11} \sin^2 \vartheta + \delta_{12} \sin \vartheta \cos \vartheta = -\nu.$$

Die für die verschiedenen Druckrichtungen aus den Beobachtungen sich ergebenden Werthe von $\frac{m_x}{p} \times \frac{q}{q_x} = \nu$ sind:

	$22\frac{1}{2}°$	45°	90°	$112\frac{1}{2}°$	135°
ν	0,044	0,119	0,186	0,151	0,076.

Hieraus ergeben sich die folgenden Werthe der Constanten δ_{11} und δ_{14}

$$\delta_{11} = 0,1908 \qquad \delta_{14} = -0,0431$$

und die mit Hülfe dieser Werthe berechneten piëzoëlectrischen Momente ν

	$22\frac{1}{2}°$	45°	90°	$112\frac{1}{2}°$	135°
ν ber.	0,043	0,117	0,191	0,148	0,074

welche mit den beobachteten in befriedigender Uebereinstimmung stehen. Als Einheit des Druckes ist dabei das kgm, als Einheit der Electricitätsmenge diejenige benutzt, mit welcher das Quadrantenpaar des Electrometers durch 1 Clarkelement geladen wird.

3. Die piëzoëlectrischen Constanten des Turmalins.

Es waren für die Zwecke der Untersuchung 4 Prismen aus demselben Crystall, einem brasilianischen von grüner Farbe, geschnitten worden, welche im Folgenden durch A, B, C, D bezeichnet werden. Die Länge, Breite und Höhe dieser Prismen, soweit ihre Kenntniß für die Berechnung nothwendig ist, wird in der folgenden Tabelle in cm angegeben.

	l	b	h
A	1,159	0,595	0,519
C	0,892		0,538
D	1,206		0,689.

Die Orientirung der Prismen gegen die Axen des Crystalls werde durch die Richtungskosinusse ihrer Kanten bestimmt; dabei ist das Coordinatensystem so gewählt, daß die z-Axe mit der dreizähligen Hauptaxe, die y-Axe mit einer Symmetrieebene des Crystalls zusammenfällt.

		x	y	z
A	l	1	0	0
	b	0	1	0
	h	0	0	1
B	l	0	1	0
	b	1	0	0
	h	0	0	1
C	l	0	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
	b	1	0	0
	h	0	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
D	l	0	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
	b	1	0	0
	h	0	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$

Die Beobachtungen ergaben für einen Druck von 1 kgm die folgenden Potentiale in der Einheit des Clarkelementes.

1. Druckrichtung parallel der z-Axe. Beobachtung der Ladung auf der zu der z-Axe senkrechten Fläche. Turmaline A und B.

$$V = 0{,}172.$$

2. Druckrichtung parallel der y-Axe. Beobachtung der Ladung auf einer zu der y-Axe senkrechten Fläche. Turmaline A und B.

$$V = 0{,}0205.$$

3. Die Richtungskosinusse der Druckrichtung sind $0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ladung auf der zu der Druckrichtung senkrechten Fläche. Turmaline C und D.

$$V = 0{,}177.$$

4. Die Richtungskosinusse der Druckrichtung sind $0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ladung auf der zu der Druckrichtung senkrechten Fläche. Turmaline C und D.

$$V = 0{,}191.$$

5. Druckrichtung parallel der x-Axe. Ladung auf der zur z-Axe senkrechten Fläche. Turmalin A.

$$V = 0{,}061.$$

6. Druckrichtung parallel der y-Axe. Ladung auf der zur z-Axe senkrechten Fläche. Turmalin A.

$$V = 0{,}028.$$

7. Richtungskosinusse der Druckrichtung $0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ladung in der Richtung $0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. Turmalin D.

$$V = 0{,}097.$$

8. Vergleichende Messung der bei den Turmalinen C und D auftretenden seitlichen Ladungen, wenn bei C die Richtungskosinusse des Druckes $0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$, die der Ladung $0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ sind, während D unter denselben Verhältnissen beobachtet wird wie zuvor.

$$V_C = 0{,}062 \qquad V_D = 0{,}092.$$

Bei dem Turmalin werden die electrischen Momente a, b, c der Volumeinheit für den Druck p gegeben durch die Gleichungen

$$\frac{a}{p} = 2\gamma_1\gamma_2\,\delta_{22} - \gamma_1\gamma_3\,\delta_{15}$$

$$\frac{b}{p} = (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)\,\delta_{22} - \gamma_2\gamma_3\,\delta_{15}$$

$$\frac{c}{p} = -\delta_{31} + (\delta_{31} - \delta_{33})\,\gamma_3^2.$$

Wenden wir diese Formeln auf die im Vorhergehenden mitgetheilten Beobachtungsresultate an, so ergeben sich die folgenden Gleichungen zur Berechnung der piëzoëlectrischen Moduln.

$$1.\quad -\delta_{33} = 0{,}172$$

$$2.\quad \delta_{22} = 0{,}020$$

$$3.\quad -\delta_{15}-\delta_{33}-\delta_{31}-\delta_{22} = 2\sqrt{2}\times 0{,}177 = 0{,}500$$

$$4.\quad -\delta_{15}-\delta_{33}-\delta_{31}+\delta_{22} = 2\sqrt{2}\times 0{,}191 = 0{,}539$$

$$5.\quad -\delta_{31} = 0{,}061\times\frac{0{,}519}{1{,}159} = 0{,}027$$

$$6.\quad -\delta_{31} = 0{,}028\times\frac{0{,}519}{0{,}595} = 0{,}025$$

$$7.\quad -\delta_{15}+\delta_{22}+\delta_{33}+\delta_{31} = 2\sqrt{2}\times 0{,}097\times\frac{0{,}689}{1{,}206} = 0{,}156$$

$$8.\quad \frac{-\delta_{15}-\delta_{22}+\delta_{33}+\delta_{31}}{-\delta_{15}+\delta_{22}+\delta_{33}+\delta_{31}} = \frac{0{,}062}{0{,}092}\times\frac{0{,}538}{0{,}892}\times\frac{1{,}689}{1{,}206}.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die folgenden Werthe der piëzoëlectrischen Moduln.

$$\delta_{15} = -0{,}326 \qquad \delta_{22} = \left\{\begin{matrix}0{,}020\\0{,}019\\0{,}022\end{matrix}\right\} = 0{,}020$$

$$\delta_{31} = \left\{\begin{matrix}-0{,}027\\-0{,}025\end{matrix}\right\} = -0{,}026 \qquad \delta_{33} = \left\{\begin{matrix}-0{,}172\\-0{,}167\end{matrix}\right\} = -0{,}169.$$

4. Die piëzoëlectrischen Moduln in absolutem Maaße.

Durch Vergleichung mit einem Luftkondensator ergab sich für die Kapacität des mit dem Crystall verbundenen Quadrantenpaares und der verbindenden Conduktortheile

$$Q + X = 57 \text{ (cm. g. s.)}.$$

Die electromotorische Kraft eines Clarkelementes ist in electrostatischem Maaße gleich $0{,}48\times 10^{-2}$. Endlich entspricht der Druck von 1 kgm einer Anzahl von $9{,}81\times 10^{5}$ Dynen. Die früher gegebenen Werthe der electrischen Moduln müssen daher durch Multiplikation mit dem Faktor $27{,}8\times 10^{-8}$ auf absolutes Maaß reducirt werden. Ihre Werthe im cm. g. s. System sind somit

1. *Quarz.*

$$\delta_{11} = 5{,}31\times 10^{-8} \qquad \delta_{14} = -1{,}20\times 10^{-8}.$$

2. *Turmalin.*

$$\delta_{15} = -9{,}07\times 10^{-8} \qquad \delta_{22} = 0{,}55\times 10^{-8}$$

$$\delta_{31} = -0{,}71\times 10^{-8} \qquad \delta_{33} = -4{,}70\times 10^{-8}.$$

Dagegen findet Curie bei Quarz $\delta_{11} = 6{,}3 \times 10^{-8}$, bei Turmalin $\delta_{33} = -5{,}3 \times 10^{-8}$.

5. Die pyroëlectrische Constante des Turmalins.

Es mögen die im Vorhergehenden für den Turmalin gefundenen Zahlen noch benutzt werden zur Berechnung seiner pyroëlectrischen Constanten und zu einer Vergleichung derselben mit dem Werthe, welchen der eine von uns bei directer Messung des durch Erwärmung erzeugten electrischen Momentes gefunden hat. Für das durch eine Erwärmung um ϑ Grade erregte electrische Moment gilt die Formel [1])

$$c = \vartheta\ (2\varepsilon_{31} a_2 + \varepsilon_{33} a_3).$$

Hier sind a_2 und a_3 die Ausdehnungscoëfficienten des Turmalins in der Richtung der y- und der z-Axe. Ferner ist:

$$\varepsilon_{31} = \delta_{31} c_{11} + \delta_{33} c_{13}, \qquad \varepsilon_{33} = \delta_{31} c_{31} + \delta_{33} c_{33}.$$

Für die Elasticitätsconstanten c ergeben sich, wenn man als Einheit des Zuges die Dyne und als Einheit der Fläche das cm^2 benützt, die Werthe:

$$c_{11} = 270 \times 10^{10} \qquad c_{33} = 161 \times 10^{10}$$
$$c_{13} = 9 \times 10^{10} = c_{31}.$$

Somit ist

$$\varepsilon_{31} = -234 \times 10^2, \qquad \varepsilon_{33} = -763 \times 10^2.$$

Da ferner

$$a_2 = 7{,}73 \times 10^{-6}, \qquad a_3 = 9{,}34 \times 10^{-6}$$

so wird schließlich

$$c = -1{,}08 \times \vartheta.$$

Dagegen führen die an 5 verschiedenen brasilianischen Turmalinen angestellten Messungen pyroëlectrischer Momente [2]) im Mittel zu der Formel

$$c = -1{,}18 \times \vartheta$$

welche mit der aus der allgemeinen Theorie sich ergebenden in hinreichender Uebereinstimmung steht.

---

1) Voigt, Allgem. Theorie der electr. Erscheinungen an Crystallen. Abhandl. d. Ges. d. Wiss. zu Goettingen 1890. S. 69.

2) Riecke, über die Pyroëlectricität des Turmalins. Wied. Ann. 1890 Bd. XL S. 303 u. 305.

Ueber das von S. Günther 1888 herausgegebene spätmittelalterliche Verzeichnis geographischer Koordinatenwerte.

Methodische Bedenken

von

Hermann Wagner.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 2. Juli 1890. Nachträge 1891.)

Im Besitz des Herrn Stadtsekretairs Markus Schüßler in Nürnberg findet sich eine aus dem 15. Jahrhundert stammende Handschrift von 71 Blättern in gr. Quarto, aus welcher der durch zahlreiche Arbeiten auf dem Gebiete der älteren Geschichte der Mathematik und mathematischen Geographie bekannte Sigismund Günther 1888 zwei Tabellen geographischer Positionen mitgeteilt und eingehend analysirt hat (Zeitschr. f. wissensch. Geogr. VI. 1888. S. 160—164). Derselbe sucht nachzuweisen, daß die ganze Handschrift in *Libau* oder mindestens in den heutigen Ostseeprovinzen entstanden sei.

Diese Behauptung erschien mir schon beim flüchtigen Lesen seiner Darlegungen im hohen Grade unwahrscheinlich. Bei näherer Betrachtung ergaben sich meines Erachtens so viele Einzelmisverständnisse, ja historisch wie geographisch ganz unmögliche Annahmen und Beweisführungen, daß es sich wohl im Interesse der methodischen Behandlung derartiger Fragen verlohnte, den Irrgängen des Herausgebers nachzugehen, auch wenn das Objekt an sich und in isolirter Betrachtung von keiner hervorragenden Bedeutung ist. Es gehört dasselbe zu den mittelalterlichen sog. Tabulae regionum; diese verhältnismäßig im Umfang meist beschränkten Tabellen sind eine bis jetzt noch zu wenig beachtete und bearbeitete Klasse von Dokumenten zur Geschichte der Geographie im Mittelalter, für welche man meist nur die uns überlieferten kartographischen Darstellungen verwertete. Aber in Handschriften vergraben, bereiten sie der bloßen Sammlung schon nicht unerhebliche Schwierigkeit. Ich habe eine solche seit längerer Zeit begonnen. Aber durch andere Arbeiten an dem Abschluß einer darauf bezüglichen Monographie voraussichtlich auf länger verhindert, lege ich einige methodische Winke, die an ein bereits bearbeitetes Beispiel unmittelbar anknüpfen und an demselben geprüft werden können, den Freunden der Geschichte der Erdkunde im Mittelalter vor. Dieselben könnten vielleicht insofern von einigem Werte sein, als die Zahl der Bearbeiter wie der Kenner jenes Abschnittes der Geschichte noch so äußerst gering ist, daß diesen wenigen eine verhältnismäßig große Auctorität innewohnt. Zu diesen letztern gehört mein Freund Sigismund Günther in München, dessen außerordentlichem Spürsinn und Sammeleifer es bereits gelungen ist, manche vergessene Thatsache aus der Geschichte der Grenzgebiete zwischen Geographie, Physik und Mathematik an das Licht zu ziehen.

Mehr und mehr habe ich mich jedoch überzeugen müssen, daß Günther über der Freude der Entdeckung der litterarhistorischen Einzelnotiz das wichtige Erfordernis eines Geschichtsschreibers der Wissenschaften zu sehr außer Acht läßt, nämlich die Versenkung in den Zeitgeist, in das ganze wissenschaftliche Können, sowie den litterarischen Gesichtskreis einer Gruppe von Forschern der jeweilig in Betracht kommenden Perioden. Dadurch müssen aber sicher unrichtige und schiefe Auffassungen im Leser entstehen, welchen sich, wie ich an immer zahlreichern Beispielen erkennen mußte, oft ein ganz anderes Bild enthüllt, als es von G. mit wenigen Strichen gezeichnet wird, — jedoch nie ohne eine fast erdrückende Fülle von Citaten beizufügen, die sich bei näherer Einsicht nicht selten als irrig, ja als wertlos, weil nicht den Originalschriften entnommen oder gegeneinander in ihrem Werte abgewogen, ergeben. Andererseits kann aber eine richtige Beachtung des gesammten geistigen Niveaus, in welchem sich ein Einzelautor oder eine Gelehrtenschule befand, oft ein besseres Mittel zur Datirung und Erklärung eines historischen Dokumentes abgeben, als ein einzelnes Kennzeichen.

Diese Zwischenbemerkung glaube ich an dieser Stelle einschieben zu müssen, da sich meine methodischen Bedenken im vorliegenden Falle nicht gegen einen einzelnen Irrtum, sondern die ganze Arbeitsweise eines Fachgenossen, und zugleich eines Freundes und Mitarbeiters, richten müssen. Nicht leicht wird mir der Ausspruch, daß die angedeuteten Erfahrungen mit der Zeit aus dem einstigen Bewunderer seiner Gelehrsamkeit einen starken Skeptiker haben werden lassen, der jedoch nichts aufrichtiger wünscht, als daß G. die unschätzbaren Dienste, die er vermöge seiner ausgebreiteten Kenntnisse, seinem unübertroffenen Sammeleifer und hervorragendem mathematischen Wissen unserer Disziplin — ich rede hier nur von der Geschichte der Geographie — leisten könnte, durch eine wirkliche Vertiefung in den zu behandelnden

Gegenstand und gründlichere Quellenkritik zu zuverlässigen und wahren wissenschaftlichen Hülfeleistungen gestaltete.

Die Einwürfe, die ich im vorliegenden Falle gegen die Günthersche Beweisführung zu machen habe, sind kurz die folgenden:

1) Der fragliche Kodex enthält keine einheitliche Schrift, sondern besteht aus drei ganz heterogenen Bestandteilen. Derjenige, welcher die für den Geographen interessanten Ortstabellen enthält, hat aller Wahrscheinlichkeit nach *Nürnberg* zum Ursprungsort, in keinem Fall aber „die Länder des deutschen Ordens“.

2) Günther hat von der Wichtigkeit, welche man im Mittelalter auf die Kenntnis guter Polhöhen legte — der Konstruktion der Sonnenuhren wegen (S. 160) — eine viel zu günstige und darum unrichtige Vorstellung.

3) Irreführend ist ferner seine Ansicht über den hohen Grad von Genauigkeit der Beobachtungen damaliger Zeit. Günther verwechselt viel zu oft die rein rechnerische Exaktheit, die sich z. B. bei fortgesetzter Teilung von Winkelgrößen in den Tabellen ergibt, mit derjenigen, welche die Beobachtungsinstrumente hätten ergeben müssen, thatsächlich aber erst Jahrhunderte später in Folge ihrer Vervollkommnung zuließen. Und diese Ansichten führen ihn im vorliegenden Falle auf ganz seltsame Abwege.

I.

Der erste Punkt ist formaler Natur und rasch zu erledigen. Herr Schüßler hatte die Freundlichkeit, mir den Kodex zu näherer Einsicht zu überlassen, und meinem gelehrten Kollegen Wilhelm Meyer hieselbst verdanke ich noch verschiedene die Handschrift betreffende Erläuterungen. Dieselbe enthält auf den ersten 20 Blättern einen Kalender, der mit dem Jahre 1439 beginnt und von Johann von Gmünd stammt. Er ist identisch mit einer auch auf der Göttinger Bibliothek befindlichen Handschrift (im Cod. Gotting. theolog. 234); (ausführlich berichtet über denselben Stern in Ersch u. Gruber 1843 unter Joh. v. Gmunden). Dieser Kalender interessirt uns hier nicht. — Ganz unabhängig davon ist das zweite Manuskript von 36 Blättern — die zwei Blätter der vierten Kustode *d* sind herausgeschnitten, ebenso die vier letzten der Kustode *e* —, das in schöner Handschrift, die etwa auf die Mitte des 15. Jahrhunderts hinweist (W. Meyer), eine Ars componenda horologia enthält, welcher verschiedene Abhandlungen über den Quadranten, z. B. der „Prologus Prophatii Judaei in quadrantem novus“, ein tractatus chilindri etc., folgen. Das dritte beigeheftete Stück, wie das erste eine große Krone als Wasserzeichen tragend, während das zweite den kleinen Ochsenkopf zeigt, ist teils chronologischen Inhalts — eine Ostertabelle mit dem Jahre 1477 beginnend bildet den Anhang —, teils behandelt es die Theorie und Praxis der Sonnenuhren. Die Handschrift ist eine vom zweiten Teile vollkommen verschiedene; die 5 z. B. ist der unsrigen fast gleich, in den ältern Teilen des Kodex gleicht sie der oben offenen 9. Schon hiernach ist eine Abhängigkeit dieses letzten Stückes von den Ortstabellen des zweiten oder umgekehrt, wie sie Günther (l. c. 160) behauptet, unwahrscheinlich. Die verschiedenen Wasserzeichen des Papiers bestätigen dies. Unter den Blättern des mittlern Stücks finden sich nun einige, auf welchen — ohne Zusammenhang mit dem übrigen Inhalt — die beiden Verzeichnisse geographischer Namen und Koordinaten geschrieben sind, die den Gegenstand der Untersuchung bilden: eine Liste, die wesentlich aus Landschaftsnamen mit beigefügter Breitenlage (tabula regionum Tab. I) und eine solche von Städten (tabula civitatum), mit einer dreiziffrigen Zahlenreihe ohne Tabellenkopf versehen, welche G. für Längenangaben nach Stunden, Minuten und Sekunden hielt. Entgegen den Anschauungen Günthers leugne ich den innern Zusammenhang beider Tabellen; ich halte die erstere für älter und historisch interessanter; sie stammt aus einer ganz andern Quelle als die zweite, die sicher auf Regiomontan selbst zurückgeführt werden muß; im übrigen ist es zweckmäßiger, beide ganz getrennt zu betrachten.

II.

1. Für die Analyse der Tafel der Landschaften ist die im Original gegebene Reihenfolge nicht ohne Bedeutung. Wir drucken sie daher hier nochmals ab, zugleich einige Versehen berichtigend, die Günther bei der Abschrift untergelaufen sind. Die laufenden Nummern finden sich im Originale nicht.

I. Elevationes seu altitudines poli arctici in variis regionibus:

1.	*Norvegia*	60 gradus	12.	*Frisia*	55 gradus
2.	*Swecia*	59	13.	*Hernested*	
3.	*Russia alba*		14.	*Marchia vetus*	
4.	*Dacia*	58	15.	*Prussia*	
5.	*Samaicia*		16.	*Hibernia*	54
6.	*Asia*	57	17.	*Holandria*	
7.	*Litphania*		18.	*Saxonia*	
8.	*Darpht*		19.	*Marchia nova*	
9.	*Scocia*	56	20.	*Russia media* (*Prussia media* G.)	
10.	*Liphania*				
11.	*Pomerania*				

21.	*Anglia*	53 gradus
22.	*Britannia*	
23.	*Brabancia*	52
24.	*Geliea*	
25.	*Westfalia*	
26.	*Thuringia*	
27.	*Misna*	
28.	*Slesia*	
29.	*Colonia*	
30.	*Flandria*	51
31.	*Julck*	
32.	*Lowanium*	
33.	*Leodium* (*Leodunum* G.)	
34.	*Remis*	
35.	*Hassia*	
36.	*Lusacia*	
37.	*Russia parva*	
38.	*Normandia*	50
39.	*Pacardia*	
40.	*Vestril*	
41.	*Franconiā*	
42.	*Bawaria*	
43.	*Bohemia*	
44.	*Morawia*	
45.	*Luthringia*	49
46.	*Swevia*	
47.	*Austria*	
48.	*Elsacia*	48
49.	*Stiria*	
50.	*Walachia*	

51.	*Francia*	47 gradus
52.	*Burgundia*	
53.	*Swaicia*	
54.	*Carinthia*	46
55.	*Bulgaria*	
56.	*Yberia*	
57.	*Hastringis*	
58.	*Gabaudia*	
59.	*Cumanna*	
60.	*Venecia*	
61.	*Coneolla* (*Concolla* G.)	
62.	*Croacia*	
63.	*Palespontus*	
64.	*Magna insula Calchus*	
65.	*Albania*	
66.	*In pede montis*	45
67.	*Prewencia*	
68.	*Toscana*	
69.	*Wandalicia*	
70.	*Delphinatus*	
71.	*Roma*	
72.	*Narwarra*	44
73.	*Primania*	
74.	*Cracia* (*Gracia* G.)	
75.	*Pontus*	
76.	*Ellespontus insula*	

An die Tabelle schließt sich unmittelbar der nachfolgende Text: „*Si maximam solis declinationem vel elevationem habere velis primo oportet sciri elevationem poli mundi sive equinoctialis in eadem regione. Tunc ad elevationem equinoctialis quoad maximam elevationem adde 23 gradus et 32 minuta. Sed quoad maximam* (sic!) *declinationem tunc eosdem ab elevatione equinoctialis subtrahe et habebis. Tunc quanta erit elevatio maxima tanta erit etiam elevatio poli arctici sive poli celi.*“

2. Es ist nun zunächst der letzte Passus, von welchem Günther bei seinen Betrachtungen ausgeht. Mit Recht vermutet er, daß im zweiten Satz ein Fehler des Abschreibers — maximam statt minimam — vorliege; um so mehr muß man sich allerdings wundern, daß Günther auf den sinnlosen letzten Satz hin, wonach die Polhöhe so groß wie die Sonnenhöhe z. Z. des Sommersolstitiums sein müßte, den Schluß aufbaut, die Handschrift sei in den Ostseeprovinzen entstanden. „Der unwissende

Abschreiber hat mit jenem Satz“, meint Günther, „einen argen Verstoß sich zu schulden kommen lassen, allein eben dadurch hat er uns auch einen wertvollen Fingerzeig hinsichtlich seines Aufenthaltsortes gegeben. Soll nämlich seine Regel richtig sein, so muß

$$\varphi = h_1 \text{ und } 90^0 - \varphi = \varphi - 23^0\ 32'$$

folglich $$\varphi = \tfrac{1}{2}(90 + 23^0\ 32') = 56^0\ 46'$$

sein. Dies ist aber die geographische Breite von *Libau* etwa, und es gab somit in dem vom Kompilator bewohnten Lande einen Punkt, für welchen seine Vorschrift genau, und viele Punkte, für welche sie annähernd stimmte, und mit diesem Grade von Uebereinstimmung gab sich der Abschreiber zufrieden.“

Diese Beweisführung leidet nun m. E. in größtem Maße an innerer Unwahrscheinlichkeit. Im vorliegenden Fall schreibt Günther die Genügsamkeit in Bezug auf die Genauigkeit der Person des Abschreibers zu, im allgemeinen ist die Wichtigkeit, die man in jenen Jahrhunderten allgemein auf gute Polhöhen legte, eine seiner Prämissen. Man könne hiefür nicht die richtige Vorstellung gewinnen, wenn man bloß die gedruckten Bücher berücksichtige, wie es Peschel gethan, man müsse das zahlreich vorhandene handschriftliche Material zu Rate ziehen, um zu erkennen, daß man auf die Kenntnis guter Polhöhen schon um deswillen naturgemäß Wert legen mußte, da diese Kenntnis die erste Vorbedingung für die Konstruktion jeder Sonnenuhr sei. Dieser Satz läßt jeden Unbefangenen vermuten, daß man gegen Ende des Mittelalters, d. h. doch nichts anderes als vor Erneuerung der Astronomie durch die Wiener Schule, vor allem durch Peurbach und Regiomontan schon zahlreiche gute Polhöhenbestimmungen besessen habe. Wie kommt es dann, daß uns davon so ungemein wenige überliefert sind? Warum gräbt man sie mühsam aus dem handschriftlichen Material noch heute im Interesse der Geschichte der Wissenschaft aus? Einfach, weil man sie nur in höchst bescheidenem Maße besaß und man sich selbst in Gegenden, wo man durch leidliche Wege die Lage mancher Punkte auf einen fester bestimmten Ort beziehen konnte, mit ganz rohen Annäherungen begnügen mußte. Die uns überlieferten Karten beweisen dies zur Genüge und die gewaltigen Verzerrungen der europäischen Länder in westöstlicher Richtung, an die Günther gar nicht gedacht zu haben scheint, hängen nicht nur von den Mängeln der Kenntnis der Längen, sondern zum Teil auch von den fehlerhaften Breitenannahmen ab.

Die in unserer Handschrift mitgeteilte Tabula regionum I spricht gleichfalls für die Genügsamkeit der Zeit, wenn ich so sagen darf. Es werden in ihr Landschaften aufgezählt, die annähernd unter gleicher Breite liegen. Sie dürfte, das ist wohl mit Sicherheit anzunehmen, einer Karte entnommen sein, an deren Rand nach ptolemäischer Art neben den Klimaten auch die Gradzahlen angesetzt waren. Dies ist der natürliche Uebergang zu den spätern genauern Angaben der Lage, wenn wir von den äußerst wenigen, astronomisch bestimmten Punkten absehen (s. u.).

Aber Günther, die Zeitverhältnisse schon in diesem Punkte verkennend, will uns beweisen, daß der Verfasser, den er uns auf Grund des völlig verkehrten Satzes „quanta erit elevatio maxima (sc. solis) tanta erit etiam elevatio poli arctici sive poli celi" als einen unwissenden Kompilator schildert, doch vielleicht selbst für seinen Aufenthaltsort mittelst des Gnomon oder des Baculus die Polhöhe gemessen habe! (p. 162). War dies letztere der Fall, so erscheinen die theoretischen Misverständnisse noch ungeheuerlicher. Andererseits konnte er sich mittelst des Gnomon kaum um mehrere Grade irren, wenn er nicht ein ebenso ungeschickter Beobachter wie Theoretiker war. In der That schließt Günther die Richtigkeit seiner „Messung" aus dem Umstande, daß *Prussia*, das eigentliche Deutschordensterritorium, mit 55^0 der Breite ganz gut weggekommen sei [1]). Wie reimt sich nun mit der eigenen Beobachtung von 55^0 die vermeintliche Uebereinstimmung zwischen der größten Sonnenhöhe h_1 und der Polhöhe am Beobachtungsort, da aus

$$\varphi = h_1 \text{ und } \varphi - 23^0\ 32' = 90^0 - \varphi$$

ja unbedingt $\varphi = 56^0\ 46'$ also fast 2^0 mehr folgt? Diese Breite ist, sagt Günther trotzdem, etwa diejenige von *Libau* und es gab somit in dem vom Kompilator bewohnten Lande einen Punkt, für welchen seine Vorschrift genau, und viele Punkte, für welche sie annäherud stimmte.

Ein weiteres Argument für den Ursprungsort der Handschrift im Ordenslande ist nach Günther ferner, daß in derselben an einer andern Stelle als gnomonisches Beispiel die Anfertigung einer Sonnenuhr „*in Prusia*" gelehrt werde. Indessen zeigt die betreffende Figur, neben welcher „*in Prusia*" steht, genau die gleiche Unwissenheit des Abschreibers in den ersten Elementen der Ortsbestimmung.

1) Was das von G. als „unter der topographischen Bezeichnung *Prussia media* wenig bekannte Mittelpreußen" betrifft, welches ebenfalls gut bestimmt sei (S. 162), so existirt dieses in der Handschrift nicht; es steht dort deutlich „*Russia media*".

Denn nach derselben bildet, was Günther entgangen ist, im Meridiandurchschnitt die linea equinoctialis einen Winkel von 55°, die Axis einen Winkel von 35° mit dem Horizont; während es für Orte unter 55° Br. gerade umgekehrt sein müßte. Unmöglich kann zwischen dem Misverständnis „quanta erit“ und diesem „*in Prusia*“ irgend ein Zusammenhang bestehen, da in dem ersten Falle die größte Höhe der Sonne (also zur Zeit des Sommer-Solstitiums), im zweiten die Aequatorhöhe derselben, (also zur Zeit der Aequinoctien) mit der Polhöhe bezw. der geographischen Breite identifizirt wird. Und der Mann also, der sich solche Verstöße zu Schulden kommen läßt, sollte im Stande gewesen sein die Polhöhe durch Gnomon oder gar durch den Baculus zu bestimmen[1])?

3. Vorausgesetzt der Abschreiber habe wirklich in jenen Gegenden gewohnt, wie stimmen nun seine Ansichten über die gegenseitige Lage der in Frage kommenden Landschaften mit der Wirklichkeit überein? — es werden *Samaicia*, *Litphania*, *Liphania*, *Prussia* genannt, nebst *Darpht*, ein Name, der hinter *Litphania* folgt. Unter *Darpht* ist gewiß, wie G. ausführt, nichts anderes zu verstehen als *Dorpat* (*Tarbatum*) und für diesen Ort ($58^1/_3$° N.) stimmt die Breite von 57° wenigstens nicht schlechter, als für manche andere Orte. *Dorpat* liegt aber, und lag doch auch niemals in *Lithauen* (*Litphania*). Doch wie dem auch sei, wie sollte ein in jenen Gegenden wohnender Klosterbruder nun *Livonia* (*Livland*), südlich von *Litthauen* setzen? „Gerade dieser Umstand spricht dafür“, sagt G. (S. 162 ob.), „daß ein Preuße die Beschreibung anfertigte, denn ein solcher bezeichnete eben mit dem Wort *Litthauen* das ganze Gebiet des Ordenslandes bis hoch in den Norden“ (!?). In der That eine seltsame Argumentation. Denn niemals konnte eine so generelle Bezeichnung es zuwege bringen, daß man deshalb glaubte, der Weg von Preußen führe durch das Gebiet von *Litthauen* südwärts nach *Livland*. Aber selbst wenn beide Namen zu vertauschen wären, sodaß an erster Stelle *Liphania* (57°), an zweiter *Litphania* (56°) stände, so müßte die Stellung von *Samaicia* unter 58° die Vermutung, der Verfasser habe in *Prussia* gewohnt, ganz über den Haufen werfen. Denn für *Samaicien* liegt ein Schreibfehler in keinem Fall vor. *Sarmatia*

1) Das letztere Instrument ist doch vor Regiomontan sicher nur in den Händen von astronomisch durchgebildeten Männer gewesen, wenn wirklich auf Grund der neuern Handschriftenfunde die Existenz desselben gegenüber den frühern Ansichten um hundert und dreißig Jahre zurück datirt werden muß (s. Günther, Martin Behaim. Bamberg 1890. p. 63. Anm. 55 u. ders. in Eneström's Bibliotheca mathematica 1890. 73—80).

dafür einsetzen zu wollen bei der besondern Aufzählung von *Russia alba*, *media*, *parva* hat keinen Sinn. *Samaicia* mit *Samland* zu identificiren, wie G. es bedingungsweise thut, ohne zu bedenken, daß dadurch der Breitenunterschied zwischen *Prussia* (55°) und *Samland* (58°) ja noch viel unerklärlicher bei einem „Preußen" wäre, ist ebensowenig angängig, da *Samland* im Mittelalter *Sambia* oder *Zambia* hieß. *Samaicia* ist vielmehr nichts anderes als die unzweifelhaft zu *Litthauen* gehörige Landschaft *Samcytha*, das Land der Samogiten, durch die Swiatha (jetzt Swenta, rechter Nebenfluß der Wilija) von *Litthauen* getrennt, kurz also eine südlich von *Livland* gelegene Landschaft. Roger Baco, der über die gegenseitige Lage dieser Landschaften (Opus majus. Lond. 1733 p. 226) schon weit besser orientirt war, als die Tabelle unserer Handschrift, verlegt *Semi-gallia* (*Samogitia*) östlich von *Livland*. Es muß also gerade aus dem Umstand, daß die Tabula regionum im Nordosten so außerordentlich fehlerhaft ist, von neuem geschlossen werden, daß ihr Ursprung in jenen Gegenden nicht zu suchen ist.

4. Aber zu Gunsten seiner Auffassung führt G. weiter den doppelten Umstand an, daß einerseits mit weiterem Fortschreiten gegen Süden die Unsicherheit der Angaben mehr und mehr wächst, und daß andererseits die Breiten, wenn Fehler mit unterlaufen, nur vergrößert niemals verkleinert werden. Auch diese Behauptung ist, wie sich aus der Einzelanalyse der Tabelle ergeben wird, in ihrer Allgemeinheit faktisch unrichtig. Einige ganz auffallende Misverständnisse in Bezug auf gewisse Namen mögen teilweise Veranlassung zu der irrtümlichen Auffassung gegeben haben (s. u. *Dacia* und *Wandalicia*); im übrigen hätte eine geographische Untersuchungsmethode den Interpret sicher zu andern Ansichten geführt. Es zeigt sich nämlich bei einer solchen, daß die Breitenlagen am besten für die westdeutschen Landschaften stimmen, etwa zwischen 52° und 47°, daß die Fehler sich von hier aus nordostwärts und südostwärts am meisten vergrößern, und zwar sind die östlichen Landschaften fast alle zuweit nach Norden gerückt, wofür man auch eine plausible Erklärung geben könnte. Dies soll indessen, da es näher belegt werden müßte, für jetzt nicht geschehen. Wir wollen die Tabelle selbst näher betrachten, sie in drei Abteilungen zerlegend.

a) Schreibt man zunächst die Landschaften mit einer Polhöhe von mehr als 53° nach ihrer Breitenlage, wie folgt, in horizontalen Reihen neben bezw. übereinander, so weicht unter den 22 Namen nur *Pomerania* (Nr. 11 in Tab. I) von der Regel ab, daß in jeder Breitenzone die Aufzählung mit der westlichen Landschaft beginnt:

Breite								
60°				*Norvegia*				
59°					*Svecia*		*Russia alba*	
58°				*Dacia*		*Samaicia*		*Asia*
57°						*Litphania*		
56°	*Scocia*				*Pomerania.*	*Liphania*		
55°		*Frisia.*	*Hernested.*		*Marchia vetus.*	*Prussia*		
54°	*Hibernia.*	*Holandria.*	*Saxonia.*		*Marchia nova*		*Russia media*	
53°	*Anglia.*		*Britannia.*					

Zunächst weist diese Anordnung schon unzweideutig auf die Identität von *Dacia* und *Dania* oder *Dänemark* hin, auch wenn nicht jede Ptolemäusausgabe den Namen *Dacia* im südlichen Schonen bezw. im Gebiet der Inseln trüge und derselbe Name sich auf zahlreichen handschriftlichen und gedruckten andern Karten des 15. u. 16. Jahrhunderts (Reysch, Orontius Finaeus, J. Vadian u. a.) fände, sodaß es in der That verwunderlich ist, wie G. darüber Erörterungen noch anstellen konnte, daß „mit jenem Namen *Dacia* (das unter 58° verlegt ist!), wohl etwas anderes gemeint sein müsse als das *Dacien* zur Römer Zeit“ (bekanntlich in ca. 45° Br.!)

Nur der Name *Hernested* macht Schwierigkeit. Mir scheint jedoch die Karte des Cl. Clavus v. J. 1427 den Schlüssel zu geben. Dort steht (ca. $57^1/_2$° nach Ptolemaeus, $53^1/_2$° nach Clavus, also im Mittel 55°) die Inselgruppe *Haelieland (Helgoland)*, wie G. Waitz (Nordalbingische Studien I. 1844) aus dem aus dem schwer zu entziffernden Namen gelesen; ich lese *Haelgaeland.* Das von Nordenskjöld (Studien u. Forschungen. Lpz. 1885. Taf. II) herausgegebene Facsimile der Karte des Clavus zeigt den Namen etwa wie: haebaetēd, dessen letzte Hälfte leicht als *sted* gelesen werden könnte. Die Aufzählung hinter *Frisia* spricht jedenfalls nicht gegen diese Konjektur.

b) Auffallend ist, daß keiner deutschen Landschaft die Polhöhe von 53° gegeben wird. Auf der andern Seite zeigt sich sofort, daß die Namen Nr. 23—35, die sich mit Ausnahme von *Russia parva* und *Walachia* auf Mitteleuropa beziehen, in annähernd richtiger Breite und westöstlicher richtiger Folge aufgezählt sind. Die fünf Ortsnamen lassen wir zunächst aus der Uebersicht fort.

Breite								
52°		*Brabancia.*	*Geliea.*	*Westfalia.*	*Thuringia.*	*Misna*		*Slesia.*
51°		*Flandria.*		*Hassia.*			*Lusacia.*	
50°	*Normandia.*	*Pacardia.*	*Vestril.*	*Franconia.*	*Bawaria.*	*Bohemia.*		*Morawia.*
49°			*Luthringia.*	*Swevia.*			*Austria.*	
48°			*Elsacia.*				*Stiria.*	
47°		*Francia.*	*Burgundia.*	*Swaicia.*				

Daraus ergibt sich, daß die östlichen Landschaften z. T. um 1° zuweit nördlich gerückt sind, dies gilt von *Thuringia*, *Misna*, *Slesia*, *Bawaria*, *Austria*, *Stiria*, während man für die *Lausitz* und *Böhmen* den 51° bezw. 50° als mittlere Breite annehmen kann. Unter den westlichen Landschaften macht uns *Vestril* Schwierigkeit. Verstümmelt oder verschrieben ist der Name gewiß. Einen Schlüssel für die Erklärung kann jedoch die Aufzählung zwischen *Picardia* und *Franconia* abgeben; nach meiner Vermutung handelt es sich um den Namen *Westrich* (*Vestric*). Der Name rührt bekanntlich von *Neustria* oder *Westria* (*Austrasia*) her und umfaßte im Mittelalter die Landschaften zwischen *Elsaß*, *Lothringen*, *Trier* und *Pfalz*, also jedenfalls einen größern Landkomplex als später, wo man darunter den südwestlichen Teil der *Pfalz* verstand. Schon des Nic. Cusanus Germania (ca. um 1460, gestochen 1491) [1] gibt der Landschaft diesen beschränkten Umfang.

Es ist ferner bemerkenswert, daß sich sämmtliche Ortsnamen in der Tabelle mit Ausnahme von *Darpht* und *Remis* auf bekannte Städte u. zw. meist Bischofsitze in der schmalen Zone zwischen *Köln* und *Löwen* beziehen, nämlich *Colonia* selbst, *Julk* (*Jülich*), *Lowanium* (*Löwen*) und *Leodium* (*Lüttich*), und daß die Breitenfehler für dieselben, sobald man unter den Ziffern nicht Parallelkreise, sondern Breitengrade versteht, hier ziemlich gering sind. *Reims* freilich ist in der Lage erheblich falsch gesetzt (und vielleicht erst später eingeschoben). Immerhin könnte jener Umstand in Verbindung mit der ziemlich richtigen Lage der Landschaften im rheinischen Deutschland plausibler auf den Ursprungsort hindeuten, als auf irgend eine andere Gegend Mitteleuropas.

c) Die Fehler vergrößern sich von neuem für die südlichen, mehr noch für die südöstlichen Landschaften und wenn die Breitenlage auch für einige (norditalische) gut paßt, so fällt es auf, daß die Ordnung der Aufzählung in westöstlicher Richtung fast ganz durchbrochen wird. Dadurch wird die Lokalisirung der nicht ohne weiteres verständlichen Namen erschwert. Wir trennen die westlichen von den östlichen Landschaften:

54. *Carinthia*	46°	66. *In pede montis*	45°	72. *Narwarra*	44°
57. *Hastringis*		67. *Prewenzia*		73. *Primania*	
58. *Gabaudia*		68. *Tuscana*			
60. *Venezia*		69. *Wandalicia*			
61. *Coneolla*		70. *Delphinatus*			
62. *Croacia*		71. *Roma*			

[1] S. die photolithographische Reproduktion der kürzlich wiedergefundenen Karte, herausg. v. S. Ruge im Globus Bd. LX. 1891.

In dieser Tafel ist Nr. 54 *Hastringis* nicht zu erklären. Der Umstand, daß er vor *Gabaudia* (oder, wie G. schon sagt, *Sabaudia* d. h. *Savoyen*) genannt wird, könnte vielleicht ihn in Zusammenhang mit einer westlichen Landschaft (*Gastinois* um *Nemours*??) bringen. Für die Vermutung G.'s, daß man unter *Carniolla Krain* zu verstehen habe, spricht in der That der Umstand, daß dort *Coneolla* und nicht *Concolla* steht und zwar vor *Croacien* aufgezählt wird. — Ganz entschieden müssen wir uns gegen die Uebersetzung von *Wandalicia* mit *Andalusien* erklären. Schon der gewaltige, alle andern Irrthümer weit übersteigende Fehler von 8^0 in der Breite spricht gegen diese Annahme. Ebenso scheint aber auch die Latinisirung des Namens *Andalusia*, der erst aus der arabischen Geographie spät in die mittelalterliche übergegangen ist, in der Form *Wandalicia* eine sehr selten gebrauchte und jedenfalls sehr späten Datums zu sein. Während der Name *Andalus* sich auf den arabischen Karten des 10. Jahrh. schon zeigt, tritt er in den Karten der Abendländer erst am Ende des 16. Jahrh. auf, aber stets in der Form „*Andalusia*". Die Karten zu den Ptolemäusausgaben nennen auch auf den sog. Tabulae novae jene Landschaft *Baetica*, ebenso fehlt *Wandalicia* oder *Vandalicia* im Thesaurus geogr. von Ortelius v. J. 1587, wogegen auch in diesem *Andalusia* mit *Baetica* latinisirt wird. Wie sollte ferner plötzlich diese eine südspanische Landschaft in die Gruppe der norditalischen kommen, während sonst überhaupt keine von so südlicher Breite genannt werden? Es dürfte daher wenig Zweifel sein, daß *Wandalicia* für *Vindelicia* steht, und die wiedergefundene Karte des Cusanus, die jedenfalls spätern Datums (s. vor. S.), bestätigt, daß der Name ähnlich wie *Westrich* im 15. Jahrh. noch nicht obsolet geworden war. — Mit *Narwarra* (*Navarra*) und *Primania* erreichen wir im Westen die südlichsten Landschaften. Ob *Romania* für *Primania* zu lesen ist, so daß dieses für den ganzen Kirchenstaat zu stehen hätte, muß dahin gestellt sein. Doch wüßte ich auch zunächst keinen andern Ausweg, nur kann nicht der nördliche Teil des ehemaligen Kirchenstaates, *Romagna* im engern Sinne, gemeint sein, wie G. vermutet.

Als östliche Landschaften bleiben dann noch die folgenden

55. *Bulgaria* 56. *Yberia* 57. *Cumanna* 58. *Palespontus* 64. *Magna insula Calchus* 65. *Albania*	46^0	74. *Cracia* 75. *Pontus* 76. *Ellespontus insula*	44^0

Auch hier also beträchtliche Nordverschiebung, die jedoch 3 Breitengrade nicht übersteigt, wenn wir bedenken, daß *Cracia* (*Graccia*) nicht dem heutigen Griechenland, sondern dem Rumpf der türkischen Halbinsel entspricht. Unter *Cumanna* ist Cumanenland d. h. Ungarn zu verstehen (G.) *Yberia*, *Colchis* und *Albania* führen uns in die Kaukasusländer bezw. das südlichste Rußland. Die Form *Palespontus* vermag ich für jetzt auch nicht zu erklären. Da *Pontus* noch besonders — südlicher von jenem gelegen — genannt wird, kann man vielleicht an den Asow'schen Busen denken und irgend eine Kombination von *Palus* und *Pontus* vermuten (??)

5. Fassen wir die ganze Tabelle zusammen, so entbehrt sie in ihrer Gruppirung nicht des Interesses und ist eine nicht unwichtige Ergänzung der kartographischen Darstellungen aus dem Anfang (?) des 15. Jahrhunderts. Denn älter als des Cusanus (1464) Germania ist sie gewiß. Zur Zeit ist mir jedoch weder eine Karte bekannt, die als Quelle der Aufstellung angesehen werden könnte, noch eine anderweitige Tabula regionum, an die sie sich anschließt. Gerade die Beschränkung auf Landschaften des mittlern und nördlichen Europa gibt ihr ein Alter vor dem allgemeinern Bekanntwerden der Geographie des Ptolemäus im Abendland (die erste lateinische Uebersetzung durch den Florentiner Jacobo Angelo ward bekanntlich 1410 vollendet, was hier nur erwähnt wird, weil G. den Italiener (l. c. 160 Anm. 2) schlankweg zu einem Deutschen Jakob Engels, macht). Setzt die geordnete Reihenfolge, in welcher die Landschaften nördlich des 46° mit geringen Ausnahmen aufgezählt werden, m. E. voraus, daß der ursprüngliche Verfasser eine Karte vor sich hatte, welche am Rande eine Einteilung nach Klimaten und Einzelgraden hatte, so kann dieselbe nicht ganz klein, nach Art der Imago mundi des Petrus d'Ailly, gewesen sein; dies könnte höchstens von einer zweiten Karte gelten, aus der vielleicht die Landschaften zwischen 44° und 46° entnommen sind, wobei die richtige Aufzählung nach Breitenzonen größere Schwierigkeit bot, denn unwahrscheinlich ist es, wie gesagt, daß eine solche überhaupt ohne eine die räumliche Vorstellung unterstützende Kartenskizze erfolgt sein sollte. Indessen mag das Weitere bis zur Durchmusterung noch anderen Materials zurückgestellt werden.

III.

Nur ein Kriterium gibt es noch für die Datirung zu erörtern, welches G. nicht weiter beachtet hat, nämlich die Annahme der Schiefe der Ekliptik zu 23°32′. Ueber diesen Punkt enthält die G.'sche Darstellung nur die Worte „die Schiefe der Ekliptik ward von Peurbach zu 23°33′ angesetzt, von Coppernikus zu 23°29′, unsere Quelle bedient sich eines zwischen diesen beiden Zahlen liegenden Wertes". Diese Darstellung ist in den Ziffernangaben des erstern Teils unrichtig, in ihrem zweiten m. E. irreführend. Ich muß über diesen Punkt etwas weiter ausholen. Jener Ausdruck kann doch wohl nicht anders verstanden werden, als daß Peurbach selbstständig die Schiefe zu 23°33′ bestimmt habe, ebenso wie später Coppernikus zu 23°29′. Aber für diese Behauptungen liegen keine Belege vor. Ich berühre dabei einen wunden Punkt in der Geschichte der astronomischen Wissenschaft. Trotzdem im Laufe der letzten drei Jahrhunderte die Geschichte der Bestimmungen der Schiefe der Ekliptik (meist unter dem Stichwort der säkularen Aenderung bezw. Abnahme derselben) oft in kosmographischen oder astronomischen Werken behandelt ist, fehlt es, so viel mir bekannt, noch ganz an einer vollständigen und wirklich quellenmäßigen Darstellung[1]). Meist wird in den Einzelhinweisen nicht auf die Originalquellen zurückgegangen. Für seine Zeit am vollständigsten hat wohl Riccioli im Almagestum novum Bonon. 1661. p. 160—161 berichtet[1]). Sonst pflegt der eine Autor diesen, der andere jenen Urheber in ziemlich willkührlicher Weise fort zu lassen oder er nimmt einen solchen auf, ohne das Gewicht desselben für die Entwickelung der Wissenschaft erst abzuwägen. So schiebt Günther neuerdings (Handbuch der math. Geogr. 1890. S. 736) auf eine zufällige, neue litterarhistorische Notiz hin[2]) in eine alte Mädler'sche Tabelle von nur vier Namen (die Versetzung Albatâni's oder des Albategnius a. a. O. ins 10. statt ins 9. Jahrh. darf nicht auf Mädlers Rechnung gestellt werden) zwischen Arzachel und Coppernicus noch den Lehrer des letztern, Novara, ein, den Copp. selbst nicht einmal nennt und dessen Bestimmung keinerlei Einfluß auf die Berechnungen seiner oder

1) Wenn G. in seinem Handbuch der math. Geogr. 1890. S. 736 sagt: „Im Zusammenhang studirt die aus älterer Zeit überlieferten Messungsergebnisse Laplace in seinem den Conn. des temps von 1841 einverleibten Aufsatze: Sur la diminution de l'obliq. de l'éclipt. qui resulte des observ. des Anciens" (sic, statt anciennes) so kann G. die Arbeit unmöglich selbst eingesehen haben, denn erstens steht dieselbe in den Conn. des temps 1811, sodann beschäftigt sie sich nur mit den Messungen der Chinesen, älterer Griechen excl. Ptolemaeus und einiger Araber und Perser, aber nicht mit denen des 15. und 16. Jahrhunderts.

2) Leben d. Coppernikus v. Prowe I. 1885. S. 244, wo die Autorschaft des Novara für den Wert 23°29′ durch handschriftliche Notizen festgestellt wird.

späterer Zeiten geübt hat, während z. B. weder Prophatius, noch Peurbach und Regiomontan, noch Werner etc. von G. in die Liste gestellt werden.

Genug die Bestimmung des Coppernicus ist nicht 23° 29′, sondern 23° 28′ 24″ (wie G. auch in seinem Handbuch anführt), wofür in seinem Hauptwerk auch öfters 23° 28′ 30″ gesetzt wird [1]). Aber mehr interessirt uns zur Zeit Peurbach, von dem feststeht, daß er 1460 mit Regiomontan zugleich die Ekliptikschiefe zu 23° 28′ bestimmt hat, so daß Coppernikus mit Recht sagen konnte, die von ihm gefundenen Werte stimmen mit dem von P. u. R. erhaltenen wohl überein [2]). Das rein fachwissenschaftliche Interesse knüpft sich bei solchen Werten bekanntlich mehr an die Bedeutung derselben für die Kenntnis der wahren Verhältnisse zu

---

1) Nic. Coppernicus: Ueber die Kreisbewegung der Himmelskörper, übers. mit Anm. v. M. Menzzer. Thorn 1879. S. 60. 135. 143.

2) Menzzer gibt (l. c. Anm. 102 u. 103) nur einige biogr. Notizen über Peurbach und Regiomontan, aber sagt nichts über ihre Bestimmung. Daher mögen folgende Belegstellen folgen. M. Ptolemei alex. in Magnam Constructionem Georgii purbachii ejusque disciputi Joh. de Regio monte Astronomicon Epitoma (Venetiis 1496). Lib. I prop. XVII: Nos autem invenimus arcum alt. trop. hiem. 65 graduum 6 minutorum et arcum alt. trop. estualis 18 gr. 10 min. Ideoque nunc distantia tropicorum est 46 gr. 56 min., ergo declinatio solis maxima nostro tempore est 23 gr. 28 min." — Ferner ist der in *Nürnberg* aufbewahrte und von Murr (Memorabilia biblioth. publ. Norimb. 1786. I.) veröffentlichte Briefwechsel Regiomontans mit Bianchini von Wichtigkeit. Anfang 1464 (l. c. 148—149) schreibt R. an B.: „Nos autem, praeceptor meus et ego, instrumentis reperimus declinationem solis maximam 23 gr. minutorum 28 fere. M. Paulum florentinum et D. Baptistam de Alberthis sepe audivi dicentes se diligenter observasse et non reperisse majorem gr. 23 minutis 30 que res etiam tabulas nostras videlicet tabulam declinationis et ceteras que super eam fundantur innovare persuadet". Es ist dies die Stelle, in welcher sich R. sehr eingehend mit einer Kritik auch der ältern Werte beschäftigt. Wenn, beiläufig, Günther in seinen Studien z. Gesch. d. math. u. phys. Geographie (Halle 1877. Heft 2. S. 77) gegenüber Mädler (Gesch. der Himmeskunde I, 123) behauptet, es sei ein Irrtum des letztern, daß Peurbach bereits etwas von der Veränderung der Schiefe der Ekliptik gewußt habe, so kann G. wohl nicht die Theorica motus octavae sphärae (den letzten Teil der 1460 geschriebenen Theoricae novae planetarum), selbst eingesehen haben, deren vorletzter Abschnitt: „de mutatione declinationum solis maximarum" mit dem Worten beginnt: „Unde fit, ut maximae Zodiaci declinationes variabiles existant . . . . .; majores namque reperta sunt a Ptolemeo quam ab Almeone" etc. Erst hinterher folgte jener Anhang: „Theorica octavae sphärae secundum Thebit". Wenn ferner Peurbach im Eingang seiner Theorica oct. sphaerae dem „tertius motus" derselben hinzufügte: „qui motus trepidationis vocatur", warum nennt Günther a. a. O. diesen von Delambre gebrauchten Ausdruck einen ganz und gar unhistorischen"?

gewissen Zeiten, sodaß man die event. von den Beobachtern noch vernachlässigten Korrektionen, wie in unserm Fall besonders diejenigen der Refraktion, anbringt, sie also gleichsam wissenschaftlich zustutzt. Aber das historische Interesse verweilt mehr bei den Originalziffern selbst und deren Einfluß auf die Arbeiten der Zeit. Wenn nun einerseits keine Frage ist, daß eine ganze Reihe von Tafeln Regiomontans und seiner unmittelbaren Nachfolger bezw. Herausgeber auf jenen Wert von 23°28′, der von ihm und Peurbach ein Jahr vor des letztern Tode gefunden ward, gegründet sind, so steht andererseits fest, daß beide und besonders Peurbach während des größern Teil seines Lebens hindurch sich an einen der ältern Werte hielten und zwar wesentlich an die Zahl 23°33′30″, den Regiomontan ausdrücklich als den üblichen bezeichnet[1]) und gelegentlich auf Thebit (ben Korra um 900)[2]) zurückführt, woneben gelegentlich auch 23°33′ oder wohl auch rund $23^1/_2{}^0$ angewandt wird.

Der in unserm Manuskript vorkommende Wert 23°32′ hat also mit den eben genannten Zahlen nichts zu thun und dieser ist mit Sicherheit auf Prophatius Judaeus (Jacob ben Machir um 1300) zurückzuführen, wobei ich mich ohne weitere Erörterungen auf die ausführlichen Darlegungen Menzzer's[3]) die er zum Teil dem gelehrten M. Steinschneider verdankt, beziehen kann; nur mag hinzugefügt werden, daß die Kommentatoren Peurbachs und Regimontan's den Prophatius auch bereits mit zu nennen pflegten[4]). Jedenfalls geht hieraus hervor, daß uns diese Zahl nicht etwa auf eine zeitlich zwischen Peurbach und Coppernicus fallende Periode führt, wie man leicht aus Günthers Worten herauslesen könnte. Nicht daß wir die Ortstabelle auf

---

1) Regiomontan an Bianchini 23. Juli 1463 (Murr l. c., 76): „utor enim declinatione maxima solis usitata gr. 23 min. 33 sec. 30“ und als Bianchini (p. 81), „den Wert gr. 23 m. 30 sec. 30 supponirt „sicut ipsam multociens cum instrumento at in diversis temporibus consideravi diligenter“ antwortet R. (p. 85), daß er bei Berechnung der ihm von Bl. gestellten Frage die größte Deklination der Sonne zu 23 gr. 30 min. angenommen habe „que declinatione maxima convenienter usitata minor fere est tribus minutis“.

2) Reg. im Brief an Bianchini 1464 (Murr. l. c. p. 146): „post eos Tebith declinationem invenit maximam gr. 23 minuta 33 fere. Vergl. auch Peurbach: Theor. oct. sphaerae sec. Thebit: Eclyptica fixa semper secat equatorem ad angulum semper eundum, puta 23 gr. 33 min. et 30 sec.

3) Nic. Copp.: Ueber d. Kreisbewegungen etc. s. o. Anm. 89.

4) S. z. B. Chr. Vurstisius: Quaest. novae in theor. planet. Basel. 1578. S. 421, wo jedoch Prophatius mit 23°22′ min. angeführt wird, oder Peurbach: theor. nov. planet. ed. Ed. Reinholdo. Wittenb. 1601 p. 238.

die Zeit des Prophatius zurück datiren wollen, aber da Regiomontan dessen Berechnung der Ekliptikschiefe niemals erwähnt, so folgt wohl hieraus von neuem, daß wir jene Tabelle auf eine Zeit vor Reformation der Astronomie durch die Wiener Schule zurückrücken dürfen.

IV.

1. Die Ortstabelle (Tabula civitatum) unseres Manuskripts, unter deren 62 Namen sich einige wenige Landschaftsnamen finden, ist die folgende. Ein Tabellenkopf fehlt.

1.	*Hibernia*	m	1	16	59
2.	*Scocia*	m	0	36	59
3.	*Oxonium*	m	0	52	53
4.	*Compostellum*	m	1	40	45
5.	*Lisibona*	m	1	40	41
6.	*Toletum*	m	1	27	41
7.	*Corduba*	m	1	21	38
8.	*Cesaraugusta*	m	1	6	41
9.	*Rhotomagus*	m	0	43	50
10.	*Parsiiis* (sic)	m	0	30	48
11.	*Lugdunum*	m	0	31	45
12.	*Burdigalia*	m	0	52	45
13.	?	m	0	32	44
14.	*Tolosa*	m	0	43	43
15.	*Vienna provincie*	m	0	30	44
16.	*Massilia*	m	0	28	43
17.	*Pragis*	m	0	36	52
18.	*Gandanum*	m	0	24	52
19.	*Trajectum*	m	0	12	53
20.	*Colonia*	m	0	13	51
21.	*Machilia*	m	0	24	51
22.	*Maguntia*	m	0	15	50
23.	*Herpipolis*	m	0	4	50
24.	*Argentina*	m	0	12	45
25.	*Constantia*	m	0	10	46
26.	*Augusta Vindelicorum*	A	0	10	46
27.	*Dacia*	*a*	0	36	58
28.	*Swetia*			26	62
29.	*Bubeca*			16	56
30.	*Dantiscum*			56	56
31.	*Prunswigum*	*a*	0	0	53
32.	*Magdeburgum*			16	54
33.	*Erffort*			4	51
34.	*Lips*			10	51
35.	*Ingelstadium* (*Ingelstadum* G.)			4	49
36.	*Nurenberga*	*a*	0	0	49
37.	*Ratisbona*	*a*	0	6	49
38.	*Ulma*	*a*	0	0	47
39.	*Praga*	*a*	0	24	50
40.	*Vratislavia*	*a*	0	40	51
41.	*Cracovia*	*a*	0	50	51
42.	*Caschovia*			56	50
43.	*Buda*			50	47
44.	*Segnia* (*Seguia* G.)			32	45
45.	*Vienna anno*^{e}			15	48
46.	*Patavia*			10	48
47.	*Saltzeburga*			12	48
48.	*Iudeburgum*			14	47
49.	*Villacum*			13	46
50.	*Brixina*			8	45
51.	*Venetie*			10	45
52.	*Ancona*			14	44
53.	*Roma*			20	42
54.	*Tarentum*			44	40
55.	*Brudusium* (sic)			40	39
56.	*Neapolis*			36	41 (sic)
57.	*Florentia*			10	42
58.	*Mediolanum*			0	44
59.	*Taurinum*	m	0		43
60.	*Genua*	m	0	4	
61.	*Sardinia*	*a*	0	2	38
62.	*Sicilia*	*a*	0	30	37

2. „Man wird zugestehen müssen“, sagt Günther, „daß diese Tafel, welcher auch nicht ein Schatten von Erklärung beigegeben ist, demjenigen, der sie betrachtet, zunächst ein Räthsel aufgibt.“ Muß schon diese Frage der ohne Weiteres verständlichen Tabelle gegenüber verwundern, wieviel mehr die Lösung, daß man es

hier mit einer Tafel ausschließlich der Längen zu thun habe und obige Ziffern den Längen in Stunden, Minuten und Sekunden entsprächen!! Hier darf man wohl mit Recht fragen, welche Fortschritte für den so notwendigen streng wissenschaftlichen Betrieb der Erdkunde zu erwarten sind, wenn ein Autor, der seit mehr als einem Jahrzehnt mit besonderer Vorliebe die historische Seite der mathematischen Geographie traktirt und uns der Führer durch das nicht leicht verständliche Gebiet sein könnte, der u. a. über Peurbach, Regiomontan, Joh. Werner, Apian, Keppler kleinere oder größere Monographien geschrieben, eine so einfache Tabelle jener Zeit total misversteht, und die beigegebenen Grade der Breite für Längensekunden erklärt! Man würde es für ein Versehen allzu flüchtiger Betrachtung ansehen, wie es einem so unendlich vielschreibenden Autor einmal unterlaufen kann, wenn G. sich nicht diesmal besonders Zeit genommen hätte und sich des Langen und Breiten abmühte, aus den so verkannten Zahlen den Mittelmeridian herauszukonstruiren. Zuvor erklärt er offen: „Wir sind außer Stande anzugeben, von welchen Worten *a* und *m* als Anfangsbuchstaben zu denken sind.“ Wunderbar, daß nicht wenigstens dem Mathematiker G. und Verfasser einer Geschichte des mathematischen Unterrichts die Ausdrücke „adde“ und „minue“ oder „addendum“ und „minuendum“ eingefallen sind, wofür in den deutschen Ausgaben der Tabelle, von denen die Rede sein wird, *g* (zugeben) und *n* (abnehmen) steht. „Da somit“, sagt G., „ein offenbarer Fehler vorliegt, so gilt es eine möglichst schonende Verbesserung anzubringen; so sehr wir uns die Schwierigkeit vor Augen stellen, in ein solches Zahlenheer, vielleicht von einem unwissenden Kopisten mit allen möglichen Versehen zusammengeschrieben, Konjekturen hineinzutragen, so wird sich doch im gegebenen Falle dieses Wagnis nicht ganz vermeiden lassen.“ Ich finde die einzige Erklärung für das totale Verkennen der Zahlen der dritten Spalte (von denen, wohl bemerkt, keine unter 37 herabgeht) als Zeitsekunden in der irrigen Vorstellung, welche sich G. über den Grad der Genauigkeit für die Beobachtungen jener Zeit gebildet hat, vielleicht verführt durch die langen Ziffernreihen der astronomischen Tabellenwerke, wie z. B. der Libros del saber des Königs Alphons. Hier handelt es sich jedoch einfach um rechnerische Operationen, die beliebig weit ausgedehnt werden konnten und mit dem Genauigkeitsgrad, mit dem man sich bei Beobachtungen begnügen mußte, nichts gemein haben.

Die obige Tabelle, welche wir als eine weit verbreitete aus dem Kalender und den Ephemeriden des Regiomontan ohne Schwierigkeit werden nachweisen können, gibt, obwohl sie bereits aus der Zeit der Reformation der Astronomie durch diesen großen Mathematiker stammt, ein neues Zeugnis für die Genügsamkeit jener Zeit. Die vermeintlichen Zeitsekunden geben die Breitenlage zwischen 62^0 und 37^0 in ganzen Graden an und die Längenangaben in Stunden und Minuten bieten nur für fünf Orte eine ungerade Zahl von Minuten, d. h. im Bogenmaß eine Genauigkeit bis auf Viertelgrade. Für weitere 11 gerade, aber nicht durch vier teilbare Zahlen, also eine Genauigkeit nur bis auf halbe Grade, alle übrigen (durch 4 teilbaren) Längenangaben würden im Bogenmaß ausgedrückt für die Lage nur ganze Grade ergeben!

Die völlig falsche Prämisse, daß man es hier nur mit Längenangaben in Stunden, Minuten und Sekunden zu thun habe, sind begreiflicher Weise Schuld, daß Günthers Versuche den angenommenen Mittelmeridian aus der Tabelle herauszulesen, völlig hinfällig sind. Wir brauchen uns dabei nicht aufzuhalten, da sich derselbe aus der Länge $0^h\ 0^m$ von selbst ergibt; es ist die durch *Braunschweig*, *Nürnberg*, *Ulm* und *Mailand* ziehende Mittagslinie, die von selbst schon auf *Nürnberg* als den Ursprungsort der Tabelle hinweist.

3. Natürlich mußten auch die Versuche, die veralteten Ortsnamen in die uns geläufige Form umzuschreiben, durch das Verkennen vor allem der Bedeutung der dritten Zahlenspalte leiden. Es könne nicht entschieden werden, sagt G., ob *Lugdunum* (Nro. 11) *Leyden* oder *Lyon* sei. Der Zusatz 45, d. h. 45^0 d. Br., läßt ohne Weiteres erkennen, daß *Lyon* gemeint ist. *Dacia* entspricht natürlich auch in dieser Tabelle *Dänemark*. Auch würde G. sich bei *Neapel* nicht verlesen und 45^0 gesetzt haben, wenn er die Ziffern als Breiten erkannt hätte (die Zahl 41 ist nicht gut geschrieben). Ebenso hätte er die fehlenden Zahlen bei *Neapel* ($0^0\ 2^m$ L.) und *Genua* (43^0 Br.) ergänzen können. Im übrigen halten wir uns bei den leichtverständlichen Namen nicht auf, die an der Hand der häufigen Reproduktionen durch den Druck leicht identificirt werden können, auch wenn sie hier verschrieben sind (*Pragis* statt *Prugis*, *Bubeca* statt *Lubeca*, *Argentina* 45^0 statt 47^0 etc.).

Nur gegen der Vermutung G.'s, daß man unter *Segnia* (nicht *Seguia*, wie G. gelesen) der Bischofssitz *Seckau* in Steiermark zu verstehen sei, wollen wir uns mit Entschiedenheit erklären. Eine geographische Untersuchungsmethode ist von G. nicht angewandt, es bot ihm offenbar nur die Namensähnlichkeit den Anhalt. *Seckau* liegt jedoch nicht 20 Kil. nordöstlich von Judenburg. Man vergleiche damit den Längenunterschied nach obiger Tabelle; nach dieser liegt *Segnia* $18^m = 4^1/_2$ Längengrade oder ca. 350 Kil. östlich von Judenburg. Solcher Fehler wird dem Autor der Tabelle also bei zwei ganz benachbarten Orten imputirt! Indessen ist m. E. gar kein Zweifel, daß man *Segnia* mit dem heutigen *Zengg* in Dalmatien zu identifiziren hat, wofür nicht nur jener Längenunterschied, sondern auch die Breite von 45° spricht. Außerdem findet sich der alte Name für *Zengg* als *Senia*, *Signia*, *Segnia* auf zahlreichen Karten des Mittelalters, sowie der Ptolemäusausgaben. Selbst Spruner-Menkes Atlas genügt zur Erläuterung.

4. Wie schon angedeutet, ist es ebenso verwunderlich, daß der Biograph des Regiomontan, der uns eine genaue Inhaltsangabe seines berühmten Kalenders (Allg. deutsche Biographie Bd. 22 Joh. Müller) mitteilt, die vorliegende Ortstabelle nicht sofort als diejenige erkannt hat, die sich nicht nur in fast allen Ausgaben des lateinischen Calendarium, wie des deutschen Kalenders, sondern auch in den Ephemeriden und dem Almanach desselben als „*Tabula regionum*“ figurirt und von hier aus auch in die Ausgaben der Alphonsinischen Tafeln übergegangen ist, um, später allmählich erweitert, im 16. Jahrhundert noch oft abgedruckt zu werden. Freilich müssen wir auch nach der rein litterarhistorischen Seite G. einer seltsamen Unkenntnis zeihen, wenn er nach — doch hoffentlich aus der Autopsie geschöpften — Beschreibung des deutschen Kalenders von 1475 mit der Tafel der „Landt und stet“ (das eben ist unsere Tabelle) in der Allg. deutschen Biographie, die das Zuverlässigste enthalten sollte, was gegeben werden kann, fortfährt: „Ganz ähnlich war auch der z. Z. in Göttingen — vielleicht in dem einzigen noch übrigen Exemplar — befindliche latein. Kalender, der 1485 zu Venedig erschien“ etc. Hätte G. einmal in Hain's Repertorium bibliograph. 1836—38 geblickt, so würde er mit Nro. 13 775 beginnend allein gegen 15 Ausgaben des Kalenders, davon 9 lateinischen, neben 5 Ausgaben der Ephemeriden und zweien des Almanach, welche bis 1500 im Druck erschienen, begegnet sein, und nach den mit einem * bezeichneten, von Hain selbst gesehenen Ausgaben, darf angenommen werden, daß die Münchener Bibliothek eine ganze Reihe dieser Kalender besitzt, ganz abgesehen von den nach 1500 gedruckten. Das Göttinger Exemplar ist nebenbei die 1482 in Venedig erschienene (Hain 13 777) Ausgabe. Uebrigens sind die Hain'schen Zusammenstellungen sowohl Stern (Ersch u. Gruber 1843 Joh. de monte regio) als R. Wolf (Gesch. der Astronomie 1877, S. 96) entgangen.

Durch Einsicht in eine dieser Ausgaben hätte sich auch die Lücke Nro. 13 mit *Avignon* ausfüllen lassen und der „räthselhafte Zusatz“ *annoe* bei Wien hätte sich als *Vienna pannonie* im Gegensatz zum *Vienna provincie* entpuppt. Auf die kleinen Abweichungen, welche die verschiedenen Ausgaben der tabula regionum haben, verlohnt es hier kaum einzugehen. Mit *Hibernia* beginnend und mit *Sicilia* endigend füllt sie fast immer eine Seite kl. 4⁰ in den genannten Werken. In der Ausgabe der Alphonsinischen Tafeln von 1483 (Alfontii regis tab. astron., cur. Erh. ratoldt) befindet sich noch eine Kombination der ältern Tabula regionum und der neuen, geordnet nach der Länge von W. nach O. und mit Angabe der Längen in Graden und Minuten (letztere meist auf 10 abgerundet) und der Breiten in Graden, nur daß bei 9 Orten auch noch Breitenminuten eingesetzt sind. In der hier in Göttingen befindlichen Ausgabe der Alph. regis tab. astr. vom Jahre 1498 steht dagegen genau die gleiche wie im Regiomontans Kalender, wobei die Längen in Stunden und Minuten ausgedrückt sind [1]).

5. In dem einen Punkte glaube ich Günther beistimmen zu müssen, daß hier die erste Ortstabelle vorliegt, in welcher die Längen durchweg in Zeit angegeben sind, und nach allem, was zur Zeit bekannt, dürfen wir wohl nur Regiomontan als den Urheber dieser Neuerung ansehen, welche im engen Zusammenhang mit der Herausgabe neuer Ephemeriden stehen dürfte. Daß derselbe früher sich der üblichen Bezeichnung im Bogenmaß, mit dem Anfang an der Westgrenze der bewohnten Erde, bediente, geht u. A. unzweideutig aus dem Briefwechsel mit Joh. Bianchini, Jac. Spira, Christian Roder in Erfurt 1463—71 hervor. Noch im letzten Brief vom 4. Juli 1471 an Roder heißt es (Murr l. c. 195): „Urbs roma longitudinem habet ab occidente graduum 35 et latitudinem ab equinoctiali 42 graduum.“

Ob die erste Ausgabe des Kalender Regiomontans bereits 1473 oder erst 1474 erschienen, ist mir zur Zeit nicht bekannt. Die k. Bibliotheksverwaltung zu Berlin teilte mir mit, daß die dort befindliche Ausgabe von 1473 (sic) eine Tabula regionum nicht habe, wohl aber die von 1475. Da nun die erste 1474 gedruckte Ausgabe der Ephemeriden für 1475—1506 [2]) (s. Wolf, Gesch. d. Astron. 1877, S. 96, Hain Nro. 13 790) die Tabula gleichfalls enthält, so muß wohl 1474 bezw. 1475 als das Jahr des ersten Erscheinens

---

1) Nicht also zuerst in den alphonsinischen Tafeln erschienen diese Listen neuer Breitenbestimmungen, wie S. Ruge (Globus Bd. LX. 1891) meint.

2) Gallois (s. folg. S.) gibt S. 7 irrtümlich 1405—1506 an.

der Tabula mit Angaben der Längen in Zeit angesetzt werden. Damit ist dann auch unsere handschriftliche Tabelle datirt, welche nach allem nichts anderes sein kann, als eine Kopie aus dem Kalender selbst, vielleicht eine Abschrift des handschriftlichen Originals. Damit werden wir in Betreff der Herstellung dieses Mittelstücks wieder auf *Nürnberg* hingeführt und zwar auf die Zeit, in welcher Regiomontan sich dort aufhielt (1471—75).

6. Zum Schluß lenken wir die Aufmerksamkeit nochmals auf die „Genügsamkeit der Zeit in Betreff guter Polhöhen". Nicht, daß es zu jener Zeit nicht eine Reihe von Städten gegeben hätte, für welche man bessere Werte hätte einsetzen können, wie *Wien*, *Nürnberg*, *Erfurt*, *Würzburg*, *Mainz*, *Paris*, *Oxford*, *London* u. A., aber kaum wird sich aus unserer Tabelle ein Dutzend Orte herausheben lassen, für welche man Polhöhen hatte, die man anders als auf halbe Grade abzurunden wagte. Da sie fast verschwanden gegenüber den unsicher bestimmten, ließ man die Minuten auch bei den genauer bekannten fort, trotzdem auf diese Weise geographische Ungereimtheiten sich ergaben, wenn man die Tabelle zur unmittelbaren Eintragung in eine Karte hätte benutzen wollen, wo *Salzburg* und *Passau*, ebenso *Regensburg*, *Ingolstadt* und *Nürnberg* auf eine westöstliche Linie gerückt worden wären. Es zeigt sich daraus, daß die Tabelle wesentlich zu astronomischem Gebrauch, nicht zu geographischen Zwecken zusammengestellt war und daß sie in den Ephemeriden ihren eigentlichen Platz hatte. Die Bevorzugung der Längen durch Angabe der Zeitminuten ist natürlich mehr scheinbar, da, wie oben nachgewiesen, für nicht weniger als 44 Orte bezw. Landschaften die Zeitmaße nur ganzen Graden der Länge im Bogenmaß entsprechen. Die nähere Untersuchung wird jedoch auch diese Tabelle in den Kreis ihrer Betrachtung ziehen müssen, wenn es gilt die Kartographen zu nennen, welche die Feststellungen der Astronomen in Mitteleuropa zuerst mit ausnutzten. Für jetzt fragen wir, ob aus dieser Tabelle nicht von neuem hervorgeht, daß es in damaliger Zeit an guten Polhöhen noch ganz außerordentlich gefehlt haben muß, und man sich demnach mit den rohesten Annäherungen zufrieden geben mußte. Von diesem Standpunkt aus erfährt der von Günther begangene Irrtum von Längenangaben bis auf einzelne Zeitsekunden zu sprechen (in unsern Breiten entspricht die Differenz einer Zeitsekunde einer Längendifferenz im Wegemaß von ca. $^1/_3$ Kilometer) eine neue Beleuchtung.

Nachträglich sei auf die mir erst 1891 zugekommene Arbeit von L. Gallois, Les géographes allemands de la renaissance (Bibliothèque de la faculté des lettres de Lyon T. XIII 1890. Paris, E. Leroux) hingewiesen, in welcher sich der Verfasser eingehender mit den ältern im Druck erschienenen Tabulae regionum (Regiomontan, Stöffler, Schoener, Apian, Münster) beschäftigt, die er zum Abdruck bringt (App. I—VI). Er vergleicht dabei teils Regiomontans Positionen mit solchen aus Ptolemaeus, teils die der andern mit den wirklichen nach unserer heutigen Kenntnis. Daß die Tabula regionum Regiomontans auch im Calendarium enthalten war, scheint dem Verfasser entgangen zu sein. Hinsichtlich des Zwecks der Ortstabellen in den Ephemeriden kommt Gallois zu den gleichen Resultaten, wie ich sie oben angeführt habe (l. c. p. 8). Der Vollständigkeit wegen mag noch hinzugefügt werden, daß R. Wolf schon 1872 (Vierteljahrsschr. Zürich. nat. Ges. 1872. 17 S. 378) einen kleinen Auszug (6 Orte) aus Regiomontans Ortstabelle von 62 Namen mitteilte.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September und Oktober 1890.

(Fortsetzung.)

Bölcsészettudományi Ertekezések. (Philosoph. Abhandlungen). III. Köt. 2. Szám. Ebd. 1889.
Ballagi Aladár: Colbert. Másadik Resz. Ebd. 1887/90.
Czánki Dezsö: Magyarország történelmi földrajza a Hunyadiak korában. (Geschichtliche Geographie Ungarns im 15. Jahrh.). I. Köt. Ebd. 1890.
Monumenta Hungariae juridico-historica. Corpus statutorum Hungariae municipalium. Tom. II. Pars I. Ebd. 1890.
Demkó Kálmán: A felsö-magyarországi városok életéröl a XV.—XVII. században. (Das Leben oberungarischer Städte im 15.—17. Jahrh.). Ebd. 1890.
Kovács, Ferd.: Index alphabeticas codicis diplomatici Arpadiani continuati per G. Wenzel editi. Ebd. 1889.
Monumenta comitialia regni Hungariae. X. Köt. (1602—1604). Ebd. 1890.
Monumenta comitialia regni Transsylvaniae. XIV. Köt. (1664—1669). Ebd. 1889.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

25. November. № 9. 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 7. November.

de Lagarde, A) Worterklärungen: *Cicisbeo, Caparra, Σατράπης*, B) dritter Brief des Paulus an die Korinther.

Schering theilt von Herrn Alberto Tonelli „eine Notiz über die Auflösung quadratischer Congruenzen" mit.

Klein legt einen Aufsatz von Herrn Prof. Franz Meyer in Clausthal vor: „Ueber ein Trägheitsgesetz für algebraische Gleichungen".

Ehlers legt einen Aufsatz von Herrn Privatdocenten Dr. Bürger vor: „Vorläufige Mittheilungen über Untersuchung an Nemertinen von Neapel".

Wallach legt eine Mittheilung vor „Ueber einige neue Kohlenwasserstoffe mit ringförmiger Bindung der Kohlenstoffatome".

Ueber ein Trägheitsgesetz für algebraische Gleichungen.

Von **Franz Meyer** in Clausthal.

(Vorgelegt von Herrn F. Klein).

1. Sei gegeben eine Gleichung n^{ten} Grades

$$(1)\qquad f(\lambda) = a_0 + n a_1 \lambda + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} a_2 \lambda^2 + \cdots + a_n \lambda^n = 0$$

mit reellen Coefficienten und ungleichen Wurzeln, so kann man nach einem endlichen System von Gleichungen

$$(2)\qquad f_1(\lambda) = 0, \quad f_2(\lambda) = 0, \quad \ldots \quad f_\nu(\lambda) = 0$$

fragen, so, daß die Gesammtanzahl der reellen Wurzeln aller $\nu+1$-Gleichungen (1), (2), von Uebergangsfällen abgesehen, unverändert dieselbe bleibt, wie auch die ursprüngliche Gleichung (1) ausgewählt sein mag.

Beschränken wir uns auf den Fall, wo die Gleichungen (2) vermöge Annahme von (1) bereits völlig und zwar rational mitbestimmt sind, so werden die Formen $f_1, f_2 \ldots f_\nu$ rationale Covarianten der Form f sein.

Das Gleichungensystem (1), (2) wird — falls Complicationen vermieden werden sollen — die Eigenschaft besitzen müssen, daß, sobald für irgend eine derselben in Folge geeigneter Variationen der Coefficienten a zwei reelle Wurzeln in's Imaginäre übergehen (resp. vice versa), genau umgekehrt zwei Wurzeln einer der übrigen Gleichungen aus dem imaginären Größengebiet in das reelle übertreten (resp. vice versa).

Daß eine derartige Erscheinung möglich ist, lehrt das bekannte Beispiel einer cubischen Form $f(\overset{3}{\lambda})$ und ihrer Hesse'schen Covariante $f_1(\overset{2}{\lambda})$. Sind nämlich die drei Wurzeln von $f=0$ reell, so fallen die beiden von $f_1=0$ imaginär aus (u. umg.); ist hingegen nur eine Wurzel von $f=0$ reell, so müssen es auch die von $f_1=0$ sein (u. umg.). Oder anders ausgedrückt, die Productgleichung $ff_1=0$ hat die constante Anzahl von drei reellen Wurzeln.

Der algebraische Grund dieser Eigenthümlichkeit ist offenbar der, daß die Discriminanten der beiden Formen f und f_1 übereinstimmen.

2. Wir beweisen zunächst folgenden Satz:

„Ist $f_0 = f(\overset{n}{\lambda})$ eine binäre Form *ungerader* Ordnung $n=2\nu+1$, und bildet man die Reihe der Ueberschiebungen:

$$(3)\qquad f_1=(f,f)^2,\quad f_2=(f_1,f)^4,\quad f_3=(f_2,f)^6,\ \ldots\ f_\nu=(f_{\nu-1},f)^{2\nu},$$

so erfüllen die Discriminanten der $\nu+1$ Formen f_i die Kette von Beziehungen:

$$(4)\qquad D(f)=D_0,\quad D(f_1)=D_0D_1,\quad D(f_2)=D_1D_2,\ \ldots$$
$$D(f_{\nu-1})=D_{\nu-2}D_{\nu-1},\quad D(f_\nu)=D_{\nu-1},$$

wo sämmtliche D irreducible Invarianten der Form f_0 sind."

Das Bildungsgesetz der Covarianten f_i (3) tritt noch deutlicher hervor, wenn wir dasjenige ihrer Leitglieder berücksichtigen.

Es ist nemlich das Leitglied von f_i nichts Anderes, als die Determinante j_i:

$$(5)\qquad j_i = \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \ldots & a_{i-1}, & a_i \\ a_1, & a_2, & \ldots & a_i, & a_{i+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & & \cdot \\ a_i, & a_{i+1}, & \ldots & a_{2i-1}, & a_{2i} \end{vmatrix} = (0, 1, \ldots i-1, i).$$

Hieraus geht sofort der Ausdruck für den nächstfolgenden Coefficienten von f_i hervor; derselbe ist (bis auf einen Zahlenfactor) gleich der Determinante j':

$$(6)\qquad j'_i = \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \ldots & a_{i-1}, & a_{i+1} \\ a_1, & a_2, & \ldots & a_i, & a_{i+2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & & \cdot \\ a_i, & a_{i+1}, & \ldots & a_{2i-1}, & a_{2i+1} \end{vmatrix} = (0, 1, \ldots i-1, i+1).$$

Die weiteren Coefficienten von f_i setzen sich linear aus Determinanten zusammen, von denen wenigstens eine noch andere Colonnen von Größen a enthält, als die in j_i und j'_i auftretenden.

Eine Ausnahme dieser Regel findet nur bei der letzten Covariante $f_\nu = f_{\frac{n-1}{2}}$, der sog. Canonizante von f_0 statt, deren Coefficienten bekanntlich die Determinanten der Matrix:

$$(7)\qquad \begin{Vmatrix} a_0, & a_1, & \ldots & a_{\nu-1}, & a_\nu, & a_{\nu+1} \\ a_1, & a_2, & \ldots & a_\nu, & a_{\nu+1}, & a_{\nu+2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & & \cdot & \cdot \\ a_\nu, & a_{\nu+1}, & \ldots & a_{n-2}, & a_{n-1}, & a_n \end{Vmatrix}$$

sind.

Mit f_ν bricht offenbar die Reihe der Bildungen f_i von selbst ab.

Der Grad von f_i in λ ist $(i+1)(n-2i)$, derjenige in den Coefficienten a ist $(i+1)$, mithin der Grad der Discriminante von f in den a gleich $2(i+1)\{(i+1)(n-2i)-1\}$.

3. Es fragt sich nunmehr, unter welchen Umständen die Discriminante von f_i verschwinden kann. Denkt man sich die dann entstehende Doppelwurzel von $f_i = 0$ an die Stelle $\lambda = 0$ verlegt, so kommt die Frage darauf hinaus, wann die beiden Determinanten j_i und j'_i gleichzeitig Null sind.

Zufolge eines bekannten Determinantensatzes kann dies nur dann stattfinden, wenn entweder von der einen, oder aber der andern der beiden Matrices:

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \ldots & a_{i-1} \\ a_1, & a_2, & \ldots & a_i \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_i, & a_{i+1}, & \ldots & a_{2i-1} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \ldots & a_{i-1}, & a_i, & a_{i+1} \\ a_1, & a_2, & \ldots & a_i, & a_{i+1}, & a_{i+2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_i, & a_{i+1}, & \ldots & a_{2i-1}, & a_{2i}, & a_{2i+1} \end{vmatrix}$$

sämmtliche vollständige Determinannten verschwinden.

Im ersten Falle verschwinden dann aber auch die beiden ersten Coefficienten j_{i-1}, j'_{i-1} von f_{i-1} (indessen keine weiteren, auch keine sonstigen Größen j), im letzteren die beiden ersten Coefficienten j_{i+1}, j'_{i+1} von f_{i+1} (mit dem entsprechenden Zusatze).

Eine eigenthümliche Schwierigkeit bietet hierbei die letzte Covariante f_ν. Zuvörderst gilt allerdings wiederum der Schluß, daß das Verschwinden der beiden ersten Coefficienten j_ν, j'_ν entweder das von $j_{\nu-1}$, $j'_{\nu-1}$ nach sich zieht, oder aber dasjenige sämmtlicher Coefficienten von f_ν.

Nun bemerkt man aber leicht, daß die Covariante f_ν nicht einmal dann identisch verschwindet, wenn die ersten $\nu+1$ Coefficienten $a_0, a_1, \ldots a_\nu$ von f_0 gleich Null gesetzt werden, während alle übrigen Bedingungen ($j = 0$, $j' = 0$) sicher dadurch erfüllt werden.

Nach einem Satze von H. Hilbert[1]) kann daher einzig und allein das identische Verschwinden von f_ν nicht durch das Verschwinden von Invarianten der Form f_0 ersetzt werden d. h. die Discriminante von f_ν kann überhaupt keinen Factor (der doch eine Invariante sein müßte) aufweisen, der dem in Rede stehenden Falle entspräche.

4. Durch das Vorhergehende ist bereits begründet, daß eine Kette von Zerlegungen der Art (4) existiren muß: es wäre nur möglich, daß die dort mit D_i bezeichneten Ausdrücke Potenzen irreducibler Invarianten $\varDelta_i$, und daß sogar die beiden Potenzen von $\varDelta_i$ in $D(f_i)$ und $D(f_{i+1})$ verschiedene sind.

Diesem Einwande begegnet man durch wirkliche Aufstellung der D_i und nachfolgende Gradvergleichung.

Zu dem Behuf betrachte man die Gleichung:

$$(9)\qquad a^{2(\nu-i)}_{\lambda_0;\,\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_i;\;\mu_0,\mu_1,\mu_2,\ldots\mu_i} = 0$$

als eine in den $i+1$ Größen μ identische; von den damit äquivalenten $i+2$ Gleichungen bilde man die Resultante bez. der Größen λ.

Es wird behauptet, daß diese Resultante R_i mit der Invariante D_i übereinstimmt.

---

1) Vgl. diese Nachrichten vom laufenden Jahre Nr. 7.

In der That ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß jene $i+2$ Gleichungen für ein Werthsystem $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_i$ zusammenbestehen, genau durch das Verschwinden aller Determinanten der zweiten, unter (8) angegebenen Matrix characterisirt.

Wie man ferner durch geeignete Specialisirungen der Coefficienten a erkennt, ist die Resultante R_i auch nicht die Potenz einer andern Bildung. Mithin könnte D_i nur noch eine Potenz von R_i sein.

Nun ist aber R_i vom Grade $(i+1)(i+2)(n-2i-1)$ in den a, somit der Gesammtgrad von $R_{i-1} R_i$ gleich $2(i+1)\{(i+1)(n-2i)-1\}$ d. i. gleich dem Grade von $D(f_i)$. Also folgt $D_i = R_i$ q. e. d.

5. Nach diesen Vorbereitungen können wir zum Beweise des Hauptsatzes übergehen:

„Ist $f_0 = f(\overset{n}{\lambda})$ wiederum eine binäre Form ungerader Ordnung $n = 2\nu + 1$, und sind f_i $(i = 1, \ldots \nu)$ die unter (3) aufgestellten Covarianten, so besitzt die Productgleichung:

$$f_0 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdots f_\nu = 0 \tag{10}$$

eine *unveränderliche*[1]) Anzahl von *reellen* Wurzeln".

Man lasse etwa die Invariante D_{i-1} vermöge Variation der Coefficienten a den Werth Null passiren. Im „penultimaten" Zustande befinden sich dann sowohl unter den Wurzeln von $f_{i-1} = 0$, wie unter denen von $f_i = 0$ zwei nahezu coincidirende. Es handelt sich um den Nachweis, daß diese beiden Wurzelpaare von ungleichem Realitäts-Character sind, sodaß stets eines der beiden Paare reell, das andere imaginär ausfällt.

6. Zu dem Zwecke ist eine explicite Darstellung der drei ersten Coefficienten der Covariante f_i erforderlich.

Die Werthe der beiden ersten entnehmen wir aus (5) und (6):

(5) $j_i = (0, 1, \ldots i-1, i)$; (6) $j_i' = (0, 1, \ldots i-1, i+1)$,

sodaß die Entwickelung von f_i beginnt, wie folgt:

$$f_i = j_i + \mu j_i' \lambda + (\ )\lambda^2 + \cdots \tag{11}$$

Der Zahlenfactor μ berechnet sich leicht als

$$\mu = n - 2i. \tag{12}$$

---

1) sc. mit Ausschluß der Uebergangsfälle, wo eine oder mehrere der Invarianten D_i verschwinden.

Um zu einer übersichtlichen Darstellung des Coefficienten von λ^2 in (11) zu gelangen, wählen wir eine Entstehung von f_i, die derjenigen von D_i in Nr. 4 analog ist.

Versteht man nämlich unter:

$$(13) \qquad a^{n-2i}_{\lambda;\,\lambda_1,\,\lambda_2,\,\ldots\,\lambda_i;\;\mu_1,\,\mu_2,\,\ldots\,\mu_i} = 0$$

eine in den μ identisch erfüllte Gleichung, so fließen daraus $i+1$ Gleichungen, aus denen die Größen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_i$ eliminirt werden können. Das Eliminationsresultat ist eine Covariante mit dem Leitgliede j_i, die demnach mit f_i übereinstimmen muß.

Es kommt so für f_i die Determinante (von der es genügt, die erste Zeile zu notiren):

$$(14) \qquad f_i = \left| a_0 + \mu a_1 \lambda + \frac{\mu(\mu-1)}{2} a_2 \lambda^2 + \cdots, \right.$$

$$\left. a_1 + \mu a_2 \lambda + \frac{\mu(\mu-1)}{2} a_3 \lambda^2 + \cdots, \quad \ldots, \quad a_i + \mu a_{i+1} \lambda + \frac{\mu(\mu-1)}{2} a_{i+2} \lambda^2 + \cdots \right|$$

Bedient man sich entsprechender Abkürzungen, wie bei (5) und (6), so hat man für den Factor von λ^2:

$$(15) \qquad \frac{\mu(\mu-1)}{2}(0,1,\ldots i-1, i+2) + \left(\mu^2 - \frac{\mu(\mu-1)}{2}\right)(0,1,\ldots i, i+1)$$

$$= \frac{\mu}{2}\left\{(\mu-1)(0,1,\ldots i-1, i+2) + (\mu+1)(0,1,\ldots i, i+1)\right\},$$

und die Entwickelung von f_i fängt mit nachstehenden drei Gliedern an:

$$(16) \qquad f_i = (0, 1, \ldots i-1, i) + \mu(0, 1, \ldots i-1, i+1)\lambda$$

$$+ \frac{\mu}{2}\left\{(\mu-1)(0,1,\ldots i-1, i+2) + (\mu+1)(0,1,\ldots i, i+1)\right\}\lambda^2 + \cdots$$

$$= F_i(\lambda^2) + \cdots$$

7. Indem wir jetzt die Bedingungen, unter denen die Gleichungen $f_i = 0$ und $f_{i+1} = 0$ eine gemeinsame Doppelwurzel Null erhalten, *nahezu* als erfüllt ansehen, werden wir zeigen müssen, daß alsdann die Discriminanten der beiden quadratischen Formen F_i und F_{i+1} stets *verschiedene Vorzeichen besitzen*.

Dieser Beweis soll indessen hier unter einer vereinfachenden Annahme geführt werden.

Die fraglichen Bedingungen werden zweifellos befriedigt, wenn man alle Coefficienten $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{2i+1}$ verschwinden läßt. Dagegen bleiben dabei sämmtliche Invarianten D_k $(k \gtrless i)$ von Null verschieden.

Demgemäß ergiebt sich ein penultimater Zustand, wenn man setzt:

$$(17) \qquad a_i = \varepsilon\alpha_i, \quad a_{i+1} = \varepsilon\alpha_{i+1}, \quad \ldots, \quad a_{2i+1} = \varepsilon\alpha_{2i+1}$$

wo ε eine beliebig kleine, positive resp. negative reelle Größe bedeutet, während die α endlich und reell sind.

Berücksichtigt man beim Hinschreiben der Formen F_i und F_{i+1} immer nur die niedrigsten Potenzen von ε, so liefert eine leichte Rechnung mit Rücksicht auf (16):

$$(18) \quad \begin{cases} F_i = -a_{i-1}^i a_{2i} + (\,)\,\varepsilon\lambda - \dfrac{(n-2i)(n-2i-1)}{2} a_{i-1}^i a_{2i+2}\lambda \\ F_{i+1} = -a_{i-1}^i a_{2i} a_{2i+2} + [\,]\,\varepsilon\lambda + \dfrac{(n-2i-2)(n-2i-1)}{2} a_{i-1}^i a_{2i+2}^2 \lambda^2. \end{cases}$$

Die Factoren von $\varepsilon\lambda$ sind nur angedeutet, da sie bedeutungslos sind. Stellt man nemlich nunmehr die beiderseitigen Discriminanten auf, so beginnen dieselben mit der ersten Potenz von ε, wie folgt:

$$(19) \quad \begin{cases} D(F_i) = -2(n-2i)(n-2i-1)\, a_{i-1}^{2i} \alpha_{2i} a_{2i+2}\, \varepsilon + \cdots \\ D(F_{i+1}) = +2(n-2i-2)(n-2i-1)\, a_{i-1}^{2i} \alpha_{2i} a_{2i+2}^3\, \varepsilon + \cdots, \end{cases}$$

sind also in der That stets von ungleichen Vorzeichen: die letzteren vertauschen sich nur, wenn ε durch Null hindurchgeht.

Für $i = 0$ und $i = 1$ treten hinsichtlich der Vorzeichen der einzelnen Glieder in (18) kleine Modificationen ein, die aber das Endergebniß (19) nicht beeinflussen.

Damit ist gezeigt, daß die Anfangs aufgeworfene Realitätsfrage für Gleichungen ungeraden Grades eine einfache Lösung [1]) zuläßt.

Für Gleichungen von geradem Grade versagt indessen eine entsprechende Beantwortung, wenigstens auf dem hier eingeschlagenen einfachsten Wege.

Allerdings ist auch hier die geschlossene Reihe der Ueberschiebungen

$$f_1 = (f, f)^2, \quad f_2 = (f_1, f)^4, \quad \ldots \quad f_{\frac{n}{2}} = (f_{\frac{n}{2}-1}, f)^n$$

1) Die sich naturgemäß anschließende Frage nach der Größe der als constant nachgewiesenen Gesammtanzahl von reellen Wurzeln zu beantworten, ist mir vorderhand nicht möglich.

vorhanden, aber die letzte derselben ist vom Grade Null in λ, kann also keine Discriminante liefern.

Obgleich demnach alle Schlüsse des Vorhergehenden bis zur vorletzten Form $f_{\frac{n}{2}-1}$ gültig bleiben, so hört es eben bei dieser [1]) auf d. i. wenn die Invariante $f_{\frac{n}{2}}$ durch Null hindurchgeht, so kann die Gleichung $f_{\frac{n}{2}-1} = 0$ reelle Wurzeln verlieren oder gewinnen, ohne daß ein Ausgleich stattfindet.

1) Uebrigens tritt hier noch die weitere Aenderung hinzu, daß der zweite Factor der Discriminante von $f_{\frac{n}{2}-1}$ gleich der $\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{ten}}$ Potenz von $f_{\frac{n}{2}}$ wird.

Claustbal, den 24. October 1891.

Vorläufige Mittheilungen über Untersuchungen an Nemertinen des Golfes von Neapel.

Von

Dr. **Otto Bürger,** Privatdozent in Göttingen.

(Vorgelegt von Ehlers.)

Der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin bin ich zu großem Dank verpflichtet, da sie mir einen längeren Aufenthalt an der zoologischen Station zu Neapel ermöglichte. Es wurde mir somit nicht nur Gelegenheit gegeben, reiches Material zu sammeln, sondern auch eine Reihe von Beobachtungen am lebenden Thier zu machen, die unerläßlich sind, sobald man eine vielseitige Bearbeitung einer Thiergruppe ins Auge gefaßt hat. Einige der gewonnenen Resultate erlaube ich mir vorläufig mitzuteilen.

Die Nemertinenfauna des Neapler Golfes erscheint bisher als die bedeutendste der Welt. Erstaunlich ist die Menge, in der sich viele Arten zu allen Zeiten vorfinden, und überraschend der Formenreichtum. Durch Hubrecht sind bislang 52 Arten registriert worden. Nur 5 von diesen sind mir während der sechs Monate, die ich am Golfe weilte, nicht zu Gesicht bekommen, dagegen über 30 von Hubrecht noch nicht beschriebene und überhaupt mit wenigen Ausnahmen neue Formen.

Es ist bekannt, daß fast alle in der Nordsee aufgefundenen Nemertinenformen auch im Golfe Neapels angetroffen sind. Man macht aber die sehr augenfällige Beobachtung, daß die Nemertinen des mittelländischen Meeres klein sind im Vergleich zu ihren nordischen Verwandten, die z. B. an den englischen und amerikanischen Küsten gefischt sind. Solch riesig lange Nemertinen wie sie Mc. Intosh und Verrill (Lineus marinus [Montg.] 15—30 und Macronemertes gigantea [Verr.] 10 Fuß) gesehen haben, sind, wie mir der Herr Conservator Lo-Bianko versicherte, niemals gedredgt worden und somit auch wohl nicht dort. Ein Schauexemplar, ein Cerebratulus marginatus, welcher conserviert fast noch 1 m lang und 3 cm breit ist, wird in der Sammlung der Station als ein Unicum von Größe aufbewahrt.

Die Arten der waffenlosen Nemertinen dokumentieren sich als solche meist durch Färbung und characteristische Zeichnung, Merkmale, die nur bei relativ wenig bewaffneten sich vorfinden. Es bedarf daher bei letzteren der eingehendsten und oft sehr langwieriger Untersuchungen, Art- ja selbst Gattungsmerkmale aufzufinden.

Aus der Zahl der bewaffneten Nemertinen hebe ich heute nur drei sehr dünne Nemertinen hervor, welche im Sande mit Lineus lacteus und Amphioxus zusammen leben. Sie besitzen Otolithen und Nemertinen mit diesen Organen ausgestattetet sind soviel ich weiß in Neapel überhaupt noch nicht und sonst nur vereinzelt aufgefunden worden.

Die Otolithen kommen nur paarig vor, jede Gehirnhälfte besitzt eine Otolithenblase von ovaler Form. In ihr liegt ein je nach der Art verschieden gestalteter Otolith. Ich fand solche in Hantelform (man muß das Verbindungsstück der Kugeln nur sehr verkürzt denken) und solche die eine Rosette bilden. In jeder Blase liegt nur ein Otolith. Claparède[1]) fand eine sehr kleine Nemertine Oerstedia pallida (Kef.) mit ein Paar Otolithenblasen deren jede drei Otolithen enthielt, die durch schwingende Wimpern in zitternde Bewegung versetzt wurden.

Die Otolithen der von mir beobachteten Nemertinen rührten sich nicht. Auch Wimpern vermochte ich in der Blase nicht zu konstatieren.

Ich bemerkte schon daß die Arten der unbewaffneten Nemertinen gut gekennzeichnet sind. Auch ihre Gattungen zeigen vielfach einen bestimmten auffälligen Habitus.

So sind alle Arten der Gattung Carinella durch den sehr

---

1) Beobachtungen über Anatomie und Entwickelungsgeschichte wirbelloser Thiere. Leipzig 1863.

breiten nach hinten durch die Furchen der Seitenorgane scharf abgesetzten discusartige Kopf kenntlich. Sie ähneln so den Angehörigen der Gattung Enpolia, aber alle Enpoliiden vermögen den Kopf völlig einzuziehen im Gegensatz zu den Carinelliden.

Von Kennel beschrieb letzterdings[1]) eine ziemlich transparente Nemertine, welche er früher in Neapel erhalten hatte unter dem Namen Balanocephalus pellucidus.

Sie soll den Kopf völlig einziehen können. Kennel sagt: „dass kein Vergleich so passend erscheint wie der mit der Glanspenis und dem sich darüberziehenden Praeputium“:

Es ist kein Zweifel, nach der guten Beschreibung, welche der Autor beifügte, diese Nemertine mit dem characteristischen Vorderende ist eine Eupolia. Sie ist dreimal während meines Aufenthaltes in Neapel zu Tage gefördert worden. — Der discusartig geformte retractile Kopf, die vielen Augen, die Furchen am Kopfe, das sehr kurze Rhynchocoelom mit dem entsprechend kurzen Rüssel: das alles sind Charactere einer Eupolia. Dass diese Nemertine ventrale seitliche Spalten besitzt, von derem hintersten Ende die Kanäle der Seitenorgane in die Tiefe ziehen, so beschreibt Kennel, wird uns nicht verleiten, sie vom Genus Eupolia abzutrennen. Im Gegenteil es sind auch diese ventralen wohl etwas flachen Spalten wie ich schon früher Gelegenheit hatte nachzuweisen, Eigentümlichkeiten vieler Eupoliiden. — Eupolia pellucida würde man sie nennen müssen; vielleicht ist sie auch identisch mit Eup. minor Hubr. Eine andere systematische berichtigende Bemerkung finde hier noch Platz.

Von Joubin[2]) ist unter anderen Nemertinen eine Carinella Aragoi nov. sp. beschrieben worden.

Es ist diese Carinella dieselbe, welche Mc. Intosh[3]) als Carinella annulata beschrieben und abgebildet hat. Aber letztere ist nicht ein Synonym von Valencinia ornata Quatrefages, wie Mc. Intosh angiebt. Nämlich Valencinia ornata zeichnen auf rothbrauner Grundfarbe drei dorsale und eine ventrale weisse Längslinie, die vom Kopf bis zum Schwanzende verlaufen. Die mittlere dorsale Längslinie führt aber bis zur äußersten Kopfspitze. Außerdem sind weiße Querringel vorhanden, deren vorderster um den Kopf geht. Derselbe schneidet ein vorderes rothbraunes Feld, ein Stirnfeld ab, daß von der dorsalen Mittellinie natürlich halbiert

1) Ueber einige Nemertinen. Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscher Gesellschaft. Jahrg. 1890.

2) Recherches sur les Turbellariés des côtes de France. Némertes. Arch. d. Zoolog. exp. T. 8. 1890.

3) A. Monograph of the British Annelids. Part I. Nemerteans.

wird. Es folgen dann 3 Ringel in sehr weiten Abständen. Dann erst beginnt die Region in welcher die Ringel sehr nahe gerückt sind, sodaß etwa 10 Ringel auf jeden der beiden von den voraufgehenden durch die 3 Ringel begrenzten weiten Abstände kommen würden. Carinella annulata Mc. Intosh hat eine gelbrothe Grundfarbe. Wir vermissen die ventrale weiße Längslinie, die mittlere dorsale reicht nur bis an den Kopfringel hinan, sodaß das Stirnfeld ungeteilt bleibt. Die nachfolgenden Ouerringel rücken ganz allmählich von vorn nach hinten zu dichter zusammen, aber nicht so dicht wie bei Valencinia ornata die Ringel in der hinteren Körperregion.

Hubrecht[1]) führt sowohl Valencinia ornata Ouatrf. als auch Carinella annulata Mc. Int. als Syn. seiner Carinella annulata an.

Beide Carinellen sind in Neapel nicht selten. Ich möchte der Anciennität gemäß folgendermaßen nominieren.

Syn. Valencinia ornata Ouatrf.	Syn. Carinella annulata Mc. Int.
„ Carinella annulata Joub.	„ Carinella Aragoi Joub.
Carinella annulata (Montagu. Johnst.)	Carinella Mc. Intoshii (mihi).

Leicht kenntlich sind auch die Vertreter der Gattung Valencinia an dem pfriemenförmig zugespitzten Kopfende.

Unter die Gattung Cerebratulus faßt Hubrecht eine Anzahl von Arten zusammen, die Mc. Intosh in Cerebratulus, Mikrura und Lineus sondert.

Ich habe mich bereits überzeugt, daß sich mindestens in diese 3 Gattungen auch die Neapler Cerebratuliden Hubrechts verteilen.

Nämlich erstens im Schlamm ziemlich seicht wohnen breite kräftige Formen, die sich durch ihre raschen Bewegungen auszeichnen. Sie sind vorzügliche Schwimmer; mit schlängelnden aalartigen Bewegungen durchmessen sie das Bassin. Solche Thiere sieht man, wie mir Herr Conservator Lo Bianko versicherte, gelegentlich an der Oberfläche des Meeres sich rasch schwimmend fortbewegen. Ihr Kopf ist lanzettlich zugeschärft, der breite Körper ist platt und mit stark hervortretenden Seitenrändern versehen. Diese Thiere vermögen sich wohl wie eine Spirale aufzurollen, aber nicht zu Klumpen aufzuknäueln. Sie besitzen ausnahmelos ein weißliches Schwänzchen.

Zweitens, finden sich in größeren Tiefen, zwischen Corallineen wohnend, kleine im Verhältnis zur Länge dünne Formen mit spatelförmigem Kopf; sie sind weich und können sich zu Klumpen zu-

1) The Genera of European Nemerteans critically revised with description of several new species. Notes from the Leyden Museum N. 44.

sammenknäueln, aber sie vermögen sich nicht durch Schwimmbewegungen fortzubewegen. Die Ortsveränderung geschieht lediglich durch kriechen. Im Bassin können sie am Wasserspiegel durch Flimmerbewegung hingleiten. Auch sie besitzen ein Schwänzchen.

Drittens giebt es Formen, welche den letzt characterisierten im Habitus nahe stehen — aber sie besitzen kein Schwänzchen.

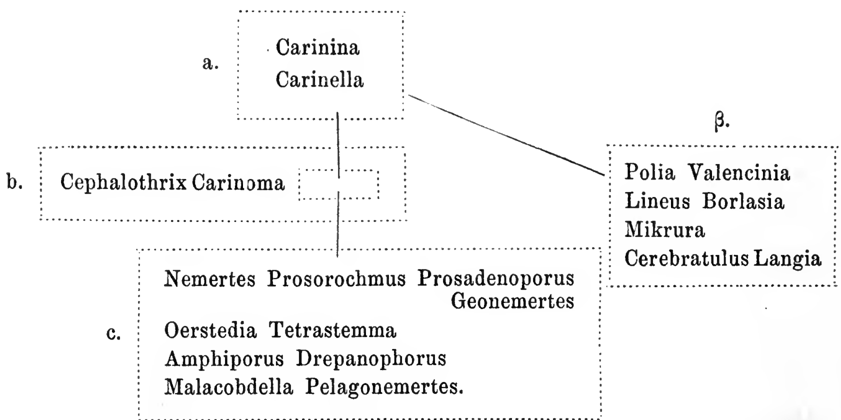
Die Vertreter der Gattung Langia, die von Hubrecht aufgestellt wurde, sind kenntlich an den nach oben aufgebogenen Seitenrändern. Sie stehen der ersten der eben skizzierten 3 Gruppen nahe. In Neapel ist nur eine Art bislang gefunden worden eine zweite wurde von Joubin[1]) beschrieben. Diese kommt an der französischen Küste vor.

Nicht minder characteristisch ist der Habitus der Gattung Borlasia. Ich war so glücklich eine zweite Art derselben zubekommen. —

Ein bis ins Einzelne ausgearbeitetes System der Nemertinen ist mir noch nicht zur Hand allein für die Anordnung der Hauptgruppen auf phylogenetischer Grundlage, deren Plan ich bereits früher angedeutet habe, sammelte ich weitere Erfahrungen, die in mir die Ueberzeugung, daß das Hubrechtsche System und mithin auch dasjenige von Max Schulze ein künstliches, befestigten.

Ich gebe ein Schema.

I.



a) Bei Carinina liegen die Seitenstämme epithelial, bei Carinella sind sie bis unter die Basalmembran gesunken, also liegen sie der Ringmuskulatur außen an.

1) L'Anatomie d'une Némerte d'Obock. Langia Obockiania. Archiv d. Zoolog. exp. 1887.

b) bei Cephalothrix und Carinoma haben sie auch die Ringmuskulatur durchbrochen und liegen bereits inmitten der Längsmuskulatur.

c) Bei Nemertes-Malacobdella (Hoplonemertinen Hubrechts) haben sie die Längsmuskulatur völlig durchbrochen und liegen innen von ihr im Leibesparenchym.

β) Bei Polia-Langia sind die Seitenstämme in der Lage wie sie sich uns bei Carinella darstellten, liegen geblieben, aber es hat sich zwischen Ringmuskulatur und Epithel eine Schicht von Drüsenzellen, Bindegewebe und Längsmuskeln gebildet. Somit liegen die Seitenstämme auch hier in der Tiefe.

Man beachte, von a nach b zu c sind die Seitenstämme gerückt, aber in die Lage wie sie bei β statt hat gerückt worden.

Anordnung der Gattungen in den Rechtecken c und β ist eine durchaus provisorische; ich stütze mich wesentlich auf die von Hubrecht gegebene (op. cit.). Ebenso bemerke ich ausdrücklich, daß ich weder Cephalothrix noch Carinoma für die Uebergangsformen von a zu c halte; ich fasse sie als Verwandte der wahren Zwischenform auf, die wir bisher nicht kennen. Das habe ich durch das leere Rechteck anzudeuten versucht.

Jedenfalls ist es meines Erachtens nicht möglich den Stammbaum anders zu construieren, nachdem wir Nemertinen mit der characteristischen Mittellage der Seitenstämme kennen lernten, deren eine, selbst wenn auch sie durch das Fehlen der Seitenorgane eine abweichende Form darstellt, so doch — ich habe Carinoma im Auge — durch den Bau der Körperwand, durch die Nephridien und das Blutgefäßsystem ferner durch die eigentümliche innere Ringmuskulatur sehr an Carinella erinnert; füge ich nun noch andrerseits hinzu, daß Carinoma Darmtaschen besitzt, die im hinteren Körperabschnitt ungemein tief sind, daß diese metamer angeordnet mit Genitaltaschen wechseln — so wird sich der Leser, wenn er die tiefe Lage der Seitenstämme bedenkt ein Querschnittsbild contruiren können, das sehr an das z. B. einer Nemertes erinnert.

In der eben gegebenen Darlegung der inneren Bauverhältnisse von Carinoma Armandi (Mc. Int. Oud.) bin ich in wesentlichen Punkten von derjenigen Oudemans[1]) abgewichen. Ich gedenke die meine bald zu rechtfertigen.

Indem ich die systematischen Betrachtungen schließe, ich weiß ich habe nichts weiter gegeben als einige Ideen zu einem Bauplane,

---

1) The circulatory and nephridial Apparatus of the Nemertea. Qu. Journ. of micr. Sc. Vol 25. N. S. 1885.

füge ich zunächst einige Beobachtungen über die Organisation der Nemertinen an, welche fast ausschließlich am lebenden Object gemacht wurden.

Bei sehr vielen bewaffneten Nemertinen so Amphiporus, Drepanophorus, Tetrastemma habe ich bemerkt wie sich an der Kopfspitze bald ein rundlicher Hügel vorwölbt, bald dieser wieder verschwindet; er ist mit borstenartigen Haaren besetzt, die bedeutend kürzer sind als die Wimpern des Körperepithels. Er ist ohne Frage ein vorstülpbarer Sinneshügel, ein Sinnesorgan, das über der Rüsselöffnung gelegen ist und zum Tasten dient. Aber an der nämlichen Stelle müßte ja die Mündung der Kopfdrüse sich befinden[1])! Gewiß. Wir entsinnen uns, daß die Kopfdrüsen in eine terminale flaschenförmige Grube einmünden, und ich zweifle nicht, daß es dieses Grübchen ist, das sich handschuhfingerartig aus- und einzustülpen vermag. Ich fand früher[2]) auch bei verschiedenen Cerebratuliden an Schnittpraeparaten am Kopfende 3 kleine Grübchen und bemerkte nunmehr auch am lebenden Nemertinen (z. B. Mikrura purpurea Mc. Int.) 3 kleine mit langen Haaren besetzte Hügel, die bald hervorragten bald eingezogen wurden[3]).

Lange als Tasthaare zu deutende einzeln stehende Borsten bemerkte ich außer in der Kopfregion, bei den Tetrastemmaarten vor allem, am Schwanzende. Aber vorne und hinten sind sie immer nur in sehr geringer Anzahl eingepflanzt.

Von neuem überzeugte ich mich von der Existenz der tiefen Gruben, welche in nächster Nähe der äußerlich auch mit der Lupe nicht sichtbaren Nephridialöffnungen gelegen sind, welche ich früher als ein zweites Paar von Seitenorganen bei Carinella polymorpha und annulata beschrieb. Diese eben sind auch mit unbewaffnetem Auge leicht erkennbar. Bei anderen Carinellaarten habe ich sie bisher nicht aufgefunden.

Ein eingehendes Studium widmete ich dem Nervensystem, angeregt durch die Ehrlichsche Färbmethode mittels Methylenblau. Die Ergebnisse dieser Experimente sind, kurz gefaßt, diese.

---

1) Bürger zu Anatomie und Histologie der Nemertinen nebst Beiträgen z. Systematik. Zeitschrift f. wiss. Zoolog. Bd. 50. 1890.

2) Bürger, Beiträge zur Kenntnis der Nemertinen. Nachricht. der Königl. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen. 1888. No. 17.

3) Hubrecht erwähnt von Meckelia Ehrenbergii (Diesing): „an der Rüsselöffnung fanden sich 3 kleine mit längeren Flimmern besetzte Papillen vor“. Untersuchungen über Nemertinen a. d. Golf von Neapel. Niederländ. Archiv für Zoologie. Bd. II. 1873.

Der Ganglienbelag des Gehirns und der Seitenstämme besteht nur aus unipolaren Zellen, deren jede einen Fortsatz in die Centralsubstanz (Punktsubstanz) sendet. Aber die Centralsubstanz, welche quantitativ mächtig entwickelt ist, besteht nur zur geringsten Masse aus nervösem Gewebe, es stellt vielmehr die Centralsubstanz des Gehirnes, Kugeln, die der Seitenstämme Cylinder aus einem feinverfilzten Bindegewebe gebildet dar. In der bindegewebigen Grundmasse der Centralsubstanz des Seitenstammes befindet sich nun bei vielen Nemertinen nur ein einziger sehr dünner mehr oder minder central gelegener Längsstrang, welcher aus nervösen Fibrillen besteht. Diese Fibrillen sind die Fortsätze der Ganglienzellen. Den Strang, zu welchem sie sich inmitten der bindegewebigen Centralsubstanz vereinigen, habe ich Centralstrang genannt. Einen zweiten Längsstrang finden wir dort, wo Neurochordzellen vorhanden sind, da deren Fortsätze sich nicht mit den Fortsätzen anderer Ganglienzellen mischen. Dem Centralstrang entspringen Fibrillen, die in oder an dem Hautmuskelschlauch abgehen. Mit andern Worten: aus dem Centralstrang gehen die Nervenfasern der „Spinalnerven“ ab, die ihre beträchtliche Dicke (man kann sie auch auf Schnitten gut constatieren) wiederum bindegewebigen Hüllen verdanken.

Es gelang mir nicht selten, eine Nervenfaser, die sich im Hautmuskelschlauch hinzog, zurück in dem Centralstrang und schließlich bis an die Ganglienzelle zu verfolgen.

Niemals sah ich aus dem Strang der Nenrochorde eine Nervenfaser entspringen. Dagegen gehen vom Seitenstamm feine und dickere Nervenfasern ab, denn es besteht auch sein Ganglienbelag aus kleinen und größeren Ganglienzellen. — Wie man zwei Arten von Ganglienzellen außer dem Neurochordzellen am Seitenstamm scharf unterscheiden kann, wird man auch zwei Arten von Nervenfasern immer constatiren müssen. Ich betone dies, da ich der Meinung bin, daß die dickeren Nervenfasern die motorischen, die dünneren die sensiblen darstellen. Beiderlei Fasern verfolgte ich bis zu Ganglienzellen zurück. Ich kann mithin nicht an die doppelte Ursprungsweise der Nervenfasern und den verschiedenartigen Ursprung der motorischen und sensiblen glauben. Die abgehenden Nervenfasern gehen sämmtlich unter ziemlich gleichem stumpfem Winkel in symmetrischer Weise ab, es kreuzen sich also eine große Anzahl von Nervenfasern, die Ganglienzellen entstammen, welche vorne im Thierkörper liegen mit solchen, welche mit Ganglienzellen verbunden sind, die wir hinten suchen müssen.

Es besitzen die Fibrillen des Centralstranges feinste Aestchen.

Nennen wir die Fibrillen Stammfortsätze der Ganglienzellen, so müssen wir sagen, der Stammfortsatz hat Nebenfortsätze und zwar nicht nur in seinem ersten Abschnitt, nicht nur unmittelbar nach seinem Eintritt in die Centralsubstanz, sondern vielleicht in seiner ganzen Länge, sicher wenigstens in einer sehr langen Strecke seines Verlaufes innerhalb der Centralsubstanz des Seitenstammes. Die Fibrillen des Centralstranges ebenso wie die Nervenfasern (wie wir jene Fibrillen ja nennen, nachdem sie sich aus dem Seitenstamm herausbegeben haben zur Innervation der Muskulatur u. s. f.) sind mit unzähligen Verdickungen besetzt, die ihnen ein perlschnurartiges Aussehen verleihen.

Eine merkwürdige Erscheinung sind bekanntlich die peripheren Nervenschichten, welche vor allem bei den Formen auftreten, deren Seitenstämme auf der Grenze zweier Schichten der Körperwand liegen. Also weder die Hoplonemertinen noch die Arten von Cephalothrix, noch Carinoma besitzen sie in typischer Ausbildung wie Hubrecht[1]) sie uns bei Carinella, Eupolia, Cerebratulus, Langia kennen lehrte. Durchaus nicht aufgeklärt ist auch die Bedeutung der medianen Nerven, die ich den kleinen und großen Rückennerven nannte.

Ich fand: die periphere Nervenschicht, deren reticulären Character ich früher schon betonte, besteht zum Wesentlichen aus demselben Bindegewebe wie die Centralsubstanz der Seitenstämme. In dieses sind die Nervenfasern, welche dem Seitenstamm entspringen, eingebettet.

Die Rückennerven haben *nicht* die Bedeutung von Nerven, welche Organe innervieren wie die Schlundnerven, die Augennerven u. s. f. Es steht nur der obere große Rückennerv (Carinella) in direkter Verbindung mit dem Gehirn durch die dorsale Commissur, der untere Rückennerv wird gebildet, indem Fasern des oberen die Ringmuskulatur durchdringen und unter dieser über dem Rhynchocoelom nach hinten ziehen. Aber fortgesetzt in sehr engen Abständen steigen immer wieder Fasern vom oberen Rückennerven zum unteren herab, diesen unablässig verstärkend.

Oberer und unterer Rückennerv bilden ein Strickleitersystem. Mit dem oberen Rückennerven treten die „Spinalnerven“ in engste Beziehung. Sämmtliche Spinalnerven, die bei Carinella,

---

1) Hubrecht, The peripheral nervous System in Palaeo- and Schizonemert etc. Ou Journ. of micr. Sc. Vol. 20.

welche ich im Auge habe, ziemlich regellos vom Seitenstamm entspringen verflechten sich mit dem oberen Rückennerven und vermischen sich mit seinen stammeigenen Fasern, die, wie gesagt, teils der dorsalen Commissur entspringen, teils aber von einem sehr spärlichen eigenen Belag von unipolaren Ganglienzellen abstammen. Es ist nachzuweisen, daß mindestens ein Theil der „Spinalnervenfasern" im Rückennerven fortzieht und sich auch nunmehr an der Bildung des kleinen Rückennerven beteiligt, aber es ist auch zweifellos, daß die Fasern der „Spinalnerven" teilweise durch den großen Rückennerven hindurch dringen und mithin Nervenfasern, welche vom linken Seitenstamme kommen bis in die rechte Körperhälfte sich fortsetzen.

Der große Rückennerv ist also ein Längsstrang nervöser Fasern, die teilweise vom Gehirn herkommen, teilweise eigenen Ganglienzellen entspringen, vor allem aber von den Fasern der Nerven der Seitenstämme sich herleiten. Diese drei nach dem Ursprung verschiedenartigen Nervenfasern verflechten sich in ihm.

Ich möchte ein Analogon heranziehen und glaube ein solches bei den Wirbeltieren im Grenzstrang des Sympathicus zu finden.

Leider gelang es mir nicht, die Nervenfasern, welche ich einerseits wohl zu den zugehörigen Ganglienzellen verfolgen konnte, andererseits bis zu den Endigungen hinzuverfolgen, und zwar weder bis zu Zellelementen motorischer noch sensibler Art.

Darin war ich glücklicher bei der Untersuchung des Rüssels. Im bewaffneten Rüssel befindet sich eine wechselnde für die Art constante Anzahl von Nerven, deren jeder mit einem Ganglienbelag ausgestattet sind. Die Ganglienzellen liegen zwischen den im Rüssel parallel verlaufenden Längsnerven und zwar sind die einzig unipolaren Ganglienzellen fast ausnahmslos mit den aufgebauchten Enden aneinander gepreßt. Immer je ein Paar Ganglienzellen liegt zusammen. Wir haben Geschwisterzellen im Rüssel vor uns. Jede Zelle sendet ihren einzigen Fortsatz in einen anderen Nerven.

Auch der Rüsselnerv besteht quantitativ der Hauptsache nach aus verfilztem Bindegewebe. In jedem Nerven, wie ich diesen Strang auch in seiner Gesammtheit trotzdem nennen will, bilden die Ganglienzellfortsätze einen sehr feinen Centralstrang. Aus diesem gehen feine Fibrillen ab, Nervenfasern, welche den Muskelschlauch des Rüssels innervieren und deren Endigungen zwischen den Muskelzellen deutlich zu sehen sind, ferner entspringen dem Centralstrang zugweise auch jene Nervenfasern, von denen man jede einzelne an eine Zelle der Papillen herantreten sieht. Doch nicht direkt; zwischen beiden, zwischen Nervenfibrille und Papillenzelle ist noch eine Zelle, eine Nervenzelle eingeschaltet.

Was bedeutet aber der Reichtum an Ganglienzellen, die ich (was die physiologische Bedeutung anbetrifft) in scharfem Gegensatz zu den Nervenzellen stelle, für den Rüssel? Nur durch den Besitz von Ganglienzellen, mit denen das Rüsselnervensystem in so hohem Maße ausgezeichnet ist, kann man es erklären, daß der Rüssel so wenig abhängig vom Centralnervensystem ist, so wenig, daß derselbe vom Körper getrennt nicht leblos erscheint, sondern fast alles leistet, was er leistete als er mit ihm noch eins war: Er stülpt sich ein und aus, er klebt sich vermöge seiner Papillenzellen fest und läßt sich wieder los, ja er kriecht; er zeigt mit einem Worte die bedeutendsten Lebenserscheinungen. Vermöchte er das, wenn nicht sein eigener nervöser Apparat ein dem centralen fast gleichwertiger wäre?

Am wichtigsten von vorn herein erschien mir die Aufgabe, die Art der Endigungen des Excretionsgefäßsystemes festzustellen.

Den Angaben Oudemans[1]), wonach die Canäle des Nephridialapparates in offner Verbindung mit den Blutgefäßen stehen sollen, vermochte ich nicht Zutrauen zu schenken.

An stark comprimirten dünnen Nemertinen wie Nemertes gracilis und einer noch unbeschriebenen durch den Besitz von 4 Augen ausgezeichneten sehr langen, ziemlich durchsichtigen Nemertine beobachtete ich zuerst Wimperflammen als letzte Enden der verzweigten Nephridialcanäle.

Die Nephridialcanäle sind bei diesen Formen sehr lang, sie sind vom Gehirn bis in die hintere Körperregion zu verfolgen, wo sie auch noch zwischen den Geschlechtsorganen entlang ziehen und auch die Wimperkölbchen überall erkannt werden können.

Das Excretionsgefäßsystem jener Nemertinenarten ist mithin ganz anders als das eines Amphiporus oder Drepanophorus, wo die Nephridialcanäle lediglich in der Oesophagalregion sich ausbreiten, oder richtiger jederseits mit ihren vielen Aesten ein Knäuel bilden, durch das die seitlichen Blutgefäße hindurchgehen. Aber auch ihre letzten Enden sind Wimperkölbchen, von denen sich unzählige in die Wand der seitlichen Blutgefäße einbohren.

Eine Beziehung zwischen Blutgefäßsystem und Nephridialapparat besteht mithin, aber sie ist ganz anderer Art wie die von

---

1) Op. cit.

Oudemans beschriebene: Es bohren sich die blindgeschlossenen Enden der Nephridialcanäle in die Wandung der Blutgefäße ein, nicht allein bei den Hoplonemertinen, von denen ich soeben einige Vertreter heranzog, sondern auch bei Carinella und Carinoma. Bei diesen ursprünglicheren Formen hat Oudemans derartige Enden, wie ich später beweisen werde, für offene gehalten, obwohl dieselben immer vom Endothel der Blutgefäße vollständig bekleidet sind.

Auf Grund meiner Nachuntersuchung darf ich es als höchstwahrscheinlich hinstellen, daß auch in dem blindgeschlossenen, in das Blutgefäß hineinragenden Enden der Excretionsgefäße von Carinoma Armandi Wimperflammen sich befinden. Solcher Enden finden sich bei Carinoma aber nur wenige, kaum in und an jedem Blutgefäß mehr als 10.

Das Excretionsgefäßsystem der Nemertinen weist auf das der Turbellarien hin.

Der histologische Bau freilich beider ist sehr verschieden. Die Excretionscanäle der Nemertinen haben eine zellige Auskleidung, deren einzelne Elemente hohe Cylinderzellen darstellen, die denen des Körperepithels sehr ähnlich sind. Doch trägt jede Zelle nur eine Wimper oder doch nur ein Paar Flimmern. Auch die Endkölbchen, in welchen der lange dicke Wimperschopf schwingt, besitzen ein aus sehr vielen kleinen, hier freilich etwas flachen Zellen sich zusammensetzendes Epithel.

Bei den Turbellarien aber ist das Zellmaterial, aus welchem die Excretionscanäle sich aufbauen, bekanntlich ein sehr spärliches, es sollen die Canäle z. B. bei den Polycladen nach Lang eine Durchbohrung von linearen Zellreihen darstellen. Das Endkölbchen besteht aus einer einzigen Zelle.

Auf große Schwierigkeiten stieß in Neapel die Beschaffung von Material zwecks entwicklungsgeschichtlicher Studien.

Obwohl ich ein halbes Jahr lang verschiedene Arten, teilweis sehr massenhaft, in Aquarien gehalten habe, welche Geschlechtsprodukte enthielten und Männchen und Weibchen vorhanden waren, war ich nicht so glücklich, je einmal Eier zu bekommen. Die Thiere, Lineus lacteus, Eupolia delineata und curta und Nemertes gracilis hielten sich Monate lang sehr gut, aber dann begannen viele Exemplare, besonders von Lineus lacteus, zu zerstückeln. Es gelang mir nicht, die Ursachen ihres Unterganges festzustellen.

Die Nemertinenarten, welche in größeren Tiefen leben, halten sich überhaupt nur wenige Tage mit Ausnahme einiger Amphiporusarten und Drepanophorus serraticollis, den ich außerordentlich lange im Aquarium am Leben erhalten konnte. Merkwürdiger Weise ganz im Gegensatz zu seinem nahen Verwandten Drepanophorus rubrostriatus, der die Gefangenschaft gar nicht erträgt. Auch mit den großen im Schlamm lebenden Cerebratulusarten habe ich unglücklich experimentirt. Indes war ich so glücklich, von draußen einmal ein Thier, Nemertes gracilis, zu bekommen, das sofort Eier ablegte, die sich ungemein schnell entwickelten. Die Furchung war eine totale aequale, und noch in der Eihülle entwickelte sich ein Embryo, der ein dichtes Wimperkleid besitzt, und an dessen einem Ende — er hat eine länglich ovale Form angenommen — zwei lange Geißeln schwingen. Es wurden zwei Richtungskörper, welche in diesem Entwicklungsstadium sich noch vorfanden, gebildet.

Der Embryo wächst, durchbricht die Eihülle und bewegt sich mit Hilfe seiner beiden Geißeln im Wasser umher. Seine weitere Entwicklung habe ich nicht beobachten können.

Deshalb war es mir eine außerordentlich erwünschte Hilfe, als mir Herr Professor Korotneff, Director der Zoologischen Station in Villa Franca, seine Unterstützung zusicherte, indem derselbe mir lebendes und conserviertes Material von Prosorochmus Claparèdii versprach und mir auch wiederholt Sendungen dieser lebendig gebärenden von Claparède an der Küste der Normandie entdeckten Nemertine zukommen ließ.

Besonders erfreulich war es aber, als ich diese Nemertine auch in Neapel zwischen dem Materiale, das die Fischer besorgen, mit Nemertes gracilis vergesellschaftet fand.

Herrn Professor Korotneff bin ich zu großem Danke verpflichtet, ich erlaube mir denselben an dieser Stelle auszusprechen.

Obwohl sich die Exemplare von Prosorochmus Claparèdii, welche von Villa Franca und aus dem Neapler Golf stammen, in Gestalt und Färbung gleichen, ist doch die Bewaffnung des Rüssels ein derartig verschiedene, daß man in Versuchung kommt, zwei Prosorochmusarten, zu unterscheiden, mindestens aber Varietäten als Pr. Claparedii (Nizza) und Pr. Claparedii (Napoli).

Nämlich die Prosorochmus-Individuen von Villa Franca zeigen in jeder Seitentasche des Rüssels 4 Nebenstilette. Das untere Ende derselben bildet einen glatten kugligen Knauf, diejenigen aber des Golfes besitzen stets nur je 2 Nebenstilette in jeder Tasche; aber der Knauf ist fünfteilig, er bildet eine Rosette. Dementsprechend ist natürlich auch der Knauf des Hauptstilettes gestaltet.

Ein Prosorochmus enthält oft alle Entwicklungsstadien. Während vorn noch Eier sich befinden, sieht man im hintersten Ende des Thieres Embryonen, in welchen man bereits die Nebenstilette bemerkt. Aus Villa Franca bekam ich Thiere mit Embryonen im Mai und Anfang Juni, in Neapel im Juli.

Die Entwicklungsperiode wird auch wohl in Neapel früher fallen und schon lange begonnen haben, ehe ich die ersten Prosorochmen dort auffand, immerhin ist zu bedenken, daß sich dieses Jahr ein ausnahmslos ungünstiger Frühling in Neapel geltend gemacht hat, sodaß die heurigen klimatischen Verhältnisse an der Riviera vielleicht günstiger waren, als bei uns am soviel weiter südlich gelegenen Golfe Neapels. Jedenfalls wird man doch mindestens auf 5—6 Wochen rechnen können, während welcher man fortgesetzt trächtige Thiere erwarten darf.

Wo sind die Männchen von Prosorochmus? Ich habe sie bislang nicht gefunden.

Beim Weibchen sind die Genitaltaschen mit Eier prall gefüllt. Dieselben alterniren mit den Darmtaschen. Aber nur wenige, meist nur ein einziges Ei kommt von einem Haufen von Eiern zur Entwicklung. Das sich entwickelnde nährt sich von den anderen Eiern. Es bildet sich eine Hülle um das in die Embryonalentwicklung eintretende Ei und in dieser liegen anfangs zahlreich andere Eier eingeschlossen. Je mehr aber die Entwicklung fortschreitet, je kleiner werden die im Follikel eingeschlossenen Eier und schließlich, wenn sich ein Embryo entwickelt hat, an dem der Kopf sich schon formt, sind auch die letzten Eireste verschwunden.

Von der Entwicklung des Embryo will ich nichts vorweg nehmen, da ich die nach lebenden Entwicklungsstadien aufgezeichneten Befunde erst noch am conservierten Material, das mir reichlich zur Verfügung steht, prüfen und weiter verfolgen möchte.

Nur über die Entwicklung des Stilettapparates des Rüssels will ich gleich folgendes bemerken. Man ist sich nicht darüber einig, wo das Hauptstilett herkommt. Man behauptet, es werde aus den Seitenstiletttaschen bezogen und nennt dementsprechend die Stilette, welche in den seitlichen Taschen enthalten sind, Reservestilette, man behauptet aber dem entgegengesetzt auch, das Hauptstilett habe nichts mit den sog. Reservestiletten zu thun, das Hauptstilett entstehe nicht in deren Tasche, sondern an Ort und Stelle.

Die Beweise, welche Max Schultze[1]) für seine Ansicht bringen konnte, waren, wenn auch nicht völlig exacte, so doch sehr beachtenswerte. Er war der Meinung, das Hauptstilett stamme aus den Seitentaschen.

---

1) Max Schultze. Beiträge zur Naturgeschichte der Turbellarien. Greifswald 1851.

In dem sich entwickelnden Rüssel von Pr. Claparedii treten zuerst die Reservestilette auf und zwar sind sie, in jeder Tasche ein Paar, schon ziemlich fertig, wenn die Basis des Hauptstilettes erst im Entstehen begriffen ist. Diese wird geschaffen, indem sich ein Sekret, das einem Drüsenkranze entstammt, der sich in der Stilettregion sehr frühzeitig ausbildet und zeitlebens erhält, in eine Form ergießt, die von der inneren Muskulatur des Rüssels gebildet wird. Die Rüsselmuskulatur bildet nämlich eine trichterförmige Mulde und daher hat auch die Basis des Hauptstilettes anfangs in eine pyramidale Gestalt, welche sich erst später ändert und die Form eines (nicht mathematischen) Kegels annimmt.

Man kann die Bildung der Basis in allen Stadien verfolgen, man wird aber nichts von einer doch gleichzeitig notwendigen Bildung des Hauptstilettes an diesem Orte wahrnehmen, obwohl schon im Embryo die Basis ein Stilett erhält. Man macht nun stets die Beobachtung, daß, sobald die Basis bepflanzt ist, in einer der Seitentaschen 1 Stilett fehlt.

Wie die Stilette aus der Reservetasche zur Basis gelangen, ist mir nicht klar geworden. Ich habe sie nie auf halbem Wege gesehen, sondern ich constatierte nur stets das vollendete Factum.

Ich war aber so glücklich, einmal ein Stilett in der Basis eingeschlossen zu erblicken. Die Basis war in dem bereits ausgeschlüpften Thier aber auch bepflanzt und in der einen Seitentasche waren zwei, in der anderen nur ein Reservestilett enthalten. Das zeugte davon, daß die Basis erst kürzlich besetzt war, denn die Reservestilette bilden sich ungemein rasch, um die übliche Zahl in den Taschen wieder herzustellen. Es ist dies Bild nicht anders zu deuten, als daß das Reservestillett zu früh zur Basis, ehe sie vollendet war, gelangte und nunmehr verschüttet wurde. Man findet derartige Bilder auch in Mc. Intosh's Monographie gezeichnet. Ich deute sie nicht anders.

Um die Frage nach der Herkunft der Hauptstilette zu studieren, habe ich mehreren Exemplaren von Drepanophorus serraticollis die Rüssel exstirpiert. Dieselben wurden bald regeneriert. Und in jedem der neuen Rüssel legten sich am frühzeitigsten die Taschen der Reservestilette an, welche ja hier so ungemein zahlreich sind. Den 20 Hauptstiletten entsprechen 18 Taschen mit etwa 12 Reservestiletten. (Häufig stimmt sogar die Zahl der Hauptstilette mit derjenigen der Reservestiletttaschen genau überein.) Viel später erst, nachdem sich eine größere Anzahl der Nebenstiletttaschen gebildet hatte, begann die Basis zu entstehen, mit der jede Tasche durch einen Schlauch in Verbindung gesetzt ist. Nie sieht man in oder an der Basis kleine Stilette, die Entstehungsherde sind die Seitentaschen. Wohl aber habe ich vereinzelt in den Schläuchen Stilette jedenfalls auf dem Wege zur Basis begriffen, constatiert.

Auch diese meine Beobachtungen stützen mit den Befunden Schultzes, die sie ergänzen können, nur den Satz: Die Hauptstilette kommen aus den Seitentaschen. Die Stilette der Seitentaschen sind Reservestilette und nicht Gebilde, die im Lauf der Stammesgeschichte der Nemertinen außer Funktion gesetzt sind und nunmehr, obwohl zwecklos geworden, als Ballast mitgeschleppt werden.

In wenigen Jahren hoffe ich die Neapler Repräsentanten der Nemertinen, dieser merkwürdigen Thiergruppe, von welcher Haller bei Gelegenheit seiner Studien über die Textur des Centralnervensystems höherer Würmer die Anneliden, Arthropoden, Mollusken und Vertebraten ableitet, den Fachgenossen in Wort und Bild vorführen zu können.

Göttingen, im November 1891.

Ueber einige neue Kohlenwasserstoffe mit ringförmiger Bindung der Kohlenstoffatome.

Von

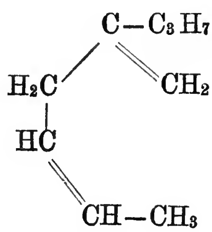
Otto Wallach.

Die Eigenschaften der Kohlenwasserstoffe und ihrer Derivate sind bekanntlich in hohem Grade abhängig von der Art der Bindung der in ihnen enthaltenen Kohlenstoffatome. Bei den organischen Verbindungen mit kettenförmiger Anordnung der Atome sind die Eigenschaftsänderungen, welche mit dem Vorhandensein mehrfacher oder bloß einfacher Kohlenstoffbindungen Hand in Hand gehen, bereits sehr eingehend studirt. Dasselbe gilt für die Kohlenwasserstoffe mit ringförmiger Kohlenstoffbindung vom Typus des Benzol, Naphtalin u. s. w. Weniger gut sind diejenigen Substanzen bekannt, welche durch theilweise oder vollständige Hydrirung von Verbindungen des letztgenannten Typus entstehen. Neuere Arbeiten, vorzüglich von v. Baeyer und von Bamberger, haben unsere Kenntniß auch nach dieser Richtung zwar sehr erweitert, doch ist es bei dem großen theoretischen Interesse, welches die hier ins Spiel kommenden Verhältnisse bieten, erwünscht, die diesbezügliche Forschung auch nach neuen Richtungen hin auszudehnen.

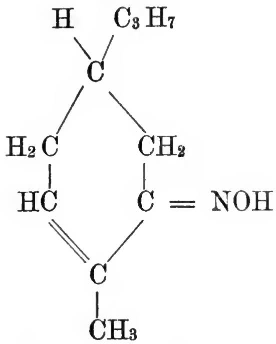
Ich bin nun gelegentlich meiner Arbeiten über die Terpene, von denen einige unzweifelhaft als hydrirte, jedoch ungesättigte Kohlenwasserstoffe mit ringförmiger Bindung der Atome angesprochen werden müssen, auch zu gesättigten, vollkommen hydrirten Kohlenwasserstoffen mit ringförmiger Bindung gelangt. Dieselben dürften z. Th. einem neuen Verbindungstypus angehören. Ueber diese Substanzen und den Weg zu ihrer Darstellung möchte ich mir erlauben kurz zu berichten.

Den Campher $C_{10}H_{16}O$ hat man in eigenthümlicher Weise zu Verbindungen mit geringerem Kohlenstoffgehalt abzubauen gelernt. Man stellt durch Umsetzung des Camphers mit Hydroxylamin das Campheroxim, $C_{10}H_{16}NOH$, dar. Es gelingt dann leicht aus dieser Verbindung 1 Mol Wasser abzuspalten. Der so resultirende Körper $C_{10}H_{15}N$ verhält sich wie ein Säurenitril, also wie $C_9H_{15}.CN$. Durch Kochen mit Alkali kann man aus ihm das dem Campheroxim isomere Amid $C_9H_{15}.CONH_2$ und dann die Campholensäure $C_9H_{15}.COOH$ erhalten. Die Campholensäure ihrerseits verliert unter geeigneten Bedingungen Kohlensäure und verwandelt sich in das Campholen, C_9H_{16}.

Für das Campholen, dessen Siedepunkt von Goldschmidt (Ber. d. chem. Ges. XX, 484) zu $130^0 - 140^0$ angegeben wird, hat Bamberger (l. c. XXI, 1131) die Formel aufgestellt:

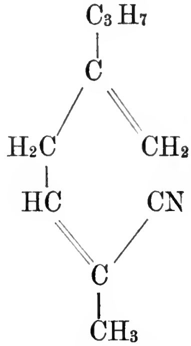


Danach wäre also das Campholen ein Fettkohlenwasserstoff mit zwei Aethylenbindungen. Diese Annahme hat die andere zur Voraussetzung, daß bei dem Uebergang von Campheroxim in sein Anhydrid eine Sprengung des im Campher anzunehmenden Kohlenstoffringes eintritt. Bamberger denkt sich den Vorgang in folgender Weise:



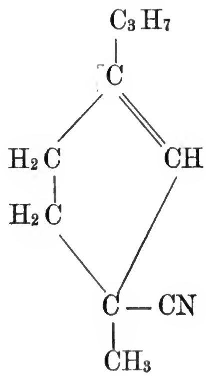
Campheroxim

$= H_2O +$



Nitril

Die sehr merkwürdige Reaction kann indeß, meiner Ansicht nach, auch ganz anders aufgefaßt werden. Es ist allerdings wahrscheinlich, daß bei dem Uebergang des Campheroxims in das Nitril der durch sechs Kohlenstoffatome gebildete Ring sich vorübergehend öffnet. Aber in demselben Augenblick könnte [unter Eintritt einer Bindungsverschiebung, falls man die Bredt'sche Campherformel der Betrachtung zu Grunde legt] eine erneute Ringschließung zwischen fünf Kohlenstoffatomen sich vollziehen. Es würde dann der Nitril-artigen Verbindung etwa die Formel zukommen:



Auch an das Vorhandensein eines Rings von vier Kohlenstoffatomen könnte man denken, doch soll das eben außer Betracht bleiben.

Sonach ergeben sich zwei ganz verschiedene Auffassungen bezüglich der Natur der Campholensäure und des Campholens. Nach Bamberger würde der Kohlenwasserstoff zwei Aethylenbindungen enthalten, der ihm zugehörige gesättigte Kohlenwasserstoff hätte die Formel C_9H_{20} und wäre nichts anderes als ein

Nonylwasserstoff. Meiner Ansicht nach enthielte indeß das Campholen nur eine Aethylenbindung, sein Hydrirungsproduct hätte die Formel C_9H_{18} und ihm zu Grunde würde ein Kohlenwasserstoff von eigenthümlichem Typus mit ringförmiger Bindung von fünf (oder auch von vier) Kohlenstoffatomen liegen.

Es ist mir nun in sehr einfacher Weise gelungen durch einen Versuch die Richtigkeit der letztentwickelten Ansicht wahrscheinlich zu machen.

Freie Campholensäure wurde in Portionen von je 5 Gr mit 6 Gr Jodwasserstoffsäure vom spec. Gew. 1,96 8 Stunden auf 200° erhitzt. Das entstandene Product wurde dann mit Wasserdampf abdestillirt, mit Natronlauge gewaschen, mit festem Kali getrocknet und fractionirt. Die Hauptmenge des erhaltenen flüssigen Kohlenwasserstoffs ging zwischen 135°—140° über. Analysirt wurde eine Mittelfraction vom Siedepunkt 134°—136°.

0.1005 Gr Substanz gaben

$$0.3150\ CO_2 = 85.48\%\ C$$
$$0.1302\ H_2O = 14.40\ „\ H$$

	Berechnet für					Gefunden
	C_9H_{20}	$C_{10}H_{22}$	C_9H_{18}	$C_{10}H_{20}$		
C	84.34	84.47	85.68	85.72	. . .	85.48
H	15.66	15.53	14.32	14.28	. . .	14.40

Die Dampfdichtebestimmung ergab:

0.0512 Gr lieferten 9.8 ccm V bei 17° und 751mm B.

	Berechnet für				Gefunden
	C_9H_{20}	$C_{10}H_{22}$	C_9H_{18}	$C_{10}H_{20}$	
D =	4.43	4.91	4.36	4.84	4.45

Die analytisch gefundenen Daten schließen demnach für den Kohlenwasserstoff die Formeln C_9H_{20} und $C_{10}H_{22}$ aus, nach den Dampfdichtebestimmungen wäre weiter die Formel C_9H_{18} wahrscheinlicher als $C_{10}H_{20}$. Für die Formel C_9H_{18} spricht auch der niedrige Siedepunkt der Verbindung (c. 135°) und das specif. Gewicht, das bei 20° = 0.773 ermittelt wurde.

Der Brechungsexponent für Natriumlicht wurde gefunden

$$n_D = 1.42491$$

Setzt man nun in die bekannte Lorenz'sche Formel

$$\frac{(n^2-1)p}{(n^2+2)d}$$

den eben angegebenen Werth von n_D ein, einmal aber p = 126 (C_9H_{18}), das andere Mal p = 140 ($C_{10}H_{20}$), so ergiebt sich als Molecularrefraction (M)

$$\text{für } C_9H_{18} : M = 41.66$$

$$\text{für } C_{10}H_{20} : M = 46.29$$

Es würde aber verlangen:

$$\text{ein gesättigter Kohlenwasserstoff} \left\{ \begin{array}{l} C_9H_{18} : M = 41.43 \\ C_{10}H_{20} : M = 46.03 \end{array} \right.$$

$$\text{ein ungesättigter Kohlenwasserstoff} \left\{ \begin{array}{l} C_9H_{18}f : M = 43.13 \\ C_{10}H_{20}f : M = 47.74 \end{array} \right.$$

Der gefundene Werth zeigt demnach an, daß eine gesättigte Verbindung vorliegt, die Bestimmung des Refractionswerthes giebt aber ebensowenig wie die Analyse sichere Auskunft darüber, ob der vorliegende Kohlenwasserstoff die Formel C_9H_{18} oder $C_{10}H_{20}$ besitzt.

Die wichtige Thatsache, daß man es jedenfalls mit einer völlig gesättigten Verbindung zu thun hat, wird durch das chemische Verhalten des Kohlenwasserstoffs ganz außer Zweifel gestellt. Er ist nicht im Stande Brom zu entfärben, dagegen entwickelt er in Berührung mit dem Halogen alsbald sehr lebhaft Bromwasserstoffgas und es entsteht ein Substitutionsproduct.

Diese Thatsachen genügen nun, um die Unrichtigkeit der von Bamberger für das Campholen und die Campholensäure entwickelten Formeln zu erweisen. Aus Verbindungen, denen jene Formeln zukommen, könnten als gesättigte Reductionsproducte nur Kohlenwasserstoffe der Formel C_9H_{20} oder $C_{10}H_{22}$ entstehen. Ist hingegen im Campholen und in der Campholensäure eine ringförmige Schließung von Kohlenstoffatomen — etwa in der oben von mir angegebenen Weise — enthalten, so muß bei der Reduction der Campholensäure, ganz der gemachten Beobachtung entsprechend, ein Kohlenwasserstoff C_9H_{18} oder $C_{10}H_{20}$ sich bilden. Das letztere wird der Fall sein, wenn die Carboxyl-Gruppe der Säure bei der Reduction in eine Methylgruppe CH_3 übergeht, das erstere, wenn die Säure bei der hohen während der Reduction herrschenden Temperatur gleichzeitig Kohlensäure abspaltet.

Ob also dem neuen Kohlenwasserstoff die Formel eines Bihydrocampholens, C_9H_{18}, oder eines Bihydromethylcampholens, $C_{10}H_{20}$, zukommt, ist für die theoretische Frage, die hier entschieden werden sollte, ganz gleichgültig. Jedenfalls liegt eben ein neuer gesättigter Kohlenwasserstoff mit ringförmiger Bindung vor, dessen weiteres Studium großes Interesse beanspruchen und auch Rückschlüsse auf die Constitution des Camphers erlauben dürfte.

Die eben beschriebenen Versuche sind im Gefolge von Erfahrungen angestellt worden, welche ich gelegentlich anderer Untersuchungen gesammelt hatte.

Vor einiger Zeit habe ich den Nachweis geliefert, daß eine im Fenchelöl vorkommende Verbindung $C_{10}H_{16}O$, das Fenchon, mit Campher isomer und auch in Hinsicht auf fast alle ihre Reactionen jener Verbindung unmittelbar an die Seite zu stellen ist. Auch aus dem Fenchon läßt sich leicht ein Oxim $C_{10}H_{16}NOH$ und aus diesem eine Nitril-artige Verbindung, $C_9H_{15}CN$, gewinnen. Letztere verseift sich sehr viel schwerer als die entsprechende Campherverbindung. Es entsteht daraus bei mehrtägigem Erwärmen mit alkoholischem Kali nur wenig Säure und ganz überwiegend das s. g. α-Isoxim $C_9H_{15}CONH_2$, dessen Schmelzpunkt bei 114^0 liegt. Nach einer neuerlich gemachten Beobachtung verwandelt sich diese Substanz beim Ermärmen mit verdünnter Schwefelsäure in eine isomere, schön krystallisirende, erst bei 137^0 schmelzende Verbindung, welche als β-Isoxim bezeichnet werden soll. Auch durch andere Säuren als Schwefelsäure kann man das α-Ixosim in das β-Ixosim umwandeln. Das β-Isoxim krystallisirt besonders gut aus Alkohol, ist aber auch in Wasser verhältnißmäßig löslich. Er hat einen ausgeprägt basischen Character. Leitet man in seine ätherische Lösung Salzsäuregas, so fällt ein Chlorhydrat aus, welches mit Platinchlorid ein Doppelsalz scheint geben zu können. Beim Kochen mit alkoholischem Kali oder mit Säuren wird das β-Ixosim nicht leichter angegriffen als das α-Isoxim. Erwärmt man es aber mit Phosphorsäure-Anhydrid, so wird Wasser abgespalten und es entsteht ein Oel von den Eigenschaften des aus dem α-Oxim unter dem Einfluß selbst verdünnter wäßriger Säuren sich so leicht bildenden nitrilartigen Körpers.

Von Wichtigkeit war es zu wissen, ob bei dem Uebergang von Fenchon in das α- und β-Isoxim sich vielleicht eine ganz durchgreifende Aenderung der Atomconfiguration im Molecül vollzogen habe. Um darüber Aufschluß zu erhalten, wurde das β-Isoxim in schwefelsaurer Lösung mit Kaliumpermanganat oxydirt. Als Oxydationsproduct wurde eine reichliche Menge Dimethylmalonsäure gewonnen, also dieselbe Säure, welche nach früheren Versuchen auch bei der Oxydation des Fenchon selbst entsteht.

Die bezüglich der Umwandlungsfähigkeit des α-Fenchon-Isoxims in die β-Verbindung gemachten Erfahrungen haben beiläufig

Veranlassung gegeben, auch das Iso-Campheroxim nach dieser Richtung zu untersuchen. Beim Kochen der letztgenannten Verbindung mit verdünnter Schwefelsäure wurden bisher aber nur ölförmige Producte erhalten.

Wenn es, wie erst bemerkt, auch Schwierigkeiten bietet, das aus dem α-Oxim des Fenchons entstehende Anhydrid $C_9H_{15}CN$ zu verseifen, so gelingt doch immerhin bei tagelangem Kochen mit alkoholischem Kali eine theilweise Ueberführung in die Fencholensäure $C_9H_{15}COOH$. Der Versuch, aus dieser durch Kohlensäure-Abspaltung glatt das Fencholen C_9H_{16} darzustellen, hat bisher nicht ganz den gewünschten Erfolg gehabt, da ein Gemenge zwischen weiten Grenzen siedender Kohlenwasserstoffe erhalten wurde. Hingegen ließ sich sehr scharf der Nachweis führen, daß die Fencholensäure eine ungesättigte Säure ist. Sie addirt nämlich Halogenwasserstoffsäure und geht dabei in krystallisirte Producte über. Die Hydrochlorfencholensäure, $C_{10}H_{16}Cl\,CO_2H$, schmilzt bei 97^0-98^0, giebt in Berührung mit Alkali aber leicht wieder Salzsäure ab, unter Rückbildung der flüssigen Fencholensäure.

Beim Erhitzen mit Jodwasserstoffsäure und Phosphor wird die Fencholensäure, ebenso wie die Campholensäure, leicht reducirt und in einen Kohlenwasserstoff übergeführt, dessen Hauptmenge zwischen 138^0-145^0 siedete. Zur näheren Untersuchung gelangte eine zwischen 141^0-142^0 siedende Fraction, deren Analyse folgende Werthe ergab:

0.1335 Gr gaben	0.4191 CO_2	=	85.62 %	C
	0.1726 H_2O	=	14.40 „	H
0.1395 „ „	0.4368 CO_2	=	85.40 „	C
	0.1788 H_2O	=	14.28 „	H
0.1368 „ „	0.4284 CO_2	=	85.41 „	C.

Bei einer Dampfdichtebestimmung lieferten

0.048 Gr Substanz 9.4 ccm V bei 18^0 und 748^{mm} B,

woraus sich ergiebt

$$D = 4.38.$$

Das specif. Gewicht des flüssigen Kohlenwasserstoffs wurde bei $20^0 = 0.7900$ gefunden, als Brechungsexponent

$$n_D = 1.43146.$$

Die analytischen Werthe zeigen eine große Uebereinstimmung mit denjenigen, welche für das Reductionsproduct aus Campholensäure ermittelt wurden. Auch die Siedepunkte der aus den analogen Säuren gewonnenen Kohlenwasserstoffe stimmen überein. Nur das specifische Gewicht der Verbindung der Fenchonreihe liegt etwas höher. Daß die Ursache dafür in zufälligen Verunreinigungen gesucht werden müßte, ist nicht wahrscheinlich. Eher wäre wohl anzunehmen, daß hier ein Gemenge eines Kohlenwasserstoffs C_9H_{18} mit dem höheren Homologen $C_{10}H_{20}$ vorliegt, da, wie erst auseinander gesetzt wurde, beide Kohlenwasserstoffe aus der Säure $C_9H_{15}CO_2H$ sich bilden können. Die Entscheidung dieser Frage muß zukünftigen Untersuchungen überlassen bleiben. Für den Augenblick ist noch der Versuch angestellt worden, ob man nicht, direct von dem Nitril $C_9H_{15}CN$ ausgehend, ebensogut zu dem Kohlenwasserstoff gelangen könne, als wenn man erst das Nitril in die schwerer zugängliche Säure überführt. Zu dem Zweck wurde die durch Wasserabspaltung aus dem Fenchonoxim gewonnene Verbindung mit Jodwasserstoffsäure und Phosphor erhitzt. Aus dem Reactionsproduct konnte leicht ein Kohlenwasserstoff isolirt werden, der dem erst beschriebenen, aus Fencholensäure erhaltenen, sehr ähnelt. Die Hauptmenge siedete von 135°—145°. Von Einzelfractionen zeigte die von 136°—138° siedende ein specif. Gewicht = 0.775 bei 18°, die vom Siedepunkt 140°—142° ein specif. Gewicht = 0.7785 bei 19°. Auch hier könnte also ein Gemenge von Kohlenwasserstoffen vorliegen, falls die Schwankungen im specif. Gewicht nicht einer Verunreinigung durch Jod-haltige Verbindungen zuzuschreiben sind.

Ob das aus der Fencholensäure durch Reduction dargestellte Product die Formel $C_{10}H_{20}$ oder C_9H_{18} besitzt, ist noch nicht sicher zu entscheiden gewesen. Man mußte aber einen gesättigten Kohlenwasserstoff $C_{10}H_{20}$ aus dem Fenchon jedenfalls auch in anderer Weise herstellen können, durch Reduction nämlich des Fenchylalkohols oder des Fenchons selbst. Die entsprechenden Versuche hat nun auf meine Veranlassung Hr. Wicke angestellt. Sie sollen hier nicht eingehender beschrieben und nur erwähnt werden, daß der aus dem Fenchylalkohol $C_{10}H_{17}OH$, durch Reduction sehr leicht entstehende gesättigte Kohlenwasserstoff $C_{10}H_{20}$ folgende Eigenschaften hat:

Siedepunkt = 160°—465°, specif. Gewicht = 0,7945 bei 22°,
Brechungsexponent n_D = 1.43701 bei 22°.

Der Siedepunkt dieses Kohlenwasserstoffs liegt also um etwa 25° höher als die Siedepunkte der aus der Fencholensäure und Campholensäure gewonnenen Verbindungen. Entsprechend höher ist auch das specifische Gewicht. Man hat es demnach unzweifelhaft mit ganz verschiedenartigen Producten zu thun. Bei directer Reduction des Fenchons entsteht ein Kohlenwasserstoff, der dieselben physikalischen Eigenschaften besitzt, wie der zuletzt beschriebene.

Auf einen noch anderen Wege, den ich in Gemeinschaft mit Herrn A. Berkenheim aus Moskau eingeschlagen habe, ist es gelungen zu einem weiteren isomeren gesättigten Kohlenwasserstoff $C_{10}H_{20}$ zu gelangen.

Pinenhydrochlorid, $C_{10}H_{17}Cl$, wurde mit Jodwasserstoff und Phosphor auf 200° erhitzt, das Reactionsproduct durch Destillation mit Wasserdampf, Waschen mit Alkali und Trocknen mit metallischem Natrium gereinigt und dann sorgfältig fractionirt. Die Hauptmenge siedete von 162°—163°. Von einem genau bei 162° übergehenden Antheil wurden Analysen ausgeführt und die physikalischen Constanten bestimmt.

0.1334 Gr Substanz lieferten	0.11397	CO_2	= 85.46 %	C
	0.1740	H_2O	= 14.46 „	H
0.2784 „ „ „	0.8579	CO_2	= 85.77 „	C
	0.3584	H_2O	= 14.30 „	H.

Für $C_{10}H_{20}$ berechnet sich C = 85.72 %, H = 14.28 %.

0.0547 Gr lieferten bei der Dichtebestimmung 9,6 ccm V, bei 17°,2 und 751^{mm} B. D = 4.86, berechnet = 4,83.

Das specifische Gewicht ergab sich zu 0,795 bei 20°, der Brechungsexponent n_D = 1.43703 bei 20°; berechnet M = 46,03, gefunden = 46.13.

Die physicalischen Eigenschaften stimmen demnach für die beiden aus dem Fenchon und aus dem Pinen erhaltenen Kohlenwasserstoffe $C_{10}H_{20}$ sehr nahe überein und beide weichen, namentlich in den Siedepunkten, erheblich von den aus Fencholensäure und Campholensäure erhaltenen ab.

Alle neu beschriebenen Kohlenwasserstoffe sind gesättigt und müssen daher ihrer Zusammensetzung gemäß eine ringförmige Verknüpfung von Kohlenstoffatomen enthalten. Sie sind selbst in der Wärme durch Kaliumpermanganat ganz ungemein schwer oxydirbar. Brom wirkt substituirend. Rauchende Salpetersäure ist in der Kälte ohne Wirkung, erst beim Erhitzen erfolgt lebhafte Reaction.

Eine nähere Erforschung des chemischen Verhaltens der hier vorliegenden neuen Verbindungen wird den Gegenstand weiterer Arbeiten bilden.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September und Oktober 1890.

(Fortsetzung.)

Archivum Rákóczianum. Sectio I. Tom. X. Ebd. 1889.
Ováry Lipót: A történelmi bizottságának oklevél-másolatai. (Abschriften der Urkunden der historischen Commission d. Ungar. Akad.). Füz. I. Ebd. 1890.
Archaeologiai Ertesitö. (Archäolog. Anzeiger. Neue Folge). IX. Köt. 3.—5. Szám. X. Köt. 1. 2. Szám. Ebd. 1889. 90.
Természettudományi Értekezések. (Naturwissenschaftl. Abhandlungen). XVIII. Köt. 6. 7. Szám. XIX. Köt. 1.—10. Szám. Ebd. 1889. 90.
Mathematikai Értekezések. (Mathematische Abhandlungen). XIV. Köt. 2. 3. Szám. Ebd. 1889.
Mathematikai és természettudományi Értesitö. (Mathematischer und naturwissenschaftl. Anzeiger). VII. Köt. 4/5. 6/7. 8/9. Szám. VIII. Köt. 1. 2. 3/4/5. Szám. Ebd. 1889. 90.
Mathematikai és természettudományi Közlemények. (Mathematische und naturwissenschaftl. Mittheilungen). XXIII. Köt. 4. Szám. Ebd. 1889.
A magyar. Tud. Akadémia kiadásában megjelent munkák és folyóiratok betürendes czim- és tartalomjegyzéke. 1830—1889. (Alphabetische Zusammenstellung der Werke, welche im Verlage der Ungar. Akad. der Wissenschaften erschienen sind. 1830—1889). Ebd. 1890.
Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. VII. Bd. Berlin u. Budapest 1890.
Λογοδοσία τῶν κατὰ τὸ κδ' ἔτος γενομένων (1888—1889) *ὑπὸ Σ. Μπαλανοῦ. Ἐν Ἀθήναις* 1890.

November 1890.

Sitzungsberichte der Kön. Pr. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. XLI. XLII u. XLIII. 1890.
Sitzungsberichte der philos.-philol.- u. historischen Classe d. k. B. Akademie d. Wissensch. zu München. 1890. Bd. II. Heft II.
Berichte über die Verhandlungen d. K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig. Philologisch historische Classe. 1890. I. Leipzig. 1890.
Deutsches Meteorologisches Jahrbuch für 1888. Beobachtungssystem des Königr. Sachsen. Bericht über die Thätigkeit im K. sächsischen meteorol. Institut f. d. J. 1888. II. Hälfte oder Abth. III des Jahrbuches des Königl. sächs. meteorolog. Inst. VI. Jahrg. 1888. Chemnitz 1890.
Zeitschrift für Naturwissenschaften. 63. Band. (5. Folge 1. Band). 4/5 Heft. Halle-Saale 1890.
Mitteilungen der Pollichia. XLVII. Jahresbericht 1888. Nr. 1/2. XLVIII. Jahresber. 1889/90. Nr. 3. 4. Dürkheim a/H.
Leopoldina. Heft XXVI. Nr. 19—20. Oktober 1890. Halle a/S.
Sitzungsberichte der Naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig. 15. u. 16. Jahrg. 1888/1889 u. 1890. (Bis Febr.). Leipzig 1890.

(Fortsetzung folgt.)

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

23. December. **№ 10.** 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 5. December.

Riecke spricht zum Gedächtniß von Wilhelm Weber.

Wieseler kündigt einen Aufsatz „über Stierdienst“ an.

Voigt legt a. einen Aufsatz von den Herrn Prof. W. Nernst und Herrn Privatdocenten Dr. P. Drude vor: „über die Fluorescenzwirkungen stehender Lichtwellen“.

b. einen Aufsatz von Herrn Dr. A. Sella in Rom „Beitrag zur Kenntniß der specifischen Wärme der Mineralien“.

Klein legt vor a. eine Mittheilung von Herrn Prof. Dr. G. Frobenius in Zürich, Korrespondenten der Math. Klasse: „über Potentialfunctionen, deren Hessesche Determinante verschwindet“.

b. einen Aufsatz von Herrn Privatdocenten Dr. Schönflies: „Bemerkung zu Hilberts Theorie der algebraischen Formen“.

Bericht des Beständigen Sekretärs über das J. 1891.

Beitrag zur Kenntniß der specifischen Wärme der Mineralien.

Von

Alfonso Sella in Rom.

Einleitung. — Nur gering ist die Zahl der physikalischen Eigenschaften der Mineralien, welche mit unseren jetzigen Beobachtungsmitteln genauen Messungen unterworfen werden können. Obwohl nun die Bestimmung der specifischen Wärme für die meisten Mineralien durchführbar ist, liegen doch noch verhältnißmäßig wenige Beobachtungen darüber vor und die bezüglichen Data werden in der Mehrzahl der Lehrbücher der Mineralogie nicht einmal angegeben; so geringes Interesse wurde daran geknüpft.

Die erste und größte Schwierigkeit, welche bei der Bestimmung der spec. Wärme sich darbietet, liegt in der Beschaffung eines reinen Materials. Dabei stellen sich als bedenklich heraus nicht bloß die mikroskopischen Einschlüsse, welche nicht zu entfernen sind und doch niemals fehlen, sondern auch die makroskopischen, deren Nichtvorhandensein in opaken Mineralien schwer festzustellen ist, da das Untersuchungsmaterial in nicht zu kleinen Stücken angewandt werden muß, damit nicht andrerseits wegen der Beobachtungsmethode neue Fehlerquellen eintreten, welche das Resultat noch mehr beeinflussen könnten. Bei den vielen Mineralclassen, bei welchen Isomorphismus auftritt, wäre ferner eine directe chemische Analyse des untersuchten Materiales sehr erwünscht. Die chemische Zusammensetzung nämlich ist zweifellos in erster Linie bestimmend für die specifische Wärme, da die über die Aenderung der letzteren mit der physikalischen Beschaffenheit der Mineralien angestellten Untersuchungen diese Aenderung als ziemlich gering erweisen. Ich will hierfür nur die bekannten Beispiele von Pyrit und Strahlkies, Kalkspath und Aragonit, Rutil und Brookit[1]) anführen.

Die subtilen Speculationen von Joly (On the specific heat of Minerals. Proc. Royal Soc. Vol. XLI, 1886) über einige Variationen der spec. Wärme bei chemisch und krystallographisch durchaus identischen Mineralien beziehen sich auf zu wenige Fälle, als daß ihnen eine allgemeine Bedeutung beigelegt werden könnte; außerdem würde es schwer zu erklären sein, wie in Körpern, die in den übrigen chemischen und physikalischen Eigenschaften übereinstimmen, die Molekeln eine verschiedene „thermische Freiheit“ (nach der Joly'schen Ausdrucksweise) besitzen könnten.

Großes Interesse würde die Bestimmung der specifischen Wärme bei verschiedenen Temperaturen darbieten; die sehr bedeutenden Aenderungen, welche in dieser Hinsicht für die Elemente Kohlenstoff, Bor, Silicium und Beryllium gefunden worden sind, führen uns zur Vermuthung, daß etwas ähnliches auch bei zusammengesetzten Körpern stattfinden könnte. Vielleicht mag dadurch ein Theil der Abweichungen der von verschiedenen Be-

1) Ich habe mich durch besondere Bestimmung überzeugt, daß Anatas (gelbe Krystalle vom Binnenthal) denselben Werth wie die beiden anderen Modificationen von TiO_2 liefert.

obachtern angegebenen Werthe zu erklären sein. Jedenfalls ist es zu bedauern, daß so wenige Untersuchungen in dieser Richtung vorliegen.

Ich habe im physikalischen Institut zu Göttingen während des Winters 1889/90 die specifische Wärme einer Reihe von Mineralien aus der Classe der Sulfide bestimmt und werde die erhaltenen Werthe vom Gesichtspunkt des Woestyn'schen Gesetzes discutiren. Leider hat die Bestimmung der spec. Wärme als Unterscheidungsmerkmal für die hier in Betracht kommenden Mineralien einen geringen Werth, da die Differenzen zwischen den den verschiedenen Mineralien zukommenden Werthen oft so gering sind, daß sie bei einer approximativen Bestimmung nicht zu Tage treten, und andererseits eine Bestimmung von der erforderlichen Genauigkeit umständliche Vorarbeiten verlangt. —

Beschreibung der Beobachtungsmethode.

Die Bestimmungen wurden nach der Mischungsmethode ausgeführt; ich werde hier über den Apparat und die Beobachtungsmethode nur dasjenige berichten, was mir als neu einiges Interesse zu haben scheint.

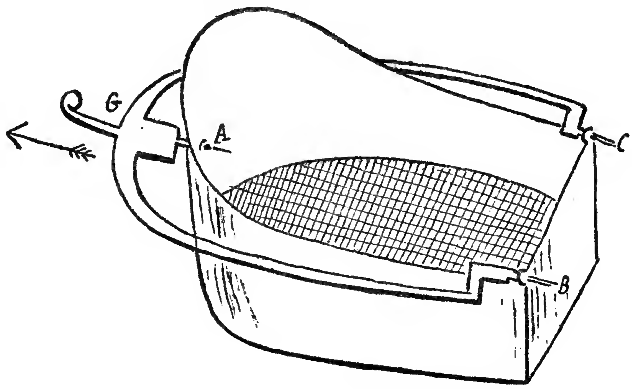
Der angewandte Erhitzungs-Apparat ist im Wesentlichen mit dem „Neumann'schen Hahn" identisch, von welchem er sich insofern unterscheidet, daß statt des inneren Kegels der äußere Mantel beweglich ist. Der Raum, in welchen der zu erwärmende Körper hineingebracht wird, ist von einem verticalen Cylinder [1]) begrenzt, welcher den inneren Kegel durchbricht. Die Einfüllung der zu untersuchenden Stücke geschieht dadurch leichter als bei der alten Einrichtung: man braucht dazu nur den äußeren Mantel so weit zu drehen, bis seine Oeffnung auf die obere Oeffnung des verticalen Cylinders zu liegen kommt. Die untere Oeffnung des Cylinders ist mit einer Klappe versehen, welche den Körper vor dem Fett schützen soll, mit welchem man die zwei Kegelflächen schmieren muß, damit sie dampfdicht auf einander gleiten.

Es wurde ferner versucht, eine Fehlerquelle zu eliminiren, welche in der That ziemlich bedeutend erscheint. Wenn nämlich auch die Fallhöhe des Körpers bis ins Calorimeter gering ist, ist es doch nicht gänzlich zu vermeiden, daß der fallende Körper ein Ausspritzen des Wassers bewirkt. Nun können die herausfallen-

1) Es wäre zu empfehlen, statt eines Cylinders einen nach unten sich verbreitenden Kegel zu gebrauchen, da sonst manchmal die Stücke durch die Wärmeausdehnung sich klemmen und nicht mehr herausfallen.

den Wassertropfen in Berührung mit dem Körper gewesen sein, daher eine hohe Temperatur angenommen haben und dadurch einen merklichen Wärmeverlust verursachen, welcher nicht abgeschätzt werden kann. Diesen Nachtheil zu vermeiden, wurde in mancherlei Weise versucht. Ein Blatt von sehr feinem Papier auf dem Wasser schwimmend erwies sich als nicht dazu geeignet. In der That ist das Spritzen meist nicht dem Schlag des fallenden Körpers auf das Wasser zuzuschreiben: die Stücke fallen vielmehr auf das Papier und sinken wie in einem Sack unter; das Wasser stürzt herum um den hinterlassenen Luftraum zu erfüllen und an der Spitze des dabei entstandenen Wasserbergs nimmt es eine sehr große Geschwindigkeit an, welche das Spritzen verursacht. Aus anderen Gründen erwies es sich nicht als zweckmäßig, ein feines metallisches Drahtnetz dicht auf der Oberfläche durch Korkstücken schwimmen zu lassen, welches durch ein geringes Uebergewicht untersinken sollte.

Die endgültig angewandte Einrichtung war die folgende, welche aus der beigegebenen Figur leicht verständlich sein wird.



Die Gabel G trägt durch die 3 Spitzen A, B, C ein Körbchen, dessen Wand aus feinem Kupferblech und dessen Boden aus Drahtnetz besteht. Die Gabel allein stützt sich auf den Rand des Calorimeters und das Drahtnetz liegt dicht über der Oberfläche des Wassers. Sobald nun der Körper in's Körbchen gefallen ist, wird die Gabel in der Richtung des Pfeiles zurückgezogen. Das frei gewordene Körbchen sinkt alsdann mit dem Körper ins Wasser.

Freilich bleibt eine gewisse persönliche Unsicherheit bei der Aufgabe, die Gabel genau in dem Augenblick zu verschieben, in welchem der Körper gefallen ist; und es entsteht dadurch in der That eine Fehlerquelle in der Operation, da eine genaue Correction nicht möglich ist. Da aber die verschiedenen mit derselben Substanz erhaltenen Werthe untereinander und in besonderen dazu ausgewählten Fällen mit den von anderen Beobachtern angegebenen in befriedigender Weise übereinstimmen, so scheint ein störender Einfluß ausgeschlossen zu sein.

Das Calorimeter wurde mittelst seitlich befestigter Seidenfäden aufgehängt und mit einer metallischen polirten Hülle umgeben, welche sich als vollkommen genügend erwies, um die äußere Strahlung abzuhalten.

Ein Vortheil scheint mir auch die Einrichtung zur Umrührung des Wassers zu sein, welche aus einer kleinen im Calorimeter befindlichen Turbine besteht, die von einer anderen durch die Wasserleitung getriebenen Turbine mittelst eines Transmissionsfadens in Bewegung gesetzt wird. Der Abstand zwischen den beiden Turbinen betrug etwa 2 m: dadurch war ermöglicht, daß die Bewegung auch stattfinden konnte, während das Calorimeter unter den Hahn und zurück gebracht wurde. Diese Einrichtung ermöglicht zweifellos die vollkommenste Umrührung, wie durch die sehr regelmäßige Wärmeabgabe des Körpers an die Flüssigkeit erwiesen wurde; es zeigten sich dabei nicht jene Temperaturschwankungen, welche sonst stattfinden, je nachdem eine Welle von heißem oder kaltem Wasser mit dem Thermometer in Berührung kommt. Außerdem bildet sich das thermische Gleichgewicht zwischen Körper und Flüssigkeit sehr schnell aus; dies bewirkt, daß die Correctionen wegen des Wärmeverlustes nach außen äußerst gering sind (bei günstigen Verhältnissen der anfänglichen Temperatur des Wassers und der Zimmertemperatur erreichten diese kaum 0,02 Grad); ferner waren dieselben gleich, je nachdem die eine oder die andere der dazu vorgeschlagenen Correctionsmethoden gebraucht wurde.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle eine Bemerkung über diese Correctionen zu machen. Die sämmtlichen Correctionsmethoden, welche man nach der Régnault'schen und der Neumann'schen classificiren kann, beruhen auf der Annahme, daß die Flüssigkeit überall dieselbe Temperatur besitze, d. h. daß das Thermometer genau die Temperatur der ausstrahlenden Oberfläche zeige. Da dies schwer ohne eine sehr vollkommene Umrührung der Fall sein kann, so folgt, daß die Correctionen, die man angebracht hat, oft illusorisch gewesen sein müssen. Ich kann daher nicht genügend die Anwendung der Turbine empfehlen.

Das oben besprochene Körbchen konnte nur bis etwa auf die Mitte der Höhe des Calorimeters sinken, da dort zwei horizontale

Kupferdrähte von einer Seite der Wand des letzteren zur anderen gezogen waren. Das Thermometer lag mit seinem Quecksilbergefäß unmittelbar darunter und war mittelst eines Korkes horizontal befestigt. Die bewegte Flüssigkeit strömte vom Körper zum Thermometer, also von oben nach unten, während sie im Turbinenrohr emporgehoben wurde.

Das Thermometer wurde durch ein Fernrohr abgelesen, und die Zeit der Ablesungen nach einer Uhr, welche 15 Sekunden schlug, notirt. Das Thermometer (von Müller in Bonn) war in Zehntel Grade getheilt und corrigirt.

Während sich das Calorimeter unter dem Hahn befand, wurde es vor der Strahlung des Hahnes durch einen doppelwandigen kupfernen Schirm geschützt. Der Körper wurde mehrere Stunden im Hahn gelassen, obwohl ich mich durch besondere Versuche überzeugt hatte, daß der Körper eine constante Temperatur viel früher annahm. Es wurde angenommen, daß die Mineralstücke, welche ja direct in Berührung mit den allseitig von Wasserdampf umgebenen Wänden standen, dann die Temperatur des Dampfes, also die dem herrschenden Luftdruck entsprechende Siedetemperatur des Wassers, besaßen.

Die anfängliche Temperatur des Calorimeters war ungefähr 10^0; demnach sind die gefundenen specifischen Wärmen die Mittelwerthe für das Intervall von 10 bis 100^0. Das Wasseräquivalent des gefüllten Calorimeters nebst Körbchen, Turbine, sowie Thermometerkugel betrug durchschnittlich circa 114 gr.

Beobachtungsresultate.

Manganblende von Nagyag, Siebenbürgen. Derbe krystallinische Stücke von unebenem Bruch; eisenschwarz. Mittel aus 4 Versuchen (angewandte Menge 16 bis 36 Gramm): $c = 0{,}1392$.

Arsenkies von Freiberg in Sachsen. Isolirte Krystalle [(110), (014), auch Zwillinge] lichtstahlgrau, mit kleinen fremden Einschlüssen. $c = 0{,}1030$.

Arseneisen von Breitenbrunnen in Sachsen. Derbe, etwas stängelige Stücke; zinnweiß, von Epidot durchwachsen. Mittel aus 3 Versuchen (angew. Menge Gr. 51 bis 61): $c = 0{,}0864$.

Kobaltglanz von Tunaberg in Schweden. Isolirte Krystalle [(111), (110)]. Mittel aus 4 Versuchen (angew. M. Gr. 30 bis 32): $c = 0{,}0991$.

Speiskobalt von Schneeberg in Sachsen, Grube Kurfürst Wilhelm. Derbe Stücke, zinnweiß bis blaugrau; ursprünglich mit

Kalkspath verunreinigt. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 43 bis 57): $c = 0{,}0866$.

Speiskobalt von Frauenbreitungen in Sachsen-Meiningen. Derbe krystallinische zinnweiße Stücke, fast frei von Einschlüssen. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 34 bis 59): $c = 0{,}0830$.

Silberglanz von Schneeberg in Sachsen, Grube Wolfgang Massen. Derbe krystallinische Stücke von hackigem Bruch; schwärzlich blaugrau. Mittel aus 4 Versuchen (angew. M. Gr. 15 bis 44): $c = 0{,}0746$.

Antimonsilber von Andreasberg im Harz, Grube Samson. Ziemlich große, prismatische, längsgestreifte, unregelmäßig ausgebildete Krystalle; silberweiß; in Kalkspath eingewachsen, mit verdünnter warmer Essigsäure isolirt. Mittel aus 5 Versuchen (angew. M. Gr. 72): $c = 0{,}0558$.

Arsenkupfer vom Loake Superior, Nordamerika. Derbe Stücke von feinkörnigem Gefüge, auf frischem Bruch zinnweiß, Oberfläche leicht und stark anlaufend. Mittel aus 3 Versuchen (Gr. 57 bis 61): $c = 0{,}0949$.

Buntkupfererz von Bristol, Connecticut. Derbe Stücke von der charakteristischen Farbe. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 53 bis 55): $c = 0{,}1177$.

Bournonit von Neudorf im Harz. Bruchstücke von großen Krystallen von stahlgrauer Farbe und muscheligem stark glänzendem Bruch. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 20 bis 97): $c = 0{,}0730$.

Proustit von Joachimsthal in Böhmen. Durchscheinende rothe krystallinische Aggregate. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 17): $c = 0{,}0807$.

Pyrargyrit von Freiberg in Sachsen. Krystallinische Aggregate von metallischem Diamantglanz. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 27): $c = 0{,}0757$.

id. von Andreasberg im Harz. Krystallinische, röthlich eisengraue Stücke; halb metallischer Glanz. Mittel aus 2 Versuchen (angew. M. Gr. 47 bis 81): $c = 0{,}0754$.

Fahlerz von Clausthal im Harz. Auf Eisenspath aufgewachsene Krystalle, ursprünglich mit Kupferkies überzogen, Bruch muschelig, eisengrau, stark glänzend. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 47): $c = 0{,}0987$.

Enargit von Famatina, Kioja, Argentinische Republik, San Pedro mina. Krystallinische stängelige Aggregate, bläulich eisengrau. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 20 bis 31): $c = 0{,}1202$.

Zinnkies von Whealrock St. Agnes. Cornwall. Derbe Stücke, Bruch stahlgrau und metallglänzend; geringe Verunreinigungen aus Kupferkies. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 27): $c =$ 0,1088.

Die Dimensionen der angewandten Stücke betrugen bei den meisten durchschnittlich $^1/_2$ bis 2 Centimeter; beim Kobaltglanz und Pyrargyrit aus Freiberg waren die Stücke etwas kleiner.

In einem einzigen Falle habe ich eine freilich sehr geringe der Temperatur zuzuschreibenden Zersetzung des Minerals beobtet, und zwar beim Mangansulfid, welches die inneren Wände des Cylinders schwarz anlaufen ließ.

Discussion.

Das Woestyn'sche Gesetz:

$$c = \frac{\Sigma u_h a_h c_h}{\Sigma a_h} \quad \text{oder} \quad c = \frac{\Sigma p_h c_h}{\Sigma p_h},$$

drückt die spec. Wärme c eines zusammengesetzten Körpers durch die spec. Wärme c_h, das Atomgewicht a_h, die Zahl der vorhandenen Atome u_h der einzelnen Elemente, oder durch c_h und die Procente p_h der einzelnen Bestandtheile aus.

Zur Berechnung der theoretischen Werthe nach jener Formel wurden folgende Werthe zu Grunde gelegt.

	a_h	c_h	Temp.	Beobachter.
As	74.90	0,0830	2°—68°	Bettendorff u. Wüllner
Sb	119,60	0,0495	0—10	Bunsen
S	31,98	0,1764	15—97	Régnault
Bi	207,50	0,0298	9—102	Béde
Mo	95,90	0,0659	5—15	Delarive u. Marcet
Zn	64,88	0,0929	50	Naccari
Mn	54,80	0,1217	14—97	Régnault
Fe	55,88	0,1113	50	Naccari
Co	58,60	0,1067	„	„
Ni	58,60	0,1090	„	„
Cu	63,18	0,0932	„	„
Pb	206,39	0,0304	„	»
Ag	107,66	0,0556	„	„
Hg	199,80	0,0331	„	„
Sn	117,35	0,0545	0—100	Bunsen.

Nach der Woestyn'schen Formel wurde für die obigen Mineralien die spec. Wärme berechnet. Die chemischen Analysen wurden aus der Mineralchemie von Rammelsberg entnommen; dabei steht der Name des betreffenden Analytikers.

Analysen.

Manganblende, Nagyag.

	S	Mn	Spec. Wärmen ber.	Spec. Wärmen gef.
Arfvedson	37,9	62,1	0,1424	0,1392

Arsenkies, Freiberg.

	S	As	Fe	ber.	gef.
Stromeyer	21,08	42,88	36,04	0,1129	
Behnke	20,38	44,83	34,32	0,1119	0,1030
Arzruni	20,83	44,11	35,06	0,1124	

Arseneisen, Breitenbrunnen.

	S	As	Sb	Fe	ber.	gef.
Behnke	1,10	69,85	1,05	27,41	0,0915	0,0864
M'Cay	6,73	61,40	—	31,20	0,0982	

Kobaltglanz, Tunaberg.

		ber.	gef.
	Co As S	0,1094	0,0991

Speiskobalt, Schneeberg.

	S	As	Co	Ni	Fe	Cu	ber.	gef.
Jäckel	0,49	66,06	21,21	—	11,60	8,41	0,0919	
Kobell	—	72,08	9,44	—	18,48	—	0,0905	
M'Cay	1,38	71,53	18,07	1,02	7,31	0,01	0,0910	
id.	0,73	75,40	3,42	11,90	7,50	0,39	0,0898	0,0866
id.	1,32	76,00	12,61	3,05	5,22	0,60	0,0896	
id.	1,80	74,35	13,80	3,60	5,05	1,20	0,0905	
Bull	—	75,85	3,32	12,04	6,52	0,94	0,0899	

Speiskobalt, Frauenbreitungen.

	ber.	gef.
	—	0,0830

Silberglanz, Schneeberg.

	ber.	gef.
Ag_2S	0,0712	0,0746

Antimonsilber, Andreasberg.

	ber.	gef.
Ag_6Sb	0,0546	0,0558
Ag_3Sb	0,0540	

Arsenkupfer, Lake Superior.

	As	Cu	Ag	ber.	gef.
Genth	12,28	87,48	0,04	0,0919	
id.	16,72	82,35	0,30	0,0914	0,0949
id.	29,25	70,68	—	0,0902	
Frenzel	28,39	72,02	—	0,0903	

Buntkupfererz, Bristol (Connecticut)

	S	Cu	Fe	ber.	gef.
Bodemann	25,59	62,64	11,67	0,1167	0,1177

Bournonit, Neudorf

	S	Sb	Pb	Cu	Spec. Wärmen ber.	Spec. Wärmen gef.
Rose	20,31	26,28	40,84	12,65	0,0730	0,0730
Linding	19,63	25,68	41,38	12,68	0,0722	
Bromeis	18,99	24,82	40,04	15,16	0,0728	
id.	19,49	24,60	40,42	13,06	0,0728	
Rammelsberg	20,15	24,54	41,83	13,48	0,0730	

Proustit, Joachimsthal.

	S	As	Sb	Ag	ber.	gef.
Rose	19,51	15,09	0,69	64,67	0,0833	0,0807

Pyrargyrit, Freiberg.

	S	Sb	As	Ag	ber.	gef.
Rethwisch	17,95	18,58	2,62	60,63	0,0769	0,0757

Pyrargyrit, Andreasberg.

	S	Sb	As	Ag	ber.	gef.
Bonsdorff	17,78	23,26	—	58,96	0,0757	0,0754
Petersen	17,70	22,35	1,01	58,03	0,0761	
Rethwisch	17,65	22,36	—	59,73	0,0756	
id.	17,99	18,63	3,01	60,78	0,0769	

Fahlerz, Clausthal.

	S	Sb	Ag	Cu	Fe	Zn	ber.	gef.
Sander	24,10	26,80	8,90	35,70	4,50	0,90	0,0989	0,0987
Schindling	25,63	28,52	5,13	33,14	2,73	5,77	0,1016	
Rose	24,73	28,24	4,97	34,48	2,27	5,55	0,0999	
Kuhlemann	25,54	27,64	3,18	34,59	6,23	3,43	0,1032	

Enargit, Sierra Famatina.

	S	As	Sb	Cu	Fe	Zn	Pb	ber.	gef.
Tschermak	13,80	16,59	2,51	47,75	1,21	0,44	0,70	0,1158	0,1202

Zinnkies, Whealrock St. Agnes.

	S	Sn	Cu	Fe	Cu	ber.	gef.
Klaproth	30,50	26,50	30,00	12,00	—	0,1104	0,1088
Kudernatsch	29,95	25,81	29,69	12,57	1,79	0,1110	
Mallet	29,51	26,90	29,23	6,74	7,27	0,1086	
Rammelsberg	29,83	27,34	29,83	5,08	7,71	0,1084	

Aus der vorstehenden Tabelle folgt, daß das Woestyn'sche Gesetz ziemlich gut der Wahrheit entspricht, wenigstens mit jener Annäherung, mit welcher ähnliche physikalische Gesetze als geltend angesehen werden. In den Fällen, wo ein größerer Werth gefunden worden ist, kann man wohl eine eventuelle Unreinheit des Materials in Betracht ziehen, welche in unserem Falle, wo wir es mit Sulfiden zu thun haben, beinahe stets auf eine Zunahme des Werthes der spec. Wärme führt (z. B. wenn Oxydation oder Beimengung von Gangmineralien, d. h. Silicaten, Kalkspath etc. oder noch ein kleiner Wassergehalt vorhanden ist). Auffallend kleiner als die berechneten sind aber die gefundenen Werthe für Speiskobalt, Kobaltglanz, Arseneisen, Arsenkies. Stellt man damit zusammen den für den Pyrit von Jolly gefundenen Werth, welcher dem Régnault'schen sehr nahe kommt, so würde man folgende Reihe erhalten:

FeS_2	0,131
$FeAs_2$	0,0864
CoAsS	0,0991
FeCoNi(As_6)	0,0866
FeAsS	0,103.

Nimmt man aber an, daß dem Eisen, Kobalt und Nickel in den Zusammensetzungen dieselbe specifische Wärme wie im freiem Zustande zukommt und berechnet aus den gefundenen specifischen Wärmen von Pyrit und Arseneisen den sozusagen theoretischen Werth der spec. Wärme für Schwefel und Arsen, so erhält man für die übrigen von den obigen Verbindungen:

	ber.	gef.
FeAsS	0,1028	0,103
CoAsS	0,1013	0,0991
FeCoNiAs_6	0,0860	0,0866.

Dadurch wird also die Uebereinstimmung befriedigend; dieses Ergebniß besagt übrigens nichts anders als das Neumann'sche Gesetz.

Zum Schluß theile ich eine Tabelle der bisher beobachteten spec. Wärmen der zur Classe der Sulfide gehörenden Körper mit. Die berechneten Werthe folgen aus den den Mineraliennamen beigefügten Formeln, außer für Geokronit, Fahlerz, Enargit, für welche die Analysen von Nordenskiöld, Rose, Tschermak benutzt worden sind.

	Formel	Rég-nault	Neu-mann	Kopp	Jolly	Oe-berg	Sella	ber.
Realgar	AsS		0,1111					0,1109
Auripigment	As_2S_3		0,1132					0,1195
Antimonit	Sb_2S_3	0,0840	0,0907					0,0858
Bismutit	Bi_2S_3	0,0600						0,0573
Molybdaenit	MoS_2	0,1233	0,1067					0,1101
Sphalerit	ZnS	0,1230	0,1145	0,1200	0.1154			0,1205
Manganblende	MnS						0,1392	0,1419
Troilit	FeS	0,1357						0,1350
Schwefelkobalt	CoS	0,1251						0,1313
Millerit	NiS	0,1281						0,1328
Magnetkies	Fe_7S_8	0,1602	0,1533					0,1370
Eisenkies	FeS_2	0,1301	0,1275	0,126	0,1315			0,1460
Strahlkies	FeS_2		0,1332					0,1460
Arsenkies	$FeAsS$		0,1012			0,121	0,103	0,1111
Arseneisen	$FeAs_2$						0,0864	0,0907
Kobaltglanz	$CoAsS$		0,107			0,097	0,0991	0,1094
	$FeCoAs_2S_2$							0,1102
	$CoAs_2$		0,0920					0,0897
Speiskobalt	$NiAs_2$							0,0900
	$FeCoNiAs_6$						0,0848	0,0902
Kupferglanz	Cu_2S	0,1212		0,120				0,1100
Bleiglanz	PbS	0,0509	0,053	0,049	0,0520			0,0500
Silberglanz	Ag_2S	0,0746					0,0746	0,0712
Antimonsilber	Ag_2Sb						0,0558	0,0534
Arsenkupfer	Cu_3As						0,0919	0,0903
Zinnober	HgS	0,0512	0,0520	0,0517				0,0529
Kupferkies	$CuFeS_2$		0,1289	0,131	0,1271	0,1291		0,1278
Buntkupfererz	Cu_3FeS_3						0,1177	0,1195
Bournonit	PbS_3CuSb						0,0730	0,0722
Proustit	Ag_3AsS_3						0,0807	0,0832
Pyrargurit	Ag_3SbS_3						0,0755	0,0758
	SnS	0,0837						0,0806
	SnS_2	0,1793						0,0975
Geokronit						0,066		0,0660
Fahlerz							0,0987	0,0999
Enargit							0,1202	0,1158
Zinnkies	Cu_2FeSnS_4						0,1088	0,1086

Es sei mir zum Schluß gestattet, Herrn Prof. Voigt, welcher mich mit Rat und That unterstüzt hat, und Herrn Prof. Liebisch, welcher mir das Material für die Beobachtungen freundlichst zur Verfügung gestellt hat, meinen innigsten Dank auszusprechen.

Rom, November 1891.

Ueber Potentialfunctionen, deren Hesse'sche Determinante verschwindet.

Von

G. Frobenius in Zürich.

(Vorgelegt von Herrn F. Klein).

Sind die drei partiellen Ableitungen erster Ordnung einer Potentialfunction nicht von einander unabhängig, so stellt die zwischen ihnen bestehende Gleichung, falls man jene Ableitungen selbst als Coordinaten betrachtet, eine Minimalfläche dar. Für diesen interessanten Satz, welchen Herr Weingarten vor kurzem (1890) in diesen Nachrichten hergeleitet hat, will ich hier einen anderen Beweis entwickeln uud zugleich einige weitere mit dieser Untersuchung zusammenhängende Ergebnisse mittheilen.

§ 1.

Seien x_1, x_2, x_3 drei von einander unabhängige Veränderliche, s eine Function derselben, $s_\alpha = \frac{\partial s}{\partial x_\alpha}$ und $s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha} = \frac{\partial^2 s}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$. Wenn die Hesse'sche Determinante von s verschwindet

(1) $$|\, s_{\alpha\beta}\,| = 0, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

so besteht zwischen s_1, s_2, s_3 eine Gleichung

(2) $$\Phi(s_1, s_2, s_3) = 0.$$

Betrachtet man dieselbe als die Gleichung einer Fläche, so bezeichne ich die Richtungscosinus ihrer Normale im Punkte s_1, s_2, s_3 mit r_1, r_2, r_3 und setze $r_{\alpha\beta} = \frac{\partial r_\alpha}{\partial x_\beta}$. Da die Coordinaten s_α der Punkte dieser Fläche als Funktionen von drei unabhängigen Variabeln x_β dargestellt sind, so wird die Veränderlichkeit der Größen s_α im allgemeinen nicht beschränkt, wenn man zwischen den Größen x_β eine willkürliche Gleichung annimmt, z. B. eine derselben als constant betrachtet. Ist nun $s_\alpha + ds_\alpha$ der unendlich nahe Punkt von s_α auf einer Krümmungslinie der Fläche (2), und ist ϱ der zugehörige Hauptkrümmungsradius, so bestehen die Gleichungen

(3) $$\varrho\, dr - ds_\alpha = 0, \quad \sum_\beta (\varrho\, r_{\alpha\beta} - s_{\alpha\beta})\, dx_\beta = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Da man diesen drei homogenen linearen Gleichungen zwischen den Differentialen dx_β auch dann genügen kann, wenn das Differential einer willkürlichen Function der Größen x_β verschwindet, so müssen in dem System ihrer Coefficienten alle Determinanten zweiten Grades Null sein. Es muß also auch die Summe der drei Hauptunterdeterminanten verschwinden

$$\begin{aligned}&(\varrho r_{22}-s_{22})(\varrho r_{33}-s_{33})-(\varrho r_{23}-s_{23})(\varrho r_{32}-s_{32})\\+&(\varrho r_{33}-s_{33})(\varrho r_{11}-s_{11})-(\varrho r_{31}-s_{31})(\varrho r_{13}-s_{13})\\+&(\varrho r_{11}-s_{11})(\varrho r_{22}-s_{22})-(\varrho r_{12}-s_{12})(\varrho r_{21}-s_{21})=0.\end{aligned}$$

Bezeichnet man die linke Seite dieser Gleichung mit

(4) $$a'\varrho^2-c'\varrho+b'=0,$$

so ist

$$\begin{aligned}c'&=r_{11}(s_{22}+s_{33}+s_{11})-r_{11}s_{11}-r_{12}s_{21}-r_{21}s_{12}+\cdots\\&=(r_{11}+r_{22}+r_{33})(s_{11}+s_{22}+s_{33})-\sum_{\alpha,\beta} r_{\alpha\beta}s_{\beta\alpha}.\end{aligned}$$

Setzt man also zur Abkürzung

(5) $$a=r_{11}+r_{22}+r_{33},\quad b=s_{11}+s_{22}+s_{33},$$

so ist

(6) $$\sum_{\alpha,\beta} r_{\alpha\beta}s_{\beta\alpha}=ab-c'.$$

Differentiirt man aber die Gleichung

(7) $$\sum_{\beta,\alpha} r_\alpha s_{\alpha\beta}=0$$

nach x_β, so erhält man

$$\sum_\alpha r_{\alpha\beta}s_{\alpha\beta}+\sum_\alpha r_\alpha s_{\alpha\beta\beta}=0,$$

also weil $s_{\alpha\beta}=s_{\beta\alpha}$ ist,

$$\sum_{\alpha,\beta} r_{\alpha\beta}s_{\beta\alpha}=-\sum_\alpha r_\alpha\frac{\partial b}{\partial x_\alpha}$$

und mithin

$$c'=\Sigma r_\alpha\frac{\partial b}{\partial x_\alpha}+b\,\Sigma\frac{\partial r_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

oder

(8) $$c'=\Sigma\frac{\partial(br_\alpha)}{\partial x_\alpha}.$$

Ist nun s eine Potentialfunction, also $b=0$, so ist auch $c'=0$, und folglich stellt nach Formel (4) die Gleichung $\Phi=0$ eine

Minimalfläche dar. Es können nämlich in diesem Falle nicht etwa alle Coefficienten der Gleichung (4) verschwinden. Denn da

$$(9)\qquad \begin{aligned} a' &= r_{22}r_{33} - r_{23}r_{32} + r_{33}r_{11} - r_{31}r_{13} + r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21}, \\ b' &= s_{22}s_{33} - s_{23}^2 + s_{33}s_{11} - s_{31}^2 + s_{11}s_{22} - s_{12}^2 \end{aligned}$$

ist, so ist

$$(10)\qquad b^2 - 2b' = \sum_{\alpha,\beta} s_{\alpha\beta}^2.$$

Ist also s reell, so kann b' nicht zugleich mit b verschwinden.

Damit aber die Fläche (2) eine Minimalfläche sei, ist nicht nothwendig, daß $b = 0$ ist, sondern wenn man

$$(11)\qquad D\varphi = \Sigma r_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}$$

setzt, nur daß b der partiellen Differentialgleichung $D\varphi = -a\varphi$ genügt. Diese kann man so integriren: Nach Gleichung (7) sind, weil $s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}$ ist, die Functionen s_β drei particuläre Integrale der Differentialgleichung $D\varphi = 0$, von denen zwei unabhängig sind, und mithin ist ihr allgemeines Integral eine willkürliche Funktion der Größen s_β. Z. B. ist, da r_β eine Function der Coordinaten s_α ist, $Dr_\beta = 0$ oder

$$(12)\qquad \sum_\alpha r_\alpha r_{\beta\alpha} = 0.$$

Bezeichnet man die Unterdeterminanten der Determinante (1) mit $S_{\alpha\beta}$, so ist den Gleichungen (7) zufolge $S_{\alpha\beta} = k\, r_\alpha r_\beta$, und weil

$$(13)\qquad \sum_\alpha r_\alpha^2 = 1$$

ist, $b' = \Sigma S_{\alpha\alpha} = k$, also

$$(14)\qquad S_{\alpha\beta} = b' r_\alpha r_\beta.$$

Nun sind aber S_{11}, S_{21}, S_{31} die drei Determinanten, welche sich aus den partiellen Ableitungen erster Ordnung der beiden Functionen s_2 und s_3 bilden lassen, und mithin besteht zwischen ihnen die Gleichung $\Sigma \frac{\partial S_{\alpha 1}}{\partial x_\alpha} = 0$ oder $\Sigma \frac{\partial (b' r_\alpha r_1)}{\partial x_\alpha} = 0$; also weil nach Gleichung (12) $\Sigma r_\alpha \frac{\partial r_1}{\partial x_\alpha} = 0$ ist, ergiebt sich

$$\Sigma \frac{\partial (b' r_\alpha)}{\partial x_\alpha} = 0, \quad Db' = -ab'.$$

Daher ist

$$\Sigma r_\alpha \frac{\partial\left(\frac{b}{b'}\right)}{\partial x_\alpha} = \frac{c'}{b'} = \frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''}$$

die Summe der beiden Hauptkrümmungen. Soll nun b der Bedingung $c' = 0$ oder $Db = -ab$ genügen, so ist $D\left(\frac{b}{b'}\right) = 0$, und mithin ist $\frac{b}{b'}$ eine Function der Coordinaten s_α. Setzt man also $e_{\alpha\beta} = 0$ oder 1, je nachdem $\alpha = \beta$ ist, oder nicht, so erhält man den Satz:

Verschwindet die Hesse'sche Determinante $|s_{\alpha\beta}|$ einer Function s von drei Parametern, so besteht zwischen ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung s_α eine Gleichung. Damit dieselbe eine Minimalfläche darstelle, ist nothwendig und hinreichend, daß die Summe der reciproken Werthe der beiden Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{\lambda}\,|s_{\alpha\beta} - \lambda e_{\alpha\beta}| = 0$ eine Function der Coordinaten s_α ist.

Der Coefficient a' in der Gleichung (4) läßt sich in ähnlicher Weise darstellen, wie nach Formel (8) der Coefficient c'. Mit Hülfe der Gleichung (12) erhält man nämlich

$$Da = \sum_{\alpha,\beta} r_\alpha \frac{\partial r_{\beta\beta}}{\partial x_\alpha} = \Sigma r_\alpha \frac{\partial r_{\beta\alpha}}{\partial x_\beta} = -\Sigma r_{\alpha\beta}\, r_{\beta\alpha} = -a^2 + 2a'$$

und demnach

$$\sum_\alpha \frac{\partial(a r_\alpha)}{\partial x_\alpha} = 2a', \quad Da = 2a' - a^2.$$

Da endlich der Gleichung (4) zufolge $\frac{a'}{b'}$ und $\frac{c'}{b'}$ Functionen der Coordinaten s_α sind, so ist $D\left(\frac{a'}{b'}\right) = 0$ und $D\left(\frac{c'}{b'}\right) = 0$, und mithin ergeben sich die Formeln

$$(15) \qquad \begin{aligned} Da' &= -aa', & Db' &= -ab', & Dc' &= -ac', \\ Da &= 2a' - a^2, & Db &= c' - ab, & Dc &= -ac. \end{aligned}$$

Die letzte, welche ich der Vollständigkeit wegen mit aufgeführt habe, bezieht sich auf eine Größe c, die ich erst später benutzen werde, und die so definirt ist: Aus der Gleichung (13) folgt

$$(16) \qquad \sum_\alpha r_\alpha r_{\alpha\beta} = 0$$

und daraus in Verbindung mit (12) $\Sigma r_\alpha (r_{\alpha\beta} - r_{\beta\alpha}) = 0$, also [1])

1) Sind die Größen r_α drei beliebige Functionen der Variabeln x_β, so hat

$$(17) \qquad \frac{r_{23}-r_{32}}{r_1} = \frac{r_{31}-r_{13}}{r_2} = \frac{r_{12}-r_{21}}{r_3} = c,$$

so daß

$$(18) \qquad \begin{aligned} c &= r_1(r_{23}-r_{32}) + r_2(r_{31}-r_{13}) + r_3(r_{12}-r_{21}), \\ c^2 &= (r_{23}-r_{32})^2 + (r_{31}-r_{13})^2 + (r_{12}-r_{21})^2 \end{aligned}$$

ist. Aus der identischen Gleichung

$$\frac{\partial(r_{23}-r_{32})}{\partial x_1} + \frac{\partial(r_{31}-r_{13})}{\partial x_2} + \frac{\partial(r_{12}-r_{21})}{\partial x_3} = 0$$

ergiebt sich daher die Relation $Dc = -ac$. Aus den Gleichungen (15) leitet man die wichtigen Beziehungen ab

$$(19) \qquad D\left(\frac{a}{2a'}\right) = 1, \quad D\left(\frac{b}{c'}\right) = 1.$$

Der nämlichen Differentialgleichung $D\varphi = 1$ genügt auch jede der beiden Wurzeln der Gleichung $a'\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0$, sowie auch der Ausdruck $\Sigma r_\alpha x_\alpha$.

§ 2.

Da man aus der Gleichung $c' = 0$ nicht schließen kann, daß $b = 0$ ist, so genügt der entwickelte Satz noch nicht zur Lösung der Aufgabe, alle Potentialfunctionen zu finden, deren Hesse'sche Determinante verschwindet. Um dies Ziel zu erreichen, stellt Herr Weingarten folgenden weiteren Satz auf:

Ist $\varDelta\varphi$ der zweite Differentialparameter der Function $\varphi(s_1, s_2, s_3)$ für die Fläche $\Phi = 0$, so ist

$$(1) \qquad t = \Sigma s_\alpha x_\alpha - s$$

eine Function der Coordinaten s_α, welche der Gleichung $\varDelta t = 0$ genügt.

Für den zweiten Differentialparameter hat Herr Beltrami (Math. Ann. Bd. 1, S. 581) den Ausdruck

$$\varDelta\varphi = \Sigma\frac{\partial^2\varphi}{\partial s_\alpha^2} - \Sigma r_\alpha r_\beta \frac{\partial^2\varphi}{\partial s_\alpha \partial s_\beta} - \left(\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''}\right) \Sigma r_\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial s_\alpha}$$

---

der Pfaff'sche Differentialausdruck $\Sigma r_\alpha dx_\alpha$ die Klasse 1, wenn die drei Größen $r_{\alpha\beta} - r_{\beta\alpha}$ verschwinden, die Klasse 2, wenn dies nicht der Fall ist, aber die Größe $c = r_1(r_{23}-r_{32}) + r_2(r_{31}-r_{13}) + r_3(r_{12}-r_{21}) = 0$ ist, und die Klasse 3, wenn c von Null verschieden ist. Der Gleichung (17) zufolge hat der oben untersuchte Ausdruck niemals die Klasse 2.

angegeben. Benutzt man die drei linearen Differentialparameter

(2) $$\Delta_\alpha \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial s_\alpha} - r_\alpha \sum_\beta r_\beta \frac{\partial \varphi}{\partial s_\beta},$$

so kann man diese Gleichung auf die elegante Form

(3) $$\Delta \varphi = \Sigma \Delta_\alpha^2 \varphi$$

bringen, wie ich nächstens in einer ausführlicheren Arbeit darlegen werde. Das Zeichen $\Delta_\alpha^2 \varphi$ bedeutet hier $\Delta_\alpha(\Delta_\alpha \varphi)$, d. h. die Operation Δ_α soll auf den Ausdruck $\Delta_\alpha \varphi$ angewendet werden. Der Beweis des oben ausgesprochenen Satzes beruht auf der folgenden identischen Gleichung (vgl. Borchardt, Crelle's Journ. Bd. 30, Seite 44, (9)):

Ist $|\lambda e_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}| = \lambda^3 - a\lambda^2 + a'\lambda - a''$ die charakteristische Determinante der bilinearen Form $f = \Sigma a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta$, und ist $f^0 = \Sigma u_\lambda v_\lambda$, $f' = \Sigma \frac{\partial f}{\partial v_\lambda} \frac{\partial f}{\partial u_\lambda}$, so ist die adjungirte Form von f

(4) $$-\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_3 & u_3 \\ v_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ v_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ v_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = f' - af + a'f^0.$$

Wendet man diesen Satz auf die quadratische Form $\Sigma s_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta$ an, deren adjungirte Form $\Sigma S_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = b'(\Sigma r_\alpha u_\alpha)^2$ ist, und setzt man

(5) $$s'_{\alpha\beta} = \sum_\lambda s_{\alpha\lambda} s_{\beta\lambda},$$

so erhält man

(6) $$\Sigma s'_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = \sum_\alpha (\sum_\beta s_{\alpha\beta} u_\beta)^2 = b \Sigma s_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta - b' \Sigma u_\alpha^2 + b' (\Sigma r_\alpha u_\alpha)^2,$$

oder wenn man u_α durch dx_α ersetzt,

(7) $$\Sigma ds_\alpha^2 = b \Sigma ds_\alpha dx_\alpha - b' \Sigma dx_\alpha^2 + b' (\Sigma r_\alpha dx_\alpha)^2.$$

Setzt man nun $\frac{\partial t}{\partial s_\alpha} = t_\alpha$, so folgt aus $dt = \Sigma x_\alpha ds_\alpha = \Sigma t_\alpha ds_\alpha$ und $\Sigma r_\alpha ds_\alpha = 0$, daß $x_\alpha - t_\alpha = p r_\alpha$ ist, wo p ein Proportionalitätsfactor ist. Daher ist

$$\Delta_\alpha t = t_\alpha - r_\alpha \Sigma r_\beta t_\beta = x_\alpha - p r_\alpha - r_\alpha \Sigma r_\beta (x_\beta - p r_\beta),$$

also

(8) $$\Delta_\alpha t = x_\alpha - r_\alpha \sum_\beta r_\beta x_\beta.$$

Zu demselben Resultat gelangt man mittelst der Formel

$$(9) \qquad b' \varDelta_\alpha \varphi = b \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} - \sum_\beta s_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta},$$

die sich aus der Gleichung (6) und den Relationen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} = \sum_\beta s_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial s_\beta}, \quad \sum_\beta s_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} = \sum_\beta s'_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial s_\beta}$$

ergiebt.

Setzt man $\Sigma r_\beta x_\beta = r$, so ist, wie oben bemerkt $Dr = \Sigma r_\alpha \frac{\partial r}{\partial x_\alpha} = 1$. Da ferner $\sum_\alpha r_\alpha s_{\alpha\beta} = 0$ ist, so ist

$$b' \varDelta t = \Sigma b' \varDelta_\alpha (\varDelta_\alpha t) = b \sum_\alpha \frac{\partial (x_\alpha - r r_\alpha)}{\partial x_\alpha} - \sum_{\alpha,\beta} s_{\alpha\beta} \frac{\partial (x_\alpha - r r_\alpha)}{\partial x_\beta} =$$

$$3b - b - br \Sigma r_{\alpha\alpha} - \Sigma s_{\alpha\alpha} + r \Sigma s_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta},$$

also nach (5) und (6) § 1

$$(10) \qquad b' \varDelta t = b - c' (\Sigma r_\alpha x_\alpha), \quad - \frac{b' \varDelta t}{r^2} = \Sigma \frac{\partial \left(\frac{b r_\alpha}{r} \right)}{\partial x_\alpha}.$$

Ist also $b = 0$ und demnach auch $c' = 0$, so ist auch $\varDelta t = 0$.

Nunmehr lassen sich die Sätze des Herrn Weingarten umkehren. Seien s_1, s_2, s_3 rechtwinklige Coordinaten, sei $\Phi(s_1, s_2, s_3) = 0$ die Gleichung einer Fläche und t eine beliebige Function der Coordinaten s_α. Berechnet man dann aus den vier Gleichungen $t_\alpha + p r_\alpha = x_\alpha$ und $\Phi = 0$ die vier Größen s_α und p, und setzt man die erhaltenen Werthe in den Ausdruck $s = \Sigma s_\alpha x_\alpha - t$ ein, so wird s eine Function der Variabeln x_α, deren partielle Ableitungen $\frac{\partial s}{\partial x_\alpha} = s_\alpha$ sind, und der Gleichung $\Phi = 0$ zufolge verschwindet die Determinante $|s_{\alpha\beta}|$. Stellt nun die Gleichung $\Phi = 0$ eine Minimalfläche dar, so ist $c' = 0$, und genügt ferner t der Differentialgleichung $\varDelta \varphi = 0$, so ist nach Formel (10) auch $b = 0$, also ist s eine Potentialfunction.

Will man allgemein die Transformation des zweiten Differentialparameters durchführen, so ergiebt sich aus der Formel (9)

$$b' \varDelta (\varphi) = \sum_\alpha b \frac{\partial \varDelta_\alpha(\varphi)}{\partial x_\alpha} - \sum_{\alpha,\beta} s_{\alpha\beta} \frac{\partial \varDelta_\beta(\varphi)}{\partial x_\beta}$$

$$= \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (b \varDelta_\alpha \varphi - \sum_\beta s_{\alpha\beta} \varDelta_\beta(\varphi)),$$

weil

$$\sum_\alpha \frac{\partial s_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \Sigma s_{\alpha\alpha}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial b}{\partial x_\beta}$$

st. Nun ist aber

$$bb'\Delta_\alpha\varphi - b'\sum_\beta s_{\alpha\beta}\,\Delta_\beta(\varphi) = b^2\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} - 2b\sum_\beta s_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta} + \sum_\beta s'_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta},$$

also nach Formel (6) gleich

$$(b^2 - b')\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} - b\sum_\beta s_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}.$$

Denn weil φ eine Function der Coordinaten s_α ist, so ist

$$\Sigma r_\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} = 0.$$

Demnach ergiebt sich

$$(11)\qquad \Delta(\varphi) = \frac{1}{b'}\Sigma\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{1}{b'}\left((b^2 - b')\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} - b\,\Sigma s_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}\right).$$

§ 3.

Die Transformation des zweiten Differentialparameters läßt sich auch durch einen besonderen Kunstgriff auf den bekannten Satz von Jacobi (Gesammelte Werke, Bd. 2, Seite 196) zurückführen:

Ist $\Sigma a_{\alpha\beta}\,dx_\alpha\,dx_\beta$ ein quadratischer Differentialausdruck, dessen Determinante $A = |a_{\alpha\beta}|$ von Null verschieden ist, und ist $A_{\alpha\beta}$ der Coefficient von $a_{\alpha\beta}$ in dieser Determinante, so ist

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\sum_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{A}}\sum_\beta A_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}\right]$$

eine dem Ausdruck zugeordnete Form, welche bei jeder Transformation desselben invariant bleibt.

Da die Coordinaten s_α der Gleichung $\Phi = 0$ genügen, so lassen sie sich durch zwei unabhängige Variabeln p_1 und p_2 ausdrücken, welche Functionen der Größen x_β sind. Sei p_3 eine dritte von jenen unabhängige Function dieser Größen und

$$(1)\qquad \Sigma r_\alpha\,dx_\alpha = \Sigma q_\alpha\,dp_\alpha.$$

Dann ist, weil p_1 und p_2 Functionen der Coordinaten s_α sind,

$$\Sigma\frac{\partial p_1}{\partial x_\alpha}r_\alpha = 0,\qquad \Sigma\frac{\partial p_2}{\partial x_\alpha}r_\alpha = 0,\qquad \Sigma r_\alpha r_\alpha = 1,$$

$$\Sigma\frac{\partial p_1}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial p_3} = 0,\qquad \Sigma\frac{\partial p_2}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial p_3} = 0,\qquad \Sigma r_\alpha\frac{\partial x_\alpha}{\partial p_3} = q_3$$

und mithin

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial p_3} = q_3 r_\alpha. \tag{2}$$

Daher ist, weil r_α von p_3 unabhängig ist,

$$\frac{\partial q_3}{\partial p_1} - \frac{\partial q_1}{\partial p_3} = \frac{\partial}{\partial p_1}\left(\Sigma r_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial p_3}\right) - \frac{\partial}{\partial p_3}\left(\Sigma r_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial p_1}\right) =$$
$$\Sigma \frac{\partial r_\alpha}{\partial p_1}\frac{\partial x_\alpha}{\partial p_3} = q_3 \Sigma r_\alpha \frac{\partial r_\alpha}{\partial p_1} = 0,$$

also

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_3} = \frac{\partial q_3}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial p_3} = \frac{\partial q_3}{\partial p_2}, \tag{3}$$

$\left(\text{aber nicht nothwendig } \frac{\partial q_1}{\partial p_2} = \frac{\partial q_2}{\partial p_1}\right)$. Um aber die Darstellung noch mehr zu vereinfachen, wähle ich p_3 so, daß $Dp_3 = 1$ ist[1]), setze also z. B. $p_3 = \frac{a}{2a'}$ (vgl. (19) § 1). Dann wird

$$q_3 = q_3 \Sigma r_\alpha \frac{\partial p_3}{\partial x_\alpha} = \Sigma \frac{\partial p_3}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial p_3} = \frac{\partial p_3}{\partial p_3} = 1,$$

und mithin sind den Gleichungen (3) zufolge q_1 und q_2 von p_3 unabhängig[2]).

Ist nun $\Sigma ds_\alpha^2 = a_{11}dp_1^2 + 2a_{12}dp_1dp_2 + a_{22}dp_2^2$, so geht der ternäre quadratische Differentialausdruck

$$a_{11}dp_1^2 + 2a_{12}dp_1dp_2 + a_{22}dp_2^2 + (\Sigma q_\alpha dp_\alpha)^2 \tag{4}$$

durch Einführung der Variabeln x_β in

$$\Sigma s'_{\alpha\beta}dx_\alpha dx_\beta + (\Sigma r_\alpha dx_\alpha)^2 \tag{5}$$

über. Die Determinante des Ausdrucks (4) ist

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}+q_1^2 & a_{12}+q_1q_2 & q_1 \\ a_{21}+q_2q_1 & a_{22}+q_2^2 & q_2 \\ q_1 & q_2 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,$$

ihre Unterdeterminanten sind

---

1) Die Größe p_3 ist von Herrn Weingarten mit r, von mir im vorigen § mit p bezeichnet worden. Durch die Annahme $p_3 = \frac{a}{2a'}$ wird die von Herrn Weingarten, S. 322, aufgestellte Bedingung (16) erfüllt.

2) Die Klasse des Differentialausdrucks $\Sigma r_\alpha dx_\alpha$ ist also gleich 1 oder 3, je nachdem $q_1 dp_1 + q_2 dp_2$ ein vollständiges Differential ist, oder nicht, und kann folglich nie gleich 2 sein.

$$A_{11} = a_{22}, \quad A_{12} = -a_{12}, \quad A_{22} = a_{11}$$
$$A_{13} = a_{12} q_2 - a_{22} q_1, \quad A_{23} = a_{12} q_1 - a_{11} q_2.$$

Demnach sind A, A_{13} und A_{23} von p_3 unabhängig. Setzt man nun

$$(6) \quad \sqrt{A}\,\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial p_1}\frac{1}{\sqrt{A}}\left[a_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} - a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\right] + \frac{\partial}{\partial p_2}\frac{1}{\sqrt{A}}\left[-a_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} + a_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\right],$$

so ist die dem Ausdruck (4) zugeordnete Form gleich

$$\Delta\varphi + \frac{1}{\sqrt{A}}\left[\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{A_{13}}{\sqrt{A}}\frac{\partial\varphi}{\partial p_3}\right) + \frac{\partial}{\partial p_2}\left(\frac{A_{23}}{\sqrt{A}}\frac{\partial\varphi}{\partial p_3}\right) + \frac{\partial}{\partial p_3}\left(\frac{A_{33}}{\sqrt{A}}\frac{\partial\varphi}{\partial p_3}\right)\right] +$$
$$+ \frac{1}{A}\left[A_{31}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_1 \partial p_3} + A_{32}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_2 \partial p_3}\right],$$

also wenn φ von p_3 unabhängig ist, gleich $\Delta\varphi$.

Um die Determinante und die adjungirte Form des Ausdrucks (5) zu berechnen, bemerke ich, daß

$$|\, \lambda u_\alpha, \; r_\alpha, \; s_{\alpha 1}, \; s_{\alpha 2}, \; s_{\alpha 3} \,|^2 = |\, s'_{\alpha\beta} + r_\alpha r_\beta + \lambda^2 u_\alpha u_\beta \,|$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & \lambda u_1 & \lambda u_2 & \lambda u_3 \\ \lambda u_1 & s'_{11} + r_1^2 & s'_{12} + r_1 r_2 & s'_{13} + r_1 r_3 \\ \lambda u_2 & s'_{21} + r_2 r_1 & s'_{22} + r_2^2 & s'_{23} + r_2 r_3 \\ \lambda u_3 & s'_{31} + r_3 r_1 & s'_{32} + r_3 r_2 & s'_{33} + r_3^2 \end{vmatrix}.$$

Daher ist die gesuchte Determinante das constante Glied und die adjungirte Form der Coefficient von λ^2 in diesem Ausdruck. Die Determinante ist folglich die Summe der Quadrate von 4 Determinanten, von denen eine $|\, s_{\alpha\beta} \,| = 0$ ist. Eine der drei andern ist

$$|\, r_\alpha, \; s_{\alpha 1}, \; s_{\alpha 2} \,| = \Sigma S_{\alpha 3} r_\alpha = b' r_3 \Sigma r_\alpha^2$$

und die Summe ihrer Quadrate ist b'^2.

Die adjungirte Form aber ist die Summe der Quadrate von 6 Determinanten. Drei derselben haben die Form

$$|\, u_\alpha, \; s_{\alpha 1}, \; s_{\alpha 2} \,| = \Sigma S_{\alpha 3} u_\alpha = b' r_3 \Sigma r_\alpha u_\alpha,$$

die Summe ihrer Quadrate ist $b'^2 (\Sigma r_\alpha u_\alpha)^2$. Das Quadrat einer der drei übrigen Determinanten ist

$$\begin{vmatrix} u_1 & r_1 & s_{11} \\ u_2 & r_2 & s_{21} \\ u_3 & r_3 & s_{31} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \Sigma u_\alpha^2 & \Sigma u_\alpha r_\alpha & \Sigma u_\alpha s_{\alpha 1} \\ \Sigma u_\alpha r_\alpha & 1 & 0 \\ \Sigma u_\alpha s_{\alpha 1} & 0 & \Sigma s_{\alpha 1}^2 \end{vmatrix}$$

und ihre Summe ist nach (10) § 1

$$(b^2 - 2b')\left[\Sigma u_\alpha^2 - (\Sigma r_\alpha u_\alpha)^2\right] - \sum_\beta \left(\sum_\alpha s_{\alpha\beta} u_\alpha\right)^2,$$

also nach Formel (6) § 2 gleich

$$(b^2-b')\left[\Sigma u_\alpha^2-(\Sigma r_\alpha u_\alpha)^2\right]-b\,\Sigma s_{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta.$$

Mithin ist die Determinante des Ausdrucks (5) gleich b'^2 und ihre Unterdeterminanten sind die Coefficienten der Form

$$(7)\qquad (b^2-b')\,\Sigma u_\alpha^2-b\,\Sigma s_{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta+(b'^2+b'-b^2)(\Sigma r_\alpha u_\alpha)^2.$$

Ist nun φ von p_3 unabhängig, so ist $\Sigma r_\alpha \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}=0$, und mithin ist die Form (11) § 2 die dem Ausdruck (5) zugehörige Form.

§ 4.

Die vorangehenden Entwicklungen hängen, wie schon die Gleichung (4) § 2 zeigt, auf's engste mit der Theorie der Matricen zusammen oder der Formen, wie ich sie in meiner Arbeit Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen (Crelle's Journal Bd. 84) genannt habe. Ist

$$|\lambda E-A|=\lambda^3-a\lambda^2+a'\lambda-a''=\varphi(\lambda)$$

die charakteristische Function einer ternären Form $A=\Sigma a_{\alpha\beta}u_\alpha v_\beta$, so genügt A der Gleichung

$$(1)\qquad \varphi(A)=0,\quad A^3-aA^2+a'A-a''E=0.$$

Den Coefficienten a, den ich im Folgenden oft gebrauche, will ich nach dem Vorgange des Herrn Dedekind die Spur der Form A nennen. Da a'' die Determinante der Form A ist, so ist $a''A^{-1}$ ihre adjungirte Form, die ich mit $\bar{A}$ bezeichnen will. Aus der Gleichung (1) ergiebt sich dann, wenn a'' von Null verschieden ist,

$$(2)\qquad \bar{A}=A^2-aA+a'E.$$

Da aber beide Seiten dieser Gleichung, welche mit der Formel (4) § 2 übereinstimmt, ganze Functionen der Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ sind, so gilt sie auch, wenn $a''=0$ ist.

Im Folgenden handelt es sich nun um die Beziehungen zwischen den drei Formen

$$R=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13}\\ s_{21} & s_{22} & s_{23}\\ s_{31} & s_{32} & s_{33}\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix} 0 & r_3 & -r_2\\ -r_3 & 0 & r_1\\ r_2 & -r_1 & 0\end{pmatrix}$$

und denen, welche durch Zusammensetzung aus ihnen entstehen. Von diesen Formen ist S symmetrisch und T alternirend. Bezeichnet man die conjugirte Form von R mit R', so ist nach (17) § 1

(3) $$R - R' = cT.$$

Nach Satz (1) genügen diese Formen den Gleichungen

(4) $$R^3 - aR^2 + a'R = 0, \quad S^3 - bS^2 + b'S = 0, \quad T^3 + T = 0.$$

Die adjungirte Form von T ist

(5) $$E + T^2 = \begin{pmatrix} r_1^2 & r_1 r_2 & r_1 r_3 \\ r_2 r_1 & r_2^2 & r_2 r_3 \\ r_3 r_1 & r_3 r_2 & r_3^2 \end{pmatrix}.$$

Nach den Formeln (7), (12) und (16) § 1 verschwinden die Producte $R(E+T^2)$, $(E+T^2)R$, $S(E+T^2)$ und $(E+T^2)S$. Demnach ist

(6) $$RT^2 = T^2R = -R, \quad ST^2 = T^2S = -S.$$

Denselben Gleichungen zufolge können sich die Unterdeterminanten der Form R von den Elementen (5) nur um einen gemeinsamen Factor k unterscheiden, und mithin ist die adjungirte Form von R

$$\bar{R} = R^2 - aR + a'E = k(E + T^2).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $E + T^2$, so erhält man nach (4) und (6) $a' = k$. Auf diesem Wege findet man die Gleichungen

(7) $$R^2 = aR + a'T^2, \quad S^2 = bS + b'T^2.$$

Die nämliche Methode kann man auch auf die Form

(8) $$X = \varrho R + \sigma S + \tau T + \vartheta T^2$$

anwenden, wo ϱ, σ, τ, ϑ willkürliche Constanten sind. Ihre Spur ist

(9) $$f = \varrho a + \sigma b - 2\vartheta.$$

Mithin ist

(10) $$X^2 = fX + gT^2,$$

und ich werde zeigen, daß

(11) $$g(\varrho, \sigma, \tau, \vartheta) = a'\varrho^2 + b'\sigma^2 + \tau^2 + \vartheta^2 + c'\varrho\sigma + c\varrho\tau - a\varrho\vartheta - b\sigma\vartheta$$

ist. Daß in dieser quadratischen Form die Coefficienten von ϱ^2, σ^2, τ^2, ϑ^2, $\varrho\vartheta$, $\sigma\vartheta$, $\tau\vartheta$ richtig bestimmt sind, ergiebt sich aus den Gleichungen (6) und (7). Es ist also nur noch nachzuweisen, daß in den Gleichungen

(12) $$\begin{aligned} RS + SR &= aS + bR + c'T^2 \\ RT + TR &= aT + cT^2 \\ ST + ST &= bT \end{aligned}$$

die Coefficienten von T^2 die angegebenen Werthe haben. Dies folgt für die letzte daraus, daß $ST+TS$ eine alternirende Form ist, weil die conjugirte Form von AB gleich $B'A'$ ist, und für die vorletzte daraus, daß nach (3) $RT+TR' = RT+TR-cT^2$ eine alternirende Form ist. Um endlich die erste Gleichung darzuthun, genügt die Bemerkung, daß die Spur[1]) von RS und von SR nach (6) § 1 gleich $\Sigma r_{\alpha\beta} s_{\beta\alpha} = ab-c'$ und die von T^2 nach (5) gleich -2 ist. Ein specieller Fall der Formel (10) ist die Gleichung

$$(\varrho R-S)^2 = (a\varrho-b)(\varrho R-S)+(a'\varrho^2-c'\varrho+b')T^2,$$

welche die Grundlage des in § 1 geführten Beweises bildet.

Nach Gleichung (10) haben sämmtliche Formen der Schaar $\varrho R+\sigma S+\tau T+\vartheta T^2$ (von einem scalaren Factor abgesehen) dieselbe adjungirte Form $E+T^2$, und eine leichte Abzählung zeigt, daß umgekehrt alle Formen, die den Bedingungen $X(E+T^2) = (E+T^2)X = 0$ genügen, in dieser Schaar enthalten sind. Die Unterdeterminanten der Derminante dieser Formenschaar sind alle durch die quadratische Form $g(\varrho, \sigma, \tau, \vartheta)$ theilbar, und unterscheiden sich von einander nur durch Factoren, die von ϱ, σ, τ, ϑ unabhängig sind. Da aber ein Product von beliebig vielen der Formen R, S, T den nämlichen Bedingungen genügt, so lassen sich alle diese Producte aus vier unter ihnen linear zusammensetzen. Die dazu nöthigen Formeln kann man so erhalten.

Differentiirt man die Gleichung $\sum\limits_\lambda s_{\alpha\lambda} r_\lambda = 0$ nach x_β, so erhält man $\sum\limits_\lambda s_{\alpha\lambda} r_{\lambda\beta} = -\sum\limits_\lambda s_{\alpha\beta\lambda} r_\lambda$. Mithin ist die Form SR symmetrisch

$$SR = R'S \tag{13}$$

Ebenso ist $ST-TS$ symmetrisch und auch $RT-TR$, weil nach (3) $RT-TR = -TR'+R'T$ ist. Nach (12) ist

$$(ST-TS)^2 = (2ST-bT)(-2TS+bT) = 4(S^2-bS)-b^2T^2,$$

und auf diesem Wege findet man die Gleichungen

$$(ST-TS)^2 = -(b^2-4b')T^2, \quad (RT-TR)^2 = -(a^2+c^2-4a')T^2. \tag{14}$$

---

1) Die Formen AB und BA haben immer dieselbe Spur. Sind nämlich zunächst die Coefficienten von B willkürliche Größen, so sind die Formen BA und $AB = B^{-1}(BA)B$ ähnlich, haben also beide dieselbe charakteristische Function. Da aber deren Coefficienten ganze Functionen der Coefficienten von B sind, so haben AB und BA auch dann dieselbe charakteristische Function, wenn die Determinante von B verschwindet.

Da die Wurzeln der Gleichungen

$$|s_{\alpha\beta}-\lambda e_{\alpha\beta}|=0 \quad \text{und} \quad |r_{\alpha\beta}+r_{\beta\alpha}-\lambda e_{\alpha\beta}|=0$$

reell sind, so sind b^2-4b' und a^2+c^2-4a' positiv. Ferner ergiebt sich mittelst der Formeln (12) und (13)

$$(RT-TR)(ST-TS) = (2RT-aT-cT^2)(-2TS+bT) =$$
$$2(2R-cT)S-2(aS+bR)+bcT-abT^2$$
$$= 2(R+R')S-2(RS+SR-c'T^2)+bcT-abT^2 = bcT-(ab-2c')T^2$$

und mithin, indem man auch zu den conjugirten Formen übergeht,

$$(15) \qquad \begin{aligned}(RT-TR)(ST-TS) &= bcT-(ab-2c')T^2\\ (ST-TS)(RT-TR) &= -bcT-(ab-2c')T^2.\end{aligned}$$

Endlich ist

$$T(ST-TS) = T(-2TS+bT) = 2S+bT^2,$$

und indem man auch zu den conjugirten Formen übergeht, erhält man die Relationen

$$(16) \qquad \begin{aligned}T(ST-TS) &= -(ST-TS)T = 2S+bT^2\\ T(RT-TR) &= -(RT-TR)T = 2R-cT+aT^2.\end{aligned}$$

Multiplicirt man also die erste der Gleichungen (15) links mit T und rechts mit $ST-TS$, so findet man

$$(17) \quad bc(ST-TS) = -(b^2-4b')(2R-cT+aT^2)+(ab-2c')(2S+bT^2).$$

Multiplicirt man die zweite jener Gleichungen links mit T und rechts mit $RT-TR$, so findet man

$$(18) \quad bc(RT-TR) = -(ab-2c')(2R-cT+aT^2)+(a^2+c^2-4a')(2S+bT^2).$$

Ferner ist

$$2SR = SR+R'S = (SR+RS)-cTS$$

und mithin nach (12) und (17)

$$(19) \qquad bSR = b'(2R-cT+aT^2)+(ab-c')S.$$

Endlich ist $R'R = R^2-cTR$ und folglich nach (7), (12) und (18)

$$(20) \qquad bR'R = c'(2R-cT+aT^2)+(a^2+c^2-4a')S-ba'T^2.$$

Aus der identischen Gleichung

$$(S^2-bS)R'R+S^2(R^2-aR) = S(SR'+SR-aS-bR')R$$

ergiebt sich mittelst der Formeln (3), (7), (12) und (13) die Relation

$$(21) \qquad b'R'R-c'SR+a'S^2=0.$$

Da die Spur von TR nach (12) gleich $-c$ ist, so ist die von

$$R'R = R^2 - cTR = aR + a'T^2 - cTR \text{ gleich } a^2 + c^2 - 2a'.$$

Die Spur von $S^2 = bS + b'T^2$ ist $b^2 - 2b'$, und die von SR, wie schon oben erwähnt, gleich $ab - c'$. Daher ergiebt sich aus der letzten Formel die merkwürdige Relation

$$(22) \qquad \begin{aligned} c'^2 - 4a'b' + b^2a' - bac' + (a^2 + c^2)b' &= 0, \\ (b^2 - 4b')(a^2 + c^2 - 4a') - (ab - 2c')^2 &= b^2c^2. \end{aligned}$$

Betrachtet man die symmetrischen Formen als quadratische Formen mit den Variabeln dx_α, so erkennt man in der symbolischen Beziehung (21) die für die Theorie der Flächen wichtige Gleichung (vgl. W e i n g a r t e n, Sitzungsberichte der Berl. Akad. 1886, S. 83)

$$(23) \qquad b' \Sigma dr_\alpha^2 - c' \Sigma dr_\alpha ds_\alpha + a' \Sigma ds_\alpha^2,$$

in welcher die Coefficienten dieselben sind, wie in der Gleichung (4) § 1.

Mit Hülfe der entwickelten Formeln lassen sich nun die Formen R, S, T und die Producte von beliebig vielen derselben alle durch vier unter ihnen linear ausdrücken. Setzt man

$$(24) \qquad U = 2S + bT^2, \quad V = ST - TS, \quad k = b^2 - 4b',$$

so erhält man für jene Beziehungen die besonders einfachen Formeln

$$(25) \qquad \begin{aligned} U^2 = V^2 &= -kT^2, & UV &= -VU = kT, \\ TV = -VT &= U, & UT &= -TU = V, \end{aligned}$$

oder es bestehen zwischen den vier Formen

$$J_0 = -T^2, \quad J_1 = T, \quad J_2 = \frac{1}{\sqrt{-k}} U, \quad J_3 = \frac{1}{\sqrt{-k}} V$$

dieselben Relationen, wie zwischen den Einheiten der Quaternionen. Da

$$(26) \qquad 2S = U - bT^2, \quad 2kR = k(cT - aT^2) + (ab - 2c')U - bcV$$

ist, so läßt sich die quadratische Form (11) durch eine r e e l l e Substitution in eine Summe von 2 positiven und 2 negativen Quadraten transformiren

$$(27)\quad 4g(\varrho,\sigma,\tau,\vartheta)=[a\varrho+b\sigma-2\vartheta]^2+[c\varrho+2\tau]^2-\frac{1}{k}[(ab-2c')\varrho+k\sigma]^2-\frac{1}{k}b^2c^2\varrho^2,$$

oder sie hat den Trägheitsindex 2 (während die analoge quadratische Form in der Theorie der Quaternionen eine Summe von 4 Quadraten ist). Die nämlichen Formeln (25) erhält man, wenn man

$$(28)\quad U = 2R-cT+aT^2,\quad V = RT-TR,\quad k = a^2+c^2-4a'$$

setzt. Daß die 4 Formen T, T^2, U, V linear unabhängig sind, ist leicht zu sehen. Denn ist $\alpha T+\beta T^2+\gamma U+\delta V = 0$, so muß, weil T alternirend, T^2, U und V symmetrisch sind, $\alpha = 0$ sein. Multiplicirt man nun die Gleichung mit T, V oder U, so erkennt man durch denselben Schluß, daß auch β, γ und δ verschwinden.

Der Relation (10) zufolge genügt die Form X der Gleichung

$$(29)\qquad X^3-fX^2+gX = 0$$

und hat demnach die charakteristische Function

$$(30)\quad |\,\varrho R+\sigma S+\tau T+\vartheta T^2+\lambda E\,| = \lambda^3+f\lambda^2+g\lambda = \lambda g(\varrho,\sigma,\tau,\vartheta-\lambda).$$

Bildet man daraus die Gleichung, der die Form $X+\lambda E$ genügt, so findet man nach (2) für ihre adjungirte Form den Ausdruck

$$(31)\qquad \overline{X+\lambda E} = g(E+T^2)-\lambda(X-fE)+\lambda^2E.$$

Z. B. hat die Form

$$S^2+E+T^2 = bS+(b'+1)T^2+E$$

die Determinante b'^2 und die adjungirte Form

$$(b'^2+b'-b^2)T^2-bS+b'^2E,$$

wie in § 3 direct durch Rechnung gezeigt worden ist.

Bemerkung zu Hilbert's Theorie der algebraischen Formen.

Von

A. Schönflies.

(Vorgelegt von F. Klein).

Die folgende Note bezieht sich auf die unlängst von Herrn Hilbert aufgestellten fundamentalen Theoreme über Systeme algebraischer Formen [1]). Wie Herr Hilbert nachgewiesen hat, führt die Aufgabe, alle linear von einander unabhängigen Formen einer bestimmten Ordnung zu finden, welche in Bezug auf einen gegebenen Modul $(F_1, F_2 \ldots F_m)$ der Null congruent sind, d. h. also der Gleichung

$$F_1 X_1 + F_2 X_2 + \cdots + F_m X_m = 0$$

genügen, auf eine stets endliche Kette von ähnlich gebildeten Gleichungssystemen, deren Zahl höchstens gleich der Zahl der in den homogenen Formen $F_1, F_2 \ldots F_m$ auftretenden Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_n$ ist. Die Gesammtheit der von einander linear unabhängigen Lösungen eines solchen Gleichungssystems, durch welche sich jede andere Lösung linear so ausdrücken läßt, daß die Coefficienten beliebige Formen von $x_1 \ldots x_n$ sind, heißt ein volles Lösungssystem. Zur Kennzeichnung dieses Satzes behandelt Herr Hilbert im besondern den einfachen Modul $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ und beweist für ihn den folgenden Satz:

Wird für die Gleichung

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 + \cdots + x_n X_n = 0$$

die Kette der abgeleiteten Gleichungssysteme aufgestellt, so besteht allgemein das $s$te Gleichungssystem dieser Kette aus $\binom{n}{s-1}$ Gleichungen, während für dasselbe die Zahl der zu bestimmenden Formen gleich $\binom{n}{s}$ und die Zahl der Lösungen des vollen Lösungssystems gleich $\binom{n}{s+1}$ ist. Die Coefficienten der abgeleiteten Gleichungen sind sämmtlich lineare Formen.

Der Beweis dieses Satzes wird in der Hilbertschen Arbeit unter Benutzung desselben Gedankens geführt, welcher für den

1) Ueber die Theorie der algebraischen Formen, Math. Annalen, Bd. 36, S. 473.

Beweis des grundlegenden Theorems III, das sich auf einen beliebigen Modul bezieht, benutzt worden ist, nämlich durch den Schluß von $n-1$ auf n. Es scheint bisher nicht bemerkt worden zu sein, daß sich in diesem Fall die gesammte Kette der abgeleiteten Gleichungen in expliciter Form direct angeben läßt. Da dieses Beispiel eine gewisse principielle Bedeutung besitzt, so erscheint es ganz erwünscht, die volle Kette der zugehörigen abgeleiteten Gleichungssysteme unmittelbar übersehen zu können; dieselbe möge daher hier mitgetheilt werden. Uebrigens unterscheiden sich diese Gleichungssysteme auch insofern von denjenigen, welche im Hilbertschen Beweis auftreten, als die in der Aufgabe liegende Symmetrie nach den Variabeln $x_1, x_2 \dots x_n$ den abgeleiteten Gleichungssystemen ausnahmslos erhalten bleibt. Die Coefficienten dieser Gleichungssysteme, welche nach obigem Satz immer lineare Formen sind, reduciren sich dabei auf die Variabeln $x_1, x_2 \dots x_n$ selber, wie dies auch in dem von Herrn Hilbert behandelten Beispiel $n = 4$ der Fall ist.

Sind λ und μ irgend zwei der Zahlen $1, 2 \dots n$ und ist $\lambda < \mu$, so können die sämmtlichen $\binom{n}{2}$ linear unabhängigen Lösungen, welche das volle Lösungssystem von

$$1) \qquad x_1 X_1 + x_2 X_2 + \cdots + x_n X_n = 0$$

bilden, durch Gleichungen von der Form

$$X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ \dots\ X_\lambda = x_\mu,\ \dots\ X_\mu = -x_\lambda,\ \dots\ X_n = 0$$

dargestellt werden. Daraus folgt, daß sich jede Lösung der Gleichung 1) in die Gestalt

$$2) \qquad \begin{array}{l} X_1 = 0 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \\ X_2 = a_{21} x_1 + 0 + \cdots + a_{2n} x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ X_n = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + 0 \end{array}$$

bringen läßt, mit der Maßgabe, daß die Coefficienten a_{ik} homogene ganze Functionen von $x_1, x_2 \dots x_n$ von gleicher Dimension sind und daß

$$a_{ik} + a_{ki} = 0$$

ist. Jede Lösung ist nämlich aus obigen $\binom{n}{2}$ Lösungen mittelst der gleichen $\binom{n}{2}$ Coefficienten zu bilden. Nun leuchtet ein, daß von Null verschiedene Beiträge in jede Form X_l nur aus solchen Lösungen eingehen, in denen X_l nicht Null ist; es können daher in ihr auch nur diejenigen Coefficienten a_{ik} auftreten, die einen Index l enthalten.

Das abgeleitete Gleichungssystem nimmt daher, wenn wir außer den in dasselbe eingehenden $\binom{n}{2}$ Formen $X_{\lambda\mu}$ $(\lambda < \mu)$ im Interesse der Symmetrie auch die Formen

$$X_{\mu\lambda} = -X_{\lambda\mu}$$

in die Gleichungen aufnehmen, folgende Gestalt an:

$$3)\qquad \begin{array}{l} 0 \quad + x_2 X_{12} + \cdots + x_n X_{1n} = 0 \\ x_1 X_{21} + \quad 0 \quad + \cdots + x_n X_{2n} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1 X_{n1} + x_2 X_{n2} + \cdots + \quad 0 \quad = 0. \end{array}$$

Diesem Gleichungssystem genügt man nun in allgemeinster Weise durch folgende $\binom{n}{2}$ Gleichungen

$$4)\qquad X_{ik} = a_{ik1} x_1 + a_{ik2} x_2 + \cdots + a_{ikn} x_n$$

mit der Maßgabe, daß die Coefficienten von x_i und x_k Null sind, und daß alle Coefficienten a_{ikl}, welche in den Indices übereinstimmen, dem absoluten Werthe nach einander gleich sind, während das Vorzeichen in bekannter Weise davon abhängt, ob die bezügliche Permutation der Indices eine gerade oder eine ungerade ist. Um dies einzusehen, betrachte man die $l$te der Gleichungen 3), also

$$x_1 X_{l1} + x_2 X_{l2} + \cdots + x_{l-1} X_{l,l-1} + x_{l+1} X_{l,l+1} + \cdots + x_n X_{ln} = 0,$$

denke sich die Werthe 4) eingesetzt, und betrachte diejenigen Glieder, welche explicite den Factor $x_i x_k$ enthalten, deren Coefficienten also, absolut genommen, gleich a_{ikl} sind. Diese Glieder stammen nur aus X_{li} und X_{lk}, und zwar ist

$$\begin{aligned} X_{li} &= a_{li1} x_1 + a_{li2} x_2 + \cdots + a_{lik} x_k + \cdots + a_{lin} x_n \\ X_{lk} &= a_{lk1} x_1 + a_{lk2} x_2 + \cdots + a_{lki} x_i + \cdots + a_{lkn} x_n. \end{aligned}$$

Hieraus folgt nun, daß in dem Ausdruck

$$x_k X_{li} + x_i X_{lk}$$

ein Glied mit $x_i x_k$ nicht auftreten kann. Denn welches auch immer die natürliche Reihenfolge der Indices i, k, l ist, so haben die Permutationen $l\,i\,k$ und $l\,k\,i$ stets verschiedenes Vorzeichen. Damit ist die obige Behauptung erwiesen.

Die Gleichungen 4) geben diejenige Form an, in welche sich jede Lösung des Gleichungssystems 3) bringen läßt. Diese Lösung läßt sich nämlich, wie leicht ersichtlich, aus $\binom{n}{3}$ einfachen Lösungen zusammensetzen, von denen diejenige, welcher man das Symbol $(\lambda\,\mu\,\nu)$ ertheilen kann, durch

$$5) \qquad X_{\mu\nu} = \pm x_\lambda, \quad X_{\nu\lambda} = \pm x_\mu, \quad X_{\lambda\mu} = \pm x_\nu$$

characterisirt ist, während alle übrigen Größen X_{ik} den Werth Null haben, und zwar ist das Vorzeichen wiederum positiv oder negativ, je nachdem die in der bezüglichen Lösung enthaltene Reihenfolge der Indices einer geraden oder ungeraden Permutation entspricht. In der That können ja in dem Ausdruck einer jeden Lösung X_{ik} von Null verschiedene Beiträge nur aus solchen Lösungen 5) stammen, in denen X_{ik} nicht selbst Null ist, es können daher in ihm auch nur diejenigen Coefficienten $a_{\lambda\mu\nu}$ auftreten, welche die Indices ik enthalten. Was endlich das Vorzeichen dieser Coefficienten betrifft, so muß es infolge der vorstehenden Bestimmungen genau dasjenige sein, welches den oben getroffenen Festsetzungen entspricht.

In dieser Weise können die weiteren Gleichungs- und Lösungssysteme ebenfalls direct angegeben werden. Das nächste Gleichungssystem ist durch die $\binom{n}{2}$ Gleichungen von der Form

$$6) \qquad x_1 X_{ik1} + x_2 X_{ik2} + \cdots + x_n X_{ikn} = 0$$

in denen x_i und x_k fehlen, dargestellt, und man genügt ihm durch Lösungen, welche sich in analoger Weise, wie oben, aus $\binom{n}{4}$ Lösungen

$$X_{\mu\nu\varrho} = \pm x_\lambda, \quad X_{\nu\varrho\lambda} = \pm x_\mu, \quad X_{\varrho\lambda\mu} = \pm x_\nu, \quad X_{\lambda\mu\nu} = \pm x_\varrho$$

zusammensetzen, wo die Vorzeicheu wieder von der Art der bezüglichen Indicespermutation abhängen u. s. w. Das vorletzte Gleichungssystem ist, wenn wir zur Abkürzung alle Formen, welche aus $X_{12\cdots i-1, i+1\cdots n}$ durch Permutation der Indices entstehen, durch X'_i bezeichnen, von der Form

$$x_i X'_k + x_k X'_i = 0$$

und zwar ist jedes X'_i wiederum als positiv oder negativ zu wählen, je nachdem die bezügliche Permutation der Indices gerade oder ungerade ist. Das Gleichungssystem besteht aus $\binom{n}{2}$ Gleichungen, enthält n Formen, und läßt nur noch eine einzige Hauptlösung zu, nämlich

$$X'_1 = x_1, \quad X'_2 = x_2 \ \ldots \ X'_n = x_n$$

so daß jede Lösung derselben in die Form

$$X'_1 = Ax_1, \quad X'_2 = Ax_2 \ \ldots \ X'_n = Ax_n$$

gebracht werden kann. Das letzte Gleichungssystem ist

$$x_1 X' = 0, \quad x_2 X' = 0 \ \ldots \ x_n X' = 0$$

und läßt keine Lösung mehr zu.

Beispielsweise ergiebt sich für $n = 4$ folgende Kette von Gleichungen. Der Gleichung

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 + x_4 X_4 = 0$$

genügen sechs linear unabhängige Lösungen, so daß die allgemeinste Lösung folgende Form hat

$$\begin{array}{lcl}
X_1 & = & 0 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 \\
X_2 & = & a_{21} x_1 + 0 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 \\
X_3 & = & a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + 0 + a_{34} x_4 \\
X_4 & = & a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + 0.
\end{array}$$

Diese Lösung führt zu folgendem Gleichungssystem für die sechs Formen $X_{\lambda\mu}$

$$\begin{array}{l}
0 + x_2 X_{12} + x_3 X_{13} + x_4 X_{14} = 0 \\
x_1 X_{21} + 0 + x_3 X_{23} + x_4 X_{24} = 0 \\
x_1 X_{31} + x_2 X_{32} + 0 + x_4 X_{34} = 0 \\
x_1 X_{41} + x_2 X_{42} + x_3 X_{43} + 0 = 0
\end{array}$$

Die allgemeinste Lösung dieses Gleichungssystems ist

$$\begin{array}{lcl}
X_{12} & = & 0 + 0 + a_{123} x_3 + a_{124} x_4 \\
X_{13} & = & 0 + a_{132} x_2 + 0 + a_{134} x_4 \\
X_{14} & = & 0 + a_{142} x_2 + a_{143} x_3 + 0 \\
X_{23} & = & a_{231} x_1 + 0 + 0 + a_{234} x_4 \\
X_{24} & = & a_{241} x_1 + 0 + a_{243} x_3 + 0 \\
X_{34} & = & a_{341} x_1 + a_{342} x_2 + 0 + 0
\end{array}$$

und demgemäß ergiebt sich für die Formen $X_{\lambda\mu\nu}$ folgendes Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll}
x_3 X_{123} + x_4 X_{124} = 0 & x_1 X_{231} + x_4 X_{234} = 0 \\
x_2 X_{132} + x_4 X_{134} = 0 & x_1 X_{241} + x_3 X_{243} = 0 \\
x_2 X_{142} + x_3 X_{143} = 0 & x_1 X_{341} + x_2 X_{342} = 0.
\end{array}$$

Diesem System genügt man nun durch

$$X_{123} = a_{1234} x_4, \quad X_{124} = a_{1243} x_3, \quad X_{134} = a_{1342} x_2, \quad X_{234} = a_{2341} x_1$$

so daß als letztes Gleichungssystem, das keine Lösung mehr zuläßt

$$X_{1234} x_4 = 0, \quad X_{1234} x_3 = 0, \quad X_{1234} x_2 = 0, \quad X_{1234} x_1 = 0$$

resultirt.

Hiermit ist die oben ausgesprochene Behauptung dargethan. Ich bemerke übrigens, daß man auf Grund der vorstehenden Entwickelungen auch den im Eingang dieser Note angegebenen Satz selbst erweisen kann. Man überzeugt sich nämlich leicht, daß die $\binom{n}{s+1}$ Lösungssysteme des s^{ten} Gleichungssystems in allen Fällen linear unabhängig sind, und daß weitere von einander linear unabhängige Lösungen nicht existiren können. Zu letzterem Behuf könnte man übrigens auch die von Herrn Hilbert für jeden Modul angegebene characteristische Function $\chi(R)$ benutzen. Da nämlich offenbar jede Form der Rten Ordnung nach dem Modul $(x_1 \ldots x_n)$ der Null congruent ist, so ist $\chi(R) = 0$; andererseits kann der allgemeinen Gestalt von $\chi(R)$, deren Beschaffenheit sich auf Grund des allgemeinen Theorems III direct angeben läßt, nur durch diejenigen Coefficienten genügt werden, welche mit den im obigen Satz figurirenden Zahlen identisch sind. Dies ist auch dann noch der Fall, wenn der Grad R der bezüglichen Formen kleiner als n ist; in diesem Fall bricht zwar die Kette der abgeleiteten Gleichungen vor dem $n$ten Gleichungssystem ab, die auf dasselbe bezüglichen Schlüsse werden aber dadurch in keiner Weise tangirt.

Bemerkung über die Auflösung quadratischer Congruenzen.

Von

Alberto Tonelli in Rom.

(Vorgelegt von Ernst Schering am 7. November.)

Auszug aus Briefen vom 18. April und 15. Juni 1891.

Das bekannte Verfahren zur allgemeinen Auflösung einer quadratischen Congruenz für einen Modul, welcher eine von der Form $4h+1$ verschiedene Primzahl ist, habe ich in der Weise verallgemeinert, daß es auch auf Primzahlen dieser letzteren Form anwendbar wird.

Wenn die Congruenz

$$xx \equiv c \pmod{p}$$

zur Auflösung vorgegeben ist und noch ein beliebiger quadratischer Nichtrest $g \pmod{p}$ bekannt ist, so besteht dies Verfahren im Folgenden.

Es sei $p = \alpha 2^s + 1$, worin α ungerade $s \geqq 1$ ist, dann wird nach dem Eulerschen Satze

$$c^{\alpha 2^{s-1}} \equiv +1, \quad g^{\alpha 2^{s-1}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Wenn noch $s \geqq 2$ ist, folgt aus der ersteren dieser beiden Congruenzen die neue

$$c^{\alpha 2^{s-1}} \equiv \pm 1 \pmod{p}.$$

Es sei nun $\varepsilon_0 = 0$ wenn das obere (+)Zeichen, $\varepsilon_1 = 1$ wenn das untere (—)Zeichen stattfindet, so daß immer

$$g^{\varepsilon_0 \alpha 2^{s-1}} c^{\alpha 2^{s-2}} \equiv +1 \pmod{p}$$

wird. Wenn nun noch $s \geqq 3$ ist, so folgt hieraus

$$g^{\varepsilon_0 \alpha 2^{s-2}} c^{\alpha 2^{s-3}} \equiv \pm 1 \pmod{p}.$$

Gilt hier das obere (+)Zeichen, so setze ich $\varepsilon_1 = 0$, gilt das unter (—)Zeichen, so setze ich $\varepsilon_1 = 1$, so daß immer

$$g^{\varepsilon_1 \alpha 2^{s-1}} g^{\varepsilon_0 \alpha 2^{s-2}} c^{\alpha 2^{s-3}} \equiv +1 \pmod{p}$$

wird. Auf diese Weise erhält man die Congruenz

$$g^{\alpha 2^{s-k}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 2 + \ldots + \varepsilon_{k-1} 2^{k-1})} c^{\alpha 2^{s-k-1}} \equiv 1 \pmod{p}$$

so lange noch $k < s$ ist; also für $k = s - 1$ wird

$$g^{\alpha 2 (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 2 + \ldots + \varepsilon_{s-2} 2^{s-2})} c^{\alpha} \equiv 1 \pmod{p}$$

und demnach

$$x \equiv \pm g^{\alpha(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 2 + \ldots + \varepsilon_{s-2} 2^{s-2})} c^{\frac{\alpha+1}{2}} \pmod{p}$$

gesetzt, gibt die Wurzeln der Congruenz

$$xx \equiv c \pmod{p}.$$

Aus dieser Lösung erhält man durch

$$x_1 \equiv x^{p^{\lambda-1}} c^{\frac{p^\lambda - 2p^{\lambda-1} + 1}{2}} \pmod{p^\lambda}$$

eine allgemeine Auflösung der Congruenz

$$x_1 x_1 \equiv c \pmod{p^\lambda},$$

wie man sich leicht mit Anwendung des verallgemeinerten Fermatschen Satzes und des Satzes überzeugt, daß wenn

$$a \equiv b \pmod{p} \qquad \text{ist, auch} \qquad a^{p^{\lambda-1}} \equiv b^{p^{\lambda-1}} \pmod{p^\lambda}$$

wird.

Diese Formeln für die Wurzeln sind nicht nur theoretisch bemerkenswerth, sondern sie können auch in Fällen, wo andere besondere Methoden ihren Dienst versagen, von praktischer Bedeutung zur Berechnung der Wurzel der quadratischen Congruenzen sein.

Ueber die Fluorescenzwirkungen stehender Lichtwellen.

Von

P. Drude und **W. Nernst.**

Es bietet ein erhebliches Interesse, die bekannten Untersuchungen Hrn. Wiener's[1]) über die photographische Wirksamkeit stehender Lichtwellen auch auf andere Erscheinungen, durch welche Lichtbewegung objektiv zur Darstellung gebracht werden kann, auszudehnen, und für möglichst verschiedene Arten derselben folgende beiden Fragen zu beantworten:

1) Giebt es bei stehenden Lichtwellen Maxima und Minima der Wirkungsweise?

2) Fallen bei ein und derselben stehenden Lichtwelle die Maxima der Wirkung für die verschiedenen, zur Untersuchung gelangten Erscheinungsklassen zusammen?

Wirkungen des Lichtes sind auf vielen, recht verschiedenartigen Gebieten beobachtet; außer der durch Belichtung hervorgebrachten Erwärmung, Fluorescenz, und der Erscheinung der Hauchbilder, wie von Wiener erwähnt ist, möchten wir hier noch die durch Belichtung hervorgerufene Entladung negativ elektrisch geladener Körper, die Widerstandsänderungen des Selen's oder Chlorsilbers[2]), den Einfluß des Lichtes auf elektrische Funkenentladung[3]) und die photoelektrischen (Becquerel'schen[4])) Ströme nennen.

Die Schwierigkeit der Untersuchung stehender Lichtwellen beruht hauptsächlich in zwei Punkten: einmal muß der Körper, durch dessen Verhalten die Wirkung der Bäuche und Knoten der stehenden Lichtwelle untersucht werden soll, dünn sein im Vergleich

---

1) O. Wiener, Wied. Ann. 40, p. 203, 1890.
2) Sr. Arrhenius, Wiener Ber. 96, p. 831. 1887.
3) H. Hertz, Wied. Ann. 31, p. 983, 1887.
4) Ed. Becquerel, La lumière, T. 2, p. 121, Paris 1868.

zur Wellenlänge des angewandten Lichtes, damit bei dem benutzten lichtempfindlichen Körper nicht die Wirkung von Schwingungsbauch und Schwingungsknoten gleichzeitig vorhanden ist: eine andere Schwierigkeit wird durch die Herstellungsart stehender Lichtwellen hervorgebracht. Eine stehende Lichtwelle wird erzeugt durch die Interferenz zweier in entgegengesetzter Richtung sich fortpflanzender Wellenzüge von gleicher Amplitude. Dies wird mit großer Annäherung durch Reflexion des Lichtes an einem Silberspiegel erreicht, da über 90 % des einfallenden Lichtes am Silber reflectirt werden. Das lichtempfindliche Häutchen, wie kurz der Körper genannt werden möge, an welchem irgend eine Art der Wirkung stehender Lichtwellen untersucht werden soll, muß nun nahezu dem Silberspiegel parallel liegen, damit sich genügend weit räumlich auf dem Häutchen der Wellenbauch von dem Wellenthal trennt und zwar in einem Abstand von dem Spiegel, welcher um so kleiner sein muß, je weniger homogen die zur Wirkung gelangende Lichtsorte ist, damit nicht der Schwingungsbauch und Schwingungsknoten für zwei Lichtstrahlen verschiedener Wellenlänge auf dem lichtempfindlichen Häutchen zusammenfallen und dadurch die Wirkung von Bauch und Knoten gar nicht getrennt werden kann. Man wird daher das einfallende Licht spectral zerlegen müssen, falls man den Abstand des Häutchens vom Spiegel nicht beliebig klein machen kann. Enthält jede Stelle im erzeugten Spectrum Licht von streng einerlei Wellenlänge und Richtung so würde man den Abstand des Häutchens vom Spiegel beliebig groß wählen können. Indeß kann man ein derartiges Spectrum nicht mit genügender Lichtintensität herstellen, vor Allem bei Erscheinungen, welche nicht, wie die photographische Wirkung, durch längere Exposition verstärkt werden können. Denn bei der gewöhnlichen Herstellungsart des Spectrums durch Spalt, Collimatorlinse, Prisma und Sammellinse ist das Spectrum nur für einen sehr schmalen Spalt hinreichend rein. Man wird dem Spalt meist eine gewisse Breite geben, um überhaupt deutliche Lichtwirkung zu bekommen und daher das lichtempfindliche Häutchen in sehr kurzen Abstand vom Silberspiegel bringen müssen. Die große Nähe desselben verursacht experimentelle Schwierigkeiten hauptsächlich für die Beobachtung der elektrischen Lichtwirkungen, während die Herstellung eines genügend dünnen lichtempfindlichen Körpers auch für diese Klasse von Erscheinungen wohl möglich zu sein scheint. — Man könnte ferner stehende Lichtwellen erzeugen durch Reflexion an zwei Spiegeln, (am besten totalreflectirenden Prismen), welche unter 45° gegen einen einfallenden

Wellenzug geneigt sind und sich einander zuwenden. In dem Zwischenraum zwischen beiden Spiegeln würden sich stehende Lichtwellen bilden. Bringt man das lichtempfindliche Häutchen nahezu in die Ebene, zu welcher beide Spiegel symmetrisch liegen, so würden auf ihm Schwingungsbauch und Schwingungknoten genügend weit räumlich getrennt werden können und zwar wäre ihre Lage unabhängig von der Wellenlänge des angewandten Lichtes. Letzteres brauchte daher nicht homogen zu sein, wohl aber sehr streng von einerlei Richtung und daher wird auch diese Methode zunächst auf Schwierigkeiten stoßen. — Eine dritte Untersuchungsmethode der Wirkung stehender Wellen bietet sich in der Totalreflexion, bei der man die Nähe eines Metallspiegels vermeidet; es wird davon weiter unten näher die Rede sein.

Von den erwähnten Lichtwirkungen haben wir zunächst nur bei der Fluorescenz Resultate erhalten, welche für die Beobachtung die bequemste ist und wobei wir uns in allen wesentlichen Punkten an die Wiener'sche Versuchsanordnung anschlossen. Als Lichtquelle diente das elektrische Bogenlicht, welches, namentlich wenn man die Kohlenspitzen in eine größere Distanz (etwa $^1/_2$ cm) von einander bringt, sodaß ein großer Lichtbogen entsteht, die kräftigsten Fluorescenzwirkungen der zu Gebote stehenden Lichtquellen besitzt. Das Bogenlicht wurde durch eine Dynamomaschine geliefert, die Stromstärke auf 15 bis 20 Amp. regulirt, für großen Abstand der Kohlenspitzen war durch Veränderung der Regulirgewichte der Lampe Sorge getragen. Letztere befand sich in einem anderen Zimmer, als der Beobachtungsraum, welcher völlig verdunkelt werden konnte. Das Spaltrohr eines Spektrometers war lichtdicht durch ein Loch in der Thüre des Beobachtungsraumes geschoben, der Spalt empfing die Strahlen der Kohlenspitzen meist direkt, ohne dazwischen geschaltete Linse. Es zeigte sich, daß man so durch Annäherung der Kohlenspitzen an den Spalt eine größere Intensität des Fluorescenzlichtes im Beobachtungsraum erhielt, als wenn das Bogenlicht durch ein Glaslinsensystem auf den Spalt concentrirt wurde.

In dem Spaltrohr befand sich als Collimaterlinse eine Quarzlinse, das durch diese parallel austretende Licht wurde durch ein auf dem Spektrometertischchen im Minimum der Ablenkung aufgestelltes Flintglasprisma von 45° brechenden Winkel spectral zerlegt, und fiel dann auf die ebenfalls aus Quarz bestehende Objektivlinse des Spektrometerfernrohrs, dessen Ocular herausgenommen war. In der Brennebene der Objektivlinse entsteht dann ein Spektrum des Bogenlichtes, und durch einen in der Ebene liegenden

Spalt (Ocularspalt) konnte ein beliebiger Theil des Spektrums ausgeblendet werden. Das zerlegende Flintglasprisma fluorescirte unter der Wirkung des Bogenlichtes und mußte daher die wirksamen Strahlen etwas absorbiren. Indeß erwies sich durch direkte Versuche, indem das Glasprisma durch ein Quarzprisma ersetzt wurde, die Absorption als so gering, daß ersterem wegen des Fehlens der Doppelbrechung der Vorzug vor letzterem gegeben wurde. — Sehr verschiedenartige Substanzen (auch Papier, Holz, Gelatine) fluoresciren mehr oder weniger stark, wenn auf sie das Spektrum des Bogenlichtes geworfen wurde. Für alle lag das Maximum des Fluorescenzlichtes in zwei breiteren violetten Banden, welche ziemlich nahe an der Stelle, wo die H-Linien des Sonnenspektrums auftreten, sich befinden und zwar von diesen aus nach dem brechbareren Ende des Spektrums hin. Besonders die den H-Linien zunächst benachbarte Bande zeichnet sich durch sehr starke Fluorescenzwirkung aus und wurde daher allein bei den schließlichen Versuchen benutzt. Beide Banden liegen noch im sichtbaren Theil des Spectrums, wenn auch das Licht der brechbareren Bande nur noch wenig intensiv ist. Die mittlere Wellenlänge der benutzten Bande ergab sich mit Hülfe eines Glasgitters von 0,0045 mm Strich-Abstand zu 0,000386 mm. Die Messung wurde in der Weise vorgenommen, daß eine Glasplatte, auf welcher eine gelatinöse wässrige Lösung von Fluorescein zu einer etwa 1/100 mm dicken Haut eingetrocknet war, in der Brennebene des Objectivs befestigt wurde. Die beiden wirksamen Banden kennzeichnen sich durch zwei hellglänzende grüne Linien, welche man bei schiefer Durchsicht auf der Glasplatte wahr nimmt. Indem man das Fernrohr des Spektrometers so dreht, daß die der zu untersuchenden ersten Bande angehörige Linie auf eine bestimmte Marke der Glasplatte fällt, erhält man den durch das Gitter erzeugten Ablenkungswinkel der Bande und daher auch ihre Wellenlänge.

Eine nach der beschriebenen Art hergestellte fluorescirende Platte ist für alle Versuche über Fluorescenz sehr bequem, einerseits der Handlichkeit wegen, andrerseits weil wegen der geringen Dicke der fluorescirenden Schicht die wirksamen Banden des Spektrums sich scharf auf der Platte abzeichnen.

Es handelte sich nun um Herstellung einer Haut von der Dicke eines Bruchtheils der Wellenlänge, welche noch deutliche Fluorescenz aufwies. Dazu muß eine Substanz gewählt werden, welche in wässriger Lösung ein starkes Fluorescenzvermögen aufweist und welche eine hinreichend große Löslichkeit in Wasser besitzt, weil die in wässriger Lösung wirksamen Stoffe im krystallisirten

Zustande nicht fluoresciren. — Den genannten Anforderungen genügte in ausreichenden Maße das Natronsalz des Fluoresceins.

Es wurde eine Reihe von verschieden concentrirten wässrigen Lösungen dieser Substanz hergestellt, diesen Lösungen Gelatine im Verhältniß 1 : 600 zugesetzt und Glasplatten mit ihnen benetzt. Nach dem Eintrocknen der Lösung blieb auf ihnen eine Haut zurück, welche ungefähr den 600sten Theil der Dicke der ursprünglichen Wasserhaut besitzt. Man erhält so leicht Häute, welche im reflectirten weißen Lichte die eisengraue Farbe der Newton'schen Skala zeigen und welche eine Dicke von 1/20 bis 1/30 der mittleren Wellenlänge des weißen Lichtes besitzen. Diese Dicke wurde auch direkt gemessen, indem auf der Glasplatte mit der Spitze eines Messers eine schmale Partie der Haut weggeschabt, und dann eine andere Glasplatte fest gegen die erste angedrückt wurde. Die Dicke der Gelatine-Haut bestimmt sich dann leicht durch die Gestalt der Interferenzstreifen, welche bei homogener Beleuchtung an der zwischen beiden Platten befindlichen Luftschicht erzeugt werden und an der geschabten Stelle eine Discontinuität zeigen.

Gleichdicke Stellen der verschiedenen Häute, welche aus den einzelnen Lösungen hergestellt waren, wurden dann auf ihr Fluorescenzvermögen hin geprüft, indem man sie in die wirksame Bande des Bogenlicht-Spektrums brachte. Es erwieß sich eine Lösung, welche das Fluorescein in der Concentration 1 : 500 ursprünglich (vor dem Eintrocknen) enthalten hatte, am günstigsten; mit dieser sind die weiteren Versuche angestellt.

Zum Zweck größerer Lichtintensität wurde der Spalt des Collimatorrohrs etwa 2 mm breit gemacht. Das Fluorescenzlicht erwieß sich dann auf einigen Platten so stark, daß es auch im nicht verdunkelten Beobachtungszimmer deutlich wahrzunehmen war. Die erste wirksame Bande im Spectrum des Bogenlichtes zeichnete sich als fast 3 mm breites grünes Lichtband auf den fluorescirenden Substanzen ab. Es konnte ein Ocularspalt von dieser Breite eingesetzt werden, welcher also das unwirksame Licht abblendete.

Auf einer ungefähr 3 mm dicken planparallel geschliffenen Glasplatte, welche im Bogenlicht nicht merklich fluorescirte, wurde eine fluorescirende Haut auf die beschriebene Weise hergestellt, und diese dann auf eine andere ebengeschliffene chemisch versilberte Glasplatte gelegt, deren Silberbelegung durch einen weichen Lederlappen, auf welchem sich ein wenig Pariser Roth befand, gut polirt war. Die fluorescirende Haut war dem Silberspiegel zugewandt. Zunächst rief die wirksame Bande des Bogenlichtes nur eine gleichmäßige Fluorescenz in der Haut hervor. Dies war eine Folge der mangelnden Homogenität des Spektrums, welche durch die beträchtliche Breite des Collimatorspaltes verursacht war. Denn als durch Hin- und Herschieben der Glasplatte der Abstand der Haut vom Silberspiegel so verringert wurde, daß im reflectirten weißen Lichte die Newton'schen Farben der höheren Ordnungen sichtbar wurden, erschien das grüne Lichtband des Fluorescenzlichtes deutlich von schwarzen Minimis durchzogen. Die Lage derselben entsprach der Lage der im weißen reflectirten Lichte auftretenden Newton'schen Farben, nur war der Abstand ersterer (entsprechend der kleineren Wellenlänge der wirksamen Bande des Bogenlichtes) kleiner, als der der letzteren. Die Fluorescenz-Minima wanderten auf der Platte, falls man durch Drücken mit dem Finger ihren Abstand vom Silberspiegel änderte, ein Beweis dafür, daß die Streifung nicht durch ungleichmäßige Dicke der fluorescirenden Haut hervorgebracht sein konnte. Die Erscheinung zeigte sich um so mehr in grüner Farbe, unter je schieferem Winkel man die Platte betrachtete. Falls sich die Lage des Auges dem Reflexionswinkel näherte, schlug die Erscheinung mehr in die der wirksamen Bande angehörige violette Farbe um, offenbar, weil das vom Silberspiegel diffus reflectirte violette Licht mit ins Auge gelangte. Daß dieses nicht etwa allein eine Interferenzfigur aufwies, welche scheinbar auch die Interferenzfigur der Fluorescenz hervorgebracht hätte, konnte deutlich durch folgenden Versuch nachgewiesen werden. Die fluorescirende Haut war in einer Breite von 2 mm auf der Glasplatte entfernt. Dieser Streifen war dem Ocularspalt parallel, während die Platte auf den Silberspiegel so angedrückt und festgebunden wurde, daß die Interferenzstreifen senkrecht zu dem Ocularspalt und dem geschabten Streifen verliefen. Sowie nun bei unveränderter Stellung des Auges des Beobachters die Plattenkombination so bewegt wurde, daß der Streifen, auf welchem die fluorescirende Haut weggeschabt war, in den belichteten Theil trat, erschien derselbe in gleichmäßigen violetten Lichte ohne durchziehende schwarze Streifen, während die unmittelbar angrenzenden Stellen, auf welchem sich Fluorescein befand, dieselben deutlich aufwiesen.

Daß schließlich die Erscheinung wirklich lediglich durch die Einwirkung der stehenden Lichtwellen auf die Fluorescenz hervorgebracht wurde, ergab sich auch daraus, daß, wenn man den Ocularspalt entfernte, sodaß ein breiteres Spektrum des Bogenlichtes auf die Platten-Kombination fiel, das grüne von schwarzen Streifen durchzogene Lichtband nur an der Stelle der wirksamen Bande des Spektrums auftrat, während an den unmittelbar anliegenden Theilen desselben, welche fluorescirend nicht wirken, Dunkelheit oder gleichmäßig diffuses blaues Licht herrschte. — Zur weiteren Controlle wurde auch eine Plattencombination hergestellt, bei der die hintere Glasplatte nicht mit Silber belegt war. Es traten im reflectirten Lichte sehr scharf Newton'sche Ringe auf, weit deutlicher, als bei der vorigen Plattencombination mit Silberspiegel. Die Lichterscheinung der fluorescirenden dünnen Haut der vorderen Glasplatte war aber kaum merklich von dunkleren Partieen durchzogen, welche fast ganz verschwanden, als die Plattencombination umgekehrt wurde, sodaß die fluorescirende Haut sich auf der hinteren Glasplatte befand. Alles dies erklärt sich vollständig aus der geringen Reflexion des Lichtes am Glase, welche nur in sehr unvollkommender Weise stehende Lichtwellen zu Stande kommen läßt.

Es ist also durch diese Versuche als erwiesen anzusehen, daß stehende Lichtwellen Maxima und Minima der Fluorescenzwirkung haben.

Es handelte sich nun darum, die zweite der oben genannten Fragen zu entscheiden, ob nämlich die Maxima der Fluorescenz mit den Maximis der photographischen Wirkung zusammenfielen. Schon durch Betrachtung der Plattenkombination unter verschiedenen Einfallswinkeln ließ sich diese Frage entscheiden. Denn falls man die Platten so gegen die Fernrohraxe des Spektrometers neigte, daß direkt reflectirte Strahlen ins Auge des Beobachters gelangten, waren, wenn auch nur undeutlich, Newton'sche Interferenzfransen zu sehen. Die Maxima des direkt reflectirten Lichtes fielen zusammen mit den Maximis des Fluorescenzlichtes, wie sie am besten bei recht schiefer Betrachtung der Platten gesehen wurden. Dasselbe Resultat ergiebt sich aus den Wiener'schen Untersuchungen, d. h. die Maxima der Fluorescenzwirkungen stehender Lichtwellen fallen mit den Maximis ihrer photographischen Wirkung zusammen.

Um dieses Resultat völlig sicher zu erhalten, wurden Versuche mit rechtwinklig sich schneidenden Wellen gemacht, analog wie sie Wiener für die photographische Wirkung angestellt hat. Abweichend von der Wiener'schen Anordnung war nur, daß erst hinter dem (vertikalen) Ocularspalt ein etwa 3 cm dickes, wasserhelles Kalkspath-Parallelepiped mit horizontal liegendem

Hauptschnitt aufgestellt wurde. Durch eine dahinter befindliche Linse von kurzer Brennweite wurden in einer Distanz von ungefähr 20 cm vom Ocularspalt zwei nebeneinander liegende reelle Bilder desselben erzeugt, deren Polarisationsebene bezw. vertikal und horizontal lagen. Es wurde dann auf die zu den bisherigen Versuchen benutzte Plattencombination ein rechtwinkliges Glasprisma mit seiner Hypothenusenfläche aufgesetzt, dessen eine Kathetenfläche senkrecht gegen die einfallenden Lichtstrahlen gestellt wurde. Behufs Vermeidung von Totalreflexion ließen wir zwischen fluorescirender Haut und Silberspiegel einen Tropfen Benzol einsaugen (welches die Gelatine-Haut nicht auflößt[1])), und etwas Wasser zwischen Prisma und vorderer Glasplatte (Kanadabalsam ist nicht anzuwenden wegen seiner starken Fluorescenz). Von den beiden auf der Gelatinehaut hervorgerufenen Streifen Fluorescenzlichtes erschien nur der eine von schwarzen Minimis durchzogen, während der andere gleichförmig hell war. Dabei wechselten die beiden vom Ocularspalt entworfenen reellen Bilder ihre Rollen, wenn einmal die Einfallsebene der Gelatinehaut horizontal, und wenn sie ein zweites Mal vertikal lag, und zwar rief immer dasjenige Bild Streifung im Fluorescenzlicht hervor, dessen Polarisationsebene mit der Einfallsebene zusammmenfiel. Diese Erscheinung ist am besten zu sehen bei Betrachtung der Plattencombination durch die dem einfallenden Lichte zugekehrte Kathetenfläche des rechtwinkligen Prismas, da dadurch alle Spuren diffus vom Silber reflectirten violetten Lichtes vermieden werden. Die Betrachtung der Platten in beiden Lagen (mit horizontaler und vertikaler Einfallsebene) geschah deshalb, um dadurch den Einwand gegen die Beweiskraft der Versuche zu vermeiden, daß die beiden reellen Bilder des Ocularspaltes infolge der durch Brechung im zerlegenden Prisma hervorgerufenen Polarisation des Bogenlichtes nicht völlig gleiche Intensität besitzen.

Da die Fluorescenz im angewandten rechtwinkligen Glasprisma die Deutlichkeit der Erscheinung beeinflußte, haben wir auf einer Seite eines gleichzeitigen Quarzprismas, dessen brechende Kanten der optischen Axe parallel lag, eine etwa 1/15 Wellenlänge dicke fluorescirende Haut hergestellt, und diese dicht gegen einen Silberspiegel gedrückt, sodaß im reflectirten weißen Lichte

1) Um sicher zu sein, daß dies Vorhandensein des Benzols die Fluorescenz nicht modificirte, wurde auch die Plattencombination ohne rechtwinkliges Glasprisma mit eingesogenem Benzol bei senkrechter Incidenz des einfallenden Lichtes untersucht. Es traten ebenfalls deutliche schwarze Minima im Streifen des Fluorescenzlichtes auf.

Newton'sche Farben der höheren Ordnungen auftraten. Die Fluorescenz dieser Haut ist so stark, daß sie schon im diffusen Tageslichte als grüner Schimmer wahrnehmbar ist. Läßt man zwischen Silberspiegel und Quarzprisma einen Tropfen Benzol einsaugen und bringt eine Fläche des Quarzprismas in eine solche Lage gegen das einfallende Licht, daß es ungefähr unter 45° gegen die Hinterfläche des Prismas gebrochen wird, so traten die beschriebenen Erscheinungen sehr deutlich auf und sind auch im nicht verdunkelten Zimmer gut zu beobachten[1]).

Diese Versuche beweisen vollständig, daß die Maxima der Fluorescenz mit den Maximis der photographischen Wirkung zusammenfallen, da für letztere Wiener ganz analoge Resultate erhalten hat.

Mit den gewonnenen Resultaten steht ein anderer, einfacher Versuch im Einklang: Eine Quarzplatte wurde zum Theil versilbert und dann mit einer fluorescirenden Haut überzogen, welche in Richtungen, die senkrecht zur Trennungslinie des versilberten vom unversilberten Theil lagen, nahezu gleiche Dicke besaß. Es konnte dies erreicht werden, indem beim Eintrocknen der auf die Quarzplatte gebrachten fluorescirenden Lösung erstere schräg gestellt wurde, sodaß obige Trennungslinie am stärksten gegen den Horizont geneigt war. Es wurde die so präparirte Quarzplatte in die wirksame Bande des Spektrums des Bogenlichtes senkrecht zu den Lichtstrahlen gebracht, und zwar derart, daß die Trennungslinie des versilberten Theiles der Quarzplatte von dem unversilberten Theil senkrecht zum Ocularspalt verlief, sodaß gleiche dicke Stellen der fluorescirenden Haut dem Lichte ausgesetzt wurden, welche theils auf Silber, theils auf Quarz lagen; unter diesen Bedingungen fluorescirten letztere Stellen deutlicher als erstere, solange die Haut dünn (kleiner als die halbe Wellenlänge) war. An Stellen der Haut, welche dicker als eine halbe Wellenlänge des einfallenden Lichtes waren, kehrte sich die Erscheinung um, indem die Stellen auf der Silberbelegung stärker fluorescirten, als die auf der Quarzfläche. Dies Phänomen erklärt sich vollständig dadurch, daß die Fluorescenz einer dünnen auf

1) Diese Fluorescenzerscheinung bietet so ein bequemeres Mittel zur Demonstration der Wirkung stehender Wellen, als die Photographie, da die Plattencombination für alle Zeit brauchbar bleibt. Vielleicht kann sie daher zum Vorlesungsexperiment verwandt werden. Bei geringer Dicke der zwischenlagernden Luftschicht sind die Erscheinungen auch bei Beleuchtung mit nicht spektral zerlegten Bogenlicht wahrnehmbar. — Auch im violetten Theil des Sonnenspectrums war eine allerdings undeutliche Streifung des Fluorescenzlichtes wahrzunehmen.

Silber liegenden Haut durch die Wirkung der in ihr zu Stande kommenden stehenden Lichtwelle zerstört wird, da nach den Versuchen am Spiegel selbst ein Minimum der Wirkung liegt.

Belegt man die eine Fläche eines Prismas einer durchsichtigen Substanz (Glas, oder Quarz) mit einer fluorescirenden Haut, welche dünn im Vergleich zur Wellenlänge ist, und dreht man das Prisma, indem die Seite mit der überziehenden Haut den einfallenden Lichtstrahlen abgewandt ist, so daß man allmählig von partieller Reflexion derselben an der Hinterfläche des Prismas zur Totalreflexion gelangt, so tritt bei letzteren eine bedeutende Verstärkung der Fluorescenz der Haut gegenüber der bei partieller Reflexion der einfallenden Lichtstrahlen hervorgerufenen ein[1]).

Läßt man auf die Vorderfläche des Prismas die beiden senkrecht zu einander polarisirten Bilder fallen, welche man nach der beschriebenen Anordnung mit Hülfe des Doppelspaths erhält, und wählt die Einfallsebene der Hinterfläche des Prismas mit der einen der Polarisationsebenen der beiden Bilder zusammenfallend, so läßt sich aus dem Verhältniß der Intensität, mit welcher in beiden Bildern bei der Totalreflexion Fluorescenz erregt wird, auf die Wirkungsweise der stehenden Wellen schließen, und zwar nach folgender Ueberlegung:

Nehmen wir der Einfachheit halber an, das Licht fiele im Innern des Prismas unter 45^0 auf seine Hinterfläche und es wäre der Brechungsexponent der dünnen Gelatinehaut dem des Prismas gleich, sodaß auch in dieser durch Reflexion zwei senkrecht sich kreuzende Wellenzüge für jeden der beiden vom Ocularspalt gebildeten Lichtstreifen sich fortpflanzen. Setzt man voraus, daß ein Maximum von Fluorescenzwirkung eintritt im Schwingungsbauche einer gewissen Vectorgröße, die infolge der Lichtbewegung periodische Aenderungen erleidet, so wird die Intensität der Fluorescenz in demjenigen Lichtstreifen, in welchem jener Vector parallel zur Einfallsebene gerichtet ist, proportional der doppelten Summe des Quadrates der Amplitude des betreffenden Lichtvectors sein: in demjenigen Lichtstreifen indessen, in welchem der Vector senkrecht zur Einfallsebene schwingt, ist die Intensität der

1) Diese Thatsache, welche auch bei dickeren Häutchen vorhanden ist, kann daher zur Konstruktion eines fluorescirenden Oculars benutzt werden, wenn man mit Hülfe desselben die Fluorescenzwirkungen verschiedener Spektralbereiche bei direkter Durchsicht studiren will. Abgesehen von der Verstärkung der Fluorescenz durch Totalreflexion ist die letztere noch deshalb nützlich, weil sie alles Licht, welches nicht Fluorescenz hervorruft, völlig vom Auge des Beobachters abschneidet.

Fluorescens proportional der vierfachen Amplitude des Vectors oder gleich Null, je nachdem für denselben bei der Totalreflexion an der reflectirenden Fläche ein Schwingungsbauch oder Schwingungsknoten liegt. Dabei ist abgesehen von Phasenänderungen, welche durch Totalreflexion im Allgemeinen herbeigeführt werden, welche aber beliebig klein gemacht werden können, wenn man den Einfallswinkel des Lichtes im Prisma genügend nahe am Grenzwinkel der Totalreflexion wählt.

Nun liegt aber für den zuletzt genannten Lichtvector an der totalreflectirenden Fläche selbst ein Schwingungsbauch, wie dies sowohl die Reflexionsformeln der Fresnel'schen als auch der Neumann'schen Theorie zeigen, und um einen der in jenen Formeln auftretenden Lichtvectoren muß es sich hier handeln. — Es folgt daher, daß wenn der Einfallswinkel 45° genügend nahe am Grenzwinkel der Totalreflexion liegt, einer der beiden Fluorescenzstreifen auf der Hypothenusenfläche des Prismas die doppelte Helligkeit haben muß, als der andere, und zwar derjenige, dessen Lichtvector (im obigen Sinne) senkrecht zur Einfallsebene schwingt.

Dies Resultat haben wir durch die Beobachtung bestätigen können. Wenn man ein Glasprisma, welches einen niederen Brechungsexponenten besaß, sodaß der Grenzwinkel der Totalreflexion nicht sehr von 45° verschieden war, gegen das einfallende Licht allmählich so drehte, daß an der Hypothenusenfläche des Prismas, welches mit einer dünnen fluorescirenden Haut überzogen war, zunächst keine Totalreflexion und dann solche eintrat, so war für letztere Stellungen des Prismas die Fluorescenz in demjenigen der beiden Lichtstreifen die hellere, für welchen die Polarisationsebene mit der Einfallsebene zusammenfiel. Dies Resultat wurde erhalten, sowohl wenn die Einfallsebene der Hypothenusenfläche horizontal, wie wenn sie vertikal stand. — Vom quantitativen Messungen der Helligkeit der Fluorescenz konnte bei der beschriebenen Anordnung nicht die Rede sein. Denn das einfallende Licht war nicht genügend parallel, da es zuletzt eine Linse von kurzer Brennweite passirt hatte und die absoluten Phasenänderungen durch Totalreflexion variiren sehr schnell mit dem Einfallswinkel. Auch hätte, weil der Einfallswinkel nicht genau 45° war, eine kleine Korrektion an dem Helligkeitsverhältniß der beiden Fluorescenzbilder angebracht werden müssen.

Jedenfalls stand aber diese Beobachtung qualitativ im Einklang mit den bisherigen, daß nämlich der Lichtvector, in dessem Schwingungsbauche das Maximum der Fluorescenz liegt, senkrecht zur Polarisationsebene schwingt. Außerdem bietet letztere Beobachtung einen Fingerzeig, wie man vielleicht die Wirkungsweise stehender Wellen bei anderen lichtempfindlichen Phänomenen, wie z. B. beim Elektricitätsverlust durch Bestrahlung, oder bei den Becquerel'schen Strömen untersuchen kann.

Was übrigens die eingangs erwähnten anderen zur Untersuchung der Wirkung stehender Wellen geeigneten Phänomene anlangt, so haben wir bisher betreffs der Becquerel'schen Ströme nur vorläufige Messungen gemacht, welche uns bewiesen, daß diese Beobachtungen mit Schwierigkeiten verknüpft sein werden, wenn man zu zuverlässigen Resultaten gelangen will. Dieselben liegen einerseits daran, daß die kleinste Erschütterung schon merklich die elektromotorische Kraft einer lichtempfindlichen Zelle verändert, und andererseits daran, daß das Licht in gewissen Bereichen des Spektrums, welche je nach der Beschaffenheit der angewandten lichtempfindlichen Elektroden (Silber, Jodsilber, Chlorsilber, Bromsilber, auch je nachdem sie einmal auf hohe Temperatur gebracht sind, oder nicht) verschieden sind, sensibilatorisch wirken für ein gewisses anderes Spektralbereich, daß aber nach einmaligen Belichten der Elektrode mit letzterem seine Lichtempfindlichkeit wieder verloren geht, sie aber durch Bestrahlung mit dem sensibilatorischem Theile des Spektrums wieder gewonnen werden kann.

Bei Vorversuchen, welche wir behufs bolometrischer Prüfung der Wärmewirkungen stehender Lichtwellen anstellten, stießen wir insofern auf Schwierigkeiten, als dünnes auf Glas niedergeschlagenes Silber oder auf Glas aufgeklebtes Blattgold ein mit der Temperatur sehr wenig und dabei unregelmäßig variirendes Leitungsvermögen aufwiesen; Gelatinhäute von der erforderlichen Dünne leiteten auch bei reichlichem Zusatz guter Elektrolyte überhaupt nicht nachweisbar, sobald sie eingetrocknet waren, während sie nach schwachem Anhauchen infolge rascher Verdunstung eine sehr inkonstante Leitfähigkeit besaßen. Wegen des unvergleichlich viel größeren Temperaturkoefficienten würden sich natürlich Leiter zweiter Klasse besonders empfehlen. — Es ist in gewisser Weise plausibel, daß die Wärmewirkung stehender Wellen an denselben Stellen liegt, wie ihre Fluorescenzwirkung. Denn man kann die Erwärmung eines Körpers durch Lichtstrahlen als eine Art Fluorescenz auffassen, indem die Lichtstrahlen absorbirt werden und der Körper Strahlen größerer Wellenlänge wieder aussendet. Bei der wirklichen Fluorescenz fallen diese in den sichtbaren Theil des Spektrums, bei der Erwärmung in den unsichtbaren, ultrarothen. Aus dem angeführten Grunde halten wir es für wahrscheinlich, daß die Wärmewirkungen stehender Lichtwellen mit den Fluoreswirkungen (und den photographischen) zusammenfallen.

Wir versuchten auch, die Erscheinung der Diffusion des Lichtes an unregelmäßigen Partikelchen zum Studium stehender Wellen zu verwerthen. Es scheinen aber bei diesem Phänomen nicht gegeneinander gerichtete Wellenzüge in gegenseitigen Einfluß gesetzt zu werden, sondern sie scheinen durch das alleinige Verhalten eines in einer Richtung (und zwar ins Auge des Beobachters) sich fortpflanzenden Wellenzuges bestimmt zu sein, gerade wie z. B. die Newton'schen Ringe im reflectirten Licht. — Man kann eine Fläche, welche das Licht diffundirt, durch Behauchen einer kalten Glasplatte herstellen. Legt man eine solche, sehr dünn behauchte, auf eine warme, so setzen sich die im direkten Licht gebildeten Newton'schen Interferenzstreifen (bei homogener Beleuchtung) weit fort in den Theil, von welchem direktes Licht nicht mehr ins Auge reflectirt wird. Dreht man die Plattencombination um, sodaß nur die Hinterfläche behaucht ist, so sind Interferenzstreifen im diffusen Licht nicht wahrnehmbar, sondern nur eine gleichmäßige Helligkeit[1]). — Ersetzt man die hintere (unbehauchte) Glasplatte durch einen angewärmten Silberspiegel, so werden die Interferenzstreifen im diffusen Licht nicht deutlicher, sondern undeutlicher als vordem; dies zeigt zur Genüge, daß nicht das Verhalten stehender Wellen bei dieser Erscheinung maßgebend ist und daß die Lage der Interferenzstreifen denselben Gesetzen unterworfen ist, wie die Lage der im direkt reflectirten Lichte sichtbaren Newton'schen Streifen. Aus letzterem kann man ja aber bekanntlich nicht eine Entscheidung dafür treffen, welcher Lichtvector für sie maßgebend ist, wenn man unter dem Worte „maßgebend" versteht, daß bei stehender Wellenbewegung der betreffende Lichtvector im Schwingungshauche ein Maximum der Wirkung besitzen soll.

---

1) Diese Erscheinungen zeigen sich nur bald nach dem Aufeinanderlegen der Platten, da nach längerer Zeit sich ihre Temperaturen ausgleichen und Wassertröpfchen auf beiden Flächen haften.

Bericht des Beständigen Sekretärs der Königl. Ges. d. Wiss. über das Jahr 1891.

Zur Geschichte unserer Gesellschaft geben wir zunächst die wissenschaftlichen Mittheilungen an, welche in den 8 Sitzungen gemacht worden sind.

Am 7. Februar 1891. Riecke legte eine Abhandlung des Privatdocenten Dr. Nernst vor: „Ueber das Henrysche Gesetz“.

Voigt legt „Beiträge zur Hydrodynamik“ vor.

Klein legt die Abhandlung des Herrn Prof. Franz Meyer in Clausthal vor: „Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen“. 4. Mittheilung.

de Lagarde spricht über Inhalt und Bedeutung seiner Septuagintastudien II und III, die im 38. Band der Abhandlungen erscheinen werden.

Frensdorff legt einen Aufsatz vor: „Eine Krisis in der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften.

Am 7. März: Voigt legt: „Beiträge zur Hydrodynamik. 2. Theil.“ vor.

Klein legt vor: Abhandlung des Herrn Prof. Franz Meyer in Clausthal: „Realitäteneigenschaften von Raumcurven“.

Schering legt von Dr. Heun in Berlin vor: „Die Schwingungsdauer des Gaussschen Bifilarpendels“.

Am 2. Mai: Schwarz legt einen Aufsatz des Herrn Julius Petersen in Kopenhagen vor: „Ueber Normalformen mehrfach zusammenhängender Flächen“.

Voigt legt einen Aufsatz des Herrn Dr. O. Venske vor: „Ueber einen neuen Apparat zur Bestimmung der innern Wärmeleitungsfähigkeit schlecht leitender Körper in absolutem Maasse.

de Lagarde kündigt schriftlich für die Nachrichten an:

a. Thevenots Kaffarre.

b. Ueber das aramäische Evangeliar des Vatikans.

c. Neue Ausgabe der διατάξεις τῶν ἀποστόλων und der drei Gestalten der Clementinen.

und für die Abhandlungen (Bd. 38): Septuagintastudien, 4. Stück.

Am 6. Juni: Klein legt eine Arbeit von Dr. Fr. Schilling vor: „Ueber die geometrische Bedeutung der Formeln der sphärischen Trigonometrie im Falle complexer Argumente“.

Riecke legt a. eine eigne Arbeit vor: „Zur Theorie der piëzoëlectrischen und pyroëlectrischen Erscheinungen.

b. eine Arbeit des Herrn Dr. Tammann: „Ueber die Permeabilität von Niederschlags-Membranen.

c. eine Arbeit des Herrn Dr. Tammann und des Privatdocenten Dr. Nernst: „Ueber die Maximaltension, mit welcher Wasserstoff aus Lösungen durch Metalle in Freiheit gesetzt wird“.

Kielhorn legt vor:

a. die Vikrama-Aera.

b. dic Nîtimanjarî des Dyâ Dviveda.

de Lagarde: 1. Arabes mitrati. 2. Samech. 3. Ueber den Inhalt des 4. Stücks der Septuagintastudien, die er in der Sitzung vom 2. Mai angekündigt hatte.

Weiland legt für die Abhandlungen durch den beständigen Sekretär vor: „Die Wiener Handschrift der Chronik des Matthias von Neuenburg“. (Gedruckt im 37. Band der Abhandlungen.)

Am 4. Juli. Schering legt eine neue Lösung der Kepplerschen Gleichung vor.

Schwarz macht eine Mittheilung über ein nächstens zu veröffentlichendes Verzeichniß aller (oder wenigstens der Mehrzahl) derjenigen Schriften, welche seit dem J. 1761 veröffentlicht sind und mit der Theorie der Flächen kleinsten Flächeninhalts sich beschäftigen.

Riecke legt eine Abhandlung vor: „Ueber eine mit den elektrischen Eigenschaften des Turmalins zusammenhängende Fläche 4. Ordnung“.

Klein legt eine Arbeit des Herrn Dr. Hilbert in Königsberg vor: „Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten“.

Wüstenfeld legt eine Abhandlung vor: „Die gelehrten Schâfi'íten des V. Jahrhunderts der H. (Gedruckt im 37. B. der Abhandlungen.)

de Lagarde legt einen Aufsatz des Herrn Dr. Rahlfs vor: „Ueber Lehrer und Schüler bei Junilius Africanus“.

Am 1. August. Riecke kündigt eine Arbeit von sich und Voigt an: „Bestimmung der elektrischen Konstanten des Turmalins und Quarzes“.

Voigt kündigt eine Abhandlung an: „Bestimmung der Konstanten der innern Reibung für einige Krystalle“.

Kielhorn kündigt „Tafeln aus indischen Inschriften und Handschriften“ an.

Am 7. November. de Lagarde zeigte schriftlich Mittheilungen an: 1. Worterklärungen: Cicisbeo, Caparra, Σατράπης.

2. über den dritten Brief des Paulus an die Korinther.

Schering theilt eine Notiz von Alberto Tonelli mit: „Ueber die Auflösung quadratischer Congruenzen“.

Klein legt einen Aufsatz von Herrn Prof. Franz Meyer in Clausthal vor: „Ueber ein Trägheitsgesetz für algebraische Gleichungen“.

Ehlers legt einen Aufsatz des Herrn Privatdocenten Dr. Bürger vor: „Vorläufige Mittheilungen über Untersuchung an Nemertinen von Neapel“.

Wallach legt eine Abhandlung vor: „Ueber einige neue Kohlenwasserstoffe mit ringförmiger Bindung der Kohlenstoffatome“.

Alle diese Arbeiten sind oder werden, wenn nicht Anderes ausdrücklich angegeben ist, in den Nachrichten gedruckt. Von diesen sind, soweit sie bis zum 15. November gedruckt werden konnten, 7 Nummern erschienen, mit 246 Seiten.

Außer den Nachrichten und Abhandlungen haben auch die Gelehrten Anzeigen in gewohnter Weise ihre Fortsetzung gefunden.

Auch dies Jahr hat das Kön. Staatsministerium der Geistlichen, Unterrichts- und Medizinalangelegenheiten die geringen Mittel, über die wir zur Förderung wissenschaftlicher Zwecke verfügen können, durch eine außerordentliche Bewilligung von 3000 Mk. (Reskr. vom 1. April) vermehrt und uns dadurch zum lebhaftesten Dank verpflichtet.

Von dem, was sonst in den Sitzungen verhandelt worden ist, möge ferner erwähnt werden:

Die Gesellschaft fühlte sich verpflichtet, die Aufzeichnungen ihres früh verstorbenen ordentlichen Mitgliedes, Karl von Seebach, Professors der Palaeontologie, über seine wissenschaftliche Reise in Mittelamerika zum Druck zu bringen und beschloß deshalb am 7. Februar sie im 38. Band der Abhandlungen herauszugeben.

Sie betrachtet es ferner als eine ehrenvolle Pflicht, für eine vollständige, mit größter Sorgfalt vorbereitete, äußerlich würdig ausgestattete Ausgabe der Werke ihres großen Genossen, Wilhelm Weber, zu sorgen. Dieselbe wird in fünf Bänden unter der Aufsicht des Herrn Professor Heinrich Weber in Braunschweig und Geheimen Raths Braune in Leipzig erscheinen. Dies aber auszuführen, würde uns nicht möglich gewesen sein, wenn nicht die Königlich Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig auf unser Ersuchen sich auch bereit erklärt hätte, uns die in ihren Veröffentlichungen erschienenen Abhandlungen Webers zum

Abdruck in den Werken zu überlassen. Wir sind überzeugt, daß alle Freunde der Wissenschaft im aufrichtigsten Dank für dies Zugeständniß mit uns übereinstimmen. In Folge unseres Beschlusses vom 7. März ist über den Verlag der Ausgabe ein Kontrakt mit der Springerschen Buchhandlung in Berlin abgeschlossen worden.

Auf den Wunsch des Herrn Professor Dr. Schur hat die Gesellschaft am 7. November beschlossen, daß der 2. Theil der astronomischen Mittheilungen der Kön. Sternwarte zu Göttingen „Sternkatalog enthaltend 6900 Sternörter für 1860.0. Nach den von Professor Klinkerfues in den Jahren 1858 bis 1863 angestellten Zonen-Beobachtungen abgeleitet von Professor Dr. Schur“ auf ihre Kosten gedruckt werden soll. Die Kosten sind von der Druckerei auf 808 Mark angeschlagen worden.

Die Gesellschaft beschließt am 7. März dem Wunsch der K. Akad. der Wiss. in Berlin und der Académie des Sciences zu Paris zu entsprechen und ihnen einige Briefe von Jacobi und Lagrange an Gauss wissenschaftlichen Inhaltes aus den Gaussschen Sammlungen zum Abdruck in den bezüglichen Gesammtausgaben der genannten Mathematiker mitzutheilen.

Die Gesellschaft beschließt am 4. Juli gegen die von Herrn Dr. Rud. Wackernagel in Basel in Nr. 9 der G. G. Anz. d. J erschienene Anzeige des zürcher Urkundenbuches eine Erklärung zu veröffentlichen, die in Nr. 15 der G. G. Anz. gedruckt ist.

In den Tauschverein ist die Gesellschaft den gegen sie ausgesprochenen Wünschen zufolge eingetreten

1) mit der mathematischen Gesellschaft in Moskau (10. Februar),

2) mit der Universität Cincinnati, U. St. A., Journal of comparative Neurologie (4. Juli).

3) mit dem naturwissenschaftlichen Verein für Schleswig-Holstein (1. August).

4) mit der Rassegna delle scienze geologiche in Rom (7. Novbr.).

Am 2. Mai beschloß die Gesellschaft, daß der beständige Sekretär Herrn GRR. Hanssen am 13. Mai zu seinem sechzigjährigen Doctorjubiläum ihre herzlichen Glückwünsche darbringen solle.

Am 9. August feierte Herr GRR. A. von Hofmann in Berlin, auswärtiges Mitglied in der Physikalischen Klasse, sein fünfzigjähriges Professorenjubiläum. Die Gesellschaft beschloß ihm ihre freudige Theilnahme und lebhaften Glückwünsche in einer deutschen Zuschrift auszusprechen. Herr Wallach übernahm die Abfassung.

Se. Excellenz Herr Hermann von Helmholtz wurde am 31. September 70 Jahr alt, aber die Feier war auf den 2. November verlegt worden. Auch unsere Gesellschaft beschloß am 4. Juli sich durch eine deutsche Zuschrift an dieser Feier zu betheiligen und ihre tiefe Verehrung und herzlichen Glückwünsche auszusprechen. Herr Prof. Riecke übernahm die Abfassung und überreichte sie dem Jubilar selbst.

An Stelle des Herrn GRR. Schering trat am 1. Oktober der Senior der Historisch-philologischen Klasse, Herr Wüstenfeld, und wurde durch das Kuratorialreskript vom 7. Oktober bestätigt.

Für dies Jahr hatte die Mathematische Klasse die Preisaufgabe gestellt:

Die Aufgabe der conformen Abbildung eines ebenen Bereiches auf ein Stück einer krummen Fläche, deren Krümmungsmaß überall den constanten Werth k besitzt, hängt zusammen mit der Aufgabe, die partielle Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2k \cdot e^u$$

vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen gemäß zu integriren.

Für diese Aufgabe kommen zunächst die von Riemann in seiner Theorie der Abelschen Functionen angegebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen in Betracht.

Die Königliche Gesellschaft wünscht die Frage, ob es möglich ist, die angegebene partielle Differentialgleichung für einen gegebenen Bereich unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen der angegebenen Art zu integriren, vorausgesetzt, daß der Constanten k negative Werthe beigelegt werden, vollständig beantwortet zu sehen.

Insbesondere wünscht die Königliche Gesellschaft den Fall der angeführten Aufgabe behandelt zu sehen, in welchem der betrachtete ebene Bereich eine geschlossene mehrfach zusammenhängende Riemannsche Fläche ist, während die Function u keine anderen als logarithmische Unstetigkeiten annehmen soll.

Zur Bewerbung um den Preis der Mathematischen Klasse für das J. 1891 war am 28. September eine Arbeit mit dem Spruche bezeichnet: „Der schönste Lohn der Arbeit ist die Arbeit selbst“ eingegangen. Nach dem Urtheil der mathematischen Klasse genügt die eingereichte Abhandlung weder hinsichtlich ihrer Form, noch hinsichtlich ihres Inhalts den an eine Preisbewerbungsschrift zu stellenden Anforderungen, enthält auch überhaupt keine Lösung der gestellten Preisaufgabe. Die Gesellschaft kann also der Abhandlung den Preis nicht zuerkennen.

Die Aufgabe der Historisch-philologischen Klasse für 1892 ist folgende:

Für die älteste Geschichte Athens ist es von außerordentlicher Bedeutung zu wissen, an welchen Orten sich Heiligthümer der verschiedenen Götter und Heroen fanden, sowol in Athen selbst, als in der gesammten Landschaft, soweit es nach dem jetzigen Stande der topographischen, epigraphischen, genealogischen Forschungen möglich ist. Die Historisch-philologische Klasse stellt daher für 1892 die Aufgabe, daß eine sorgfältige Uebersicht der Kultstätten in Attika nach den Oertlichkeiten, in denen sie sich fanden, gegeben und, was sich daraus für die älteste Geschichte Attikas folgern lasse, dargestellt werde.

Für das Jahr 1893 stellte die Gesellschaft nach dem Vorschlag der Physikalischen Klasse die Aufgabe:

Aus den Untersuchungen von W. C. Röntgen und A. Kundt über die Aenderungen der optischen Eigenschaften des Quarzes im elektrischen Felde ergiebt sich ein enger Zusammenhang zwischen den elektrooptischen Erscheinungen und den elastischen Deformationen, welche jene piëzoelektrische Substanz unter der Einwirkung elektrostatischer Kräfte erfährt. Eine Ausdehnung dieser Forschungen auf eine größere Reihe piëzoelektrischer Krystalle von verschiedenen Symmetrieeigenschaften erscheint in hohem Grade erwünscht. Gleichzeitig würde die Untersuchung darauf zu richten sein, ob die elektrooptischen Erscheinungen in piëzoelektrischen Krystallen ausschließlich durch die im elektrischen Felde eintretenden Deformationen oder außerdem durch eine direkte Einwirkung der elektrostatischen Kräfte auf die Lichtbewegung hervorgerufen werden.

Für das Jahr 1894 stellt die Mathematische Klasse folgende neue Aufgabe:

„Zwischen dem Zustand eines harten elastischen Körpers und dem einer Flüssigkeit liegt eine Reihe von Zwischenzuständen; durch geeignete Mischung von festen Körpern mit flüssigen kann man alle möglichen Grade von Weichheit oder Zähflüssigkeit, einen ganz allmähligen Uebergang von einem festen Körper zu einem flüssigen erzeugen. Unsere Kenntnisse von den Eigenschaften jenes Zwischenzustandes sind aber noch sehr unvollständig und es wird

daher verlangt, dieselben durch erneute Experimentaluntersuchungen zu fördern. Insbesondere soll ermittelt werden, wie sich bei zähflüssigen Körpern die Gesetze solcher Bewegungen verändern, welche bei Flüssigkeiten von geringer Viscosität zur Bestimmung der innern Reibung verwandt werden können."

Die zur Bewerbung um einen der Preise bestimmten Arbeiten müssen, mit einem Spruch versehen, vor Ablauf des Septembers des bestimmten Jahres an die Kön. Gesellschaft der Wissenschaften portofrei eingesandt werden und von einem versiegelten Zettel begleitet sein, welcher außen den Spruch trägt, der die Arbeit bezeichnet und innen Namen und Wohnort des Verfassers angiebt.

Der Preis für jede Aufgabe beträgt 500 Mk.

Die von der Wedekindschen Preisstiftung für deutsche Geschichte zur Lösung im fünften Verwaltungszeitraum, der am 14. März 1886 begonnen hat, gestellten Aufgaben sind in den Nachrichten 1887 S. 69 f. bekannt gemacht, dann 1888 S. 134 ff., 1889 S. 403 ff., 1890 S. 217 ff., 1891 S. 127 ff. wiederholt worden. Gern erwähnen wir, daß der Verein für hansische Geschichte in dem Vorwort zum Band VI der Hansischen Geschichtsquellen (Hansaakten aus England 1275 bis 1412) Halle 1891 und der Historische Verein für Niedersachsen im Vorwort seiner Ausgabe der ebstorfer Weltkarte, die von Ernst Sommerbrodt besorgt ist (Hannover 1891), der Unterstützung erwähnen, durch welche unsere Gesellschaft ihre trefflichen Bemühungen zu fördern im Stande gewesen ist. — Die Arbeiten für die Herausgabe der Kornerschen Chronik sind regelmäßig fortgesetzt worden und sehen baldiger Vollendung entgegen.

Durch den Tod wurde der Gesellschaft im Laufe des Jahres am 23. Juni der Mann entrissen, der fast zwei Menschenalter ihr Stolz und ihre Zierde gewesen war und dessen Andenken sie in Treue bewahren wird, der Wirkl. Geheime Rath Wilhelm Ernst Weber, Excellenz, geboren am 24. September 1804, Ehrenmitglied seit 1887, vorher ordentliches Mitglied der mathematischen Klasse seit 1831.

Ferner sind gestorben die auswärtigen Mitglieder

1. der Historisch-philologischen Klasse:

George Bancroft in Washington, den 17. Januar. Geboren den 3. Oktober 1800. Ausw. Mitglied seit 1868.

Franz Miklosich in Wien, den 7. März. Geboren 1813. Ausw. Mitglied seit 1868.

2. der Physikalischen Klasse:

Karl W. von Nägeli in München, den 11. Mai. Geboren den 30. März 1817. Ausw. Mitglied seit 1877.

Ferner die Korrespondenten

1. der Historisch-philologischen Klasse:

Ludwig Müller in Kopenhagen, den 6. Sept., Korrespondent seit 1871.

Xavier Heuschling in Brüssel, Korrespondent seit 1874. (Sein Tod ist erst seit kurzem zu unserer Kenntniß gekommen.)

An die erledigten Stellen wurden am 4. November einstimmig gewählt: L. Duchesne in Paris, Mitglied des Instituts, und

Max Müller, Professor in Oxford, seit 1861 Korrespondent, zu auswärtigen Mitgliedern der Historisch-Philologischen Klasse.

Dr. Karl Gegenbaur, Professor, Geh. Hofrath, in Heidelberg, zum auswärtigen Mitglied der Physikalischen Klasse, ferner

Wilhelm Fröhner in Paris, und

Dr. Charles Groß in Cambridge (Mass. U. St. A.) zu Korrespondenten der Philol. Historischen Klasse.

F. Fouqué, Mitglied des Instituts, Professor am College de France, in Paris, zum Korrespondenten in der Physikalischen, und

Dr. Friedrich Prym, Professor der Universität Würzburg, zum Korrespondenten in der Mathematischen Klasse.

Wilhelm Fraatz aus Göttingen ist am 15. Februar als Diener der Gesellschaft angenommen und verpflichtet worden.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

30. December. **№ 11.** 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 5. December.

Ueber den Stierdionysos.

Von

Friedrich Wieseler.

Ueber den Stierdionysos ist mehrfach im Zusammenhange gehandelt, am eingehendsten von Stephani im Compte rendu de la commission imp. archéol. pour l'ann. 1863, p. 110 fg., und Robert Schneider „Ueber zwei Bronzebilder des gehörnten Dionysos" in den Jahrb. der Kunstsammlungen des allerhöchsten Kaiserhauses Bd. II, S. 41 fg., zuletzt von A. W. Curtius „Der Stier des Dionysos" Inaugural-Dissertation der phil. Fac. zu Jena, 1882, und Thraemer „Dionysos in der Kunst" in W. H. Roschers Lexikon der Griech. u. Röm. Mythologie, von beiden ohne auf Stephani und Schneider Rücksicht zu nehmen.

Dionysos erscheint nach den bisherigen Annahmen 1) als vollständiger Stier, 2) als Stier mit Menschengesicht, 3) in menschlicher Gestalt mit Stierkopf, 4) in menschlicher Gestalt mit Stierhörnern und Stierohren, und 5) ganz besonders mit Stierhörnern allein, endlich 6) auch ohne Hörner mit großen Ohren oder ohne diese, mit anderen Theilen vom Stiere und mit angedeuteten oder verhüllten Hörnern.

1.

Die Auffassung des Gottes in der Gestalt eines vollständigen Stieres erhellt deutlich aus Schriftstellen, namentlich aus dem Gebet der Elischen Frauen bei Plutarch Quaest. Gr. 36 und de Isid. et Osir. 35. Der an erster Stelle vorkommende Umstand, daß Dionysos mit den Chariten kommen möge, macht es durchaus wahrscheinlich, daß der Stier auf dem schönen geschnittenen Steine in den Denkm. d. a. Kunst II, 33, 383, den Gott selbst darstellen solle. Dieses gilt ebenfalls wohl von dem ebenda unter n. 382 wiederholten geschnittenen Steine und den entsprechenden von Stephani a. a. O. S. 123, A. 1 angeführten. Wenn dann Stephani meint, daß der auf Münzen von Kyzikos „zwar ohne bakchische Attribute, aber doch in der Stellung des ὑβριστής“ angebrachte Stier wohl den Dionysos selbst darstellen könne, wie Panofka Ann. dell' Inst. T. V, p. 282 vermuthet, so ist diese Beziehung auch von Thraemer a. a. O. S. 114 für wahrscheinlich gehalten, und gewiß mit Recht. Auch auf der von Head Hist. num. p. 344 beschriebenen Drachme von Phlius, welche von ihm ungefähr zwischen 430—322 v. Chr. gesetzt wird, ist der ohne ein Bakchisches Attribut dargestellte Stier mit gesenktem Haupte sicherlich als Dionysos zu fassen. Der Flußgott Asopos, an den Head auch denkt, kann gegen jenen nicht in Betracht kommen. Münzen von Phlius aus der Kaiserzeit zeigen auf der Vorderseite den Kopf des Dionysos und auf der Rückseite einen stoßenden Stier und den Thyrsos oder auf der Vorderseite einen stoßenden Stier und auf der Rückseite Epheu und Trauben (Imhoof-Blumer und Percy Gardner Numism. commentary on Pausanias reprinted from the journal of Hellenic studies I, 1885, p. 32, n. 5). Für den letzteren Fall scheint es, daß der Stier als der Gott selbst zu fassen sei, hinsichtlich des ersten wird man wohl nicht anstehen den Stier als Attribut des Gottes zu fassen, wie auch den stoßenden Zebu auf dem Revers der Münze den Kibyraten mit der Büste des Dionysos auf dem Avers bei Imhoof-Blumer Griech. Münzen, in den Abhandlungen der philos.-philol. Classe der K. Bayer. Akad. d. Wissensch., München 1890, n. 72. Zu den Darstellungen des Dionysos in vollständiger Stiergestalt hat man auch den bekannten βοῦς θούριος auf den Münzen von Thurium gerechnet (auch Welcker Griech. Götterlehre II, S. 599). Aber die gehörige Aufmerksamkeit auf die Nebentypen (vgl. namentlich das in Catal. of the Greek coins in the Brit. Mus., Italy, p. 293, 70 beschriebene Exemplar) zeigt deutlich, daß es sich um den Flußgott Krathis handelt. Vgl. auch Head Hist. num. p. 72. Als vollständiger Stier oder als Stier mit menschlichem Gesichte wurde er nach Plutarch de Iside et Osir. 35 zu urtheilen noch in späterer Zeit von den Hellenen gebildet; denn wenn es hier heißt *ταυρόμορφα Διονύσου ποιοῦσι ἀγάλματα πολλοὶ τῶν Ἑλλήνων*, so läßt sich das erste Wort unmöglich als nur „stierhörnige“ fassen, wie Thraemer a. a. O. S. 1151 will, und schon Welcker A. Denkm. V, S. 37 und Griech. Götterlehre II, S. 598 annahm, dem R. Schneider im Jahrb. a. a. O. S. 45, 6 sich anschließt.

2.

Ueber den Stier mit dem Menschengesichte auf den Münzen von Unteritalien und Sicilien hat in neuerer Zeit besonders ausführlich gesprochen Streber in den Abhandlungen der philos.-philol. Classe der K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften Bd. II, S. 453 fg., und später kürzer H. Nissen „Das Templum“, 1869, S. 132 fg., A. W. Curtius a. a. O. S. 23 fg. und Andere; vgl. Thraemer a. a. O. S. 1150. Es steht fest, daß die meisten Darstellungen dieser Art sich auf Flußgottheiten beziehen, namentlich die auf den Münzen Unteritaliens. So urtheilte schon O. Jahn in der Arch. Ztg. 1862, S. 313 fg. und nicht anders Stephani a. a. O. S. 115. Dennoch hat man noch in neuester Zeit betreffs der Darstellungen auf Münzen Campaniens, namentlich der Stadt Neapolis, an den Bachus Hebon gedacht, vgl. Head Hist. num. p. 33[1]). Selbst Stephani, der übrigens die in Rede stehende Bildung dem Dionysos nur als Wassergott zustehend betrachtet, ist a. a. O. S. 118 geneigt den Averstypus einer Münze von Katane auf diesen Gott zu beziehen. Die Münze ist die in der ersten Ausgabe der Denkm. d. a. Kunst II, 33, 380 nach Streber a. a. O. wiederholte. Der Typus wurde schon von Anderen auf den Stierdionysos bezogen,

1) Die von Head gegebene Deutung bezieht sich zunächst auf die von ihm abbildlich mitgetheilten Darstellungen des schreitenden Stiers mit Menschengesicht. Aber sollte dieser Stier eine andere Beziehung haben wie der schwimmende (Catal. of the Gr. coins in the Brit. Mus., Italy, p. 95, 104, 109, 112, 398), der einmal nicht bloß schwimmend, sondern auch Wasser speiend vorkommt (Arch. Ztg. 1862, Taf. CLXVIII, n. 7) und ohne Zweifel als Flußgott zu betrachten ist? Der Stern, welchen der im Catal. p. 109 abgebildete auf den angegebenen Wogen schwimmende Stier am Körper trägt, findet sich auch über dem p. 119 des Catal. abbildlich mitgetheilten schreitenden Stier. Daß bei Hebon Stierbildung nicht nachweisbar ist, hat Jahn in der Arch. Ztg. 1862, S. 326, A. 47 bemerkt. Vgl. über denselben auch Welcker Griech. Götterl. II, S. 66, A. 135.

von Eckhel, von Streber, zuletzt noch von Curtius a. a. O. S. 27. Eine ganz ähnliche Münze beschreibt Percy Gardner Cat. of the Greek coins in the Brit. Museum, Italy, p. 42, n. 4, der p. 41 fg. auch Abbildungen von entsprechenden Münztypen derselben Stadt giebt, vgl. auch Head Hist. num. p. 114. Ueber dem Stier gewahrt man den knieenden Silen, unterhalb des Stieres nach Gardner eine pistrix. Andere Nebentypen bestehen in dem Zweig einer Flußpflanze, einem Flußfisch, einem Wasservogel. Der Silen bezieht sich nicht auf einen Stierdionysos, sondern geht nur das Wasser an. Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß es sich um den Flußgott Amenanos handelt, wenn auch Head diese Beziehung nur als der auf den taüriform Dionysos vielleicht vorzuziehende betrachtet.

Ein anderes Bildwerk, hinsichtlich dessen es wahrscheinlich ist, daß auf ihm ein Stier mit Menschengesicht dargestellt sei, welcher sich auf den Wassergott Dionysos beziehe, ist das Gemälde auf der aus Nola stammenden Vase, welche aus der Sammlung Blacas in das Britische Museum übergegangen ist. Sie ist in Musée Blacas pl. 32 abgebildet und von Ch. Newton in den Guide to the second vase room P. I, p. 8, n. 46 so beschrieben: A female figure holding a hydria and sitting on a bull with human face, which approaches a large marble laver; an Androgynous winged figure is crowning the female figure; on the left, another female figure, with a mirror and an oinochoè; in the upper right-hand cornes, a veiled female figure looking through a window. Leider hat Stephani nicht gesagt, welche Umstände ihm die Beziehung des Stieres auf Dionysos wahrscheinlich machten. Newton läßt dahingestellt sein, ob man den Dionysos oder einen Flußgott zu erkennen habe. Es kann schwerlich zur Erklärung beitragen, daß der Stier mit Menschengesicht auch auf Nolanischen Münzen vorkommt. Auch die Beziehung der ganzen Darstellung ist schwer zu ergründen. Daß ein gewöhnlicher nicht sagenberühmter Flußgott gemeint sei, ist nicht wohl glaublich. Unter den Flußgottheiten würde nur Acheloos passen. Der Platz der Handlung ist der Vorplatz eines Palastes, welcher durch das Fenster mit dem herausschauenden Weibe angedeutet wird. Es scheint sich um eine Liebesgeschichte zu handeln. Liebschaften hatte Acheloos mehrere.

Ein sicheres Beispiel des Dionysos als Stier mit Menschengesicht erkennt Stephani S. 115 fg. auf einem auch von Streber a. a. O. S. 533 fg. auf Dionysos als Herrn der feuchten Natur bezogenen Carneol der Florentiner Sammlung, der mehrfach, auch in unsern Denkm. d. a. K. II, 45, 578, abgebildet ist, s. Stephani a. a. O., A. 8. „Man sieht einen Stier mit menschlichem Antlitz in wilder Wuth durch die Fluthen galoppiren. Eine Maenade mit flatterndem Gewand sitzt auf seinem Rücken und sucht ihn mit der Spitze ihres Thyrsos zu noch größerer Hast aufzustacheln". Stephani glaubt diese Darstellung auf den Argivischen Cult des Dionysos zurückführen zu müssen. Es ist mir aber geradezu unglaublich, daß die Mänade den Dionysos so behandeln solle, während es durchaus nicht unglaublich ist, daß sie einen Flußdämon so behandeln könne. Diese Dämonen können aber ebensowohl als zum Bacchischen Thiasos gehörend betrachtet werden wie Silen und die Nymphen. Man vergleiche auch den von einer Mänade zu wilder Eile angetriebenen Kentauren in den Denkm. d. a. K. II, 46, 594.

Dagegen könnte man recht wohl in Betreff des Vordertheils eines Stiers mit Menschenantlitz auf Münzen von Kyzikos an Dionysos denken, welche Darstellung Head Hist. num. p. 452 erwähnt, indem er sie mit der auf Münzen von Gela p. 121, Fig. 75 vergleicht. Warum auf den Münzen von Kyzikos ein Flußgott dargestellt wurde, ist schwer einzusehen. Dagegen paßt Dionysos auf diese Münzen vortrefflich, s. oben S. 368. Wenn man sich aber daran erinnert, daß auf denselben Münzen manche rein Attische Typen vorkommen, so wird man es nicht für unmöglich halten, daß der bei den Athenern so hoch verehrte Flußgott Kephissos oder auch der dort gleichfalls einen Cultus habende Acheloos gemeint sein könne.

3.

Stephani meint, daß Dionysos auch als Mensch mit Stierkopf gebildet sei und führt als entscheidend für diese Ansicht zwei nur durch Beschreibung bekannte Bildwerke an S. 119 fg.: 1) eine früher im Palazzo Grimani befindliche, jetzt verschollene Marmorbasis, welche von Fr. Thiersch Reisen in Italien S. 257 verzeichnet ist. Man gewahrte an der einen Nebenseite, umgeben von vier Frauen, ein Kind mit Stierhaupt. Thiersch bezeichnete es als Minotauros. Dagegen bemerkt Stephani, daß die Geburt und Pflege des Minotauros von der Sage nirgends betont werde. Als n. 2 erwähnt er das Gemälde im Inneren einer Kylix, welche sich früher im Besitze des Duc de Luynes befand, jetzt in der Nationalbibliothek zu Paris aufbewahrt wird. Das Gemälde ist beschrieben von E. Braun im Bullett. arch. 1847, p. 121, vgl. Gerhard's Arch. Anzeiger 1847, S. 9*, von Panofka ebenda S. 22*,

n. 15, nach welchem die Pasiphae „mit Strahlenkrone geschmückt“ ist, und nach J. de Witte in der Arch. Zeitung 1850, S. 213, n. 9. Hier heißt es über das Innenbild: „Pasiphaë sitzend, mit dem kleinen stierköpfigen Minotaur auf ihrem Schoß; sie ist myrthenbekränzt und langbekleidet und drückt in Gesicht und Bewegung ihr Entsetzen über den Neugeborenen aus. Aufgehängt ist eine Cista; zu Pasiphae's Füßen ein Schwan“. Später ist das Innenbild abbildlich mitgetheilt und ausführlich besprochen von Fr. Lenormant in der Gazette archéol. cinq. année 1879, pl. 3 als naissance de Zagreus, wo auch die Außenbilder der Schale mitgetheilt sind auf pl. 4 und 5 p. 18 fg.[1]). Er folgt also der Deutung von Stephani. Dieser findet es unbegreiflich, daß in diesem Bilde allgemein die Geburt des Minotauros vorausgesetzt sei, nicht die des Dionysos; „denn nicht nur ist dem kleinen Gott eine Gans oder ein Schwan beigesellt, sondern es sind auch die in den Bildern der Außenseite auftretenden Personen sämmtlich vollkommen deutlich bezeichnete Satyrn und Maenaden, welche Thyrsos-Stäbe und Glieder eines Menschen in den Händen halten, den sie in wilder Raserei zerrissen haben“. Auch Rob. Schneider äußert im Jahrb. a. a. O. S. 45 in Bezug auf das Innenbild der Kylix: „man gab ihm (dem Dionysos) vielleicht auch die Form des Minotauros, auf dem Menschenleib das Stierhaupt“. Es ist allerdings aus mehreren Gründen wahrscheinlich, daß Dionysos Zagreus, nicht der Minotauros, gemeint sei. Das wesentlichste Bedenken gegen jenen erregt der Stierkopf. Doch glaubt Stephani diesen bei Dionysos auch durch Schriftstellen belegen zu können. Er bemerkt, daß von Dionysos bei Tzetzes z. Lykophr. 1237 gesagt werde: *ταυροκέφαλος φαντάζεται καὶ ζωγραφεῖται καὶ ἐν Εὐριπίδῃ· καὶ σῷ κέρατα κρατὶ προσπεφυκέναι*, und weiter: *ταυρόκρανος δὲ ζωγραφεῖται καὶ φαντάζεται ἢ κερασφόρος*. Aber die Worte des Euripides sind ohne Zweifel von menschlicher Gestalt mit Stierhörnern zu verstehen und an der zweiten Stelle soll das *ἢ* gewiß

1) Außer den obigen beiden Darstellungen giebt es noch eine dritte, welche auf den Minotauros als Kind bezogen ist. Dieselbe befindet sich auf einem Etruskischen Relief von einer Todtenkiste, über welches schon O. Jahn Arch. Beitr. S. 240 nach der Sammlung von Zeichnungen im Berliner Museum Mittheilung gemacht hat. Stephani meint aber S. 120, A. 4, man könne sich über das Relief gar keine Meinung bilden, so lange nicht einmal gewiß sei, ob das Kind einen Stierkopf habe oder nicht. Das ist sehr verwunderlich, da Jahn denselben ausdrücklich bezeugt. Auch Gerhard im Arch. Anz. 1847, S. 9* zweifelt nicht an dem Stierkopfe und bemerkt, daß schon Inghirami das Kind auf Minotauros gedeutet habe.

nicht so zu fassen sein als sei κερασφόρος von ταυρόκρανος verschieden. Vgl. auch Tzetzes zu Lykophr. 209: Ταύρῳ· τῷ Διονύσῳ, ὅτι κερατοφόρον αὐτὸν γράφουσιν, ὡς καὶ Εὐριπίδης καὶ σῷ κέρατα u. s. w. Die Stellen des Nonnos Dion. VII, 321 u. XVIII, 95, in denen Dionysos βούκραιρος genannt wird, will Stephani nicht auch veranschlagen, obgleich „man meinen sollte, daß Nonnos von einem vollständigen Stierkopf spreche", weil dieser Dichter bei der Wahl seiner Ausdrücke mit so wenig Sorgfalt zu Werke gegangen sei, daß man nichts daraus schließen könne (was doch gewiß zu viel gesagt ist). Das Wort βούκραιρος ist ohne Zweifel von Stierhörnern zu verstehen, vgl. Nonn. Dion. XXVII, 24 ἰσόκραιρος. In dem Hymn. Orph. XLV (44) Herm. wird Dionysos als ταυρομέτωπος bezeichnet. Damit ist gewiß nicht gemeint, daß der Gott einen Stierkopf habe, sondern nur, daß er mit Stierhörnern an der Stirn versehen sei, und wesentlich dasselbe bedeutet auch ταυρόκρανος. Inzwischen steht es doch fest, daß Zagreus mit Hörnern am Kopfe gedacht wurde, vgl. Orph. hymn. XXX, 3, Nonn. Dion. VI, 165, 209. Außerdem heißt er ταῦρος Clemens Alexandr. Protrept. II, p. 14 Potter, vgl. auch Lycophr. Al. 209 und Nonn. Dion. V, 564, und ταυρόμορφος Clem. Al. Prot. II, p. 14; vgl. auch Arnobius adv. gentes V, 21.

4.

Außer den Hörnern erscheinen als einziger thierischer Bestandtheil am menschlich gebildeten Kopfe des Dionysos die Ohren.

Diese finden sich nicht bloß bei dem bärtigen Dionysos, sondern auch bei dem unbärtigen.

Bärtige Köpfe a) in Hermen: Ammon und Dionysos im Berliner Mus. (Conze Verzeichn. der ant. Skulpt. n. 11), abgebildet in Mon. inedit. inst. arch. IV, 49 und Ann. 1848, tav. J, jetzt auch in der Beschr. der ant. Skulpt. des Kgl.. Mus. zu Berlin S. 9 zu n. 11. Archaistische Herme im Lateranens. Mus. (vgl. Benndorf u. Schöne S. 402, n. 599). b) auf Etruskischen Bronzeschildern wie dem in den Denkm. a. Kunst I, 60, 303, in Betreff deren O. Jahn Ber. d. K. Sächs. Ges. d. Wissenschaften 1854 S. 49 an eine Satyrmaske denkt, während Stephani a. a. O. S. 114 fg. gewiß wahrscheinlicher eine Dionysosmaske annimmt, sowie an einem Bronzekopf bei E. v. Sacken die ant. Bronzen des K. K. Münz- und Ant.-Cab. in Wien Taf. XXVI, n. 6, in Betreff dessen Thraemer a. a. O. die Beziehung auf Dionysos abweist. Ein ähnlicher Kopf auf einer Münze stellt Acheloos dar (Arch. Ztg. 1862, T. CLXVIII, n. 10). c) in Terracotten wie die bei Panofka Terracotten des Berl. Mus. Taf. 47 und im Bull. arch. Napol. T. III, t. 5, vgl. Stephani a. a. O. d) auf geschnittenen Steinen: Raspe Cat. n. 4179, Toelken Erkl. Verz. III, 3, 927 = Denkm. d. a. K. II, 33, 379. Diese Köpfe sind von Raspe und Toelken für die eines Dionysos gehalten. Winckelmann bezieht jedoch den Berliner in der Descr. d. pierr. grav. de Stosch. p. 327 zu Cl. III, n. 75 auf den Minotauros und Stephani bemerkt gegen die Deutung auf Dionysos a. a. O., S. 114, daß man wenigstens mit gleichem Rechte auch an einen Flußgott denken könnte. Das ist allerdings richtig. Auch H. Blümner erklärt sich gegen einen Dionysos zu Lessing's Laokoon S. 121. Er ist wegen des Gesichtsausdruckes und des struppigen Bartes eher geneigt ein „satyrhaftes Wesen“ anzuerkennen, was minder wahrscheinlich ist. Desgleichen lehnt Thraemer a. a. O. S. 1150 die Beziehung auf Dionysos ab, weil der Kopf rohen Gesichtsausdruck und Stierohren zeige, die seines Wissens auf Doppelköpfe des Dionysos und Ammon beschränkt seien, von welchen beiden Gründen der erste unzulänglich, der andere irrig ist. Die Möglichkeit daß es sich um einen Dionysos handele, wird ebenso wenig in Abrede gestellt werden können wie die, daß ein Flußgott gemeint sei. — Wir erwähnen schließlich hier eine nur etwas bärtige Bronzebüste mit eigenthümlichem wilden Gesichtsausdruck zu Neapel (Bronzi d' Ercolano T. I, t. V) mit Stierhörnern und Stierohren. Sie wird von Welcker A. Denkm. V, S. 38 fg. ohne Bedenken auf Dionysos bezogen. Nach R. Schneider, Jahrb. a. a. O. S. 46, ist sie unter allen bekannten Bildern des Dionysos dasjenige, welches die Charakteristik desselben nach dem Thierischen hin am weitesten durchführt. „Der Kopf, welchem das mystische Attribut der um Rücken und Schultern sich ringelnden, von der erhobenen Rechten gefaßten Schlange noch phantastischeres Aussehen verleiht, ist nach rechts geneigt, heftig zurückgeworfen und richtet den Blick in die Höhe. Außer den aus dem struppigen Haupthaar hervorstehenden Hörnern und den schräg abstehenden Thierohren erinnert der Hals noch weit entschiedener als an der Maske aus Gizeh (s. u. S. 382 fg.) an die Wamme des Stiers; des ungeachtet setzt sich ein menschliches Bruchstück daran. Haar wächst auf der Stirn über der dicken Nasenwurzel, als kurzer Backenbart unter den Ohren, auf der Brust und um den Brustwarzen“. Stephani äußert im Compte rend. p. 1863, p. 103, minder bestimmt, man werde die Büste in Folge der als Attribut hinzugefügten Schlange vielleicht auf den jugendlichen Dionysos beziehen können [1]).

1) Daß gerade die Schlange für diesen beweiskräftig sein soll, erscheint be-

Unbärtige Köpfe. a) Doppelherme des Ammon und des jugendlichen Stier-Bacchus im Palazzo Giustiniani Orsato Recanati sulle Zattere in Venedig, 19 cm hoch („die Hörner des Dionysos liegen in dem aufstehenden mit der corona tortilis geschmückten Haare und sind gleich den Thierohren abgestoßen“, wie R. Schneider „Ueber eine Bacchische Maske aus Cilli“ in den Mitteilungen der K. K. Central-Commission zur Erhaltung und Erforschung der Kunst- und historischen Denkmäler. Jahrg. 1885, S. 86, A. 2 bemerkt). Doppelbüste beider Gottheiten früher im Besitz des Ritters Azara, jetzt unbekannten Aufbewahrungsortes, abgebildet im Mus. Pio-Clem. Vol. V, tav. A, n. 3. Desgleichen in Madrid, s. Overbeck Griech. Kunstmythol. I, S. 287 fg. n. 37. Drei Doppelhermenköpfe im Berliner Mus. (Conze Verzeichn. d. ant. Skulpt. n. 13. 14. 15). Der eine bärtige Kopf stellt ohne Zweifel den Ammon dar, der andere unbärtige mit thierischen Ohren und kurzen Stierhörnern nach den Meisten Dionysos, nach Einigen den Triton. Diese letztere Deutung wurde von K. Bötticher aufgestellt im Nachtrag zum Verz. der Bildhauerwerke in Berlin 1867 n. 985 fg. bes. 987. Overbeck, der im Atlas zur Kunstmyth. III, 12 Abbildung von einem Exemplare gegeben hat, bemerkt im Texte a. a. O. S. 287, wenngleich für diese neue Deutung auch keine zwingende Nothwendigkeit vorzuliegen scheine, so lasse sich nicht verkennen, daß Manches für dieselbe spreche. Auch Conze läßt unbestimmt, ob Dionysos oder Triton gemeint sei. Al. Thiele führt in dem Verz. der Sammlung Bergau mit vertieft geschnittenen Steinen die „Doppelherme des unbärtigen jugendlichen Ammon und des unbärtigen stiergehörnten Triton an, von welcher er auf Tafel I, n. 1 eine Abbildung giebt. Vermuthlich rührt die Benennung „Triton“ von den drei eben erwähn-

denklich, wenn Thraemer a. a. O. S. 1111 mit Recht behauptet, daß die Schlange neben der Gestalt des Dionysos keine Rolle spiele. Aber diese Behauptung ist irrig, wenn es auch wahr ist, daß die Schlange als Attribut des Gottes nur selten vorkommt. Als solches erscheint sie auf Vasenbildern (vgl. Gerhard Auserl. Vasenb. I, 63 = Denkm. d. a. K. II, 37, 433, und Fröhner Les musées de France pl. 6, welches in der zweiten Ausgabe der Denkm. II, 433 wiederholt ist), denn daß es sich hier um eine Andeutung der Verwandlung des Dionysos handele (Thraemer S. 1095 nach Robert), ist gewiß irrig. Auf einem Berliner geschnittenen Steine richtet sich nach Toelken Erkl. Verz. Kl. III, 3, 960 neben dem Bacchus am Boden eine Schlange auf. Die Marmorstatuette des Dionysos mit der Stierhaut bei Welcker A. Denkm. V, Taf. II hat eine Schlange neben sich, die sich um einen Baumstamm windet. Ich zweifle nicht daran, daß die Herculanensische Bronze sich auf Dionysos bezieht; an einen Sabazios wird schwerlich zu denken sein.

ten Doppelhermenköpfen her. Für die Beziehung der Berliner Köpfe auf Dionysos spricht sich aus einleuchtenden Gründen auch R. Schneider Jahrb. S. 47 aus. Der beste der Köpfe n. 14 ist nach Kekulé Beschr. S. 10 „von edlem Typus pathetisch erregt aufwärts blickend". Auch die Gemme Bergau stellt nach der Abbildung zu urtheilen gewiß nicht den Triton sondern den Dionysos dar. — Desgleichen in der Galler. geogr. des Vatican, vgl. Gerhard Beschr. d. Stadt Rom Th. II, 2, S. 281, n. 33, Stephani Compte rend. pour 1862, p. 77 fg., Overbeck a. a. O., S. 289 fg., ungenügende Abbildung bei Pistolesi Il Vaticano descr. ed illustr. Vol. VI, t. 103. Während Gerhard und Stephani an dem Dionysos nicht zweifeln, meint Overbeck, daß die Doppelbüste ganz aus diesem Kreise zu entfernen sei, gewiß mit Unrecht. Der stiergehörnte Kopf ist, wie R. Schneider Jahrb. a. a. O. S. 47 bemerkt, der auch an der Hiehergehörigkeit der Doppelherme nicht zweifelt, sehr breit, mit stark hervortretenden Backenknochen, von finsterem Ausdrucke; seine Ohren stehen aufrecht, seine Hörner sind im weiten Abstande von einander im struppigen Haare angebracht, nach vorne gerichtet und etwas gewunden; die Stirnleiste zwischen denselben scheint angedeutet zu sein. b) Bronzekopf: „Kopf des sehr jugendlichen gehörnten Dionysos mit Thierohren und mit einem Diadem geschmückt, oben ein Henkel", (R. Gaedechens die Antiken des Fürstl. Waldeck'schen Museums zu Arolsen n. 113. c) Antefix aus Terracotta aus Tarent: Journal of Hellenic studies IV, pl. 32. d) Geschnittener Stein und Paste: Catal. du mus. Fol, Antiq. P. II. Genève 1875, p. 156 fg., n. 1957 u. 1960.

5.

Viel häufiger wird Dionysos nur mit Hörnern versehen auf den Bildwerken gefunden, wenn auch lange nicht so oft als man nach den Schriftstellern erwarten sollte, und zwar namentlich der unbärtige und jugendliche, aber auch der bärtige.

Dieser letztere findet sich in der Doppelherme des Mus. Chiaramonti des Vaticans, welche bei Nibby Mus. Chiaram. Vol. III, t. VIII nicht eben getreu abgebildet ist und als „Zagreo e Dionysio" gefaßt wird.

Man findet den bärtigen gehörnten Dionysos ferner in Doppelmasken auf Gemmen. So auf einer Paste und einem Iaspis zu Göttingen, vgl. G. Hubo Originalwerke der arch. Abt. d. arch.-numism. Instituts der Georg-Augusts-Universität n. 1528 u. 396

und Bernhard Müller Dreizehn Gemmen der Göttinger Universitätssamml., Abbild. n. 2 u. 1. Von Al. Thiele Die Samml. Bergau S. 11, n. 206 wird ein „Doppelkopf des Silen und des bärtigen gehörnten Bacchus“ angeführt; doch nimmt sich der letztere Kopf in der Abbildung auf Taf. III eher als der des Pan aus.

Auch Münztypen gehören hierher. Freilich hat man einige früher mit Unrecht in Anschlag gebracht. Wenn Welcker A. Denkm. V, S. 39, A. 18 schrieb: „der bärtige Dionysos soll gehörnt nur auf Münzen von Naxos vorkommen“, so irrte er zwiefach. Bisher ist keine derartige Münze von Naxos bekannt geworden. S. auch Stephani im Compte rend. p. 1863, p. 113. A. W. Curtius nahm an dem bärtigen gehörnten Dionysos einer Boeotischen Münze, die nach Pellerin Rec. T. I, pl. 24, 8 in den Denkm. d. a. K. II, 33, 378 abgebildet ist, keinen Anstoß. Aber schon Stephani bemerkte a. a. O., es bleibe sehr ungewiß, in wie weit jener Abbildung Pellerin's Glauben beizumessen sei. Thraemer vermuthet a. a. O. S. 1150 mit größter Wahrscheinlichkeit, daß man das Horn in der Abbildung Pellerins nur für ein verkanntes (weil schlecht erhaltenes) Epheublatt (resp. Ranke) halten kann. Ohne Zweifel gehört diese Münze nicht hierher. Erst in neuester Zeit ist der bärtige gehörnte Dionysos mit Sicherheit auf Münzen nachgewiesen worden von Imhoof-Blumer „Griech. Münzen“ in den Abhandl. der K. Bayer. Akad. der Wissensch., München 1890, der S. 628 fg. sein Vorkommen auf Münzen von Skepsis dargethan und solche auf Taf. VIII, n. 6 fg. abbildlich mitgetheilt hat.

Ungemein viel größer ist die Zahl der Darstellungen des gehörnten unbärtigen Dionysos selbst nach Abzug der fälschlich oder unsicher hierhergezogenen Beispiele. Ueber alle ihm bekannten Fälle, deren Zahl aber von uns bedeutend vermehrt werden wird, hat Stephani a. a. O. p. 111 fg. gesprochen. Hier sind auch die verdächtigen oder unsicheren Beispiele als solche bezeichnet, doch hat auch er manche mit Unrecht hierhergezogen. So — um hier nur ein sicheres anzuführen — p. 111, A. 1 die ithyphallische Herme auf dem Vasenbilde bei Gerhard Hermenbilder Taf. V, n. 2 = Ges. Abhandl. LXXVII, 2, in welcher Gattung der Kunstübung überall kein stiergehörnter Dionysos nachzuweisen ist (vgl. auch Thraemer S. 1151). Die betreffende Herme stellt den Hermes dar, wie ich schon vorlängst einsah und nachher auch bei Thraemer a. a. O. S. 1122 u. 1151 bemerkt fand. Ueber einige andere vermuthlich auch nicht hierhergehörende Bildwerke wird besser im Folgenden gehandelt werden können.

Wir betrachten zunächst die Werke aus Marmor oder anderem Stein. Einen Kopf, „der vermuthlich einer Statue angehört hat und dessen Züge einen dem Apoxyomenos verwandten Typus tragen“, verzeichnen Benndorf und Schöne „Die ant. Bildw. des Lateran. Mus.“ S. 153, n. 236*. Eine „Doppelherme des bärtigen und des gehörnten unbärtigen Dionysos in der Galleria dei Candelabri des Vatican (n. 360)“ erwähnt mit dem Zusatze „das Gesicht des Letzteren ist breit, aber nicht satyresk; vom Haare hängen Lemnisken auf die Brust herab; das linke Horn ist ergänzt“ R. Schneider Jahrb. a. a. O. S. 48. Eine Doppelherme aus Marmor in Pompeji wird im Bull. dell' inst. arch. 1847 p. 138 = Arch. Ztg. 1847, S. 148 bezeichnet als „Bacchus Hebon und der jugendliche mit Stierhörnern“. Eine Marmorherme mit Stierhörnern zwischen den Haaren im Vatican ist nach Mus. Pio-Clement. T. VI, t. 6, n. 1 abgebildet in den Denkm. d. a. K. II, 33, 376 = 379 d. zweit. Ausg. Eine andere Abbildung in Hirt's Bilderbuch Taf. X, n. 3. Durch R. Schneider Jahrb. a. a. O. S. 48 erfahren wir: „der Mund ist etwas geöffnet, so daß die obere Reihe der Zähne sichtbar wird“. Schneider äußert ferner, in dem freundlich lächelnden Gesicht vermöge er nicht „fast satyrartige“ Züge zu erkennen und glaube, daß E. Q. Visconti a. a. O. p. 10 das Werk im Ganzen genommen getreuer charakterisiere, wenn er sage: il volto del dio di Nisa mantiene la sua bellezza e la sua gioventù, ma le sembianze di lui non han nulla di femminile ed una maschia venustà si diffonde sul suo volto e sulle sue forme, qual conviene a quella mescolanza di toro; della quale non solo ritiene le picciole corna, ma i capelli irti in mezzo alla fronte, e'l collo toroso e largo simigliante assai a quello d'Ercole: oltredicciò le labbra tumide alquanto, e rilevate più del dovere; acorescono anch' esse, senza altrarne gran fatto la beltà, quella rassomiglianza e il carattere di quel misto sì artificioso. Hirt erwähnt S. 79 nach Visconti eine ganz ähnliche Herme, an welcher die Hörner ursprünglich aus anderem Material eingesetzt gewesen zu sein scheinen. Er meint die in der Descr. de la Villa Albani aujourd'hui Torlonia, Rome 1869, p. 22, n. 119 (vgl. Beschr. der Stadt Rom III, 2, 460) als die d'un personnage inconnu bezeichnete Herme von „Griechischem Marmor“. Eine andere Wiederholung sah ich im Jahre 1846 zu Poggio Imperiale, über welche sich bei Dütschke Ant. Bildw. in Oberitalien II, S. 47 fg. keine Auskunft findet. Ich notirte mir „Büste des stiergehörnten Bacchus mit der corona tortilis, Haar vor der Stirn ganz gleich wie bei der in den Denkm. d. a. K. II, 33, 376, die Neigung des Hauptes nach links noch etwas tiefer, das Gesicht (mit tief ausgeführten Augensternen) noch finstrer, die Hörner abgestoßen. Eine vierte Wiederholung fand ich im J. 1873 im Varvakion zu Athen, vgl. Fr. Wieseler Arch. Bericht über seine Reise nach Griechenland S. 52, welche im Sybel'schen Catalog nicht erwähnt ist. Auch der oben an erster Stelle der Marmorwerke aufgeführte Kopf des Lateran. Mus. gehört sicherlich hierher. Eine anscheinend ähnliche Herme des Lateran. Mus. beschr. von Benndorf und Schöne S. 348, n. 489* zeigt über der Stirn aus dem Haar statt der Hörner Epheutrauben hervorstehend. Auch an der früher als Ariadne, jetzt mit Recht als Dionysos gefaßten Büste des Capitolin. Mus. (Denkm. d. a. K. II, 33, 375 = 377 d. zw. Ausg.) aus hellenistischer Zeit wird noch jetzt das Vorhandensein von Hörnern als sicher angenommen, obgleich schon C. Friedrichs an dem Berliner Gipsabgusse die Hörner vergebens suchte, vgl. Bausteine zur Gesch. d. Griech.-Röm. Plastik I, n. 628. In der Ausgabe dieses Werkes von Wolters wird n. 1490 für möglich, wenn auch nicht sicher gehalten, daß der Künstler unter dem Haare versteckt kleine Stierhörner angebracht habe. Eine genaue Untersuchung des Originals, die ich im Anfang des J. 1846 in Gemeinschaft mit einem Freunde unternahm, zeigte, daß von Hörnern keine Spur vorhanden ist. Die Büste eines jugendlichen Dionysos mit Hörnern, die über der Stirn hervorsprießen (nicht „am Diadem befestigt“ sind, wie Blümner Lessing's Laokoon S. 104 angiebt) aus grünem Basalt im Berliner Mus. (Conze Verz. d. ant. Skulpt. S. 28 n. 120), abgebildet in Beger's Thes. Brandenburgicus III, p. 240, bei Hirt Bilderbuch S. 23, Vign. 2 und danach in der zw. Ausg. der Denkm. d. a. K. IV, 33, 378, so wie eben in der Beschr. d. ant. Skulpt. des K. Mus. zu Berlin zu n. 120, ist nach Conze „vielleicht moderner Arbeit“, wie auch Puchstein bei R. Schneider Jahrb. S. 48 sie als „des modernen Ursprungs nicht ganz unverdächtig“ bezeichnet, und Kekulé als „vielleicht moderne Arbeit“. Eine Marmorbüste des jugendlichen gehörnten Dionysos befindet sich in der Marciana zu Venedig, vgl. Nachrichten von der K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1874, S. 587. Ein kleiner mit Epheu und Weintrauben bekränzter, mit Stierhörnern versehener Kopf zu Turin ist in denselben Nachrichten 1877, S. 671 verzeichnet, in dem Dütschke'schen Verzeichniß habe ich ihn aber nicht finden können.

Auch in Reliefs kommt der jugendliche Dionysos gehörnt vor, wenn auch nur sehr selten. So, wie es scheint, auf dem Felsrelief von Philippi bei Heuzey et Daumet Mission arch. de Macédoine pl.

III, 2, Rev. arch. nouv. sér., Vol. XI, 1865, p. 450, einer spätern Griechischen Arbeit, vgl. Mission p. 79 fg. = Rev. arch. p. 449 fg., Thraemer a. a. O. S. 1111 fg.; vielleicht auch der in Hautrelief ausgearbeitete Kopf des Lateranens. Mus. bei Benndorf u. Schöne n. 240.

Ferner bringt man hierher mehrere Werke aus Thon. Stephani erwähnt im Compte rend. p. 1863, p. 111 ein Thongefäß, welches die Form eines jugendlichen mit Stierhörnern versehenen Kopfes habe, und bezieht diesen auf Dionysos. Es handelt sich um das in der Arch. Ztg. 1851, Taf. 32 abgebildete Gefäß. E. Gerhard hielt den Kopf für entschieden weiblich und war besonders geneigt ihn auf Kora zu beziehen (Arch. Ztg. 1851, S. 369 fg.). Aber wenn auch das Gesicht sich ganz weiblich ausnimmt, so erscheint doch das Haar mehr männlich und der Kalathos nebst anderem Kopfschmuck würde wohl zu einem Dionysos passen. Die Hauptsache ist, daß bei Annahme eines Weibes keine wahrscheinliche Deutung möglich ist. Das Gefäß soll nach Gerhard aus Unteritalien stammen. Dann glaubt Stephani a. a. O., daß die an den Voluten der unteritalischen großen Amphoren so häufig wiederkehrenden kleinen Köpfe mit weißen Stierhörnern den Dionysos darstellen, vgl. Stephani Vasensammlung der K. Ermitage Th. I, n. 351, S. 166, n. 354, S. 173, n. 423, S. 223, n. 778, S. 306, n. 787, S. 316, Th. II, n. 1286, S. 116. Die Köpfe sind regelmäßig dem Beschauer zugewendet. Uns scheinen Medusenköpfe gemeint zu sein, die in jenen späteren Zeiten auch mit Hörnern dargestellt wurden. Endlich nimmt Stephani im Compte rend. a. a. O. an, daß ein an einem kleinen schwarzen Thongefäße der Ermitage in flachem Relief dargestellter jugendlicher mit Weinlaub bekränzter und mit Stierhörnern versehener Kopf den Dionysos darstelle. Aber in dem später erschienenen Verzeichn. der Vasensammlung Th. I, n. 505 heißt es „ein jugendlicher Kopf mit reichem Haar, spitzen Ohren und kleinen Hörnern (Satyr)". Sicher stehen folgende von Stephani meist nicht erwähnten Beispiele. Auf einer Lampe in den Lucernae fict. Mus. Passer. II, 37 ist die Büste des unbärtigen gehörnten Dionysos mit etwas in die Stirn herabfallendem Haare und finsterem Gesichtsausdruck dargestellt. Ein aus Kleinasien stammendes Terracottaköpfchen des jugendlichen gehörnten Dionysos im K. Antiquarium zu Berlin erwähnt nach Furtwängler R. Schneider a. a. O. S. 46, Anm. Eine Terracottenstatuette des gehörnten jugendlichen Dionysos mit Stierhörnern ist bei J. de Witte Rec. de terres cuites de Janzé pl. 23 abgebildet.

Mehr ist uns von hierhergehörenden Bronzen erhalten. Stephani erwähnt zwei Statuen Compte rend. p. 1863, p. 111 nebst

Anm. 4. „Die eine ist bei Clarac Mus. de sculpt. pl. 684, n. 1603“ oder vielmehr 1601, „die andere, an welcher sich die Hörner fast der Form von Ziegenhörnern nähern, in den Bronzi d' Ercolan. T. II, p. 203 und bei Piroli Ant. d' Hercul. T. V, pl. 27, Kayser Hercul. und Pomp. Th. V, 1, Taf. 101, Clarac Mus. de sc. pl. 770 A, n. 1919“, vielmehr 1909, „D abgebildet“. Aber die letztere betrachtet R. Schneider Jahrbuch a. a. O. S. 45 fg. A. 5 als entschieden nicht hierhergehörig; auch die andere wagt er nicht als sicher auf den gehörnten Dionysos bezüglich zu betrachten, „da in den beiden andern Abbildungen Bronzi di Ercolano Vol. II, t. XXXVI, Roux und Bouchet Herculanum et Pompêi T. V, Ser. 1, pl. XLVI die angeblichen Hörner wie zwei Haarlocken aussehen“. Dagegen kommt jedenfalls die Sitzfigur in der K. Ant.-Sammlung zu Wien aus der früheren Diadochenzeit in Betracht, welche E. v. Sacken in den arch.-epigraph. Mittheil. aus Oesterr. Jahrg. III, S. 128 fg., n. 2 auf den Stierdionysos bezieht, nachdem sie Furtwängler in den Mittheilungen des Deutschen arch. Instituts in Athen Bd. III, S. 294 Anm. für einen Diadochenkönig als Dionysos gehalten hatte. Die von Robert Schneider in dem Jahrb. a. a. O. S. 42 u. Taf. IV abbildlich mitgetheilte Figur wurde um 1877 im Peloponnes gefunden. „Sie zeigt uns den jugendlichen Gott, wie er sich auf ein Felsstück niedergelassen hat. Er ist nackt. Das um den linken Vorderarm gewickelte Gewand dient als weiche Unterlage auf dem rauhen Sitze und hängt über den nackten Oberschenkel herab. Der nach rechts gewendete Kopf, den gewohnten Bildungen des Dionysos wenig ähnlich, ist von breit und kräftig gebautem Knochengerüste und düsterem Ausdrucke. Eine tiefe von Schläfe zu Schläfe sich hinziehende Furche theilt die fleischige Stirne in zwei Hälften, deren untere ungefähr wie an den Köpfen des Zeus über der Nasenwurzel stark ausgebaucht ist. Die Nase ist klein, der Mund groß, die Lippen dick. Das Haar, aus dem rechts und links die kleinen Hörner des jungen Stiers hervorragen, schmiegt sich dem flachen, verhältnißmäßig kleinen Hinterhaupte an, umgiebt dasselbe mit den wirr durcheinander geworfenen Enden gleich einem Kranze, fließt rechts und links vom Gesichte in reicher Fülle über den starken Nacken herab und verleiht dem Kopfe, den es größer erscheinen läßt als er wirklich ist, ein fast majestätisches Ansehen. Blick und Wendung des Kopfes gelten offenbar der Figur, welche auf dem nach rechts sich fortsetzenden jetzt leeren Theile der Basis angebracht war. Am nächsten liegt es hier, an das Lieblingsthier des Dionysos, den Panther zu denken, der nach dem Becher oder nach der Traube aufschaut, Dinge die vielleicht mit mehr Wahrscheinlichkeit in der erhobenen Rechten des Gottes vorausgesetzt werden dürften als Thyrsos oder Zepter". Sehr interessant ist das auf einem Throne sitzende Cultusbild des Dionysos aus vergoldeter Bronze, mit den Ansätzen (punte) zweier Hörner auf der Stirne (Sogliano Le pitt. murali Campane n. 241, in Pompei e la regione sotterrata dal Vesuvio Napoli 1879, P. 2, p. 131. Außerdem führt R. Schneider S. 48 an ein „Brustbild aus Bronze gefunden bei Essek um 1870, im Besitze des Herrn Julius Herz, 24 cm hoch und 26 cm breit. Es gehört der derberen Charakteristik des Weingottes nach sichtlich einer späteren Kunstepoche an. Der freundlichlächelnde Kopf ist nach rechts geneigt. Wangen und Kinn sowie die Brust sind von fast weiblicher Fülle. Das in der Mitte gescheitelte und mit einer Corona tortilis geschmückte Haar fällt in aufgelösten Strähnen auf die Schulter und ist mit Trauben schwer behangen. Winzige Hörnchen wachsen aus beiden Stirnhöckern heraus, und über dieselben zieht sich eine schmale Binde hin, welche sich jederseits im Haare verbirgt. Auf der linken Schulter ist das quer über die Brust laufende, mit besonderem Fleiß ausgeführte Ziegenfell geknüpft. Die Bronze ist vortrefflich erhalten, mit schöner Patina überzogen und obwohl nachhadrianischer Zeit angehörig, von guter, freilich etwas trokkener Arbeit. Sie ist hohl und war als Zierrath in senkrechter Lage an irgend einem Geräthe befestigt". Ein halblebensgroßer Kopf von Bronze mit sehr kleinen Stierhörnchen wird in dem Jahrb. d. K. Deutschen arch. Inst. Bd. V, Arch. Anz. 1890, 3, S. 91 erwähnt und abbildlich mitgetheilt von Furtwängler, der bemerkt, daß der Kopf in Kleinasien gefunden sei und eine Arbeit späterer hellenistischer oder frührömischer Zeit zu sein scheine. Zwei schöne Köpfchen auf einem durch die Künstlerinschrift interessanten Bronzeplättchen erwähnt Overbeck Pompeji S. 430 der vierten Aufl. Schönes Köpfchen aus der Gegend von Corneto Bull. d. inst. arch. 1866, p. 232. Besonders interessant ist der von R. Schneider im Jahrb. a. a. O. S. 44 abbildlich mitgetheilte und S. 43 fg. besprochene Bronzehenkel eines Gefäßes aus Aegypten im K. Mus. zu Wien: „Auf dem massiv gegossenen und trefflich erhaltenen, 25,5 cm hohen Henkel, erhebt sich in hohem Relief als ein ursprünglich in dem weichen Stoffe gesondert modellirtes Stück eine 9 cm hohe Maske des gehörnten Dionysos. Der nach rechts gewendete Kopf, dessen Bedeutung das Weinblatt außer Zweifel setzt, entnimmt außer den beiden Hörnern, welche spitziger und größer als an der peloponnesischen Figur, auch morphologisch richtiger aus den Stirnhöckern hervorsprießen, dem Stiere noch die freilich nicht naturalistisch abstehenden, sondern mit der Spitze nach aufwärts gekehrten Ohren. Auch der Hals ahmt mit seiner schlaffen faltenreichen Haut entschieden die hängende Wamme des Stieres nach. In vollem Einklang mit der weitergehenden Aufnahme thierischer Formen sind auch die etwas finsteren Züge der Maske weit weniger edel als an dem Kopfe der Statuette. Im Gesichte überwiegen die unteren Theile, die Wangen sind voll, die Nase ist stumpf und fleischig. Die niedere Stirne ist zwar gleichfalls über Brauen und Nasenwurzel stark angeschwollen, giebt aber dem Kopf keineswegs das zeusartige Gepräge der peloponnesischen Figur. Das Haar ist spärlich und hinter Hörnern und Ohren unter Epheublättern verborgen [1]). „Masken des gehörnten Bacchus, wie es scheint“ am Schlusse der Henkel eines eimerförmigen Bronzegefäßes nach Friederichs Berlins ant. Bildw. II, S. 163, n. 679.

Von den hierher gehörenden Münzen ist sicher und belangreich die aus Bronze mit dem Brustbild des epheubekränzten unbärtigen Dionysos mit Stierhörnern an den Schläfen mit eigenthümlichem an die Marmore oben S. 374 fg. und die Lampendarstellung S. 380 erinnernden Gesichtsausdruck unter Seleukos I von Syrien geprägte, welche Percy Gardner The types of Gr. coins pl. XIV, n. 11 und Catal. of Gr. coins in the Brit. Mus., Seleucid. kings of Syria, pl. XXVIII, n. 1 herausgegeben hat und die zweite Ausg. d. Denkm. d. a. K. II, 33, 380 wiedergeben wird. Andere hierhergezogene Münztypen hat schon Stephani Compte rend. p. 1863, p. 112 fg. als nicht hierher gehörig oder unsicher bezeichnet. Anlangend die hier S. 113 erwähnten Bruttischen Münzen, so sind dieselben noch öfter besprochen oder abgebildet als er angiebt; zuerst von Eckhel Numi anecd. p. 41 u. t. III, 20, ferner von R. Stuart Poole Catal. of Gr. coins in the Brit. Mus., Italy, p. 321, welcher der betreffenden Figur in der Linken eine lange Fackel zuschreibt, von Friedländer und Sallet Münzkab. zu Berlin n. 548 = 752 d. 2. Aufl., welche angeben, daß die Figur in der Linken ein Scepter halte, von Garrucci, Mon. dell' Italia ant. t. CXXIV, n. 13 u. 14. Alle schreiben der Figur Hörner zu, Stephani bemerkt dagegen: „einige sehr wohl erhaltene Exemplare der kais. Eremitage lassen die vermeintlichen Hörner vielmehr als eine Zackenkrone erscheinen und so sind sie

1) Die obigen Beschreibungen R. Schneider's zeigen, daß die Angabe bei Friedrichs und Wolters a. a. O. n. 1730 irrig ist.

auch in den von Carelli gegebenen Abbildungen aufgefaßt“. Das Attribut in der Linken ist weder als Fackel noch als Scepter aufzufassen, sondern als Speer. Die Figur ist früher theils als Dionysos theils als Flußgott aufgefaßt. Wenn Stephani äußert, es erscheine ihm sehr zweifelhaft, ob überhaupt an Dionysos zu denken sei, so kann ich nur zustimmen; vermuthlich ist Pan gemeint. Außer diesem Münztypus bezieht A. W. Curtius a. a. O. S. 20 den auf einer Münze von Gela (Streber a. a. O. S. 474. 477 und Kupfertaf.) dargestellten gehörnten jugendlichen Kopf, den Streber für den Flußgott Gelas ausgebe, für den jugendlichen Stierdionysos, während er den „Stiermenschen auf der Aversseite“ für den Fluß Gelas hält. Aber das ist durchaus irrig, auch abgesehen davon, daß der Kopf gar nicht so aussieht, wie der eines Dionysos. Der unbärtige gehörnte Kopf kommt mehrfach auf der Vorderseite der Silber- und Kupfermünzen von Gela vor und ist als der Flußgott durch die Attribute und selbst durch Inschrift als Gelas bezeichnet. Der Typus auf der Rückseite der Kupfermünzen ist ausnahmsweise ein Stier mit menschlichem Gesicht, während sonst ein schreitender Stier vorkommt. Die Inschrift *ΓΕΛΑΣ* findet sich allerdings einige Male auf der Rückseite bei dem Stiere, aber dennoch ist dieser auch als der Flußgott Gelas zu betrachten, der also zwei Male, einmal als Mensch mit Stierhörnern, das andere Mal als vollständiger Stier dargestellt ist. Die Bildung als vollständiger Stier bezeugt Timäos in den schol. Pindar. Pyth. I, 135: *τὸν γὰρ ἐν τῇ πόλει δεικνύμενον (ταῦρον) μὴ εἶναι τοῦ Φαλάριδος, — ἀλλ' εἰκόνα Γέλα τοῦ ποταμοῦ.*

Von hierher gehörenden geschnittenen Steinen giebt es kein sicheres Beispiel. Vgl. Stephani Compt. rend. 1863, p. 113 fg. Wenn es hier p. 114, A. 1 heißt: „ein roh gearbeiteter Sard der Sammlung in Berlin (Toelken Verz. p. 186, n. 928) stellt vielleicht den jugendlichen Dionysos dar, allein die ihm gegebenen Hörner gleichen mehr den Ziegenhörnern als denen der Stiere“, so erkannte schon Winckelmann Descr. d. pierr. grav. Stosch Cl. II, n. 1487, p. 239 die Ziegenhörner und bezog deshalb die Darstellung auf eine tête d'un Faune. Toelken, der von der Art der Hörner nichts sagt, zweifelt nicht an einem „Kopf des Bacchus“. Er bemerkt indessen, daß der mit Epheu bekränzte Kopf einen strengen, fremdartigen Ausdruck habe und über der einen Schulter der Thyrsos, über der andern das Pedum erscheine. Dieses konnte allerdings auch dem Dionysos gegeben werden. Die Ziegenhörner sind aber unzweifelhaft. Stephani hat die oben S. 381 besprochene Bronzestatue aus Herculaneum, trotz seiner Wahrnehmung, „daß sich die Hörner fast der Form von Ziegenhörnern nähern" unbedenklich als Dionysos gefaßt. Eine prächtige bärtige Bronzemaske aus Macedonien mit Ziegenohren bei Froehner Collect. J. Gréau, Catal. des bronzes ant. p. 36, n. 167 wird von dem Herausgeber p. 37 auf Dionysos bezogen. Er bemerkt, daß die Ziegenohren ein détail peu commun sei. Ich kenne es bei keinem anderen sicheren Dionysoskopf. Freilich hat Head Hist. num. p. 457 einen auf p. 456, F. 282 abgebildeten epheubekränzten unbärtigen Kopf mit Ziegenohren auf den jugendlichen Dionysos bezogen, aber er denkt auch an eine Bacchante und von Percy Gardner Types of Gr. coins zu pl. X, 40, wo derselbe Typus abgebildet ist, wird er nur auf eine Maenade bezogen. Man hat an eine Satyra zu denken, vgl. Nachr. der Kgl. Ges. d. Wissensch. 1890, S. 388. Die in Rede stehende früher im Besitz von Gréau befindliche Maske hat manche Aehnlichkeit mit der früher Milanischen und der von Cilli, welche R. Schneider zusammen herausgegeben hat. Auch diese haben thierische Ohren und sind wegen des Gesichtsausdrucks nicht auf Dionysos, sondern zunächst auf den Silen zu beziehen [1]). — Indessen wird im Cat. du mus. Fol. Ant., P. II, n. 1935 eine Paste als mit zwei kleinen Stierhörnern versehen bezeichnet, mit dem Zusatze la figure est rieuse, und n. 1941 das Fragment eines Onyx, an welchem man sur les tempes deux petites cornes gewahre.

Wie Philostratos Imag. I, 15 in der Beschreibung eines Gemäldes mit der Darstellung des Dionysos und der Ariadne jenem als sein Kennzeichen Hörner ἐκ τῶν κροτάφων (gewiß des Stieres) beilegt, so sehen wir auf einem Wandgemälde mit demselben Gegenstande (Bullett. Napol. nuov. ser. T. II, p. 67, Helbig Wandgem. d. verschütt. Städte v. 1239) den jugendlichen gehörnten Gott dargestellt. Ein anderes Pompejanisches Wandgemälde, das ihn als Cultusbild zeigt, ist schon oben S. 382 erwähnt. Auch Albricus Phil. de deor. imag. CXIX beschreibt ein Gemälde des Dionysos mit gehörntem Kopfe.

Auch ein aus Rom stammendes Mosaikbild ist bekannt durch die Abbildung bei Bartoli Le pitture ant. delle grotte di Roma tav. XX.

Darstellungen des Dionysos bloß mit Stierhörnern werden bei den Schriftstellern etwa seit der Mitte des fünften Jahrhunderts v. Chr. erwähnt. In Bildwerken sind sie vor der Zeit Alexanders des

1) Mit Unrecht werden diese beiden Masken bei Friedrichs-Wolters n. 2032 u. 2033 auf Dionysos bezogen.

Großen nicht nachzuweisen. Sie scheinen im Peloponnesos aufgekommen und namentlich durch Lysippos und dessen Schule ausgebildet zu sein, vgl. R. Schneider Jahrb. a. a. O. S. 50 fg., auch oben S. 378 fg.

In der Zeit der Diadochen finden wir auch diese mit Stierhörnern dargestellt, ohne Zweifel um sie als neue Dionysen zu bezeichnen. So zuerst Seleukos I von Syrien, vgl. die Münze in den Denkm. d. a. K. I, 49, 220 m = Catal. of the Gr. coins in the Brit. Mus., Seleucid. kings, pl. I, n. 6, und die ebenda n. 11 u. 13, die erste auch bei Head Hist. num. p. 638, F. 336. Dann Demetrios Poliorketes auf der Münze D. a. K. I, 50 p. 221 b, Head H. num. p. 202, F. 144, dem geschnittenen Steine des Brit. Mus. (Murray Cat. of engrav. gems pl. I. n. 1526, vgl. p. 171, und in der Bronzestatuette D. d. a. K. I, 50, 221 a, wenn dieselbe ihn wirklich darstellen soll. Ein gewiß nicht mit Recht auf Alexander bezogener Hermenkopf aus Herculaneum, abgebildet bei Comparetti e de Petra La villa dei Pisoni tav. XX, 3, stellt jedenfalls das heroisirte Porträt eines Diadochenkönigs dar. Dazu kommt noch der Marmorkopf eines gleichfalls unbestimmbaren Diadochen, zuletzt besprochen von Helbig „Die öffentlichen Sammlungen klassischer Alterthümer in Rom“ I, S. 173 fg., n. 247.

Von besonderem Interesse ist die Tetradrachme Seleukos' I. Der König trägt einen Helm von Stierleder mit dem Ohr und dem Horn eines Stieres daran (also auch hier wie oben S. 373 fg. die Verbindung von Stierhörnern und Stierohren). Wie kam der Künstler dazu, ihn so darzustellen? Nicht bloß A. W. Curtius a. a. O. S. 30, sondern noch Head a. a. O. S. 638 ist der Meinung, daß es geschehen sei in Rücksicht auf die Kraftprobe, welche Seleukos einst bei einem Opfer Alexanders ablegte, als er einen wilden den Fesseln entsprungenen Stier ganz allein aufhielt und mit den Händen tödtete (Appian. Syr. 57). Allerdings giebt Appian ausdrücklich an, daß deshalb der Statue des Seleukos Hörner beigegeben seien. Aber wer will das glauben? Alexanders siegreicher Zug nach Indien hatte die Sage von Dionysos' Siegen ebendort in Schwang gebracht. Dionysos wurde Kriegsgott und Triumphator, ein Schützer und Vorbild sieghafter Herrscher. Wie Alexander hatte auch Seleukos in Indien gesiegt. Daß er den Stierdionysos als seinen Schutzgott betrachtete, zeigt die oben S. 383 aufgeführte Münze, deren Revers den Seleukos darstellt, wie er zu Roß sitzend einen Feind niedergestoßen hat. Nun wurde auch Seleukos selbst als neuer Dionysos dargestellt. Auch Herrscher, die nicht in Indien gesiegt hatten, erhielten von den

Künstlern die Dionysischen Stierhörner. War doch der Gott überall siegreich und Verleiher des Sieges.

6.

E. von Sacken glaubt „Die ant. Bronzen des K. K. Münz- u. Ant.-Cab.“ in Wien S. 60, daß auch das Taf. XXIX, F. 14 abgebildete archaische Bronzewerk, welches ein Menschenantlitz mit Stiernacken zeigt, außerdem aufrechtstehende Ohren, aber ungehörnt ist, den Stierdionysos angehe. Ich kann unmöglich beistimmen, sondern bin überzeugt, daß ein Silen mit *ὦτα μεγάλα ὄρθια* gemeint ist.

Besonders interessant ist eine Münze von Skepsis, beschrieben und herausgegeben von Imhoof-Blumer in den Griech. Münzen, Abhandl. d. K. Bayer. Akad. d. Wissensch. München 1890, S. 629, n. 235 und Taf. VIII, n. 9. Während sonst auf den Münzen dieser Stadt der Kopf des bärtigen Dionysos gehörnt erscheint, trifft man das thronende Cultbild des Gottes dort nicht gehörnt, aber von zwei Stieren umgeben. Die Hörner am Kopfe des Gottes sind doch wohl nur deshalb weggelassen, weil die Beigabe der beiden Stiere auf den Stierdionysos hinwies.

Schon vorlängst ist darauf aufmerksam gemacht, daß in einer Berliner Marmorstatuette (Conze Verz. n. 93) die symbolische Beziehung des Stiers zu Dionysos dadurch bezeichnet wird, daß dem Gott als Anzug eine Stierhaut gegeben wird, vgl. Welcker Ann. d. inst. arch. 1857 p. 146 fg. = A. Denkm. V, S. 36 fg., Mon. ined. VI, t. VI, 1. 2 = A. Denkm. a. a. O. Taf. II.

Weiter hat man auch einen mit Wein bekränzten Kinderkopf aus rothem Marmor im Berliner Museum, der hinten in einen kleinen Stierkopf ausläuft, hierhergezogen; vgl. Arch. Ztg. 1851, Taf. XXXII, Welcker A. D. a. a. O., S. 39, Gaz. archéol. 1879, p. 27, Conze Verz. d. ant. Skulpturen d. Berl. Mus. n. 134, Kekulé Beschr. ders. n. 134.

Die Veranschlagung von Bildern des Dionysos mit angedeuteten oder verhüllten Hörnern rührt von R. Schneider Jahrb. a. a. O. S. 49 fg. her. Er führt unter dieser Kategorie auf die oben S. 379 erwähnte Herme des Lateranens. Mus. bei Benndorf und Schöne n. 489*, die oben S. 379 besprochene Büste des Capitol. Mus. [1]), die

1) Schon A. W. Curtius bemerkte a. a. O. S. 20 gegen Welcker's Ansicht: „Mit demselben oder mit noch mehr Recht könnte man dann auch den gelagerten Dionysos im Louvre Bouillon Mus. III, 9 und den Dionysos Mon. dell' Inst. VI, 6 für den gehörnten Dionysos ausgeben“.

Herme des Dionysos Psilax im Berliner Mus.: „Die Buckel über der Stirne sollen zwar nach der Versicherung E. Brauns Kunstvorst. des gefl. Dionysos S. 3 nichts Anderes als die unter dem Tuche verborgenen Trauben des Epheukranzes sein, haben aber wie derselbe selbst zugesteht, fast „das Ansehen von Hörnern". Conze spricht in den ant. Skulpt. des Berl. Mus. n. 119 von Resten einer Bekränzung von Epheu. Auch anderweitig wird die Braun'sche Angabe nicht bestätigt. Endlich veranschlagt R. Schneider das oben S. 379 fg. erwähnte Reliefbrustbild an der Felswand von Philippi, in welchem es sich aber um ein eigentliches Verhüllen der Hörner nicht handelt. Warum überall das Verhüllen der Hörner?

Die Hörner sind nicht stets und durchaus nöthig, sie können auch durch Gesichtsausdruck und sonstwie ersetzt werden.

Schließlich noch die Bemerkung, daß die Darstellungen des gehörnten Dionysos in Betreff des Gesichtsausdruckes und auch der Formen mannigfach wechseln. Der Ausdruck ist ein aufgeregter und mehr noch ein finsterer, aber nicht selten auch der gewöhnliche, ja auch ein freundlich lächelnder wie an dem Bronzebrustbilde aus der Gegend von Essek (oben S. 382) und vielleicht auch an der Paste Fol (oben S. 385). Vgl. dazu Schriftstellen, wie namentlich Ovid. Fast. III, 789: Mite caput, pater, huc placataque cornua vertas. Beispiele eigenthümlicher Formen oben S. 374, 378, 381, 382 fg.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

November 1890.

(Fortsetzung.)

XV. Bericht der Naturforschenden Gesellschaft in Bamberg. Bamberg 1890.

Jahresbericht des Direktors des Kön. Geodätischen Instituts für April 1889 bis April 1890. Berlin 1890.

Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät in Erlangen. 22. Heft. 1890. München 1890.

Jahrbücher der K. K. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. Officielle Publication. Jahrg. 1888. Neue Folge XXV. Bd. Wien 1889.

Die Wahrheit. Entwurf zu einer transcendentalen Logik von Anton Ganser. Graz 1890.

Skizzen zu einem werthvollen Luftschiff von J. Fr. Schön le Jeune in Wien. (2 Exempl.).

Anzeiger der Akademie d. Wissensch. in Krakau. 1890. Oktober. Krakau 1890.
Ungarische Revue. IX. Heft. 1890. Nov. 10. Jahrg. Budapest 1890.
Myriopoda Regni Hungariae. Elabor. Dr. Eugenius Daday de Deées. Budapest 1889.
Adatok a bor-és mustelemzés módszeréhez irta Dr. Ulbricht Richárd. Budapest 1889.
Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. Band 15. Zürich 1890.
Nature. Vol. 43. Nr. 1096. 1100. (London 1890).
Proceedings of the London Mathematical Society (vol. XXI). Nos 388—390.
Collected mathematical papers of Arthur Cayley. Vol. III. Cambridge 1890.
Monthly notices of the R. Astronomical Society
a. Vol. L. N. 9. Supplementary number.
b. Appendix to Vol. L. London 1890.
Proceedings of the Cumbridge Philosophical Society. Vol. VII. Part. II. Cambridge 1890.
Proceedings ef the scientific meetings of the Zoological Society of London. Part. III. Mai and June 1890. October 1890.
Natural History of Victoria. Prodromus of the zoology of Victoria. Decade XX. by Fr. Mecoy. Melbourne & London 1890.
Académie Impériale de St.-Petersbourg. St.-Petersbourg 1890.
a. Bulletin Nouvelle série. I. (XXXIII). No. 4 et dernier.
b. Mémoires. Tome XXXVII. No. 11, 12, 13. Tome XXXVIII. No. 1.
Bidrag till kännedom of Finlands natur och folk. H. 48. Helsingfors 1889.
Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens förhandlingar. XXXI. 1888 — 1889. Helsingfors 1889.
Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique 60e année, 3e série, tome 20. N. 9—10. Bruxelles 1890.
Tijdschrift voor Nederlandsche Taal- en Letterkunde. 9. deel. Nieuwe Reeks, 1. deel. 4. Aflevering. Leiden 1890.
Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas. Vol. IX. No. 6. Coimbra 1889.
Note sur deux algues de la Méditerannée Fauchea et Zosterocarpus par M. Ed. Bornet. (Extrait de Bulletin de la Société botanique de France. Tome XXXVII, séanee du 28 mars 1890).
Acta mathematica 13: 1 ei. 2. Stockholm (Berlin, Paris) 1890.
Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademiens Månadsblad. 17 u. 18 Argången 1888 u. 1889. Stockholm 1886—90.
Bergens Museums Aarsberetning for 1889. Bergen 1890.
Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Milano, Napoli, Pisa 1889. 90.
a. Rendiconti. Serie II. Vol. XXII.
b. Memorie. Classe di lettere e scienze storiche e morali. Vol. XVII — VIII della serie III. Fasc. II. Vol. XVIII—IX della serie III. Fasc. II.
c. Atti della Fondazione scientifica Cagnola dalla sua istituzione in poi. Vol. 9. 1889. Milano 1890.
Memorie di matematica e di fisica della Società italiana delle scienze. Serie 3. Tomo VII. Napoli 1890.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXVII. 1890. Serie quarta. Rendiconti. Vol. VI. 2. semestre. fasc. 5, 6. Roma 1890.
Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane. 1890. N. 116. 118. Nebst Indice. Bogen 7 u. 9. Firenze 1890.
Biblioteca Nazionale Centrale Vittorio Emanuele di Roma. Bollettino delle opere moderne straniere. Vol. V. N. 2. Febbr. 1890. Roma 1890.
Smithsonian Institution:
a. Proceedings of the United States National Museum. Vol. 12. 1889. Washington 1890.
b. Bulletin of the U. St. National Museum N. 38. Washington 1890.
Bulletin of the American Geographical Society. Vol. XXII. N. 3. Sept. 1890. New York.
Johns Hopkins University Circulars. Vol. X. N. 83. Baltimore Nov. 1890.
Resultados del Observatorio national Argentino en Cordoba. Vol. XII. Observaciones del año 1879. Buenos Aires 1890.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Oct. de 1890. Entrega IV. Tomo XXX. Buenos Aires 1890.
The Journal of the College of science, Imp. University, Japan. Vol. III, part. IV. Tōkyō Japan 1890.

Nachträge.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Bericht Nr. 10 — 13 vom 31. Juli, 31. August, 30. Sept., 31. Okt. 1890.

Dezember 1890 und Januar 1891.

Sitzungsberichte d. K. Preuß. Akademie d. Wissensch. zu Berlin. XLIX, L und Register von 1899. Berlin.
Jacobi, C. G. J., Gesammelte Werke. Herausgeg. auf Veranlassung d. K. Preuß. Akad. d. Wissensch. Band 5. Herausgeg. v. K. Weierstraß. Berlin 1890.
K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig:
a. Berichte über die Verhandlungen. Mathematisch-physische Classe 1890. II. Leipzig 1890.
b. Abhandlungen der philolog.-histor. Classe. Bd. XII. Nr. 1. Causa Nicolai Winter v. Friedr. Zarncke. Leipzig 1890.
Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. 25. Jahrg. 3. Heft. Leipzig 1890.
Leopoldina. Heft XXVI. N. 21/22, 23/24 nebst Titel und Register zu Heft XXVI. Jahrg. 1890. Halle 1890.
Neues Lausitzisches Magazin. 66. Bd. 2. Heft. Görlitz 1890.
Mittheilungen aus dem naturwissenschaftlichen Verein für Neu-Vorpommern und Rügen in Greifswald. 22. Jahrg. 1890. Berlin 1891.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik begr. v. C. Ohrtmann. Band XX. Jahrg. 1888. Heft 1. (Bog. 1—32). Berlin 1890.
Kölliker, A.: Zur feineren Anatomie des centralen Nervensystems. (Separatabdruck aus: Zeitschrift für wissenschaftl. Zoologie. LI, 1. Leipzig 1890).
Jahrbücher d. Nassauischen Vereins f. Naturkunde. Jahrg. 43. Wiesbaden 1890.
Schriften der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig. Neue Folge. 7. Bd. 3. Heft. Danzig 1890.
Vorlesungen über Geometrie unter besond. Benutzung der Vorträge von Alfred Clebsch. Bearb. v. Dr. F. Lindemann. 2. Bd. 1. Theil. Leipzig 1891.
Catalog der Astronomischen Gesollschaft. 1. Abth. Catalog der Sterne bis zur neunten Größe zwischen 80° nördl. und 2° südlicher Declination für das Aequinoctium 1875. 3. Stück. Zone + 65° bis + 70°. Beob. a. d. Sternwarte in Christiania. Leipzig 1890.
Neue Annalen d. K. Sternwarte in Bogenhausen bei München. Auf Kosten der K. Bayer. Akademie d. Wissensch. herausgeg. von Hugo Seeliger. Bd. I. München 1890.
Acta mathematica. Hrsg. von G. Mittag-Leffler. 13, 3 u. 4. Stockholm, Berlin, Paris 1890.
Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Band IX. Heft 1.
Brachiopoden der alpinen Trias von A. Bittner. Abhandlungen der K. K. Geologischen Reichsanstalt. Band XIV. Wien 1899.
Verhandlungen der K. K. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Jahrg. 1890. XL. Band. III. u. IV. Quartal. Wien 1890.
Lotos. Jahrbuch für Naturwissenschaft. Neue Folge XI. Bd. (der ganzen Reihe 39. Bd.). Prag, Wien, Leipzig 1891.
Separatabdruck aus Tschermak's Mineralogischen und Petrologischen Mittheilungen. Herausgeg. v. F. Becke.
M. Hunter und H. Rosenbusch: Ueber Monchiquit . . . Wien (1890).
Mittheilungen d. historischen Vereines f. Steiermark. XXXVIII. Heft. Graz 1890.
Ungarische Revue. 1890 (X. Jahrg.) X. Heft Dez.
1891 (XI. Jahrg.) I. Heft. Jan. Budapest 1890 u. 91.
Értesitö ar Erdélyi Muzeum-Egylet Orvos-természettudományi szakosztályából. 1890. XV. Évfolyam.

a. I. Orvosi szak. II. III. Füzet.
b II. Természettudo mányi szak. III. Füzet.
c. III. Népszerü szak. II. Füzet. Kolosvárt 1890.

Das Datum auf den Philippinen. Von Jerolim Freiherrn v. B e n k o. Wien 1890. Seperatabdruck des 32. Capitels aus dem auf Befehl des k. u. k. Reichskriegsministeriums verfaßten Werke „Die Schiffsstation der Kuk. Kriegsvereine in Ostasien“.
Nature. Vol. 43. N. 1101—1109.
Memoirs and proceedings of the Manchester literary and philosophical Society. Fourth Series. Vol. III. XXXIII. Old. Manchester 1890.
Monthly notices of the R. Astronomical Society. Vol. LI. Nr. 1. 2. Nov. u. Dez. 1890. (London 1890).
Proceedings of the Royal Society London. Vol. XLVIII. N. 295. (London 1891).
Journal of the R. Microscopical Society. 1890. Part 6. Dec. London and Edinburgh (1890).
Records of the Geological Survey of India. Vol. XXIII. Part 4. Calcutta 1890.
Proceedings of the R. Society of Victoria. Vol. II (New Series). (Melbourne) 1890.
Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden:
a. Handelingen en mededeelingen over het jaar 1888—1889.
b. Levensberichten der afgestorvene Medeleden. Bijlage tot de Handelingen van 1889. Leiden 1889.
Annales de l'École Polytechnique de Delft. Tome VI. 1890. 1. Livr. Leiden 1890.
De Badoej's door J u l. J a c o b s en J. J. M e i j e r. Uitgegeven door het Kön. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 'sGravenhage 1891.
Bijdragen tot de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 5. Volgreeks. 6. Deel. (Deel 40). 1. Aflev. 's Gravenhage 1891.
Annalen der Sternwarte in Leiden. Herausgeg. v. H. G. v a n d e S a n d e B a k h u y z e n. 5. u. 6. Band. Haag 1890.
Verslag van den Staat der Sternenwacht te Leiden. 1886—88 u. 1888/89. Leiden 1888 u. 1889.
Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen:
a. Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde. Deel XXXIV. Aflev. I. Batavia, 's Hage 1890.
b. Notulen van de algemeene en bestuars-vergaderingen. Deel XXVIII. 1890. Aflevering I. Batavia 1890.
Nederlandsch-indisch Plakaatboch 1602—1811, door J. A. v a n d e r C h i j s. 7. Deel. 1755—1764. Batavia, 's Hage 1890.
Académie Royale de Copenhague:
a. Mémoires. 6me série. Classe des lettres. Vol. I. No. 1. Classe des sciences. Vol. V, No. 3. Vol. VII, No. 1. 2. Copenhague 1890.
b. Oversigt over d. Forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder i Aaret 1890. Kobenhavn (1890).
Aktstykker ag Oplysninger til Rigsraadets ag Staendermødernes Historie i Kristian IV's Tid udgivne ved Kr. Erslev af Selskabet for Udgivelse af Kilder til dansk Historie. 1. Bind 1. 2. Haefte. 2. Bind 1. 2. Haefte. 3. Bind 1. 2. Häfte. Kjøbenhavn 1883—90.
Repertorium für Meteorologie herausgeg. v. d. Kaiserl. Akademie der Wissensch. Redigirt von H e i n r. W i l d. Band XIII. St. Petersburg 1890.
Bulletin de la Société imp. des naturalistes de Moscou. Année 1890. N. 2. Moscou 1890.
Запуску новороссінскаго одшесмва есмесмвоусуымамелеы. Томч XI, XV, 1. 2. Одесса 1890.
Memoires de la société des naturalistes de la Nouvelle-Russie (Odessa). Tom. XI (Section mathem.), XV, 1. 2. Odessa 1890.
Akademie der Wissenschaften in Krakau:
a. Anzeiger. 1890. November, Dezember. Krakau 1890.
b. Rozprawy i Sprawozdania z Posiedzeń wydziatu matematyczno-przyrodniczego Akademii Unniejętności. Tom. XV, XVI. W Krakowie 1887.

c. Acta historica res gestas Poloniae illustrantia. Tom. IX. Cardinalis Hosii Epistolarum Tom. II. 1551 — 1558. Pars II. W Krakowie 1888.
d. Ibiór Wiadomości do Antropólogii Krajowej wydawany staraniem Komisyi Antropólogicznej . . . Tom. XI. Kraków 1887.
e. Pamiętnik. Wydziat matematyczmo - przyrodniczy. Tom. XIII. W Krakowie 1887.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Serie seconda. Tomo XL. Torino 1890.

Atti e rendiconti della Accademia medico-chirurgica di Perugia. Vol. II. Fasc. 3°. Perugia 1890.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo IV. Anno 1890. Fasc. VI. Nov. — Dec.. Palermo.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXVII. 1890. Serie Quarta. Rendiconti. Vol. VI°. 2° Semestre. Fasc. 7 — 12. Roma 1890.

Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze:
a. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. 1889. 1. Titel und Index, 2. Tavola sinottica, 3. Indice alfabetico. Bogen 10.
b. 1890. N. 119, 120.
c. 1891. N. 121, 122. Firenze.

Biblioteca Nazionale Centrale Vittorio Emanuele di Roma. Bollettino delle opere moderne straniere acquistate dalle biblioteche pubbliche governative del regno d'Italia. Vol. V. N. 3, 4. Roma 1890.

Vicissitudes onomastiques de la globulaire vulgaire par Saint-Lager. Paris 1889.

La priorité des noms de plantes par Saint-Lager. Paris 1890.

Académie Royale de Belgique:
a. Bulletin. 60e année, 3e série, tome 20. N. 11. Bruxelles 1890.
b. Annuaire. 1891. Ibid. 1891.

Academia Real des sciencias de Lisboa:
a. Memorias. 1) Classe de sciencias mathematicas, physicas e naturales. Nova serie tomo VI, parte II. 2) Classe de sciencias moraes, politicas e bellas-lettras. Nova Serie tomo V, parte II; tomo VI, parte 1.
b. Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes. Segunda serie tom. I. No. II—IV.
c. Elogio historico de Sua Magestade El-Rei o Senhor D. Fernando II. recitado pelo socio Visconde de Benalcanfor. Lisboa 1886.
d. Historia dos estabelecimentos scientificos litterarios.
e. artisticos de Portugal por José Silvestre Ribeiro. Tomo X — XVI. Lisboa 1882—89.
f. A electricidade. Estudo de algumas dastnas principaes applicações por Virgilio Machado. Lisboa 1887.
g. Estudos sobre as provincias ultramarinas por João de Andrade Corvo. Vol. 1—4. Lisboa 1883—87.
h. Curso de silvicultura por Antonio Xavier Pereira Coutinho. Tomo I Botanica florestal. Tomo II Esboço de uma flora lenhosa Portugneza. Lisboa 1886—87.
i. Lições de pharmacologia e therapeutica geraes por Eduardo Augusto Motta. Lisboa 1888.
k. Portugaliae monumenta historica. Inquisitiones. Volumen I. Fasc. 1 e 2. Olisipone 1888. Lisboa.

U. S. Department of agriculture. Division of ornithology and mammalogy. North American Fauna. N. 3. 4. Washington 1890.

Astronomical Papers. Printed by authority of the congress. Vol. II. Part. V. Discussion of transits of Venus 1761—69 u. Vol. IV. Washington 1890.

The Boston Society of Natural History:
a. Memoirs. Vol. IV. Number VII—IX. Boston 1890.
b. Proceedings. Vol. XXIV, parts III and IV. Mai, 1889 — April, 1890. Boston 1890.

Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College:
a. Bulletin. Vol. XX. No. 3—6. Cambridge U. S. A. 1890.
b. Annual report of the curator for 1889—90. Cambridge U. S. A. 1890.

Johns Hophins University Circulars. Vol. X. No. 84. Baltimore. Dec. 1890.

Bulletin of the scientific laboratories of Denison University edited by W. G. Tight. M. S. Vol. V. Granville, Ohio, June 1890.
Report of the superintendent of the U. S. Naval Observatory for the year ending 1890 June 30. Washington 1890.
Bulletin of the American Geographical Society. Vol. XXII. No. 4. Dec. 31, 1890. New-York.
Report for the year 1889—90, presented by the board of managers of the Observatory of Yale University to the president and fellows 1890.
Anales de la Sociedad científica Argentina. Tomo XXX, Entrega V, VI. Buenos Aires 1890.
Boletin mensual del Museo de productos Argentinos. Año III. No. 31. Dic. 1890. Buenos Aires 1890.

Februar 1891.

Sitzungsberichte der Kön. Preuss. Akademie der Wissensch. in Berlin. I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX.
Deutschlands Leistungen und Aussichten auf technischem Gebiete. Rede zum Geburtsfeste S. M. Wilhelm II. in der K. Technischen Hochschule zu Berlin geh. am 26. Jan. 1891 von F. Reuleaux. Berlin 1891.
Königl. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Des XII. Bandes der Abhandlungen der philologisch-historischen Classe N. II. (Anganische Inschriften von F. H. Weissbach). Leipzig 1891.
K. b. Akademie der Wissenschaften zu München. Sitzungsberichte der math.-physikal. Classe 1890. Heft IV. München 1891.
Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1889. Beobachtungssystem des Königr. Sachsen. 1. Hälfte, Abtheilungen 1 u. 2. VII. Jahrg. 1889. Herausgeg. von Prof. Dr. Paul Schreiber. Chemnitz 1890.
Leopoldina. Heft XXVII. N. 1—2. Januar 1891. Halle a. S.
Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg. Neue Folge. 4. Bd. 4. Heft. Heidelberg 1891.
Acta Mathematica 14 : 3. Berlin, Stockholm, Paris 1891.
Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. 35. Jahrgang. 2. Heft. Zürich 1890.
Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien:
a. Denkschriften. 1) Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. 56. Band. 2) Philosophisch-historische Classe. 37. Band.
b. Sitzungsberichte. 1) Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Abtheil. I Band XCVIII. IV.—X. Heft. 1889. April—Dezember. Band XCIX. I—III. Heft. 1890. Jan.—März. 2. Abtheilung IIa. XCVIII. Band. IV—X. Heft. 1889. April —Dezember. XCIX. Band. I.—III. Heft. Jahrg. 1890. Jan.—März. 3. Abtheil. IIb. Band XCVIII. IV.—X. Heft. Jahrg. 1889. April—December. XCIX. Band. I.—III. Heft. Jahrg. 1890. Jan.—März. 4. Abtheilung III. XCVIII. Band. V.—X. Heft. Jahrg. 1889. Mai—December. XCIX. Band. I.—III. Heft. Jahrg. 1890. Jan.—März. 2) Philosophisch-historische Classe. CXIX. Bd. CXX. Bd. Jahrg. 1889. CXXI. Bd. 1890.
c. Archiv für österreichische Geschichte. 75. Bd. 1. u. 2. Hälfte. Wien 1889.
d. Fontes rerum austriacarum. 2. Abth. Diplomataria et acta. XLV. Band. 1. Hälfte. Wien 1890.
Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. 1890. N. 14—18. 1891. N. 1. Wien.
Publicationen für die internationale Erdmessung. Astronomische Arbeiten des k. k. Gradmessungs-Bureau. II. Bd. Längenbestimmungen. Prag, Wien, Leipzig 1890.
Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau 1891. Januar. Krakau 1891.
Ungarische Revue. II. Heft. Februar. 1891. 11. Jahrg. Budapest 1891.
Földtani Közlöny. XX Kötet. 5—12 Füzet. Budapest 1890.
Mittheilungen aus dem Jahrbuche der Kön. Ungarischen geologischen Anstalt:
a. Die Pontische Stufe und deren Fauna bei Nagy Mányok im Comitate Tolna v. Dr. E. Lörenthey. Budapest 1890.

b. Das Delta des Nil v. Dr. J. Jankó. Budapest 1890.
Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. Tome XXIV. 4me et 5me livraisons. Harlem 1891.
Tijdschrift voor Nederlandsche Taal- en Letterkunde, uitg. van wege de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. 10. Deel. Nieuwe Reeks. 2. Deel. 1. Aflever. Leiden 1891.
Programme de la Société Batave de Philosophie expérimentale de Rotterdam. 1890.
Annales de l'École polytechnique de Delft. Tome VI, 1890. 2. livraison. Leide 1890.
Académie Royale de Belgique. Bulletin. 60e année. 3e série. tome 20. N. 12, 61e année. 3e série. tome 21. N. 1. Bruxelles 1890. 91.
Annales de la Société géologique de Belgique. Tome XVI. 2e livr. Tome XVII. 4e livr. Liège 1890.
Den Norske Nordhavs-Expedition 1876—1878. XX. Zoologi. Pycnogonidea ved G. O. Sars. Christiania 1891.
Annalen des physikalischen Central-Observatoriums herausgegeben v. H. Wild. Jahrgang 1889. Theil II. St. Petersburg 1890.
Nature. Vol. 43. N. 1110—1114.
Proceedings of the London mathematical society. N. 391—394.
Monthly notices of the R. astronomical society. Vol. LI. N. 3. London 1891.
Proceedings of the Royal society. Vol. XLIX. N. 296. London 1891.
Journal of the R. microscopical society 1891. Part 1. February. London and Edinburgh.
Memoirs and proceedings of the Manchester literary and philosophical society. Fourth series. Vol. 4. N. 1, 2. 1890—91. Manchester.
Reports from the laboratory of the R. college of physicians. Edinburgh. Vol. III. Edinburgh and London 1891.
Royal Irish Academy:
a. Proceedings. Third series. Vol. I. N. 4. Dublin 1891.
b. Transactions. Vol. XXIX. Part XIV. Dublin 1891.
Historia do Infante D. Duarte Irmão de El-rei D. João IV por José Ramos-Coelho. Tomo II. Lisboa 1890.
Annales du Musée Guimet:
Revue de l'histoire des religions. 11me année. Tome XXI. N. 2, 3. Tome XXII. N. 1, 2. Paris 1890.
Travaux et mémoires du Bureau international des poids et mesures. Tome VII. Paris 1890.
Mémoires de la société nationale des sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg. Tome XXVI. (Troisième série. Tome VI). Paris, Cherbourg 1889.
La société des antiquaires de Picardie:
a. Mémoires. Tome XII. Histoire de l'abbaye de Saint-Acheul-lez-Amiens. Amiens 1890.
b. Bulletin. Année 1889. N. 4. 1890. N. 1, 2. Amiens 1890.
Atti della R. Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXVIII. 1891. Serie IV. Rendiconti. Vol. VII. 1° sem. fasc. 1, 2. Roma 1891.
Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XXVI. Disp. 1, 2, 3. 1890—91. Torino.
Revista di matematica diretta da G. Peano. Fasc. 1. Gennaio 1891. Torino.
Annuario della società R. di Napoli. 1891. Napoli 1891.
Biblioteca nazionale centrale di Firenze:
a. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. N. 123—124. 1891.
b. Indici del Bollettino 1890. I. Indice alfabetico delle opere. Bogen A—C.
Biblioteca nazionale centrale Vittorio Emanuele di Roma. Firenze 1891:
a. Bollettino delle opere moderne straniere. Vol. VI. N. 1. Gen. 1891. Roma 1891.
U. S. Geological Survey:
a. Mineral resources of the United States by David T. Day. 1888. Washington 1890.
b. Monographs. Vol. I. Lake Bonneville by Grove Karl Gilbert. Ebd. 1890.

c. Ninth annual report. 1887—88 by J. W. Powell. Ebd. 1889.
d. Bulletin. N. 58, 59, 60, 61, 63, 64, 66. Ebd. 1890.
Proceedings of the American pharmaceutical association. 38. annual meeting. Philadelphia 1890.
Bulletin of the Museum of comparative zoölogy at Harvard college. Vol. XX. N. 7. Cambridge, U.-S.-A. 1890.
Transactions of the Connectient Academy of arts and sciences. Vol. VIII. Part. 1. New Haven 1890.
Johns Hopkins University circulars. Vol. X. No. 85. Baltimore 1891.
Anales de la sociedad cientifica argentina. Enero de 1891. Entrega 1. Tomo XXXI. Buenos Aires 1891.

Nachträge.

Bulletin de la société mathématique de France. Tome XVIII. N. 5 et 6. Paris 1890.
Physikalisch-medicinische Gesellschaft zu Würzburg. Würzburg 1880:
a. Sitzungsberichte. Jahrg. 1890. N. 8, 9, 10.
b. Verhandlungen. N. F. XXIV. Band. N. 6.
Journal and proceedings of the Royal society of New South Wales. Vol. XXIII. 1889. Part II. Sidney, London.
The humming bird. Vol. I. N. 3. March 1. 1891. London.
Geological Survey of India:
a. Memoirs. 1) Ser. XIII. Salt-range fossils. Vol. IV. Part. 1. Geological results. 2) Vol. XXIV. Part. II. Middemiss: Physical Geology of the Sub-Himalaya of Garhwâl and Kumann. Calcutta.
Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen:
a. Notulen van de Algemeene en Bestuurs-Vergaderingen. Deel XXVIII. 1890. Aflever. II. Batavia 1890.
b. Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde. Deel XXXIV. Aflevering II. Batavia, s'Hage 1890.
Königl. böhmische Gesellschaft der Wissenschaften:
a. Sitzungsberichte 1890. 1) Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. II. 2) Philos.-histor.-philolog. Classe.
b. Jahresbericht für 1890. Prag 1891.

März und April 1891.

Sitzungsberichte der K. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. X—XVIII. Berlin 1891.
Separatabzüge von Aufsätzen von L. Kronecker:
a. Ueber eine summatorische Function. (Aus den Sitzungsberichten d. K. Pr. Ak. d. W. zu Berlin 1889. XLII).
b. Zur Theorie der elliptischen Functionen (Art. XII—XXI). (Ebendaher. 1889. VI. X. XIV. XVIII. XIX. 1890. VI. VII. XIV. XVI).
c. Die Decomposition der Systeme von n^2 Grössen und ihre Anwendung auf die Theorie der Invarianten. Ueber orthogonale Systeme. Ueber die Composition der Systeme von n^2 Grössen mit sich selbst. (Ebendaher. 1889. XXX. XXXI. 1890. XXVI. XXVIII. XXX. XXXVI. XL).
d. Algebraische Reduction der Schaaren bilinearer Formen. Algebraische Reduction der Schaaren quadratischer Formen. (Ebendaher. 1890. XLVIII. LIII. 1891. II. III).
e. Ueber die arithmetischen Sätze, welche Lejeune Dirichlet in seiner Breslauer Habilitationsschrift entwickelt hat. Bemerkungen über Dirichlet's letzte Arbeiten. (Ebendaher. 1888. XVI. XVIII).
f. Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik. Aus dem Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 100. Heft 4
g. Première partie du chapitre XIII de la Note sur la théorie des résidus quadratiques par A. Genocchi.
Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste von L. Kronecker, Paul du Bois-Reymond. (Ebendaher. Bd. 104. Heft 4).

h. Bemerkungen über die Jacobischen Thetaformeln. (Ebendaher. Bd. 102. Heft 3).
i. Ueber den Zahlbegriff. (Ebendaher. Bd. 101. Heft 4).
k. Bemerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale. (Ebendaher. Bd. 105. Heft 2).
Kgl. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig:
a. Mathematisch-physische Classe:
 1. Berichte über die Verhandlungen. 1890. III. IV. Leipzig 1891.
 2. Abhandlungen. Bd. XVI. N. III. Bd. XVII. N. 1 u. 2. Ebd. 1891.
b. Philologisch-historische Classe:
 Berichte über die Verhandlungen. 1890. II. III. Ebd. 1891.
K. b. Akademie der Wissenschaften zu München:
 Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen u. historischen Classe. 1890. Bd. II. Heft III. München 1891.
Germanisches Nationalmuseum zu Nürnberg.
a. Anzeiger. Jahrg. 1890. Nürnberg 1890.
b. Mitteilungen. Jahrg. 1890. Ebd. 1890.
c. Katalog der im german. Museum befindl. Originalskulpturen. Ebend. 1890.
Festschrift hrsg. v. d. Mathematischen Gesellschaft in Hamburg anlässlich ihres 200jährigen Jubelfestes 1890. Sonderabzug: Ueber die Dirichletsche Methode der Wertbestimmung der Gaussschen Reihen. Von L. Kronecker. Leipzig 1890.
Mitteilungen des Vereins für Geschichte der Stadt Meissen. 2. Bd. 4. Heft. Meissen 1890.
Das Ausland. Wochenschrift für Erd- und Völkerkunde von Karl v. Steinen. 1891. N. 8. Stuttgart.
Leopoldina. Heft XXVII. N. 3–4. N. 5–6. Halle a. S. 1891.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Band XX. Jahrgang 1888. Heft 2. Berlin 1891.
Kriegsberichte des Königl. Dänischen General-Feldmarschalls Ernst Albrecht von Eberstein aus dem zweiten schwedisch-dänischen Kriege. Herausgeg. v. L. F. Freiherrn von Eberstein. 2. Ausg. Berlin 1891.
Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft. 44. Band. IV. Heft. Leipzig 1890.
Societatum litterae. Hrsg. v. E. Huth. Jahrbuch 1890. Berlin 1891.
Monatliche Mittheilungen aus dem Gesammtgebiete der Naturwissenschaften. Organ des Naturwissenschaftl. Veseins des Reg. Bez. Frankfurt, hrsg. v. E. Huth. 6. Jahrg. 1888/89. Berlin 1889.
Reale Accademia dei Lincei. Roma:
a. Atti. Anno 288. 1891. Ser. IV. Rendiconti. Vol. VII. 1. Semestre fasc. 3, 4, 5, 6. Roma 1891.
b. Atti. Ser. IV. Classe di scienze morali, stor. e filologiche. Anno 283. 1886. Vol. II. Anno 284. 1887. Vol. III. Parte I. II. Anno 285. 1888. Vol. IV. Parte II. Memorie. Anno 285. 1888. Vol. V. Roma 1886–88.
Reale Accademia delle scienze di Torino:
a. Atti. Vol. XXVI. disp. 4a, 5a, 6a, 7a e 8a. 1890–91 u. Elenco degli accademici al 1° Marzo 1891. Torino 1891.
b. Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1890. Calcolate dal Dott. G. B. Rizzo. Torino 1891.
Le stazioni sperimentali agrarie italiane. Volume XX, fasc. II. Febbraio. Asti 1891.
Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo V. Anno 1891. Fasc. I e II. Palermo 1891.
Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli.
 Rendiconto. Serie 2a. Vol. IV. Anno XXIX. fasc. 1°–12°. Genn. Dic. 1890. Napoli 1890.
Biblioteca nazionale centrale di Firenze.
 Bollettino delle pubblicazioni italiane. 1891. N. 125, 126, 127 u. Indice 1890. Bog. II. E. Firenze 1891.
Biblioteca nazionale centrale Vittorio Emanuele di Roma.
 Bollettino delle opere moderne straniere. Vol. VI. N. 2. 3. 1891. Roma 1891

Société mathématique de France. Bulletin. Tome XIX. N. 1. 2. Paris 1891.
Académie Royale de Belgique.
a. Bulletin. 61e année, 3e série, tome 21. N. 2, 3. Bruxelles 1891.
b. Classe des sciences. Programme de concours pour 1892. (Ibid. 1891).
Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas. Vol. X. No. 1. Coimbra 1891.
Société Impériale des naturalistes de Moscou:
a. Bulletin. Année 1890. N. 3. Moscou 1891.
b. Beilage: Meteorologische Beobachtungen ausgef. am Meteorologischen Observatorium der landwirthschaftlichen Akademie bei Moskau. (1890. Erste Hälfte). Moskau 1890.
Mémoires de l'Académie Imp. des sciences de St. Pétersbourg. Tab. IV. VI e VII zu Maximowiczii Diagnoses plantarum Asiatic. VII. 1890.
Proceedings of the Royal Society. Vol. XLIX. N. 297, 298. London 1891.
Monthly notices of the R. Astronomical Society. Vol. LI. N. 4, 5. London 1891.
Proceedings of the London Mathematical Society. No. 395–398, No. 399—403. London 1891.
Nature. Vol. 43. N. 1115–1121. London 1891.
Memoirs and proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society. 1890—91. Manchester 1891.
The humming bird. Vol. 1. No. 3. London 1891.
The Cambridge Philosophical Society:
a. Proceedings. Vol. VII. Part. III. 1890. Cambridge 1891.
b. Transactions. Vol. XV. Part. 1. Ibid. 1891.
Journal of the Royal Microscopical Society. 1891. Part 2. London and Edinburgh 1891.
Proceedings of the Royal Physical Society. Session 1889—1890. Edinburgh 1891.
Transactions of the Royal Society of South Australia. Vol. XIII. Part II. Adelaide 1890.
Bijdragen tot de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 5de Volgreeks. 6de Deel (Deel XL der geheele Reeks). 2e aflev. s'Gravenhage 1891.
Regenvaarnemingen in Nederlandsch-Indië. 11de Jaargang 1889, door Dr. J. P. van der Stok. Batavia 1890.
Observations made at the magnetical and meteorological observatory at Batavia. Published by order of the government of Netherlands India, under the direction of Dr. J. P. van der Stok. Vol. XII. 1889. Batavia 1890.
Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden:
a. Handelingen en Mededeelingen. 1889–1890. Leiden 1890.
b. Levensberichten. Bijlage tot de Handelingen van 1890. Ibid. 1890.
Oeuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la Société hollandaise des sciences. Tome III. Correspondance 1660–1661. La Haye 1890.
Flora Batava 291. 292. Aflev. Leiden.
Christiania Videnskabs-Selskab:
a. Forhandlinger 1889. No. 1–12. Christiania 1889.
b. Oversigt over Videnskabs-Selskabets chøder i 1889. Ibid. 1890.
Acta Universitatis Lundensis. Tom. XXVI. 1889—90. I. II. Afdelningen. Lund 1889–90.
Norges gamle love indtil 1387. 5te Binds. 1ste Hefte ved Gustav Storm. Christiania 1890.
U. S. Coast and Geodetic Survey:
a. Report. June 1888. Part I. Text. Part II. Sketches. Washington 1889.
b. Bulletin. No. 19. March 1890. Ibid. 1891.
Pennsylvania geological survey:
a. Dictionary of Fossils of Pennsylvania. Vol. II. N—R. Vol. III. S—Z. Harrisburg 1889. 90.
b. Atlas Southern authracite field. Part III. A A. 1–12. 1889.
c. Seveuth report on the oil and gas fields for 1887, 1888. Ibid. 1890.
The California Academy of Sciences.
Occasional papers I. II. San Francisco 1890.
Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia. Part. II. April—Sept. 1890. Philadelphia 1890.

Publications of the Washburn Observatory of the University of Wisconsin. Vol. VII. Part. 1. Madison, Wis. 1890.
Journal of Comparative Neurology. Vol. 1. March 1891. Cincinnati Ohio. 1891.
Bulletin of the Museum of Comparative Zöology at Harvard College. Vol. XX. N. 8. Cambridge U-S.-A. 1891.
Bulletin of the American Geographical Society. Vol. XXII. Supplement. 1890. Vol. XXIII. No. 1. 1891. New-York.
Proceedings of the American Philosophical Society. Vol. XXVIII. No. 134. Philadelphia.
Johns Hopkins Circulars. Vol. X. No. 86. Baltimore 1891.
Johns Hopkins University studies in historical and political science:
a. Eigth series V—VI, VII—VIII—IX. X, XI—XII. Ibid. 1890. [In je 2 Exempl.]
b. Studies from the Biological Laboratory. Vol. IV. No. 6. Ibid. 1890.
c. American Journal of mathematics. Vol. XIII. No. 1. 2. [In 2 Exempl.] Baltimore 1890. 91.
Revista Argentina de historia natural. Tomo I. Entrega 1, 2. 1891. Buenos Aires 1891.
Anales de la Sociedad cientifica Argentina. 1891. Tomo XXXI. Entrega 2. 3. Buenos Aires 1891.
Mittheilungen der Deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio. 45. Heft. Band 5. Seite 191—234. Yokohama 1891.
Mitteilungen aus der Medicinischen Fucultät der Kaiserlich-Japanischen Universität. Band I. No. 4. Tokyo 1891.

Nachträge.

Astronomische Mittheilungen von Rud. Wolf. Januar 1891. S. 249—280. (Zürich 1891).
„Fauna". Verein Luxemburger Naturfreunde. Mittheilungen aus den Vereinssitzungen. Jahrg. 1891. Heft 1. Luxemburg.
Bulletin de l'Académie Imp. des sciences de St. Pétersbourg. Nouvelle série II. (XXXIV). No. 1. Feuilles 1—12. St. Pétersbourg 1891.
Tifliser physikalisches Observatorium:
a. Meteorologische Beobachtungen im Jahre 1889. Tiflis 1890.
b. Magnetische Beobachtungen im Jahre 1888—89. Ebd. 1890.
Ungarische Revue. 1891. Elfter Jahrgang. Heft III. IV. Budapest 1891.
Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau. 1891. Februar. März. Krakau 1891.
Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. 1891. No. 2, 3, 4. (Wien 1891).
Verein für siebenbürgische Landeskunde:
a. Archiv. Neue Folge. 23. Bd. 2. Heft. Hermanstadt 1891.
b. Jahresbericht für 1889/90. Ebd. 1890.
Die Freiheit des Willens, die Moral und das Uebel von Anton Ganser. Graz 1891.
The Canadian Institute. Transactions. Oktober 1890. Vol. 1. Part 1. Toronto 1890.
Машемашическій Сборникъ издаваемый Московскшѣъ машемашическшѣъ обиуесшвомъ.
[Sammlung mathemat. Arbeiten hrsg. v. d. Moskauer mathemat. Gesellschaft.]
Tom. (1.) 2—14. 15. No. 1—3. Москва 1866—91.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).