



FOR THE PEOPLE  
FOR EDVCATION  
FOR SCIENCE

LIBRARY  
OF  
THE AMERICAN MUSEUM  
OF  
NATURAL HISTORY









THE NEW YORK  
ACADEMY OF SCIENCES

# NOVA ACTA

ACADEMIAE CAESAREAE LEOPOLDINO-CAROLINAE GERMANICAE  
NATURAE CURIOSORUM.

TOMUS XCI.

CUM TABULIS XII.

---

## Abhandlungen

der

Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen  
Deutschen Akademie der Naturforscher.

**91. Band.**

Mit 12 Tafeln.

---

**Halle, 1909.**

Buchdruckerei von Ehrhardt Karras in Halle a. S.

Für die Akademie in Kommission bei W. Engelmann in Leipzig.

10.2575. Aug. 10.  
31.127812. June 13



Seiner Majestät

# Wilhelm II.

Deutschem Kaiser und Könige von Preußen

ihrem hohen Schirmherrn

dem erhabenen Gönner und Beförderer aller wissenschaftlichen Arbeit  
des deutschen Volkes

widmet die

Kaiserliche Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie  
der Naturforscher

diesen einundneunzigsten Band ihrer Abhandlungen

durch den Präsidenten

Dr. **Albert Wangerin.**



## Inhalt des XCI. Bandes.

- I. **W. Ihlenburg:** Über die geometrischen Eigenschaften der Kreisbogenvierecke . . . . . S. 1—80. Taf. I—V.
  - II. **Christian Wiener:** Die Helligkeit des klaren Himmels und die Beleuchtung durch Sonne, Himmel und Rückstrahlung. (Fortsetzung und Schlufs. Herausgeg. von Dr. H. Wiener, Dr. O. Wiener und Dr. M. Möbius) . . . . . S. 81—292. Taf. VI—XI.
  - III. **M. Bezzi:** Fam. Empididae. Beiträge zur Kenntnis der süd-amerikanischen Dipterenfauna auf Grund der Sammelergebnisse einer Reise in Chile, Peru und Bolivia, ausgeführt in den Jahren 1902—1904 von W. Schnuse . . . . . S. 293—408. Taf. XII.
-



# Vorstand der Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher.

Gegründet am 1. Januar 1652. Deutsche Reichsakademie seit dem 7. August 1687.

## Präsidium.

A. Wangerin in Halle a. S., Präsident.

J. Volhard in Halle a. S., Stellvertreter.

## Adjunkten.

- I. Kreis: J. Hann in Wien;  
E. Mach in Wien;  
G. Stache in Wien.  
II. Kreis: E. Wiedemann in Erlangen;  
R. Hertwig in München.  
III. Kreis: K. B. Klunzinger in Stuttgart.  
IV. Kreis: A. Weismann in Freiburg.  
V. Kreis: G. A. Schwalbe in Strafsburg.  
VI. Kreis: R. Lepsius in Darmstadt.  
VII. Kreis: E. Strasburger in Bonn.

- VIII. Kreis: M. H. Bauer in Marburg.  
IX. Kreis: E. H. Ehlers in Göttingen.  
X. Kreis: K. Brandt in Kiel.  
XI. Kreis: J. Volhard in Halle.  
XII. Kreis: E. Haeckel in Jena.  
XIII. Kreis: C. Chun in Leipzig;  
F. Marchand in Leipzig.  
XIV. Kreis: A. Ladenburg in Breslau.  
XV. Kreis: C. A. Jentzsch in Berlin;  
H. Waldeyer in Berlin.

## Sektionsvorstände und deren Obmänner.

### I. Mathematik und Astronomie:

- J. Lüroth in Freiburg, Obmann;  
R. Helmholtz in Potsdam;  
G. Cantor in Halle.

### II. Physik und Meteorologie:

- E. Riecke in Göttingen;  
E. Mach in Wien;  
J. Hann in Wien.

### III. Chemie:

- O. Wallach in Göttingen, Obmann;  
H. Landolt in Berlin;  
J. Volhard in Halle.

### IV. Mineralogie und Geologie:

- F. Zirkel in Bonn, Obmann;  
H. Credner in Leipzig;  
W. Branca in Berlin.

### V. Botanik:

- H. G. A. Engler in Dahlem-Steglitz bei  
Berlin, Obmann;  
S. Schwendener in Berlin;  
Graf zu Solms-Laubach in Strafsburg.

### VI. Zoologie und Anatomie:

- F. E. Schulze in Berlin, Obmann;  
E. H. Ehlers in Göttingen;  
M. Fürbringer in Heidelberg.

### VII. Physiologie:

- S. Exner in Wien, Obmann;  
V. Hensen in Kiel;  
J. von Kries in Freiburg.

### VIII. Anthropologie, Ethnologie und Geo- graphie:

- G. C. Gerland in Strafsburg, Obmann;  
A. Penck in Berlin;  
J. Ranke in München.

### IX. Wissenschaftliche Medizin:

- E. von Leyden in Berlin, Obmann;  
W. O. von Leube in Würzburg;  
H. Waldeyer in Berlin.





NOVA ACTA.

Abh. der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher.

Band XCI. Nr. 1.

---

Über  
die geometrischen Eigenschaften  
der  
Kreisbogenvierecke.

Von

W. Ihlenburg.

Mit 5 Tafeln. Nr. I—V.

---

Eingegangen bei der Akademie am 1. Juli 1908.

HALLE.

1909.

Druck von Ehrhardt Karras, Halle a. S.

Für die Akademie in Kommission bei Wilh. Engelmann in Leipzig.





# Inhaltsangabe.

---

	Seite
Vorbemerkung . . . . .	5
Einleitung . . . . .	6
1. Begriff des Kreisbogenvierecks. Stellung der Aufgabe . . . . .	6
2. Zusammenhang mit der Funktionentheorie . . . . .	12
3. Historisches . . . . .	14
<b>I. Hauptteil. Algebraische Untersuchung . . . . .</b>	<b>17</b>
§ 1. Die Kosinus und Sinus der Maßzahlen . . . . .	17
§ 2. Die algebraischen Relationen und ihr Geltungsbereich . . . . .	21
<b>II. Hauptteil. Transzendente Untersuchung . . . . .</b>	<b>30</b>
§ 1. Fragestellungen . . . . .	30
§ 2. Reduktions- und Erweiterungsprozesse . . . . .	31
<b>Kapitel I. Konstruktion der Kreisbogenvierecke . . . . .</b>	<b>33</b>
<b>A. Konstruktion der reduzierten Vierecke . . . . .</b>	<b>33</b>
§ 3. Sätze über Kreisbogendreiecke . . . . .	33
§ 4. Geometrische Hilfsmittel . . . . .	35
§ 5. Konstruktion sämtlicher Vierecke, bei denen transversale Einhängungen möglich sind . . . . .	37
§ 6. Konstruktion sämtlicher reduzierten Vierecke mit mehr als einer umlaufenden Seite . . . . .	40
§ 7. Reduzierte Vierecke mit nur einer umlaufenden Seite . . . . .	42
§ 8. Reduzierte Vierecke ohne umlaufende Seiten . . . . .	43
<b>B. Direkte Konstruktion der allgemeinen Vierecke . . . . .</b>	<b>46</b>
§ 9. Geometrische Deutung der Vierecksparameter . . . . .	47
§ 10. Die Grenzlagen . . . . .	48
§ 11. Die Konstruktion aller Vierecke mit denselben gegebenen Winkeln	53
§ 12. Ausnahmefälle . . . . .	55
<b>Kapitel II. Die Ergänzungsrelationen . . . . .</b>	<b>58</b>
§ 13. Prinzip bei der Ableitung der Ergänzungsrelationen . . . . .	58

4 W. Ihlenburg, Über die geometrischen Eigenschaften der Kreisbogenvierecke.

	Seite
§ 14. Die Ergänzungsrelationen der Vierecke, welche aus Grenzlagen erster Art entstehen . . . . .	59
§ 15. Die Ergänzungsrelationen der Vierecke, welche aus Grenzlagen zweiter Art entstehen . . . . .	63
§ 16. Die wesentlichsten Eigenschaften der vollständigen zu gegebenen Winkeln möglichen Schar von Vierecken . . . . .	67
§ 17. Herstellung des Kontinuums aller vorhandenen Vierecke . . . . .	76
§ 18. Die Eindeutigkeitsfrage . . . . .	77

## Vorbemerkung.

Die Anregung zu den folgenden Untersuchungen hat das von den Herren Professoren Klein, Hilbert, Minkowski vom W.-S. 1905.06 bis zum S.-S. 1907 in Göttingen abgehaltene funktionentheoretische Seminar gegeben. Es gelangen im folgenden Gedanken zur Weiterentwicklung, die Herr F. Klein in einer im W.-S. 1893/94 gehaltenen Vorlesung „Über die hypergeometrische Funktion“ und in einer zweiten im S.-S. 1894 gehaltenen Vorlesung „Über lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung“ entwickelt hat; man vgl. die bez. bei B. G. Teubner ausgegebenen Auto-graphieen. Wenn auf diese Vorlesungen Bezug genommen wird, soll dies durch (K) bezeichnet werden.

[Eine vorläufige Mitteilung über die erzielten Resultate ist inzwischen bereits in den „Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1908“ erschienen.]

# Einleitung.

## 1. Begriff des Kreisbogenvierecks. Stellung der Aufgabe.

Unter einem Kreisbogenviereck verstehen wir eine in einer Ebene ausgebreitete, einfach zusammenhängende, von vier Kreisbogen begrenzte Fläche. Wird die Begrenzung so durchlaufen, daß das Innere der Fläche zur Linken liegt, so folgen die vier begrenzenden Kreise in einer bestimmten Reihenfolge aufeinander. Je zwei aufeinanderfolgende Kreisbogen mögen sich unter reellen Winkeln schneiden, so daß die Fläche vier Ecken erhält. Wir bezeichnen diese Ecken dem Umlaufssinn entsprechend mit  $a, b, c, d$  und die Winkel bezüglich mit  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . In den Ecken lassen wir Windungspunkte beliebig hoher Ordnung zu, im Innern der Fläche dagegen keine Windungspunkte.

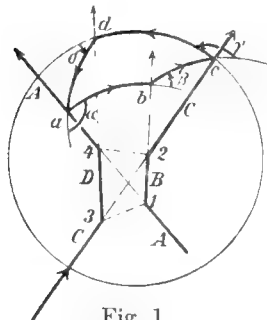


Fig. 1.

Werfen wir das Kreisbogenviereck durch stereographische Projektion auf eine Kugel, so liegen die vier Begrenzungskreise in vier Ebenen  $ab, bc, cd, da$ , deren Inbegriff wir als „Kern“ (K) des Kreisbogenvierecks bezeichnen. Wir stellen ihn wohl mit Hülfe des von den Ebenen ein geschlossenen Tetraeders am anschaulichsten vor. Das Kreisbogenviereck selbst erscheint als „Membran“ in diesen Kern eingehängt (Fig. 1).

Wir definieren zwölf „Maafszahlen“ des Kreisbogenvierecks (K). Zur Bestimmung derselben wenden wir diejenige projektive Maafsbestimmung<sup>1)</sup> an, deren Fundamentalfläche unsere Kugel ist. Wir bestimmen den Winkel

<sup>1)</sup> Cayley, sixth memoir upon Quantics, Phil. Transactions, t. 149, (1859); Collected math. Papers II, p. 561. Klein, Math. Ann. 4, S. 573 ff. (1871).

zweier Ebenen, den Winkel zweier Geraden in einer Ebene und die Entfernung zweier Punkte durch den Ausdruck  $\frac{i}{2} \log D$ , wo  $i = \sqrt{-1}$  ist und  $D$  das Doppelverhältnis bedeutet, das im betreffenden Grundgebilde erster Stufe zwischen den beiden Elementen desselben, die zum Fundamentalgebilde gehören, und den beiden andern Elementen gebildet wird, deren Winkel oder Entfernung gemessen werden soll.

Der Winkel zweier aufeinanderfolgender Ebenen unseres Kernes wird infolge dieser Maßbestimmung der elementar gemessene Winkel der Kugeltangenten in diesen Ebenen, die von einem Durchstoßpunkte der Schnittgeraden der Ebenen ausgehen.

Zwei aufeinanderfolgende Ebenen, z. B.  $ab$  und  $bc$ , schneiden sich in einer Geraden durch  $b$ , die Ebenen  $bc$  und  $cd$  in einer Geraden durch  $c$ . Beide Geraden bilden in der Ebene  $bc$  einen Winkel miteinander, den wir als „Seite“ unseres Kreisbogenvierecks bezeichnen. Die Seiten nennen wir  $\widehat{ab}$ ,  $\widehat{bc}$ ,  $\widehat{cd}$ ,  $\widehat{da}$ . Liegt der Scheitel der Seite innerhalb des dazu gehörigen Begrenzungskreises, so ist sie reell, liegt er außerhalb, so enthält sie einen imaginären Teil.

Die Scheitel zweier aufeinanderfolgender Seiten sind zwei Eckpunkte des Tetraëders. Ihre Entfernung nennen wir eine „Kante“ des Vierecks. Wir bezeichnen die Kanten mit  $A, B, C, D$ .

$\alpha, \beta, \gamma, \delta; \widehat{ab}, \widehat{bc}, \widehat{cd}, \widehat{da}; A, B, C, D$  sind die zwölf Maßzahlen des Kernes oder des Kreisbogenvierecks.

Sie bleiben bei jeder projektiven Transformation des Raumes ungeändert, welche die Kugel in sich selbst überführt. Jede solche Transformation bezeichnen wir als „Bewegung“. Da im Sinne der Maßgeometrie die zwölf Maßzahlen einen Kern bestimmen, haben wir alle solche Kerne als äquivalent zu betrachten, welche durch eine Bewegung ineinander übergeführt werden können. Deuten wir die Ebene, in der die Membran zuerst gegeben war, als Ebene einer komplexen Variablen  $\eta$ , so entspricht jede Bewegung einer linearen Transformation  $\eta_1 = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$  in dieser Ebene.<sup>1)</sup> Diese Transformation ist eine Kreisverwandtschaft und führt demnach Kreisbogenvierecke wieder in Kreis-

<sup>1)</sup> Klein, Math. Ann. 9, Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst (1875); Erlanger Programm 1872.

bogenvierecke über. Membrane, die sich durch eine derartige lineare Transformation ineinander überführen lassen, werden wir als identisch betrachten. —

Von den sechs Kanten des Tetraëders haben wir die vier Kanten  $A, B, C, D$  herausgegriffen, welche zusammengenommen ein räumliches Vierseit bilden. Zwei aufeinanderfolgende Kanten liegen in einer Ebene. Die Winkel unserer Membran sind die Winkel je zweier aufeinanderfolgender Ebenen des Vierseits, die Seiten der Membran sind die Winkel je zweier aufeinanderfolgender Kanten des Vierseits, die Kantenlängen der Membran sind auch die des Vierseits. Die Maßzahlen des Kreisbogenvierecks sind demnach auch am Vierseit repräsentiert.

Das Vierseit besitzt vier Ecken. Wir bezeichnen diejenige, welche den Scheitel von  $\widehat{ab}$  bildet, mit 1, die andern entsprechend mit 2, 3, 4.

Durch Anrechnung ganzer und halber Perioden des  $\log$ , die in  $\frac{i}{2} \log D$  enthalten sein können, treten nun zu den Maßzahlen Multipla von  $\pi$  und  $\frac{\pi}{2}$  hinzu. Bei Abzählung dieser Zahlen benutzen wir ähnliche Festsetzungen wie Study bei seiner Behandlung der sphärischen Trigonometrie.<sup>1)</sup>

Auf jeder Kante des Vierseits und auf jedem Schnittkreise der vier Ebenen des Vierseits mit der Kugel setzen wir eine Durchlaufungsrichtung als positiv fest. Von den beiden Schnittpunkten jeder Kante mit der Kugel markieren wir den, an welchem man bei positiver Durchlaufung der Kante an der Kugel von innen nach außen gelangt, und nennen diese Punkte der Reihenfolge der Kanten entsprechend  $a, b, c, d$ . An jedem dieser Punkte setzen wir als positiven Drehungssinn für die Ebenenwinkel den fest, der dem Uhrzeigersinn entgegengesetzt ist, wenn wir von außen auf die Kugel sehen. Die vier Geraden des Vierseits denken wir uns im Sinne der projektiven Geometrie im Unendlichen geschlossen.

Ordnen wir einem Punkt einer Kante einen Drehungssinn zu, so kehrt sich, wenn wir den Punkt mitsamt dem Drehungssinn einmal durch das Unendliche hindurchführen, der Drehungssinn gerade um. Also gelangen

<sup>1)</sup> Study, „Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen“. Abh. der sächs. Gesellsch. d. Wiss., Bd. XX, 1893.

wir erst nach zweimaligem Durchgang zu dem ursprünglichen Punkte zurück. Dann erst ist die Gerade ein volles Mal durchlaufen.

Wir bewegen uns nun von Punkt 1 auf der Kante  $B$  in positiver Richtung nach 2 (Fig. 1). Dabei können wir die Kante beliebig oft voll durchlaufen. Um nach 3 weiter gelangen zu können, müssen wir uns erst in der Ebene  $bc$  auf dem Schnittpunkte der Kanten  $B$  und  $C$  herumdrehen. Wir führen hierzu auf dem Schnittkreise den Punkt  $b$  in positiver Richtung herum bis  $c$ . Die volle Peripherie kann dabei beliebig oft durchlaufen werden. Dabei führen wir die durch  $b$  gehende Kante beständig mit, indem wir sie um den Scheitel der Seite drehen. Liegt dieser außerhalb des Schnittkreises, so kehrt sich, wenn wir über die vom Scheitel an den Schnittkreis gezogene Tangente hinweggehen, die positive Richtung der Kante jedesmal um, da dieselbe an dem herumwandernden Punkte  $b$  immer vom Innern zum Äußern der Kugel gehen soll. Gelangen wir nach  $c$ , so fällt deshalb stets die positive Richtung der bewegten Kante  $B$  in die von  $C$ .

Wir schreiten jetzt auf  $C$  von 2 nach 3 in positiver Richtung weiter. Wollen wir nun nach 4 gelangen, so müssen wir, da wir uns bis jetzt in der Ebene  $bc$  bewegt haben, erst die Ebene  $bc$  um die Kante  $C$  in positiver Richtung in die Ebene  $cd$  hineindrehen, so daß die positive Richtung des Schnittkreises  $bc$  in die positive Richtung des Kreises  $cd$  fällt. Dabei können wir beliebig viele volle Umdrehungen ausführen. Wir schreiten dann auf dem Vierseit von 3 nach 4 in positiver Richtung weiter, nachdem wir die Seite  $cd$  in positiver Richtung durchmessen haben. Schließlich gelangen wir, in dieser Weise fortfahrend, nach 1, in die Ebene  $bc$  und in die Richtung der Kante  $B$  zurück.

Hierbei wird längs der vier Geraden des Vierseits eine geschlossene Kontur durchlaufen. Auf der Kugel entsteht ferner ein geschlossener, von vier Kreisbogen gebildeter Linienzug.

Die Begrenzung eines Kreisbogenvierecks ist auch ein Linienzug dieser Art. Bei der Membran werden wir als positiven Durchlaufungssinn auf jedem Kreise den festsetzen, der durch den Umlaufssinn der Membran angegeben wird.

Jede Kante möge geometrisch durch die auf der entsprechenden Geraden des Vierseits durchlaufene Strecke, jede Seite durch den durch-

laufenen Bogen des entsprechenden Schnittkreises, jeder Winkel durch die um die entsprechende Kante herum ausgeführte Drehung der Ebenen des Vierseits repräsentiert werden.

Die Perioden des  $\log$  zählen wir nun in folgender Weise:

Bei den Winkeln und bei den Seiten, deren Scheitel innerhalb des Schnittkreises liegt, messen wir die Multipla von  $\pi$  in elementarer Weise.

Liegt aber der Scheitel der Seite ausserhalb oder handelt es sich um eine Kantenlänge, so deuten wir  $D$  in der komplexen Ebene und definieren die Maßzahl durch  $\frac{i}{2} \int \frac{dD}{D}$ , wobei der Integrationsweg in folgender Weise zu bestimmen ist (Fig. 2).

Während wir den Endpunkt einer Seite auf dem Schnittkreis zum andern Endpunkt führen, oder während wir eine Kantenlänge durchlaufen,

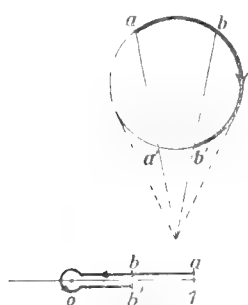


Fig. 2.

durchläuft  $D$  in seiner Ebene den Integrationsweg. Sobald aber bei der Seite der Schenkel zur Tangente wird oder bei der Kante die Kugel durchstoßen wird, kommt man an einen singulären Punkt des Integrals. Dieser Punkt möge dann bei Bewegung in positiver Richtung entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn, sonst umgekehrt umkreist werden. Dadurch wird also für die Seite (Fig. 2) der Bogen  $ab' = \pi + \widehat{ab}$ ,  $aa' = \pi$ ,

die volle Peripherie wird gleich  $2\pi$ . Kehrt man auf dem Kreise die positive Richtung um, so wird die Seitenlänge zwischen  $a$  und  $b$  gleich  $2\pi - \widehat{ab}$ .

Bei der Kantenlänge geht das Doppelverhältnis, wenn der laufende Punkt die Kugel durchstößt, zu Werten mit entgegengesetztem Vorzeichen über. Daher wird der Integrationsweg um den singulären Punkt herum ein Halbkreis, und die Kantenlänge wächst bei jedem Durchgang durch die Kugel um  $\frac{\pi}{2}$ , bei einer vollen Durchlaufung der betreffenden Geraden des Vierseits also um  $2\pi$ , da der laufende Punkt dann viermal durch die Kugel geht.

Diesem Vierseit kann noch das Polarvierseit zugeordnet werden, unter welchem die zum ursprünglichem Vierseit hinsichtlich der Kugel polare Figur zu verstehen ist. In genau entsprechender Weise sind auch



am Polarvierseit Richtungs- und Drehungssinn zu definieren und die Perioden abzuzählen.

Die zwölf Maßzahlen eines Kreisbogenvierecks sind nicht voneinander unabhängig.

Wir müssen zunächst die Gesamtheit der algebraisch unabhängigen algebraischen Relationen aufsuchen, welche zwischen den Sinus und Kosinus der Maßzahlen bestehen.

In diesen Sinus und Kosinus kommen aber die Multipla von  $2\pi$ , welche in den Maßzahlen enthalten sein können, nicht zur Wirkung.

Wenn wir bei dem zuletzt entwickelten Begriff des Vierseits bleiben, so können wir jeden Winkel, jede Seite und jede Kantenlänge um beliebig viele Multipla von  $2\pi$  vermehren. Dann besteht also keine Abhängigkeit dieser Multipla voneinander.

Jeder von diesen Linienzügen kann jedoch nicht die Begrenzung einer Membran bilden. Bei der Membran geraten deshalb die Umlaufzahlen der Seiten in Abhängigkeit von den Winkeln, während die Kantenlängen noch beliebig viele Multipla von  $2\pi$  enthalten können. Die Anzahl von Malen, welche die volle Peripherie eines Begrenzungskreises der Membran in der Begrenzung enthalten ist, wollen wir als Umlaufzahl einer Seite bezeichnen. Die Relationen, welche die Abhängigkeit zwischen den Winkeln und den Umlaufzahlen der Seiten angeben, wollen wir „Ergänzungsrelationen“ (K) nennen, da sie die algebraischen Relationen ergänzen.

Nun sind die Sinus und Kosinus der Maßzahlen algebraische Funktionen der Raumkoordinaten, die Maßzahlen selbst aber transzendente Funktionen derselben. Wir werden also, wenn wir die Beziehungen zwischen den Sinus und Kosinus behandeln, dies als „Algebraische Untersuchung“, wenn wir von den Membranen und den Ergänzungsrelationen sprechen, dies als „Transzendente Untersuchung“ bezeichnen. Die algebraische Untersuchung soll im ersten Teil, die transzendente im zweiten Teil der Arbeit geführt werden. Ferner sollen im zweiten Teil alle für uns in Betracht kommenden Vierecke tatsächlich konstruiert werden.

## 2. Zusammenhang mit der Funktionentheorie.

Für die transzendente Untersuchung der mit Membran versehenen Kreisbogenpolygone gibt uns die Funktionentheorie grundlegende Tatsachen.

Es können nicht nur Kreisbogenvierecke, sondern überhaupt Kreisbogenpolygone mit beliebig vielen Ecken betrachtet werden. Die Anzahl der Ecken sei  $n$ ,  $\eta$  eine in der Ebene des Polygons zu deutende komplexe Variable. Geben wir irgend ein Kreisbogenpolygon mit Membran vor, so wird die konforme Abbildung desselben (d. h. seiner Membran) auf die oberhalb der reellen Achse liegende Hälfte der Ebene einer komplexen Variablen  $z$  durch ein Integral der Differentialgleichung vermittelt:

$$\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2} \left( \frac{\eta''}{\eta'} \right)^2 = \frac{1}{(z-a_1) \dots (z-a_n)} \left\{ \frac{1-\lambda_1^2}{2} \frac{(a_1-a_2) \dots (a_1-a_n)}{z-a_1} + \dots \right. \\ \left. + \frac{1-\lambda_n^2}{2} \frac{(a_n-a_1) \dots (a_n-a_{n-1})}{z-a_n} + 2A_{n-4}z^{n-4} + 2A_{n-5}z^{n-5} \dots + 2A_0 \right\} \quad (\text{K})$$

wobei  $\eta'''$ ,  $\eta''$ ,  $\eta'$  Ableitungen von  $\eta$  nach  $z$  sind.

Hierin werden, wenn je zwei aufeinanderfolgende Kreise des Polygons reelle Winkel miteinander bilden

$$a_1, \dots, a_n; \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n; \quad A_{n-4} \dots A_0$$

sämtlich reelle Größen, die durch die gestaltlichen Verhältnisse des Polygons bestimmt werden. Es sei:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n.$$

Jedem Intervalle  $a_v, a_{v+1}$  der reellen  $z$ -Achse entspricht ein Bogen eines Begrenzungskreises. In den Punkten  $a_1 \dots a_n$ , den singulären Punkten der Differentialgleichung, aber nur in diesen, wird die Konformität der Abbildung unterbrochen. Sie entsprechen den  $n$  Ecken des Kreisbogenpolygons. Die Fläche eines hinreichend kleinen um  $a_v$  in der  $z$ -Ebene beschriebenen Halbkreises wird auf die Fläche eines kleinen Kreissektors in der  $\eta$ -Ebene mit der Winkelöffnung  $\lambda_v \pi$  abgebildet.

Die Differentialgleichung bleibt bei Anwendung einer linearen Transformation

$$\eta_1 = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta} \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

ungeändert. Ist also  $\eta$  ein partikuläres Integral, so ist  $\frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$  das allgemeine Integral. In Bezug auf die Differentialgleichung sind deshalb Polygone, die sich durch eine lineare Transformation ineinander überführen lassen, als identisch zu betrachten.

Zu jedem vorgegebenen Kreisbogenpolygon gehört also eine Differentialgleichung dritter Ordnung.

Geben wir umgekehrt eine Differentialgleichung obiger Art vor, so existieren bei beliebigen Werten der Parameter der Differentialgleichung Lösungen derselben. Dabei wird die obere Hälfte der  $z$ -Ebene immer auf einen einfach zusammenhängenden Bereich abgebildet, die Begrenzung der Halbebene auf die Begrenzung dieses Bereichs. Wählen wir sämtliche Parameter, auch  $\eta'$  und  $\eta''$  reell und machen wir mit Hilfe der Taylorsche Reihe einen Ansatz für  $\eta$ , so finden wir aus der Differentialgleichung für reelle Werte von  $z$  auch reelle Werte von  $\eta$ . Ein innerhalb des Konvergenzbereichs liegendes Stück der reellen  $z$ -Achse wird also durch ein geeignet gewähltes partikuläres Integral auf ein Stück der reellen  $\eta$ -Achse, durch ein allgemeines Integral auf einen Kreisbogen abgebildet.<sup>1)</sup> An den singulären Punkten  $a_\nu$  wird die Konformität der Abbildung wieder derart unterbrochen, daß in der Begrenzung des Abbildes der halben  $z$ -Ebene ein Winkel von der Größe  $\lambda_\nu \cdot \pi$  entsteht.

Wir erhalten also durch Vorgabe eines Polygons nicht nur eine dazu gehörige Differentialgleichung, sondern auch bei Vorgabe einer Differentialgleichung ein dazu gehöriges Polygon. So ergibt sich der Satz:

„Jedes Kreisbogenpolygon kann durch ein Integral einer Differentialgleichung dritter Ordnung auf eine Halbebene abgebildet werden. Umgekehrt existieren für beliebige reelle Werte der Parameter der Differentialgleichung immer Kreisbogenpolygone. Im besondern existieren Kreisbogenpolygone zu beliebig vorgeschriebenen Winkeln.“

<sup>1)</sup> Riemann, Werke, 2. Aufl., S. 312 ff.; Schwarz, Crelles Journal, Bd. 75 (1872); ges. Abh., S. 226.

Durch reelle lineare Transformation von  $z$  können wir in der Differentialgleichung drei singuläre Punkte an beliebige Stellen der reellen  $z$ -Achse verlegen. Die übrigen singulären Punkte kommen dann unter Aufrechterhaltung der Reihenfolge auch wieder auf die reelle  $z$ -Achse zu liegen. Die entstehende Differentialgleichung vermittelt die Abbildung desselben Polygons wie die vorige auf eine Halbene. Alle Differentialgleichungen, die durch reelle lineare Transformation der unabhängigen Variablen in einander übergeführt werden können, sehen wir deshalb als äquivalent an. Unter den  $n$  singulären Punkten sind also nur  $n-3$  wesentliche Parameter, dazu kommen die  $n$  Größen  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  und die  $n-3$  Größen  $A_{n-4} \dots A_0$ , die wir als akzessorische Parameter bezeichnen (K), sodafs unsere Differentialgleichung  $3n-6$  wesentliche Parameter enthält.

Bei drei singulären Punkten sind also  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  die einzigen wesentlichen Parameter. Es folgt:

„Ein Kreisbogendreieck ist durch seine drei Winkel bestimmt“ (K).

Bei vier singulären Punkten erhalten wir einen akzessorischen Parameter. Ein Kreisbogenviereck besitzt also sechs Parameter, was wir später auf elementarem Wege bestätigen werden.

Werden in unserer Differentialgleichung die Parameter kontinuierlich verändert, so verändern sich auch die Lösungen  $\eta$  kontinuierlich, wenn nur immer die singulären Punkte von einander getrennt bleiben. Demnach bekommen wir das wichtige Resultat:

„Sämtliche möglichen Kreisbogenvierecke bilden ein Kontinuum (ebenso wie alle Dreiecke).“

Dieses Kontinuum der Vierecke soll im zweiten Teil der Arbeit auf seine Eigenschaften hin untersucht werden. Vor allen Dingen wollen wir das Kontinuum untersuchen, das unter Festhaltung der Winkel durchlaufen wird, wenn sich der akzessorische Parameter von  $-\infty$  bis  $+\infty$  bewegt.

### 3. Historisches.

Zuerst ist Riemann zu der Differentialgleichung dritter Ordnung gelangt und hat auch die konforme Abbildung, die durch dieselbe vermittelt wird, zuerst untersucht. Er hat in einer Vorlesung über die hypergeometrische

Reihe im W.-S. 1858/59<sup>1)</sup> ausführlich über die Differentialinvariante und die Kreisbogendreiecke gesprochen. Ferner wird in der posthumen Abhandlung „Über die Flächen vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung“ und in der Abhandlung „Beispiele von Flächen kleinsten Inhalts bei gegebener Begrenzung“<sup>2)</sup> der Gedanke der konformen Abbildung des Kreisbogenpolygons auf die Halbebene vollständig entwickelt.

Im Anschluß an die Untersuchungen von Weierstrafs und auf Anregung desselben hat auch H. A. Schwarz die konforme Abbildung der Kreisbogenpolygone behandelt. In dieser Hinsicht ist vor allen Dingen die Arbeit grundlegend geworden: „Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt.“<sup>3)</sup>

Von den rein geometrischen Untersuchungen über Kreisbogenpolygone sind bis jetzt nur diejenigen über Kreisbogendreiecke zu einem gewissen Abschluß gekommen (K).<sup>4)</sup> Die vollständigsten Untersuchungen finden wir bei F. Schilling in seiner Dissertation<sup>5)</sup>: „Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarzschen  $s$ -Funktion.“

Über Polygone mit mehr als drei Ecken sind zunächst die genannten Vorlesungen von F. Klein zu erwähnen, ferner Arbeiten von A. Schönflieds und von Van Vleck. Aus den Vorlesungen ist die Behandlung der Laméschen Polynome und der anschließenden Hermiteschen Untersuchungen mit Hilfe von Vierecken zu nennen, welche für das letzte Kapitel dieser Arbeit als grundlegend anzusehen ist.<sup>5)</sup> Von A. Schönflieds besitzen wir die beiden Arbeiten: „Über Kreisbogenpolygone (erste Abhandlung)“ und „Über Kreisbogendreiecke und Kreisbogenvierecke.“<sup>6)</sup>

In der ersten Abhandlung behandelt er die geradlinigen Polygone. Die geradlinigen Polygone mit Membran werden konstruiert und es wird

1) Nachträge zu Riemanns Werken III, S. 79. (Leipzig, Teubner. 1902.)

2) Riemanns Werke, 2. Aufl., XVII, XXVII.

3) Schwarz, Preisschrift 1867 u. Crelles Journal Bd. 70 S. 105—120 (1869), Bd. 75 S. 292—335 (1872); ges. Abh. I, S. 6 u. II, S. 65—83, 211—259.

4) F. Klein, Math. Ann. 37, S. 573 (1890); Schilling, Math. Ann. 44, S. 161 (1893).

5) Vgl. auch F. Klein, Math. Ann. 40 (1891): „Über den Hermiteschen Fall der Laméschen Differentialgleichung“; Bôcher, Math. Encykl. II, A 7 a (1900).

6) Math. Ann. 42, S. 377 (1892) u. 44, S. 105 (1893).

eine Relation abgeleitet zwischen den Winkeln des Polygons und der Anzahl von Malen, die sich das Innere und die Begrenzung durch das Unendliche ziehen.

In der zweiten Arbeit werden die allgemeinen von Kreisen begrenzten Kreisbogenvierecke untersucht. Die vorliegende Arbeit soll zum Teil diese Arbeit ergänzen.

Spezielle Fälle von Kreisbogenvierecken hat Van Vleck in seiner Dissertation<sup>1)</sup> behandelt und in der Abhandlung:<sup>2)</sup> „On certain differential equations of the second order allied to Hermite's equation.“ In der Dissertation werden geradlinige Vierecke mit rechten Winkeln behandelt. In der zweiten Arbeit werden diejenigen Kreisbogenvierecke erschöpfend behandelt, deren Winkel  $\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$  sind.

<sup>1)</sup> Zur Kettenbruchentwicklung Laméscher und ähnlicher Integrale, Inaugural-Diss. Göttingen, Baltimore 1893.

<sup>2)</sup> American Journal of Math. XXI, p. 126 (1898).

Erster Hauptteil:

## Algebraische Untersuchung.

Wir fragen, welches ist die Gesamtheit der algebraisch unabhängigen algebraischen Relationen zwischen den Sinus und Kosinus der Maßzahlen eines Kreisbogenvierecks und welches ist ihr Geltungsbereich?

### § 1.

#### Die Kosinus und Sinus der Maßzahlen.

Wenn wir Relationen zwischen den Maßzahlen eines Kreisbogenvierecks aufstellen wollen, müssen wir zunächst wissen, wie viele von ihnen ein Kreisbogenviereck bestimmen. Ein Kreis in der Ebene besitzt drei Parameter, die vier Kreise des Kreisbogenvierecks demnach zwölf Parameter. Nun sollen aber alle Kreisbogenvierecke als gleichberechtigt angesehen werden, die bei jeder projektiven Transformation des Raumes ineinander übergehen, welche die  $\eta$ -Kugel in sich überführt. Da aber eine allgemeine projektive Transformation 15 Parameter enthält, eine Fläche zweiten Grades neun, so kommen auf die projektive Transformation der verlangten Art sechs Parameter, so daß wir von den zwölf Vierecksparemern sechs in Abzug zu bringen haben. Wir erhalten das Resultat:

„Ein Kreisbogenviereck besitzt sechs Parameter“.

Den bei Ableitung der algebraischen Relationen angewandten Gedanken hat Herr Professor F. Klein in dem erwähnten Seminar mitgeteilt.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Vgl. auch Stephanos, Bull. de la Société Mathém. de France, 1882, X, 134—137.

Wir benutzen das Tetraëder des Viereckskernes als Koordinatentetraëder eines projektivischen Koordinatensystems, dessen Koordinaten wir mit  $x_1, x_2, x_3, x_4$  bezeichnen. Auf der Ebene  $ab$  sei  $x_1 = 0$ , auf der Ebene  $bc$   $x_2 = 0$ , auf der Ebene  $cd$   $x_3 = 0$ , auf der Ebene  $da$   $x_4 = 0$ . Die Gleichung unserer Kugel kann dann in der Form geschrieben werden:

$$\Omega_{xx} \equiv \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 a_{ik} x_i x_k = 0,$$

wobei wir festsetzen, daß

$$a_{ik} = a_{ki}$$

sein soll.

Die Determinante der quaternären Form  $\Omega_{xx}$  ist dann symmetrisch und möge mit  $R$  bezeichnet werden, so daß:

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Weil es sich um die Darstellung einer reellen nicht geradlinigen Fläche handelt, ist  $R < 0$ .

Da ferner die vier Geraden des Vierseits die Kugel reell schneiden sollen, sind die vier Determinanten:  $a_{12}^2 - a_{11} a_{22}$ ,  $a_{23}^2 - a_{22} a_{33}$ ,  $a_{34}^2 - a_{33} a_{44}$ ,  $a_{41}^2 - a_{44} a_{11}$  positiv.

Bezeichnen wir mit  $R_{ik}$  die zum Element  $a_{ik}$  gehörige Unterdeterminante dritten Grades, so ist bekanntlich

$$\Phi_{uu} \equiv \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 R_{ik} u_i u_k = 0$$

die Gleichung unserer Kugel in Ebenenkoordinaten  $u_1, u_2, u_3, u_4$ .

Wählt man nun die Kugel als Fundamentalfläche unserer projektiven Maßbestimmung, so läßt sich der Kosinus der Entfernung zweier Punkte mit den Koordinaten  $x_i, y_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) bekanntlich aus der Formel berechnen:<sup>1)</sup>

$$\cos(x_i, y_i) = \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx} \cdot \Omega_{yy}}}$$

<sup>1)</sup> Cayley, sixth memoir upon Quantics, Phil. Transactions, t. 149 (1859); coll. mathem. Papers II, p 584.



Hierin bedeutet  $\Omega_{xy}$  die Bilinearform:

$$\Omega_{xy} = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 a_{ik} x_i y_k.$$

Der Kosinus des Winkels zweier Ebenen drückt sich durch die duale Formel aus, wenn  $u_i, v_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) die Koordinaten der beiden Ebenen sind:

$$\cos(u_i, v_i) = \frac{\Phi_{uv}}{\sqrt{\Phi_{uu}} \cdot \sqrt{\Phi_{vv}}},$$

worin

$$\Phi_{uv} = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 R_{ik} u_i v_k \text{ ist.}$$

Schneiden wir ferner die Kugel mit einer Koordinatenebene, setzen wir also z. B.  $x_4 = 0$ , so ist der Kosinus des Winkels zweier Geraden dieser Ebene mit den Linienkoordinaten  $u_1, u_2, u_3; v_1, v_2, v_3$  mit Hilfe der Form:

$$\Phi_{uv}^{(4)} = \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 R_{44, ik} u_i v_k$$

zu berechnen, wo  $R_{44, ik}$  die zu den Elementen  $a_{44}, a_{ik}$  gehörende Unterdeterminante zweiten Grades von  $R$  bedeutet. Es ist:

$$\cos(u_i v_i)_{x_4=0} = \frac{\Phi_{uv}^{(4)}}{\sqrt{\Phi_{uu}^{(4)}} \cdot \sqrt{\Phi_{vv}^{(4)}}}$$

worin

$$\Phi_{uv}^{(4)} = \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 R_{44, ik} u_i v_k \text{ ist,}$$

der Kosinus des Winkels der beiden bezeichneten Geraden.

Aus diesen Formeln ergibt sich:

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{a_{23}}{\sqrt{a_{22}} \cdot \sqrt{a_{33}}}; & \cos \widehat{ab} &= \frac{R_{12, 11}}{\sqrt{R_{44, 11}} \cdot \sqrt{R_{22, 11}}}; & \cos \alpha &= \frac{R_{41}}{\sqrt{R_{44}} \cdot \sqrt{R_{11}}} \\ \cos B &= \frac{a_{34}}{\sqrt{a_{33}} \cdot \sqrt{a_{44}}}; & \cos \widehat{bc} &= \frac{R_{13, 22}}{\sqrt{R_{11, 22}} \cdot \sqrt{R_{33, 22}}}; & \cos \beta &= \frac{R_{12}}{\sqrt{R_{11}} \cdot \sqrt{R_{22}}} \\ \cos C &= \frac{a_{41}}{\sqrt{a_{44}} \cdot \sqrt{a_{11}}}; & \cos \widehat{cd} &= \frac{R_{24, 33}}{\sqrt{R_{22, 33}} \cdot \sqrt{R_{44, 33}}}; & \cos \gamma &= \frac{R_{23}}{\sqrt{R_{22}} \cdot \sqrt{R_{33}}} \\ \cos D &= \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}} \cdot \sqrt{a_{22}}}; & \cos \widehat{da} &= \frac{R_{31, 44}}{\sqrt{R_{33, 44}} \cdot \sqrt{R_{11, 44}}}; & \cos \delta &= \frac{R_{34}}{\sqrt{R_{33}} \cdot \sqrt{R_{44}}} \end{aligned}$$

wo die auftretenden zwölf Quadratwurzeln im Vorzeichen ganz beliebig angenommen werden können.

Aus den Kosinus berechnen wir die Sinus. Bekanntlich gelten die Relationen:

$$P = |R_{ik}| = R^3$$

wo  $P$  die Determinante der  $R_{ik}$  bedeutet;

$$P_{ik} = R^2 \cdot a_{ik}$$

wo  $P_{ik}$  die zu  $R_{ik}$  gehörende Unterdeterminante von  $P$  bedeutet;

$$P_{ik, lm} = R \cdot R_{pq, rs}$$

wo  $P_{ik, lm}$  die zu den Elementen  $R_{ik}, R_{lm}$  gehörende Unterdeterminante zweiten Grades von  $P$  bedeutet und  $R_{pq, rs}$  die zu  $R_{ik, lm}$  komplementäre Unterdeterminante von  $R$ . Mit Hilfe dieser Relationen erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} \sin A &= \pm \frac{\sqrt{R_{44, 11}}}{\sqrt{a_{22}} \cdot \sqrt{a_{33}}}; & \sin \widehat{ab} &= \pm \frac{\sqrt{R_{11}} \cdot \sqrt{a_{33}}}{\sqrt{R_{44, 11}} \cdot \sqrt{R_{11, 22}}}; & \sin \alpha &= \pm \frac{\sqrt{R} \cdot \sqrt{R_{44, 11}}}{\sqrt{R_{44}} \cdot \sqrt{R_{11}}} \\ \sin B &= \pm \frac{\sqrt{R_{11, 22}}}{\sqrt{a_{33}} \cdot \sqrt{a_{44}}}; & \sin \widehat{bc} &= \pm \frac{\sqrt{R_{22}} \cdot \sqrt{a_{44}}}{\sqrt{R_{11, 22}} \cdot \sqrt{R_{22, 33}}}; & \sin \beta &= \pm \frac{\sqrt{R} \cdot \sqrt{R_{11, 22}}}{\sqrt{R_{11}} \cdot \sqrt{R_{22}}} \\ \sin C &= \pm \frac{\sqrt{R_{22, 33}}}{\sqrt{a_{41}} \cdot \sqrt{a_{11}}}; & \sin \widehat{cd} &= \pm \frac{\sqrt{R_{33}} \cdot \sqrt{a_{11}}}{\sqrt{R_{22, 33}} \cdot \sqrt{R_{33, 44}}}; & \sin \gamma &= \pm \frac{\sqrt{R} \cdot \sqrt{R_{22, 33}}}{\sqrt{R_{22}} \cdot \sqrt{R_{33}}} \\ \sin D &= \pm \frac{\sqrt{R_{33, 44}}}{\sqrt{a_{11}} \cdot \sqrt{a_{22}}}; & \sin \widehat{da} &= \pm \frac{\sqrt{R_{44}} \cdot \sqrt{a_{22}}}{\sqrt{R_{33, 44}} \cdot \sqrt{R_{44, 11}}}; & \sin \delta &= \pm \frac{\sqrt{R} \cdot \sqrt{R_{33, 44}}}{\sqrt{R_{33}} \cdot \sqrt{R_{44}}} \end{aligned}$$

Wir setzen fest, daß bei den Sinus die zwölf schon bei den Kosinus auftretenden Quadratwurzeln mit denselben Vorzeichen genommen werden sollen wie bei den Kosinus. Dann treten hier noch neue zwölf Vorzeichen hinzu, über die wir erst im Verlaufe der Untersuchung eine Festsetzung erhalten.  $\sqrt{R}$  ist im Vorzeichen auch noch willkürlich.

Da die Kosinus der Kanten  $A, B, C, D$  sämtlich reell sind, so folgt, daß  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$  dieselben Vorzeichen haben müssen. Wir wählen die  $a_{ii}$  positiv, nehmen sie sonst aber beliebig fest an. Dann bleiben in der Gleichung der Kugel noch die sechs Koeffizienten  $a_{11}, a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{42}, a_{13}$  unbestimmt und können als Parameter des Viereckskernes aufgefaßt werden. Da nun aber die algebraischen Relationen für die Gesamtheit der Viereckskerne gelten sollen, müssen sie von diesen Parametern unabhängig sein, also

Identitäten in den  $a_{ik}$  werden. Wollen wir demnach die algebraischen Relationen zwischen den Maßzahlen aufstellen, so haben wir aus den Gleichungen, welche die Kosinus und Sinus der Maßzahlen durch die  $a_{ik}$  darstellen, die  $a_{ik}$  nur zu eliminieren.

## § 2.

### Die algebraischen Relationen und ihr Geltungsbereich.

Wir eliminieren nun die  $a_{ik}$ , indem wir alle bei den Sinus neu hinzutretenden Vorzeichen positiv nehmen und uns hinterher überzeugen, daß diese Annahme bei den von uns betrachteten Vierseiten zulässig ist.

Es ist:

$$\begin{aligned} R_{11,42} &= a_{23}a_{34} - a_{24}a_{33} = \cos A \cos B \sqrt{a_{22}a_{44}} - a_{24}a_{33} \\ R_{11,42} &= \cos \widehat{ab} \sqrt{R_{44,11} \cdot R_{11,22}} = \cos \widehat{ab} \sin A \sin B \sqrt{a_{22}a_{44}} \\ \frac{a_{24}}{\sqrt{a_{22}a_{44}}} &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos \widehat{ab}. \end{aligned}$$

Durch zweimalige zyklische Vertauschung findet man:

$$\frac{a_{42}}{\sqrt{a_{44}a_{22}}} = \cos C \cos D - \sin C \sin D \cos \widehat{cd}.$$

Also ist:

$$\text{a) } \underline{\cos A \cos B - \sin A \sin B \cos \widehat{ab} = \cos C \cos D - \sin C \sin D \cos \widehat{cd}}$$

und nach einmaliger zyklischer Vertauschung:

$$\text{b) } \underline{\cos B \cos C - \sin B \sin C \cos \widehat{bc} = \cos D \cos A - \sin D \sin A \cos \widehat{da}}.$$

Die Ebenenwinkel des Kernes entsprechen dual den Kantenlängen, die Seitenlängen entsprechen dual sich selbst, wie man aus den Formeln für die Sinus und Kosinus der Maßzahlen erkennt. Man wird also zwei Relationen aufstellen können, die zu den Relationen a) und b) dual sind. Es ist:

$$\begin{aligned} P_{11,42} &= R_{23}R_{34} - R_{24}R_{33} = \cos \gamma \cos \delta \sqrt{R_{33}R_{22}R_{44}} - R_{24}R_{33} \\ P_{11,42} &= R \cdot R_{33,24} = \cos \widehat{cd} \sqrt{R_{22,33} \cdot R_{33,44}} = \cos \widehat{cd} \sin \gamma \sin \delta \sqrt{R_{22}R_{44}} \end{aligned}$$

Also ist:

$$\cos \gamma \cos \delta - \sin \gamma \sin \delta \cos \widehat{cd} = \frac{R_{21}}{\sqrt{R_{22} R_{44}}}$$

Vertauscht man zweimal zyklisch, so ergibt sich:

$$e) \quad \underline{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos \widehat{ab} = \cos \gamma \cos \delta - \sin \gamma \sin \delta \cos \widehat{cd}}$$

und daraus durch zyklische Vertauschung:

$$d) \quad \underline{\cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos \widehat{bc} = \cos \delta \cos \alpha - \sin \delta \sin \alpha \cos \widehat{da}}$$

Wir wollen jetzt nur aus den Ausdrücken für die Sinus der Maßzahlen eliminieren. Es ist:

$$\begin{aligned} \sqrt{R} \cdot \sin \alpha & \sqrt{\frac{R_{44} \cdot R_{11}}{R_{44, 11}}} = \sin \alpha \cdot \sin \widehat{da} \cdot \sin \widehat{ab} \cdot \sqrt{\frac{R_{33, 44} \cdot R_{44, 11} \cdot R_{11, 22}}{a_{22} a_{33}}} \\ & = \sin \alpha \sin \widehat{da} \sin \widehat{ab} \sin D \sin A \sin B \cdot \sqrt{a_{11} a_{22} a_{33}} a_{44}. \end{aligned}$$

Nach einmaliger zyklischer Vertauschung ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{R}{a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}}} & = \sin \alpha \sin \widehat{da} \sin \widehat{ab} \sin D \sin A \sin B \\ & = \sin \beta \sin \widehat{ab} \sin \widehat{bc} \sin A \sin B \sin C. \end{aligned}$$

$$e) \quad \underline{\sin D \sin \widehat{da} \sin \alpha = \sin \beta \sin \widehat{bc} \sin C}$$

und hieraus durch zyklische Vertauschung:

$$f) \quad \underline{\sin A \sin \widehat{ab} \sin \beta = \sin \gamma \sin \widehat{cd} \sin D}$$

$$g) \quad \underline{\sin B \sin \widehat{bc} \sin \gamma = \sin \delta \sin \widehat{da} \sin A}$$

$$h) \quad \underline{\sin C \sin \widehat{cd} \sin \delta = \sin \alpha \sin \widehat{ab} \sin B}$$

Da die Relationen e) und g), f) und h) jedesmal zueinander dual sind, erhält man durch den dualen Eliminationsprozess keine neuen Formeln.

Wir können noch weitere Relationen zwischen sechs Maßzahlen ableiten. Es ist:

$$a_{14} R_{11, 22} + a_{31} R_{13, 22} + a_{44} R_{14, 22} = 0.$$

Also ist:

$$\cot C \sin B \sqrt{a_{44} a_{33}} \sqrt{R_{22, 33}} R_{11, 22} + \cos B \sqrt{a_{33} a_{44}} \cos \widehat{bc} \sqrt{R_{11, 22} \cdot R_{33, 22}} + a_{44} R_{14, 22} = 0$$

oder:

$$\cot C \sin B + \cos B \cos \widehat{bc} + \frac{R_{14,22} \cdot \sqrt{a_{44}}}{\sqrt{R_{22,33} \cdot R_{11,22}} \cdot \sqrt{a_{33}}} = 0.$$

Ferner besteht die Gleichung:

$$R_{11} P_{41,33} + R_{12} P_{42,33} + R_{14} P_{44,33} = 0$$

oder:

$$R_{11} R_{14,22} + R_{12} R_{42,11} + R_{14} R_{11,22} = 0.$$

Demnach ist:

$$R_{11} R_{14,22} + \cos \beta \sqrt{R_{11} R_{22}} \cos \widehat{ab} \sqrt{R_{44,11}} \cdot R_{22,11} + \cot \alpha \sin \beta \sqrt{R_{11} \cdot R_{22}} \sqrt{R_{44,11}} R_{11,22} = 0$$

oder:

$$\cot \alpha \sin \beta + \cos \beta \cos \widehat{ab} + \frac{R_{14,22} \cdot \sqrt{R_{11}}}{\sqrt{R_{44,11}} \cdot R_{22,11} \cdot \sqrt{R_{22}}} = 0.$$

Also besteht die Gleichung:

$$\frac{\cot C \sin B + \cos B \cos \widehat{bc}}{\cot \alpha \sin \beta + \cos \beta \cos \widehat{bc}} = \frac{\sqrt{a_{44}} \sqrt{R_{44,11}} \sqrt{R_{22}}}{\sqrt{a_{33}} \sqrt{R_{22,33}} \sqrt{R_{11}}} = \frac{\sin \widehat{bc}}{\sin \widehat{ab}}.$$

Wir erhalten die Relation:

$$i) \quad (\cot C \sin B + \cos B \cos \widehat{bc}) \sin \widehat{ab} = (\cot \alpha \sin \beta + \cos \beta \cos \widehat{ab}) \sin \widehat{bc}$$

Durch zyklische Vertauschung ergeben sich hieraus noch drei weitere Relationen k), l) und m).

Wir haben jetzt zwischen den Kosinus und Sinus der Maßzahlen zwölf Gleichungen aufgestellt, zu denen noch zwölf weitere Gleichungen zwischen den Kosinus und Sinus jeder einzelnen Maßzahl treten:  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$  usw.

Wenn diese 24 Relationen dazu ausreichen sollen, in der 24fachen Mannigfaltigkeit der Kosinus und Sinus aller zwölf Maßzahlen diejenige zwölf-dimensionale Mannigfaltigkeit zu bestimmen, welche von den Kosinus und Sinus der Maßzahlen der Vierecke gebildet wird, so müssen sich, wenn wir die Kosinus und Sinus von sechs geeignet gewählten Maßzahlen geben, die Kosinus und Sinus der übrigen sechs Maßzahlen aus den 24 Relationen berechnen lassen und zwar eindeutig bis auf die notwendig unbestimmten Vorzeichen.

Wir geben, um dies zu zeigen, die Kosinus und Sinus der Winkel  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  und der Seiten  $\widehat{da}$  und  $\widehat{ab}$ .

Aus den Relationen c) und d) lassen sich  $\cos \widehat{bc}$  und  $\cos \widehat{cd}$  eindeutig berechnen.  $\sin \widehat{bc}$  und  $\sin \widehat{cd}$  sind dann auch bestimmt bis auf ihre Vorzeichen.

Zur Berechnung der Kosinus der Kantenlängen benutzen wir die Relationen i), k), l), m), welche wir mit Hilfe der Relationen e), f), g), h) in folgender Weise umwandeln:

Aus h) ergibt sich:

$$\sin B = \sin C \frac{\sin \widehat{cd} \sin \delta}{\sin \widehat{ab} \sin \alpha}$$

Setzen wir diesen Wert in i) ein, so erhalten wir:

$$\cos C \sin \widehat{cd} \sin \delta + \cos B \cos \widehat{bc} \sin \widehat{ab} \sin \alpha = (\cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha \cos \widehat{ab}) \sin \widehat{bc}.$$

Wandeln wir die Relationen k), l), m) in entsprechender Weise um, so erhalten wir vier Gleichungen, aus denen wir die Kosinus der Kantenlängen eindeutig berechnen können, wenn wir die Vorzeichen von  $\sin \widehat{bc}$  und  $\sin \widehat{cd}$  festsetzen.

Die Sinus der Kantenlängen sind damit auch bis auf ihre Vorzeichen bestimmt. Diese sind jedoch nicht ganz willkürlich, sondern müssen so gewählt werden, daß die Relationen a) und b) erfüllt werden. Demnach sind die Vorzeichen der vier Produkte  $\sin A \sin B \sin \widehat{ab}$ ,  $\sin B \sin C \sin \widehat{bc}$ ,  $\sin C \sin D \sin \widehat{cd}$ ,  $\sin D \sin A \sin \widehat{da}$  bestimmt. Ändern wir also das Vorzeichen eines Sinus einer Kante, so müssen auch die Vorzeichen der Sinus der andern drei Kanten geändert werden, so daß nur das Vorzeichen einer einzigen Kantenlänge willkürlich bleibt.

Unbestimmt bleiben also, wenn wir die obigen Kosinus und Sinus geben, die Vorzeichen von  $\sin \widehat{bc}$ ,  $\sin \widehat{cd}$  und vom Sinus einer beliebigen Kantenlänge.

Wir untersuchen nun die Geltung unserer Relationen für die in der Einleitung definierten Vierseite.

Wir haben festzustellen, ob die willkürliche Festsetzung, die wir am Anfang von § 2 über die Vorzeichen der Sinus getroffen haben, für unsere Vierseite zulässig ist.

Wir gehen von einem Vierseit einfachster Art aus, das wir als Elementarvierseit bezeichnen. Dasselbe soll durch die verstärkten Linien in Fig. 1 dargestellt sein.

Wir drehen zunächst die Ebene  $x_2 = 0$  um die Kante  $x_2 = 0, x_4 = 0$  des Tetraeders so weit, bis sie mit der Ebene  $x_4 = 0$  zusammenfällt (Fig. 3). Der Punkt 2 möge dabei in der Ebene  $x_3 = 0$  etwa einen Kreis beschreiben und nach 2' gelangen. Die Ebene  $x_1 = 0$  denken wir uns dabei um die Kante  $A$  drehbar. Sie fällt schließlich auch mit der Ebene  $x_4 = 0$  zusammen. In der Grenze entsteht ein geradliniges Dreieck 12'4. Bezeichnen wir die Werte, welche die Kanten und die Seiten  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  in dieser in der Figur erkennbaren Grenzlage annehmen, mit  $A', B', C', D', \widehat{ab}', \widehat{cd}'$ , so sind die Längen der ganz sich im Endlichen erstreckenden Seiten dieses Dreiecks:  $\pi - A', B', \pi + D' - C'$ . Ferner besitzt das Dreieck den Winkel  $\widehat{ab}'$ . Es gilt die Relation der sphärischen Trigonometrie:

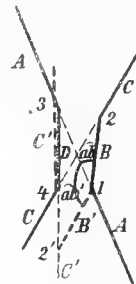


Fig. 3.

$$\cos(\pi + D' - C') = \cos(\pi - A') \cos B' + \sin(\pi - A') \sin B' \cos \widehat{ab}'$$

oder:

$$\cos(D' - C') = \cos A' \cos B' - \sin A' \sin B' \cos \widehat{ab}'.$$

Nun ist  $\widehat{cd} = \pi$ .

Da die Relation a), wenn wir in ihr  $\widehat{cd}' = \pi$  setzen, in die Relation der Grenzlage übergeht, gilt die Relation a) für die Maßzahlen des Elementarvierseits.

In entsprechender Weise beweist man die Gültigkeit der Relation b).

Wir wählen weiter die Größen  $a_{ik}$  zunächst so, daß alle vier Ecken des Vierseits im Innern der Kugel liegen und verschieben dann (Fig. 4) die Ebene  $ab$  des Tetraeders, bis sie durch die Schnittgerade der Ebenen  $bc$  und  $da$  geht. Bezeichnen wir die Werte, welche die Winkel des Elementarvierseits und die Seiten  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  in der Grenzlage annehmen, mit  $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \widehat{ab}', \widehat{cd}'$ , so sind die Innenwinkel des entstehenden sphärischen Dreiecks  $\pi - \gamma', \pi - \delta', \pi - \alpha' - \beta'$  und ferner besitzt das Dreieck die Seite  $\widehat{cd}'$ . Es gilt die Relation der sphärischen Trigonometrie:

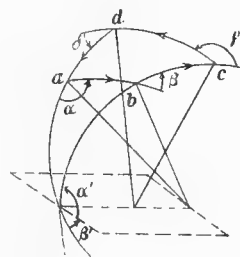


Fig. 4.

$$\cos(\pi - \alpha' - \beta') = -\cos(\pi - \gamma') \cos(\pi - \delta') + \sin(\pi - \gamma') \sin(\pi - \delta') \cos \widehat{cd}'$$

oder:

$$\cos(\alpha' + \beta') = \cos \gamma' \cos \delta' - \sin \gamma' \sin \delta' \cos \widehat{cd}'.$$

Nun ist in der Grenzlage  $\widehat{ab}' = 0$  und da, wenn wir in der Relation e)  $\widehat{ab} = 0$  setzen, dieselbe in die obige Beziehung übergeht, gilt die Relation e) für die Maßzahlen des Elementarvierseits zunächst unter der besonderen Voraussetzung, daß dessen vier Ecken im Innern der Kugel liegen. Da diese Elementarvierseite aber kontinuierlich in solche übergeführt werden können, deren Ecken beliebig zur Kugel liegen, gilt die Relation e) für jedes Elementarvierseit.

Entsprechend beweist man die Gültigkeit der Relation d).

Sollte die Relation e) nicht gelten, so müßte für die Maßzahlen des Elementarvierseits statt ihrer die Relation bestehen:

$$\sin D \sin \widehat{da} \sin a = -\sin \beta \sin \widehat{bc} \sin C.$$

Da aber für ein Elementarvierseit, dessen vier Ecken im Innern der Kugel liegen, die Sinus der Winkel und Seiten reell und positiv, die Sinus der Kanten rein imaginäre positive Größen sind, ist das Bestehen obiger Relation ausgeschlossen.

Also gelten auch die Relationen e) und f) für das Elementarvierseit.

Wir dehnen die Geltung der Relationen weiter aus.

Vermehren oder vermindern wir die Maßzahlen um das Vielfache von  $2\pi$ , so bleiben die Relationen ungeändert, weil die Sinus und Kosinus ungeändert bleiben.

Wenn wir in den 13 Wurzeln

$$\sqrt{a_{11}}, \sqrt{a_{22}}, \sqrt{a_{33}}, \sqrt{a_{44}}, \sqrt{R_{11,22}}, \sqrt{R_{22,33}}, \sqrt{R_{33,44}}, \sqrt{R_{44,11}}, \sqrt{R_{11}}, \sqrt{R_{22}}, \sqrt{R_{33}}, \sqrt{R_{44}}, \sqrt{R},$$

welche in den Ausdrücken für die Sinus und Kosinus der Maßzahlen vorkommen, sämtliche möglichen Vorzeichenkombinationen bilden, so entsteht dadurch eine Gruppe von  $2^{13}$  Substitutionen der Maßzahlen. Wir zeigen, daß unsere Relationen sich ihr gegenüber invariant verhalten.

Die Relationen verhalten sich der ganzen Gruppe gegenüber invariant, wenn sie den Erzeugenden der Gruppe gegenüber invariant bleiben. Wir betrachten also die einzelnen erzeugenden Operationen. Diese entstehen durch jedesmalige Änderung des Vorzeichens einer der 13 Wurzeln.

Es handelt sich um die Änderungen, welche die Maßzahlen bei der Vorzeichenänderung der Sinus und Kosinus erleiden.



Kehren wir das Vorzeichen von  $\sqrt{R_{11}}$  um, so erleiden die Maßzahlen die Substitution:

$$\begin{array}{l} A \quad A \quad \widehat{ab} \quad 2\pi - \widehat{ab} \quad \alpha \quad \pi + \alpha \\ B \quad B \quad \widehat{bc} \quad \widehat{bc} \quad \beta \quad \pi + \beta \\ C \quad C \quad \widehat{cd} \quad \widehat{cd} \quad \gamma \quad \gamma \\ D \quad D \quad \widehat{da} \quad \widehat{da} \quad \delta \quad \delta \end{array}$$

Geometrisch entspricht dieser Substitution die Umkehr des Durchlaufungssinnes des Kreises  $\widehat{ab}$ .

Kehren wir das Vorzeichen von  $\sqrt{R_{11,22}}$  um, so erleiden die Maßzahlen die Substitution:

$$\begin{array}{l} A \quad A \quad \widehat{ab} \quad \pi + \widehat{ab} \quad \alpha \quad \alpha \\ B \quad 2\pi - B \quad \widehat{bc} \quad \pi + \widehat{bc} \quad \beta \quad 2\pi - \beta \\ C \quad C \quad \widehat{cd} \quad \widehat{cd} \quad \gamma \quad \gamma \\ D \quad D \quad \widehat{da} \quad \widehat{da} \quad \delta \quad \delta \end{array}$$

Geometrisch entspricht dieser Substitution die Umkehr der Richtung der Kante  $B$ , wobei sich auch gleichzeitig der Drehungssinn für den Ebenenwinkel  $\beta$  umkehrt.

Kehren wir das Vorzeichen von  $\sqrt{a_{33}}$  um, so erleiden die Maßzahlen die Substitution:

$$\begin{array}{l} A \quad \pi + A \quad \widehat{ab} \quad 2\pi - \widehat{ab} \quad \alpha \quad \alpha \\ B \quad \pi + B \quad \widehat{bc} \quad \widehat{bc} \quad \beta \quad \beta \\ C \quad C \quad \widehat{cd} \quad \widehat{cd} \quad \gamma \quad \gamma \\ D \quad D \quad \widehat{da} \quad \widehat{da} \quad \delta \quad \delta \end{array}$$

Geometrisch entspricht dieser Substitution die Umkehr des Durchlaufungssinnes einer Seite am polaren Vierseit.

Kehren wir das Vorzeichen von  $\sqrt{R}$  um, so erleiden nur die Winkel eine Substitution und zwar folgende:

$$\begin{array}{l} \alpha \quad 2\pi - \alpha \\ \beta \quad 2\pi - \beta \\ \gamma \quad 2\pi - \gamma \\ \delta \quad 2\pi - \delta \end{array}$$

Geometrisch entspricht dieser Substitution die Umkehr des gemeinsamen Drehungssinnes der Ebenenwinkel.

Unsere Relationen verhalten sich allen diesen Substitutionen gegenüber invariant, folglich auch den durch zyklische Vertauschung aus diesen zu bildenden Substitutionen und der ganzen Gruppe gegenüber.

Diesen Vorzeichenwechseln entspricht gerade der Übergang vom Elementarvierseit zu dem allgemeinsten Vierseit der Einleitung, wie folgende Überlegung zeigt:

Aus dem Elementarvierseit erhalten wir sämtliche allgemeinen Vierseite, indem wir erstens jeder Seite jeden der beiden möglichen Durchlaufungssinne, zweitens jeder Kante jeden der beiden möglichen Richtungssinne, drittens jeder Seite des zugeordneten polaren Vierseits jeden der beiden möglichen Durchlaufungssinne zuordnen. Endlich können wir zu jedem Winkel, jeder Seite und jeder Kante beliebig viele Multipla von  $2\pi$  hinzufügen. Da die Relationen auch bei der Vorzeichenänderung von  $\sqrt{E}$  invariant bleiben, ist es zur Geltung der Relationen zwar erforderlich, daß für alle Winkel derselbe Drehungssinn genommen wird; aber der Sinn der Drehung ist dabei ganz beliebig.

Damit ist gezeigt:

Die Formelgruppe der algebraischen Relationen gilt für sämtliche Vierseite, welche den in der Einleitung gegebenen Festsetzungen Genüge leisten. —

Diese Untersuchungen gehen parallel mit den Studyschen Untersuchungen über Dreiecke.

Die Formeln der sphärischen Trigonometrie lassen sich in ganz analoger Weise wie unsere sechs algebraischen Relationen ableiten, wenn man in der Ebene einen Kegelschnitt einer projektiven Maßbestimmung als Fundamentalgebilde zu Grunde legt und die Relationen aufsucht, welche zwischen Winkeln und Seiten eines Koordinatendreiecks bestehen, auf das die Gleichung des Kegelschnitts bezogen wird. Da bei der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie, die sich auf größte Kugelkreise bezieht, Winkel und Seiten immer reell sind, so ist bei der Ableitung ihrer Relationen ein imaginärer Kegelschnitt der Maßbestimmung zu Grunde zu legen. Der Studysche Dreiecksbegriff muß sich auf ein solches Koordinatendreieck unmittelbar übertragen lassen, wenn man für jede Seite des Dreiecks einen Richtungssinn und für jeden Winkel einen Drehungssinn vorschreibt.

Wenn wir nun gezeigt haben, daß der Geltungsbereich unserer sechs fundamentalen Relationen alle unsere Vierseite umfaßt, so ist hiermit eine Ausdehnung der Studyschen Entwicklungen nach zwei Richtungen hin vorgenommen.

Da bei der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie ein imaginärer Kegelschnitt zu Grunde gelegt werden muß, so würde die unmittelbare Erweiterung der Studyschen Entwicklungen darin bestehen, daß man bei der Theorie des Koordinatentetraëders nicht eine reelle Kugel, sondern eine imaginäre Fläche zweiten Grades zu Grunde legt. Nur dann werden immer sämtliche zwölf Maßzahlen reell. Der Studysche Dreiecksbegriff ist dann auf das Koordinatentetraëder zu übertragen, indem man für jeden Ebenenwinkel und jeden Seitenwinkel einen Drehungssinn und für jede Kante einen Richtungssinn in geeigneter Weise vorschreibt.

Die Erweiterung der Studyschen Entwicklungen nach der andern Richtung hin besteht in der Übertragung dieser Theorie auf Koordinatendreiecke und Koordinatentetraëder, bei denen ein reeller Kegelschnitt und eine reelle Fläche zweiten Grades der Maßbestimmung zu Grunde gelegt werden. Im Raume muß dann noch die Maßbestimmung auf geradlinigen Flächen von der auf nicht geradlinigen unterschieden werden. Bei kontinuierlicher Fortsetzung der imaginären Fundamentalgebilde in reelle bleiben allerdings die algebraischen Relationen ungeändert bestehen, aber doch ist dann noch zu untersuchen, was hierbei aus der Studyschen Gruppe und unserer Gruppe wird, welche die Erweiterung der Studyschen Gruppe darstellen würde; jetzt liegen die Realitätsverhältnisse komplizierter als bei durchweg reellen Maßzahlen.

An eine ähnliche Erweiterung hat offenbar auch Study gedacht, wie man aus den Worten im Schluß seiner Arbeit sieht: „Wird es möglich sein (wie es durch verschiedene Umstände wahrscheinlich gemacht wird), die Theorie des Tetraëders, zunächst im nichteuklidischen Raume, in ähnlicher Weise zu behandeln, wie die des Dreiecks?“

Zweiter Hauptteil.

## Transzendente Untersuchung.

§ 1.

### Fragestellungen.

Wir wenden uns zu dem zweiten Teil, der transzendenten Untersuchung, und behandeln ausschließlich die in den Kern eingehängten Membrane. Wir stellen folgende Fragen:

1. Wie können bei Vorgabe der Winkel sämtliche Kreisbogenvierecke mit diesen Winkeln konstruiert und übersichtlich in eine kontinuierliche Folge gebracht werden?

2. Welches sind die Ergänzungsrelationen?

3. Wenn zwei Kreisbogenvierecke dieselben Winkel, dieselben Umlaufzahlen der Seiten besitzen und wenn ihre Kerne sich durch eine Bewegung zur Deckung bringen lassen, sind dann die Membrane selbst identisch?

Wir denken uns, wie verabredet, das Viereck immer auf der Kugel. Wir zeichnen es aber aus praktischen Gründen in der Ebene. Dabei kann allerdings das Unendliche stören.

Die Winkel des Kreisbogenvierecks messen wir jetzt, um den Faktor  $\pi$  nicht immer schreiben zu müssen, direkt durch die Exponentendifferenzen der Differentialgleichung, welche wir nun mit  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  bezeichnen wollen. Ein Winkel von  $180^\circ$  erhält also jetzt den Wert 1, ein Winkel von  $360^\circ$  den Wert 2 usw.

§ 2.

**Reduktions- und Erweiterungsprozesse.**

Wir werden im folgenden von den „Reduktions- und Erweiterungsprozessen“ der Kreisbogenpolygone Gebrauch machen (K).

1. Wir erweitern ein Kreisbogenpolygon durch „polare Einhängung“ einer Kreisscheibe in folgender Weise: Wir führen von einer Ecke aus nach einer gegenüberliegenden Seite einen Schnitt  $p$  (z. B. von  $d$  nach  $\widehat{ab}$ , Fig. 5) und in einer Kreisscheibe, welche denselben Radius wie der Begrenzungskreis  $\widehat{ab}$  besitzt, einen zu  $p$  kongruenten Schnitt  $p'$ . Dann vereinigen wir Polygon und Kreisscheibe, indem wir beide Flächenstücke aufeinanderlegen und die Ränder von  $p$  und  $p'$  über Kreuz zusammenheften. Jetzt ist ein neues Kreisbogenpolygon entstanden, in welchem ein Winkel um die Zahl zwei gewachsen ist, und eine Seite um einen Umlauf zugenommen hat.

Umgekehrt kann es auch möglich sein, eine Kreisscheibe polar auszuhängen, worunter wir dann den entgegengesetzten Prozess verstehen.

Damit von einer Ecke  $d$  einer Membran bezüglich der Seite  $\widehat{ab}$  der Begrenzung eine polare Einhängung möglich ist, ist notwendig und hinreichend, daß sich von  $d$  nach  $\widehat{ab}$  innerhalb der Membran ein Schnitt  $p$  ziehen lasse, der ganz auf derselben Seite des Kreises  $\widehat{ab}$  verläuft wie die Membran und keine in demselben Blatt oder verschiedenen Blättern sich kreuzenden Zweige besitzt.

2. Wir erweitern ein Polygon durch Einhängung einer Vollkugel oder durch „diagonale Einhängung“, indem wir zwischen zwei nicht aufeinanderfolgenden Ecken einen Schnitt  $d$  ziehen, zwischen zwei Punkten einer Vollkugel einen zu  $d$  kongruenten Schnitt  $d'$ , alsdann Polygon und Vollkugel so aufeinanderlegen, daß die Schnitte aufeinanderfallen und dann die Ränder der Schnitte kreuzweise vereinigen (Fig. 6). Die Umlaufszahlen der Seiten bleiben ungeändert, zwei Winkel werden um die Zahl 2 vergrößert.

Umgekehrt kann es auch möglich sein, diagonal auszuhängen.

Damit eine diagonale Einhängung möglich sei, muß sich innerhalb der Membran von einer Ecke nach einer nicht auf sie folgenden Ecke ein Schnitt führen lassen, der keine in demselben Blatt oder verschiedenen Blättern sich kreuzenden Zweige besitzt.

3. Wir erweitern ein Polygon durch *Einhängung* eines Kreisringes oder durch „*transversale Eihängung*“, indem wir zwischen Polygonseiten, die sich imaginär schneiden, einen Schnitt  $t$  führen, in einem von zwei Kreisen begrenzten Ringstück einen zu  $t$  kongruenten Schnitt  $t'$ , und wie bei 1. und 2. die Flächenstücke längs der Schnitte zusammenheften (Fig. 7). Dabei muß der Ring dem von den Kreisen der betreffenden beiden Seiten begrenzten Ring kongruent sein. Die Winkel bleiben ungeändert, aber die Umlaufszahlen von zwei Seiten werden um je 1 erhöht.

Eventuell kann auch transversal ausgehängt werden.

Damit eine transversale Eihängung möglich sei, dürfen die Kreise der beiden Polygonseiten, zwischen denen eingehängt werden soll, sich nicht reell schneiden und es muß sich von einer Seite nach der anderen innerhalb der Membran ein Schnitt ziehen lassen, der ganz innerhalb des von beiden Kreisen begrenzten Ringes verläuft und keine in demselben Blatt oder verschiedenen Blättern sich kreuzenden Zweige besitzt.

4. Wir erweitern ein Polygon durch „*laterale Anhängung*“ einer Kreisscheibe, indem wir längs einer nicht umlaufenden Polygonseite diejenige Kreisscheibe, welche die auf dem Innern der Seite liegende Kreisscheibe zu einer Vollkugel ergänzt, einfach anheften (Fig. 8). Die Membran liegt nach Anhängung der Kreisscheibe auf der anderen Seite des begrenzenden Kreises, die anliegenden Winkel werden beide um 1 vermehrt, der begrenzende Kreisbogen wird durch denjenigen Kreisbogen ersetzt, der ihn zu einer vollen Peripherie ergänzt. Eventuell kann auch eine Kreisscheibe lateral abgetrennt werden. Damit lateral angehängt werden kann, ist notwendig und hinreichend, daß die betreffende Seite nicht umlaufend ist.

Ein zur Ausführung eines Erweiterungsprozesses zu ziehender Schnitt darf auch andere Schnitte durchsetzen, wenn er nur die oben angegebenen Bedingungen erfüllt. Hierzu ist folgendes Beispiel bemerkenswert. In das Viereck der Fig. 9 sei diagonal eingehängt, was durch die Linie  $d$  angedeutet ist. Jetzt scheint keine transversale Anhängung mehr möglich zu sein. Da die Membran aber nach Eihängung der Vollkugel auch noch außerhalb des schattierten Gebietes verläuft, so ist  $t$  ein Schnitt, an dem entlang eine transversale Eihängung möglich ist. Das Viereck hat dann zwei Windungspunkte und zwei einfach umlaufende Seiten. Man erhält dasselbe Viereck

durch zwei polare Anhängungen, die in Fig. 10 durch die Linien  $p_1, p_2$  angedeutet sind.

Ein Polygon, das keine Aushängungs- (Reduktions-)prozesse der bezeichneten Art mehr zulässt, nennen wir „reduziert“ (K). Sobald wir alle reduzierten Kreisbogenvierecke kennen, die möglich sind, ist es durch Anwendung der obigen Erweiterungsprozesse möglich, aus ihnen alle Kreisbogenvierecke zu konstruieren, die es überhaupt gibt.

---

## Kapitel I.

### Konstruktion der Kreisbogenvierecke.

#### A. Konstruktion der reduzierten Vierecke.

Zur Konstruktion der reduzierten Vierecke werden wir mit einigen Erweiterungen dieselben Methoden benutzen, die Schönflieds in Math. Ann. 44 angewandt hat.

Wir bilden wie Schönflieds eine Reihe von Klassen reduzierter Vierecke und suchen Ungleichheitsbedingungen auf, die von den Winkeln erfüllt werden müssen, damit die Vierecke reduziert sind. Einmal werden wir jedoch, indem wir die Methoden von Schönflieds in etwas anderer Weise verwerten, eine andere Einteilung der reduzierten Vierecke erhalten, ferner werden wir engere Ungleichheitsbedingungen ableiten, endlich auch für jede Klasse reduzierter Vierecke ein Beispiel zeichnen, damit wir im wesentlichen von den reduzierten Vierecken eine Vorstellung erhalten.

#### § 3.

#### Sätze über Kreisbogendreiecke.

Wir stellen im folgenden alle Typen reduzierter Kreisbogendreiecke zusammen, welche es gibt. Wir unterscheiden nach Schwarz<sup>1)</sup> dabei

<sup>1)</sup> Schwarz, ges. Abh. II, S. 234.

Dreiecke erster Art, bei denen der Scheitel des Kerns, der hier von drei Ebenen gebildet wird, im Innern der Kugel liegt, Dreiecke zweiter Art, bei denen er auf der Kugel, Dreiecke dritter Art, bei denen er auferhalb der Kugel liegt.

Die Dreiecke erster Art werden begrenzt von drei Kreisen ohne reellen Orthogonalkreis, die Dreiecke zweiter Art von Kreisen, die sich in einem Punkte schneiden. Wirft man diesen nach Unendlich, so werden die Dreiecke durch drei Gerade begrenzt. Die Begrenzungskreise der Dreiecke dritter Art besitzen einen reellen Orthogonalkreis.

Alle Dreiecksmembranen, welche in denselben Kern eingehängt sind, nennen wir „verwandte“ Dreiecke. Unter allen verwandten Dreiecken hat jedesmal eines, das „Minimaldreieck“, die kleinste Winkelsumme.

Sind  $\lambda, \mu, \nu$  die Winkel des Minimaldreiecks, so ist bei den Dreiecken erster Art:  $\lambda + \mu + \nu > 1$ , zweiter Art:  $\lambda + \mu + \nu = 1$ , dritter Art:  $\lambda + \mu + \nu < 1$ , sodafs die Dreiecke der drei Arten durch das Minimaldreieck charakterisiert werden.

Wir wollen nun alle Typen reduzierter Dreiecke zeichnen. Im Kern erster Art sind 16 reduzierte Dreiecke, im Kern zweiter Art, wenn wir nichts über den Umlaufssinn bestimmen, 19 reduzierte Dreiecke, im Kern dritter Art ebenfalls 19 reduzierte Dreiecke enthalten. Die Winkel der reduzierten Dreiecke im Kern erster, zweiter und dritter Art sind:

	1	2	3	4
I	$\lambda, \mu, \nu$	$1-\lambda, 1-\mu, \nu$	$1-\lambda, \mu, 1-\nu$	$\lambda, 1-\mu, 1-\nu$
II	$2-\lambda, 1-\mu, 1-\nu$	$1+\lambda, \mu, 1-\nu$	$\lambda, 1-\nu, 1+\nu$	$1-\lambda, 1+\mu, \nu$
III	$1-\lambda, 2-\mu, 1-\nu$	$\lambda, 1+\mu, 1-\nu$	$1+\lambda, 1-\mu, \nu$	$1-\lambda, \mu, 1+\nu$
IV	$1-\lambda, 1-\mu, 2-\nu$	$\lambda, \mu, 2-\nu$	$\lambda, 2-\mu, \nu$	$2-\lambda, \mu, \nu$

wozu bei den Kernen zweiter und dritter Art noch die Dreiecke kommen:

	1	2	3	4
V	$2+\lambda, 1-\mu, 1-\nu$	$1-\lambda, 2+\mu, 2-\nu$	$1-\lambda, 1-\mu, 2+\nu$	

Auf der beigegebenen letzten Figurentafel ist ein Dreieck eines jeden Typus gezeichnet (K).



Vor allen Dingen beachten wir hier, daß in dem Kern dritter Art die Dreiecke des Typus  $2-\lambda, \mu, \nu$  eine sich überschlagende Seite haben.

Ferner brauchen wir folgende Sätze, welche wir der Arbeit von Schönflieds<sup>1)</sup> entnehmen:

„Jedes Dreieck, das zwei konvexe Winkel enthält, ist reduzierbar.“

„In einem Dreieck kann nur eine Seite umlaufend sein.“

„Reduzierte Dreiecke ohne umlaufende Seiten und mit Winkeln:

$$0 \leq \alpha \leq 1 \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

existieren für jeden Wert:

$$0 < \gamma < 1 + \alpha + \beta < 3.“$$

„Reduzierte Dreiecke mit umlaufender Seite existieren für jeden Wert:

$$1 + \alpha + \beta < \gamma < 2.“$$

#### § 4.

#### Geometrische Hilfsmittel.

Wir werden im folgenden mit geringer Modifikation die geometrischen Hilfsmittel von Schönflieds anwenden und uns auch dessen Nomenklatur anschließen.<sup>2)</sup>

1. Ist die Seite  $\widehat{ab}$  eine nicht umlaufende Seite eines Kreisbogenvierecks, so drehen wir den begrenzenden Bogen  $\widehat{ab}$  um seine Endpunkte allmählich in die Membran hinein (Fig. 11), bis derselbe an der Begrenzung des Vierecks anstößt. Wir wollen sagen, daß er dann in den „Grenzkreis“ übergegangen ist.

Der Grenzkreis kann eine der benachbarten Seiten  $\widehat{bc}$  oder  $\widehat{da}$  in den Ecken  $b$  oder  $a$  berühren.

Ferner kann er  $\widehat{cd}$  berühren. Dann nennen wir ihn „Tangentalkreis“.

Geht er durch einen der Eckpunkte  $d$  oder  $e$ , so soll er „Diagonalkreis“ heißen. Der Winkel an der vom Diagonalkreis getroffenen Ecke ist größer als 1 und das Viereck ist in diesem Falle von  $a$  oder von  $c$  aus

<sup>1)</sup> Math. Ann. 44, S. 112, 114.

<sup>2)</sup> l. c. S. 109.

längs des Grenzkreises in zwei Dreiecke zerlegt. Eine Kreisscheibe ist lateral abtrennbar, sobald der Bogen  $\widehat{ab}$  eine ganze Kreisscheibe durchlaufen kann, ehe er den Grenzkreis erreicht.

Den Grenzkreis, der durch  $a$  und  $b$  geht, wollen wir mit  $k_{ab}$  bezeichnen.

2. Ist die Seite  $\widehat{ab}$  umlaufend, so läßt sich jedenfalls dicht an der Begrenzung entlang innerhalb der Membran ein Kreis ziehen, der den Kreis  $\widehat{ab}$  im Punkte  $a$  berührt. Er beginnt im Eckpunkt  $a$  und endet in dem Punkte  $a'$ , der in dem nächsten Blatte über  $a$  liegt (Fig. 12). Wir ziehen nun den Kreis, während er beständig  $\widehat{ab}$  in  $a$  berührt, in die Membran hinein. Dann kann sich der Kreis nicht auf einen Punkt zusammenziehen, da seine Eckpunkte in verschiedenen Blättern liegen. Er muß also irgendwo an der Begrenzung anstoßen, in einen „Grenzkreis“ übergehen.

Berührt er  $\widehat{cd}$ , was auch in  $c$  oder  $d$  geschehen kann, so nennen wir ihn „Tangentialkreis“ (Fig. 12). Dann schneiden sich die Kreise  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  imaginär und man kann einen zu einer transversalen Einhängung geeigneten Schnitt führen.

Stößt der Grenzkreis an die Ecke  $c$ , so muß  $\gamma > 1$  sein, und das Viereck läßt sich längs des Grenzkreises in zwei Dreiecke zerlegen. Dann nennen wir den Grenzkreis „eigentlichen Diagonalkreis“. Stößt der Grenzkreis an die Ecke  $d$ , so muß  $\delta > 1$  sein und wir nennen ihn „uneigentlichen Diagonalkreis“.

Den Grenzkreis, der  $\widehat{ab}$  in  $a$  berührt, bezeichnen wir mit  $k_{ab(a)}$ .

Im besonderen Fall kann der Grenzkreis  $k_{ab}$  oder  $k_{ab(a)}$  eine ganze Polygonseite enthalten. Enthält er  $\widehat{cd}$ , so kann  $\widehat{cd}$  nicht umlaufend sein, der Kreis ist dann als uneigentlicher Diagonalkreis anzusehen. Enthält der Grenzkreis  $k_{ab(a)}$  die Seite  $\widehat{da}$ , so ist  $\alpha = 0$ , und der Kreis ist als uneigentlicher Diagonalkreis anzusehen. Enthält der Grenzkreis  $k_{ab(a)}$  die Seite  $\widehat{bc}$ , so ist  $\beta = 0$ , die Seite  $\widehat{ab}$  umspannt die Peripherie gerade einmal und der Kreis ist als eigentlicher Diagonalkreis anzusehen.

## § 5.

**Konstruktion sämtlicher Vierecke, bei denen transversale Einhängungen möglich sind.**

Ehe wir die reduzierten Vierecke selbst behandeln, wollen wir alle Vierecke konstruieren, bei denen transversale Einhängungen zwischen zwei Seiten möglich sind. Denn die Beherrschung dieser Vierecke wird uns beim Studieren der andern Vierecke gute Dienste leisten.

Kann in ein Viereck von  $\widehat{ab}$  nach  $\widehat{cd}$  hinüber transversal eingehängt werden, so transformieren wir das Viereck durch eine lineare Substitution so, daß die Kreise  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  konzentrisch werden. Hängen wir dann eine Anzahl von Kreisringen ein, so wird ein Stück der Membran selbst von einem Kreisring gebildet, den wir zeichnen (Fig. 13). Auf der Seite  $\widehat{ab}$  können wir dann in zwei aufeinanderfolgenden Blättern zwei Punkte  $a'$  und  $a''$  so auswählen, daß der Grenzkreis, der  $\widehat{ab}$  in  $a'$  und  $a''$  berührt, ein Tangentialkreis wird, der  $\widehat{cd}$  in  $E$  berühren möge.

Das Halbkreisstück  $Ea'$  wollen wir in der Membran in der durch den Pfeil angedeuteten Richtung immer weiter verschieben, so daß  $\widehat{cd}$  und  $\widehat{ab}$  beständig berührt werden. Die Endpunkte des Halbkreises bezeichnen wir während der Bewegung immer mit  $E$  und  $a'$ . Schließlich muß bei dieser Verschiebung entweder  $a'$  auf die Ecke  $a$  der Vierecke stoßen, oder  $E$  auf die Ecke  $d$ . Daß die Seite  $\widehat{da}$  von innen vom Halbkreis berührt wird, ist nur im Punkte  $a$  möglich, wobei dann  $\alpha = 0$  sein muß. Eine Berührung in einem andern Punkte kann nicht stattfinden, denn dann läge der Kreis  $\widehat{da}$  ganz innerhalb des Kreises  $Ea'$  und könnte mit dem Kreise  $\widehat{ab}$  keinen reellen Winkel bilden. Stößt der Halbkreis auf  $a$ , so läßt sich in dieser Grenzlage des Halbkreises an ihm entlang ein Dreieck mit den Winkeln  $\alpha$ ,  $0$ ,  $\delta$  vom Viereck abtrennen.

Stößt der Halbkreis auf  $d$ , so bewegen wir statt seiner den Halbkreis  $Ea''$  auf  $d$  und  $a$  zu. Dieser wird dann mit seinem Endpunkt  $E$  auf den Punkt  $d$  stoßen und es läßt sich jetzt wieder an ihm entlang ein Dreieck mit den Winkeln  $\alpha$ ,  $0$ ,  $\delta$  abtrennen.

Wir können nun ebenso die Halbkreise nach der entgegengesetzten

Richtung, nach  $b$  und  $c$  hin, verschoben, stoßen auf die Ecke  $b$  oder  $c$  und können ein Dreieck mit den Winkeln  $\beta, 0, \gamma$  abtrennen.

Man kann also sämtliche Vierecke mit den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , in die von  $\widehat{ab}$  nach  $\widehat{cd}$  transversal eingehängt werden kann, auf folgende Weise konstruieren:

„Man konstruiere das Dreieck  $A$  (Fig. 14) mit den Winkeln  $\alpha, 0, \delta$ , setze ein Ringstück  $B$  längs einer vom Winkel  $0$  ausgehenden Seite an, welche nicht umlaufend ist, konstruiere weiter das Dreieck  $C$  mit den Winkeln  $\beta, 0, \gamma$  und füge es an das Ringstück längs einer vom Winkel  $0$  ausgehenden Seite an, die nicht umlaufend ist. Ein Beispiel gibt Fig. 14.

Sämtliche sonst noch existierenden Vierecke dieser Art mit den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  erhält man aus den so konstruierten, indem man die Bögen von  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  noch verlängert oder verkürzt. Dies geschieht unter Festhaltung der Winkel durch Verschiebung der Kreise  $\widehat{bc}$  und  $\widehat{da}$  längs der Kreise  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$ , die dabei festgehalten werden.“ (Fig. 15 u. § 9.)

Wir bemerken noch, daß die Seiten  $\widehat{bc}$  und  $\widehat{da}$  nicht umlaufend sein können, weil sie in den beiden Dreiecken einem Winkel  $0$  gegenüberliegen.

Da bei beliebigen Werten von  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  auch immer Dreiecke mit den Winkeln  $\alpha, \beta, 0$  und  $\gamma, \delta, 0$  existieren, erhalten wir den Satz:

„Für beliebig vorgeschriebene Werte von  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  gibt es stets sowohl Kreisbogenvierecke, bei denen sich von  $\widehat{ab}$  nach  $\widehat{cd}$ , als auch Kreisbogenvierecke, bei denen sich von  $\widehat{bc}$  nach  $\widehat{da}$  hinüber transversale Einhängungen machen lassen.“

Es ist nun nicht schwer, die Typen aller reduzierten Vierecke anzugeben, bei denen sich von  $\widehat{ab}$  nach  $\widehat{cd}$  hinüber transversale Einhängungen machen lassen. Wenn wir zunächst die Vierecke bei Seite lassen, die durch Verkürzung der Bögen  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  aus den zunächst auf die angegebene Weise konstruierten Vierecken entstehen, so ist klar, daß die Dreiecke mit den Winkeln  $\alpha, 0, \delta$  und  $\gamma, 0, \beta$  selbst reduziert sein müssen, wenn das Viereck reduziert sein soll. Aus den Ungleichheitsbedingungen am Schluß des § 3 ergeben sich, wenn wir sie auf die Dreiecke  $A$  und  $B$  anwenden, und die verschiedenen Dreieckstypen auf alle möglichen Arten nach der beschriebenen Konstruktionsmethode zusammensetzen, folgende Viereckstypen

1. Keine Dreiecksseite ist umlaufend:

a)  $0 \leq \alpha \leq 1; \quad 0 \leq \beta \leq 1; \quad 0 \leq \gamma \leq 1 + \beta; \quad 0 \leq \delta \leq 1 + \alpha$  (Fig. 14).

b)  $0 < \alpha \leq 1 + \delta; \quad 0 \leq \beta < 1; \quad 0 \leq \gamma \leq 1 + \beta; \quad 0 \leq \delta \leq 1$  (Fig. 16).

2. Die Seite eines der beiden Dreiecke ist umlaufend:

a)  $0 \leq \beta \leq 1; \quad 0 \leq \gamma < 1 + \beta; \quad 1 + \alpha < \delta < 2$  (Fig. 17).

b)  $0 < \beta \leq 1 + \gamma; \quad 0 \leq \gamma < 1; \quad 1 + \alpha < \delta < 2$  (Fig. 18).

3. Jedes der beiden Dreiecke hat längs  $\widehat{ab}$  eine umlaufende Seite:

$$1 + \beta < \gamma < 2; \quad 1 + \alpha < \delta < 2 \quad (\text{Fig. 19}).$$

4. Die Seiten der Dreiecke längs  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  sind umlaufend:

$$1 + \beta < \gamma < 2; \quad 1 + \delta < \alpha < 2 \quad (\text{Fig. 20}).$$

Im Typus 1 a) oder 1 b) sind noch Vierecke enthalten, bei denen zwei gegenüberliegende Seiten umlaufend sind, ohne daß sich ein Kreisring aushängen läßt (§ 6, Fig. 25). Dann muß sein:

$$0 < \alpha + \beta < 1; \quad 0 < \gamma + \delta < 1.$$

Sie sind die einzigen Vierecke dieser Art (vgl. § 14).

Im Typus 2 a) und 3) können reduzierte Vierecke mit einer zweifach umlaufenden Seite vorkommen (Fig. 19).

Die Vierecke des Typus 4. sind nicht reduziert, sondern es läßt sich stets noch ein Kreisring abtrennen. Den Typus der dann erhaltenen reduzierten Vierecke gibt Fig. 21.

Erweitern wir diese Viereckstypen durch polare Anhängungen an die Seiten  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  und laterale Anhängungen an die Seiten  $\widehat{bc}$  und  $\widehat{da}$ , so ist es möglich, daß nach genügender Verkürzung der Bogen  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  (im Sinne von Fig. 15) Kreisscheiben sich nicht mehr abtrennen lassen, die vorher eingehängt waren. Man erkennt aber, wenn man bei allen bisher betrachteten Typen der reduzierten Vierecke die angegebenen Prozesse ausführt, daß dies nur bei dem Typus von Fig. 25 vorkommen kann.

Hängen wir hier von  $a$  nach  $\widehat{cd}$  polar ein und verkürzen die Bogen  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  so weit, bis sich diese Kreisscheibe nicht mehr abtrennen läßt, so entsteht der Typus von Fig. 22 und es ist:

$$2 \leq \alpha; \quad \alpha + \beta < 3; \quad 0 \leq \gamma + \delta < 1.$$

Hängen wir an  $\widehat{da}$  eine Kreisscheibe lateral an und verkürzen die Bogen  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  so lange, bis sie sich nicht mehr abtrennen läßt, so erhalten wir den Typus Fig. 23 und es ist:

$$1 \leq \alpha; \quad \alpha + \beta < 2; \quad 1 < \delta.$$

Wir wollen nun systematisch alle reduzierten Vierecke konstruieren und möglichst für jeden Typus ein Beispiel zeichnen. Die Vierecke, die wir nach Erfüllung der Ungleichheitsbedingungen für die Winkel erhalten, werden zwar nicht unter allen Umständen reduziert sein, aber doch sind sie immer als Ausgangsvierecke zu brauchen, durch deren Erweiterung wir alle Vierecke erhalten können.

### § 6.

#### **Konstruktion sämtlicher reduzierten Vierecke mit mehr als einer umlaufenden Seite.**

1. Wir suchen zunächst die reduzierten Vierecke auf, bei denen zwei benachbarte Seiten umlaufend sind.

Ist ein solches reduziertes Viereck vorgelegt und sind  $\widehat{da}$  und  $\widehat{ab}$  umlaufend, so muß der Grenzkreis  $k_{ab(a)}$  eigentlicher Diagonalkreis sein. Denn wäre er uneigentlicher Diagonalkreis, so lägen die Ecken  $d$  und  $a$  in demselben Blatte und  $\widehat{da}$  könnte nicht umlaufend sein. Und wäre er Tangentialkreis, so liefse sich ein Kreisring einhängen und wir hätten ein Viereck von der schon in § 5 behandelten Art vor uns, und bei diesem kann auch  $\widehat{da}$  nicht umlaufend sein. Diese Vierecke, bei denen  $\widehat{da}$  und  $\widehat{ab}$  umlaufend sind, entstehen also durch Zusammensetzung zweier reduzierter Dreiecke mit umlaufenden Seiten, von denen das Dreieck  $abc$  bei  $a$  den Winkel 0 hat. Es folgt dafs  $\widehat{bc}$  und  $\widehat{cd}$  nicht umlaufend sind. Fig. 24 gibt den Typus eines solchen reduzierten Vierecks, und zwar in großer Allgemeinheit, denn von den zu benutzenden reduzierten Dreiecken mit einer umlaufenden Seite gibt es nur den Typus § 3, IV, 2, 3, 4.

Nun wollen wir noch die Ungleichheitsbedingungen für die Winkel ableiten, die für diesen Viereckstypus bestehen müssen. Zunächst müssen beide Dreiecke für sich reduziert sein. Sind also  $\gamma'$  und  $\gamma''$  ihre Winkel bei  $c$ , so ist (§ 3):

$$\begin{aligned} 1 + \beta &< \gamma' < 2 \\ \frac{1 + \alpha + \delta < \gamma'' < 2}{2 + \delta + \alpha + \beta < \gamma < 4.} \end{aligned}$$

Damit sich nun nicht noch polar eingehängte Kreisscheiben abtrennen lassen, dürfen die beiden in der Figur mit einem Minuszeichen versehenen Zweiecke nicht von der Membran bedeckt werden. Dazu ist notwendig, daß die Kreise  $\widehat{cd}$ ,  $\widehat{da}$ ,  $\widehat{ab}$  und ebenso die Kreise  $\widehat{da}$ ,  $\widehat{ab}$ ,  $\widehat{bc}$  jedesmal für sich einen Dreieckskern dritter Art bilden, es muß also  $\delta + \alpha < 1$ ,  $\alpha + \beta < 1$  sein. Wir erhalten also als notwendig die Winkelbedingungen:

$$\alpha + \beta < 1; \quad 2 + \delta + \alpha + \beta < \gamma < 4; \quad \delta + \alpha < 1$$

2. Wir suchen nun die reduzierten Vierecke auf, bei denen zwei gegenüberliegende Seiten umlaufend sind. Ist ein solches reduziertes Viereck vorgelegt und sind  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  umlaufend, so ziehen wir den Grenzkreis  $k_{ab(a)}$ .

Ist dieser Tangentialkreis, so haben wir den Typus des § 5:

$$0 \leq \alpha + \beta < 1; \quad 0 \leq \gamma + \delta < 1 \text{ (Fig. 25).}$$

Sind  $k_{ab(a)}$  und  $k_{ab(b)}$  beide uneigentliche Diagonalkreise, so ist  $\delta > 1 + \alpha$  und  $\gamma > 1 + \beta$ . Wir können dann an den Grenzkreisen entlang von  $d$  nach  $a$  und von  $b$  nach  $c$  hinüber Zweiecke abtrennen, so daß die Winkel  $a$  und  $\beta$  zu Null werden. Tun wir dies, so muß der Grenzkreis  $k_{ca(c)}$  Tangentialkreis werden, weil jetzt die der Seite  $\widehat{cd}$  gegenüberliegenden Winkel  $< 1$  sind; wir haben also wieder ein Viereck des § 5 vor uns, das wir bereits kennen.

Auf einen neuen Typus von Vierecken kommen wir also nur dann, wenn  $k_{ab(a)}$  oder  $k_{ab(b)}$  eigentlicher Diagonalkreis ist. Ist  $k_{ab(a)}$  eigentlicher Diagonalkreis, so läßt sich das Viereck in die zwei Dreiecke mit den Ecken  $a, b, c$  und  $d, a, c$  zerlegen, die beide reduziert sein müssen und beide eine umlaufende Seite haben. Setzt man sie so zusammen, daß die Kreise  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  sich imaginär schneiden, so sieht man aus der Zeichnung, daß eine transversale Einhängung möglich ist und man also wieder ein Viereck des § 5 vor sich hat (Fig. 20). Wollen wir also einen neuen Viereckstypus erhalten, so müssen sich  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  reell schneiden (Fig. 26). Es folgt, da Dreieck  $abc$  bei  $a$  den Winkel 0 hat:

$$1 + \delta + \gamma'' < \alpha < 2; \quad 1 + \beta < \gamma' < 2,$$

wo  $\gamma'$  und  $\gamma''$  die Winkel der Dreiecke bei  $c$  sind.

Ziehen wir nun noch den Grenzkreis  $k_{c\hat{a}(c)}$  so muß dieser, weil  $\beta < 1$  ist, eigentlicher Diagonalkreis sein. Es ergibt sich durch die analoge Betrachtung wie vorher für  $\alpha$  jetzt für  $\gamma$  die obere Grenze 2. Wir haben also:

$$1 + \delta < \alpha < 2; \quad 1 + \beta < \gamma < 2$$

als notwendige Bedingung für die Winkel.

### § 7.

#### Reduzierte Vierecke mit nur einer umlaufenden Seite.

Wir kommen zu den reduzierten Vierecken, bei denen nur eine Seite umlaufend ist. Ein solches reduziertes Viereck sei vorgelegt und  $\hat{a}\hat{b}$  sei umlaufend.

Ist der Grenzkreis  $k_{ab(a)}$  Tangentialkreis, so haben wir schon behandelte Vierecke vor uns.

Ist  $k_{ab(a)}$  eigentlicher Diagonalkreis, so geht er durch  $c$ , und das Viereck läßt sich zusammensetzen aus zwei reduzierten Dreiecken  $abc$  und  $dac$ , von denen das Dreieck  $abc$  eine umlaufende Seite hat. Beim Dreieck  $dac$  darf nur ein einziger Winkel  $> 1$  sein, weil sich sonst eine Kreisscheibe lateral abtrennen läßt.  $\gamma'$  und  $\gamma''$  seien die Winkel der beiden Dreiecke bei  $c$ .

Wir drehen das Stück des Diagonalkreises zwischen  $a$  und  $c$  unter Vergrößerung von  $\gamma'$  um seine Endpunkte  $a$  und  $c$  (Fig. 27—30.) Damit von  $c$  aus sich keine Kreisscheibe polar abtrennen läßt, darf dies Stück sich nur soweit drehen lassen, daß  $\gamma' < 2$  bleibt. Ehe also  $\gamma' = 2$  geworden ist, muß das bewegliche Stück des Diagonalkreises entweder

1. die Seite  $\hat{c}\hat{d}$  in  $c$  berühren, oder
2. auf die Ecke  $d$  stoßen oder
3.  $\hat{d}\hat{a}$  in  $a$  berühren.

Bei jedem Typus entstehen noch Unterfälle, je nachdem wir den einen Winkel des Dreiecks  $acd$ , welcher  $> 1$  sein kann, an die Ecke  $a$ ,  $c$  oder  $d$  verlegen.

Im letzteren Falle ist  $0 \leq \alpha + \beta < 1$ , denn die Kreise  $\hat{a}\hat{b}$ ,  $\hat{b}\hat{c}$  und das Stück des Diagonalkreises, das  $\hat{d}\hat{a}$  berührt, müssen für sich einen Dreieckskern dritter Art einschließen.



Wir erhalten die Viereckstypen:

$$1) \quad 0 \leq \alpha < 2 + \delta; \quad 1 + \beta < \gamma < 2; \quad 0 \leq \delta \leq 1 \quad (\text{Fig. 27})$$

$$0 \leq \alpha < 1; \quad 1 + \beta < \gamma < 2; \quad 0 \leq \delta < 1 + \alpha \quad (\text{Fig. 28})$$

$$2) \quad 0 \leq \alpha < 1; \quad 0 \leq \beta < 1, \quad 1 + \beta < \gamma < 3; \quad 1 \leq \delta < 2 + \alpha \quad (\text{Fig. 29})$$

$$3) \quad 0 \leq \alpha + \beta < 1; \quad 1 + \alpha + \beta < \gamma < 3; \quad 0 \leq \delta < 2 \quad (\text{Fig. 30})$$

$$0 \leq \alpha + \beta < 1; \quad 1 + \alpha + \beta < \gamma < 3 + \delta; \quad 0 \leq \delta \leq 1 \quad (\text{Fig. 31}).$$

Wir erhalten noch neue Viereckstypen, wenn  $k_{ab(a)}$  und  $k_{ab(b)}$  beide uneigentliche Diagonalkreise sind. Dann sind  $\gamma$  und  $\delta$  beide  $> 1$ . Wir suchen, nachdem wir längs der Grenzkreise Zweiecke mit den Winkelöffnungen  $\alpha$  und  $\beta$  abgetrennt haben, sodafs jetzt  $\alpha$  und  $\beta$  zu null geworden sind, für die Seite  $\widehat{cd}$  den Grenzkreis auf. Dieser kann  $\widehat{bc}$  oder  $\widehat{da}$  nicht berühren, da die Winkel bei  $c$  und  $d$  noch  $\geq 1$  sind und sich dann von  $\widehat{cd}$  eine Kreisscheibe lateral abtrennen liefse. Also berührt er  $\widehat{ab}$ . Schneiden wir längs eines nahe am Grenzkreise verlaufenden und durch  $c$  und  $d$  gehenden Kreisbogens ein Zweieck mit den Ecken  $c$  und  $d$  ab, so haben wir ein Viereck des § 5 vor uns.

Diese reduzierten Vierecke entstehen also aus reduzierten Vierecken des § 5, bei denen  $\widehat{ab}$  umlaufend und  $\widehat{cd}$  nicht umlaufend ist, indem man den Bogen  $\widehat{cd}$  unter Festhaltung von  $c$  und  $d$  solange nach auswärts dreht, als sich längs  $\widehat{cd}$  keine Kreisscheibe lateral abtrennen läfst.

Es bestehen die Bedingungen:

$$0 < \alpha < 1; \quad 0 < \beta < 1; \quad 1 + \beta < \gamma < 2 + \beta; \quad 1 + \alpha < \delta < 2 + \alpha \quad (\text{Fig. 32}).$$

Im besonderen kann die Seite  $\widehat{ab}$  auch zweimal umlaufend sein (Fig. 33).

## § 8.

### Reduzierte Vierecke ohne umlaufende Seiten.

Wir suchen nun die reduzierten Vierecke ohne umlaufende Seiten auf. Für die Seite  $\widehat{ab}$  konstruieren wir den Grenzkreis.

1. Ist dieser Diagonalkreis und geht er etwa durch  $c$ , so ist  $\gamma > 1$  und das Viereck läfst sich längs  $\widehat{ac}$  in zwei Dreiecke  $abc$  und  $dac$  zerlegen. Im Dreieck  $abc$  muß nun  $\beta < 1$  sein, denn sonst wären in dem

Dreieck  $abc$  zwei Winkel  $\geq 1$  und es wäre reduzierbar. Im Dreieck  $acd$  kann längs der Seite  $\widehat{ac}$  noch eine Kreisscheibe lateral angehängt sein, ohne daß das Viereck reduzierbar zu werden braucht. Wir können einen ersten Viereckstypus herstellen, bei dem  $\delta < 1$  und  $\beta < 1$  ist, einen zweiten, wo  $\beta < 1$ ,  $\delta > 1$  (und  $\gamma \geq 1$ ) ist. Den ersten Viereckstypus werden wir unter 4. behandeln.

Beim zweiten Typus muß, damit das Viereck nicht reduziert werden kann, der Grenzkreis  $k_{ca}$  Tangentialkreis sein. (Wäre er Diagonalkreis durch  $a$ , so wäre das Viereck wieder reduzierbar, denn längs  $\widehat{da}$  ließe sich, da dann  $\delta \geq 1$  und  $\alpha > 1$  ist, eine Kreisscheibe abtrennen.) Der zweite Typus ist also derselbe, bei dem der Grenzkreis  $k_{ab}$  Tangentialkreis ist und  $\widehat{cd}$  berührt. Diesen Typus behandeln wir nun jetzt unter 2.

2. Der Grenzkreis  $k_{ab}$  kann zweitens Tangentialkreis sein und  $\widehat{cd}$  berühren. Sind hier z. B.  $\beta$  und  $\gamma$  beide  $\geq 1$ , so läßt sich längs  $\widehat{bc}$  eine Kreisscheibe abtrennen, wie man leicht sieht, wenn man für  $\widehat{bc}$  den Grenzkreis zu konstruieren sucht.

Wir folgern analog, daß auch wenigstens einer der Winkel  $\alpha$  oder  $\delta$  kleiner als 1 ist.

Wir nehmen zuerst  $\alpha < 1$ ,  $\beta < 1$  an. Zerschneiden wir längs des Grenzkreises, so zerfällt das Viereck in ein Zweieck mit einem Winkel  $< 1$  und in zwei Dreiecke, von denen an einer Ecke jedes den Winkel null hat. Wir erhalten die Bedingungen:

$$0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1, \quad 0 \leq \gamma < 1 + \beta, \quad 0 < \delta < 1 + \alpha \quad (\text{Fig. 34}).$$

Den Fall  $\delta < 1$ ,  $\beta < 1$  behandeln wir unter 4.

Setzen wir  $\gamma < 1$  voraus, so müssen wir weiter  $1 \leq \beta < 2 + \gamma$  voraussetzen, wenn wir einen neuen Typus erhalten wollen. Ferner muß noch  $\alpha < 1$  oder  $\delta < 1$  sein. Den Fall  $\alpha < 1$ ,  $\gamma < 1$  behandeln wir unter 4., für den hiervon verschiedenen Typus  $\gamma < 1$ ,  $\delta < 1$  bestehen die Bedingungen:

$$1 < \alpha < 2 + \delta, \quad 1 < \beta < 2 + \gamma, \quad 0 < \gamma < 1, \quad 0 < \delta < 1 \quad (\text{Fig. 35}).$$

3. Drittens kann der Grenzkreis  $k_{ab}$  eine benachbarte Vierecksseite im Eckpunkte berühren. Ist dies die Seite  $\widehat{bc}$ , so muß  $\beta < 1$  sein. Einen von den vorigen Vierecken verschiedenen Typus werden wir nur dann er-

halten, wenn dieser Fall des Grenzkreises an jeder Vierecksseite eintritt. Dann müssen also wenigstens zwei gegenüberliegende Winkel  $< 1$  sein.

4. Von den Vierecken, bei denen zwei gegenüberliegende Winkel kleiner als 1 sind, haben wir uns noch eine Anschauung zu verschaffen.

Indem wir  $\beta < 1$ ,  $\delta < 1$  voraussetzen, halten wir die vier Ecken des Vierecks fest und drehen den Bogen  $\widehat{ab}$  um seine Endpunkte  $a$  und  $b$  nach innen (Fig. 36). Soll das Viereck dabei dieselben Winkel behalten, so müssen wir die Seiten  $\widehat{bc}$  und  $\widehat{da}$  nach außen, die Seite  $\widehat{cd}$  nach innen drehen und zwar um denselben Winkel, um den wir die Seite  $\widehat{ab}$  gedreht haben. Fahren wir mit der Drehung immer weiter fort, so müssen schließlich die Teile der Begrenzung zusammenstoßen. Wir wollen sagen, unser Viereck befinde sich dann in der „Grenzlage“. Diese ist erstens so möglich, daß  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  sich berühren (Fig. 37), zweitens so, daß  $\widehat{ab}$  oder  $\widehat{cd}$  auf eine gegenüberliegende Ecke stoßen (Fig. 38). In der Grenzlage trennen sich von der Vierecksmembran Kreisbogendreiecke ab. Aus der Grenzlage, die wir also ohne weiteres konstruieren können, erhalten wir dann das Viereck selbst, indem wir die Seiten unter Festhaltung der Eckpunkte und Winkel aus der Grenzlage herausdrehen. — Es ist im besonderen noch möglich, daß eine Vierecksseite, z. B.  $\widehat{ab}$ , die Peripherie gerade einmal umspannt. Dann führen wir die Grenzlage so herbei, daß wir den Kreis  $\widehat{ab}$  in die Kreise überführen, die ihn im Punkte  $a$  (und  $b$ ) berühren (Fig. 45) und in der Membran liegen.

Da in unserm reduzierten Viereck  $\beta < 1$  und  $\delta < 1$  sein soll, so sind beim Eintreten der Grenzlage der ersten Art die beiden Dreiecke mit den Winkeln  $0, \beta, \gamma$  und  $0, \delta, \alpha$ , in die das Viereck zerfällt, reduziert. Für diesen Typus gelten also die Ungleichheitsbedingungen:

$$0 \leq \alpha \leq 1 + \delta, \quad 0 \leq \beta < 1, \quad 0 \leq \gamma \leq 1 + \beta, \quad 0 \leq \delta < 1 \quad (\text{Fig. 39}).$$

Beim Eintreten der Grenzlage der zweiten Art falle die Ecke  $c$  auf die Seite  $\widehat{ab}$ . Das Dreieck  $abc$  der Grenzlage hat die Winkel  $\alpha, \delta, \gamma - \beta - 1$ , braucht aber nicht reduziert zu sein, sondern längs seiner Seite  $ac$  darf noch eine Kreisscheibe lateral angehängt sein. Wir erhalten zwei Typen, je nachdem im Dreieck der Grenzlage (nachdem längs  $\widehat{ac}$  eventuell eine

Kreisscheibe lateral abgetrennt ist) der Winkel  $\alpha$  oder der Winkel  $\gamma - \beta - 1 > 1$  sein kann.

$$1) \quad 0 \leq \alpha < -\beta + \gamma + \delta, \quad 1 + \beta \leq \gamma \leq 3 + \beta < 4, \quad 0 \leq \delta < 1 \quad (\text{Fig. 40}).$$

$$2) \quad 0 \leq \alpha < 2, \quad 0 \leq \beta < 1, \quad 1 + \beta < \gamma \leq 2 + \alpha + \delta + \beta < 6, \quad 0 \leq \delta < 1 \quad (\text{Fig. 41}).$$

Wir stellen nun noch folgende Sätze über reduzierte Kreisbogenvierecke zusammen, die sich aus den vorstehenden Entwicklungen direkt ergeben:

1. „In einem reduzierten Viereck sind stets zwei Winkel kleiner als 1“.
2. „In einem reduzierten Viereck ist die Summe der Windungszahlen in den Ecken nie größer als 2“.
3. „In einem reduzierten Viereck ist die Summe der Umlaufszahlen der Seiten nie größer als 2“.
4. „In einem reduzierten Viereck ist die Summe der Windungszahlen in den Ecken und der Umlaufszahlen der Seiten nie größer als 3“.

## B. Direkte Konstruktion der allgemeinen Vierecke.

Aus den reduzierten Vierecken können wir die allgemeinen Vierecke mit Hilfe der Erweiterungsprozesse konstruieren. Auf dem geschilderten Wege haben wir damit eine genaue und sichere Anschauung von den Membranen gewonnen und durch die gezeichneten Figuren sind alle Vierecke im wesentlichen ihrer Gestalt nach als bekannt zu betrachten. Darauf beruht der Vorteil dieser Konstruktionsmethode.

Aber es wird durch die vielen Fallunterscheidungen Unübersichtlichkeit hervorgerufen. Es treten ferner nicht wenige Fälle auf, wo dasselbe allgemeine Viereck durch geeignete Erweiterung aus verschiedenen reduzierten Vierecken erhalten werden kann. Erweitert man also auf alle möglichen Arten die reduzierten Vierecke, so gibt es unter den erhaltenen Vierecken identische.

Durch die folgende Konstruktionsmethode soll Übersicht und Ordnung in die gesamten Vierecksmembranen gebracht werden. Dabei wird jedes mögliche Viereck gerade einmal konstruiert. Doch besitzt sie nicht den Vorteil der vorigen Methode; man erhält keine anschauliche Vorstellung von den Vierecken.

## § 9.

**Geometrische Deutung der Vierecksparameter.**

Wie können wir an der Membran ihre sechs reellen Parameter geometrisch deuten? Vier Parameter können wir bei jedem Viereck durch die Winkel des Vierecks deuten, die wir uns ein für allemal als gegeben denken. Die Deutung der andern zwei Parameter läßt sich auf verschiedene Weisen geben, von denen wir folgende zwei Arten bevorzugen:

1. Ist irgend ein Kreisbogenviereck vorgelegt, so können die Kreise zweier gegenüberliegender Vierecksseiten (z. B.  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$ ) sich imaginär oder reell schneiden oder sich berühren.

Im ersten Falle transformieren wir die Kreise  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  in zwei konzentrische Kreise. Dann lassen sich die Kreise  $\widehat{bc}$  und  $\widehat{da}$  auf ihnen verschieben, wobei die Winkel des Vierecks und die Radien der Kreise  $\widehat{bc}$  und  $\widehat{da}$  ungeändert bleiben (Fig. 42).

Schneiden sich die Kreise  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  reell, so transformieren wir sie in zwei Gerade, indem wir den einen Schnittpunkt ins Unendliche werfen (Fig. 43). Alle Kreise, welche mit  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  dieselben Winkel bilden, besitzen den zweiten Schnittpunkt der Kreise  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  als Ähnlichkeitszentrum. In Kreise, die in Bezug auf dies Zentrum zu dem Kreise  $\widehat{bc}$  resp.  $\widehat{da}$  ähnlich liegen, können wir also die Kreise  $\widehat{bc}$  und  $\widehat{da}$  überführen unter Festhaltung der Winkel. Wenn sich die Kreise  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  berühren, so werfen wir den Berührungspunkt ins Unendliche, wodurch die beiden Kreise zu zwei parallelen Geraden werden. Die Kreise  $\widehat{bc}$  und  $\widehat{da}$  verschieben wir dann auf diesen Geraden (Fig. 44), indem wir ihre Radien und die Viereckswinkel festhalten. Diesen Fall betrachten wir als Ausartung des ersten der drei Fälle.

Wir können die Parameter bei jedem Viereck nun auf folgende Weise deuten: Bei Veränderung des ersten Parameters möge sich der Kreis  $\widehat{bc}$  (oder  $\widehat{da}$ ) in der beschriebenen Weise bewegen, bei Veränderung des zweiten der Kreis  $\widehat{ab}$  (oder  $\widehat{cd}$ ).

2. Den bereits in § 8 benutzten Prozeß übertragen wir auf allgemeine Vierecke. Wir denken uns also die vier Ecken eines allgemeinen Vierecks fest und drehen eine Seite des Vierecks (z. B.  $\widehat{ab}$ ) um ihre Endpunkte

(Fig. 36). Sollen dann die Viereckswinkel ungeändert bleiben, so müssen wir die Seiten  $\widehat{bc}$ ,  $\widehat{da}$  und  $\widehat{cd}$  ebenfalls um ihre Endpunkte in geeignetem Sinne drehen und zwar um denselben Winkel, um welchen wir  $\widehat{ab}$  gedreht hatten. Diese Drehung der Seiten läßt sich bei allen Kreisbogenvierecken ausführen, sie mögen umlaufende Seiten haben oder nicht.

Nur darf keine Vierecksseite die Peripherie gerade eine ganze Anzahl von Malen umspannen. Wir wollen von der Seite in diesem Falle den Ausdruck gebrauchen, daß sie sich „gerade schließt“.

Dann wollen wir die Veränderung des Vierecks so vornehmen, daß wir den Kreis der betreffenden Seite in diejenigen Kreise überführen, welche ihn in den Endpunkten der Seite berühren (Fig. 45).

Auf diese Weise werden wir den einen Parameter des Vierecks geometrisch deuten. Die Deutung des zweiten Parameters wird sich im nächsten Paragraphen ergeben.

Bei der Drehung der Seiten bleiben ihre Umlaufszahlen ungeändert, da die Endpunkte einer jeden Seite festgehalten werden und bei dem kontinuierlichen Prozeß der Drehung nicht übereinander hinweggleiten können.

Nun können wir aber die Vierecksseiten nach zwei verschiedenen Richtungen drehen. Wir definieren deshalb einen „positiven“ und „negativen“ Drehungssinn in folgender Weise:

„Positiv“ ist diejenige Drehung, bei der sich die Schenkel des Winkels  $\alpha$ , welche wir uns durch die Tangenten im Punkte  $a$  an die Kreisbögen  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{da}$  gebildet denken, entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn bewegen, „negativ“ ist die Drehung von entgegengesetzter Drehungsrichtung.

In dem besondern Falle, wo eine Seite sich gerade schließt, wollen wir unter positiver Drehung diejenige Veränderung der Seite verstehen, bei welcher der bewegte Kreis in das Innere der Membran hineingezogen wird, unter negativer Drehung die entgegengesetzte Bewegung, sodaß in Fig. 48 eine negative Drehung ausgeführt ist.

## § 10.

### Die Grenzlagen.

Wir lassen jetzt das Viereck in seine „Grenzlagen“ übergehen, die wir schon in § 8 benutzt hatten.

Unter Benutzung der ersten Deutung der Vierecksparameter verschoben wir den Kreis  $\widehat{bc}$  beständig in einer Richtung.

Sobald die Teile der Begrenzung der Membran zusammenstoßen, was jedoch nicht immer einzutreten braucht, wollen wir sagen, das Viereck „befindet sich in der Grenzlage“.

Dabei können vier verschiedene Arten von Grenzlagen eintreten bei dieser Deutung der Parameter. Erstens können sich zwei Seiten berühren (Fig. 46). Diese Grenzlage bezeichnen wir als Grenzlage erster Art. Oder es kann ein Eckpunkt an eine Seite des Viereckes stoßen (Fig. 47), was wir als Grenzlage zweiter Art bezeichnen. Oder es fallen die beiden Eckpunkte einer Seite zusammen, so daß der begrenzende Bogen zwischen ihnen ganz verschwindet, was wir als Grenzlage dritter Art bezeichnen (Fig. 48). Oder es kann schließlich, wenn sich die Kreise  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  reell schneiden, der Kreis  $\widehat{bc}$  sich ganz in einen der beiden Schnittpunkte zusammenziehen, so daß er vollständig verschwindet (Fig. 49). Diese Grenzlage bezeichnen wir als Grenzlage vierter Art.

Die Bewegung des Kreises  $\widehat{bc}$  läßt sich unter Umständen unbegrenzt weiterführen.

Die Kreise  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  müssen sich dann immer imaginär schneiden, weil sonst, wenn keine andere Grenzlage vorher eintritt, immer die Grenzlage vierter Art eintritt. Ferner müssen die Bogen  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  sich dabei beständig vergrößern und schließlich beliebig oft umlaufend werden. Denn würde ein Bogen sich beständig verkleinern, so müßte schließlich die Grenzlage dritter Art eintreten.

Konstruieren wir, wenn  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  umlaufend geworden sind, für einen Punkt der Seite  $\widehat{ab}$ ; der mit keinem Eckpunkt in demselben Blatte liegt, den Grenzkreis, so muß dieser Tangentialkreis werden. Demnach haben wir ein Viereck vor uns, bei dem sich von  $\widehat{ab}$  nach  $\widehat{cd}$  Kreisinge einhängen lassen.

Läßt sich also der Kreis  $\widehat{bc}$  unbegrenzt bewegen, so haben wir ein Viereck dieser Art vor uns.

Umgekehrt kann bei jedem Viereck dieser Art der Kreis  $\widehat{bc}$  nach einer Richtung hin unbegrenzt bewegt werden. Es folgt also:

„Bei der ersten Deutung der Parameter ist die Bewegung des Kreises  $\widehat{bc}$  stets begrenzt aufer bei den Vierecken, bei denen sich von  $\widehat{ab}$  nach  $\widehat{cd}$  transversal einhängen läßt; aber hier ist sie auch nur nach einer Richtung hin unbegrenzt“.

Bei geeigneter Bewegungsrichtung des Kreises  $\widehat{bc}$  kommt man also stets zu einer Grenzlage.

Führen wir bei der zweiten Deutung der Parameter die Drehung der Seiten immer weiter, so tritt schließlic, wie wir sogleich zeigen werden, hierbei immer eine Grenzlage ein. Doch sind hier, da die Eckpunkte festbleiben, nur zwei Arten von Grenzlagen möglich, nämlich die Grenzlagen erster und zweiter Art (Fig. 37 und 38).

Wir zeigen, daß die Drehung der Vierecksseiten immer begrenzt ist.

Wir betrachten zunächst Vierecke mit umlaufenden Seiten.  $\widehat{ab}$  sei umlaufend.

Ist der Grenzkreis  $k_{ab(a)}$  Diagonalkreis und geht er durch  $c$ , so liegt  $c$  mit Teilen der Seite  $\widehat{ab}$  immer in demselben Blatte (Fig. 67). Dann läßt sich, wenn wir die Seiten drehen, die Drehung der Seite  $\widehat{ab}$  entweder so weit führen, bis sie auf die festbleibende Ecke  $c$  stößt, oder die Drehung läßt sich nicht so weit führen. Im ersten Falle tritt eine Grenzlage zweiter Art ein, im zweiten Falle, wo die Bewegung schon vorher begrenzt wird, muß damit schon eine Grenzlage eingetreten sein.

Geht der Grenzkreis  $k_{ab(a)}$  durch  $d$ , so zeigt man auf dieselbe Weise, daß immer eine Grenzlage eintritt.

Ist der Grenzkreis  $k_{ab(a)}$  Tangentialkreis, so liegen mit der Seite  $\widehat{ab}$  die Eckpunkte  $c$  und  $d$  in demselben Blatte oder solche Punkte der Seite  $\widehat{cd}$ , unter oder über denen in anderen Blättern  $c$  und  $d$  liegen. Bei der Drehung der Seiten bleiben diese Punkte fest. Entweder läßt sich  $\widehat{ab}$  so weit drehen, bis es an einen dieser Punkte stößt, womit eine Grenzlage eingetreten ist, oder es tritt schon vorher eine Grenzlage ein.

Wir betrachten nun die Vierecke ohne umlaufende Seiten.

Drehen wir die Seite  $\widehat{ab}$  in die Membran hinein, so bewegt sich der Bogen  $\widehat{ab}$  gerade so, als wenn wir den Grenzkreis  $k_{ab}$  konstruieren würden. Würde der Grenzkreis Diagonalkreis werden, so wird auch die Seite  $\widehat{ab}$  schließlich durch eine der gegenüberliegenden Ecken gehen, wenn nicht



schon vorher eine Grenzlage eintritt. Würde der Grenzkreis Tangentialkreis werden, so wird, da die Seite  $\widehat{cd}$  auch in die Membran der Seite hinein, der Seite  $\widehat{ab}$  entgegengedreht wird,  $\widehat{ab}$  schließlich auch  $\widehat{cd}$  berühren, wenn nicht eine andere Grenzlage vorher eingetreten ist.

Es tritt also auch in diesem Falle stets eine Grenzlage ein.

Bei der zweiten Deutung der Parameter ist also die Bewegung stets begrenzt.

Während der Drehung bleibt nun die Membran immer einfach zusammenhängend. Das Eintreten der Grenzlage kommt einer Zerschneidung der Membran durch Linien gleich, die zwischen zwei Punkten der Begrenzung verlaufen und deshalb die Membran in mehrere einfach zusammenhängende Flächen zerlegen. Diese müssen Kreisbogenpolygone einfacherer Art sein und sind also Kreisbogenzweiecke und Kreisbogendreiecke.

Wir müssen noch auf die Eigenschaften jeder dieser Grenzlagen etwas eingehen.

1. Die Grenzlage erster Art. Berühren sich die Seiten  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  in der Grenzlage, so bezeichnen wir dies als die Grenzlage  $(\widehat{ab}, \widehat{cd})$ .

Sind zwischen  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  Kreisringe eingehängt, so können diese in der Grenzlage herausfallen.

Die Membran zerteilt sich in zwei Dreiecke mit den Winkeln  $\theta, \beta, \gamma$  und  $\theta, \delta, \alpha$ . Wir können daher die Grenzlage, wenn die Winkel gegeben sind, ohne weiteres konstruieren. Diese Grenzlagen existieren also für beliebige Winkel.

Die Seiten  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  können sich auch mehrmals in mehreren Blättern übereinander berühren. Die ganze Fläche des Vierecks zerfällt dann in so viel einfach zusammenhängende Flächen mehr. Jedes durch zwei aufeinanderfolgende Berührungen sich abschnürende Flächenstück ist ein Zweieck mit dem Winkel null, also ein in der Grenzlage herausgefallener Kreisring.

In der Grenzlage muß, da sie durch Variation nur eines Parameters entstanden ist, noch ein Parameter enthalten sein. Bei seiner Veränderung möge sich etwa der Kreis  $\widehat{bc}$  längs der Kreise  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$ , unter Festhaltung der Viereckswinkel verschieben. Hierdurch wollen wir bei

unserer zweiten Deutung der Vierecksparameter den zweiten Parameter veranschaulichen.

2. Die Grenzlage zweiter Art. Fällt in der Grenzlage  $d$  auf  $\widehat{ab}$ , so bezeichnen wir dies als Grenzlage  $\widehat{ab}(d)$ .

Die Membran zerfällt in ein Kreisbogendreieck  $bcd$  und ein Zweieck  $ab$  mit dem Winkel  $\alpha$ . Mit dem Zweieck schnüren sich sämtliche an  $\widehat{da}$  lateral angehängten Kreisscheiben von der Membran ab.  $\widehat{da}$  ist nicht umlaufend.

Ist von  $d$  nach  $\widehat{ab}$  polar eingehängt, so fallen alle diese Kreisscheiben in der Grenzlage heraus. Diagonale Einhängungen zwischen  $d$  und  $b$  werden in der Grenzlage zu lateralen Anhängungen am Dreieck  $acd$  längs der Seite  $\widehat{db}$ . Das Dreieck der Grenzlage hat demnach bei  $d$  den Winkel  $\delta - \alpha - 1 - 2p_{ab(a)}$ , wenn  $p_{ab(a)}$  die Anzahl der in der Grenzlage herausfallenden Kreisscheiben bedeutet.

Die Ecke  $d$  kann auch noch in mehr als einem Blatt auf die Seite  $\widehat{ab}$  stossen. Jedes durch zwei solche aufeinanderfolgende Stellen sich abschnürende Flächenstück wird zu einer Kreisscheibe, die demnach von  $d$  bezüglich  $\widehat{ab}$  polar eingehängt war.

Damit bei einem Viereck diese Grenzlage eintreten kann, muß

$$\delta > 1 + \alpha$$

sein. Ist diese Bedingung erfüllt, so kann auch ohne weiteres die Grenzlage immer konstruiert werden.

Wenn  $\delta = 1 + \alpha + 2p_{ab(a)}$  ist, so berühren sich die Kreise  $\widehat{cd}$  und  $\widehat{ab}$  im Punkte  $d$  in der Grenzlage. Transversale von  $\widehat{cd}$  nach  $\widehat{ab}$  gemachte Einhängungen fallen dann beim Übergang in die Grenzlage heraus.

In der Grenzlage ist noch ein Parameter enthalten, bei dessen Veränderung der Kreis  $\widehat{da}$  in die andern Kreise übergeht, die ihn in  $d$  berühren. Bei unserer zweiten Deutung der Vierecksparameter werden wir diesen Parameter als den zweiten Parameter des Vierecks betrachten.

3. Die Grenzlage dritter Art. Fallen in der Grenzlage die Eckpunkte  $a$  und  $b$  zusammen, so bezeichnen wir dies als Grenzlage  $(ab)$ .

Ist von  $a$  nach  $\widehat{bc}$  hinüber oder von  $b$  nach  $\widehat{da}$  hinüber polar eingehängt, so fallen diese Kreisscheiben beim Übergang in die Grenzlage sämtlich heraus. Laterale Anhängungen können sich längs der Seite  $\widehat{ab}$

auch abschnüren. Diagonale Einhängungen, z. B. die zwischen  $a$  und  $c$ , werden bei dem Dreieck der Grenzlage zu lateralen Anhängungen längs  $ac$ .

Damit bei einem Viereck diese Grenzlage eintreten kann, muß

$$\alpha + \beta > 1$$

sein. Der Winkel des entstehenden Dreiecks bei den beiden zusammenfallenden Ecken hat die Größe  $\alpha + \beta - 1$ , wenn weder laterale noch polare Anhängungen herausfallen.

Ist die obige Ungleichheitsbedingung erfüllt, so existieren im Allgemeinen (vgl. § 14) unter allen Vierecken mit gleichen Winkeln auch solche, die in die dritte Grenzlage übergehen.

Ist  $\alpha + \beta = 1$ , so fallen transversale von  $\widehat{da}$  nach  $\widehat{bc}$  gemachte Einhängungen beim Übergang in die Grenzlage heraus.

4. Auf die Eigenschaften der vierten Grenzlage brauchen wir nicht weiter einzugehen.

Zwei Grenzlagen, die sich nur durch den Parameterwert unterscheiden, sollen als Grenzlagen von „gleichem Typus“ bezeichnet werden.

## § 11.

### **Konstruktion aller zu gegebenen Winkeln möglichen Vierecke.**

Nun können leicht alle Vierecke konstruiert werden, die es zu gegebenen Winkeln gibt.

Durch Drehung der Seiten um die festen Eckpunkte gehen die Vierecke in die Grenzlagen erster oder zweiter Art über. Aber diese Grenzlagen können wir nach dem im vorigen Paragraphen Gesagten leicht konstruieren, da wir ja die Konstruktion der Kreisbogendreiecke, welche in der Grenzlage entstehen, als bekannt voraussetzen. Indem wir aus den Grenzlagen heraus in umgekehrter Richtung drehen, erhalten wir die Vierecke selbst, die zu den konstruierten Grenzlagen gehören.

Um nun sämtliche Vierecke zu konstruieren, die es zu gegebenen Winkeln gibt, haben wir nur sämtliche für diese Winkel möglichen Grenzlagen zu konstruieren. Indem wir noch den in jeder Grenzlage enthaltenen Parameter verändern, erhalten wir die gesamte zweiparametrische Schar der verlangten Vierecke durch Herausdrehen aus den Grenzlagen.

Jedes Viereck geht, je nachdem positiv oder negativ gedreht wird, in zwei Grenzlagen über. Konstruiert man also aus sämtlichen zu gegebenen Winkeln möglichen Grenzlagen Vierecke, so erhält man jedes verlangte Viereck gerade zweimal. Um jedes Viereck nur einmal zu erhalten, hat man von den konstruierten Grenzlagen beispielsweise nur diejenigen zu benutzen, aus denen man durch negative Drehung zum Viereck gelangt oder hat in der in § 16 näher bezeichneten Weise zu verfahren.

Bei den Grenzlagen der ersten Art ist es oft schwer, unmittelbar zu erkennen, ob man durch positive oder negative Drehung aus ihnen herausgelangt, bei den Grenzlagen zweiter Art dagegen ist dies leicht. Fällt zum Beispiel  $d$  auf  $\widehat{ab}$ , so kann bei Veränderung des Parameters der Grenzlage die Seite  $\widehat{ab}$  dieselbe Anzahl von Umläufen bekommen wie die Seite  $\widehat{db}$  des Dreiecks der Grenzlage oder noch einen Umlauf mehr (Fig. 51 u. 52). Im ersten Falle gelangt man durch negative, im zweiten durch positive Drehung aus der Grenzlage heraus.

Bei beliebig gegebenen Winkeln können stets beide Grenzlagen erster Art,  $(\widehat{ab}, \widehat{cd})$  und  $(\widehat{bc}, \widehat{da})$ , konstruiert werden. Die besonderen Fälle, in denen diese Grenzlagen zur Konstruktion nicht brauchbar sind, werden wir im folgenden Paragraphen besprechen. Es sind, wenn man aus der Grenzlage herausdreht, nachträglich Kreisringe in der Zahl 0, 1, 2, 3 ... einzuhängen.

Was für Grenzlagen zweiter Art bei gegebenen Winkeln möglich sind, erkennt man durch Aufsuchen sämtlicher Bedingungen des Typus  $\delta \geq 1 + \alpha$ . Bei Verwendung dieser Grenzlagen ist zu beachten, daß in den Grenzlagen polar eingehängte Kreisscheiben herausgefallen sein können. Es sei beispielsweise die zum Bestehen der Grenzlage  $\widehat{ab}(d)$  notwendige Bedingung  $\delta \geq 1 + \alpha$  erfüllt. Enthält die Zahl  $\delta - \alpha - 1$  Vielfache von 2, so können dieselben ganz oder zum Teil auf die herausgefallenen Kreisscheiben gerechnet werden. Ist  $p$  die Anzahl dieser Vielfachen, so sind nacheinander die Grenzlagen zu konstruieren, bei denen die Dreiecke bei  $d$  die Winkel:

$$\delta - \alpha - 1; \quad \delta - \alpha - 3; \quad \delta - \alpha - 5; \quad \dots \quad \delta - \alpha - 1 - 2p,$$

bei  $b$  und  $c$  die Winkel  $\beta$  und  $\gamma$  besitzen. Nachträglich sind dann, während

wir aus der Grenzlage herausdrehen, noch Kreisscheiben bzw. in der Anzahl  $0, 1, 2 \dots p$  von  $d$  nach  $\widehat{ab}$  hinüber polar einzuhängen. Auf diese Weise erhält man sämtliche zur Bedingung  $\delta \geq 1 + \alpha$  gehörigen Grenzlagen zweiter Art. Die bei der Konstruktion noch möglichen Ausnahmefälle besprechen wir im folgenden Paragraphen.

## § 12.

### Ausnahmefälle.

1. Man kommt, wenn die Winkel des Vierecks gewissen Bedingungen genügen, bei unmittelbarer Benutzung der gegebenen Regeln zu Grenzlagen, aus denen man durch Drehung der Seiten nicht herausgelangen kann, mit deren Hilfe man also auch kein Viereck konstruieren kann.

Wenn bei der Grenzlage  $(\widehat{ab}, \widehat{cd})$  zwei benachbarte Eckpunkte, z. B.  $a$  und  $b$ , in den Berührungspunkt der Kreise  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  fallen (Fig. 53), so läßt sich aus der Grenzlage ein Viereck nur dann konstruieren, wenn der Parameter der Grenzlage so bestimmt wird, daß auch die Seite  $\widehat{cd}$  sich gerade schließt (Fig. 54). Wenn ferner zwei gegenüberliegende Eckpunkte (z. B.  $d$  und  $b$ ) in den Berührungspunkt der Kreise  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  fallen (Fig. 55), so ist es überhaupt nicht möglich, ein Viereck zu erhalten.

Wenn wir bei beiden Grenzlagen nun den Berührungspunkt der Kreise  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  ins Unendliche werfen, so gehen die beiden Dreiecke der Grenzlage in geradlinige Dreiecke über. Dabei werden von den Winkeln der Dreiecke die Bedingungen erfüllt:

$$\delta - \alpha = 2m + 1; \quad \beta - \gamma = 2n + 1$$

wo  $m$  und  $n$  zwei positive oder negative ganze Zahlen bedeuten.<sup>1)</sup>

Vierecke, deren Winkel diesen Bedingungen genügen, gehen also nicht in die gewöhnliche Grenzlage  $(\widehat{ab}, \widehat{cd})$  über, wenn nicht  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  die Peripherie eine volle Anzahl von Malen umspannen.

Genügen die Winkel diesen Bedingungen nicht, so kann die Grenzlage  $(\widehat{ab}, \widehat{cd})$  zur Konstruktion von Vierecken verwandt werden.

<sup>1)</sup> Schilling, Math. Ann. 44, S. 222.

Fällt bei der Grenzlage zweiter Art  $d$  auf  $\widehat{ab}$ , so ist es nicht möglich, aus der Grenzlage ein Viereck zu konstruieren, wenn im Dreieck  $bcd$   $\widehat{bc}$  oder  $\widehat{cd}$  oder  $\widehat{db}$  sich gerade schließt, wenn nicht in den ersten beiden Fällen auch  $\widehat{ab}$  sich immer gerade schließt.

Transformieren wir beim ersten Fall  $b$ , beim zweiten und dritten  $d$  ins Unendliche, so wird das Dreieck der Grenzlage in allen drei Fällen geradlinig. Die Bedingung dafür wird:

$$(\delta - \alpha - 1) - \beta - \gamma = 1 + 2p_{ab(d)} + 2p_{bc(d)}$$

beim ersten Fall, wo  $p_{ab(d)}$  die Anzahl der von  $d$  nach  $\widehat{ab}$  hinüber polar eingehängten Kreisscheiben bedeutet,  $p_{bc(d)}$  die Zahl der von  $d$  nach  $\widehat{bc}$  polar eingehängten Kreisscheiben. Für die drei Fälle erhalten wir unter Verwendung analoger Bezeichnungen die Bedingungen:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \delta - \alpha - \beta - \gamma = 2(p_{ab(d)} + p_{bc(d)} + 1) \\ 2) \quad & \alpha + \beta - \gamma - \delta = 2(p_{cd(b)} - p_{ab(d)}) \\ 3) \quad & \alpha - \beta + \gamma - \delta = 2(p_{ab(c)} - p_{ab(d)}). \end{aligned}$$

Sobald eine dieser Gleichungen erfüllt wird, kann die Grenzlage  $\widehat{ab}(d)$  nicht zur Konstruktion von Vierecken benutzt werden.

Genügen die Winkel diesen Bedingungen nicht, so ist die Grenzlage zweiter Art zur Konstruktion von Vierecken zu gebrauchen. —

2. Ferner ist der besondere Fall möglich, daß bei Drehung der Seiten um die festen Ecken gleichzeitig zwei Grenzlagen von verschiedenem Typus eintreten. Diese so entstehenden Grenzlagen sind also auch noch bei der Konstruktion der Vierecke zu verwenden.

Daß zwei Grenzlagen erster Art gleichzeitig eintreten, ist nicht möglich. Tritt eine Grenzlage erster und eine zweiter Art gleichzeitig ein, so müssen zwei Kreise sich nicht nur in einem Punkte, sondern längs eines Bogens berühren, so daß die beiden Kreise ganz zusammenfallen (Fig. 56). Fallen die Kreise  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  zusammen, so muß die Bedingung erfüllt sein:

$$\delta - \alpha = 2m + 1; \quad \beta - \gamma = 2n + 1,$$

wo  $m$  und  $n$  zwei positive oder negative ganze Zahlen bedeuten. Dies sind aber dieselben Bedingungen, bei denen die gewöhnliche Grenzlage erster

Art unbrauchbar war. Dieselbe ist also durch diese neue Grenzlage zu ersetzen.

Dafs zwei Grenzlagen zweiter Art gleichzeitig eintreten, ist möglich auf dreierlei typische Arten:

a)  $d$  fällt auf  $\widehat{ab}$  und gleichzeitig auf  $\widehat{bc}$  (Fig. 57). Dann ist:

$$\delta - \alpha - \beta - \gamma = 2(p_{ab(a)} + p_{bc(a)} + 1)$$

Aus dieser Grenzlage läfst sich aber nur dann durch Drehung ein Viereck erzeugen, wenn nach Absonderung aller polar eingehängten Kreisscheiben, wie in der Figur, entweder  $\widehat{ab}$  allein oder  $\widehat{bc}$  allein noch umlaufend ist, oder wenn die Parameter so bestimmt sind, dafs  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{bc}$  sich gerade schliessen.

b)  $d$  fällt auf  $\widehat{ab}$  und gleichzeitig  $b$  auf  $\widehat{cd}$  (Fig. 58). Dann ist:

$$\alpha + \beta - \gamma - \delta = 2(p_{cd(b)} - p_{ab(a)}),$$

Aus dieser Grenzlage läfst sich aber nur dann ein Viereck erzeugen, wenn nach Absonderung aller polar eingehängten Kreisscheiben  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  beide nicht mehr umlaufend sind (Fig. 59), was sich durch geeignete Bestimmung der Parameter erreichen läfst.

c)  $d$  fällt auf  $\widehat{ab}$  und gleichzeitig  $c$  auf  $\widehat{ab}$  (Fig. 60). Dann ist:

$$\alpha - \beta + \gamma - \delta = 2(p_{ab(c)} - p_{ab(a)}).$$

Aus dieser Grenzlage läfst sich ein Viereck konstruieren, wenn  $\widehat{ab}$  nach Abtrennung aller polar eingehängten Kreisscheiben keinmal, einmal oder zweimal umlaufend ist (Fig. 61—63). Doch müssen dabei auf dem Kreise  $\widehat{ab}$  die Eckpunkte in der Ordnung  $a, b, c, d$  oder  $a, b, d, c$  aufeinander folgen.

Die für die Winkel gefundenen Gleichungen stimmen aber mit den oben gefundenen überein, bei deren Bestehen die Grenzlage  $\widehat{ab}(d)$  zur Konstruktion eines Vierecks unbrauchbar war. An die Stelle dieser Grenzlagen sind also diejenigen zu setzen, bei denen zwei Grenzlagen gleichzeitig eintreten.

## Kapitel II.

## Die Ergänzungsrelationen.

## § 13.

**Prinzip bei der Ableitung der Ergänzungsrelationen.**

Wir fragen, welches sind die Relationen, welche die Abhängigkeit zwischen den Umlaufszahlen der Seiten eines Kreisbogenvierecks und den Winkeln darstellen? Wir zählen aber einen Umlauf erst dann, wenn die ganze Peripherie auch wirklich durch den Bogen überschritten ist.

Die Umlaufszahlen bezeichnen wir mit  $u_{ab}, u_{bc}, u_{cd}, u_{da}$ .

Es bezeichnet im Dreieck mit den Ecken  $a, b, c$  und den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$

$$E\left(\frac{\alpha - \beta - \gamma + 1}{2}\right)$$

die Umlaufszahl der dem Winkel  $\alpha$  gegenüberliegenden Seite, wobei  $E\left(\frac{\alpha - \beta - \gamma + 1}{2}\right)$  diejenige größte ganze positive Zahl oder Null bedeutet, welche von  $\frac{\alpha - \beta - \gamma + 1}{2}$  überschritten wird.<sup>1)</sup>

Die für die Seiten dadurch gegebenen Ungleichheitsbedingungen nennt man Ergänzungsrelationen.

Lassen wir das Viereck, indem wir Ecken und Winkel festhalten, durch Drehung der Seiten in eine Grenzlage übergehen, so kennt man also für die in derselben entstehenden Dreiecke die Ergänzungsrelationen. Für die Grenzlage lassen sich deshalb leicht die Beziehungen zwischen den Umlaufszahlen der Seiten und den Winkeln aufstellen. Da nun beim Übergang zum Viereck aber sowohl die Winkel, wie auch die Umlaufszahlen der Seiten erhalten bleiben, gilt die erhaltene Relation ohne weiteres für das Viereck selbst.

Indem wir an allen zu gegebenen Winkeln möglichen Grenzlagen die Relationen aufstellen, erhalten wir die Ergänzungsrelationen für alle Vierecke, welche zu gegebenen Winkeln existieren.

Die Vierecke, welche aus Grenzlagen erster Art hervorgehen und die Vierecke, welche aus Grenzlagen zweiter Art hervorgehen, behandeln wir besonders.

<sup>1)</sup> Klein, Math. Ann. 37, S. 585.



## § 14.

**Die Ergänzungsrelationen der Vierecke, welche aus Grenzlagen erster Art entstehen.**

In der Grenzlage erster Art mögen sich  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  berühren. Wir könnten nun in jedem Dreieck der Grenzlage die Umlaufszahlen für sich zählen; da wir aber sogleich für die ganze Schar der Vierecke, die aus der Grenzlage erster Art hervorgehen können, die Ergänzungsrelationen ableiten wollen, müssen wir einen etwas anderen Weg einschlagen, denn auf die angegebene Art ergibt sich nicht, wie die Umlaufszahlen der Vierecksseiten von dem Parameter der Grenzlage abhängen.

Wenn wir aus der Grenzlage herausdrehen, so haben wir zunächst ein Viereck vor uns, bei dem sich von  $\widehat{ab}$  nach  $\widehat{cd}$  hinüber transversale Einhängungen machen lassen.

Für die Vierecke, welche aus der Grenzlage erster Art entstehen, müssen demnach dieselben Ergänzungsrelationen gelten wie für die Vierecke, in die sich transversale Einhängungen machen lassen. Um die verlangten Ergänzungsrelationen zu finden, können wir also die Relationen dieser Vierecke ableiten. Wir verfahren dabei folgendermaßen:

Wir denken uns ein Viereck vorgelegt, in das sich von  $\widehat{ab}$  nach  $\widehat{cd}$  transversale Einhängungen machen lassen und transformieren die Kreise  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  in zwei konzentrische.

Wir bewegen, indem wir einen Vierecksparameter auf die erste Weise deuten, den Kreis  $\widehat{bc}$ . Die Bewegung ist nach einer Richtung hin unbegrenzt, denn die Einhängung eines Kreisringes kommt jedesmal einem Herumführen des Kreises  $\widehat{bc}$  um einen Vollkreis gleich. Bei der Bewegung nach der andern Richtung tritt aber stets eine Grenzlage ein. Während das Viereck sich in dieser Grenzlage befindet, berechnen wir die Umlaufszahlen. Dabei erhalten wir zwar nicht die Umlaufszahlen für die Seiten des Ausgangsvierecks, denn bei der Bewegung des Kreises  $\widehat{bc}$  sind Umlaufszahlen der Seiten  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  ev. verloren gegangen. Da wir aber die Bewegung von  $\widehat{bc}$  genau kennen, lassen sich die verloren gegangenen Umlaufszahlen ermitteln, so daß man die Relationen des vorgelegten Vierecks erhalten kann.

Wenn wir den Kreis  $\widehat{bc}$  bis zur Grenzlage verschieben, so ist die Grenzlage vierter Art nicht möglich, da sich die Kreise  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  imaginär schneiden. Auch die Grenzlage zweiter Art ist nicht möglich. Fiele z. B.  $a$  auf  $\widehat{bc}$ , so könnte der Kreis  $\widehat{bc}$  nach keiner Richtung unbegrenzt bewegt werden.

Also ist nur die Grenzlage erster Art  $(\widehat{bc}, \widehat{da})$  oder eine der Grenzlagen dritter Art  $(a, b)$  und  $(c, d)$  möglich.

Tritt die erste Grenzlage ein, so muß, während das Viereck sich nahezu in derselben befindet, ein zur Einhängung von Kreisringen geeigneter Schnitt, der von der Seite  $\widehat{ab}$  nach  $\widehat{cd}$  geht, zwischen der von  $\widehat{bc}$  und  $\widehat{da}$  gebildeten Einschnürung hindurchgeführt werden. Wir müssen dabei von der Grenzlage die Eigenschaft verlangen, daß dieser Schnitt vollständig innerhalb des von den Kreisen  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  gebildeten Ringgebietes hindurchgeführt werden kann. Die einzigen Dreiecke mit den Winkeln  $\alpha, \beta, 0$  und  $\gamma, \delta, 0$ , die sich zu einer Grenzlage mit dieser Eigenschaft zusammensetzen lassen, sind aber diejenigen, bei denen

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &< 1 \\ \gamma + \delta &< 1 \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

Dies ergibt sich, wenn man die reduzierten Dreiecke aller Typen zu einer Grenzlage mit der verlangten Eigenschaft zusammensetzen sucht.

Alle übrigen Vierecke der betrachteten Art gehen bei der erwähnten Verschiebung von  $\widehat{bc}$  also in die dritte Grenzlage über, wobei weder polar noch lateral angehängte Kreisscheiben herausfallen.

Welche notwendige und hinreichende Bedingung muß nun zwischen den Winkeln bestehen, wenn ein Viereck der betrachteten Art, z. B. durch Zusammenfallen der Eckpunkte  $c$  und  $d$  in die dritte Grenzlage übergehen soll? Offenbar lassen sich dann im Dreieck der Grenzlage nach der Seite  $\widehat{ab}$  hinüber polare Anhängungen machen.

Damit nun im Dreieck mit den Winkeln  $\gamma + \delta - 1, \alpha, \beta$  nach der Seite  $\widehat{ab}$  hinüber eine polare Anhängung möglich ist, muß  $(\gamma + \delta - 1) - \alpha - \beta + 1 > 0$  sein, da dann die Zahl  $E \left( \frac{(\gamma + \delta - 1) - \alpha - \beta + 1}{2} \right)$ , welche die Umlaufzahl der Seite  $\widehat{ab}$  angibt, um 1 wachsen muß, wenn man  $\gamma + \delta - 1$  um den Betrag 2 vergrößert. Wenn demnach  $c$  und  $d$  zusammenfallen, so ist

$$\gamma + \delta - \alpha - \beta > 0.$$

Diese Bedingung ist mit der Bedingung  $\gamma + \delta \geq 1$  zum Eintreten der Grenzlage  $(c, d)$  auch hinreichend. Denn die erste Grenzlage ist dann nicht möglich, die Grenzlage  $(a, b)$  ebenfalls nicht, weil dann  $\alpha + \beta - \gamma - \delta > 0$  sein müßte.

Wir berechnen nun die Umlaufszahlen, während das Viereck sich in der Grenzlage befindet.

Aus § 5 wissen wir bereits, daß  $u_{bc} = u_{da} = 0$  ist.

Wenn nun

$$1) \quad \gamma + \delta - \alpha - \beta > 0$$

ist, so ist die Umlaufszahl von  $\widehat{ab}$  in der Grenzlage gleich  $E\left(\frac{\gamma + \delta - \alpha - \beta}{2}\right)$ .

Verschieben wir jetzt  $\widehat{bc}$  in umgekehrter Richtung, so daß aus der Grenzlage Vierecke entstehen, so wird hierbei, wenn wir immer weiter verschieben, im allgemeinen zuerst die Umlaufszahl von  $\widehat{ab}$  um eine Einheit zunehmen (Fig. 64). Während also  $\widehat{cd}$  noch nicht umlaufend ist, ist die Umlaufszahl von  $\widehat{ab}$  gleich  $E\left(\frac{\gamma + \delta - \alpha - \beta}{2}\right) + \varepsilon$ , wobei im allgemeinen für  $\varepsilon = 0$  und  $\varepsilon = 1$  Vierecke existieren.

Ist aber  $\gamma + \delta - \alpha - \beta$  eine gerade positive Zahl, sodafs  $\widehat{ab}$  in der Grenzlage sich gerade schließt, so ist die Umlaufszahl von  $\widehat{ab}$ , während  $\widehat{cd}$  noch nicht umlaufend ist, beständig gerade um eine Einheit größer als in der Grenzlage, sodafs also dann für  $\varepsilon$  nur der Wert 1 genommen werden darf.

Hängen wir jetzt Kreisringe ein, so wachsen die Umlaufszahlen von  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  immer um dieselbe Anzahl von Einheiten, sodaß

$$u_{ab} = u_{cd} + E\left(\frac{\gamma + \delta - \alpha - \beta}{2}\right) + \varepsilon \text{ ist.}$$

Wenn

$$2) \quad \gamma + \delta - \alpha - \beta = 0$$

ist, so geht bei der Konstruktion des Dreiecks der Grenzlage  $(c, d)$  der Kreis  $\widehat{ab}$  durch die gegenüberliegende Spitze des Dreiecks, sodafs diese Grenzlage nicht zur Konstruktion eines Vierecks brauchbar ist. Wir werden also in diesem Fall, wenn wir im gegebenen Viereck den Kreis verschieben, auch nicht zu dieser Grenzlage gelangen. Es tritt deshalb ein spezieller Fall ein. Die dritte Grenzlage tritt gleichzeitig an den Seiten  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$

ein, sodafs ein Zweieck entsteht mit dem Winkel  $\alpha + \beta - 1 = \gamma + \delta - 1$ . Führen wir den Kreis  $\widehat{bc}$  wieder aus der Grenzlage heraus, so nehmen die Umlaufszahlen von  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  immer gleichzeitig zu. Es ist also stets:

$$u_{ab} = u_{cd}$$

Wenn dann aber die oben abgeleitete Gleichung noch gelten soll, so ist in dieser  $\varepsilon = 0$  zu nehmen.

Gehen wir wieder auf die Vierecke zurück, die aus der Grenzlage  $(\widehat{bc}, \widehat{da})$  entstanden, so finden wir aus Fig. 65 die Bedingung dafür, dafs die Seite  $\widehat{ab}$  sich beim Herumführen des Kreises  $\widehat{bc}$  früher überschlägt als  $\widehat{cd}$ . In der Figur ist der Kreis  $\widehat{bc}$  noch über die Grenzlage hinaus nach  $db'$  geführt, bis  $c$  und  $d$  zusammenfallen. Es ist, weil im Dreieck  $cab'$  die Winkelsumme  $< 1$  sein mufs,

$$\begin{aligned} (1 - \gamma - \delta) + \alpha + \beta &< 1 \\ \gamma + \delta - \alpha - \beta &> 0. \end{aligned}$$

Wenn  $\gamma + \delta - \alpha - \beta = 0$  ist, so müssen auch hier die Seiten  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  sich gleichzeitig beim Herumführen von  $\widehat{bc}$  überschlagen, sodafs also für diese Vierecke die oben erhaltenen Regeln bestehen bleiben.

In dem speziellen Falle der Fig. 54 in § 12, der hier noch zu behandeln ist, ist  $\gamma + \delta - \alpha - \beta$  eine gerade Zahl. Die abgeleitete Relation bleibt hier bestehen, sobald man  $\varepsilon = 1$  setzt.

Die Vierecke, die aus Grenzlagen vom Typus der Fig. 56 entstehen, behandeln wir im nächsten Paragraphen.

Wir fassen zusammen:

Für diejenigen Vierecke, welche aus der Grenzlage  $(\widehat{ab}, \widehat{cd})$  entstehen, ist:

$$\text{I.} \quad u_{ab} = u_{cd} + E \left( \frac{\gamma + \delta - \alpha - \beta}{2} \right) + \varepsilon; \quad u_{bc} = u_{da} = 0$$

wenn  $\gamma + \delta - \alpha - \beta > 0$  ist.

Es gibt Vierecke nur für  $\varepsilon = 1$ , wenn  $\gamma + \delta - \alpha - \beta$  eine gerade positive Zahl, nur für  $\varepsilon = 0$ , wenn  $\gamma + \delta - \alpha - \beta = 0$  ist, sonst für  $\varepsilon = 1$  und für  $\varepsilon = 0$ .

Wir können an dieser Stelle leicht den aus § 5 noch rückständigen Beweis erbringen, daß die Winkel der reduzierten Vierecke, bei denen sich von  $\widehat{ab}$  nach  $\widehat{cd}$  ein Kreisring einhängen läßt, und  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  umlaufend sind, den Bedingungen  $\alpha + \beta < 1$ ,  $\gamma + \delta < 1$  genügen müssen. Denn bei den Vierecken, die aus der dritten Grenzlage entstehen, ist, wenn zwei gegenüberliegende Seiten umlaufend sind, stets ein Kreisring eingehängt. Die reduzierten Vierecke der verlangten Art können also nur aus der ersten Grenzlage entstehen, bei der  $\alpha + \beta < 1$ ,  $\gamma + \delta < 1$  ist.

## § 15.

### Die Ergänzungsrelationen der Vierecke, welche aus Grenzlagen zweiter Art entstehen.

Wir betrachten als Beispiel die Grenzlage zweiter Art  $ab(d)$ .

In derselben entsteht ein Dreieck mit den Winkeln:

$$\delta - \alpha - 1 - 2p_{ab(d)}, \beta, \gamma.$$

Durch Anwendung der Ergänzungsrelation des Dreiecks ergibt sich demnach:

$$u_{ab} = p_{ab(d)} + E\left(\frac{\alpha - \beta + \gamma - \delta + 2p_{ab(d)} + 2}{2}\right) + \varepsilon$$

$$u_{bc} = E\left(\frac{\delta - \alpha - \beta - \gamma - 2p_{ab(d)}}{2}\right)$$

$$u_{cd} = E\left(\frac{\alpha + \beta - \gamma - \delta + 2p_{ab(d)} + 2}{2}\right)$$

$$u_{da} = 0.$$

Hierin hat  $p_{ab(d)}$  nacheinander alle ganzzahligen Werte zu durchlaufen, für die

$$E\left(\frac{\delta - \alpha - 1}{2}\right) \geq p_{ab(d)} \geq 0 \text{ ist.}$$

$E\left(\frac{\delta - \alpha - 1}{2}\right)$  soll die größte ganze nicht negative in  $\frac{\delta - \alpha - 1}{2}$  enthaltene Zahl bedeuten, sodaß, wenn  $\frac{\delta - \alpha - 1}{2}$  eine ganze Zahl ist,  $E\left(\frac{\delta - \alpha - 1}{2}\right) = \frac{\delta - \alpha - 1}{2}$  wird.

Im allgemeinen gibt es stets für  $\varepsilon = 0$  und  $\varepsilon = 1$  Vierecke, die durch Variation des Parameters der Grenzlage entstehen.

Für die in § 12 behandelten Ausnahmefälle gelten jedoch diese Symbole für die Umlaufszahlen nicht ohne weiteres, da sich in der Grenzlage  $ab(d)$  dort keine eigentlichen Kreisbogendreiecke abtrennen. Wir müssen dies nachher berücksichtigen.

Die obigen Formeln für die Umlaufszahlen zeigen unmittelbar, daß, wenn  $p_{ab(d)}$  und  $\varepsilon$  nacheinander die ihnen zukommenden Werte annehmen, die sich dann ergebende Zahlenreihe jeder Umlaufszahl keine Lücke besitzt, sofern die Umlaufszahlen sich überhaupt verändern. —

Wir stellen nun die zwischen den Umlaufszahlen bestehenden Relationen auf.

Ist zunächst:

$$\alpha + \beta - \gamma - \delta + 2E\left(\frac{\delta - \alpha - 1}{2}\right) + 2 > 0,$$

so findet man durch Hinzufügen der Bedingung:

$$2\left(\delta - \alpha - 1 - 2E\left(\frac{\delta - \alpha - 1}{2}\right)\right) > 0,$$

daß  $\alpha - \beta + \gamma - \delta + 2E\left(\frac{\delta - \alpha - 1}{2}\right) < 0$  ist.

Also ist in diesem Falle für jeden Wert von  $p_{ab(d)}$ :

$$u_{ab} = p_{ab(d)} + \varepsilon.$$

Solange nun die Bedingung:

$$\alpha + \beta - \gamma - \delta + 2p_{ab(d)} + 2 > 0$$

erfüllt bleibt, ergibt sich:

$$u_{bc} = 0$$

und ferner:

$$u_{cd} = u_{ab} + E\left(\frac{\alpha + \beta - \gamma - \delta}{2}\right) + 1 - \varepsilon.$$

wenn im besonderen  $\alpha + \beta - \gamma - \delta > 0$  ist.

Wenn dagegen im besonderen  $\alpha + \beta - \gamma - \delta < 0$  ist, so ist:

$$\begin{aligned} u_{cd} + E\left(\frac{\gamma + \delta - \alpha - \beta}{2}\right) &= E\left(\frac{\alpha + \beta - \gamma - \delta + 2p_{ab(d)} + 2}{2}\right) + E\left(\frac{\gamma + \delta - \alpha - \beta}{2}\right) \\ &= p_{ab(d)} = u_{ab} - \varepsilon \\ u_{ab} &= u_{cd} + E\left(\frac{\gamma + \delta - \alpha - \beta}{2}\right) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Setzen wir in der ersten der beiden Relationen, die zwischen  $u_{ab}$  und  $u_{cd}$  bestehen, noch  $\varepsilon$  für  $1 - \varepsilon$ , so ergibt sich:

Solange  $\alpha + \beta - \gamma - \delta + 2p_{ab(d)} + 2 > 0$  ist, gilt die Ergänzungsrelation I der Vierecke, die aus der Grenzlage  $(ab, cd)$  entstehen.

Ist der Winkel des Dreiecks der Grenzlage bei  $d$  null, so können Kreisringe zwischen  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  herausgefallen sein, was die Relationen auch berücksichtigen.

Treten nun die in den Fig. 56, 58, 59 gezeichneten speziellen Grenzlagen ein, so ist nach § 12:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta - \gamma - \delta &= 2(p_{cd(b)} - p_{ab(d)}) \\ u_{ab} &= p_{ab(d)} + \varepsilon; \quad u_{cd} = p_{cd(b)} + \varepsilon, \end{aligned}$$

wo beide Zahlen  $\varepsilon$  entweder zugleich 0 oder zugleich 1 sein müssen. Demnach ist in diesem Falle:

$$u_{cd} - u_{ab} = \frac{\alpha + \beta - \gamma - \delta}{2},$$

sodafs die Relation I bestehen bleibt, wenn wir in ihr  $\varepsilon = 1$  setzen, sobald  $\alpha + \beta - \gamma - \delta$  eine gerade Zahl ist, dagegen  $\varepsilon = 0$ , sobald  $\alpha + \beta - \gamma - \delta = 0$  ist.

Nimmt  $p_{ab(d)}$  noch weiter ab, so wird  $\alpha + \beta - \gamma - \delta + 2p_{ab(d)} + 2 \leq 0$

$$u_{cd} = 0.$$

$u_{bc}$  ist zunächst ebenfalls noch null. Wird schliesslich:

$$\delta - \alpha - \beta - \gamma - 2p_{ab(d)} > 0,$$

so ist in dem Symbol für  $u_{bc}$  das Argument positiv, und demnach ist jetzt:

$$\begin{aligned} \text{II.} \quad u_{ab} + u_{bc} &= E\left(\frac{\alpha - \beta - \gamma - \delta}{2}\right) + \varepsilon; \\ u_{cd} &= u_{da} = 0. \end{aligned}$$

Tritt aber die in Fig. 57 gezeichnete spezielle Grenzlage ein, so ist nach § 12:

$$\begin{aligned} \delta - \alpha - \beta - \gamma &= 2(p_{ab(d)} + p_{bc(d)} + 1) \\ u_{ab} &= p_{ab(d)} + \varepsilon_1; \quad u_{bc} = p_{bc(d)} + 1 - \varepsilon_1, \end{aligned}$$

wo beide Zahlen  $\varepsilon_1$  entweder zugleich 0 oder zugleich 1 sein müssen.

Demnach ist in diesem Falle:

$$\frac{\delta - \alpha - \beta - \gamma}{2} = u_{ab} + u_{bc}.$$

Die Relation II gilt also für diese Vierecke, wenn man in ihr  $\varepsilon = 1$  setzt.

Wählt man aber den Fall der Fig. 57 so, daß  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{bc}$  beide sich gerade schließen, so ist dann  $u_{ab} = p_{ab(d)}$ ;  $u_{bc} = p_{bc(d)}$  und in II  $\varepsilon = 0$  zu setzen. —

Ist die anfangs gestellte Bedingung nicht erfüllt, sondern

$$\alpha + \beta - \gamma - \delta + 2E' \left( \frac{\delta - \alpha - 1}{2} \right) + 2 < 0,$$

so ist stets  $u_{cd} = 0$ .  $u_{bc}$  ist zunächst ebenfalls null. Doch ist nicht notwendig wie im vorigen Falle  $u_{ab} = p_{ab(d)} + \varepsilon$ .

Wird aber wieder

$$\delta - \alpha - \beta - \gamma - 2p_{ab(d)} > 0,$$

so wird auch wiederum  $u_{ab} = p_{ab(d)} + \varepsilon$ , sodafs wieder die Relation II besteht.

Wir fassen zusammen:

Bei den Vierecken, die aus der Grenzlage  $ab(d)$  hervorgehen, erteile man  $p_{ab(d)}$  nacheinander alle ganzzahligen Werte, für die

$$E' \left( \frac{\delta - \alpha - 1}{2} \right) \geq p_{ab(d)} \geq 0 \text{ ist.}$$

Solange wie

$$\alpha + \beta - \gamma - \delta + 2p_{ab(d)} + 2 > 0$$

ist, gilt die Relation I (S. 62) der aus der Grenzlage  $(\widehat{ab}, \widehat{cd})$  entstehenden Vierecke nebst den Bestimmungen über die Zahl  $\varepsilon$ .

Solange wie dann weiter

$$\delta - \alpha - \beta - \gamma - 2p_{ab(d)} > 0$$

ist, gilt die Relation:

$$\text{II.} \quad u_{ab} + u_{bc} = E \left( \frac{\delta - \alpha - \beta - \gamma}{2} \right) + \varepsilon;$$

$$u_{cd} = u_{da} = 0,$$

wobei es stets für  $\varepsilon = 0$  und  $\varepsilon = 1$  Vierecke gibt.

$u_{ab}$  nimmt hier der Reihe nach alle Werte an, für welche:

$$E' \left( \frac{\delta - \alpha + 1}{2} \right) + E \left( \frac{\alpha - \beta + \gamma - \delta + 2E' \left( \frac{\delta - \alpha + 1}{2} \right)}{2} \right) \geq u_{ab} \geq E \left( \frac{\alpha - \beta + \gamma - \delta + 2}{2} \right) \text{ ist.}$$



Für diejenigen Werte von  $p_{ab(d)}$ , welche keine der obigen Bedingungen erfüllen, ist

$$u_{bc} = u_{cd} = u_{da} = 0,$$

und  $u_{ab}$  nimmt alle Werte an, die in I und II nicht vorkommen können.

Aus den Figuren 60—63 ergibt sich noch, daß in dem noch übrigen speziellen Falle, wo  $\alpha - \beta + \gamma - \delta$  eine gerade Zahl ist, die aus diesen Grenzlagen konstruierten Vierecke zu der zuletzt erwähnten Art gehören. Sie lassen sich auch stets so anordnen, daß die Werte von  $u_{ab}$  bei ihnen eine ununterbrochene Folge ganzer Zahlen bilden.

Die für  $u_{ab}$  angegebene obere Grenze läßt sich so umformen, daß wir sagen:

Der größte Wert von  $u_{ab}$  ist gleich

$$E' \left( \frac{\delta - \alpha + 1}{2} \right) + E \left( \frac{\gamma - \beta + 1}{2} \right) \text{ oder um 1 kleiner.}$$

Für  $p_{ab(d)} = E' \left( \frac{\delta - \alpha - 1}{2} \right)$  ergibt sich ferner:

$$u_{bc} = 0; \quad u_{cd} = E \left( \frac{\beta - \gamma + 1}{2} \right) \text{ oder um 1 kleiner.}$$

$$u_{da} = 0.$$

Für  $p_{ab(d)} = 0$  ergibt sich noch:

$$u_{cd} = E \left( \frac{\alpha + \beta - \gamma - \delta + 2}{2} \right); \quad u_{bc} = E \left( \frac{\delta - \alpha - \beta - \gamma}{2} \right)$$

$$u_{da} = 0.$$

## § 16.

### Die wesentlichsten Eigenschaften der vollständigen zu gegebenen Winkeln möglichen Schar von Vierecken.

Wir betrachten jetzt die zweidimensionale Schar sämtlicher zu fest gegebenen Winkeln vorhandenen Vierecke.

Wie in § 5 gezeigt ist, gibt es bei beliebigen Winkeln sowohl stets Vierecke, bei denen  $u_{ab}$  und  $u_{cd}$  zwar voneinander abhängig sind, im übrigen aber beliebig groß vorgeschrieben werden können, als auch Vierecke, bei

denen  $u_{ab} = u_{cd} = 0$  ist. Ferner gibt es auch stets Vierecke, bei denen sich  $u_{bc}$  und  $u_{da}$  entsprechend verhalten.

Aus der mit Hilfe der Funktionentheorie erschlossenen Tatsache, daß sämtliche Vierecke ein Kontinuum bilden, folgt, daß Vierecke für sämtliche Zwischenwerte der Umlaufszahlen vorhanden sein müssen.

Wir wollen die Vierecksschar so anordnen, daß die Werte jeder Umlaufszahl eine unterbrochene Folge bilden, für alle zusammengehörigen Wertequadrupel derselben in dieser Reihenfolge Vierecke konstruieren und die dabei auftretenden zugehörigen Ergänzungsrelationen angeben. Dann zeigen wir, daß die in angegebener Weise konstruierte Vierecksschar alle möglichen Vierecke enthält. In der getroffenen Anordnung müssen sich dann notwendig die konstruierten Vierecke kontinuierlich aneinanderschließen. —

Wir wählen die Bezeichnung derart, daß

$$\gamma + \delta - \alpha - \beta > 0$$

und

$$\delta + \alpha - \beta - \gamma \geq 0$$

ist, was stets möglich ist.

Zunächst schließen sich die Umlaufszahlen aller Vierecke, die aus Grenzlagen erster Art  $(\widehat{ab}, \widehat{cd})$  konstruiert werden können, lückenlos aneinander. Man erreicht dies, indem man zunächst 0, dann 1, dann 2... Kreisinge einhängt. Auch bei Grenzlagen zweiter Art schließen sich, wie in § 15 gezeigt worden ist, die Umlaufszahlen lückenlos aneinander, wenn z. B. bei der Grenzlage  $ab(d)$  die Zahl  $p_{ab(d)}$  nacheinander die Werte  $E\left(\frac{\delta - \alpha - 1}{2}\right), \dots, 1, 0$  annimmt.

Aus den Grenzlagen  $(\widehat{ab}, \widehat{cd})$  erhalten wir durch Einhängen von Kreisingen Vierecke für alle Werte von  $u_{ab}$ , die größer oder gleich

$$E\left(\frac{\delta - \alpha + 1}{2}\right) + E\left(\frac{\gamma - \beta + 1}{2}\right)$$

sind. Dieser Wert selbst ist der kleinste, der aus der Grenzlage  $(\widehat{ab}, \widehat{cd})$  erhalten werden kann, wie man durch Anwendung der Dreiecksrelation auf die Dreiecke der Grenzlage findet. Zu diesem Wert von  $u_{ab}$  gehört

$$u_{cd} = E\left(\frac{\beta - \gamma + 1}{2}\right) + E\left(\frac{\alpha - \delta + 1}{2}\right).$$

A) Ist dieser Wert von  $u_{cd} > 0$ , so ist entweder  $\beta - \gamma > 1$  oder  $\alpha - \delta > 1$ . Durch Hinzunahme von  $\gamma + \delta - \alpha - \beta \geq 0$  ergibt sich, daß im ersten Falle noch  $\delta - \alpha > 1$ , im zweiten noch  $\gamma - \beta > 1$  ist.

Wenn

1.  $\delta - \alpha > 1$  und zugleich  $\beta - \gamma > 1$  ist, so existieren die Grenzlagen  $ab(d)$  und  $cd(b)$ .

Die größten aus der Grenzlage  $ab(d)$  sich ergebenden Werte von  $u_{ab}$  und  $u_{cd}$  schließen sich ohne Lücke an die kleinsten aus den Grenzlagen  $(\widehat{ab}, \widehat{cd})$  erhaltenen Werte an.

Die kleinsten aus der Grenzlage  $ab(d)$  sich ergebenden Werte von  $u_{ab}$  und  $u_{cd}$  sind in diesem Falle:

$$u_{ab} = E\left(\frac{\alpha - \beta + \gamma - \delta + 2}{2}\right) = 0$$

$$u_{cd} = E\left(\frac{\alpha + \beta - \gamma - \delta + 2}{2}\right) = 0.$$

Wenn

2.  $\alpha - \delta > 1$  und zugleich  $\gamma - \beta > 1$  ist, ergibt sich durch Betrachtung der Grenzlagen  $ab(c)$  in genau entsprechender Weise, daß man von den aus den Grenzlagen  $(\widehat{ab}, \widehat{cd})$  entstehenden Vierecken aus unter Durchlaufung sämtlicher Zwischenwerte der Umlaufszahlen wieder zu Vierecken gelangt, bei denen  $u_{ab} = u_{cd} = 0$  ist.

B) Wenn in der letzten Grenzlage erster Art bereits  $u_{cd} = 0$  ist, so ist

$$\beta - \gamma < 1 \text{ und zugleich } \alpha - \delta < 1.$$

Jetzt kann  $u_{ab}$  in dieser Grenzlage erster Art ebenfalls bereits null oder noch größer als null sein.

Im letzteren Falle ist wenigstens eine der Bedingungen  $\delta - \alpha > 1$ ;  $\gamma - \beta > 1$  erfüllt. Die aus diesen jetzt vorhandenen Grenzlagen zweiter Art sich ergebenden Umlaufszahlen setzen wieder ohne Unterbrechung die aus der ersten Grenzlage sich ergebenden Werte der Umlaufszahlen fort.

Existiert die Grenzlage  $ab(d)$ , so ist der kleinste aus ihr sich ergebende Wert von  $u_{ab}$  gleich  $E\left(\frac{\alpha - \beta + \gamma - \delta + 2}{2}\right)$ .

Ist dieser Wert noch nicht null, so muß  $\gamma - \beta > 1$  sein. Bei den Vierecken der nun sicher existierenden Grenzlage  $ab(c)$  wird dann aber der kleinste Wert von  $u_{ab} = E\left(\frac{-\alpha + \beta - \gamma + \delta}{2}\right) = 0$ . Zugleich ist auch  $u_{cd} = 0$ .

Existiert nicht die Grenzlage  $ab(d)$ , so gelangt man durch die Vierecke der Grenzlage  $ab(c)$  allein zu Vierecken mit den Umlaufszahlen  $u_{ab} = 0$ ;  $u_{cd} = 0$ .

Wir können jetzt sagen:

„Um unter der Voraussetzung:

$$\gamma + \delta - \alpha - \beta \geq 0$$

$$\delta + \alpha - \beta - \gamma \geq 0$$

Vierecke in der Reihenfolge zu erhalten, daß von beliebig großen Werten von  $u_{ab}$  und  $u_{cd}$  an bis zu den Werten  $u_{ab} = u_{cd} = 0$  die Werte aller Umlaufszahlen eine ununterbrochene Folge ganzer Zahlen durchlaufen, konstruiere man zunächst Vierecke aus den Grenzlagen  $(ab, cd)$  und hänge Kreisringe so ein, daß ihre Anzahl mit einer beliebig großen Zahl beginnend ununterbrochen die Reihe der ganzen Zahlen bis 0 einschließlic durchläuft.

„Kommt bei diesen Vierecken der Wert  $u_{ab} = 0$  noch nicht vor, so konstruiere man weiter Vierecke aus sämtlichen existierenden Grenzlagen  $ab(d)$ .

„Existieren diese nicht oder kommt auch bei ihnen noch nicht der Wert  $u_{ab} = 0$  vor, so sind Grenzlagen  $ab(c)$  in genügender Anzahl vorhanden, mit Hilfe deren sich die Vierecksreihe dann bis zu Vierecken mit der Umlaufszahl  $u_{ab} = 0$  fortsetzen läßt.

„Kreisscheiben sind ev. polar bei den Grenzlagen zweiter Art nachträglich so einzuhängen, daß ihre Anzahl die Reihe der ganzen Zahlen bis 0 einschließlic durchläuft.

„Die Konstruktion läßt sich offenbar von den letzten Vierecken aus in analoger Weise fortsetzen bis zu Vierecken, bei denen  $u_{bc}$  und  $u_{da}$  beliebig große Werte annehmen.“

Für die Umlaufszahlen der so konstruierten Vierecksschar gelten also nach § 14 und 15 zunächst die Relationen:

$$I. \quad u_{ab} = u_{cd} + E\left(\frac{\gamma + \delta - \alpha - \beta}{2}\right) + \varepsilon; \quad u_{bc} = u_{da} = 0$$

für beliebig große Werte von  $u_{cd}$  bis zum Werte  $u_{cd} = 0$ .

Vierecke mit einer Relation vom Typus II können z. B. nicht aus den Grenzlagen  $ab(c)$  entstehen, denn die hierzu notwendige Bedingung

$\gamma - \delta - \alpha - \beta > 0$  würde in Widerspruch mit der Voraussetzung  $\delta + \alpha - \beta - \gamma \geq 0$  stehen. Sie entstehen demnach nur aus den Grenzlagen  $ab(d)$  und  $bc(d)$ .

Ist, was wir vorerst voraussetzen wollen,

$$1) \quad \delta - \alpha - \beta - \gamma > 0,$$

so gibt es Vierecke mit den Relationen:

$$\text{II.} \quad u_{ab} + u_{bc} = E \left( \frac{\delta - \alpha - \beta - \gamma}{2} \right) + \varepsilon; \quad u_{cd} = u_{da} = 0,$$

wo wir  $u_{bc}$  alle Werte

$$0 \leq u_{bc} < E \left( \frac{\delta - \alpha - \beta - \gamma}{2} \right)$$

erteilen. Dies sind dann also die einzigen Vierecke mit Relationen von diesem Typus.

Sollte die aus II sich ergebende Wertereihe sich nicht an die aus I erhaltene Wertereihe anschließen, so gibt es für die dazwischen fehlenden Werte von  $u_{ab}$  auch noch Vierecke, für welche dann außerdem immer  $u_{bc} = u_{cd} = u_{da} = 0$  ist.

Die Relation II enthält bereits die Vierecke, für die  $u_{ab} = 0$  ist.

Zuletzt gibt es Vierecke mit den Relationen:

$$\text{III.} \quad u_{bc} = u_{da} + E \left( \frac{\delta + \alpha - \beta - \gamma}{2} \right) + \varepsilon; \quad u_{ab} = u_{cd} = 0.$$

Die aus II und III sich ergebende Wertereihe für  $u_{bc}$  ist, wenn notwendig, in entsprechender Weise zu vervollständigen wie die Wertereihe für  $u_{ab}$ .

Ist nun

$$2) \quad \delta - \alpha - \beta - \gamma \leq 0,$$

so haben wir in § 15 die Relation II zwar nicht für diese Fälle abgeleitet. Stellen wir sie trotzdem auf, so reduziert sie sich auf:

$$u_{ab} + u_{bc} = \varepsilon; \quad u_{cd} = u_{da} = 0.$$

Für  $\varepsilon = 1$  wird die erste Gleichung befriedigt durch:  $u_{ab} = 1$ ;  $u_{bc} = 0$  und  $u_{ab} = 0$ ;  $u_{bc} = 1$ ,

für  $\varepsilon = 0$  durch  $u_{ab} = u_{bc} = 0$ .

Im allgemeinen sind Vierecke mit diesen Umlaufszahlen vorhanden.

Ist jedoch  $\gamma + \delta - \alpha - \beta = 0$  und zugleich  $\delta + \alpha - \beta - \gamma > 0$ , so sind für  $\varepsilon = 0$  nur die Vierecke vorhanden, für welche

$$u_{ab} = u_{cd} = u_{da} = 0; \quad u_{bc} = 1 \quad \text{ist.}$$

Da dieselben aber durch die übrigen Relationen und Angaben schon berücksichtigt werden, genügt es,  $\varepsilon = 0$  zu nehmen.

Ist  $\gamma + \delta - \alpha - \beta > 0$  und gleichzeitig  $\delta + \alpha - \beta - \gamma = 0$ , so genügt ebenfalls  $\varepsilon = 0$ .

Ist  $\gamma + \delta - \alpha - \beta = 0$  und zugleich  $\delta + \alpha - \beta - \gamma = 0$ , so ist nur  $\varepsilon = 0$  zulässig.

Wir können demnach die Relation II immer aufstellen, wenn wir die Regel für  $\varepsilon$  so fassen:

„In der Relation II ist nur  $\varepsilon = 0$  vorzuschreiben, wenn wenigstens eine der Gleichungen  $\gamma + \delta - \alpha - \beta = 0$ ;  $\delta + \alpha - \beta - \gamma = 0$  erfüllt ist, sonst  $\varepsilon = 0$  und  $\varepsilon = 1$ .“

Wegen unserer Voraussetzung gibt es keine weiteren Relationen vom Typus der Relationen I und III. Der Voraussetzung wegen treten aber auch keine Vierecke von der Art weiter auf, wo drei Umlaufzahlen null sind. Denn nach § 15 muß, damit z. B. Vierecke vorhanden sind, bei denen  $u_{bc} = u_{cd} = u_{da} = 0$  und  $u_{ab}$  von Null verschieden ist,  $\gamma + \delta - \alpha - \beta > 0$  sein.

Die den obigen Relationen genügenden Wertequadrupel der Umlaufzahlen sind demnach sämtliche, die zu den gegebenen Winkeln auftreten. —

Wir haben in diesem Paragraphen bereits gezeigt, wie zu jedem dieser Wertequadrupel aus einer Grenzlage Vierecke konstruiert werden können.

Wir untersuchen diese Konstruktion noch auf ihre Vollständigkeit hin.

Wir legen die Tatsache zugrunde, daß alle zu gegebenen Winkeln möglichen Vierecke ein Kontinuum bilden.

Wir geben neben den Winkeln auch noch feste den Ergänzungsrelationen genügende Umlaufzahlen vor. Konstruieren wir Vierecke mit diesen Winkeln und Umlaufzahlen in der vorher angegebenen Weise aus einer Grenzlage, so gelangen wir, wenn wir aus dieser heraus beständig in demselben Sinne weiter drehen, schließlich in eine bestimmte zweite Grenzlage.

Verändern wir den Parameter der ersten Grenzlage, so ändert sich der Typus der zugehörigen zweiten Grenzlage nicht, sondern es tritt nichts als die Veränderung ihres Parameters ein. Denn würde jene zweite Grenzlage in eine Grenzlage von anderem Typus übergehen, so ist dies der Kontinuität wegen nur über eine Lage hinweg möglich, bei der die beiden Grenzlagen von verschiedenem Typus zugleich eintreten. Dann müssen aber nach § 12 die Winkel eine besondere Gleichung erfüllen, was im allgemeinen nicht der Fall ist. Genügen sie aber einer solchen Gleichung, so bleiben wir bei Veränderung des Parameters immer bei Vierecken, die in dieselben ausgearteten Grenzlagen übergehen.

Umgekehrt hat auch die Veränderung des Parameters der zweiten Grenzlage stets nur die Veränderung des Parameters der ersten Grenzlage zur Folge.

Die Parameter der zusammengehörigen ersten und zweiten Grenzlage können wir wegen der fest vorgegebenen Umlaufszahlen nur so weit verändern, bis eine Seite sich gerade schließt.

Geht nun ein Viereck z. B. in die Grenzlagen  $ab(d)$  und  $cd(b)$  über, so entsteht auf diese Weise ein Teilkontinuum von Vierecken, das begrenzt ist von einem Viereck, bei dem  $\widehat{ab}$  sich gerade schließt, von den Grenzlagen  $ab(d)$  und  $cd(b)$  und von einem Viereck, bei dem  $\widehat{cd}$  sich gerade schließt.

Bei diesen Vierecken und Grenzlagen hört die Existenzmöglichkeit für die Membrane mit den vorgegebenen Umlaufszahlen und Winkeln zunächst auf.

Könnten wir nun aus anderen Grenzlagen noch weitere Vierecke mit denselben Umlaufszahlen konstruieren, so müssen sich diese in die zuerst konstruierten Vierecke kontinuierlich überführen lassen, was aber nur über solche Vierecke hinweg möglich erscheint, bei denen sich eine Seite gerade schließt. Es müßte also ein Viereck mit einer sich gerade schließenden Seite geben, das sich kontinuierlich in zwei verschiedene Grenzlagen überführen läßt. Ein derartiges Viereck gibt es aber nicht, da ein Viereck mit einer sich gerade schließenden Seite nur einen Parameter besitzt (Fig. 45), bei dessen Veränderung es nur in eine Grenzlage übergehen kann.

Wir können das Ergebnis der letzten Überlegung so aussprechen:

„Alle Vierecke mit denselben Winkeln, die es zu festen, den Ergänzungsrelationen genügenden Umlaufszahlen gibt, lassen sich aus einer einzigen diese Umlaufszahlen und Winkel besitzenden Grenzlage konstruieren, wenn dem Parameter derselben jeder mögliche Wert gegeben und um jeden möglichen Betrag aus der Grenzlage herausgedreht wird.“

Es bleibt noch die Frage, wie wir bei der in diesem Paragraphen anfangs angegebenen Konstruktion des zweidimensionalen Kontinuums auch jedes mögliche Viereck nur einmal erhalten. Zweimal werden Vierecke nur konstruiert, wenn zwei bei der angegebenen Konstruktion zu benutzende Grenzlagen dieselben Umlaufszahlen besitzen. Von diesen beiden ist dann also stets eine auszuschalten. —

Es ergibt sich also:

Benutzt man die vorher angegebenen Grenzlagen zur Konstruktion des Kontinuums, so erhält man hierbei auch sämtliche Vierecke, die zu den gegebenen Winkeln existieren. Benutzt man von zwei Grenzlagen von verschiedenem Typus, welche dieselben Umlaufszahlen der Seiten ergeben, jedesmal nur eine zur Konstruktion, so erhält man jedes Viereck auch nur einmal.

Wir fassen die über die Ergänzungsrelationen erhaltenen Ergebnisse zusammen:

Die Bezeichnung werde so gewählt, daß

$$\gamma + \delta - \alpha - \beta \geq 0$$

und

$$\delta + \alpha - \beta - \gamma \geq 0 \quad \text{ist.}$$

Dann hat man zunächst Vierecke mit den Relationen:

$$\text{I.} \quad u_{ab} = u_{cd} + E \left( \frac{\gamma + \delta - \alpha - \beta}{2} \right) + \varepsilon; \quad u_{bc} = u_{da} = 0.$$

Hierin hat  $u_{cd}$  die positiven ganzen Zahlen von  $+\infty$  bis 0 (einschließlich) zu durchlaufen. Für jeden Wert von  $u_{cd}$  ist zuerst  $\varepsilon = 1$ , dann  $\varepsilon = 0$  vorzuschreiben. Wenn  $\gamma + \delta - \alpha - \beta = 0$  ist, gibt es nur Vierecke für  $\varepsilon = 0$ , wenn  $\gamma + \delta - \alpha - \beta$  eine gerade Zahl ist, nur für  $\varepsilon = 1$ .



Ferner hat man Vierecke mit den Relationen:

$$\text{II. } u_{ab} + u_{bc} = E \left( \frac{\delta - \alpha - \beta - \gamma}{2} \right) + \varepsilon; \quad u_{cd} = u_{da} = 0,$$

worin für  $u_{bc}$  die Werte von 0 bis  $E \left( \frac{\delta - \alpha - \beta - \gamma}{2} \right)$  (einschließlich) zu setzen sind. Ist wenigstens eine der Gleichungen  $\gamma + \delta - \alpha - \beta = 0$ ;  $\delta + \alpha - \beta - \gamma = 0$  erfüllt, so ist nur  $\varepsilon = 0$  vorzuschreiben, sonst gibt es stets Vierecke für  $\varepsilon = 0$  und  $\varepsilon = 1$ .

Sollte die aus II erhaltene Wertereihe für  $u_{ab}$  sich nicht an die aus I erhaltene anschließen, so gibt es für die dazwischen fehlenden Werte von  $u_{ab}$  auch Vierecke, für welche dann außerdem immer

$$u_{bc} = u_{cd} = u_{da} = 0 \quad \text{ist.}$$

Endlich hat man Vierecke mit den Relationen:

$$\text{III. } u_{bc} = u_{da} + E \left( \frac{\delta + \alpha - \beta - \gamma}{2} \right) + \varepsilon; \quad u_{ab} = u_{cd} = 0.$$

Hier hat  $u_{da}$  mit 0 beginnend die Reihe der positiven ganzen Zahlen zu durchlaufen, und für jeden Wert ist zuerst  $\varepsilon = 0$ , dann  $\varepsilon = 1$  vorzuschreiben. Außerdem gilt in den Ausnahmefällen für  $\varepsilon$  die analoge Regel wie bei I.

Die aus II und III erhaltene Wertereihe für  $u_{bc}$  ist, wenn notwendig, in entsprechender Weise zu vervollständigen, wie die Wertereihe für  $u_{ab}$ .

Hat man unter Benutzung dieser Regeln sämtliche zusammengehörigen Werte der Zahlen  $u_{ab}$ ,  $u_{bc}$ ,  $u_{cd}$ ,  $u_{da}$  ermittelt, so existieren für jedes dieser Wertequadrupel auch Vierecke, welche die gegebenen Winkel und die gefundenen Umlaufzahlen besitzen. Zugleich sind diese Vierecke sämtliche, die zu den gegebenen Winkeln existieren. Sie bilden in der bei den Relationen angegebenen Reihenfolge ein zweidimensionales Kontinuum.

Durch eine andere Schreibweise<sup>1)</sup> kann man nach Herrn E. Hilb die Regel für die Ergänzungsrelationen noch folgendermaßen vereinfachen, sobald mindestens eine Seite umlaufend ist:

Man nenne die umlaufende Seite  $\widehat{ab}$ . Dann gelten die Relationen:

$$\begin{aligned} u_{bc} &= E\left(\frac{\delta - \alpha - \beta - \gamma}{2} - u_{ab} + 1 - \varepsilon\right) \\ u_{ca} &= E\left(\frac{\alpha + \beta - \gamma - \delta}{2} + u_{ab} + \varepsilon\right) \\ u_{da} &= E\left(\frac{\gamma - \delta - \alpha - \beta}{2} - u_{ab} + 1 - \varepsilon\right) \end{aligned}$$

wo  $\varepsilon$  im allgemeinen 0 oder 1 sein kann.

### § 17.

#### Herstellung des Kontinuums aller vorhandenen Vierecke.

Wir wollen jetzt geometrisch das Kontinuum herstellen für die sechsdimensionale Schar aller überhaupt existierenden Kreisbogenvierecke. Wir verändern jetzt also auch die Winkel. Um ein geschlossenes Kontinuum herzustellen, haben wir aber nur nötig, an den Grenzen unserer zweidimensionalen Kontinua eine Überleitung herzustellen, wir brauchen also nur bei den Vierecken, bei denen transversale Einhängungen möglich sind, kontinuierlich die Winkel zu verändern.

Wir behandeln zunächst die Vierecke, bei denen sich von  $\widehat{ab}$  nach  $\widehat{cd}$  hinüber Kreisringe einhängen lassen.

Wir gehen aus von einem Viereck mit den Winkeln 0, 0, 0, 0 (Fig. 66). Wir können einmal, während wir den Wert 0 für  $\delta$  festhalten, den Winkel  $\alpha$  beliebig vergrößern, indem wir den Eckpunkt  $a$  festhalten und  $d$  auf dem Kreise weiter führen (Fig. 66). Genau so kann man auch  $\delta$  allein wachsen lassen, während man für  $\alpha$  den Wert 0 festhält. Zweitens kann man hinterher unter Festhaltung der Eckpunkte  $d$  und  $a$  den Bogen  $\widehat{da}$  nach auswärts drehen, wodurch  $\alpha$  und  $\delta$  um einen beliebigen gleichen Betrag vergrößert werden können (Fig. 66). Auf diese Weise kann man jeden Wert

<sup>1)</sup> Vgl. die in der Vorbemerkung bereits genannte Note in den Göttinger Nachrichten.

der Winkel  $\alpha$  und  $\delta$  kontinuierlich erreichen. Genau so kann man bei den Winkeln  $\beta$  und  $\gamma$  jeden Wert kontinuierlich erreichen.

Man kann zwischen den zweidimensionalen Kontinua in entsprechender Weise eine Verbindung durch Vierecke herstellen, bei denen sich von  $\widehat{bc}$  nach  $\widehat{da}$  hinüber Kreisringe einhängen lassen.

Auf diese Weise sind sämtliche Kreisbogenvierecke übersichtlich in ein Kontinuum eingeordnet.

## § 18.

### Die Eindeutigkeitsfrage.

Wir haben noch die Frage zu erledigen:

Sind zwei Membrane, die in den zwölf Maßzahlen, welche den algebraischen und Ergänzungsrelationen genügen müssen, und dem Kern übereinstimmen, identisch?

Sind zwei solche Membrane nicht identisch, so können doch ihre Begrenzungen, denen dann auch derselbe Umlaufssinn zugeordnet ist, stets zur Deckung gebracht werden.

Alle Vierecke mit fest gegebenen Winkeln und Umlaufszahlen können nach § 16 aus einer einzigen Grenzlage unter Abänderung des Parameters derselben konstruiert werden.

Bei dieser Konstruktion können die Begrenzungen zweier Vierecke, die aus Grenzlagen erster Art von gleichem Typus, aber verschiedenem Parameterwert konstruiert sind, nicht identisch sein und auch nicht durch lineare Transformation zur Deckung gebracht werden. Denn wäre dies möglich, so würden die beiden Grenzlagen erster Art, wenn die Vierecke dann wieder in sie übergeführt werden, dieselben Ecken und demnach auch den gleichen Parameterwert besitzen.

Verändern wir in einer Grenzlage zweiter Art deren Parameter, so bleiben drei Ecken fest, eine Ecke wird verschoben. Die aus zwei Grenzlagen zweiter Art von gleichem Typus, aber verschiedenem Parameterwert konstruierten Vierecke können also nie in der Begrenzung übereinstimmen.

Vierecke mit demselben Kern, denselben Winkeln und Umlaufszahlen, die doch nicht identisch sind, müssen sich also, wenn sie überhaupt möglich

sind, aus ein und derselben Grenzlage mit festem Parameterwert konstruieren und durch Drehung um die festen Ecken ineinander überführen lassen.

Messen wir durch den Winkel, um den die Schenkel eines Viereckswinkels hierbei gedreht werden, den Betrag der Drehung, so muß dieser Betrag bei der Drehung von einer dieser Membrane zur andern gleich einem ganzzahligen Vielfachen von  $360^\circ$  sein, denn nur dann kehrt unter Erhaltung des Umlaufsinnes ein Begrenzungskreis wieder in seine ursprüngliche Lage zurück.

Besitzt nun ein Viereck eine oder mehrere umlaufende Seiten, so erreicht der Betrag der Drehung, durch die es in eine Grenzlage übergeht, nie  $180^\circ$ .

Um dies zu zeigen, nehmen wir an, daß  $180^\circ$  erreicht werden können.  $\widehat{ab}$  sei umlaufend.

Wir wollen den vom Kreise  $\widehat{ab}$  umschlossenen Teil der Vollebene, der bei positiver Umlaufung der Membran zur Linken liegt, als das „Innere“ des Kreises  $\widehat{ab}$ , den anderen als das „Äußere“ bezeichnen.

Die Eckpunkte  $c$  und  $d$  müßten nun, wenn der Drehungswinkel  $180^\circ$  soll erreichen können, auf verschiedenen Seiten des Kreises  $\widehat{ab}$  liegen.

Denn würden beide im Äußern des Kreises  $\widehat{ab}$  liegen, so würde der Grenzkreis für die Seite  $\widehat{ab}$  nicht Diagonalkreis sein können, aber auch nicht Tangentialkreis; denn dann müßte der ganze Kreis  $\widehat{cd}$  und also auch die Ecken  $c$  und  $d$  im Innern des Kreises  $\widehat{ab}$  liegen. Demnach müßte sich der Grenzkreis auf einen Punkt zusammenziehen lassen, was nicht möglich ist.

Würden  $c$  und  $d$  beide im Innern des Kreises  $\widehat{ab}$  liegen, so würden sie nach Ausführung der Drehung von  $180^\circ$  im Äußern liegen, was, wie eben gezeigt, nicht möglich ist.  $c$  und  $d$  liegen also auf verschiedenen Seiten von  $\widehat{ab}$ .

Es möge  $c$  im Innern des Kreises  $\widehat{ab}$  liegen,  $d$  im Äußern (Fig. 67). Der Grenzkreis  $k_{ab(a)}$  muß dann notwendig durch  $c$  gehen. Während der Drehung führen wir nun den Grenzkreis mit, indem wir ihn unter beständiger Berührung von  $\widehat{ab}$  um die Punkte  $a$  und  $c$  drehen. Ist die Drehung so weit fortgeführt, daß der Kreis  $\widehat{ab}$  durch  $c$  geht und nicht schon vorher eine andere Grenzlage eingetreten, so fällt der Grenzkreis mit dem

Kreis  $\widehat{ab}$  zusammen. Damit ist die Grenzlage  $ab(c)$  eingetreten und der Betrag der Drehung noch kleiner als  $180^\circ$ .

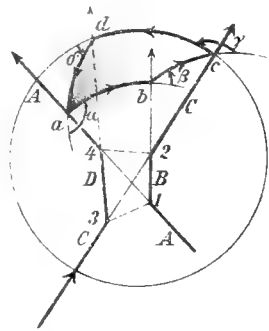
Stets tritt die andere Grenzlage also ein, ehe der Betrag der Drehung  $180^\circ$  erreicht hat.

Es ergibt sich demnach: Zwei Membrane, welche in den zwölf Mafszahlen nebst den Umlaufszahlen und dem Kern übereinstimmen, sind stets identisch, wenn wenigstens eine Seite umlaufend ist.

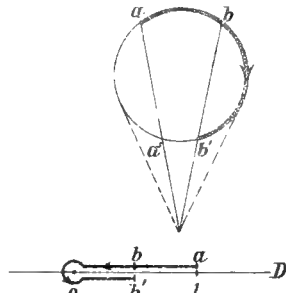
Ist aber keine Seite umlaufend, so kann der Drehungswinkel von einer Grenzlage des Vierecks zur andern größer als  $360^\circ$  sein. Deshalb brauchen zwei Membrane der bezeichneten Art dann nicht identisch zu sein. Beispiele sind leicht zu konstruieren:

Aus dem in Fig. 34 gezeichneten Viereck konstruieren wir zwei neue. Das erste erhalten wir, indem wir an die Seiten  $\widehat{bc}$  und  $\widehat{da}$ , das zweite, indem wir an die Seiten  $\widehat{ab}$  und  $\widehat{cd}$  je zwei Kreisscheiben lateral anhängen. Beide Vierecke stimmen nun in den Winkeln und in den Begrenzungslinien, demnach in allen zwölf Mafszahlen und im Kern überein, aber sind gestaltlich doch vollkommen voneinander verschieden. Man kann sich auf dieselbe Weise aus jedem beliebigen Viereck ohne umlaufende Seiten Vierecke der bezeichneten Art verschaffen.

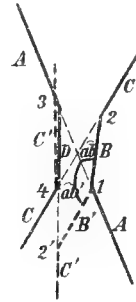




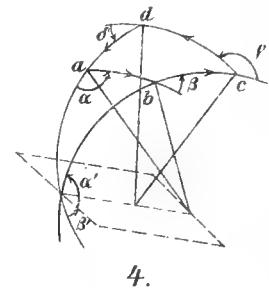
1.



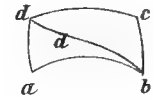
2.



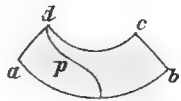
3.



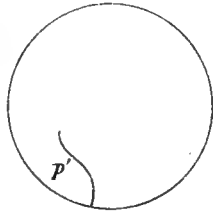
4.



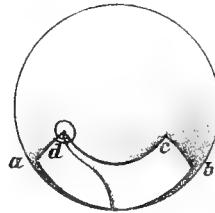
6a.



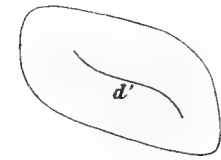
5a.



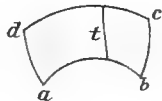
5b.



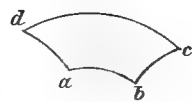
5c.



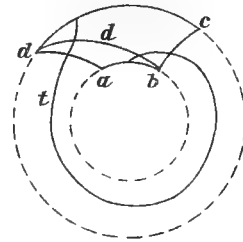
6b.



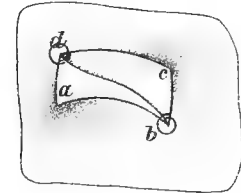
7a.



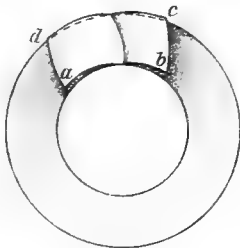
8a.



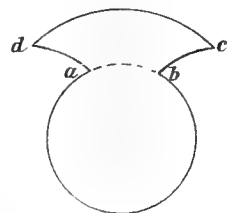
9.



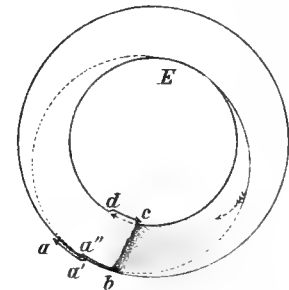
6c.



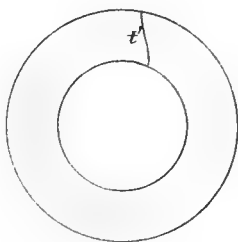
7b.



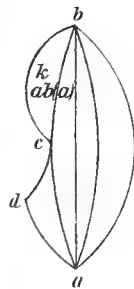
8b.



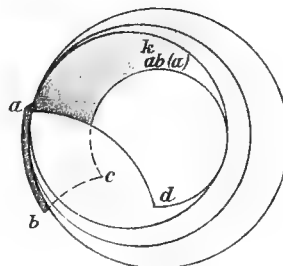
13.



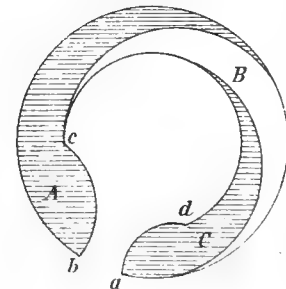
7c.



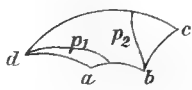
11.



12.



14.

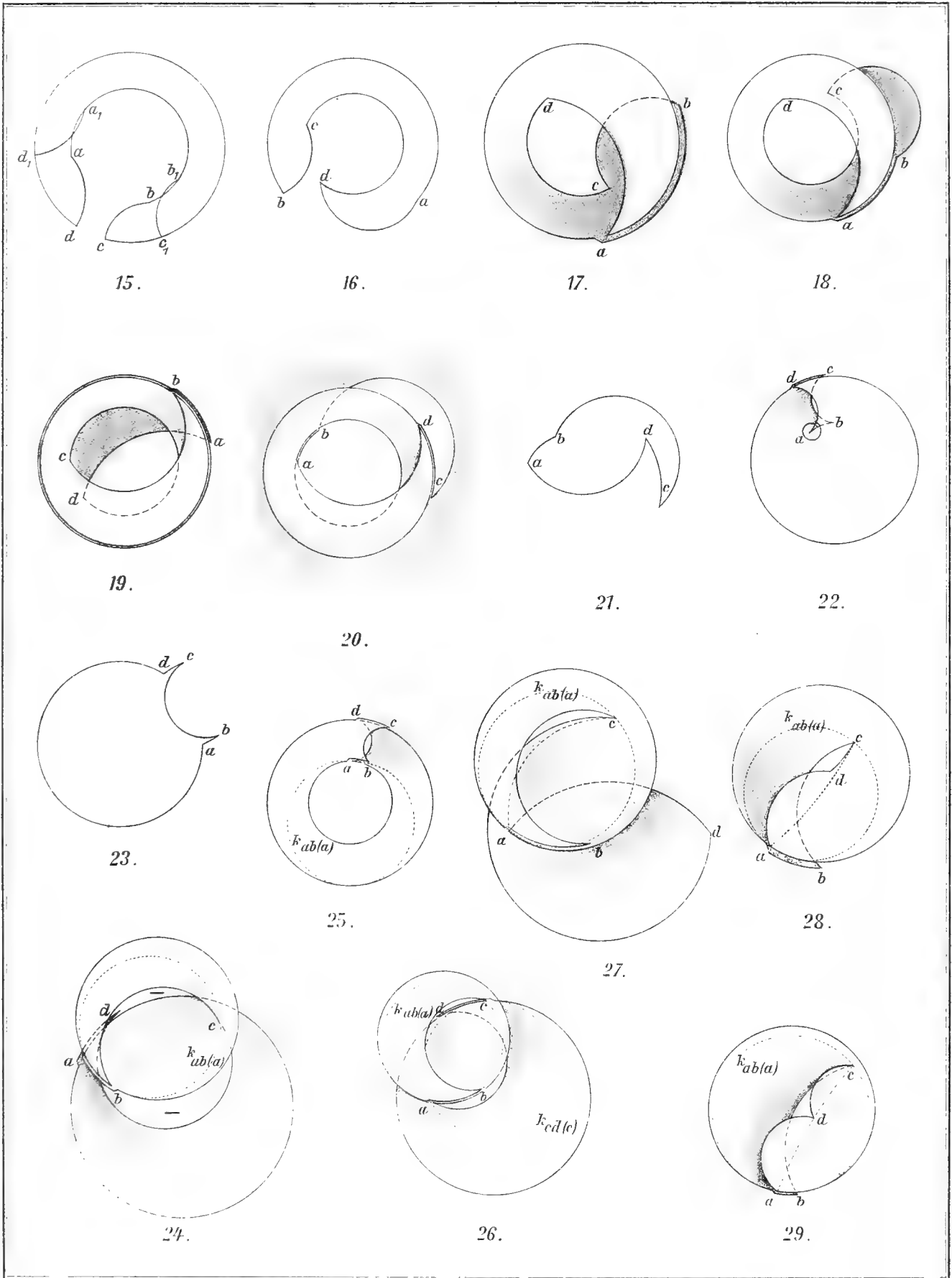


10.

Die Fig. 1-4 sind auch im Text.





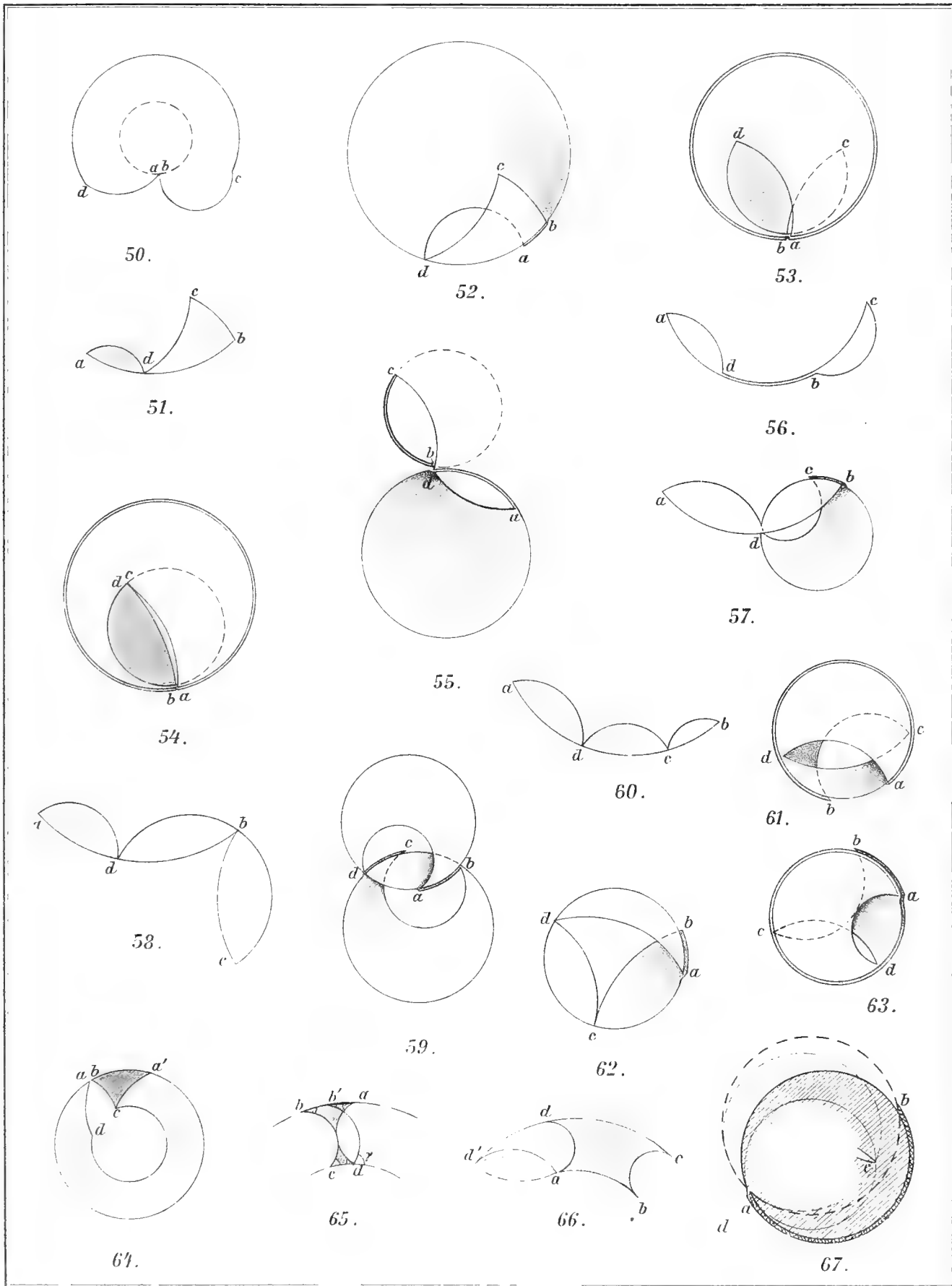


Lith. Anst. v. Paul Schindler, Leipzig.





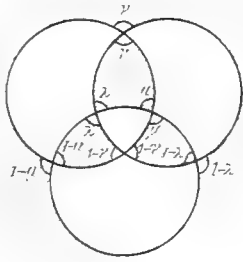




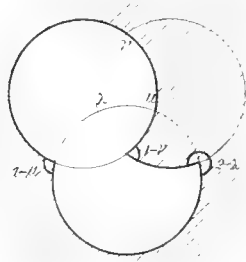
Lith. Anst. v. Paul Schum. Her. Leipzig



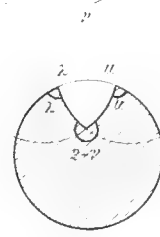
*Kern erster Art.*



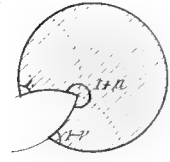
*I, 1, 2, 3, 4*



*II, 1*



*III, 2*

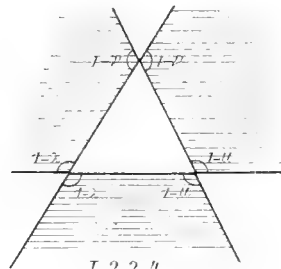


*III, 2*

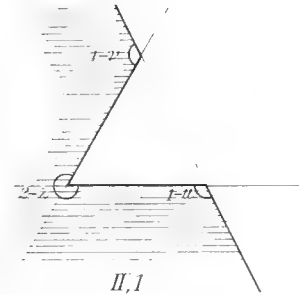
*Kern zweiter Art.*



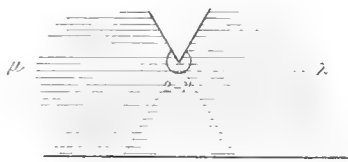
*I, 1*



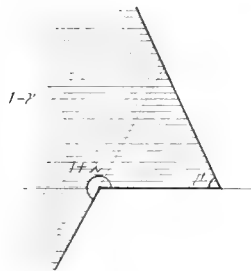
*I, 2, 3, 4*



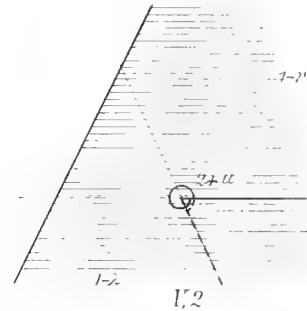
*II, 1*



*III, 2*



*II, 2*



*I, 2*

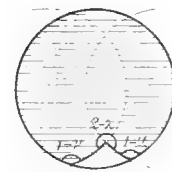
*Kern dritter Art.*



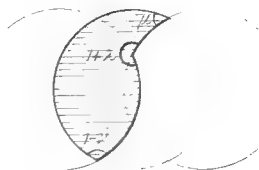
*I, 1*



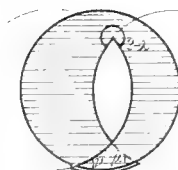
*I, 2*



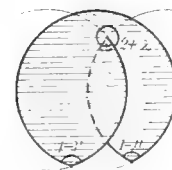
*II, 1*



*II, 2*



*II, 4*



*I, 1*





NOVA ACTA.

Abh. der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher.

Band XCI. Nr. 2.

---

Die Helligkeit des klaren Himmels  
und  
die Beleuchtung durch Sonne, Himmel  
und Rückstrahlung.

Fortsetzung und Schlufs.

---

Von

Dr. Christian Wiener †,

herausgegeben von

Dr. H. Wiener, Dr. O. Wiener und Dr. W. Möbius.

---

**HALLE.**

1909.

Druck von Ehrhardt Karras, Halle a. S.

Für die Akademie in Kommission bei Wilh. Engelmann in Leipzig.



## Vorwort der Herausgeber.

---

Den Anfang des vorliegenden Werkes bildet die Nr. 1 des Bandes LXXIII der Nova Acta vom Jahre 1900. Die Herausgeber bedauern außerordentlich, daß so lange Zeit verstrichen ist, bevor der Schluß zum Druck gegeben werden konnte. Zwar lag das Manuskript, wie schon im Vorwort der ersten Veröffentlichung erwähnt wurde, im wesentlichen druckfertig vor. Die Hauptarbeit, die noch zu bewältigen war, bestand in der Fertigstellung der Figuren. Vom Verfasser selbst waren die Zeichnungen für die Darstellung der Helligkeitsverteilung auf der Kugel und zwei Zeichnungen zur Helligkeitsverteilung am Himmel in Bleistift ausgeführt worden. Diese brauchten nur ausgezogen zu werden. Alle anderen Figuren aber mußten erst neu angefertigt werden. Ferner lag eine Hauptschwierigkeit in der geeigneten Ausführung der getonten Figuren, welche am Schlusse des Werkes wiedergegeben sind. Endlich hätten wir gern den Wunsch des Verfassers erfüllt, daß auch noch die Helligkeitsverteilung am Himmel für die Fälle berechnet würde, daß die Sonne im Horizont und daß sie im Zenit steht. Etwa die Hälfte dieser Arbeit war vom Verfasser selbst geleistet worden.

Inzwischen aber wurden die beiden Söhne des Verfassers, welche die Herausgabe der ersten Hälfte allein besorgt hatten, durch ihre eigene berufliche Tätigkeit so sehr in Anspruch genommen, daß die Fertigstellung der Drucklegung auf unabsehbare Zeit vertagt erschien. Unter diesen Umständen sahen sie sich veranlaßt, eine weitere Kraft zu suchen, welche die Hauptarbeit übernehmen konnte. Dazu fand sich in dankenswerter Weise Herr Dr. W. Möbius bereit, welcher durch seine Untersuchungen über die Theorie des Regenbogens den ganzen in Frage stehenden Aufgaben

bereits näher getreten war. So hat denn Herr Dr. W. Möbius sowohl die Fertigstellung der Berechnung der Himmelselligkeit für den Fall, daß die Sonne im Horizont steht, übernommen, wie die völlige Neuberechnung, für den Fall, daß sie im Zenit steht, dann eine Berechnung des Abstandes der hellsten Stelle am Himmel von der Sonne und dieser Helligkeit selbst mit den vom Verfasser benutzten Konstanten, ferner die vollständige Fertigstellung sämtlicher Figuren einschließlich der getonten; er hat im Texte die für den zweiten und dritten Fall der Sonnenstellung erforderlichen Ergänzungen — Abschnitt 175 bis einschließlich 177 — vorgenommen, ferner die Erklärung zu den getonten Figuren — Abschnitt 211 —, sich an der Durchsicht der Korrekturen beteiligt und nach der inzwischen über den Gegenstand erschienenen neuen Literatur Ausschau gehalten. Ihm ist also im wesentlichen die Fertigstellung der nunmehr erscheinenden Teile des Werkes zu verdanken. Hermann Wiener hat sich im wesentlichen auf die Prüfung der Figuren vor der Drucklegung beschränkt, Otto Wiener auf die Leitung der ganzen Arbeit und die Teilnahme an der Korrektur.

Wenn nun auch die Fertigstellung des ganzen Werkes etwa erst  $13\frac{1}{2}$  Jahre nach dem Tode des Verfassers erfolgt ist, so freuen die Herausgeber sich doch, annehmen zu dürfen, daß sie möglichst im Sinne des Verfassers hat geschehen können, den vor seinem Tode die Sorge bewegte, ob diese Arbeit überhaupt würde von anderen ausgeführt werden können.

Die Annahme, daß das Werk inzwischen veraltet sein könnte, trifft zum Glück nicht zu. Zwar ist das Regenbogenproblem inzwischen wesentlich gefördert worden; aber es sind uns andere Versuche, als die des Verfassers, die Helligkeit des Himmels aus gewissen Konstanten zu berechnen, nicht bekannt geworden. Auch die Zahl der Beobachtungen der Himmelselligkeit ist nur gering. Abgesehen von den Beobachtungen Leonhard Webers, von denen bereits im Vorwort des ersten Teils gesprochen wurde, und seiner Schüler scheinen keine neuen umfassenden Beobachtungen vorzuliegen. Versuche, die Helligkeit einer Kugel, welche gleichzeitig von der Sonne, dem Himmel und dem Bodenreflex beleuchtet wird, theoretisch abzuleiten, sind uns außer denen des Verfassers auch keine bekannt geworden. Das Ergebnis dieser Berechnungen ist immerhin beachtenswert. Wenn man die getonten Bilder am Schlusse der Arbeit betrachtet, so fällt ihre plastische

Wirkung und die täuschende Nachahmung der Kugelform auf und es tritt damit zum ersten Mal neben die herkömmlichen schematischen Darstellungen eine solche, welche den tatsächlichen Verhältnissen durch die Berücksichtigung der Beleuchtung durch den Himmel, den Boden und den gegenseitigen Reflex genau Rechnung trägt.

Zum Schlusse sei noch auf einige Ergebnisse der Theorie der Himmels-helligkeit aufmerksam gemacht, welche von jedem bei klarem Himmel nachgeprüft werden können und in den Figuren 100 a und 108 a (Taf. 1) Ausdruck gefunden haben. Bei hochstehender Sonne nimmt die Helligkeit des Himmels, wenn man sich mit dem Blick von der Sonne entfernt, selbstverständlich ab und erreicht im Sonnenvertikaldurchmesser im Abstand von  $70^\circ$  bis  $90^\circ$  ein Minimum; nach dem Horizont nimmt die Helligkeit wieder zu, weil dort das von stärkeren Luftschichten zerstreute Licht in das Auge geworfen wird — nur kann, wo eine starke Rauchentwicklung stattfindet, wie in Städten, unmittelbar am Horizont die Lichtstärke wieder abnehmen. Steht die Sonne im Horizont, so tritt, wenn man am Horizont den Blick von der Sonne entfernt, der Sonne gegenüber wieder ein Maximum auf — verursacht durch den diffus gewordenen Regenbogen, der eine halbkreisförmige Helligkeitsvermehrung der Sonne gegenüber bedingt. Es treten deshalb zwischen Sonne und Gegenpunkt der Sonne Minima der Helligkeiten auf, die etwa um  $100^\circ$  von der Sonne entfernt liegen. Eine weitere Eigentümlichkeit, die man bei klarem Sonnenuntergang häufig beobachten kann und auch in Fig. 108 a wiedergegeben ist, besteht darin, daß die hellste Stelle nicht unmittelbar bei, sondern über der Sonne liegt. Diese Erscheinung ist dadurch bedingt, daß bei zunehmenden Zenitdistanzen von den wachsenden Dicken der Atmosphäre mehr Licht absorbiert wird, als durch den Zuwachs des von den hinzukommenden Schichten ausgehenden Lichtes ausgeglichen werden kann. Umgekehrt kann, wenn die Sonne etwa  $10^\circ$  bis  $30^\circ$  über dem Horizont steht, die hellste Stelle des Himmels einige Grad unter der Sonne liegen. Dies Ergebnis, das W. Möbius aus der Theorie des Verfassers ableitete — Abschnitt 177 — ist auf die vermehrte Atmosphärenschichtdicke beim Horizont zurückzuführen.

Als auffällig seien noch erwähnt die großen Werte der Helligkeitsverhältnisse, welche der Verfasser für verschiedene Stellen des Himmels

gefunden hat (s. ersten Teil S. 9, Nova Acta Bd. LXXIII). Die unmittelbar gemessenen Extremwerte ergaben ein Verhältnis von 153:1. Da diese die hellste und dunkelste Stelle des Himmels noch nicht genau enthielten, so fand der Verfasser unter Ausgleich der Messungsfehler durch Extrapolieren das Verhältnis der hellsten zur dunkelsten Stelle gleich 240:1. Die Zahlen der anderen Beobachter fallen wesentlich kleiner aus. Das grösste Verhältnis, das uns in der Literatur begegnete, war 30:1, wie es aus der unten zitierten Abhandlung von W. Schramm hervorgeht. Es ist nun zuzugeben, daß die vom Verfasser benutzten Apparate außerordentlich einfacher Natur waren und keine große Genauigkeit verbürgen konnten. Wir glauben aber trotzdem nicht, daß dem Verfasser wesentliche Fehler untergelaufen sind. Es ist möglich, daß die anderen Beobachter bedeutend größere Himmelsflächen zur Beobachtung benutzten, während das vom Verfasser benutzte Gesichtsfeld nur einen Durchmesser von  $2,5^\circ$  gehabt hat. Es ist ferner zu beachten, daß die Helligkeitsverhältnisse wesentlich von dem Feuchtigkeits- und Staubgehalt der Atmosphäre abhängen und mit ihm großen Schwankungen ausgesetzt sind. Es sei deshalb hier noch mitgeteilt, daß Otto Wiener mit einem nach seinen Angaben angefertigten Himmelsphotometer am 12. September 1907 um die Mittagszeit in Leipzig bei sehr klarem gänzlich wolkenfreiem Himmel, einer Temperatur von  $21^\circ$  C. im Schatten und 27 % Feuchtigkeit ein Helligkeitsverhältnis von rund 300:1 für die hellste und dunkelste Stelle am Himmel gefunden hat. Der benutzte Gesichtswinkel der Photometerrohre betrug etwa  $3^\circ$ .

Jedenfalls sind in dieser Hinsicht noch weitere Messungen unter verschiedenen Verhältnissen erwünscht; und nachdem der Verfasser die Hauptschwierigkeit, welche einer theoretischen Behandlung der Himmels-helligkeit entgegensteht, beseitigt hat und dadurch auch die Beobachtungen der Himmels-helligkeit an Wert gewonnen haben, ist zu hoffen, daß dieses Gebiet von jetzt ab mit mehr Nachdruck in Angriff genommen wird. Dabei empfiehlt es sich zunächst, eine breitere Grundlage von Beobachtungen über die Verteilung der Helligkeit am Himmel zu schaffen für verschiedene Farben, bei verschiedenen Sonnenhöhen, bei verschiedenem Feuchtigkeitsgehalt der Atmosphäre und in verschiedenen Meereshöhen des Beobachters.

Die Herausgeber.

# Einige wichtige Arbeiten auf dem Gebiete der vorliegenden Untersuchungen.

## I. Zur Theorie des Regenbogens.

- M. Pernter: Meteorologische Optik. 1902—1909.  
Willy Möbius: Zur Theorie des Regenbogens und ihrer experimentellen Prüfung. Bd. 30  
der Abh. d. mathem. phys. Klasse der Königl. Sächs. Ges. der Wissenschaften. S. 104.  
1907. Dort auch umfangreiche Literaturangaben über den vorliegenden Gegenstand.  
P. Debye: Der Lichtdruck auf Kugeln von beliebigem Material. Inaugural-Dissertation,  
München. Ann. d. Physik. Bd. 30. S. 57. 1909.

## II. Zur Helligkeit des Himmels und der Sonne.

- H. Wild: Photometrische Bestimmung des diffusen Himmelslichtes. Bulletin de l'Académie  
de St. Pétersbourg. Bd. 21. S. 312. 1876 und Bd. 23. S. 290. 1877.  
W. de W. Abney: Transmission of Sunlight through the Earth's Atmosphere. Auszug: Proc.  
Roy. Soc. 51. S. 444. 1892.  
W. Trabert: Diffuse Reflexion und Absorption der Sonnenstrahlen in der Atmosphäre.  
Met. Zs. 10. S. 425. 1893.  
L. Weber: Die Beleuchtung. Handbuch der Hygiene, herausgegeben von Th. Weyl. 4. Bd.  
S. 37 u. ff. 1896.  
Chr. Jensen: Beiträge zur Photometrie des Himmels. Inaugural-Dissertation, Kiel 1898.  
Q. Majorana: On the Relative Luminous Intensities of Sun and Sky. Phil. Mag. (5) 1.  
S. 555. 1901.  
W. Schramm: Ueber die Verteilung des Lichtes in der Atmosphäre. Inaugural-Dissertation.  
Kiel 1901.  
M. Pernter: Meteorologische Optik. 1902—1909.  
K. Kähler: Flächenstärke des Himmels und Beleuchtungsstärke in Räumen. Met. Zs. 25,  
S. 52. 1908.  
W. H. Pickering: Das Himmelslicht in verschiedenen Höhen. Ann. Astron. Observ. Harvard  
Coll. 61. S. 41. 1908.
-





## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorwort der Herausgeber . . . . .	III
Einige wichtige Arbeiten auf dem Gebiete der vorliegenden Untersuchungen . . . .	VII
Inhalt . . . . .	IX
Übersicht der Figuren, Tabellen und Gleichungen . . . . .	XV

### Dritte Abteilung.

#### Die Lichtzerstreuung durch die ganze Atmosphäre und die theoretische Ermittlung der Helligkeit des klaren Himmels.

129. Die Aufgabe . . . . .	81
----------------------------	----

##### I. Physikalische Grundlagen.

130. Abnahme der Luftdichte mit zunehmender Höhe . . . . .	81
131. Abnahme der Dichte des Wasserdampfes mit zunehmender Höhe . . . . .	82
132. Lichtschwächung eines Gestirnes, das im Zenit steht . . . . .	84
133. Dicke der auf gleichförmige Dichte zurückgeführten Luftschicht in geneigter Richtung . . . . .	88
134. Dicke der auf gleichförmige Dichte zurückgeführten Wasserdampfschicht in geneigter Richtung . . . . .	92
135. Einfluß der Strahlenbrechung und Fortsetzung zu Nr. 134 . . . . .	93
136. Lichtschwächung geneigt einfallender Strahlen . . . . .	94

##### II. Die allgemeinen Formeln zur Bestimmung der Himmelshelligkeit.

###### 1. Die durch unmittelbare Sonnenbestrahlung hervorgebrachte Helligkeit des klaren Himmels $H_1$ .

137. Bezeichnungen und Hilfsformeln . . . . .	96
138. Einheit der Helligkeit . . . . .	98
139. Integration für $H_1$ . . . . .	99
140. Grenze des Wasser- und Eisdunstes . . . . .	101

2. Die durch Beleuchtung der Atmosphäre durch sich selbst hervorgebrachte Himmelshelligkeit ( $H_2$ ).	
141.	Helligkeit der Atmosphäre in einer gewissen Sehrichtung, hervorgebracht durch die nach oben gerichteten Luftkegel von übereinstimmender Richtung . . . 106
142.	Helligkeit der Atmosphäre in einer gewissen Sehrichtung, hervorgebracht durch die nach unten gerichteten Luftkegel von übereinstimmender Richtung . . . 111
143.	Bestimmung der Werte $dH_2$ im Falle ihrer scheinbaren Unbestimmtheit . . . 113
144.	Werte von $dH_2$ für besondere einfache Fälle . . . . . 117
145.	Darstellung von $dH_2$ durch Reihen . . . . . 118
146.	Bestimmung der Zerstreuungskoeffizienten $i$ . . . . . 120
147.	Integration des Ausdrucks für die Reflexhelligkeit $dH_2$ über den ganzen re- flektierenden Himmel . . . . . 120
148.	Die unendlich vielfache Zurückwerfung. . . . . 124
3. Die durch Beleuchtung der Atmosphäre durch den Boden hervorgebrachte Himmelshelligkeit $H_3$ .	
149.	Die Helligkeit des Bodens, herrührend von unmittelbarer Sonnenbestrahlung . . 125
150.	Angenäherte Bestimmung der durch die Atmosphäre hervorgebrachten Helligkeit des Bodens . . . . . 126
151.	Reflexbeleuchtung des Himmels durch den Boden . . . . . 135
152.	Gesamthelligkeit des Himmels . . . . . 138

### III. Zahlenmäßige Berechnung der Helligkeit des Himmels.

#### 1. Berechnung von $H_1$ .

153.	Ausgewählte Punkte des Himmels . . . . . 138
154.	Annahme über den Ort der Sonne . . . . . 138
155.	(Fortsetzung zu 153.) Weitere Punkte des Himmels und Annahmen über den Zustand der Atmosphäre . . . . . 139
156.	Berechnung der Formeln . . . . . 139
157.	Helligkeitskurven für $H_1$ . . . . . 140
158.	Die Hellegleichen des Himmels für $H_1$ . . . . . 140
159.	Die flächentreue Projektion . . . . . 141
160.	Die Hellegleichen $H_1$ in flächentreuer Projektion . . . . . 143

#### 2. Berechnung von ( $H_2$ ).

161.	Ausgewählte Punkte des Himmels . . . . . 144
162.	Ausrechnung der Formeln . . . . . 147
163.	Helligkeitskurven für $H_2$ . . . . . 150
164.	Hellegleichen für $H_2$ . . . . . 151
165.	Wirkung der mehrfachen und unendlich vielfachen Rückstrahlung . . . . . 151
166.	Helligkeiten ( $H_2$ ) . . . . . 153

3. Berechnung von  $H_3$ .

167.	Wahl der Winkelzwischenräume für die Rechnung . . . . .	153
168.	Integration nach $\alpha$ mit der Simpsonschen Regel . . . . .	154
169.	Integration nach $\psi$ durch Flächenberechnung . . . . .	155
170.	Ergebnisse . . . . .	157
171.	Das Rückstrahlungsvermögen $A$ des Bodens und die Werte $H_3$ . . . . .	157

4. Die Gesamthelligkeit  $H$ .

172.	Die Helligkeitskurven entlang der Vertikalkreise . . . . .	160
173.	Die Helligkeitskurven entlang der Horizontalkreise . . . . .	161
174.	Die Hellegleichen des klaren Himmels . . . . .	161
175.	Helligkeit des Himmels für den Fall, daß die Sonne im Horizont steht . . . . .	164
176.	Helligkeit des Himmels für den Fall, daß die Sonne im Zenit steht . . . . .	171
177.	Die größten Werte von $H_1$ und ihre Lage bei verschiedenen Zenitdistanzen der Sonne . . . . .	176

## Zweiter Teil. Die Beleuchtung durch die Sonne, den klaren Himmel und die Rückstrahlung von Körpern.

## Erster Abschnitt.

## Die Beleuchtung durch die Sonne.

178.	Beleuchtung der Kugel, ihre Beleuchtungsstärke und ihre Lichtgleichen . . . . .	181
179.	Die Helligkeit und die Hellegleichen . . . . .	183
180.	Beobachtungen bei Gyps über die Art der Lichtzerstreuung . . . . .	184
181.	Hellegleichen der Gypskugel bei Lichteinfall in der gebräuchlichen Richtung . . . . .	188
182.	Hellegleichen der Gypskugel bei großem Ein- und Ausfallwinkel des Lichtes . . . . .	191

## Zweiter Abschnitt.

### Die Beleuchtung des Bodens und der Kugel und die gleichzeitige Beleuchtung der Kugel durch die Sonne und die Atmosphäre.

183.	Beleuchtungsstärke des Bodens, bestimmt durch Projektion der Hellegleichen auf die Bodenfläche . . . . .	194
184.	Beleuchtungsstärke einer beliebigen Ebene . . . . .	198
185.	Die Kurven der Beleuchtungsstärke für verschiedene Ebenen . . . . .	203
186.	Die zur Himmelsbeleuchtung gehörige Fläche der Beleuchtungsstärke . . . . .	204
187.	Die Lichtgleichen der Kugel, hervorgebracht durch den klaren Himmel . . . . .	205
188.	Die Lichtgleichen des Bodens in der Nähe der auf ihm liegenden Kugel, hervorgebracht durch den Himmel allein . . . . .	209
189.	Die Lichtgleichen der Kugel, hervorgebracht durch die gleichzeitige Beleuchtung durch die Sonne und die Atmosphäre . . . . .	214

## Dritter Abschnitt.

## Die gegenseitige Rückstrahlung zwischen dem Boden und der Kugel und die gleichzeitige Beleuchtung der Kugel durch die Sonne, die Atmosphäre und den Boden.

190.	Die Lichtgleichen des Bodens, hervorgebracht durch die auf ihm liegende Kugel, wenn sie durch die Sonne und den Himmel beleuchtet ist und das Rückstrahlungsvermögen $A = 0,7$ besitzt . . . . .	219
191.	Die Vereinigung der auf dem Boden erzeugten Beleuchtung durch die Sonne, durch die Atmosphäre und durch die Rückstrahlung der durch Sonne und Atmosphäre beleuchteten auf dem Boden aufliegenden Kugel vom Rückstrahlungsvermögen $A = 0,7$ . . . . .	233
192.	Die Beleuchtung der hoch über dem Boden schwebenden Kugel durch die Rückstrahlung des Bodens allein, wenn dessen Rückstrahlungsvermögen $A$ gleich $0,7$ und gleich $0,1$ ist . . . . .	235
193.	Die gleichzeitige Beleuchtung der Kugel durch die Sonne, die Atmosphäre und den fernliegenden Boden, wenn dessen Rückstrahlungsvermögen $A$ gleich $0,7$ und gleich $0,1$ ist . . . . .	238
194.	Die Beleuchtung der auf dem Boden aufliegenden Kugel durch die Rückstrahlung des Bodens allein, wenn dessen Rückstrahlungsvermögen $A$ gleich $0,7$ und gleich $0,1$ ist . . . . .	241
195.	Die gleichzeitige Beleuchtung der auf dem Boden aufliegenden Kugel durch die Sonne, die Atmosphäre und den Boden, wenn dessen Rückstrahlungsvermögen $A$ gleich $0,7$ ist . . . . .	253
196.	Die gleichzeitige Beleuchtung der auf dem Boden aufliegenden Kugel durch die Sonne, die Atmosphäre und den Boden, wenn dessen Rückstrahlungsvermögen $A$ gleich $0,1$ ist . . . . .	254
197.	Die wiederholte Rückstrahlung zwischen Boden und Kugel . . . . .	256
198.	Aus den bisher gezeichneten Projektionen der Lichtgleichen der Kugel auf ihrer Symmetrieebene wird ihr Grundriss und Aufriss abgeleitet, letzterer auf einer zur Symmetrieebene unter $45^{\circ}$ geneigten Vertikalebene . . . . .	258

## Dritter Teil. Nachahmung der Helligkeit durch Tuschlagen.

199.	Unmöglichkeit der Nachbildung der wirklichen Helligkeiten . . . . .	265
200.	Nachahmung der Unterscheidbarkeit verschiedener Helligkeiten. Das Webersche Gesetz . . . . .	267
201.	Empfindungseinheit, Empfindungsstärke und ihre Abhängigkeit von der Helligkeit oder dem Reize . . . . .	269
202.	Nachahmung der Helligkeit durch Tuschlagen . . . . .	272
203.	Helligkeit $h$ , welche durch $n$ -faches Auflegen des Grundtones erreicht wird . . . . .	273
204.	Logarithmische Beziehung zwischen der Helligkeit $h$ und der Anzahl $n$ der Tuschlagen . . . . .	274

	Seite
205. Wahl der Stärke des Grundtones . . . . .	277
206. Beziehung zwischen der Verdünnung $v$ des Grundtones und der Zahl der Töne $t$ zur Wiedererreichung der Dunkelheit des Grundtones . . . . .	278
207. Beziehung zwischen der Helligkeit $h$ und der Anzahl $n$ der Tuschlagen . . .	280
208. Tuschen des Bildes bei gleichförmiger Abstufung der Helligkeit . . . . .	280
209. Zusammenhang zwischen der Anzahl $n$ der Tuschlagen, der Empfindungsstärke $e$ und der Helligkeit $h$ . . . . .	282
210. Die Hellegleichen der Kugel und des Bodens nach gleichförmiger Abstufung der Empfindungsstärken und der Anzahl der Tuschlagen . . . . .	285
211. Über die Herstellung der getonten Figuren . . . . .	289

---



## Übersicht der Figuren.

Figur	Seite	Figur	Seite	Figur	Seite	Figur	Seite	Figur	Seite	Figur	Seite
72	82	91	146	108	173	125	205	143	227	161	252
73	88	92	148	108a	Taf. 1	126	206	144	228	162	253
74	91	93	149	109	174	127	207	145	229	163	255
75	93	94	150	110	175	128	208	146	231	164	259
76	96	95	151	111	176	129	209	147	231	165	261
77	97	96	156	112	181	130	210	148	232	166	271
78	98	97	157	113	182	131	211	149	234	167	274
79	107	98	160	114	188	132	212	150	235	168	Taf. 2
80	112	99	162	115	189	133	212	151	236	169a	Taf. 3
81	126	100	163	116	191	134	214	152	238	169b	Taf. 4
82	128	100a	Taf. 1	117	191	135	215	153	239	170	285
83	130	101	165	118	193	136	217	154	241	171	Taf. 2
84	131	102	166	119	196	137	219	155	243	172	287
85	134	103	167	120	198	138	221	156	246	173	288
86	135	104	168	121	199	139	222	157	247	174	289
87	141	105	168	122	200	140	223	158	249	175	290
88	142	106	170	123	204	141	224	159	250	176a	Taf. 5
89	143	107	172	124	204	142	225	160	251	176b	Taf. 6
90	145										

## Übersicht der Tabellen.

Tabelle	Seite	Tabelle	Seite
61	92	75	170
62	93	76	171
63	94	77	171
64	104	78	177
65	134	79	186-187
66	140	80	190
67	147	81	192
68	150	82	197
69	153	83	203
70	159	84	213
71	159	85	230
72	164	86	249
73	166	87	280
74	169	88	284

## Übersicht der Gleichungen.

Gleichung	Seite	Gleichung	Seite	Gleichung	Seite
62	82	75	117	88	123
63	83	76	117	89	124
64	85	77	117	90	124
65	90	78	117	91	124
66	95	79	118	92	124
67	100	80	118	93	138
68	100	81	122	94	138
68'	101	82	122	95	275
69	111	83	122	96	277
70	113	84	122	97	278
71	115	85	123	98	279
72	116	86	123	99	282
73	116	87	123	100	283
74	116				





### Dritte Abteilung.

## Die Lichtzerstreuung durch die ganze Atmosphäre und die theoretische Ermittlung der Helligkeit des klaren Himmels.

**129. Die Aufgabe.** Auf S. 13 f. (unter 1. u. 2.) Bd. LXXIII der „Nova Acta“ wurde gezeigt, daß die Wirkung der Atmosphäre auf einen durchgehenden Lichtstrahl fast ausschließlich durch die Lichtzerstreuung durch Wassertropfen, Eiskristalle und Staubeile hervorgebracht wird. Die unmittelbare Erwärmung der Luft bei der Durchstrahlung können wir (vgl. S. 18, Bd. LXXIII der „Nova Acta“) als unerheblich beiseite lassen, da die Erwärmung der Luft durch die Sonnenstrahlen wesentlich durch Vermittlung der erwärmten Erde stattfindet. Wir werden daher nur den Energieverlust der Strahlen durch jene Zerstreuung als wesentlich betrachten. Es kommt nun zunächst darauf an, die Wirkung einer ganzen Luftschicht auf einen durchgehenden Lichtstrahl zu bestimmen.

### I. Physikalische Grundlagen.

#### 130. Abnahme der Luftdichte mit zunehmender Höhe.

Wir müssen zur Lösung der gestellten Aufgabe zuerst die Abnahme der Luftdichte und besonders der Wasserdampfdichte mit zunehmender Höhe über dem Boden ins Auge fassen.

Sei an irgend einer Stelle  $A$  einer Luftsäule bei einer Temperatur von  $0^\circ$  der Barometerstand  $b$  Meter, die Dichtigkeit der reinen Luft  $\delta$ , die des Quecksilbers  $q$ , unter der Dichtigkeit das Gewicht von 1 cbm in kg verstanden, so ist die Höhe  $h$  einer Luftsäule von der gleichförmigen Dichtigkeit  $\delta$ , welche über  $A$  denselben Barometerstand  $b$  hervorbringen würde,

$$h = b \frac{q}{\delta};$$

und da die Dichtigkeit der Luft, bei dem Barometerstand von 0,76 m,  $\delta_0 = 1,293$  kg, bei dem Barometerstand  $b$  daher  $\delta = 1,293 (b : 0,76)$  kg, und da  $q = 13596$  kg ist, so ergibt sich

$$h = 0,76 \cdot 13596 : 1,293 = 0,76 \cdot 10515 = 7991 \text{ m.}$$

Es ist also  $b$  aus dem Ausdrucke für  $h$  ausgetreten, oder die Höhe  $h$  ist unabhängig von der Lage des Ausgangspunktes  $A$ , der sich also nicht an dem Meeresspiegel befinden muß;  $h = 7991$  m bedeutet stets die Höhe einer Luftsäule von der gleichförmigen Dichte  $\delta$  des Ausgangspunktes  $A$ .

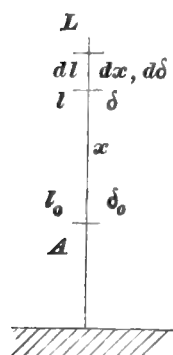


Fig. 72.

Bestimmen wir nun das Gesetz der Abnahme der Luftdichtigkeit mit zunehmender Höhe. Sei diese Dichtigkeit in einer Höhe von  $x$  Metern über dem Ausgangspunkte  $A = \delta$ , sei  $d\delta$  ihre Abnahme bei einem Steigen um  $dx$ , so ist, da die Veränderung  $d\delta$  mit dem Gewichte der durchschrittenen Luftsäule im Verhältnis steht, und da zu einer Abnahme von  $\delta$  um  $\delta_0$  das Gewicht  $\delta_0 h$  gehört,

$$d\delta : \delta_0 = -\delta dx : \delta_0 h, \quad d\delta : -\delta dx = \delta_0 : \delta_0 h$$

oder

$$\frac{d\delta}{\delta} = -\frac{dx}{h}$$

Durch Integration erhält man

$$\lg \delta = -\frac{x}{h} + C,$$

oder da für  $x = 0$ ,  $\delta = \delta_0$ ,

$$\lg \frac{\delta}{\delta_0} = -\frac{x}{h},$$

$$\frac{\delta}{\delta_0} = e^{-\frac{x}{h}} = e^{-\frac{x}{7991}} = 10^{-\frac{x}{18400}}, \quad (62)$$

wobei  $e (= 2,718\dots)$  die Basis der natürlichen Logarithmen. Hiernach würde bei unbegrenzter Gültigkeit des Mariotteschen Gesetzes erst für  $x = \infty$ ,  $\delta = 0$  werden.

**131. Abnahme der Dichte des Wasserdampfes mit zunehmender Höhe.** Ersetzt man bei ungeändertem Barometerstand  $b$  die atmosphärische Luft durch Wasserdampf, so ist zu beachten, daß dessen

Dichte 0,623 von derjenigen der Luft ist. Wenn er daher für sich eine Atmosphäre wie die Luft bildete, eine sogenannte Daltonsche Atmosphäre, in welcher die Spannung stets um das Gewicht der durchstiegenen Dampfsäule abnähme, so wäre die Höhe der Dampfsäule von der gleichförmigen Dichte, wie die am Ausgangspunkt  $A$ , welche der Dampfsäule von abnehmender Dichte das Gleichgewicht hielte,

$$h'' = 7991 : 0,623 \text{ m} = 12830 \text{ m},$$

und es würde die Formel gelten

$$\frac{\delta'}{\delta'_0} = e^{-\frac{x}{h''}} = e^{-\frac{x}{12830}},$$

wobei  $\delta'_0$  die Dichtigkeit des Dampfes am Anfangspunkt  $A$  und  $\delta'$  diejenige in der Höhe  $x$  über  $A$  wäre.

Der Wasserdampf bildet aber in der Luft nicht eine Daltonsche Atmosphäre,<sup>1)</sup> sondern seine Dichte nimmt mit der Höhe rascher ab, als es in einer solchen stattfände. Man erhält nach Hann aus den Beobachtungen vielmehr

$$\frac{\delta'}{\delta'_0} = e^{-\frac{x}{2830}} = e^{-\frac{x}{h'}} = 10^{-\frac{x}{6516}}. \quad (63)$$

Die wirkliche Dampfsäule ist also so schwer wie eine Dampfsäule von der gleichförmigen Dichte, wie die wirkliche Dampfdichte am Ausgangspunkte, und der Höhe  $h' = 2830 \text{ m}$ , also  $12830 : 2830 = 4,53$  oder etwa  $4\frac{1}{2}$  mal so leicht als die Daltonsche Dampfsäule. — Es folgt aus der Formel (62), daß die Luftdichte auf  $\frac{1}{2}$  und  $\frac{1}{10}$  derjenigen vom Ausgangspunkte  $A$  sinkt, wenn man von diesem auf die Höhe von ( $x =$ ) 5540 und 18400 m steigt; dagegen folgt aus (63), daß die Dampfdichte auf  $\frac{1}{2}$  und  $\frac{1}{10}$  ihrer Anfangsdichte sinkt, wenn man um 1962 und 6516 m steigt.

Diese Abweichung der Dampfatmosphäre von der Daltonschen kann auch so ausgedrückt werden, daß in einer lotrechten Dampfsäule der Unterschied der Gewichte der über zwei verschiedenen Stellen stehenden Säulen nicht gleich dem Gewichte der zwischen diesen Stellen eingeschlossenen

<sup>1)</sup> Hann, Die Abnahme des Wasserdampfgehaltes der Atmosphäre mit zunehmender Höhe. (Ztsch. d. östr. Gesellsch. der Meteorologie, Bd. 9, 1874, S. 193.)

Dampfsäule, sondern 4,53 mal so groß ist; und hieraus folgt, daß gar kein Gleichgewicht stattfindet, sondern ein beständiges Aufsteigen des Dampfes. Es ist dies auch leicht erklärlich; denn auf dem Boden wird durch beständige Verdunstung stets neuer Dampf erzeugt, während der in der Höhe als Regen und Eis wieder dem Boden zugeführt wird. Mit zunehmender Höhe kann wegen der abnehmenden Temperatur gar nicht derselbe verhältnismäßige Anteil des gesamten atmosphärischen Druckes durch Wasserdampf hervorgebracht werden, wie an tieferen Punkten, weil dieser Anteil bald die abnehmende Sättigungsspannung überschreitet. Setzen wir wirklich, der eben gemachten Annahme entsprechend,

$$d\delta' : \delta_o' = -4,53 \delta' dx : \delta_o' h'',$$

wobei  $h'' = 12830$  m,  $\delta_o h''$  das Gewicht der Daltonschen Dampfsäule von der Dichtigkeit  $\delta_o'$  am Anfangspunkte, so ergibt sich

$$\frac{d\delta'}{\delta'} = -\frac{dx}{12830 : 4,53} = -\frac{dx}{2830},$$

$$\frac{\delta'}{\delta_o'} = e^{-\frac{x}{2830}} = e^{-\frac{x}{h''}},$$

wie die oben angegebene Erfahrungsformel aussagt.

### 132. Lichtschwächung eines Gestirns, das im Zenit steht.

Bei unseren Untersuchungen kommt es aber nicht auf das gasförmige Wasser des Dampfes, sondern auf das flüssige und feste in den Tröpfchen und Kriställchen an. Hier können nun die mannigfachsten und wechselndsten Verhältnisse herrschen, wie die Haufwolken der Tropfen und die Cirruswolken der Kristalle zeigen. Unter diesem Wechsel wird man mittleren Verhältnissen nahe kommen, wenn man den Gehalt der Luft an Tröpfchen und Eiskriställchen, d. h. an Wasser, mit dem Gehalt an Wasserdampf in Verhältnis setzt. Ferner werde angenommen, daß mit diesem auch die Menge des zerstreuten Lichtes, also auch die Schwächung des durchgehenden Lichtstrahls im Verhältnis steht. Es wird dadurch zugleich vorausgesetzt, daß die Größe der Tröpfchen und Kriställchen sich nicht ändert; denn da von der Größe der Oberfläche die Menge des zerstreuten Lichtes abhängt, so ändert sich nur unter dieser Voraussetzung der Rauminhalt und die Oberfläche in demselben Verhältnis.

Sei, wie früher,  $L$  die Lichtstärke des einfallenden Sonnenstrahles an der äußeren Grenze der Atmosphäre,  $l$  an einem inneren Punkte derselben, falle der Strahl zunächst lotrecht zur Erdoberfläche ein, und sei  $dl$  die Lichtverminderung bei dem Durchschreiten der Höhe  $dx$ , so ist  $dl$  proportional mit  $l$ , mit  $dx$  und, nach unseren Annahmen, mit der Dichte  $\delta'$  des Dampfes, so daß

$$dl = kl dx \delta',$$

worin  $k$  eine Konstante. Führt man hierin den Wert von  $\delta'$  aus Gl. 63 ein, so erhält man

$$\frac{dl}{l} = k dx \delta'_0 e^{-\frac{x}{h}},$$

woraus

$$\lg l = -kh' \delta'_0 e^{-\frac{x}{h}} + C.$$

Zwischen den Grenzen  $x = x$  ( $l = l$ ) und  $x = \infty$  ( $l = L$ ), wird, wenn man  $kh' \delta'_0 = c$  setzt,

$$\lg \frac{l}{L} = -c e^{-\frac{x}{h}} = -c e^{-\frac{x}{2830}}. \quad (64)$$

Wird für  $x = 0$ ,  $l = l_0$ , so ist

$$\lg \frac{l_0}{L} = -c \quad \text{oder} \quad \frac{l_0}{L} = e^{-c}.$$

Das  $c$  ändert sich mit  $\delta'_0$ , d. i. mit dem Wassergehalt am Anfangspunkte der Messung der Höhen  $x$ , und da es noch die Konstante  $k$ , eine Erfahrungszahl, enthält, so ist es eine mit  $\delta'_0$  wechselnde Größe, aber eine Konstante der Formel.

Nun fand Bouguer<sup>1)</sup> durch Messungen der Stärke des Mondlichtes in zwei verschiedenen Höhen des Mondes über dem Horizont in der Nacht des 23. Nov. 1725 an der Küste des mittelländischen Meeres in Frankreich die Stärke eines lotrecht einfallenden Lichtstrahles durch den Durchgang durch die Atmosphäre von 1 zu 0,8123 geschwächt.

Lambert<sup>2)</sup> dagegen fand am 17. Mai 1756 in Chur in der Schweiz, dessen Meereshöhe 580 m beträgt, durch Vergleichung der Ablesungen an

<sup>1)</sup> Bouguer, traité d'optique (1760), S. 332.

<sup>2)</sup> Lambert, photometria (1760) § 886. Lambert, Pyrometrie (1779) § 283. [In E. Andings deutscher Übersetzung bei Ostwalds Klassikern Nr. 32, S. 71. Die Herausgeber.]

zwei Thermometern, deren eines den Sonnenstrahlen bei wechselnder Sonnenhöhe ausgesetzt war, während das andere im Schatten lag, daß die Schwächung der Strahlen der im Zenit stehenden Sonne durch die Atmosphäre im Verhältnis von 1 zu 0,59 stattfand, also viel stärker, als nach Bouguer. Dabei ist aber zu beachten, daß ein Unterschied für Licht- und für Wärmestrahlen bestehen kann, daß ferner Lambert für ein Weingeist- und für ein Quecksilberthermometer, welche dem Sonnenlichte ausgesetzt waren, Unterschiede von 1 bis zu 4° Réaumur fand, daß seine verschiedenen Beobachtungen Unregelmäßigkeiten zeigten, und daß er für seine Berechnung die regelmäßigsten auswählte.

Ferner fand Seidel<sup>1)</sup> durch seine sehr mannigfaltigen Vergleichen der Helligkeiten von Sternen in wechselnden Zenitdistanzen, unter Zugrundelegung der Laplaceschen Formel für die Abhängigkeit der Lichtschwächung von der Zenitdistanz, als wahrscheinlichsten Wert der Lichtschwächung durch die Atmosphäre für die im Zenit stehende Sonne bei dem Barometerstande von 0,760 m die Zahl 0,7942. Diesen Wert kann man auch berechnen aus der Tabelle Seidels (S. 581 der ersten unten zitierten Abhandlung) für die verhältnismäßigen Lichtschwächungen in verschiedenen Zenitdistanzen und aus den später hier bestimmten Dicken der durchlaufenen Dunstschicht unter Benutzung je zweier Wertepaare für zwei Zenitdistanzen; und zwar findet man für jene Lichtschwächung des im Zenit stehenden Gestirns durch die Atmosphäre unter Benutzung der wahren Zenitdistanzen von

0	und	60°	,	den	Wert	0,797,
0	..	70°	,	..	..	0,793,
0	..	80°	,	..	..	0,828,
0	..	86°	,	..	..	0,870.

Hier liegt die Grenze der Seidelschen Tabelle. Man sieht also, daß die obige Seidelsche Zahl 0,7942 und diese wechselnden Zahlen gut mit

<sup>1)</sup> Seidel, Untersuchungen über die gegenseitigen Helligkeiten der Fixsterne 1. Größe und über die Extinktion des Lichtes in der Atmosphäre. München 1852. (Abh. d. k. bayr. Akad. d. Wiss. 2. Cl., 6. Bd., 3. Abt., S. 539.)

Seidel. Resultate photometrischer Messungen an 208 der vorzüglichsten Fixsterne. München 1862. (Bayr. Akad. d. Wiss. 2. Cl., 9. Bd., 3. Abt.)

der von Bouguer 0,8123, übereinstimmen; nur für die grösste Zenitdistanz von  $86^\circ$  liefern die Sternbeobachtungen eine merklich grössere Durchsichtigkeit. Bei Tage wird dieser Unterschied geringer sein, da in der Nacht der Horizont weniger dunstig ist als bei Tage, indem er bei Tage durch die zunehmende Wasserverdunstung stets trüber wird, infolge dessen auch die Sonne stets matt unter-, oft aber strahlend aufgeht.

Entsprechend hat Müller aus seinen Sternbeobachtungen in Potsdam und auf Grund der Laplaceschen Formel jene Zahl zu 0,825 abgeleitet.

Wir können daher die Zahl von Bouguer (0,812), die nahe in der Mitte zwischen denen von Seidel und Müller steht, beibehalten. Die von Lambert muß wohl, wie schon Seidel<sup>1)</sup> bemerkte, wegen der andersartigen Grundlage und der daher rührenden grossen Abweichung von den anderen Zahlen ganz ausgeschlossen werden.

Für die Zahl 0,812 folgt nun

$$c = \lg \frac{L}{l_0} = \lg \frac{1}{0,812} = 0,208 .$$

Man erhält daraus nach Gl. 64 für

$$\begin{array}{cccccc} x:h' = & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \\ l:L = & 0,812; & 0,926; & 0,972; & 0,990; & 0,996; & 0,999. \end{array}$$

Für die gleichförmig dicht gedachte Dunstatmosphäre von der Höhe  $h' = 2830$  m wird in der letzten Gleichung für  $dl$  das  $\delta'$  unveränderlich  $= \delta'_0$ , daher

$$dl = k l dx \delta'_0 = c \frac{l}{h'} dx;$$

daraus ergibt sich durch Integration zwischen den Grenzen  $x = h'$ ,  $l = L$  und  $x = x$ ,  $l = l$ ,

$$\lg \frac{l}{L} = c \frac{x-h'}{h'} \quad \text{oder} \quad \frac{l}{L} = e^{-c \frac{(h'-x)}{h'}} ,$$

woraus für  $x = 0$ ,  $l = l_0$

$$\frac{l_0}{L} = e^{-c} ,$$

1) Seidel, a. a. O., 1852, S. 619, Anm.

wie oben. Es wird also durch die wirkliche und durch die gleichförmig dicht gedachte Dunstatmosphäre von gleicher Masse bei dem lotrecht einfallenden Lichtstrahle dieselbe Abschwächung hervorgebracht, was aber auch unmittelbar einleuchtet, da die Lichtschwächung durch ein Element mit  $\delta' dx$ , also mit seiner Dunstmasse proportional gesetzt wurde.

**133. Dicke der auf gleichförmige Dichte zurückgeführten Luftschicht in geneigter Richtung.** Wir gehen nun zu den Lichtstrahlen über, welche geneigt einfallen, und wollen zuerst die Länge einer Luftsäule oder die Dicke der Luftschicht berechnen, welche, von der gleichförmigen Dichte, wie am Ausgangspunkt, dieselbe Luftmenge enthielte, wie die Luftsäule von abnehmender Dichte.

Fig. 73.

Sei nun  $M$  der Mittelpunkt der Erde,  $A$  ein Punkt auf der Erdoberfläche,  $CA$  ein in  $A$  einfallender Sonnenstrahl,  $BAC = \zeta$  die Zenitdistanz der Sonne, und sei in der Höhe  $AB = x$  eine mit der Erdoberfläche konzentrische Luftschicht von der Dicke  $dx$  gelegt, welche von dem Strahle  $AC$  bei  $C$  in der Dicke  $dy$  geschnitten werde, so herrscht in dieser Schicht die gleichförmige Luftdichte  $\delta$ . Ersetzt man die Luftsäule von der Länge  $dy$  und der Dichte  $\delta$  durch eine solche von gleicher Luftmasse, aber von der Dichte  $\delta_0$ , wie bei  $A$ , so hat diese nur eine Länge  $dy'$ , und es ist dann unter Beachtung der Gl. (62)

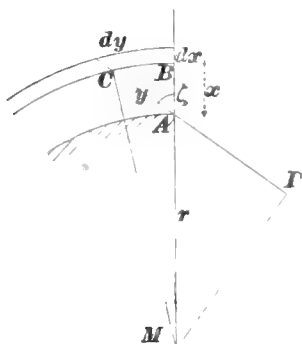


Fig. 73

$$dy' = dy \frac{\delta}{\delta_0} = dy e^{-\frac{x}{h}}.$$

Um nun  $y$  durch  $x$  auszudrücken, fällen wir  $MD \perp AC$ ; dann ist im rechtwinkligen Dreieck  $DCM$

$$(y + r \cos \zeta)^2 = (r + x)^2 - r^2 \sin^2 \zeta,$$

daher

$$y = \sqrt{r^2 \cos^2 \zeta + 2rx + x^2} - r \cos \zeta,$$

$$dy = \frac{(r+x)dx}{\sqrt{r^2 \cos^2 \zeta + 2rx + x^2}}.$$

Es kann aber  $x$  gegen  $r$  vernachlässigt werden, da schon für  $x = 3h'$  (S. 87) die Lichtschwächung durch die oberhalb liegenden Luftschichten nur 0,01 beträgt, dann aber  $x:r = 3 \cdot 2830 : 6370000 = 1 : 750$  ist.



Führt man den dadurch vereinfachten Ausdruck für  $dy$  in den obigen für  $dy'$  ein, so erhält man

$$dy' = \frac{dx}{\sqrt{\cos^2 \zeta + \frac{2x}{r}}} e^{-\frac{x}{h}}.$$

Um diesen Ausdruck zu integrieren, entwickle man den Nenner in einer Reihe; es ist aber

$$\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \zeta + \frac{2x}{r}}} = \frac{1}{\cos \zeta} \left(1 + \frac{2x}{r \cos^2 \zeta}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\cos \zeta} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{2x}{r \cos^2 \zeta} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{2x}{r \cos^2 \zeta}\right)^2 - \dots\right).$$

Diese Reihe ist für kleine Zenitdistanzen  $\zeta$  konvergent und kann einfach durch das erste Glied ( $1 : \cos \zeta$ ) ersetzt werden. So rechnete Lambert,<sup>1)</sup> erstreckte seine Rechnung aber auch nur bis  $\zeta = 80^\circ$ . Bouguer<sup>2)</sup> dagegen entwickelte für den besonderen Wert  $\zeta = 90^\circ$  eine neue und brauchbare Reihe und berechnete mittelst des hierfür gewonnenen Ergebnisses auf eine angenäherte Weise, die er aber nicht angab, auch die Dicken der Luftschichten für die anderen Zenitdistanzen. Und so werden wir es im wesentlichen auch machen. Wir setzen also zunächst  $\zeta = 90^\circ$  und erhalten dafür

$$dy' = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2x}{r}}} e^{-\frac{x}{h}}.$$

Durch Integration zwischen den Grenzen 0 und  $\infty$  erhält man für  $y'$  die ganze Länge  $b_1$  der gleichförmig dichten Luftschicht von derselben Masse, wie die wirkliche Luftschicht:

$$b_1 = \sqrt{\frac{r}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{h}} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Dieses Integral ist ein bekanntes bestimmtes, auf dessen gebräuchliche Form es zurückgeführt wird, wenn man setzt

$$\begin{aligned} \frac{x}{h} &= t^2, \quad \text{daher } \sqrt{x} = t\sqrt{h}, \\ dx &= 2ht dt, \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{h} dt. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Lambert, photometria, S. 397.

<sup>2)</sup> Bouguer, traité d'optique, S. 332.

Hierdurch wird

$$b_1 = \sqrt{2rh} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{2rh} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \quad (65)^1$$

und da der mittlere Erdhalbmesser  $r = 6370000$  m und  $h = 7991$  m, so ist

$$b_1 = 0,886 \sqrt{2rh} = 0,886 \cdot 319100 \text{ m} = 282800 \text{ m}.$$

Da  $\sqrt{2rh}$  die Länge von  $b$  wäre, welche durch eine mit der Erde konzentrischen Kugelfläche von der Höhe  $h$  über dem Meeresspiegel abgeschnitten würde, so ist nach unserer Formel das wahre  $b_1$  nur etwa 0,89 mal so groß. Ferner findet man das Verhältnis

$$\frac{b_1}{h} = 35,4.$$

Hiermit sind die Längen der gleichförmig dichten Luftsäulen,  $h$  für die lotrechte und  $b_1$  für die wagrechte Richtung, oder für die Zenitdistanzen  $\xi$

1) Folgendes ist die gebräuchliche Herleitung von

$$J = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Durch Änderung des Buchstabens erhält man auch

$$J = \int_0^{\infty} e^{-u^2} du.$$

Daher 
$$J^2 = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(t^2+u^2)} dt du.$$

Setzt man  $u = tv$ , folglich  $du = t dv$ , so hat man wegen Übereinstimmung der Grenzen

$$J^2 = \int_0^{\infty} dv \int_0^{\infty} e^{-t^2(1+v^2)} t dt.$$

Nun ist aber

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2(1+v^2)} t dt = \frac{1}{2(1+v^2)},$$

daher 
$$J^2 = \int_0^{\infty} dv \cdot \frac{1}{2(1+v^2)} = \frac{1}{2} (\text{arc tg } \infty - \text{arc tg } 0) = \frac{1}{4} \pi,$$

und

$$J = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

von 0 und 90° bestimmt. Für andere Zenitdistanzen erhält man Reihen, die anfangs divergent, erst später und zwar schwach konvergent werden. Würde man alle diese Längen von *A* aus auf den zugehörigen Richtungen auftragen, so würden die zweiten Endpunkte dieser Längen eine Umdrehungsfläche mit der Lotlinie *AH* als Achse bilden, welche ihren Scheitel in *H* hätte, wenn *AH* = *h* ist, und welche durch den Parallelkreis des Punktes *B* der Horizontalen *AB* ginge, wenn *AB* = *b*<sub>1</sub> gemacht wird. Bei der verhältnismäßig geringen Ausdehnung dieses Flächenstückes kann man ohne beachtenswerten Fehler dieses Flächenstück durch eine Kugel ersetzen, welche durch *H* und jenen Kreis von *B* geht, deren Halbmesser daher

Fig. 74.

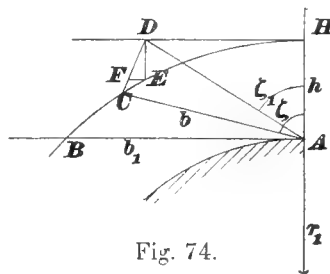


Fig. 74.

$$r_1 = \frac{b_1^2}{2h} = r \frac{\pi}{4} = r \cdot 0,7854 = 5003000 \text{ m}$$

ist, wobei der vorher bestimmte Ausdruck für *b*<sub>1</sub> benutzt wurde. Man sieht, daß der Wert von *r*<sub>1</sub> unabhängig von *h* ist.

Um nun für beliebige Zenitdistanzen *HAC* =  $\zeta$  die Länge *AC* = *b* der durchlaufenen Luftsäule von gleichförmiger Dichtigkeit zu berechnen, denkt man sich dieselbe um *A* gedreht, bis *C* in die Horizontale *H* nach *D* gelangt und dadurch das kleinere Azimut *HAD* =  $\zeta_1$  annimmt, und bestimmt den kleinen Drehungswinkel *CAD* =  $\zeta - \zeta_1$ . Zieht man zu dem Ende *DE* || *HA* bis zum Kreisbogen *HB*, dann *EF* || *AB* bis *CD*, so ist *CF* gegen *CD* zu vernachlässigen, und man erhält

Fig. 74.

$$\zeta - \zeta_1 = CD : AC = FD : AD.$$

Da nun *AD* = *h* : cos  $\zeta_1$ , *HD* = *h* tg  $\zeta_1$ , *DE* = *HD*<sup>2</sup> : 2*r*<sub>1</sub> = *h*<sup>2</sup> tg<sup>2</sup>  $\zeta_1$  : 2*r*<sub>1</sub>, *FD* = *DE* : sin  $\zeta_1$ , so ist

$$\zeta - \zeta_1 = \frac{h^2 \text{tg}^2 \zeta_1}{2r_1 \sin \zeta_1} : \frac{h}{\cos \zeta_1} = \frac{h}{2r_1} \text{tg} \zeta_1 = 0,0007987 \text{tg} \zeta_1.$$

Hiernach erhält man für

$\zeta_1 =$	0°	20	40	60	70	80	85	88° 20'	88° 40'
$\zeta - \zeta_1 =$	0	58''	2' 18''	4' 45''	7' 33''	15' 34''	31' 23''	1° 34'	1° 58'

Berechnet man noch einige Werte mehr, als die hier angegebenen, so erhält man leicht durch Einschaltung auch zu den Ausgangswerten von  $\zeta$  die von  $\zeta - \zeta_1$ , von  $\zeta_1$  und hieraus endlich die Werte von

$$b = AC = AD = h : \cos \zeta_1.$$

Tab. 61.                      Danach ist die Tabelle 61 berechnet.

Tabelle 61.

Reduzierte Zenitdistanzen  $\zeta_1$  (ohne Berücksichtigung der Strahlenbrechung) und Längen  $b$  der gleichförmig dichten Luftsäulen in Metern.

Wirkliche Zenitdistanz $\zeta$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°
$\zeta - \zeta_1$ . . . . .	0'	29'	1'	2'	2'	3'	5'	7'
Reduzierte Zenitdistanz $\zeta_1$	0°	10°	19° 59'	29° 58'	39° 58'	49° 57'	59° 55'	69° 53'
Länge der Luftsäulen $b$	7991	8110	8500	9220	10420	12410	15920	23220
Wirkliche Zenitdistanz $\zeta$	75°	80°	82°	84°	86°	88°	89°	90°
$\zeta - \zeta_1$ . . . . .	10'	15'	19'	25'	34'	54'	1° 12'	1° 37'
Reduzierte Zenitdistanz $\zeta_1$	74° 50'	79° 45'	81° 41'	83° 35'	85° 26'	87° 06'	87° 48'	88° 23'
Länge der Luftsäulen $b$	30590	44940	55280	72100	100350	157900	208300	282792

**134. Dicke der auf gleichförmige Dichte zurückgeführten Wasserdampfschicht in geneigter Richtung.** Wir haben nun auch die entsprechenden Längen der Dunstsäulen von der gleichförmigen Dichte  $\delta'_o$ , wie bei  $A$ , notwendig, und erhalten diese als  $AB = b_1'$  und  $AC = b'$ , wenn wir in den vorhergehenden Ausdrücken nur  $h = 7991$  m durch  $h' = 2830$  m ersetzen, weil die Formel (62) für  $\delta : \delta_o$  in die (63) für  $\delta' : \delta'_o$  übergeht, wenn man  $h$  durch  $h'$  ersetzt. Wir erhalten daher aus (65)

$$b_1' = \sqrt{2rh' \frac{1}{2}} \sqrt{\pi} = 168280 \text{ m,}$$

$$\frac{b_1'}{h'} = 59.5.$$

Dagegen bleibt  $r_1 = r \frac{\pi}{4}$  ungeändert = 5003000 m.

**135. Einfluß der Strahlenbrechung und Fortsetzung zu**

**Nr. 134.** Zur Bestimmung der geneigten Längen  $b'$  ist ein neuer Umstand, die Refraktion der Lichtstrahlen, in Betracht zu ziehen. Der Lichtstrahl beschreibt innerhalb der Atmosphäre wegen deren zunehmender Dichte eine

Fig. 75.

krumme, nahezu kreisförmige Linie  $CA$ , und die wahre Zentdistanz ist um den Refraktionswinkel  $\varrho$  größer als die scheinbare  $\zeta$ , also  $= \zeta + \varrho$ . Die Weglänge  $b' = AC$  innerhalb der Atmosphäre ist dann nahezu so groß, wie wenn sich der Lichtstrahl geradlinig mit der mittleren Zenitdistanz  $\zeta + \frac{1}{2}\varrho$  durch die Dunstatmosphäre bewegte. Man darf nämlich bei der Kleinheit von  $\varrho$  den Bogen durch die zugehörige Sehne ersetzen, und dieser

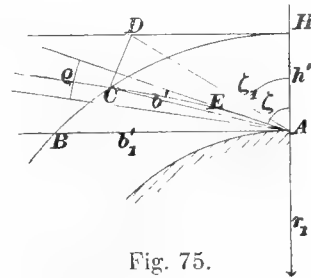


Fig. 75.

kommt die Zenitdistanz  $\zeta + \frac{1}{2}\varrho$  zu. Die zu der scheinbaren Zenitdistanz  $\zeta$  gehörigen Werte  $\varrho$  der Refraktion wurden aus den von Bessel aufgestellten Tabellen entnommen, aus welchen einige Zahlen für mittlere Verhältnisse (bei  $9,3^\circ \text{C}$  und  $751,5 \text{ mm}$  Barometerstand) in Tab. 62 angegeben sind.

Tab. 62.

( $\varrho$  ist nahezu mit der Tangente der scheinbaren Zenitdistanz proportional; sie nimmt etwas langsamer zu.) Zu  $\zeta + \frac{1}{2}\varrho$  ist dann die zugehörige reduzierte Zenitdistanz  $\zeta_1$  zu ermitteln. Unsere Formeln liefern aber umgekehrt zu den gegebenen Werten von  $\zeta_1$  diejenigen der Differenz, indem

$$(\zeta + \frac{1}{2}\varrho) - \zeta_1 = \frac{h'}{2r_1} \text{tg } \zeta_1 = 0,0002828 \text{ tg } \zeta_1 .$$

Tabelle 62.

Mittlere Refraktion  $\varrho$  für die scheinbare Zenitdistanz  $\zeta$ .

$\zeta$	$0^\circ$	$20^\circ$	$40^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$80^\circ$	$85^\circ$	$88^\circ$	$90^\circ$
$\varrho$	$0''$	$21''$	$48''$	$1' 40''$	$2' 37''$	$5' 16''$	$9' 47''$	$18' 7''$	$34' 54''$

Daraus ergibt sich  $\zeta + \frac{1}{2}\varrho$ ; und der zu diesem Werte als Zenitdistanz gehörige Wert der Refraktion  $\varrho$ , den jene Tabelle liefert, gilt für kleine  $\zeta$  auch für  $\zeta$  selbst. Bei größeren Werten von  $\zeta$  (nahezu  $90^\circ$ ) gelangt man durch eine oder zwei Annäherungen zu  $\zeta$  und  $\varrho$ . Aus einer solchen Tabelle

kann man dann durch Einschaltung die zu angenommenen  $\zeta$  gehörigen Werte von  $\zeta_1$  ermitteln und daraus berechnen

$$b' = b' : \cos \zeta_1.$$

Tab. 63. Die so berechneten Werte sind in der Tabelle 63 eingetragen und diese ist bis zu  $\zeta = 91^\circ$  fortgesetzt, weil dieser Wert für Standpunkte auf Bergen Bedeutung besitzt.

Tabelle 63.

$\zeta$  scheinbare Zenitdistanzen.

$\zeta_1$  reduzierte Zenitdistanzen unter Berücksichtigung der Strahlenbrechung.

$b'$  Länge der gleichförmig dichten von dem Lichtstrahle durchlaufenen Dunstsäule in Metern,

$l_o : L$  Verhältnis der Lichtstärke  $l_o$  der Sonnenstrahlen an der Erdoberfläche zu derjenigen  $L$  an der äußeren Grenze der Dunstsäule.

$\zeta$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	55°	60°
$\zeta - \zeta_1$	0	5"	11"	17"	25"	35"	43"	51"
$\zeta_1$	0°	9° 59' 55"	19° 59' 49"	29° 59' 43"	39° 59' 35"	49° 59' 25"	54° 59' 17"	59° 59' 09"
$b'$	2830	2870	3020	3277	3700	4400	4922	5645
$l_o : L$	0,8120	0,8097	0,8011	0,7865	0,7617	0,7241	0,6963	0,6604
$\zeta$	65°	70°	71°	72°	73°	74°	75°	76°
$\zeta - \zeta_1$	1' 3"	1' 20"	1' 25"	1' 31"	1' 37"	1' 44"	1' 52"	2' 00"
$\zeta_1$	64° 58' 57"	69° 58' 40"	70° 58' 35"	71° 58' 29"	72° 58' 23"	73° 58' 16"	74° 58' 08"	75° 58' 00"
$b'$	6670	8260	8690	9140	9650	10220	10920	11650
$l_o : L$	0,6126	0,5455	0,5291	0,5111	0,4923	0,4721	0,4487	0,4243
$\zeta$	77°	78°	79°	80°	81°	82°	83°	84°
$\zeta - \zeta_1$	2' 10"	2' 20"	2' 35"	2' 51"	3' 12"	3' 39"	4' 13"	4' 58"
$\zeta_1$	76° 57' 50"	77° 57' 40"	78° 57' 25"	79° 57' 09"	80° 56' 48"	81° 56' 21"	82° 55' 47"	83° 55' 02"
$b'$	12520	13540	14780	16200	17920	20140	23000	26750
$l_o : L$	0,3981	0,3698	0,3381	0,3034	0,2679	0,2283	0,1851	0,1406
$\zeta$	85°	86°	87°	88°	89°	90°	91°	
$\zeta - \zeta_1$	6' 01"	7' 43"	10' 35"	16' 15"	26' 51"	51' 40"	1° 28' 36"	
$\zeta_1$	84° 53' 59"	85° 52' 17"	86° 49' 25"	87° 43' 45"	88° 33' 09"	89° 08' 20"	89° 31' 24"	
$b'$	31860	39400	51050	71400	112100	188200	340500	
$l_o : L$	0,0966	0,0555	0,02333	0,00528	0,000264	0,000000	0,000000	
						989	000014	

136. Lichtschwächung geneigt einfallender Strahlen. Mittelst der Werte von  $b'$  können wir nun auch die Lichtschwächung der geneigt

einfallenden Sonnenstrahlen berechnen. Sei auf  $AC$ , für einen Zwischenpunkt  $E$ ,  $AE = Z$ , so ist nach S. 85 (Nr. 132), wenn man  $x$  und  $dx$  durch  $z$  und  $dz$  ersetzt,

$$dl = kl dz \delta'.$$

Da nun in der gleichförmig dichten Dunstschicht  $\delta'$  unveränderlich  $= \delta_0'$ , und da  $kh'\delta_0' = c$  (S. 85), so wird

$$\frac{dl}{l} = \frac{c}{h'} dz,$$

und dies mit der unteren Grenze  $z = b'$ ,  $l = L$  integriert, gibt

$$\log^e \frac{l}{L} = \frac{c}{h'} (z - b'), \quad \frac{l}{L} = e^{-\frac{c}{h'}(b' - z)}. \quad (66)$$

Für  $z = 0$  wird  $l = l_0$ ; daher

$$\log^e \frac{l_0}{L} = -\frac{c}{h'} b'.$$

Da  $h' = 2830$  m, so erhält man für  $c = 0,208$ ,

$$\log^e \frac{l_0}{L} = -0,0000735 b',$$

oder

$$\log^{10} \frac{l_0}{L} = -0,00003192 b'.$$

Nach dieser letzten Formel ist die letzte Reihe der Tab. 63 berechnet.

## II. Die allgemeinen Formeln zur Bestimmung der Himmelhelligkeit.

Wir schreiten jetzt zur Lösung der Aufgabe, die Helligkeit des Himmels in irgend einer Schichtung von einem Punkte  $A$  aus, der auf der Erdoberfläche oder über derselben liegen mag, zu bestimmen. Der Hauptteil dieser Helligkeit wird durch unmittelbare Beleuchtung durch die Sonne hervorgebracht, kleinere Teile durch Reflex aus der Luft und vom Boden. Bestimmen wir zuerst jenen Hauptteil.

### 1. Die durch unmittelbare Sonnenbestrahlung hervorgebrachte Helligkeit des klaren Himmels $H_1$ .

**137. Bezeichnungen und Hilfsformeln.** Wir ersetzen die Dunstatmosphäre von abnehmender Dichte durch eine solche von der gleichförmigen Dichte  $\delta_0'$  des Dunstes am Ausgangspunkte  $A$ ; die Höhe derselben über  $A$  ist  $AH = h'$ . Wir denken uns dieselbe durch eine horizontale Ebene  $HE$  begrenzt und dabei die Zenitdistanz  $\zeta$  durch die reduzierte Zenitdistanz  $\zeta_1$  ersetzt, indem dadurch die durchlaufenen Wege, somit auch die Lichtzerstreuung nicht verändert werden.

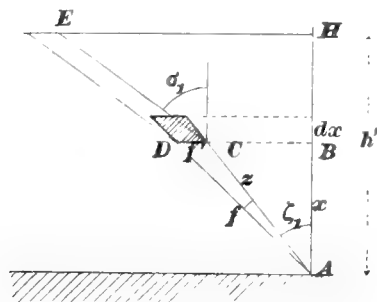


Fig. 76.

Es sei nun  $\zeta$  und  $\zeta_1$  die wahre und die reduzierte Zenitdistanz des betrachteten Ortes am Himmel,

$AC$  der Sehstrahl von der Zenitdistanz  $\zeta_1$ ,

$CAD$  eine kleine Sehstrahlenpyramide, in deren Innerem sich bei  $C$  eine Dunstmasse von der horizontalen Grundfläche  $CD = f'$  und der Höhe  $dx$ , also dem Inhalte  $f' dx$  befindet,

$x = AB$  die Höhe von  $C$  über  $A$ ,

$z = AC = x : \cos \zeta_1$  der Abstand des  $C$  von  $A$ ,

$f$  der senkrechte Schnitt jener Sehstrahlenpyramide im Abstände 1 von  $A$ , so daß  $f = f' \cos \zeta_1 : z^2$ ,

$\sigma, \sigma_1$  die wahre und die reduzierte Zenitdistanz der Sonne,

$EC$  ein auf  $C$  nach der reduzierten Zenitdistanz  $\sigma_1$  auffallender Sonnenstrahl,

$L, l$  die Lichtstärken der auf  $f'$  auffallenden Sonnenstrahlen bzw. vor ihrem Eintritt bei  $E$  in die Atmosphäre und bei ihrer Ankunft in  $C$ .

$l$  erhält man aus Gl. (66) (S. 95), worin  $b' - z = CE$  der Fig. 75, gleich dem schon durchlaufenen Weg in der gleichförmigen Dunstatmosphäre =  $EC$  der Fig. 76 oder =  $(h' - x) : \cos \sigma_1$ , so daß

$$\frac{l}{L} = e^{-\frac{c(h' - x)}{h' \cos \sigma_1}}.$$

Ferner ist

$lf' \cos \sigma_1$  die Menge des auf  $f'$  auffallenden Lichtes; sodann ist nach dem Ausdrucke für  $dl$  (S. 85) die Menge des beim Durchschreiten des



Dunstelementes von der gleichförmigen Dichte  $\delta' = \delta'_o$  und von der Höhe  $dx$ , also bei der Weglänge  $dx : \cos \sigma_1$  verlorenen, d. i. zerstreuten Lichtes

$$= k \cdot l f' \cos \sigma_1 \cdot \frac{dx}{\cos \sigma_1} \delta'_o = \frac{c}{h'} l f' dx;$$

dieser Verlust ergibt sich nur abhängig von der Masse  $f' dx \delta'_o$ , aber nicht von der Form des durchschrittenen Dunstes, wie vorauszusehen war.

$i, i_1, i_2$  bezeichnen ferner das Verhältnis bezw. im allgemeinen ( $i$ ), für Wassertropfen ( $i_1$ ), für Eiskristalle ( $i_2$ ), der Lichtmenge, welche in einem Dunstelemente  $f' dx$  in der Richtung  $CA$  nach dem Auge auf die Flächeneinheit der um  $f'$  als Mittelpunkt mit dem Halbmesser Eins beschriebenen Kugel geworfen wird, zu der Gesamtmenge des vom Elemente zerstreuten Lichtes. Dieses Verhältnis hängt ab von  $\varphi$ , dem Ablenkungswinkel der ausfallenden von den einfallenden Lichtstrahlen und wird als  $i_1$  und als  $i_2$  aus der Tab. 60 entnommen.

Tab. 60.

$\alpha$  sei das Azimut des Ortes  $C$  des betrachteten Punktes am Himmel, oder des Ortes  $C$  (Fig. 76) des Dunstelementes  $f' dx$ , d. i. der Winkel der durch die Lotlinie  $h' = AH$  und die Sonne gelegten halben Ebene und der durch  $h'$  und den Himmelspunkt gehenden halben Ebene, wobei  $\alpha$  von der Sonne aus nach beiden Seiten von 0 bis  $180^\circ$  gezählt wird. Es ist

$$\cos \varphi = \cos \sigma \cos \zeta + \sin \sigma \sin \zeta \cos \alpha.$$

Denn sind  $S, O, H$  (Fig. 77) die Stellen der Sonne, des betrachteten Himmelsortes und des Zenites an der Himmelskugel, so sind in dem sphärischen Dreiecke  $HS = \sigma$ ,  $HO = \zeta$ ,  $\sphericalangle SHO = \alpha$ ,  $SO = \varphi$ . Dabei wäre es am genauesten, die um die halben Refraktionswinkel vermehrten scheinbaren Zenitdistanzen zu nehmen; wir sehen aber davon ab, weil die Wirkung auf  $i$  meist geringfügig ist und höchstens die Stellen der Maximalwirkungen um ein klein wenig verschoben werden.

Fig. 77.

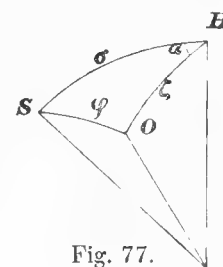


Fig. 77.

$e^{-\frac{cx}{h' \cos \zeta_1}}$  ist nach Gl. 66 das Verhältnis der Lichtschwächung auf dem Wege  $CA$ , d. i. das Verhältnis der Stärke des von  $f' dx$  zerstreuten und nach dem Durchschreiten des Dunstes auf dem Wege  $CA = x : \cos \zeta_1$  in  $A$  anlangenden Lichtes, zu derjenigen Stärke, welche dies Licht bei  $A$  hätte, wenn der Weg dunstfrei wäre.

$dH_1$  und  $H_1$  seien die Helligkeiten, unter welchen in  $A$  bzw. das Dunstelement  $f'dx$  und die ganze Dunstmasse erscheint, welche in dem jenes Element aus  $A$  projizierenden und die ganze Atmosphäre durchragenden Kegel  $CAD$  enthalten ist;  $\varphi, i$  ( $i_1, i_2$ ) sind dabei unveränderlich.

**138. Einheit der Helligkeit.** Als Einheit der zu ermittelnden Helligkeit wollen wir diejenige annehmen, unter welcher die Oberfläche eines festen Körpers von dem Rückstrahlungsvermögen Eins (Albedo  $A = 1$ ) erschiene, welche von der Sonne mit der außerhalb der Atmosphäre herrschenden Lichtstärke  $L$  senkrecht beschienen würde. Da sich nun die Helligkeiten zweier verschiedenen Flächen, welche in demselben Sehstrahlenkegel eingeschlossen sind, verhalten wie die Lichtmengen, welche sie auf die Flächeneinheit werfen, die bei dem Auge in  $A$  (Fig. 78) senkrecht zu dem nach der Fläche gerichteten Sehstrahle  $CA$  aufgestellt ist, so müssen wir die Lichtmenge bestimmen, welche jene feste Fläche  $f'$  des festen

Fig. 78.

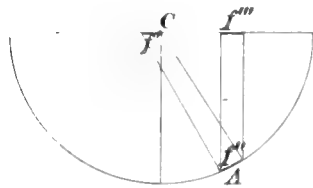


Fig. 78.

Körpers (bei  $C$ ) auf diese Flächeneinheit bei  $A$  senden würde. Geschieht die Ausstrahlung nach dem Lambert'schen Gesetze, wie wir annehmen, so empfängt von dem Elemente  $f'$  der betrachteten Fläche irgend ein Element  $f''$  einer Kugel, die aus  $f'$  als Mittelpunkt mit dem Halbmesser 1 beschrieben ist, die Lichtmenge  $Lf'c' \cos \alpha \cdot f''$ , wobei  $Lf'$  die von  $f'$  empfangene Lichtmenge bedeutet,  $c'$  eine von dem Zerstreungsvermögen abhängige Unveränderliche,  $\alpha$  den Ausfallswinkel aus  $f'$ , oder den Winkel der Geraden  $f'f''$  oder  $CA$  mit der Normalen zu  $f'$ .  $f'' \cos \alpha$  ist aber auch die Projektion  $f'''$  von  $f''$  auf die Ebene von  $f'$ . Die gesamte von  $f'$  ausgestrahlte und auf die oberhalb der Ebene von  $f'$  stehende Halbkugel zerstreute Lichtmenge ist daher

$$\sum Lf'c' \cos \alpha \cdot f'' = Lf'c' \sum f''' = Lf'c' \pi,$$

da jene Projektion der Halbkugel gleich der Fläche  $\pi$  des größten Kreises ist. Diese ausgestrahlte Lichtmenge ist aber wegen  $A = 1$  gleich der aufgenommenen Lichtmenge  $Lf'$ , so daß

$$Lf'c' \pi = Lf', \quad c' = \frac{1}{\pi},$$

und daß die von  $f''$  empfangene Lichtmenge  $= Lf' \cos \alpha f'' : \pi$ . Daher ist die von der Flächeneinheit ( $f'' = 1$ ) bei  $A$  (im Abstände  $z$ ) unter ebenfalls senkrechter Bestrahlung empfangene Lichtmenge, unter Beachtung, daß  $f' \cos \alpha : z^2 = f$  (S. 96)

$$= Lf' \frac{\cos \alpha}{\pi z^2} = \frac{Lf''}{\pi}.$$

**139. Integration für  $H_1$ .** Nun kann die von dem Dunstelement  $f' dx$  in  $A$  hervorgebrachte Helligkeit  $dH_1$  bestimmt werden. Es ist nämlich die Lichtstärke  $l$  der bei  $f'$  anlangenden Sonnenstrahlen durch den Ausdruck der S. 97 bestimmt; die Menge des durch das Dunstelement  $f' dx$  zerstreuten Lichtes ist dann (S. 97)  $(c : h') l f' dx$ ; davon würde auf die Flächeneinheit bei  $A$  die verhältnismäßige Menge  $i : z^2$  geworfen, wenn der Zwischenraum luftleer wäre; wegen der Dunstwirkung der Zwischenschicht erhält diese Lichtmenge den Faktor

$$e^{-\frac{cx}{h' \cos \zeta_1}};$$

und die so erhaltene Lichtmenge muß durch das eben erhaltene  $Lf : \pi$  geteilt werden, damit man die durch die angenommene Einheit gemessene Helligkeit  $dH_1$  erhält. Sie ist daher

$$dH_1 = Le^{-\frac{c(h'-x)}{h' \cos \sigma_1}} f' \frac{c}{h'} dx \frac{i}{z^2} e^{-\frac{cx}{h' \cos \zeta_1}} \frac{\pi}{Lf},$$

woraus, da  $f = f' \cos \zeta_1 : z^2$ ,

$$dH_1 = \frac{c \pi i}{h' \cos \zeta_1} e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} e^{\frac{cx}{h'} \left( \frac{1}{\cos \sigma_1} - \frac{1}{\cos \zeta_1} \right)} dx.$$

Bildet man hiervon zunächst das unbestimmte Integral, so erhält man

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{c \pi i}{h' \cos \zeta_1} e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \frac{h'}{c \left( \frac{1}{\cos \sigma_1} - \frac{1}{\cos \zeta_1} \right)} e^{\frac{cx}{h'} \left( \frac{1}{\cos \sigma_1} - \frac{1}{\cos \zeta_1} \right)} + C \\ &= -\pi i \frac{\cos \sigma_1}{\cos \sigma_1 - \cos \zeta_1} e^{-c \left( \frac{h'-x}{h' \cos \sigma_1} + \frac{x}{h' \cos \zeta_1} \right)} + C. \end{aligned}$$

Ist nun  $i$  konstant durch die ganze Atmosphäre, sind also nur Wassertropfen oder Eiskristalle vorhanden, so kann man unmittelbar das Integral zwischen

<sup>1)</sup> Vgl. Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Bd. I (1884), S. 399.

den Grenzen  $x = 0$  und  $x = h'$  nehmen und erhält für das  $i$  von einer einzigen Bedeutung

$$H_1 = \pi i \frac{\cos \sigma_1}{\cos \sigma_1 - \cos \zeta_1} \left( e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} - e^{-\frac{c}{\cos \zeta_1}} \right). \quad (67)$$

Sind aber in der unteren Schicht von  $x = 0$  bis  $x = h_o$  Tropfen vorhanden, so daß hier  $i = i_1$  herrscht, dagegen in der oberen Schicht von  $x = h_o$  bis  $x = h'$  Kristalle mit  $i = i_2$ , so muß das Integral in den zweierlei Grenzen einzeln genommen werden. Dabei ist zu beachten, daß  $c$  stets dasselbe ist, indem wir die Stärke der Lichtzerstreuung oder der Lichtschwächung der Sonnenstrahlen nicht von der Form des Wassers abhängig angenommen haben, da diese Verhältnisse bei demselben Wasser- bzw. Eisgehalt der Luft mit der wechselnden Größe der einzelnen Tropfen oder Kristalle aufs mannigfachste wechseln können. Die S. 85 angeführten Messungen von Bouguer und Lambert haben wohl bei gleichzeitigem Vorhandensein von Tropfen und Kristallen stattgefunden, da das vollständige Verschwinden der Tropfen wegen der oft stattfindenden Überkältung der Tropfen unter den Gefrierpunkt schon eine Temperatur merklich unter  $0^\circ$  voraussetzt.

Nimmt man demgemäß den Wert des obigen Integrals  $H_1$  als  $H_1'$  zwischen  $x = 0$  und  $x = h_o$  bei  $i = i_1$ , so erhält man

$$H_1' = \pi i_1 \frac{\cos \sigma_1}{\cos \sigma_1 - \cos \zeta_1} \left[ -e^{-c \left( \frac{h' - h_o}{h' \cos \sigma_1} + \frac{h_o}{h' \cos \zeta_1} \right)} + e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \right];$$

und ebenso erhält man das Integral  $H_1''$  zwischen  $x = h_o$  und  $x = h'$  bei  $i = i_2$

$$H_1'' = \pi i_2 \frac{\cos \sigma_1}{\cos \sigma_1 - \cos \zeta_1} \left[ -e^{-\frac{c}{\cos \zeta_1}} + e^{-c \left( \frac{h' - h_o}{h' \cos \sigma_1} + \frac{h_o}{h' \cos \zeta_1} \right)} \right].$$

Daher ist die ganze durch unmittelbare Sonnenbeleuchtung hervorgebrachte Helligkeit  $H_1 = H_1' + H_1''$ , oder

$$H_1 = \pi \frac{\cos \sigma_1}{\cos \sigma_1 - \cos \zeta_1} \left\{ i_1 \left[ e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} - e^{-c \left( \left(1 - \frac{h_o}{h'}\right) \frac{1}{\cos \sigma_1} + \frac{h_o}{h'} \frac{1}{\cos \zeta_1} \right)} \right] + i_2 \left[ e^{-c \left( \left(1 - \frac{h_o}{h'}\right) \frac{1}{\cos \sigma_1} + \frac{h_o}{h'} \frac{1}{\cos \zeta_1} \right)} - e^{-\frac{c}{\cos \zeta_1}} \right] \right\}. \quad (68)$$

Setzt man nun die Grenze von Wasser und Eis in die obere Grenze der Atmosphäre, wobei  $h_o = h'$  und wobei  $i_2$  verschwindet, so entsteht aus dieser Gleichung die Gleichung (67) mit  $i = i_1$ , und setzt man sie in die untere Grenze, also  $h_o = 0$ , wo dann  $i_1$  verschwindet, so erhält man die Gleichung (67) mit  $i = i_2$ .

Der Ausdruck (68) für  $H_1$  wird unbestimmt für  $\zeta = \sigma$ , oder  $\zeta_1 = \sigma_1$ , indem dann

$$H_1 = \pi \cos \sigma_1 \frac{Z}{N} = \frac{0}{0}$$

wird, wobei der Zähler  $Z$  gleich dem Ausdrücke in der geschwungenen Klammer, und  $N = \cos \sigma_1 - \cos \zeta_1$  ist. Man erhält den bestimmten Wert durch Differentiation nach  $\zeta_1$ , nämlich

$$H_1 = \pi \cos \sigma_1 \frac{dZ : d\zeta_1}{dN : d\zeta_1}.$$

Es ist aber

$$\frac{dZ}{d\zeta_1} = (i_1 - i_2) c \frac{h_o}{h'} \frac{\sin \zeta_1}{\cos^2 \zeta_1} e^{-c} \left( \left(1 - \frac{h_o}{h'}\right) \frac{1}{\cos \sigma_1} + \frac{h_o}{h'} \frac{1}{\cos \zeta_1} \right) + i_2 c \frac{\sin \zeta_1}{\cos^2 \zeta_1} e^{-\frac{c}{\cos \zeta_1}},$$

$$\frac{dN}{d\zeta_1} = \sin \zeta_1.$$

Führt man  $\zeta_1 = \sigma_1$  ein, so erhält man

$$H_1 = \pi \frac{c}{\cos \sigma_1} e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \left[ i_1 \frac{h_o}{h'} + i_2 \left(1 - \frac{h_o}{h'}\right) \right]. \quad (68')$$

**140. Grenze des Wasser- und Eisdunstes.** Um in diesen Formeln die Werte von  $h_o$  einsetzen zu können, für welche  $i_1$  in  $i_2$  übergeht, d. i. die Grenze des Wasser- und Eisdunstes, müssen wir das Gesetz der Abnahme der Temperatur mit wachsender Höhe kennen. Dieser Zusammenhang ist sehr wechselnd, manchmal steigt sogar die Temperatur mit wachsender Höhe. Häufig rechnet man auf 100 m Steigung  $1^\circ$  C Temperaturabnahme. Dies gilt nahezu an der Erdoberfläche, mit wachsenden Höhen wird die Temperaturabnahme geringer; bei wachsenden Höhen an Bergen ist die Abnahme langsamer als in freier Luft, wie die Luftfahrten zeigen; ferner zur Mittagszeit rascher als abends. Sehr ausgedehnte Beobachtungen hat Glaisher in seinen Luftfahrten in England gemacht (mitgeteilt in den

Reports of Brit. Association, 1862, 1863, 1864), auf welche ich mich im folgenden wesentlich stützen werde.<sup>1)</sup>

Bezeichnet man mit  $x$ ,  $b$ ,  $t$  die Höhe eines Punktes über dem Meeresspiegel, den Barometerstand (reduziert auf  $0^\circ$  des Quecksilbers), die Lufttemperatur in Grad Celsius, mit  $0$ ,  $b_0$ ,  $t_0$  diese Größen am Meeresspiegel, und mit  $b' = 0$ ,  $t'$ , die den Werten  $b$  und  $t$  entsprechenden Größen an der Grenze der Atmosphäre, so gilt nach einer von Mendeleef<sup>2)</sup> aufgestellten Formel

$$t = t' + \frac{b}{b_0} (t_0 - t'),$$

wonach die Gesamtzunahme der Temperatur ( $t_0 - t'$ ) von der oberen bis zur unteren Grenze der Atmosphäre bei dem Durchschreiten dieser Höhen proportional mit dem Luftdrucke  $b$  zunimmt. Diese Regel stimmt hinreichend gut für diese an sich so sehr schwankenden Beziehungen mit den Beobachtungen Glaishers überein, und es kommt nur darauf an, die Konstanten in der Gleichung zu bestimmen. Da der Zusammenhang von Höhe  $x$  und Luftdruck  $b$  von der Lufttemperatur abhängt, müssen wir für den Meeresspiegel eine bestimmte Temperatur annehmen. Es sei die in den Sommermonaten bei uns geltende von  $20^\circ$  C, so daß  $t_0 = 20$  wird.

Für mittlere Verhältnisse in Deutschland gilt die Formel für barometrische Höhenberechnung

$$x = 18516 \log \frac{b_0}{b} \left( 1 + 0,003674 \frac{t + t_0}{2} \right).$$

Setzt man darin  $b_0 = 760$  mm,  $t_0 = 20^\circ$ , und nach den Tabellen von Glaisher für  $x = 3353$  m die Lufttemperatur  $t = 0,22^\circ$ , so liefert die Formel  $b = 518,8$  mm. Setzt man diese Werte in der obigen Formel für  $t$  ein, so erhält man  $t' = -42,3^\circ$ . Die äußersten Zahlen von  $x = 5182$  m,  $t = -6,61^\circ$  liefern  $b = 419,8$  mm und  $t' = -39,4^\circ$ . Dagegen hat Mendeleef für diese Temperatur an der Grenze der Atmosphäre  $t' = -36^\circ$  und Rykatschef<sup>3)</sup> hat aus seiner Luftschiffahrt bei Petersburg in geringeren

<sup>1)</sup> Entnommen aus: Sohncke, Ursprung der Gewitterelektrizität, 1885, S. 4; und aus van Bebbber, Lehrbuch der Meteorologie, 1890, S. 54.

<sup>2)</sup> Vgl. Mendeleef, Archive des sciences phys., Genève, 1876. Entnommen aus van Bebbber a. a. O., S. 52.

<sup>3)</sup> van Bebbber a. a. O., S. 52.

Höhen  $t'$  schwankend zwischen  $-41,1^\circ$  und  $-43,8^\circ$  gefunden. Da es uns gerade auf die Grenze zwischen Wasser und Eis ankommt ( $t = 0$ ), wollen wir die hierfür gefundene Zahl  $-42,3^\circ$  oder rund  $-42^\circ$  annehmen,<sup>1)</sup> so daß

$$t = -42 + \frac{b}{760} (t_0 + 42),$$

wo  $b$  in Millimetern anzugeben ist. Für  $t_0 = 20^\circ$  wird  $t = -42 + 0,0816 \cdot b$ . Hieraus ergibt sich  $t = 0$  bei  $b = 514$  mm und  $x = 3260$  m. In dieser Höhe befindet sich unter diesen Umständen die Isothermenfläche Null.<sup>2)</sup>

Es ist noch zu beachten, daß Nebel oft aus Wassertröpfchen bestehen, auch wenn die Temperatur weit unter  $0^\circ$  steht, indem dann keine optische Erscheinung auf die Eisform in den Nebeln hinweist,<sup>3)</sup> und es ist dies erklärlich, da bekannt ist, daß Wasser bis auf  $-10^\circ$  C abgekühlt werden kann, ohne zu gefrieren. Es wird deswegen oft, namentlich bei aufsteigendem Luftstrom, der die Wassertröpfchen aufwärts führt, die Eisgrenze höher als die Nullisothermenfläche liegen.

In der Tabelle 64 sind die für uns wesentlichen Verhältnisse für verschiedene Höhen über dem Meeresspiegel angegeben. Die erste Zeile enthält diese Höhen in Metern; die zweite enthält die Barometerstände in mm, aus  $x$  berechnet nach der Formel der Seite 102, worin der untere Barometerstand  $b_0 = 760$  mm, die Temperatur des unteren Punktes  $t_0 = 20^\circ$ , die des oberen  $t = 0^\circ$ , also  $\frac{1}{2}(t_0 + t) = 10^\circ$  gesetzt ist, da  $t = 0^\circ$  für uns besonders wichtig ist. Wir erhalten mittlere Verhältnisse für den Sommer. Die Formel gestaltet sich dann so: Tab. 64.

$$\log b = 2,881 - 0,0000521 \cdot x.$$

Die dritte Zeile enthält die Temperaturen  $t$ , gewonnen aus den Gleichungen oben auf dieser Seite. Es ergab sich dort

$$t = -42 + \frac{b}{760} (t_0 + 42),$$

<sup>1)</sup> [Diese Zahl braucht nur die Konstante in der nicht für kleine Werte von  $b$  geltenden Formel zu bedeuten, nicht aber in Wirklichkeit die fragwürdige Temperatur an der Grenze der Atmosphäre. Die Genauigkeit dieser Zahl, die man vielleicht jetzt etwas anders annehmen würde, genügt hier vollkommen. Die Herausgeber.]

<sup>2)</sup> Sohncke, a. a. O., S. 6.

<sup>3)</sup> van Bebbber, a. a. O., S. 171.

was für  $t_0 = 20$  wurde

$$t = -42 + 0,0816 b.$$

Für  $t = 0$  erhielt man die Höhe der Isothermenfläche Null gleich 3260 m, wie es aber auch durch eine Einschaltung in der Tabelle folgt. Dies gilt aber nur für die Anfangstemperatur  $t_0 = 20^\circ$ , also für die Verhältnisse des Sommers. Bei ganz kleinen Änderungen der Anfangstemperatur um 1 oder  $2^\circ$  könnte man ohne beträchtlichen Fehler alle Gröfsen  $t$  der dritten Reihe um gleich viel verändern; aber bald würde der Fehler sehr bemerkbar. Z. b. bei  $t_0 = 15^\circ$  würde man bei Verminderung aller  $t$  um 5 durch verhältnismäßige Einschaltung bei  $t = 0$ ,  $x = 2322$  m finden. Die Formel gibt aber dann

$$t = -42 + 0,075 b,$$

woraus für  $t = 0$ ,  $b = 560$  mm und  $x = 2531$  m folgt, also um 209 m mehr.

Tabelle 64.

## Höhe, Barometerstand, Dunstdruck, Temperatur.

$x$	Höhe über dem Meeresspiegel, m.	$x''$	Höhe in der gleichförmigen Luftschicht, m.
$b$	Barometerstand, mm.	$\delta' : \delta'_0$	Verhältnis der Dunstspannung zu derjenigen am Meeresspiegel.
$t$	Temperatur, $C^\circ$ .	$x'''$	Höhe in der gleichförmigen Dunstschicht, m.
$\Delta t$	Abnahme von $t$ bei 100 m Steigung.		

$x$	0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000
$b$	760	716	675	636	599	564	531	500	471
$t$	20	16,4	13,0	9,8	6,8	4,0	1,3	-1,2	-3,6
$\Delta t$	0,74	0,70	0,66	0,62	0,59	0,55	0,52	0,49	0,46
$x''$	0	463	897	1305	1693	2060	2405	2732	3040
$\delta' : \delta'_0$	1	0,8453	0,7129	0,6026	0,5082	0,4295	0,3622	0,3062	0,2582
$x'''$	0	446	821	1135	1397	1616	1801	1960	2098
$x$	4500	5000	5500	6000	6500	7000	7500	8000	$\infty$
$b$	444	418	394	371	349	329	310	292	0
$t$	-5,8	-7,9	-9,8	-11,7	-13,5	-15,2	-16,7	-18,1	
$\Delta t$	0,43	0,41	0,39	0,36	0,34	0,32	0,30	0,29	
$x''$	3327	3600	3858	4090	4312	4526	4730	4925	7992
$\delta' : \delta'_0$	0,2183	0,1841	0,1556	0,1312	0,1109	0,0935	0,0791	0,0667	0
$x'''$	2218	2321	2408	2482	2540	2586	2621	2645	2830



Die vierte Zeile gibt die Abnahme der Temperatur bei 100 m Steigung. Durch Differentiation der Gleichung für  $t$  erhält man

$$dt = \frac{db}{760} (t_0 + 42),$$

was für  $t_0 = 20$  zu  $dt = 0,0816 db$  wird. Es ist also die Temperaturabnahme mit der Druckabnahme der Luft proportional, wie ja bei Aufstellung der Formel angenommen wurde. Durch Differentiation der Formel für die barometrische Höhenberechnung (S. 102) erhält man aber

$$dx = -18516 \left(1 + 0,003674 \frac{t + t_0}{2}\right) \text{ mod. } \frac{db}{b},$$

wobei  $\text{mod.} = \log. e = 0,4343$ . Diese Gleichung mit der obigen zur Elimination von  $b$  benutzt, gibt die Beziehung zwischen  $dt$  und  $dx$ . Setzt man hierin  $\frac{1}{2}(t + t_0) = 10$ , so erhält man, ohne die Allgemeingültigkeit wesentlich zu beschränken,

$$dx = -8340 \frac{db}{b}.$$

Dies in die obige allgemeine Formel von  $dt$  eingeführt, gibt

$$dt = -0,000000158 (t_0 + 42) b dx.$$

Setzt man hierin  $t_0 = 20$  und  $dx = 100$  m, so erhält man die Abnahme  $\Delta t$  der Temperatur bei 100 m Steigung und der Anfangstemperatur von  $20^\circ$

$$\Delta t = -0,000981 \cdot b,$$

und hiernach ist die vierte Zeile der Tabelle berechnet. Man hätte es auch aus den Differenzen der dritten Zeile und Nehmen des Mittels erhalten können.

Die fünfte Zeile gibt die zu den  $x$  gehörigen Höhen  $x''$  in der gleichförmig dichten Luftschicht an, welche bei der Höhe von 7991 m der wirklichen Luftsäule das Gleichgewicht hält. Da die Höhen der überlagernden Luftsäulen mit dem Barometerstande proportional, so ist

$$x'' = 7991 \left(1 - \frac{b}{760}\right).$$

Die sechste Zeile gibt das Verhältnis der Dunstspannung  $\delta'$  in der Höhe  $x$  über dem Meeresspiegel zu derjenigen  $\delta_0'$  bei  $x = 0$ , an Stellen,

an welchen die Luftspannung  $= \delta = b$  und  $= \delta_o = b_o = 760$  ist. Nun gelten die Gleichungen 62 (S. 82) und 63 (S. 83)

$$\lg \frac{\delta}{\delta_o} = \lg \frac{b}{b_o} = -\frac{x}{h}, \quad \lg \frac{\delta'}{\delta'_o} = -\frac{x}{h'};$$

und aus diesen folgt

$$\lg \frac{\delta'}{\delta'_o} = \frac{h}{h'} \lg \frac{b}{b_o} = \frac{7991}{2830} \lg \frac{b}{b_o}.$$

Hiermit ist die sechste Zeile berechnet. Daraus sind die Höhen  $x'''$  der Dunstsäulen (in der siebenten Zeile) berechnet, welche, von der gleichförmigen Dichte  $\delta'_o$  wie am Meeresspiegel, der wirklichen Dunstsäule von der Höhe  $x$  das Gleichgewicht halten, nach der Formel

$$x''' = 2830 \left(1 - \frac{\delta'}{\delta'_o}\right).$$

Man wird nach den Bemerkungen auf S. 102 und 103 bei der vorhin gemachten Annahme für den Sommer mit  $20^\circ$  Temperatur an der Bodenfläche die Lufttemperatur an der Eisgrenze bei etwa  $-10^\circ$  annehmen dürfen. Und da nach Beobachtungen in Upsala<sup>1)</sup> die Gipfel der Kumulostratuswolken (welche aus Wasser gebildet sind), bis zu 5970 m stiegen, die Cirrus- (Eiswolken) aber nicht unter 4970 m sanken, so darf man als bezeichnend für einen Sommertag die Eisgrenze in der Höhe  $x$  von 5500 m annehmen, der nach Tab. 64 eine Temperatur von  $-9,8^\circ$  entspricht, so daß  $h_o = 2400$  m wäre.

## 2. Die durch Beleuchtung der Atmosphäre durch sich selbst hervorgebrachte Himmelhelligkeit ( $H_2$ ).

**141. Helligkeit der Atmosphäre in einer gewissen Sehrichtung, hervorgebracht durch die nach oben gerichteten Luftkegel von übereinstimmender Richtung.** Die Atmosphäre wird nun nicht nur unmittelbar durch die Sonne beleuchtet, sondern jeder Teil auch durch die anderen Teile der Atmosphäre und durch den Boden. Bestimmen wir zuerst die Wirkung der Atmosphäre. Dabei müssen wir die

<sup>1)</sup> Van Bebbber, Lehrbuch der Meteorologie, 1890, S. 180. Vgl. Meteorol. Zeitschr. 1887, S. 73 und 252.

Beleuchtung eines Luftteilchens von der höher als das Teilchen liegenden Atmosphäre (Fig. 79) getrennt behandeln von der Beleuchtung durch die tiefer liegende Atmosphäre (Fig. 80). Verfolgen wir zunächst den ersten Fall. Es werde dabei hier, wie im zweiten Falle, zunächst die Beleuchtung bestimmt, welche der von dem Beobachtungspunkte  $A$  ausgehende Dunstkegel  $Af_1$  von einem anderen Dunstkegel  $Cf$  von unveränderlicher Richtung erhält. Gelten, entsprechend wie früher, für den Kegel  $Af_1$  die Bezeichnungen  $f_1$  (Querschnitt im Abstände von 1 m von  $A$ ), und  $\zeta_1$  (reduzierte Zenitdistanz), werde sein Element  $f' dx$  (im Abstände  $AC = z$ ) von dem Dunstkegel  $Cf$  beleuchtet, der im allgemeinen mit  $AC$  nicht in derselben Vertikalebene liegt, dessen senkrechter Querschnitt im Abstände von 1 m von  $C$  gleich  $f$ , dessen Zenitdistanz =  $\omega$  und dessen reduzierte Zenitdistanz =  $\omega_1$  sei, und werde dessen Element  $f'' dx'$  (im Abstände  $CD = u$  von  $C$ ) von den Sonnenstrahlen  $DE$  bei der reduzierten Zenitdistanz  $\sigma_1$  beleuchtet, seien ferner die Bodenhöhen von  $C$  und  $D$  bzw.  $x$  und  $x'$ , so erhält man folgende Ausdrücke. Es ist die Lichtstärke des bei  $D$  ankommenden Sonnenlichtes (S. 87)

$$(a) = L e^{-\frac{c}{h'}} \cdot ED = L e^{-\frac{c}{h'} \frac{h'-x'}{\cos \sigma_1}} .$$

Ferner ist die Lichtmenge, welche auf das Flächenelement  $f''$  fällt, von dem Dunstelemente  $f' dx'$  in der Richtung  $DC$  zerstreut und auf die senkrecht bestrahlte Flächeneinheit im Abstände 1 von  $D$  geworfen wird (vgl. S. 97)

$$(b) = (a) f'' \cos \sigma_1 \frac{c}{h'} \frac{dx'}{\cos \sigma_1} i' ,$$

wobei  $i'$  der Zerstreuungskoeffizient ist, welcher bei der in  $D$  stattfindenden Ablenkung  $\varphi'$  dem Wasserdunste ( $i_1$  nach Tab. 60) oder dem Eisdunste ( $i_2$  nach Tab. 60) zukommt.

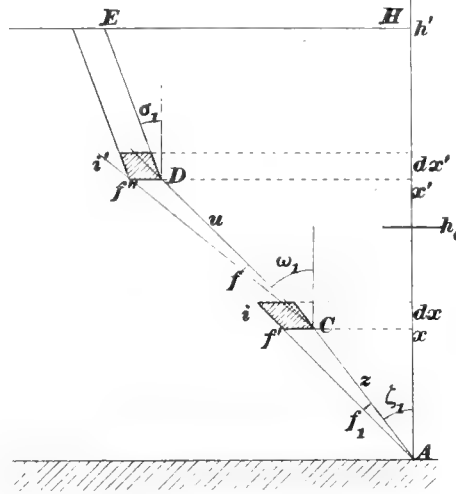


Fig. 79.

Sodann ist die Lichtmenge, welche von der Lichtmenge (b) auf das Flächenelement  $f'$  fällt nach der Schwächung beim Durchlaufen des Weges  $DC = u = (x' - x) : \cos \omega_1$

$$(c) = (b) \frac{f' \cos \omega_1}{u^2} e^{-\frac{c}{h'} \frac{x' - x}{\cos \omega_1}} .$$

Führt man hierin die Werte von (b) und (a) ein und beachtet, daß  $f'' = f u^2 : \cos \omega_1$ , so erhält man

$$\begin{aligned} (c) &= L e^{-\frac{c}{h'} \frac{h' - x'}{\cos \sigma_1}} f \frac{c}{h'} dx' \cdot i' \cdot f' e^{-\frac{c}{h'} \frac{x' - x}{\cos \omega_1}} \\ &= L e^{-\frac{c}{h'} \left( \frac{h'}{\cos \sigma_1} - \frac{x}{\cos \omega_1} \right)} f f' \frac{c}{h'} \cdot e^{-\frac{c x'}{h'} \left( \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right)} i' dx' . \end{aligned}$$

Integriert man diesen Ausdruck zwischen den Grenzen  $x' = x$  und  $x' = h'$ , wobei  $x$  unveränderlich, so erhält man die von dem ganzen Dunstkegel  $Cf$  auf das Flächenelement  $f'$  geworfene Lichtmenge. Dabei ist aber zu unterscheiden, ob die Grenze des Wasser- und Eisdunstes (in der Höhe  $h_o$ ) innerhalb  $x$  und  $h'$  liegt, oder unterhalb  $x$ , d. h. ob  $x < h_o$  oder  $> h_o$  ist. Es sei zuerst

1.  $x < h_o$ , wie in Fig. 79 angegeben; hierbei hat, für  $x' > h_o$ ,  $i'$  den Wert  $i_2'$  für Eisdunst, und für  $x' < h_o$  und  $> x$  den Wert  $i_1'$  für Wasserdunst, so daß das Integral (d) von (c) in zwei Teilen zu nehmen ist, und es wird, indem man (d) im ersten Falle mit (d)', im zweiten mit (d)'' bezeichnet,

$$\begin{aligned} (d)' &= L e^{-\frac{c}{h'} \left( \frac{h'}{\cos \sigma_1} - \frac{x}{\cos \omega_1} \right)} f f' \frac{c}{h'} \left\{ \int_{h_o}^{h'} e^{-\frac{c x'}{h'} \left( \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right)} i_2' dx' \right. \\ &\quad \left. + \int_x^{h_o} e^{-\frac{c x'}{h'} \left( \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right)} i_1' dx' \right\} \\ &= L e^{-\frac{c}{h'} \left( \frac{h'}{\cos \sigma_1} - \frac{x}{\cos \omega_1} \right)} f f' \frac{(-1)}{\frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1}} \\ &\quad \cdot \left\{ i_2' \left[ e^{-c \left( \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right)} - e^{-c \frac{h_o}{h'} \left( \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right)} \right] \right. \\ &\quad \left. + i_1' \left[ e^{-c \frac{h_o}{h'} \left( \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right)} - e^{-c \frac{x}{h'} \left( \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right)} \right] \right\} . \end{aligned}$$

2. Für  $x > h_0$  ist  $i' = i_2'$ , und es wird dann das Integral

$$\begin{aligned} (d)'' &= L e^{-\frac{c}{h'} \left( \frac{h'}{\cos \sigma_1} - \frac{x}{\cos \omega_1} \right)} f f' \frac{c}{h'} \int_x^{h'} e^{-\frac{c x'}{h'} \left( \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right)} i_2' dx' \\ &= L e^{-\frac{c}{h'} \left( \frac{h'}{\cos \sigma_1} - \frac{x}{\cos \omega_1} \right)} f f' \frac{(-1)}{1 \frac{1}{\cos \omega_1} \frac{1}{\cos \sigma_1}} \\ &\quad \cdot i_2' \left[ e^{-c \left( \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right)} - e^{-c \frac{x}{h'} \left( \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right)} \right]. \end{aligned}$$

Von dieser Lichtmenge ( $d$ ), welche auf das Flächenelement  $f'$  fällt, wird aber durch das Dunstelement  $f' dx$  zerstreut und in der Richtung gegen  $A$  auf die senkrecht bestrahlte Flächeneinheit im Abstände von 1 m von  $C$  geworfen, wenn der Zerstreungskoeffizient für die Ablenkung  $\varphi$  in  $C$  gleich  $i$  ist, und zwar  $i_1$  für Wasser (Tab. 60) und  $i_2$  für Eis (Tab. 60),

$$(e) = (d) \frac{dx}{\cos \omega_1} \frac{c}{h'} i;$$

daher fällt nach der Lichtschwächung durch den Weg  $z = x : \cos \zeta_1$  senkrecht auf die Flächeneinheit bei  $A$  die Lichtmenge

$$(f) = (e) \frac{1}{z^2} e^{-\frac{c}{h'} \frac{x}{\cos \zeta_1}}.$$

Die Helligkeit, welche hierdurch in  $A$  erzeugt wird, erhält man durch Teilung durch  $L f_1 : \pi$ . Dadurch wird als Einheit der Helligkeit die Helligkeit einer Fläche von dem Rückstrahlungsvermögen 1 eingeführt, welche von der Sonne an der äußeren Grenze der Atmosphäre senkrecht bestrahlt würde. Denn die Fläche  $f_1$  dieser Oberfläche würde die Lichtmenge  $L f_1$  empfangen und zerstreuen und auf die in einem Abstände 1 senkrecht gegenübergestellte Flächeneinheit die Lichtmenge  $L f_1 : \pi$  werfen (S. 99). Bezeichnet man nun mit  $H_2^o$  und  $H_2''$  die Helligkeiten im Luftkegel  $A f_1$ , welche von dem oberhalb oder dem unterhalb jedes Teilchens des Kegels  $A f_1$  liegenden Teile der ganzen Atmosphäre herrühren, so rühren die Differentiale hiervon,  $dH_2^o$  und  $dH_2''$ , nur von den Kegeln  $C f$  der Atmosphäre her, welche parallel zu  $CD$  gerichtet sind und alle die gleiche

Öffnung oder Weite  $f$  besitzen. Die Differentiale hiervon, oder  $d(dH_2^o)$  und  $d(dH_2^u)$  rühren nur von dem Elemente  $f'dx$  des betrachteten Kegels  $Af_1$  her. Man erhält daher durch Teilung des ( $f$ ) durch  $Lf_1 : \pi$ , und unter Beachtung, daß  $f_1 = f' \cos \zeta_1 : z^2$ ,

$$d(dH_2^o) = (f) \frac{\pi z^2}{Lf' \cos \zeta_1}, \quad \text{oder}$$

$$d(dH_2^o) = \frac{(d)}{Lf' \cos \zeta_1} \frac{\pi}{\cos \omega_1} \frac{c}{h'} i dx e^{-\frac{c}{h'} \frac{x}{\cos \zeta_1}}.$$

Integriert man nun diesen Ausdruck zwischen den Grenzen  $x = 0$  und  $x = h'$ , so erhält man die Helligkeit  $dH_2^o$ , welche von dem Dunstkegel  $Af'$  in  $A$  vermittelt seiner Beleuchtung aus der Atmosphäre durch die Dunstkegel von der Richtung und der Öffnung des Kegels  $Cf$  hervorgebracht wird. Auch hier müssen wir jene beiden durch die Eisgrenze hervorgebrachten Abschnitte unterscheiden und erhalten daher

1. für  $x < h_o$  ( $d$ ) = ( $d'$ ),  $i - i_1$ )

$$dH_2^o = \pi f' \frac{c}{h'} i_1 \frac{1}{\cos \zeta_1 \cos \omega_1} \cdot \frac{(-1)}{1 - \frac{1}{\cos \omega_1 - \cos \sigma_1}} e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}}$$

$$\cdot \int_0^{h_o} dx \left\{ \left[ i_1' e^{-c \frac{h_o}{h'} \left( \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right)} + i_2' \left( e^{-c \left( \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right)} - e^{-c \frac{h_o}{h'} \left( \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right)} \right) \right] \right.$$

$$\left. \cdot e^{-c \frac{x}{h'} \left( \frac{1}{\cos \zeta_1} - \frac{1}{\cos \omega_1} \right)} - i_1' e^{-c \frac{x}{h'} \left( \frac{1}{\cos \zeta_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right)} \right\}.$$

Setzt man nun

$$s = \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1}, \quad t = \frac{1}{\cos \zeta_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1}, \quad u = \frac{1}{\cos \zeta_1} - \frac{1}{\cos \omega_1} = t - s,$$

und führt die angedeutete Integration aus, so erhält man

$$dH_2^o = \pi f' \frac{c}{h'} i_1 \frac{1}{\cos \zeta_1 \cos \omega_1} \frac{(-1)}{s} e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \left\{ \left[ i_1' e^{-c \frac{h_o}{h'} s} \right. \right.$$

$$\left. + i_2' \left( e^{-cs} - e^{-c \frac{h_o}{h'} s} \right) \right] \frac{h'}{c} \frac{(-1)}{u} \left( e^{-c \frac{h_o}{h'} u} - 1 \right) - i_1' \frac{h'}{c} \frac{(-1)}{t} \left( e^{-c \frac{h_o}{h'} t} - 1 \right) \right\}$$

$$= \pi f' i_1 \frac{e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}}}{\cos \zeta_1 \cos \omega_1 s} \left\{ \left[ i_1' e^{-c \frac{h_o}{h'} s} + i_2' \left( e^{-cs} - e^{-c \frac{h_o}{h'} s} \right) \right] \right.$$

$$\left. \cdot \frac{1}{u} \left( e^{-c \frac{h_o}{h'} u} - 1 \right) - i_1' \frac{1}{t} \left( e^{-c \frac{h_o}{h'} t} - 1 \right) \right\}.$$

2. Für  $x > h_0$  ( $d' = (d'')$ ,  $i = i_2$ ) ist

$$\begin{aligned}
 dH_2^{o''} &= \pi f \frac{c}{h'} i_2 i_2' \frac{1}{\cos \zeta_1 \cos \omega_1} \frac{(-1)}{1 - \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1}} e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \left\{ \int_{h_0}^{h'} e^{-c \left( \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right)} \right. \\
 &\quad \left. \cdot e^{-c \frac{x}{h'} \left( \frac{1}{\cos \zeta_1} - \frac{1}{\cos \omega_1} \right)} dx - \int_{h_0}^{h'} e^{-c \frac{x}{h'} \left( \frac{1}{\cos \zeta_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right)} dx \right\} \\
 &= \pi f \frac{c}{h'} i_2 i_2' \frac{e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} (-1)}{\cos \zeta_1 \cos \omega_1 s} \left\{ e^{-cs} \cdot \frac{h'}{c} \frac{(-1)}{u} \left[ e^{-cu} - e^{-c \frac{h_0}{h'} u} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{h'}{c} \frac{(-1)}{t} \left( e^{-ct} - e^{-c \frac{h_0}{h'} t} \right) \right\} \\
 &= \pi f i_2 i_2' \frac{e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}}}{\cos \zeta_1 \cos \omega_1 s} \left\{ \frac{e^{-cs}}{u} \left[ e^{-cu} - e^{-c \frac{h_0}{h'} u} \right] - \frac{1}{t} \left( e^{-ct} - e^{-c \frac{h_0}{h'} t} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die ganze Helligkeit  $dH_2^0 = dH_2^{o'} + dH_2^{o''}$  des Himmels, welche in der Richtung  $AC$  durch alle Dunstkegel aus der Richtung  $CD$  des Himmels und von der Öffnung  $Cf$  hervorgebracht wird.

Es wird, wenn wir, was für die spätere Integration wichtig ist, die Produkte der  $i$  untereinander als gemeinschaftliche Faktoren vor Klammern setzen und beachten, daß  $s + u = t$  ist,

$$\begin{aligned}
 dH_2^0 &= \pi f e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \frac{1}{\cos \zeta_1 \cos \omega_1} \frac{1}{s} \left\{ i_1 i_1' \left[ \frac{1}{u} \left( e^{-c \frac{h_0}{h'} t} - e^{-c \frac{h_0}{h'} s} \right) + \frac{1}{t} \left( 1 - e^{-c \frac{h_0}{h'} t} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + i_1 i_2' \frac{1}{u} \left[ e^{-cs} e^{-c \frac{h_0}{h'} u} - e^{-c \frac{h_0}{h'} t} - e^{-cs} + e^{-c \frac{h_0}{h'} s} \right] \right. \\
 &\quad \left. + i_2 i_2' \left[ \frac{1}{u} \left( e^{-ct} - e^{-cs} e^{-c \frac{h_0}{h'} u} \right) + \frac{1}{t} \left( e^{-c \frac{h_0}{h'} t} - e^{-ct} \right) \right] \right\}. \quad (69)
 \end{aligned}$$

**142. Helligkeit der Atmosphäre in einer gewissen Sehrichtung, hervorgebracht durch die nach unten gerichteten Luftkegel von übereinstimmender Richtung.** Für die Beleuchtung der Luft durch die tiefer liegenden Luftteilchen ist der Vorgang in Fig. 80 dargestellt, deren Bezeichnungen mit denen der Fig. 79 übereinstimmen. Man bemerkt, daß der Winkel  $\omega_1$  stumpf geworden ist. Die Entwicklung schließt sich an die frühere an. Die Ausdrücke der Seite 107 u. f. für Fig. 80.

(a), (b), (c) erhalten ganz die frühere Form. In (c) muß  $x' - x$  negativ

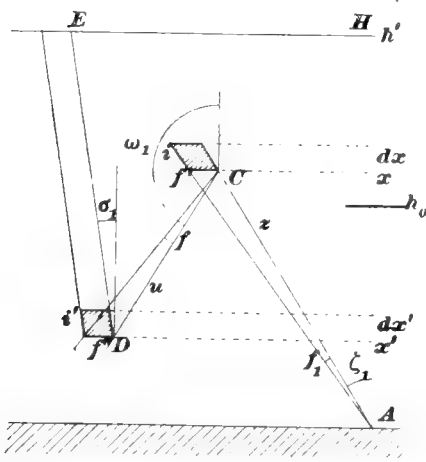


Fig. 80.

werden; dies wird aber durch das Vorzeichen des Kosinus des stumpfen Winkels  $\omega_1$  ohne Änderung des Ausdrucks bewirkt. Die Querschnitte  $f' \cos \omega_1$  und  $f'' = f u^2 : \cos \omega_1$  müssen beide positiv sein, daher mußten die Vorzeichen von  $\cos \omega_1$  beide umgekehrt werden; es heben sich aber bei der Multiplikation beide  $\cos \omega_1$  auf.

Bei der Integration von (c) müssen ebenfalls zwei Fälle unterschieden werden.

1. Für  $x < h_0$  ist das Integral zwischen  $x' = 0$  und  $x' = x$  zu nehmen und für  $i'$  ist das  $i_1'$  für Wasser zu setzen. Daher wird

$$\begin{aligned} (d)' &= L e^{-\frac{c}{h'} \left( \frac{h'}{\cos \sigma_1} - \frac{x}{\cos \omega_1} \right)} f f' \frac{c}{h'} \int_0^x e^{-\frac{c x'}{h'} \left( \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right)} i_1' dx' \\ &= L e^{-\frac{c}{h'} \left( \frac{h'}{\cos \sigma_1} - \frac{x}{\cos \omega_1} \right)} f f' \frac{(-1)}{1} \frac{1}{\cos \omega_1} \left\{ i_1' \left[ e^{-\frac{c}{h'} \left( \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right) x} - 1 \right] \right\}. \end{aligned}$$

2. Bei  $x > h_0$  wird von  $x' = 0$  bis  $x' = h_0$  mit  $i_1'$ , von  $x' = h_0$  bis  $x' = x$  mit  $i_2'$  integriert. Man erhält dann

$$\begin{aligned} (d)'' &= L e^{-\frac{c}{h'} \left( \frac{h'}{\cos \sigma_1} - \frac{x}{\cos \omega_1} \right)} f f' \frac{c}{h'} \left\{ i_1' \int_0^{h_0} e^{-\frac{c x'}{h'} \left( \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right)} dx' \right. \\ &\quad \left. + i_2' \int_{h_0}^x e^{-\frac{c x'}{h'} \left( \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right)} dx' \right\} \\ &= L e^{-\frac{c}{h'} \left( \frac{h'}{\cos \sigma_1} - \frac{x}{\cos \omega_1} \right)} f f' \frac{(-1)}{1} \frac{1}{\cos \sigma_1} \left\{ i_1' \left[ e^{-\frac{c}{h'} \left( \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right) h_0} - 1 \right] \right. \\ &\quad \left. + i_2' \left[ e^{-\frac{c}{h'} \left( \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right) x} - e^{-\frac{c}{h'} \left( \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right) h_0} \right] \right\}. \end{aligned}$$

In dem Ausdrucke (e) S. 109 ist die vom Licht durchschrittene Weglänge  $dx : \cos \omega_1$  jedenfalls positiv zu nehmen; da aber alle  $x, x', dx, dx'$



nach oben positiv gezählt werden, und  $\cos \omega_1$  negativ ist, muß hier  $-\cos \omega_1$  gesetzt werden. Man hat dann dem  $dH_2^u$  das negative Zeichen vorzusetzen.

Bei der Integration sind wieder die beiden Fälle zu unterscheiden; man erhält in ihnen  $dH_2^{u'}$  mit  $i_1$  und  $dH_2^{u''}$  mit  $i_2$ . Es wird

$$\begin{aligned}
 dH_2^{u'} &= -\pi f \frac{c}{h'} i_1 i_1' \frac{1}{\cos \zeta_1 \cos \omega_1} \frac{(-1)}{\frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1}} e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \\
 &\quad \cdot \int_0^{h_0} dx \left\{ e^{-c \frac{x}{h'} \left( \frac{1}{\cos \zeta_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right)} - e^{-c \frac{x}{h'} \left( \frac{1}{\cos \zeta_1} - \frac{1}{\cos \omega_1} \right)} \right\} \\
 &= \pi f i_1 i_1' \frac{1}{\cos \zeta_1 \cos \omega_1} \frac{e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}}}{s} \left\{ \frac{1}{t} \left( 1 - e^{-c \frac{h_0}{h'}} \right) + \frac{1}{u} \left( e^{-c \frac{h_0}{h'} u} - 1 \right) \right\}. \\
 dH_2^{u''} &= -\pi f \frac{c}{h'} i_2 \frac{1}{\cos \zeta_1 \cos \omega_1} \frac{(-1)}{\frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1}} e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \\
 &\quad \cdot \int_{h_0}^{h'} dx \left\{ i_1' e^{-c \frac{x}{h'} \left( \frac{1}{\cos \zeta_1} - \frac{1}{\cos \omega_1} \right)} \left( e^{-c \frac{h_0}{h'} \left( \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right)} - 1 \right) \right. \\
 &\quad \left. + i_2' \left[ e^{-c \frac{x}{h'} \left( \frac{1}{\cos \zeta_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right)} - e^{-c \frac{x}{h'} \left( \frac{1}{\cos \zeta_1} - \frac{1}{\cos \omega_1} \right)} e^{-c \frac{h_0}{h'} \left( \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right)} \right] \right\} \\
 &= \pi f i_2 \frac{e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}}}{\cos \zeta_1 \cos \omega_1 \cdot s} \left\{ \frac{i_1'}{u} \left( e^{-c \frac{h_0}{h'} u} - e^{-cu} \right) \left( e^{-c \frac{h_0}{h'} s} - 1 \right) \right. \\
 &\quad \left. + i_2' \left[ \frac{1}{t} \left( e^{-c \frac{h_0}{h'} t} - e^{-ct} \right) + \frac{1}{u} \left( e^{-cu} - e^{-c \frac{h_0}{h'} u} \right) e^{-c \frac{h_0}{h'} s} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Indem wir, entsprechend wie bei  $H_2^0$ , diese beiden Ausdrücke addieren, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 dH_2^u &= \pi f e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \frac{1}{\cos \zeta_1 \cos \omega_1} \frac{1}{s} \left\{ i_1 i_1' \left[ \frac{1}{u} \left( e^{-c \frac{h_0}{h'} u} - 1 \right) + \frac{1}{t} \left( 1 - e^{-c \frac{h_0}{h'} t} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + i_1' i_2 \frac{1}{u} \left[ -e^{-cu} e^{-c \frac{h_0}{h'} s} + e^{-c \frac{h_0}{h'} t} + e^{-cu} - e^{-c \frac{h_0}{h'} u} \right] \right. \\
 &\quad \left. + i_2 i_2' \left[ \frac{1}{u} \left( -e^{-c \frac{h_0}{h'} t} + e^{-cu} e^{-c \frac{h_0}{h'} s} \right) + \frac{1}{t} \left( e^{-c \frac{h_0}{h'} t} - e^{-ct} \right) \right] \right\}. \quad (70)
 \end{aligned}$$

**143. Bestimmung der Werte  $dH_2$  im Falle ihrer scheinbaren Unbestimmtheit.** Die gewonnenen Ausdrücke für  $dH_2^0$  und  $dH_2^u$  werden unbestimmt, indem sie die Form  $\frac{0}{0}$  annehmen oder Glieder solcher

Form erhalten, wenn zwei von den drei Größen  $\sigma_1$ ,  $\zeta_1$ ,  $\omega_1$  gleich werden und in der Nähe der Gleichheit werden die Ergebnisse unsicher. Es ist daher in dieser und auch in anderer Beziehung zweckmäÙig, jene Größen, wenn man sie auch nur nahezu gleich machen müÙte, ganz gleich zu setzen, und die bestimmten Werte zu ermitteln.

1. Setzen wir  $\omega_1 = \sigma_1$ , so wird (Gl. 69, S. 111)

$$dH_2^0 = \pi f \frac{e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \{\dots\}}{\cos \zeta_1 \cos \omega_1 \cdot s} = \frac{0}{0},$$

denn es war gesetzt worden

$$s = \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1}, \quad t = \frac{1}{\cos \zeta_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1}, \quad u = \frac{1}{\cos \zeta_1} - \frac{1}{\cos \omega_1};$$

daher wird für  $\omega_1 = \sigma_1$ ,  $s = 0$ ,  $t = u$ ; und wenn wir den Zähler und Nenner des letzten Bruches in obigem Ausdruck mit  $Z$  und  $N$  bezeichnen, also

$$Z = \{\dots\}, \quad N = 1 - \frac{\cos \omega_1}{\cos \sigma_1}$$

setzen, so wird  $Z$ , d. i. der in geschweiften Klammer der Gl. (69) eingeschlossene Ausdruck, wie man sich leicht überzeugt,  $= 0$ , und ebenso wird  $N = 0$ , also  $H_2^0 = 0:0$ .

Um den bestimmten Wert zu erhalten, differenzieren wir  $Z$  und  $N$  in ihren ursprünglichen Formen nach  $\omega_1$ . Zunächst ist

$$\frac{ds}{d\omega_1} = \frac{\sin \omega_1}{\cos^2 \omega_1}, \quad \frac{dt}{d\omega_1} = 0, \quad \frac{du}{d\omega_1} = -\frac{\sin \omega_1}{\cos^2 \omega_1}.$$

Sodann erhalten wir aus Gl. (69)

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{d\omega_1} = & \frac{\sin \omega_1}{u \cos^2 \omega_1} \left\{ i_1 i_1' \left[ c \frac{h_o}{h'} e^{-c \frac{h_o}{h'} s} + \frac{1}{u} \left( e^{-c \frac{h_o}{h'} t} - e^{-c \frac{h_o}{h'} s} \right) \right] \right. \\ & + i_1 i_2' \left[ c \left( - \left( 1 - \frac{h_o}{h'} \right) e^{-cs} e^{-c \frac{h_o}{h'} u} + e^{-cs} - \frac{h_o}{h'} e^{-c \frac{h_o}{h'} s} \right) \right. \\ & + \left. \frac{1}{u} \left( e^{-cs} e^{-c \frac{h_o}{h'} u} - e^{-c \frac{h_o}{h'} t} - e^{-cs} + e^{-c \frac{h_o}{h'} s} \right) \right] \\ & \left. + i_2 i_2' \left[ c \left( 1 - \frac{h_o}{h'} \right) e^{-cs} e^{-c \frac{h_o}{h'} u} + \frac{1}{u} \left( e^{-ct} - e^{-cs} e^{-c \frac{h_o}{h'} u} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Andererseits wird 
$$\frac{dN}{d\omega_1} = \frac{\sin \omega_1}{\cos \sigma_1}.$$

Setzt man in diesen Ausdrücken  $\omega_1 = \sigma_1$ , also  $s = 0$ ,  $u = t$ , so wird nach einigen Vereinfachungen

$$\begin{aligned} dH_2^0 &= \pi f e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \frac{dZ}{dN}, \text{ oder} \\ dH_2^0 &= \pi f e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \frac{1}{\cos \zeta_1 \cos \sigma_1} \frac{1}{t} \left\{ i_1 i_1' \left[ \frac{1}{t} \left( e^{-c \frac{h_0}{h'} t} - 1 \right) + c \frac{h_0}{h'} \right] \right. \\ &\quad + i_1 i_2' \left[ c \left( 1 - \frac{h_0}{h'} \right) \left( 1 - e^{-c \frac{h_0}{h'} t} \right) \right] \\ &\quad \left. + i_2 i_2' \left[ \frac{1}{t} \left( e^{-ct} - e^{-c \frac{h_0}{h'} t} \right) + c \left( 1 - \frac{h_0}{h'} \right) e^{-c \frac{h_0}{h'} t} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (71)$$

Setzt man nun in diesem Ausdrucke  $\zeta_1 = \sigma_1$ , so wird, wie man leicht erkennt, wieder  $dH_2^0$  unbestimmt. Zur Ermittlung des bestimmten Wertes haben wir hier zweimalige Differentiation von Zähler und Nenner nach  $\zeta_1$  nötig. Dabei muß aber aus dem Zählerausdruck der Divisor  $t$  einzelner Glieder entfernt werden. Wir setzen daher

$$dH_2^0 = \pi f e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \frac{Z}{N},$$

und dabei

$$\begin{aligned} Z &= t \cdot \cos \zeta_1 \{ \dots \} = \left( 1 - \frac{\cos \zeta_1}{\cos \sigma_1} \right) \{ \dots \}, \\ N &= t^2 \cdot \cos^2 \zeta_1 = \left( 1 - \frac{\cos \zeta_1}{\cos \sigma_1} \right)^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\zeta_1} &= \frac{\sin \zeta_1}{\cos^2 \zeta_1}, \quad \frac{d(t \cos \zeta_1)}{d\zeta_1} = \frac{\sin \zeta_1}{\cos \sigma_1}, \\ \frac{dZ}{d\zeta_1} &= i_1 i_1' \left[ c \frac{\sin \zeta_1}{\cos \sigma_1} \frac{h_0}{h'} + \cos \zeta_1 \left( -c \frac{h_0}{h'} \right) \frac{\sin \zeta_1}{\cos^2 \zeta_1} e^{-c \frac{h_0}{h'} t} - \sin \zeta_1 \left( e^{-c \frac{h_0}{h'} t} - 1 \right) \right] \\ &\quad + i_1 i_2' \left[ \left( 1 - \frac{\cos \zeta_1}{\cos \sigma_1} \right) c \left( 1 - \frac{h_0}{h'} \right) c \frac{h_0}{h'} \frac{\sin \zeta_1}{\cos^2 \zeta_1} e^{-c \frac{h_0}{h'} t} + \frac{\sin \zeta_1}{\cos \sigma_1} c \left( 1 - \frac{h_0}{h'} \right) \left( 1 - e^{-c \frac{h_0}{h'} t} \right) \right] \\ &\quad + i_2 i_2' \left[ c \left( 1 - \frac{\cos \zeta_1}{\cos \sigma_1} \right) \left( 1 - \frac{h_0}{h'} \right) \left( -c \frac{h_0}{h'} \right) \frac{\sin \zeta_1}{\cos^2 \zeta_1} e^{-c \frac{h_0}{h'} t} + c \frac{\sin \zeta_1}{\cos \sigma_1} \left( 1 - \frac{h_0}{h'} \right) e^{-c \frac{h_0}{h'} t} \right. \\ &\quad \left. + \cos \zeta_1 \left( -c \frac{\sin \zeta_1}{\cos^2 \zeta_1} \right) \left( e^{-ct} - \frac{h_0}{h'} e^{-c \frac{h_0}{h'} t} \right) - \sin \zeta_1 \left( e^{-ct} - e^{-c \frac{h_0}{h'} t} \right) \right], \\ \frac{dN}{d\zeta_1} &= 2 \left( 1 - \frac{\cos \zeta_1}{\cos \sigma_1} \right) \frac{\sin \zeta_1}{\cos \sigma_1}. \end{aligned}$$

Man erkennt leicht, daß sowohl  $dZ:d\zeta_1$ , als  $dN:d\zeta_1$ , für  $\zeta_1 = \sigma_1$  Null wird. Die zweite Differentiation liefert nun einen sehr ausgedehnten Ausdruck von  $d^2Z:d\zeta_1^2$ , den wir nicht anführen wollen. Setzt man in ihm und in dem einfachen Ausdrucke von  $d^2N:d\zeta_1^2$ ,  $\zeta_1 = \sigma_1$ , so erhält man

$$dH_2^0 = \pi f e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \frac{d^2 Z}{dN^2}, \text{ oder}$$

$$dH_2^0 = \pi f e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \frac{c^2}{2 \cos^2 \sigma_1} \left[ i_1 i_1' \left( \frac{h_o}{h'} \right)^2 + i_1 i_2' \cdot 2 \frac{h_o}{h'} \left( 1 - \frac{h_o}{h'} \right) + i_2 i_2' \left( 1 - \frac{h_o}{h'} \right)^2 \right]. \quad (72)$$

In ähnlicher Weise erhält man in den anderen Fällen der scheinbaren Unbestimmtheit die bestimmten Werte. Doch wollen wir die Rechnungen selbst hier nicht durchführen, sondern nur die Endergebnisse angeben.

Für  $\zeta_1 = \sigma_1$  erhält man nach einmaliger Differentiation der Gleichung (69) nach  $\zeta_1$ ,

$$dH_2^0 = \pi f e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \frac{1}{\cos \sigma_1} \frac{1}{\cos \omega_1} \frac{1}{s} \left\{ i_1 i_1' \left[ \frac{1}{s} \left( e^{-c \frac{h_o}{h'} s} - 1 \right) + c \frac{h_o}{h'} \right] \right.$$

$$+ i_1 i_2' \frac{1}{s} \left[ -e^{-cs} e^{-c \frac{h_o}{h'} u} + 1 + e^{-cs} - e^{-c \frac{h_o}{h'} s} \right]$$

$$\left. + i_2 i_2' \left[ \frac{1}{s} \left( e^{-cs} e^{-c \frac{h_o}{h'} u} - 1 \right) + c \left( 1 - \frac{h_o}{h'} \right) \right] \right\}. \quad (73)$$

Es kann nun auch für die Bestrahlung von unten, oder für  $dH_2^u$ ,  $\zeta_1 = \sigma_1$  werden, wodurch  $dH_2^u$  unbestimmt wird; der bestimmte Wert ergibt sich dann gleich

$$dH_2^u = \pi f e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \frac{1}{\cos \sigma_1} \frac{1}{\cos \omega_1} \frac{1}{s} \left\{ i_1 i_1' \left[ \frac{1}{u} \left( e^{-c \frac{h_o}{h'} u} - 1 \right) + c \frac{h_o}{h'} \right] \right.$$

$$+ i_1' i_2' \frac{1}{u} \left[ -e^{-cu} e^{-c \frac{h_o}{h'} s} + 1 + e^{-cu} - e^{-c \frac{h_o}{h'} u} \right]$$

$$\left. + i_2 i_2' \left[ \frac{1}{u} \left( e^{-cu} e^{-c \frac{h_o}{h'} s} - 1 \right) + c \left( 1 - \frac{h_o}{h'} \right) \right] \right\}. \quad (74)$$

Setzt man nun auch  $\omega_1 = \sigma_1$ , was aber nur für  $dH_2^0$  möglich ist, so wird der Ausdruck (73)  $dH_2^0 = 0:0$ . Der bestimmte Wert wird wieder erst durch zweimalige Differentiation gewonnen, wobei man wieder

$$dH_2^0 = \pi f e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \frac{Z}{N},$$

$$Z = s \cos \omega_1 \{ \cdot \cdot \}, \quad N = s^2 \cos^2 \omega_1$$

setzt. Man erhält dadurch wieder den Ausdruck (72), welcher ja schon für  $\omega_1 = \zeta_1 = \sigma_1$  geltend gefunden wurde.

Endlich wird der allgemeine Ausdruck (69) für  $dH_2^0$  gleich 0:0 für  $\omega_1 = \zeta_1$ . Wir erhalten dann durch Differentiation nach  $\zeta_1$  zuletzt

$$\begin{aligned} dH_2^0 = & \pi f e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \frac{1}{\cos^2 \omega_1} \frac{1}{s} \left\{ i_1 i_1' \left[ \frac{1}{s} \left( 1 - e^{-c \frac{h_o}{h'} s} \right) - c \frac{h_o}{h'} e^{-c \frac{h_o}{h'} s} \right] \right. \\ & + i_1 i_2' c \frac{h_o}{h'} \left[ e^{-c \frac{h_o}{h'} s} - e^{-cs} \right] \\ & \left. + i_2 i_2' \left[ \frac{1}{s} \left( e^{-c \frac{h_o}{h'} s} - e^{-cs} \right) - c \left( 1 - \frac{h_o}{h'} \right) e^{-cs} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (75)$$

Setzt man hierin außerdem  $\omega_1 = \sigma_1$ , so erhält man nach zweimaliger Differentiation abermals den Ausdruck (72).

**144. Werte von  $dH_2$  für besondere einfache Fälle.** Besondere Vereinfachungen erfahren die Ausdrücke für  $\zeta = 90^\circ$  oder  $\omega = 90^\circ$ ; dann wird  $\zeta_1$  oder  $\omega_1 = 89^\circ 8'$ ,  $\cos \zeta_1$  oder  $\cos \omega_1 = 0,015126$ ,  $1 : \cos \zeta_1$  oder  $1 : \cos \omega_1 = 66,1$ , daher  $e^{-\frac{1}{\cos \zeta_1}}$  oder  $e^{-\frac{1}{\cos \omega_1}}$  unmerklich klein.

Gl. (69) liefert für  $\zeta = 90^\circ$

$$\begin{aligned} dH_2^0 = & \pi f e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \frac{1}{\cos \zeta_1 \cos \omega_1} \frac{1}{s} \left\{ i_1 i_1' \left[ \frac{1}{t} - \frac{1}{u} e^{-c \frac{h_o}{h'} s} \right] \right. \\ & \left. + i_1 i_2' \frac{1}{u} \left[ e^{-c \frac{h_o}{h'} s} - e^{-cs} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (76)$$

Wird dabei außerdem  $\omega_1 = \sigma_1$ , so erhält man aus Gl. (71)

$$dH_2^0 = \pi f e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \frac{1}{\cos \zeta_1 \cos \sigma_1} \frac{1}{t} \left\{ i_1 i_1' \left[ c \frac{h_o}{h'} - \frac{1}{t} \right] + i_1 i_2' c \left[ 1 - \frac{h_o}{h'} \right] \right\}. \quad (77)$$

Wird aber in Gl. (69)  $\omega = 90^\circ$ , so erhält man

$$\begin{aligned} dH_2^0 = & \pi f e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \frac{1}{\cos \zeta_1 \cos \omega_1} \frac{1}{s} \left\{ i_1 i_1' \left[ \frac{1}{u} e^{-c \frac{h_o}{h'} t} + \frac{1}{t} \left( 1 - e^{-c \frac{h_o}{h'} t} \right) \right] \right. \\ & + i_1 i_2' \frac{1}{u} \left[ e^{-c \left( s + \frac{h_o}{h'} u \right)} - e^{-c \frac{h_o}{h'} t} \right] \\ & \left. + i_2 i_2' \left[ \frac{1}{u} \left( e^{-ct} - e^{-c \left( s + \frac{h_o}{h'} u \right)} \right) + \frac{1}{t} \left( e^{-c \frac{h_o}{h'} t} - e^{-ct} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (78)$$

Wird dabei außerdem  $\zeta_1 = \sigma_1$ , so erhält man aus Gl. (73)

$$dH_2^0 = \pi f e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \frac{1}{\cos \sigma_1 \cos \omega_1} \frac{1}{s} \left\{ i_1 i_1' \left[ c \frac{h_0}{h'} - \frac{1}{s} \right] + i_1 i_2' \frac{1}{s} + i_2 i_2' \left[ c \left( 1 - \frac{h_0}{h'} \right) - \frac{1}{s} \right] \right\}. \quad (79)$$

Setzt man endlich  $\zeta = \omega = 90^\circ$ , so erhält man aus Gl. (75)

$$dH_2^0 = \pi f e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \frac{1}{\cos^2 \omega_1} \frac{1}{s^2} i_1 i_1'. \quad (80)$$

**145. Darstellung von  $dH_2$  durch Reihen.** Die Unbestimmtheiten kann man durch Reihenentwicklungen vermeiden, und die Unsicherheiten in der Nähe der Unbestimmtheit werden dadurch gleichfalls vermieden. Ich habe daher auch diesen Weg versucht, ihn aber wieder verlassen, weil er nicht so gut fördert, wie der andere, und weil die Unsicherheiten vermieden werden durch eine zweckmäßige Klammerbildung mit Heraussetzungen der  $i$ , was auch der Integration wegen geboten ist, und durch passende Wahl der Zenitdistanzen. Doch will ich wenigstens die Ergebnisse der Reihenentwicklung anführen.

Beachtet man, daß

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3 \dots n}x^n + \dots = 1 + \sum_1^\infty \frac{1}{n!} x^n,$$

und setzt

$$\begin{aligned} -c \left( \frac{1}{\cos \omega_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right) &= s' (= -cs), \\ -c \left( \frac{1}{\cos \zeta_1} - \frac{1}{\cos \sigma_1} \right) &= t' (= -ct), \\ -c \left( \frac{1}{\cos \zeta_1} - \frac{1}{\cos \omega_1} \right) &= u' (= -cu), \\ \frac{h_0}{h'} &= \eta, \end{aligned}$$

beachtet ferner, daß  $t = s + u$  ist und daher ausgeschaltet werden kann, was geschehen soll, so erhält man aus Gl. (69)

$$\begin{aligned}
dH_2^0 = & \pi f e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \frac{c^2}{\cos \zeta_1 \cos \omega_1} \left\{ i_1 i_1' \sum_2^{\infty} \frac{\eta^n}{n!} \left[ (n-1) s'^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} s'^{n-3} u' \right. \right. \\
& + \left. \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} s'^{n-4} u'^2 + \dots + u'^{n-2} \right] \\
& + i_1 i_2' \sum_2^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ n(\eta - \eta^n) s'^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (\eta^2 - \eta^n) s'^{n-3} u' \right. \\
& + \left. \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\eta^3 - \eta^n) s'^{n-4} u'^2 + \dots + n(\eta^{n-1} - \eta^n) u'^{n-2} \right] \\
& + i_2 i_2' \sum_2^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ ((n-1) - n\eta + \eta^n) s'^{n-2} + \frac{n-1}{2} ((n-2) - n\eta^2 + 2\eta^n) s'^{n-3} u' \right. \\
& + \left. \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} ((n-3) - n\eta^3 + 3\eta^n) s'^{n-4} u'^2 + \dots \right. \\
& \left. + \frac{n-1}{2} (2 - n\eta^{n-2} + (n-2)\eta^n) s' u'^{n-3} + (1 - n\eta^{n-1} + (n-1)\eta^n) u'^{n-2} \right] \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Ebenso erhält man aus Gl. (70)

$$\begin{aligned}
dH_2^u = & \pi f e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}} \frac{c^2}{\cos \zeta_1 (-\cos \omega_1)} \left\{ i_1 i_1' \sum_2^{\infty} \frac{\eta^n}{n!} \left[ (n-1) u'^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} u'^{n-3} s' \right. \right. \\
& + \left. \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} u'^{n-4} s'^2 + \dots + s'^{n-2} \right] \\
& + i_2 i_1' \sum_2^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ n(\eta - \eta^n) u'^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (\eta^2 - \eta^n) u'^{n-3} s' \right. \\
& + \left. \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\eta^3 - \eta^n) u'^{n-4} s'^2 + \dots + n(\eta^{n-1} - \eta^n) s'^{n-2} \right] \\
& + i_2 i_2' \sum_2^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ ((n-1) - n\eta + \eta^n) u'^{n-2} + \frac{n-1}{2} ((n-2) - n\eta^2 + 2\eta^n) u'^{n-3} s' \right. \\
& + \left. \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} ((n-3) - n\eta^3 + 3\eta^n) u'^{n-4} s'^2 + \dots \right. \\
& \left. + \frac{n-1}{2} (2 - n\eta^{n-2} + (n-2)\eta^n) u' s'^{n-3} + (1 - n\eta^{n-1} + (n-1)\eta^n) s'^{n-2} \right] \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Man sieht, daß man den Ausdruck für  $H_2^u$  aus demjenigen für  $H_2^0$  erhält, wenn man  $s$  und  $u$  gegenseitig vertauscht,  $i_1 i_2'$  durch  $i_2 i_1'$  und vor der geschweiften Klammer  $\cos \omega_1$  durch  $(-\cos \omega_1)$  ersetzt. Für die Genauigkeit der Ausführungen würde es ausreichen bis zu  $n = 2$  und  $3$ , höchstens noch bis zu  $n = 4$  zu gehen.

**146. Bestimmung der Zerstreungskoeffizienten  $i$ .** Durch die Formeln für  $dH_2^0$  und  $dH_2^u$  ist nun die Helligkeit bestimmt, welche einem Punkte des Himmels von der Zenitdistanz  $\zeta$  und dem Azimute  $\alpha$  gegen die durch die Sonne gelegte halbe Vertikalebene von einem Flächenelemente  $f$  des Himmels durch einmalige Lichtzurückwerfung zukommt, wenn  $f$  die Zenitdistanz  $\omega$  und das Azimut  $\alpha'$  gegen dieselbe halbe Vertikalebene besitzt. Dabei finden nun an den beiden Punkten der Ablenkung des Lichtes, bei  $D$  und  $C$ , gewisse Ablenkungen  $\varphi'$  und  $\varphi$  statt, und von diesen hängen die Zerstreungskoeffizienten  $i'$  und  $i$  ab. Bei  $D$  ist die Ablenkung  $\varphi'$  der Bogen der Himmelskugel zwischen dem Sonnenpunkte von der Zenitdistanz  $\sigma$  und dem Orte des Flächenelementes  $f$  von der Zenitdistanz  $\omega$ , wobei das zwischenliegende Azimut  $\alpha'$  ist. Daher ist

$$\cos \varphi' = \cos \sigma \cos \omega + \sin \sigma \sin \omega \cos \alpha'.$$

Die Ablenkung  $\varphi$  bei  $C$  ist der Bogen der Himmelskugel zwischen  $f$  und dem betrachteten Orte des Himmels, dessen Zenitdistanz  $\zeta$  ist; der zwischenliegende Unterschied der Azimute ist aber  $\alpha - \alpha'$ , so daß

$$\cos \varphi = \cos \omega \cos \zeta + \sin \omega \sin \zeta \cos (\alpha' - \alpha).$$

Dabei ergibt sich das Vorzeichen von  $\alpha' - \alpha$  als ohne Einfluß. Die Tabelle 60 liefert dann die zu  $\varphi'$  gehörigen Zerstreungskoeffizienten für Wasser und Eis  $i_1'$  und  $i_2'$ , und die zu  $\varphi$  gehörigen  $i_1$  und  $i_2$ , und diese sind in die Formeln für  $dH_2^0$  und  $dH_2^u$  einzusetzen, so daß diese nach den schon festgesetzten Werten von  $c$ ,  $h'$ ,  $h_o$  (s. S. 101 ff.) berechnet werden können.

**147. Integration des Ausdruckes für die Reflexhelligkeit  $dH_2$  über den ganzen reflektierenden Himmel.** Nun müssen wir die Integration von  $dH_2$  nach  $f$  über den ganzen Himmel vornehmen, für  $dH_2^0$  über die obere Halbkugel, für  $dH_2^u$  über die untere.  $f$  ist aber durch  $\omega$  und  $\alpha'$  festgelegt. Wir müßten für eine wirkliche Integration die  $i$  und  $i'$  als Funktionen von  $\omega$  und  $\alpha'$  einführen und dann nach  $\omega$  und  $\alpha'$  integrieren. Dies ist aber unmöglich, da schon die Abhängigkeit des  $\varphi$  und  $\varphi'$  von  $\omega$  und  $\alpha'$  verwickelt, aber die von  $i$  und  $i'$  von  $\varphi$  und  $\varphi'$  nur durch eine Tabelle (60) gegeben ist. Wir hatten nun bei einer ersten Durchführung die obere halbe Himmelskugel in 30, die untere in zwölf Teile  $f$



geteilt, die wir da kleiner machten, wo sich  $i$  und  $i'$  rascher änderten, hatten für jedes solche  $f$  einen als mittleren geschätzten Wert von  $i$  und  $i'$  gleichförmig gelten lassen, danach die Werte von  $dH_2^0$  und  $dH_2''$  berechnet und diese addiert. Es befriedigte uns dies aber nicht; und da wir auch wegen Verbesserung der Tabelle 60 eine neue Rechnung nötig hatten, so führten wir diese auf dem Wege der mechanischen Quadratur aus, entsprechend wie in anderen Fällen.

Wir sehen demnach  $f$  als das Element der Himmelskugel an, welches einerseits von zwei horizontalen Kreisen begrenzt ist, deren Zenitdistanzen  $\omega$  und  $\omega + d\omega$  sind, und andererseits von zwei vertikalen größten Kreisen von den Azimuten gegen die Sonne  $\alpha'$  und  $\alpha' + d\alpha'$ . Der erste Kreis hat den Halbmesser  $\sin \omega$ , und es ist daher

$$f = \sin \omega d\omega d\alpha'.$$

Führt man diesen Ausdruck in die früher gewonnenen Ausdrücke von  $dH_2^0$  und  $dH_2''$  ein, so ist dann die doppelte Integration durchzuführen, und zwar nach  $\alpha'$  entlang des ganzen Horizontalkreises, also von  $\alpha' = 0$  bis  $\alpha' = 2\pi$ , und nach  $\omega$  bei  $dH_2^0$  von  $\omega = 0$  bis  $\omega = \pi:2$ , und bei  $dH_2''$  von  $\omega = \pi:2$  bis  $\omega = \pi$ . Dabei tritt aber hervor, daß in jenen Gleichungen die reduzierten Zenitdistanzen  $\omega_1$  an die Stelle der  $\omega$  getreten sind. Um Übereinstimmung zu erreichen, ersetzen wir in dem Ausdrücke für  $f$  ebenfalls  $\omega$  durch  $\omega_1$ ; dies bringt in dem Werte von  $\sin \omega$  keinen bemerkbaren Unterschied hervor. Denn der Unterschied zwischen  $\omega$  und  $\omega_1$  ist nur merklich in der Nähe von  $\pi:2$  oder  $90^\circ$ ; bei  $\omega = 90^\circ$  ist  $\omega_1 = 89^\circ 8'$ ;  $\sin 90^\circ = 1$ ,  $\sin 89^\circ 8' = 0,99988$ ; also ist der Unterschied der sinus unmerklich. Ebenso schreiben wir  $d\omega_1$  statt  $d\omega$ , damit die Integration ordnungsmäßig angedeutet ist. In Wahrheit bleiben aber die Elemente  $d\omega$  bestehen; und bei der auszuführenden mechanischen Quadratur nehmen wir wirklich  $\omega = 0$  und  $\omega = \pi:2$  als Abszissen der Grenzpunkte. Wir führen nun die erste Integration mit unveränderlichem  $\omega_1$  nach  $\alpha'$  aus, wobei nur die  $\varphi$ ,  $\varphi'$  und  $i$ ,  $i'$  sich ändern, und dann die zweite nach  $\omega_1$ . Wir erhalten dann aus den Gleichungen (69) und (70) die allgemeinen Formeln:

$$\begin{aligned}
H_2^o &= \pi \frac{e^{-c}}{\cos \zeta_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega_1 \frac{\operatorname{tg} \omega_1}{s} \left\{ \left[ \frac{1}{u} \left( e^{-c \frac{h_o}{h'} t} - e^{-c \frac{h_o}{h'} s} \right) + \frac{1}{t} \left( 1 - e^{-c \frac{h_o}{h'} t} \right) \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1 i_1' \right. \\
&+ \frac{1}{u} \left[ e^{-cs} e^{-c \frac{h_o}{h'} u} - e^{-c \frac{h_o}{h'} t} - e^{-cs} + e^{-c \frac{h_o}{h'} s} \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1 i_2' \\
&\left. + \left[ \frac{1}{u} \left( e^{-ct} - e^{-cs} e^{-c \frac{h_o}{h'} u} \right) + \frac{1}{t} \left( e^{-c \frac{h_o}{h'} t} - e^{-ct} \right) \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_2 i_2' \right\}. \quad (81)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_2^u &= \pi \frac{e^{-c}}{\cos \zeta_1} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\omega_1 \frac{\operatorname{tg} \omega_1}{s} \left\{ \left[ \frac{1}{u} \left( e^{-c \frac{h_o}{h'} u} - 1 \right) + \frac{1}{t} \left( 1 - e^{-c \frac{h_o}{h'} t} \right) \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1 i_1' \right. \\
&+ \frac{1}{u} \left[ -e^{-cu} e^{-c \frac{h_o}{h'} s} + e^{-c \frac{h_o}{h'} t} + e^{-cu} - e^{-c \frac{h_o}{h'} u} \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1' i_2 \\
&\left. + \left[ \frac{1}{u} \left( -e^{-c \frac{h_o}{h'} t} + e^{-cu} e^{-c \frac{h_o}{h'} s} \right) + \frac{1}{t} \left( e^{-c \frac{h_o}{h'} t} - e^{-ct} \right) \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_2 i_2' \right\}. \quad (82)
\end{aligned}$$

Für  $\omega_1 = \sigma_1$  erhalten wir aus Gl. (71) den folgenden Ausdruck, wobei zu bemerken, daß hier nur die Integration nach  $\alpha'$ , nicht aber die nach  $\omega_1$  ausgeführt wird, weil  $\omega_1$  gleich dem unveränderlichen  $\sigma_1$  gesetzt wurde.

$$\begin{aligned}
dH_2^o &= \pi \frac{e^{-c}}{\cos \zeta_1} d\omega_1 \frac{\operatorname{tg} \omega_1}{t} \left\{ \left[ \frac{1}{t} \left( e^{-c \frac{h_o}{h'} t} - 1 \right) + c \frac{h_o}{h'} \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1 i_1' \right. \\
&+ \left[ c \left( 1 - \frac{h_o}{h'} \right) \left( 1 - e^{-c \frac{h_o}{h'} t} \right) \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1 i_2' \\
&\left. + \left[ \frac{1}{t} \left( e^{-ct} - e^{-c \frac{h_o}{h'} t} \right) + c \left( 1 - \frac{h_o}{h'} \right) e^{-c \frac{h_o}{h'} t} \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_2 i_2' \right\}. \quad (83)
\end{aligned}$$

Für  $\zeta_1 = \omega_1 = \sigma_1$  erhalten wir aus Gl. (72)

$$\begin{aligned}
dH_2^o &= \pi \frac{e^{-c}}{\cos \zeta_1} d\omega_1 \operatorname{tg} \omega_1 \frac{c^2}{2} \left\{ \left( \frac{h_o}{h'} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1 i_1' + 2 \frac{h_o}{h'} \left( 1 - \frac{h_o}{h'} \right) \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1 i_2' \right. \\
&\left. + \left( 1 - \frac{h_o}{h'} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_2 i_2' \right\}. \quad (84)
\end{aligned}$$

Für  $\zeta_1 = \sigma_1$  erhalten wir aus Gl. (73) und (74)

$$\begin{aligned}
 H_2^o &= \pi \frac{e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}}}{\cos \zeta_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega_1 \frac{\operatorname{tg} \omega_1}{s} \left\{ \left[ \frac{1}{s} \left( e^{-c \frac{h_o}{h'} s} - 1 \right) + c \frac{h_o}{h'} \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1 i_1' \right. \\
 &+ \frac{1}{s} \left[ -e^{-cs} e^{-c \frac{h_o}{h'} u} + 1 + e^{-cs} - e^{-c \frac{h_o}{h'} s} \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1 i_2' \\
 &\left. + \left[ \frac{1}{s} \left( e^{-cs} e^{-c \frac{h_o}{h'} u} - 1 \right) + c \left( 1 - \frac{h_o}{h'} \right) \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_2 i_2' \right\}. \quad (85)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_2^u &= \pi \frac{e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}}}{\cos \zeta_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega_1 \frac{\operatorname{tg} \omega_1}{s} \left\{ \left[ \frac{1}{u} \left( e^{-c \frac{h_o}{h'} u} - 1 \right) + c \frac{h_o}{h'} \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1 i_1' \right. \\
 &+ \frac{1}{u} \left[ -e^{-cu} e^{-c \frac{h_o}{h'} s} + 1 + e^{-cu} - e^{-c \frac{h_o}{h'} u} \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1' i_2 \\
 &\left. + \left[ \frac{1}{u} \left( e^{-cu} e^{-c \frac{h_o}{h'} s} - 1 \right) + c \left( 1 - \frac{h_o}{h'} \right) \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_2 i_2' \right\}. \quad (86)
 \end{aligned}$$

Für  $\omega_1 = \zeta_1$  erhalten wir aus Gl. (75)

$$\begin{aligned}
 dH_2^o &= \pi \frac{e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}}}{\cos \zeta_1} d\omega_1 \frac{\operatorname{tg} \omega_1}{s} \left\{ \left[ \frac{1}{s} \left( 1 - e^{-c \frac{h_o}{h'} s} \right) - c \frac{h_o}{h'} e^{-c \frac{h_o}{h'} s} \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1 i_1' \right. \\
 &+ c \frac{h_o}{h'} \left[ e^{-c \frac{h_o}{h'} s} - e^{-cs} \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1 i_2' \\
 &\left. + \left[ \frac{1}{s} \left( e^{-c \frac{h_o}{h'} s} - e^{-cs} \right) - c \left( 1 - \frac{h_o}{h'} \right) e^{-cs} \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_2 i_2' \right\}. \quad (87)
 \end{aligned}$$

Für  $\zeta = 90^\circ$  erhalten wir aus Gl. (76)

$$\begin{aligned}
 H_2^o &= \pi \frac{e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}}}{\cos \zeta_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega_1 \frac{\operatorname{tg} \omega_1}{s} \left\{ \left[ \frac{1}{t} - \frac{1}{u} e^{-c \frac{h_o}{h'} s} \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1 i_1' \right. \\
 &\left. + \frac{1}{u} \left[ e^{-c \frac{h_o}{h'} s} - e^{-cs} \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1 i_2' \right\}. \quad (88)
 \end{aligned}$$

Für  $\zeta = 90^\circ$  und zugleich  $\omega_1 = \sigma_1$  erhalten wir aus Gl. (77)

$$dH_2^0 = \pi \frac{e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}}}{\cos \zeta_1} d\omega_1 \frac{\operatorname{tg} \omega_1}{t} \left\{ \left[ c \frac{h_o}{h'} - \frac{1}{t} \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1 i_1' + c \left[ 1 - \frac{h_o}{h'} \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1 i_2' \right\}. \quad (89)$$

Für  $\omega = 90^\circ$  erhalten wir aus Gl. (78)

$$\begin{aligned} dH_2^0 &= \pi \frac{e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}}}{\cos \zeta_1} d\omega_1 \frac{\operatorname{tg} \omega_1}{s} \left\{ \left[ \frac{1}{u} e^{-c \frac{h_o}{h'} t} + \frac{1}{t} \left( 1 - e^{-c \frac{h_o}{h'} t} \right) \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1 i_1' \right. \\ &+ \frac{1}{u} \left[ e^{-c \left( s + \frac{h_o}{h'} u \right)} - e^{-c \frac{h_o}{h'} t} \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1 i_2' \\ &\left. + \left[ \frac{1}{u} \left( e^{-ct} - e^{-c \left( s + \frac{h_o}{h'} u \right)} \right) + \frac{1}{t} \left( e^{-c \frac{h_o}{h'} t} - e^{-ct} \right) \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_2 i_2' \right\}. \quad (90) \end{aligned}$$

Für  $\omega = 90^\circ$  und außerdem  $\zeta_1 = \sigma_1$  erhalten wir aus Gl. (79)

$$\begin{aligned} dH_2^0 &= \pi \frac{e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}}}{\cos \zeta_1} d\omega_1 \frac{\operatorname{tg} \omega_1}{s} \left\{ \left[ c \frac{h_o}{h'} - \frac{1}{s} \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1 i_1' + \frac{1}{s} \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1 i_2' \right. \\ &\left. + \left[ c \left( 1 - \frac{h_o}{h'} \right) - \frac{1}{s} \right] \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_2 i_2' \right\}. \quad (91) \end{aligned}$$

Endlich für  $\zeta = \omega = 90^\circ$  erhalten wir aus Gl. (80)

$$dH_2^0 = \pi \frac{e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}}}{\cos \zeta_1} d\omega_1 \frac{\operatorname{tg} \omega_1}{s^2} \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1 i_1'. \quad (92)$$

Alle diese Integrationen werden durch mechanische Quadratur ausgeführt werden müssen.

**148. Die unendlich vielfache Zurückwerfung.** Die Helligkeit  $H_2$  ist nun durch einmalige Zurückwerfung des Sonnenlichtes hervorgebracht. Das Licht wird aber ein zweites, ein drittes Mal und so unendlich oft zurückgeworfen und vermehrt so immer wieder die Helligkeit bis zu ( $H_2$ ). Wir werden diese später bei der zahlenmäßigen Rechnung auf einfachere

Weise, wie wir  $H_2$  selbst ermittelten, aber doch, wie wir glauben, mit einem hinreichenden Grade von Genauigkeit bestimmen, und finden, daß für jeden Punkt des Himmels ( $H_2$ ) in einem unveränderlichen Verhältnis zu  $H_2$  steht ( $(H_2) = 1,414 H_2$ ).

### 3. Die durch Beleuchtung der Atmosphäre durch den Boden hervorgebrachte Himmelhelligkeit $H_3$ .

Wir haben nun zuletzt die ganze Helligkeit des Himmels zu bestimmen, welche durch die Rückstrahlung des Bodens hervorgebracht wird. Dieselbe ist in gewöhnlichen Verhältnissen unerheblich, wenn nämlich der Boden aus Ackererde, dunklen Steinen oder Pflanzen gebildet ist. Auch das Meer wird keine große Wirkung hervorbringen. Denn nach den Beobachtungen von Bouguer<sup>1)</sup> wirft eine ebene Wasserfläche bei den Einfallswinkeln (Zenitdistanzen der Sonne) von 0, 40, 70, 80,  $89\frac{1}{2}^\circ$  von dem einfallenden Licht der Reihe nach 0,018; 0,022; 0,145; 0,333; 0,721 spiegelnd zurück (Zahlen, die man auch aus den Fresnelschen Formeln erhalten könnte). Also würde nur bei sehr tiefem Sonnenstande eine stärkere Wirkung eintreten. Bei bewegter See werden die gespiegelten Sonnenstrahlen nach allen Richtungen zerstreut, bilden aber doch nur einen geringen Teil des auf das Meer auffallenden Lichtes. Größer aber ist die Wirkung von Schnee und Eis; denn es erkannten Südpolfahrer die Richtung nach dem Eise hin, das noch nicht sichtbar war, an der größeren Helligkeit des Himmels. Also auch diese Wirkung trat nur bei großem Einfallswinkel ein.

**149. Die Helligkeit des Bodens, herrührend von unmittelbarer Sonnenbestrahlung.** Das Licht nun, das der Boden empfängt und dann zurückstrahlt, rührt teils unmittelbar von der Sonne, teils mittelbar von dem atmosphärischen Luftdunste her. Das Sonnenlicht, das bei dem Eintritt in die Atmosphäre die Stärke  $L$  besitzt, gelangt nach dem Durchschreiten derselben nur noch mit der Stärke  $l_0$  auf den Boden, deren von

<sup>1)</sup> Bouguer, traité d'optique, 1760, S. 136.

der Zenitdistanz  $\sigma$  der Sonne abhängige GröÙe vermittelt  $l_0:L$  aus der Tabelle 63 entnommen werden kann. Auf 1 qm des Bodens fällt davon die Lichtmenge

$$l' = l_0 \cos \sigma = \vartheta' L, \quad \vartheta' = \frac{l_0}{L} \cos \sigma.$$

**150. Angenäherte Bestimmung der durch die Atmosphäre hervorgebrachten Helligkeit des Bodens.** Die nicht auf den Boden gelangende Lichtmenge  $L - l_0$  wird von dem Dunst der Atmosphäre zerstreut, und zwar ein Teil  $\mu(L - l_0)$  gegen den Boden hin, der Rest gegen den Weltraum. Die Verhältniszahl  $\mu$  wollen wir nun ermitteln.

Fig. 81.

Von der Lichtmenge eines Sonnenstrahles mit dem Einfallswinkel  $\sigma$  gegen die Horizontalebene werde durch ein Dunsteilchen  $C$  die Lichtmenge  $l$

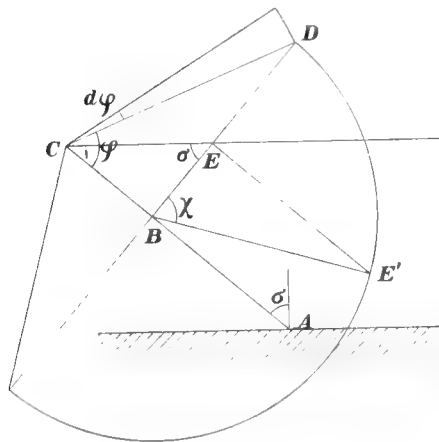


Fig. 81.

zerstreut. Von dem Teil dieses zerstreuten Lichtes, welches die Ablenkung  $\varphi$  erhält, fällt auf 1 qm von 1 m senkrechtem Abstände die Lichtmenge  $li$  (Tab. 60) und auf den Ring einer Kugel, die man aus  $C$  als Mittelpunkt mit dem Halbmesser von 1 m beschreibt, wenn der Ring die Weite  $\varphi$  und die Breite  $d\varphi$  hat, die Menge  $li 2\pi \sin \varphi d\varphi$ . Legt man durch  $C$  die Horizontalebene  $CE$ , so wird der Teil  $ED$  des Ringes abgeschnitten, dessen Licht gegen den Weltraum zerstreut wird. In

der Umlegung  $DE'$  des Kreises  $DEB$  erhält man in  $DE'$  ( $EE' \perp BE$ ) den halben Bogen  $DE'$  jenes Ringstückes, der durch den Winkel  $DBE' = \chi$  gemessen wird, und es ergibt sich dann die Menge des gegen den Weltraum zerstreuten Lichtes gleich

$$li 2\chi \sin \varphi d\varphi.$$

$\chi$  wird aber bestimmt durch

$$\cos \chi = \frac{\cot \sigma}{\operatorname{tg} \varphi},$$

weil  $BD = BE' = CB \operatorname{tg} \varphi$ ,  $BE = CB \cot \sigma$ , daher  $\cos \chi = BE : BE' = \cot \sigma : \operatorname{tg} \varphi$ .

Das durch die Atmosphäre dringende Licht wird in der oberen, der Eisdunstschicht, deren Höhe  $h' - h_o = 0,152 h'$  beträgt, unter Geltung des Zerstreuungskoeffizienten  $i_2$ , in der unteren, der Wasserdunstschicht, deren Höhe  $h_o = 0,848 h'$  beträgt, unter dem Zerstreuungskoeffizienten  $i_1$  zerstreut. Die Lichtmengen, welche in der Eis- und in der Wasserdunstschicht zerstreut werden, verhalten sich im allgemeinen angenähert wie deren Höhen, also wie  $0,152 : 0,848$ . Aber bei großen Zenitdistanzen  $\sigma$  der Sonne ist die Abweichung doch bemerklich. Nach Gl. 66 (S. 95) ist nämlich, wenn man darin  $b' - z = (h' - x) : \cos \sigma_1$  setzt (s. S. 94), die Stärke des Lichtes, nachdem es in der zu gleichförmiger Dichte zusammengedrückt gedachten Atmosphäre von der Eintrittshöhe  $h'$  zur Höhe  $x$  heruntergegangen ist,

$$l = L e^{-c \frac{h' - x}{h'} \frac{1}{\cos \sigma_1}},$$

und die Menge des bis dahin zerstreuten Lichtes  $L - l$ . Daher ist das Verhältnis  $\eta$  des durch die Eisdunstschicht ( $x = h_o$ ) zerstreuten Lichtes zu dem durch die ganze Atmosphäre zerstreuten,

$$\eta = \frac{1 - e^{-c \frac{h' - h_o}{h'} \frac{1}{\cos \sigma_1}}}{1 - e^{-c \frac{1}{\cos \sigma_1}}}.$$

Danach findet man, wenn man die reduzierten Zenitdistanzen  $\sigma_1$  aus Tab. 63 entnimmt, für

$\sigma =$	$0^\circ$	30	60	70	80	87	90
$\eta =$	0,1656	0,1688	0,1796	0,1930	0,238	0,448	0,8732,

während das Höhenverhältnis unveränderlich  $(h' - h_o) : h' = 0,152$  ist.

Die Kurve  $\sigma, \eta$  ist in Fig. 82 dargestellt. Sie nähert sich der Gestalt Fig. 82. einer gleichseitigen Hyperbel, und man könnte sie, wenn man  $\sigma$  in Graden ausdrückt, durch die Gleichung

$$\eta = 0,1568 + \frac{0,80}{91,12 - \sigma}$$

darstellen, deren Unveränderliche vorwiegend aus der Zeichnung entnommen sind. Die obige kleine Tabelle wird aber jede Rechnung überflüssig machen.

Nun ergibt sich die Menge des durch die ganze Eisdunstschicht innerhalb irgend eines Ringes  $\varphi$ ,  $d\varphi$  gegen den Weltraum zerstreuten

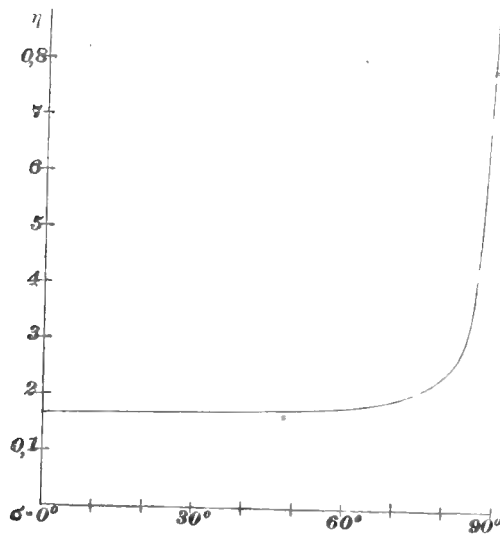


Fig. 82.

Lichtes, aus der Formel S. 126, worin man  $i$  durch  $i_2$  und  $l$  durch  $(L-l_0)\eta$  ersetzen muß, weil die von der Eisdunstschicht im ganzen zerstreute Lichtmenge gleich  $(L-l_0)\eta$  ist. Die innerhalb des Ringes  $\varphi$ ,  $d\varphi$  zerstreute Menge ist also

$$(L-l_0)\eta i_2 2\chi \sin \varphi d\varphi,$$

und die Menge des für alle  $\varphi$ , also im ganzen von der Eisdunstschicht gegen den Weltraum zerstreuten Lichtes

$$\int_0^\pi (L-l_0)\eta i_2 2\chi \sin \varphi d\varphi,$$

und ebenso die Menge des von der Eisdunstschicht überhaupt, gegen Weltraum und Boden zerstreuten Lichtes, wofür  $\chi = \pi$ ,

$$\int_0^\pi (L-l_0)\eta i_2 2\pi \sin \varphi d\varphi.$$

Ebenso erhält man die durch die ganze Wasserdunstschicht gegen den Weltraum zerstreute Lichtmenge

$$\int_0^\pi (L-l_0)(1-\eta) i_1 2\chi \sin \varphi d\varphi,$$

und die überhaupt durch sie zerstreute Lichtmenge

$$\int_0^\pi (L-l_0)(1-\eta) i_1 2\pi \sin \varphi d\varphi.$$

Da  $i$  nur tabellarisch und nicht als Funktion von  $\varphi$  gegeben ist, muß hier mechanische Quadratur angewendet werden. Man erhält dann statt der Integrale Summen, worin man  $d\varphi$  durch ein endliches  $\Delta\varphi$  ersetzt. Nehmen wir  $\Delta\varphi = \pi : 180$ , gleich dem zu einem Grad gehörigen Bogen, so wird das erste Integral ersetzt durch

$$(L-l_0) 2\pi \sum \eta i_2 \frac{\chi}{\pi} \sin \varphi \Delta\varphi = (L-l_0) \frac{\pi^2}{90} \sum \eta i_2 \frac{\chi}{\pi} \sin \varphi.$$



Da aber nur die Verhältnisse in Betracht kommen, so kann man den übereinstimmenden Faktor  $(L - l_0) \pi^2 : 90$  weglassen; wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_0^{\pi} y_1, \quad \Sigma_2 = \sum_0^{\pi} y_2, \quad \Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 = \sum_0^{\pi} y, \\ \Sigma'_1 &= \sum_0^{\pi} y'_1, \quad \Sigma'_2 = \sum_0^{\pi} y'_2, \quad \Sigma' = \Sigma'_1 + \Sigma'_2 = \sum_0^{\pi} y', \end{aligned}$$

worin

$$\begin{aligned} y_1 &= (1 - \eta) i_1 \sin \varphi, \quad y_2 = \eta i_2 \sin \varphi, \quad y = y_1 + y_2, \\ y'_1 &= \frac{\chi}{\pi} y_1, \quad y'_2 = \frac{\chi}{\pi} y_2, \quad y' = y'_1 + y'_2. \end{aligned}$$

Daraus erhält man das Verhältnis  $\mu$  derjenigen Lichtmenge, welche von den Sonnenstrahlen durch die Atmosphäre gegen den Boden zerstreut wird, zu derjenigen, welche überhaupt zerstreut wird,

$$\mu = 1 - \frac{\Sigma'}{\Sigma}.$$

Diese Rechnung haben wir ausgeführt für  $\sigma = 0, 30, 60, 80^\circ$ ; für  $\sigma = 90^\circ$  ist  $\mu = 1/2$ . Bei jedem  $\sigma$  haben wir für  $\varphi$  Zwischenräume meist von  $20^\circ$  angenommen. Im folgenden kleinen Tabelchen geben wir eine Übersicht über diese Rechnung.

$\sigma = 60^\circ, \quad \eta = 0,1796$  (s. S. 127).

$\varphi$	$0^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$	$40^\circ$	$100^\circ$	$140^\circ$	$180^\circ$
$\sin \varphi$	0,00	087	174	643	985	643	0
$i_1$	4,442 <sup>1)</sup>	3,008	0,760	094	036	060	077
$i_2$	4,223	2,789	0,582	100	041	058	071
$y_1$	0,0	215	108	049	029	032	0
$y_2$	0,0	044	018	011	007	007	0
$y$	0,0	259	126	060	036	039	0
$\frac{\chi}{\pi}$				0,260	534	740	1,0
$y'_1$				0,013	015	024	0
$y'_2$				0,003	004	005	0
$y'$				0,016	019	029	0

<sup>1)</sup> Die hier benutzten Werte der  $i_1$  und  $i_2$  stammen aus einem früheren Entwicklungszustand des Werkes. Gleichwohl wurden die Ergebnisse der vorliegenden Rechnung unverändert

Die mechanische Quadratur oder die Bildung der  $\Sigma$  ist nun durch Zeichnung und mit dem Amslerschen Planimeter ausgeführt. Die Kurven  $y, \sigma$  und  $y', \sigma$  wurden in größerem Maßstabe, als sie in Fig. 83 wiedergegeben sind, gezeichnet. Die Kurven der vollen Zerstreuung  $y, \sigma$  stimmen sehr nahe überein. Die Summe erhielt ich bei allen sehr nahe übereinstimmend

$$\Sigma = 8,99,$$

während diese vollständig übereinstimmen sollte. Denn die gesamte zerstreute Lichtmenge ist stets  $(L - l_0)$ , also muß nach den Formeln von vorhin

$$(L - l_0) = (L - l_0) \frac{\pi^2}{90} (\Sigma_1 + \Sigma_2),$$

oder

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = \Sigma = \frac{90}{\pi^2} = 9,12 \text{ sein,}$$

was als sehr gute Übereinstimmung bezeichnet werden kann. Die Kurven  $y', \sigma$  beginnen bei  $\varphi = 90^\circ - \sigma$ , weil erst von da an Licht gegen den Himmel zerstreut wird, und schließen

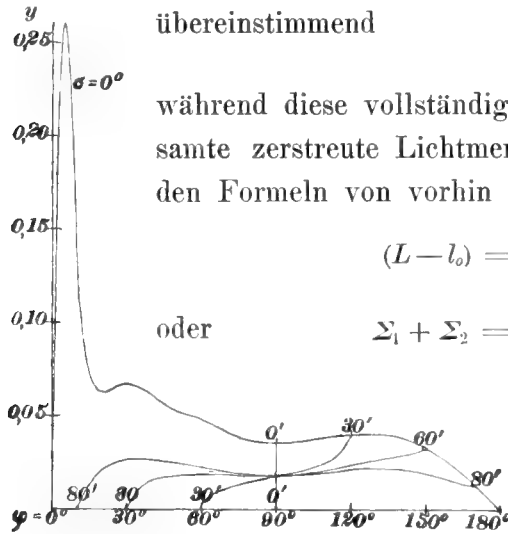


Fig. 83.

sich bei  $\varphi = 90^\circ + \sigma$  an die Kurve  $y, \sigma$  an, weil von da an  $\chi : \pi = 1$  ist, oder alles Licht gegen den Himmel zerstreut wird. In der Figur sind die Kurven  $y', \sigma$  für  $0^\circ, 30^\circ \dots$  mit  $0', 30' \dots$  bezeichnet. Die Kurve  $90'$  ist nicht gezeichnet; sie würde von  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = 180^\circ$  gehen, und überall wegen  $\chi = \frac{\pi}{2}$  die Ordinaten  $y' = \frac{1}{2}y$  erhalten. Es ergab sich nun für

$\sigma =$	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$80^\circ$	$90^\circ$
$\Sigma'$	2,81	2,84	3,02	3,44	4,50
$\mu$	0,687	0,684	0,664	0,617	0,500
$(\mu)^1$	0,734	0,731	0,678	0,522	0,500

beibehalten für den vom Verfasser selbst durchgeführten Fall des Sonnenstandes  $\sigma = 54^\circ 44'$ , da die genauere Rechnung für die berechnete Gesamthelligkeit des Himmels nur Abweichungen ergaben, welche höchstens  $1\frac{1}{4}\%$  betragen. Die später folgenden Tabellen für  $\mu, \vartheta$  und  $H_3$  wurden jedoch durch die jeweils richtigen Werte ergänzt. [Die Herausg.]

<sup>1)</sup>  $(\mu)$  gibt die auf Grund der endgültigen Werte von  $i_1$  und  $i_2$  berechneten Werte von  $\mu$ . Vgl. Anmerkung S. 129.

Dabei ist z. B. für  $\sigma = 30^\circ$ ,  $\mu = 1 - 2,84 : 8,99$ . Ich habe der inneren Übereinstimmung halber das  $\Sigma = 8,99$  beibehalten. Durch Einschaltung mit Hilfe der gezeichneten Kurve erhält man folgende Tabelle:

Fig. 84.

$\sigma =$	$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$80^\circ$	$85^\circ$	$88^\circ$	$90^\circ$
$\mu =$	0,687	687	686	684	680	674	664	648	617	578	536	500
$(\mu) =$	0,734	734	733	731	727	714	678	578	522	507	502	500.

Die Kurve hat nahezu die Gestalt eines Hyperbelastes; eine angenäherte Gleichung hätte aber eine ziemlich verwickelte, wenig übersichtliche Gestalt. Man sieht, daß bei einer Zenitdistanz der Sonne von  $\sigma = 0$  bis  $70^\circ$  die von der Atmosphäre gegen den Erdboden zerstreute Lichtmenge  $\mu(L-l_0)$  abnehmend gegen  $\frac{2}{3}$  der ganzen zerstreuten Lichtmenge ist, daß sie dann bei weiter zunehmendem  $\sigma$  rasch abnimmt, und bei auf- oder untergehender Sonne ( $\sigma = 90^\circ$ ) gerade  $\frac{1}{2}$  derselben beträgt.<sup>1)</sup>

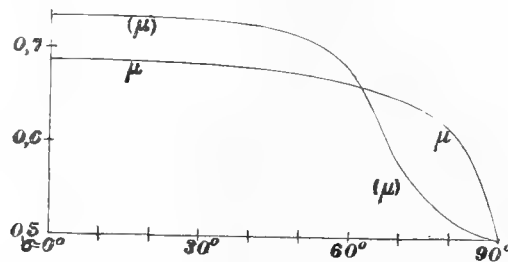


Fig. 84.

Diese von der Atmosphäre gegen den Boden zerstreute Lichtmenge fällt unter Winkeln von  $0$  bis  $90^\circ$  auf den Boden, nachdem sie eine Höhe von  $0$  bis  $h'$  der gleich dicht gedachten Dunstschicht durchlaufen und dabei eine Schwächung erfahren hat. Bei der Bestimmung dieser Abschwächung genügen aber Abschätzungen. Das durch den Dunst zerstreute Licht ist am dichtesten, wo  $i$  am größten ist, also bei der Ablenkung  $\varphi = 0$ . Am meisten Licht wird bei der Ablenkung  $\varphi$  zerstreut, für welche  $i \sin \varphi$  am größten, und dies ist nach der kleinen Tabelle der S. 129 und nach Fig. 83

<sup>1)</sup> Die mit den endgültigen Werten berechnete Kurve  $(\mu)$  hat eine von der Kurve  $\mu$  abweichende Form, die aber gerade an den abweichenden Stellen durch eine ausreichende Zahl von Punkten sichergestellt wurde. [Die Herausg.]

etwa bei  $\varphi = 6^\circ$  der Fall. Bei der Zenitdistanz der Sonne  $\sigma = 0$  ist die mittlere Ablenkung der gegen den Boden zerstreuten Lichtstrahlen etwa bei  $\varphi = 30^\circ$  und dies ist dann auch (wegen  $\sigma = 0$ ) ihr mittlerer Einfallswinkel gegen den Boden, der mit  $\sigma'$  bezeichnet sei. Denn in Fig. 83 hat die Fläche der Kurve  $y, \varphi$  für  $\sigma = 0$ , genommen zwischen  $\varphi = 0$  und  $\varphi = 90^\circ$ , ihren Schwerpunkt etwa bei  $\varphi = 30^\circ$ , wie man beim Ausschneiden und Balanzieren findet. Andererseits ist für  $\sigma = 90^\circ$  die Menge der gegen den Boden zerstreuten Lichtstrahlen durch die Fläche der Kurve  $\sigma = 0$  zwischen  $\varphi = 0$  und  $\varphi = 180^\circ$  dargestellt, wenn man die Ordinaten halbiert. Und ihren Schwerpunkt findet man etwa bei  $\varphi = 65^\circ$ . Der Lichtkegel von dieser mittleren Ablenkung  $\varphi = 65^\circ$  bei  $\sigma = 90^\circ$  hat aber Einfallswinkel auf den Boden zwischen  $65$  und  $90^\circ$ , im Mittel etwa  $75^\circ$ , so daß man  $\sigma' = 75^\circ$  etwa als den mittleren Einfallswinkel der zerstreuten Lichtstrahlen bei  $\sigma = 90^\circ$  ansehen dürfte. Von  $\sigma = 0$  bis  $\sigma = 90^\circ$  wächst also  $\sigma'$  von  $30$  bis  $75^\circ$ , so daß man bei gleichförmiger Zunahme annehmen kann

$$\sigma' = 30^\circ + \frac{1}{2}\sigma.$$

Die im Bereiche der ganzen Atmosphäre gegen den Boden zerstreute Lichtmenge  $\mu(L - l_0)$ , die wir vorübergehend mit  $\lambda$  bezeichnen wollen, wird bei dem Durchlaufen der Atmosphäre geschwächt zu  $\lambda'$ . Die von den Lichtstrahlen durchlaufenen Höhen liegen zwischen  $0$  und  $h'$ , und wir werden uns der Wahrheit genügend annähern, wenn wir als Mittel  $\frac{1}{2}h'$ , oder die halbe Höhe der gleichförmig dicht angenommenen Dunstschicht als durchschritten annehmen. Nach Gl. (66), S. 95 ist dann der Logarithmus des Abschwächungsverhältnisses halb so groß, als bei dem Durchlaufen von ganz  $h'$ , oder

$$\log \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{2} \log \frac{l_0}{L}, \quad \frac{\lambda'}{\lambda} = \sqrt{\frac{l_0}{L}}.$$

Nach Tab. 63 ist aber, für den Einfallswinkel  $\sigma'$  (dort  $\zeta$ )  $= 30^\circ$ ,  $l_0 : L = 0,7865$ , für  $\sigma' = 75^\circ$ ,  $l_0 : L = 0,4487$ ; und daher bei den zugehörigen Zenitdistanzen der Sonne  $\sigma = 0$ ,  $\lambda' : \lambda = \sqrt{0,7865} = 0,887$ , und für  $\sigma = 90^\circ$ ,  $\lambda' : \lambda = \sqrt{0,4487} = 0,670$ . Ein gleichförmiger Übergang wird hergestellt durch

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = 0,887 - 0,217 \frac{\sigma}{90},$$

worin  $\sigma$  in Graden auszudrücken ist. Die gegen den Boden zerstreute Lichtmenge  $\lambda = \mu (L - l_0)$  muß mit  $\lambda' : \lambda$  vervielfacht werden, um die auf dem Boden anlangende zu erhalten und mit  $\cos \sigma'$  ( $\sigma' =$  mittlerer Einfallswinkel), um die auf 1 qm des Bodens eintreffende anzugeben. Dieselbe ist daher

$$(L - l_0) \mu \left( 0,887 - 0,217 \frac{\sigma}{90} \right) \cos (30^\circ + \frac{1}{2} \sigma).$$

Wir werden später finden, daß das durch Dunst zerstreute Sonnenlicht durch abermalige und abermalige Zerstreung angenähert auf seine 1,414fache Menge erhöht wird, in dem Falle, daß die Zenitdistanz der Sonne  $\sigma = 54^\circ 44'$  ist; und indem wir in Ermangelung weiterer Anhaltspunkte diesen Wert für ein mittleres  $\sigma$  allgemein gelten lassen, setzen wir diesen Faktor hinzu. Die Rückwirkung des jedenfalls schwachen Bodenreflexes können wir unbeachtet lassen. Wir erhalten daher die von dem Dunste auf 1 qm des Bodens geworfene Lichtmenge

$$l'' = (L - l_0) 1,414 \mu \left( 0,887 - 0,217 \frac{\sigma}{90} \right) \cos (30 + \frac{1}{2} \sigma) = (L - l_0) v = L \vartheta'',$$

$$\vartheta'' = \left( 1 - \frac{l_0}{L} \right) v.$$

Fügt man das unmittelbare Sonnenlicht (S. 126) zu,

$$l' = l_0 \cos \sigma = \vartheta' L, \quad \vartheta' = \frac{l_0}{L} \cos \sigma,$$

so erhält man die gesamte auf 1 qm des Bodens fallende Lichtmenge

$$L' = l' + l'' = L (\vartheta' + \vartheta'') = L \vartheta.$$

Wir werden diese Größe später genauer ermitteln; zur Ermittlung des Bodenreflexes reicht diese Annäherung aus.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 65 und in Fig. 85 niedergelegt. Man sieht, daß die Bodenbeleuchtung durch unmittelbares Sonnenlicht  $l' = \vartheta' L$  bei  $\sigma = 0$  am größten ( $l' = 0,812 L$ ) ist, anfangs langsam, dann rascher abnimmt, bei  $\sigma = 85^\circ$  fast unmerklich wird und bei  $\sigma = 90^\circ$  verschwindet; daß andererseits die Bodenbeleuchtung durch Luftreflex  $l'' = \vartheta'' L$  von  $\sigma = 0$  an ( $l'' = 0,140 L$ ) mit zunehmendem  $\sigma$  langsam abnimmt, etwa bei  $\sigma = 50^\circ$  am kleinsten wird (0,116), dann wieder steigt bis zu  $\sigma = 85^\circ$

Tab. 65 und  
Fig. 85.

(= 0,152) und dann wieder bis  $\sigma = 90^\circ$  abnimmt (= 0,123). Diese Bodenbeleuchtung durch die Atmosphäre ändert sich also nur wenig mit dem Sonnenstande. Die Gesamtbeleuchtung des Bodens  $L' = \vartheta L$  hat ihren größten Wert bei  $\sigma = 0^\circ$ , wo  $\vartheta = 0,952$  beträgt; sie ist also fast so groß, wie wenn die Atmosphäre gar nicht da wäre, oder die Schwächung des Sonnenlichtes durch die Atmosphäre wird durch die Reflexbeleuchtung durch die Atmosphäre wieder zu  $\frac{3}{4}$  ersetzt. Die Kurve  $\vartheta$  hat angenähert die Gestalt einer Kosinuslinie, deren Scheitel etwa bei

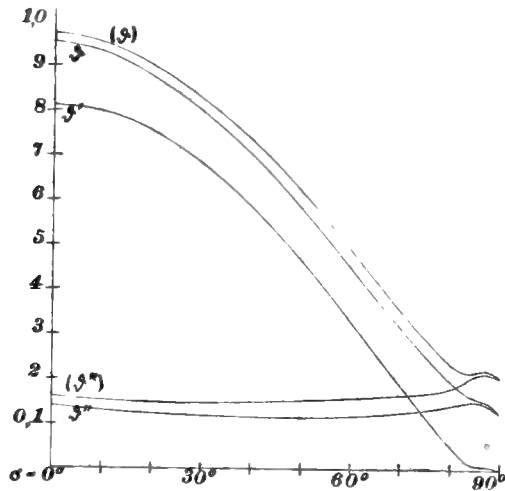


Fig. 85.

Tabelle 65.

Verhältnis  $\vartheta$  der Lichtmenge  $L'$ , welche auf 1 qm des Erdbodens fällt, zu der Stärke  $L$  des Sonnenlichtes an der äußeren Grenze der Atmosphäre.

- $\sigma$  = Zenitdistanz der Sonne,
- $\vartheta'$  = Anteil des direkten Sonnenlichtes,
- $\vartheta''$  = Anteil des Luftreflexes an  $\vartheta'$ .<sup>1)</sup>

Die Werte ( $\vartheta''$ ) und ( $\vartheta$ ) wurden aus den Werten ( $\mu$ ) (S. 130) berechnet.

	$\sigma = 0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$80^\circ$	$85^\circ$	$88^\circ$	$90^\circ$
$\vartheta' = \frac{l_0}{L} \cos \sigma$	0,812	799	753	681	585	466	330	187	053	008	005	000
$\vartheta'' = \left(1 - \frac{l_0}{L}\right) \nu$	0,140	131	124	120	117	116	119	127	144	152	141	123
( $\vartheta''$ )	0,160	153	149	148	150	155	159	165	182	209	213	205
$\vartheta = \vartheta' + \vartheta''$	0,952	930	877	801	702	582	449	314	197	160	146	123
( $\vartheta$ )	0,972	952	902	829	735	621	489	352	235	217	218	205
$\vartheta$ nach d. Annäherungsformel	0,952	930	876	793	692	572	449	324	212	163	136	118

<sup>1)</sup> Die Werte dieser Tabelle wurden so gefunden, daß zunächst nur die einfache Bestrahlung des Bodens durch den Himmel berechnet und die unendlich vielfache Rück-

—2° und deren Wendepunkt etwa bei 57° liegt. Mittelst dieser aus der Zeichnung entnommenen Zahlen und einer probeweisen Verbesserung habe ich die Gleichung einer sich im Mittel ziemlich gut anschließenden Linie aufgestellt, nämlich

$$\vartheta = 0,475 \cos [1,51(\sigma + 2)] + 0,478,$$

worin  $\sigma$  in Graden anzugeben ist. Dieselbe liefert Werte von  $\vartheta$ , welche ebenfalls in der Tabelle 65 eingetragen sind. Der Höcker der wirklichen Kurve zwischen  $\sigma = 80^\circ$  und  $90^\circ$  macht eine wesentlich bessere Übereinstimmung durch eine so einfache Gleichung unmöglich.

### 151. Reflexbeleuchtung des Himmels durch den Boden. Fig. 86.

Um nun den Bodenreflex zu bestimmen, betrachten wir wieder den Dunstkegel  $Af'$ , dessen Raumelement bei  $C$  gleich  $f' dx$  ist. Die Fläche  $f'$  werde vom Boden beleuchtet;  $BC = x$  sei die Normale der Bodenfläche. Wir teilen den Boden zweckmässig in Teile  $DEE'D'$ , welche durch Kreise  $DD'$ ,  $EE'$  mit dem Mittelpunkte  $B$  und durch Strahlen  $DE$ ,  $D'E'$  aus  $B$  abgegrenzt werden. Der Winkel  $BCD$  sei  $\psi$ ,  $\sphericalangle DCE = d\psi$ ,  $\sphericalangle ABD = \alpha$ ,  $\sphericalangle DBD' = d\alpha$ ; dann ist der Halbmesser  $BD = x \operatorname{tg} \psi$ , seine Zunahme  $DE = x \cdot d \operatorname{tg} \psi = x d\psi : \cos^2 \psi$  und die Fläche des Elementes  $DEE'D'$

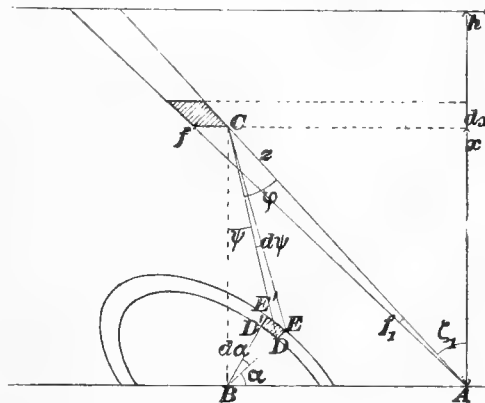


Fig. 86.

$$(a) = x^2 d\alpha \operatorname{tg} \psi d\psi : \cos^2 \psi.$$

Dies Element empfängt von Sonne und Atmosphäre die gesamte Lichtmenge

$$(b) = (a)L' = (a)\vartheta L.$$

Sei  $A$  das Rückstrahlungsvermögen des Bodens, so ist die vom Bodenelement im ganzen zurückgestrahlte Lichtmenge  $= (b) A$ . Mit der

strahlung durch die Multiplikation der einfachen Himmelsbeleuchtung mit dem konstanten Faktor 1,414 berücksichtigt wurde. Dieser Faktor gilt indes nur für  $\sigma = 54^\circ 44'$ . Für  $\sigma = 0^\circ$  wurde er gleich 1,167, für  $\sigma = 90^\circ$  gleich 2,607 gefunden, so dass die richtigen Werte von  $\vartheta$  für  $\sigma = 0^\circ$  gleich 0,944, für  $\sigma = 90^\circ$  gleich 0,378 sich ergaben. [Anm. d. Herausg.]

Zahl  $A$  ist aber die Zerstreung nach jeder Richtung nicht bestimmt; wir werden der Wahrheit am nächsten kommen, wenn wir dem Boden die Eigenschaft der sogenannten ganz matten oder rauhen Flächen zuschreiben, welche von allen Seiten betrachtet, gleich hell erscheinen, welche Annahme auch Lambert gemacht hat. Und wirklich ist auch der Boden beinahe stets rauh, und selbst Eis bildet in größerer Ausdehnung keine glatten ebenen Flächen; aber auch dann tritt ihre spiegelnde Wirkung nur bei großem Einfallswinkel hervor, ebenso wie bei Wasser. In den Polarländern sind die Eisblöcke und Schollen unregelmäßig übereinander getürmt. Auch die Felder frisch gefallenen Schnees haben selten eine große ebene Ausdehnung; und auch sie haben keine hervorragend spiegelnde Wirkung, weil der Schnee, obgleich aus Kriställchen gebildet, wegen der Lockerheit der Flocken nicht seine Kristallflächen vorwiegend in der Richtung der Gesamtoberfläche lagert. Erst beim Zusammensintern oder dem Übergang in Eis dürfte die Spiegelung zunehmen. Entsprechend unserer Annahme der Rauhigkeit der Erdoberfläche finden wir auch die Rauhigkeit der Mondoberfläche so groß, daß der Vollmond sogar an den Rändern heller erscheint, als in seiner Mitte, was bei einer glatten Fläche umgekehrt sein müßte. Diese Umkehrung erklärt sich übrigens durch die Gebirge des Mondes.

Dem entsprechend gewährt das Lambertsche Gesetz die beste Annäherung für den Boden, so daß von der auf das Bodenelement fallenden Lichtmenge  $(b)$  die Menge  $(c)$   $A : \pi$  gegen eine Fläche von 1 qm ausgestrahlt würde, wenn diese mit dem Boden parallel in einem senkrechten Abstände von 1 m aufgestellt wäre. Da aber bei der Ausstrahlung von  $D$  gegen  $f'$  bei  $D$  der Ausfallswinkel  $\psi$  und bei  $f'$  der Einfallswinkel  $\psi$  stattfindet, so erhält die von  $D$  gegen  $C$  gesendete Lichtmenge den Faktor  $\cos \psi \cdot \cos \psi$ , da sodann die Entfernung  $DC = x : \cos \psi$  ist, so erhält die übergestrahlte Lichtmenge noch den Faktor  $1 : (x : \cos \psi)^2$ , und da endlich auf dem Wege  $DC$  auch die Lichtschwächung durch die Atmosphäre wirksam ist, so ergibt sich die von dem Bodenelemente  $DEE'D'$  auf  $f'$  geworfene Lichtmenge

$$(c) = (b) \frac{A}{\pi} \frac{f' \cos^2 \psi}{x^2 : \cos^2 \psi} e^{-\frac{c}{h'} \frac{x}{\cos \psi}}.$$

Diese Lichtmenge durchläuft im Dunstelemente  $f' dx$  den Weg  $dx : \cos \psi$ ; es wird daher von ihr im ganzen die Lichtmenge zerstreut



$$(d) = (e) (dx : \cos \psi) \frac{c}{h'}$$

Führt man darin alle früheren Ausdrücke ein, so ergibt sich

$$(d) = \frac{L}{\pi} A \vartheta f' \frac{c}{h'} \sin \psi d\alpha d\psi dx e^{-\frac{c}{h'} \frac{x}{\cos \psi}}$$

Von dieser Lichtmenge wird ein Teil gegen  $A$  geworfen. Dabei ist der Zerstreungskoeffizient  $i$  maßgebend, und dieser hängt von dem Ablenkungswinkel  $\pi - \varphi = 180^\circ - DCA$  ab, wobei

$$\cos \varphi = -(\cos \psi \cos \zeta + \sin \psi \sin \zeta \cos \alpha).$$

Das Licht legt sodann von  $C$  bis  $A$  den Weg  $CA = z$  zurück, so daß die in  $A$  auf 1 qm senkrecht auffallende Lichtmenge den Faktor  $1 : z^2$  erhält; das Licht erleidet dabei eine Schwächung, die durch einen Potenzfaktor von  $e$  ausgedrückt wird, und es erscheint das Element  $f'$  dann in  $A$  unter einer Helligkeit  $dH_3$ ; und damit wieder die Helligkeit einer von  $L$  senkrecht beschienenen Fläche von dem Rückstrahlungsvermögen 1 die Helligkeitseinheit bildet, so muß die aufgestrahlte Lichtmenge, wie früher (S. 99), durch  $L f_1 : \pi = L (f' \cos \zeta_1 : z^2) : \pi$  geteilt werden (siehe  $f_1$  in Fig. 86), so daß

$$dH_3 = (d) i \frac{1}{z^2} e^{-\frac{c}{h'} \frac{x}{\cos \zeta_1}} \frac{z^2 \pi}{L f' \cos \zeta_1},$$

oder, wenn man den Ausdruck von  $(d)$  einführt,

$$dH_3 = A \frac{\vartheta}{\cos \zeta_1} \frac{c}{h'} \sin \psi i d\alpha d\psi dx e^{-\frac{cx}{h'} \left( \frac{1}{\cos \psi} + \frac{1}{\cos \zeta_1} \right)}.$$

Dieser Ausdruck muß dreifach integriert werden. Man tut dies am besten zuerst nach  $x$ , und zwar zwischen den Grenzen 0 und  $h_o$  mit  $i = i_1$  (für Wasser), und zwischen den Grenzen  $h_o$  und  $h'$  mit  $i = i_2$  (für Eis); dann nach  $\alpha$  mit unveränderlichem  $\psi$  zwischen den Grenzen  $\alpha = 0$  und  $\alpha = 2\pi$ , wobei  $i_1$  und  $i_2$  veränderlich sind, und zuletzt nach  $\psi$  zwischen den Grenzen 0 und  $\frac{\pi}{2}$ . Wir erhalten dann

$$H_3 = A \vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{2\pi} d\alpha \sin \psi \frac{c}{h' \cos \zeta_1} \left[ i_1 \int_0^{h_o} dx e^{-c \frac{x}{h'} \left( \frac{1}{\cos \psi} + \frac{1}{\cos \zeta_1} \right)} \right. \\ \left. + i_2 \int_{h_o}^{h'} dx e^{-c \frac{x}{h'} \left( \frac{1}{\cos \psi} + \frac{1}{\cos \zeta_1} \right)} \right].$$

Die Integration nach  $x$  kann ausgeführt werden; sie ergibt

$$H_3 = A \vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \frac{\sin \psi}{\cos \zeta_1} \frac{1}{\frac{1}{\cos \psi} + \frac{1}{\cos \zeta_1}} \left\{ \left[ 1 - e^{-c \frac{h_0}{h'}} \left( \frac{1}{\cos \psi} + \frac{1}{\cos \zeta_1} \right) \right] \int_0^{2\pi} i_1 d\alpha \right. \\ \left. + \left[ e^{-c \frac{h_0}{h'}} \left( \frac{1}{\cos \psi} + \frac{1}{\cos \zeta_1} \right) - e^{-c \left( \frac{1}{\cos \psi} + \frac{1}{\cos \zeta_1} \right)} \right] \int_0^{2\pi} i_2 d\alpha \right\}. \quad (93)$$

Die beiden anderen Integrationen nach  $\alpha$  und  $\psi$  müssen wieder durch mechanische Quadratur ausgeführt werden.

**152. Gesamthelligkeit des Himmels.** Nun ergibt sich die gesamte Helligkeit  $H$  des Himmels als Summe der unmittelbar von der Sonne herrührenden Helligkeit  $H_1$  (Gl. 68 S. 100), der durch unendlich vielfache Lichtzurückwerfung durch die Atmosphäre übertragenen ( $H_2$ ) [Gl. (69) S. 111 bis Gl. (92) S. 124] und der vom Boden übertragenen  $H_3$  (Gl. 93) oder

$$H = H_1 + (H_2) + H_3. \quad (94)$$

### III. Zahlenmäßige Berechnung der Helligkeit des Himmels.

#### 1. Berechnung von $H_1$ .

**153. Ausgewählte Punkte des Himmels.** Wir berechnen zuerst die von der Sonne unmittelbar hervorgebrachte Helligkeit  $H_1$  nach Gl. (68), S. 100 und bei  $\zeta = \sigma$  nach Gl. (68'), S. 101, nehmen die Stellen des Himmels, für welche wir die Helligkeit bestimmen, in gegenseitigen Abständen von  $15^\circ$ , sowohl nach dem Azimut  $\alpha$ , als nach der Zenitdistanz  $\zeta$  an, so daß wir bei  $\alpha$  von  $0$  bis  $180^\circ$  und bei  $\zeta$  von  $0$  bis  $90^\circ$  auf jeder der beiden symmetrischen Himmelshälften außer dem Zenit  $12.6 = 72$  Stellen erhalten.

**154. Annahme über den Ort der Sonne.** Dabei nehmen wir die bei den technischen Zeichnungen gebräuchliche Stellung der Sonne an, wonach ihre Strahlen parallel mit der Diagonale eines aufrecht stehenden Würfels laufen, so daß ihre Zenitdistanz  $\sigma = 54^\circ 44'$  ist, weil  $\operatorname{tg} \sigma = \sqrt{2}$  sein muß.

**155 (Fortsetzung zu 153). Weitere Punkte des Himmels und Annahmen über den Zustand der Atmosphäre.** Für  $\zeta = \sigma$  bestimmen wir ebenfalls die Himmelselligkeiten, wodurch auf jeder Himmels-hälfte noch zwölf Stellen hinzukommen, also 85 bestimmt werden.

Ferner nehmen wir einen warmen Sommertag an, für welchen wir die Höhe der wässrigen Dunstatmosphäre  $h_o = 2400$  m setzen durften (S. 106), während die Höhe der ganzen Dunstatmosphäre  $h' = 2830$  m ist, also die der eisigen  $h' - h_o = 430$  m beträgt. Es ist dann  $h_o : h' = 0,848$ ,  $1 - h_o : h' = 0,152$ . Ferner war  $c = 0,208$  bestimmt worden (S. 87). Die ganze Rechnung wird tabellarisch meist auf drei Wertstellen mit dem Rechenschieber und mit Tafeln für die wirklichen trigonometrischen Funktionen (ohne Logarithmen) durchgeführt. Grundzahlen werden doppelt und gewöhnlich auf mehr Wertstellen, andere Zahlen einfach berechnet; die Fehler lassen sich an der Unstetigkeit der Ergebnisse erkennen.

**156. Berechnung der Formeln.** Um nun die Berechnung von  $H_1$  nach Gl. (68) und (68') (S. 100 und 101) vorzunehmen, bestimmen wir zuerst die zu den gewählten Punkten des Himmels ( $\alpha, \zeta$ ) und der Zenitdistanz  $\sigma$  der Sonne gehörigen Strahlenablenkungen  $\varphi$ , und bestimmen daraus nach Tab. 60 die verhältnismäßigen Lichtzerstreuungen  $i_1$  und  $i_2$  durch Wasser und Eis. Dann ermitteln wir die zu  $\zeta$  gehörigen reduzierten Zenitdistanzen  $\zeta_1$  nach S. 91 und Tab. 63 und erhalten für

$\zeta$	0°	15	30	45	54° 44'	60	75	90,
$\zeta_1$	0°	15	30	45	54° 43'	59.59	74.58	89.08.

Um dann die in der Formel vorkommenden Potenzen von  $e$ , wie  $e^{-\frac{c}{\cos \zeta_1}}$ , mittelst der Tafeln der gemeinen Logarithmen ( $\log$ ) zu ermitteln, bestimmt man

$$\log e^{-\frac{c}{\cos \zeta_1}} = \frac{-c \log e}{\cos \zeta_1} = -\frac{0,208 \cdot 0,4343}{\cos \zeta_1} = -\frac{0,0903}{\cos \zeta_1}.$$

Die zu diesem gemeinen Logarithmus gehörige Zahl ist dann die gesuchte Potenz von  $e$ .

Die nach Gl. (68) und (68') berechneten Werte von  $H_1$  sind in Tabelle 66 eingetragen.

Tab. 66.

Tabelle 66.

Helligkeit  $H_1$  des klaren Himmels, hervorgebracht durch unmittelbare Einwirkung der in der Zenitdistanz von  $\sigma = 54^\circ 44'$  stehenden Sonne an einem warmen Sommertage an den Stellen  $\alpha, \zeta$  des Himmels.

$\alpha =$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$	$105^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$165^\circ$	$180^\circ$
$\zeta$			0,										
$0^\circ$	0,02055	0,02055	02055	02055	02055	02055	02055	02055	02055	02055	02055	02055	02055
$15^\circ$	0,05000	0,04810	04300	03650	02920	02415	02025	01688	01434	01228	01168	01110	01063
$30^\circ$	0,13870	0,12170	08763	06200	03962	02549	01874	01304	01038	00906	00889	00864	00864
$45^\circ$	1,42500	0,59200	16480	08560	04550	02660	01620	01151	01025	00949	00923	00910	00899
$54^\circ 44'$	2,79000	1,19400	20000	09400	04560	02556	01540	01224	01070	00975	01029	01083	01083
$60^\circ$	2,67600	1,02500	20000	09520	04550	02545	01560	01280	01140	01140	01184	01257	01325
$75^\circ$	0,53300	0,35650	19200	09872	05045	02824	02021	01800	01851	02000	02386	02758	02894
$90^\circ$	0,31050	0,26500	17000	09140	04695	02960	02710	02970	03450	04690	05930	06660	06910

**157. Helligkeitskurven für  $H_1$ .** Nach dieser Tabelle wurden Fig. 87 u. 88. die Kurven  $\zeta, H_1$  und  $\alpha, H_1$  gezeichnet, die in Fig. 87 und 88 in kleinerem Maßstabe wiedergegeben sind. Die Kurven  $\zeta, H_1$  sind für die Azimute  $\alpha = 0$  und  $180^\circ$ ,  $15$  und  $165^\circ$  usw. bis  $\alpha = 90^\circ$  gezeichnet. Zwei so verbundene setzen sich gegenseitig stetig fort; und es sind die Zenitdistanzen  $\zeta$  für die kleineren der zusammengehörigen  $\alpha$  als positiv, für die größeren als negativ bezeichnet.

**158. Die Hellegleichen des Himmels für  $H_1$ .** Nun ist das nächste Ziel, die Linien gleicher Helligkeit oder die Hellegleichen des Himmels zu verzeichnen, für welche  $H_1$  der Reihe nach die Werte

2,5; 2,0; 1,5; 1,0; 0,8; 0,6; 0,4; 0,2; 0,1; 0,07; 0,05; 0,03; 0,02; 0,01; 0,009

besitzt. Daher sind aus den Kurven  $\zeta, H_1$  die Werte von  $\zeta$  entnommen, für welche  $H_1$  jene Werte annimmt, und entsprechend aus den Kurven  $\alpha, H_1$  die Werte von  $\alpha$ . Auf diese Weise sind Zahlen erhalten, von denen die folgenden ein Beispiel seien.

$H_1 =$	2,79	2,5	2,0	1,5	1,0	0,8	0,5	0,4	0,2	0,1	0,07	0,05	0,03	0,02	0,01	0,009
$\zeta = 54^\circ 44'$ , $\alpha = 0^\circ$	6,75	9,6	12,8	16,5	18,0	19,8	22,5	30,0	44,0	51,0	58,5	71,2	81,0			
$\alpha = 0^\circ$ , $\zeta =$	54,73	61,9	64,5	67,0	69,4	71,0	73,9	79,5								
	48,9	46,9	45,3	43,4	42,5	41,0	38,6	33,4	25,5	20,2	15,0	6,4				
$\alpha = 180^\circ$ , $\zeta =$														1,2	19,0	24,5
														90,0	84,0	76,0
														68,4	52,0	44,4

Mit diesen Zahlen können wir nun die Hellegleichen des Himmels, soweit sie von der unmittelbaren Sonnenbestrahlung herrühren, für jene angenommenen Hellegrade 2,5; 2,0 ... verzeichnen.

**159. Die flächentreue Projektion.** Die Darstellung ist der später notwendigen Flächenbestimmung wegen in äquivalenter oder flächentreuer Projektion ausgeführt, bei welcher also die Flächenstücke der Abbildung zu den abgebildeten Flächenstücken der Kugel in einem unveränderlichen Verhältnisse, z. B. in dem Verhältnis 1:1 stehen. Die hier

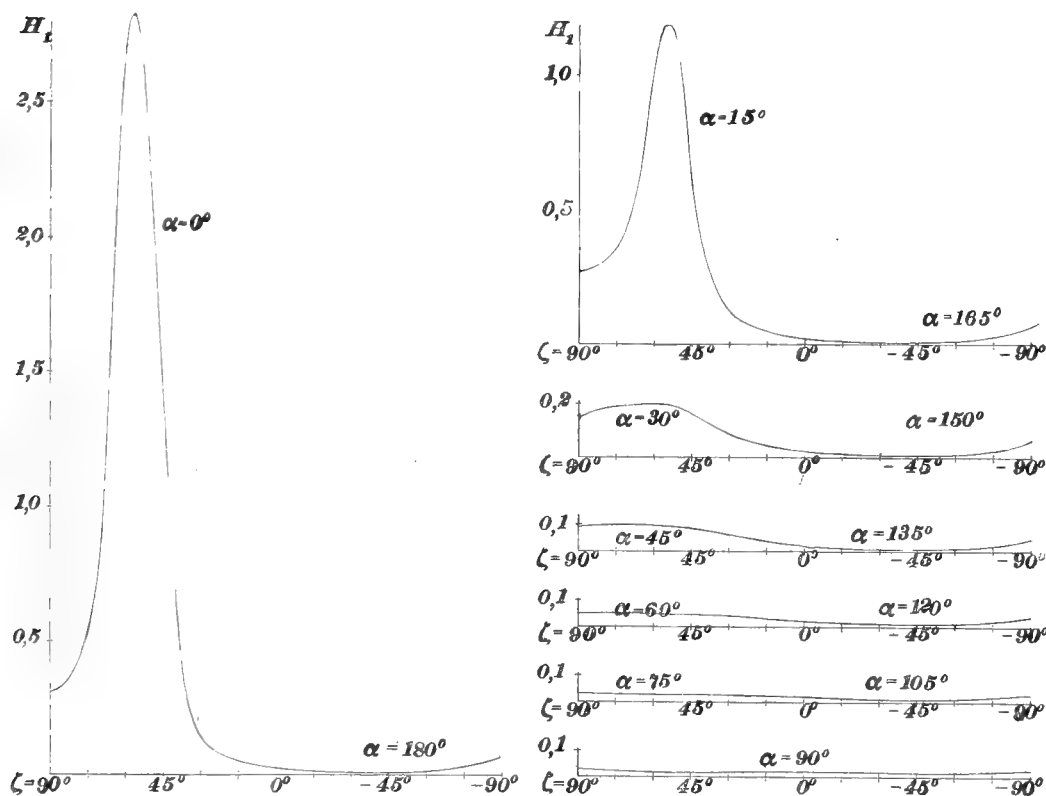


Fig. 87.

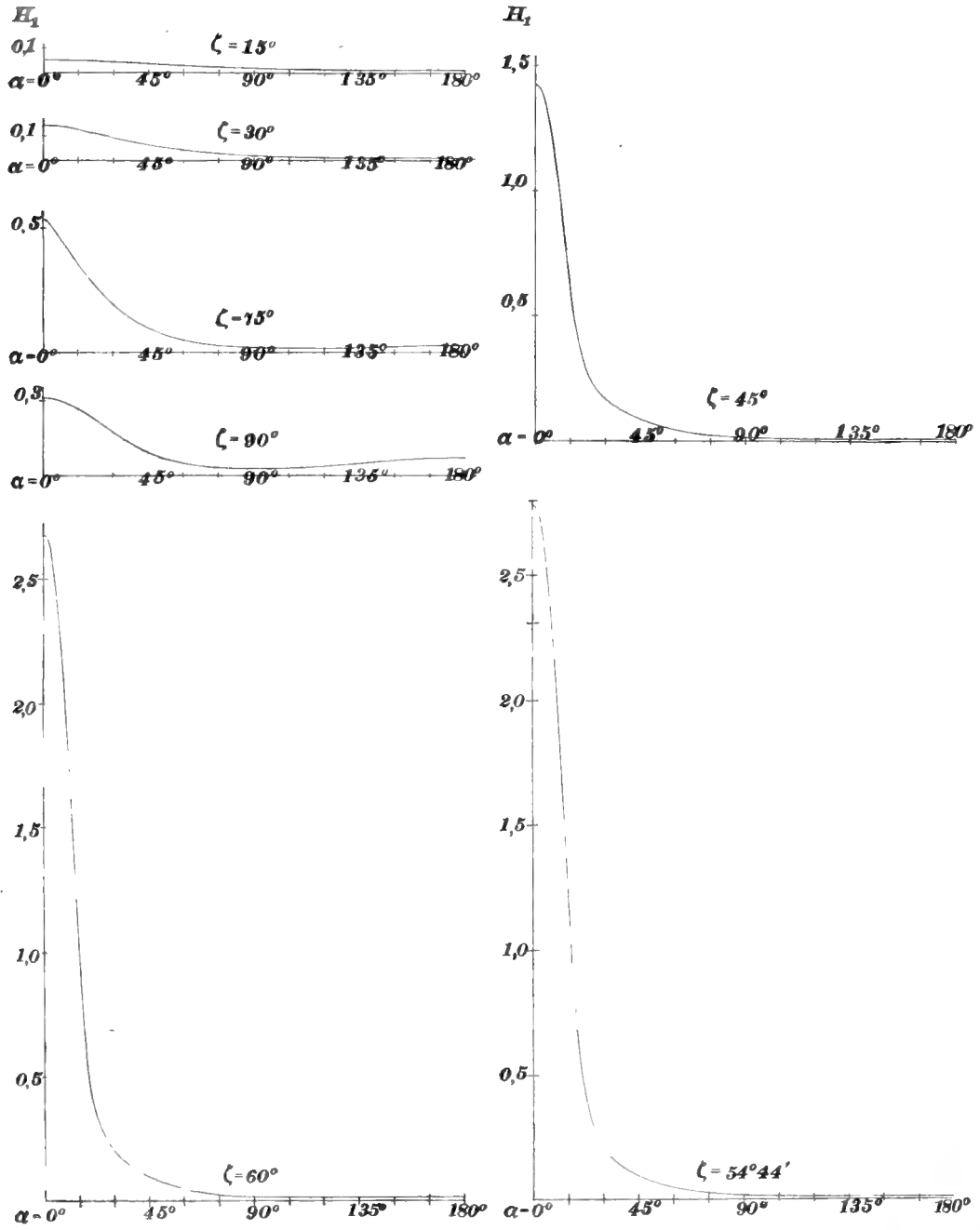


Fig. 88.

gewählte ist von Lambert<sup>1)</sup> angegeben und hat Ähnlichkeit mit der stereographischen Projektion. Sie ist in Fig. 89 veranschaulicht. Dem Zenit  $Z$  der Kugel entspricht der Punkt  $Z'$  in der Abbildung, den horizontalen Parallelkreisen  $k_1, k_2$  entsprechen die um  $Z'$  beschriebenen Kreise  $k'_1, k'_2$ , den (durch  $Z$  gehenden) vertikalen Kreisen die durch  $Z'$  gehenden Geraden von unveränderten Winkeln. Wegen der verlangten Flächengleichheit muß der Inhalt des Kreises  $k'_1$  gleich dem der Kugelmütze  $k_1 Z$  sein, oder wenn  $a$  der Halbmesser der Kugel,  $r$  derjenige vom Kreise  $k'_1$ ,  $CZ = h$  die Höhe der Kugelmütze, so ist

$$r^2 \pi = 2a \pi h,$$

$$r = \sqrt{2ah} = ZB = 2a \sin \frac{\zeta}{2},$$

wobei  $\zeta$  die Zenitdistanz von  $k$  bedeutet.

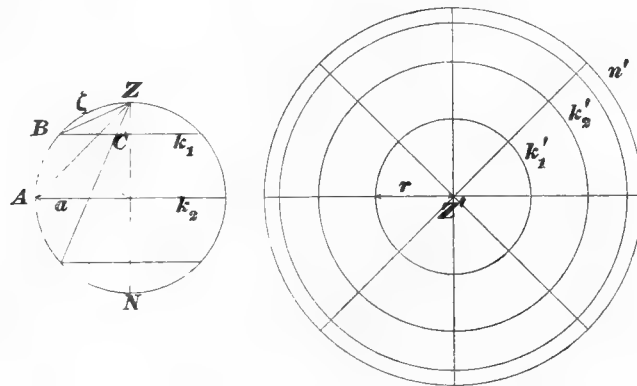


Fig. 89.

Für die Abbildung  $h'$  des Horizontkreises  $h$  ist daher  $r = ZA = a\sqrt{2}$ , das Nadir  $N$  bildet sich als ein Kreis  $n'$  vom Halbmesser  $2a$  ab.

### 160. Die Hellegleichen $H_1$ in flächentreuer Projektion.

In dieser Weise ist in Fig. 90 ein Netz von Horizontal- und Vertikalkreisen gezeichnet, in Abständen der  $\zeta$  und der  $\alpha$  von  $15^\circ$ ; der durch die Sonne gehende Horizontalkreis mit  $\zeta = 54^\circ 44'$  ist noch zugefügt. In der linken Hälfte dieses Netzes sind nun unsere von der unmittelbaren Sonnenbestrahlung

Fig. 90.

<sup>1)</sup> Lambert. Siehe z. B. Gretschel, Lehrbuch der Kartenprojektion, 1873, S. 151.

herrührenden Hellegleichen eingetragen; in der rechten Hälfte werden später die von einmaligem Luftreflex herrührenden eingetragen werden. Dieses Einzeichnen geschah dadurch, daß die in der vorstehenden Tabelle und in den anderen ähnlichen angegebenen Punkte eingetragen wurden, und zwar auf den Horizontalkreisen mittelst kreisförmiger Maßstäbe, auf welchen jedesmal ein Bogen von  $15^\circ$  in 15 Grade geteilt war, und auf den Geraden der Vertikalkreise mittelst eines geraden Maßstabes, auf welchem die Werte von  $2a \sin \frac{\xi}{2}$  von  $15^\circ$  zu  $15^\circ$  aufgetragen und durch gleichförmige Zwischen- teilung die einzelnen Grade bezeichnet waren. Die Verbindungslinien der Punkte gleicher Helligkeit bildeten dann die Hellegleichen, wobei kleine Ausgleichungen nach der Stetigkeit stattfanden.

Die Figur ergibt nun, daß die größte Helligkeit = 2,79 unmittelbar neben der Sonne, die kleinste = 0,0086 der Sonne gegenüber in einer Zenitdistanz von etwa  $34^\circ$  stattfindet, also in einem Abstände von der Sonne von  $54^\circ 44' + 34^\circ = 88^\circ 44'$ , also etwa einem rechten Winkel. Um diese beiden Punkte legen sich nun die geschlossenen Hellegleichen herum, um die Sonne mehr kreisförmig und gegen das Zenit hin sich enger aneinander- schließend, also mit schnellerer Abnahme, um den dunkelsten Punkt mehr bohnenförmig. Von den Kurven bei der Sonne berührt zuerst diejenige für 0,3 den Horizont, die weniger hellen stoßen unter Winkeln auf ihn auf. Von den gegenüberstehenden Kurven berührt zuerst diejenige für 0,025 den Horizont etwa bei  $\alpha = 95^\circ$ ; und die letzte Kurve, die den Horizont nochmals bei  $\alpha = 180^\circ$  berührt, ist die für 0,07. Im Horizont ist daher der hellste Punkt unter der Sonne bei  $\alpha = 0^\circ$  mit der Helligkeit 0,3; dann nimmt mit wachsendem  $\alpha$  die Helligkeit ab, erreicht ihren kleinsten Wert bei  $\alpha = 95^\circ$  mit 0,025, und wächst dann wieder bis  $\alpha = 180^\circ$  zu 0,07. Im Zenit ist die Helligkeit = 0,02055.

## 2. Berechnung von ( $H_2$ ).

**161. Ausgewählte Punkte des Himmels.** Wir gehen nun zur Bestimmung der durch Rückstrahlung der Atmosphäre hervorgebrachten Helligkeit des Himmels über und wählen eine Anzahl von Punkten des Himmels aus, für welche wir diese Bestimmung vornehmen wollen. Es



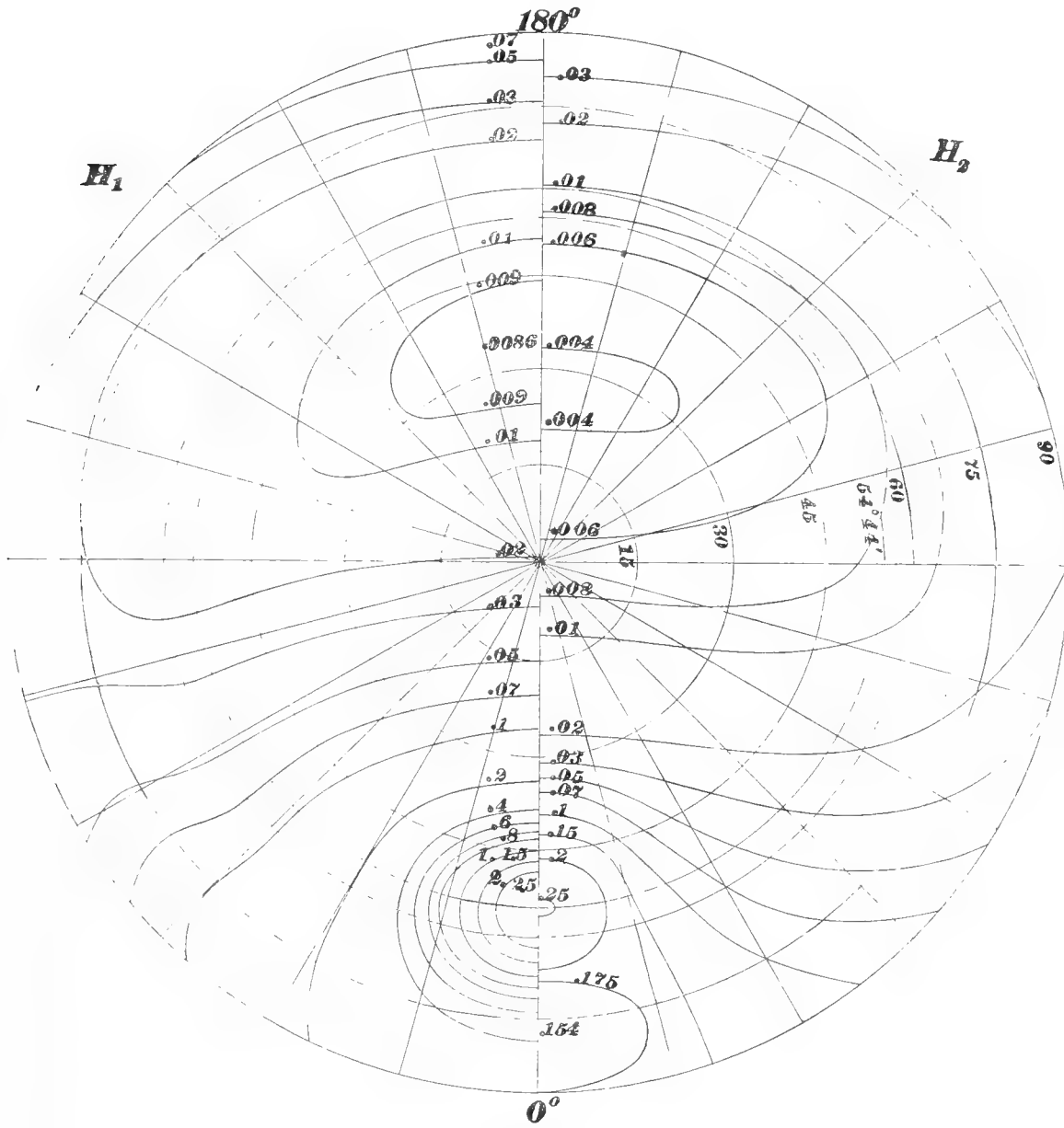


Fig. 90.

Hellegleichen des klaren Himmels für den Fall, daß der Zenitabstand der Sonne  $\sigma = 54^{\circ} 44'$  ist,  $H_1$  erzeugt durch unmittelbare Sonnenbestrahlung (linke Hälfte der Figur),  $H_2$  erzeugt durch einmaligen Luftreflex (rechte Hälfte der Figur). Flächentreue Projektion.

seien Punkte von den Zenitdistanzen  $\zeta = 0^\circ, 54^\circ 44', 90^\circ$ , und von den Azimuten  $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$ , und außerdem noch für drei Punkte nahe bei der Sonne. Diese Punkte seien mit  $A, B, \dots O$  bezeichnet, und sind

Fig. 91. in Fig. 91 und durch folgende kleine Tabelle festgelegt:

Punkt	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O
$\zeta$	$0^\circ$	$54^\circ 44'$	—	—	—	—	$90^\circ$	—	—	—	—	75	30	$54^\circ 44'$
$\alpha$		$0^\circ$	45	90	135	180	0	45	90	135	180	0	0	$22\frac{1}{2}$

Bei der Berechnung der Reflexhelligkeit  $H_2$  war nun zu beachten, daß nur eine einzige Stellung der Sonne betrachtet wurde, daß also  $\sigma = 54^\circ 44'$  unveränderlich war. Ferner war für jeden der bezeichneten Punkte  $A, B, \dots$   $\alpha$  und  $\zeta$  unveränderlich, und es kamen daher für  $\zeta$ , nur die Werte  $0^\circ, 30^\circ, 54^\circ 43', 74^\circ 58', 89^\circ 8'$  vor. Bei jedem dieser Punkte wechselte dann nur die Stelle des Himmelselementes  $f$ , welches Licht zurückwarf, also seine Zenitdistanz  $\omega$  (und  $\omega_1$ ) und sein Azimut  $\alpha'$ . Wir nehmen für  $\omega$  die Werte  $30^\circ, 54^\circ 44', 75^\circ, 90^\circ, 105^\circ, 125^\circ 16'$  an; die Werte  $0^\circ$  und  $180^\circ$  waren zu übergehen, weil hierfür  $\text{tg } \omega_1$  und die Wirkung des zugehörigen Horizontalkreises Null sind. Die zugehörigen Werte von  $\omega_1$  sind  $30^\circ, 54^\circ 43', 74^\circ 58', 89^\circ 08', 90^\circ 52', 105^\circ 02', 125^\circ 17'$ . Diese letzteren reduzierten Zenitdistanzen für  $\omega > 90^\circ$ , d. h. für die von tieferen Schichten der Atmosphäre herrührenden Reflexe, hätten eigentlich eine ganz besondere Behandlung erfordert, mit Berücksichtigung der Krümmung der Erdoberfläche. Da aber diese Wirkungen überhaupt nicht groß sind, so war eine solche Untersuchung ohne Belang und wir haben die Werte von  $\omega_1$  angenommen, welche die früheren zu  $180^\circ$  ergänzen, was auch für die Rechnung eine Vereinfachung bietet. — Die  $\alpha'$  haben wir im allgemeinen von  $45^\circ$  angenommen, also  $= 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ, 360^\circ$ ; und nur an den Stellen der geringsten Ablenkung, also in der Nähe der Sonne oder des betrachteten Punktes des Himmels,  $A, B, \dots$ , haben wir der raschen Änderung halber gewöhnlich Zwischenräume von  $22\frac{1}{2}^\circ$  angenommen.

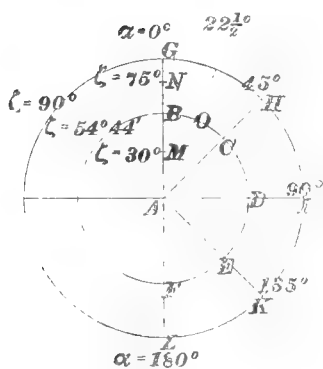


Fig. 91.

**162. Ausrechnung der Formeln.** Zu den Werten von  $\sigma_1, \zeta_1, \omega_1$  wurden nun nach S. 110 die Werte von  $s, t, u$  und aus ihnen und den vorhin festgestellten Werten von  $c, h_0, h'$  wurden die vorkommenden Potenzen von  $e$  berechnet, sowie deren Vereinigung zu den Klammerausdrücken der Formeln für  $H_2$ . Dann mußten die Werte

$$\int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1 i_1', \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1 i_2', \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_2 i_2', \int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i_1' i_2'$$

bestimmt werden. Dazu waren die Ablenkungswinkel  $\varphi$  und  $\varphi'$  notwendig, und diese wurden nach den Formeln der Seite 120 berechnet, und aus diesen ergaben sich die Zerstreuungskoeffizienten  $i_1, i_2, i_1', i_2'$  aus Tab. 60 und daraus jene Produkte. In Tab. 67 ist eine solche Rechnung dargestellt für den Punkt C, also für  $\sigma = 54^\circ 44'$ ;  $\zeta = 54^\circ 44'$ ;  $\alpha = 45^\circ$ ;  $\omega = 30^\circ$ . Die Integrale von  $d\alpha' \cdot i i'$  werden nun durch graphische Flächenbestimmung ermittelt. In Fig. 92 sind nach den Werten der Tabelle die drei Kurven mit den Abszissen  $\alpha'$  und den Ordinaten  $i_1 i_1', i_1 i_2', i_2 i_2'$  aufgetragen und die Flächen derselben, bei größerem Maßstabe, mittelst des Amslerschen Planimeters ermittelt. Diese Werte sind in Tab. 67 eingetragen.

Tabelle 67.

Berechnung der Produkte  $i i'$  für Punkt C.

$$\sigma = 54^\circ 44', \zeta = 54^\circ 44', \alpha = 45^\circ, \omega = 30^\circ.$$

$\alpha'$	$(\alpha' - \alpha)$	$\varphi$	$\varphi'$	$i_1$	$i_2$	$i_1'$	$i_2'$	$i_1 i_1'$	$i_1 i_2'$	$i_2 i_2'$
				0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,
0°	45°	37° 54'	24° 44'	109	120	257	192	02810	02100	02305
22½°	22½°	28° 43'	28° 43'	184	165	184	165	03380	03030	02720
45°	0°	24° 44'	37° 54'	257	192	109	120	02810	03084	02305
90°	45°	37° 54'	60° 00'	109	120	028	060	00306	00654	00720
135°	90°	60° 00'	77° 49'	028	060	012	037	00034	00103	00222
180°	135°	77° 49'	84° 44'	012	037	012	032	00014	00038	00118
202½°	157½°	82° 57'	82° 57'	012	033	012	033	00014	00040	00109
225°	180°	84° 44'	77° 49'	012	032	012	037	00014	00044	00118
270°	225°	77° 49'	60° 00'	012	037	028	060	00034	00072	00222
315°	270°	60° 00'	37° 54'	028	060	109	120	00306	00336	00720
$\int_0^{2\pi} d\alpha' \cdot i i'$								04925	05010	05363

Zur Berechnung von  $H_2$  dienen hier, weil  $\zeta = \sigma$ , die Formeln (85) und (86) S. 123, bei unserem Beispiel  $\omega = 30^\circ$ , die erstere. Mit Benutzung der für  $s, t, u$  und der Potenzen von  $e$  ermittelten Werte und der soeben für  $\int d\alpha' \cdot i i'$  gewonnenen, erhalten wir daraus

$$T = \frac{\operatorname{tg} \omega_1}{s} \{ \dots \} = 0,00092.$$

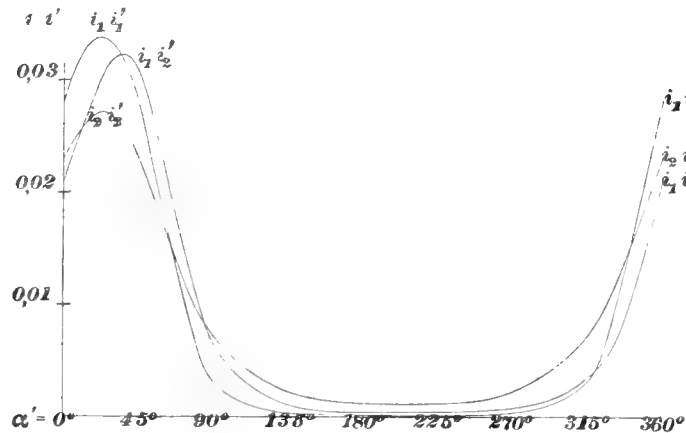


Fig. 92.

Auf gleiche Weise erhält man aus verschiedenen Formeln für die anderen Werte von  $\omega$ , oder für die so bestimmten Horizontalkreise des Himmels ihre Einwirkungen  $T$  auf die Helligkeit des Punktes  $C$

$$\begin{array}{cccccc} \omega = & 30^\circ & 54^\circ 44' & 75^\circ & 90^\circ & 105^\circ & 125^\circ 16' \\ T = & 0,00092 & 00600 & 00324 & 00207 & 00057 & 00007. \end{array}$$

Zur Integration nach  $\omega$ , oder zur Bestimmung von

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega_1 \frac{\operatorname{tg} \omega_1}{s} \{ \dots \} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\omega_1 \frac{\operatorname{tg} \omega_1}{s} \{ \dots \} = \int_0^{\pi} d\omega_1 \cdot T$$

Fig. 93. muß man wieder graphisch verfahren. Wir zeichneten die Kurve  $C$  mit den Abscissen  $\omega$  und den Ordinaten  $T$  und erhielten (bei größerem Maßstabe) mittelst des Amslerschen Planimeters die Fläche der Kurve  $S = 0,00782$ . Daraus ergab sich dann

$$H_2 = H_2^0 + H_2^u = \pi \frac{e^{-\frac{c}{\cos \sigma_1}}}{\cos \zeta_1} S = 0,02972.$$

Aus der Kurve *D* der Fig. 93 sieht man aber, daß die Einwirkung des Horizontalkreises der Sonne ( $\omega = 54^\circ 44'$ ) weitaus am stärksten ist, wie dann aber noch der Horizont ( $\omega = 90^\circ$ ) ein Maximum, aber von geringerer Größe hervorbringt. Die Wirkung der tieferen Luftschichten ( $\omega$  von  $\pi:2$  bis  $\pi$ ) ist gering. Es ist noch die Kurve für den Punkt *F* eingezeichnet, die eine ähnliche Gestalt wie *D* besitzt. Sodann die Kurve für den neben

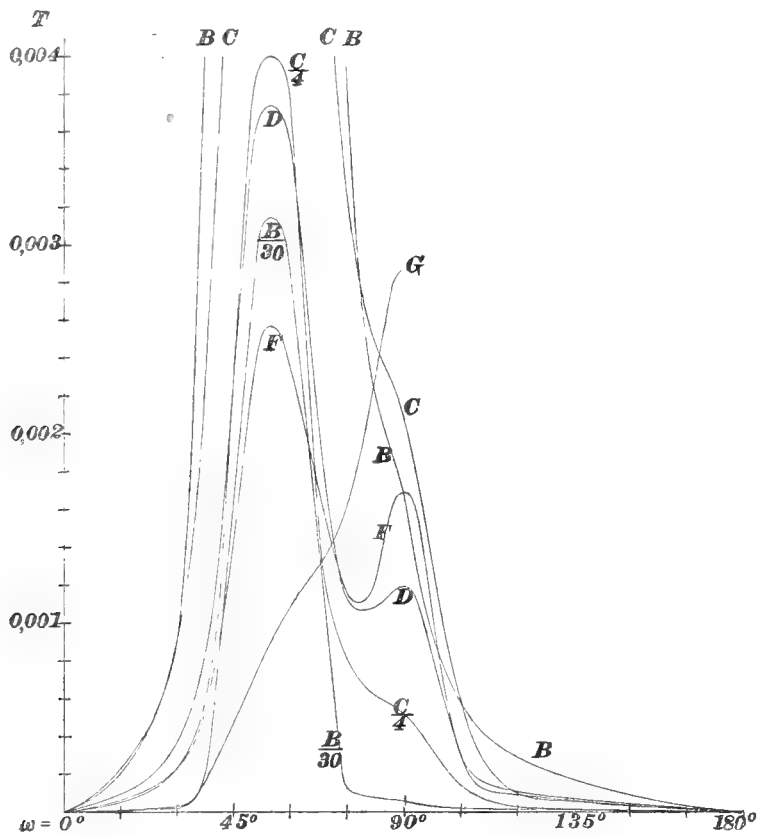


Fig. 93.

der Sonne liegenden Punkt *B*, für welchen die Einwirkungen der benachbarten Horizontalkreise so stark sind, daß die Ordinaten nur mit  $\frac{1}{30}$  ihrer Größe eingezeichnet werden konnten. Endlich die Kurve für den zunächst der Sonne ( $\alpha = 0$ ) liegenden Punkt *G* des Horizontes, bei welchem die Wirkung des Horizontkreises am größten ist, tiefere Schichten aber nicht bestehen, so daß die Kurve bei  $\omega = \pi:2$  aufhört.

**163. Helligkeitskurven für  $H_2$ .** Jene Helligkeiten  $H_2$ , welche durch einmaligen Reflex des ganzen Himmels hervorgebracht wurden, sind nun für die Punkte  $A, B, \dots O$  in der Tabelle 68 eingetragen. Daraus sind die Helligkeitskurven entlang der Horizontalkreise  $\zeta = 54^\circ 44'$  und  $\zeta = 90^\circ$  gezeichnet mit den Koordinaten  $\alpha, H_2$ , und die Helligkeitskurve entlang der Vertikalkreise  $\alpha = 0^\circ$  und  $180^\circ, 75^\circ$  und  $135^\circ, 90^\circ$ , mit den Koordinaten  $\zeta, H_2$ .

Tabelle 68.

Helligkeit des klaren Himmels, hervorgebracht durch einmalige Reflexion  $H_2$ , oder durch unendlich vielfache Reflexion ( $H_2$ ) der Atmosphäre, bei einer Zenitdistanz  $\sigma = 54^\circ 44'$  der Sonne, in den Punkten  $A, B, \dots$  des Himmels von den Zenitdistanzen  $\zeta$  und den Azimuten  $\alpha$ .

Punkt	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L	M	N	O
$\zeta$	$0^\circ$	$54^\circ 44'$	$54^\circ 44'$	$54^\circ 44'$	$54^\circ 44'$	$54^\circ 44'$	$90^\circ$	$90^\circ$	$90^\circ$	$90^\circ$	$90^\circ$	$75^\circ$	$30^\circ$	$54^\circ 44'$
$\alpha$		$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	$22^\circ 30'$
$H_2$	0,00725	25130	02972	00888	00623	00748	17490	08090	02020	02884	04620	15340	02664	09830
( $H_2$ )	0,01025	35530	04205	01255	00881	01056	24710	11430	02857	04072	06528	21680	03764	13890

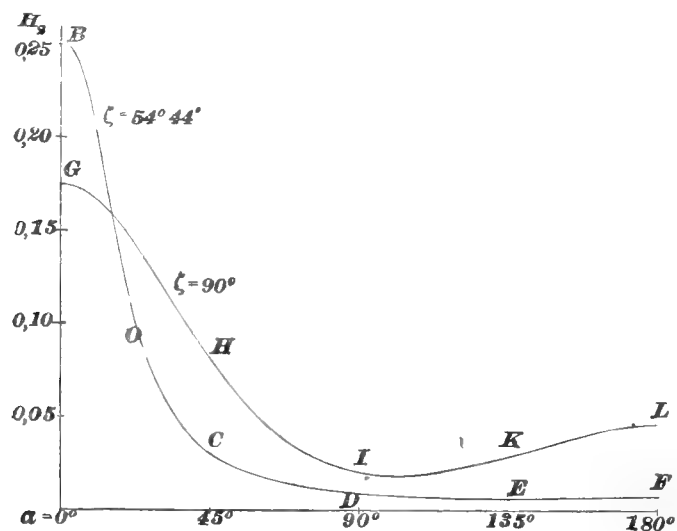


Fig. 94.

**164. Hellegleichen für  $H_2$ .** Aus solchen in größerem Maßstabe gezeichneten Kurven sind die  $\alpha$  der Punkte der Horizontalkreise und die  $\zeta$  der Punkte der Vertikalkreise entnommen, in welchen die Helligkeiten  $H_2 = 0,25; 0,2; 0,175; 0,15; 0,1; 0,07; 0,05; 0,03; 0,02; 0,01; 0,008; 0,006; 0,004$  herrschen. Diese Punkte wurden wie früher auf die flächentreue Projektion der Himmelskugel in der rechten Hälfte der Fig. 90 übertragen, und daraus die Hellegleichen der angegebenen Helligkeiten  $H_2$  unter Berücksichtigung der Stetigkeit verzeichnet. Diese Hellegleichen zeigen einen ähnlichen Verlauf, wie diejenigen auf der linken Seite der Fig. 90

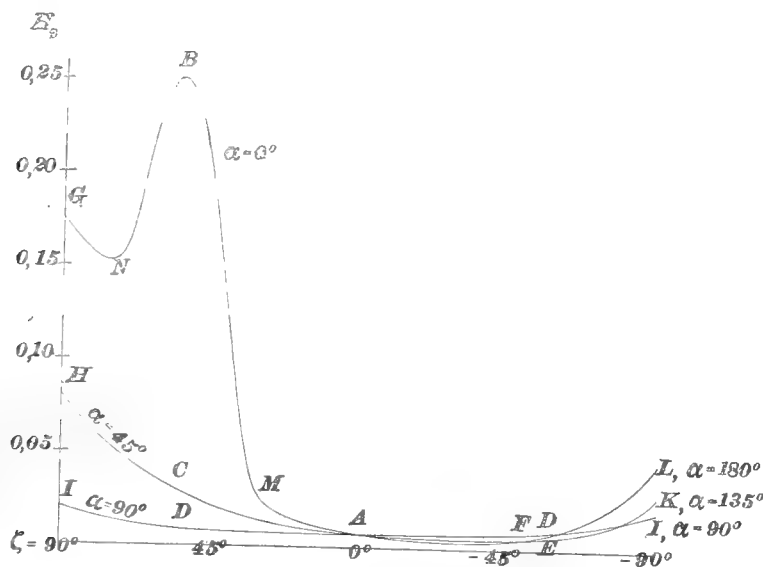


Fig. 95.

für unmittelbare Sonnenbeleuchtung; einem Maximum (0,25) neben der Sonne steht ein Minimum (0,0035) gegenüber in einer Zenitdistanz von etwa  $25^\circ$ , und um beide ziehen sich die Hellegleichen herum. Nur steht bei den Reflexkurven noch ein zweites Minimum (0,154) unter der Sonne in der Zenitdistanz von  $75^\circ$ .

**165. Wirkung der mehrfachen und unendlichvielfachen Rückstrahlung.** Die Reflexbeleuchtung ist so stark, daß sie selbst wieder durch wiederholte Lichtzerstreuung eine merkliche zweite Reflexbeleuchtung, und diese wieder eine schwächere dritte, und so ins unendliche hervorbringt.

Es ist des außerordentlichen Zeitaufwandes wegen unausführbar, den zweiten Reflex so genau zu verfolgen, wie wir es mit dem ersten taten, und noch viel weniger die folgenden. Aber da die Kurven der unmittelbaren und der Reflexbeleuchtung ziemlich gleichartig sind, so können wir sagen, die unmittelbar erzeugte Helligkeit des Himmels erzeugt die zweite, oder die Reflexbeleuchtung, diese auf gleiche Weise die dritte usw. Und wenn die zweite nur mehr die  $\nu$ -fache Lichtmenge der ersten hat, so wird auch die dritte die  $\nu$ -fache Lichtmenge der zweiten besitzen usw. Um diese Verhältniszahl  $\nu$  zu ermitteln, bestimmt man in Fig. 90, das eine Mal für den Halbkreis links, das andere Mal für den rechts die Flächenstücke  $f$  zwischen zwei aufeinander folgenden Hellegleichen mittelst des Amslerschen Planimeters, dies sind zugleich wegen der Flächentreue der Abbildung auch die Flächen des Himmels zwischen diesen Linien. Diese Fläche vervielfacht mit dem Mittel zwischen den zwei Grenzhelligkeiten  $H_1$  oder  $H_2$ , gibt die Lichtmenge dieses Flächenstückes, und die Summe dieser Lichtmengen gibt die Lichtmenge einer halben Kreisfläche der Figur, oder der halben über uns stehenden Himmelshalbkugel. So bekamen wir für die unmittelbare Sonnenbeleuchtung

$$\Sigma H_1 f = 0,77154$$

und für die Reflexbeleuchtung

$$\Sigma H_2 f = 0,22616,$$

daher

$$\nu = \frac{\Sigma H_2 f}{\Sigma H_1 f} = \frac{0,22616}{0,77154} = 0,2938.$$

Es ist also die Lichtmenge und daher auch im Mittel die Helligkeit des ersten Reflexes etwa  $\frac{3}{10}$  von der durch unmittelbare Sonnenbestrahlung erhaltenen Helligkeit, ebenso die Helligkeit der zweiten Reflexbeleuchtung 0,2938 von derjenigen der ersten usw., und daher die gesamte durch atmosphärische Rückstrahlung hervorgebrachte Helligkeit

$$\begin{aligned} (H_2) &= H_2 + 0,2938 H_2 + (0,2938)^2 H_2 + \dots \text{ ins Unendl.} \\ &= H_2 \frac{1}{1-0,2938} = 1,414 H_2. \end{aligned}$$



**166. Helligkeiten ( $H_2$ ).** Mit der Zahl 1,414 vervielfachen wir alle erhaltenen Helligkeiten  $H_2$  der Punkte  $A, B, \dots O$  und erhalten so die Gesamtreflexhelligkeiten ( $H_2$ ), welche in Tab. 68 zugefügt sind. Mittelst dieser Zahlen ( $H_2$ ) wurden nochmals die Kurven der Figuren 94 und 95 gezeichnet (obgleich man auch die alten Figuren mit neuen Maßstäben hätte benutzen können), aus diesen wurden noch die Helligkeitskurven der Vertikalkreise  $\alpha = 15$  und  $165$ ,  $30$  und  $150$ ,  $60$  und  $120$ ,  $75$  und  $115^\circ$  abgeleitet, die kleinen Unstetigkeiten derselben ausgeglichen und daraus die Helligkeiten des gesamten Luftreflexes ( $H_2$ ) für alle Punkte des Himmels in Abständen nach  $\zeta$  und  $\alpha$  von  $15^\circ$  abgemessen und in Tab. 69 eingetragen.

Tab. 69.

Tabelle 69.

Helligkeiten ( $H_2$ ) am Himmel, hervorgebracht durch die unendlich vielfache Zurückwerfung des Sonnenlichtes durch die Atmosphäre.

$\alpha$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$	$105^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$165^\circ$	$180^\circ$
$\zeta$	0,												
$0^\circ$	01025	01025	01025	01025	01025	01025	01025	01025	01025	01025	01025	01025	01025
$15^\circ$	01950	01790	01516	01450	01290	01140	01038	00920	00840	00750	00700	00635	00636
$30^\circ$	03764	03100	02830	02125	01700	01320	01081	00872	00736	00630	00585	00550	00506
$45^\circ$	18000	17200	05770	03225	02256	01564	01165	00872	00748	00710	00695	00680	00670
$54^\circ 44'$	35530	23850	08260	04205	02700	01800	01255	00930	00850	00881	00930	01000	01056
$60^\circ$	32250	23970	09600	04875	02990	01964	01495	01010	00970	01025	01085	01231	01370
$75^\circ$	21680	23900	14140	07100	04180	02620	01660	01464	01476	01760	02200	02570	02810
$90^\circ$	24710	23700	19480	11430	06340	03950	02857	02600	03100	04072	05100	06100	06528

### 3. Berechnung von $H_3$ .

#### 167. Wahl der Winkelzwischenräume für die Rechnung.

Wir schreiten nun zur Berechnung der durch die Rückstrahlung des Bodens hervorgebrachten Helligkeit  $H_3$  des Himmels (nach Gl. 93 S. 138) durch mechanische Quadratur, wie dort schon angegeben, und zwar zuerst nach  $\alpha$  und dann nach  $\psi$  (s. Fig. 86). Für die Stellen des Himmels, deren Helligkeiten  $H_3$  wir berechnen wollen, genügt es, die Zenitdistanzen  $\zeta = 0^\circ, 22\frac{1}{2}, 45, 67\frac{1}{2}, 82\frac{1}{2}, 90^\circ$  anzunehmen. Der Wert  $82\frac{1}{2}^\circ$  ergab sich als notwendig

zur Berücksichtigung, weil hier eine rasche Änderung des  $H_3$  stattfindet. Die Stellung der Sonne hat auf  $H_3$  nur Einfluß durch die wechselnde Helligkeit, welche sie dem Boden erteilt, also nur durch  $\vartheta$ , sonst aber keinen, da Rauigkeit des Bodens oder gleichförmige Lichtzerstreuung durch denselben angenommen werden mußte. Die Hellegleichen des Bodenreflexes sind also Horizontalkreise. Unterschiede zwischen  $\zeta$  und  $\zeta_1$  zu machen, ist in unserem Falle nicht von Belang, selbst wenn diese Winkel  $90^\circ$  und  $89^\circ 8'$  sind. Für die Winkel  $\alpha$  und  $\psi$  genügen Abstände von  $22\frac{1}{2}^\circ$ , so daß wir für  $\psi$  die Werte  $22\frac{1}{2}$ ,  $45$ ,  $67\frac{1}{2}$  annehmen, für  $\alpha$ :  $0$ ,  $22\frac{1}{2}$ ,  $45$ , . . .  $157\frac{1}{2}$ ,  $180^\circ$ . Die Werte  $\psi = 0$  oder  $90^\circ$  fallen aus, weil sie den Ausdruck für  $H_3$  zu Null machen.

**168. Integration nach  $\alpha$  mit der Simpsonschen Regel.** Wir lassen  $\alpha$  nur von  $0$  bis  $180^\circ$  oder  $\pi$  zunehmen, und verdoppeln das Integral, da hier

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \cdot i = 2 \int_0^{\pi} d\alpha \cdot i.$$

Wir berechnen zuerst die zu den verschiedenen Werten von  $\zeta$ ,  $\psi$  und  $\alpha$  gehörigen Werte von  $\varphi$  nach der Formel für  $\cos \varphi$  auf S. 137, welcher Wert sich nicht ändert, wenn  $\zeta$  und  $\psi$  ihre Werte vertauschen, ermitteln dann die zu den erhaltenen  $\varphi$  gehörigen Werte von  $i_1$  und  $i_2$  nach Tab. 60 und bestimmen endlich die zu einem unveränderlichen  $\zeta$  und  $\psi$  gehörigen Werte

$$\int_0^{2\pi} d\alpha i_1 \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} d\alpha i_2$$

durch mechanische Quadratur. Führen wir als Beispiel die Rechnung für  $\zeta = 45^\circ$ ,  $\psi = 67\frac{1}{2}^\circ$  an. Hier ist

$\alpha$	$\varphi$	$i_1$	$i_2$
$0^\circ$	$157^\circ 30'$	0.032	0,023
$22\frac{1}{2}$	150.49	030	022
45	137.03	025	020
$67\frac{1}{2}$	121.20	016	018
90	105.42	012	018
$112\frac{1}{2}$	91.09	011	028
135	78.56	012	037
$157\frac{1}{2}$	70.37	015	045
180	67.30	018	050
$\int_0^{2\pi} d\alpha \cdot i$		0,1142	0,1770

Bezeichnet man nämlich die aufeinander folgenden Glieder der Reihe der  $i_1$  oder der  $i_2$  mit  $a_1, a_2, \dots, a_9$ , so ist nach der Simpsonschen Regel, weil acht Intervalle da sind, der mittlere Wert der  $a$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} (a_1 + 4a_2 + 2a_3 + 4a_4 + 2a_5 + 4a_6 + 2a_7 + 4a_8 + a_9).$$

Die Summen der  $a$  in der Klammer ergeben sich aber für die angeführte Reihe der  $i_1 = 0,436$  und für die der  $i_2 = 0,675$ , daher ist

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \cdot i_1 = 2\pi \cdot \frac{0,436}{24} = 0,1142,$$

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \cdot i_2 = 2\pi \cdot \frac{0,675}{24} = 0,1770.$$

**169. Integration nach  $\psi$  durch Flächenberechnung.** Diese Werte müssen nun für die  $6 \cdot 3 = 18$  Verbindungen der sechs gewählten Werte von  $\zeta$  mit den dreien der  $\psi$  berechnet werden, wobei aber wegen der Vertauschbarkeit von  $\zeta$  und  $\psi$  in Bezug auf  $\varphi, i_1, i_2$ , sich drei Werte wiederholen.

Setzt man nun in der Formel (93) (S. 138)

$$y = \frac{\sin \psi}{\cos \zeta_1} \frac{1}{1 + \frac{1}{\cos \psi + \cos \zeta_1}} \left\{ \left[ 1 - e^{-c \frac{h_0}{h'} \left( \frac{1}{\cos \psi} + \frac{1}{\cos \zeta_1} \right)} \right] \int_0^{2\pi} i_1 d\alpha \right.$$

$$\left. + \left[ e^{-c \frac{h_0}{h'} \left( \frac{1}{\cos \psi} + \frac{1}{\cos \zeta_1} \right)} - e^{-c \left( \frac{1}{\cos \psi} + \frac{1}{\cos \zeta_1} \right)} \right] \int_0^{2\pi} i_2 d\alpha \right\},$$

so daſs

$$H_3 = A \vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \cdot y,$$

so muß man zuerst in dem Ausdrucke von  $y$  die Werte der eckigen Klammern und des vor der geschweiften Klammer stehenden Faktors für die bezeichneten 18 Fälle berechnen. Man erhält aber dann

$\zeta =$	$0^\circ$			$22\frac{1}{2}^\circ$			$45^\circ$		
$\psi =$	$22\frac{1}{2}^\circ$	45	$67\frac{1}{2}^\circ$	$22\frac{1}{2}^\circ$	45	$67\frac{1}{2}^\circ$	$22\frac{1}{2}^\circ$	45	$67\frac{1}{2}^\circ$
$y =$	0,01229	01710	01117	01225	01689	01505	01198	02006	02210
$\zeta =$	$67\frac{1}{2}^\circ$			$82\frac{1}{2}^\circ$			$90^\circ$		
$\psi =$	$22\frac{1}{2}^\circ$	45	$67\frac{1}{2}^\circ$	$22\frac{1}{2}^\circ$	45	$67\frac{1}{2}^\circ$	$22\frac{1}{2}^\circ$	45	$67\frac{1}{2}^\circ$
$y =$	0,01464	03130	05430	02420	07060	16600	03440	11100	33300.

Das Integral  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \cdot y$

mufs nun durch mechanische Quadratur bestimmt werden. Man zeichnet zu dem Ende die sechs Kurven  $\psi, y$  für die unveränderlichen  $\zeta$ . Dieselben sind in Fig. 96 verkleinert wiedergegeben. Man bestimmt dann für jede

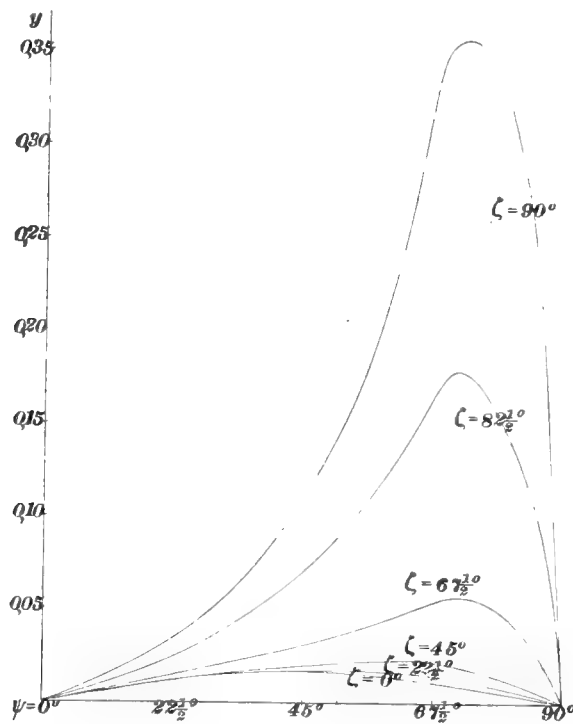


Fig. 96.

Kurve die von ihr und der Abszissenachse begrenzte Fläche; und diese auf die richtigen Einheiten gebracht, gibt das Integral an. Man beachtet,

dafs aus Tab. 65 durch Einschaltung für  $\sigma = 54^{\circ}44'$  das  $\vartheta = 0,515$  bestimmt ist, und erhält dann für  $A = 1$

$\zeta =$	$0^{\circ}$	$22\frac{1}{2}$	$45$	$67\frac{1}{2}$	$82\frac{1}{2}$	$90$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \cdot y =$	0,01642	01845	02278	04470	11800	21890
$H_3' =$	0,00848	00953	01174	02306	06095	11300

**170. Ergebnisse.** Daraus ergibt sich die Kurve  $\zeta, H_3'$  in Fig. 97 für  $A = 1$ . Man sieht, dafs der Bodenreflex selbst bei vollem Rückstrahlungsvermögen des Bodens ( $A = 1$ ) sehr klein ist, am schwächsten im Zenit mit  $H_3' = 0,00848$ , dafs er anfangs langsam, dann rascher gegen den Horizont hin steigt und hier mit 0,11300 seinen größten Wert erreicht.

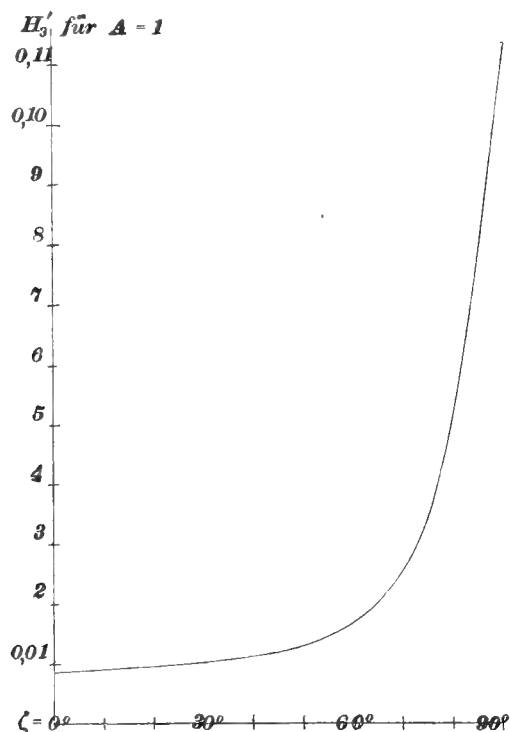


Fig. 97.

**171. Das Rückstrahlungsvermögen  $A$  des Bodens und die Werte  $H_3$ .** In Wahrheit ist aber  $A$  meist viel kleiner als Eins. Ich

will einige Zahlen nach Zöllner<sup>1)</sup> anführen und zwei von mir gefundene zufügen:

Rückstrahlungsvermögen $A$ .	
Frisch gefallener Schnee	0,78
Gegossener Gyps	0,72
Weisser Sandstein	0,24
Tonmergel	0,16
Quarz, Porphy	0,11
Feuchte Ackererde	0,08
Dunkler Syenit	0,08
mattes tief-schwarzes Papier	0,02

Die Zahlen für Gyps und schwarzes Papier sind die vom Verfasser herrührenden. Man wird für unsere Gegenden etwa  $A = 0,1$  annehmen können, also für  $H_3$  nur 0,1 der oben angegebenen Werte gelten lassen. Für Schneefelder, die selten ebene gleichförmige Flächen bilden, wird man  $A$  doch merklich kleiner als 0,78, vielleicht 0,5 annehmen dürfen, für Eisfelder der Polargegenden, die oft aus unregelmässig aufeinander geschobenen Blöcken bestehen, noch kleiner. Da sich die Eisfelder aber den Polfahrern durch einen hellen Schein am Himmel ankündigen (Eisblink), so kann dies, da nach der obigen Tabelle  $H_3$  selbst bei  $A = 1$  noch klein ist, nicht durch Lichtzerstreuung einer matten Fläche, sondern nur durch Spiegelung bei grossen Ein- und Ausfallswinkeln geschehen. Damit aber das vom Eis gespiegelte Licht auch von der Atmosphäre in gröfserer Menge ins Auge geworfen wird, müssen auch die Zerstreuungskoeffizienten  $i_1$  und  $i_2$  gross, daher die Lichtablenkung  $\varphi$  nicht gröfser als  $25^\circ$  sein (s. Tab. 60). Daher können entfernte Eisfelder nur durch einen Schein am Himmel von höchstens  $25^\circ$  Höhe über dem Horizont bemerkt werden, nahe nur in einer Höhe bis zu  $13^\circ$ .

Aus der Fig. 97 sind die Werte der  $H_3$  für  $A = 0,1$  abgeleitet und in Tab. 70. in Tab. 70 eingetragen.

<sup>1)</sup> Zöllner, Photometrische Untersuchungen, 1865, S. 273.

Tabelle 70.

Helligkeiten  $H_3$  am Himmel, hervorgebracht durch die Zurückwerfung des Sonnenlichtes durch die Bodenfläche bei dessen Zurückstrahlungsvermögen  $A = 0,1$ .

Zenitdistanz $\zeta$	0°	15°	30°	45°	54° 44'	60°	75°	90°
$H_3$	0,00085	00091	00101	00117	00144	00168	00343	01130

#### 4. Die Gesamthelligkeit $H$ .

Nun berechnen wir die Gesamthelligkeit an den verschiedenen Stellen des Himmels nach Gl. (94) (S. 138)

$$H = H_1 + (H_2) + H_3$$

nach den Tabellen 66, 69, 70 und erhalten so die Tabelle 71 über die  $H$ . Tab. 71. Nach dieser Tabelle wurden Helligkeitskurven gezeichnet und aus diesen wurden einige Zahlen (10) der Tabelle um wenigens geändert, um bessere Stetigkeit herzustellen.

Tabelle 71.

Gesamthelligkeit  $H$  des Himmels, hervorgebracht durch unmittelbare Sonnenbestrahlung  $H_1$ , durch Luftrückstrahlung ( $H_2$ ) und Bodenrückstrahlung  $H_3$ , für Punkte des Himmels vom Azimut  $\alpha$  (gegen die Sonne) und der Zenitdistanz  $\zeta$ .

$\alpha =$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
$\zeta$			0,										
0°	0,03165	0,03165	03165	03165	03165	03165	03165	03165	03165	03165	03165	03165	03165
15°	0,07041	0,06691	05907	05191	04301	03646	03154	02699	02365	02069	01959	01836	01790
30°	0,17735	0,15371	11694	08446	05763	04000	03056	02277	01875	01637	01575	01490	01471
45°	1,60617	0,76517	22367	11902	06923	04341	02902	02140	01790	01760	01735	01703	01686
54° 44'	3,14674	1,43394	28404	13749	07404	04500	02939	02298	02064	02000	02103	02227	02283
60°	3,00018	1,26628	29768	14563	07708	04677	03100	02458	02278	02333	02477	02656	02863
75°	0,75323	0,59893	33683	17315	09568	05787	04024	03607	03670	04103	04929	05671	06047
90°	0,56890	0,51330	37610	21700	12165	08040	06697	06700	07680	09890	12160	13890	14568

### 172. Die Helligkeitskurven entlang der Vertikalkreise.

Es wurden die sieben Kurven  $H, \zeta$  mit unveränderlichem  $\alpha$  gezeichnet, d. h. die Helligkeitslinien für sieben Vertikalebene; dabei bilden die für  $\alpha = 0$

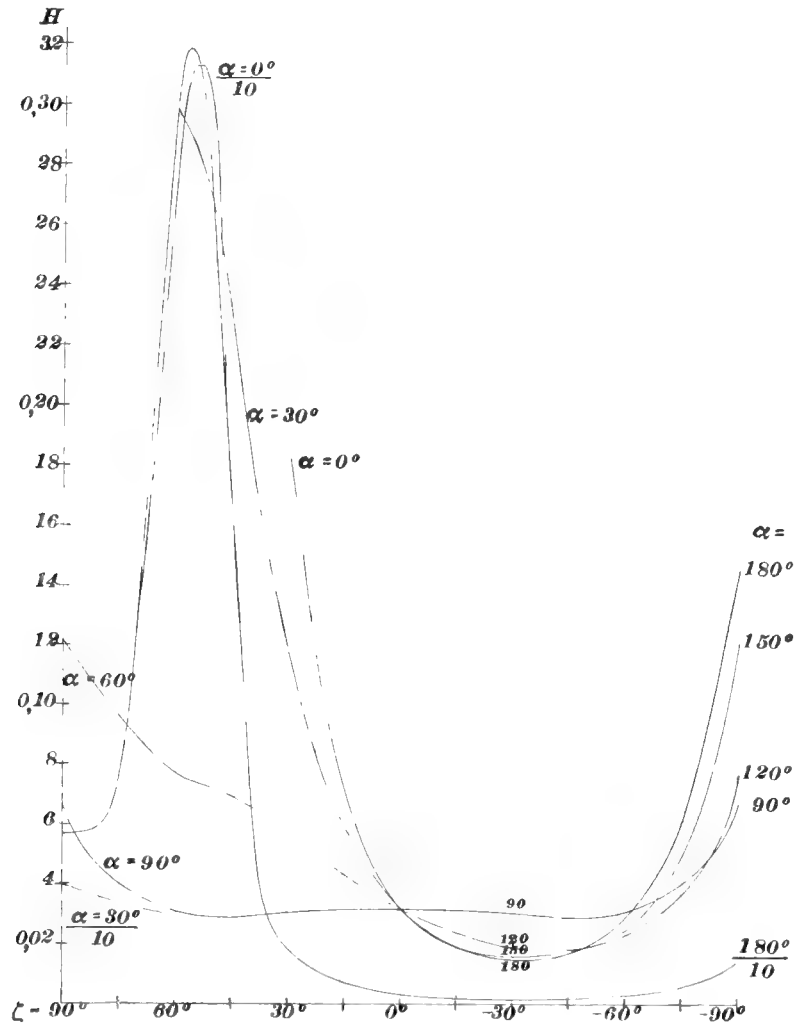


Fig. 98.

und  $\alpha = 180^\circ$ , für  $\alpha = 15^\circ$  und  $\alpha = 165^\circ$  usw. zusammenhängenden Linien. Fig. 98. Davon sind die für  $\alpha = 0^\circ, 180^\circ; 30^\circ, 150^\circ; 60^\circ, 120^\circ; 90^\circ$  in kleinerem Maßstabe wiedergegeben. Die Kurven für  $\alpha = 0^\circ$  und für  $30^\circ$  steigen so hoch an, daß ein Teil mit  $\frac{1}{10}H$  angegeben werden mußte. Die wichtigste dieser Kurven ist diejenige für  $\alpha = 0^\circ$  und  $= 180^\circ$ . Sie zeigt bei  $\alpha = 0^\circ$



für  $\zeta = 90^\circ$  einen kleinsten Wert  $H = 0,56890$ , steigt dann rasch und erreicht bei  $\zeta = 54^\circ 44'$  oder bei der Sonne den grössten Wert  $H = 3,14674$ , sinkt dann noch rascher, zeigt bei  $\zeta = 0$ , oder im Zenit,  $H = 0,03165$ , sinkt dann bei  $\alpha = 180^\circ$  noch mehr bis zu  $H = 0,01470$  bei  $\zeta = 32^\circ$ , und steigt dann wieder bis zum Horizont ( $\zeta = 90^\circ$ ) zu  $H = 0,14568$ . In dieser Vertikalebene liegt die grösste und kleinste am Himmel vorkommende Helligkeit, neben der Sonne  $3,14675$  und gegenüber in einem Winkelabstande von  $54^\circ 44' + 32^\circ = 86^\circ 44'$  die kleinste  $= 0,01470$ ; die grösste ist daher 214 mal so groß als die kleinste. — Die nicht hier angegebene Kurve für  $\alpha = 15$  und  $165^\circ$  zeigt eine ähnliche Gestalt; ihr Maximum ist ebenfalls bei  $\zeta = 54^\circ 44'$  oder nahe dabei mit  $H = 1,43394$ . Die Kurve  $\alpha = 30$  und  $150^\circ$  fällt dagegen von  $\zeta = 90^\circ$  mit  $H = 0,37610$  beständig über das Zenit hinaus, erreicht ein Minimum etwa bei  $\zeta = 34^\circ$  mit  $H$  etwa  $= 0,01570$  und steigt dann wieder bis  $\zeta = 90^\circ$  zu  $H = 0,12160$ . Ähnlich verlaufen auch die übrigen Kurven, nur mit stets abnehmenden Schwankungen. Die letzte für  $\alpha = 90^\circ$  verläuft meist nahezu parallel zur Abszissenachse. Sie hat für  $\zeta = 90^\circ$ ,  $H = 0,06697$ , sinkt bis  $\zeta = 60^\circ$  zu  $H = 0,03100$ , und behält diesen Wert fast unverändert bis zum Zenite bei.

### 173. Die Helligkeitskurven entlang der Horizontalkreise.

Ebenso wurden die sieben Kurven  $\alpha, H$  entlang der Horizontalkreise, oder mit unveränderlicher Zenitdistanz  $\zeta$  gezeichnet; fünf davon sind in verkleinertem Mafsstabe in Fig. 99 wiedergegeben. Auch hier mußten manche Stücke mit  $\frac{1}{10} H$  gezeichnet werden. Die wichtigste ist die durch die Sonne (mit  $\zeta = 54^\circ 44'$ ) gelegte. Sie liefert den grössten Wert von  $H$  ( $= 3,14674$ ) bei  $\alpha = 0$ , sinkt dann zu  $H = 0,02000$  bei  $\alpha = 135^\circ$ , und steigt dann wieder etwas zu  $H = 0,02283$  bei  $\alpha = 180^\circ$ . Mit der Entfernung des Horizontalkreises von der Sonne nimmt die Schwankung ab. Für  $\zeta = 0^\circ$  gilt ja nur die eine Helligkeit  $H = 0,03165$ . In dem Horizont ( $\zeta = 90^\circ$ ) herrscht die grösste Helligkeit unter der Sonne ( $\alpha = 0^\circ$ ) mit  $H = 0,56890$ , nimmt dann ab, erreicht ihr Minimum etwa bei  $\alpha = 97^\circ$  mit  $H$  etwa  $= 0,066$ , und steigt dann wieder gegenüber der Sonne ( $\alpha = 180^\circ$ ) zu  $H = 0,14568$ .

Fig. 99.

174. Die Hellegleichen des klaren Himmels. Aus diesen beiderlei scharf gezeichneten Helligkeitskurven wurden nun die Linien

gleicher Helligkeit oder die Hellegleichen des klaren Himmels hergeleitet und in Fig. 100 in der schon früher angewendeten flächentreuen Projektion dargestellt. Es geschah dies für die Helligkeiten  $H = 3,0; 2,5; 2,0; 1,5; 1,0; 0,8; 0,6; 0,4; 0,2; 0,1; 0,08; 0,06; 0,04; 0,02$ . Zu dem Ende wurden

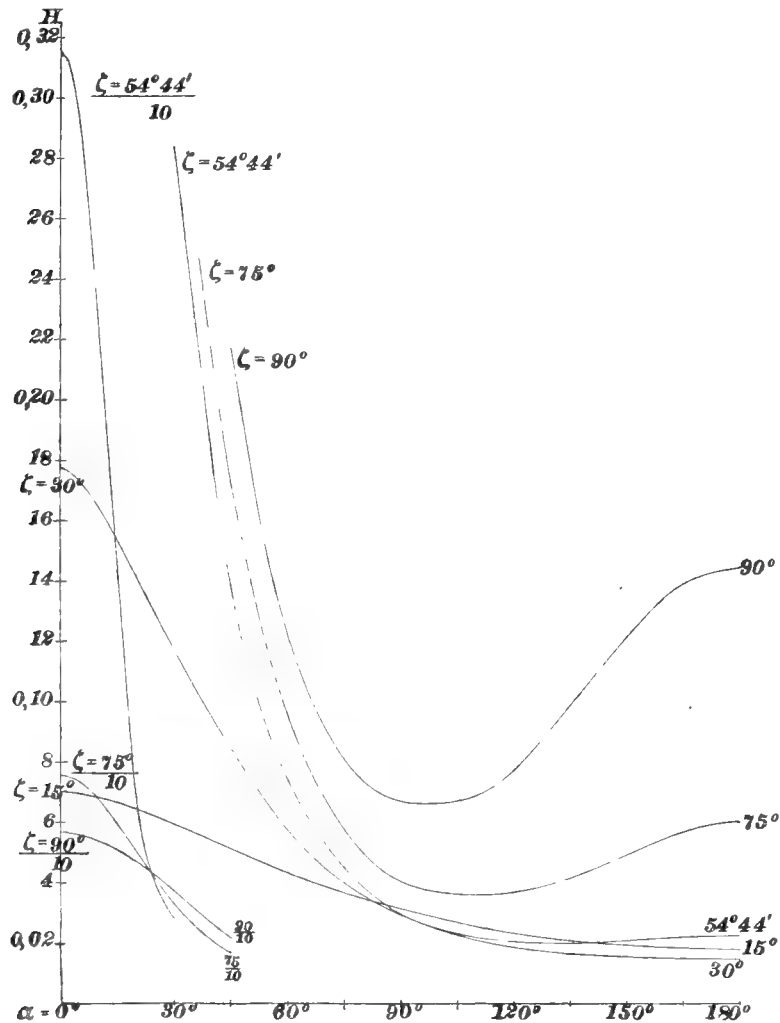


Fig. 99.

aus den Kurven entlang der Vertikalkreise die  $\zeta$  abgelesen, in denen jene Helligkeiten herrschten, und aus den Kurven entlang der Horizontalkreise die  $\alpha$ , wo jene  $H$  herrschten. Diese Punkte wurden in das Netz der geradlinig abgebildeten Vertikalkreise, und der durch konzentrische Kreise dargestellten Horizontalkreise eingetragen, und die Punkte von gleichem  $H$  verbunden.

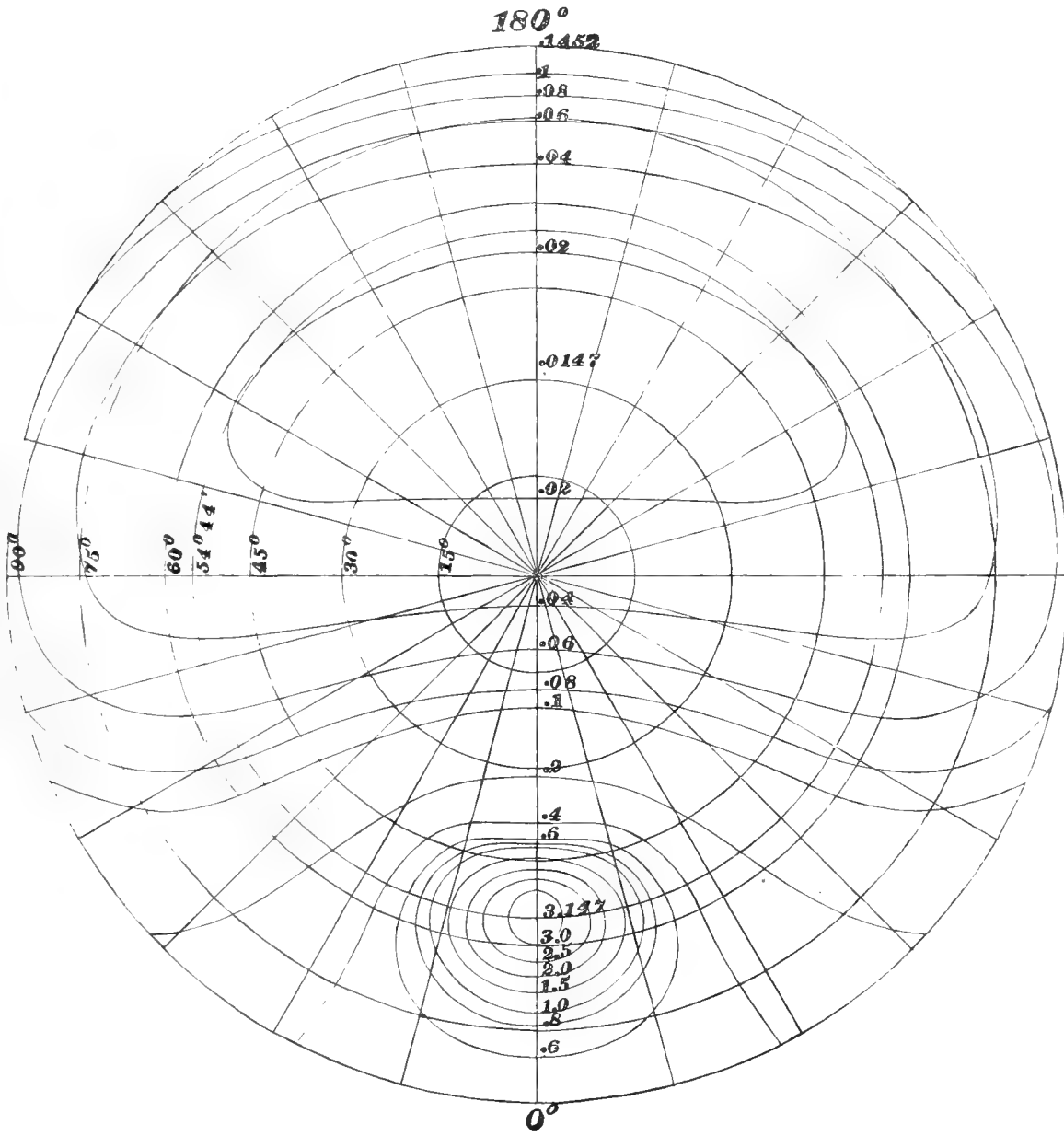


Fig. 100.

Hellegleichn des klaren Himmels für den Zenitabstand der Sonne von  $54^{\circ}44'$ . Gesamthelligkeit  $H$ , erzeugt durch unmittelbare Sonnenbestrahlung, Luft- und Bodenreflex. Flächentreue Projektion.



und danach sind die in Fig. 101 und 102 verkleinert wiedergegebenen Kurven  $\zeta, H_1$  und  $\alpha, H_1$  gezeichnet. Die Kurve  $\zeta = 90^\circ$  der Fig. 102 verläuft so nahe der  $\alpha$ -Achse, daß sie nicht von dieser getrennt gezeichnet werden konnte. Sie wurde daher weggelassen. Zur genaueren Bestimmung der Form der Kurven in der Nähe der steilen Maxima wurden die  $H_1$  noch für vier weitere Punkte des Himmels berechnet: für  $\alpha = 0^\circ, \zeta = 81^\circ$  ist

Fig. 101  
und 102

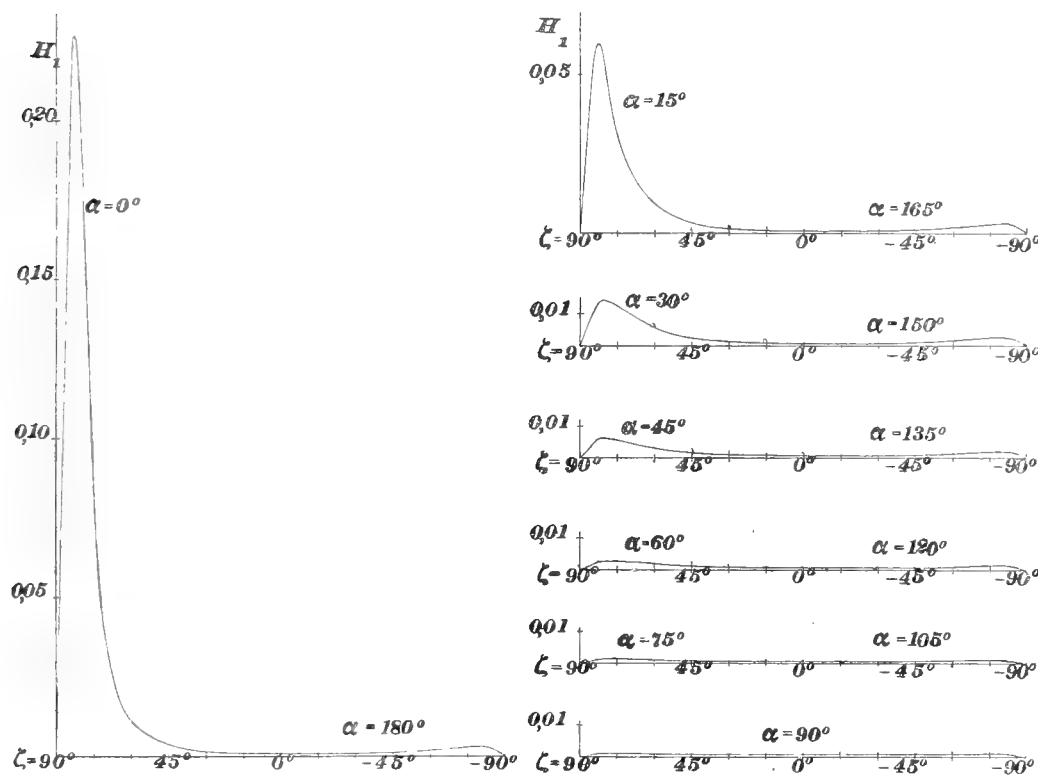


Fig. 101.

$H_1 = 0,2088$ ; für  $\alpha = 0^\circ, \zeta = 84^\circ, 0,2221$ ; für  $\alpha = 1^\circ 30', \zeta = 82^\circ 30', 0,2225$  und für  $\alpha = 4^\circ 30', \zeta = 82^\circ 30', 0,2024$ . Nach diesen Kurven wiederum wurden in Fig. 103 die Hellegleichen gezeichnet für  $H_1 = 0,2; 0,18; 0,15; 0,1; 0,07; 0,05; 0,03; 0,01; 0,008; 0,006; 0,004; 0,002; 0,001; 0,0008; 0,0006$ . Fig. 103.

Die Punkte, für die  $H_2$  berechnet wurde, finden sich nebst den für  $H_2$  berechneten Werten in Tab. 73. Nach diesen Werten sind die Helligkeits- Tab. 73.

Tabelle 73.

Helligkeit des Himmels, hervorgebracht durch einmalige Reflexion  $H_2$ , oder durch unendlich vielfache Reflexion ( $H_2$ ) der Atmosphäre, in den Punkten  $A, B, \dots$  des Himmels, für den Fall, dass die Sonne im Horizont steht.

Punkt	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L	M	N	O'
$\zeta$	$0^\circ$	$45^\circ$	$45^\circ$	$45^\circ$	$45^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$90^\circ$	$90^\circ$	$90^\circ$	$90^\circ$	$75^\circ$	$75^\circ$	$82^\circ 30'$
$\alpha$	$0^\circ$	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$	$0^\circ$	$45^\circ$	$0^\circ$
$H_2$	0,00033	00149	00168	00101	00070	00085	02250	00532	00119	00120	00143	03060	00778	04400
( $H_2$ )	00086	00388	00438	00263	00182	00222	05870	01387	00310	00313	00373	07980	02216	11470

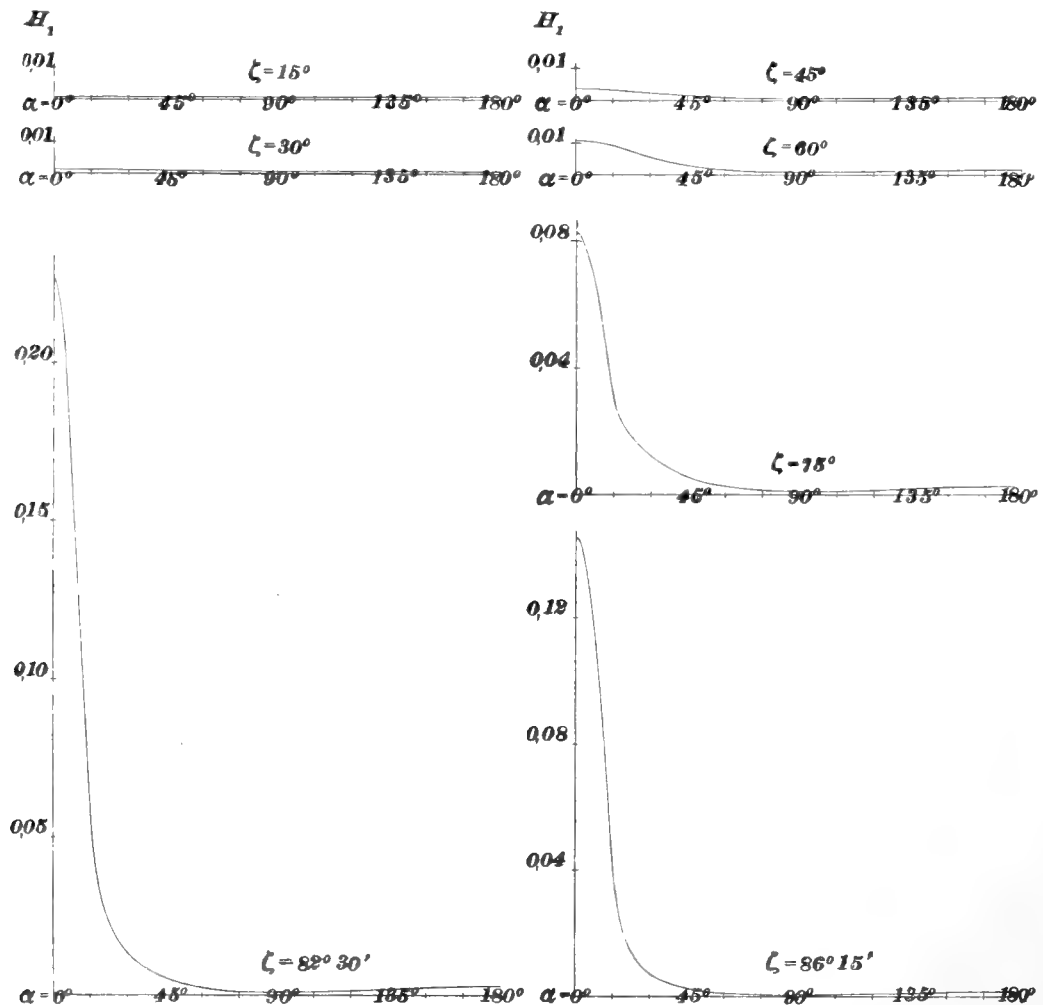


Fig. 102.

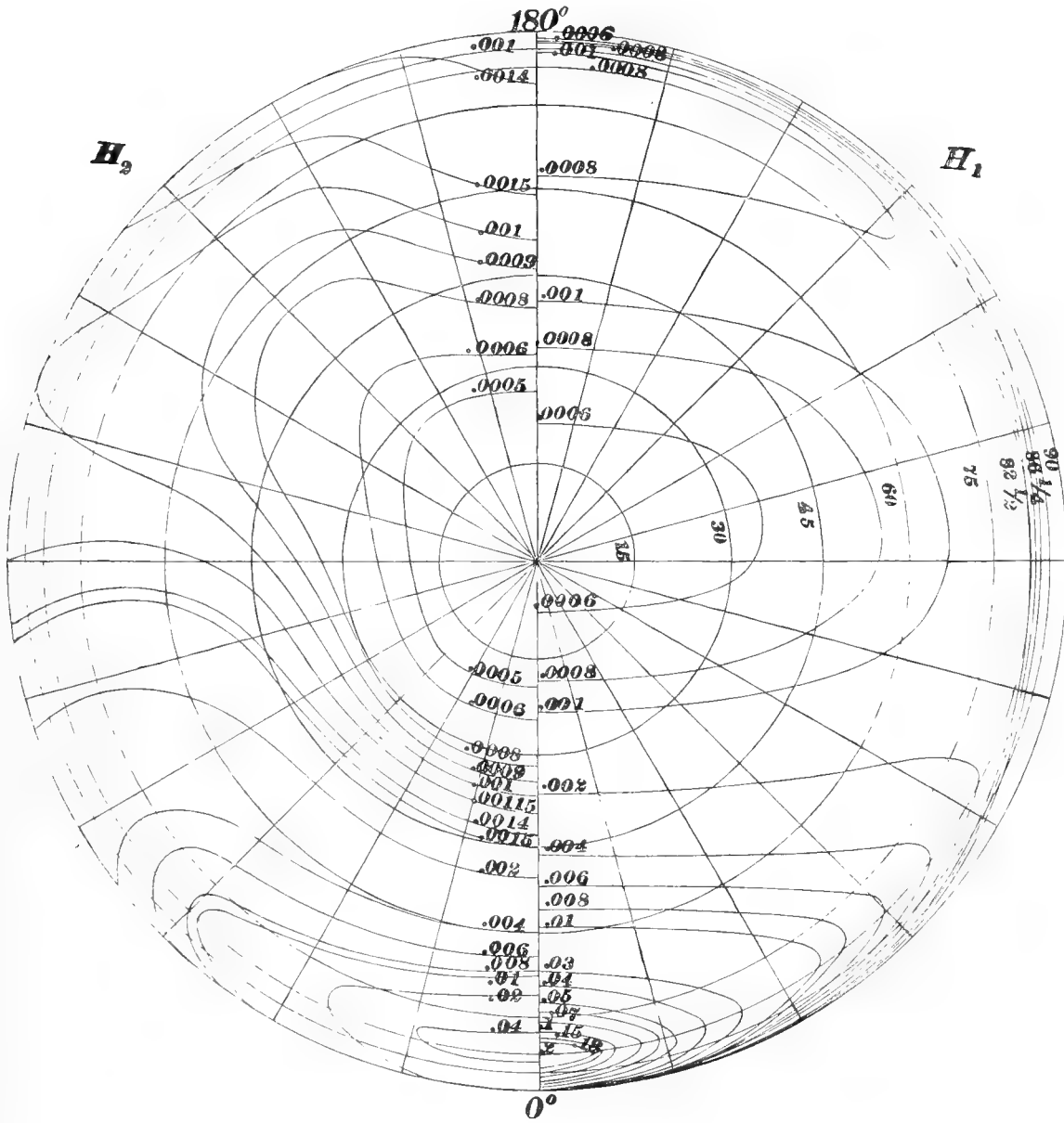
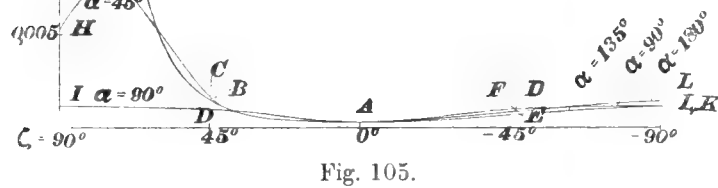
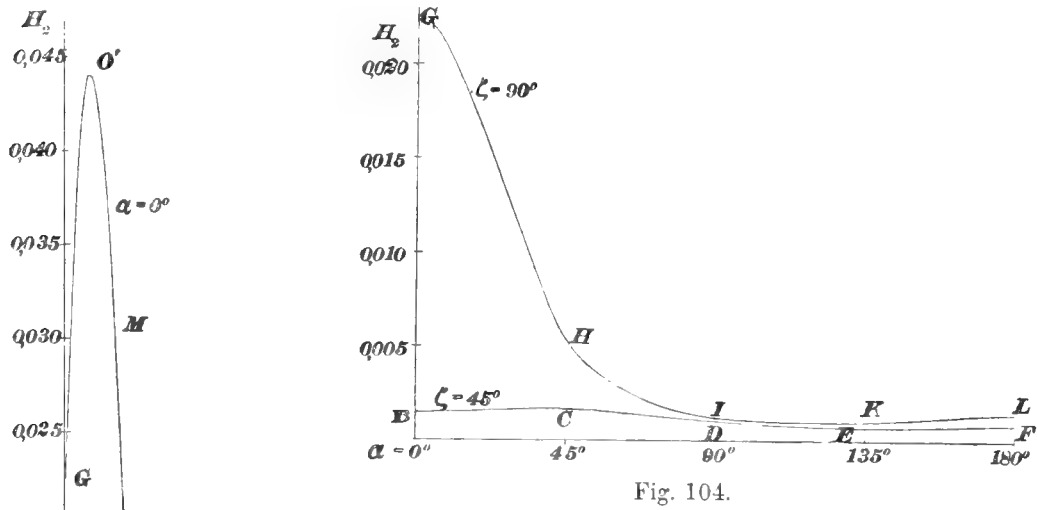


Fig. 103.

Helligkeiten des klaren Himmels für den Fall, daß die Sonne im Horizont steht,  $H_1$  erzeugt durch unmittelbare Sonnenbestrahlung (rechte Hälfte der Figur),  $H_2$  erzeugt durch einmaligen Luftreflex (linke Hälfte der Figur). Flächentreue Projektion.

Fig. 104. kurven entlang der Horizontalkreise  $\zeta = 45^\circ$  und  $\zeta = 90^\circ$  (Fig. 104) und  
 Fig. 105. der Vertikalkreise  $\alpha = 0^\circ$  und  $180^\circ$ ,  $45^\circ$  und  $135^\circ$ ,  $90^\circ$  (Fig. 105) gezeichnet.  
 Fig. 103. Nach diesen sind in Fig. 103 die Hellegleichen gezeichnet für  $H_2 = 0,04$ ;  
 0,02; 0,01; 0,008; 0,006; 0,004; 0,002; 0,0015; 0,0014; 0,00115; 0,001;  
 0,0009; 0,0008; 0,0006; 0,0005.



Bestimmt man nun aus den Hellegleichen für  $H_1$  und  $H_2$  den Faktor, mit dem  $H_2$  multipliziert werden muß, um das, die unendlichvielfache Rückstrahlung berücksichtigende ( $H_2$ ) zu erhalten, so gewinnt man den Wert 2,607 statt 1,414 in Nr. 165. Mit 2,607 wurden alle für  $H_2$  berechneten Werte multipliziert und mit den so erhaltenen Werten ( $H_2$ ), die der Tab. 73 beigelegt sind, wie in Nr. 166 die Kurven  $\zeta, (H_2)$  und  $\alpha, (H_2)$  gezeichnet.



Aus diesen wurden dann die Helligkeiten des gesamten Luftreflexes ( $H_2$ ) entnommen für alle Punkte des Himmels, für die  $H_1$  berechnet worden war, und in Tab. 74 eingetragen.

Tab. 74.

Tabelle 74.

Helligkeiten ( $H_2$ ) am Himmel, hervorgebracht durch die unendlich vielfache Zurückwerfung des Sonnenlichtes durch die Atmosphäre, für den Fall, dafs die Sonne im Horizont steht.

$\alpha =$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$	$105^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$165^\circ$	$180^\circ$
$\zeta$	0,												
$0^\circ$	00086	00086	00086	00086	00086	00086	00086	00086	00086	00086	00086	00086	00086
$15^\circ$	00105	00107	00111	00114	00112	00104	00104	00103	00098	00096	00096	00100	00104
$30^\circ$	00185	00193	00200	00201	00200	00196	00185	00160	00141	00128	00128	00150	00156
$45^\circ$	00388	00407	00440	00438	00404	00335	00263	00218	00190	00182	00183	00212	00229
$60^\circ$	01060	01040	00966	00857	00718	00486	00313	00246	00240	00243	00250	00277	00314
$75^\circ$	07980	06600	03640	02216	00908	00528	00322	00260	00264	00264	00314	00338	00360
$82^\circ 30'$	11470	09600	04140	02060	00893	00517	00316	00264	00276	00289	00343	00367	00375
$86^\circ 15'$	08780	08300	03810	01905	00857	00502	00312	00265	00277	00303	00353	00375	00383
$90^\circ$	05870	04890	03030	01387	00680	00435	00310	00265	00277	00313	00357	00376	00385

Der neu gefundene Wert 2,607 wurde nun auch der Berechnung von  $H_3$  zugrunde gelegt. Er ergibt, für  $\sigma = 90^\circ$ ,  $\vartheta = \vartheta'' = 0,378$  (Tab. 65)<sup>1)</sup> statt 0,205 bei Benutzung des Wertes 1,414.  $\vartheta$  ist aber die einzige Gröfse in  $H_3$ , die mit  $\sigma$  veränderlich ist, und zwar tritt sie nach Formel (93) als vervielfältigender Faktor des von  $\sigma$  unabhängigen Integrals auf. Da nun, in Nr. 170,  $\vartheta = 0,515$  gesetzt ist, so erhalten wir die neuen  $H_3$ , wenn wir in Tab. 70 alle Werte mit  $\frac{0,378}{0,515}$  multiplizieren. Die Ergebnisse sind in Tab. 75 eingetragen, wobei die beiden in Tab. 70 fehlenden Werte mit Hilfe einer kleinen Kurve eingeschaltet wurden.

Die Kombination der Tabellen 72, 74 und 75 nach Gleichung (94) ergibt die Gesamthelligkeiten  $H$  der Tab. 76. Nach dieser Tabelle wurden

<sup>1)</sup> Hier wurde natürlich die Zeile ( $\vartheta''$ ) verwendet.

die Kurven  $\zeta, H$  und  $\alpha, H$  gezeichnet, von denen die für  $\alpha = 0^\circ, 180^\circ; 30^\circ, 150^\circ; 60^\circ, 120^\circ; 90^\circ$  und für  $\zeta = 30^\circ; 60^\circ; 82^\circ 30'; 86^\circ 15'; 90^\circ$  verkleinert in Fig. 106 und 107 wiedergegeben sind, und nach diesen endlich

Fig. 106  
u. 107.

Tabelle 75.

Helligkeiten  $H_3$  am Himmel, hervorgebracht durch Bodenreflex, für den Fall, dass die Sonne im Horizont steht.

Zenitdistanz $\zeta$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$82^\circ 30'$	$86^\circ 15'$	$90^\circ$
$H_3$	0,00062	00067	00075	00086	00123	00252	00414	00566	00829

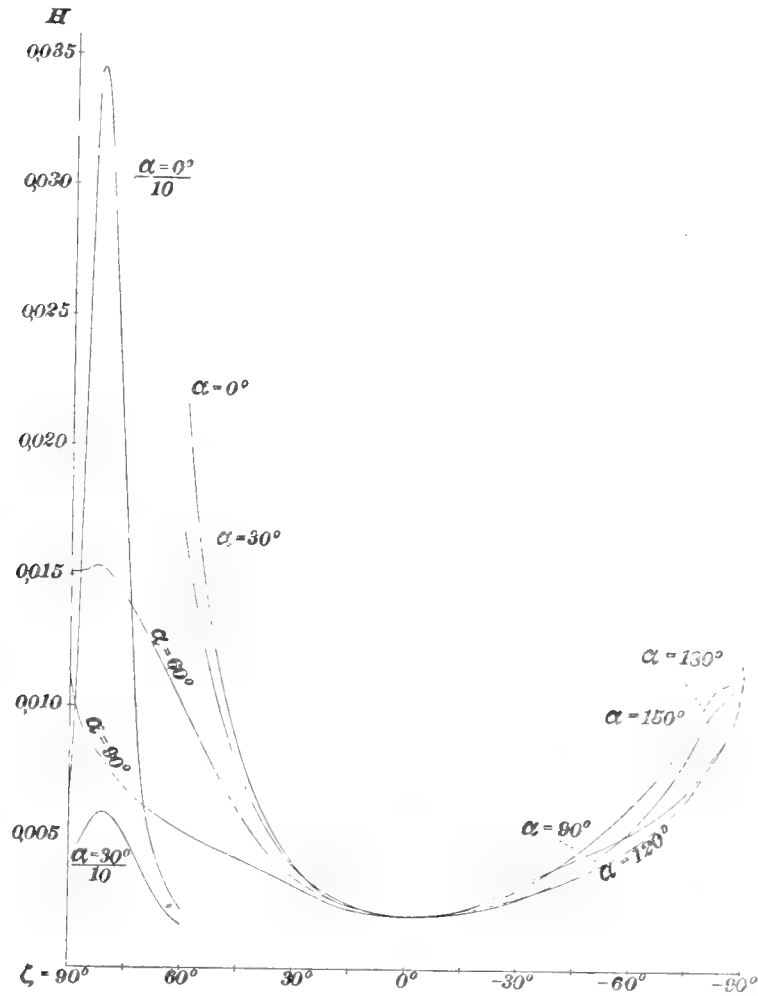


Fig. 106.

sind in Fig. 108 die Hellegleichen gezeichnet für  $H = 0,35; 0,3; 0,25; 0,2; 0,15; 0,1; 0,07; 0,05; 0,03; 0,017; 0,01; 0,008; 0,006; 0,005; 0,004; 0,003; 0,0025$ .

Tabelle 76.

Gesamthelligkeit  $H$  des Himmels für den Fall, dafs die Sonne im Horizont steht.

$\alpha =$	$0^0$	$15^0$	$30^0$	$45^0$	$60^0$	$75^0$	$90^0$	$105^0$	$120^0$	$135^0$	$150^0$	$165^0$	$180^0$
$\zeta$	0,												
$0^0$	00202	00202	00202	00202	00202	00202	00202	00202	00202	00202	00202	00202	00202
$15^0$	00242	00243	00247	00246	00241	00232	00226	00223	00221	00217	00217	00220	00224
$30^0$	00402	00403	00393	00370	00349	00342	00319	00294	00273	00266	00269	00295	00301
$45^0$	00839	00813	00766	00692	00600	00502	00420	00372	00351	00351	00370	00403	00435
$60^0$	02269	02088	01669	01281	01011	00715	00522	00459	00462	00496	00531	00581	00624
$75^0$	16522	09873	05012	02996	01408	00913	00682	00621	00655	00710	00809	00859	00887
$82^0 30'$	34464	15904	05854	03024	01534	01033	00818	00777	00824	00897	01003	01060	01078
$86^0 15'$	23366	12914	05094	02738	01520	01090	00904	00873	00908	00974	01055	01093	01106
$90^0$	06715	05724	03860	02217	01509	01264	01139	01094	01106	01142	01186	01205	01214

176. Helligkeit des Himmels für den Fall, dafs die Sonne im Zenit steht. Für  $\sigma = 0^0$  wird die Helligkeit dieselbe für alle Punkte eines und desselben Horizontalkreises; das Azimut  $\alpha$  fällt hier ganz weg.

Tabelle 77.

Helligkeit des Himmels für den Fall, dafs die Sonne im Zenit steht, hervorgebracht durch unmittelbare Einwirkung der Sonne  $H_1$ , durch einmaligen Luftreflex  $H_2$ , durch unendlichvielfache Rückstrahlung der Atmosphäre ( $H_2$ ), durch Bodenreflex  $H_3$ ; Gesamthelligkeit  $H$ .

$\zeta =$	$0^0$	$4^0$	$7^0 30'$	$10^0$	$15^0$	$30^0$	$45^0$	$60^0$	$75^0$	$90^0$
					0,					
$H_1$	1,87400	1,72000	1,39700	1,10700	52200	10100	05000	03200	02500	02800
$H_2$	0,05480	0,05330	0,04790	0,04280	03370	01630	01016	00819	01200	02600
( $H_2$ )	0,06540	0,06370	0,05710	0,05110	04020	01940	01212	00977	01430	03100
$H_3$	0,00156	0,00158	0,00161	0,00164	00167	00188	00216	00309	00631	02078
$H$	1,941	1,785	1,456	1,1597	5639	1223	0643	0449	0456	0798

Die Hellegleichen werden Horizontalkreise und es ist nicht mehr nötig, sie zu zeichnen.  $H_1$  wurde berechnet für alle in Tab. 77 angegebenen Zenitdistanzen, welche die Ergebnisse der Rechnung enthält. Die Kurve  $\zeta, H_1$  wurde gezeichnet, sie ist in Fig. 109 verkleinert wiedergegeben.  $H_2$  wurde

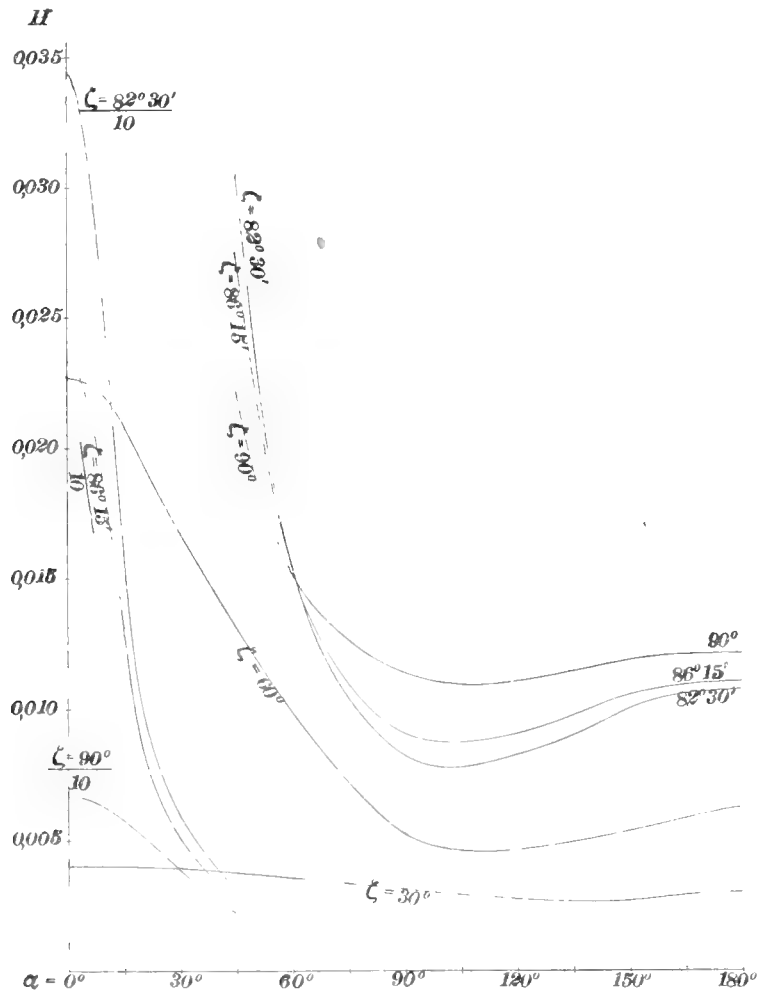


Fig. 107.

nur für die Zenitdistanzen  $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  berechnet. Die zu Tab. 77 noch fehlenden Werte wurden mittelst der Kurve  $\zeta, H_2$  (Fig. 109) eingeschaltet.

Das Verhältnis der unendlichvielfachen zu der einfachen Rückstrahlung der Atmosphäre kann man hier ohne die Hellegleichen finden. Stellt nämlich  $\sin \zeta d\zeta d\alpha$  ein Flächenelement der Himmelskugel vom Halbmesser Eins dar,

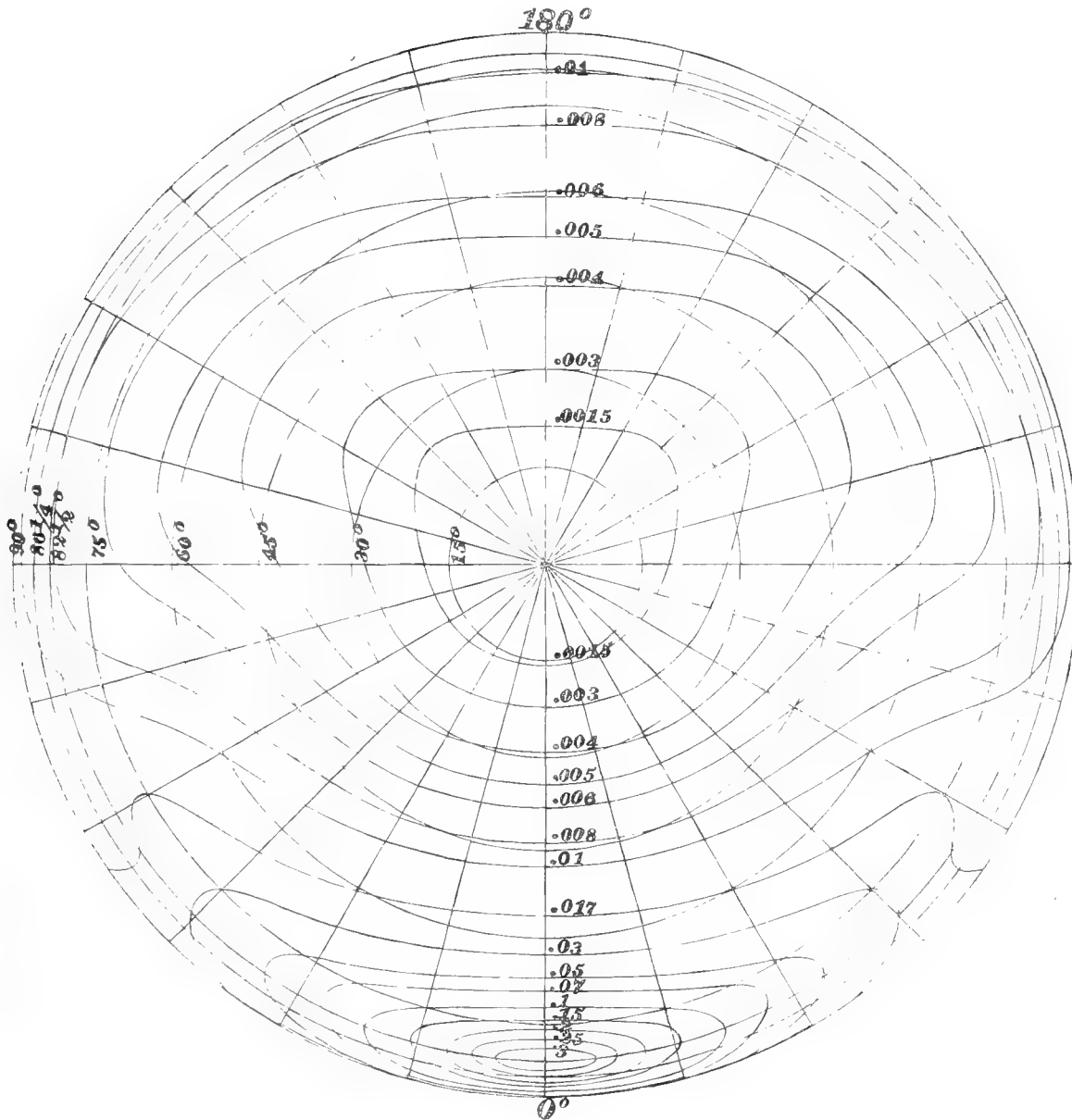


Fig. 108.

Hellegleichen des klaren Himmels für den Fall, daß die Sonne im Horizont steht. Gesamthelligkeit  $H$ , erzeugt durch unmittelbare Sonnenbestrahlung, Luft- und Bodenreflex. Flächentreue Projektion.

so braucht man nur das Verhältnis der beiden über alle Elemente der Himmelskugel zu erstreckenden Summen  $\Sigma H_2 \sin \zeta d\zeta d\alpha$  und  $\Sigma H_1 \sin \zeta d\zeta d\alpha$  zu bilden und mit diesem in die Formel für  $(H_2)$  auf S. 152 einzugehen. Dieses Verhältnis findet man, da  $H_2$  und  $H_1$  von  $\alpha$  nicht abhängen und die

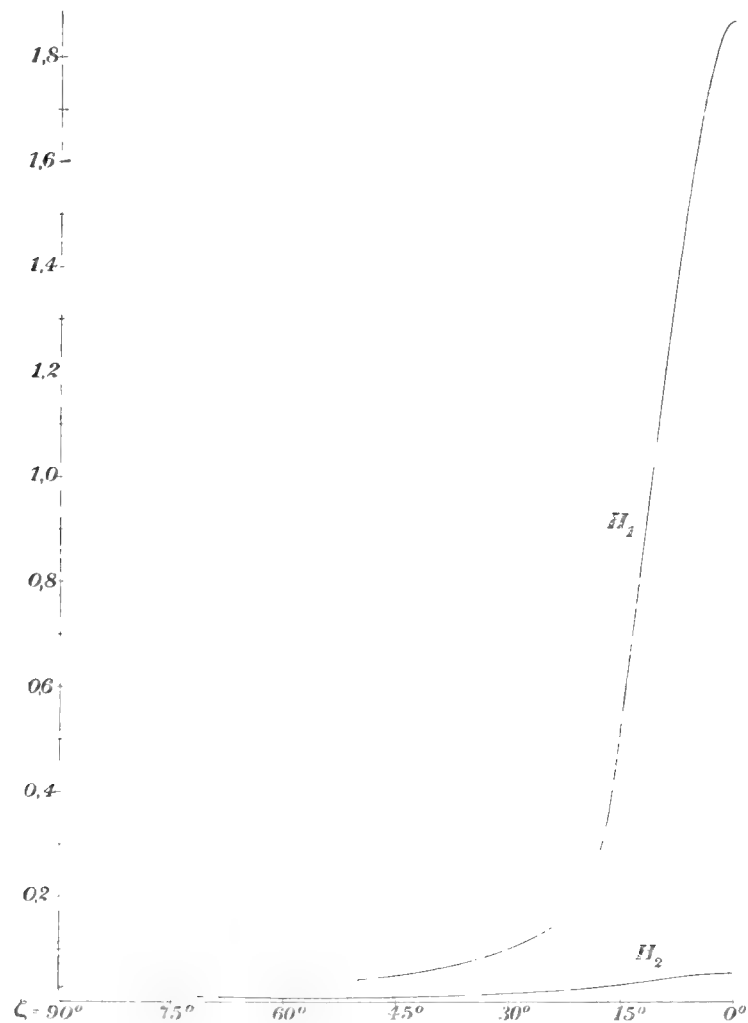


Fig. 109.

Summierung nach  $\alpha$  daher überflüssig wird, indem man nach Tab. 77 die Kurven  $\zeta, H_2 \sin \zeta$  und  $\zeta, H_1 \sin \zeta$  zeichnet und mit dem Planimeter ausmifst. Diese Kurven sind hier nicht wiedergegeben. Es ergibt sich schließlich Tab. 77.  $(H_2) = 1,192 H_2$ . Die Werte  $(H_2)$  sind dann in Tab. 77 eingetragen, die

Werte  $H_3$  für die Rückstrahlung des Bodens findet man unter Zugrundelegung des durch Einsetzen der Zahl 1,192 statt 1,414 sich ergebenden  $\vartheta = 0,947$  (Tab. 65)<sup>1)</sup> durch Multiplikation aller Werte der Tab. 70 mit  $\frac{0,947}{0,515}$  und Ergänzung mittelst einer kleinen Kurve an den Stellen, wo diese

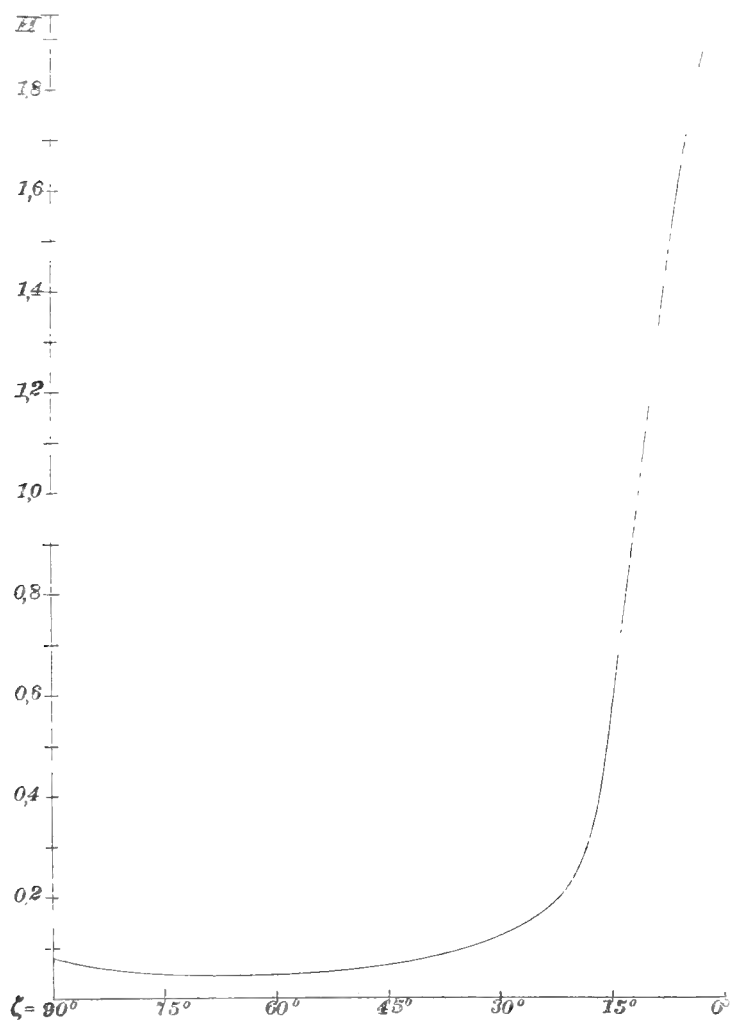


Fig. 110.

Tabelle Lücken aufweist. Auch die Werte  $H_3$  sind in Tab. 77 eingetragen. Endlich werden die Werte  $H$  für die Gesamthelligkeit nach Gleichung (94) berechnet. Zum Schlusse ist nach diesen Werten  $H$  die Kurve  $\zeta, H$  (Fig. 110) Fig. 110.

<sup>1)</sup> Hier wurde wie auf S. 169 die Zeile ( $\vartheta''$ ) der Tabelle verwendet.

gezeichnet, die hier zugleich die Stelle der Hellegleichfiguren 100 und 108 vertritt.

**177. Die größten Werte von  $H_1$  und ihre Lage bei verschiedenen Zenitdistanzen der Sonne.** Wie die Tabellen 66 und 72 und die Figuren 87 und 101 zeigen, liegen die größten Werte der durch unmittelbare Sonnenbestrahlung erzeugten Helligkeit  $H_1$  in dem durch die Sonne gehenden Vertikalkreise, und zwar nicht genau an dem jeweiligen Orte der Sonne. Bezeichnen wir den größten Wert, den  $H_1$  auf einer solchen

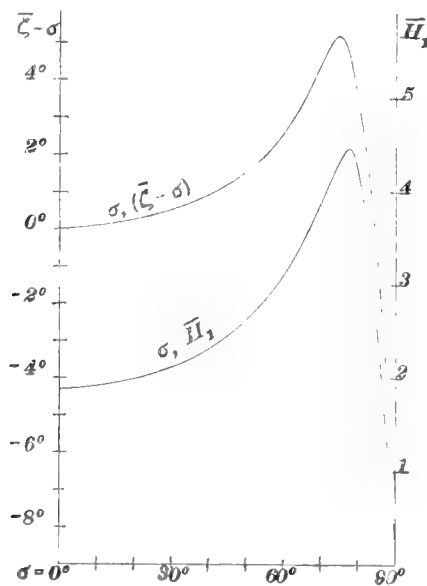


Fig. 111.

Kurve annimmt, mit  $\bar{H}_1$  und die Lage dieses Maximums, also den zugehörigen Wert von  $\zeta$ , mit  $\bar{\zeta}$ , so ist der Ausdruck  $\bar{\zeta} - \sigma$  in der Kurve  $\alpha = 0^\circ$  der Fig. 87 positiv, in Fig. 101 dagegen negativ. Es ist nun von Interesse, zu erfahren, welche Werte die Ausdrücke  $\bar{\zeta} - \sigma$  und  $\bar{H}_1$  der Reihe nach annehmen, wenn  $\sigma$  alle Werte von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  durchläuft. Zu diesem Zwecke wurden die in der Nähe der Maxima liegenden Teile der Kurven  $\alpha = 0^\circ$ , den Figuren 87 und 101 entsprechend, auch noch für einige andere Werte von  $\sigma$  berechnet und gezeichnet und aus den Zeichnungen die Werte von



$\bar{H}_1$  und  $\bar{\zeta}-\sigma$  entnommen. Die Ergebnisse dieser Zeichnungen und der Kurven  $\alpha = 0^\circ$  der Figuren 87 und 101 sowie der Kurve  $\zeta, H_1$  der Fig. 109 sind in Tab. 78 eingetragen. Nach dieser Tabelle wurden die Kurven  $\sigma, \bar{H}_1$  Tab. 78. und  $\sigma, (\bar{\zeta}-\sigma)$  gezeichnet, welche in Fig. 111 verkleinert wiedergegeben sind. Fig. 111.

Tabelle 78.

Größte Werte  $\bar{H}_1$ , welche die unmittelbare Sonnenbestrahlung  $H_1$  für ein bestimmtes  $\sigma$  annimmt, und Unterschiede  $\bar{\zeta}-\sigma$  der Zenitabstände der Werte  $\bar{H}_1$  und der Sonne, für verschiedene Werte von  $\sigma$ .

$\sigma$	$0^\circ$	$54^\circ 44'$	$64^\circ$	$75^\circ$	$80^\circ$	$85^\circ$	$90^\circ$
$\bar{H}_1$	1,874	2,830	3,385	4,333	4,230	2,536	0,230
$\bar{\zeta}-\sigma$	0	+ 1,55	+ 3,10	+ 5,10	+ 3,20	- 0,40	- 7,00



Zweiter Teil.

Die Beleuchtung durch die Sonne, den klaren  
Himmel und die Rückstrahlung von Körpern.



## Erster Abschnitt.

### Die Beleuchtung durch die Sonne.

Ist  $L$  die Lichtmenge, welche die Sonne bei senkrechter Bestrahlung auf eine Fläche von 1 qm schickt, und  $\varepsilon$  der Einfallswinkel für irgend eine beleuchtete Fläche, so ist

$$B = L \cos \varepsilon$$

die Beleuchtungsstärke dieser Fläche. Nimmt man nun  $L$  als Einheit dieser Beleuchtungs- oder Lichtstärken, setzt also  $L = 1$ , so ist

$$B = \cos \varepsilon.$$

Man erhält daher auf einer krummen Fläche eine Linie von der gleichförmigen Beleuchtungsstärke  $B = \cos \varepsilon$  oder die Lichtgleiche oder Isophote  $\cos \varepsilon$ , als diejenige Linie, für welche an jeder Stelle derselbe Einfallswinkel  $\varepsilon$  herrscht.

Da es nun hier durchaus nicht auf die Verschiedenartigkeit des Verhaltens verschiedener Flächen, sondern nur auf das Eigentümliche der Beleuchtung ankommt, so werden wir als beleuchtete krumme Fläche die einfachste, dabei aber die für uns lehrreichste Fläche, die Kugel betrachten.

**178. Beleuchtung der Kugel, ihre Beleuchtungsstärke und ihre Lichtgleichen.** Ist Fig. 112 die Projektion der Kugel auf die durch

den Lichtstrahl  $l$  gehende Vertikalebene, so herrscht die größte Lichtstärke 1 an der Stelle 1, wo der dem Lichte zugekehrte Halbmesser  $M 1$  die Oberfläche trifft, also  $\varepsilon = 0$  ist, und die Lichtstärke 0 da, wo  $\varepsilon = 90^\circ$  ist, wo also die Lichtstrahlen die Oberfläche berühren, d. i. an der Licht- und Eigenschattengrenze, also an dem größten Kreise, dessen Ebene senkrecht auf dem Lichtstrahle steht.

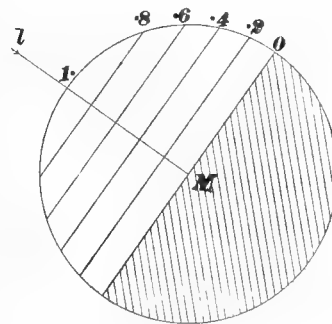


Fig. 112.

Teilt man nun den Halbmesser  $M1$  in zehn, oder in der Figur nur in fünf gleiche Teile und legt durch die Teilungspunkte Ebenen senkrecht zu dem Lichtstrahle, so schneiden diese Ebenen die Kugel in Parallelkreisen, welche die Lichtgleichen  $\cdot 2, \cdot 4, \cdot 6, \cdot 8$  von den Lichtstärken  $0,2; 0,4; 0,6; 0,8$  sind. Denn entlang eines solchen Parallelkreises bilden die Flächennormalen oder Kugelhalbmesser gleiche Winkel mit dem Lichtstrahl  $l$ , und

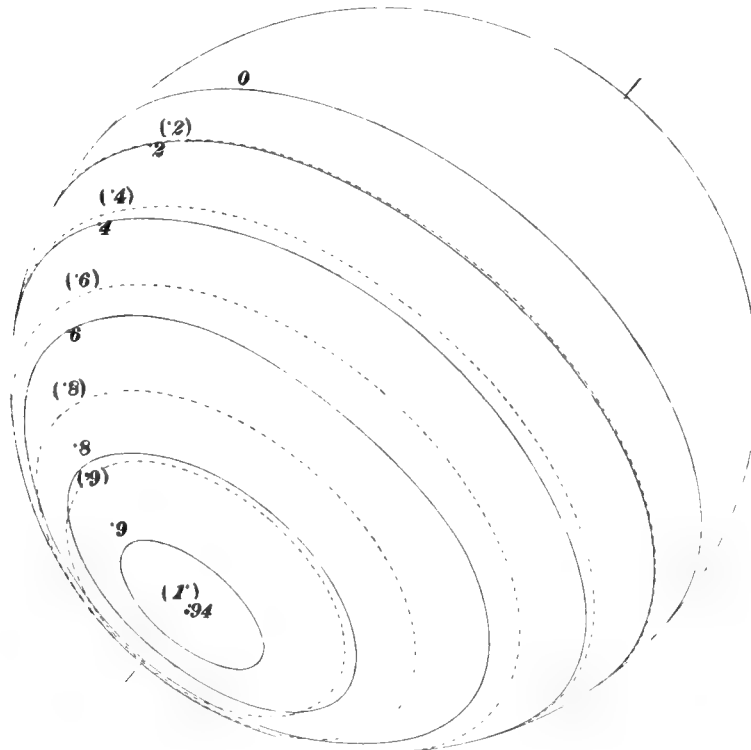


Fig. 113

Die Hellegleichen der Gypskugel, durch Sonnenbeleuchtung allein hervorgebracht. Die eingeklammerten Zahlen und gestrichelten Kurven gelten für ganz matte Oberflächen (Magnesiumoxyd)  $A = 1$ . Die nicht eingeklammerten Zahlen und die ausgezogenen Kurven gelten für Gyps.  $A = 1$ .

der Kosinus derselben ist gleich einem jener Abschnitte auf dem Halbmesser  $M1$ ; also gleich einer jener angegebenen Lichtstärken.

Fig. 113. In Fig. 113 ist die Projektion der Kugel auf die Horizontalebene gezeichnet, unter Beibehaltung des Lichtstrahls mit der angenommenen Zenitdistanz  $\sigma = 54^\circ 44'$ . Die Lichtgleichen, denen noch die von der Lichtstärke  $0,9$  zugefügt ist, erscheinen als ähnliche parallele Ellipsen, welche

gestrichelt gezeichnet und mit eingeklammerten Zahlen (0), (.2) . . . (.9) (1) bezeichnet sind.

Der Aufrifs oder die Projektion auf eine Vertikalebene, welche den Winkel von  $45^\circ$  mit der Vertikalebene des Lichtstrahls bildet, gibt bekanntlich den Lichtstrahl ebenfalls unter  $45^\circ$  gegen die Projektionsachse geneigt und stimmt daher mit dem Grundrifs der Fig. 113 vollständig überein. Bei dem in richtiger Weise zusammengefügtten Grund- und Aufrifs, wobei die Projektionsachsen einen Winkel von  $45^\circ$  mit dem Grund- und Aufrifs des Lichtstrahls bilden, stehen diese beiden aufeinander senkrecht. Es ist dies die gebräuchliche Darstellung der Lichtgleichen der Kugel.

**179. Die Helligkeit und die Hellegleichen.** Mit der Beleuchtungsstärke einer Fläche ist ihre Helligkeit proportional. Die auffallende Lichtmenge, multipliziert mit dem Rückstrahlungsvermögen oder der Weifse  $A$  (albedo), gibt die zerstreute Lichtmenge. Die Werte von  $A$ , die stets kleiner als 1 sind, sind auf S. 158 für einige Stoffe angegeben.

Mit  $A$  ist die Helligkeit ebenfalls proportional. Auferdem hängt sie aber noch von der Richtung des zerstreuten Lichtes, oder von der Richtung ab, in welcher man die Oberfläche betrachtet.

Ganz matt oder rauh nennt man eine Oberfläche, wenn ein solcher Einfluß nicht besteht. Und es gibt solche Oberflächen, wie Herr Angström durch seine Versuche über die Zerstreung der strahlenden Wärme gezeigt hat.<sup>1)</sup> Man kann eine solche Fläche herstellen durch einen Überzug mit dem feinen Niederschlag von Magnesiumoxyd. Derselbe ist amorph oder unkristallinisch und darin liegt wohl der Grund des Mangels einer Spiegelung. So fand er bei einem Einfallswinkel  $\varepsilon = 40^\circ$  und einem Ausfallswinkel  $\alpha = 60^\circ$  die Menge der zurückgeworfenen Wärme = 16,4; 15,6; 17,5, je nachdem die Ausfallsebene mit der Einfallsebene den Winkel (das Azimut) von  $0^\circ$ ,  $180^\circ$  oder  $90^\circ$  bildete. Und selbst bei dem Ausfallswinkel von  $80^\circ$  war die zurückgestrahlte Wärmemenge 6,0 oder 5,6, je nachdem das Azimut 0 oder  $180^\circ$  betrug. Das sind also kaum merkbare Unterschiede, während

<sup>1)</sup> K. Angström, Über die Diffusion der strahlenden Wärme von ebenen Flächen. Wied. Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. Bd. 26, 1885, S. 264.

bei Gyps, der kristallinisch ist, die Unterschiede, wie wir bald sehen werden, sehr bedeutend sind.

Wird nun bei ganz matten Oberflächen  $A = 1$  angenommen, was aber nie ganz erreicht werden kann, so ist die Helligkeit  $H$  nur von der Beleuchtungsstärke abhängig. Und da wir die Helligkeit gleich Eins gesetzt haben, wenn  $B = 1$  ist, so ist in den anderen Fällen bei  $A = 1$  auch

$$H = B - \cos \varepsilon.$$

Dann fallen die Linien gleicher Helligkeit mit denen gleicher Lichtstärke oder die Hellegleichen oder Isophengen mit den Lichtgleichen oder Isophoten zusammen. Dies ist der gewöhnlich angenommene Fall; dann bezeichnen die eingeklammerten Zahlen der Fig. 113 auch die Hellegleichen der Kugel.

Die meisten matten Körperoberflächen zerstreuen aber das auffallende Licht nach den verschiedenen Richtungen in verschiedener Stärke, was meist daher rührt, daß die Rauigkeiten von wechselnden kleinen ebenen Flächenstückchen oder Facetten begrenzt sind, welche spiegelnd wirken. Die größte Summe dieser Flächenstückchen liegt in der Richtung der Gesamtoberfläche und es liegen um so weniger in einer anderen Richtung, je größer deren Winkel mit der Gesamtoberfläche. Dadurch tritt neben der Licht zerstreuen eine spiegelnde Wirkung der Oberfläche ein, die um so größer wird, je größer der Einfallswinkel des beleuchtenden Strahles.

Die Art der Lichtzerstreuung wechselt mit der Körperoberfläche und kann nur durch Beobachtung bei jeder Art von Stoff und Beschaffenheit der Oberfläche ermittelt werden.

**180. Beobachtungen bei Gyps über die Art der Lichtzerstreuung.** Ich habe solche Beobachtungen bei gegossenem Gyps angestellt, der kristallinisch ist, d. h. aus lauter kleinen Kriställchen besteht, welche nach allen Seiten spiegeln. Sie sind in einer Festschrift und in Wiedemanns Annalen<sup>1)</sup> veröffentlicht, und ich will die Ergebnisse, nach denen wir nachher konstruieren wollen, hier im Auszug zusammenstellen.

<sup>1)</sup> Chr. Wiener, Die Zerstreuung des Lichtes durch matte Oberflächen. Festgabe v. d. Techn. Hochsch. i. Karlsruhe zum Jubiläum der 40jährigen Regierung S. K. H. des Großh. Friedrich von Baden, Druck der G. Braunschen Hofbuchdruckerei, 1892, S. 145 und in Wiedemanns Annalen d. Phys. u. Chem. N. F. Bd. 47, 1892, S. 638.



Der Einfallswinkel  $\varepsilon$  und der Ausfallswinkel  $\alpha$  sind die Winkel, welche der auf einen Punkt der Oberfläche fallende Lichtstrahl und der nach demselben Punkte gerichtete Sehstrahl mit der Flächennormale in diesem Punkte bilden;  $\nu$  ist der Neigungswinkel der Einfalls- und der Ausfallsebene, und zwar der Winkel, welchen die durch die Flächennormale begrenzten und den Lichtstrahl oder den Sehstrahl enthaltenden Halbebenen miteinander bilden. Dieser Winkel wird von 0 bis  $180^\circ$  gezählt; er heiße das Azimut.

Die Helligkeit  $H$  hängt im allgemeinen weit vorwiegend von  $\varepsilon$  ab und ist nahezu  $= \cos \varepsilon$ . Aber sie ist auch vom Ausfallswinkel beeinflusst und wird im allgemeinen um so kleiner, je größer der Ausfallswinkel, oder je mehr die Sehrichtung von der Normalen abweicht und in streifendes Sehen übergeht. Der Einfluß des Azimuts macht sich besonders geltend, wenn es nahezu  $180^\circ$  wird, wenn also der ausfallende Strahl gerade auf der entgegengesetzten Seite der Flächennormale liegt wie der einfallende. Besonders wenn der ausfallende Strahl sich dem von der allgemeinen Oberfläche gespiegelten nähert, wird die Helligkeit wesentlich größer als  $\cos \varepsilon$ , und zwar um so mehr, je größer  $\varepsilon$  und dann auch  $\alpha$  wird. Es tritt dann ein förmliches Spiegeln ein.

Es wurden nun die Helligkeiten  $H$  für wechselnde Ein-, Ausfallswinkel und Azimute ( $\varepsilon, \alpha, \nu$ ) gemessen, die Ergebnisse nach der Stetigkeit ausgeglichen und in den folgenden Figuren und Tabellen zusammengestellt. Als Einheit der Helligkeit diente diejenige, welche eine senkrecht beleuchtete und betrachtete Fläche zeigte ( $\varepsilon = \alpha = 0$ ). Bei den Versuchen wurden zwei gleiche ebene Gypsplatten angewendet, welche durch zwei möglichst gleich gehaltene Stearinkerzen beleuchtet wurden in einer durch Schirme voneinander unabhängig gehaltenen Weise. Die eine Platte wurde bei wechselnden Winkeln  $\varepsilon, \alpha, \nu$  von ihrem Lichte stets aus dem Abstände 1 m beleuchtet, die andere wurde stets senkrecht beleuchtet und betrachtet, und durch Annähern oder Entfernen ihres Lichtes wurden die Helligkeiten beider Flächen gleich gemacht. War dann der Abstand dieses Lichtes von seiner Platte  $= r$ , so war die Helligkeit beider Platten  $H = 1 : r^2$ ; und so war zu einer bestimmten durch Messung der Winkel erhaltenen Gruppe von  $\varepsilon, \alpha, \nu$  das  $H$  ermittelt.

Tab. 79.

Die Tabelle 79 gibt diese Helligkeiten, die in Abteilungen von unveränderlichem  $\varepsilon$  mit den beiden Eingängen  $\alpha$  und  $\nu$  zusammengestellt sind. Für jede Abteilung sind die Werte  $\cos \varepsilon$  der Beleuchtungsstärken angegeben, welche für ganz matte Flächen zugleich die Helligkeiten  $H$  sein würden. Die Abweichungen der  $H$  von  $\cos \varepsilon$  sind also die Wirkung der teilweisen Spiegelung.

Andererseits kann man das Gesetz der Lichtzerstreuung anschaulich machen durch die Helligkeitsflächen. Man erhält eine solche, wenn man bei festliegendem einfallenden Strahle, also bei unveränderlichem  $\varepsilon$ , auf jedem von dem betrachteten Flächenelemente aus gezogenen ausfallenden Strahle die in seiner Richtung erscheinende Helligkeit  $H$  aufträgt und durch die Endpunkte dieser Strecken eine Fläche legt. In den angeführten Abhandlungen sind photographische Abbildungen der Modelle solcher Flächen enthalten; die Fig. 114 gibt die Vertikalschnitte durch diese Flächen für  $\nu = 0$  und  $180^\circ$ , also für die in einer Ebene liegende Ein- und Ausfallsebene.

Fig. 114.

Tabelle 79.

Helligkeiten  $H$  für die Einfallswinkel  $\varepsilon$ , die Ausfallswinkel  $\alpha$  und die Azimute  $\nu$ .

$\alpha$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$82\frac{1}{2}^\circ$	$86\frac{1}{2}^\circ$	$90^\circ$
$\varepsilon = 0^\circ$	1,00	0,99	0,98	0,96	0,93	0,76	0,65	0,62	0,59

$\varepsilon = 15^\circ, \cos \varepsilon = 0,97.$								$\varepsilon = 30^\circ, \cos \varepsilon = 0,87.$							
$\alpha$	$\nu=0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$	$\alpha$	$\nu=0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$0^\circ$	0,	90	90	90	90	90	90	$0^\circ$	0,	76	76	76	76	76	76
$15^\circ$	91	91	91	91	91	91	91	$15^\circ$	77	77	77	77	77	77	76
$30^\circ$	93	93	93	93	93	93	93	$30^\circ$	80	80	79	79	79	78	78
$45^\circ$	94	93	92	92	92	93	94	$45^\circ$	82	82	81	80	81	83	86
$60^\circ$	91	90	88	89	90	91	92	$60^\circ$	78	78	78	78	79	86	91
$75^\circ$	68	74	75	76	76	77	83	$75^\circ$	60	68	71	72	72	74	83
$82\frac{1}{2}^\circ$	62	63	63	63	63	65	68	$82\frac{1}{2}^\circ$	53	61	64	64	65	67	73
$86\frac{1}{2}^\circ$	59	60	61	61	61	62	64	$86\frac{1}{2}^\circ$	50	57	61	62	62	64	69
$90^\circ$	56	57	58	59	59	60	60	$90^\circ$	48	53	58	58	58	60	64

$\varepsilon = 45^\circ, \cos \varepsilon = 0,71.$

$\alpha$	$\nu=0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
	0,						
$0^\circ$	62	62	62	62	62	62	62
$15^\circ$	62	62	62	62	62	61	60
$30^\circ$	63	63	63	63	62	62	62
$45^\circ$	63	63	63	63	63	66	87
$60^\circ$	60	63	64	65	66	74	94
$75^\circ$	50	58	62	63	64	67	72
$82\frac{1}{2}^\circ$	44	53	59	60	61	65	69
$86\frac{1}{4}^\circ$	42	49	57	58	59	64	68
$90^\circ$	40	46	55	56	58	62	67

$\varepsilon = 51^\circ 44', \cos \varepsilon = 0,58.$

$\alpha$	$\nu=0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
	0,						
$0^\circ$	52	52	52	52	52	52	52
$15^\circ$	51	51	51	51	50	50	49
$30^\circ$	51	51	51	50	50	49	49
$45^\circ$	50	51	52	52	52	54	65
$60^\circ$	48	51	54	54	55	62	97
$75^\circ$	42	48	53	54	56	61	71
$82\frac{1}{2}^\circ$	37	45	52	53	56	61	67
$86\frac{1}{4}^\circ$	34	42	51	52	55	61	66
$90^\circ$	32	38	50	51	55	61	65

$\varepsilon = 60^\circ, \cos \varepsilon = 0,50.$

$\alpha$	$\nu=0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
	0,						
$0^\circ$	47	47	47	47	47	47	47
$15^\circ$	46	46	46	46	45	44	43
$30^\circ$	45	45	45	44	43	43	42
$45^\circ$	43	44	46	46	46	48	52
$60^\circ$	41	45	48	48	49	55	98
$75^\circ$	37	43	48	49	52	58	70
$82\frac{1}{2}^\circ$	33	40	48	49	53	59	65
$86\frac{1}{4}^\circ$	32	37	47	49	53	60	64
$90^\circ$	28	35	47	48	53	60	63

$\varepsilon = 75^\circ, \cos \varepsilon = 0,26.$

$\alpha$	$\nu=0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
	0,						
$0^\circ$	24	24	24	24	24	24	0,24
$15^\circ$	23	23	23	23	23	23	0,22
$30^\circ$	22	22	22	22	22	21	0,20
$45^\circ$	21	22	22	22	23	24	0,24
$60^\circ$	21	24	25	25	26	30	0,42
$75^\circ$	22	24	28	28	31	38	2,04
$82\frac{1}{2}^\circ$	21	24	28	29	33	43	2,80
$86\frac{1}{4}^\circ$	19	23	30	31	35	45	1,80
$90^\circ$	16	22	30	32	36	47	1,40

$\varepsilon = 82\frac{1}{2}^\circ, \cos \varepsilon = 0,13.$

$\alpha$	$\nu=0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
	0,						
$0^\circ$	13	13	13	13	13	13	0,13
$15^\circ$	13	13	13	13	13	13	0,13
$30^\circ$	12	12	12	12	11	11	0,11
$45^\circ$	11	11	11	11	12	12	0,12
$60^\circ$	10	12	13	13	14	16	0,22
$75^\circ$	12	12	15	16	16	25	1,90
$82\frac{1}{2}^\circ$	11	12	16	17	18	29	5,00
$86\frac{1}{4}^\circ$	10	12	17	18	20	32	5,21
$90^\circ$	08	11	17	18	22	35	2,60

$\varepsilon = 86\frac{1}{4}^\circ, \cos \varepsilon = 0,07.$

$\alpha$	$\nu=0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
	0,						
$0^\circ$	07	07	07	07	07	07	0,07
$15^\circ$	07	07	07	07	07	07	0,07
$30^\circ$	06	06	06	06	06	06	0,06
$45^\circ$	05	05	05	05	05	05	0,06
$60^\circ$	05	06	07	07	07	08	0,11
$75^\circ$	06	07	08	09	10	12	1,30
$82\frac{1}{2}^\circ$	06	07	09	09	10	15	14,00
$86\frac{1}{4}^\circ$	05	06	09	09	11	16	14,40
$90^\circ$	04	06	09	09	11	18	14,00

Diese Helligkeitsflächen wären für ganz matte Flächen oder nach dem Lambert'schen Gesetze Halbkugeln vom Halbmesser  $\cos \varepsilon$ . Bei dem Gyps weichen sie etwas nach innen von diesen Kugeln zurück, wie die Figuren zeigen, haben aber in der Richtung der allgemeinen Spiegelung Ausbuchtungen, die um so größer werden, je größer  $\varepsilon$  ist.

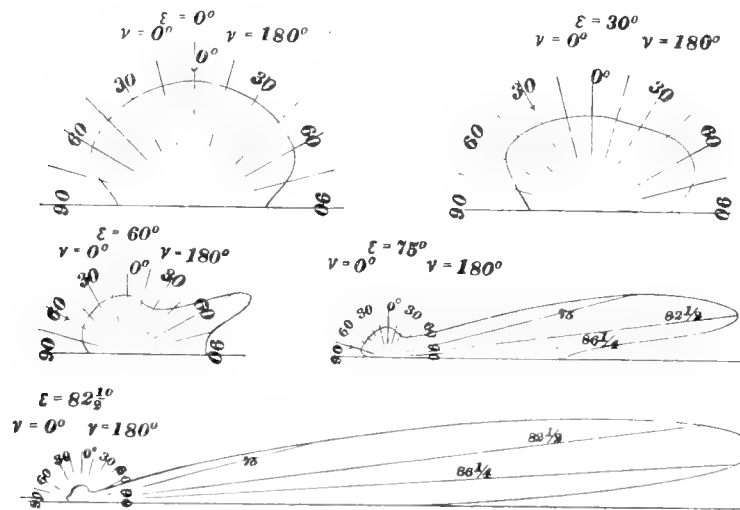


Fig. 114.

### 181. Hellegleichen der Gypskugel bei Lichteinfall in der gebräuchlichen Richtung.

Auf dieser Grundlage kann nun die Helligkeit der Gypskugel durch ihre Hellegleichen dargestellt werden. Bei Parallelbeleuchtung und Parallelprojektion, insbesondere bei senkrechter Projektion, ist die Richtung der Lichtstrahlen und der Sehstrahlen unveränderlich. Sei  $M$  der Mittelpunkt der Gypskugel,  $ML$  der einfallende Sonnenstrahl,  $MZ$  der projizierende Strahl, schneiden diese die Kugeloberfläche in  $L$  und  $Z$ , sei  $P$  ein beliebiger Punkt der Kugel, dessen Helligkeit bestimmt werden soll, so ist  $LMP = \varepsilon$  der Einfallswinkel,  $ZMP = \alpha$  der Ausfallswinkel, und der Winkel der Ebenen dieser Winkel an der Kante  $MP$  das Azimut  $\nu$ . In dem sphärischen Dreiecke  $LZP$  ist  $LP = \varepsilon$ ,  $ZP = \alpha$ ,  $\sphericalangle LPZ = \nu$ . Der Winkel  $ZML$  oder Bogen  $ZL$  sei  $= \sigma$ , es ist der Winkel der Lichtstrahlen mit den projizierenden Strahlen. Bei einer Grundriffszeichnung ist  $MZ$  lotrecht und  $\sigma$  die Zenitdistanz der Sonne.

Fig. 115.

Es erscheint nun zweckmäfsig, die Punkte  $P$  auf Parallelkreisen mit  $Z$  als Pol zu wählen, die dann auch in der Projektion als Kreise erscheinen; diese haben einen unveränderlichen Ausfallswinkel  $\alpha$ , und die Punkte  $P$  sind dann durch die Winkel  $LZP = \psi$  festgelegt, die sich in der Projektion ungeändert abbilden. Dann ist  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\psi$  gegeben, und daraus folgt

$$\cos \varepsilon = \cos \sigma \cos \alpha + \sin \sigma \sin \alpha \cos \psi, \quad \sin \nu = \sin \psi \frac{\sin \sigma}{\sin \varepsilon}.$$

$\nu$  erscheint hier zweideutig zwischen  $0$  und  $180^\circ$ , kann aber meist durch die Stetigkeit der Zahlen bestimmt werden. Andernfalls kann  $\nu$  durch  $\cotg \nu$ , also eindeutig, unmittelbar aus  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\psi$  erhalten werden.

Zu  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\nu$  sucht man dann durch dreifache Einschaltung aus der Tab. 79 das  $H$ . Zweckmäfsig wählt man für  $\alpha$  die in der Tabelle vorkommenden Werte, wodurch nur eine zweifache Einschaltung notwendig ist. Meist kann die Einschaltung proportional geschehen; in der Nähe der Spiegelungspunkte muß man aber ein kleines Kurvenstück aus den Zahlen der Tabelle (etwa auf quadriertem Papier) zeichnen. Hat man so die Helligkeiten  $H$  für eine Anzahl von Punkten des gewählten Kreises bestimmt, so ermittelt man wie früher durch Verzeichnung der Helligkeitskurve entlang des Parallelkreises die Punkte desselben von den Helligkeiten der angenommenen Stufen und zeichnet dann durch die gleichhellen Punkte der verschiedenen Kreise die Hellegleichen.

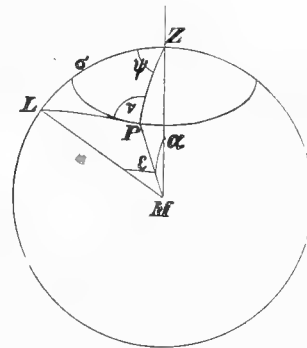


Fig. 115.

Wir wollen nun zuerst die Hellegleichen für die gebräuchliche Annahme mit der Zenitdistanz der Sonne  $\sigma = 54^\circ 44'$  für den Grundriß der Kugel bestimmen und in Fig. 113 eintragen, worin die Lichtgleichen schon gestrichelt verzeichnet sind. Man erhält durch eine leichte tabellarische Rechnung die in Tab. 80 eingetragenen Ergebnisse. Hiernach zeichnet man die Kurven der Hellegleichen mit den Ordinaten  $H$  für die Horizontalkreise  $\alpha = 15^\circ, 30^\circ, 54^\circ 44', 60^\circ, 90^\circ$  mit den Abszissen  $\psi$  und für den durch die Sonne gehenden Vertikalkreis ( $\psi = \nu = 0$  und  $180^\circ$ ) mit den Abszissen  $\alpha$  und bestimmt danach auf dem ersteren die  $\psi$ , auf dem letzteren die  $\alpha$ , welche zu den gewählten Abstufungen der Helligkeiten gehören. Dieselben sind:

Fig. 113.  
Tab. 80.  
Fig. 116.

$\alpha$	$H =$	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9
$15^\circ$	$\psi =$		$123^\circ$	$52^\circ$		
$30^\circ$		$132^\circ$	$98^\circ$	$65,5^\circ$	$17^\circ$	
$54^\circ 44'$		$101,5^\circ$	$81,5^\circ$	$60^\circ$	$34,5^\circ$	$17^\circ$
$60^\circ$		$97^\circ$	$79,5^\circ$	$58^\circ$	$32,5^\circ$	$14^\circ$
$90^\circ$		$77,5^\circ$	$56,5^\circ$			
$\psi$	$\alpha =$			$81^\circ$	$71,5^\circ$	$64^\circ$
$0^\circ$	$\{$			$8^\circ$	$29^\circ$	$43^\circ$
$180^\circ$	$\}$	$23^\circ$	$9^\circ$			

Tabelle 80.

Berechnung der Helligkeiten auf der Gypskugel für  $\sigma = 54^\circ 44'$ .

$\alpha$	0°			15°			30°			54°44'			60°			90°		
$\psi$	$\varepsilon$	$\nu$	$H$	$\varepsilon$	$\nu$	$H$	$\varepsilon$	$\nu$	$H$	$\varepsilon$	$\nu$	$H$	$\varepsilon$	$\nu$	$H$	$\varepsilon$	$\nu$	$H$
0°	54°44'	180°	52	39°44'	180°	66	24°44'	180°	81	12°19'	81°53'	94	5°16'	0°	93	35°16'	0°	45
30°				42.16	142.42	64	31.34	128.50	77	24.13	82.18	83	25.27	71.16	81	45.00	35.10	47
60°				48.28	109.36	59	45.25	97.41	63	48.10	71.27	60	49.59	67.04	59	65.55	50.37	38
90°				56.09	79.25	50	60.08	70.13	45	70.33	59.53	32	73.12	58.26	28	90.00	54.41	0
120°				63.11	52.17	41	72.54	47.39	25	90.00	44.55	0						
150°				68.02	26.06	34	81.43	24.20	13									
180°				69.44	0	31	84.44	0	10									

Diese Punkte trägt man mittels der  $\psi$  oder  $\alpha$  auf die Horizontalkreise oder auf den (geradlinig erscheinenden) Sonnenvertikalkreis in der Fig. 113 über und verbindet die Punkte gleicher Helligkeit  $H$ . Man erhält so die ausgezogenen Hellegleichen 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 0,9. Die erste 0,2 kann von derjenigen der ganz matten Fläche kaum unterschieden werden. Der hellste Punkt mit  $H = 0,94$  fällt sichtlich mit demjenigen  $H = 1$  für die ganz matte Oberfläche zusammen. Die neuen Hellegleichen zu denselben  $H$  rücken daher von den früheren aus gegen den hellsten Punkt vor. Sie sind in der Projektion anscheinend Ellipsen von etwas größerer Exzentrizität als die früheren.

Bildet man in der gebräuchlichen Weise den Grundrifs und Aufrifs, in denen der Lichtstrahl  $45^\circ$  mit der Projektionsachse bildet, so sind beide

Bilder kongruent mit demjenigen der Fig. 113, indem in beiden der Winkel des Lichtstrahles mit der Richtung der Projizierenden einen Winkel von  $54^{\circ} 44'$  bildet. Jedoch bilden die Hellegleichen im Grund- und Aufriss nicht die Projektionen derselben Linien an der körperlichen Kugel, da an einem Punkte der Kugel zwar  $\varepsilon$  für Grund- und Aufriss derselbe,  $\alpha$  und  $\nu$ , und daher auch  $H$  verschieden sind. Sind dagegen im Grund- und Aufriss die Winkel des Lichtstrahls gegen die Projektionsachse verschieden, so werden Grund- und Aufriss der Hellegleichen verschieden. Man bemerkt aus der Zeichnung, daß man bei der gebräuchlichen Annahme über die Stellung der Sonne keinen auffallenden Fehler begeht, wenn man die Gypskugel wie ganz matt betrachtet.

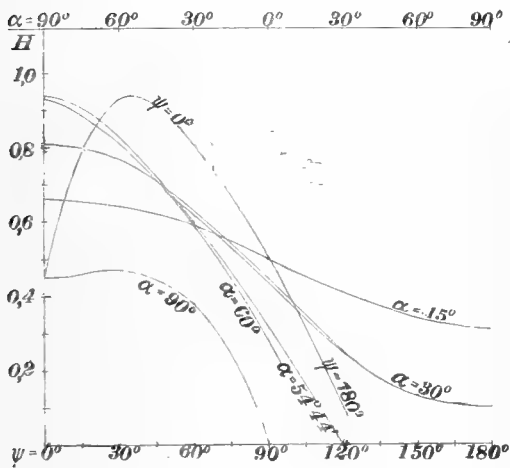


Fig. 116.

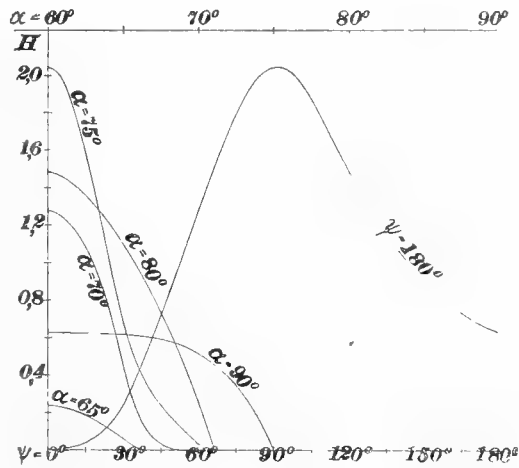


Fig. 117.

**182. Hellegleichen der Gypskugel bei großem Ein- und Ausfallswinkel des Lichtes.** Anders ist es aber bei einer Stellung der Sonne, bei welcher große Ein- und Ausfallswinkel  $\varepsilon$  und  $\alpha$  auftreten und daher eine auffallende Spiegelung eintritt. Daher habe ich noch den Fall untersucht, in welchem der Sonnen- und der Seh- oder Projektionsstrahl einen Winkel von  $\sigma = 150^{\circ}$  miteinander bilden.

Die Formeln der S. 189 liefern dann die Tabelle 81. Dabei muß Tab. 81. die Einschaltung der Helligkeiten bei großer Spiegelung sorgfältig mit Hilfe der Figuren 114 und mit anderen gezeichneten Kurven ausgeführt und

später doch noch nach der Stetigkeit ausgeglichen werden. Aus dieser Tabelle sind wieder die Helligkeitskurven für die Parallelkreise und für den Lichtstrahlenmeridian in Fig. 117 abgeleitet und aus diesen sind die Punkte der gewählten Helligkeiten ermittelt:

$\alpha$	$H =$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,5	2,0
$65^\circ$	$\psi =$	$12^\circ$						
$70^\circ$		$37^\circ$	$31^\circ$	$27^\circ$	$23^\circ$	$17,5^\circ$		
$75^\circ$		$47^\circ$	$37^\circ$	$32^\circ$	$27,5^\circ$	$23,5^\circ$	$15,5^\circ$	$3,5^\circ$
$80^\circ$		$63^\circ$	$56,5^\circ$	$49,5^\circ$	$42^\circ$	$34,0^\circ$		
$90^\circ$		$82^\circ$	$72^\circ$	$40,5^\circ$				
$\psi$	$\alpha =$	$64,7^\circ$	$65,9^\circ$	$67^\circ$	$68^\circ$	$68,9^\circ$	$71^\circ$	$74^\circ$
$180^\circ$					$86,5^\circ$	$84^\circ$	$80^\circ$	$76,4^\circ$

Tabelle 81.

Berechnung der Helligkeiten auf der Gypskugel für  $\sigma = 150^\circ$ .

$\alpha$	$60^\circ$			$65^\circ$			$70^\circ$			$75^\circ$			$80^\circ$			$90^\circ$		
	$\varepsilon$	$\nu$	$H$	$\varepsilon$	$\nu$	$H$	$\varepsilon$	$\nu$	$H$	$\varepsilon$	$\nu$	$H$	$\varepsilon$	$\nu$	$H$	$\varepsilon$	$\nu$	$H$
$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$0^\circ$	$85^\circ$	$180^\circ$	$0,24$	$80^\circ$	$180^\circ$	$1,28$	$75^\circ$	$180^\circ$	$2,04$	$70^\circ$	$180^\circ$	$1,48$	$60^\circ$	$180^\circ$	$0,63$
$30^\circ$				$88,31$	$165,31$	$0,6$	$83,37$	$165,28$	$0,44$	$78,45$	$165,13$	$0,68$	$73,59$	$164,55$	$1,10$	$64,21$	$163,53$	$0,62$
$60^\circ$										$89,05$	$154,21$	$0,03$	$84,33$	$154,13$	$0,26$	$75,31$	$153,27$	$0,49$
$75^\circ$																$82,34$	$150,55$	$0,38$
$82^\circ$																$86,16$	$150,16$	$0,18$
$90^\circ$																$90,00$	$150,00$	$0$

Fig. 118. In Fig. 118 ist nun die Projektion der Kugel dargestellt. Der Sonnenmeridian ist dabei aufrecht gestellt. Der grösste Teil der Kugel erscheint im Schatten; die kleine Achse der Ellipse, welche die Eigenschattengrenze darstellt, ist  $= \cos \sigma = \cos 150^\circ = -0,866$ , wenn der Kugelhalbmesser  $= 1$ ; sie ist dem negativen Vorzeichen zufolge der Lichtquelle zugewendet.

Auf die gezeichneten Parallelkreise sind nach der obigen Tabelle die Punkte der Hellegleichen übertragen und durch ihre Verbindung die Hellegleichen gezeichnet. Dieselben sind für  $H = 2,0; 1,5; 1,0; 0,8; 0,6$



sichelförmig; für  $H = 0,4; 0,2$  schliessen sie sich ellipsenähnlich der Schattengrenze an. Die Lichtgleichen, das sind auch die Hellegleichen bei ganz matter Oberfläche, würden sich als Ellipsen der Schattengrenze anschliessen und von ihnen würden nur die für  $0,2$  und  $0,4$  sichtbar sein. Ich habe sie in der Figur nicht eingetragen. Man sieht also, daß in dem aufsergewöhnlichen Falle von  $\sigma = 150^\circ$  bei dem Gypse eine sehr merkliche Spiegelung auftritt.

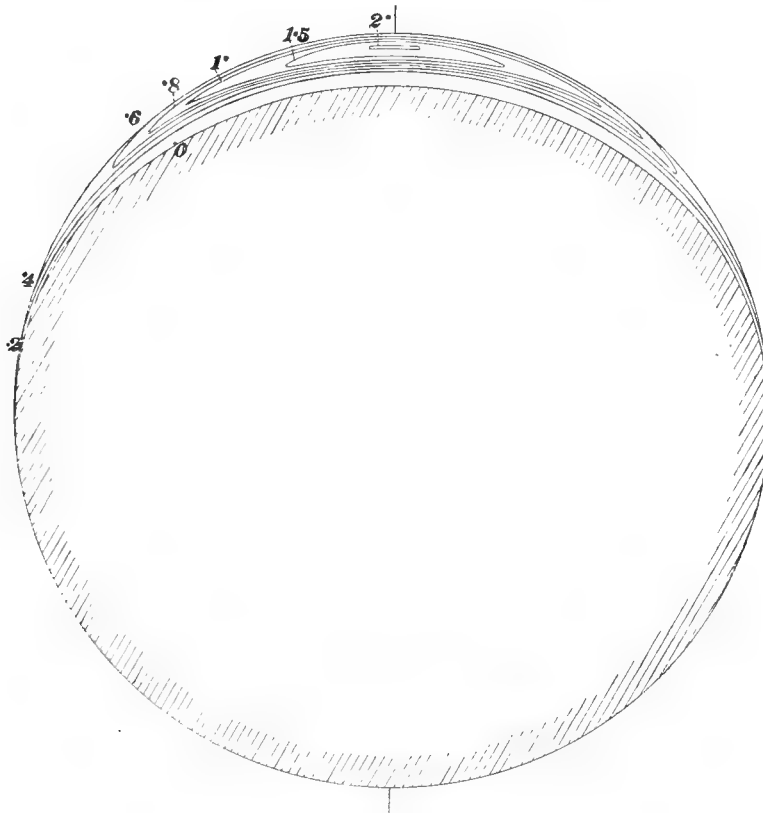


Fig. 118.

Die Hellegleichen der Gypskugel, hervorgebracht durch die Sonne allein, wenn der Sonnenstrahl und der Sehstrahl einen Winkel von  $150^\circ$  miteinander bilden ( $A = 1$ ).

## Zweiter Abschnitt.

Die Beleuchtung des Bodens und der Kugel und die gleichzeitige Beleuchtung der Kugel durch die Sonne und die Atmosphäre.

**183. Beleuchtungsstärke des Bodens, bestimmt durch Projektion der Hellegleichen auf die Bodenfläche.** Ein Quadratmeter einer Fläche, welche an der äußeren Grenze der Atmosphäre senkrecht von der Sonne bestrahlt wird, empfängt von ihr die Lichtmenge  $L$ . Besitzt sie das Rückstrahlungsvermögen  $A = 1$ , so ist ihre Helligkeit diejenige, welche wir als Einheit der Helligkeit angenommen haben. Diese Fläche strahlt auf ein zweites Quadratmeter, welches mit ihr parallel in einem senkrechten Abstände  $= 1$  m aufgestellt wird, die Lichtmenge  $L : \pi^1$  über. Ein anderes Quadratmeter, welches die Helligkeit  $H$  besitzt, strahlt unter gleichen Verhältnissen die Lichtmenge  $H \cdot L : \pi$  über. Daher strahlt ein Flächenelement  $f$  des Himmels, das im Abstände Eins gemessen wird, welches die Helligkeit  $H$  besitzt, auf 1 qm einer Ebene bei dem Einfallswinkel  $\varepsilon$  des Lichtes gegen diese Ebene die Lichtmenge

$$B = L H \cdot f \cdot \cos \varepsilon \cdot \frac{1}{\pi}$$

über, welche die Beleuchtungsstärke bildet.

Die durch die Einheit der Sonnenlichtmenge mittels Rückstrahlung durch das Himmelselement  $f$  hervorgebrachte Beleuchtungsstärke ist dann  $\frac{B}{L}$ ; das ist zugleich die Helligkeit der Fläche, wenn sie das Rückstrahlungsvermögen  $A = 1$  besitzt. Die durch den ganzen Himmel erzeugte Helligkeit oder die durch ihn von der Sonnenlichteinheit hervorgebrachte Beleuchtungsstärke<sup>2)</sup> ist dann

$$b = \Sigma (B:L) = \frac{1}{\pi} \Sigma H \cdot f \cos \varepsilon = \frac{1}{\pi} \Sigma H \cdot f'.$$

<sup>1)</sup> Dies folgt aus einer einfachen Überlegung, die z. B. ausgeführt ist auf S. 398 in des Verfassers Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Bd. I, 1884. [D. H.]

<sup>2)</sup> In dem vom Verfasser hinterlassenen Manuskript findet sich ein Hinweis darauf, daß er schwankte, ob er die hier berechnete Größe als Helligkeit mit  $h$  oder als Beleuchtungsstärke mit  $b$  bezeichnen wollte. Ihre Größe bleibt dieselbe, so lange die beleuchtete Fläche ganz matt ist und das Rückstrahlungsvermögen  $A = 1$  besitzt. Die erste Annahme ist in

Darin ist  $f' = f \cos \varepsilon$  die senkrechte Projektion von  $f$  auf die beleuchtete Ebene. Die Beleuchtungsstärke  $b$ , die durch den ganzen Himmel auf der Ebene hervorgebracht wird, erhält man daher, wenn man die Summe der Produkte der Projektionen  $f'$  der Flächenelemente des Himmels in ihre Helligkeiten  $H$  durch  $\pi$  teilt. Um diese Summe zu erhalten, projiziert man die Hellegleichen des Himmels auf die Ebene, bestimmt, etwa mittels des Amslerschen Planimeters, die Größe der Flächenstreifen zwischen zwei benachbarten Hellegleichen, multipliziert diese Fläche mit der mittleren Helligkeit des Streifens, gewöhnlich dem Mittel zwischen den Helligkeiten der begrenzenden Hellegleichen, und nimmt die Summe dieser Produkte.

Dies habe ich nun zuerst für die horizontale Bodenfläche ausgeführt. Es wurden, nur in der einen der beiden symmetrischen Hälften, die senkrechten Projektionen der um  $15^\circ$  voneinander entfernten Vertikal- kreise, das sind durch die Projektion des Zenites gehende gerade Linien, gezeichnet, sodann die Projektionen der Horizontalkreise von den Zenit- distanzen  $\zeta$  in Abständen von  $15^\circ$ , das sind um die Zenitprojektion ge- zogene Kreise vom Halbmesser  $\sin \zeta$ , und in dieses Netz wurden aus der flächentreuen Projektion (Fig. 100) die Hellegleichen des Himmels über- tragen, indem man ihre Schnittpunkte mit den Linien des gezeichneten Netzes durch Einschaltung übertrug. Fig. 119.

Die Berechnung wurde dann in der Weise der Tabelle 82 ausgeführt. Tab. 82.  
Die erste aufrechte Reihe gibt die Helligkeit der von der Planimeterspitze umfahrenen Hellegleichen an; die zweite die Ablesung, welche mit dem Inhalt

---

den noch folgenden Teilen des Werkes stets, die zweite meist gemacht worden. Hätte man, wie das im vorigen Abschnitt geschehen ist, teilweise Spiegelung der Fläche zulassen wollen, so hätte berücksichtigt werden müssen, daß bei einer gegebenen Schichtung jedes Element des Himmels sich in einem anderen Punkte der Kugel gespiegelt hätte. Die Größe  $b$  wäre dann gar nicht in Betracht gekommen, vielmehr hätte ohne weiteres die Helligkeit  $h$  gebildet werden müssen, welche nicht bloß eine Funktion der Himmelshelligkeiten, sondern auch noch eine verwickelte und in geschlossener Form gleichfalls nicht vorliegende Funktion des Ein- und Ausfallwinkels gewesen wäre. Auf eine so verwickelte Betrachtung einzugehen, hatte aber der Verfasser keinen Anlaß, weil die Helligkeit jeder Himmelsstelle außerordentlich viel kleiner ist als die der Sonne und deshalb nur die bereits behandelte Spiegelung der Sonne merklich ins Gewicht fällt. Für die Klarheit der Darstellung erscheint es aber auf alle Fälle zweckmäßiger, die hier betrachtete Größe als Beleuchtungsstärke und nicht als Helligkeit zu bezeichnen. [D. H.]

der umfahrenen Fläche proportional ist; die dritte den Unterschied zweier aufeinander folgenden Ablesungen, proportional mit dem Inhalt des zwischen den Hellegleichen enthaltenen Flächenstreifs; die vierte die Gröfse dieses Flächenstreifs, bezogen auf die gröfste Kreisfläche der Himmelskugel vom

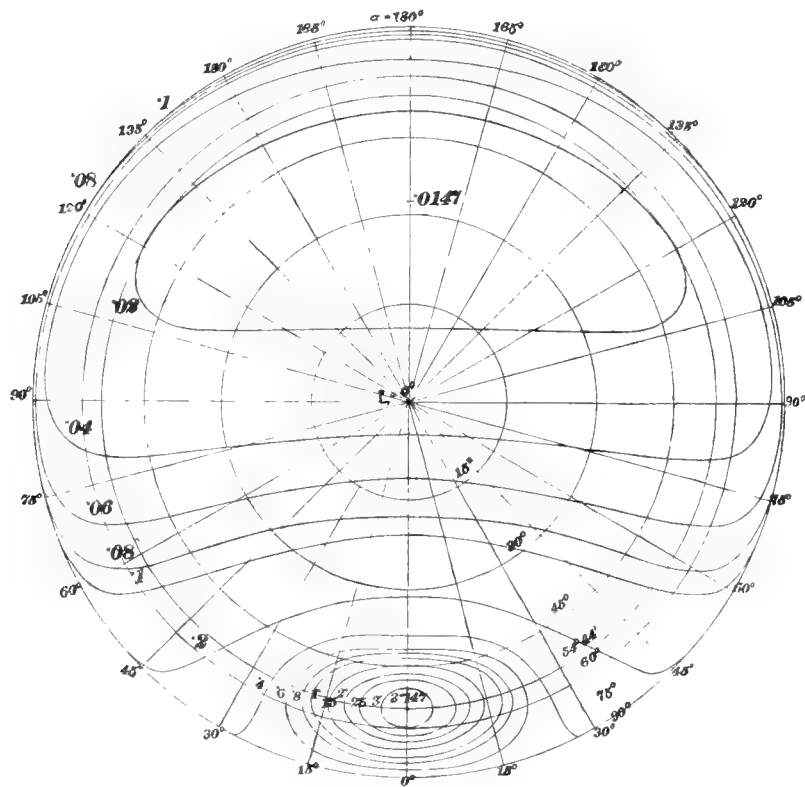


Fig. 119.

Senkrechte Projektion der Hellegleichen des Himmels auf die horizontale Ebene  $\zeta = 0$ , für den Fall, daß der Zenitabstand der Sonne  $54^{\circ} 44'$  beträgt.

Halbmesser Eins als Einheit, erhalten aus jenem Unterschied durch Vielfachung mit der erprobten Verhältniszahl 0,001983. Die Summe sollte  $3,1416 = \pi$  sein, hat sich aber  $= 3,1966$  ergeben. Daher wurde in der fünften Reihe eine Verbesserung der Flächen zu  $f'$  vorgenommen, so daß die Summe  $= \pi$  wurde. Diese Verbesserung war hier zufällig auffallend groß; sie war sonst meist so klein, daß sie ganz unterbleiben konnte. Später wurde jene Verhältniszahl durch Verstellung am Planimeter genau

auf 0,002 gebracht, wenn, wie hier, nur die eine Hälfte der symmetrischen Figur umfahren wurde. Wurde aber die ganze Figur umfahren, so war die Zahl 0,001, oder die Zahlen der Differenz gaben sogleich auch die Fläche an. Die sechste Reihe enthält die mittleren Helligkeiten  $H$  der Streifen  $f'$ , die siebente die Produkte  $f' H$ , oder die Lichtmenge der Streifen. Ihre Summe ergibt sich = 0,48635. Daher ist  $b = 0,48635 : \pi = 0,0547$ .

Tabelle 82.

Berechnung der Beleuchtungsstärke  $b$  der horizontalen Ebene, hervorgebracht durch den klaren Himmel.

Helligkeitskurve	Ablesung	Unterschied	Fläche	Verbesserte Fläche $f'$	Mittlere Helligkeit $H$	Lichtmenge $f' H$
0,02	349	349	0,6920	0,6807	0,0165	0,01128
0,04	842	493	0,9780	0,9610	0,03	0,02885
0,06	1023	181	0,3590	0,3523	0,05	0,01765
0,08	1148	125	0,2480	0,2441	0,069	0,01687
0,1	67 + 9	76	0,1508	0,1483	0,09	0,01338
0,2	150,5 + 1	151,5	0,3507	0,3443	0,15	0,05170
0,4	83	83	0,1644	0,1616	0,3	0,04857
0,6	42	42	0,0833	0,0821	0,5	0,04115
0,6	86					
0,8	65,5	20,5	0,0406	0,0398	0,7	0,02793
1,0	56	9,5	0,0188	0,0185	0,9	0,01672
2,0	21	35	0,0694	0,0680	1,5	0,10230
3,0	6,5	14,5	0,0287	0,0283	2,5	0,07075
		6,5	0,0129	0,0126	3,1	0,03920
—	—	—	3,1966	3,1416	—	0,48635

Vergleichen wir diese durch den klaren Himmel auf dem Boden hervorgebrachte Beleuchtungsstärke  $b = 0,1547$  mit der durch die Sonne unmittelbar hervorgebrachten  $b'$ . Nach Tab. 63 wird das Licht der in der angenommenen Zenitdistanz  $\sigma = 54^\circ 44'$  stehenden Sonne beim Durchgang durch die Atmosphäre auf 0,6978 seiner ursprünglichen Stärke vermindert; daher ist die durch die Sonne unmittelbar hervorgebrachte Beleuchtungsstärke des Bodens  $b' = 0,6978 \cdot \cos \sigma = 0,6978 \cdot 0,5774 = 0,4029$ . Die gesamte Beleuchtungsstärke des Bodens ist daher

$$b + b' = 0,1547 + 0,4029 = 0,5576.$$

Die durch unmittelbare Sonnenbeleuchtung hervorbrachte Beleuchtungsstärke ist daher  $0,4029:0,1547 = 2,6$  mal so groß als die durch den klaren Himmel bewirkte.

$$\text{Außerdem ist } \frac{b'}{b+b'} = 0,722, \quad \frac{b}{b+b'} = 0,278,$$

oder die Sonne unmittelbar trägt 72%, der klare Himmel 28% zur gesamten Beleuchtungsstärke des Bodens bei.

Es ist noch bemerkenswert, daß die durch die Sonne und die Atmosphäre erhaltene Beleuchtungsstärke 0,5576 des Bodens nur um wenig kleiner ist, als die durch die Sonne allein erteilte, wenn das Sonnenlicht durch die Atmosphäre nicht geschwächt würde, oder um wenig kleiner als  $1 \cdot \cos \sigma = 0,5774$ . Es zeigt dies, daß bei dieser höheren Stellung der Sonne das durch die Atmosphäre zerstreute Sonnenlicht fast alles doch auf den Boden gelangt, also wenig in den Weltraum zurückgeworfen wird, wie es ja den früheren Erörterungen (S. 134) entspricht.

**184. Beleuchtungsstärke einer beliebigen Ebene.** Gehen wir nun zur Bestimmung der Beleuchtungsstärke anderer Ebenen als der horizontalen über. Eine beliebige ebene Körperoberfläche denken wir uns bestimmt durch ihre aus dem Körper heraus gerichtete Normale und diese durch den Ort, den sie auf der Himmelskugel trifft. Dieser Ort wird aber festgelegt durch seine Zenitdistanz  $\zeta$ , welche von 0 bis  $180^\circ$  gezählt wird, und sein Azimut  $\alpha$ , welches von der Sonne an nach beiden Seiten hin von 0 bis  $180^\circ$  geht. Die beiden Seiten sind in Bezug auf die Himmelshelligkeit symmetrisch.

Fig. 120. Jene beliebige Ebene und die Horizontalebene schneiden sich in

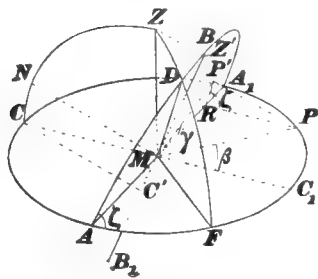


Fig. 120.

einer Geraden  $AMA_1$ , einem Durchmesser der Himmelskugel, deren Halbmesser wir  $= 1$  setzen. Die durch  $AA_1$  abgegrenzte obere Hälfte  $ABA_1$  der Ebene und je eine Hälfte der Horizontalebene schließen zwei Keilräume ein und zwei Stücke der Himmelskugel. Derjenige Teil  $ABA_1CA$  des Himmels, welcher von jener Flächennormalen  $MN$  (in  $N$ ) getroffen wird, beleuchtet die betrachtete

Ebene; wir müssen ihn daher auf unsere Ebene senkrecht projizieren. Der Halbkreis  $ABA_1$  projiziert sich in sich selbst, der Halbkreis  $ACA_1$  in die halbe nicht eingezeichnete Ellipse  $AC'A_1$ . Es seien in der Horizontal- und der geneigten Ebene  $MC$  und  $MB$  die auf  $MA$  senkrechten Halbmesser, so liegt die Projektion  $C'$  des  $C$  auf die geneigte Ebene in der Geraden  $MB$ , und  $MC'$  ist die kleine Halbachse jener Ellipse. Ist ferner  $Z$  das Zenit,

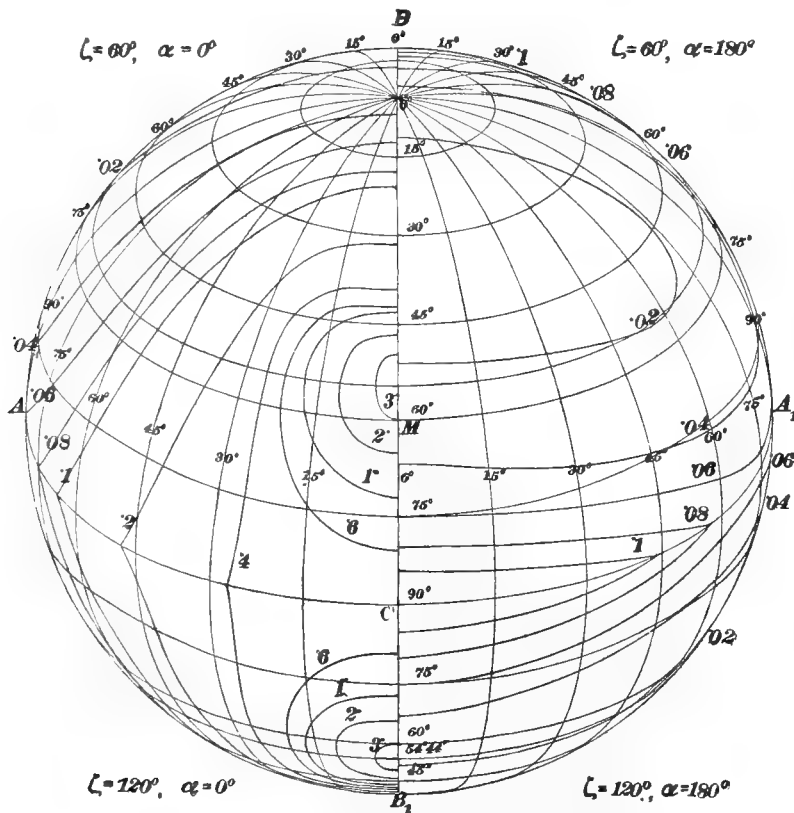


Fig. 121.

Senkrechte Projektion der Hellegleichen des Himmels auf eine Ebene, deren Flächennormale die Zenitdistanz  $\zeta$  und das Azimut  $\alpha$  besitzt, für die vier Fälle:  $\zeta = 60^\circ, \alpha = 0^\circ$ ;  $\zeta = 60^\circ, \alpha = 180^\circ$ ;  $\zeta = 120^\circ, \alpha = 0^\circ$ ;  $\zeta = 120^\circ, \alpha = 180^\circ$ .

daher Bogen  $ZN = \zeta'$ ,  $Z'$  die Projektion von  $Z$  auf die Ebene  $ABA_1$ , so liegt  $Z'$  auf  $MB$ , und es ist offenbar  $MC' = ZZ' = \cos \zeta$ .

Auf diese Weise ist in Fig. 121  $ABA_1C'A$  die Projektion des beleuchtenden Himmels für  $\zeta = 60^\circ$ , und die Ergänzung  $AB_1A_1C'A$  zum Halbkreis ist diejenige für  $\zeta = 120^\circ$ ; ebenso in Fig. 122 für  $\zeta = 30$  und  $150^\circ$ . Fig. 122.

In diese Figuren müssen wir nun die Projektionen des Netzes von grössten Vertikal- und von Horizontalkreisen eintragen, welches wir schon bisher benutzt haben, worin diese Kreise in Winkelabständen von  $15^\circ$  gelegt sind. Eine Vertikalebene  $ZDF$  sei durch ihre Normale  $MP$ , die in der Horizontalebene liegt, bestimmt. Der Winkel der beiden Vertikalebenen  $ZDF$  und  $ZMA$  wird durch den Winkel  $\beta = C_1MP$  ihrer beiden

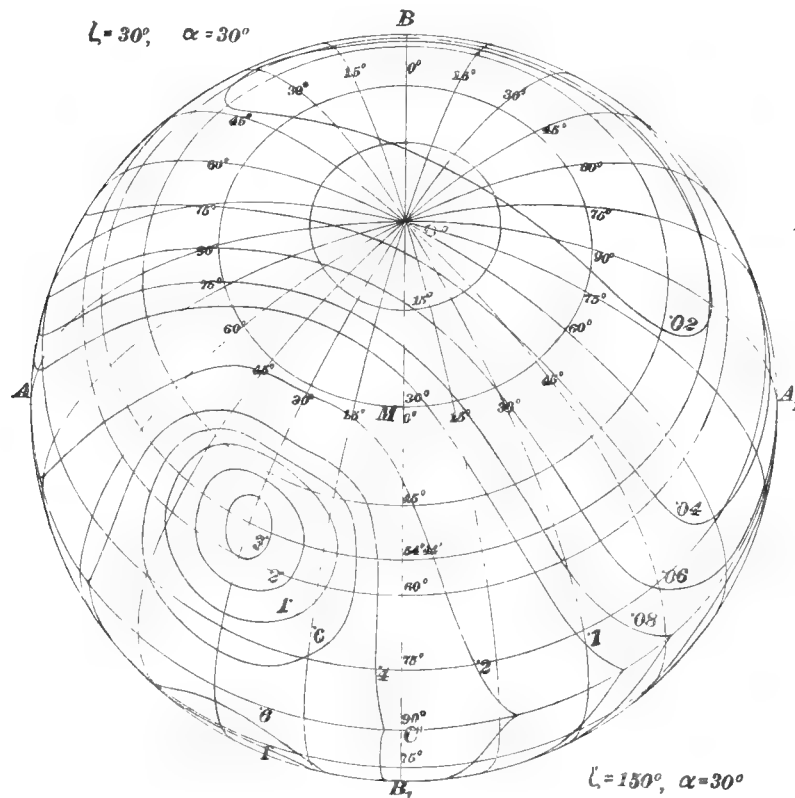


Fig. 122.

Senkrechte Projektion der Helligkeiten des Himmels auf eine Ebene, deren Flächennormale die Zenitdistanz  $\zeta$  und das Azimut  $\alpha$  besitzt, für die zwei Fälle:  $\zeta = 30^\circ$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ;  $\zeta = 150^\circ$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .

Normalen  $MP$  und  $MC_1$  gemessen und bildet den Azimutunterschied der beiden Vertikalebenen. Der Vertikalkreis  $ZDF$  projiziert sich auf die schiefe Ebene  $ABA_1$  als Ellipse, deren grosse Halbachse die Schnittlinie  $MD = 1$  beider Ebenen bildet; die kleine Achse  $2b$  liegt in der Linie  $MP'$ , wenn  $P'$  die senkrechte Projektion von  $P$  auf die Ebene  $ABA_1$ , und es ist  $b = P'P$ , ebenso wie  $MC' = Z'Z$  war. Zieht man aber  $PR \perp MA_1$ , so



ist  $RP = \cos \beta$ , weil  $\sphericalangle A_1MP = 90^\circ - \beta$ . Ferner ist auch  $P'R \perp MA_1$ ,  
 $\sphericalangle PRP' = \zeta$ , daher

$$b = P'P = \cos \beta \sin \zeta.$$

Der Winkel  $A_1MP' = \gamma$  ist aber bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{RP'}{MR} = \frac{\cos \beta \cos \zeta}{\sin \beta} = \cot \beta \cos \zeta.$$

Dabei ist also  $\gamma$  der Winkel, den die kleine Achse der (elliptischen) Projektion eines Vertikalkreises mit dem Grenzdurchmesser  $AA_1$  bildet und  $P'P$  die Größe dieser kleinen Halbachse.

Wir haben nun folgende Lagen der schiefen Ebene gewählt, bestimmt durch die Zenitdistanzen ihrer Normale  $\zeta = 0, 30, 60, 90, 120, 150, 180^\circ$ , und durch deren Azimute  $\alpha$  gegen die Sonne von denselben Größen. Dies sind  $5 \cdot 7 + 2 = 37$  Lagen, da für  $\zeta = 0$  und  $= 180^\circ$  das Azimut unbestimmt ist, oder dieselbe Ebene alle Azimute besitzt. Für jede Ebene zeichnen wir das Netz der Vertikal- und der Horizontalkreise des Himmels in Abständen von  $15^\circ$ . Für die Vertikalkreise ist dann bei jeder Lage der schiefen Ebene  $\beta$  der Reihe nach  $0, 15, 30, 45, 60, 75, 90^\circ$  nach positivem und nach negativem Sinne. Dadurch werden die Werte von  $\gamma$  und  $b$

$\zeta$	$\beta$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$30^\circ$	$\gamma$	$90^\circ$	$72^\circ 45'$	$56^\circ 19'$	$40^\circ 54'$	$26^\circ 34'$	$13^\circ 05'$	0
	b	0,500	0,483	0,433	0,3535	0,2500	0,1294	0
$60^\circ$	$\gamma$	$90^\circ$	$61^\circ 42'$	$40^\circ 54'$	$26^\circ 34'$	$16^\circ 59'$	$7^\circ 38'$	0
	b	0,866	0,837	0,750	0,611	0,433	0,2245	0
$90^\circ$	$\gamma$	0						
	b	1	0,966	0,866	0,707	0,500	0,2588	0

Die Horizontalkreise bilden sich als Ellipsen ab, ähnlich und parallel zu der in Fig. 120 nicht ausgeführten Abbildung  $AC'A_1$  des Horizontkreises  $ACA_1$ . Ihre Mittelpunkte liegen auf  $MZ'$ , in Entfernungen von  $M$  gleich  $MZ' \cdot \cos \zeta' = \sin \zeta \cdot \cos \zeta'$ , wenn  $\zeta'$  die Zenitdistanz des Horizontkreises. Diese Abstände sind daher für

$\zeta$	$\zeta' = 0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$54^\circ 44'$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$30^\circ$	0,866	0,835	0,750	0,611	0,500	0,433	0,2235	0
$60^\circ$	0,500	0,483	0,433	0,3535	0,2887	0,2500	0,1294	0
$90^\circ$	1	0,966	0,866	0,707	0,577	0,500	0,2588	0.

Die großen Achsen der Ellipsen sind für alle  $\zeta$  dieselben =  $\sin \zeta'$ .

Auf diese Weise sind die Netze der Kreise abgebildet. Im allgemeinen umfaßt der Vollkreis einer beleuchteten Ebene, wie schon erwähnt, zwei Fälle, nämlich den von  $\zeta$  und  $180^\circ - \zeta$ . Für  $\alpha = 0$  und  $= 180^\circ$  jedoch sind die Abbildungen der Hellegleichen symmetrisch in Bezug auf einen Durchmesser, so daß man nur die eine Hälfte zu verzeichnen braucht.

Fig. 121. Dann dient ein Netz im Vollkreise für vier Fälle; so die Fig. 121 für  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\zeta = 60^\circ$ ;  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\zeta = 120^\circ$ ;  $\alpha = 180^\circ$ ,  $\zeta = 60^\circ$ ;  $\alpha = 180^\circ$ ,  $\zeta = 120^\circ$ .

In die Netze werden nun aus Fig. 100 die Hellegleichen des Himmels übertragen, indem man ihre Schnittpunkte mit den Bogen der Netzlinien durch proportionale Teilung überträgt. Indem man einen und denselben Schnittpunkt auf mehrere Netze sogleich hintereinander überträgt, läßt sich dies mittels des Rechenschiebers und seines Millimetermaßstabes sehr leicht ausführen.

Tab. 83. Nun bestimmt man in der Weise, wie sie vorhin für die Horizontalebene angegeben wurde, mittels des Amslerschen Planimeters die Größen der Flächenstreifen zwischen zwei benachbarten Lichtgleichen, multipliziert sie mit der mittleren Helligkeit der Streifen, addiert die Produkte, teilt die Summe durch  $\pi$ , so ist dies die Beleuchtungsstärke der betrachteten Ebene; und auch ihre Helligkeit, wenn sie vollkommen rauh wäre und das Rückstrahlungsvermögen  $A = 1$  besäße. Die erhaltenen Zahlen sind in Tab. 83 eingetragen. Es sei dabei nochmals bemerkt, daß dabei Verbesserungen der Flächen  $f'$  nicht mehr nötig waren, wie in Tab. 82, da ihre Summe nie mehr so viel von  $\pi = 3,1416$  abwich, wie dort. Einige Zahlen dieser Tabelle 83 sind nicht die unmittelbar durch die Messungen erhaltenen, sondern die ein wenig nach dem Gesetze der Stetigkeit durch die sogleich zu erklärenden Kurven verbesserten. Die unmittelbar erhaltenen sind in der folgenden kleinen Tabelle gegeben.

$\zeta$	$\alpha = 120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$60^\circ$		0,03087	0,02915
$90^\circ$		0,02194	0,02222
$120^\circ$		0,01414	0,01383
$150^\circ$	0,00513	0,00521	0,00560

Tabelle 83.

Beleuchtungsstärke, hervorgebracht auf einer Körperoberfläche durch die Atmosphäre, wenn  $\alpha$  und  $\zeta$  das Azimut und die Zenitdistanz der aus dem Körper heraus gerichteten Flächennormale sind.

$\zeta$	$\alpha = 0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$0^\circ$	0,15470	0,15470	0,15470	0,15470	0,15470	0,15470	0,15470
$30^\circ$	0,25250	0,23670	0,19800	0,14600	0,09595	0,06530	0,05680
$60^\circ$	0,27900	0,25500	0,18480	0,10250	0,04360	0,03180	0,03030
$90^\circ$	0,24500	0,20680	0,13370	0,04670	0,02561	0,02160	0,02140
$120^\circ$	0,14520	0,11770	0,06070	0,02200	0,01408	0,01383	0,01380
$150^\circ$	0,03400	0,02516	0,01352	0,00627	0,00605	0,00602	0,00600
$180^\circ$	0	0	0	0	0	0	0

**185. Die Kurven der Beleuchtungsstärke für verschiedene Ebenen.** Die Ergebnisse sind in den Figuren 123 und 124 durch Kurven dargestellt. Die Ordinaten sind jedesmal die Beleuchtungsstärken, die Abszissen sind in Fig. 123 die Zenitdistanzen  $\zeta$ , in Fig. 124 die Azimute  $\alpha$ . In Fig. 123 sind die Kurven entlang der Vertikalkreise für die paarweise ineinander übergehenden unveränderlichen Azimute  $\alpha = 0^\circ$  und  $180^\circ$ ,  $30^\circ$  und  $150^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $120^\circ$ ,  $90^\circ$  gezeichnet.

Fig. 123  
und 124.

Man bemerkt, daß bei  $\alpha = 0^\circ$  die Beleuchtungsstärke am größten ist mit  $H = 0,2793$  bei  $\zeta = 58^\circ$ , also nahe bei der Zenitdistanz der Sonne  $\sigma = 54^\circ 44'$ . Es sagt dies, daß eine Ebene am stärksten von der Atmosphäre beleuchtet ist, wenn sie nahezu senkrecht auf dem Sonnenstrahle steht, obgleich hier ungefähr ein Drittel des Himmels nicht mehr mitwirkt, natürlich ein wenig heller Teil.

Für  $\alpha = 30^\circ$  und  $150^\circ$  sind die Beleuchtungsstärken nicht viel schwächer als bei  $\alpha = 0^\circ$  und  $180^\circ$ . Alle Kurven gehen bei  $\zeta = 0^\circ$  durch denselben Punkt, indem die hierdurch bezeichnete horizontale Ebene in allen Kurven einbegriffen ist.

In Fig. 124 sind die Kurven entlang der horizontalen Himmelskreise, also für unveränderliche Zenitdistanz  $\zeta$  dargestellt. Die Kurve  $\zeta = 60^\circ$  zeigt die größte Ordinate  $H = 0,2790$ , fast die überhaupt größte vorkommende, welche für  $\zeta = 58^\circ$  mit  $H = 0,2793$  stattfindet. Die  $H$  nehmen von  $\alpha = 0^\circ$  bis  $180^\circ$  stetig ab, mit Ausnahme natürlich von  $\zeta = 0^\circ$  und  $180^\circ$ , wo  $H$  konstant  $= 0,1543$  und  $= 0$  ist; es gilt dies für die nach oben oder nach unten freie horizontale Ebene.

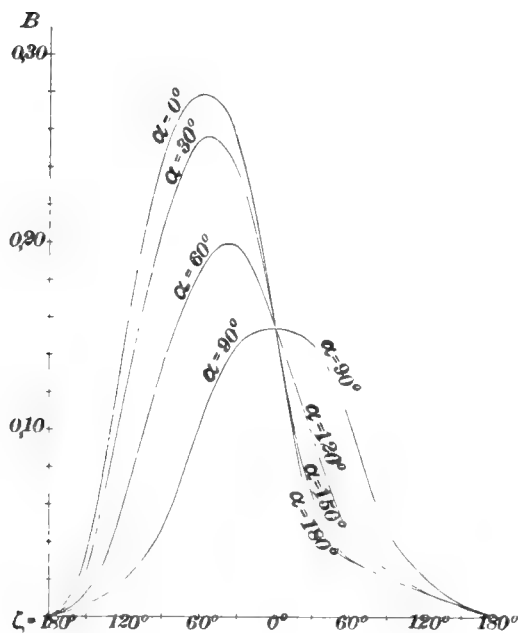


Fig. 123.

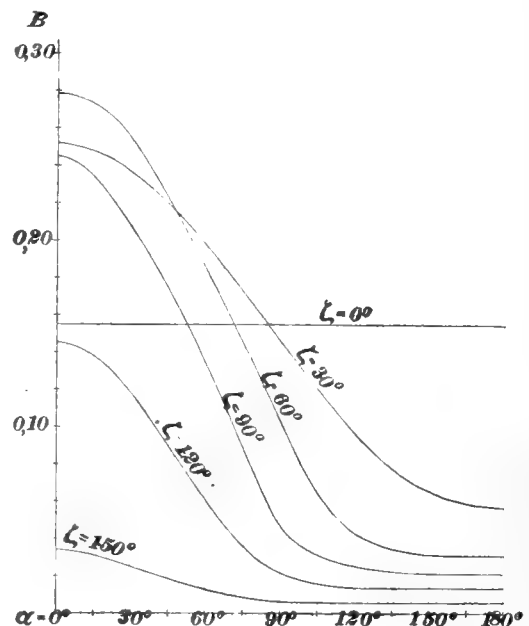


Fig. 124.

### 186. Die zur Himmelsbeleuchtung gehörige Fläche der Beleuchtungsstärke.

Ferner kann man den Inhalt der Tabelle 83 durch eine Fläche der Beleuchtungsstärke darstellen, indem man auf den aus einem Punkte gezogenen Flächennormalen die Beleuchtungsstärken, das sind auch die Helligkeiten  $H$  dieser Flächen, wenn sie ganz matt sind und das

Fig. 125. Rückstrahlungsvermögen  $A = 1$  besitzen, aufträgt. In Fig. 125 sind die

Normalschnitte dieser Fläche, also Schnitte mit unveränderlichem  $\alpha$ , gezeichnet; es ist dies die Darstellung der Fig. 123, übertragen aus den rechtwinkligen in Polarkoordinaten. Diese Normalschnitte sind kreisähnliche Figuren, von den  $\frac{1}{3}$  bis  $\frac{1}{4}$  unter der Horizontalebene liegt, und welche noch nach der Seite der stumpfen Winkel  $\alpha$  einen abwärts gerichteten Höcker besitzen.

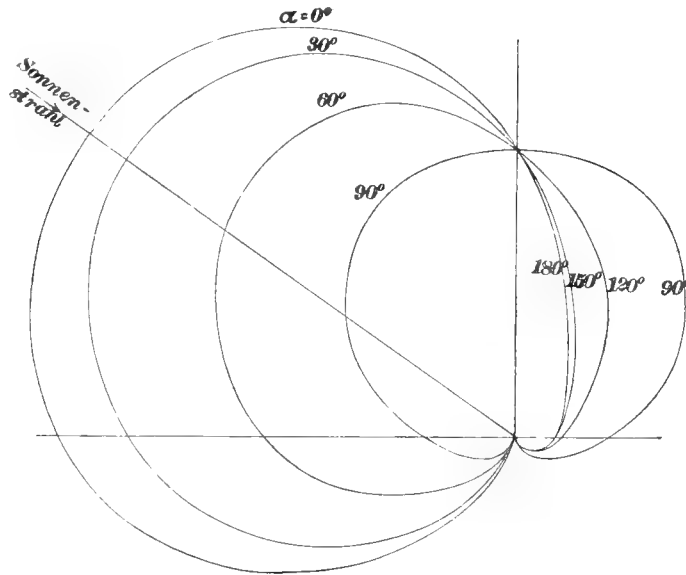


Fig. 125.

Vertikalschnitte durch die Beleuchtungsfläche der Beleuchtung durch den klaren Himmel bei den Neigungen der Vertikalebene gegen die durch die Sonne gehende Vertikalebene von  $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ .

**187. Die Lichtgleichen der Kugel, hervorgebracht durch den klaren Himmel.** Mittels der Figuren 123 und 124 können nun Lichtgleichen der Kugel, hervorgebracht durch den klaren Himmel, gezeichnet werden. Es geschieht dies ebenso, wie es für die Hellegleichenen des Himmels geschah. Durch die Horizontalen für  $H = 0,005; 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,06; 0,08; \dots 0,26$  in Zwischenräumen von  $0,02$  in der Fig. 123 werden die  $\zeta$  der Punkte der gezeichneten vertikalen größten Kreise der Kugel ermittelt, in welchen jene bestimmten Beleuchtungsstärken herrschen; und ebenso aus der Fig. 124 die  $\alpha$  der entsprechenden Punkte auf den gezeichneten Horizontalkreisen. Diese werden nun in dem Grundriß der

Kugel auf jene Kreise übertragen, und durch die Punkte gleicher Beleuchtungsstärke die Lichtgleichen gezogen. So ist in Fig. 126 der Grundrifs des oberen, und in Fig. 127 derjenige des unteren Teiles der Kugel dargestellt. Aus diesen Figuren ist die Fig. 128 abgeleitet, d. i. die Projektion der Lichtgleichen auf die vertikale Symmetrieebene, welche durch die Sonne

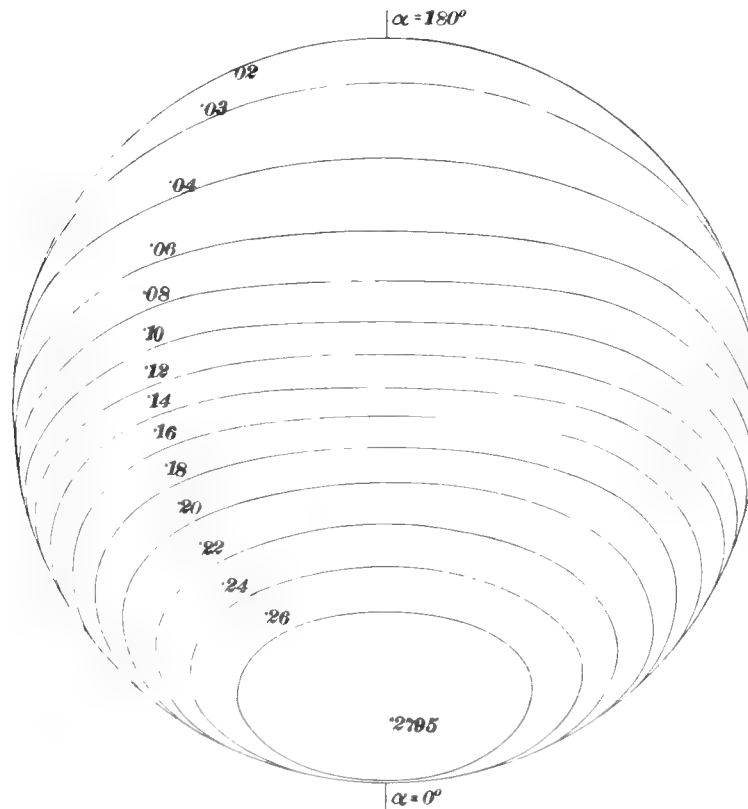


Fig. 126.

Lichtgleichen der Kugel, durch die Atmosphäre allein hervorgebracht.  
Grundrifs, oberer Teil der Kugel.

geht. Es sind hier nur die Punkte auf die als gerade erscheinenden Horizontalkreise und auf den Umrifs, letzteres unmittelbar aus der Tab. 83 übertragen. Die Kurven erscheinen meist wenig von der Geraden abweichend, so daß ihre Gesetzmäßigkeit am deutlichsten in dieser Projektion erkannt werden kann. Es können daher auch hier am besten Verbesserungen auf Grund der Stetigkeit vorgenommen und in Fig. 126 und 127 übertragen

werden; doch waren nur zwei unerhebliche notwendig. Diese fast geraden Linien erscheinen nahezu senkrecht auf dem Sonnenstrahle; die Lichtgleichen selbst sind daher nahezu Kreise, die mit den Lichtgleichen der unmittelbaren Sonnenbeleuchtung nahezu gleich laufen. Erst bei ganz geringer Beleuchtungsstärke, von etwa 0,04 an, beugen sie von jener Richtung ab

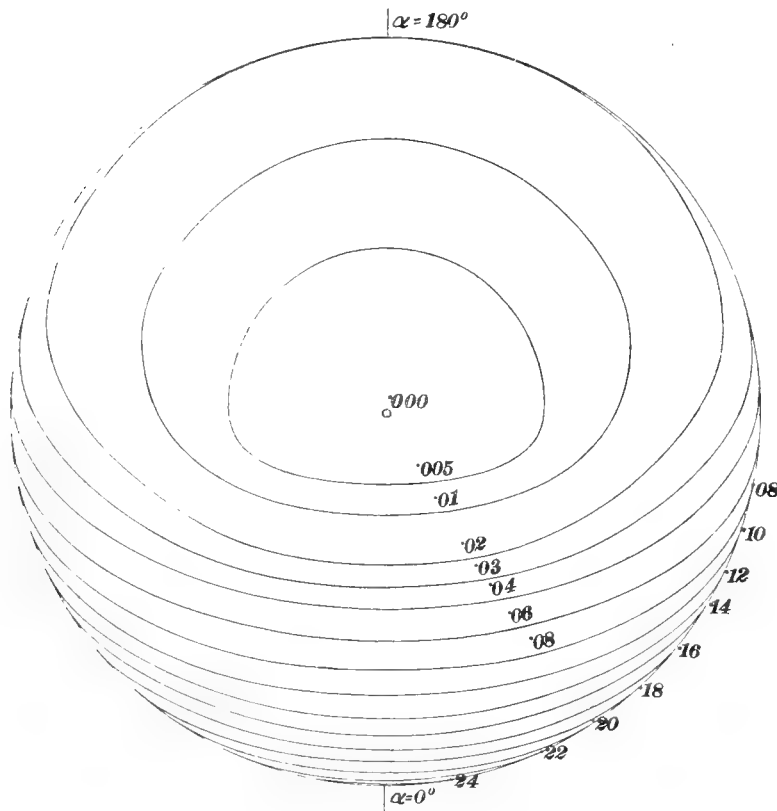


Fig. 127.

Lichtgleichen der Kugel, durch die Atmosphäre allein hervorgebracht.  
Grundriß, unterer Teil der Kugel.

und gestalten sich gebogen fächerförmig und legen sich um den tiefsten Punkt der Kugel, von der Helligkeit 0, herum.

Aus der Fig. 128 unmittelbar, ohne Zuhilfenahme von Fig. 126 und 127 wurde dann die Projektion der Lichtgleichen auf eine Vertikalebene übertragen, welche mit der Ebene der Fig. 128, der durch die Sonne gehenden Vertikalebene, einen Winkel von  $45^\circ$  bildet. Fig. 129 ist die Fig. 129.

Fig. 130. Projektion des vorderen, Fig. 130 die des hinteren Teiles der Kugel; es ist dies die in den technischen Zeichnungen übliche Stellung der Aufrißebene gegen die Sonne. Das Übertragen der Punkte geschah nur auf den Horizontalkreisen, die als Gerade erscheinen, und konnte aus Fig. 128 in 129 und 130 leicht mit dem Handzirkel allein ausgeführt werden mittels

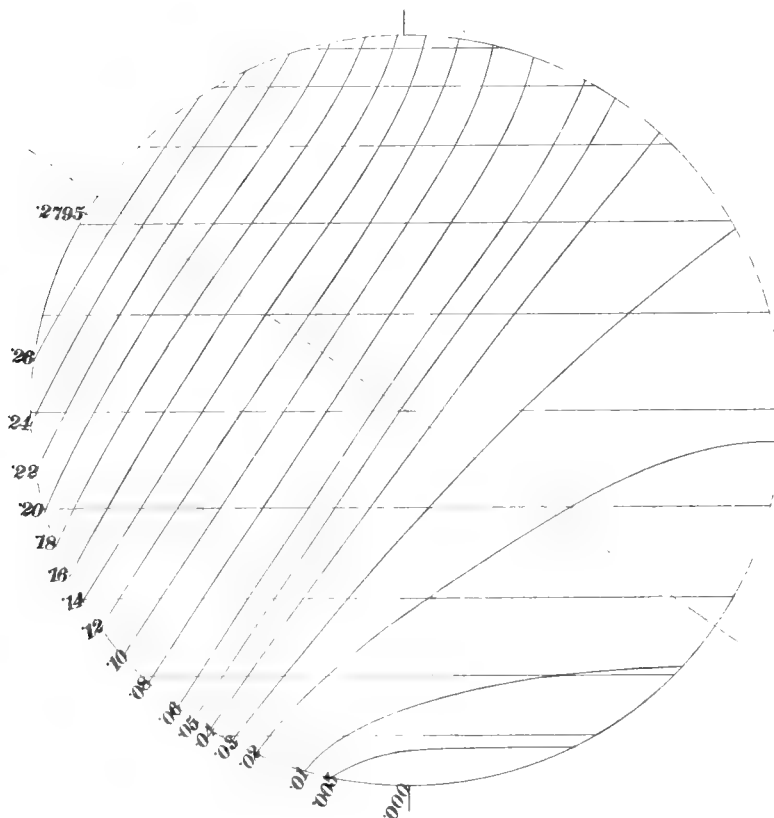


Fig. 128.

Lichtgleichen der Kugel, durch die Atmosphäre allein hervorgebracht. Projektion auf die durch die Sonne gehende vertikale Symmetrieebene.

eines festen Winkels von  $45^\circ$  und einiger festen konzentrischen Viertelskreise, deren Halbmesser gleich denjenigen jener horizontalen Kreise, multipliziert mit  $\cos 45^\circ = 0,707$ , waren. Die Kurven, als Projektionen kreisartiger Kurven, sind ellipsenartig; nur diejenigen von geringer Helligkeit weichen merklich davon ab.



**188. Die Lichtgleichen des Bodens in der Nähe der auf ihm liegenden Kugel, hervorgebracht durch den Himmel allein.** Wir haben die Beleuchtungsstärke bestimmt, welche auf dem Boden durch den klaren Himmel hervorgebracht wird. Die Kugel aber, die wir auf dem Boden in dem Punkte *A* (Fig. 131) aufgelagert denken, hält in ihrer Nähe einen Fig. 131.

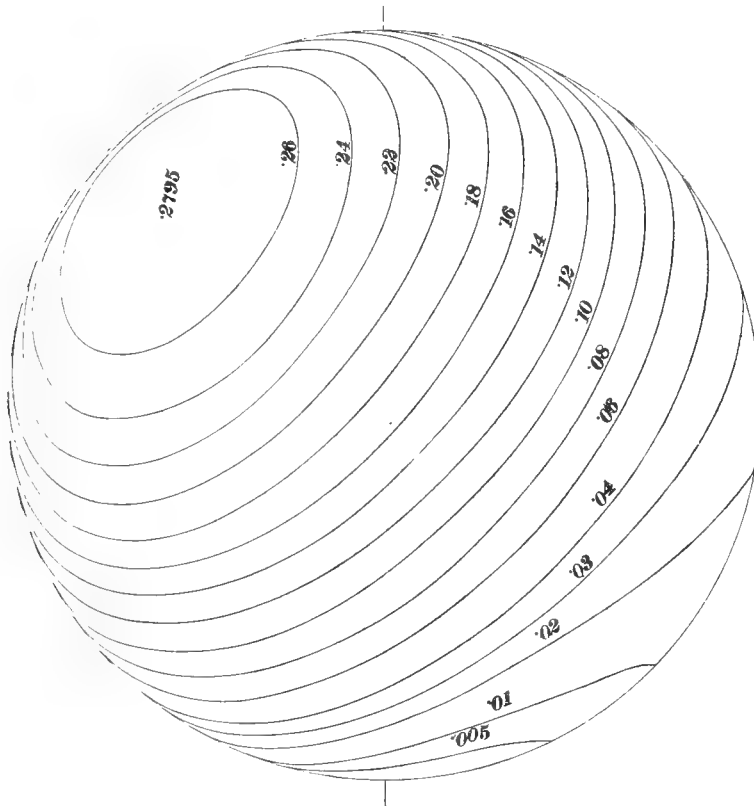


Fig. 129.

Lichtgleichen der Kugel, durch die Atmosphäre allein hervorgebracht. Projektion auf die zur Symmetrieebene um  $45^\circ$  geneigte Vertikalebene. (Vordere Seite.)

beträchtlichen Teil des Himmelslichtes ab. Um nun an einem benachbarten Punkte *P* des Bodens die vom Himmel hervorgebrachte Beleuchtungsstärke zu ermitteln, legen wir aus *P* als Spitze einen (Umdrehungs)-Kegel berührend an die Kugel, welcher dann den Boden entlang *PA* berührt. Derselbe schneidet aus der Himmelskugel einen Kreis aus, dessen Inneres die Stelle *P* nicht beleuchtet.

Um den Halbmesser dieses Kreises zu bestimmen, bezeichnen wir in Fig. 131, welche den Schnitt einer durch  $PA$  gelegten Vertikalebene mit der Kugel und dem Boden darstellt, den Halbmesser  $MA$  der Kugel mit  $r$ , den Abstand  $AP$  mit  $x$ , den Winkel  $APM$  mit  $\chi$ , dann ist  $\cotg \chi = x : r$ . Der Halbmesser des Berührungskreises ist dann  $CA = x \sin \chi$ .

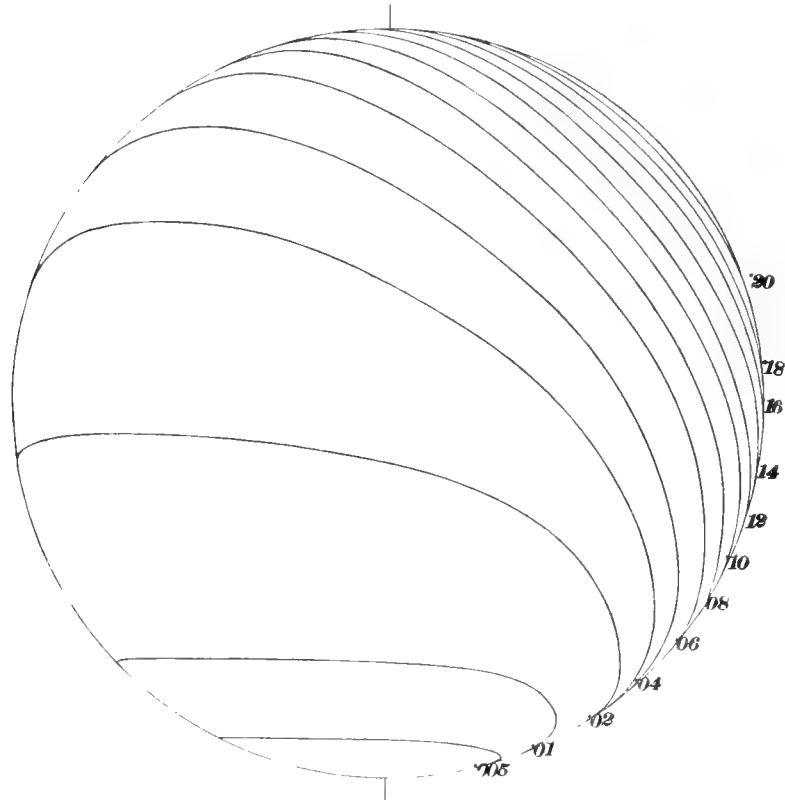


Fig. 130.

Lichtgleichen der Kugel, durch die Atmosphäre allein hervorgebracht. Projektion auf die zur Symmetrieebene unter  $45^\circ$  geneigte Vertikalebene. (Hintere Seite.)

Zur Bestimmung der Beleuchtungsstärke des Bodens müssen wir aber die Himmelskugel mit ihren Hellegleichen und mit dem ausgeschnittenen Kreise auf den Boden projizieren. Nehmen wir  $PA = x$  als Halbmesser der Himmelskugel und als Einheit für diese Projektion, so wird jener Berührungskreis zugleich der ausgeschnittene Kreis, und sein Halbmesser ist gleich

$$CA : x = \sin \chi.$$

Die Projektion dieses Kreises auf die Bodenfläche ist aber eine Ellipse,  $C'A'D'$ , deren große Halbachse

$$a = C'D' : x = CA : x = \sin \chi,$$

und deren kleine Halbachse

$$b = C'A' : x = DA : x = \sin^2 \chi.$$

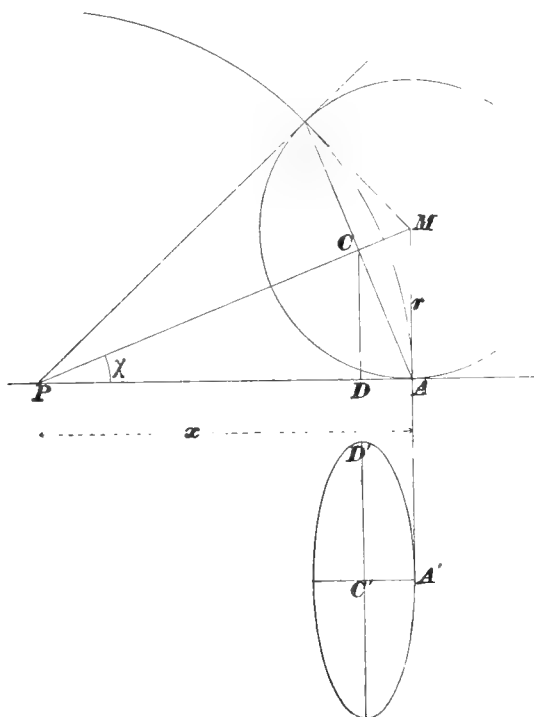


Fig. 131.

Eine solche Ellipse verzeichnet man nun, schneidet sie aus dem Papier aus und deckt sie auf die mit dem Halbmesser = 1 verzeichnete Horizontalprojektion der Himmelshalbkugel, so daß sie in einem Scheitel ihrer kleinen Achse den begrenzenden Horizontalkreis dieser Halbkugel in dem Auflagerpunkt  $A$  der Kugel berührt. Die Ellipse deckt dann den nicht beleuchteten Teil des Himmels zu, und von dem Reste bestimmt man, wie vorher, mittels Planimeter und tabellarischer Rechnung die erzeugte Helligkeit. Ist die Ellipse klein (bei großem  $x$ ), so deckt man besser den äußeren Teil derselben

zu, bestimmt die durch den inneren Teil erzeugte Helligkeit des Bodens in  $P$  und zählt diese von der durch den ganzen Himmel hervorgebrachten Helligkeit, die wir (S. 197) = 0,15470 gefunden haben, ab.

Ich habe nun die Punkte  $P$  in den Abständen  $x : r = 0,25; 0,5; 1, 2, 3, 4, 5, 6$  gewählt und unter den Azimuten  $\alpha = 0, 45, 90, 135, 180^\circ$ , wobei  $\alpha$  wieder den Winkel von  $AP$  mit der Projektion des vom Kugelmittelpunkte  $M$  gegen die Sonne gerichteten Strahles bedeutet. Es ergab sich dabei für

$x : r = \text{ctg } \chi$	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6
$\chi$	75° 58'	63° 26'	45° 00'	26° 34'	18° 26'	14° 02'	11° 19'	9° 28'
$a = \sin \chi$	0,970	894	707	447	3162	2425	1962	1645
$b = \sin^2 \chi$	0,941	800	500	200	1000	0588	0385	0371

Tab. 84. Die Ergebnisse für die Beleuchtungsstärken sind in Tab. 84 niedergelegt. Mittels dieser Tabelle wurden nun die Lichtkurven  $(x : r), H$  für unveränderliche  $\alpha$  und die Kurven  $\alpha, H$  für unveränderliche  $(x : r)$  gezeichnet.

Die ersten Kurven zeigen, daß bei  $x = 0$ , oder in dem Auflagerpunkt, die Lichtstärke Null stattfindet, daß diese mit wachsendem  $x$  steigt, besonders rasch auf der Sonnenseite ( $\alpha = 0$ ), und daß alle Kurven mit wachsendem  $x$  sich der Asymptote mit der vollen Beleuchtungsstärke  $H = 0,15470$  nähern.

Nach diesen werden die Punkte bestimmt, welche den Lichtgleichen von den gewählten Lichtstärken 0,02; 0,04; ... 0,14; 0,15 angehören; aus

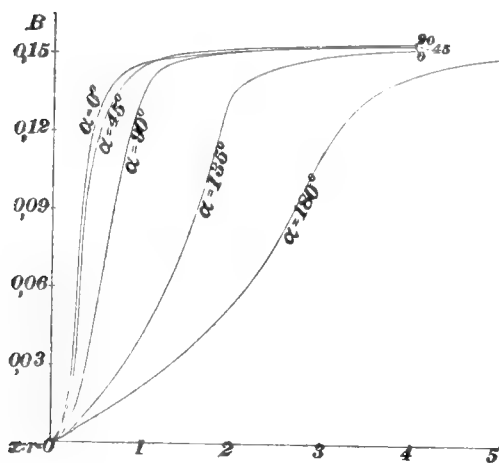


Fig. 132.

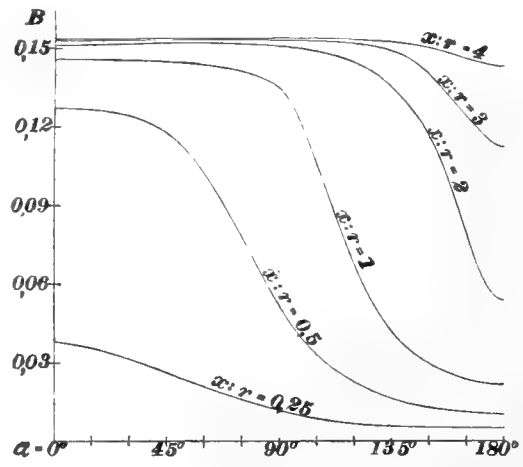


Fig. 133.

der ersten Figur die  $x:r$  für bestimmte  $\alpha$ , aus der zweiten die  $\alpha$  für bestimmte  $x:r$ . Diese Punkte wurden in Fig. 134 eingetragen, die ersten auf den Geraden  $\alpha = 0^\circ, 45^\circ, \dots, 180^\circ$ , die zweiten auf den Kreisen  $x:r = 0,25; 0,5; 1 \dots 5$ . Durch diese Punkte wurden dann die Lichtgleichenden von den gewählten Lichtstärken gezogen, wobei aber zu bemerken ist, daß die Punkte auf den Kreisen keine große Genauigkeit besitzen, da die Kurven der Fig. 133 aus nur wenigen Punkten verzeichnet wurden; sie wurden daher auch fast nicht berücksichtigt.

Tabelle 84.

Beleuchtungsstärke, hervorgebracht vom klaren Himmel in einem Punkte  $P$  des Bodens in der Nähe einer Kugel vom Halbmesser  $r$ , wenn der Abstand  $AP$  vom Auflagerpunkt  $A$  der Kugel  $= x$ , und wenn das Azimut von  $P$  gegen die durch die Sonne gelegte Vertikalebene  $= \alpha$  ist.

$x:r$	$\alpha = 0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$
0,25	0,03791	0,02658	0,01194	0,00566	0,00488
0,5	0,12760	0,11800	0,05193	0,01605	0,01018
1	0,14610	0,14540	0,13552	0,04150	0,02160
2	0,15163	0,15213	0,15122	0,13542	0,05370
3	0,15316	0,15348	0,15342	0,14922	0,11220
4	0,15390	0,15406	0,15411	0,15219	0,14209
5					0,14935
6					0,15203

Diese Lichtgleichenden des Bodens in der Nähe der Kugel, hervorgebracht durch die alleinige Beleuchtung durch den Himmel haben eiförmige Gestalten, die sich um den Auflagerpunkt  $A$  der Kugel, ähnlich wie um einen gemeinschaftlichen Brennpunkt herumlagern. Auf der Seite der Sonne liegen sie dicht beisammen, auf der entgegengesetzten weiter auseinander; ihr spitzes Ende ist der Sonne zugekehrt. Der Umriss der Kugel ist zugefügt; er zeigt, daß auf der Sonnenseite in einem Abstände  $x = r$  mit  $H = 0,14610$  fast schon die größte Bodenlichtstärke  $0,15470$  erreicht ist,

während auf der von der Sonne abgewendeten Seite die gleiche Stärke erst etwa bei  $x = 4,3$  erreicht wird.

Es ist auch noch die Schlagschattengrenze der Kugel eingezeichnet, eine Ellipse, deren Mittelpunkt  $C$ , wobei  $AC = r \cdot \operatorname{tg} \sigma = 1,414 \cdot r$ , wenn die Zenitdistanz der Sonne  $\sigma = 54^{\circ}44'$ , deren große Halbachse  $= r : \cos \sigma = 1,74 r$ , und deren kleine Halbachse  $= r$ . Die Lichtgleichen innerhalb

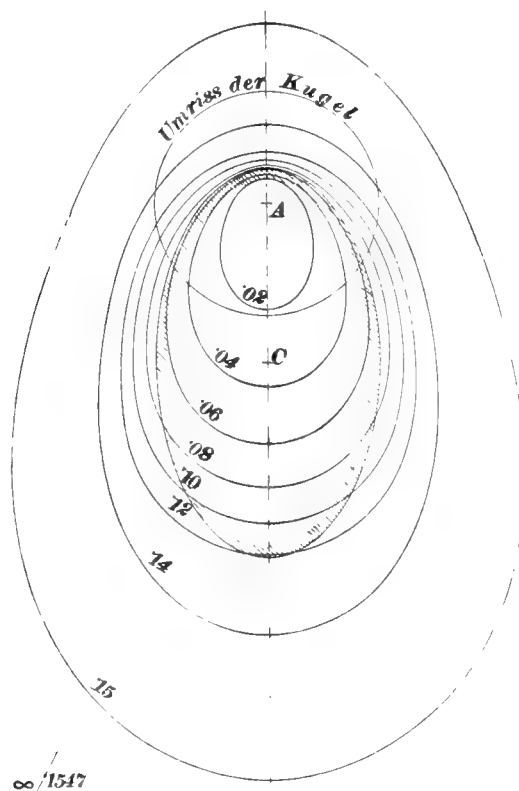


Fig. 134.

Lichtgleichen des Bodens, hervorgebracht durch die alleinige Wirkung des Himmels, in der Nähe der bei  $A$  aufgelagerten Kugel.

dieser Schattenellipse sind fast vollständig die wirklich eintretenden Lichtgleichen; denn sie werden nur sehr wenig durch den Reflex der selbst im Eigenschatten befindlichen Kugelhälfte geändert.

**189. Die Lichtgleichen der Kugel, hervorgebracht durch die gleichzeitige Beleuchtung durch die Sonne und die Atmosphäre.** Wir kommen nun zur Aufgabe, die Lichtgleichen der Kugel zu

bestimmen, welche bei der gleichzeitigen Bestrahlung durch die Sonne und durch den Himmel entstehen. Verzeichnen wir zuerst an der Projektion der Kugel auf die durch die Sonne gehende Vertikalebene, in Fig. 135 die durch die Sonne hervorgebrachten Lichtgleichen. Das durch die Atmosphäre geschwächte Sonnenlicht hat nur noch die Stärke 0,6978 (S. 197), und dies

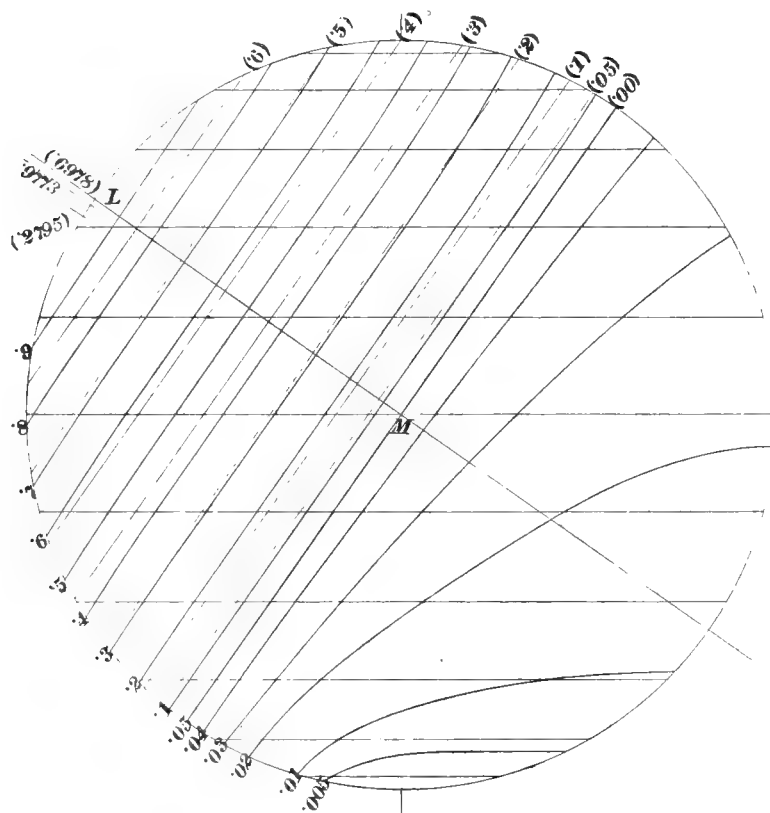


Fig. 135.

Die Lichtgleichen der Kugel, hervorgebracht durch gleichzeitige Einwirkung der Sonne und der Atmosphäre.

ist auch die Beleuchtungsstärke der Kugel am Endpunkte  $L$  des der Sonne zugewendeten Halbmessers  $ML$ . An einem anderen Punkte  $P$  der Kugel (in der Figur nicht angegeben), wo der Einfallswinkel der Sonnenstrahlen  $\varepsilon$  ist, ist die Beleuchtungsstärke  $b = 0,6978 \cdot \cos \varepsilon$ . Bezeichnet man die Projektion von  $P$  auf  $ML$  mit  $P'$ , so ist  $\cos \varepsilon = MP' : MP = MP' : ML$ ; daher

$$b = 0,6978 \cdot \frac{MP'}{ML}, \quad MP' = b \frac{ML}{0,6978} = b \cdot 1,433 ML.$$

Die zu den Beleuchtungsstärken  $b = 0,1; 0,2; \dots$  gehörigen Punkte  $P'$  erhält man daher; wenn man auf  $ML$  über  $L$  hinaus die Strecke  $ML' = 1,433 ML$  aufträgt, und sie in zehn gleiche Teile teilt, zu  $M$  die Zahl 0 schreibt, wobei dann bei  $L$  die Zahl 0,6978 stehen würde. Dann zieht man durch die auf der begrenzten Strecke  $ML$  liegenden Teilungspunkte Senkrechte zu  $ML$ , und diese geraden Linien stellen die kreisförmigen Lichtgleichen der Kugel von den Beleuchtungsstärken 0; 0,1; 0,2 ... 0,6 vor; sie sind in der Figur gezeichnet und mit eingeklammerten Zahlen bezeichnet.

Die durch die alleinige Wirkung der Atmosphäre hervorgebrachten Lichtgleichen sind in übereinstimmender Projektion in Fig. 128 dargestellt, und es handelt sich nun darum, aus beiderlei Linien die durch beiderlei Ursachen hervorgebrachten Lichtgleichen herzustellen.

Zu dem Ende muß man aus beiderlei Figuren für übereinstimmende Linien der Kugel die Beleuchtungskurven herstellen und ihre Ordinaten mit demselben Fußpunkt zusammenfügen. Es schien mir am einfachsten, als Linien der Kugel horizontale Kreise zu wählen, die in unseren Projektionen als horizontale Gerade erscheinen; dieselben wurden für die Zenitdistanzen  $\zeta = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ \dots 165^\circ$  gezeichnet. Als Abszissen wurden dann nicht die Kreise selbst, sondern ihre geradlinigen Projektionen angenommen, ihre Schnittpunkte mit den Lichtgleichen (0), (0,1), (0,2) ... der Fig. 135 übertragen und in ihnen die Ordinaten von jenen Größen (0), (0,1), (0,2) mit irgend einem Maßstabe (demjenigen eines quadrierten Papiertes) aufgetragen. Die Endpunkte dieser Ordinaten wurden verbunden, und die Verbindungslinien sind die Beleuchtungskurven für die Sonnenbeleuchtung. In Fig. 136 sind diese Kurven für  $\zeta = 15^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  mit 15', 45', 90' bezeichnet, angegeben.

Die übereinstimmende Beleuchtungskurve für die atmosphärische Beleuchtung wurde dann sogleich auf die ersteren Kurven summierend aufgesetzt, indem man auf dem übereinstimmenden Horizontalkreise der Fig. 128 die Abszisse bis zu einer Lichtgleiche maß, den Punkt der verzeichneten (ersteren) Beleuchtungskurve von dieser Abszisse bemerkte, in ihm eine addierende Ordinate gleich der Beleuchtungsstärke jener Lichtgleiche der Fig. 128 zufügte und dann die Endpunkte verband. Die so erhaltenen Kurven waren ebenfalls fast geradlinig; sie sind mit 15, 45, 90 bezeichnet.



Dann mas man an dieser Summenkurve die Abszisse der Punkte von den Helligkeiten 0; 0,1; 0,2 . . . , und übertrug sie in die Fig. 135. Man erhielt durch Verbindung der gleichbezahlten Punkte die Lichtgleichen für die gleichzeitige Sonnen- und atmosphärische Beleuchtung.

In der beschatteten Hälfte der Kugel bestehen sie ausschließlich aus den Lichtgleichen der atmosphärischen Einwirkung; in der beleuchteten Hälfte aber sind es in dieser Darstellung fast gerade Linien, die an ihrem oberen Ende etwas der Sonne zugebogen, an ihrem unteren etwas von ihr abgebogen sind. Auf der Kugel sind es also fast Kreise.

Der hellste Punkt der Kugel liegt zwischen den beiden hellsten Punkten der einzelnen Beleuchtungen, und diese liegen sehr nahe zusammen. Derjenige der Sonnenbeleuchtung hat die Zenitdistanz  $\sigma = 54^\circ 44'$  und die Beleuchtungsstärke 0,6978; derjenige der atmosphärischen Beleuchtung hat die Zenitdistanz etwa  $= 57^\circ 57'$  und die Beleuchtungsstärke 0,2795. Der hellste Punkt der gemeinschaftlichen Beleuchtung hat die Zenitdistanz von etwa  $55^\circ 42'$  (die Lichtgleichen der atmosphärischen Beleuchtung haben größere Abstände, als die der Sonnenbeleuchtung) und eine Beleuchtungs-

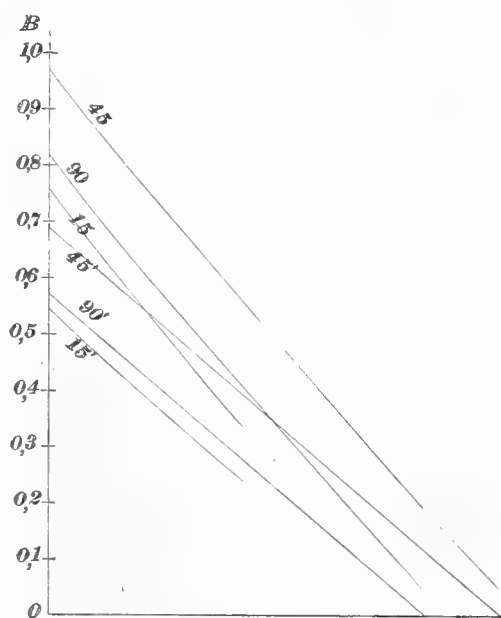


Fig. 136.

stärke nahe gleich der Summe von jenen oder 0,9773. Sie ist also fast gleich 1, d. h. so gros wie die durch das ungeschwächte Sonnenlicht hervorbrachte, wie wir ähnliches für die Bodenbeleuchtung fanden (S. 118).

Die Licht- und Schattengrenze der Sonnenbeleuchtung ist der auf den Sonnenstrahlen senkrechte größte Kreis; er wird, zwar nicht mathematisch genau, aber doch so weit die Genauigkeit der Zeichnung reicht, zur Lichtgleichen 0,05. Die Lichtgleiche 0,05 der atmosphärischen Beleuchtung (Fig. 128) liegt ganz nahe diesem gröſsten Kreis und wird durch die hier schwache Sonnenbeleuchtung etwas von der Sonne weggerückt, so

dafs sie fast genau in jenen grössten Kreis gelangt. Die Lichtgleichen auf der Sonnenseite haben in dieser Projektion fast gleiche Abstände; gegen die Mitte  $M$  der Kugel hin werden sie ganz wenig gröfser. Die Richtung dieser Projektionen der Lichtgleichen ist fast senkrecht auf  $ML$ ; gegen  $L$  hin werden sie ganz wenig steiler gegen die Horizontalebene.

Es zeigt sich daher das überraschende Ergebnis, dafs auf der durch die Sonne beleuchteten Kugelhälfte die gebräuchliche Darstellung der Lichtgleichen fast richtig ist, obgleich dabei gar keine Rücksicht auf die Atmosphäre genommen wird, weder auf ihre Lichtschwächung des Sonnenlichtes, noch auf die Beleuchtung durch sie, dafs sich also beiderlei Wirkungen fast aufheben. Nur an der Licht- und Schattengrenze ist die Wirkung merklich.

Man erhält nun sehr nahe richtige Lichtgleichen, wenn man, auf dem der Sonne zugewendeten Kugelhalbmesser  $ML$ , bei  $L$  die Beleuchtungsstärke 1, bei  $M$  0,05 anschreibt,  $ML$  in  $9\frac{1}{2}$  gleiche Teile teilt, den halben Teil bei  $M$  anträgt, und dann die Zahlen 0,05; 0,1; 0,2; 0,9; 1,0 anschreibt, und durch die Teilpunkte senkrechte Gerade zu  $ML$  zieht; sie sind die Projektionen der angenähert kreisförmigen Lichtgleichen.

Im Schatten wurden die Lichtgleichen oft ebenfalls als Kreise angegeben, symmetrisch zu denen auf der Sonnenseite in Bezug auf die Ebene der Eigenschattengrenze, und dabei wurde der der Sonne gegenüberstehende Punkt als hellster angenommen und die Dunkelheit unmittelbar hinter der Eigenschattengrenze am stärksten. Man dachte sich dabei den sogenannten atmosphärischen Strahl, der die Beleuchtung durch die Atmosphäre ersetzen sollte, als dem Sonnenstrahl gerade entgegengesetzt gerichtet. Das zeigt sich nun, soweit aufser der Sonne nur noch die Atmosphäre beleuchtend wirkt, als unrichtig. Die Beleuchtungsstärke im Schattenteil nimmt von der Eigenschattengrenze an ab und ist am Auflagerpunkt am Boden am schwächsten = 0. Die wirklichen Verhältnisse ermitteln wir aber erst durch Berücksichtigung der Rückstrahlung des Bodens, die wir alsbald bestimmen werden.

## Dritter Abschnitt.

Die gegenseitige Rückstrahlung zwischen dem Boden und der Kugel und die gleichzeitige Beleuchtung der Kugel durch die Sonne, die Atmosphäre und den Boden.

**190. Die Lichtgleichen des Bodens, hervorgebracht durch die auf ihm liegende Kugel, wenn sie durch die Sonne und den Himmel beleuchtet ist und das Rückstrahlungsvermögen  $A = 0,7$  besitzt.** Wir bestimmen zunächst die Beleuchtung des Bodens durch Rückstrahlung der auf ihm aufliegenden Kugel. Wenn ein mattes Flächenelement  $f$  eine Ebene  $PA$  bei  $P$  beleuchtet, so sendet es ebenso viel Licht auf die Flächeneinheit bei  $P$ , wie das matte Flächenelement  $f'$ , welches die Projektion von  $f$  aus dem Punkte  $P$  auf eine Kugel ist, die man aus  $P$  als Mittelpunkt mit dem Halbmesser 1 beschreibt, vorausgesetzt, daß  $f$  und  $f'$  dieselbe Beleuchtungsstärke  $b$  und dasselbe Rückstrahlungsvermögen  $A$  besitzen. Die durch  $f$  oder  $f'$  auf der Flächeneinheit bei  $P$  erzeugte Beleuchtungsstärke ist dann

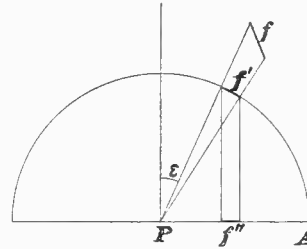


Fig. 137.

$$b' = \frac{f'}{\pi} \cdot b \cdot A \cdot \cos \varepsilon,$$

wenn  $\varepsilon$  der Einfallswinkel des Lichtes auf  $PA$ . Nun ist aber  $f' \cos \varepsilon = f''$ , gleich der Projektion von  $f'$  auf die Ebene  $PA$ . Daher

$$b' = \frac{f''}{\pi} \cdot b \cdot A.$$

$b'$  ist also ebenso groß, wie wenn die Fläche  $f''$  der Fläche  $PA$  bei  $P$  im senkrechten Abstände 1 gerade gegenübergestellt würde und die Beleuchtungsstärke  $b$  und das Rückstrahlungsvermögen  $A$  besäße.

Um daher die Beleuchtungsstärke  $b'$  zu bestimmen, welche auf der Flächeneinheit bei  $P$  durch eine matte Oberfläche hervorgebracht wird, deren Lichtgleichen gegeben sind, projiziere man diese Lichtgleichen aus  $P$  auf eine um  $P$  als Mittelpunkt beschriebene Kugel vom Halbmesser Eins,

projiziere diese Linien von der Kugel auf die Ebene des Flächenelementes  $f$ , bestimme (mittels des Planimeters) die Flächengröße der Streifen zwischen zwei aufeinander folgenden Lichtgleichen dieser letzteren Projektionen, multipliziere jede solche Streifgröße mit der zugehörigen mittleren Beleuchtungsstärke jener matten Fläche, nehme die Summe dieser Produkte, teile sie durch  $\pi$  und vervielfache sie mit dem Rückstrahlungsvermögen  $A$  jener matten Fläche, so ist dies die Beleuchtungsstärke der Flächeneinheit bei  $P$ .

Um dies Verfahren auf die Bestimmung der Beleuchtungsstärke des Bodens bei  $P$ , hervorgebracht durch Rückstrahlung der auf dem Boden bei  $A$  aufgelagerten Kugel, anzuwenden, beschreiben wir wie vorhin S. 209 aus  $P$  an die Kugel den berührenden Kegel, welcher ihn entlang des Kreises vom Halbmesser  $CA$  berührt. Es fällt dann Licht von dem Teile der Kugel nach  $P$ , welcher von diesem Kreise begrenzt und  $P$  zugekehrt ist. Dann sollten wir aus  $P$  als Mittelpunkt eine Kugel mit dem Halbmesser Eins beschreiben; statt dessen wählen wir den veränderlichen Halbmesser  $PA = x$ ; und wenn wir den unveränderlichen Kugelhalbmesser  $MA = r = 1$  setzen, so erhalten wir auf der mit jenem Halbmesser  $x$  beschriebenen Kugel Längen, die im Verhältnis  $x : r$ , und Flächen, die im Verhältnis  $(x : r)^2$  zu groß sind. Wir müssen daher die Ergebnisse wieder mit  $(r : x)^2$  vervielfachen.

Auf diese Kugel  $PA$  projizieren wir nun den Berührungskreis  $CA$  mit den in seinem Innern liegenden Lichtgleichen der Kugel  $MA$  und diese Projektionen dann auf die Bodenfläche  $PA$ . Der Berührungskreis  $CA$  liegt aber schon auf der Kugel  $PA$ , projiziert sich also in sich selbst; auf die Bodenfläche projiziert er sich dann in die Ellipse  $C'A'D'$  (Fig. 131), von der wir schon vorhin (S. 211) gesehen haben, daß ihre große Halbachse für  $x = 1$   $C'D' = CA = \sin \chi$ , und deren kleine  $= C'A' = \sin^2 \chi$  ist. Die Werte dieser Achsen für die verschiedenen Werte von  $x : r$  sind auf S. 212 angegeben, und wir müssen die gleichen Ellipsen wie dort zeichnen.

In diese Ellipsen müssen nun die zweimal projizierten Lichtgleichen unserer Kugel eingetragen werden. Wir betrachteten die Kugel vorerst nur von der Sonne und der Atmosphäre beleuchtet und bilden uns daher eine neue Figur mit den hierdurch erzeugten Lichtgleichen in Fig. 138 durch Übertragen aus Fig. 135, welche die Projektion auf die durch den

Fig. 131.

Fig. 138.

Kugelmittelpunkt  $M$  und die Sonne gehende Vertikalebene enthält. Die Punkte  $P$  des Bodens legen wir wieder fest durch ihren Abstand  $AP = x$  vom Auflagerpunkt  $A$  der Kugel und durch das Azimut  $\alpha$  von  $AP$ , d. h. den Winkel des  $AP$  mit der Projektion des Strahles aus  $A$  gegen die Sonne.

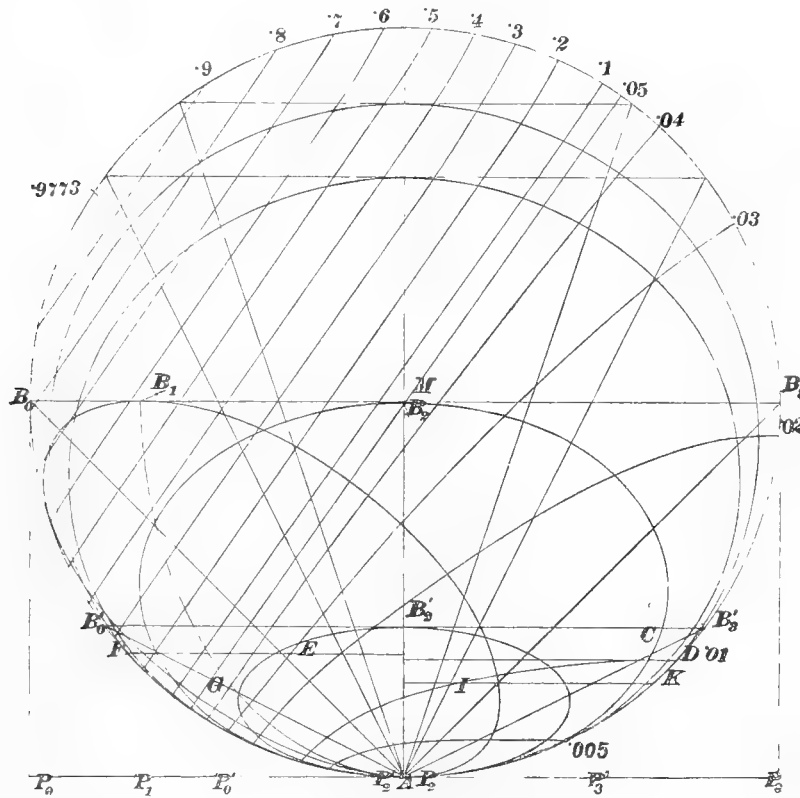


Fig. 138.

Konstruktion der Hilfsfiguren zur Bestimmung der Bestrahlungsstärke auf dem Boden, erzeugt durch die Rückstrahlung von der Kugel.

Wir wollen zunächst  $x = 1 = r$  und  $\alpha = 0$  wählen und dafür jene Ellipse, in Fig. 139 mit  $AB$  bezeichnet, mit ihren zweifach projizierten Lichtgleichen der Kugel zeichnen. In Fig. 138 zeigt sich dann das  $P$  der Fig. 131 in  $P_0$ , wobei  $AP_0 = r$  ist, der Berührungskreis auf der Kugel zeigt sich als die Gerade  $AB_0$ , die Halbachsen der Ellipse in Fig. 139 sind (S. 212, da  $\chi = 45^\circ$ ),  $\sin \chi = 0,707$  und  $\sin^2 \chi = 0,5$ .

Einige Punkte der Lichtgleichen auf der Ellipse der Fig. 139 erhält man, indem man eine Lichtgleiche der Fig. 138 mit der Geraden  $AB_0$

schneidet, den senkrechten Abstand des Schnittpunktes von der Geraden  $AM$  in den Zirkel nimmt und auf der Ellipse der Fig. 139 die beiden Punkte bestimmt, welche denselben Abstand von der Ellipsentangente in  $A$  besitzen, wobei der Punkt  $A$  der Fig. 139 dem Punkte  $A$  der Fig. 138 zugeordnet ist.

Weitere Punkte auf der Linie  $AB$  der kleinen Achse der Ellipse in Fig. 139 erhält man, indem man die Punkte der Lichtgleichen in Fig. 138, welche auf dem Kugelumfang  $AB_0$  liegen, aus  $P_0$  auf den Kreis projiziert, welcher aus  $P_0$  durch  $A$  und  $B_0$  gelegt ist, die Abstände der Projektionspunkte von  $AM$  mißt und sie auf der Geraden  $AB$  der Fig. 139 von  $A$  aus aufträgt. Wegen der Symmetrie der Figur 139 in Bezug auf  $AB$  und

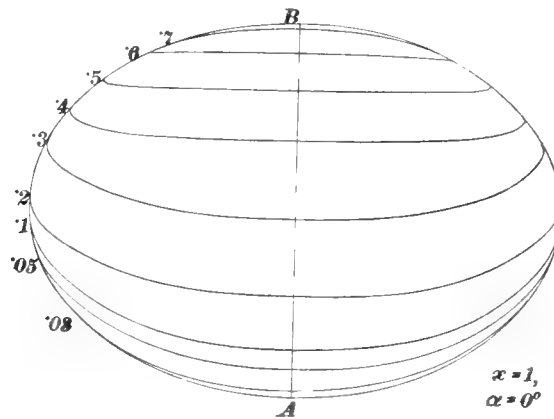


Fig. 139.

Hilfsfigur zur Bestimmung der Beleuchtungsstärke in einem Punkte des Bodens vom Azimut  $\alpha$  und der Entfernung  $x$  vom Auflagerpunkt der Kugel. Der Kugelhalbmesser ist  $r = 1$ .

wegen des einfachen Verlaufs der Kurven konnte ich mich mit den drei angegebenen Punkten für jede Kurve begnügen, zumal da noch die Tangenten in denselben gegeben waren.

Fig. 140. Die Figur 140 für  $x = 1$ ,  $\alpha = 180^\circ$  wird übereinstimmend konstruiert, indem  $P_3$  und  $B_3$  an die Stelle von  $P_0$  und  $B_0$  treten. Es treten hier nur die Lichtgleichen 0,01 und 0,005 auf, bezeichnet mit  $\cdot 01$  und  $\cdot 005$ . Da aber die  $\cdot 01$  eine verwickeltere Gestalt besitzt, wurden außer jenen dreien noch einige Punkte konstruiert, und zwar auf folgende Weise.

Ein Punkt  $C$  der  $\cdot 01$  muß auf die aus  $P_3$  als Mittelpunkt durch  $A$  und  $B_3$  gelegte Kugel aus  $P_3$  nach  $C''$  projiziert und dann  $C''$  senkrecht

auf die Bodenfläche nach  $C'''$  projiziert werden.  $C'''$  in Fig. 140 ist dann ein Punkt der aus  $\cdot 01$  der Fig. 138 zu erhaltenden Kurve  $\cdot 01$  der Fig. 140. Man überträgt zuerst den Punkt  $C$  der Kurve  $\cdot 01$  in Fig. 138 in Fig. 140 nach  $C$ . Er liegt auf dem durch  $C$  gelegten Horizontalkreise der Kugel, dessen Halbmesser gleich dem Abstände des  $D$  von  $AM$  (Fig. 138) und dessen Projektion auf die Bodenfläche in Fig. 140 der aus  $A$  mit jenem Halbmesser ( $= AD$  der Fig. 140) beschriebene Kreis ist. Auf ihm liegt der Punkt  $C$  (Fig. 140) so, daß sein Abstand von der Ellipsentangente  $AT$  in  $A$  (Fig. 140) gleich dem Abstand des  $C$  in Fig. 138 von  $AM$  ist. Die durch  $C$  und die Lotrechte  $P_3B_3$  (Fig. 138) gelegte Vertikalebene schneidet

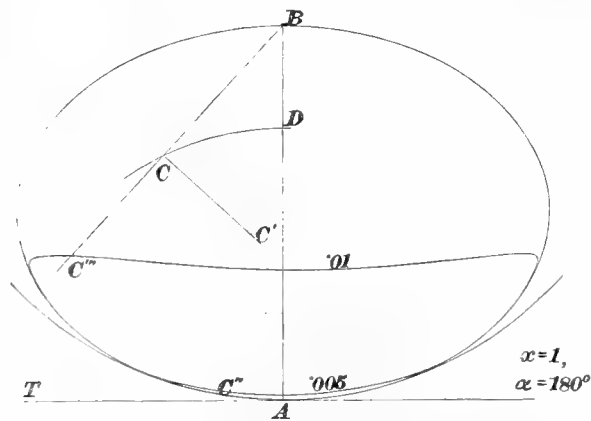


Fig. 140.

Vgl. Fig. 139.

die Bodenfläche in  $BC$  (Fig. 140) und die aus  $P_3$  durch  $A$  gelegte Kugel in einem Kreise vom Halbmesser  $P_3A$  (Fig. 138)  $= BA$  (Fig. 140). Legt man diese Vertikalebene in Fig. 140 um  $BC$  um, so kommt  $C$  nach  $C'$ , wenn  $CC' \perp BC$  und gleich dem Abstände des  $C$  von  $AP_3$  in Fig. 138, jener Kreis in den aus  $B$  mit  $BA$  als Halbmesser beschriebenen Kreis. Nun projiziert man  $C'$  aus  $B$  auf diesen Kreis nach  $C''$  und dann  $C''$  auf  $BC$  senkrecht nach  $C'''$  ( $C''C''' \perp BC$ ), so ist  $C'''$  ein weiterer Punkt der Kurve  $\cdot 01$  der Fig. 140.

Für  $x = 1$  und  $\alpha = 90^\circ$  erhält man die Fig. 141.  $P$  gelangt nach Fig. 141.  $P_2$  (in  $A$  der Fig. 138), der Berührungskreis des aus  $P_2$  an die Kugel gelegten berührenden Kegels erscheint in Fig. 138 als Ellipse mit der

kleinen Achse  $AB_2$  (d. i. auch  $P_2M$ ) = 1 und der großen Achse =  $\sqrt{2}$  = 1,414 und projiziert sich auf die Bodenfläche in eine mit dieser Ellipse gleiche Ellipse, den Umriss der Fig. 141. Die Punkte der Lichtgleichen auf dem Berührungs- oder Grenzkreis werden aus Fig. 138 in Fig. 141 übertragen, indem in beiden Figuren die Abstände dieser Punkte von den Tangenten der Ellipsen in  $A$  gleich sind, d. i. auch von  $A$  selbst. Dabei erscheint aber in Fig. 141 das rechts, was in Fig. 138 links erscheint, da man den Boden von oben, also den Grenzkreis beidesmal von entgegengesetzten Seiten betrachtet.

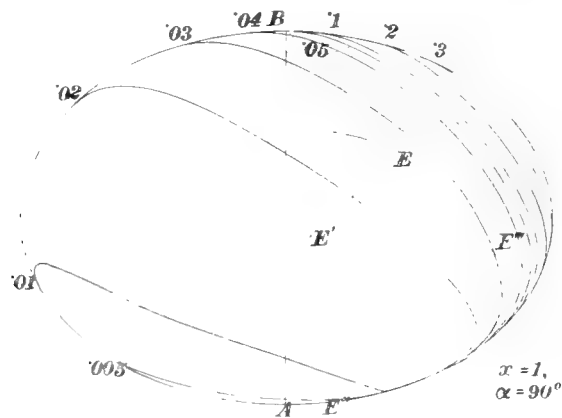


Fig. 141.

Vgl. Fig. 139.

Die Punkte der Geraden  $AB_2$  der Fig. 138 gelangen auf die Gerade  $AB$  der Fig. 141; man zieht durch den Punkt einer Lichtgleiche der Fig. 138 eine Senkrechte zu  $AM$  bis zum Umriss der Kugel, projiziert diesen Punkt aus  $P_0$  auf den aus  $P_0$  durch  $A$  und  $B_0$  gezogenen Viertelskreis und überträgt den Abstand dieser Projektion von  $AM$  in die Fig. 141 auf die Gerade  $AB$  als Abstand von  $A$ .

Die allgemeinen Punkte werden im wesentlichen wie vorher gefunden. So bestimmt man den von dem Punkte  $E$  der Kurve '03 in Fig. 138 herührenden Punkt  $E'''$  in Fig. 141, indem man den Horizontalkreis des  $E$  von einem Halbmesser gleich dem Abstand des Punktes  $F$  von  $AM$  in Fig. 138 als Kreis aus  $A$  in Fig. 141 zeichnet, darauf  $E$  im richtigen Abstände von  $AB$  bestimmt, nämlich gleich dem Abstände des Punktes  $E$



in Fig. 138 von  $AM$ ,  $BE$  zieht, darauf senkrecht die Strecke  $EE'$ , welche man gleich dem Abstand des Punktes  $E$  in Fig. 138 von  $AP_0$  macht, das  $BE'$  mit dem aus  $B$  mit dem Halbmesser  $1 = BA$  beschriebenen Kreise in  $E''$  schneidet und  $E''$  senkrecht auf  $BE$  nach  $E'''$  projiziert.

Sodann wurde die entsprechende Konstruktion für den Punkt  $P_1$  mit  $x = 1$ ,  $\alpha = 45^\circ$  ausgeführt.  $P_1$  zeigt sich in Fig. 138 auf  $AP_0$  im Abstand von  $A$  gleich  $AP_1 = \cos 45^\circ = 0,707$ , der zu  $P_1$  gehörige Berührungskreis auf der Kugel zeigt sich als Ellipse  $AB_1$ , deren Mittelpunkt in der Mitte von  $P_1M$  liegt, deren große Halbachse senkrecht zu  $P_1M$  liegt und gleich  $0,707$  ist, deren kleine Halbachse in  $P_1M$  liegt und  $= 0,707 \cdot \frac{1}{2} = 0,3535$

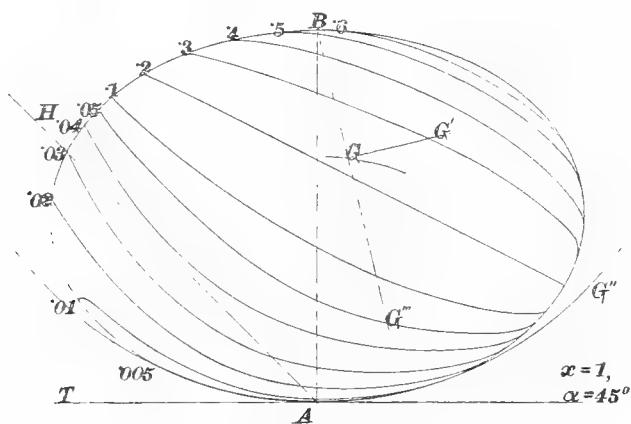


Fig. 142.

Vgl. Fig. 139.

ist, weil die räumliche Linie  $MP_1$  mit der Projektionsebene einen Winkel bildet, dessen sinus gleich  $\frac{1}{2}$  ist. Diese Ellipse berührt in  $A$  und dem dazu in Bezug auf  $P_1M$  symmetrischen Punkte den Umriss der Kugel, und die Gerade  $MB_0$  im Punkte  $B_1$ , wobei  $MB_1 = 0,707$ .

Diese Ellipse  $AB_1$  gibt in der Projektion auf die Bodenfläche wieder eine Ellipse, wie die anderen für  $x = 1$  und ist in Fig. 142 dargestellt. Die Schnittpunkte der Lichtgleichen mit dieser Grenzellipse überträgt man aus Fig. 138 in Fig. 142, indem man ihre Abstände von der Ellipsentangente  $AT$  (Fig. 142) gleich ihren Abständen von  $AP_0$  (Fig. 138) macht, was deshalb richtig ist, weil die Neigung der Ebene der Ellipse mit der Bodenfläche  $45^\circ$  beträgt.

Die Punkte auf der Geraden  $AB$  in Fig. 142 rühren von den Punkten der Viertellipse  $AB_1$  in Fig. 138 her, welche den Schnitt der Ebene  $MAP_1$  mit der Kugel darstellt. Einen solchen Punkt der Viertellipse  $AB_1$  führt man durch Drehung um  $AM$  um  $45^\circ$  in den Kugelumfang, den Viertelskreis  $AB_0$  über, projiziert den dadurch mit übergeführten Punkt aus  $P_0$  auf den aus  $P_0$  durch  $A$  und  $B_0$  geführten Viertelskreis, mißt den Abstand dieser Projektion von der Strecke  $AM$  und überträgt ihn in der Fig. 142 auf die Gerade  $AB$  von  $A$  aus.

Der allgemeine Punkt einer Kurve, so  $G'''$  von  $\cdot 05$ , wird aus  $G$  so gefunden. Man ziehe  $AH$  in Fig. 142, so daß  $TAH = 45^\circ$ , beschreibe mit dem Halbmesser des Horizontalkreises von  $G$  einen Kreis aus  $A$  in Fig. 142, bestimme darauf  $G$ , so daß der Abstand  $G(AH) = \text{Abst. } G(AM)$  der Fig. 138, ziehe (Fig. 142)  $GG' \perp BG$  und  $GG' = \text{Abst. } G(AP_0)$  der Fig. 138, projiziere in Fig. 142  $G'$  aus  $B$  auf den aus  $B$  mit dem Halbmesser  $1 = BA$  beschriebenen Kreis nach  $G''$  und projiziere  $G''$  auf  $BG$  nach  $G'''$ .

Da sich die Beleuchtungsstärken bei  $\alpha = 90$  und  $180^\circ$  klein und nicht mehr sehr verschieden und der Verlauf der Kurven durch die anderen  $\alpha$  schon ziemlich gesichert ergaben, konnte man die besondere Untersuchung für  $\alpha = 135^\circ$  entbehren. Für andere  $x$  treten wieder die in Fig. 131 dargestellten Verhältnisse ein, wonach der Winkel des Strahles  $PM$  gegen die Bodenfläche  $= APM = \chi$  ist. Wir wollen aber hier der Einfachheit der Konstruktion halber stets  $MA = r$  als Halbmesser der Himmelskugel und als Einheit annehmen, statt das wechselnde  $x = AP$ , wie es in Wahrheit notwendig wäre. Dadurch erhalten wir die Fläche des Berührungskreises  $CA$  und seiner Projektion  $C'A'D'$ ,  $x^2$  mal zu groß und müssen das Ergebnis durch  $x^2$  teilen. Es wird aber

$$\cot \chi = x : r = x,$$

der Halbmesser des Berührungskreises und die große Halbachse jeder (elliptischen) Projektion desselben

$$a = CA = r \cos \chi = \cos \chi,$$

die kleine Halbachse seiner Projektion auf eine auf  $x$  senkrechte Ebene

$$b' = CD = \cos^2 \chi,$$

die kleine Halbachse seiner Projektion auf die Bodenfläche

$$b = DA = CA' = \cos \chi \sin \chi = \cos^2 \chi : x,$$

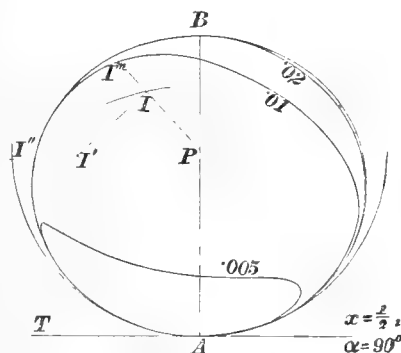
dann ergibt sich folgende kleine Tabelle:

$x:r =$	0,5	1	2	3	4	5
$\chi =$	63° 26'	45° 00'	26° 34'	18° 26'	14° 02'	11° 19'
$a =$	0,447	0,707	0,894	0,949	0,970	0,981
$b' =$	0,200	0,500	0,800	0,900	0,940	0,962
$b =$	0,400	0,500	0,400	0,300	0,235	0,192

Es wurden nur mehr  $\alpha = 0^\circ, 90^\circ$  und  $180^\circ$  betrachtet. Für  $x = 0,5$  kam dann der Punkt  $P$  der Reihe nach in Fig. 138 nach  $P'_0, P'_2, P'_3$ . Die Berührungskreise erscheinen in dieser Figur als die Gerade  $AB'_0$ , die Ellipse  $AB'_2$  und die Gerade  $AB'_3$ , und ihre Projektionen auf die Bodenfläche als gleiche Ellipsen, deren eine in Fig. 143 für  $\alpha = 90^\circ$  gezeichnet ist. Die Messungs- und Rechnungsergebnisse mußten dabei durch  $x^2$  geteilt, d. h. mit 4 vervielfacht werden. Fig. 143.

Sodann wurden die Konstruktionen für  $x = 2$  und 3 ausgeführt. Fig. 144 zeigt das Ergebnis für  $x = 2, \alpha = 90^\circ$ , Fig. 145 dasjenige für  $x = 3, \alpha = 0^\circ$ . Die Ergebnisse bei der ersten Figur wurden durch 4, die der zweiten durch 9 geteilt. Fig. 144 und 145.

Die Konstruktionen müssen gegen vorher einige Verallgemeinerungen erfahren. In Fig. 143 für  $x = 0,5, \alpha = 90^\circ$  zeigt sich  $P$  auf  $AB$  in dem Abstände  $AP = x = 0,5$ . Ein Punkt der Grenzellipse  $AB'_2$  der Fig. 138 wird übertragen, indem man durch ihn eine Parallele zu  $AP_0$  zieht, sie mit der Geraden  $AB'_0$  (oder  $AB'_3$ ) schneidet, den Abstand des Schnittpunktes von  $AM$  mißt und den Punkt auf der Umrissellipse der Fig. 143 bestimmt, welcher den gleichen Abstand von der Ellipsentangente  $AT$  besitzt. Fig. 143.



Vgl. Fig. 139. Halber Maßstab von Fig. 139.

Aus einem Punkte der Mittelgeraden  $AB'_2$  in Fig. 138 erhält man einen Punkt der Geraden  $AB$  in Fig. 143, indem man aus dem ersteren Punkte eine Senkrechte zu  $AM$  bis zum Umriss der Kugel zieht, diesen Punkt des Umrisses aus  $P'_0$  auf den aus

$P_0$  durch  $A$  und  $B_0$  gezogenen Kreis projiziert, den Abstand dieser Projektion von  $AM$  misst und dem entsprechenden Punkt auf  $AB$  in Fig. 143 den gleichen Abstand von  $A$  gibt.

Einen allgemeinen Punkt  $I$  der Kurve  $\cdot 01$  in Fig. 138 überträgt man in die Fig. 143, indem man mit dem Halbmesser des durch  $I$  gehenden horizontalen Kugelkreises dessen Projektion auf die Bodenfläche als Kreis aus  $A$  durch  $I$  zieht, (Abstand des Punktes  $K$  von  $AM$  in Fig. 138 übertragen in  $AI$  der Fig. 143) auf diesem Kreise  $I$  bestimmt, so daß der Abstand des Punktes  $I$  von  $AB$  in Fig. 143 gleich ist dem Abstände des Punktes  $I$

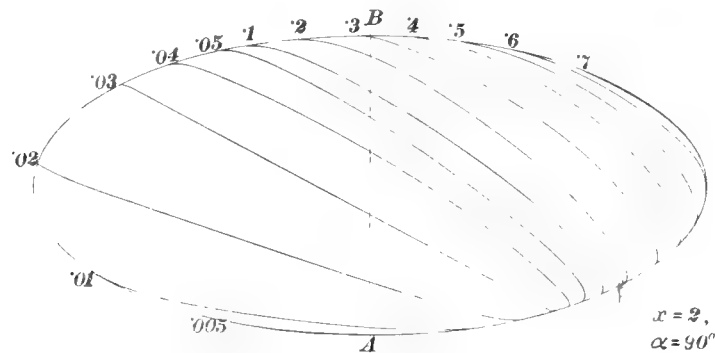


Fig. 144.1)

Vgl. Fig. 139. Doppelter Maßstab von Fig. 139.

von  $AM$  in Fig. 138, dann die Vertikalebene von  $PI$  umlegt, dabei in Fig. 143  $II'$  senkrecht  $PI$  und gleich dem Abstand des  $I$  von  $AP_0$  in Fig. 138 macht,  $I'$  in Fig. 143 auf den aus  $P$  durch  $A$  (mit dem Halbmesser  $x = 0,5$ ) gezogenen Kreis nach  $I'$  projiziert und dann  $I''$  senkrecht auf  $PI$  nach  $I''$ ; dies ist dann ein Punkt der Kurve  $\cdot 01$ .

In gleichartiger Weise sind die Konstruktionen für  $x = 2$  und  $3$  ausgeführt, wobei wegen weit entfernt liegender Punkte eine Erweiterung der Zeichenfläche notwendig war.

Mittels dieser Zeichnungen wurden nun die Beleuchtungsstärken in den verschiedenen Punkten  $P$  der Bodenfläche, hervorgebracht durch die Rückstrahlung der Kugel, berechnet. Es wurden mittels des Planimeters die Inhalte der einzelnen Flächenstreifen zwischen den Lichtgleichen

1) Die beiden Kurven  $\cdot 005$  und  $\cdot 7$  fallen nahezu mit dem Umfang der Ellipse zusammen und sind bei der Wiedergabe nicht getrennt zum Vorschein gekommen. [D. H.]

bestimmt, jeder mit der ihm zukommenden mittleren Beleuchtungsstärke auf der Kugel vervielfacht und die Summe der Produkte gebildet. So erhielt man z. B. für  $x = 2$ ,  $\alpha = 90^\circ$  (Fig. 144), die Summe jener Flächenstreifen  $= 1,1138$ , während sie (nach Tab. S. 227)  $= \pi \cdot a \cdot b = 3,14 \cdot 0,894 \cdot 0,4 = 1,1240$  sein sollte; diese Abweichung kann unbeachtet bleiben. Dann erhielt man die Summe jener Produkte in die mittleren Beleuchtungsstärken  $= 0,12467$ .

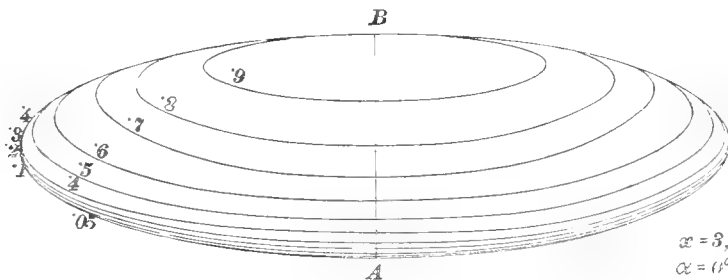


Fig. 145.

Vgl. Fig. 139. Dreifacher Maßstab von Fig. 139.

Diese Zahl mußte für  $x = 2$  durch  $2^3$  geteilt, dann auch mit  $\pi = 3,14$  geteilt und endlich mit dem Rückstrahlungsvermögen  $A$  der Kugel, das wir  $= 0,7$  annahmen, vervielfacht werden. So erhielt man (vgl. S. 219, wo nur noch der Divisor 4 hinzukommt):

$$b' = 0,12467 \frac{0,7}{3,14 \cdot 4} = 0,00697$$

als Beleuchtungsstärke.

Die Ergebnisse sind in der Tabelle 85 zusammengestellt, worin nur die Zahlen für  $x = 4$  und  $x = 5$  und dabei für  $\alpha = 0, 90, 180^\circ$  auf einfachere angenäherte Weise erhalten wurden. Die Gestalten der Lichtgleichern ändern sich bei großem  $x$  nur wenig, so daß die im Punkte  $P$  hervorbrachte Bestrahlungsstärke nur noch von der Größe der Ellipsen, d. i. vom Produkte ihrer Halbachsen abhängt. Für dasselbe  $\alpha$  stehen daher diese Stärken für  $x = 3, 4, 5$  im Verhältnis (s. die Tabelle der S. 227) von

$$\frac{0,900 \cdot 0,300}{3 \cdot 3} = 0,0300,$$

$$\frac{0,940 \cdot 0,235}{4 \cdot 4} = 0,0138,$$

$$\frac{0,962 \cdot 0,192}{5 \cdot 5} = 0,00739.$$

Tabelle 85.

Beleuchtungsstärke, hervorgebracht durch die von der Sonne und dem Himmel beleuchtete Kugel von dem Rückstrahlungsvermögen  $A = 0,7$ , auf dem Boden, auf dem sie aufliegt, im Punkte  $P$ , der wie in der vorigen Tabelle durch  $x$  und  $\alpha$  bestimmt ist.

$x : r$	$\alpha = 0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
0,5	0,01940		0,00375	0,00298
1	0,07255	0,04118	0,00733	0,00292
2	0,03602		0,00696	0,00111
3	0,01476		0,00377	0,00047
4	0,00630		0,00170	0,00021
5	0,00300		0,00081	0,00010

Vervielfacht man daher die Zahlen für  $x = 3$  mit  $0,0138 : 0,0300 = 0,460$  und  $0,00739 : 0,0300 = 0,246$ , so erhält man die Beleuchtungsstärken für

$\alpha =$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
$x = 4$	0,00679	0,00174	0,00022
$x = 5$	0,00363	0,00093	0,00012

Ich hatte nun diese Zahlen vorher auf eine etwas andere, aber nicht so gute Weise bestimmt und die in Tabelle 85 eingetragenen Zahlen erhalten. Weil ich mit diesen die weiteren Konstruktionen durchgeführt hatte, die Änderungen durch die etwas verbesserten Zahlen aber kaum merklich sein würden, so behalte ich die Zahlen der Tabelle bei.

Mit diesen Zahlen wurden nun die Kurven der Beleuchtungsstärken gezeichnet und zwar in Fig. 146 diejenigen für die unveränderlichen  $\alpha = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$ , zum Teil mit zehnfachen Ordinaten, in Fig. 147 diejenigen mit den unveränderlichen  $x = 0,5; 1; 2; 3; 4; 5$ . Die für  $\alpha = 135^\circ$  und teilweise für  $\alpha = 45^\circ$  in Fig. 146 wurden mit Hilfe der Fig. 147 hergestellt.

Aus diesen Kurven wurden, wie schon öfter, für die bestimmten  $\alpha$  die  $x$  und für die bestimmten  $x$  die  $\alpha$  bestimmt, wo die Beleuchtungsstärken die Größen 0,001; 0,002; 0,003; 0,004; 0,005; 0,01; 0,02; ... 0,07 an-

nahmen, und daraus wurden die Lichtgleichen des Bodens gezeichnet. In Fig. 148 sind aus dem Auflagerpunkt  $A$  der Kugel die Geraden mit jenen Azimuten  $\alpha$  und die Kreise mit jenen Halbmessern  $x$  gezeichnet, darauf wurden jene Punkte aufgetragen und durch ihre Verbindung die Lichtgleichen hergestellt.

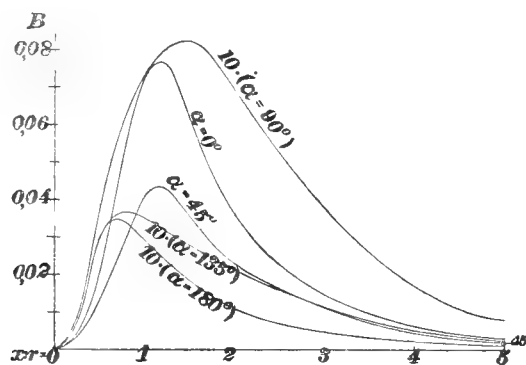


Fig. 146.

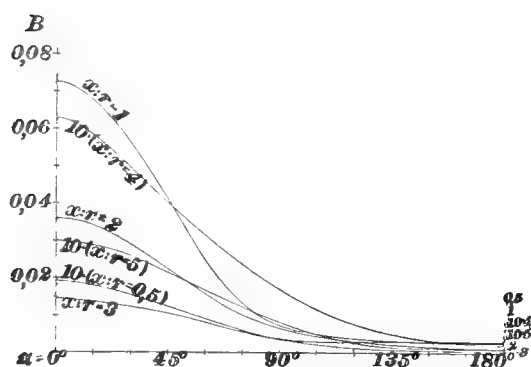


Fig. 147.

Man bemerkt, daß der hellste Punkt mit der Beleuchtungsstärke  $b' = 0,077$  bei  $\alpha = 0$  und  $x = 1,15$  stattfindet, der dunkelste mit  $b' = 0$  an der Auflagerstelle  $A$ . Außerdem herrscht in den unendlich fernen Punkten die Beleuchtungsstärke  $b = 0$ . Um jenen hellsten Punkt ziehen sich die Linien größerer Helligkeit in anfangs kreisförmigen, dann mehr bohnenförmigen Linien herum, um den dunkelsten die Linien kleinerer Helligkeit in ellipsenähnlichen Gestalten. Beiderlei Kurven streben gegeneinander und stoßen dann zusammen in der Kurve  $b' = 0,0035$  mit einem Doppelpunkt

und ohne Wendepunkt, in ihrem weiteren Umfang eine kleinere geschlossene Fläche abgrenzend.

Das ganze Innere ist dadurch in eine kleine ellipsenähnliche Fläche geteilt, welche den dunkelsten Punkt enthält und in eine sichelförmige mit dem hellsten Punkt. Diese Gestalt wird nun von Kurven umschlossen, die

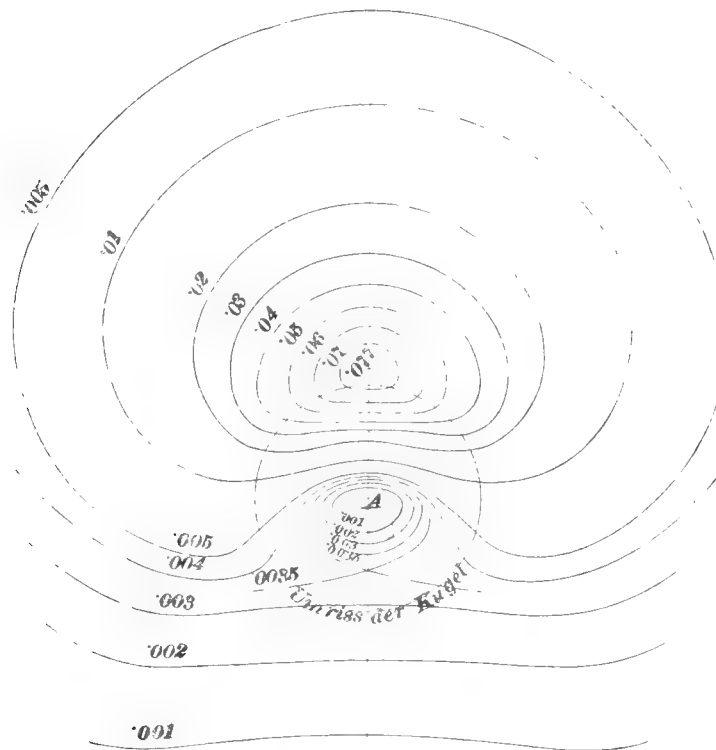


Fig. 148.

Beleuchtung des Bodens durch Rückstrahlung der Kugel von der Weisse  $A = 0,7$ .

sich stets erweitern, anfangs eine bohnenförmige, dann eine ellipsenartige Gestalt besitzen und sich so gegen das Unendliche mit  $b' = 0$  erweitern. Denkt man sich die Lichtgleichungen als Höhenkurven einer Fläche, so stellt der Doppelpunkt einen Sattelpunkt der Fläche dar. In ihm erreicht  $b'$  einen größten Wert, wenn man auf  $\alpha = 180^\circ$  hinschreitet, einen kleinsten Wert, wenn man auf dem Kreise  $x = 0,0035$  hinschreitet.



**191. Die Vereinigung der auf dem Boden erzeugten Beleuchtung durch die Sonne, durch die Atmosphäre und durch die Rückstrahlung der durch Sonne und Atmosphäre beleuchteten, auf dem Boden aufliegenden Kugel vom Rückstrahlungsvermögen  $A = 0,7$ .** Die Beleuchtung des Bodens durch die Sonne allein beträgt  $b' = 0,4029$  (S. 197). Von ihr ist nur die elliptische Schlagschattenfläche der Kugel ausgenommen, welche von der Sonne kein Licht empfängt.

Die Beleuchtung des Bodens durch den Himmel in der Nähe der auf ihm aufliegenden Kugel ist durch die Lichtgleichen der Fig. 134 dargestellt; sie ist an der Auflagerstelle  $A$  gleich 0 und nähert sich mit der Entfernung von  $A$  asymptotisch der Beleuchtungsstärke  $b = 0,1547$ .

Die Beleuchtung des Bodens durch die Rückstrahlung der Kugel, wenn diese nur von Sonne und Himmel beleuchtet wird, ist in Fig. 148 dargestellt.

Um diese drei Beleuchtungen zu vereinigen, fügen wir die aus den Beleuchtungskurven zu entnehmenden Beleuchtungsstärken für unveränderliche Azimute  $\alpha$  und die für unveränderliche Abstände  $x$  zusammen. Für unveränderliche  $\alpha$  sind in Fig. 149 Kurven  $H, x$  für Luftbeleuchtung aus Fig. 132 übertragen und mit  $0', 45' \dots 180'$  bezeichnet. Darauf aufgesetzt sind die Ordinaten der Kurven für die Kugelrückstrahlung aus Fig. 146, und dadurch sind die Summenkurven  $0,45, \dots 180$  gewonnen. Diese Kurven geben die Beleuchtungsstärken in dem Schlagschatten der Kugel an. In dem übrigen Teil müssen alle Ordinaten um  $b' = 0,4029$  vermehrt werden; und man erhält die  $x$  der Punkte der gesuchten Lichtgleichen, welche die bestimmten Beleuchtungsstärken  $0,45; 0,50; \dots$  besitzen, indem man Parallele zur  $x$ -Achse zieht in den Abständen  $0,45 - 0,4029 = 0,0471; 0,50 - 0,4029 = 0,0971 \dots$  wie es in der Figur geschehen ist.

In gleicher Weise ist die Fig. 150 für unveränderliche  $x$  hergestellt aus den Figuren 133 und 147. Aus beiden Figuren 149 und 150 sind nun die  $x$  für unveränderliche  $\alpha$ , und die  $\alpha$  für unveränderliche  $x$  abgelesen, in denen die Beleuchtungsstärke  $0,01; 0,02; \dots 0,56$  ist, die Punkte sind in Fig. 151 auf Strahlen aus  $A$  und auf Kreisen um  $A$  aufgetragen und durch Verbindung gleichbezahlter Punkte die Lichtgleichen gezeichnet.

Doch sei bemerkt, daß die Punkte der Geraden die unverrückbaren sind und daß bei eintretenden Unstetigkeiten die Punkte der Kreise verbessert werden müssen, weil die Kurven der Fig. 150 aus wenigeren Punkten gezeichnet und bei schroffen Übergängen unsicher sind. Die Stetigkeit in den Lichtgleichenen der Fig. 151 ist hier mehr maßgebend als die in den Beleuchtungskurven der Fig. 150.

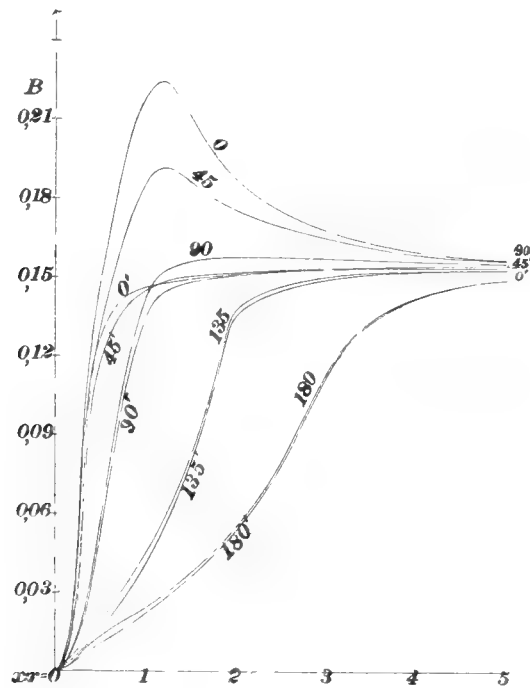


Fig. 149.

Diese Lichtgleichenen der Fig. 151 haben in und auferhalb des Schlag-  
schattens ganz getrennte Gestalten, die nicht ineinander übergehen. Im  
Schatten sind die durch die Atmosphäre allein hervorgebrachten Lichtgleichenen  
der Fig. 134 durch die hier so sehr schwache Rückstrahlung der Kugel  
kaum geändert. Im sonnenbelegten Teil des Bodens aber sind die Licht-  
gleichenen der atmosphärischen Beleuchtung durch die gleichförmige Sonnen-  
bestrahlung in ihren Gestalten nicht geändert, wohl aber in den diesen  
Kurven zugehörigen Beleuchtungsstärken; auferdem sind sie aber durch  
die hier erhebliche Rückstrahlung der Kugel in ihrer Gestaltung geändert

und den Kurven der Fig. 148 nahe geführt. Man muß in dieser Figur nur den Doppelpunkt der einen Lichtgleichen in gerader Linie von  $A$  hinweg in das Unendliche rücken, so erhält man die Kurven der Fig. 151.

Die Kurven legen sich in ellipsenartigen Gestalten um den dunkelsten Punkt mit der Lichtstärke  $b = 0$ , den Auflagerpunkt  $A$  herum; diese erweitern sich, um  $A$  gleichsam als Brennpunkt, bis sie bei  $b = 0,5576$  eine

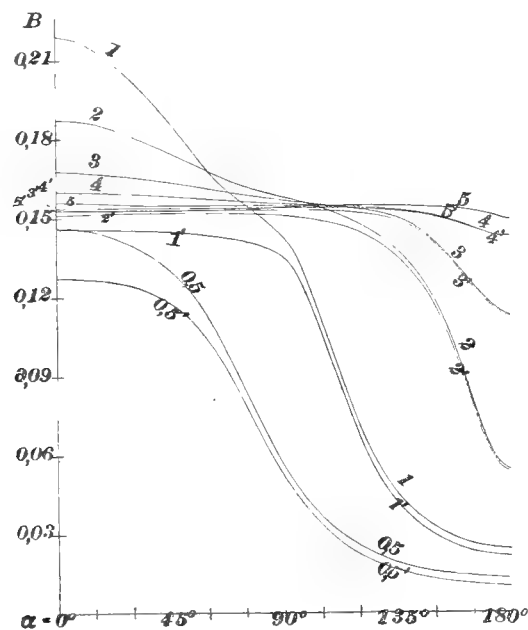


Fig. 150.

parabelartige Gestalt annehmen. Der hellste Punkt dagegen mit  $b = 0,628$  liegt auf der Sonnenseite der Kugel bei  $\alpha = 0$  und in einem Abstände von  $A$  gleich  $x = 1,21$ . Um ihn legen sich die Lichtgleichen erst ellipsenartig, dann bohngestaltig herum, bis sie in die unendlich ferne Kurve und in jene parabelartige Linie übergehen.

**192. Die Beleuchtung der hoch über dem Boden schwebenden Kugel durch die Rückstrahlung des Bodens allein, wenn dessen Rückstrahlungsvermögen  $A$  gleich 0,7 und gleich 0,1 ist.** Es soll unterschieden werden, ob die Kugel hoch über dem Boden schwebt, oder auf ihm aufliegt. Der erste Fall soll zunächst behandelt und dabei

der Abstand der Kugel vom Boden so groß vorausgesetzt werden, daß ihr Schlagschatten auf dem Boden keinen merkbaren Einfluß auf die Rückstrahlung des Bodens auf die Kugel ausübt. Die durch diese Rückstrahlung hervorgebrachten Lichtgleichen auf der Kugel sind dann horizontale Kreise.

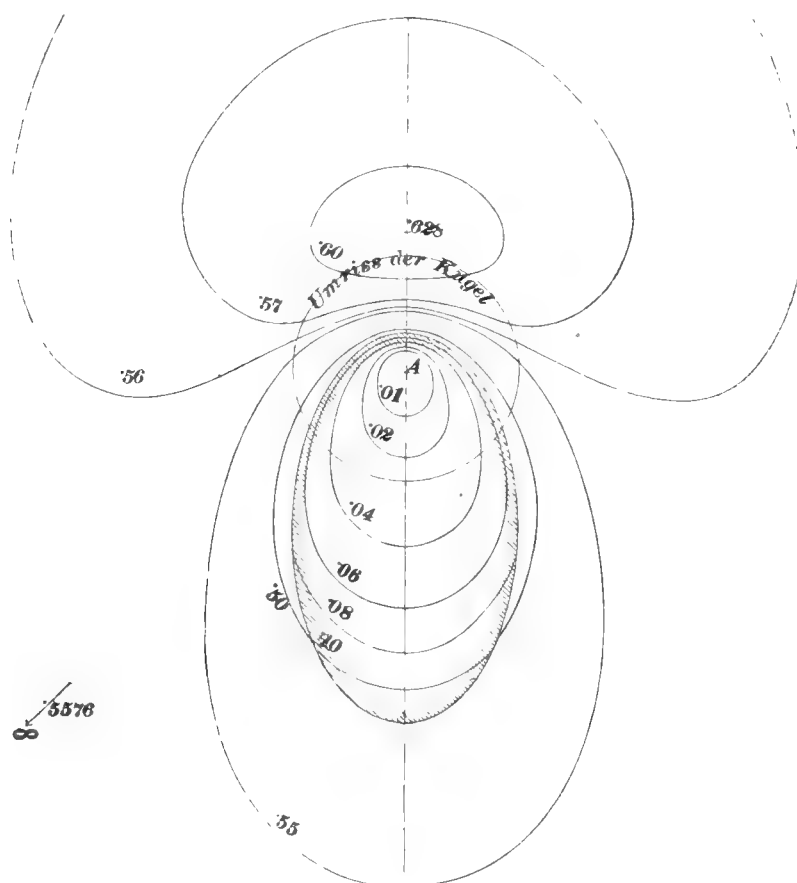


Fig. 151.

Die Lichtgleichen des Bodens bei der Beleuchtung durch Sonne, Atmosphäre und Rückstrahlung der Kugel, deren  $A = 0,7$ . In großer Entfernung von der Kugel beträgt die Beleuchtung des Bodens durch die Sonne 0,4029, durch den Himmel 0,1547, durch Sonne und Himmel zusammen 0,5576.

Es sei die Beleuchtungsstärke des Bodens durch Sonne und Atmosphäre  $= b$  ( $= 0,5576$ , S. 198), es sei  $A$  das Rückstrahlungsvermögen des Bodens, das wir  $= 0,7$  annehmen wollen, und es sei  $\zeta$  die Zenitdistanz der auf einem Punkt der Kugel nach außen gezogenen Normalen der Kugel. Der Teil des Bodens, der das Kugелеlement an diesem Punkte beleuchtet, ist zwischen

der von dem Punkte nach dem Äußeren der Kugel gelegten halben Horizontal-ebene und der nach unten gelegten halben Berührungsebene eingeschlossen und schneidet aus einer um den Punkt als Mittelpunkt gelegten Kugel vom Halbmesser Eins ein Kugelzweieck aus, dessen Projektion auf die Berührungsebene zu der Projektion der Halbkugel auf dieselbe Ebene im Verhältnis von  $(1 - \cos \zeta) : 2$  steht. Die hierdurch auf dem Kugelement hervorgebrachte Beleuchtungsstärke ist daher

$$b' = b \cdot A \cdot \frac{1 - \cos \zeta}{2} = 0,19516 (1 - \cos \zeta).$$

Umgekehrt gehört zu einer bestimmten Beleuchtungsstärke  $b'$  ein  $\zeta$ , bestimmt durch

$$\cos \zeta = 1 - \frac{b'}{0,19516}.$$

Man erhält dann die stärkste Beleuchtung im Betrage von  $b' = 2 \cdot 0,19516 = 0,3903 = b \cdot A = 0,5576 \cdot 0,7$  bei  $\zeta = 180^\circ$ , also an der tiefsten Stelle der Kugel, und die schwächsten mit  $b' = 0$  bei  $\zeta = 0$ , oder an der höchsten Stelle. Außerdem aber erhält man für

$b' = 0,3903$	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05	0,02	0,01	0,00
$\cos \zeta = -1$	0,7940	5377	2814	0251	2312	4875	7438	8976	9488	1,0000
$\zeta = 180^\circ 00'$	142°34'	122°32'	106°21'	91°14'	76°38'	60°49'	41°57'	26°09'	18°25'	0°00'

Die horizontalen Kreise dieser Lichtgleichen sind in Fig. 152 als Fig. 152. horizontale Gerade dargestellt. Da aber die Veränderungen der  $\cos \zeta$  mit denen von  $b'$  proportional sind, so erhält man die Lichtgleichen am einfachsten, indem man für  $b' = 0,35$  vom Mittelpunkt der Kugel nach unten 0,7940 des Halbmessers aufträgt, und für die Abstufungen des  $b'$  von 0,05, den Abstand des Endpunktes jener Strecke vom höchsten Punkt (= 1,7940) in sieben gleiche Teile teilt und durch die Teilungspunkte die horizontalen Geraden legt.

Ebenso erhält man diese Lichtgleichen für  $A = 0,1$ , d. i. den siebenten Teil von vorher, wenn wir den vorher mit 0,35 bezeichneten Horizontalkreis mit 0,05 bezeichnen, die Vertikale zwischen ihm und dem höchsten Punkt der Kugel in fünf gleiche Teile teilen und durch die Teilungspunkte

die Ebenen der Horizontalkreise von den Lichtstärken 0,04; 0,03; 0,02; 0,01 legen. Es ist dies in Fig. 153 ausgeführt.

**193. Die gleichzeitige Beleuchtung der Kugel durch die Sonne, die Atmosphäre und den fernliegenden Boden, wenn dessen Rückstrahlungsvermögen gleich 0,7 und gleich 0,1 ist.** Die Beleuchtung durch Sonne und Atmosphäre ist in Fig. 135, die durch

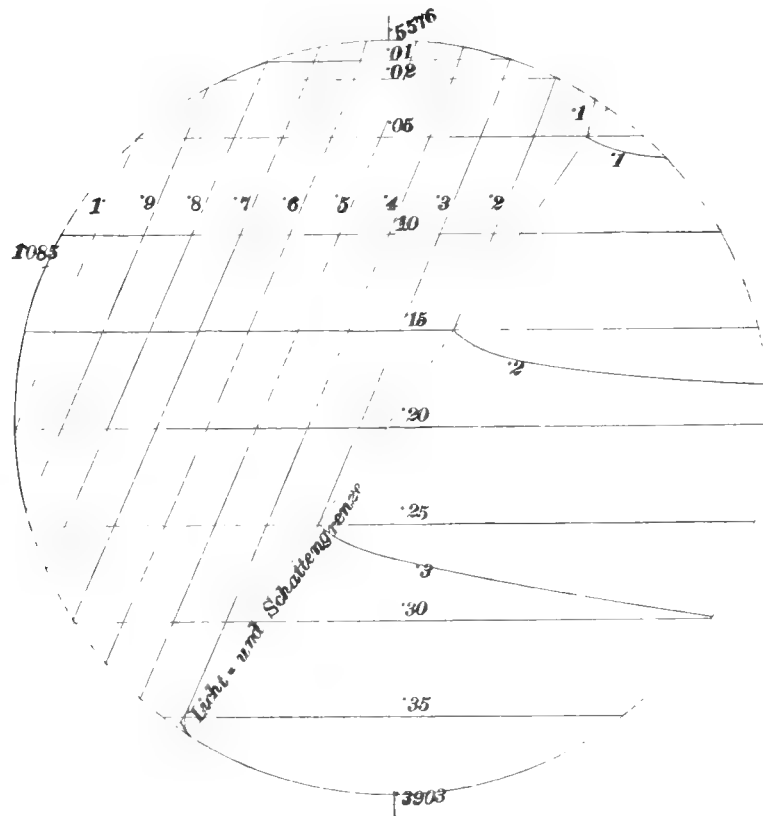


Fig. 152.

Lichtgleichen der Kugel, die hoch über dem Boden schwebt, hervorgebracht durch gleichzeitige Einwirkung von Sonne, Himmel und Boden, dessen  $A = 0,7$ . Die horizontalen Linien sind die durch den Boden allein hervorgebrachten Lichtgleichen.

den fernliegenden Boden in Fig. 152 durch die Lichtgleichen dargestellt. Die Vereinigung der drei Beleuchtungsarten führte ich vorwiegend mittels eines Pauspapiers aus, auf welches ich die gerade erscheinenden Lichtgleichen der Fig. 152 übertrug, indem ich diese Pause auf Fig. 135 auflegte. In

den Schnittpunkten der Lichtgleichen von ganzen Zehnteln der Einheit ergaben sich Punkte wieder von solchen ganzzahligen Zehnteln. Auf den geradlinigen Lichtgleichen der Bodenrückstrahlung mit halben Zehnteln in Fig. 152 konnten Punkte der Lichtgleichen der dreifachen Beleuchtung mit ganzen Zehnteln erhalten werden, in der sonnenbeschienenen Kugelhälfte durch Halbierung der Zwischenräume, weil diese wenig veränderlich sind.

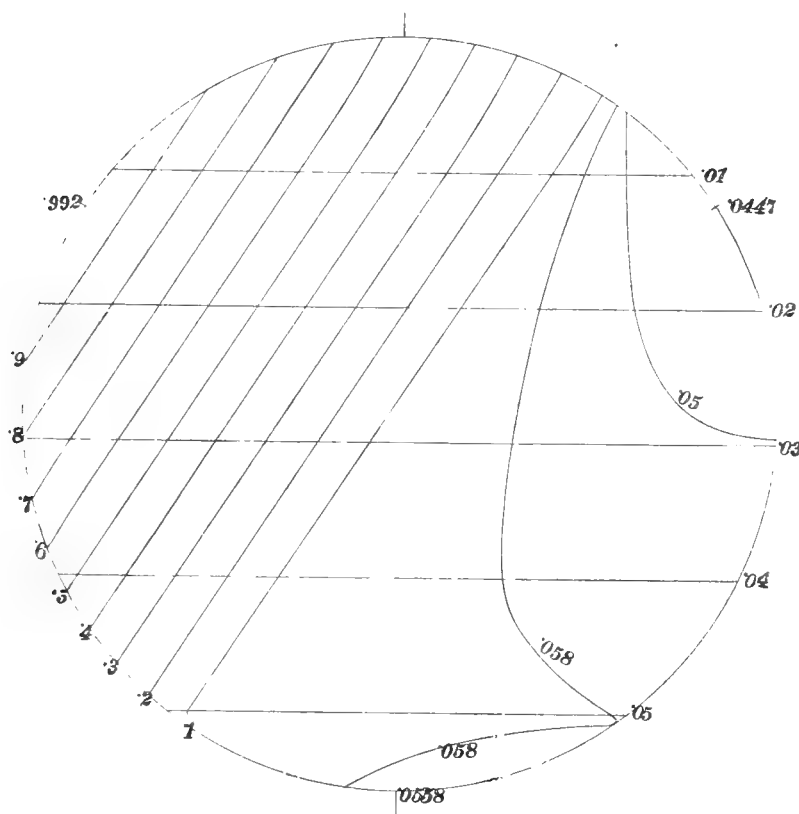


Fig. 153.

Lichtgleichen der Kugel, die hoch über dem Boden schwebt, hervorgebracht durch gleichzeitige Einwirkung von Sonne, Himmel und Boden, dessen  $A = 0,1$ . Die horizontalen Linien sind die durch den Boden allein hervorgebrachten Lichtgleichen.

In dem Schattenteil wurden lotrechte Hilfsgeraden hereingelegt und auf ihnen die Ordinaten der beiderseitigen Lichtstärken übereinander gelagert und dadurch in der bisherigen Weise Punkte der gesuchten Lichtgleichen bestimmt. Das Ergebnis sind die stärker gezeichneten Lichtgleichen in Fig. 152. Der hellste Punkt mit der Beleuchtungsstärke 1,085 liegt in

der vertikalen Durchmesserebene, welche durch die Sonne geht, in einer Zenitdistanz  $\zeta = 65\frac{1}{2}^\circ$ , während die Zenitdistanz der Sonne  $54^\circ 44'$  beträgt. Die Lichtgleichen in der sonnenbeschienenen Kugelhälfte haben die Beleuchtungsstärken 1,0; 0,9; 0,8; ... 0,1; sie sind fast Kreise, die in dieser Zeichnung fast in ihrer ganzen Erstreckung als gerade Linien erscheinen, die nahezu senkrecht auf dem nach dem hellsten Punkte laufenden Halbmesser stehen und deren Abstände mit der Entfernung vom hellsten Punkte ein wenig zunehmen.

Es stoßen die Linien 0,4; 0,3; 0,2; 0,1 unter Winkeln von etwa  $12^\circ$  gegen die Schattengrenze. Hier biegen sie etwa rechtwinklig von der Schattengrenze ab, nähern sich etwas der Horizontalen, bleiben aber doch noch schwach abwärts gerichtet, dadurch bildet sich der dunkelste Punkt mit der Lichtstärke 0,085 ganz wenig unterhalb des obersten Punktes der Schattengrenze. Der oberste Punkt der Kugel hat die Lichtstärke 0,5576, nur von Sonne und Atmosphäre herrührend, der unterste 0,3903, nur durch die Bodenrückstrahlung erzeugt.

Fig. 153. Für den Fall, daß das Rückstrahlungsvermögen des Bodens  $A = 0,1$  ist, wurde in gleicher Weise die Gesamtbeleuchtung durch Sonne, Atmosphäre und Boden in Fig. 153 dargestellt. Der Verlauf der Lichtgleichen im sonnenbeschienenen Teile ist ähnlich wie vorher. Nur hat der lichtstärkste Punkt nur die Lichtstärke 0,992 statt 1,085; dann folgen die Lichtgleichen dichter gedrängt; an der Grenze der Sonnenbeleuchtung herrscht die nahezu gleichförmige Beleuchtung von etwa 0,07. Auf der Schattenseite ändert sich aber ganz die Eigentümlichkeit der Kurven. Im vertikalen Halbkreise  $\alpha = 180^\circ$  treten zwei Minima der Lichtstärke  $b$  ein; das eine bei  $\zeta = 56^\circ$  mit  $b = 0,0447$ , das andere bei  $\zeta = 180^\circ$ , also im tiefsten Punkte mit  $b = 0,0558$ . Um diese Punkte lagern sich die Lichtgleichen mit zunehmender Stärke, bis sie mit einem Maximum von  $b = 0,058$  bei  $\zeta = 145^\circ$  zusammenstoßen und hier in einem Doppelpunkte sich zu einer zusammenhängenden Kurve vereinigen. Man sieht, daß der ganze Schattenteil der Kugel eine wenig wechselnde Lichtstärke besitzt, die nur zwischen 0,0447 und 0,07 schwankt.



194. Die Beleuchtung der auf dem Boden aufliegenden Kugel durch die Rückstrahlung des Bodens allein, wenn dessen Rückstrahlungsvermögen  $A$  gleich 0,7 und gleich 0,1 ist. Wir legen die Lichtgleichen des Bodens zugrunde, welche durch die Sonne, die Atmosphäre und durch die Rückstrahlung der durch Sonne und Atmosphäre beleuchteten Kugel, deren Rückstrahlungsvermögen  $= 0,7$  ist, hervorgerufen werden und welche in Fig. 151 dargestellt sind. Diese Figur wurde in eine gleiche abgebildet, um an ihr die Konstruktionen auszuführen, und hiervon ist in Fig. 154 ein kleiner Teil wiedergegeben.

Fig. 154.

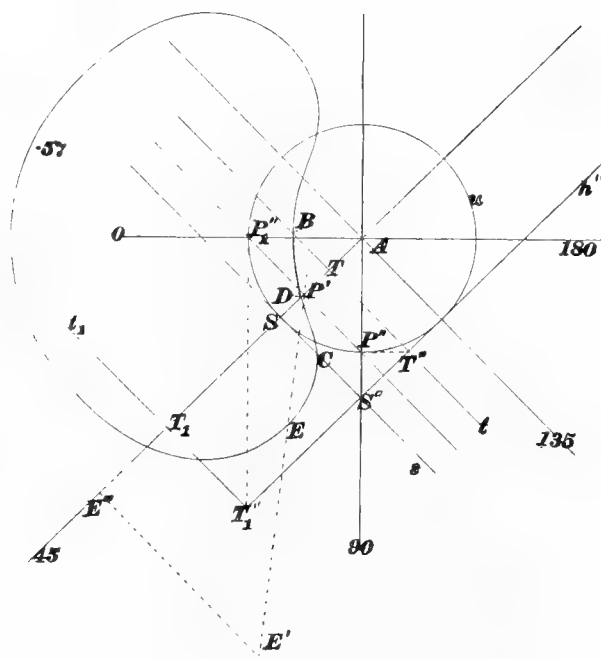


Fig. 154.

Es sei  $A$  der Auflagerpunkt der Kugel,  $u$  ihr Umriss, und es seien  $A \cdot 0$ ,  $A \cdot 45$ ,  $A \cdot 90$ ,  $A \cdot 135$ ,  $A \cdot 180$  die Projektionen der durch  $A$  gelegten halben Vertikalebene, von denen die erste durch die Sonne geht, die anderen aber die Azimute  $\alpha = 45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $180^\circ$  besitzen. Es soll nun der Punkt  $P$  der Kugel vom Azimute  $\alpha$  und der Zenitdistanz seiner aus der Kugel heraus gerichteten Kugelnormale  $\zeta$  betrachtet werden.

Der Teil der Bodenfläche, welcher Licht auf diesen Punkt  $P$  sendet, ist zwischen der durch  $P$  gehenden, die Kugel nicht schneidenden halben

Horizontalebene und der abwärts gerichteten halben Berührungsebene der Kugel in  $P$  eingeschlossen. Beide halbe Ebenen schliessen den Winkel  $\zeta$  ein und schneiden auf einer von  $P$  aus als Mittelpunkt gelegten Kugel vom Halbmesser Eins ein Kugelzweieck aus, dessen Projektion auf jene Berührungsebene von einem Halbkreise (in der Berührungsebene) und einer halben Ellipse begrenzt ist, welche den begrenzenden Durchmesser jenes Halbkreises zur großen Achse hat, und deren kleine Halbachse gleich  $\cos \zeta$  ist. Die Fläche dieses Zweiecks ist  $\pi (1 - \cos \zeta)$ .

Es kommt nun darauf an, die Lichtgleichen des Bodens aus  $P$  auf diese Kugel zu projizieren und diese Projektionen wieder senkrecht auf die Berührungsebene der Kugel in  $P$  zu projizieren. Als Punkte der Kugel wurden nun diejenigen von den angegebenen Werten von  $\alpha$  und von den Werten  $\zeta = 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$  gewählt. Für  $\zeta = 0$  und  $180^\circ$  wird kein Licht zurückgestrahlt. Zur Erklärung dieser Konstruktion wurde in Fig. 154 und Fig. 155  $\alpha = 45^\circ$  und  $\zeta = 45^\circ$  und  $135^\circ$  gewählt. Diese beiden Werte von  $\zeta$  gehören insofern zusammen, als sich jene beiden Zweiecke zum Vollkreis ergänzen.

Fig. 154. Dreht man den in der Vertikalebene  $A \cdot 45$  liegenden größten Kreis der Kugel um seinen horizontalen Durchmesser in eine horizontale Ebene, so projiziert er sich auf die Bodenfläche in jenen Umriss  $u$ , die Horizontalspur seiner Ebene kommt nach  $h''$ , und der Punkt  $P$  mit  $\zeta = 135^\circ$  kommt nach  $P''$  auf  $A \cdot 90$ . Daraus ergibt sich die Projektion  $P'$  von  $P$  auf  $A \cdot 45$  durch Fällung der Senkrechten  $P''P'$  auf  $A \cdot 45$ . Die Tangente an  $u$  in  $P''$  schneidet die Gerade  $h''$  in  $T''$ ; daher ist die durch  $T''$  senkrecht zu  $A \cdot 45$  gezogene Gerade  $t$  die Horizontalspur der Berührungsebene der Kugel in  $P$ , und der Schnitt  $T$  von  $t$  mit  $A \cdot 45$  ist die wirkliche Horizontalspur der Kreistangente  $P''T''$  in ihrer ursprünglichen Lage.

Fig. 155. In Fig. 155 ist die Berührungsebene der Kugel in  $P$  dargestellt,  $P$  ist der Berührungspunkt, der Halbkreis  $HT'H_1$  mit dem Grenzdurchmesser  $HPH_1$  ist der Schnitt jener halben Berührungsebene mit der um  $P$  mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kugel,  $HUH_1$  die halbe Ellipse, die Projektion des Schnittkreises jener halben durch  $P$  gelegten Horizontalebene mit der Kugel auf die Berührungsebene. Dabei sei  $PT'$  senkrecht zu  $PH$ , so daß  $T'$  die Projektion des  $T$  der Fig. 154 auf den Halbkreis ist. Die

halbe kleine Achse  $PU$  jener Ellipse liegt daher in der Linie  $PT'$  und ist  $PU = \cos \zeta = \cos 135^\circ = -0,707$ , so daß  $PU$  entgegengesetzt wie  $PT'$  gerichtet ist.

In Fig. 154 ist als Beispiel die Lichtgleiche  $\cdot 57$  verzeichnet, und diese wollen wir in der angegebenen Weise zweifach in die  $\cdot 57$  der Fig. 155 projizieren.

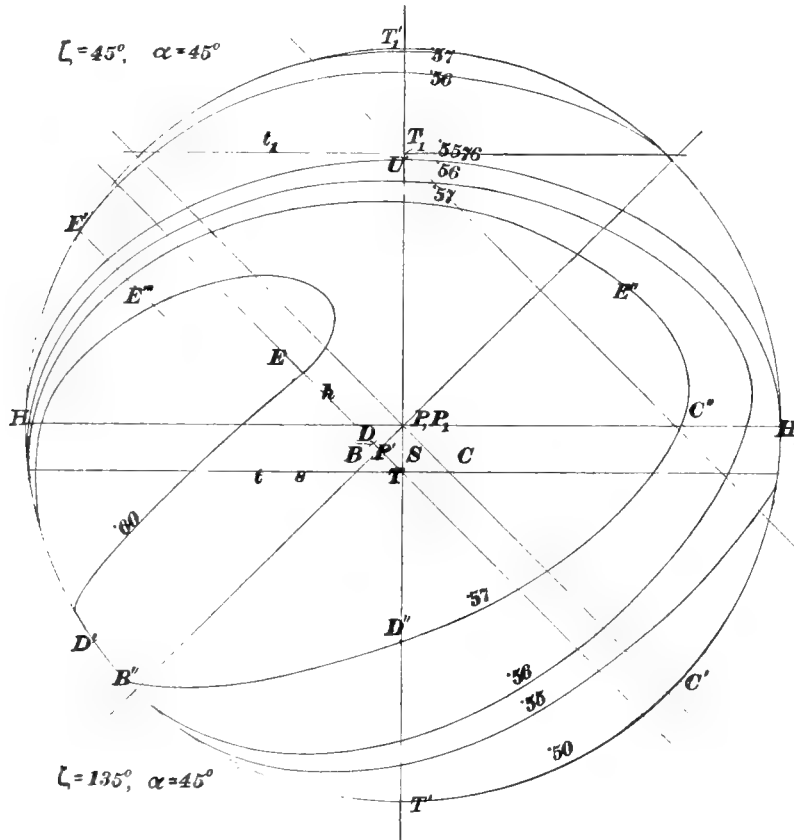


Fig. 155.<sup>1)</sup>

Hilfsfigur zur Bestimmung der durch Bodenreflex hervorgebrachten Beleuchtungsstärke im Punkte  $(\zeta, \alpha)$  der Kugel.

Wir suchen zuerst die ausgezeichneten Punkte. Die Punkte der Geraden  $t$  in Fig. 154 werden in den Halbkreis  $HT'H_1$  der Fig. 155 projiziert. Man erhält in Fig. 155 die Gerade  $t$ , wenn man auf  $PT'$  (senkrecht zu  $PH$ ) die Strecke  $PT = P''T''$  der Fig. 155 macht und durch  $T$  die

<sup>1)</sup> Zu  $\cdot 50$  vgl. Anm. S. 228.

Gerade  $t$  parallel zu  $PH$  zieht. In der Fig. 154 ist  $B$  ein Punkt der  $\cdot 57$  auf  $t$ ; diesen Punkt überträgt man in Fig. 155 auf  $t$ , indem man  $TB$  der Fig. 154 in  $TB$  der Fig. 155 überträgt, dann projiziert man  $B$  aus  $P$  auf den Halbkreis  $HT'H_1$  in  $B''$ , welcher Punkt schon selbst in jener Berührungsebene liegt, also nicht noch ein zweites Mal projiziert zu werden braucht. Dabei ist die Fig. 155, als in der Berührungsebene der Kugel liegend, von außen betrachtet, und von diesem Standpunkte liegt z. B.  $B$  in beiden Figuren links von  $T$ .

Weitere ausgezeichnete Punkte in Fig. 155 sind die auf dem Grenzdurchmesser  $HH_1$ . Derselbe ist aber die senkrechte Projektion auf unsere Berührungsebene von dem halben größten Kreise der Kugel vom Mittelpunkt  $P$ , dessen Grenzdurchmesser (durch  $P$ ) parallel  $t$  läuft, und dieser Halbkreis ist die Projektion aus  $P$  von der Geraden  $s$ , worin die Ebene des Halbkreises die Horizontalebene trifft. Dieselbe findet man in Fig. 154, wenn man  $AP''$  mit  $h''$  in  $S''$  schneidet, und durch  $S''$  die Gerade  $s$  parallel zu  $t$  zieht.  $s$  schneidet  $A \cdot 45$  in  $S$ , und von  $S$  in Fig. 155 gelangt man durch unsere doppelte Projektion nach  $P$ .

Jenen halben größten Kreis, in dessen Ebene  $P$  und  $s$  liegen, überträgt man in Fig. 155 in den Halbkreis  $HT'H_1$ , wobei  $P$  nach  $P$  und  $s$  nach  $s$  kommen, indem man  $P''S''$  auf  $PT'$  nach  $PS$  aufträgt und durch  $S$  die Geraden  $s$  parallel zu  $HH_1$  zieht. Da aber in unserem Falle  $P''S'' = P''T''$  ist, so fällt  $S$  in  $T$  und  $s$  in  $t$ . Die Gerade  $s$  in Fig. 154 enthält den Punkt  $C$  der Kurve  $\cdot 57$ . Man überträgt nun  $SC$  der Fig. 154 in  $SC$  der Fig. 155, projiziert  $C$  aus  $P$  auf den Halbkreis  $HT'H_1$  nach  $C'$  und  $C'$  senkrecht auf  $HPH_1$  nach  $C''$ .

Weitere ausgezeichnete Punkte sind die der beiden sich entsprechenden Linien  $A \cdot 45$  der Fig. 154 und  $T'PU$  der Fig. 155. Legt man die vertikale Ebene  $PA \cdot 45$  der Fig. 154 in die Ebene der Fig. 155 hinein, so dafs jener Berührungspunkt  $P$  nach  $P$ , die in der Berührungsebene liegende Gerade, welche in Fig. 154 durch die Horizontalprojektion  $A \cdot 45$  und in der Umlegung durch  $P''T''$  dargestellt ist, nach  $PT$  der Fig. 155 gelangt, so kommt die horizontale Gerade, welche in Fig. 154 durch  $A \cdot 45$  und  $h''$  dargestellt ist, in Fig. 155 in die durch  $T$  gelegte Gerade  $h$ , wenn der Winkel der Geraden  $PS$  mit der Geraden  $h$  gleich  $180^\circ - \zeta = 45^\circ$  gemacht

wird; und endlich gelangt der in der Ebene  $PA \cdot 45$  liegende Kreis vom Halbmesser 1 in den Kreis  $HT'$ . Die Gerade  $A \cdot 45$  der Fig. 154 enthält den Punkt  $D$  der Kurve  $\cdot 57$ , zu welchem der zweifach projizierte Punkt  $D''$  der Fig. 155 gefunden werden soll. Man überträgt zu dem Ende  $TD$  aus Fig. 154 in Fig. 155 auf  $h$  nach  $TD$ , projiziert  $D$  aus  $P$  auf den Kreis  $HT'$  nach  $D'$ , und  $D'$  senkrecht auf  $PT'$  nach  $D''$ .

Gehen wir nun zur Konstruktion eines allgemeinen Punktes über.  $E$  in Fig. 154 sei ein allgemeiner Punkt der Kurve  $\cdot 57$ . Um diesen aus  $P$  auf die Kugel zu projizieren, legen wir eine vertikale Ebene durch  $P$  und  $E$ ; sie enthält die Projizierende  $PP'$  und die Horizontale  $P'E$  und schneidet jene Kugel mit dem Mittelpunkte  $P$  in einem größten Kreise. Diese Ebene legen wir in die Ebene der Fig. 155, so daß  $P, P', P'E$  nach  $P, P', h$  gelangen.  $E$  gelangt dann in  $h$  nach  $E$ , wenn man  $P'E$  aus Fig. 154 in  $P'E$  der Fig. 155 überträgt. Jener Kreis gelangt in den Kreis  $HT'$ , und auf ihn projiziert man  $E$  aus  $P$  nach  $E'$ . Die Tiefe von  $E'$  unter der Horizontalebene ist dann die Tiefe von  $E'$  unter  $h$ , und die Horizontalprojektion des räumlichen Punktes  $E'$  ist  $E'$  auf  $P'E$  in Fig. 154, wenn man  $P'E'$  in Fig. 154 gleich dem Abstände des Punktes  $E'$  von  $PP'$  in Fig. 155 macht.

Der nun räumlich bestimmte Punkt  $E'$  der Kugel muß dann auf unsere in Fig. 155 abgebildete Berührungsebene projiziert werden. Wir projizieren zuerst den Punkt  $E'$  der Kugel auf die Vertikalebene  $AP'$  der Fig. 154 nach  $E'''$ , indem wir  $E'E'''$  senkrecht auf  $AP'$  fällen. Bei der Umlegung dieser Vertikalebene um den durch  $P$  gehenden horizontalen Durchmesser der Kugel gelangt dann das  $E'''$  der Fig. 154 nach  $E''''$  in Fig. 155, und zwar wird  $E''''$  in dieser Figur so gefunden, daß man  $E'E''''$  senkrecht zu  $PP'$  legt und  $E''''$  einen Abstand von  $PP'$  gibt gleich  $P'E''''$  der Fig. 154 (d. i. auch gleich dem Abstände des  $E'$  von  $P'P''$ , so daß wir in Fig. 154 die Linie  $E'E''''$  ersparen könnten). Dann projizieren wir  $E''''$  auf jene Berührungsebene, die sich bei derselben Umlegung als die Gerade  $PU$  darstellt, d. h. wir fällen von  $E''''$  eine Senkrechte auf  $PU$ ; ihr Fußpunkt (nicht angegeben) ist die Projektion von  $E''''$ . Die Projektion  $E''$  des räumlichen Punktes  $E'$  liegt aber, wenn wir uns jetzt die Fig. 155 wieder als die durch  $P$  gelegte Berührungsebene der Kugel vorstellen, mit dem bestimmten Fußpunkte auf einer Parallelen zu  $PH$ , also auf derselben von

$E'''$  auf  $PU$  gefällten Senkrechten, aber in einem Abstände von  $PU$ , welcher gleich dem Abstände in Fig. 154 des  $E'$  von  $AP'$  ist. Man sieht, daß man dabei nur wenige Linien zu ziehen braucht und das meiste mit Zirkelabstechungen ausführen kann.

In derselben Fig. 155 ist auch die zweifache Projektion für  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\zeta = 45^\circ$  ausgeführt. Sie ist in dem schmalen Zweieck  $HT_1'H_1UH$  enthalten

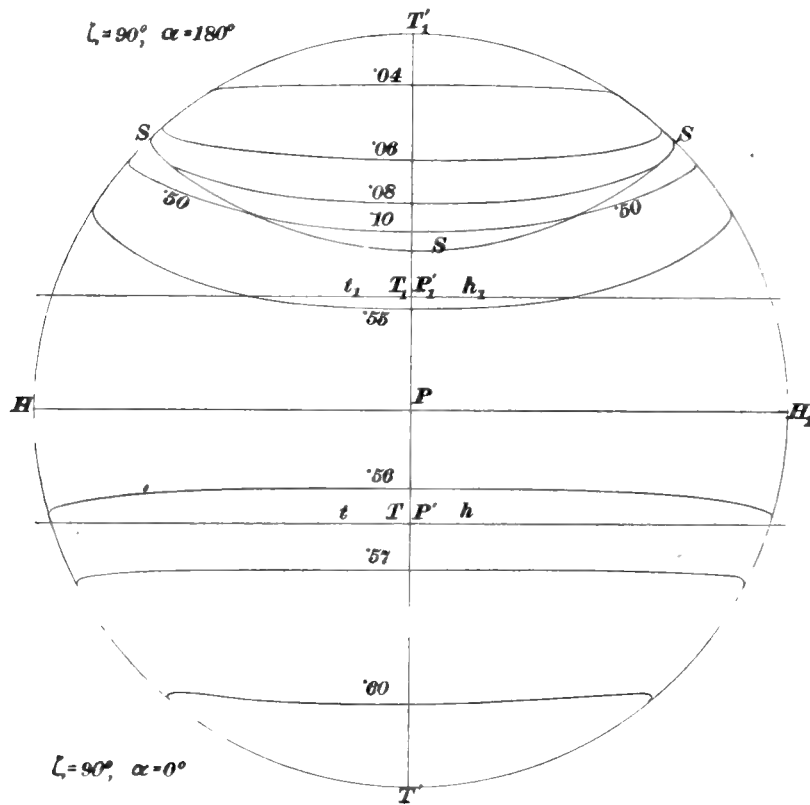


Fig. 156.

Vgl. Fig. 155.

und ergänzt, wie schon bemerkt, unsere Zeichnung von  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\zeta = 135^\circ$  zum Vollkreis. Die Punkte und Linien  $P, T, T', t$  sind durch  $P_1, T_1, T'_1, t_1$  ersetzt. Stellvertretende für  $S$  und  $s$  treten nicht auf.

Auf diese Weise wurden die Konstruktionen ausgeführt für  $\alpha = 0, 45, 90, 135, 180^\circ$ , jedesmal bei  $\zeta = 45, 90, 135, 157\frac{1}{2}^\circ$ . Hiervon seien noch mitgeteilt die Ergebnisse für  $\alpha = 0^\circ, \zeta = 90^\circ$  und  $\alpha = 180^\circ, \zeta = 90^\circ$ ,

welche in den zwei Halbkreisen der Fig. 156 vereinigt sind, sowie für Fig. 156.  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\zeta = 157\frac{1}{2}^\circ$  in der Fig. 157. Die ergänzenden Zeichnungen für  $\zeta = 22\frac{1}{2}^\circ$  Fig. 157. sind als unwesentlich gar nicht ausgeführt worden.<sup>1)</sup>

Aus diesen Zeichnungen wurden nun die vom Boden auf die Kugel an den angegebenen Stellen zurückgestrahlten Lichtmengen bestimmt, wie in der früheren Weise. Es wurden mittels des Planimeters die Flächen-

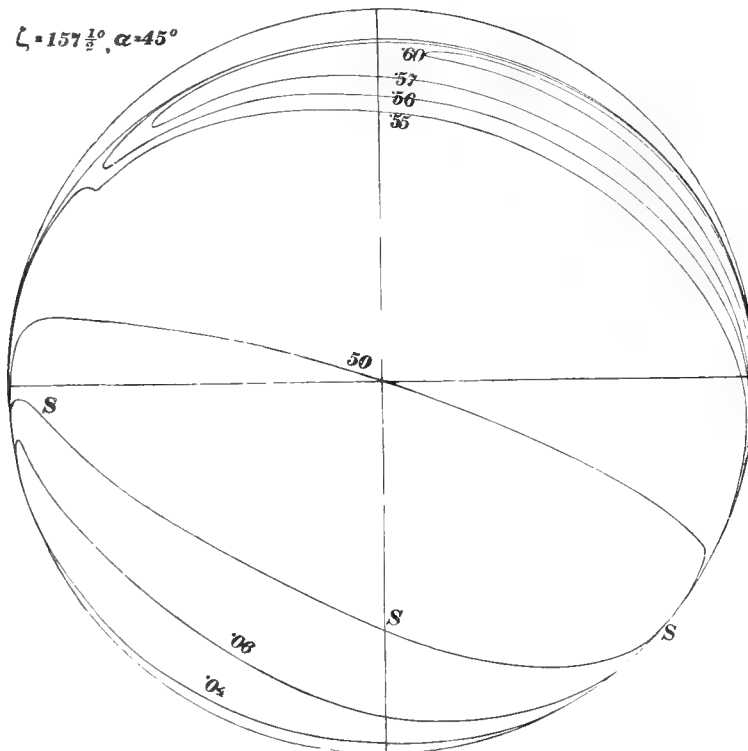


Fig. 157.

Vgl. Fig. 155.

streifen gemessen, jeder mit der mittleren Beleuchtungsstärke des Streifens vervielfacht, die Summe der Produkte genommen, und die Summe durch  $\pi = 3,1416$  geteilt. Man erhielt dadurch die auf die Kugelstelle vom Boden zurückgestrahlte Lichtmenge für das Rückstrahlungsvermögen des Bodens  $A = 1$ . Vervielfacht man diese Zahlen mit 0,7; 0,25; 0,1, so erhält man

<sup>1)</sup> [Die Kurve SSS in Fig. 156 u. 157 stellt die Projektion der Eigenschattengrenze der Kugel dar. A. d. H.]

diese Lichtmenge für diese Werte von  $A$ , also für einen Gypsboden, einen Boden von weißem Sandstein oder von Ackererde. Als Beispiel der Berechnung mag der Fall für  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\zeta = 135^\circ$  angegeben werden.

Licht- gleiche	Ablesung des Planimeters	Fläche	Mittlere Helligkeit	Lichtmenge
·55	186,0	0,1860	0,530	0,09855
·56	2212,0	0,2835	0,557	0,15820
·57	1686,0	0,5260	0,565	0,29700
·60	349,0	1,3370	0,585	0,78400
		0,3490	0,610	0,21300
—	—	2,6815	—	1,55075

Die Flächen sind durch Abziehen der aufeinanderfolgenden Ablesungen erhalten. Nur die Fläche zwischen ·55 und ·56 wurde unter der Beachtung gefunden, daß die ganze Fläche des kreis-elliptischen Zweiecks

$$= \pi \frac{1 - \cos \zeta}{2} = 3,1416 \frac{1 + 0,7071}{2} = 2,6972$$

ist. Da ich aber mittels des Planimeters schon 2,6815 gefunden und benutzt hatte, so kleine Abweichungen aber unterhalb der Fehlergrenze liegen, so änderte ich die Zahlen nicht nachträglich. Es ergab sich daher der Streifen zwischen ·55 und ·56 gleich  $2,6815 - 0,1860 - 2,2120 = 0,2835$ . Die Beleuchtungsstärke wäre daher, wenn  $A = 1$  sein könnte, gleich  $1,55075 : 3,1416 = 0,49340$ ; sie ist für  $A = 0,7$  gleich 0,34538, für  $A = 0,1$  gleich 0,049340. Die so erhaltenen Zahlen sind in Tab. 86 eingetragen.

Hiernach sind zunächst die Beleuchtungskurven für die unveränderlichen Azimute  $\alpha = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$  mit den Abszissen  $\zeta$  und den Ordinaten der Beleuchtungsstärken für  $A = 0,7$  nach der Tab. 86 in Fig. 158 gezeichnet, und danach sind in der gewöhnlichen Weise die  $\zeta$  für die Lichtstärken ·35, ·30, . . . ·02 auf allen jenen Kurven  $\alpha$  ermittelt.

Ich hatte auch die Beleuchtungskurven für unveränderliche  $\zeta$  mit den Abszissen  $\alpha$  verzeichnet und daraus die  $\alpha$  für jene Lichtstärken ·35, . . . bestimmt, fand diese Zahlen aber wenig brauchbar, weil die Kurven selbst schroffe Übergänge besitzen und daher aus den wenigen Punkten nicht sicher genug verzeichnet werden können.



Tabelle 86.

Beleuchtungsstärke der auf dem Boden aufliegenden Kugel im Punkte  $P$  vom Azimut  $\alpha$  und der Zenitdistanz  $\zeta$ , hervorgebracht durch den Boden, wenn dieser von der Sonne, der Atmosphäre und der durch Sonne und Atmosphäre beleuchteten Kugel vom Rückstrahlungsvermögen 0,7 beleuchtet wird, bei dem Rückstrahlungsvermögen des Bodens  $A = 0,7$  und  $A = 0,1$ .

$A = 0,7.$						$A = 0,1.$					
$\zeta$	$\alpha = 0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$	$\zeta$	$\alpha = 0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$
$45^\circ$	0,05754	05729	05733	05425	05368	$45^\circ$	0,00822	00818	00819	00775	00767
$90^\circ$	0,20230	20006	19565	16905	12964	$90^\circ$	0,02890	02858	02795	02410	01852
$135^\circ$	0,35490	34538	29939	10766	05285	$135^\circ$	0,05070	04934	04277	01538	00755
$157\frac{1}{2}^\circ$	0,34440	29582	07616	01344	01109	$157\frac{1}{2}^\circ$	0,04920	04226	01088	00192	00158

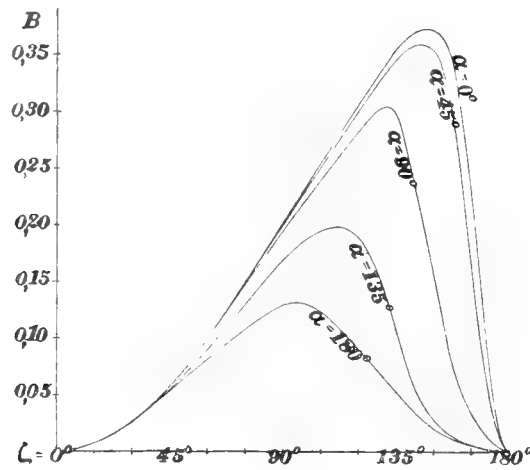


Fig. 158.

Aus jenen Werten der  $\zeta$  wurden nun die Lichtgleichen auf der Kugel für  $A = 0,7$  in Fig. 159 gezeichnet, und zwar in der Projektion auf die durch die Sonne gelegte Vertikalebene. Dabei konnten die Punkte durch die erhaltenen Werte der  $\zeta$  für  $\alpha = 0$  und  $\alpha = 180^\circ$  unmittelbar auf dem Umriss aufgetragen werden; für  $\alpha = 90^\circ$  wurden sie auf dem Umriss aufgetragen und die so erhaltenen Punkte auf den vertikalen Durchmesser

Fig. 159.

des Umrisskreises projiziert; für  $\alpha = 45^\circ$  und  $135^\circ$  wurden Punkte von den erhaltenen  $\zeta$  zunächst auf dem Umriss aufgetragen, aus ihnen Senkrechte auf den vertikalen Durchmesser gefällt, und die Senkrechten von der Länge  $s$  vom Fußpunkte an auf die Länge  $s \cdot \cos 45^\circ = s \cdot 0,7071$  mittels eines gezeichneten Winkels von  $45^\circ$  verkleinert. Durch Verbindung der Punkte gleicher Beleuchtungsstärke erhält man die Lichtgleichen.

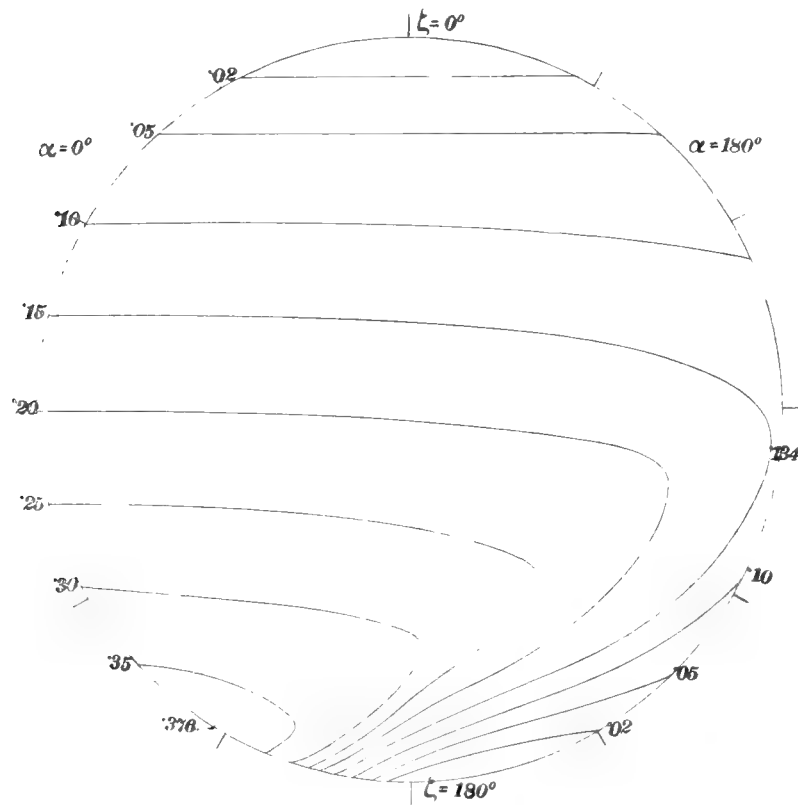


Fig. 159.

Beleuchtung der auf dem Boden aufliegenden Kugel durch Rückstrahlung des Bodens. Weiße des Bodens  $\Delta = 0,7$ . Projektion auf die durch die Sonne gehende Vertikalebene.

Fig. 160.

Die Kurven sind auch im Grundriss in Fig. 160 gezeichnet und zwar von unten gesehen, so dass diejenigen auf der unteren Kugelhälfte ausgezogen, die auf der oberen Hälfte punktiert sind.

Man sieht aus den Fig. 159 und 160, dass bei der auf dem Boden aufliegenden Kugel durch Rückstrahlung des Bodens keine Beleuchtung

im Auflagerpunkt und im höchsten Punkt hervorgebracht wird. Die stärkste Beleuchtung tritt im Sonnenmeridian auf der Sonnenseite ( $\alpha = 0$ ) bei  $\zeta = 148^\circ$ , also nahe am Boden, mit der Beleuchtungsstärke  $b = 0,376$  auf. Um diesen Punkt lagern sich die Lichtgleichen geringerer Stärke anfangs ellipsen-, dann bohngestaltig. Bei der Kurve 0,134, die in Fig. 160 teilweise gestrichelt angegeben ist, vereinigen sich die beiden zugespitzten Kurventeile in einem

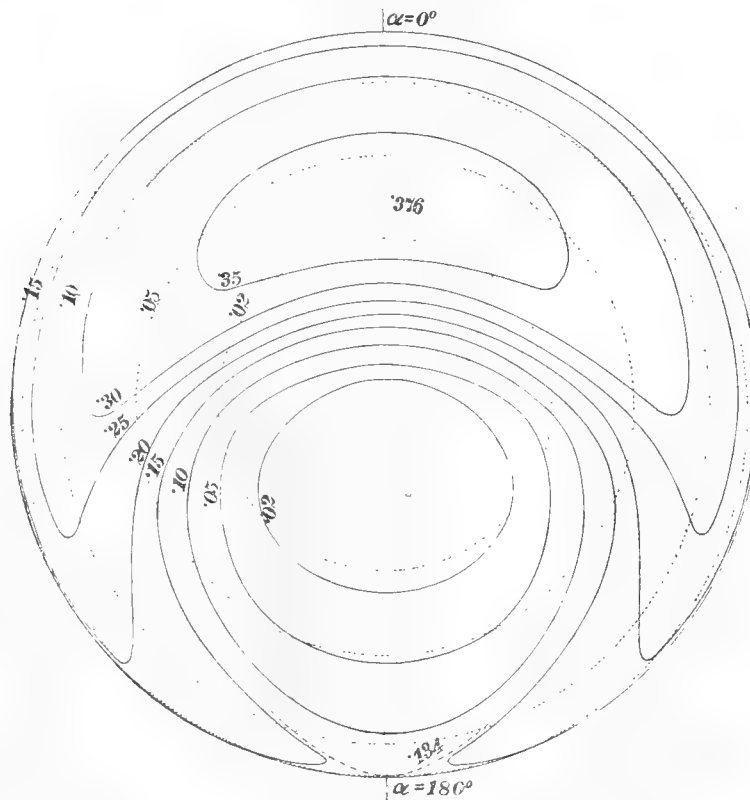


Fig. 160.

Beleuchtung der auf dem Boden aufliegenden Kugel durch Rückstrahlung des Bodens.  
Weifse des Bodens  $A = 0,7$ . Grundrifs.

Doppelpunkte bei  $\alpha = 180^\circ$  und  $\zeta = 96^\circ$ . Von da an besteht jede Lichtgleiche aus zwei getrennten Ästen, deren einer sich in ellipsenähnlicher Gestalt um den exzentrisch stehenden tiefsten Punkt von  $b = 0$  herumzieht, deren andere sich in einer Gestalt, die bald von einem horizontalen Kreise nicht mehr zu unterscheiden ist, um den zentrischstehenden höchsten Punkt, ebenfalls von  $b = 0$ , herumzieht. In jenem Punkte  $\alpha = 180^\circ$ ,  $\zeta = 96^\circ$  findet

entlang des Meridians ein Maximum, und entlang des Parallelkreises ein Minimum der Beleuchtungsstärke statt.

Um auch die Kurven für  $A = 0,1$  zu erhalten, dessen Wert also  $\frac{1}{7}$  des vorigen ist, lege man in der Fig. 158 der Beleuchtungskurven Parallele zu der Achse der  $\zeta$  in den Abständen  $7 \cdot 0,01$ ;  $7 \cdot 0,02 \dots$  und bezeichne

Fig. 158.

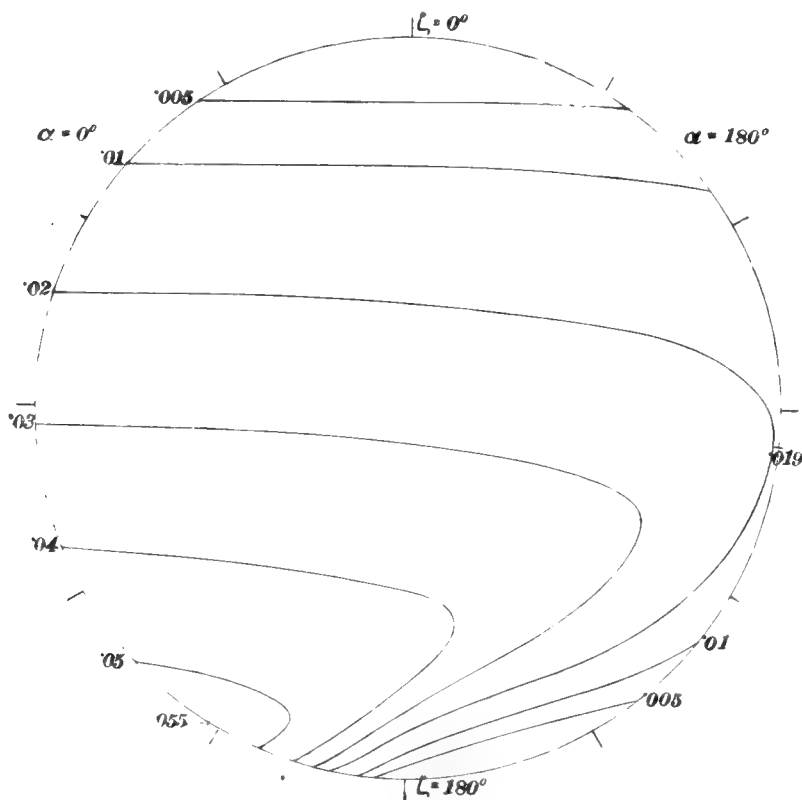


Fig. 161.

Beleuchtung der auf dem Boden aufliegenden Kugel durch Rückstrahlung des Bodens. Weisse des Bodens  $A = 0,1$ . Projektion auf die durch die Sonne gehende Vertikalebene.

diese mit  $0,01$ ;  $0,02$ ;  $\dots$ . Mittels dieser Linien bestimmt man die  $\zeta$  für  $b = 0,01$ ;  $0,02 \dots$  bei  $A = 0,1$ . Und mit diesen Werten verzeichnet man die neuen Lichtgleichen auf der Kugel, die in Fig. 161 wieder in der Projektion auf die Vertikalebene der Sonne dargestellt sind. Es sind Linien, die ganz zur Schar der Lichtgleichen der Fig. 159 gehören und dieselbe Gestaltung haben. Ihr lichtstärkster Punkt ist an derselben Stelle wie

Fig. 161.

vorher ( $\alpha = 0$ ,  $\zeta = 148^\circ$ ), hat aber nur  $b = 0,055$ ; jener Doppelpunkt liegt wieder in  $\alpha = 180^\circ$ ,  $\zeta = 96^\circ$ , und hat  $b = 0,019$ .

**195. Die gleichzeitige Beleuchtung der auf dem Boden aufliegenden Kugel durch die Sonne, die Atmosphäre und den Boden, wenn dessen Rückstrahlungsvermögen  $A$  gleich 0,7 ist.**

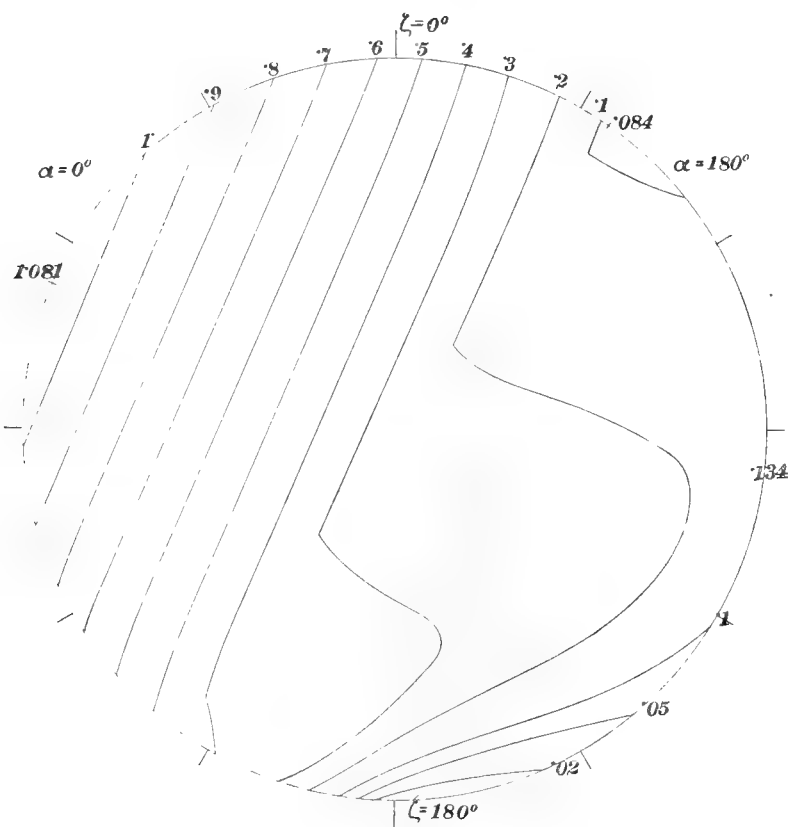


Fig. 162.

Lichtgleichen der auf dem Boden aufliegenden Kugel, hervorgebracht durch gleichzeitige Einwirkung von Sonne, Himmel und Boden, dessen  $A = 0,7$ . Projektion auf die durch die Sonne gehende Vertikalebene.

Hierzu werden die Lichtgleichen durch Verbindung derjenigen für die Sonne und die Atmosphäre in Fig. 135 und derjenigen für den Boden in Fig. 159 bei  $A = 0,7$  für den Boden gewonnen. Die Verbindung ist wieder zum Teil durch Pauspapier, zum Teil durch Aufeinandersetzen der Beleuchtungskurven geschehen, und das Ergebnis ist in Fig. 162 dargestellt.

Fig. 162.

Der lichtstärkste Punkt liegt in dem größten Vertikalkreise, dessen Ebene durch die Sonne geht ( $\alpha = 0$ ) bei  $\zeta = 67^\circ$  und hat die Beleuchtungsstärke  $b = 1,081$ , während die Zenitdistanz der Sonne nur  $54^\circ 44'$  beträgt. Um diesen Punkt legen sich Lichtgleichen in Linien, die wenig von Kreisen abweichen, herum.

Die Linien 0,3; 0,2; 0,1 stoßen auf die Schattengrenze für die Sonnenbeleuchtung und biegen von da fast rechtwinklig gegen diese Grenze in den Schattenteil ab. In diesem finden in dem Vertikalkreise von  $\alpha = 180^\circ$  zwei Minima und ein Maximum der Lichtstärke statt. Von den ersteren ist das eine nahe bei  $\zeta = 35^\circ$  mit  $b = 0,084$ , das andere im tiefsten Punkt ( $\zeta = 180^\circ$ ) mit  $b = 0$ . Das Maximum liegt bei  $\zeta = 96^\circ$  mit  $b = 0,134$ . Um das obere Minimum legen sich Lichtgleichen herum, welche Bruchpunkte in der Schattengrenze besitzen; um das tiefste Minimum lagern sich die Lichtgleichen in ellipsenartigen Gestalten, exzentrisch gegen diesen tiefsten Punkt. Beiderlei geschlossene Lichtgleichen gehen ineinander über in der (nicht verzeichneten) Lichtgleichen 0,134, die durch das bezeichnete Lichtmaximum geht und in ihm einen Doppelpunkt besitzt.

**196. Die gleichzeitige Beleuchtung der auf dem Boden aufliegenden Kugel durch die Sonne, die Atmosphäre und den Boden, wenn dessen Rückstrahlungsvermögen  $A$  gleich 0,1 ist.**

Für das Rückstrahlungsvermögen des Bodens  $A = 0,1$  ist die Gesamtbeleuchtung der auf dem Boden auflagernden Kugel durch Verbindung der Lichtgleichen in Fig. 135 für Beleuchtung durch die Sonne und die Atmosphäre und derjenigen der Fig. 161 durch die Rückstrahlung des Bodens

bestimmt und das Ergebnis in Fig. 163 niedergelegt.

Hier findet in dem vertikalen Lichtstrahlenmeridian der Kugel ( $\alpha = 0^\circ$  oder  $180^\circ$ ) nur ein Maximum und ein Minimum der Lichtstärke statt. Das erstere mit  $b = 0,9903$  ist bei  $\alpha = 0^\circ$  und  $\zeta = 57^\circ$ , das zweite mit  $b = 0$  im Auflagerpunkt  $\zeta = 180^\circ$ . Um den ersteren Punkt legen sich die Lichtgleichen kreisartig und zentrisch herum, bis etwa zu der Lichtgleichen 0,07, welche die Grenze der Sonnenbeleuchtung bildet. Um den dunkelsten Punkt lagern sich die Lichtgleichen exzentrisch, anfangs ellipsenartig, und

nehmen dann mehr ausgebauchte, gegen die Sonne hin hohle Gestalten an. An der Sonnenlichtgrenze gehen beiderlei Kurven ineinander über.

Man bemerkt den Unterschied der Fig. 162 und 163 bei der Wirkung eines hellen und eines dunklen Bodens. Beim hellen Boden entsteht im vertikalen Meridian hinter der Sonnenschattengrenze bei  $\alpha = 180^\circ$  und  $\zeta = 35^\circ$

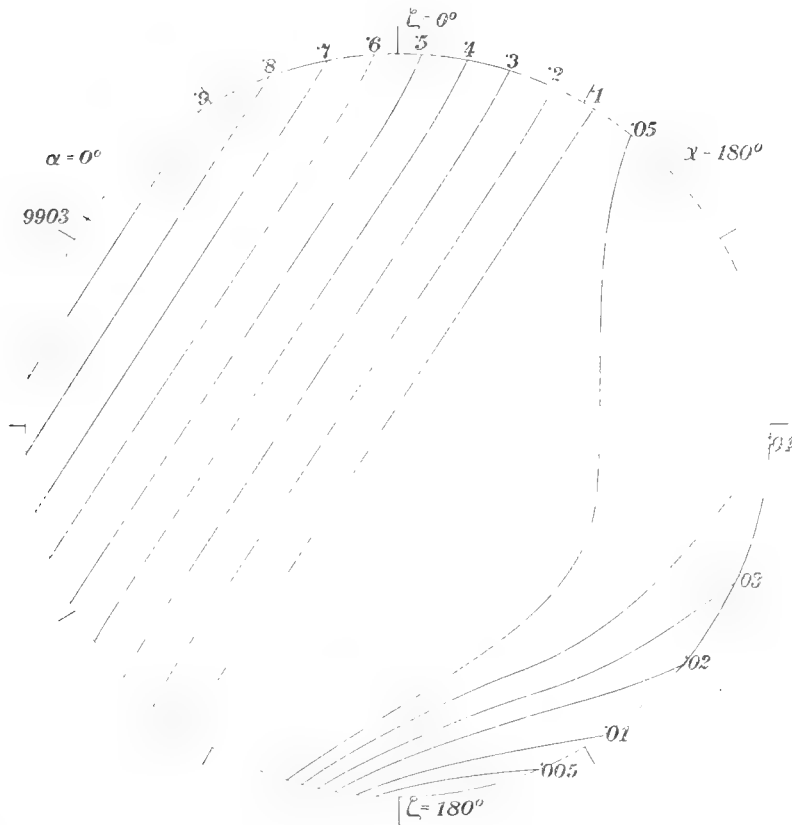


Fig. 163.

Lichtgleichen der auf dem Boden aufliegenden Kugel, hervorgebracht durch gleichzeitige Einwirkung von Sonne, Himmel und Boden, dessen  $A = 0,1$ . Projektion auf die durch die Sonne gehende Vertikalebene

ein dunkelster Fleck mit  $b = 0,084$ , es wird dann die Helligkeit nach unten größer, erreicht ein Maximum bei  $\zeta = 96^\circ$  mit  $b = 0,134$  und nimmt dann gegen den Auflagerpunkt wieder ab. Bei dunklem Boden entsteht hinter der Sonnenschattengrenze kein dunkelster Fleck, sondern es nimmt die Helligkeit gegen den Auflagerpunkt beständig ab. Der gewöhnlich angebrachte

dunkle Ring hinter der Sonnenschattengrenze ist also bei hellem Boden durch einen dunklen Fleck zu ersetzen, während bei dunklem Boden gar nichts derartiges auftritt.

**197. Die wiederholte Rückstrahlung zwischen Boden und Kugel.** Bei der Bestimmung der Beleuchtung des Bodens ist neben der durch die Sonne und die Atmosphäre die durch die Kugel ermittelt, dabei aber die Kugel nur durch Sonne und Atmosphäre beleuchtet gedacht; die später ermittelte Bestrahlung der Kugel durch den Boden ist nicht wieder in ihrer Einwirkung auf die Bodenbeleuchtung und auf die Verstärkung der Bodenstrahlung auf die Kugel untersucht. Wir wollen nun durch Schätzung untersuchen, wie bedeutend wohl bei den stärksten Rückstrahlungsvermögen der Kugel und des Bodens, nämlich bei  $A = 0,7$ , die wir übrigens für die Kugel stets vorausgesetzt haben, jene Wirkung sei, und wir werden finden, daß die grose Arbeit einer genaueren Bestimmung sich nicht lohnen würde.

Fig. 135. Die in Fig. 135 dargestellte durch Sonne und Atmosphäre beleuchtete  
 Fig. 148. Kugel bringt die in Fig. 148 dargestellte Beleuchtung des Bodens hervor. Diese Beleuchtung, verbunden mit derjenigen durch die Sonne und die  
 Fig. 151. Atmosphäre, ist in Fig. 151 dargestellt. Der so beleuchtete Boden für sich  
 Fig. 159. bewirkt nun die in Fig. 159 dargestellte Beleuchtung der Kugel. Wir wollen nun durch Vergleichen der durch Sonne und Atmosphäre beleuchteten Kugel (Fig. 135) mit der durch den Boden allein beleuchteten (Fig. 159) abschätzen, wie sich die durch die erstere Kugel hervorgebrachte Bodenbeleuchtung (Fig. 148) zu der durch die letztere hervorgebrachte verhalten möchte. Wir fassen nur Punkte in der durch Kugelmittelpunkt und Sonne gehenden Vertikalebene ( $\alpha = 0^\circ$  und  $= 180^\circ$ ) ins Auge.

Fig. 148 zeigt, daß bei  $\alpha = 0^\circ$  und  $x = r$ , d. h. bei dem Abstand  $x$  eines Punktes des Bodens vom Auflagerpunkt  $A$  gleich dem Kugelhalbmesser  $r$ , die Beleuchtungsstärke des Bodens etwa  $b = 0,07$  ist. Hier mag nun die Wirkung der Kugel nach Fig. 159 ebenso stark sein wie die der Kugel nach Fig. 135; an der Stelle der stärksten Wirkung nämlich, die etwas höher als der Schnittpunkt der Verbindungslinie des betrachteten Bodenpunktes mit dem Mittelpunkt der Kugel liegt, ist die Beleuchtungsstärke



in beiden Figuren etwa dieselbe, nämlich gleich 0,3. Von da an ist sie in Fig. 135 nach oben, in Fig. 159 nach unten größer. Es mag also auch nach Fig. 159 in diesem Punkte ( $x = 1$ ) auf dem Boden  $b = 0,07$  hervor gebracht werden.

Für den Punkt  $\alpha = 0^\circ$ ,  $x = 0,3 \cdot r$  dürfte die gerade darüberliegende Stelle der Kugel den größten Einfluß auf  $b$  haben. Diese Stelle zeigt bei Fig. 135 etwa  $b = 0,013$ , bei Fig. 159 etwa  $b = 0,28$ , also etwa 21 mal so viel. Auf dem Boden (Fig. 148) bringt hier die Kugel der Fig. 135 die Beleuchtungsstärke  $b = 0,01$  hervor; also würde die Kugel der Fig. 159 etwa  $b = 0,21$  hervorbringen. — Für  $\alpha = 180^\circ$  und  $x = r$  ist auf dem Boden durch die Kugel der Fig. 135  $b = 0,003$ ; durch die Kugel der Fig. 159 dürfte es  $(0,10 : 0,013) = 8$  mal so groß, also etwa  $b = 0,024$  sein.

Für  $\alpha = 180^\circ$  und  $x = 0,3 \cdot r$  ist für den Boden durch die Kugel der Fig. 135  $b = 0,0012$ , durch die Kugel der Fig. 159 etwa  $(0,013 : 0,003) = 4$  mal so groß, also  $b = 0,0048$ .

Nun sind aber an diesen vier Stellen des Bodens die bei der Bestimmung der Bodenrückstrahlung benutzten Lichtstärken nach Fig. 151 der Reihe nach etwa 0,62; 0,48; 0,027; 0,008. Sie würden also gesteigert um die vier ermittelten Größen 0,07; 0,21; 0,024; 0,0048 auf 0,69; 0,69; 0,051; 0,0128. Es würde daher die in Fig. 159 dargestellte Bodenrückstrahlung gesteigert am meisten in der Nähe des Auflagerpunktes und wenig in den höheren Punkten. Wieder bei  $\alpha = 0$  würde die Steigerung jener Zahl bei  $x = r$  von 0,62 auf 0,69 oder um  $\frac{1}{5}$ , auch die der Kugelbeleuchtung bei  $\zeta = 135^\circ$  von 0,35 um  $\frac{1}{5}$  auf 0,39 stattfinden. Durch die Bodenstelle  $\alpha = 0$ ,  $x = 0,3 \cdot r$  von 0,48 auf 0,69, würde die Beleuchtungsstärke des gerade darüber liegenden Punktes der Kugel in gleichem Verhältnis von 0,28 auf 0,40 steigen. Für  $\alpha = 180^\circ$ ,  $x = r$  entsteht aus ( $\zeta = 135^\circ$ )  $b = 0,05$ ,  $b = 0,05 \cdot 0,051 : 0,027 = 0,095$ ; für  $\alpha = 180^\circ$ ,  $x = 0,3 \cdot r$  entsteht aus  $b = 0,013$ ,  $b = 0,013 \cdot 0,0128 : 0,008 = 0,021$ .

Es geht daraus hervor, daß durch die Berücksichtigung der doppelten Rückstrahlung von Kugel und Boden die Beleuchtungsstärken an den sonnenbeleuchteten Stellen nur unmerklich geändert würden, wohl aber die in den Schattenteilen; und zwar auf dem Boden etwa um die Hälfte, auf der Kugel um die Hälfte bis fast zum Ganzen. Es würden also in Fig. 162 die

unteren Kurven 0,02; 0,05 und auch noch 0,1 merklich gehoben werden müssen, und bei der noch öfter wiederholten gegenseitigen Rückstrahlung würde sich die Wirkung noch etwas steigern. Also nur wenn diese tiefen Stellen sichtbar sind, würde eine Wirkung der wiederholten Rückstrahlung bemerkbar sein. Diese Stelle ist aber nur sichtbar bei einer Aufrisszeichnung oder einer der Aufrisszeichnung sehr genäherten Abbildung; dann erscheint aber die Hebung der Punkte und Hellegleichen sehr gering und schmal, so daß sie kaum bemerkbar ist.

Bei einem Rückstrahlungsvermögen des Bodens  $A = 0,1$  ist aber die Wirkung der wiederholten Rückstrahlung ganz unmerklich. Wir werden sie also ohne merklichen Fehler stets außer acht lassen dürfen. Nur das eine wollen wir bemerken, daß bei  $A$  des Bodens  $= 0,7$  (Fig. 162) die Helligkeit an einer bemerkbar ausgedehnt erscheinenden Stelle nahe bei dem Auflagerpunkte nicht sehr tief, kaum unter 0,05, sinken dürfte.

**198. Aus den bisher gezeichneten Projektionen der Lichtgleichenen der Kugel auf ihre Symmetrieebene wird ihr Grundriss und Aufriss abgeleitet, letzterer auf einer zur Symmetrieebene unter  $45^\circ$  geneigten Vertikalebene.** Wir haben nun die Lichtgleichenen der Kugel für vier Fälle bestimmt und ihre Projektion gezeichnet, und zwar jedesmal auf ihre Symmetrieebene, d. i. auf die durch den Kugel- und den Sonnenmittelpunkt gehende Vertikalebene. Es handelt sich um die vier Fälle:

a) die Kugel schwebt hoch über dem Boden, und zwar so hoch, daß ihre Einwirkung auf den Boden unbeachtet bleiben kann;

Fig. 152. 1. das Rückstrahlungsvermögen des Bodens ist  $A = 0,7$ ,

Fig. 153. 2. ist  $A = 0,1$ ;

b) die Kugel liegt auf dem Boden auf und hat das Rückstrahlungsvermögen  $A = 0,7$ , was so groß ist, daß ihre Rückstrahlung auf den Boden bemerkbar ist;

Fig. 162. 3. das Rückstrahlungsvermögen des Bodens ist  $A = 0,7$ ;

Fig. 163. 4. ist  $A = 0,1$ .

Von diesen vier Fällen sollen nun die zwei letzten, bei denen die Kugel auf dem Boden aufliegt, weiter verfolgt und dabei zunächst die

Lichtgleichen im Grundrifs und Aufrifs in der gebräuchlichen Weise dargestellt werden. Gebräuchlich ist dabei aber eine solche Lage der vertikal stehenden Aufrifsebene, daß sie mit der ebenfalls vertikalen Symmetrieebene der Lichtgleichen (die durch die Sonne geht) einen Winkel von  $45^\circ$  bilden, wodurch die beiden Projektionen der Sonnenstrahlen Winkel von  $45^\circ$  mit der Schnittlinie der beiden Projektionsebenen, der Projektionsachse, bilden.

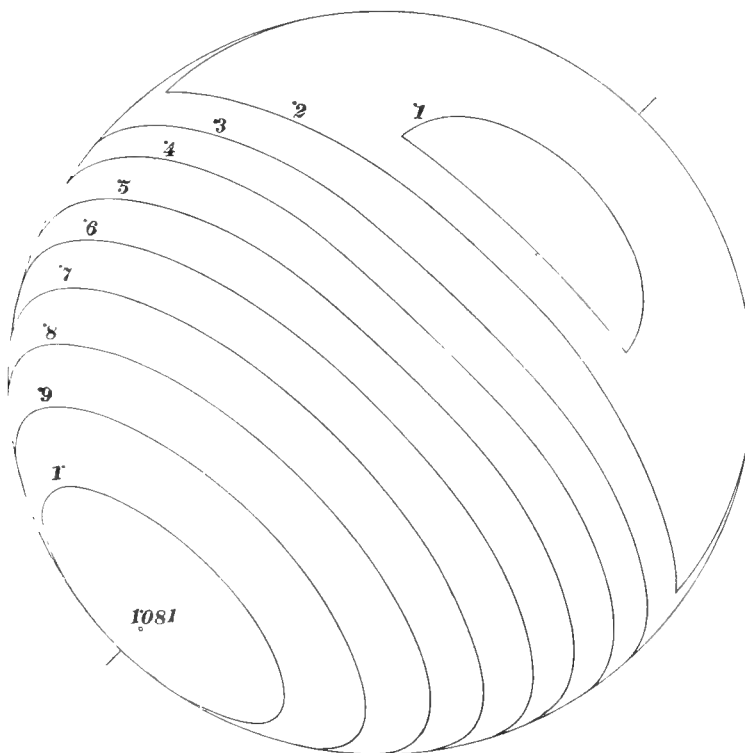


Fig. 164.

Lichtgleichen der auf dem Boden aufliegenden Kugel, hervorgebracht durch gleichzeitige Einwirkung von Sonne, Himmel und Boden, dessen  $A = 0,7$ . Aufrifs, schiefe Stellung.

Aus Fig. 162, für  $A$  des Bodens gleich 0,7, bilden wir den Grund- Fig. 162.  
rifs in der schiefen, dem Aufrifs entsprechenden Stellung, in folgender Fig. 164.  
Weise. Die höheren Lichtgleichen, d. i. von größerer Beleuchtungsstärke,  
erscheinen in Fig. 162 fast geradlinig und nur an dem Ende etwas gebogen;  
sie sind daher in Fig. 164 fast genau Ellipsen. Wir vervollständigen sie

in Fig. 162 zu vollen geraden Sehnen des Umrisskreises, zeichnen die zugehörige reine Ellipse in Fig. 164, indem wir die Endpunkte der Sehnen auf die Horizontalebene projizieren und auf die schief liegende Symmetrielinie der Fig. 164 übertragen, und damit die kleinen Achsen der Ellipsen erhalten; die großen Achsen sind gleich jener geraden Sehne in Fig. 162. Dann kann man die Abweichung von der geraden Sehne leicht als Abweichung von der Ellipse angeben.

Bei den anderen Lichtgleichen überträgt man einen Punkt aus Fig. 162 in Fig. 164, indem man aus Fig. 162 den Halbmesser des horizontalen Kreises der Kugel, auf welchem er liegt, entnimmt und damit den Kreis in Fig. 164 zieht, und indem man den Abstand von dem vertikalen Durchmesser in Fig. 162 als Abstand von demjenigen Durchmesser in Fig. 164 überträgt, der senkrecht auf dem Symmetriedurchmesser steht.

Fig. 165. Im Aufriss stellen sich die höheren Lichtgleichen wieder nahezu als Ellipsen dar. Den Mittelpunkt einer solchen erhält man, indem man seine Höhe über der horizontalen Durchmesser ebene aus Fig. 162 und seinen Abstand von dem vertikalen Durchmesser des Umrisskreises aus dem vorher gezeichneten Grundriss (Fig. 164) entnimmt. Die große Achse der Ellipse steht senkrecht auf der Verbindungslinie der Abbildung des Mittelpunktes der Kugel mit dem der Ellipse, und ihre Größe wird aus Fig. 162 abgegriffen.

Um die Bestimmungsweise der kleinen Achse anzugeben, wollen wir in Gedanken die Mittelpunkte der Kugel und der Ellipse mit  $M$  und  $E$ , ihre Grundrisse mit  $M'$ ,  $E'$ , ihre Aufrisse mit  $M''$ ,  $E''$  bezeichnen. Die kleine Achse jener Ellipse im Aufriss liegt nun in  $M''E''$  und wird durch Umlegung der projizierenden Ebene  $MEM''E''$  um  $M''E''$  in die mit der Aufrissebene parallele Durchmesser ebene der Kugel erhalten. Dabei bleibt  $M$  an seiner Stelle  $M''$ ,  $E$  kommt nach einem Punkte  $E'''$ , den man erhält, wenn man  $E''E''' \perp M''E''$  und gleich dem Abstände des  $E'$  von dem zur Projektionsachse parallelen Kugeldurchmesser macht, dann könnte man aus  $E'''$  eine auf  $M''E'''$  senkrechte und der halben großen Achse der Ellipse gleiche Linie zeichnen; ihre Projektion auf  $M''E''$  wäre die gesuchte halbe kleine Achse. Einfacher ist es aber, wenn man auf  $M''E'''$  die halbe große Ellipsenachse von  $M''$  aus aufträgt; der Abstand ihres zweiten Endpunktes

von  $M''E'$  ist ebenfalls gleich jener halben kleinen Achse. Es ist von Vorteil zu beachten, daß die Punkte  $E'''$  eine durch  $M''$  gehende schwach gekrümmte Linie bilden.

Die übrigen Lichtgleichen werden punktweise übertragen, indem man einen Punkt zuerst in der angegebenen Weise im Grundrifs zeichnet, aus

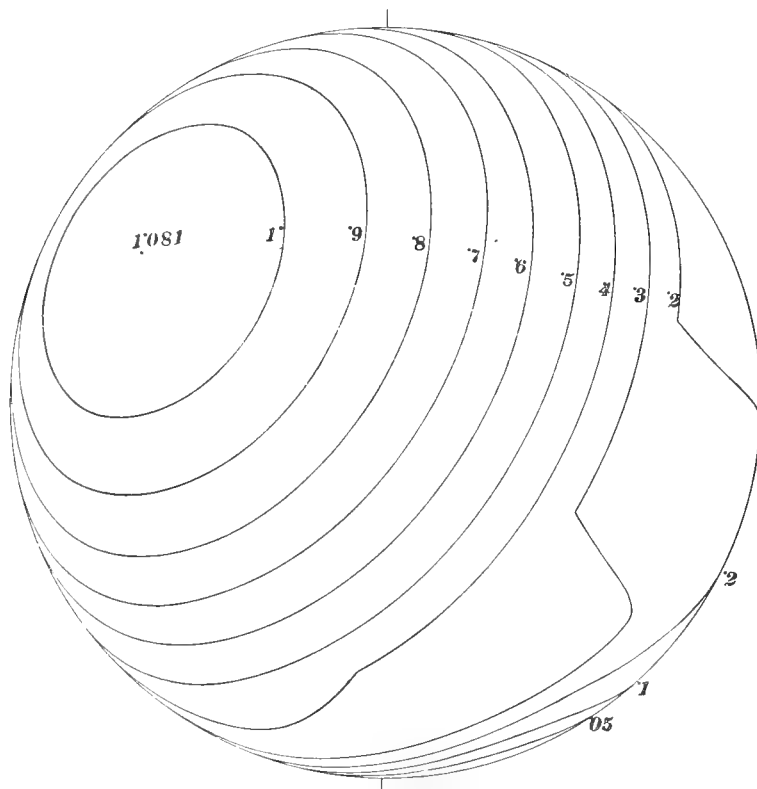


Fig. 165.

Lichtgleichen der auf dem Boden aufliegenden Kugel, hervorgebracht durch gleichzeitige Einwirkung von Sonne, Himmel und Boden, dessen  $A = 0,7$ . Grundrifs, schiefe Stellung.

ihm seinen Abstand von dem zur Projektionsachse senkrechten Durchmesser entnimmt und in den Aufrifs überträgt, während der Abstand des Aufrifs-punktes von der horizontalen Durchmessersebene aus Fig. 162 entnommen wird. Dabei ist es ein Vorteil, hauptsächlich die Punkte zu übertragen, welche in den vertikalen Durchmessersebenen der Kugel liegen, die mit der Aufrifsebene die Winkel von  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $45^\circ$  bilden. Diese schneiden die Kugel

in größten Kreisen, deren Aufrisse sowohl in Fig. 162, als wie in Fig. 165 als der Umriss, als der vertikale Durchmesser, oder als Ellipsen erscheinen, deren große Achse der vertikale Durchmesser des Umrisskreises bildet und deren kleine Achse gleich jenem Durchmesser mal  $\cos 45^\circ$  ist. Dabei werden z. B. die Punkte des vertikalen Umrissdurchmessers der Fig. 162 auf die rechts liegende halbe Ellipse der Fig. 165 übertragen, wobei sich die Abstände von dem horizontalen Umrissdurchmesser nicht ändern.

Dritter Teil.

Nachahmung der Helligkeit durch Tuschlagen.





**199. Unmöglichkeit der Nachbildung der wirklichen Helligkeiten.** Die Helligkeiten, die in der Natur vorkommen, können wir unmöglich auf dem Bilde wahrheitsgemäfs nachahmen, hauptsächlich weil sie viel zu grofs sind. Wir haben als Einheit der Helligkeit diejenige eines nur zu denkenden vollkommen weissen Körpers ( $A = 1$ ) angenommen, welcher an der äufseren Grenze der Atmosphäre senkrecht von der Sonne bestrahlt wird. Eine auf dem Erdboden aufliegende weisse Kugel von  $A = 0,7$  erlangt bei der von uns angenommenen Zenitdistanz der Sonne  $= 54^{\circ}44'$  durch die Sonne, die Atmosphäre und den mit ihr gleich hellen Boden an ihrer hellsten Stelle die Beleuchtungsstärke  $b = 1,081$  und die Helligkeit  $h = 1,081 \cdot 0,7 = 0,757$ .

Der Himmel dagegen hat neben der Sonne die Helligkeit 3,15; und die Helligkeit der Sonne selbst ist viele tausendmal so grofs. Denn wir wissen (S. 194), dafs ein Quadratmeter einer von der Sonne senkrecht bestrahlten vollkommen weissen und matten Körperoberfläche eine in ein Meter Abstand senkrecht gegenübergestellte Fläche nur  $\pi = 3,14$  mal so schwach beleuchtet, als die Sonne selbst, und wenn jenes Quadratmeter die Helligkeit der Stelle des Himmels neben der Sonne besäfsse, also 3,15, wieder 3,15 mal so stark, also im ganzen fast genau so stark wie die Sonne; also 1 qm einer Fläche von der Helligkeit des Himmels neben der Sonne, welches der zu beleuchtenden Fläche in 1 m Entfernung senkrecht gegenübergestellt wäre, würde diese Fläche ebenso stark beleuchten, wie die Sonne selbst. Ein Teil einer solchen beleuchtenden Fläche, welcher in derselben Gröfse wie die Sonne erschiene, würde aber nur den 14700sten Teil eines Quadratmeters einnehmen, und in demselben Verhältnis schwächer beleuchten. Denn der mittlere scheinbare Durchmesser der Sonne ist 32 Minuten, also ihre Gröfse auf der Himmelskugel vom Halbmesser  $= 1$  m ist  $=$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{32 \cdot \pi}{60 \cdot 180}\right)^2 \pi = \frac{1}{14700} qm,$$

die Sonnenscheibe, welche aber dieselbe Helligkeit hervorbringt, wie 1 qm des benachbarten Himmels auf der Himmelskugel von 1 m Halbmesser, erscheint daher 14700 mal so hell als dieser, d. h. in der Helligkeit von  $3,15 \cdot 14700 = 46300$ . Dies findet statt an der äußeren Grenze der Atmosphäre; an der Erdoberfläche ist ihre Helligkeit bei der angegebenen Stellung auf 0,69 ihrer ursprünglichen Stärke verkleinert, so daß hier die Sonnenscheibe nur noch mit der Helligkeit  $0,69 \cdot 46300 = 32000$  erscheint.

Dies kann als die größte bei uns vorkommende Helligkeit angesehen werden; als kleinste kann eine solche, welche fast gleich Null ist, vorkommen, nämlich beim Einblick in einen tiefen Tunnel.

Solche Helligkeiten wie 32000 und 0 können aber auf einem Bilde, also durch Farbpigmente nicht nachgeahmt werden. Die weißen Farbstoffe haben etwa das Rückstrahlungsvermögen 0,7 und würden auf einer senkrecht von der Sonne beschienenen Fläche bei der genannten Schwächung der Sonnenstrahlen die Helligkeit  $0,69 \cdot 0,7 = 0,48$  zeigen. Lampenschwarz hat noch das Rückstrahlungsvermögen 0,02 oder mindestens 0,01, würde also im Sonnenschein noch die Helligkeit  $0,69 \cdot 0,02 = 0,014$  geben.

Die Bilder werden aber meist in geschlossenen Räumen aufgestellt und werden nur durch Tageslicht, hauptsächlich die Atmosphäre beleuchtet. Die größte Beleuchtungsstärke, die durch die ganze Atmosphäre und den unbegrenzten hellen Boden auf einem lotrecht hängenden Bilde hervor gebracht werden kann, ist nach Fig. 128 und 152 etwa gleich  $0,20 + 0,25 = 0,45$ , dürfte aber in einem geschlossenen Raume selbst mit günstigem Oberlichte kaum  $\frac{1}{4}$  davon, oder 0,1 betragen. Dann sind jene äußersten Helligkeiten auf einem Bilde  $0,1 \cdot 0,7 = 0,07$  und  $0,1 \cdot 0,02 = 0,002$ , also weit von der Wirklichkeit, d. h. von 32000 und 0 entfernt.

Man könnte sich nur durch andere Mittel, als durch Farbpigmente, der Wirklichkeit mehr nähern, aber Mittel, die nur bei Panoramen oder auf der Bühne zulässig wären, nämlich durch Öffnungen an den fraglichen Stellen des Bildes, hinter denen etwa elektrisches Licht oder ein Dunkelraum angebracht wäre. Wir aber sprechen nur von der Färbung des Bildes.

Da stehen die Maler mit Recht davon ab, die volle blendende Sonne zu malen; sie zeigen sie höchstens durch Nebel oder Wolken halb verhüllt. Aber auch die Verhältnisse jener Helligkeiten können nicht nachgebildet werden. Die Sonnenscheibe ist ja  $32000 : 3,15 = 10200$  mal so hell als der benachbarte Himmel, die hellste weiße Farbe aber nur  $0,7 : 0,02 = 35$  mal so hell als Lampenschwarz; also kann nie der Sonnenscheibe das wahre Helligkeitsverhältnis gegen den benachbarten Himmel gegeben werden.

**200. Nachahmung der Unterscheidbarkeit verschiedener Helligkeiten. Das Webersche Gesetz.** Wenn wir nun die Sonnenscheibe selbst und auch den benachbarten Himmel von dem Bilde ausschließen, so werden die äußersten vorkommenden Helligkeiten, wie wir vorhin sahen, 0,757 und 0 sein. Diese und die dazwischenliegenden sollen nun auf dem Papier nachgeahmt werden. Dabei beschränken wir aber unsere Aufgabe dahin, daß wir nicht die Farben, sondern nur die Helligkeiten nachahmen; und dies wollen wir durch Lagen von Tusch oder Lampenschwarz tun, die wir mit dem Pinsel auftragen.

Da wir nun die wirklichen Helligkeiten nicht wiedergeben können, so tritt die Frage auf, wie wir die Nachbildung gestalten sollen. Da dürfte es als das passendste erscheinen, danach zu streben, daß wir Stellen, die in Wirklichkeit einen Unterschied in der Helligkeit erkennen lassen, auch im Bilde so färben, daß ein solcher Unterschied erkennbar ist. Und da die Erkennbarkeit mehr oder weniger deutlich hervortreten kann, so müssen wir die Grenze betrachten, wo der Unterschied gerade noch erkennbar ist. Da findet man denn, daß man Unterschiede in der Helligkeit erst dann erkennt, wenn sie eine gewisse Größe erreichen, die mit der Helligkeit der Flächen proportional wächst.

Es wird diese Erfahrung durch das Webersche Gesetz<sup>1)</sup> ausgedrückt, welches sagt, daß der Unterschied der Helligkeiten zweier Flächen

---

<sup>1)</sup> [Zur Kritik des von Fechner formulierten „Weberschen Gesetzes“ vergleiche man E. Hering, Grundzüge der Lehre vom Lichtsinn, Handbuch der Augenheilkunde, I. Teil, XII. Kap. § 21, S. 91 f. Leipzig, Verlag von W. Engelmann 1907. Unter diese Kritik fallen auch die hier gegebenen Entwicklungen. Gleichwohl dürften sie für den vorliegenden praktischen Zweck völlig genügen. D. H.]

erst dann anfängt erkennbar zu werden, wenn er einen gewissen verhältnismäßigen Teil von der Helligkeit jeder der beiden Flächen, z. B.  $\frac{1}{50}$  der weniger hellen beträgt.

Diese Verhältniszahlen sind schwer mit einiger Sicherheit zu bestimmen, weil der Grad der Deutlichkeit des Unterschiedes eine gewisse Willkür zuläßt; außerdem wechseln sie für verschiedene Augen, und sind auch verschiedene für dieselben Augen, je nachdem diese durch die Helligkeit der Umgebung abgestumpft, oder durch zeitweiliges Zubringen in der Dunkelheit empfindlicher geworden sind. Ich fand bei ganz deutlicher Unterscheidbarkeit jenes Verhältnis  $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{7}$ , und bei dem durch zeitweise Dunkelheit empfindlich gemachten Auge  $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{12}$ <sup>1)</sup>. Dies galt bei Beleuchtung durch eine kleine Benzinflamme von 9 mm Höhe. Bei einer Stearinkerze, welche die 14fache Helligkeit des Benzinlichtes hatte, fand ich als untere Grenze der Erkennbarkeit des Unterschiedes  $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{50}$ ; und unter besonders günstigen Verhältnissen kann  $\frac{1}{\alpha}$  auf  $\frac{1}{100}$  und  $\frac{1}{200}$  heruntergebracht werden.

Das Webersche Gesetz gilt aber nur zwischen gewissen Grenzen; bei großen Helligkeiten, besonders wenn ein schmerzliches Gefühl, ein Geblendetwerden eintritt, gilt es nicht mehr; die ganze und die halbe Sonnenscheibe wirken beide schmerzlich und lassen keine Unterscheidung der empfangenen Lichtmengen und der Helligkeiten mehr zu. Ebenso findet eine untere Grenze statt, indem bei sehr geringer Helligkeit die Sichtbarkeit ganz aufhört, was nach dem Weberschen Gesetze nicht stattfinden könnte. So fand ich, wenn die Helligkeit einer Gypsplatte, die von einer Stearinkerze in 1 m Abstand senkrecht beleuchtet ist, gleich Eins gesetzt wird, daß die Gypsplatte gerade noch bemerkbar war, wenn in dem ersten der angeführten Fälle ( $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{7}$ ) ihre Helligkeit 0,0001972 betrug, im zweiten ( $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{12}$ ) bei 0,000065.<sup>2)</sup> Überhaupt scheint bei sehr geringer Helligkeit

<sup>1)</sup> Chr. Wiener, Die Empfindungseinheit zum Messen der Empfindungsstärke. (Wied. Ann. d. Phys. u. Chem., N. F. Bd. 47, 1892, S. 666.)

<sup>2)</sup> A. a. O. S. 665 u. 668.

die Empfindlichkeit gegen die Helligkeitsunterschiede ebenso abzunehmen, wie bei sehr großer, schmerzender Helligkeit, wenn man das  $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{7}$  oder  $\frac{1}{12}$  bei dem kleinen Benzinlicht mit dem  $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{50}$  bei dem Stearinlicht vergleicht.

**201. Empfindungseinheit, Empfindungsstärke und ihre Abhängigkeit von der Helligkeit oder dem Reize.** Nun können wir die Begriffe der Empfindungseinheit und der Empfindungsstärke aufstellen. Wir wollen sagen, die Stärke von zwei Empfindungen ist um eine Einheit, also um die Empfindungseinheit, verschieden, wenn ein Unterschied zwischen ihnen gerade noch empfunden werden kann, und wir wollen diejenige Empfindung selbst Eins nennen, welche gerade noch bemerkt wird, also bei einer Abschwächung verschwindet. Bezeichnen wir die Helligkeit einer Fläche, die einen Reiz auf das Auge ausübt, mit  $h$ , und die durch sie hervorbrachte Empfindungsstärke oder kurz die Empfindung mit  $e$ , so wächst sie um 1, wird also zu  $e + 1$ , wenn die Helligkeit  $h$ , entsprechend dem Weberschen Gesetze, um jene mit  $h$  in dem unveränderlichen Verhältnisse  $\frac{1}{\alpha}$  stehende Größe  $\frac{1}{\alpha} h$  wächst, also zu  $h + \frac{1}{\alpha} h = h \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$  geworden ist, wenn sie also für  $\alpha = 12$  um  $\frac{1}{12}$  wächst, oder  $\frac{13}{12}$  von ihrer ursprünglichen Stärke wird. Dieses Verhältnis  $\frac{1}{\alpha}$  heißt die Verhältnisschwelle, eine Bezeichnung, die von Fechner<sup>1)</sup> herrührt, dem überhaupt das Wesentliche der hier gegebenen Entwicklung zu danken ist.

Sei die Helligkeit  $h = h_1$ , wenn die Empfindung  $e = 1$  wird, so hört mit abnehmendem  $h$  die Empfindung ganz auf. Denkt man sich das Webersche Gesetz noch abwärts fortgesetzt, so müßte die Empfindung  $e = 0$  werden erst dann wenn die Helligkeit  $h$  zu  $h_0 = s$  gesunken wäre, derart, daß

$$h_0 \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = s \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = h_1,$$

während in Wahrheit  $e$  schon Null wird, wenn  $h$  nur um weniges unter  $h_1$  sinkt. Doch hat Fechner dem so berechneten  $s$  eine Bedeutung gegeben

<sup>1)</sup> Fechner, Elemente der Psychophysik, 1860; zweite unveränderte Aufl. 1889, Bd. 1, S. 244.

und es den Schwellenwert des Reizes genannt.<sup>1)</sup> Wir erhalten nun die Empfindung  $e = 1$  für die Helligkeit  $h_1 = s \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$ , dann die Empfindung  $e = 2$  für die Helligkeit  $h_2 = h_1 \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = s \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^2$ ,  $e = 3$  für  $h_3 = h_2 \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = s \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^3$ , und allgemein  $e = e$  für

$$h = s \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^e,$$

und daher

$$\log \frac{h}{s} = e \log \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

oder

$$e = \frac{\log \frac{h}{s}}{\log \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{\log h - \log s}{\log \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}.$$

Die Empfindungsstärke  $e$  ist also eine logarithmische Funktion der Helligkeit oder des Reizes; dieselbe ist in Fig. 166 dargestellt.  $h = OA$  ist die Abszissen-,  $e$  die Ordinatenachse; die Kurve  $k$  stellt den oben erwähnten Fall mit  $\alpha = 7$  oder genauer  $= 6,96$  und mit  $s = 0,0001728$  dar, und dabei wird

$$\frac{1}{\alpha} = 0,1437$$

und

$$h = 0,0001728 \cdot 1,1437^e, \quad e = \frac{\log \frac{h}{0,0001728}}{\log 1,1437}.$$

Man verzeichnet die Kurve am genauesten nach Berechnungen; ihre Entstehung wird aber am verständlichsten aus der ursprünglichen Anschauung. Nach der unmittelbaren Beobachtung wird eine Fläche gerade bemerkbar, oder es wird  $e = 1$  für  $h_1 = 0,0001972$ ; daher ist in der Fig.  $OC = s$  und die zugehörige Ordinate  $e = 1$  gemacht; hier beginnt die Kurve  $k$ . Der Schwellenwert  $s$  des Reizes wird dann gefunden durch  $s \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = h_1$ , oder  $s \cdot 1,1437 = 0,0001972$ ,  $s = 0,0001728 = OS$ . Bis nach  $S$  auf  $OA$  denkt

<sup>1)</sup> Fechner, a. a. O., Bd. 1, S. 238 ff. und Bd. 2, S. 13. Fechner geht von unendlich kleinen Zuwächsen des Reizes und der Empfindungsstärke aus, er nimmt keine bestimmte Empfindungseinheit an, sondern führt eine unbestimmte Konstante ein.

man sich die Kurve fortgesetzt, was der Annahme entspricht, als gelte das Webersche Gesetz noch unterhalb der Grenze der wirklichen Empfindung. Steigt nun wieder umgekehrt  $h = s$  um 0,1437 seiner Gröfse oder steigt  $OS$  um  $SC = 0,1437 \cdot OS$ , so wird hierfür  $e = 1$ . Man erhält aber dies  $SC$ , wenn man die Linie  $OB$  zieht derart, dafs  $\sin AOB = 0,1437$ , und wenn man  $SC$  gleich dem Abstand des  $S$  von  $OB$  macht. Für  $e = 2$  muß  $h = OC$

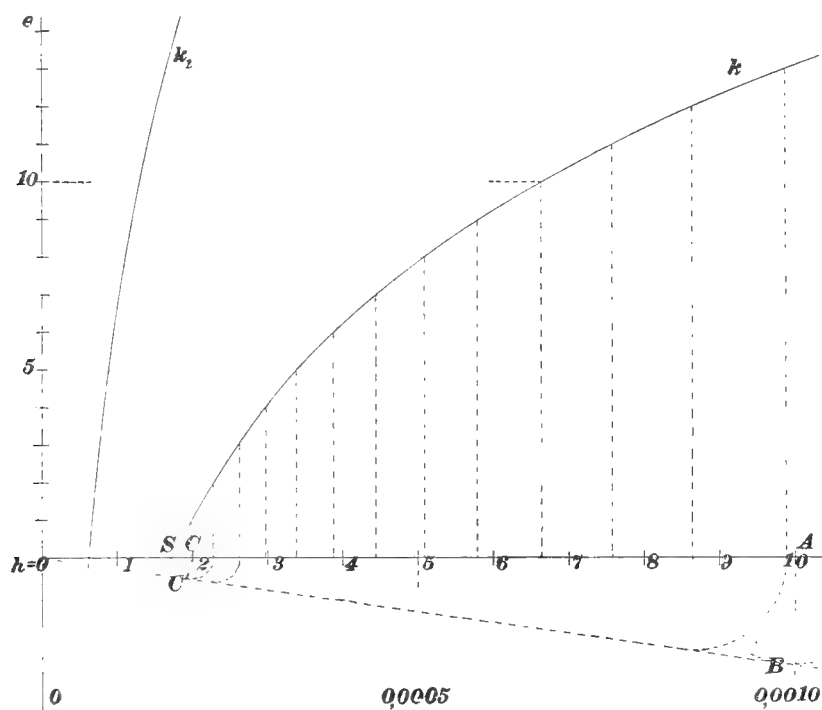


Fig. 166.

wieder um  $0,1437 \cdot OC$  vergrößert werden, was wieder mittelst  $OB$  geschieht. Man sieht also, dafs die Reize oder die Helligkeiten  $h$  eine geometrische und die Empfindungsstärken  $e$  eine arithmetische Reihe bilden, wie es bei den Koordinaten der logarithmischen Linie stattfindet.

Die zweite Kurve  $k_1$  gilt für den zweiten oben angeführten Fall des durch die Dunkelheit empfindlicher gemachten Auges mit  $\alpha = 12,3$ ,  $1 : \alpha = 0,0811$ ,  $s = 0,0000612$ .

Wir wollen aber nicht versäumen zuzufügen, dafs der Begriff der Empfindungsstärke unabhängig von dem Bestehen des Weberschen Gesetzes

ist. Die Empfindungsstärke einer Helligkeit, oder allgemein eines Reizes, enthält so viel Empfindungseinheiten, als die Anzahl der gerade noch unterscheidbaren Helligkeiten oder Reize beträgt, die man zwischen jene Helligkeit oder jenen Reiz und die Dunkelheit oder die Reizlosigkeit einschalten kann, vermehrt um Eins. Dabei ist es gleichgiltig, in welcher Art von Abhängigkeit der Unterschied zweier aufeinanderfolgenden Reize von der Gröfse dieser Reize stehe.

**202. Nachahmung der Helligkeit durch Tuschlagen.** Wir kommen nun zur Nachahmung der Helligkeiten durch Tuschlagen. Wir hatten dafür (S. 269) als wünschenswertes Ziel aufgestellt, dafs Helligkeiten, die in Wirklichkeit noch unterschieden werden können, auch in der Nachahmung noch unterscheidbar sind. Dies wird allerdings in solcher Allgemeinheit nicht immer möglich sein. Denn in Wirklichkeit sind die Helligkeiten meist viel mehr verschieden, als auf dem im Zimmer aufgestellten Bilde; es werden also in Wirklichkeit zwischen den durch den hellsten und den dunkelsten Ton hervorgebrachten Empfindungen meist viel mehr Empfindungseinheiten eingeschaltet werden können als auf dem Bilde. Wir werden also unsere Forderung dahin beschränken müssen, dafs der Unterschied der Empfindungsstärken für zwei Stellen des wirklichen Gegenstandes zu dem Unterschiede der Empfindungsstärken der entsprechenden Stellen des Bildes in einem unveränderlichen Verhältnisse steht, dafs z. B. dieser Unterschied im Bilde stets halb so grofs gemacht wird, als er in der Wirklichkeit ist.

Die Nachahmung der Helligkeiten auf dem Bilde wollen wir nun, wie schon bemerkt, durch Tuschlagen vornehmen, indem wir einen schwachen Tushton, den Grundton herstellen, diesen mit dem Pinsel mehrmals nach jedesmaligem Trocknen auftragen, um so öfter, je geringer die Helligkeit sein soll. Ich habe nun Versuche über die Verminderung der Helligkeit mit zunehmender Anzahl der Tuschlagen angestellt,<sup>1)</sup> die ich im folgenden kurz anführen will.

---

<sup>1)</sup> Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Bd. 1, 1884, S. 408.



**203. Helligkeit  $h$ , welche durch  $n$ -faches Auflegen des Grundtons erreicht wird.** Ich stellte einen ziemlich dunklen Ton her, verdünnte ihn durch die 49fache Menge von Wasser auf  $\frac{1}{50}$  und betrachtete diese Verdünnung als Grundton. Man könnte nun denken, daß man die Stärke des ursprünglichen Tones wieder erreichte, wenn man diesen verdünnten Ton 50 mal übereinander legte. In Wahrheit reichten aber schon 39 Lagen dazu hin.

Um nun auch Zwischenstufen der Helligkeiten zu erhalten, bildete ich eine Art von Schraffierung mit jenem starken Tone, indem ich helle Streifen von der Weisse des Papierses und dunkle mit dem starken Tone nebeneinander legte, und zwar in vier Arten, so nämlich, daß die hellen Streifen  $\frac{4}{5}$ ,  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{2}{5}$  oder  $\frac{1}{5}$  der Gesamtbreite einnahmen, allgemein die verhältnismäßige Breite  $b$ , und die dunklen dann natürlich  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{4}{5}$ , allgemein die verhältnismäßige Breite  $(1-b)$ . Setzen wir nun ohne Rücksicht auf den Wechsel in der Art der Beleuchtung des Bildes die Helligkeit des weissen Papiers = 1 und diejenige des dunklen Tones gleich  $h_1$ , vielleicht = 0,01 oder 0,02, und betrachten die Schraffierung aus einer solchen Entfernung, daß sie als gleichförmiger Ton erscheint, so wird ihre Helligkeit ausgedrückt sein durch

$$h = b + (1-b) h_1;$$

und nach dieser Formel ergibt sich

bei $b =$	0,	$\frac{1}{5}$ ,	$\frac{2}{5}$ ,	$\frac{3}{5}$ ,	$\frac{4}{5}$ ,	1,
für $h_1 = 0,01$ ,	$h = 0,01$ ;	0,208;	0,406;	0,604;	0,802;	1,000,
„ $h_1 = 0,02$ ,	$h = 0,02$ ;	0,216;	0,412;	0,608;	0,804;	1,000.

Man sieht daraus, daß bei einem kleineren  $h_1$  das  $h$  nahezu mit  $b$  proportional ist.

Nun haben wir Streifen gebildet, diese der Reihe nach 0 mal, 1, 2, 3,  $n$  mal mit jenem durch Verdünnung erhaltenen Einheitstone überzogen und diese Streifen mit den Schraffierungen verglichen. Wir erhielten dann übereinstimmende Helligkeiten der schraffierten und der gleichförmigen Lagen

bei $b = 1$ ;	$\frac{4}{5}$ ,	$\frac{3}{5}$ ,	$\frac{2}{5}$ ,	$\frac{1}{5}$ ,	0,
und bei $n = 0$ ;	1,5;	2,5;	8,9;	15;	39.

Veranschaulicht man nun dieses Ergebnis durch eine Kurve, indem man als Abszissen die  $h$  und als Ordinaten die  $n$  aufträgt, so erhält man die Fig. 167. Von  $h$  sind zwar die wirklichen Werte unbekannt, weil  $h_1$  unbekannt ist, aber die Unterschiede der  $h$  sind mit denen der  $b$  proportional, also untereinander gleich; es können also die Ordinaten  $n$  verzeichnet werden; nur der Anfangspunkt der  $h$  bleibt unbestimmt. Die Kurve, die stetig und angenähert durch die Punkte gezeichnet ist, hat das Ansehen einer umgekehrten logarithmischen Linie, wonach  $n$  mit dem Logarithmus des reziproken Wertes von  $h$  oder von  $1 : h$  proportional wäre; und da die von Schülern von Monge über das Tuschen aufgestellte Theorie<sup>1)</sup> ebenfalls zur logarithmischen Linie führt, so wollen wir diese Theorie zugrunde legen.

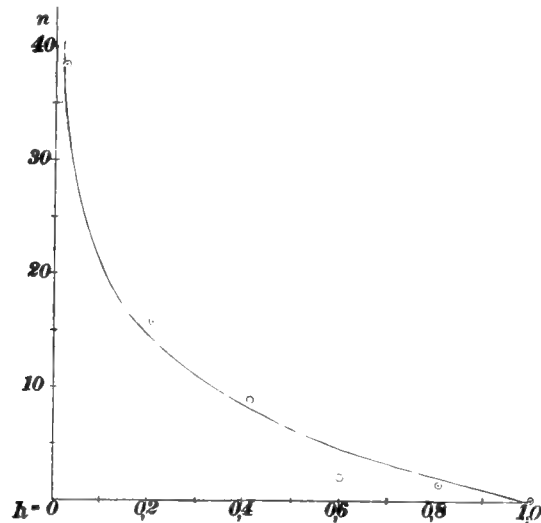


Fig. 167.

**204. Logarithmische Beziehung zwischen der Helligkeit  $h$  und der Anzahl  $n$  der Tuschlagen.** Die Theorie geht davon aus, daß die angeriebene Tuschfarbe aus Wasser mit festen schwebenden Kohleteilchen besteht, die sich beim Anlegen auf das Papier niederschlagen; daß ferner die Helligkeit Eins durch das reine, diejenige Null durch das ganz mit Kohle überzogene Papier dargestellt werde (was freilich nicht ganz

<sup>1)</sup> Journal de l'école polyt., cah. I, an III (1795) S. 167: Memoire sur la détermination géométrique des tintes dans les dessins.

zutritt), so daß die Helligkeit des mit Tuscharbe bemalten Papiers gleich dem Verhältnis der nicht mit Kohleteilchen bedeckten Papierfläche zu der ganzen bemalten Papierfläche ist; daß sodann durch das Auflagern eines Kohleteilchens auf ein anderes die Helligkeit nicht vermindert werde und daß endlich bei wiederholtem Bemalen sich die Kohleteilchen in verhältnismäßig gleicher Menge auf schon bedeckte und auf noch weiße Flächen ablagern. Die letzte Annahme trifft allerdings um so weniger vollkommen zu, je mehr Teilchen schon übereinander gelagert sind, weil dann die neu hinzukommenden Teilchen leichter in die vertieften Stellen des Weiß hinabgleiten.

Unter diesen Annahmen werde bei jedem Auflagern des Tuschestones von einer weißen Fläche = 1 stets dieselbe Fläche  $m$  von Tuschteilchen bedeckt; daher bleibt nach der ersten Lage die Fläche  $1 - m$  weiß; von dieser bleibt nach der zweiten Lage wieder das  $(1 - m)$  fache, also von der ursprünglichen Flächeneinheit die Fläche  $(1 - m)^2$  weiß, usw., so daß von der Fläche Eins nach  $n$  Lagen  $(1 - m)^n$  weiß ist, woraus die Helligkeit  $h$  folgt:

$$\left. \begin{aligned} h &= (1 - m)^n, \\ \text{oder} \quad n &= \frac{\log h}{\log (1 - m)} = \frac{\log \frac{1}{h}}{\log \frac{1}{1 - m}} = k \log \frac{1}{h}. \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Hierin sind  $k = 1 : \log \frac{1}{1 - m}$  und  $\log \frac{1}{h}$  positive Größen, weil  $h < 1$  und  $m < 1$ . Also ist wirklich nach dieser Theorie die Anzahl der Tuschlagen  $n$  mit dem Logarithmus des reziproken Wertes der Helligkeit  $h$  proportional.

Setzt man nun nach dem Vorhergehenden  $h = b + (1 - b)h_1$  und bestimmt die beiden Unveränderlichen  $k$  und  $h_1$  aus den fünf Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate, so erhält man

$$n = -20,9 \log [b + 0,013 (1 - b)].$$

Nach dieser Formel ist die Kurve in Fig. 167 eingezeichnet, die sich den Beobachtungen genügend gut anschließt. Die Helligkeit des starken unverdünnten Tuschestones, die bei  $b = 0$  und auch mit  $n = 39$  erreicht wurde, betrug also  $h_1 = 0,013$ . Und dies ist der Abstand der

Ordinatenachse oder der Asymptote der logarithmischen Linie vom ersten Beobachtungspunkte ( $n = 39$ ).

Die Beobachtung zeigt aber, daß die Theorie und die gegebenen Gleichungen nicht ganz zutreffend sind; denn es sollte  $h = 0$  werden für  $n = \infty$ , oder es sollte erst nach unendlich vielen Lagen die Helligkeit Null erreicht werden. Dies ist aber zunächst unrichtig, weil auch durch eine noch so dicke Tuschlage ( $n = \infty$ ), welche gar kein Weiß mehr durchscheinen läßt, die Helligkeit Null nicht erreicht wird, da auch voller Tusch oder volles Lampenschwarz noch eine gewisse Helligkeit zeigt; sodann aber, weil schon nach einer endlichen Anzahl von Lagen die größtmögliche Dunkelheit erreicht ist, indem dann kein Weiß mehr frei bleibt. Es rührt dies, wie schon bemerkt, daher, daß bald die aufeinander gelagerten Tuschteilchen stärkere Erhöhungen und die weißen Stellen Vertiefungen bilden, in welche die Tuschteilchen vorwiegend hinuntersinken.

Wenn ich von einem ganz schwachen Grundtone ausging, der, einmal aufgetragen, einen deutlichen Unterschied gegen die weiße Papierfarbe zeigte, und auf  $\frac{1}{4}$  verdünnt, etwa die Grenze der Erkennbarkeit lieferte, so gab eine 160fache Schicht einen nur noch ganz schwach durchscheinenden Ton, der kaum mehr verstärkt werden konnte, aber erst eine etwa 1000fache Schicht gab jenen sammetartigen schwarzen Ton, der durch weitere Lagen wirklich nicht mehr verstärkt wird. Ich bemerke dabei, daß ich diese hohe Anzahl von Lagen nicht einzeln auflegte, sondern daß ich einen Hilfston anrieb, der so viel lieferte als eine große Anzahl der Grundtöne.

Da nun aber dieser tiefste Ton als derjenige von der Helligkeit Null statt etwa 0,01 oder 0,02 und tausend Lagen so viel wie unendlich viele gelten können, so dürfen wir ohne merkbaren Fehler die Formel (95)

$$n = k \log \frac{1}{h}$$

gelten lassen.

In ihr ist immer, was auch der Wert von  $k$  sei, für  $h = 1$ ,  $n = 0$ , d. h. die Formel setzt voraus, daß die ungeänderte Farbe des Papiers als die Einheit der Helligkeit gilt. Diese Helligkeit kommt aber selten vor. Denn die größte Beleuchtungsstärke  $b$ , die bei einer weißen matten Fläche vorkommt, wie z. B. bei einer Kugel, die von der Sonne, dem klaren

Himmel und von dem hellen Boden durch Rückstrahlung beleuchtet wird, ist nach Fig. 162  $b = 1,081$ , wobei die Weifse  $A$  des Bodens und der Kugel  $= 0,7$  angenommen wurde. Die Helligkeit der Kugel an dieser Stelle ist dann  $h = A \cdot b = 0,7 \cdot 1,081 = 0,757$ . Will man auch bei Ausführung die Weifse des Papiers mit  $h = 1$  bezeichnen, so müfste man jener hellsten Stelle (der Kugel) die zu  $h = 0,757$  gehörige noch zu bestimmende Anzahl von Tuschlagen geben. Will man aber, was hier gerechtfertigt wäre, jene hellste Stelle des Bildes (hier der Kugel) durch das weifse Papier darstellen, so müfste man alle berechneten Helligkeiten durch die wirkliche Helligkeit dieser Stelle  $h_0$  (hier  $= 0,757$ ) teilen, oder die Formel (95) durch

$$n = k \log \frac{h_0}{h} \quad (96)$$

ersetzen.

Es kann ferner vorkommen, dafs man die hellsten ausgedehnten Stellen des Bildes durch das weifse Papier darstellt, dafs aber daneben noch viel hellere kleine Stellen durch Rückstrahlung halb glänzender Flächen hervorgebracht werden. Es kann dann genügen, auch diese Stellen nur durch das weifse Papier nachzuahmen; die Spiegelung wird dann doch durch die enge Begrenzung durch dunklere Flächen zur Vorstellung gebracht. — Sodann liefern die Formeln (95) und (96) für  $h = 0$ ,  $n = \infty$ .

**205. Wahl der Stärke des Grundtons.** Da es bei der Bestimmung der Grenztöne  $h = 1$ ,  $n = 0$  und  $h = 0$ ,  $n = \infty$  auf den Wert von  $k$  oder auf die Stärke des Grundtones gar nicht ankommt, so muß dieser aus einer zwischenliegenden Helligkeit  $h$  bestimmt werden. Zu dem Ende bildet man irgend einen Tushton und schreibt ihm in passender Weise eine bestimmte Helligkeit  $h_1$  zu. Mit der Stärke dieses Tones nimmt die Farbtiefe oder die Dunkelheit des Bildes zu.

Wir haben bei den bald auszuführenden Abbildungen der Kugel den Hintergrund des Aufrisses, welchen wir als eine Stelle des klaren Himmels annehmen, gewählt und wollen dessen Tonstärke willkürlich zum Ausgang annehmen. Da wir die Aufrifsebene unter  $45^\circ$  gegen die durch die Sonne gehende Vertikalebene neigen und die Sonne im Rücken des Beobachters annehmen, so ist diese Stelle des Himmels auf dem Horizont in einem

Azimutabstand von  $135^\circ$  von der Sonne gelegen ( $\zeta = 90^\circ$ ,  $\alpha = 135^\circ$ ). Die Fig. 100 zeigt aber, daß an dieser Stelle die Helligkeit des klaren Himmels  $= 0,1$  ist. Hierfür habe ich einen ziemlich kräftigen Ton gewählt.

**206. Beziehung zwischen der Verdünnung  $v$  des Grundtons und der Zahl der Töne  $t$  zur Wiedererreichung der Dunkelheit des Grundtons.** Wir wollen nun diesen Ton verdünnen und zunächst erkennen, wie viel Lagen der Verdünnung oder des Grundtones notwendig sind, um den starken Ton wieder zu erreichen. Da zeigt uns nun die kleine Versuchstabelle (S. 273), daß, bei der Verdünnung auf  $\frac{1}{50}$ , 39 Lagen des Grundtones notwendig sind. Bei anderen Versuchen fand ich bei der Verdünnung auf  $\frac{1}{10}$  meist acht Lagen als notwendig; und alle diese Versuche scheinen übereinzustimmen. Denn sind zwei Verdünnungen auf die  $v$  und die  $V$ fache Menge vorgenommen worden, so scheint es naheliegend, daß die Anzahl der Töne  $t$  und  $T$ , die notwendig sind, um den ursprünglichen Ton wieder zu erhalten, mit der Stärke der Verdünnung  $v$  und  $V$  in einem unveränderlichen Verhältnisse stehe, oder daß

$$\frac{t}{v} = \frac{T}{V}. \quad (97)$$

Hier ist das Verhältnis gleich  $\frac{39}{50}$  und nahezu gleich  $\frac{8}{10}$ .

Streng genommen, dürfte diese Beziehung nicht gelten. Denn verdünnt man einen Ton auf das  $v'$  fache und findet, daß  $t'$  Lagen des verdünnten Tones den ersten Ton geben, verdünnt dann den verdünnten Ton nochmals auf das  $v'$  fache, also auf das  $v'' = v'^2$  fache des ursprünglichen Tones, so müßten, da wieder  $t'$  Lagen des zweimal verdünnten Tones den einmal verdünnten hervorbringen,  $t'' = t' \cdot t'$  Lagen des zweimal verdünnten Tones den ursprünglichen erzeugen. Dann wäre aber  $v'' = v'^2$ ,  $t'' = t'^2$ , also

$$\frac{t''}{v''} = \left(\frac{t'}{v'}\right)^2.$$

Verdünnt man nun nochmals auf das  $v'$  fache, also zum  $v''' = v'^3$  fachen des ursprünglichen Tones, so müßten  $t''' = t'^3$  Lagen notwendig sein, um den ursprünglichen Ton zu erhalten und es wäre

$$\frac{t'''}{v'''} = \left(\frac{t'}{v'}\right)^3,$$

und allgemein, wenn nach  $m$  maliger gleicher Verdünnung die Gesamtverdünnung  $v$  und die Anzahl der notwendigen Lagen zur Erreichung des ursprünglichen Tones  $t$  ist,

$$v = v'^m, \quad \frac{t}{v} = \left(\frac{t'}{v'}\right)^m.$$

Ebenso für  $n, V, T$

$$V = v'^n, \quad \frac{T}{V} = \left(\frac{t'}{v'}\right)^n.$$

Dabei sind  $V$  und  $v$  beliebige Verdünnungen, da man zu solchen stets von ein und demselben verdünnten Ton  $v'$  aus gelangen kann (Kommensurabilität). Sind nun  $v, t, V$  bekannt, so kann man  $T$  bestimmen. Es ist dann

$$\begin{aligned} \log v &= m \log v', & \log \frac{t}{v} &= m \log \frac{t'}{v'} \\ \log V &= n \log v', & \log \frac{T}{V} &= n \log \frac{t'}{v'} \\ \frac{n}{m} &= \frac{\log V}{\log v} = \frac{\log \frac{T}{V}}{\log \frac{t}{v}}, \end{aligned}$$

also

$$\log \frac{T}{V} = \log \frac{t}{v} \cdot \frac{\log V}{\log v}.$$

Daher sind die Verhältnisse  $T:V$  und  $t:v$  nur gleich bei  $V=v$  und sie entfernen sich um so mehr von der Gleichheit, je mehr  $V$  und  $v$  verschieden sind. Für unser obiges Beispiel ist  $v=10, t=8, V=50$ ; daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \log \frac{T}{V} &= \log 0,8 \frac{\log 50}{\log 10} = 0,836 - 1, \\ \frac{T}{V} &= 0,685, \quad T = 34,75. \end{aligned}$$

Die Beobachtung hat aber  $T=39$  ergeben, so dafs also selbst bei dieser grofsen Verschiedenheit von  $v$  und  $V$  die Gleichung  $T:V=t:v$  keinen erheblichen Fehler zeigt und als gültig angenommen werden darf. Da nun, zu  $v=10, t=8$  gefunden wurde, so wird die Gleichung (98) zu

$$\frac{T}{V} = \frac{8}{10}. \tag{98}$$

**207. Beziehung zwischen der Helligkeit  $h$  und der Anzahl  $n$  der Tuschlagen.** Ferner ergibt sich nach den Annahmen der S. 278, daß in der Gleichung (95) zu  $h = 0,1$ ,  $n = 8$  gehört. Dadurch wird  $k$  bestimmt, indem

$$8 = k \log \frac{1}{0,1} = k,$$

daher

$$n = 8 \log \frac{1}{h}.$$

Tab. 87. Hieraus erhält man aber die Tab. 87. Man bemerkt aus derselben, daß bei der starken Helligkeit von 1 zu einer Abnahme der Helligkeit um 0,1 nur die Zufügung von  $\frac{1}{3}$  Grundton, d. i. von einer Verdünnung desselben auf  $\frac{1}{3}$ , gehört, daß aber bei der schwachen Helligkeit von 0,2 zu derselben Abnahme um 0,1 die Zufügung von  $2\frac{1}{2}$  Lagen des Grundtones notwendig ist.

Tabelle 87.

Zusammenhang zwischen der Helligkeit  $h$  und der Anzahl  $n$  der Tuschlagen.

$h$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,09
$n$	0	0,37	0,78	1,24	1,78	2,42	3,18	4,18	5,59	8,00	8,37
$n$ angenähert	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{3}$	3	4	$5\frac{1}{2}$	8	$8\frac{1}{2}$
$h$	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,005	0	
$n$	8,78	9,24	9,78	10,42	11,18	12,18	13,59	16,00	18,42	$\infty$	
$n$ angenähert	$8\frac{3}{4}$	$9\frac{1}{4}$	$9\frac{3}{4}$	$10\frac{1}{4}$	11	12	$13\frac{1}{2}$	16	$18\frac{1}{2}$	$\infty$	

**208. Tuschen des Bildes bei gleichförmiger Abstufung der Helligkeit.** In Fig. 168 ist nun eine Lichtabstufung mit gleichen Stufen der Helligkeit ausgeführt, von  $H = 1,0$  bis 0,1 mit der Stufe von 0,1 und dann abwärts bis 0,02 mit der Stufe von 0,01. Die Abstufung nach Tuschlagen  $n$ , die sich hierbei zufolge der letzten Tabelle ergibt, wird dadurch, wie man bemerkt, ganz ungleichförmig.

Fig. 169. In Fig. 169 ist nach diesem Verfahren die Kugel gemalt, sowohl im Grundriß samt dem hellen Boden, auf dem sie aufliegt, als im Aufriß mit dem klaren Himmel als Hintergrund, und es sind dabei für die Kugel



und den Boden die Figuren 164 und 151, für die Kugel und den Himmel die Figur 165 benutzt, worin die Lichtgleichen meist nach der gleichförmigen Abstufung der Beleuchtungsstärke  $= 0,1$  konstruiert wurden. Zur Bestimmung der Anzahl  $n$  der Tuschlagen sind nach der vorhergehenden Tab. 87 die Helligkeiten  $h$  maßgebend; und diese könnte man aus den Beleuchtungsstärken  $b$  der Kugel und des Bodens, die durch deren Lichtgleichen angegeben sind, erhalten, indem man die Werte  $b$  mit der Weifse dieser Oberflächen ( $= 0,7$ ) vervielfachte.

Man kann aber auch, da es nur auf die Verhältnisse ankommt, die Helligkeiten durch die Beleuchtungsstärken ersetzen, welche von den Lichtgleichen angegeben werden. Da nun in unserem Bilde für den Himmel die Helligkeit durch eine einzige Zahl, für die Kugel und den Boden die Beleuchtungsstärken durch viele Zahlen angegeben sind, so ist es am einfachsten, die Beleuchtungsstärken beizubehalten und die Helligkeit  $h = 0,1$  des Himmels in die gleichwertige Beleuchtungsstärke  $b$  zu verwandeln durch Teilung durch die Weifse  $A = 0,7$  jener Körper; dadurch wird  $b = 0,1 : 0,7 = 0,14$ . Es ist also jene Stelle des Himmels ebenso zu behandeln, wie wenn sie die Beleuchtungsstärke  $b = 0,14$  besäße.

Dann muß aber der Grundton anders bestimmt werden. Indem man nach Tab. 87 den Tushton gewählt hat, welcher durch einmaliges Auflegen die Helligkeit des Himmels  $h = 0,1$  angibt und nachdem wir gefunden, daß dieser Ton auf  $\frac{1}{10}$  geschwächt, dann nach 8 maligem Auflegen dieselbe Färbung liefert, müssen wir es jetzt erreichen, daß der Grundton nur so vielmal aufgelegt werden muß, um jenen Ton des Himmels zu liefern, als die zu  $b = 0,14$  gehörige Zahl  $n$  der Tab. 87 angibt, wenn man die  $h$  durch die  $b$  ersetzt. Durch Einschaltung in der Tabelle erhält man aber für  $h = 0,14$ ,  $n = 7$ . Daher müssen wir jenen gewählten Ton nur auf das  $\frac{7}{8} \cdot 10$ , d. h. das 9 fache verdünnen, damit diese Verdünnung, als Grundton 7 mal aufgelegt, die ursprünglich gewählte Tonstärke des Himmels liefert.

Mit diesem Grundtone malen wir nun, indem wir die Anzahl der Tuschlagen für Kugel und Boden durch die  $n$  der Tab. 87 bestimmen, welche zu den  $h$  gehören, die den Beleuchtungsstärken  $b$  der Lichtgleichen der Figuren 164, 165, 151 gleich sind. Daß die hellste Stelle der Kugel  $b = 1,081$  statt dem vorausgesetzten 1 besitzt, dürfen wir bei der Gering-

fügigkeit des Unterschiedes übersehen. Müfste es berücksichtigt werden, so müfsten alle  $b$  der Körper und des Himmels durch 1,081 geteilt werden, wodurch aber die gleichförmige Abstufung nach 0,1 aufgehoben würde.

Es sei noch bemerkt, dafs wir die Tuschtöne nicht gleichförmig über die gebildeten Streifen nach deren mittlerer Lichtstärke aufgetragen, sondern durch Verwaschen ineinander übergeführt haben.

**209. Zusammenhang zwischen der Anzahl  $n$  der Tuschlagen, der Empfindungsstärke  $e$  und der Helligkeit  $h$ .** Wir haben zuletzt noch den Zusammenhang zwischen der Anzahl  $n$  der Tuschlagen und der Empfindungsstärke  $e$  zu ermitteln.

Nach S. 270 und 275 ist

$$h = s \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^e = (1 - m)^n.$$

Daher

$$\left. \begin{aligned} \log h &= \log s + e \log \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = n \log (1 - m) \\ \text{und} \quad n &= \frac{\log s}{\log (1 - m)} + e \frac{\log \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}{\log (1 - m)}. \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

Darin wollen wir die früher bestimmten Werte der Unveränderlichen einführen, und zwar zunächst  $\alpha = 50$  nach S. 268. Für die Empfindungsschwelle  $1 : \alpha = 1 : 50$  ist der Schwellenwert  $s$  nicht gemessen. Da aber (S. 270) für  $\alpha = 6,96$ ,  $1 : \alpha = 0,1437$ , das  $s = 0,0001728$ , also  $(1 : \alpha) : s = 830$  war, und andererseits für (S. 271)  $\alpha = 12,3$ ,  $1 : \alpha = 0,0811$ ,  $s = 0,0000612$ , also  $(1 : \alpha) : s = 1320$ , so könnte man daraus schliessen, dafs mit zunehmendem  $\alpha$  auch  $(1 : \alpha) : s$  zunimmt, dafs also für  $\alpha = 50$ ,  $(1 : \alpha) : s$  gröfser als 1320 sein müfste. Da aber  $\alpha$  zunimmt mit zunehmender Empfindlichkeit des Auges und bei Gewöhnung an Dunkelheit und schwächerer gesamten Beleuchtungsstärke, die beiden ersteren Zahlenreihen aber für das schwache Benzinlicht, die neue Reihe mit  $\alpha = 50$  bei dem stärkeren Stearinlicht gefunden wurde, so ist daraus zu schliessen, dafs bei den Versuchen zu der letzten Reihe die Deutlichkeit der Unterscheidbarkeit geringer angenommen und dadurch ein so grofses  $\alpha$  erzielt wurde. Daraus geht hervor, dafs wir

aus den beiden vorliegenden Messungen nur sehr ungenau auf den Wert von  $(1 : \alpha) : s$  für  $\alpha = 50$  schliessen können. Wir wollen uns daher mit dem mittleren der beiden obigen, etwa mit  $(1 : \alpha) : s = 1000$  begnügen, und für  $\alpha = 50$ ,  $s = 0,02 : 1000 = 0,00002$  annehmen.<sup>1)</sup>

Zur Aufstellung des Gesetzes, das wir suchen, könnten wir zwar den zahlenmäßigen Wert von  $s$  ganz entbehren und auch die Folgerungen für die Anzahl der notwendigen Tuschlagen würden sich zahlenmäßig nicht ändern; wir wollen aber doch der Anschaulichkeit halber jene Zahl für  $s$  einführen.

Wir hatten nun den Grundton derart bestimmt (S. 280), daß durch 8 Tuschlagen die Helligkeit  $h = 0,1$  erhalten wird; daher ist nach der Gleichung  $h = (1 - m)^n$  hier  $0,1 = (1 - m)^8$ , woraus  $m = \frac{1}{4}$  folgt. Führen wir diese Werte von  $\alpha$ ,  $s$ ,  $m$  in den obigen Gleichungen (99) ein, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \log h &= -4,699 + e \cdot 0,0086 = -n \cdot 0,125, \\ n &= 37,6 - e \cdot 0,0688. \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

Man sieht nun aus den allgemeinen Gleichungen (99) und aus diesen Zahlengleichungen (100), daß die Zunahme der Anzahl  $n$  der Tuschlagen mit der Abnahme der Empfindungsstärke  $e$  in unveränderlichem Verhältnisse steht, daß also, wenn man  $n$  in eine steigende arithmetische Reihe anordnet, die zugehörigen  $e$  eine fallende arithmetische Reihe bilden. Die Helligkeiten bilden dabei zufolge Gl. (97) und (100) eine fallende geometrische Reihe.

Nach den Gleichungen (100) ist nun die Tabelle 88 berechnet, und nach den Ergebnissen ist die Fig. 170 gezeichnet. Die Anzahlen  $n$  der Tuschlagen bilden die Abszissen. Die Abhängigkeit der Empfindungsstärke  $e$  wird durch die gerade Linie  $e$  dargestellt, woraus ersichtlich, daß zu gleichen Zunahmen von  $n$  gleiche Abnahmen von  $e$  gehören. Die Abhängigkeit der Helligkeit  $h$  von  $n$  wird durch die logarithmische Linie  $h$  dargestellt, woraus

Tab. 88.  
Fig. 170.

<sup>1)</sup> [Die hier zu Grunde zu legenden Versuche hätten streng genommen bei unveränderter Empfindlichkeit oder „Adaption“ vorgenommen werden müssen. Für das vorliegende praktische Ziel eines sachgemäßen Anlegens der Tuschlagen dürften die obigen Ableitungen aber genügen. D. H.]

ersichtlich, dafs, wenn in zwei Fällen  $n$  um dieselbe Gröfse wächst,  $h$  in demselben Verhältnisse abnimmt; so gehört zu jeder Zunahme des  $n$  um 8 eine Abnahme des  $h$  auf  $\frac{1}{10}$  seiner Gröfse.

Tabelle 88.

Zusammenhang zwischen der Anzahl  $n$  der Tuschlagen, der Empfindungsstärke  $e$  und der Helligkeit  $h$ .

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$e$	547	533	516	503	489	474	460	445	431	416
$\log h$	0	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1,000	1,125
$h$	1	0,750	0,563	0,422	0,316	0,237	0,178	0,133	0,100	0,075
$n$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$e$	402	387	372	358	343	329	314	299	285	270
$\log h$	1,250	1,375	1,500	1,625	1,750	1,875	2,000	2,125	2,250	2,375
$h$	0,056	0,042	0,032	0,024	0,018	0,013	0,0100	0,0075	0,0056	0,0042
$n$	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
$e$	256	241	227	212	198	183	169	154	140	125
$\log h$	2,500	2,625	2,750	2,875	3,000	3,125	3,250	3,375	3,500	3,625
$h$	0,0032	0,0024	0,0018	0,0013	0,0010	0,0007	0,0006	0,0004	0,0003	0,0002
$n$	30	31	32	33	34	35	36	37	37,6	
$e$	111	96	82	67	53	38	24	9	0	
$\log h$	3,750	3,875	4,000	4,125	4,250	4,375	4,500	4,625	4,700	
$h$	0,0002	0,0001	0,0001	0,00007	0,00006	0,00004	0,00003	0,00002	0,00002	

Fig. 171.

In Fig. 171 ist eine Stufenfolge von Tönen mit der gleichförmigen Abstufung um eine Tuschlage ausgeführt und man bemerkt, dafs auch die Abstufung nach Empfindungsstärken gleichförmig erscheint. Nur bei einer grofsen Anzahl  $n$  von Lagen wird der Empfindungsunterschied merklich kleiner. Bei sehr grofsen Werten von  $n$  nähert er sich der Grenze Null. Ganz anders ist es in Fig. 168 bei gleichförmiger Abstufung der Helligkeit  $h$ . Hier nimmt der Empfindungsunterschied zu bei abnehmendem  $h$ ; er ist z. B. auffallend grofs, zwischen  $h = 0,2$  und  $0,1$ , gering zwischen  $h$  gleich 1 und  $0,9$ , was begreiflich, da im ersten Falle das Verhältniss der  $h$  gleich 2, im zweiten nur gleich 1,1 ist.

**210. Die Hellegleichen der Kugel und des Bodens nach gleichförmiger Abstufung der Empfindungsstärken und der Anzahl der Tuschlagen.** Nach einer solchen gleichförmigen Abstufung von Empfindungsstärken oder von Tuschlagen wollen wir nun das Tuschen der Kugel ausführen für den Fall, der auf S. 258 unter 4, und in Fig. 163 und 151 behandelt wurde. Die Kugel von der Weifse  $A = 0,7$  liegt dabei auf dem Boden von der Weifse  $0,1$  auf. Es wurden dort die Lichtgleichen der Kugel und des Bodens bestimmt; die Helligkeit des Himmels im Hinter-

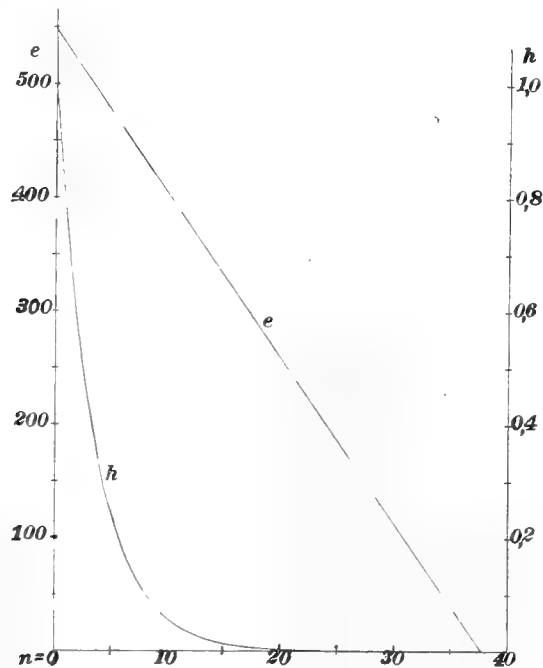


Fig. 170.

grund des Aufrisses beträgt wieder  $0,1$ . Wir führen zuerst alle Zahlen auf Helligkeiten zurück. Die Helligkeit  $h$  einer matten Oberfläche von der Beleuchtungsstärke  $b$  und der Weifse  $A$  ist aber  $h = A \cdot b$ ; also ist für die Kugel  $h = 0,7 \cdot b$ , für den Boden  $h = 0,1 \cdot b$ . Die größte vorkommende Helligkeit ist die auf der Kugel bei  $b = 0,9903$ , so daß hier  $h_0 = 0,7 \cdot 0,9903 = 0,69$ . Diese Stelle wollen wir durch das weiße Papier darstellen, also die Anzahl der Tuschlagen  $n = 0$  machen. Um nun die Tab. 88 benutzen zu können, müssen wir dieser Stelle die Helligkeit  $1$  zuschreiben und wir

erreichen dies dadurch, daß wir alle Helligkeiten  $h$  mit der soeben erhaltenen Helligkeit dieser Stelle  $h_0 = 0,7 \cdot 0,9903$  teilen. Die so erhaltenen Helligkeiten nennen wir die reduzierten  $h'$ , so daß

$$h' = \frac{h}{h_0} = \frac{h}{0,7 \cdot 0,9903}.$$

Daher ist für die Kugel

$$h' = \frac{0,7 \cdot b}{0,7 \cdot 0,9903} = \frac{b}{0,9903}, \quad b = 0,9903 \cdot h',$$

für den Boden

$$h' = \frac{0,1 \cdot b}{0,7 \cdot 0,9903} = \frac{b}{7 \cdot 0,9903}, \quad b = 7 \cdot 0,9903 \cdot h',$$

für den Himmel

$$h' = \frac{h}{0,7 \cdot 0,9903} = \frac{0,1}{0,7 \cdot 0,9903} = 0,144.$$

Diese reduzierten Helligkeiten  $h'$  setzen wir nun an die Stelle der  $h$  in Tab. 88, und können daraus die nötige Anzahl  $n$  der Tuschlagen ermitteln. So gehört für den Himmel zu  $h' = 0,144$ , wie eine Einschaltung zeigt,  $n = 6,755$ , d. h. den Ton des Himmels soll man durch 6,755-maliges Auflegen des Grundtones erhalten. Dies würde aber nicht den vollen für diese Stelle des Himmels mit  $h = 0,1$  gewählten Ton liefern, wenn man aus diesem den Grundton durch zehnfaches Verdünnen oder mit  $v = 10$  herstellen würde, sondern es wären in diesem Falle  $t = 8$  Lagen notwendig. Nach Gl. 98 muß  $V$  so gewählt werden, daß die Anzahl der zu seiner Erreichung notwendigen Lagen  $T = 6,755$  wird, es wird daher

$$\frac{6,755}{V} = \frac{8}{10}, \quad V = 8,44.$$

Es darf also der für jene Stelle des Himmels gewählte Ton nur auf das 8,44fache verdünnt werden (durch Zusatz der 7,44fachen Wassermenge), um den Grundton zu bilden.

Nun bestimmt man für Kugel und Boden die  $b$ , welche zu den ganzzahligen  $n$  gehören, indem man aus Tab. 88 die zu diesen  $n$  gehörigen  $h$  entnimmt, diese  $h$  als die reduzierten Helligkeiten  $h'$  in die obigen Formeln einsetzt und dadurch die  $b$  erhält.

So ist z. B. nach der Tab. für  $n = 9$ ,  $h = 0,075 = h'$ ; daher für die Kugel  $b = 0,9903 \cdot h' = 0,074$ , und für den Boden  $b = 7 \cdot 0,9903 \cdot h' = 0,518$ . Man erhält danach folgende Werte:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$b$ der Kugel	0,990	743	557	418	313	235	176	132	099	074	055
$b$ des Bodens	—	—	—	—	—	—	—	—	693	518	385
$n$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$b$ der Kugel	0,042	032	024	018	013	0099	0074	0055	0042	0032	0024
$b$ des Bodens	0,294	224	168	126	091	0693	0518	0385	0294	0224	0168

Um nun die Hellegleichen der Kugel, abgestuft nach Tuschlagen  $n$ , zu erhalten, schaltet man zwischen die in Fig. 163 gezeichneten Licht-

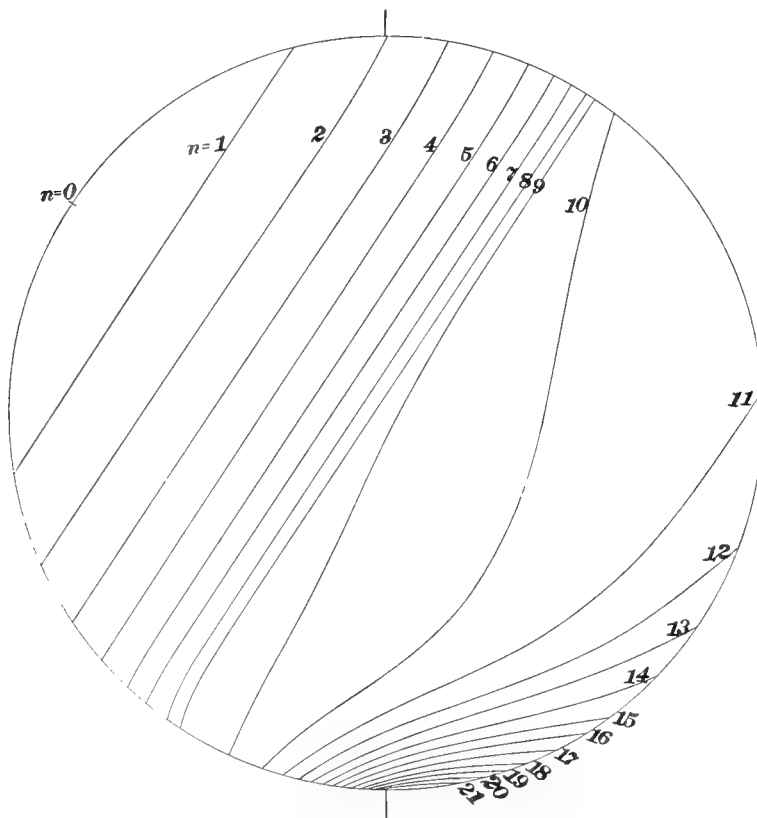


Fig. 172.

Hellegleichen der Kugel ( $A = 0,7$ ), beleuchtet durch Sonne, Atmosphäre und den Boden ( $A = 0,1$ ), abgestuft nach Tuschlagen  $n$ .

gleichen der Kugel die Lichtgleichen  $b$  ein, welche zu den Zahlen  $n$  der Kugel gehören, also zu  $n = 0$ , die  $b = 0,990$  (der hellste Punkt), zu  $n = 1$  die  $b = 0,743$  usw., und bezeichnet diese mit  $n = 0$ ,  $n = 1$  usw. Es sind dies dann die Hellegleichen der Kugel, in gleichen Abstufungen der Empfindungsstärken und der Tuschlagen, reduziert auf die Helligkeit 1 an der hellsten Stelle, deren wirkliche Helligkeit  $= h_0 = 0,69$  ist. Die Ergebnisse

Fig. 172. sind in Fig. 172 eingetragen. Diese Einschaltung kann unmittelbar in Fig. 163

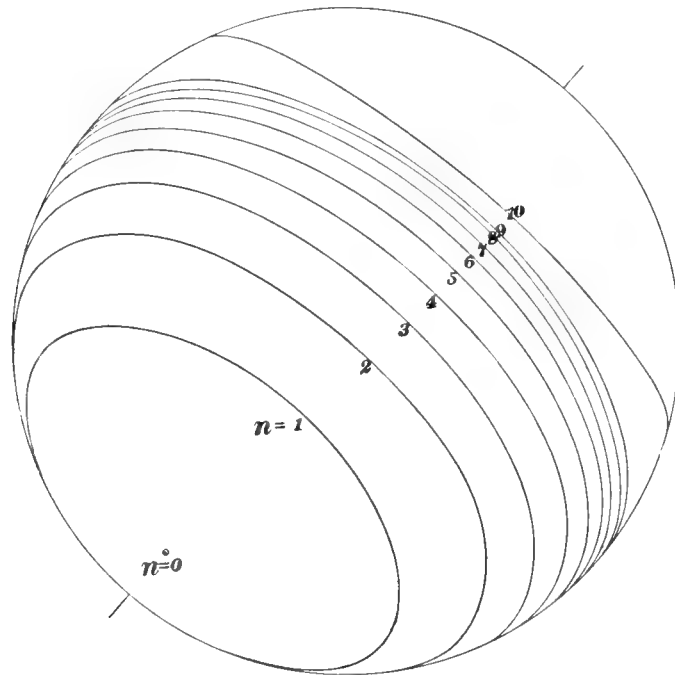


Fig. 173.

Hellegleichen der Kugel ( $A = 0,7$ ), beleuchtet durch Sonne, Atmosphäre und Boden ( $A = 0,1$ ), abgestuft nach Tuschlagen  $n$ . Grundriss.

ausgeführt werden, wenn die Lichtgleichen, zwischen denen eingeschaltet werden soll, nahe zusammenstehen und keine sehr verschiedenen Gestalten haben, wie die 0,743 zwischen 0,8 und 0,7. Andere Linien, wie  $n = 10$  mit  $b = 0,055$  zwischen 0,1 und 0,05 lassen sich in Fig. 163 nicht gut einschalten, weil diese zu weit von einander entfernt sind. Man benutzt hier zweckmäfsig die Figuren 135 und 161, durch deren Zusammensetzung mittels Pauspapiers auch die Fig. 163 hergestellt wurde. Aus Fig. 172



werden dann nach dem auf S. 260 angegebenen Verfahren der Grundrifs Fig. 173. und Aufrifs für die gewählten Stellungen der Projektionsebenen abgeleitet. Fig. 174. — Ganz entsprechend werden dann die Hellegleichen des Bodens in Fig. 175 Fig. 175. durch Einschaltung in der Fig. 151 erhalten, z. B. die Kurve  $n = 9$  mit

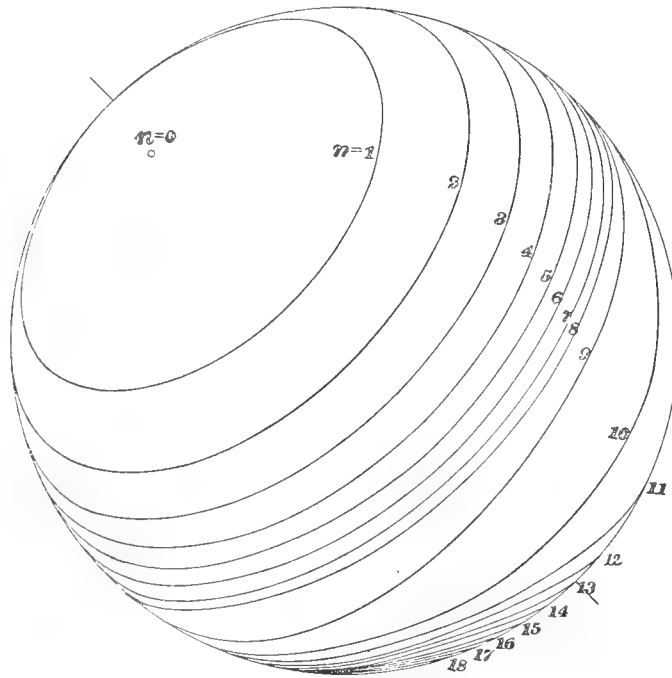


Fig. 174.

Hellegleichen der Kugel ( $A = 0,7$ ), beleuchtet durch Sonne, Atmosphäre und Boden ( $A = 0,1$ ), abgestuft nach Tuschlagen  $n$ . Aufrifs.

$b = 0,518$  zwischen  $b = 0,55$  und  $0,50$  der Fig. 151. Nach diesen Figuren kann nun das Tuschen durch vielfaches Auftragen des Grundtones und dabei durch Vergleichen mit der Tonreihe (Fig. 171) vorgenommen werden, und so ist mit Verwaschen der Töne die Fig. 176 hergestellt.

Fig. 176.

**211. Über die Herstellung der getonten Figuren.<sup>1)</sup>** Die Herstellung der getonten Figuren zerfiel in zwei Teile: die Herstellung von Mustern und die Wiedergabe dieser Muster im Druck.

<sup>1)</sup> [Von W. Möbius.]

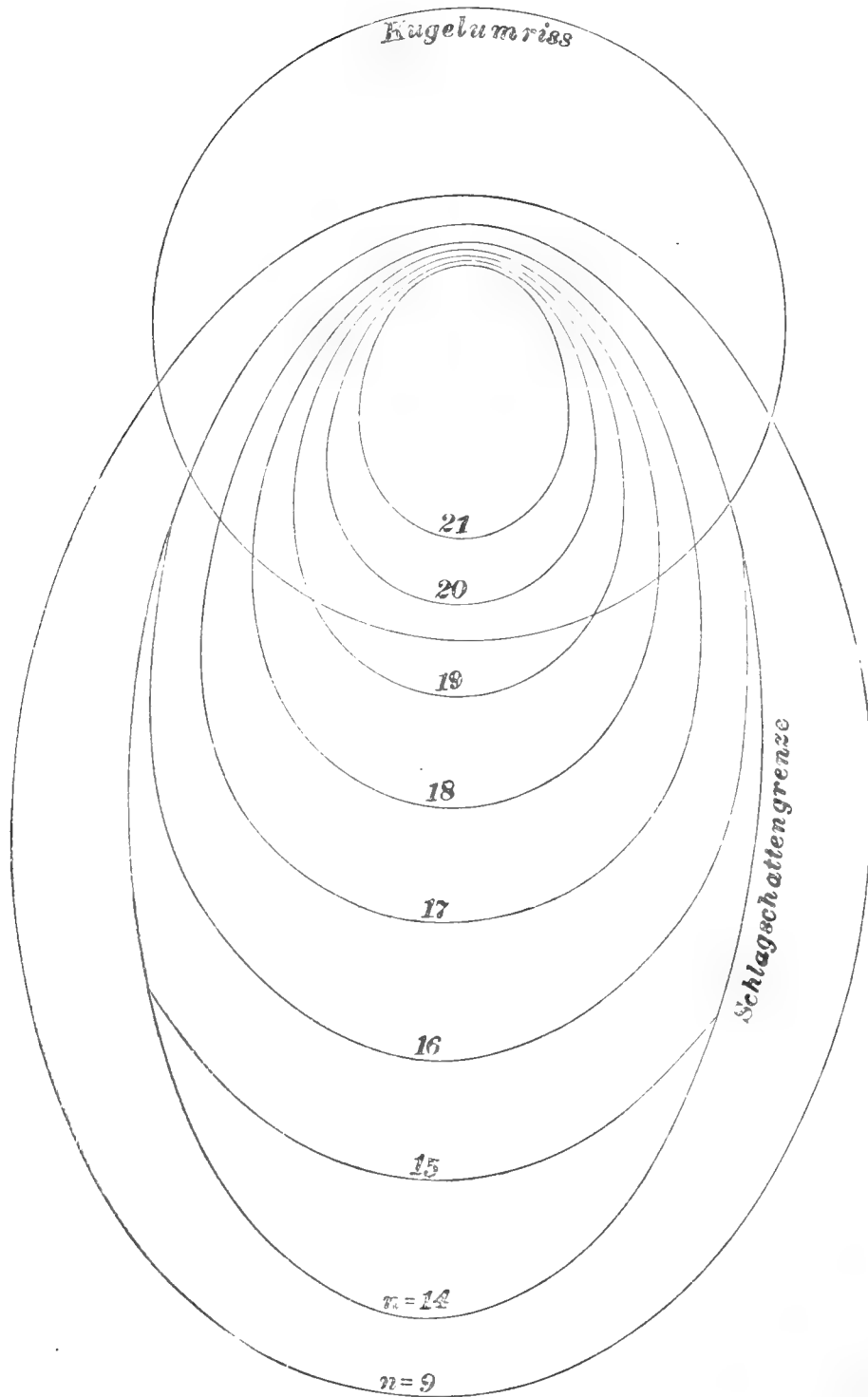


Fig. 175.

Hellegleichen des Bodens ( $A = 0,1$ ), beleuchtet durch Sonne, Atmosphäre und Kugel ( $A = 0,7$ ), abgestuft nach Tuschlagen  $n$ .

Bei Herstellung der Muster wurde soweit als möglich nach den im Texte auf S. 280 ff. und 289 gegebenen Anweisungen verfahren. Ganz war dies aber nicht möglich wegen der großen Schwierigkeiten, mit welchen die Herstellung einer größeren ganz gleichmäßig gefärbten Fläche durch Auftragen von Tuschlagen verbunden ist.

U. a. ist auf S. 282 und 289 gesagt, daß die Tuschtöne benachbarter, zwischen je zwei Lichtgleichen liegenden Flächenstreifen durch Verwaschen ineinander übergeführt werden sollten. Das liefs sich aber in dieser Weise aus maltechnischen Gründen nicht durchführen, wenn man überhaupt eine, der Tonreihe (Taf. 2) einigermaßen entsprechende Färbung der Flächenstreifen erreichen wollte. Die Figuren 169 a und 169 b (Taf. 3 u. 4) wurden daher ohne solches Verwaschen hergestellt. Bei den Figuren 176 a und 176 b (Taf. 5 u. 6) dagegen wurden in den helleren Gebieten, wo die Abstufung um eine ganze Tuschlage große Empfindungsunterschiede hervorrufen würde, noch weitere Lichtgleichen eingeschaltet und so die Helligkeit nach Bruchteilen von Tuschlagen abgestuft. Das dürfte dem Sinne des Textes, der ein Verwaschen der Übergänge zwischen den einzelnen Flächenstreifen fordert, entsprechen. Hätte man bei den Figuren 169 a und 169 b in gleicher Weise verfahren wollen, so würden sie von den Figuren 176 a und 176 b im Grunde nicht mehr verschieden sein, weil ja bei weiterer Vermehrung der Anzahl der Flächenstreifen beide Verfahren, die Abstufung der Helligkeit nach gleichen Helligkeitsstufen und nach Tuschlagen, derselben Grenze zustreben, nämlich dem stetigen Übergange von der hellsten bis zur dunkelsten Stelle.

Die Wiedergabe dieser Muster im Druck geschah nach dem Autotypieverfahren. Die Clichés wurden von der Firma Dr. Trenkler & Co. in Leipzig hergestellt. Hätte man dazu die Muster unmittelbar verwenden wollen, so wäre der Druck sehr wenig schön ausgefallen, da schon die Muster keine ganz gleichmäßige Helligkeit der einzelnen Flächenstreifen aufwiesen und beim Photographieren alle Unregelmäßigkeiten noch stärker hervortraten. Es wurden daher nach dem Spritzverfahren Kopieen der Muster hergestellt, die viel gleichmäßiger als diese ausfielen, und erst diese Kopieen wurden zur Herstellung der Clichés verwandt. Bei den Kopieen der Figuren 176 a und 176 b wurde der Übergang von der hellsten bis zur

dunkelsten Stelle stetig gemacht, bei Fig. 169 a und 169 b aber nicht, aus dem oben schon angegebenen Grunde.

Bei diesem verwickelten Verfahren mußte natürlich auf eine völlig genaue Wiedergabe aller Helligkeitsstufen gemäß der Tonreihe verzichtet werden. Es wurde vielmehr von einem Vergleichen mit der Tonreihe ganz abgesehen, und nur die Helligkeitsunterschiede der einzelnen Teile jeder Kopie wurden mit den entsprechenden des Musters nach Augenmaß in möglichst gute Übereinstimmung gebracht; im übrigen aber wurde eine gute Plastizität der Kugel verlangt, welche den getuschten Originalen in hohem Maße zukam. Daß eine solche erreicht ist, davon kann man sich bei Betrachtung der Figur aus einiger Entfernung überzeugen.

Zum Schlusse ist noch zu bemerken, daß die Figuren 100 und 108, welche die Hellegleichen des klaren Himmels in flächentreuer Projektion für Zenitabstände der Sonne von  $54^{\circ} 44'$  und  $90^{\circ}$  darstellen, ebenfalls in Tusche angelegt und als Fig. 100 a und 108 a (Taf. 1) im Blaudruck wiedergegeben wurden. Die Figuren 100 und 108 zeigen, daß in der der Sonne gegenüberliegenden Hälfte des Himmels die Helligkeit nach dem Horizont zu wieder zunimmt. Die Zunahme ist aber verhältnismäßig so gering, daß sie bei genauer Einhaltung der richtigen Helligkeitswerte in dem getuschten Bilde kaum noch zu sehen gewesen wäre. Um den gewünschten Eindruck trotzdem hervorzurufen, wurde, schon bei der Herstellung der Muster, die Helligkeit der der Sonne abgewandten Hälfte des Himmels nach dem Horizonte hin etwas übertrieben.

*Fig. 108 a.*

*Fig. 100 a.*





Fig. 168. Tonreihe, abgestuft nach Helligkeiten h.

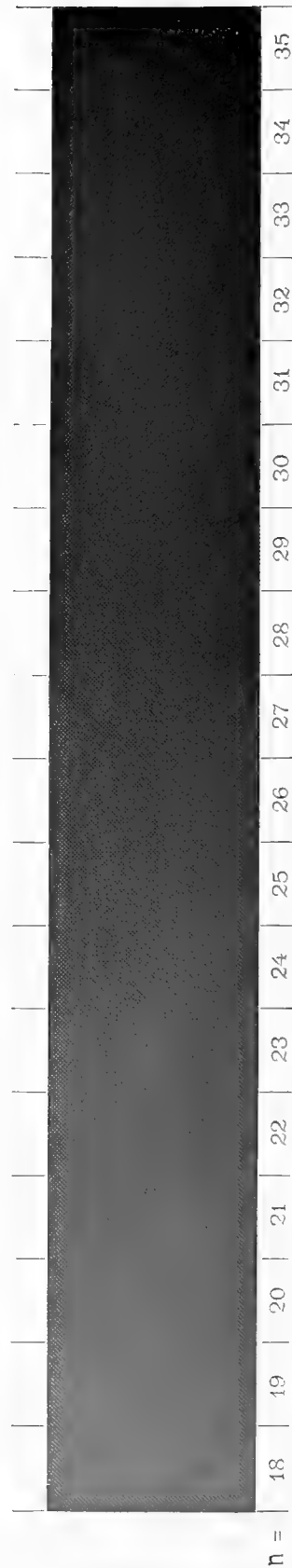
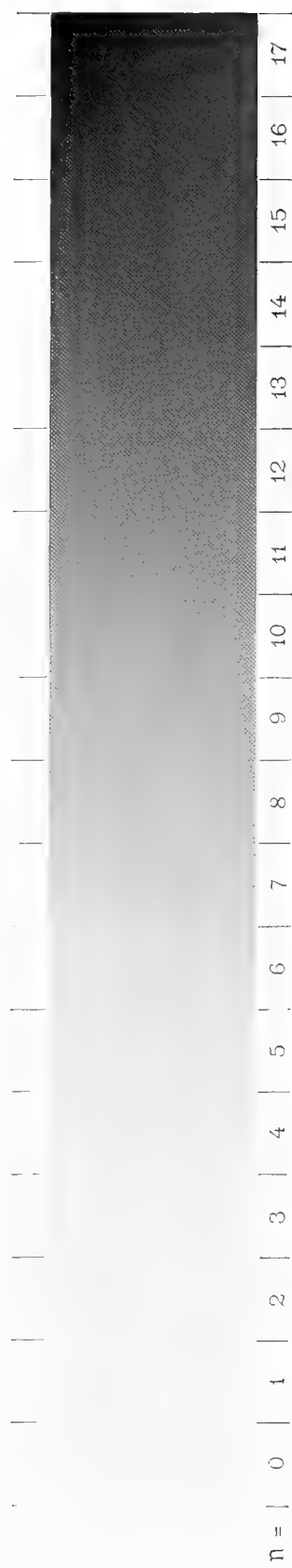


Fig. 171. Tonreihe, abgestuft nach Tuschlagen n.







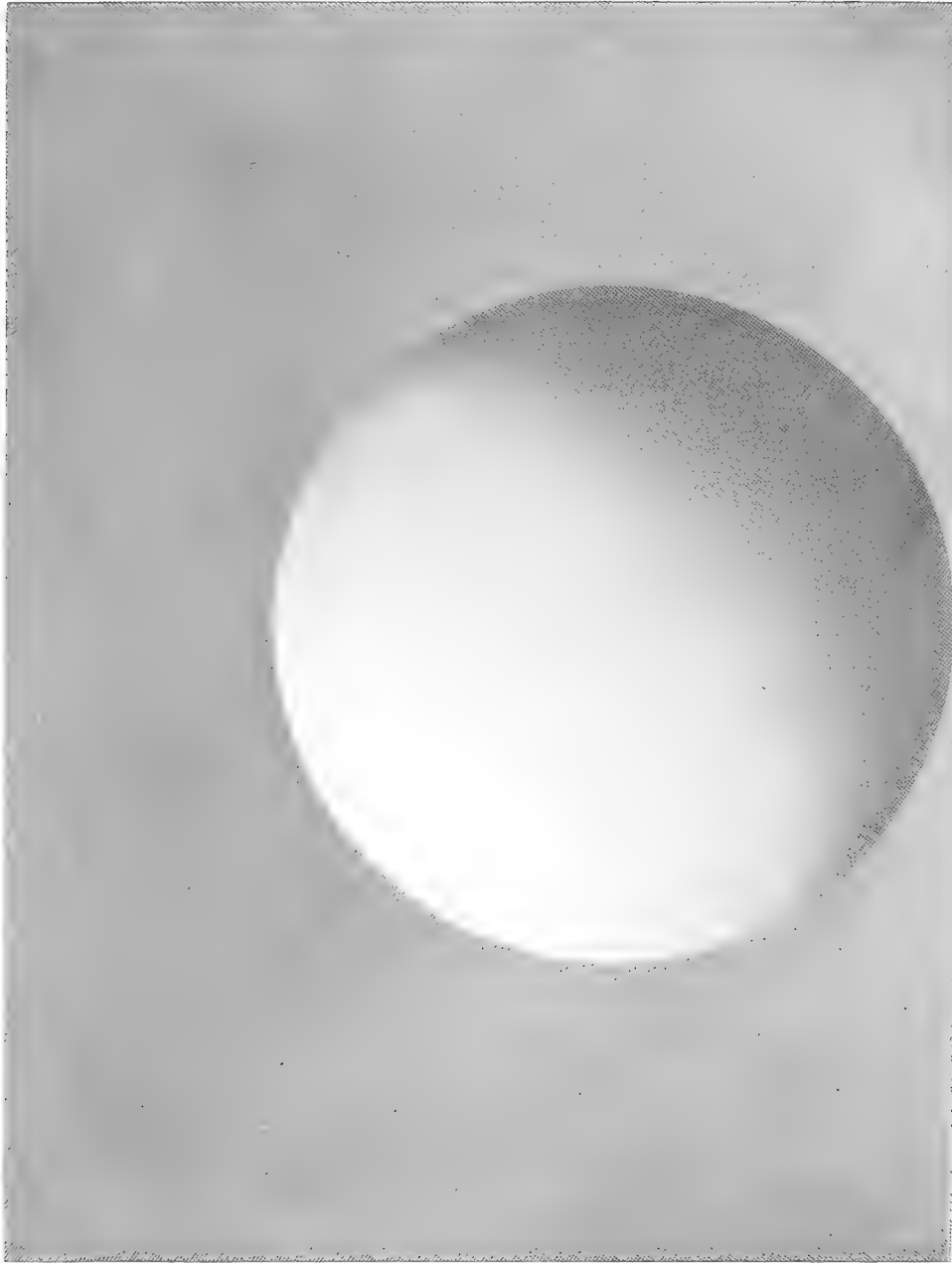
*Fig. 169a.*





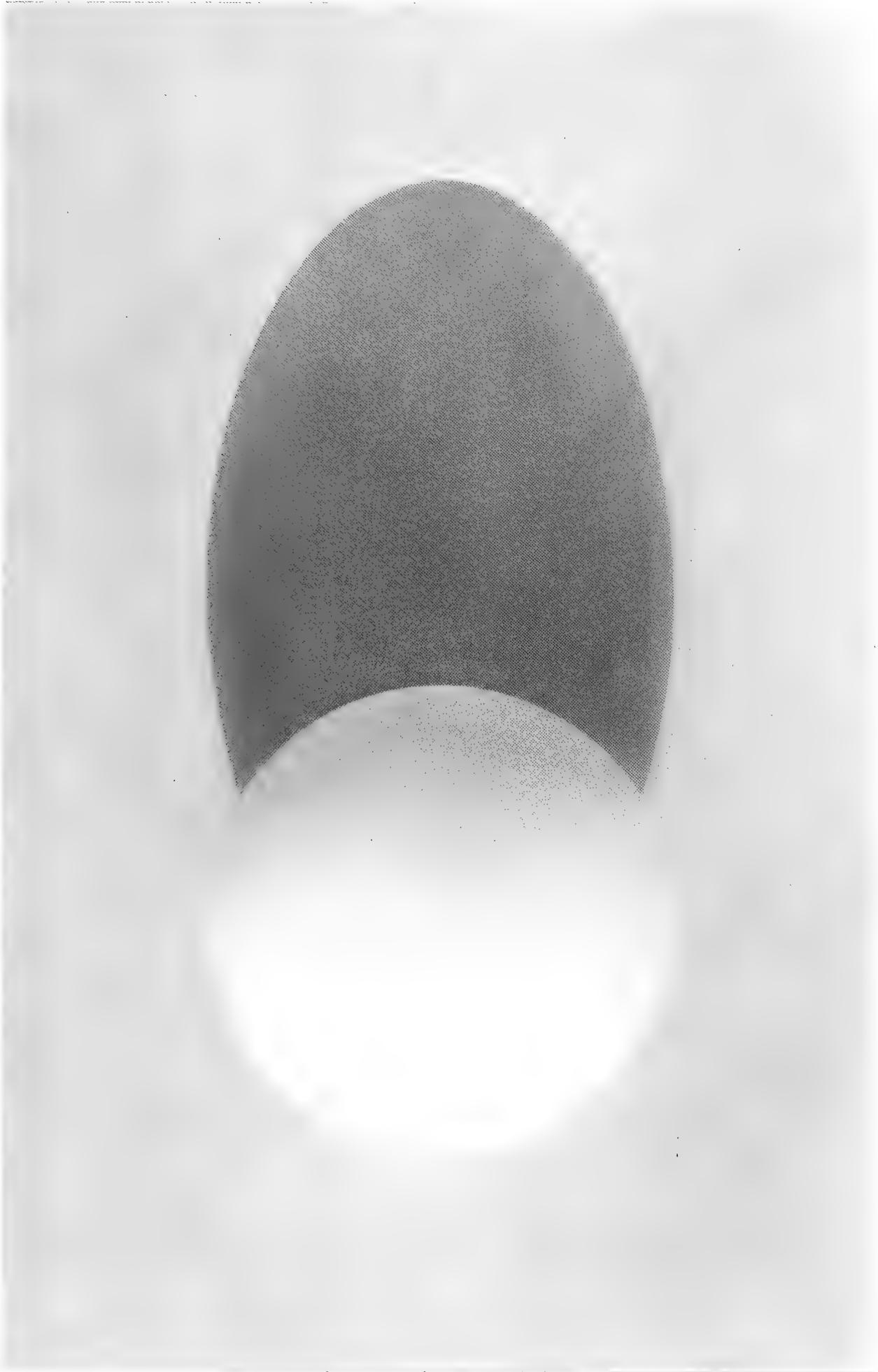
*Fig. 169b.*





*Fig. 176a.*





*Fig. 176b.*





NOVA ACTA.

Abh. der Kaiserl. Leop. Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher.

Band XCI. Nr. 3.

---

Beiträge zur Kenntnis  
der  
südamerikanischen Dipterenfauna

auf Grund der Sammelergebnisse einer Reise  
in Chile, Peru und Bolivia,

ausgeführt in den Jahren 1902—1904 von

**W. Schnuse.**

---

**HALLE.**

1909.

Druck von Ehrhardt Karras, Halle a. S.

Für die Akademie in Kommission bei Wilh. Engelmann in Leipzig.



Das der vorliegenden Empididenarbeit und den später folgen sollenden Bearbeitungen weiterer Dipterenfamilien zugrunde liegende Material setzt sich aus zwei größeren Sammlungen zusammen. Herr Otto Garlepp, der in Entomologenkreisen wohlbekannt und geschätzter Sammler, mein früherer Begleiter und Reiseführer auf meiner südamerikanischen Reise, hat in dankenswerter Weise sein von ihm zusammengebrachtes Dipterenmaterial mir zur Bearbeitung überlassen. Zwar ist seine Sammlung zum größten Teile an den gleichen Orten und zu denselben Zeiten wie die meinige entstanden und zeigt darum eine gewisse Übereinstimmung mit ihr; dennoch bildet sie eine nicht unerhebliche Erweiterung und Ergänzung der meinigen. Nach meiner Rückkehr ist Herr Garlepp bemüht gewesen, das vorhandene, schon umfangreiche Material durch weitere Sammeltätigkeit auch an auf unserer gemeinsamen Reise nicht berührten Orten und durch Zusendung seiner Ausbeute fortgesetzt zu vermehren. Es drängt mich, ihm auch an dieser Stelle dafür meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Wie für die Familie der Empididen Herr Professor M. Bezzi-Turin, so haben sich zur Bearbeitung bereit erklärt

für die Fam. der Anthomyiden Herr Prof. P. Stein-Treptow,

für die Fam. der Asiliden Herr Prof. Dr. F. Hermann-Erlangen,

für die Fam. der Notacanthen Herr Dr. K. Kertész-Budapest,

während die Bearbeitung der Syrphiden ich selbst übernommen habe.

Aus der großen Familie der acalyptraten Musciden hat die kleine Gruppe der Milichinen Herr Baurat Th. Becker-Liegnitz bereits bearbeitet (Ann. Mus. Hung. 1907)<sup>1)</sup> und die Gruppe der Pterocallinen Herr Professor F. Hendel-Wien (Deutsche Entomol. Zeitschr. 1909, Beiheft).

Den genannten Herren sage ich für ihre große Mühewaltung meinen herzlichsten Dank.

Wenngleich das zur Verfügung stehende Material als beträchtlich umfangreich bezeichnet werden kann, so bin ich weit entfernt, es als erschöpfend zu betrachten. Dazu ist das besammelte Gebiet zu ausgedehnt

---

1) Die Gruppe der Chloropiden ist gegenwärtig in Bearbeitung.

(reicht es doch von der Magellanstrafse im Süden bis zur Mündung des Pachitea — etwa 9° s. Br. — nach Norden, und in vertikaler Ausdehnung von der Meeresküste bis über 5000 m Erhebung in den Kordilleren), und die Sammelstellen sind über das weite Gebiet nur verhältnismäßig spärlich verstreut. An einzelnen Orten konnte nur kurze Zeit, wenig Tage, ja nur Stunden, gesammelt werden, während an anderen Orten die Sammelzeit sich auf Wochen und Monate erstreckte.

In der folgenden Zusammenstellung der Fundorte beruhen die Höhenangaben in den Fällen, wo eine gemessene Höhe nicht zu ermitteln war, auf vergleichender Schätzung.

Chile.	Peru.	Bolivia.
Magellan-Strafse, } Seeküste.	Mollendo, Seeküste bis 100 m.	Titicaca-See, } 3850—4500 m.
Punta Arenas, }	Arequipa, 2300—2500 m.	Guaqui, }
Corral, desgl.	Titicaca-See, 3850—4500 m.	La Paz, 3700 m.
Coronel, desgl.	Juliaca, 4000 m.	Sorata, 2300 m.
Concepcion, 150 m.	Sicuani, 3500 m.	Kordillere, 4000—5000 m.
Talcahuano, Seeküste.	Calca, 2900 m.	Mapiri, }
Valparaiso, desgl. und geringe Erhebung.	Larestal, von 4000—800 m.	Bellavista, }
Quillota 1000 m.	Rosalina, } 700 m.	San Carlos, 800—1200 m.
Santiago, 2200 m.	Urubambafl., }	Sarampioni, 700 m.
Coquimbo, Seeküste.	Umahuankiali, 500 m.	San Antonio 1000 m.
Caldera, desgl.	Meshagua, 350 m.	Chimate, 650 m.
Taltal, desgl.	Unini, 300 m.	San Ernesto, 800 m.
Antofagasta, desgl.	Ucayalifl., 300 m.	Lorenzopata 2000—2500 m.
Iquique, desgl.	Pachiteamündung, 150 m.	
Arica, desgl.	Puerto Bermudes, } 300 m.	
Tacna, 600 m.	Pichisfl., }	
Palca, 3000—3500 m.	Puerto Yessup, } 250 m.	
	Pichisfl., }	
	Pichisweg, 300—700 m.	
	Chanchamayo, } 800 m.	
	La Merced, }	
	Tarma, 3000 m.	
	Oroya 3700—4000 m.	
	Lima-Barranca, Seeküste.	
	Cuzco, 3500 m.	
	Urubamba, 2800 m.	
	Ollantaytambo 2700 m.	

Weißer Hirsch b. Dresden, im Oktober 1909.

Wilhelm Schnuse.

# Fam. Empididae.

Bearbeitet von

Professor **M. Bezzi-Turin.**

---

Mit 1 Tafel.

---

Eingegangen bei der Akademie am 14. September 1908.

---



Die reiche Sammlung von Empididen, welche Herr W. Schnuse aus Südamerika zusammengebracht hat, bereichert unsere Kenntnis dieser Familie mit vielen interessanten Neuigkeiten und einigen wichtigen Tatsachen. Recht bemerklich ist das Auftreten von einer reichen Gebirgsfauna in den Kordilleren, welche nicht sehr verschieden von derjenigen unserer europäischen Alpen ist, besonders durch die sehr vielen *Rhamphomyia*-Arten. Die Eigentümlichkeit der Fauna ist in den vielen *Hilara*-ähnlichen Formen zu finden; Herr W. Schnuse hat aber auch echte *Hilara*-Arten in den Gebirgen entdeckt. Der Sammlung des Herrn W. Schnuse habe ich auch einige Arten aus Chile beigelegt, welche mir von Herrn Professor Dr. Hermann gegeben worden sind. Beiden genannten Herren sage ich meinen besten Dank.

Die bis jetzt bekannten südamerikanischen Empididen-Gattungen, mit Einschluss der hier als neu beschriebenen, sind mit Hilfe folgender Tabelle zu unterscheiden:

- |   |   |
|---|---|
| 1. Vorderhüften sehr verlängert, so lang als die verdickten, unten stacheligen Schenkel | 2.                                      |
| — Vorderhüften immer kürzer als die gewöhnlich nicht verdickten Schenkel                | 3.                                      |
| 2. Dritte Längsader einfach   | <i>Chelipoda</i> Macq.                  |
| — Dritte Längsader gegabelt   | <i>Hemerodromia</i> Meig. <sup>1)</sup> |

- 
- <sup>1)</sup> A. Anal- und Diskoidalzelle offen *Microdromia* Big.  
 — Analzelle vollständig B.  
 B. Zweite Hinterrandzelle gestielt; Diskoidalzelle vollständig *Hemerodromia* s. str.  
 — Zweite Hinterrandzelle nicht gestielt C.  
 C. Diskoidalzelle mit der zweiten Basalzelle verschmolzen *Neoplasta* Coquill.  
 — Diskoidalzelle von der zweiten Basalzelle getrennt *Cladodromia* Bezzi.

3. Diskoidalzelle fehlend 4.  
 — Diskoidalzelle vorhanden 10.  
 4. Dritte Längsader gegabelt \**Ceratomerus* Phil.<sup>1)</sup>  
 — Dritte Längsader einfach 5.  
 5. Analzelle mehr oder weniger deutlich 6.  
 — Analzelle gänzlich fehlend 7.  
 6. Mittelschenkel einfach; Analzelle überall vollständig und kaum kürzer  
 als die zweite Basalzelle *Bicellaria* Macq.  
 — Mittelschenkel verdickt; Analzelle unten unvollständig und viel kürzer  
 als die zweite Basalzelle *Tachydromia* Meig.  
 7. Fühlerborste etwas rückenständig \**Phoneutisea* Loew.  
 — Fühlerborste deutlich endständig 8.  
 8. Analquerader vorhanden *Tachypeza* Meig.<sup>2)</sup>  
 — Analquerader ganz fehlend 9.  
 9. Vorderschenkel verdickt; Flügel gewöhnlich mit dunkeln Binden  
*Tachista* Loew.  
 — Vorderschenkel in der Regel nicht verdickt; Flügel nicht gebändert  
*Drapetis* Meig.  
 10. Analzelle länger als die davorliegende zweite Basalzelle; wenn gleichlang  
 oder etwas kürzer, ist der obere Apikalwinkel derselben immer stumpf 11.  
 — Analzelle kürzer als die zweite Basalzelle und ihr oberer Vorderwinkel  
 spitz 19.  
 11. Dritte Flügellängsader gegabelt 12.  
 — Dritte Flügellängsader einfach 16.  
 12. Flügellappen nicht vortretend; Rückenschild wenig gewölbt 13.  
 — Flügellappen entwickelt; Rückenschild buckelig gewölbt 14.  
 13. Rüssel kurz; zweite Basalzelle am Grunde viel kürzer als die erste,  
 d. h. mehr von der Flügelwurzel entfernt *Clinocera* Meig.  
 — Rüssel etwas verlängert, nach hinten gerichtet; zweite Basalzelle am  
 Grunde nicht verkürzt *Dipsomyia* nov. gen.

<sup>1)</sup> Die mir nur nach den Beschreibungen bekannten Gattungen sind mit einem \* bezeichnet.

<sup>2)</sup> Diese Gattung ist bis jetzt in Südamerika nicht beobachtet worden. — *Schwarzi* Coquill. ist eine *Tachista*.



14. Drittes Fühlerglied in einen endständigen Griffel allmählich verschmälert; zweite Flügellängsader vor ihrem Ende rechtwinklig gekniet  
*\*Homalocnemis* Phil.
- Drittes Fühlerglied mit einer endständigen dünnen Borste; zweite Flügellängsader am Ende nicht gekniet 15.
15. Vorderast der dritten Längsader in die Costa einmündend  
*Brachystoma* Meig.
- Vorderast der dritten Längsader mit der zweiten Längsader verbunden  
*Blepharoprocta* Loew.
16. Dritte Längsader bei der Flügelwurzel entspringend *Syneches* Walk.
- Dritte Längsader bei der Flügelmitte entspringend 17.
17. Drittes Fühlerglied sehr verbreitert und oben abgerundet  
*Cerathybos* nov. gen.
- Drittes Fühlerglied von der gewöhnlichen kegelförmigen Gestalt 18.
18. Hinterschenkel außerordentlich verdickt und unten gezähnt  
*Lactistomyia* Mel.
- Hinterschenkel minder verdickt und unten stachelig *Hybos* Meig.
19. Drittes Fühlerglied mit einer langen Endborste; Rüssel immer kurz und Metapleuren immer nackt; Rückenschild bucklig gewölbt und glänzend; dritte Längsader einfach 20.
- Drittes Fühlerglied mit kurzem Endgriffel; Rückenschild wenig gewölbt 23.
20. Drittes Fühlerglied kurz eiförmig, mit scheinbar rückenständiger Endborste  
*Ocydromia* Meig.
- Drittes Fühlerglied verlängert kegelförmig, mit genau endständiger Borste 21.
21. Hinterschenkel stark verdickt *\*Scelolabes* Phil.
- Hinterschenkel nicht verdickt 22.
22. Fühlerborste dünn, nackt; Analquerader vollständig *Leptopeza* Macq.
- Fühlerborste dick, kurz behaart; Analquerader nur oben vorhanden  
*Hoplopeza* nov. gen.
23. Metapleuren nackt 24.
- Metapleuren beborstet oder behaart 32.
24. Dritte Längsader einfach 25.
- Dritte Längsader gegabelt 26.

25. Ursprungsstelle der dritten Längsader nahe an die Wurzelquerader gerückt, zweite Längsader bedeutend lang; Rüssel kurz, selten etwas vorstehend *Microphorus* Macq.
- Ursprungsstelle der dritten Längsader von der Wurzelquerader entfernt, die zweite Längsader etwas kürzer; Rüssel vorstehend, so lang als der Kopf *Atrichopleura* nov. gen.
26. Rüssel ziemlich dick, horizontal abstehend; Fühlerendgriffel dick und kurz *Iteaphila* Zett. († *Sphicosa* Phil.)
- Rüssel senkrecht; Fühlergriffel mehr verlängert 27.
27. Vorderast der ersten Längsader in die Costa einmündend *Hilara* Meig.
- Hilfsader vor der Costa gebrochen, diese nicht berührend 28.
28. Erste Flügellängsader der ganzen Länge nach dicht behaart; Rüssel so lang wie der Kopf *Phleboctena* nov. gen.<sup>1)</sup>
- Erste Flügellängsader ganz nackt 29.
29. Augen bei dem Männchen breit getrennt 30.
- Augen bei dem Männchen zusammenstosend 31.
30. Hinterschenkel einfach und so lang wie die entsprechenden Schienen *Hilarempis* Bezzi.
- Hinterschenkel verdickt und bedeutend länger als die entsprechenden Schienen *Haplomera* Macq.<sup>2)</sup>
31. Fühlergriffel kürzer als die Fühler; Rüssel so lang wie der Kopf *Amictoides* nov. gen.
- Fühlergriffel länger als die Fühler; Rüssel ganz kurz, nicht vorstehend *Apalocnemis* Phil.
32. Dritte Längsader einfach *Rhamphomyia* Meig.
- Dritte Längsader gegabelt 33.
33. Erstes Fühlerglied kurz; Rückenschild in der Mitte beborstet; metallische Färbung nicht vorhanden *Empis* L.<sup>3)</sup>
- Erstes Fühlerglied verlängert; Rückenschild ziemlich kahl; Körper metallisch gefärbt *Lamprempis* Wheel. et Mel.

1) Die Gattungen *\*Hesperempis* und *\*Torens*, Melander, sind durch die gänzlich fehlenden Thoraxborsten zu unterscheiden.

2) Ob die Augen beim Männchen getrennt oder zusammenstosend sind, ist noch zweifelhaft.

3) Die Gattung *\*Deuteragonista* Philippi scheint nur durch den dreigliedrigen Fühlergriffel verschieden.

### 1. *Cerathybos* nov. gen.

Notis omnibus corporis pedum alorumque cum gen. *Hybos* convenit, differt antennarum articulo tertio maxime dilatato, semicirculari; tibiis anticis intus prope basin dente valido praeditis: proboscide perpendiculari, immo retro inclinati.

Diese neue Gattung hat ganz das Aussehen eines gewöhnlichen *Hybos*, mit kleinem, gestieltem Kopfe und kurzen ziemlich breiten Flügeln; das verbreiterte dritte Fühlerglied, die gezähnten Vorderschienen und die Stellung des Rüssels unterscheidet sie sogleich von allen andern Hybotinen. Die Stellung des Rüssels ist leider eine für diese Gruppe so ungewöhnliche, daß ich zweifle, daß dieselbe natürlich sein könne, vielmehr nur durch einen Zufall verursacht ist.

Die Augen stoßen über und unter den Fühlern eng zusammen; das dritte Fühlerglied hat ganz die Gestalt eines Halbkreises; der Thoraxrücken ist ziemlich gewölbt und hat nur an den Seiten Borsten; das Schildehen zeigt an dem Hinterrande viele Borsten; die Hinterschenkel sind wie gewöhnlich verdickt und unten mit vielen starken Borsten bewehrt, welche aber nicht über Beulen stehen. Der Ursprung der dritten Längsader befindet sich nahe der Flügelmitte; die vierte Längsader ist in ihrem letzten Teile nach oben gerichtet, so daß die erste Hinterrandzelle am Ende etwas verschmälert ist.

#### 1. *Cerathybos Schnusei* n. sp. ♀ (Tab. Fig. 1).

Niger, nitidissimus, thoracis dorso cyaneo-virescenti, antennis halteribusque nigris, proboscide tarsi femorumque posticorum medietate apicali luteis, alis dilute fuscis, margine antico obscuriore.

Long. corp. mm  $5\frac{1}{2}$ , alar. mm  $4\frac{1}{2}$ .

Ein einziges Exemplar aus Peru, Unini, Ucayalifluß, 31. X. 03, 300 m.

Der Kopf ist sehr klein und deutlich gestielt, fast gänzlich von den Augen gebildet; diese sind rund, lang zusammenstoßend, mit großen Feldern, die oberen etwas größer als die unteren; Taster klein, schwarz; Rüssel ziemlich groß, so lang als der Kopf; Hinterkopf schwarz, mit dunkelgrauem

Tomente und längeren schwarzen Haaren oben und am Rande; Ocellenhöcker ziemlich klein; drittes Fühlerglied oben am Ende deutlich kurz behaart und mit einer feinen, langen Endborste. Thoraxrücken stark glänzend, mit deutlichem Metallschimmer, mit kurzen dunkeln Haaren und schwarzen Borsten an den Seiten; Schildchen glänzend schwarz. Hinterleib walzenförmig, glänzend schwarz, mit ziemlich langen Haaren, welche am Grunde weiß, oben und am Ende dunkel sind; Legeröhre mit schwarzen langen Lamellen. Beine ziemlich haarig, aber ohne längere Borsten; Hüften und Schienen schwarz glänzend; Schenkel schwarz, gegen das Ende zu gelb, besonders bei den hinteren; Tarsen ganz gelb, an der Spitze schwarz, die hinteren breiter geschwärzt; die Vorderschienen sind an der Außenseite mit kurzen dichten Haaren befranst, der kurze aber starke Zahn steht auf dem vorderen Viertel; die Mittelbeine sind schwächer als die vorderen und die Mittelschienen sind ungezähnt; die Hinterschenkel sind nicht sehr verdickt, ziemlich lang, unten mit zwei Reihen von starken schwarzen Borsten; Hinterschienen bedeutend kürzer als die Schenkel, etwas gebogen, an beiden Enden schmal gelb, an der Außenseite mit wenigen gleichweit entfernt stehenden Haaren. Flügel ziemlich verdunkelt, ohne deutlichen Randfleck; sie sind an der Basis nicht verbreitert, und die Costa ist mit kurzen Haaren dicht besetzt; die dritte Längsader ist in ihrem Verlaufe ganz gerade.

## 2. *Hybos* Meig.

Die bis jetzt bekannten neotropischen Arten dieser Gattung lassen sich nach folgender Tabelle unterscheiden.

1. Flügel mit erweiterter Randzelle	2.
— Flügel mit nicht erweiterter Randzelle	6.
2. Flügel mit gedörmelter Costa	* <i>spiniocosta</i> W. et M. <sup>1)</sup>
— Flügel mit nur behaarter Costa	3.
3. Thoraxrücken blau	4.
— Thoraxrücken schwarz	5.

<sup>1)</sup> In dieser wie in den folgenden Tabellen sind die mir in natura nicht bekannten Arten mit einem Stern bezeichnet.

4. Thoraxrücken gestriemt; Mittelschienen gelb; Flügel gleich verdunkelt;  
kleinere Art *\*integer* Walk.
- Thoraxrücken ungestriemt; Mittelschienen dunkel; Flügel mit glasheller  
Spitze; größere Art *eurypterus* n. sp.
5. Hinterleib mit kupferfarbigen Reflexen; Flügel an der Spitze glashell  
*\*dimidiatus* Walk.
- Hinterleib schwarz; Flügel an der Spitze verdunkelt *latipennis* n. sp.
6. Flügel am Grunde geschwärzt 7.
- Flügel am Grunde nicht geschwärzt 12.
7. Thoraxrücken blau 8.
- Thoraxrücken schwarz 10.
8. Flügel ohne Stigmatafleck *pilosiformis* n. s.
- Flügel mit deutlichem Stigmatafleck 9.
9. Vorderschienen schwarz *pilosus* Schin.
- Vorderschienen gelb *\*electus* Mel.
10. Beine ganz gelb 11.
- Beine gelb und schwarz *triplex* Walk.
11. Thoraxrücken erzfarbig *\*sequens* Mel.
- Thoraxrücken schwarz *\*crassipes* Fabr.
12. Flügel angeraucht *\*piceus* Wied.
- Flügel nicht angeraucht 13.
13. Thoraxrücken glänzend, ohne Toment 14.
- Thoraxrücken mit Toment bedeckt 17.
14. Beine ganz schwarz; Flügel wasserklar *hyalopterus* Bezzi.
- Beine zum Teil gelb; Flügel graulich 15.
15. Mittlere Queradern der Flügel dunkel gesäumt *\*stigmaticus* Schin.
- Mittlere Flügelqueradern nicht verdunkelt 16.
16. Beine schwarz, nur die Tarsen gelb *\*mellipes* W. et M.
- Beine mit gelben Knien und zum Teil gelben Schienen  
*neotropicus* Bezzi.
17. Schwinger weiß-gelb 18.
- Schwinger verdunkelt; Schienen zum Teil gelb *luridus* n. sp.
18. Schienen ganz schwarz *\*typicus* W. et M.
- Schienen ganz gelb *halteralis* n. sp.

2. *Hybos eurypterus* n. sp. ♂ ♀.

Cyaneus, nitidus, antennis halteribusque nigro-fuscis, pedibus nigro-cyaneis nitidissimis, geniculis posticis tarsorumque omnium basi luteis, oculis supra et infra longe connexis, antennarum articulo tertio valde elongato, proboscide brevissima fere abscondita, tibiis anticis intus prope basin dente parvo armatis, alis fuscis triente apicali dilutiori, cellula costali valde dilatata, costa prope basin dense fimbriata.

♂ femoribus posticis subtus per totam longitudinem spinis validis armatis; genitalibus magnis rotundatis exsertis, apice dentatis.

♀ femoribus posticis subtus basim versus non spinosis; terebrae lamellis terminalibus longis nigricantibus.

Long. corp. mm 5—6, alar. mm 4—5.

Zwei Exemplare aus Peru, Pachitea-Mündung, 12. XI. 03, 150 m, und Puerto Bermudes, Pichis-Fluß, 17. XII. 03, 300 m; zwei aus Bolivien, San Carlos, Mapiri, 1. I. 03, 800—1200 m, und San Ernesto, Mapiri, 28. III. 03, 800 m.

Eine schöne Art, welche nach der Färbung mit *pilosus* Schin. verwandt zu sein scheint; sie ist aber weit verschieden durch die Flügelform und -färbung, durch das verlängerte dritte Fühlerglied und den ganz kurzen, fast verborgenen Rüssel.

Kopf klein, mit schwarzen Haaren; obere Augenfelder deutlich größer als die unteren; drittes Fühlerglied linear, besonders beim Weibchen stark verlängert, mit sehr langen dünnen Apicalborsten. Thoraxrücken stark gewölbt und sehr glänzend, von dunkelblauer Farbe, mit dichten ziemlich langen, dunkeln Haaren bedeckt, welche hinten immer länger sind, und mit einigen schwarzen Borsten an den Seiten; Schultern stark vortretend. Schildchen klein, mit 8—12 Borsten am Rande. Hinterleib walzenförmig, von reinerer blauer Färbung, mit langen dunkeln Haaren; Genitalien des Männchens stark entwickelt, von kompliziertem Baue, welcher von dem der *H. triplex* weit verschieden ist; sie sind ziemlich verlängert, aus zwei halbeiförmigen Klappen bestehend, von denen die obere kürzer als die

untere ist; am Ende tragen sie einige starke Zähne, besonders die untere. Beine glänzend blauschwarz; die vier vorderen Tarsen sind gelb, mit schwarzer Spitze; an den hinteren Beinen sind die Schienen an beiden Enden gelb und die ziemlich großen Metatarsen honiggelb; die vier anderen Schienen und die entsprechenden Tarsen zeigen einige sehr lange Borsten; der Zahn der Vorderschienen ist im ersten Viertel gelegen und sehr klein, aber leicht zu beobachten, obschon viel schwächer als bei *Cerathybos Schnusei*; die Hinterschenkel sind wie gewöhnlich verdickt, mit zwei Reihen von starken Borsten, von denen einige über kleinen Beulen stehen; die Hinterschienen sind kurz, fast gerade und ziemlich stark, und zeigen oben an der Wurzel eine lange Borste. Flügel sehr breit, stark verdunkelt, mit deutlichem, verlängertem Stigmatale fleck; dritte Längsader etwas gebogen, vierte in ihrem letzten Teile gegen die dritte aufgerichtet; Costa stark gebogen, gegen die Wurzel dicht behaart.

### 3. *Hybos latipennis* n. sp. ♂ ♀.

Niger, nitidus, antennis halteribus pedibusque concoloribus, geniculis posticis tarsorumque omnium basi luteis, thoracis dorso longe piloso, oculis supra et infra cohaerentibus, antennarum articulo tertio brevi, tibiis anticis basi intus dente parvo armatis, proboscide brevi, alis fuscis mediate apicali dilutiori, cellula costali valde dilatata, costa breviter fimbriata.

♂ femoribus posticis brevibus subtus per totam longitudinem spinosis; genitalibus rotundalis apice dentatis.

♀ femoribus posticis elongatis apicem versus non spinosis; terebrae lamellis nigricantibus.

Long. corp. mm  $3\frac{1}{2}$ — $4\frac{1}{2}$ , alar. mm 3—4.

Vier Exemplare aus Bolivien, San Carlos, Mapiri, 5. I. 03, 800—1200 m, Sarampioni, Mapiri, 14. III. 03, 700 m, San Ernesto, Mapiri, 20.—21. III. 03, 800 m, zwei Exemplare aus Peru, Chanchamayo, 9.—15. I. 04, 800 m.

Eine mit der vorigen nahe verwandte Art, besonders durch die Gestalt der Flügel und der Genitalien, durch die Färbung der Beine usw., aber kleiner, schwarz, mit kürzeren Flügeln und längerer Behaarung auf

dem Thoraxrücken. Die Fühler sind bedeutend kürzer, mit lang eiförmigem dritten Gliede; der Rüssel ist kurz, aber etwas länger als bei der vorigen Art. Thoraxrücken stark gewölbt, mit langen weißlichen Haaren ganz bedeckt, die Haare selbst im hinteren Teile länger; Schildchen mit 6—8 aufrechten schwarzen Borsten, die zwei mittleren länger und stärker. Hinterleib mit langen weißlichen Haaren; die männlichen Genitalien sind etwas kleiner, aber von derselben Gestalt wie bei der vorigen Art. Beine wie beim vorigen gefärbt und behaart; die Hinterschenkel sind verhältnismäßig kürzer und dicker, besonders beim Männchen; auch bei dieser Art ist der hinterste Metatarsus größer und intensiver gelb gefärbt; Hinterschienen stark, leicht gebogen. Flügel wie bei *eurapterus*, der hellere Apicalteil größer; dritte und vierte Längsader in ihrem letzten Teil ziemlich parallel; Stigmatalecke wenig deutlich.

4. *Hybos pilosiformis* n. sp. ♀.

Cyaneus, nitidus, antennis halteribus pedibusque nigris, geniculis posticis tarsorumque omnium basi luteis oculis supra et infra connexis, antennarum articulo tertio brevissimo proboscide brevi, tibiis anticis intus basi non dentatis, alis hyalinis, basi late infuscatis, macula stigmatica omnino nulla, cellula costali non dilatata.

Long. corp. mm  $3\frac{1}{2}$ —4, alar. mm 3— $3\frac{1}{2}$ .

Zwei Exemplare aus Peru, Unini, Ucayalifluß, 20. X. 03, 300 m, und Chanchamayo, 15. I. 04, 800 m.

Durch den kurzen Rüssel nähert sich diese Art den beiden vorhergehenden, zeigt aber ganz schmale Flügel, kürzeres drittes Fühlerglied und nicht gezähnte Vorderschienen. Wahrscheinlich gehört diese Art zu der Gruppe von *triplex*, aber ohne Kenntnis des Männchens läßt sich das nicht entscheiden.

Kopf von gewöhnlichem Baue; drittes Fühlerglied kurz eiförmig. Thoraxrücken gewölbt, mit vorstehenden Schulterbeulen, mit weißlichen mittellangen nicht dichten Haaren; Schildchen am Hinterrande mit 4—6 Borsten, von denen die mittleren stärker sind. Hinterleib von dunklerer



Farbe, weißlich behaart; Legeröhre lang, mit schwärzlichen Endlamellen. Beine wie bei den vorhergehenden Arten gefärbt und gestaltet; die vorderen Schienen sind bisweilen etwas heller und zeigen keine Spur des Basalzahnes. Die Flügel sind schmal und lang, wasserklar, nur im Basaldrittel geschwärzt; dritte Längsader gerade, vierte im letzten Teile etwas zur dritten konvergierend.

5. *Hybos pilosus* Schin., Novara Dipt., 202. 1. (1861); Bezzi, Annal. Mus. nat. hung., III. 425. 1. (1905).

Drei Exemplare aus Bolivien, San Carlos, Mapiri, 3. I. 03, 800—1200 m, San Ernesto, Mapiri, 20.—24. III. 03, 800 m.

Eine ziemlich veränderliche Art, welche noch nicht genau bekannt ist; die Thoraxhaare sind immer dunkler als in Schiners Beschreibung angegeben ist.

6. *Hybos triplex* Walk., List Dipt. brit. Mus., III. 486. (1849), mit den anderen Arten: *duplex*, *purpureus* und *subjectus*; Osten-Sack., Cat. Dipt. N. Amer., 2 ed., 99 et 240. (1878); Coquill., Proc. U. S. nat. Mus. XVIII. 437. (1895), XXII. 251. (1900) und Proc. ent. Soc. Wash., V. 264. [*Euhybos*] (1903) mit den Arten *purpureus* und *subjectus*; Wheel. et Mel., Biol. centr. amer., I. 373. 3. (1901) und Mel., Trans. amer. entom. Soc., XXVIII. 248. t. VII. f. 79—81. (1902) mit den Varietäten: *Bakeri*, *duplex*, *Loewi*, *purpureus*, *Smithi*, *subjectus*, *tabascensis*, *triplex* und *yucatanus*; Aldr., Cat. N. Amer. Dipt. 319. (1905).

Fünf Exemplare beider Geschlechter aus Bolivia, Sarampioni, Mapiri, 28. I. 03, 700 m und aus Peru, Meshagua, Urubambafluß, 11. X. 03, 350 m, Pachitea-Mündung, 150 m, 6. XI. 03, Puerto Bermudes, 9. XII. 03, 300 m, Chanchamayo, 15. I. 04, 800 m. Ein Männchen aus Unini, Ucayalifluß, 300 m, 20. X. 03, zeigt dünnere Hinterschenkel und etwas verschiedene Genitalien; wahrscheinlich einer eigenen Art angehörend.

Diese, wie es scheint, durch ganz Amerika verbreitete Art bedarf einer Revision. Sie ist außerordentlich veränderlich; es sind aber sicher verschiedene, noch nicht erkannte Arten darunter. Die Vorderschienen sind am Grunde innen gezähnt.

7. *Hybos neotropicus* Bezzi, Ann. Mus. nat. hung., III. 426. 3. (1905).

Ein Weibchen aus Bolivien, San Carlos, Mapiri, I. 03, 800—1200 m.

Diese Art scheint mit *mellipes* sehr nahe verwandt zu sein.

8. *Hybos halteralis* n. sp. ♀.

Niger, nitidiusculus, thoracis dorso cinereo-tomentoso setis dorso centralibus duabus validis, halteribus albicantibus, pedibus nigris tibiis tarsisque luteis, alis cinereo-hyalinis, cellula costali non dilatata, macula stigmatica elongata dilute fusca, nervis tertio et quarto apicem versus parallelis.

Long. corp. mm  $3\frac{1}{2}$ , alar. mm  $3\frac{1}{2}$ .

Ein Weibchen aus Bolivien, Kordilleren, 4—5000 m, 24. XII. 02.

Eine Art von gewöhnlichem Baue und Färbung, welche durch die weißlichen Schwinger und die ganz gelben vorderen Schienen von den ähnlichen zu unterscheiden ist; ganz eigentümlich sind die zwei starken Borsten auf dem Thoraxrücken. Augen über den Fühlern zusammenstosend, unten stark genähert; drittes Fühlerglied kurz eiförmig; Taster schwarz. Thorax mit hellen Haaren an den Seiten; die zwei starken Dorsozentralborsten stehen hinter der Mitte; Schildchen mit zwei starken Randborsten. Hinterleib schwarz, mit ziemlich langen hellen Haaren. Beine von gewöhnlicher Gestalt; der Zahn am Grunde der Vorderschienen ist wenig deutlich; Mittelschienen an der Aufsenseite mit drei langen Borsten in einer Reihe. Die vier vorderen Metatarsen zeigen einige lange Borsten; an allen Tarsen sind die Endglieder geschwärzt; die Hinterschienen sind in der Mitte verdunkelt; Hinterschenkel nicht sehr verdickt, mit starken schwarzen Borsten, welche bis zur Basis reichen. Flügel wie gewöhnlich, mit kurz bewimpertem Vorderrande.

9. *Hybos luridus* n. sp. ♂ ♀.

Niger, nitidus, thoracis dorso cinereo-tomentoso setis majoribus nullis, halteribus nigricantibus, pedibus nigris, tarsorum tibiarumque posticarum basi luteis, alis cinereo-hyalinis, cellula costali non dilatata, macula stigmatica brevi fusca, nervis tertio et quarto apicem versus parallelis.

♂ genitalibus magnis nigris nitidis forficatis apice dentatis.

♀ terebra elongata, lamellis terminalibus fuscis.

Long. corp. mm  $3\frac{1}{2}$ —4, alar. mm  $3\frac{1}{2}$ — $3\frac{3}{4}$ .

Vier Exemplare aus Bolivien, Lorenzopata, Mapiri, 2000—2500 m, 24. IV.—4. V. 03.

Eine gewöhnliche Art, welche an die nearktischen *Slossonae* Coquill. erinnert.

Augen oben verschmolzen, unten stark genähert; drittes Fühlerglied kurz eiförmig mit langer Borste. Thoraxrücken grau bestäubt, mit langen Haaren auf der Mitte und längeren Borsten am Rande; Schildchen mit zwei starken Borsten. Hinterleib glänzend schwarz, mit weißlichen Haaren. Beine glänzend schwarz, mit den gewöhnlichen längeren Haaren an den vorderen und mittleren Schienen und Metatarsen; zuweilen auch die Mittelschienen an der Wurzel schmal gelb; Zahn der Vorderschienen wenig deutlich. Genitalien des Männchens ziemlich groß, kompliziert, an die von *triplex* erinnernd. Flügel wie gewöhnlich, mit kurz bewimperter Randader.

### 3. *Lactistomyia* Melander.

Diese Gattung ist von der vorhergehenden nur durch stärkeren Körperbau, kürzere und dickere Hinterschenkel (die Hinterschienen daher verhältnismäßig weniger kurz als bei *Hybos*), welche unten stark gezähnt sind, zu unterscheiden. Körperfärbung mehr erzfarbig. Es ist wahrscheinlich, daß einige oben erwähnte *Hybos*-Arten, wie *sequens* und *piceus*, zu dieser Gattung gehören. Vielleicht auch ist diese Gruppe nur als Untergattung von *Hybos* zu betrachten, wie *Harpamerus* Brig. von *Syneches* Walk.

- |  |                        |
|--|------------------------|
| 1. Flügel mehr oder weniger verdunkelt   | 2.                     |
| — Flügel wasserklar, ohne Stigmataflecke | <i>hyalina</i> n. sp.  |
| 2. Flügel gleichmäßig verdunkelt         | * <i>insolita</i> Mel. |
| — Flügel gegen die Spitze heller         | <i>serrata</i> n. sp.  |

10. *Lactistomyia hyalina* n. sp. ♀.

Nigra, luteo-pilosa, halteribus nigricantibus, antennarum articulo tertio elongato, pedibus quatuor anterioribus obscure luteis posticis nigris nitidis, tibiis posticis extus canaliculatis, alis hyalinis, macula stigmatica nulla, nervis tertio et quarto apicem versus convergentibus.

♀ terebra elongata valde angusta.

Long. corp. mm 6, absque terebra; alar. mm  $5\frac{1}{4}$ .

Ein Exemplar aus Peru, Puerto Bermudes, Pichisflufs, 300 m, 13. XII. 03.

Eine ziemlich grofse Art, mit sehr starken Hinterbeinen. Augen oben zusammenstofsend, unten stark genähert; Fühler ganz schwarz, mit verlängertem dritten Fühlergliede, dreimal so lang als breit; Taster lang und dünn, schwarz; Rüssel lang, dunkel gelb. Rückenschild stark gewölbt, mit gelblichen kurzen Haaren ganz bedeckt, nur an den Seiten mit schwarzen Borsten; Schildchen klein, am Rande mit 10 Borsten. Hinterleib schwarz glänzend, mit ziemlich langen helleren Haaren; Legeröhre ganz schmal,  $1\frac{1}{4}$  mm lang, hell behaart. Die vier vorderen Beine sind dunkelgelb, mit schwarzen Hüften und an der Basis geschwärzten Schenkeln; die Tarsen sind stark verdunkelt; Schienen und Tarsen sind ziemlich stark, aber kurz, beborstet. Hinterbeine sehr kräftig und glänzend schwarz, nur die Spitze der Schenkel, die Knien und die Metatarsen unten rötlich; die sehr breiten Schienen sind gebogen, an der Aufsenseite mit gleichweit entfernt stehenden kurzen Haaren; Hinterschinkel stark verdickt, aber ganz gerade, oben dicht schwarz behaart, unten mit zwei Reihen starker Beulen, auf welchen die kurzen schwarzen Borsten stehen, die innere Reihe nur an der Spitze vorhanden; Hintertarsen sehr kurz. Flügel wie gewöhnlich, mit dicht und kurz bewimpertem Vorderrande.

11. *Lactistomyia serrata* n. sp. ♂ ♀.

Nigra, tomento aenescenti laeviter adspersa, luteo pilosa, halteribus nigricantibus, antennarum articulo tertio brevi, pedibus ut in praecedenti posticis tamen dilutioribus, alis

fuscis apicem versus hyalinis vel dilute fuscis, macula stigmatica fuscio-re, nervis tertio et quarto convergentibus.

♂ genitalibus magnis rotundatis, longe pilosis, lobo supero apicem versus pilis rufis incurvis penicillato.

♀ terebra angusta elongata.

Long. corp. mm  $5\frac{1}{2}$ — $6\frac{1}{2}$ , alar. mm 5—6.

Einige Exemplare beider Geschlechter aus Peru: drei typische von der Pachitea-Mündung, 150 m, 3.—20. XI. 03; ein unausgefärbtes Weibchen aus Unini, Ucayalifluß, 300 m, 20. X. 03; und ein wahrscheinlich nicht hierher gehörendes Weibchen aus Tarma, 3000 m, 29. I. 04.

Der vorigen Art sehr ähnlich. Die Augen sind sehr groß und rund, in der Mitte mit deutlicher horizontaler Naht; drittes Fühlerglied oval, nur zweimal so lang als breit. Thorax wie bei der vorigen; Schildchen mit nur zwei Randborsten, Hinterleib schwarz, nicht glänzend, mit helleren Haaren. Beine ganz wie bei der vorigen, aber heller gefärbt, die Hinter-schenkel zuweilen ganz braunrot. Flügel bei dem Männchen dunkler als bei dem Weibchen; Stigmatalelfleck länglich oval, immer deutlich.

#### 4. *Syneches* Walker.

Diese Gattung scheint in Südamerika reich vertreten zu sein. In meinem Kataloge von 1905 habe ich folgende Arten als *Hybos* angeführt, welche dagegen ganz sicher zu dieser Gattung gehören: *curvipes*, *luteus*, *quadricinctus* und *ruficollis*. Die kleineren Arten, welche einen außerordentlich hohen Thoraxrücken besitzen, wie mein *pyramidatus*, scheinen der Gattung *Parahybos* Kert. ganz nahe zu stehen; leider scheint mir, daß diese Gattung nicht haltbar sei, da die Stellung der Fühlerborste bald apical, bald subapical bei den nahe verwandten Arten ist.

- |  |                         |
|--|-------------------------|
| 1. Thoraxrücken äußerst hoch gewölbt, fast kegelförmig, hinten mit einer mittleren Furche, und immer schwarz gefärbt | 2.                      |
| — Thoraxrücken nicht kegelförmig gewölbt, hinten kaum eingedrückt, ohne mittlere Furche, und meistens gelb gefärbt   | 4.                      |
| 2. Flügel graulich   | 3.                      |
| — Flügel dunkel gelblich   | <i>obeliscus</i> n. sp. |

3. Flügel ohne Stigmatalecke; Hinterschienen gelb mit kaum angedeutetem dunklem Ringe; hintere Metatarsen gelb *pyramidatus* Bezzi.  
 — Stigmatalecke vorhanden, gelb, an der Basis dunkel; Hinterschienen mit breitem, schwarzem Ringe; hintere Metatarsen verdunkelt  
*annulipes* n. sp.
4. Hinterleib mit vier weissen Binden; sehr große Statur (9—10 mm)  
*\*quadricinctus* Fabr.<sup>1)</sup>
- Hinterleib ohne weisse Binden 5.
5. Hinterschenkel verdickt; Thoraxrücken gelb; Stigmatalecke nur am Grunde verdunkelt; 7—8 mm lang *\*curvipes* Fabr.<sup>2)</sup>
- Hinterschenkel nicht oder kaum verdickt 6.
6. Stigmatalecke doppelt; Thoraxrücken gewölbt, braun, hinten mit breiter Eindrückung; drittes Fühlerglied gelb *stigmatalis* n. sp.
- Stigmatalecke einfach; Thoraxrücken weniger gewölbt, hinten mit kaum deutlichem Eindruck 7.
7. Flügel wasserklar, mit kurzem scharf begrenztem Stigmatalecke; Thoraxrücken schwarz oder dunkel 8.
- Flügel oft verdunkelt, wenigstens gegen die Spitze, mit verlängertem, mehr oder weniger deutlichem Stigmatalecke 9.
8. Hüften gelb; Stigmatalecke viereckig. *\*quadrangularis* Wheel. et Mel.
- Hintere Hüften schwarz; Stigmatalecke die ganze Spitze der Randzelle ausfüllend, und daher halbkreisförmig *repletus* n. sp.
9. Flügel ohne Stigmatalecke; Thoraxrücken gelb, Beine honiggelb.  
*\*luteus* Wied.
- Stigmatalecke deutlich 10.
10. Thoraxrücken gelb, mit schwarzer hervortretender Zeichnung; drittes Fühlerglied beinahe weiss. *dichrous* n. sp.
- Thoraxrücken gelb oder dunkel, ohne schwarze Zeichnung; drittes Fühlerglied gelb oder verdunkelt 11.
11. Thoraxrücken verdunkelt; drittes Fühlerglied verdunkelt; letztes Beinpaar ganz schwarzbraun; größere Statur. *fuscescens* n. sp.

<sup>1)</sup> Diese Art gehört wahrscheinlich zur *Brachystoma*-Gruppe.

<sup>2)</sup> Trotz der verdickten Schenkel ist diese Art, nach der von Wiedemann gegebenen Figur, ein *Syneches*.

- Thoraxrücken gelb; drittes Fühlerglied gelb; letztes Beinpaar gelb; kleinere Statur 12.
12. Flügel hyalin; Hinterleib glänzend schwarz. *\*ruficollis* Wied.
- Flügel verdunkelt; Hinterleib mit gelber Wurzel *phaeopterus* Bezzi.

12. *Syneches obeliscus* n. sp. ♂.

Ater, opacus, antennis halteribus femoribusque nigris, tibiis tarsisque luteis partim nigris, antennarum articulo tertio rotundato, thoracis dorso maxime convexo pyramidato, alis fusco lutescentibus, macula stigmatica obsoleta, cellula discoidali parva in medio alae, nervis tertio et quarto parallelis.

Long. corp. mm 3—3½, alar. mm 2¼—3¼.

Drei Exemplare aus Bolivien, Lorenzopata, Mapiri, 2000—2500 m, 24. IV.—11. V. 03, und eins aus Peru, Chanchamayo, 800 m, 15. I. 04.

Eine kleine Art, welche mit der folgenden sehr nahe verwandt, aber durch Flügel- und Bein-Färbung leicht zu unterscheiden ist. Diese und die zwei folgenden Arten bilden eine natürliche Gruppe, welche mit der Gattung *Parahybos* den gesamten Habitus und die Form des dritten Fühlergliedes gemein hat; die Fühlerborste ist aber apical und die Hinterschenkel zeigen unten einige Borsten.

Da diese Art mit der Beschreibung meiner *pyramidatus* übereinstimmt, seien hier nur die Unterscheidungsmerkmale gegeben. Rüssel gelblich; Ocellarborsten lang, dünn. Schienen manchmal sehr breit geschwärzt, besonders die vorderen, und die hinteren gegen die Mitte; Tarsen am Ende geschwärzt; Hinterschenkel dünn, unten mit einigen längeren Borsten. Flügel ohne deutlichen Stigmaticalfleck, an dessen Platze ein verwaschener gelber Schatten zu bemerken ist.

13. *Syneches pyramidatus* Bezzi, Ann. Mus. nation. Hungar., III. 428. 5. (1905.)

Vier Exemplare beider Geschlechter aus Peru, Chanchamayo, 800 m, 15. I. 04, und Tarma, 3000 m, 19. I. 04.

Stimmt ganz gut mit den Exemplaren von 1905, gleichfalls aus Peru. Die Tarsen sind an der Spitze geschwärzt; die Vorderschienen sind deutlich

verdickt. Das noch nicht beschriebene Weibchen stimmt mit dem Männchen gänzlich; die Legeröhre ist ziemlich dick, mit langen schwarzen Apical-lamellen.

14. *Syneches annulipes* n. sp. ♂.

Duabus praecedentibus iterum simillimus, differt metatarso postico infuscato tibiisque posticis in medio late nigro annulatis, alis cinereo hyalinis vix levissime infuscatis, macula stigmatica diffusa lutea, basi nubecula fusca distincta.

Long. corp. mm  $2\frac{1}{2}$ , alar. mm. 2.

Ein einziges Männchen aus Bolivien, San Carlos, Mapiiri, 800—1200 m, IV. 03.

Etwas kleiner als die zwei vorhergehenden Arten. Die Vorder- und Hinterschienen zeigen breite schwarze Ringe. Die Flügelfärbung steht in der Mitte zwischen den beiden andern Arten; sie ist nämlich nicht so rein glashell wie bei *pyramidatus*, aber sehr viel weniger dunkel als bei *obeliscus*; ganz eigentümlich ist der dunkle Schatten am Ende der Randzelle, welcher den gelben Stigmaticalfleck berührt; deshalb ist das Randmal bei dieser Art mehr hervortretend als bei den beiden vorhergehenden Arten.

15. *Syneches stigmaticalis* n. sp. ♂ ♀.

Niger, nitidiusculus, cinereo-tomentosus, antennis halteresque luteo-fuscis, pedibus pallide luteis posticis tamen infuscatis, femoribus posticis gracilibus at subtus setis validis armatis, thoracis dorso valde convexo, antennarum articulo tertio breviter ovato, alis cinereo hyalinis macula stigmatica duplici nigrofusca, nervis tertio et quarto parallelis.

Long. corp. mm 3— $3\frac{1}{2}$ , alar. mm 3— $3\frac{1}{4}$ .

Eine Anzahl von Exemplaren beider Geschlechter aus Bolivien, San Carlos, Mapiiri, 800—1200 m, 21. I. 03 und Sarampioni, Mapiiri, 700 m, 24.—26. I. 03.

Eine ziemlich zarte Art, wegen des hochgewölbten Thoraxrückens mit der vorigen verwandt; sie scheint bei *simplex* Walk. zu stehen, zeigt aber einen braunglänzenden Thoraxrücken und hellere Beine.



Rüssel gelb; Fühler gelblich, oft verdunkelt, mit kurz eiförmigem dritten Gliede, welches oben in der Mitte ein Haar trägt und mit einer sehr langen etwas präapicalen Borste endigt. Thoraxrücken ziemlich glänzend, bis vornhin behaart, mit schwarzen und starken Seiten- und Hinterborsten; die hintere Eindrückung ist etwas furchenförmig; die Humeral- und Präscutellarschwieneln sind gelblich. Schildchen graugelblich, am Rande mit langen Borsten, die zwei mittleren stärker als die übrigen. Schüppchen und Schwinger gelblich, diese oft verdunkelt. Hinterleib verlängert, nicht glänzend, ziemlich lang hell behaart; Genitalien des Männchens klein, spitzig, schwarz; Endlamellen der Legeröhre schwärzlich. Beine behaart und mit vereinzelt längeren Borsten; die Hüften und die vier vorderen Beine sind gelb, nur die Tarsen an der Spitze geschwärzt; Spitzenhälfte der Hinterschenkel, Hinterschienen und Hintertarsen schwärzlich, die Wurzel der Schienen und die Einschnitte der Tarsen schmal gelb, Hinterschienen gegen die Mitte mit einer längeren Borste. Flügel normal, etwas graulich, mit dunkeln Adern und zwei Randmalfflecken, ein großer an der Basis und ein kleiner an der Spitze.

16. *Syneches repletus* n. sp. ♀.

Niger, nitidiusculus, antennis halteribusque fuscis, pedibus luteis posticorum coxis trochanteribus femorum tibiaramque apicibus nigris, tibiis intermediis setis duobus longissimis praeditis, femoribus posticis setis validis longis subtus armatis, alis cinereo-hyalinis, macula stigmatica magna semicirculari nigro-fusca cellulae marginalis apicem omnino replente, nervis tertio et quarto parallelis.

Long. corp. mm  $3\frac{1}{2}$ , alar. mm  $3\frac{1}{2}$ .

Ein Exemplar aus Peru, Puerto Bermudes, Pichisfluß, 300 m, XII. 03.

Eine schöne Art, welche mit *quadrangularis* Wheel. et Mel. nahe verwandt zu sein scheint; wegen der zwei langen Borsten der Mittelschienen ist auch die Art mit meinem *S. dictaetophorus* aus Indien und Neu-Guinea verwandt.

Augen oben flach, mit äußerst großen Feldern; Fühler schwärzlich, mit kurzeiförmigem, oben einborstigem drittem Gliede und langer Endborste;

Rüssel gelb. Thorax ziemlich hoch gewölbt, glänzend, mit schwächerem dunkelgrauem Tomente und bis vornhin mit kurzen dunkeln Haaren, an den Seiten mit stärkeren Borsten; Schildchen am Rande mit einigen Borsten, die mittleren stärker und länger. Schüppchen gelblich, lang hell behaart. Hinterleib lang und dünn, schwarz und ziemlich stark glänzend, am Bauche gelblich, hell behaart; Legeröhre am Ende stumpf, mit ziemlich verborgenen dunklen Apicallamellen. Beine behaart, die vier vorderen ganz gelb, nur die mittleren Hüften schwärzlich; von den zwei langen Borsten der Mittelschienen steht die eine an der Vorder- und die andere etwas kürzere an der Innenseite; die Hinterschenkel sind kaum verdickt, aber unten mit sehr starken schwarzen Borsten bewaffnet; Spitzenhälfte der hinteren Schenkel und Spitzendrittel der Hinterschienen schwarz, letztere am Ende etwas keulenförmig verdickt; Hintertarsen ganz gelb. Flügel mit dunkeln Adern, an der äußersten Spitze mit einem dunkeln Schatten.

17. *Syneches dichrous* n. sp. ♂.

Luteus, nitidus, thoracis dorso in parte antica abdomineque nigris, antennis nigricantibus articulo tertio albido, halterum clava fusca, pedibus pallide luteis tibiis anticis et posticis femoribusque posticis nigricantibus, tibiis intermediis longe-setosis, femoribus posticis subtus setis non validis sed distinctis praeditis, alis griseo-hyalinis, circa maculam stigmaticam elongatam fuscam late infuscatis, nervis tertio et quarto parallelis.

Long. corp. mm 4—5, alar. mm 4—5.

Zwei Exemplare aus Bolivien, San Antonio, Mapiro, 1000 m, 19. bis 22. II. 03.

Mit meiner *phaeopterus* nahe verwandt, aber deutlich verschieden durch die Färbung und die beborsteten Hinterschenkel.

Augen oben weniger flach als bei den vorhergehenden und mit verhältnismäßig kleineren Feldern; Rüssel gelb, Taster schwärzlich; Fühler von eigentümlicher Färbung, indem die Basalglieder fast schwarz und die Endglieder beinahe weiß sind; drittes Fühlerglied kurz eiförmig, oben in der Mitte mit einem langen Haare und mit sehr langer feiner Endborste.

Thoraxrücken glänzend, wenig gewölbt, bis vorn behaart, hinten und an den Seiten mit langen schwarzen Borsten, dunkelgelb, vorn breit schwarz, Pleuren hellgelb ungefleckt; Schildchen glänzend braunschwarz, am Rande mit langen Haaren und Borsten. Schüppchen gelb, hell bewimpert. Hinterleib schwarz, nicht glänzend, ziemlich lang hell behaart, am Bauche und an den Seiten gelb. Beine samt den Hüften hellgelb; Vorderschienen deutlich verdickt, schwärzlich; Mittelschienen ganz gelb, aufser den zwei längeren Borsten wie bei den vorhergehenden, noch mit einigen anderen langen Borsten in der Spitzenhälfte; Hinterschenkel kaum verdickt, nur an der Wurzel gelb, unten mit einigen deutlichen Borsten; Hinterschienen ganz schwarz; Vordertarsen ganz, Hintertarsen an der Spitze geschwärzt. Flügel mit dunkeln Adern und breiter Randzelle; der dunkle Spitzenfleck liegt unter dem Randmale und erstreckt sich zuweilen bis über die vierte Längsader, ist aber unten sehr blafs.

18. *Syneches fuscescens* n. sp. ♀.

Nigro-fuscus, opacus, halteribus concoloribus, pedibus quatuor anterioribus obscure rufescentibus, duobus posticis omnino nigris, antennis luride fuscis, thoracis dorso parum convexo, tibiis intermediis setis longissimis nullis, femoribus posticis non incrassatis subtus setis parvis sed distinctis, metatarso postico paullo incrassato, alis diluto fuscis ad costam et apicem versus paullo saturatius, macula stigmatica nigricante angusta elongata, nervis tertio et quarto parallelis

Long. corp. mm 7 (cum terebra), alar. mm 6.

Ein einziges, ziemlich schlecht erhaltenes und fett gewordenes Exemplar aus Bolivien, Sarampioni, Mapiri, 700 m, I. 03.

Eine große Art, welche wegen der dunkeln Färbung und den schwarzen Hinterbeinen von den anderen verschieden ist.

Augen ganz schwarzbraun, die oberen Felder nicht sehr groß; drittes Fühlerglied ziemlich abgerundet, mit sehr langer feiner Endborste und den gewöhnlichen Haaren oben in der Mitte; Rüssel gelb, Taster lang und groß, schwärzlichgrau, mit langen schwarzen Borsten. Thoraxrücken wenig gewölbt, kurz behaart, hinten und am Rande mit schwarzen Borsten; Pleuren

braunschwarz, glänzend, mit gelblichen Flecken an den Suturen; Schildchen braunschwarz, unten gelblich, mit vielen langen schwarzen Borsten am Rande. Hinterleib schwarz, etwas glänzend, ziemlich lang und hell behaart; Bauch gelblich, mit längeren feinen Borsten an den Einschnitten; Legeröhre stumpf, lang, mit ganz verborgenen Lamellen. Schüppchen schmutzig gelb, schwarzgerandet und dunkel bewimpert. Beine stark, mit nicht verdickten Hinterschenkeln, welche unten einige kurze schwarze Borsten zeigen; hintere Beine ganz schwarz, mit am Ende keulenförmig verdickten Schienen und etwas verdickten Metatarsen; Vorderschenkel und Vorderschienen ziemlich stark, erstere außen und gegen die Spitze dunkelgelb, letztere ganz schwärzlich; Mittelbeine zarter als die andern, ihre Schienen mit einigen aber nicht sehr langen Borsten, die Tarsen gelb, am Ende geschwärzt. Flügel deutlich angeraucht, am Vorderrande und gegen die Spitze intensiver, mit schwarzen Adern; Randzelle schmal; Axillarwinkel lang bewimpert.

### 5. *Rhamphomyia* Meig.

Diese Gattung scheint auch in Südamerika reich vertreten zu sein. Merkwürdigerweise hat Philippi nur eine Art beschrieben; dieses ist vielleicht der Tatsache zuzuschreiben, daß er die Gebirge nicht besammelt hat, und wahrscheinlich sind die meisten Arten, wie bei uns, dort beschränkt. Keine der von mir im Jahre 1905 beschriebenen acht Arten findet sich in der Sammlung von Herrn Schnuse, welche dagegen mehr als 15 neue Formen enthält. Auch die südamerikanischen *Rhamphomyia*-Arten, wie diejenigen der andern Weltteile, zeigen eine Menge von eigentümlichen und ansehnlichen Merkmalen, welche sehr oft mit einem starken Geschlechtsdimorphismus verbunden sind. Besondere Merkmale dieser neotropischen Formen sind die oft auftretende dunkle Flügelzeichnung und die blauen Metallfarben des Hinterleibes.

Unter den beschriebenen Arten sind einige natürliche Formenkreise zu erkennen, von welchen ich bei der Beschreibung der Arten sprechen werde. Hier gebe ich eine Bestimmungstabelle aller bis jetzt bekannten Arten, mit der Bemerkung, daß dieselbe sehr ungenügend ist, da zu viele Arten nur in einem einzigen Geschlechte bekannt sind.

1. Flügel mit deutlicher schwärzlicher Zeichnung, d. h. mit einer Binde am Vorderrande oder an der Spitze, oder in der Mitte gebändert oder gefleckt 2.
- Flügel ohne deutliche Zeichnung, d. h. entweder ganz hyalin, oder wenn am Vorderrande oder an der Spitze dunkel getrübt, die innere Grenze der Verdunkelung nicht scharf begrenzt 9.
2. Flügel auch in der Mitte mit dunkeln Binden oder Flecken 3.
- Flügel nur am Vorderrande oder an der Spitze mit dunkler Binde 5.
3. Vierte Längsader abgekürzt und mit einem schwarzen runden Fleck auf ihrem Ende; Beine ♀ nicht gefiedert *\*umbilicata* Loew. ♀.
- Vierte Längsader vollständig und ohne schwarzen Fleck; Beine ♀ gefiedert 4.
4. Flügel mit sehr breiter Vorderrandbinde und zwei breiten Mittelbinden über den Queradern; Hinterleib glänzend schwarz; nur die vier hinteren Beine gefiedert *pictipennis* n. sp. ♀.
- Flügel ohne Vorderrandbinde, mit breit geschwärzter Spitze und einer Binde über der hinteren Querader; Hinterleib glänzend blau; alle Beine ♀ z. T. gefiedert *perpulchra* n. sp. ♂ ♀.
5. Rückenschild ockerbraun bis rotgelb 6.
- Rückenschild schwarz 7.
6. Rückenschild und Hinterleib ockerbraun; Flügel nur an der Spitze mit bogenförmiger Binde *\*ferruginea* F., Wied.?
- Rückenschild rotgelb, Hinterleib schwarz; Flügel mit vollständiger Vorderrandbinde von der Wurzel bis zur Spitze; Beine ♀ nicht gefiedert. *dolichoptera* n. sp. ♂ ♀.
7. Rückenschild und Hinterleib glänzend schwarz 8.
- Rückenschild mit ziemlich dichtem weißgrauem Tomente bedeckt; Hinterleib mit bläulichem Glanze; Beine ♀ nicht gefiedert *arcucineta* n. sp. ♀.
8. Flügel mit vollständiger Vorderrandbinde; Hinterschenkel fast ganz schwarz nur an der Wurzel gelb; Beine ♀ ungefedert *limbipennis* n. sp. ♂ ♀.
- Flügel nur an der Spitze mit bogenförmiger Binde; Hinterschenkel fast ganz gelb, nur an der Spitze schwarz *apicalis* n. sp. ♂.
9. Thorax ganz, oder an den Seiten gelbrot 10.

- Thorax ganz schwarz 13.
10. Rückenschild mit schwarzen Längsstriemen; Flügel am Hinterrande gelblich *\*nigriventris* Macq. ♂.
- Rückenschild ohne Längsstriemen; Flügel am Vorderrande und an der Spitze deutlich und oft breit verdunkelt; Beine ♀ immer ungefedert 11.
11. Drittes Fühlerglied ziemlich kahl *macerrima* n. sp. ♂ ♀.
- Drittes Fühlerglied deutlich behaart 12.
12. Rückenschild ganz rotgelb; Hintertarsen silberweiß mit schwarzem Endgliede *argyrotarsis* n. sp. ♀.
- Rückenschild in der Mitte mehr oder weniger geschwärzt; Hintertarsen gleichmäÙsig schwärzlich *grallatrix* n. sp. ♂ ♀.
13. Rückenschild mit silberglänzendem Tomente dicht bedeckt; Hinterleib immer metallisch blau 14.
- Rückenschild ohne silberglänzendes Toment 20.
14. Mittlere Metatarsen sehr stark verdickt *boliviana* Bezzi ♂.
- Mittlere Metatarsen einfach 15.
15. Beine gelb; Schienen lang und dicht behaart *villosipes* Bezzi ♂.
- Beine schwarz; Schienen nicht besonders behaart 16.
16. Flügel milchweiß *galictodes* n. sp. ♂.
- Flügel graulich 17.
17. Das silberglänzende Toment des Rückenschildes erstreckt sich auf die Pleuren, die Hüften und die Hinterleibswurzel *\*cyanogaster* Wheel. et Mel. ♂.
- Das Toment ist auf den Rücken beschränkt; Pleuren und Hüften schwarz 18.
18. Schildchen mit acht Borsten am Rande; gröÙsere Art (3,5 mm) *leucophenga* Bezzi ♂.
- Schildchen mit nur vier Borsten; kleinere Art (höchstens 2,5 mm) 19.
19. Rüssel länger als Kopf und Brust zusammen; hintere Querader in der Mitte gekniet *micrargyra* n. sp. ♂.
- Rüssel höchstens von Kopflänge; hintere Querader ganz gerade *argyrina* n. sp. ♂.
20. Flügel mit einigen abnorm erweiterten Zellen 21.
- Flügel ohne erweiterte Zellen 22.

21. Nur die Discoidalzelle bis an den Flügelrand erweitert  
*pulchriventris* Bezzi ♀.  
 — Discoidal-, hintere Basal- und Analzellen bis an den Flügelrand erweitert  
*monstrosa* n. sp. ♀.
22. Erstes Glied der Vordertarsen nicht deutlich verdickt 23.  
 — Erstes Glied der Vordertarsen deutlich verdickt \**tephrodes* Phil. ?<sup>1)</sup>
23. Schwinger weiß oder gelblich 24.  
 — Schwinger braun oder schwarz 26.
24. Vorder- und Hintertarsen z. T. weiß; Flügel weiß mit abgekürzter, vierter Längsader \**umbilicata* Loew. ♀ (*ungulata* Loew.).  
 — Tarsen nicht weiß; Flügel graulich mit vollständiger vierter Längsader 25.
25. Flügel ohne Stigmatale fleck; Thoraxstriemen und Hinterleib ins grünliche ziehend \**tolteca* Wheel. et Mel. ♂.  
 — Flügel mit deutlichem Randfleck; Thorax und Hinterleib ganz schwarzgrau; Beine ♀ nicht gefiedert *carenifera* n. sp. ♂ ♀.
26. Beine gefiedert; Flügel kurz, abgerundet; Hinterleib etwas bläulich glänzend *rotundipennis* Bezzi ♀.  
 — Beine nicht gefiedert; Flügel nicht besonders kurz 27.
27. Hinterschienen mit besonderen ansehnlichen Anhängen; Hinterleib blau \**furcifera* Wheel. et Mel. ♂ ♀.  
 — Hinterschienen einfach 28.
28. Mittelmetatarsen oben an der Spitze mit langem zahnartigen Fortsatze; Hinterleib mit geringem metallblauem Glanze *tympanica* n. sp. ♂.  
 — Mittelmetatarsen ohne solchen Fortsatz 29.
29. Mittelschienen an der Spitze breit verdickt und lang behaart; Hinterleib mit blaugrünem Glanze 30.  
 — Mittelschienen einfach 31.
30. Mittelmetatarsen unten borstig *abdominalis* Bezzi ♂.  
 — Mittelmetatarsen unten ohne Borsten *penicillata* n. sp. ♂.
31. Drittes Fühlerglied ziemlich kurz; Hinterleib metallisch blaugrünlich  
*pulchriventris* Bezzi ♂.

<sup>1)</sup> Ganz wahrscheinlich gehört diese Art zu meiner neuen Gattung *Atrichopleura*, welche von *Rhamphomyia* durch die nackten Metapleuren zu unterscheiden ist.

- Drittes Fühlerglied stark verlängert; Hinterleib schwarz, unten und am Grunde gelblich 32.
32. Discoidalzelle vorn zugespitzt *dolichocera* Bezzi ♂.
- Discoidalzelle vorn stumpf *orthoneura* Bezzi ♂.

19. *Rhamphomyia argyrotarsis* n. sp. ♀ (Taf. Fig. 2).

Gracilis, rufo-lutescens, nitida, capite pyriformi nigro, abdomine praeter basin nigro-caerulescente, antennis halteribusque fuscis, pedibus elongatis luteis tibiis posticis nigris tarsisque posticis albis articulo ultimo nigro, metatarso postico compresso dilatato, alis valde elongatis basi cuneatis alula et lobo alari nullis, cellulae analis angulo supero minus acuto, cinereo-hyalinis margine antico apiceque late infuscatis.

♀ terebra basi dilatata, inflata, apice acuta, lamellis terminalibus angustis, pedibus non pennatis.

Long. corp. mm  $4\frac{1}{2}$ , alar. mm  $5\frac{1}{2}$ .

Ein einziges Weibchen aus Bolivien, San Carlos, Mapiri, 800 bis 1200 m, I. 03.

Diese wunderschöne Art hat mit der folgenden die abweichende Form der Analzelle gemein; in der Gestalt des Kopfes erinnert sie an unsere *Empis*-Arten der Gruppe der *stercorea* L. Das dritte Fühlerglied ist gebrochen; nach dem gesamten Habitus gehört die Art aber sicher in dieselbe Gruppe, wie die folgende.

Kopf schwarz, glänzend, mit stark entwickeltem Hinterkopfe, welcher in der Mitte eine Querreihe von schwarzen Borsten trägt; Stirn ziemlich schmal, Augen rund, unter den Fühlern stark genähert; zwei starke schwarze Ocellenborsten; Rüssel länger als der Kopf, gelb, mit schwärzlicher Lippe; Taster klein, schwärzlich. Fühler schmutzig blafs, mit ziemlich verlängertem ersten Gliede; der vorhandene Teil des dritten Gliedes schwärzlich. Thorax ganz rotgelb glänzend, mit stark entwickeltem, vorn schwarzbeborstetem Halse; auf dem kahlen Rücken fünf Paare ziemlich langer schwarzer Dorso-centralborsten; auch die Seitenborsten sind ganz schwarz; Achrosticalborsten gänzlich fehlend; Metapleuren mit vier bis fünf schwarzen Borsten. Schildchen klein, nackt, mit vier schwarzen Randborsten, die seitlichen kürzer; Metanotum



dunkel gelb, stark glänzend. Hinterleib ziemlich kahl, glänzend, an der Wurzel und am Bauche gelb, vom dritten Ringe an blauschwarz. Lege-  
röhre von ansehnlicher Form, schwarz, dunkel behaart, am Grunde sehr  
groß und aufgeblasen, am Ende zugespitzt, mit schmalen dunkeln Apical-  
lamellen. Beine sehr verlängert, besonders die hinteren, kurz behaart, nur  
die Hinterschienen mit längeren Borsten; die Hüften und die vier vorderen  
Beine sind ganz gelb, Schienen und Tarsen sehr verblasst und das letzte  
Tarsenglied etwas verdunkelt; Trochanteren unten mit schwarzen Fleckchen;  
Hinterschenkel gelb, allmählich verdickt, an der Spitze schwärzlich; Hinter-  
schienen auch allmählich verdickt, schwarz, vor dem Ende mit zwei hinter-  
einander stehenden aufrechten schwarzen Borsten; Hintertarsen weiß, nur  
das letzte Glied tiefschwarz, kurz und dicht silberweiß behaart; hinterer  
Metatarsus erweitert, von der Seite her zusammengedrückt, so lang wie die  
drei folgenden Ringe zusammen. Flügel sehr lang und ziemlich breit, an  
der Spitze abgerundet, am Grunde stark verschmälert und ohne Flügellappen;  
Vorderrand kurz, Hinterrand ziemlich lang bewimpert; dritte Längsader  
tiefer schwarz, gerade, etwas nach der Flügelspitze mündend, an der Ver-  
bindungsstelle mit der zweiten schwielenförmig verdickt; Discoidalzelle sehr  
lang, vorn stumpf, ziemlich breit; sechste Längsader blaß, den Flügelrand  
nicht erreichend; die die Analzelle vorn schließende Querader steht mit der  
vorhergehenden nicht in derselben Linie, sondern ist zu dem Flügelhinter-  
rand steil gestellt. Verdunkelung des Vorderrandes und der Spitze ziemlich  
breit, aber innen ohne scharfe Grenzen; Randzelle an der Spitze breit, aber  
ohne deutlichen Randmalflleck.

Anmerkung. Ich habe diese Art etwas ausführlicher beschrieben,  
weil sie mit den folgenden in einer natürlichen Gruppe steht, welche mit  
unseren Arten der Gruppe *hybotina* Zett. und *sphenoptera* Loew. viel Gemein-  
sames hat. Die von mir 1905 beschriebene *dobichocera* und *orthoneura* ge-  
hören vielleicht zu dieser Gruppe, zu welcher wahrscheinlich auch *ferru-  
ginea* F. gehört.

Die Kennzeichen der Gruppe sind folgende: zarter Körperbau, sehr  
verlängerte Beine und drittes Fühlerglied und lange an der Basis keil-  
förmige Flügel, ohne Flügellappen. Die hierher gehörenden südamerikanischen  
Arten sind folgenderweise zu unterscheiden:

- a) Die die Analzelle vorn schließende Querader mit der vorhergehenden nicht in gleicher Linie, zu dem Flügelrande steil gestellt . b)  
 — Die Analquerader in gleicher Linie mit der vorhergehenden, dem Flügelrande parallel c)
- b) Hintere Tarsen weiß, mit verbreitertem Metatarsus *argyrotarsis* n. sp.  
 — Hintere Tarsen schwarz, mit nicht verbreitertem Metatarsus *grallatrix* n. sp.
- c) Drittes Fühlerglied ziemlich kahl; Flügel ohne Zeichnung d)  
 — Drittes Fühlerglied behaart; Flügel mit Zeichnung f)
- d) Rückenschild ganz schwarz; Genitalien ♂ klein e)  
 — Rückenschild an den Seiten gelb; Genitalien oft groß *macerrima* n. sp.
- e) Discoidalzelle vorn zugespitzt *dolichocera* Bezzi.  
 — Discoidalzelle vorn stumpf *orthoneura* Bezzi.
- f) Flügel mit einer breiten Vorderrandsbinde und zwei breiten Binden auf der Mitte; Beine ♀ gefiedert *pictipennis* n. sp.  
 — Flügel ohne mittlere Binden g)
- g) Thorax gelbrot, höchstens in der Mitte verdunkelt; Beine ♀ gefiedert *dolichoptera* n. sp.  
 — Thorax ganz schwarz h)
- h) Flügel mit Vorderrandsbinde; Hinterschenkel schwarz, mit gelber Wurzel *limbipennis* n. sp.  
 — Flügel nur an der Spitze mit bogenförmiger Binde; Hinterschenkel gelb, mit schwarzer Spitze *apicalis* n. sp.

20. *Rhamphomyia grallatrix* n. s. ♂ ♀.

Gracilis, nigra, nitida, thoracis lateribus rufescentibus, antennarum articulo tertio valde elongato et distincte piloso, pedibus luteis tarsis tibiisque posterioribus nigris, metatarso postico non dilatato, halteribus fuscis, alis elongatis basi cuneatis alula et lobo alari nullis, cinereo hyalinis fuscedine marginali et apicali quam in praecedenti minus lato, cellulae analis angulo supero minus acuto.

♂ oculis approximatis, thoracis dorso nigro, genitalibus maximis erectis nigro pilosis.

♀ *oculis remotiusculis, thoracis dorso rufescente, terebra magna inflata apice acuta lamellis terminalibus angustis elongatis, pedibus non pennatis.*

Long. corp. mm  $3\frac{1}{2}$ — $4\frac{1}{2}$ , alar. mm  $4\frac{1}{2}$ .

Einige Exemplare aus Bolivien, San Carlos, Mapiri, 700 m, 21. II. bis 30. III. 03.

Kopf ganz wie bei der vorhergehenden, aber kürzer, birnförmig; Fühler ganz schwarz, drittes Glied außerordentlich verlängert, allmählich verdünnt, ziemlich lang behaart, an der Spitze mit kurzem spitzigen Griffel. Rückenschild oben beim Männchen dunkler als beim Weibchen gefärbt, von Gestalt und Beborstung ganz wie bei der vorhergehenden Art. Hinterleib ganz schwarz, zuweilen der Bauch an der Wurzel gelb, mit wenig deutlicher Metallfärbung; Genitalien ♂ sehr groß, aufrecht, viel höher als der Hinterleib, vorn oben mit zwei seitlichen spitzen Zähnen und einem unpaarigen vorstehendem Anhang; Legeröhre ganz wie bei *argyrotarsis*. Beine wie bei derselben, die Hinterschenkel an der Spitze geschwärzt; Hinterschienen an der Spitze gleich mit einem kurzen rotgelben Borstenkamme. Flügel ganz wie bei *argyrotarsis*, aber mit schmälerer Verdunkelung; beim ♂ länger und schmäler als beim ♀.

21. *Rhamphomyia macerrima* n. sp. ♂ ♀.

Gracilis, nigra, nitida, thoracis lateribus abdominisque basi et ventre rufescentibus, antennarum articulo tertio valde elongato, vix piloso, pedibus pilosis luteis tarsis tantum nigris, metatarso postico non dilatato, halteribus fuscis, alis elongatis basi cuneatis, cinereo hyalinis ad marginem anticum paullo infuscatis, cellulae analis angulo supero acutissimo.

♂ *oculis approximatis, thoracis dorso nigro, genitalibus magnis erectis nigropilosis.*

♀ *oculis remotiusculis, thoracis dorso rufescente, terebra basi inflata lamellis terminalibus longissimis angustis, pedibus non pennatis.*

Long. corp. mm  $3\frac{1}{4}$ — $3\frac{1}{2}$ , alar. mm  $3\frac{1}{2}$ — $4\frac{1}{2}$ .

Einige Exemplare aus Bolivien, Sarampioui, Mapiri, 700 m, 16.—25. II. 03.

Eine der vorhergehenden ganz ähnliche Art, besonders wegen des nackten dritten Fühlergliedes verschieden. Kopf mehr gerundet; Fühler ganz schwarz, mit allmählich verdünntem, ganz kurz behaartem dritten Gliede. Genitalien des Männchens wie bei der vorhergehenden, aber vorn oben ohne den unpaarigen vorspringenden mittleren Anhang. Beine mehr behaart, mit ganz gelben, nur an der Spitze geschwärtzten Hinterschienen, welche hinten mehrere längere Borsten tragen und einen vorspringenden apicalen Borstenkamm besitzen. Flügel ganz wie bei den andern Arten, am Vorderrande nur wenig getrübt und mit ganz gewöhnlicher Analzelle.

22. *Rhamphomyia dolichoptera* n. sp. ♂ ♀.

Gracilis, nigra, nitida, thoracis lateribus rufis, antennarum articulo tertio valde elongato et distincte piloso, pedibus luteis tarsis tibiis posterioribus femoribus posticis praeter basin nigris, metatarso postico non dilatato supra setas 1—2 longas erectas gerente, halteribus luride albicantibus, alis elongatissimis basi cuneatis, hyalinis ad marginem anticum et apicem vitta fusca ornatis, cellula anali forma solita.

♂ oculis approximatis, thoracis disco nigro, genitalibus magnis erectis, vitta marginali alarum versus apicem tantum manifesta.

♀ oculis remotiusculis, thoracis disco rufo, tibiis posticis retro breviter fusco pennatis, vitta fusca marginali alarum et basi incipiente terebra basi inflata lamelli apicalibus longissimis.

Long. corp. mm  $3\frac{3}{4}$ — $4\frac{1}{2}$ , alar. min.  $4\frac{3}{4}$ — $5\frac{1}{2}$ .

Einige Exemplare aus Bolivien, San Carlos, Mapiri, 800—1200 m, 6.—10. I. 03 und Sarampioni, Mapiri, 700 m, 16. III. 03.

Eine durch äußerst lange Flügel und weißliche Schwinger ausgezeichnete Art, welche den vorhergehenden sehr nahe steht; die hier sehr langen Borsten auf den hinteren Metatarsen sind auch bei *macerrima* und *grallatrix* vorhanden, aber nicht so deutlich. Kopf etwas lang birnenförmig; drittes Fühlerglied wie bei *grallatrix*. Hinterschienen mit mehreren langen

Borsten. Flügel außerordentlich lang, an der Wurzel sehr schmal. Männliche Genitalien etwa wie bei *macerrima*.

23. *Rhamphomyia limbipennis* n. sp. ♂ ♀.

Minus gracilis, omnino nigra, nitida, antennarum articulo tertio valde elongato et piloso, halteribus albidis, pedibus pallide luteis tarsis tibiis femoribusque posticis praeter basin nigris, metatarso postico non dilatato supra setam longam erectam gerente, abdomine distincte setoso, alis minus elongatis alula nulla lobo alari tamen paullo manifesto, cellula discoidali quam in praecedentibus brevior, omnino hyalinis margine antico toto apiceque anguste nigricante vittatis.

♂ oculis approximatis, genitalibus magnis erectis nigropilosis.

♀ oculis remotiusculis pedibus non pennatis, terebra basi inflata lamellis terminalibus longissimis.

Long. corp. mm  $3\frac{1}{2}$ —4, alar. mm 4— $4\frac{1}{2}$ .

Viele Exemplare aus Peru, Puerto Bermudes, Pichisflufs, 300 m, 8.—10. XII. 03, Unini, Ucayaliflufs, 300 m, 20. X. 03 und Pachitea-Mündung, 150 m, 8. XI. 03; auch aus Bolivien, San Carlos und Sarampioni, Mapiri, 700—1200 m, 21. I.—24. II. 03.

Von den andern Arten durch etwas kürzere und stärkere Statur unterschieden, sowie durch den deutlich beborsteten Hinterleib und die etwas vortretenden Flügellappen. Kopf mehr abgerundet; Thoraxbeborstung länger, auch die Metapleuraborsten sind länger und zahlreicher. Hinterleib beim Männchen mit längeren Borsten an den Einschnitten; Bau der Genitalien ungefähr wie bei den andern Arten. Alle Hüften und Vorderschenkel bleichgelb; Schienen schwarz, nur die vorderen an der Wurzel gelb; Hinterschienen hinten mit längeren Borsten. Flügel etwas kürzer als bei den andern Arten, mit deutlich hervortretenden aber sehr kleinen Flügellappen; Axillarwinkel daher deutlich vorhanden, aber sehr breit offen; die Vorder- und Hinterflügelrandbinde schmaler und dunkler als bei den andern Arten, nur gegen die Spitze etwas verbreitert; Anzelle von gewöhnlicher Form.

24. *Rhamphomyia apicalis* n. sp. ♂.

Parva, minus gracilis, omnino nigra, nitida, antennarum articulo tertio valde elongato et piloso, pedibus pallide luteis tarsis femorumque posticorum apice extremo tibiisque posticis nigris, metatarso postico simplici supra seta erecta praedito, alis elongatis basi cuneata, alula et lobo alari omnino nullis cinereo-hyalinis area apicali fusco ornatis.

♂ oculis minus approximatis, genitalibus magnis erectis nigropilosis.

Long. corp. mm 2½, alar. mm 3.

Ein einziges Exemplar aus Peru, Puerto Yessup, Pichisflufs, 300 m, XII. 03.

Eine kleine Art, mit der vorigen nahe verwandt, aber mit längerem drittem Fühlergliede, helleren Beinen, minder beborstetem Hinterleibe, keilförmigen nur an der Spitze gebänderten Flügeln. Hinterschienen hinten mit einigen längeren Borsten, und an der Spitze mit zahnförmig vortretendem Borstenkamme. Die Schwinger sind gebrochen, scheinen aber bleich zu sein. Metapleuralborsten lang, nur 2—3, ziemlich hell gefärbt.

25. *Rhamphomyia pictipennis* n. sp. ♀.

Minus gracilis, nigra, nitida, thorace tamen toto rufo, antennarum articulo tertio elongato distincte piloso, pedibus luteis tarsis omnibus femoribus tibiisque posticis nigricantibus, metatarso postico simplici supra unisetoso, alis minus elongatis alula nulla lobo alari tamen paullulo distincto, nervo tertio longitudinali in medio supra incurvo, hyalinis, basi limbo antico late vittisque duobus latis intermediis fuscis.

♀ oculis remotiusculis, terebra basi angusta non inflata lamellisternalibus longis, femoribus intermediis tibiis femoribusque posticis utrinque longe fusco pennatis.

Long. corp. mm 4, alar. mm 4.

Ein einziges Weibchen aus Bolivien, San Carlos, Mapiri, 800—1200 m, 8. I. 03.

Eine prächtige Art, mit ziemlich kurzen breit gebänderten Flügeln und breit gefiederten Hinterbeinen. Kopf ziemlich abgerundet; drittes Fühlerglied ziemlich lang behaart. Schwinger schmutzig gelb, etwas verdunkelt. Hinterleib ganz und gar glänzend schwarz, ziemlich kahl, mit schmaler Legeröhre. Die Befiederung der hinteren Beine ist sehr breit; Hinterschienen breit, außen gerinelt, hinten mit drei langen feinen Borsten hintereinander. Sehr eigentümlich ist die Einbuchtung der dritten Flügellängsader, welche ganz unter dem Stigma liegt und nach oben gerichtet ist. Die breite Flügelrandbinde ist unten bis zur dritten Längsader ausgedehnt und geht in der Nähe der Spitze über dieselbe sogar hinaus; an der Wurzel ist nur die Spitze der zweiten Basalzelle hyalin; die erste Flügelbinde ist kurz, über der kleinen Querader liegend, und kaum über die sechste Längsader reichend; die zweite liegt über der hinteren Querader und geht bis zum Hinterrande. Discoidalzelle lang, dreieckig, vorn ganz stumpf; Analzelle wie gewöhnlich.

Anmerkung. Herr Schnuse hat aus derselben Lokalität das Männchen einer *Rhamphomyia*-Art mitgebracht, welche zu dieser Gruppe gehört; sie zeichnet sich durch ganz glashelle Flügel und verschieden langbehaarte Genitalien aus. Leider fehlt dem einzigen Exemplar der Kopf.

26. *Rhamphomyia arcucineta* n. sp. ♀.

Nigra, thoracis dorso cinereo-micante, abdomine obscure caerulescente nitido, halteribus albidis, antennarum articulo tertio paullo elongato, metapleuris albopilosis, pedibus nigricantibus femorum basi obscure lutescente, alis brevibus hyalinis, macula stigmatica et area apicali fuscis, angulo axillari valde aperto, cellula discoidali magna nervos duos primos praeter basin decolores emittente.

♀ oculis remotiusculis, terebra basi non inflata, pedibus non pennatis.

Long. corp. mm 3½, alar. mm 3.

Drei Weibchen aus Bolivien, Sarampioni, Mapiri, 700 m, 11. bis 31. III. 03.

Diese Art scheint eine Verbindung darzustellen zwischen der vorhergehenden und der folgenden Gruppe, das unbekannte Männchen hat ganz wahrscheinlich einen silberglänzenden Thoraxrücken.

Kopf abgerundet; drittes Fühlerglied doppelt so lang als die zwei ersten Glieder zusammen. Rückenschild, außer den Dorsozentral- und den Seitenborsten ganz nackt; Schildchen ohne Borsten am Rande (vielleicht nur abgebrochen). Hinterleib kurz, hell behaart. Beine schwarz, etwas gelb durchscheinend, weil die Exemplare unreif sind; sie sind ganz kurz behaart und einfach. Flügel viel kürzer als bei der vorhergehenden Gruppe, am Rande kürzer gewimpert und nicht keilförmig; die Flügellappen deutlich, aber sehr kurz, der Axillarwinkel daher sehr stumpf; dritte Längsader ganz gerade an der Flügelspitze mündend; Randmal fleck schmal und lang, dunkelbraun, sehr deutlich; Apikalbogen sehr kurz, zwischen den Enden an zweiter und dritter Längsader gelegen; Analzelle von gewöhnlicher Gestalt; sechste Längsader abgekürzt, die zwei vorderen aus der Discoidalzelle entspringenden Adern ganz blaß.

27. *Rhamphomyia galactodes* n. sp. ♂.

Nigra thoracis dorso cano-micante, abdomine violaceo nitente, halteribus pedibusque nigricantibus, setis metapleurales nigris, alis lacteis macula stigmatica nulla, nervis pallidis costa nigra pone nervi primi finem distincte incrassata, cellula discoidali medioeri in medio alae, lobo alari magno angulo axillari recto.

♂ oculis approximatis, genitalibus parvis clausis nigro-fuscis.

Long. corp. mm  $3\frac{1}{4}$ , alar. mm  $3\frac{1}{2}$ .

Ein einziges Männchen aus Bolivien, Kordillere, 4000—5000 m, 24. XII. 02.

Kopf rund, ziemlich lang, schwarz beborstet; Rüssel von Kopflänge, gelb; Fühler ganz schwarz, drittes Glied ziemlich kurz, mit langem Endgriffel. Thorax schwarz, auf dem Rücken mit dichtem weißgrauem Tomente bedeckt; außer den langen schwarzen Dorsozentral- und Seitenborsten ganz



nackt; Schildchen weißgrau, mit vier sehr langen Borsten am Rande. Hinterleib flach, stark metallisch, ziemlich lang, dunkel behaart; Bauch schwarzgrau; Genitalien unten etwas vortretend. Beine ganz schwarz, kurz behaart und mit längeren Borsten; Hinterschienen keulenförmig verdickt, hinterer Metatarsus etwas verdickt und beborstet. Flügel milchweiß, bei dieser Gattung von gewöhnlicher Gestalt; Discoidalzelle ganz stumpf, gegen die Flügelmitte einmündend; sechste Längsader sehr abgekürzt; dritte Längsader gerade, an der Flügelspitze mündend.

Anmerkung. Mit dieser Art beginnt ein natürlicher Formenkreis, welcher durch den silberweiß bestäubten Thoraxrücken und den blauen Hinterleib ausgezeichnet ist. Aufser der durch weiße Schwinger und bleiche Metapleuralborsten ausgezeichneten *arcucineta*, gehören zu derselben noch die von Wheeler und Melander beschriebenen *cyanogaster* und die von mir in 1905 erwähnten *boliviana*, *villosipes* und *leucophenga*, welche alle schwarze Schwinger und schwarze Metapleuralborsten besitzen. Hier sind aus dieser Gruppe die neuen Arten *galactodes*, *micrargyra* und *argyrina* beschrieben.

#### 28. *Rhamphomyia micrargyra* n. sp. ♂.

Parva, nigra, thoracis dorso argenteo micante, abdomine violaceo nitente, pedibus halteribusque nigricantibus, antennarum articulo tertio brevi, haustello capito thoraceque simul sumptis longiore, alis cinereo-hyalinis, macula stigmatica nulla, nervis fusconigris, cellula discoidali medioeri in medio alae, nervo transverso postico in medio flexo interdum iutus breviter appendiculato.

♂ oculis valde approximatis, genitalibus parvis inferne prominentibus.

Long. corp. mm 2—2½, alar. mm 2½—3.

Vier Exemplare aus Peru, Tarma, 3000 m, 29. I. 04.

Eine kleine schöne Art, welche durch den außerordentlich langen Rüssel und die Gestalt der hinteren Querader sehr ausgezeichnet ist. Kopf rund; der sehr lange Rüssel schwärzlich; Fühler ganz schwarz, mit kurzem drittem Gliede. Rückenschild an den Seiten tiefschwarz, mit schwarzen

Metapleuralborsten. Beine ganz schwärzlich; die Hinterschienen und hinteren Metatarsen mit ziemlich langen Haaren. Flügellappen hervortretend, Axillarkwinkel rechtwinklig; die Randader ist bei der Mündung der ersten Längsader etwas verdickt; die Querader, welche die Discoidalzelle aufsen begrenzt, ist in der Mitte nach innen stark gebogen, fast geknickt, und trägt zuweilen an der Knickungsstelle innen einen kurzen Anhang; die zwei vorderen aus der Discoidalzelle entspringenden Adern sehr blafs; sechste Längsader abgekürzt.

29. *Rhamphomyia argyrina* n. sp. ♂.

Praecedenti simillima at distincta geniculis lutescentibus, haustello capitis tantum longitudinem aequante, macula stigmatica fusca distincta, et nervo transverso cellulam discoidalem extus limitante omnino recto.

Long. corp. mm 2—2½, alar. mm. 2¼—2½.

Ein Exemplar aus Bolivien, Sarampioni, Mapiri, 700 m, 7. III. 03, und ein anderes aus Peru, mit *micrargyra* an demselben Orte und zu gleicher Zeit gefangen.

Eine der vorhergehenden äusserst ähnliche Art, durch die gelblichen Knien, den kurzen Rüssel und die nicht gebogene hintere Querader sicher verschieden. Die Discoidalzelle ist kleiner und vorn ganz stumpf; Randmalffleck schmal verlängert aber deutlich.

Anmerkung. Aus Bolivien, Lorenzopata, Mapiri, 2000—2500 m, 26. IV. 03, hat Herr Schnuse ein unausgefärbtes Männchen mitgebracht, welches vielleicht zu dieser Art gehört, es ist aber gröfser, und zeigt ein scheinbar verschiedenes Hypopygium.

30. *Rhamphomyia perpulchra* n. sp. ♂♀.

Nigra nitida, abdomine violaceo, autennis brevibus pedibusque luteis tarsis anticis femorum posticorum tibiarumque anticarum et posticarum articulis singulis basi luteis halteribus nigris, brevibus cinereo-hyalinis, macula stigmatica elongata distincta, apice vittaque ad nervum transversum posticum fuscis, cellula discoidali magna apice recta.

♂ oculis connexis, tibiis intermediis inflatis clavaeformibus quam femoribus suis valde brevioribus, genitalibus perparvis vix prominentibus.

♀ oculis remotiusculis, tarsis anticis extus, femoribus mediis et posticis supra tibiisque posticis retro late nigropennatis, cellula discoidali quam in mare latiori angulo infero fere usque ad alarum marginem producta.

Long. corp. mm  $4\frac{1}{2}$ , alar. mm 4.

Ein Pärchen aus Bolivien, Lorenzopata, Mapiri, 2000—2500 m, 9. V. 03.

Eine prachtvolle Art, welche im Habitus und Färbung etwas an die *Lamprempis*-Arten erinnert; eine ziemliche Verwandtschaft scheint mit meiner *pulchriventris* vorhanden zu sein.

Kopf abgerundet, hinten ziemlich lang schwarz beborstet; Rüssel länger als der Kopf, gelb, mit schwärzlichen Lippen; Taster schwarz, beborstet; Fühler kurz, ganz gelb, nur in der Mitte etwas verdunkelt, drittes Glied ganz kurz, kegelförmig, mit ziemlich dickem und kurzem schwärzlichem Griffel. Rückenschild gewölbt, auf dem Rücken kaum etwas grau bereift, aufer den langen schwarzen gewöhnlichen Borsten ganz nackt; Metapleuralborsten lang, schwarz. Schildchen mit vier Randborsten, die mittleren länger und gekreuzt. Schüppchen schwärzlich; Schwinger groß, tiefschwarz. Hinterleib schön blau glänzend; Bauch schwarz, am Grunde gelblich; Genitalien klein, schwarz, Behaarung sparsam, dunkel, nur am Grunde vorhanden; Hinterleib des Weibchens gebrochen. Beine samt den Hüften von glänzend gelber Färbung, Spitze der Hinterschenkel (zuweilen auch der vorderen), Spitze der Vorder- und Hinterschienen, und die ganzen Vordertarsen schwarz; Behaarung der Beine ziemlich kurz, mit einzelnen längeren Borsten; nur die sehr auffallend verdickten und kurzen Mittelschienen länger behaart; Befiederung der Hinterschienen sehr lang. Flügelzeichnung nicht sehr dunkel aber deutlich, auch die Queradern an der Spitze der Anal- und zweiten Basalzelle außen dunkel gesäumt, dritte Längsader etwas gebogen, an der Flügelspitze selbst mündend; Discoidalzelle breit, am Ende ganz gerade; sechste Längsader abgekürzt; Flügellappen stark

vortretend, Flügelrand nur sehr kurz gewimpert; Analzelle von gewöhnlicher Form. Flügel verhältnismäßig kurz; Axillarwinkel ziemlich spitz.

Anmerkung. Diese Art, nebst den zwei hier folgenden neuen Arten, und mit *furcifera* Wheel. et Mel., *pulchriventris* und *abdominalis* Bezzi, gehört zu einer neotropischen Gruppe, welche durch die metallische blaue Färbung des Hinterleibes ausgezeichnet ist; die meisten bekannten Weibchen zeigen erweiterte Discoidalzellen und gefiederte Beine, und die Männchen besitzen ganz ausgezeichnete Mittel- oder Hinterbeine und kleine Genitalien.

31. *Rhamphomyia penicillata* n. sp. ♂.

Nigra, parum nitida, abdomine cyanescente, antennis pedibusque nigris, tibiis basi anguste femoribusque posticis basi late luteis, metatarso intermedio subtus non setigero, halteribus nigricantibus, alis elongatis cinereo-hyalinis praeter maculam stigmaticam elongatam fuscam immaculatis, cellula discoidali parva in medio alae.

♂ oculis connexis, tibiis intermediis incurvis apice incrassatis pilisque fuscis longis penicillatis, genitalibus parvis, peni crasso lutescenti supra prominulo.

Long. corp. mm  $3\frac{1}{2}$ , alar. mm  $4\frac{1}{2}$ .

Ein einziges Männchen aus Bolivien, Kordillere, 4000—5000 m, 24. XII. 02.

Eine mit meiner *abdominalis* verwandte Art, aber durch die an der Wurzel breit gelben Hinterschenkel und die unten nicht beborsteten Mittelmetatarsen sicher verschieden.

Rüssel etwas länger als der Kopf, mit schwarzen Lippen; Taster schwarz, groß, ziemlich nackt; Fühler kurz, drittes Glied mit dickem Endgriffel. Thorax etwas grau bereift, so daß nicht sehr deutliche schwarzglänzende Längsstriemen erscheinen, die seitlichen mit den Dorsozentralborsten; Schildchen vierborstig; Pleuren grau, mit dunkeln, an der Spitze helleren feinen Metapleuralborsten. Hinterleib mit heller Behaarung und dunkeln Borsten, Bauch und Genitalien schwarz. Beine ziemlich lang behaart; Mittelschienen so lang als die Schenkel, in der Mitte nach außen gebogen, an der Spitze plötzlich und stark verdickt, und dort mit langen

rauen Haaren pinselförmig behaart; die Tarsen oben mit vielen langen Haarborsten. Flügel ziemlich lang und schmal mit kleiner Discoidalzelle und gelblichen Adern; Axillarwinkel recht.

32. *Rhamphomyia tympanica* n. sp. ♂.

Nigra, parum nitida, abdomine obscure cyanescente, antennis halteribusque nigris, pedibus pallide luteis tibiis tarsis femorumque posticorum apice infuscatis, alis immaculatis paullo fuscis, macula stigmatica elongata fusciori, cellula discoidali parva ante alae medium terminata.

♂ oculis connexis, pedibus posticis dense villosis, metatarso intermedio supra ad apicem in dentem longum apice setigerum producto, genitalibus parvis, peni tamen libero longissimo arcuato nigro, membranam albidam opacam gerente.

Long. corp. mm 3—3<sup>1</sup>/<sub>4</sub>, alar. mm 3<sup>1</sup>/<sub>4</sub>—3<sup>1</sup>/<sub>2</sub>.

Zwei Exemplare aus Bolivien, Saramponi, Mapiri, 700 m, 16.—31.

III. 03.

Eine sehr ausgezeichnete Art, mit ganz eigentümlichen Genitalien.

Kopf rund; Rüssel von Kopflänge; drittes Fühlerglied schmal, in einen ziemlich dünnen Griffel allmählich verdünnt. Rückenschild schwarzgrau, ohne deutliche Striemen, der breite Eindruck vor dem Schildchen ziemlich dicht hellgrau bereift; Borsten lang und stark; Pleuren schwärzlich, Metapleuralborsten schwarz und stark. Schildchen vierborstig. Hinterleib mit dunkler Behaarung. Genitalien nicht eigentlich groß, aber wegen der langen schwarzen Fäden sehr groß erscheinend; Faden nur an der Spitze frei, schön rundlich gebogen, mit einer weißen Membran, welche den ganzen Raum zwischen Faden und Hypopygium ausfüllt. Beine ziemlich dicht behaart, besonders die hinteren; Hinterschienen und Hintertarsen mit besonders langen Haaren; Zahn am Ende der Mittelmetatarsen so lang wie das vorletzte Tarsenglied, am Ende mit einer langen Borste; die Mitteltarsen sind heller gefärbt als die übrigen Tarsen. Flügel mit dunkeln Adern und auffallend kleiner Discoidalzelle, Flügellappen stark vortretend, Axillarwinkel recht; Flügelvorderrand an der Wurzel ziemlich lang und weitläufig bewimpert; dritte Flügellängsader gerade, etwas vor der Flügelspitze mündend.

33. *Rhamphomyia carenifera* n. sp. ♂ ♀.

Nigro-cinerascens, nitidula antennis nigris, pedibus fuscis, halteribus albis, haustello crasso capite paullo brevior, alis elongatis hyalinis immaculatis, macula stigmatica elongata fusca, cellula discoidali parva.

♂ oculis connexis, metatarso antico paullo incrassato, genitalibus magnis compressis subtus carinatis.

♀ oculis late remotis, metatarso antico simplici, femoribus posticis extus breviter dense villosis.

Long. corp. mm  $3\frac{1}{2}$ , alar. mm  $4\frac{1}{2}$ .

Ein Pärchen aus Chile, Corral an der Seeküste, 7. IX. 02.

Eine etwas isoliert stehende Art, deren männliche Genitalien an *Pachymeria* erinnern; das verdickte erste Vordertarsenglied beim Männchen hat die Art mit *tephrodes* Phil. gemein.

Kopf rund, hinten schwarz beborstet; Stirn des Weibchens grau, sehr viel breiter als bei den vorhergehenden Arten, vorn an den Seiten mit einigen kurzen Borsten; drittes Fühlerglied ziemlich lang kegelförmig, mit kurzem Endgriffel. Thorax auf dem Rücken schwarz, ziemlich glänzend, hinten und an den Seiten dunkelgrau bereift, ohne deutliche Striemen; Metapleuralborsten schwarz; Schildchen mit sechs Randborsten, die mittleren etwas länger und gekreuzt. Hinterleib schwarzgrau, nicht glänzend, beim Männchen ziemlich lang, hell behaart. Männliche Genitalien so lang wie der Hinterleib, von der Seite stark zusammengedrückt, unten hervorragend; Legeröhre am Grunde nicht aufgeblasen, Endlamellen ziemlich lang. Beine einfach, dunkelgefärbt, etwas gelb durchscheinend; Behaarung der Hinterschenkel kurz und dicht, aber nicht schuppenförmig. Flügel hyalin, beim Weibchen auf der Wurzelhälfte etwas grau getrübt; Flügelrand sehr kurz bewimpert; dritte Längsader gerade, etwas vor der Flügelspitze mündend; Flügellappen stark vortretend, Axillarwinkel recht; Discoidalzelle kurz, aber oben vorn verlängert.

Anmerkung. Ein aus Chile, Concepcion, 10. IX. 02 stammendes Weibchen scheint mit dieser Art nahe verwandt zu sein und zeigt eine sehr breite Stirn; die Beine sind aber tief schwarz und die Hinterschenkel nicht dicht behaart.

34. *Rhamphomyia monstrosa* n. sp.<sup>1)</sup> ♀ (Taf. Fig. 3).

Nigra, nitidula, haustello valde elongato, pedibus halteribusque fuscis, antennis nigris brevibus stylo brevissimo, setis metapleurales brevibus nigris, alis elongatis hyalinis immaculatis, macula stigmatica nulla, lobo alari vix distincto.

♀ oculis remotiusculis, terebra anguste elongata tibiis posticis intus brevissime ciliato-pennatis, cellulis discoidali, basali secunda et anali usque ad marginem posticum alae dilatatis, nervo transverso postico eximie intus angulatim flexo, angulo ipso intus appendiculato.

Long. corp. mm  $2\frac{1}{4}$ , alar. mm  $3\frac{1}{4}$ .

Ein einziges nicht gut erhaltenes Exemplar aus Peru, Tarma, 3000 m, 19. I. 04.

Das Tierchen ist ziemlich kahl, ohne Borsten, diese sind aber vielleicht ausgefallen. Kopf rund; Rüssel bedeutend länger als Kopf und Brust zusammen, schwarz. Rückenschild glänzend schwarz, ohne Zeichnung. Beine etwas gelblich durchscheinend, die Hinterschienen verbreitert, innen sehr kurz bewimpert. Flügel schmal und lang, mit dunkleren Adern, um die zwei vorderen aus der Discoidalzelle entspringenden Adern ganz blaß; Flügelrand äußerst kurz bewimpert; dritte Längsader gerade, an der Spitze mündend; Flügellappen kaum entwickelt, Axillarwinkel breit stumpf, Flügel aber an der Basis nicht keilförmig.

Anmerkung. Aus Bolivien, Sarampioni, Mapiri, 700 m, 13. III. 03 in der Sammlung ein Weibchen mit horizontal vorstehendem Rüssel (vielleicht nur zufällig), welches mit unserer europäischen *umbripennis* Meig. sehr nahe verwandt ist.

<sup>1)</sup> Es sei hier erinnert, daß auch beim Weibchen der aus Sibirien stammenden *Rh. diversipennis* Becker, Act. Soc. Sci. Fenn., XXVI. 19. 18. t. 1 f. 14—17 (1900), die zweite Basalzelle abnorm erweitert ist.

### 6. *Lampremis* Wheel. et Mel.

Ich nehme hier diese für die neotropische Fauna eigentümliche Gattung in dem Sinne wie ich sie 1905 begrenzt habe. Die bekannten Arten lassen sich in folgender Weise auseinander halten.

1. Flügel stark verdunkelt, beinahe schwarz; (Fühler schwarz, mit bewimperten Wurzelgliedern und weißlichem Endgriffel; Pleuren schwarz; Beine schwarz mit gelben Vorderschenkeln und breiten gelben Ringen vor der Spitze der Hinterschenkel; vorderer Metatarsus verdickt)
 

\**superba* Loew ♂.
- Flügel hyalin oder gelblich 2.
2. Flügel mit deutlicher schwärzlicher Zeichnung 3.
- Flügel ganz ohne Zeichnung 5.
3. Flügel mit schwärzlicher Wurzel und Vorderrandbinde; eine überzählige Querader gegen die Mitte der ersten Hinterrandzelle; (Basalglieder der Fühler gelblich, drittes Fühlerglied schwarz eiförmig mit gleichlangem Griffel; Pleuren schwarz; Beine gelb und schwarz, größtenteils gefiedert; vierte und fünfte Längsader gegen die Spitze hin verschwindend)
 

\**violacea* Loew ♂.
- Nur die Queradern dunkel gesäumt; keine überzählige Querader vorhanden 4.
4. Drittes Fühlerglied linear, verlängert mit sehr kurzem Griffel; Beine gelb, größtenteils gefiedert; Hinterschenkel in der Mitte mit besonderen Anhängen; Körper metallisch gefärbt
 

*tuberifera* Bezzi ♂ ♀.
- Drittes Fühlerglied kurz, nicht linear; Rückenschild mit vier samt-schwarzen Längsstriemen; Hinterschenkel einfach; Körper vorherrschend schwarz gefärbt
 

\**Columbi* Schin. ♀.
5. Beine ganz gelb, wenigstens die Schenkel 6.
- Schenkel oder Schienen zum Teil schwarz gefärbt; Fühler immer schwarz 10.
6. Hüften gelb 7.
- Hüften schwarz 8.
7. Schildchen mit vielen (10) Randborsten; (Fühler an der Wurzel gelb,



- mit lanzenförmigem drittem Gliede und kurzem Griffel; vordere Metatarsen verdickt; Weibchen mit gefiederten Hinterschienen und Hinterschenkeln) *\*setigera* Coquill. ♂ ♀.
- Schildchen mit zwei Borsten; (Pleuren schwarz; Fühler gelb) *\*viridis* Coquill. ♂.
8. Beine einfach, nicht gefiedert; (Fühler schwarz, mit linearem dritten Gliede und sehr kurzem Griffel; Rückenschild ungestriemt) *gemmea* Bezzi ♂.
- Beine gefiedert 9.
9. Fühler schwarz; (drittes Fühlerglied linear, lang mit kurzem Griffel; vordere aus der Discoidalzelle entspringende Ader nach oben gebogen; Rückenschild etwas gestriemt) *\*diaphorina* O. S. ♀.
- Fühler gelb; (drittes Fühlerglied kurz, mit subapicalem Griffel; vordere aus der Discoidalzelle entspringende Ader nach oben gebogen) *\*dolichopodina* Schin.<sup>1)</sup> ♀.
10. Beine einfach 11.
- Beine gefiedert oder gewimpert 13.
11. Hintere Metatarsen unten mit einem starken Zahn oder ausgerandet; Flügel gelblich 12.
- Hintere Metatarsen ganz einfach; Flügel wasserklar *suavis* Loew. ♀.
12. Hintere Schenkel und Schienen ohne besondere Anhänge; Hintermetatarsus unten ausgerandet und an der Wurzel mit einem Haarschopfe *\*benigna* O. S. ♂.
- Hintere Schenkel und Schienen mit besonderen Anhängen; Hintermetatarsus unten stark gezähnt *\*chichimeca* Wheel. et Mel. ♂.
13. Drittes Fühlerglied eiförmig mit ebenso langem Griffel *\*cyanea* Bell. ♀.
- Drittes Fühlerglied linear, verlängert, mit viel kürzerem Griffel 14.
14. Tarsen weiß, an den vier vorderen Metatarsen und allen Endgliedern schwarz *calopoda* Bezzi ♂ ♀.
- Tarsen ganz gelb oder braun 15.

<sup>1)</sup> Über diese Art bin ich im Zweifel, da bei ihr die charakteristische Metallfärbung der echten *Lamprempis* fehlt; sie scheint mit meiner *Empis lucidilabris* nahe verwandt zu sein; Schiner sagt aber ausdrücklich, daß der Rückenschild ganz kahl ist.

15. Vordermetatarsus kaum verdickt; Beine schwarz \**benigna* O. S. ♀.  
 — Vordermetatarsus deutlich verdickt; die vier vorderen Schienen gelb  
 \**chichimeca* Wheel. et Mel. ♀.

35. *Lamprempis gemmea* Bezzi, Ann. Mus. nat. Hungar., III. 438. 16. (1905).

Ein einziges Weibchen aus Bolivien, San Carlos, Mapiri, 700—1200 m, 8. I. 03: das typische Stück stammt gleichfalls aus Bolivien.

Das noch nicht beschriebene Weibchen stimmt mit dem Männchen ziemlich gut. Augen unter den Fühlern getrennt; Färbung mehr in das blaue ziehend; Rückenschild und Schildchen ganz kahl (weil minder gut erhalten); Beine, besonders die hinteren, etwas mehr behaart. Hinterleib abgeflacht, sehr breit und äußerst stark glänzend; Legeröhre ganz kurz, nur unten vorstehend, mit ziemlich langen schwarzen Apikallamellen.

36. *Lamprempis suavis* Loew, Berl. entom. Zeitschr., XIII. 33. 56. [Empis] (1869); Wheel. et Mel., Biol. Centr. amer., I. 368. 6. [Empis] (1901); Mel., Trans. amer. entom. Soc., XXVIII. 280. (1902); Aldrich, Cat. N. A. Dipt., 327. (1905).

Einige Weibchen aus Bolivien, San Carlos, Mapiri, 800 m, I. 03, Sarampioni. Mapiri, 700 m, III. 03 und S. Ernesto, Mapiri, 800 m, III. 03.

Stimmt ganz gut mit der Beschreibung, und ist im ganzen Habitus von der vorhergehenden nicht sehr verschieden. Leider sagt Loew. gar nichts von der eigentümlichen Form der Fühler, welche von denen der typischen *Lamprempis*-Arten meist verschieden sind: die ersten Glieder sind nicht bewimpert, das dritte ist kurz und ziemlich breit eiförmig, mit etwas präapikalem Griffel. Nach Melander sind die Fühler bei *cyanea* Bell. ähnlich gebaut.

## 7. *Empis* L.

Die vielen südamerikanischen Arten dieser Gattung lassen sich folgenderweise unterscheiden: leider gehören einige derselben wahrscheinlich zu andern Gattungen.

1. Arten von vorherrschend gelber Färbung, d. h. Rückenschild und Hinterleib mindestens an den Seiten gelb; Beine immer gelb<sup>1)</sup> 2.  
 — Schwarze Arten, höchstens mit ganz beschränkten gelben Teilen; Beine öfters schwarz, wenigstens zum Teile<sup>2)</sup> 9.
2. Thorax und Hinterleib oben gleichmäßig grau, an den Seiten und unten gelb. Flügel mit schwärzlicher Wurzel und Randzelle; große Art *\*cotoxanthus* Blanch.  
 — Thorax und Hinterleib ganz oder vorherrschend gelb oder rot 3.
3. Randmalffleck groß, rundlich; Spitzenquerader ganz steil; Rückenschild glänzend *rubida* Wheel. et Mel.  
 — Randmalffleck klein, verlängert, oft wenig deutlich; Spitzenquerader schief; Rückenschild nicht glänzend 4.
4. Rückenschild nicht deutlich gestriemt; Flügel am Vorderrande gelblich 5.  
 — Rückenschild mit vier dunkleren Längsstriemen; Flügel hyalin; Beine immer ungefedert 6.
5. Rückenschild in der Mitte etwas verdunkelt; Beine nicht gefiedert *Walkeri* nom. nov.<sup>3)</sup>  
 — Rückenschild in der Mitte gelb, hinten weißlich bereift; Beine ♀ gefiedert *induta* n. sp.
6. Fühler mit schwarzer Spitze; Flügel ganz hyalin *\*micans* Schin.  
 — Fühler ganz gelb; Flügel am Vorderrande etwas verdunkelt 7.
7. Stirn mit schwärzlicher Mittelstrieme; ein grünes Fleckchen unter den Fühlern *\*quadrivittata* F. Lynch.  
 — Stirn in der Mitte ungestriemt 8.
8. Hinterschenkel ohne schwarze Borsten *\*varians* Big.  
 — Hinterschenkel mit schwarzen Borsten *\*villosula* Big.
9. Flügel deutlich gefleckt; Spitzenquerader immer steil 10.  
 — Flügel nicht deutlich gefleckt 12.

<sup>1)</sup> Es ist recht bemerklich, daß keine dieser Arten in den Verwandtschaftskreis unserer *stercorea* gehört.

<sup>2)</sup> *E. poecila* Phil., mit rotem Thoraxrücken, ist in dieser Abteilung zu finden; auch *E. thermophila* Wied. ist z. T. gelb gefärbt.

<sup>3)</sup> Ich wähle diesen Namen für *Empis fulva* Walker 1837 nec Macquart 1823.

10. Vierte Längsader abgekürzt und gegen die Spitze unten mit einem überzähligen Aste *\*spiloptera* Wied. (= *picta* Loew.)
- Vierte Längsader einfach und vollständig 11.
11. Rückenschild mit wenig deutlichen Längsstriemen; Fühler schwarz; Flügelzeichnung minder deutlich; nur ein wenig verdunkelter Wisch über den Queradern; Hinterschenkel dick *pachymerina* Schin.
- Rückenschild mit samt schwarzen Längsstriemen; Fühler an der Wurzel gelb; Flügelzeichnung intensiver; Hinterschenkel nicht dick *lucidilabris* Bezzi.<sup>1)</sup>
12. Flügel schwärzlich, oder wenigstens sehr dunkel getrübt<sup>2)</sup> 13.
- Flügel wasserklar, graulich oder kaum angeraucht 24.
13. Sehr große (12—14 mm) Art, mit rotem Thorax und blauem Hinterleibe *poecila* Phil.
- Mittelförmige oder kleine (nicht über 10 mm) nicht so gefärbte Arten 14.
14. Körperform lang und dünn; Beine gelb, sehr lang, mit lang behaarten Vorder- und Hintertarsen; Schwinger gelb *\*macrorrhyncha* Phil.
- Körper und Beine nicht besonders verlängert; Schwinger gewöhnlich schwarz 15.
15. Flügel breit, abgerundet, an der Wurzel heller *\*bicolor* Bell. ♀.
- Flügel nicht besonders breit, gleichmäßig geschwärzt, oder an der Spitze heller 16.
16. Hinterleib an der Wurzel gelb; Beine gefiedert *\*pegasus* O. S.
- Hinterleib ganz schwarz 17.
17. Ziemlich große (7—10 mm) Art; schwarze Flügel färbung gegen die Spitze auf eine Säumung der Längsadern beschränkt *\*atra* Wied.
- kleinere (höchstens 6 mm) Arten, mit gleichmäßig geschwärzten Flügeln 18.
18. Schwinger gelb 19.
- Schwinger schwarz 20.
19. Thoraxrücken zwischen den Längsstriemen glänzend, Flügel ziemlich abgerundet *liodes* n. sp.

<sup>1)</sup> Wie oben bei *Lamprempis* gesagt, ist wahrscheinlich *Columbi* Schin. mit dieser Art zu vereinigen.

<sup>2)</sup> Bei einigen Arten sind die Flügel nur im weiblichen Geschlechte geschwärzt.

- Thoraxrücken ohne glänzende Striemen; Flügel verlängert \**anthracina* Big.
20. Fühler an der Wurzel gelb; Flügel schmal und lang  
*angustipennis* n. sp.
- Fühler ganz schwarz 21.
21. Beine zum Teil gelb \**montezuma* W. et M.
- Beine ganz schwarz, oder mit gelben Knien 22.
22. Vierte Längsader abgekürzt \**totipennis* Bell.
- Alle Längsadern vollständig 23.
23. Vordere Tarsen einfach, Hinterleib dunkel behaart \**vicina* F. Lynch.
- Vordere Tarsen verdickt, Hinterleib gelblich behaart \**lugens* Phil.
24. Schwinger schwarz oder verdunkelt 25
- Schwinger weißlich oder hell 34.
25. Körperfärbung metallisch *ambigua* Bezzi.
- Körper ohne Metallglanz 26.
26. Vierte Längsader abgekürzt \**dolorosa* W. et M.<sup>1)</sup>
- Vierte Längsader vollständig 27.
27. Fühler ganz schwarz 28.
- Fühler mit gelber Wurzel 31.
28. Beine schwarz 29.
- Beine gelb, mit an der Wurzel schwarzen Schenkeln; Spitzenquerader  
steil \**azteca* W. et M.
29. Beine gefiedert \**fimbria* Walk.
- Beine nicht gefiedert 30.
30. Beine stark behaart \**bicolor* Bell. ♂.
- Beine wenig behaart \**xochitl* W. et M.
31. Bauch an der Seite gefiedert *penniventris* n. sp.
- Bauch nicht gefiedert 32.
32. Vordere Metatarsen einfach; Beine gelb; Hinterschienen an der Spitze  
verdickt; Bauch gelb, in der Mitte mit einem zahnartigen Fortsatze  
*chiragra* n. sp.
- Vordere Metatarsen verdickt; Beine zum Teil schwarz mit geringelten  
Tarsen; gröfsere Statur 33

<sup>1)</sup> Die Schwingerfärbung ist bei dieser Art nicht angegeben; vielleicht ist die Art mit *totipennis* identisch.

33. Schenkel gelb; Rüssel gelb *\*annulipes* W. et M.  
 — Schenkel schwarz; Rüssel schwarz *atrifemur* W. et M.
34. Beine ganz gelb, mindestens die vier vorderen 35.  
 — Beine ganz oder zum größten Teil schwarz 43.
35. Hinterleib samt schwarz, mit breiter silberweißer Binde am vierten und  
 fünften Ringe *argyrozona* Phil.<sup>1)</sup>  
 — Hinterleib anders gefärbt 36.
36. Beine dicht behaart, besonders die vier vorderen Schienen und Tarsen  
 durch die Behaarung wie verdickt erscheinend; Mittelschienen an der  
 Spitze mit einigen Dörnchen gekrönt *Landbecki* Phil.<sup>1)</sup>  
 — Beine anders gebaut 37.
37. Thoraxrücken mit zwei weißlichen Längsstriemen, an den Seiten hell-  
 gefärbt, beim Weibchen sogar gelblich; Hinterleib mehr oder weniger  
 gelb *\*thermophila* Wied.  
 — Nicht so gefärbte Arten 38.
38. Hinterleib unten oder an der Wurzel gelb 39.  
 — Hinterleib ganz schwarz 40.
39. Fühler schwarz; Rückenschild mit vier Längsstriemen; Beine kurz und  
 dick *\*ochropus* Phil.  
 — Fühler an der Wurzel rötlich; Rückenschild ohne deutliche Längs-  
 striemen; Beine verlängert; Genitalien ♂ oben gedorn  
*spinifera* n. sp.
40. Flügel wasserklar, mit gelblichen Adern *\*flavinervis* Phil.  
 — Flügel graulich oder etwas angeraucht, mit dunkeln Adern 41.
41. Vordermetatarsus verdickt; Flügel hellgrau *\*antarctica* Walk.  
 — Vordermetatarsus einfach; Flügel dunkelgrau 42.
42. Rüssel schwarz; Hinterschenkel verdickt *\*pachymera* Macq.  
 — Rüssel gelb; Beine nicht verdickt *\*valdiviana* Phil.
43. Beine zum Teil gelb 44.  
 — Beine ganz schwarz 52.
44. Schildchen hinten gelb; Hinterleib an der Spitze gelb *\*dumetorum* Phil.  
 — Keine gelben Teile vorhanden 45.

<sup>1)</sup> Bei dieser Art ist die Färbung der Schwinger nicht angegeben.

45. Hinterschenkel verdickt und unten gedornt 46.  
 — Hinterschenkel einfach, unten ungedornt 47.
46. Schenkel schwarz mit gelber Spitze \*lobalis Thoms.  
 — Schenkel gelb, mit breitem schwarzem Ringe \*annulata Phil.
47. Thoraxrücken ohne deutliche Längsstriemen 48.  
 — Thoraxrücken mit drei Längsstriemen 49.
48. Rüssel kurz \*pachystoma Phil.  
 — Rüssel lang \*coxalis Thoms.
49. Schenkel schwarz 50.  
 — Schenkel mehr oder weniger gelbrot 51.
50. Metatarsus der mittleren Beine, Hinterschienen und Spitze der hinteren  
 Schenkel rotgelb *polita* Macq.  
 — Nur die Hinterschienen und die hinteren Metatarsen der Wurzel rotgelb  
 \*collina Phil.<sup>1)</sup>
51. Schenkel an der Spitze verdunkelt; Genitalien ♂ groß und lang  
 behaart \*macrura Big.  
 — Nur die Vorderschenkel an der Spitze geschwärzt; männliche Genitalien  
 klein *uruguayensis* F. Lynch.
52. Rückenschild nicht gestriemt 53.  
 — Rückenschild mit vier Striemen 54.
53. Acrostichalborsten vorhanden; Tarsen unten deutlich borstig  
*gracilipes* Phil.  
 — Acrostichalborsten fehlend; Tarsen unten nicht borstig *bullata* Bezzi.
54. Thoraxseiten mit breiten grauen Flecken; Hinterleib des Weibchens an  
 der Spitze gelb \*variabilis Big.<sup>2)</sup>  
 — Anders gefärbte Arten 55
55. Prothorakalstigma schwarz; Stirn des Weibchens mit vielen Borsten;  
 Acrostichalborsten deutlich vorhanden und lang *micropyga* Bezzi.  
 — Prothorakalstigma weiß, Stirn des Weibchens mit wenigen Borsten;  
 Acrostichalborsten kurz und ziemlich undeutlich *leucostigma* n. sp.

<sup>1)</sup> Diese Art ist ganz wahrscheinlich mit der vorhergehenden zusammenfallend.

<sup>2)</sup> Diese Art scheint mit *dumetorum* Phil. nahe verwandt zu sein.

37. *Empis rubida* Wheel. et Mel., Biol. centr. amer., I. 368. 7. (1901);  
Mel., Trans. amer. entom. Soc., XXVIII. 302. t. IX. f. 121 (1902).

Zwei weibliche Exemplare aus Bolivien, S. Carlos, Mapiri, 800—1200 m, 21. I. 03.

Eine leicht kenntliche kleine Art, welche mit der Beschreibung ganz gut übereinstimmt; die Tarsen sind nur an der Spitze schwarz. Rückenschild mit kurzen gelben Borsten; die wenigen Metapleuralborsten gleichfalls gelb; Axillarwinkel nicht vertieft, rechtwinklig. Eine Verwandtschaft mit den *Lamprempis*-Arten ist offenbar vorhanden.

38. *Empis induta* n. sp. ♀.

Omnino lutea, opaca, nigrosetosa, thoracis dorso postice paullo albo-pruinoso, capite nigro, antennis, halteribus pedibusque luteis, haustello corporis longitudinem fere aequante, alis latis luteo-hyalinis praesertim ad marginem anticum distincte lutescentibus, macula stigmatica elongata pallidissime lutea, nervis luteis, nervo transverso apicali brevi incurvo, cellula discoidali parva trapezoidali. vena sexta usque ad alae marginem producta, angulo axillari acuto haud profunde inciso.

♀ oculis remotiusculis, terebra brevissima vix prominenti, femoribus tibiisque posticis longe nigropennatis.

Long. corp. mm  $4\frac{1}{4}$ , alar. mm  $4\frac{1}{2}$ .

Ein einziges Weibchen aus Peru, Puerto Bermudes, Pichisfluß, 300 m. 14. XII. 03.

Diese Art unterscheidet sich von den andern gelb gefärbten Arten besonders durch die lang gefiederten Beine; sie scheint mit unserer europäischen *dispar* Scholtz verwandt zu sein, und zeigt auch die Kennzeichen der Gruppe *nigricans*.

Kopf rundlich, ganz schwarz, nur die Stirn an den Seiten graugelblich, hinten lang schwarz beborstet; Mundrand schwarz glänzend; Fühler ganz gelb, nur der Griffel schwarz, drittes Glied kurz kegelförmig; Rüssel äußerst lang, oben gelb, unten und an der Spitze schwarz. Rückenschild ganz gelb, glanzlos, hinten vor dem Schildchen zart weiß bereift;



auf den Pleuren kommen einige wenig deutliche schwärzliche Flecken vor; Prothorakalstigma gelb und schwarz gerandet; Acrostichalborsten ziemlich lang, zweireihig; Metapleuralborsten schwarz und dicht. Schildchen gelb, abgerundet, ziemlich gewölbt, mit vier schwarzen Borsten am Rande. Schüppchen ziemlich groß, gelb, schwarz gewimpert. Hinterleib kurz und breit, ganz gelb mit undeutlichen dunklen seitlichen Flecken, etwas glänzend, schwarz behaart und beborstet. Beine ganz gelb, kurz schwarz behaart, mit wenigen längeren Borsten; an den Mittelbeinen zeigen die Schenkel nur an der Spitze wenige untere breite Fiedern, die Schienen sind dagegen der ganzen Länge nach außen lang gefiedert; an den Hinterbeinen sind die Schenkel unten der ganzen Länge nach gefiedert, die Schienen außen der ganzen Länge nach und innen an der Wurzel gefiedert; hintere Metatarsen oben in der Mitte mit einer langen Borste. Flügel ziemlich breit und deutlich gelb besonders am Vorderrande; dritte Längsader ganz gerade, etwas vor der Flügelspitze mündend.

Anmerkung. In der Sammlung von Prof. Hermann findet sich ein nicht gut erhaltenes Weibchen aus Chile, Concepcion, IX. 06, deren Fühler abgebrochen sind. Dasselbe gehört zu einer neuen Art bei *micans* Schin., mit ganz schwarzem Kopfe; Rüssel kurz und dick; Beine nicht gefiedert.

39. *Empis lucidilabris* Bezzi, Ann. Mus. nation. hung., III. 440. 18. (1905).

Zwei Weibchen aus Peru, Chanchamayo, 800 m, 11—12, I, 04; die Original Exemplare stammten gleichfalls aus Peru (Callanga).

Dieses ist das noch nicht beschriebene Weibchen; es stimmt gut mit dem Männchen; die Zwischenräume zwischen den samt schwarzen Striemen des Rückenschildes sind deutlich glänzend; Beine sehr dicht und lang schwarz bewimpert, aber nicht eigentlich gefiedert; Hinterschienen und Hintermetatarsen mit einzelnen sehr langen Borsten. Flügelzeichnung viel deutlicher, die Queradern sind breit dunkel gesäumt, so daß zwei schwärzliche Binden auf der Flügelmitte hervortreten; Flügelspitze breit verdunkelt.

Die Art scheint mit *E. columbi* Schin., nur im weiblichen Geschlechte bekannt, sehr viele Verwandtschaft zu haben; ist aber bedeutend größer,

und zeigt lange Acrostichal- und Dorsozentralborsten. Eine Verwandtschaft mit den *Lamprempis*-Arten ist auch hier nicht zu verkennen.

40. *Empis poecila* Phil., Verh. zool. bot. Ges., XV. 753. 6. (1865).

Ein Exemplar dieser riesigen wunderschönen Art aus Chile findet sich in der Sammlung von Prof. Hermann.

Zu der ziemlich ausführlichen Beschreibung Philippis habe ich nur folgendes hinzuzufügen. Augen ♂ zusammenstossend, oben und unten mit ziemlich gleichen Feldern; Taster groß und kurz, schwarz behaart; Hinterkopf hell behaart. Rückenschild oben ohne deutliche Borsten; Metapleuren weiß behaart, ohne Borsten; Schildchen klein, mit vielen sehr feinen Borsten am Rande. Hüften mit langen weißen Haaren; Beine ganz kurz schwarz behaart, ohne längere Borsten. Hypopygium schwarz, klein, ganz geschlossen, abgerundet. Dritte Flügellängsader nach dem Ursprung des Vorderastes nach unten gerichtet, so daß sie ziemlich weit hinter der Flügelspitze mündet; Spitzenquerader kurz, gerade, schief gelegen; Discoidalzelle ziemlich lang, trapezförmig, die zwei aus ihr vorn entspringenden Adern an der Spitze etwas nach unten gekrümmt; Analzelle ganz schmal; sechste Längsader vollständig; Axillarwinkel wenig tief, rechtwinklig. An der Wurzel der Discoidalzelle bemerkt man ein ganz kleines weißliches Fleckchen. Hilfsader in die Costa einmündend.<sup>1)</sup>

41. *Empis liodes* n. sp. ♀.

Nigra, opaca thorace vittis tribus longitudinalibus atris interstitiis nitentibus, antennis nigris, pedibus rufescentibus posticis tamen infuscatis, halteribus obscure lutescentibus haustello capite bilongiore, alis nigrofuscis dilatatis, cellula discoidali parva, nervis omnibus integris, nervo transverso apicali brevi incurvo, angulo axillari recto haud profundo.

♀ oculis remotiusculis, terebra brevi retracta, femoribus tibiisque posterioribus longe fusco-pennatis.

<sup>1)</sup> Wegen der nicht beborsteten (nur behaarten) Metapleuren und dem nicht vor der Costa gebrochenen Vorderast der ersten Längsader steht diese Art in der Gattung *Empis* ziemlich isoliert; leider ist das einzige Exemplar nicht gut erhalten.

Long. corp. mm  $4\frac{1}{2}$ , alar. mm  $4\frac{3}{4}$ .

Ein einziges Weibchen aus Peru, Puerto Bermudes, Pichisfluß, 300 m, 11. XII. 03.

Eine kleine Art, welche zu dem Verwandtschaftskreise unserer *chioptera* gehört; die schwarzglänzenden Interstitien zwischen den Thoraxstriemen sind recht bemerklich, sonst ist die Art von *pennipes* oder *pennaria* nicht weit verschieden.

Kopf ganz schwarz, hinten mit ziemlich langen schwarzen Borsten; Rüssel gelb; drittes Fühlerglied kurz kegelförmig, mit ziemlich langem dickem Griffel; Stirnseiten nur vorn mit einigen kurzen Börstchen. Thorax ganz schwarz und glanzlos, nur die Interstitien glänzend; Borsten ziemlich lang, Acrostichalen gänzlich fehlend; Metapleuralborsten schwarz, lang und dicht; Schildchen mit vier langen Borsten, die mittleren länger und gekreuzt. Hinterleib dick, am Ende stumpf, schwarz, glanzlos, sparsam schwarz behaart. Die vier vorderen Beine und alle Tarsen lichtgelb wie die Vorderhüften; an den Mittelbeinen sind die Schenkel oben sehr kurz, unten lang gefiedert, und die Schienen aufsen der ganzen Länge nach und innen an der Wurzel gefiedert; an den Hinterbeinen die Schenkel oben kurz, unten lang, die Schienen innen und aufsen lang gefiedert, an der Innenseite sind beide gegen die Spitze zu ungefedert; alle Metatarsen dünn, etwas beborstet. Flügel fast abgerundet und gleichmäßig geschwärzt; dritte Längsader gegen die Spitze zu etwas nach unten gerichtet; die vordere aus der Discoidalzelle entspringende Ader ganz gerade; Randmal fleck kaum angedeutet.

42. *Empis angustipennis* n. sp. ♀.

Nigra, opaca, thorace vittis tribus atris longitudinalibus vix distinctis, antennarum articulis basalibus luteis, pedibus obscure lutescentibus metatarso antico dilatato tibiisque omnibus eximie setosis, halteribus fusco-nigris, haustello capite thoraceque longiore, alis fuscis longis valde angustatis, nervis omnibus integris, cellula submarginali secunda perparva, angulo axillari acuto.

♀ oculis remotis, fronte lateribus distincte setosa dimidio antico cinereo-canesciente, terebra exserta infra mucronata lamellis apicalibus longis nigris, pedibus non pennatis.

Long. corp. mm 5—5½, alar. mm 5½—6.

Drei Weibchen aus Peru, Umahuankiali, Urubambafuß, 500 m, 15.—19. IX. 03.

Eine durch schmale lange Flügel ausgezeichnete Art, welche bei *atrifemur* W. et M. zu stehen scheint.

Kopf ganz schwarz, am Scheitel und in der Gegend der Ocellen glänzend, sonst glanzlos; Stirn breit, an den Seiten mit einer Reihe von vier bis fünf nach vorn gebogener Börstchen; vorn über dem Fühler weißgrau; Rüssel gelb; drittes Fühlerglied ganz schwarz, schmal kegelförmig, mit dickem Griffel; Hinterkopf mit vielen ziemlich starken Borsten. Thorax ganz schwarz, glanzlos, undeutlich dreistriemig, an den Schulterschwielen und an den Seiten vor dem Schildchen schmal rötlich; oben mit langen Borsten. Die Acrostichalen kurz aber deutlich; Pleuren nackt, dunkelgrau bereift, Metapleuralborsten schwarz, sehr lang; Rückenschild oben schwarz, unten rötlich, mit vier Randborsten, die mittleren stärker und gekreuzt. Hinterleib schwarz, an den Seiten grauweißlich bereift, zugespitzt, ziemlich lang und schwarz behaart und beborstet. Beine samt den Hüften sehr dunkel rötlich, nur die Vorderschenkel etwas heller; die Schenkel sind ziemlich kahl, nur die hinteren oben ziemlich dicht kurz behaart und außen gegen die Spitze zu mit zwei bis drei Borsten; die Schienen dagegen, besonders die hinteren, sind außen und hinten mit vielen starken aufrechten Borsten bewaffnet; auch die Tarsen sind ziemlich stark beborstet. Flügel auffallend schmal, gleichmäßig schwarz getrübt, mit undeutlichem Randmal fleck; dritte Längsader gerade vor der Flügelspitze einmündend und ihr Vorderast schief und ganz kurz, so daß die zweite Submarginalzelle auffallend klein ist; Discoidalzelle auf der Mitte der Flügel mündend; die zwei vorderen aus ihr entspringenden Queradern lang, gerade und parallel.

43. *Empis penniventris* n. sp. ♀.

Nigra, nitida, leviter cinereo-pollinosa, thoracis dorso non vittato, pedibus halteribusque nigricantibus, antennarum

articulis basalibus luteis, alis purissime hyalinis, nervis luteis, macula stigmatica pallide lutescenti, nervo apicali transverso recto fere perpendiculari, angulo axillari recto.

♀ oculis remotiusculis, terebra retracta, abdominis margine laterali metatarsisque anticis et posticis supra longe nigro-pennatis.

Long. corp. mm  $3\frac{1}{2}$ , alar. mm  $3\frac{1}{2}$ .

Ein einziges Weibchen aus Peru, Chanchamayo, 800 m, 11. I. 04.

Eine Art aus der Gruppe der *chioptera*, wegen der gefiederten Bauchseiten sehr eigentümlich.

Stirn schwarz glänzend, vorn über den Fühlern weißgrau, an den Seiten nicht beborstet, nur ganz vorn mit einigen Härchen; drittes Fühlerglied fehlend; Rüssel gelb, von Thoraxlänge. Rückenschild glänzend, zart weißgrau bereift, mit langen schwarzen Borsten und deutlichen Acrostichalen; Metapleuralborsten lang, schwarz; Schildchen vierborstig. Hinterleib schwarz glänzend, zart weißlich bereift, ziemlich nackt, an den Seiten unten mit schwarzen Fiedern. Beine ganz schwarz, nur etwas gelb durchscheinend, behaart und beborstet; eine eigentliche Befiederung ist aber nur an den Vorder- und Hintermetatarsen zu beobachten; vorderer Metatarsus nicht verbreitert. Flügel mit vollständigen, gelblichen Längsadern, die dritte gerade und vor der Spitze mündend; die zwei vorderen aus der Discoidalzelle entspringenden Adern nicht parallel, etwas gebogen, divergierend; zweite Submarginalzelle klein.

44. *Empis chiragra* n. sp. ♂.

Nigra, nitidiuscula, antennarum articulis basalibus pedibus ventreque luteis, halteribus nigricantibus, haustello capite thoraceque simul sumptis longiore, alis cinereo-hyalinis, macula stigmatica elongata pallide-fusca, nervis omnibus integris lutescentibus, vena transversa apicali brevi paullo obliqua, cellula discoidali parva, angulo axillari acuto.

♂ oculis connexis, ventre in medio dentato genitalibus parvis peni abscondito, tibiis posticis apice clavatis et den-

tatis, metatarso postico basi subtus apophysii parva lamelliformi lutea semilunari instructo.

Long. corp. mm  $3\frac{1}{4}$ — $3\frac{1}{2}$ , alar. mm  $3\frac{3}{4}$ —4.

Zwei Exemplare aus Peru, Larestal, 1000—2000 m, 10. VIII. 03; sie sind ölig geworden.

Eine Art aus der Gruppe *chiotera*, mit eigentümlichen Hinterbeinen und gezähntem Bauche.

Rüssel gelb mit schwarzen Lippen; Fühler kurz, drittes Glied fast abgerundet oder sehr kurz eiförmig, schwarz, mit dickem Griffel. Rückenschild oben mit kurzen Borsten; Metapleuralborsten schwarz; Schildchen mit nur zwei apikalen gekreuzten Randborsten. Hinterleib am Bauche licht gelb, am Grunde etwas dunkelgelb durchscheinend, dunkler behaart; Bauch nach der Mitte mit einem starken mittleren Zahne; Hypopygium klein, die obere Seitenlamelle armförmig, der Faden nicht hervortretend. Beine gelb samt den Hüften, nur die Tarsen verdunkelt; hintere Trochanteren mit einer stumpfen Tuberkel; die Behaarung ist kurz und längere Borsten fehlen fast gänzlich; Vordermetatarsen nicht verbreitert; Hinterschienen am Ende verdickt, vor der Spitze oben gezähnt und mit längeren Haaren, auch unten vor der Spitze steht eine schwarze längere Borste; hinterer Metatarsus dünn, an der Wurzel mit einer kleinen abgerundeten licht gelben Lamelle. Dritte Flügellängsader etwas nach unten gerichtet, mit der vierten parallel laufend.

45. *Empis spinifera* n. sp. ♂.

Nigra, nitidiuscula, thoracis dorso non vittato, antenarum articulis basalibus ventre pedibusque luteis, coxis tamen tarsis tibiisque posticis nigricantibus, halteribus albidis, haustello capite thoraceque longiore, alis ex luteseenti hyalinis levissime infuscatis, nervis fuscis, sexto apicem versus spurio interdum evanescente, macula stigmatica elongata pallide fusca, angulo axillari acuto.

♂ oculis connexis, genitalibus parvis, peni clauso supra ad basin processu valido dentiformi retro incurvo praeditis, tibiis posticis dilatatis longe setosis.

Long. corp. mm  $4\frac{1}{2}$ —5, alar. mm  $4\frac{1}{2}$ .

Zwei Exemplare aus Peru, Larestal, 2000—3000 m, 9.—10. VIII. 03.

Eine gleichfalls in der Gruppe der *chioptera* stehende Art, im Habitus an unsere *rufiventris* Meig. erinnernd; von der vorigen, in deren Gesellschaft sie zu leben scheint, weit verschieden.

Rüssel gelb; drittes Fühlerglied kurz, mit dickem Griffel. Rückenschild oben glänzend, an den Pleuren dichter grau bestäubt, die Borsten ziemlich lang und alle schwarz, auch die der Metapleuren; Schildchen grau, zweiborstig. Hinterleib am Bauche hell-, an der Wurzel dunkelgelb durchscheinend, mit ziemlich langen schwarzen Haaren und Borsten; Genitalien klein, lang behaart, geschlossen, oben am Grunde mit einem starken nach vorn gerichteten zahnartigen Fortsatze. Beine ziemlich lang behaart, mit einfachen Tarsen; die vier vorderen sind gelb, die einzelnen Tarsenglieder am Ende geschwärzt; Hinterbeine länger und stärker, verdunkelt, nur die Schenkel in der Wurzelhälfte licht gelb; Hinterschienen dicht behaart und aufsen mit vielen langen Borsten. Dritte Flügellängsader gerade, ihr Vorderast kurz und etwas schief; Discoidalzelle klein; sechste Längsader wie abgekürzt erscheinend.

46. *Empis polita* Macq., Dipt. exot. I. (2) 162 (278), 7. (1839); Blanch. ap. Gay, Hist. fis., VII. 373 (1852); Phil., Verh. zool. bot. Ges., XV. 753 (1865).

Viele Exemplare beiderlei Geschlechts aus Chile, Valparaiso, 12. bis 13. IX. 02 und Quillota, 1000 m, 20.—21. IX. 02.

Stimmt gut mit der Beschreibung; nur die Beinfärbung scheint etwas veränderlich zu sein; daher *E. collina* Phil. wahrscheinlich keine selbständige Art darstellt. Augen beim ♂ zusammenstößend, beim ♀ ziemlich breit getrennt, die Stirn an den Seiten beborstet. Drittes Fühlerglied verlängert. Acrostichal- und Dorsocentralborsten lang und fein, mehrreihig; Metapleuralborsten dicht, schwarz; Prothoracalstigma schwarz; Schildchen am Rande mit vier bis sechs Borsten. Hinterleib mit langen schwarzen Borsten und Haaren; Laterallamellen des Hypopygiums vorn zugespitzt, dreieckig, Faden sehr dick, gelb mit schwarzer Spitze, vorstehend; Legeröhre dick walzenförmig, mit kurzen Endlamellen. Beine des Männchens ziemlich lang

beborstet, besonders die Mittel- und Hinterschienen; hintere Metatarsen unten beborstet; Beine des ♀ nicht gefiedert, ziemlich nackt, Borsten der Schienen kurz. Dritte Flügellängsader an der Spitze nach unten gerichtet; Discoidalzelle klein; sechste Längsader an der Spitze etwas verschwindend; Axillarwinkel spitzig. Beim Weibchen ist an den Hinterbeinen die gelbe Färbung mehr ausgebreitet als bei dem Männchen; die hinteren Hüften sind in beiden Geschlechtern ziemlich groß, wie aufgeschwollen.

47. *Empis gracilipes* Phil., Verh. zool. bot. Ges., XV. 755. 13. (1865).

Ein Pärchen aus Bolivien, Kordillere, 4000—5000 m, 24. XII. 02.

Stimmt ziemlich gut mit der kurzen Beschreibung und gehört sicher in denselben Verwandtschaftskreis wie die vorigen. Die Hinterschenkel sind sehr verlängert; Rückenschild nicht deutlich gestriemt. Die Art scheint meiner *bullata* nahe zu stehen.

Augen beim ♂ zusammenstoßend, beim ♀ breit getrennt, Stirn an den Seiten beborstet; Rüssel ein wenig länger als der Kopf, schwarz; Fühler lang, drittes Glied sehr stark verlängert, mit ganz kurzem Griffel. Thoraxborsten sehr lang, alle schwarz; Prothoracalstigma schwarz; Schildchen vierborstig. Hinterleib an den Einschnitten mit langen Borsten, am Ende beim Männchen etwas angeschwollen; Genitalien ♂ mittelgroß, mit sehr dicken kurzen schwarzen Fäden; Hinterleib beim ♀ am Ende breit stumpf, so daß die dünne, unten geschwielte Legeröhre plötzlich hervorragt. Beine ganz schwarz und in beiden Geschlechtern ganz einfach; Mittel- und Hinterschienen ziemlich lang beborstet; hintere Metatarsen unten borstlich. Flügel ziemlich lang und schmal, etwas graulich verdunkelt, besonders beim ♀; Spitzenquerader sehr schief; Discoidalzelle klein; sechste Längsader vollständig; Axillarwinkel spitzig.

48. *Empis leucostigma* n. sp. ♀.

Nigrocinerascens, opaca, thoracis dorso vittis quatuor aequedistantibus nigris, antennis pedibusque omnino nigris, halteribus albidis stigmatum prothoracis albo, alis elongatis dilute-fuscis, macula stigmatica vix distincto, cellula sub-



marginali secunda perparva, nervo sexto integro, angulo axillari acuto.

♀ fronte parum lata lateribus parum setosa, terebra brevi basi lata lamellis apicalibus longissimis, pedibus simplicibus.

Long. corp. mm  $5\frac{1}{2}$ , alar. mm  $6\frac{1}{2}$ .

Ein einziges Weibchen aus Peru, Cuzco, 3500 m, 8. IV. 05.

Diese Art steht offenbar mit den zwei vorhergehenden in derselben Gruppe, und ist mit meiner *micropyga* nahe verwandt; von allen verwandten unterscheidet sie sich durch das weiße Prothoracalstigma.

Stirn ziemlich schmal, an den Seiten mit wenigen Borsten; drittes Fühlerglied verlängert und zugespitzt, mit kurzem Griffel; Taster schwarz; Rüssel so lang wie Kopf und Thorax zusammen, gelb. Die mittleren schwarzen Striemen des Rückenschildes sind sehr deutlich, die äußeren breiter und wenig deutlich; Acrostichal- und Dorsocentralborsten kurz, auf den grauen Striemen stehend; Metapleuralborsten schwarz. Schildchen mit vier längeren Randborsten, dazwischen einige kürzere. Schüppchen gelblich. Hinterleib nur sehr wenig schwarz behaart, an der Spitze allmählich verdünnt; Legeröhre kurz, breit, unten mit einer Tuberkel, mit sehr langen Apikallamellen, Beine lang, ziemlich kahl, nur die vier hinteren Schienen mit einigen Borsten; Metatarsen borstig. Flügel sehr lang; dritte Längsader an der Spitze nach unten geneigt, ihr Vorderast sehr kurz und ziemlich steil; Discoidalzelle klein, etwas vor der Flügelmitte mündend; Vorderrandzelle an der Spitze verdunkelt.

### 8. *Atrichopleura* nov. genus.

Generi *Ramphomyia* prima vista simillimum, at setis metapleuralibus nullis mox dignoscendum. Notis reliquis vero cum genere *Hilarempis* convenit, apud quod in systemate locandum.

Diese neue Gattung scheint wohl auf den ersten Blick gleich der Gattung *Ramphomyia* zu sein; die Metapleuralborsten fehlen jedoch gänzlich. Hilfsader vor der Randader abgebrochen; Rüssel kurz, gewöhnlich nicht länger als der Kopf; Borsten deutlich vorhanden. Der Habitus und die Gestalt der männlichen Genitalien ganz wie bei der Gattung *Hilarempis*,

bei welcher sie einzureihen ist. Augen in beiden Geschlechtern getrennt, Stirn an den Seiten beborstet, Beine einfach, beim Weibchen ohne längere Borsten; Flügelrandader den ganzen Flügel umlaufend.

Als typische Art ist die unten beschriebene *A. Schnusei* zu betrachten. Die vier von Herrn Schnuse entdeckten Arten lassen sich wie folgt unterscheiden.

1. Körper kurz und stark; Flügel kurz und breit; Beine schwarz oder grau, höchstens mit gelben Knien 2.
- Körper verlängert, zart; Bauch gelbdurchscheinend; Flügel lang und schmal; Beine gelb 3.
2. Rückenschild glänzend schwarz, ohne Striemen; Rüssel deutlich nach hinten gekrümmt; Beine ganz schwarz *nitida* n. sp.
- Rückenschild grau, mit dunklen Striemen; Rüssel gerade; Beine grau mit gelben Knien *crassa* n. sp.
3. Gesicht behaart; Hüften hellgelb; die vier vorderen Beine beim Männchen lang behaart *hirtipes* n. sp.
- Gesicht nackt; Hüften grau, mehr oder weniger verdunkelt; vordere Beine beim Männchen kürzer behaart *Schnusei* n. sp.

49. *Atrichopleura nitida* n. sp. ♂ ♀.

Nigra, nitidissima antennis pedibusque concoloribus palpis luteis halteribus luride albidis, capite retro et abdomine albopilosis, haustello valido capite aequilongo retro distincte incurvo, pedibus breviter pilosis setis nullis, alis cinereo hyalinis corpore aequilongis, macula stigmatica elongata fusca, nervo sexto spurio abbreviato, angulo axillari recto.

♂ genitalibus compressis supra incurvis, metatarsis anticis paulo incrassatis.

♀ terebra brevi retracta lamellis parvis, metatarsis simplicibus.

Long. corp. mm 2½—3, alar. mm 2½—3.

Einige Exemplare beider Geschlechter aus Peru, Sicuani, 3500 m, 8.—9. VI. 03.

Ganz vom Aussehen einer *Hilara* aus der Gruppe der kleinen schwarzglänzenden Arten, aber mit gebrochener Hilfsader und einfacher dritter Längsader. Stirn in beiden Geschlechtern ungefähr von gleicher Breite, an den Seiten und oben mit schwarzen kurzen Borsten; Gesicht nackt; Hinterkopf oben schwarz beborstet, unten und an den Seiten weiß behaart; Rüssel dick, zugespitzt, ganz schwarz, etwas stark nach hinten gekrümmt; drittes Fühlerglied lang, kegelförmig, mit dickem Griffel, welcher am Ende eine kleine Borste trägt. Thoraxrücken, Meso- und Sternopleuren sehr stark glänzend; Dorsocentralborsten kurz, Seitenborsten lang, alle schwarz; Schildchen mit vier Borsten, die mittleren gekreuzt. Schüppchen schmutziggelblich, weiß behaart. Hinterleib stark glänzend, weiß behaart, ohne Borsten; männliche Genitalien ganz wie bei *Hilara*. Beine kurz und stark, ziemlich dicht und kurz weiß behaart, ohne alle Borsten, von glänzender schwarzer Färbung. Flügel verhältnismäßig kurz und breit, mit stark auftretenden Flügellappen; dritte Längsader an der Spitze etwas nach unten geneigt; alle Längsadern schwärzlich, nur am Grunde gelblich, sechste ganz verschwindend; Discoidalzelle ziemlich klein, trapezoidal, auf der Mitte der Flügel.

50. *Atrichopleura crassa* n. sp. ♂ ♀.

Ex cinereo cana, thoracis dorso vittis quatuor longitudinalibus fuscis, oculis in utroque sexu late remotis, haustello capiti circiter aequilongo, antennis pedibusque nigris geniculis luteis, palpis magnis halteribusque luteo-albidis, alis hyalinis macula stigmatica elongata dilutissime lutea, nervo longitudinali primo apice distincte dilatato, nervo tertio longe ab alae radice oriente, lobo alari valde prominenti.

♂ abdomine segmentorum basi tantum atra, genitalibus magnis nigris adpressis.

♀ abdomine atro unicolore apice tantum cinereo, terebra brevi exserta lamellis terminalibus elongatis.

Long. corp. mm  $2\frac{1}{2}$ — $2\frac{3}{4}$ , alar. mm  $2\frac{1}{2}$ — $2\frac{3}{4}$ .

Ein Pärchen aus Chile, Quillota, 1000 m, 20. IX. 02.

Eine weißgraue Art, von ziemlich gedrunenem Körperbaue, welche wegen der großen weißlichen Taster besonders ausgezeichnet ist; im Habitus steht sie von einigen *Microphorus*-Arten nicht weit entfernt.

Hinterkopf oben mit einigen schwarzen Borsten, unten dicht weiß behaart; Ocellarborsten stark, weit entfernt; Stirnseiten mit einigen kurzen Börstchen; Fühler ganz schwarz, die Basalglieder ganz kurz und beinahe nackt, das dritte Glied lang, kegelförmig; Endgriffel ziemlich dünn, kürzer als das dritte Glied, mit kurzer Endborste; Taster keulenförmig verdickt, sparsam behaart; Rüssel gerade, zugespitzt, schwarz, mit schwärzlichen Lippen. Rückenschild oben mit schwarzen Börstchen, die acrostichalen zweireihig, hinten fehlend; zwei Paare von größeren hinteren Dorsocentralen und eine Reihe von kürzeren vorderen; Pleuren hellgrau mit schwarzen Stigmen, ganz nackt. Schildchen mit vier Randborsten, die mittleren stärker aber nicht gekreuzt. Schüppchen weißgelb, hell behaart. Hinterleib mit sparsamer kurzer heller Behaarung; männliche Genitalien groß, kurz gestielt, nach oben gebogen, hinten gekielt, oben glänzend schwarz. Beine ganz schwarzgrau mit hellgelben Knien; sie sind kurz flaumig, ohne längere Borsten; beim Männchen ist der vordere Metatarsus ein wenig verdickt. Flügel ganz glashell; Hilfsader weit vor der Costa mündend; dritte Längsader gerade, vor ihrer Mündung etwas nach unten gebogen; sechste Längsader abgekürzt und verschwindend; Axillarwinkel recht; Flügeladern an der Wurzel gelb; Costa an der Wurzel mit langer Borste; die schwielenartige Erweiterung der ersten Längsader gelb; Ursprungsstelle der dritten Längsader weit hinter der oberen Wurzelquerader.

Anmerkung. Diese Art hat gewiss viele Ähnlichkeit mit denjenigen *Microphorus*-Arten, welche weißgrau gefärbt sind und in beiden Geschlechtern getrennte Augen besitzen, wie z. B. *truncatus* Loew. Mit der vorigen Art *nitida* bildet sie eine Gruppe von Arten, welche von der folgenden Gruppe besonders durch kürzere gedrunenere Statur verschieden ist; von den echten *Microphorus*-Arten unterscheiden sie sich wegen des längeren Rüssels, der etwas verdickten vorderen Metatarsen des Männchens und der Ursprungsstelle der dritten Längsader, welche von der Flügelwurzel entfernt ist; die zweite Längsader ist verhältnismäßig kürzer als bei *Microphorus*. Bei

*M. rostellatus* Loew und verwandten ist der Rüssel immer viel kürzer als bei diesen *Atrichopleura*-Arten.

Von den bisher beschriebenen südamerikanischen *Microphorus*-Arten, scheint *palliatus* Coquill. eine echte Art zu sein; *scapuliferus* und *semifubvus* Bigot sind dagegen ohne Zweifel nicht hierher gehörend, über ihre Stellung zu urteilen scheint mir aber unmöglich.

51. *Atrichopleura hirtipes* n. sp. ♂ ♀.

Griseo-fusca, opacula, antennis nigris, palpis halteribusque nigrofusca, pedibus cum coxis luteis tarsis nigricantibus, abdomine basi et subtus lutescente, haustello capiti aequilongo recto, frontis lateribus setis longis praeditis, facie barbata, alis angustis corpore valde longioribus, griseo-fuscescentibus, macula stigmatica vix ulla, nervo sexto abbreviato, angulo axillari late obtuso.

♂ tibiis metatarsisque quatuor anterioribus longe villosis, genitalibus compressis supra incurvis apice spinigeris.

♀ pedibus non villosis, terebra crassa exserta, lamellis apicalibus elongatis.

Long. corp. mm 3—3½, alar. mm 4—4½.

Einige Exemplare aus Peru, Larestal, 2000—4000 m, 9. VIII. 03 und Rosalina, Urubambafluß, 24. VIII. 03.

Eine mit der vorigen zwar verwandte Art, aber weit verschieden durch die schmalen und langen Flügel, die beborsteten Beine und Hinterleib und den nicht gekrümmten Rüssel. Stirn in beiden Geschlechtern gleich breit, an den Seiten mit langen Borsten; Gesicht unter den Fühlern deutlich behaart; Rüssel stark, zugespitzt, schwarz, ganz gerade; Taster groß und nach oben gebogen; Lippen kurz und dick, am Ende verbreitert. Drittes Fühlerglied ganz wie bei der vorigen Art. Thoraxrücken dunkelgrau, etwas glänzend, mit undeutlichen Striemen; Acrostichal- und Dorsocentralborsten ziemlich dicht und lang; Schildchen mit sechs langen Borsten, die mittleren gekreuzt. Schüppchen bräunlich, lang dunkel behaart. Hinterleib lang, hell behaart, bei dem Männchen mit langen dunkeln Borsten an den

Einschnitten. Genitalien etwa wie bei den vorigen, am Ende oben mit einem glänzend schwarzen kleinen Zahne. Beine ganz gelb, nur die Hinterschienen und Tarsen schwärzlich, beim Weibchen ziemlich kahl, beim Männchen lang behaart; die Hinterschienen aufsen mit langen gleichentfernten Borsten; Vordermetatarsus kurz, ziemlich wenig verdickt. Flügel schmal und lang, und deutlich verdunkelt; Flügelgeäder aber wie bei der vorigen, nur die sechste Längsader deutlicher; Flügellappen weniger vortretend, Axillarwinkel daher viel breiter offen.

52. *Atrichopleura Schnusei* n. sp. ♂ ♀ (Taf. Fig. 4).

Praecedenti simillima at paullo minor et abunde distincta facie non barbata, coxis in utroque sexu nigricantibus, alis griseo-hyalinis macula stigmatica fusca elongata distincta, pedibus anterioribus maris minus villosis metatarsoque antico paullo crassiori.

Long. corp. mm 3—3 $\frac{1}{4}$ , alar. mm 4—4 $\frac{1}{4}$ .

Sehr viele Exemplare beider Geschlechter aus Peru, Valparaiso, 12. IX. 02 und Cuzco, 3400 m, III. 05.

Mit der vorigen sehr nahe verwandt. Gesicht unter den Fühlern ganz nackt. Thorax und Schildchenborsten etwas in das gelbliche ziehend; Hinterleib des Männchens minder behaart und mit kürzeren Borsten an den Einschnitten; Genitalien etwas kleiner.

### 9. *Hilarempis* Bezzi.<sup>1)</sup>

Herr Schnuse hat in Südamerika auch echte *Hilara*-Arten gefunden, und daher dürften vielleicht nicht alle die Arten, welche ich 1905 in meiner Gattung eingereiht habe, zu derselben wirklich gehören; nach

<sup>1)</sup> Kürzlich hat Herr J. Brèthes aus Buenos Aires in seiner Arbeit „Dípteros é Hime-nópteros de Mendoza, Annal. d. Mus. nac. de Buenos Aires, XIX. 1909“ p. 92 eine neue Gattung *Heterempis*, mit der neuen Art *H. mendozana*, beschrieben. Die neue Gattung unterscheidet sich von *Hilarempis* nur durch den verdickten Metatarsus der Vorderbeine beim Männchen; ich zweifle sehr an ihrer Selbständigkeit, da es echte *Hilarempis*-Arten mit deutlich verdickten Vordermetatarsen gibt.

Philippis kurzen Beschreibungen ist auch sehr schwierig zu entziffern, ob man es mit *Empis*- oder *Hilarempis*-Arten zu tun hat. Ich gebe hier folgende Tabelle für die echten und für die südamerikanischen, nur wahrscheinlich echten *Hilarempis*-Arten.

1. Alle Schenkel unten mit dornartigen Borsten und die vorderen deutlich verdickt; Schwinger weiß 2.
- Schenkel unten unbewaffnet, höchstens die hinteren mit wenigen Borsten, die vorderen nicht verdickt 3.
2. Vordermetatarsus gelb, nur wenig verdickt; kleinere Art; die vier vorderen Schienen innen nackt *spinulosa* Phil.
- Vordermetatarsus schwarz, ziemlich verdickt; gröfsere Art; die vier vorderen Schienen innen gedörnelt *spinosa* n. sp.
3. Gelbe Arten; Fühler an der Wurzel immer gelb; Schwinger hell 4.
- Graue oder schwarze Arten 6.
4. Rückenschild ganz gelb, ungestriemt *\*pallida* Phil.
- Rückenschild mit schwärzlichen Striemen 5.
5. Rückenschild mit drei schwarzen Striemen; Stirn mit breiter schwarzer Binde; Hinterleib nur unten gelb; Flügel verdunkelt *\*Philippii* nom. nov.<sup>1)</sup>
- Rückenschild mit einer schwarzbraunen Längstrieme; Hinterleib gelb mit schwarzer Spitze; Flügel hyalin, am Vorderrande gelblich *\*ochracea* Big.
6. Wurzelglieder der Fühler gelb; Rückenschild mit vier schwärzlichen Längstriemen 7.
- Fühler ganz schwarz oder braun 10.
7. Hinterleib auf dem zweiten und dritten Ringe mit silberner Binde; erste Flügellängsader am Ende schwielenförmig erweitert *\*argyrozona* Phil.
- Hinterleib ohne silberne Binden; erste Längsader am Ende nicht schwielig 8.

<sup>1)</sup> Ich wähle diesen neuen Namen für *Empis fulva* Phil. 1865 nec Macq. nec Walk. 1837.

8. Vordere Metatarsen beim Männchen mit einer besonderen Borste  
*\*vanellus* Schin.
- Vordere Metatarsen ohne solche Borste 9.
9. Flügel hyalin, ohne braungesäumte Adern *\*dumicola* Phil.
- Flügel graulich, mit braungesäumter hinterer Querader  
*xanthocera* Bezzi.
10. Erste Flügellängsader am Ende schwielenförmig erweitert; Hinterleib mit zwei silberglänzenden schmalen Binden; große Art  
*bicingulata* n. sp.
- Hinterleib ohne silberglänzende Binden 11.
11. Hinterschenkel und Hinterschienen verdickt und behaart  
*\*brachystoma* Phil.
- Hinterbeine nicht besonders gebaut 12.
12. Schwinger schwarz oder stark verdunkelt 13.
- Schwinger weiß, gelblich oder schmutzigbraun 18.
13. Rückenschild samtschwarz mit breiter, hinten erweiterter weißgrauer Mittelstrieme; Schildchen weißgrau; Beine schwarz, mit gelben Knien  
*elegans* n. sp.
- Nicht so gefärbte Arten 14.
14. Rückenschild grau, mit deutlichen dunkleren Längsstriemen  
*carinata* n. sp.
- Rückenschild schwarz, ohne deutliche Striemen 15.
15. Flügel deutlich verdunkelt 16.
- Flügel kaum graulich 17.
16. Schenkel oben schwarz, die hinteren mit ziemlich langen schwarzen Haaren  
*\*holosericea* Thoms.
- Schenkel gelblich, die hinteren fast nackt *\*magellanica* Big.
17. Randmal fleck deutlich *\*brachyrrhyncha* Thoms.
- Randmal fleck fehlend; drittes Fühlerglied an der Wurzel erweitert  
*\*laticornis* Big.
18. Thoraxrücken rostbraun mit zwei weißlichen Längsstriemen; Beine gelblich  
*nudifacies* Bezzi.
- Thoraxrücken schwarz oder grau mit vier braunen oder grauen Längsstriemen 19.



19. Thoraxrücken schwarz, vorn mit grauen Striemen; Vorderbeine dicht behaart *\*griseiventris* Phil.  
 — Vorderbeine nicht besonders behaart 20.
20. Graue Art mit etwas verdickten Hinterschenkeln, nur 3 mm lang *\*tephrodes* Phil.  
 — Dunklere, gewöhnlich gröfsere Arten mit nicht verdickten Hinterschenkeln 21.
21. Hinterleib silberglänzend; Hüften hell, gelblich *argentifera* n. sp.  
 — Hinterleib nicht silberglänzend; Hüften grau, dunkel 22.
22. Schenkel gelb, oben mehr oder weniger verdunkelt, wie die Schienen; Hypopygium kieförmig *\*macrocera* Big.  
 — Schenkel schwärzlichgrau, an der Wurzel und Spitze gelb 23.
23. Schienen nackt; Gesicht dicht und lang behaart; Schildchen mit vielen Randborsten (mehr als zehn) *polychaeta* Bezzi.  
 — Schienen beborstet; Schildchen mit nur vier Randborsten 24.
24. Gesicht nackt; Schildchen, aufser den vier Randborsten, ganz nackt; Hypopygium kieförmig *gymnaspis* n. sp.  
 — Gesicht etwas behaart; Schildchen, aufser den vier gröfseren Randborsten, mit einigen anderen kleineren; Hypopygium nicht gekielt *barbatula* n. sp.

53. *Hilarempis spinulosa* Phil., Verh. zool. bot. Ges., XV. 757. 20. [Empis] (1865).

Ein Pärchen in der Sammlung von Prof. Hermann, aus Chile, Concepcion, 1904.

Stimmt ziemlich gut mit der Beschreibung und ist mit der folgenden sehr nahe verwandt. Sechste Längsader kurz und schwach.

54. *Hilarempis spinosa* n. sp. ♂.

Ex griseo canescens, fronte thoracisque vittis quatuor longitudinalibus atris, abdomine vitta media lata longitudinali rubiginosa, antennis coxis femoribusque nigris, tibiis palpisque luteis, halteribus albicantibus femoribus anticis

distincte incrassatis omnibus subtus valide spinosis, tibiis quatuor anterioribus intus spinulosis, alis pure hyalinis, macula stigmatica elongata lutescenti, nervo sexto valido vix abbreviato, angulo axillari recto.

♂ genitalibus parvis superis compressis.

Long. corp. mm  $6\frac{1}{4}$ , alar: mm 7.

Ein Männchen in der Sammlung von Prof. Hermann, aus Chile, Fermas, Tolhuaca, III. 1907.

Stirn ziemlich breit, an den Seiten beborstet; Gesicht grau, nackt; Fühler grauschwarz, mit verlängertem dritten Gliede, und sehr kurzem dickem Griffel, welcher ein kurzes Börstchen am Ende trägt; Hinterkopf oben dicht schwarz beborstet unten weiß behaart; Taster lang, keulenförmig, aufrecht, weiß behaart; Rüssel gerade, länger als der Kopf, gelb mit ganz kurzen dicken schwärzlichen Lippen. Rückenschild mit zwei hinten abgekürzten samtschwarzen Längsstriemen, die seitlichen Striemen sind vorn abgekürzt, breit und mehr fleckenförmig; hinten vor dem Schildchen ein dreieckiger weißgrauer Fleck; in der Mitte ganz kurz und sparsam behaart, mit ziemlich undeutlichen Acrostichalen und Dorsocentralen; am Halse jederseits eine starke Borste, Praesutural und Supraalarborsten stark, sowie ein Paar starker Borsten vor dem Schildchen; Pleuren ganz nackt, nur vorn mit helleren Haaren. Schildchen weißgrau, mit vier starken Randborsten, die mittleren nicht gekreuzt. Schüppchen gelblich, weiß bewimpert. Hinterleib weißgrau, auch am Bauch, ziemlich lang hell behaart, ohne Borsten. Männliche Genitalien von *Hilara*-Typus, oben mit einigen ziemlich langen schwarzen Haaren, an der Spitze schwarz glänzend. Beine kurz und stark, die vorderen Schenkel mehr, die mittleren wenig, die hinteren gar nicht verdickt; sie sind ziemlich lang hell behaart, und an den Schenkeln unten mit starken schwarzen Borsten bewaffnet; die Spitze aller Schenkel schmal gelblich; Vordertarsen ganz schwarz mit ziemlich verdicktem Metatarsus; mittlere Tarsen an der Wurzel, hintere außer der Spitze gelb; Hintersehnen außen mit einigen kurzen Borsten, innen ganz ohne Dornen. Flügel ziemlich lang, mit schwarzen Adern, am Grunde gelblich; Vorderast der dritten Längsader ziemlich lang und schief; Discoidalzelle mittelmäßig über die Flügelmitte hinausreichend; Analzelle ziemlich breit; Flügellappen

rechtwinklig vortretend; Randader oben an der Wurzel mit einer langen schwarzen Borste.

55. *Hilarempis xanthocera* Bezzi, Ann. Mus. nation. hung., III. 444. 21. (1905).

Ein Weibchen aus Peru, Pichisweg, 300—700 m, I. 04; das Originalstück stammt gleichfalls aus Peru (Callanga).

Das noch nicht beschriebene Weibchen stimmt mit dem Männchen gut überein, die Flügel sind etwas kürzer und breiter, die Discoidalzelle dreieckig, vorn stumpf; Stirn an den Seiten deutlich beborstet; Hinterleib silberglänzend, oben und unten ganz schwarz, nur mit schmalen gelben Hinterrandsäumen, welche am Bauche noch deutlicher sind; Legeröhre kurz und schmal, mit lauzenförmigen kleinen dunklen Apicallamellen. Randader ohne Basalborste.

56. *Hilarempis bicingulata* n. sp. ♂.

Atra, lateribus cinerascens, thoracis dorso indistincte vittato, abdomine crasso cylindrico luteo piloso segmentis quarto et quinto argenteo-limbatis, ventre luteo, antennis pedibusque nigris, halteribus lutescentibus, alis dilute fuscis, macula stigmatica nigricante, nervo primo apice calloso, sexto valido abbreviato, angulo axillari recto.

♂ genitalibus perparvis carinatis apice nigrospinosus; metatarso antico valde incrassato.

Long. corp. mm 9—10, alar. mm 8½—9½.

Zwei Exemplare aus Chile, in der Sammlung von Prof. Hermann, Corral, III. 04.

Eine prachtvolle, sehr große Art, welche durch die am Ende schwiefelförmig erweiterte erste Flügellängsader mit *argyrozona* Phil. gewiss verwandt ist; die Hinterleibszeichnung ist auch ähnlich, *argyrozona* hat aber an der Wurzel gelbe Fühler.

Stirn samtschwarz, an den Seiten lang behaart; Gesicht grau, nackt; Hinterkopf grau, oben schwarz unten gelblich behaart; Fühler ganz schwarz,

mit schmalem verlängertem dritten Gliede, Griffel dünn, mit ganz kleiner Endborste; Taster gelb, am Ende oft verdunkelt, lang, oben gebogen, sehr lang gelblich behaart; Rüssel von Kopflänge, mit schwarzen Lippen. Rückenschild oben schwarz, an den Seiten und an den Pleuren grau; auf dem Rücken drei wenig deutliche schwarze Längsstriemen, die seitlichen vorn verkürzt; vorn über den Schultern weißgraue Schillerflecken; Seitenborsten lang und stark; Acrostichal- und Dorsocentralhaare dicht und ziemlich lang, mehrreihig. Schildchen schwarz, mit grauem Rande, auf welchem etwa 10 lange Borsten stehen. Schüppchen dunkelgelb mit gelblichen Wimpern. Hinterleib groß, samtschwarz, die Einschnitte weißlich, aber nur am vierten und fünften Ringe mit silberglänzenden schmalen vollständigen Binden; an den Einschnitten sind auch einige schwarze Borsten, sonst ist die Behaarung lang und gelblich, besonders an der Wurzel; Bauch durchsichtig gelb, Genitalien auffallend klein. Beine ziemlich lang dunkel behaart und deutlich beborstet, die Vorderschienen dicht behaart, die Mittelschienen am Ende vielborstig; sie sind ganz schwarz, zuweilen Schenkel und Schienen an der Wurzel schmal gelb durchscheinend. Flügel mehr oder weniger dunkel getrübt, Randader an der Wurzel mit langer Borste, Discoidalzelle über die Flügelmitte hinausreichend, vorn oben verlängert, Vorderast der dritten Längsader ziemlich kurz, schief; alle Flügeladern schwarz, auch an der Wurzel.

57. *Hilarempis elegans* n. sp. ♂.

Cinerea, thoracis dorso atra lateribus vittaque media lata retro latiori albo-canescens, abdomine, cano-micante, palpis antennis halteribusque nigro-fuscis, pedibus nigris geniculis anguste rufescentibus, facie sub antennas longe pilosa, alis cinereo-hyalinis, macula stigmatica nulla, nervo transverso apicali valde obliquo, sexto tenui non abbreviato, angulo axillari recto.

♂ genitalibus nigris medioeribus erectis inferne carinatis; metatarso antico modice incrassato.

Long. corp. mm  $6\frac{1}{2}$ , alar. mm  $6\frac{3}{4}$ .

Ein einziges Männchen aus Peru, Tarma, 3000 m, 19. I. 04.

Eine zierliche schöne Art, mit eigentümlicher Thoraxzeichnung, und unten beborsteten Hinterschenkeln. Stirn samt schwarz, an den Seiten ziemlich lang behaart; Hinterkopf grauschwarz, an den Seiten weißlich, oben schwarz unten hell behaart; Gesicht grau, ziemlich lang behaart; Fühler ganz schwarz, von gewöhnlicher Gestalt, grau bestäubt; Rüssel etwa von Kopflänge, mit ganz kurzen bräunlichen Lippen. Thoraxrücken mit ziemlich langen mehrreihigen und dichten Acrostichal- und Dorsocentralhaaren; Seitenborsten stark; Pleuren grau, nackt, mit schwärzlichen Stigmen; Schildchen mit acht längeren Randborsten, die mittleren entfernt, nicht gekreuzt. Hinterleib silberschimmernd, längs der Mittellinie breit verdunkelt, an der Wurzel ziemlich lang hell behaart. Beine grau bestäubt, kurz behaart und mit ganz kurzen Borsten an den Schienen und auf der Unterseite der hinteren Schenkel; Vordermetatarsus ziemlich dicht behaart. Schuppehen gelblich, weiß behaart. Flügel etwas schmal, erste Längsader am Ende ziemlich verdickt und tief schwarz, aber kein eigentlicher Randmalzelle vorhanden; Discoidalzelle ziemlich klein; Adern schwarz, nur an der Wurzel schmal gelb; Randader an der Wurzel ohne längere Borste. Vorderschenkel nicht verdickt.

58. *Hilarempis carinata* n. sp. ♂ ♀.

Cinerea, thoracis dorso vittis quatuor fuscis externis abbreviatis minus distinctis, palpis antennisque nigro fuscis, pedibus nigro fuscis tibiis metatarsisque longesetosis, halteribus fuscescentibus, facie et scutello praeter setas quatuor marginales nudis, alis elongatis cinereo-hyalinis, macula stigmatica nulla, nervo transverso apicali breviter obliquo saepe fracto atque partim nullo, nervo sexto spurio apice abbreviato, angulo axillari late obtuso.

♂ metatarso antico valde incrassato, genitalibus medio-cribus, subtus et extus carina elevata translucida praeditis.

♀ brevius pilosa, metatarsis anticis simplicibus, terebra retracta lamellis terminalibus lanceolatis nigro fuscis.

Long. corp. mm  $3\frac{1}{2}$ —4, alar. mm  $4\frac{1}{2}$ —5.

Drei Exemplare aus Bolivien, Cordillere, 4000—5000 m, 24. XII. 04.

Eine wenig auffallende Art, deren Genitalien an die von *Pachymeria* erinnern; merkwürdigerweise ist die Spitzenquerader bei einem Exemplare in beiden Flügeln, bei einem anderen auf dem linken Flügel gebrochen und zum Teil fehlend.

Stirn grau, in beiden Geschlechtern gleich breit, an den Seiten ziemlich lang beborstet; Gesicht ganz nackt; Rüssel so lang wie der Kopf, gerade, schwarz, mit kurzer dicker schwarzer Lippe; drittes Fühlerglied an der Wurzel ziemlich verbreitert; Rückenschild ziemlich lang behaart, mit mehrreihigen Haarborsten; die Seitenstriemen sind fleckenförmig und wenig deutlich; Pleuren nackt, mit weißlichen Stigmen. Mittlere Schildchenborsten an der Spitze etwas gekreuzt. Hinterleib grauweiß schimmernd, ziemlich lang hell behaart. Beine bei dem Männchen viel länger beborstet als bei dem Weibchen; Vorder- und Mittelschienen an der Spitze mit einigen sehr langen Borsten; Vordermetatarsen ziemlich nackt, oben mit einigen langen Borsten; hintere Metatarsen oben mit einigen sehr langen Borsten. Randader an der Wurzel mit einer sehr langen Borste; erste Längsader am Ende etwas verdickt und tief schwarz; Adern ziemlich hell; Flügellappen weniger vortretend.

59. *Hilarempis gymnaspis* n. sp. ♂.

Praecedenti notis omnibus simillima at distincta statura majori, halteribus albidis, pedibus minus longe setosis tibiis luteis, metatarsis anticis vix incrassatis, abdomine obscure cinereo vitta fusca longitudinali interdum distincta, antennarum articulo tertio basi non dilatato, alarum angulo axillari recto, genitalibus carina minus elevata atque opaca nigricante.

Long. corp. mm 5—5½, alar. mm 6—6½.

Zwei Männchen aus Peru, Cuzco, 3500 m, III.—IV. 05.

Stirn an den Seiten sehr lang behaart, Gesicht ganz nackt. Auch die Metatarsen rötlich. Die mittleren Randborsten des Schildchens sind nicht gekreuzt, nur am Ende etwas konvergierend. Flügellappen stark vortretend; Vorderast der dritten Längsader immer vollständig, sechste Längsader verschwindend. Schenkel an der Spitze rötlichgelb.

60. *Hilarempis barbatula* n. sp. ♂.

Cinerea, thoracis dorso vittis quatuor longitudinalibus fuscis externis maculiformibus minus distinctis, antennis nigro cinereis, palpis lutescentibus, halteribus albidis, facie distincte pilosa, scutello praeter setas quatuor majores setulas nonnullas breviores marginales gerente, alis cinereo-hyalinis, macula stigmatica elongati dilute fusca, nervo transverso apicali valde obliquo interdum fracto, nervo sexto abbreviato, angulo axillari recto vel vix obtuso.

♂ metatarso antico simplici, genitalibus parvis erectis nigris carina postica fere nulla.

Long. corp. mm 4—4<sup>1</sup>/<sub>4</sub>, alar. mm 4<sup>1</sup>/<sub>2</sub>—4<sup>3</sup>/<sub>4</sub>.

Einige Exemplare aus Peru, Oroya, 3700—4000 m, 21. I. 04.

Auch diese Art ist mit den zwei vorhergehenden sehr nahe verwandt, und zeigt alle Merkmale wie diese; unterscheidet sich aber durch das behaarte Gesicht und Schildchen. Die Beine sind wie bei *gymnaspis* gefärbt, die Schenkel oft an beiden Enden breiter rötlichgelb, und wie bei dieser behaart; es fehlen auch hier die längeren Borsten der *carinata*. Hinterleib in der Mitte schwärzlich, an den Seiten hellgrau. Genitalien klein und weniger gekielt. Drittes Fühlerglied an der Wurzel nicht erweitert. Es ist merkwürdig, daß auch bei dieser Art, wie bei *carinata*, die Spitzenquerader zuweilen gebrochen ist; bei einem Exemplar fehlt sie auf einem Flügel gänzlich.

61. *Hilarempis argentifera* n. sp. ♀.

Tribus praecedentibus iterum simillima, facie scutelloque praeter setas marginales nudis, halteribus pallide luteis, alarum macula elongata stigmatica fusca distincta, nervo transverso apicali valde obliquo basi anguste decolori, nervo sexto abbreviato, angulo axillari obtuso, at pedibus cum coxis omnino lutescentibus, tarsis tantum fuscis, distincta.

♀ abdomine toto argenteo micante, terebra exserto elongata nigro-fusca, lamellis apicalibus lanceolatis.

Long. corp. mm 5<sup>1</sup>/<sub>2</sub> (cum terebra), alar. mm 5<sup>3</sup>/<sub>4</sub>.

Ein Weibchen aus Chile, Quillota, 1000 m, 20. IX. 02.

Diese Art ist gewiß mit den drei vorhergehenden nahe verwandt, kann aber unmöglich das Weibchen einer derselben sein; auch das Vaterland ist verschieden. Die Art scheint mit *Haplomera argentea* Phil., gleichfalls aus Chile, die Färbung des Hinterleibes gemein zu haben, zeigt aber einfache Hinterschenkel, lange Hinterschienen und beborstete Beine. Stirn an den Seiten kurz beborstet; drittes Fühlerglied an der Wurzel etwas breit. Die Hüften sind deutlich gelb, die hinteren zuweilen aufsen etwas graulich; Beine ganz kurz behaart, die vier hinteren Schienen mit deutlichen, wenn auch nicht langen schwarzen Borsten. Die lange Borste an der Wurzel der Costa ist auch bei dieser wie bei der vorigen vorhanden; erste Längsader am Ende deutlich verdickt; Spitzenquerader an ihrer Wurzel kurz verblafst. Flügellappen ziemlich vortretend; der Axillarwinkel nur wenig stumpf.

Anmerkung 1. Die vier vorhergehenden Arten bilden einen natürlichen Verwandtschaftskreis, zu welchem auch *macrocera* Bigot aus Chile zu gehören scheint.

Anmerkung 2. Aus Chile, Corral, 7. IX. 02, hat Herr Schnuse auch ein Weibchen einer kleinen neuen Art dieser Gattung mitgebracht, welche helle Taster, Schwinger und Beine zeigt, sowie einen grauen ungestriemten Thoraxrücken und glashelle Flügel mit sehr stumpfem Axillarwinkel und wenig vortretenden Flügellappen.

### 10. *Haplomera* Macq.

Wie ich diese Gattung 1905 begrenzt habe, ist es schwierig festzustellen, ob alle in ihr untergebrachten Arten zu derselben auch wirklich gehören. Der Charakter der versteckten, nicht verlängerten Legeröhre findet sich bei der hier angeführten Art nicht. Gute Charaktere bleiben: die Nacktheit der Beine, die geringe Entwicklung der Thoraxborsten und die Verlängerung des dritten Fühlergliedes. *Toreus* Melander<sup>1)</sup> scheint eine verwandte Gattung zu sein, zeigt aber gar keine Thoracalborsten, kürzere Fühler, nicht verdickte Hinterschenkel und viel längeren Rüssel. Die Art

<sup>1)</sup> Entomological News, 1906, 376, fig. 0.



*brachystoma* Phil., welche ich 1905 hierher gebracht hatte, scheint besser bei *Hilarempis* zu stehen, ungeachtet der verdickten Hinterschenkel. *Nudipes* Macq., welche ich 1905 bei *Empis* gelassen hatte, ist sicher bei *Haplomera* wegen der nackten Beine, Fühlerform etc. einzureihen. Zweifelhafte scheinen mir dagegen die Arten *modesta* und *obscurata* Phil., weil die Beine als ziemlich behaart beschrieben sind; die meisten Merkmale sind aber denen der Gattung *Haplomera* entsprechend. Einige der von Philippi beschriebenen chilenischen Arten scheinen wegen der sehr kleinen Statur auffallend zu sein.

Die echten und die wahrscheinlichen *Haplomera*-Arten lassen sich wie folgt unterscheiden:

- |  |                             |
|--|-----------------------------|
| 1. Beine schwarz   | 2.                          |
| — Beine hell   | 4.                          |
| 2. Schwarz glänzend, ohne deutliche Thoraxstriemen; Beine ziemlich behaart                               | <i>*obscurata</i> Phil.     |
| — Grau; Thoraxrücken mit vier deutlichen Längsstriemen; Beine kaum flaumhaarig                           | 3.                          |
| 3. Hinterleib schwärzlich, mit weißlichen Einschnitten   | <i>*Gayi</i> Macq.          |
| — Hinterleib grau, mit schwarzen Hinterrandsäumen der Ringe  | <i>*nudipes</i> Macq.       |
| 4. Beine ziemlich behaart; Flügel dunkel getrübt   | <i>*modesta</i> Phil.       |
| — Beine höchstens flaumhaarig  | 5.                          |
| 5. Flügel angeraucht; Gesicht silberglänzend; Schwinger graulich   | <i>*obscuripennis</i> Phil. |
| — Flügel hyalin oder höchstens graulich; Schwinger gelblich  | 6.                          |
| 6. Hinterleib silberglänzend; Thoraxrücken gestriemt   | <i>*argentata</i> Phil.     |
| — Hinterleib nicht silberglänzend  | 7.                          |
| 7. Thoraxrücken nicht gestriemt  | 8.                          |
| — Thoraxrücken mit deutlichen Längsstriemen  | 11.                         |
| 8. Hinterschenkel sehr stark verdickt und länger als der Hinterleib; mittlere Schenkel deutlich verdickt | <i>*rubripes</i> Phil.      |
| — Hinterschenkel minder stark verdickt und kürzer als der Hinterleib                                     | 7.                          |

9. Thoraxrücken glänzend erzfarbig; Hinterschenkel mit dunklem Ringe  
*\*brachygastra* Phil.
- Thoraxrücken nicht glänzend; Hinterschenkel ganz gelb 10.
10. Tarsen schwärzlich *\*fulvipes* Phil.
- Tarsen nur an der Spitze geschwärzt *gymnopoda* Bezzi.
11. Schwinger schmutzig dunkelgelb; Spitzenquerader sehr schief liegend;  
 Hinterleib grauweiß *notogramma* Bezzi.
- Schwinger hellgelb; Spitzenquerader minder schief; Hinterleib in der  
 Mitte schwärzlich an den Seiten grauweiß oder mit weißgelben Hinter-  
 randsäumen *chilensis* n. sp.

62. *Haplomera chilensis* n. sp. ♂ ♀.

Cinerea, thoracis dorso vittis quatuor longitudinalibus fuscis externis abbreviatis, facie pilosa palpis halteribusque albicantibus, ventre luteo translucido, pedibus nudis luteis, femoribus posticis modice incrassatis quam tibiis longioribus, alis hyalinis macula elongata stigmatica fusca distincta, nervo sexto abbreviato, angulo axillari late aperto.

♂ tarsis nigroannulatis metatarso antico paullulo incrassato, abdomine cano vitta lata media longitudinali fusca, genitalibus parvis acutis erectis.

♀ tarsis simplicibus, abdomine nigro fusco limbo postico segmentorum lutescenti, terebra elongata exserta lamellis apicalibus elongatis.

Long. corp. mm  $4\frac{1}{2}$ —5, alar. mm 4— $4\frac{1}{2}$ .

Viele Exemplare beider Geschlechter aus Chile, Valparaiso, 12. IX. 02, Concepcion, 150 m, 10. IX. 02 und die meisten aus Quillota, 1000 m, 20—22. IX. 02.

Eine wenig auffallende Art, welche mit keiner der von Philippi beschriebenen Art übereinstimmt; sie scheint in Chile von der Meeresküste bis 1000 m häufig zu sein.

Stirn grau, in beiden Geschlechtern gleich breit, an den Seiten kurz behaart; Gesicht grau, deutlich behaart; Hinterkopf grau, mit wenigen, oben

dunkleren unten helleren Haaren; Fühler lang, aufgestreckt, schwarzgrau, an der Wurzel etwas heller; drittes Glied verlängert, mit ganz kurzem Griffel; Taster groß, aufgebogen, hellgelb, wenig behaart; Rüssel länger als der Kopf, dunkelgelb oder schwärzlich, glänzend, mit dunkeln Lippen. Rückenschild glanzlos, hellgrau, mit hervortretenden dunkeln etwas glänzenden Striemen; die mittleren sind schmal, vollständig, ziemlich entfernt von einander; die seitlichen sind breiter und vorn stark abgekürzt; Rücken mit ganz kurzen Haaren, die Acrostichalen deutlich zweireihig; Humeralborsten fehlend; an den Seiten vor der Flügelwurzel eine starke schwarze Borste; Pleuren grau, ganz nackt, mit weißen Stigmen. Schildchen grau, mit vier kurzen Randborsten. Schuppehen hellgelb, weiß bewimpert. Hinterleib ziemlich lang und schmal, sparsam hell behaart, in beiden Geschlechtern verschieden gefärbt; beim Weibchen der Bauch manchmal aufgeblasen. Beine samt den Hüften ganz lichtgelb; an den Trochanteren und an den unteren Spitzen der Schenkel bemerkt man kleine schwarze Flecken; die Schenkel zuweilen oben verdunkelt; Tarsen schwärzlich, beim Männchen deutlich geringelt, d. h. die Glieder schwarz am Grunde schmal hellgelb; sie sind kurz flaumig, an den Mittelschenkeln etwas länger behaart; hintere Schenkel bei beiden Geschlechtern deutlich verdickt. Flügel beim Weibchen etwas breiter als beim Männchen, mit schwärzlichen an der Wurzel gelben Adern; Randader die Flügel umlaufend, an der Wurzel ohne die lange Borste der meisten *Hilarempis*-Arten; dritte Längsader am Ende etwas nach unten geneigt, ihr Vorderast ziemlich lang aber nicht sehr schief; Discoidalzelle verhältnismäßig klein; Flügellappen nur wenig vortretend, Axillarwinkel daher breit stumpf.

### 11. *Hilara* Meig.

Die Auffindung von echten *Hilara*-Arten in Südamerika steht im Widerspruch mit dem von mir 1905 Gesagten; wahrscheinlich sind die Arten auf die Gebirge beschränkt. Es ist recht bemerklich, daß die zwei ersten der unten beschriebenen Arten, welche eine ganz besonders starke sechste Längsader besitzen, alle die Kennzeichen der *Haplomera*-Arten (die gebrochene Hilfsader ausgeschlossen) zeigen. Eine besondere Gattung hier-

auf zu gründen scheint aber verfrüht, da auch bei den echten *Hilarempis* die Gestalt der sechsten Längsader sehr veränderlich ist.

Die fünf echten *Hilara*-Arten, welche Herr Schnuse in Südamerika entdeckt hat, lassen sich wie folgt unterscheiden.

1. Sechste Längsader sehr stark und lang; Rüssel ziemlich dünn, länger als der Kopf; Hinterschenkel etwas verdickt, bedeutend länger als die entsprechenden Schienen 2.
- Sechste Längsader kurz und verschwindend; Rüssel kurz und dick; Hinterschenkel weder verdickt noch verlängert 3.
2. Thoraxrücken fast nackt; Beine kurz behaart, die Schienen gleichmäÙig kurz flaumig *aberrans* n. sp.
- Thoraxrücken behaart; Beine länger behaart; die Schienen mit längeren feinen Borsten *abnormis* n. sp.
3. Schwinger schwarz; Thoraxrücken schwarz, nicht gestriemt *irritans* n. sp.
- Schwinger hell; Thoraxrücken grau, mit deutlichen dunkeln Längsstriemen 4.
4. Größere Art; Beine heller, die vorderen dicht behaart; Pleuren an der Flügelwurzel und die Schultersehwielen gelblich *perplexa* n. sp.
- Kleinere Art; Beine dunkler, die vorderen minder behaart; Rückenschild ohne gelbliche Flecken *perturbans* n. sp.

63. *Hilara aberrans* n. sp. ♂ (Taf. Fig. 5).

Ex olivaceo fusca, lateribus cinerascens, thoracis dorso vittis duabus longitudinalibus distantibus postice abbreviatis atris, antennis palpis halteribus pedibusque nigris, facie convexa pilosa, haustello capite fere bilongiore, antennis porrectis articulo ultimo lineari elongato, pedibus breviter pilosis, femoribus posticis paullo incrassatis tibiis distincte longioribus, alis elongatis griseo-fuscescentibus, macula stigmatica vix distincta, nervis omnino nigris, transverso apicali valde obliquo, sexto valido apice paullo abbreviato, angulo axillari late obtuso.

♂ metatarso antico cylindrico elongato non distincte incrassato, genitalibus pediformibus erectis apice dentatis.

Long. corp mm  $5\frac{1}{2}$ , alar. mm 7.

Ein Exemplar aus Bolivien, Mapiri, Cordillere, 3000 m, 12. V. 03.

Eine schöne interessante Art, welche von dem gewöhnlichen *Hilara*-Typus abweicht und ganz das Aussehen einer *Haplomera* besitzt; die Hilfsader ist aber ganz vollständig und mündet regelmässig in die Costa.

Stirn samtschwarz, vorn etwas schmaler, an den Seiten kurz behaart; Gesicht ganz behaart, unter den Fühlern etwas vorstehend, in der unteren Hälfte in der Mitte vertieft und dort dunkelgrau, sonst samtschwarz; Fühler schmal und lang, mit ziemlich langem Griffel, welcher am Ende eine kurze Borste trägt; Basalglieder der Fühler nur kurz und sparsam behaart; Taster groß, keulenförmig, kurz behaart; Rüssel ganz schwarz glänzend, mit schwärzlichen kurzen Lippen; Hinterkopf grau, ziemlich vorstehend, am unteren Augenrande schmal weißlich, kurz schwarz behaart, unten mit einigen längeren Haarborsten; Ocellarborsten fehlend, oder nicht länger als die anderen Haare. Thoraxrücken auf der Mitte ganz kurz und gleichmässig behaart, ohne Schulterborste; eine einzige Borste an der Seite, vor der Flügelwurzel; Pleuren grau, nackt, mit schwarzen Stigmen. Schildchen grau, am hinteren Rande mit acht kurzen Borsten, die mittleren gekreuzt. Schüppchen schwärzlich und schwarz bewimpert. Hinterleib einfarbig, kurz schwarz behaart; sechster Ring oben länger und dichter behaart; Genitalien ziemlich groß, grau, kurz schwarz behaart, ganz geschlossen. Beine ganz schwarz, dunkelgrau bereift, gleichmässig kurz behaart, ohne Borsten; nur an der Spitze der Hinterschenkel bemerkt man einige längere Haare. Flügel schmal und lang, besonders gegen die Wurzel schwärzlich getrübt; die Randader umläuft den ganzen Rand der Flügel, und zeigt an seiner Wurzel gar keine lange Borste; dritte Längsader nach der Gabelung etwas stark nach unten geneigt; Discoidalzelle ziemlich klein, trapezförmig, in der Mitte der Flügel; Flügellappen nur sehr wenig vortretend; Flügelwurzel ganz schwarz.

64. *Hilara abnormis* n. sp. ♂.

Praecedenti simillima at certe distincta statura minori, thoracis dorso longius piloso vittisque atris obsoletioribus,

halteribus fuscis non nigris, pedibus longius hirtis et in tibiaram latere externo setis longioribus distinctis praeditis, metatarso antico in mare basi distincte incrassato, femorum posticorum apice distincte rufescente.

Long. corp. mm 4, alar. mm 5.

Ein Exemplar aus Peru, Chanchamayo, 800 m, 12. I. 04.

Mit der vorigen nahe verwandt; auch die Genitalien sind ähnlich gebaut, mit den vier oberen Stacheln länger und frei und der Penis an der Spitze gekrümmt. Die Hinterschenkel sind verhältnismäßig größer, an der Spitze deutlich rötlich. Schüppchen dunkel gelblich. Flügel gleichmäßig dunkel getrübt, an der Wurzel nicht dunkler; sechste Längsader noch länger als bei den vorigen, nur ein wenig vor dem Flügelrande abgekürzt.

65. *Hilara irritans* n. sp. ♂ ♀.

Nigra, tomento obscure cinereo adpersa, palpis antennis halteribus pedibusque nigris, thoracis dorso non distincte vittato, metatarsis anticis in utroque sexu incrassatis, alis griseofuscescentibus, macula stigmatica dilute fusca, nervo auxiliari interdum ante costam fracto, sexto spurio abbreviato.

♂ pedibus anticis pilis brevibus crebre hirtis, genitalibus parvis erectis.

♀ pedibus anticis nudiusculis, terebra elongata lamellis terminalibus rectis.

Long. corp. mm 3—3½, alar. mm 3¼—3¾.

Einige Exemplare aus Chile, Quillota, 1000 m, 20. IX. 02.

Eine kleine Art, bei welcher die Hilfsader bisweilen vor der Costa mündet; der ganze Habitus ist aber mit dem unserer Arten aus der Gruppe *femorella* Zett. übereinstimmend. Auch der Vorderast der dritten Längsader ist zuweilen an der Wurzel unterbrochen. Ganz merkwürdigerweise sind die Vordermetatarsen auch beim Weibchen stark verdickt.

Stirn in beiden Geschlechtern gleich breit, an den Seiten ziemlich lang beborstet; Gesicht behaart; oben am Augenhinterrande stehen einige sehr lange vorn gebogene Borsten; Fühler ziemlich kurz, mit kurzem dicken Griffel; Rüssel dick, so lang wie der Kopf. Rückenschild undeutlich

gestriemt, mit kurzen mehrreihigen Acrostichal- und Dorsocentralhaaren; Schildchen mit sechs bis acht Borsten am Rande, die mittleren stärker und gekreuzt. Schüppchen schwärzlich und mit schwarzen Wimpern. Hinterleib kurz und sparsam dunkel behaart, ohne Zeichnung. Beine ganz schwarz, kurz behaart, ohne längere Borsten, auch an den Hinterschienen; Hinterschenkel nicht verdickt, so lang wie die Schienen; Vordermetatarsus auch beim Weibchen stark verdickt. Flügel ganz normal; an der Wurzel der Randader ist eine lange Haarborste vorhanden; dritte Längsader nach der Gabelung nur wenig nach unten geneigt; Flügellappen deutlich vortretend, Axillarwinkel recht.

66. *Hilara perplexa* n. sp. ♂ ♀.

Cinerea, thoracis dorso vittis duabus longitudinalibus fuscis, humeris et pleuris ad alarum radicem anguste lutescentibus, antennarum basi pedibusque obscure rufescentibus, halteribus albidis, alis cinereo-hyalinis, macula stigmatica dilute fusca, nervo sexto spurio abbreviato.

♂ pedibus anticis hirsutis metatarsis incrassatis, genitalibus parvis erectis.

♀ pedibus anticis nudiusculis metatarsis simplicibus, terebra brevi retracta.

Long. corp. mm  $3\frac{1}{2}$ —4, alar. mm  $4\frac{1}{2}$ —5.

Drei Exemplare aus Peru, Laresthal, 2000—4000 m, 7—10. VIII. 03.

Eine echte *Hilara*, von unseren Arten aus der Gruppe der *interstincta* Fall. nicht weit verschieden.

Fühler ziemlich lang, mit langem Griffel; Gesicht behaart; Seiten der Stirn und oberer Augenhinterrand mit sehr langen Borsten; Taster groß, gelblich, mit langen hellen Haaren; Rüssel so lang wie der Kopf. Thoraxrücken ziemlich lang behaart; Pleuren nackt, mit weißen Stigmen. Schildchen mit vier langen Randborsten, die mittleren gekreuzt. Schüppchen gelblich, weiß bewimpert. Hinterleib ziemlich lang hell behaart, an der Wurzel und am Bauche zuweilen gelblich durchscheinend. Beine zuweilen ganz rötlich, zuweilen verdunkelt, beim Männchen ziemlich lang behaart. Flügel lang

und schmal; dritte Längsader ziemlich gerade; Flügellappen vortretend, Axillarwinkel recht.

67. *Hilara perturbans* n. sp. ♂ ♀.

Praecedenti simillima at distincta statura paullo minori, antennarum basi non lutescente, palpis pedibusque nigro-cinereis, thoracis maculis luteis nullis pedibusque anticis maris minus hirtis.

Long. corp. mm  $2\frac{1}{2}$ — $3\frac{1}{2}$ , alar. mm  $3\frac{1}{2}$ — $4\frac{1}{2}$ .

Viele Exemplare beider Geschlechter aus Chile, Palca, 3000—3500 m, 16—20. X. 02, und Peru, Cuzco, 3500 m, 10. VII. 05.

Eine der vorigen sehr ähnliche Art, welche aber gewöhnlich ein wenig kleiner und dunkler gefärbt ist. Hinterschenkel unten mit kurzen schwarzen Börstchen dicht besetzt. Männliche Genitalien sehr klein, der Penis an der Spitze hervorragend. Hinterleib ganz schwarzgrau, unten nicht gelb durchscheinend. Flügel glashell, mit verschwindender sechster Längsader.

## 12. *Amictoides* nov. gen.

Ich gründe diese neue Gattung auf *Hilara? breviventris* Phil., Verh. zool. bot. Ges., XV. 762. 5. (1865), welche ich 1905 in der Gattung *Apalocnemis* untergebracht hatte, weil bei der Beschreibung die zusammenstossenden Augen des Männchen erwähnt sind. Das Tier erinnert an die Bombyliiden-gattung *Amictus*, daher der Name.

Von der nahe verwandten *Apalocnemis* Phil., wie ich dieselbe 1905 verstanden habe, unterscheidet sich die neue Gattung besonders wegen des langen kegelförmigen dritten Fühlergliedes, dessen Griffel kürzer als das Glied ist; außerdem ist der Rüssel länger, etwa so lang wie der Kopf, nicht ganz kurz und versteckt; die Borsten sind weniger entwickelt und der Habitus ist verschieden.

68. *Amictoides breviventris* Phil., Verh. zool. bot. Ges., XV. 762. 5. [*? Hilara*] (1865); Bezzi, Ann. Mus. nation. Hung., III. 444. [*Apalocnemis*] (1905) (Taf. Fig. 6).



Ein Männchen aus Chile, Concepcion, 1903, in der Sammlung von Prof. Dr. Hermann.

Zur ziemlich ausführlichen Beschreibung Philippis habe ich nur folgendes beizufügen:

Das dritte Fühlerglied ist deutlich geschwärzt, aber nicht eigentlich schwarz und an der Wurzel gelb; die Basalglieder sind ziemlich kahl; Taster gelb, hell behaart; Augen eng zusammenstossend, die oberen und vorderen Felder viel gröfser als die unteren und hinteren; Ocellenhöcker ziemlich grofs, Hinterkopf grau, schwarz beborstet. Thorax ohne starke Humeralborsten; Acrostichalhaare ganz kurz und vielreihig; Dorsocentralborsten vorn kurz, mehr haarförmig, hinten länger, schwarz; Seitenborsten stark; Pleuren gelblich grau, ganz nackt, mit gelblichen Stigmen. Schildchen an der Spitze mit zwei langen gekreuzten Borsten und an den Seiten mit einigen viel kürzeren Borsten. Metanotum grau. Schüppchen weifslieh, hell behaart. Hinterleib ganz gelb, oben grau schimmernd, mit hellen Haaren und schwarzen Borsten an den Einschnitten; Genitalien braungelb, ganz klein, aufrecht, geschlossen. Metatarsus der Vorderbeine etwas verdickt; Schienen aufsen mit ziemlich langen schwarzen Borsten, alle Hüften gelb. Flügel ohne deutlichen Randmalleck; Hilfsader vor der Costa mündend; Randader nach der Mündung der dritten Längsader verdünnt; dritte Längsader nach dem Ursprung des Vorderastes etwas nach unten geneigt, ihr Vorderast schief aber ziemlich kurz; Discoidalzelle klein; sechste Längsader stark abgekürzt; Flügellappen stark vortretend, Axillarwinkel spitz; Randader an der Wurzel mit einer langen schwarzen Borste.

### 13. *Phleboctena* nov. gen.

Cum genere praecedenti notis antennarum, alarum et proboscidis omnino convenit, at ab illo ut ab omnibus Empididarum generibus vena longitudinali prima per totam longitudinem distincte pilosa mox dignoscendum.

Diese neue Gattung stimmt im ganzen Habitus mit der vorigen vollkommen überein: Rüssel- und Fühlerbildung, Rückenschildbeborstung,

Kahlheit der Pleuren, Kürze des Hinterleibes, Einfachheit der Beine; Flügelgeäder ganz wie bei dieser; die der ganzen Länge nach kurz, aber deutlich behaarte erste Längsader unterscheidet jedoch die Gattung von allem andern. Die typische Art hat mit *Amictoides breviventris* Phil. große Ähnlichkeit; sie zeigt ziemlich schmal getrennte Augen und scheint daher ein Weibchen zu sein; über das Geschlecht des einzigen untersuchten Exemplares bin ich aber im Zweifel, wie unten noch gesagt wird.

69. *Phleboctena lutea* n. sp. ♀ (?) (Taf. Fig. 7, 8).

Ex luteo rufescens, abdomine cano-micante, thoracis dorso vittis duabus longitudinalibus fuscis, antennis halteribus pedibusque pallide luteis, femoribus quatuor posterioribus subtus apicem versus setis brevibus, nigris praeditis, alis hyalinis, macula stigmatica dilute lutea, nervo transverso apicali valde obliquo, sexto abbreviato, angulo axillari paullo acuto.

♀ oculis anguste remotis, metatarso antico simplici, genitalibus retractis.

Long. corp. mm 6, alar. mm  $7\frac{1}{2}$ .

Ein einziges Exemplar aus Chile, Cordilleras, Rancagua, XII. 1903, in der Sammlung von Prof. Dr. Hermann.

Ganz und gar gelb, auf dem Thorax ins rötliche ziehend; Hinterleib zart weiß schimmernd. Hinterkopf gelb, schwarz beborstet; Ocellenhöcker groß, mit zwei Borsten; Stirn ziemlich schmal, an den Seiten mit wenigen kurzen hellen Haarborsten; Untergesicht kurz, breiter als die Stirn, am Mundrande etwas vorgezogen; Taster gelb, hell behaart; Rüssel stark, so lang wie der Kopf, glänzend gelb, mit dicken und kurzen gelben Lippen; Fühler ganz gelb, die Basalglieder ziemlich kurz und beinahe nackt; drittes Glied verlängert kegelförmig, nur an der äußersten Spitze schwarz, mit schwarzem ziemlich dünnem Griffel, welcher etwas kürzer als das Glied ist. Thorax groß und stark, auf dem Rücken kurz behaart, nur hinten und an den Seiten mit langen schwarzen Borsten; Pleuren ganz kahl. Schildchen klein, mit vier langen Randborsten; Metanotum rotgelb. Schüppchen weißgelb, hell bewimpert. Hinterleib kurz, stumpf, kurz schwarz behaart, ohne

alle Zeichnung. Der letzte Ring ist nach hinten offen, und die Genitalien sind in demselben ganz und gar versteckt; es ist daher schwierig zu sehen, ob man es mit einem außerordentlich kleinen männlichen Haltorgane, oder mit einer ganz stumpfen und kurzen Legeröhre zu tun hat. Beine samt den Hüften ganz gelb, auch die Tarsen am Ende nicht gebräunt; sie sind äußerst kurz behaart, und zeigen kurze schwarze Borsten nur an den Hüften und an den vier hinteren Schenkeln und Schienen. Flügel lang und breit, mit gelblichen Adern; Costa gelb, an der Wurzel mit einer schwarzen Borste, nach der Mündung der dritten Längsader dünner; Hilfsader weit vor der Costa mündend; dritte Längsader nach dem Ursprung des Vorderastes stark nach unten geneigt, hier der Vorderast sehr schief liegend, beinahe horizontal; Discoidalzelle groß; Flügellappen stark vortretend.

#### 14. *Apalocnemis Philippi*.

In dieser Gattung belasse ich die Arten, welche im männlichen Geschlechte zusammenstoßende Augen besitzen, deren Metapleuren nackt sind, deren drittes Fühlerglied kurz ist und einen langen Griffel trägt und deren Rüssel in der Mundöffnung verborgen ist. Diese Arten sind außerdem ziemlich lang und dicht beborstet. Sehr wahrscheinlich stimmt diese Gattung mit *Gloma* Meig. gänzlich überein. Die drei Arten lassen sich wie folgt unterscheiden.

- |   |                         |
|---|-------------------------|
| 1. Flügel bunt; Körperfärbung rötlichgelb, mit besonderer Zeichnung       | <i>variegata</i> Bezzi. |
| — Flügel nicht gefleckt; Körperfärbung schwarzgrau                        | 2.                      |
| 2. Randmal fleck undeutlich; Hinterleib schwarz                           | <i>*obscura</i> Phil.   |
| — Randmal fleck deutlich vorhanden; Hinterleib schwarz, mit weißen Ringen | <i>cingulata</i> n. sp. |

70. *Apalocnemis cingulata* n. sp. ♂ ♀ (Taf. Fig. 9).

Ex nigro cinerascens, opaca, setis longis nigris hirta, thoracis dorso vittis tribus, latis, longitudinalibus, atris, abdomine cano, basi vittisque transversis latis ad basin segmentorum atris,

antennis nigris, articulo tertio brevi, rotundato, seta longa crassiuscula terminato, palpis halteribusque luteis, pedibus nigris, femorum apice, tibiis tarsorumque basi luteis, alis cinereo-hyalinis praeter maculam stigmaticam elongatam, fuscam, immaculatis, nervo transverso apicali valde obliquo.

♂ oculis connexis, genitalibus parvis, vix prominentibus.

♀ oculis late remotis, terebra brevi, valida, apice spinigera.

Long. corp. mm 3—3½, alar. mm 4—4½.

Zwei Pärchen aus Peru, Sicuani, 3500 m, 17.—20. VI. 03 und Cuzco, 3500 m, 5. VII. 05, und aus Bolivien, La Paz, 3700 m, 8. XII. 02.

Eine sehr schöne Art, welche bei *obscura* Phil. zu stehen scheint.

Kopf sehr lang schwarz behaart, besonders unten und beim Männchen; drittes Fühlerglied kugelig, deutlich behaart, Griffel etwa zweimal so lang als die ganzen Fühler; Rüssel schwarz, kurz, stumpf, fleischig, ganz verborgen. Rückenschild mit langen Borsten, auch die Acrostichalen lang; ein Büschel von Humeralborsten; Pleuren schwärzlichgrau, ganz nackt, mit schwarzen Stigmen. Schildchen dunkelgrau, an der Wurzel sammtschwarz, mit vielen aufrechten Randborsten, die mittleren gekreuzt. Schüppchen gelblich, hell bewimpert. Hinterleib mit hervortretender Zeichnung; auf den hinteren grauen Teilen der Ringe steht eine Reihe langer schwarzer Borsten. Männliche Genitalien klein, aufrecht, wenig vorstehend, schwarz, an der Spitze gelblich, oben mit zwei schwarzen und schwarzbehaarten kurzen Anhängen; Legeröhre schwarz, unten gelb, an der Spitze mit einigen starken gelben Dornen. Beine kurz behaart, nur die Schenkel beim Männchen an den unteren Seiten mit langen schwarzen Haarborsten; beim Weibchen die Schenkel fast ganz gelb, nur in der Mitte gebräunt. Flügel etwas graugelblich tingiert, mit gelblichen Adern; Hilfsader lang, vollständig, der ersten Längsader sehr nahe gerückt; Gabel der dritten Längsader schmal und spitz; Discoidalzelle groß; sechste Längsader abgekürzt; Flügellappen stark vortretend, Axillarwinkel ein rechter; Costa um den ganzen Flügel laufend, an der Wurzel mit einer langen Borste; Vorrandzelle deutlich erweitert.

### 15. *Hoplopeza* nov. gen.

Apud *Leptopezam* Macq. locandum, stylo antennarum breviter et dense piloso, pedibus posticis armatis atque nervo transverso, cellulam analem extus limitante subtus interrupto, distinctum.

Diese neue Gattung steht bei *Leptopeza* Macq., und zeigt ein stark verlängertes drittes Fühlerglied, mit endständiger dicker Borste; Rüssel kurz, wenig vorstehend; Augen oben und unter den Fühlern zusammenstoßend (beim Weibchen?), nackt; Rückenschild nur wenig gewölbt; Hinterschienen am Ende mit langen Dornen bewaffnet; Hintermetatarsus oben stark gedörnelt. Flügel schmal, gegen die Basis hin keilförmig verschmälert, ohne Flügel-lappen; Discoidalzelle lang, nur zwei Adern zum Flügelrande sendend; untere Hälfte der Analquerader gänzlich fehlend.

71. *Hoplopeza chloropa* n. sp. ♂ (Taf. Fig. 10, 11, 12).

Nigra, nitida, pleuris cinereo-canis, palpis antennarum basi halteribusque lutescentibus, segmentorum abdominalium basi late lutea, pedibus ex luteo viridibus, praesertim posticis, femorum posticorum annulo medio, tibiis posticis tarsorumque omnium articulis ultimis nigris, alis cinereo-hyalinis, macula stigmatica nulla, cellulae praemarginalis apice extremo nigricante infuscato.

♂ oculis supra et infra antennis connexis, tibiis anticis intus pilis pallidis longissimis fimbriatis, tibiis posticis apice spinis aliquibus armatis, quarum infera longissima calcariformi incurva, metatarso postico supra spinulis crassis, brevibus, erectis serrulato, genitalibus parvis, rotundatis, setas sex nigras, validas, spiniformes, in serie transversa positas, subtus gerentibus.

Long. corp. mm 5, alar. mm 4½.

Ein einziges Männchen aus Peru, Larestal, 1000—2000, 10. VIII. 03.

Eine sehr ausgezeichnete Art, deren grüne Beine besonders auffallend sind.

Kopf rund, glänzend schwarz, nackt, nur am Hinterkopfe mit einigen kurzen Borsten; Ocellarborsten klein; Basalglieder der Fühler kurz, gelblich, ziemlich nackt; drittes Glied verlängert, schmal kegelförmig, schwärzlich; Endborste etwas länger als die Fühler, durch die anliegende deutliche Behaarung ziemlich dick erscheinend; Rüssel dick, kurz, gelb, mit kleinen weißgelben rundlichen Tastern. Rückenschild schwarz, stark glänzend, oben scheinbar nackt, nur an den Seiten und hinten mit einigen Borsten; Pleuren weißlich grau, nur die Sternopleuren schwarzglänzend. Schildchen schwarz, grau bereift, mit zwei am Ende gekreuzten Randborsten. Schüppchen gelblich, mit sehr langen hellen Wimpern. Hinterleib lang, walzenförmig, nach unten gebogen; er ist glänzend schwarz, die Basalhälfte aller Ringe aber durchsichtig gelb; nur an der Wurzel sind einige helle Haare vorhanden; Genitalien ziemlich klein, rundlich, nach hinten klaffend; sehr auffallend sind die sechs unteren Borsten. Hüften ganz grünlich gelb; Schenkel und Schienen mit einigen längeren hellen Haaren; Hinterschenkel vor der Spitze aufsen mit einer schwarzen starken Borste; die helle Behaarung an der Innenseite der Vorderschienen, besonders am Grunde, sehr lang; Hinterschienen an der Spitze aufsen mit vier starken schwarzen Borsten, deren unterste viel länger als die andere ist, spornförmig und etwas gebogen; sehr auffallend ist die mittlere Reihe von kurzen starken Dörnchen, welche auf der oberen Seite der hinteren Metatarsen sich befindet. Die grüne Farbe der Beine ist besonders an den Mittelschienen und an den Hinterschenkeln auffallend; die Vorderbeine sind mehr gelblich. Flügel etwa wie bei *Leptopeza sphenoptera* Loew; Vorderrandzelle sehr schmal; Ursprungsstelle der dritten Längsader liegt nahe der Mitte der Flügel; beide Basalzellen sehr lang, aufsen erweitert; Analzelle viel kürzer als die davorliegende zweite Basalzelle; sechste Längsader lang und vollständig, nur an der Spitze etwas verschwindend. Die vorhandene obere Hälfte der Analquerader ist stark und schwarz.

## 16. *Clinocera* Meig.

Subgen. *Heleodromia* Halid.

Von dieser reichen Gattung waren bisher aus Südamerika keine Arten bekannt: Herr Schnuse hat eine Art mitgebracht, welche zur Untergattung

*Heleodromia* Hal. gehört. Herr Coquillett hat in Proc. ent. Wash., V, p. 250—251 (1903) nachgewiesen, daß *Heleodromia* Hal. 1833 nach der typischen Art mit *Sciodromia* Halid. 1840 zusammenfällt; für die in Rede stehende Untergattung würde daher der Name *Hydrodromia* Macq. 1835 zu brauchen sein.

72. *Clinocera* (*Heleodromia*) *ditaeniata* n. sp. ♀ ♂ (Taf. Fig. 13).

Fusco-olivacea, lateribus infra caesia, thoracis dorso vittis duabus longitudinalibus atris, approximatis, retro abbreviatis, antennis halteribusque nigris, pedibus fuscis, coxis femoribusque rufoluteis, alis griseo-hyalinis, macula stigmatica nulla, nervis transversis omnibus late fusco limbatis, cellulis submarginalibus tribus.

♂ coxis basi late grisescentibus, genitalibus parvis, acuminatis, peni clauso.

♀ coxis basi vix grisescentibus, terebra brevi, lata, adpressa, lamellis terminalibus parvis crassis.

Long. corp. mm 2½—3, alar. mm 4.

Ein Pärchen aus Bolivien, La Paz, 3700 m, 3.—7. XII. 02.

Diese Art unterscheidet sich von allen *Heleodromia*-Arten durch die scharf hervortretenden Längsstriemen des Rückenschildes. Sie steht der südeuropäischen *Cl. bivittata* Loew außerordentlich nahe, besonders wegen der drei Unterrandzellen; diese letzte Art zeigt jedoch ganz braune Beine und ungeflechte Flügel.

Hinterkopf graubläulich, oben mit einigen schwarzen Borsten, unten beinahe nackt; Stirn dunkelgrau, mit langen Ocellarborsten; Gesicht nackt, dunkelgrau, an den Seiten schmal graubläulich; Rüssel kurz und dick, mit nicht vorstehendem Hypopharynx; Taster kurz, breit, schwärzlich; Backen schmal; Fühler kurz, nackt, drittes Glied abgerundet, mit langer, gebogener, dicker Endborste. Rückenschild ganz nackt, ohne Acrostichalbörstchen; fünf gleich entfernte Paare von starken Dorsocentralborsten; die zwei samt-schwarzen Längsstriemen sind ziemlich breit und verschwinden etwas nach der Thoraxmitte zu; Schildchen ganz nackt, mit nur zwei Randborsten.

Flügelwurzel und Schüppchen schmutzig rötlich gelb, letztere mit wenigen dunklen Haaren. Hinterleib ganz dunkelgrau, an den Seiten und unten etwas heller, beinahe nackt; männliche Genitalien klein zugespitzt, grau. Beine kurz dunkel behaart, ohne längere Borsten, nur die Vorderschenkel in der Spitzenhälfte unten mit einigen feinen Borsten; Pulvillen und Empodium lang und weiß. Flügel schmal und lang, mit auch an der Wurzel dunklen Adern; dritte Längsader ganz gerade, ihr Vorderast lang und parallel laufend, an der Wurzel etwas spitzwinklig; die überzählige Querader, welche diesen Vorderast mit der zweiten Längsader verbindet, ist ziemlich steil; Discoidalzelle vorne ziemlich stumpf, die zwei vorderen aus ihr entspringenden Adern an der Basis breit getrennt; sechste Längsader deutlich vorhanden, an der Spitze abgekürzt; Flügellappen nicht vortretend.

#### 17. *Dipsomyia* nov. gen.

Diese neue Gattung vereinigt die Charaktere der Clinoceren mit denen der Empididen aus der Gruppe von *Hilarempis*. Der ganze Habitus und Gestalt der Fühler mit kurzem abgerundeten dritten Gliede und langer Borste sind ganz wie bei *Clinocera*; in dieser Gruppe steht sie bei *Philolutra* Mik wegen der Acrostichalbörstchen, des behaarten Schildchens und des Flügelgeäders; leider ist der Randmalzack nicht vorhanden. Sie unterscheidet sich aber von allen Clinoceren durch den verlängerten Rüssel, welcher nach hinten gerichtet und ungefähr so lang wie der Kopf ist. Die Ursprungsstelle der vierten Längsader liegt der Flügelwurzel viel näher als bei den echten Clinoceren; die zweite Basalzelle ist daher am Grunde nicht verkürzt. Die Analzelle ist dagegen wie bei *Clinocera*, d. h. nach außen abgerundet und nur wenig kürzer als die zweite Basalzelle. Die Hauptmerkmale der neuen Gattung sind aus folgender Diagnose zu ersehen:

Caput rotundatum. Genae angustae. Facies nuda. Setae ocellares longissimae, basi distantes. Antennae breves, articulo tertio brevissimo, rotundato-conico, seta crassa antennae bilongiore. Palpi magni, exserti, perpendiculares. Haustellum crassum, retro inclinatum, capitis longitudinem circiter aequante. Thoracis dorsum parum convexum, setis dorsocentralibus usque



ad marginem anticum validis, setulis acrostichalibus distinctis biseriatis. Metapleurae nudaе. Scutellum praeter setas marginales pilis plurimis ciliatum. Pedes simplices, coxis anticis non elongatis, femoribus anticis distincte incrassatis, basi subtus spinigeris. Pulvilli parvi sed distincti. Alae angustae elongatae, nervo costali per totum alae marginem excurrente, nervo auxiliari ante costam desinente, tertio furcato, quarto prope alae basin oriente, sexto spurio vix distinguendo. Cellula discoidalis nervos tres emittens; cellula analis extus rotundata, quam cellula basali secunda paullo brevior. Lobus alaris paululo prominens, angulus axillaris obtusissimus.

73. *Dipsomyia spinifera* n. sp. ♀ (Taf. Fig. 14).

Cinerea, opaca, palpis antennisque nigris, halteribus luteo-albidis, pedibus nigris, griseo-tomentosis, femorum apice geniculisque luteis, femoribus anticis subtus ima basi setis tribus nigris, in serie transversa positis, armatis, abdomine brevi supra incurvato, alis cinereo-hyalinis, omnino immaculatis.

♀ terebra brevissima, lamellis apicalibus crassis rotundatis.

Long. corp. mm 2½, alar. mm 4.

Ein einziges Weibchen aus Chile, Quillota, 1000 m, 22. IX. 02.

Kopf hellgrau, oben und hinten mit schwarzen kurzen Borsten, unten mit dichten weißlichen Haaren; Stirn breit, nackt, vorn etwas schmaler; Gesicht nackt, in der Mitte gewölbt; Taster groß, grau bereift, mit dichten hellen Haaren; Rüssel schwarz, am Ende stumpf. Rückenschild undeutlich gestriemt; zwischen den längeren Dorsocentralborsten sind kürzere Haarborsten vorhanden; Schildchen mit nur zwei stärkeren schwarzen Randborsten. Schüppchen gelblich, mit wenigen kurzen hellen Wimperhaaren. Metanotum groß, grau, nackt, gewölbt. Hinterleib ganz kurz, weil stark nach oben gekrümmt (immer?), mit wenigen Haaren, welche unten an der Spitze etwas dichter sind. Beine kurz behaart, nur die Schienen mit etwas längeren Haaren; die Vorderhüften sind viermal kürzer als die deutlich verdickten Vorderschenkel; Vorderschienen an der Innenseite mit kurzen

gleichen Börstchen kammartig besetzt. Vorderhüften vorn mit einigen starken aufrechten schwarzen Borsten. Dritte Längsader nach der Gabelung etwas nach unten geneigt, ihr Vorderast kurz, schief, einen sehr spitzen Winkel bildend; Discoidalzelle oben nach vorn gezogen, die zwei oberen Längsadern an der Wurzel voneinander entfernt; Ursprungsstelle der vierten Längsader genau unter der oberen Wurzelquerader stehend; sechste Längsader beinahe gänzlich fehlend.

Anmerkung. Die nach hinten gerichtete Stellung des Rüssels ist vielleicht nur zufällig; wahrscheinlich steht er im Leben senkrecht, wie die Stellung der Taster vermuten läßt.

### 18. *Hemerodromia* Meigen.

Ich nehme hier diese Gattung in dem von mir 1905 begründeten Sinne. Die vielen bisher bekannten neotropischen Arten lassen sich in folgender Weise unterscheiden.

- |   |                                      |
|---|--------------------------------------|
| 1. Anal- und Discoidalzelle beide offen; vierte Längsader gegabelt ( <i>Microdromia</i> )   | 2.                                   |
| — Analzelle immer vollständig; Discoidalzelle außen immer geschlossen   | 4.                                   |
| 2. Rückenschild glänzend schwarz  | * <i>defessa</i> Will.               |
| — Rückenschild in der Mitte oder an den Seiten gelbbrot   | 3.                                   |
| 3. Schildchen rot   | * <i>bivittata</i> Phil.             |
| — Schildchen schwarz  | <i>mesomelaena</i> n. sp.            |
| 4. Zweite Hinterrandzelle lang gestielt; Discoidalzelle vollständig ( <i>Hemerodromia</i> )   | * <i>pallida</i> Phil. <sup>1)</sup> |
| — Zweite Hinterrandzelle in der Regel nicht gestielt; wenn aber gestielt, dann ist der Stiel sehr kurz und immer kürzer als die Gabel | 5.                                   |
| 5. Discoidalzelle mit der zweiten Basalzelle verschmolzen; zweite Flügellängsader auffallend kurz ( <i>Neoplasta</i> )                | 6.                                   |

<sup>1)</sup> Es ist möglich, daß diese Art keine echte *Hemerodromia* s. strictu ist; ganz wahrscheinlich ist sie dann eine *Cladodromia*-Art, mit ausnahmsweise kurz gestielter zweiter Hinterrandzelle, wie es bei einigen Individuen der hier beschriebenen *fuscimana* und *plurivittata* manchmal vorkommt. Philippi sagt einfach: *alarum cellula postica secunda petiolata*.

- Discoidalzelle vollständig von der zweiten Basalzelle durch eine Querader getrennt (*Cladodromia*) 9.
6. Rückenschild ganz schwarz, ohne roten Schulterfleck *semilugens* Phil.
- Rückenschild schwarz, mit breiten roten Schulterflecken 7.
7. Hinterschenkel unten in der Mitte mit einem schwarzen Fleck  
*femorialis* n. sp.
- Hinterschenkel ganz gelb 8.
8. Männliche Genitalien geschlossen, ohne hervortretenden Faden  
*\*scapularis* Loew
- Männliche Genitalien klaffend, mit hervortretendem Faden  
*\*mexicana* Mel.
9. Fühler ganz schwarz, oder nur an der Wurzel gelb 10.
- Fühler ganz gelb 15.
10. Vorderhüften und Vorderschenkel schwarz, oder mehr oder weniger verdunkelt 11.
- Vorderhüften und Vorderschenkel ganz gelb 13.
11. Rückenschild nicht deutlich gestriemt und ziemlich kahl *inca* Bezzi.
- Rückenschild gestriemt und behaart 12.
12. Basalglieder der Fühler hellgelb; Vorderschenkel schwarz  
*nigramana* Phil.
- Basalglieder der Fühler dunkelgelb; Vorderschenkel kaum verdunkelt  
*fuscimana* n. sp.
13. Rückenschild nicht gestriemt *\*flavipes* Phil.
- Rückenschild deutlich gestriemt 14.
14. Rückenschild mit nur einer bis auf das Schildchen reichenden Längsstrieme; Basalglieder der Fühler bräunlich *cana* Bezzi.
- Rückenschild mit einigen Längsstriemen, welche das Schildchen nicht berühren; Basalglieder der Fühler gelb *plurivittata* n. sp.
15. Rückenschild grau 16.
- Rückenschild zum Teil gelb 18.
16. Rückenschild nicht gestriemt *\*pallida* Phil.<sup>1)</sup>
- Rückenschild gestriemt 17.

<sup>1)</sup> Ich habe diese Art hier wiederholt, wegen des in der vorhergehenden Note Gesagten.

17. Rückenschild mit einer einzigen Längsstrieme; Randmal fleck dunkel  
*\*pratincola* Phil.  
 — Rückenschild mit mehreren Längsstriemen; Randmal fleck kaum deutlich  
*boliviana* n. sp.
18. Mesonotum gelb, ohne schwarze Längsstriemen; Schildchen gelb  
*\*bicolor* Phil.  
 — Mesonotum rot mit schwarzer Längsstrieme; Schildchen schwarz  
*\* analis* Thoms.

74. *Hemerodromia (Microdromia) mesomelaena* n. sp. ♀ (Taf. Fig. 15).

Rufo-lutescens, opaca, capite vitta lata longitudinali, thoracis abdominisque dorso scutello et metanoto nigro-fuscis, antennis pedibusque pallidissime lutescentibus, alis hyalinis absque macula stigmatica, nervi quarti furca quam furca tertii longiore, nervo sexto nullo.

♀ terebra brevissima obtusa.

Long. corp. mm 2½, alar. mm 3.

Ein einziges nicht gut erhaltenes Weibchen aus Peru, Tarma, 3000 m, 19. I. 04.

Kopf ziemlich plattgedrückt, mit ausgepolstertem Hinterkopfe, ganz schwarz, grau bereift, Gesicht und Augenränder weißlich schimmernd; die Augen sind quer eiförmig, grünlich, vorn mit größeren Feldern, unter den Fühlern zusammenstoßend; Fühler ganz kurz, nackt, das dritte Glied eiförmig, vorn kurz zugespitzt, weißschimmernd; Rüssel dünn, gelb, etwa so lang wie die Höhe des Kopfes, mit breiten gelben Lippen; Taster verborgen. Der ganze Kopf ist nackt, nur an der Stirne und im Gesicht sind einige kurze zarte weiße Haare vorhanden. Rückenschild ziemlich lang, nackt, ohne alle Borsten; die schwarzgraue Längsstrieme ist vorn so breit wie der Hals, hinten wie das Schildchen; dieses ganz nackt und unbeborstet; Meta-notum breit, gewölbt. Hinterleib nackt, etwas kürzer als der Rückenschild; Legeröhre kurz und stumpf. Schüppchen ganz kurz und nackt; Schwinger abgebrochen. Beine samt den Hüften ganz hellgelb, nur die Tarsen an der äußersten Spitze gebräunt; Vorderhüften so lang wie die Vorderschenkel, diese verdickt, nackt, an der Wurzel unten mit zwei langen Haarborsten

und nach der Mitte hin ganz kurz schwarz gedörnelt; Vorderschienen kurz, schwach gebogen, am Ende innen mit einem Dorn, an der innern Seite kurz beborstet. Flügel mit dicker gelber Costa; Vorderart der dritten Längsader nur wenig schief; zweite und dritte Längsader an der Wurzel dick, schwarz; vordere Querader etwas vor der Mitte der zweiten Basalzelle; fünfte Längsader an der Wurzel dick und verdunkelt; Analzelle gänzlich fehlend.

75. *Hemerodromia (Neoplasta) semilugens* Phil., Verh. zool. bot. Ges., XV. 766. 2. (1865).

Ein Pärchen aus Chile, Palea, 3000—3500 m, 19—20, X. 02.

Sie stimmt gut mit der kurzen Beschreibung Philippi überein; beim Weibchen ist der Hinterleib wie bei der Art *scapularis* Loew gefärbt, das heißt gelblich, mit schwarzer Spitze. Ich habe 1905 diese Art in der Untergattung *Cladodromia* gelassen, da nach Philippi's Beschreibungen eine *Neoplasta* zu erkennen unmöglich ist; es ist daher wahrscheinlich, daß auch andere Arten zu dieser Untergattung gehören.

Kopf ziemlich rund; Fühler dunkler als Philippi angibt; Rückenschild glänzend schwarz, mit deutlichen Borsten an der Flügelwurzel; Schwinger weißlich. Männliche Genitalien abgerundet, der dicke dunkelgelbe Faden hinten etwas hervorragend; Legeröhre sehr lang, säbelförmig, gelb mit schwarzer Spitze. Die Hüften sind beim Männchen dunkler als beim Weibchen; die hinteren Schenkel sind in der Spitzenhälfte etwas verdunkelt; Vorderschenkel länger als die Vorderhüften, unten undeutlich gedörnelt; Vorderschienen nur wenig kürzer als ihre Schenkel. Flügel glashell, mit gelben Adern, ohne Randmalzelle; Vorderast der dritten Längsader viel kürzer als die untere, wenig schief; Discoidalzelle lang; sechste Längsader deutlich, aber verschwindend.

76. *Hemerodromia (Neoplasta) femoralis* n. sp. ♂.

Nigra nitida, abdomine lurido-opaco, scapulis macula lata, rufa ornatis, proboscide, antennis, halteribus pedibusque pallide luteis, tarsorum articulis duobus apicalibus femorumque posticorum macula lata, infera, paullo post medium nigris, alis

hyalinis, basi lutescentibus, macula stigmatica nulla, in medio post nervum transversum anteriorem nubecula fusca, indeterminata, ornatis, nervo sexto spurio.

♂ genitalibus parvis clausis, nigris, supra appendicibus duabus brevibus praeditis.

Long. corp. mm 2 $\frac{1}{4}$ , alar. mm 3.

Ein Exemplar aus Peru, Tarma, 3000 m, 19. I. 04.

Diese Art scheint mit *scapularis* Loew nahe verwandt zu sein; sie ist besonders wegen der schwarzen Flecke der Hinterschenkel verschieden.

Augen unter den Fühlern stark genähert, aber nicht zusammenstossend; Gesicht weiss schimmernd, kurz behaart. Seitenborsten des Thorax zart, gelblich; Schüppchen gelb, mit einigen hellen Wimpern. Schildchen und Metanotum ganz schwarz. Hinterleib schmutzig braun; Genitalien behaart. Vorderhüften kürzer als die Schenkel, diese wenig verdickt und unten ohne schwarze Dörnchen; Vorderschienen ziemlich lang; die Hinterschienen sind an der Wurzel an der Aufsenseite etwas geschwärzt. Die helle Behaarung der Beine ist ziemlich entwickelt. Flügel wie bei der vorhergehenden Art; die Discoidalzelle schmal und lang.

77. *Hemerodromia (Cladodromia) nigrimana* Phil., Verh. zool. bot. Ges., XV. 767. 7. (1865).

Zwei Männchen aus Chile, Calca, 2900—3000 m, 16—20. X. 02.

Stimmt mit der Beschreibung sehr gut. Die Fühler sind schwärzlich mit gelber Wurzel; Rüssel schwärzlich; Augen unten stark genähert, das schmale Gesicht grau. Ocellar- und Seitenborsten des Thorax ziemlich stark, schwarz; Schildchen mit zwei gekreuzten und aufrechten Apicalrandborsten. Alle Hüften schwarz; Vorderschenkel stark verdickt, unten gedörnelt, länger als die Hüften; Vorderschienen kurz. Flügel ziemlich breit, mit deutlichem Randmalfleck; zweite Längsader deutlich länger als bei den *Neoplasta*-Arten.

78. *Hemerodromia (Cladodromia) fuscimana* n. sp. ♂ ♀.

Grisea, opaca, abdomine nigro-fusco, thoracis dorso distincte pilosulo vittisque quinque longitudinalibus fuscis

quarum duabus intermediis angustioribus, antennis fuscis, basi obscure lutescentibus, halteribus luridis, pedibus luteis, femoribus anticis valde incrassatis, paullo infuscatis, alis cinereo-hyalinis, macula stigmatica dilute fusciscenti, cellula posteriori secunda basi interdum brevissime petiolata.

♂ genitalibus parvis rotundatis, clausis breviter pilosis.

♀ terebra elongata, crassiuscula, lamellis terminalibus angustis, fuscis.

Long. corp. mm  $2\frac{1}{2}$ —3, alar. mm  $2\frac{1}{2}$ — $3\frac{1}{2}$ .

Einige Exemplare aus Peru, Larestal, 3000—4000 m, 8. VIII. 03 und Cuzco, 3500 m, 6. IV.—12. VII. 05.

Diese Art steht der vorhergehenden sehr nahe, unterscheidet sich aber durch die Vorderschenkel, die nicht schwarz, sondern höchstens etwas verdunkelt und durch die Basalglieder der Fühler, die sehr dunkel, oft schwärzlich sind. Von meiner *inca* unterscheidet sie sich durch das gestriemte und kurz behaarte Rückenschild. Die zweite Hinterrandzelle ist in der Regel an der Wurzel mehr oder weniger breiter; bei einem Exemplare ist sie ganz kurz gestielt. Sehr verschieden in Gestalt von der der echten *Hemerodromia s. str.*-Arten. Gesicht weißschimmernd, zart behaart, verhältnismäßig breit; drittes Fühlerglied ziemlich breit; Rüssel schwärzlich; Ocellarborsten stark. Rückenschild in der Mitte kurz behaart, an den Seiten mit starken schwarzen Borsten; Schildchen mit zwei Randborsten. Hinterleib grauschwarz, am Bauche zuweilen beim Weibchen schmutzig gelb. Beine gelb, nur die Spitze der Tarsen und die Hüften zum Teil verdunkelt; Vorderschenkel wie bei der vorigen Art, unten mit ziemlich langen Borsten, ganz gelb oder höchstens an der Wurzel etwas verdunkelt. Flügel mit dem gewöhnlichen *Cladodromia*-Geäder; die Analzelle hat auch am unteren Rande eine dicke Ader, die sechste Längsader ist aber nach der Analquerader verschwindend.

79. *Hemerodromia (Cladodromia) plurivittata* n. sp. ♀ (Taf. Fig. 16).

Cinerea, opaca, thoracis dorso vittis quinque longitudinalibus fuscis, media rubiginosa, scutello cinereo, immaculato, abdomine nigro-fusco, antennis fuscis, basi laete luteis, halteri-

bus luridis, pedibus luteis, coxis quatuor posterioribus tarso-  
rumque articulis terminalibus infuscatis, alis hyalinis absque  
macula stigmatica, cellula secunda posteriori basi interdum  
brevissime petiolata.

♀ terebra crassa, nigra, nitida, lamellis terminalibus  
elongatis.

Long. corp. mm 3—3½, alar. mm 3—3½.

Einige Exemplare aus Peru, Arequipa, 2300—2500 m, 14.—15. XI. 02  
und Cuzco, 3500 m, 1. VI.—5. VII. 05.

Von der vorigen Art, mit welcher sie nahe verwandt ist, unterscheidet  
sie sich durch die an der Wurzel lichtgelben Fühler, die ganz gelben  
Vorderschenkel und die glashellen Flügel, welche keinen Stigmatale fleck  
besitzen. Von meiner *cana* unterscheidet sie sich durch die lichtgelben  
Basalglieder der Fühler, das graue Schildchen und die fünf Längsstriemen  
des Rückenschildes. Bemerkenswert ist, daß auch bei einem Exemplare  
die Anomalie der gestielten zweiten Hinterrandzelle zu beobachten ist.

Augen unter den Fühlern schmal getrennt. Rückenschild in der  
Mitte kurz behaart; von den Längsstriemen ist die mittlere deutlicher her-  
vortretend und von roströtlicher Farbe. Die Vorderschenkel sind ganz wie  
bei der vorhergehenden Art, aber mit den Hüften ganz gelb; Flügelgeäder  
ganz wie bei der vorigen.

80. *Hemerodromia (Cladodromia) boliviana* n. sp. ♂ ♀.

Praecedenti simillima at distincta, antennis totis luteis,  
vittarum longitudinalium thoracis media cinerea non rubiginosa  
et alarum macula stigmatica paullo distincta quamvis dilu-  
tissima.

♂ genitalibus erectis, nigris, pilosis superne bilobatis.

Long. corp. mm 2½—3, alar. mm 2⅔—3.

Ein Pärchen aus Bolivien, Titicacasee, Gnaqui, 3850—4500 m.

Mit der vorhergehenden nahe verwandt, von allen durch die lichtere  
Färbung des dritten Fühlergliedes verschieden. Auch die Körperfärbung  
ist mehr heller grau; Hinterleib weniger dunkel; die vier hinteren Hüften  
in das Gelbliche ziehend, grau bereift. Beim Weibchen ist das dritte Fühler-  
glied oben etwas verdunkelt. Flügelgeäder ganz wie bei den andern Arten.



### 19. *Drapetis* Meig.

Aus dem von Herrn Schnuse aus Südamerika zusammengebrachten Materiale geht hervor, daß meine 1904 errichtete Untergattung *Ctenodrapetis* in der neotropischen Fauna vorkommt. Es ist leider schwierig zu entscheiden, welche der von den Autoren unter *Drapetis* beschriebenen Arten zu meiner Untergattung gehören können; nach meiner Ansicht sind es die Arten *valdiviana* Phil. und *apicis* Will. Die Art *obscuripennis* Phil. scheint von den übrigen wegen der sehr kurzen ersten Basalzelle verschieden; vielleicht gehört sie nicht in diese Gattung. Die bis jetzt bekannten neotropischen Arten lassen sich wie folgt unterscheiden.

- |  |                             |
|--|-----------------------------|
| 1. Rückenschild gelb   | 2.                          |
| — Rückenschild schwarz   | 3.                          |
| 2. Schildchen gelb; Flügel ziemlich kurz und am Rande nicht lang gewimpert   | <i>flavida</i> Will.        |
| — Schildchen schwarz; Flügel sehr lang, mit lang bewimpertem Rande   | <i>ciliatocosta</i> Bezzi.  |
| 3. Vordere Basalzelle außerordentlich kurz; größere Art (4—5 mm) mit dunkeln Flügeln   | <i>*obscuripennis</i> Phil. |
| — Vordere Basalzelle von gewöhnlicher Länge  | 4.                          |
| 4. Schenkel schwarz, auch die vorderen, welche wenigstens an der Wurzel breit schwarz sind; Hinterschienen in der Mitte an der inneren Seite mit einer langen Borste bewaffnet | <i>armipes</i> n. sp.       |
| — Schenkel gelb, oder wenigstens die vorderen stets ganz gelb  | 5.                          |
| 5. Flügelrandader zwischen den Enden der ersten und zweiten Längsader deutlich verdickt, und der ganzen Länge nach lang bewimpert  | 6.                          |
| — Flügelrandader nicht verdickt und nicht besonders lang bewimpert   | 7.                          |
| 6. Flügel hyalin   | <i>*valdiviana</i> Phil.    |
| — Flügel dunkel getrübt; beide Basalzellen in Länge untereinander wenig verschieden  | <i>*apicis</i> Will.        |
| 7. Beine ganz und gar gelb   | 8.                          |
| — Hintere Schenkel mehr oder weniger geschwärzt  | 9.                          |
| 8. Dritte und vierte Längsader divergierend  | <i>divergens</i> Loew.      |
| — Dritte und vierte Längsader parallel   | <i>gilvipes</i> Loew.       |

9. Zarte Art, mit langen und lang bewimperten Flügeln; Rückenschild stark glänzend, ohne weißliche Pubescenz; Sporn der hinteren Schienen kurz; Hinterschienen mit einem einzigen langen Haare  
*monochaeta* n. sp.
- Stärker gebaute Arten, deren Flügel kürzer und nicht besonders lang gewimpert sind; Rückenschild nicht glänzend, mit weißlicher Pubescenz 10.
10. Fühler ganz dunkel; Hinterleib schwarz; Hinterschienen mit kurzem Sporne  
*\*femorialis* W. et M.
- Fühler gelb; Hinterleib mit schwarzer Binde; Hinterschienen mit sehr langem Sporne  
*fortis* n. sp.

81. *Drapetis (Drapetis) flavida* Will., Trans. entom. Soc. Lond., 1896, 308. 2. tav. XI. fig. 86 und 86 a. (p. 441 *xanthopoda*, errat.!) (1896); Coquill., Proc. U. S. nat. Mus., XXII. 251. [*Tachydromia*] (1900); Wheel. et Mel., Biol. centr. amer., I. 376. 2. (1901); Meland., Trans. amer. ent. Soc., XXVIII. 213. (1902); Coquill., Proc. entom. Soc. Wash., V. 265. [*Tachydromia*] (1903); Bezzi, Wien. entom. Zeit., XXIII. 144. [*Tachista fulvida*, errat.!] (1904); Aldr., Cat. N. A. Dipt., 311. (1905).

Ein Weibchen aus Peru, Meshagua, Urubambafluß, 350 m, 9. X. 03.

Stimmt sehr gut mit der Beschreibung; nur der Hinterleib ist beinahe ganz schwarz gefärbt. Recht bemerklich die lange und dicke Legeröhre. Die Art ist eine echte *Drapetis* und nicht eine *Tachista (Tachydromia)* wie Herr Coquillett will. In meinem Verzeichnis der *Drapetis*-Arten, 1904, habe ich durch ein Versehen die Art *fulvida* Will. anstatt *flavida* genannt.

82. *Drapetis (Drapetis) armipes* n. sp. ♀ (Taf. Fig. 18).

Nigra, omnino nitida, antennis pedibusque concoloribus, femorum anticorum apice tibiisque obscure rufescentibus, tibiis posticis apophysi apicali fere nulla, intus in medio seta spiniformi, elongata, armatis, palpis halteribusque albidis, alis non elongatis, cinereo-hyalinis, immaculatis, nervis tertio et quarto parallelis, sexto nullo, cellula basali secunda quam prima sesquialongiore.

♀ *terebra crassa elongata*.

Long. corp. mm 2 $\frac{1}{4}$ , alar. mm 2.

Ein Weibchen aus Chile, Taena, 600 m, 22. X. 02.

Diese schwarze, glänzende Art, ist besonders auffallend wegen der dunklen Färbung der Beine, und der starken dornartigen inneren Borste der Hinterschienen. Sie scheint bei *unipila* Loew (*nitida* Meland.) zu stehen; nach der von Melander gegebenen Figur (Trans. amer. entom. Soc., XXVIII. tav. V. fig. 14) sind aber die Hinterschienen ganz verschieden.

Fühler ganz schwarz, mit kurz eiförmigem dritten Gliede und nackter Endborste; die ziemlich starken Ocellar- und Verticalborsten sind schwarz. Thorax ziemlich kurz, mit heller Pubescenz und schwarzen Borsten; auch die zwei langen Borsten des Schildchens sind schwarz; Mesopleuren nackt, stark glänzend. Hinterleib ganz schwarz, oben glänzend, unten dunkel, überall kurz hell behaart; Legeröhre ziemlich aufrecht. Hüften ganz schwarz; Vorderschenkel stark verdickt, an der Spitze ziemlich breit rötlich; Hinterschenkel ganz schwarz, vor der Spitze an der Außenseite mit zwei Borsten; Vorder- und Mittelschenkel mit starker vorderer Präapicalborste; alle Schienen dunkelrot, die vorderen mit langer Präapicalborste, die hinteren an der Außenseite ohne besondere Haare; die dornartige Borste an der Innenseite der Hinterschienen sehr auffallend, gegen die Schiene gerückt; Hintermetatarsus an der Unterseite dicht goldfarbig behaart. Die Beine sind überall kurz weiß flaumig und mit gleichmäßigen Haaren besetzt. Flügel graulich, mit dunklen Längsadern, welche gegen den Vorderrand hin ziemlich nahe gerückt sind; zweiter Abschnitt der Randader fast so lang wie der dritte; Flügelvorderrand äußerst kurz behaart; zweite Basalzelle bedeutend kürzer als bei den folgenden Arten.

83. *Drapetis (Drapetis) fortis* n. sp. ♀.

Robusta, nigra, nitida, albopubescens, abdomine praeter segmentum tertium luride lutescenti, antennis brevibus, fuscis, basi rufis, seta terminali pilosula, palpis halteribusque albidis, pedibus rufescentibus, coxis femorumque basi luteis, tibiis tarsisque fuscis, femorum posticorum fascia lata, praepicali, nigra, tibiis posticis intus apophysii apicali longa, acuta,

nigra praeditis, alis non elongatis, griseo-hyalinis, immaculatis, nervis crassis, fuscis, dimidio basali quarti decolore, tertio et quarto extus subparallelis vel levissime convergentibus, cellula basali secunda prima duplo longiori.

♀ terebra brevi, crassa, retracta.

Long. corp. mm 3, alar. mm  $3\frac{1}{4}$ .

Ein Weibchen aus Peru, Puerto Bermudes, Pichisflufs, 300 m, 14. XII. 03.

Eine grofse Art, welche bei *femorialis* W. et M. zu stehen scheint.

Augen über und unter den Fühlern zusammenstofsend; Ocellar- und Verticalborsten lang. gelblich; Hinterkopf schwarz, oben und unten mit ziemlich langen Haaren; drittes Fühlerglied schwärzlich, kurz kegelförmig, mit langer, deutlich behaarter Endborste; Rüssel gelb, mit schwarzer Spitze; Taster grofs, gelblichweifs, hell behaart. Rückenschild glänzend schwarz, auf dem Rücken mit ziemlich langer weifslicher Behaarung, auf den Mesopleuren ganz kahl; die ziemlich langen Seiten- und Hinterborsten, sowie die zwei Borsten des Schildchens, in das gelbliche ziehend. Hinterleib hell behaart, das dritte Glied bindenartig, schwarz; Bauch ganz rotgelblich. Beine stark, mit ziemlich langer heller Behaarung, ohne längere Haare oder Borsten; Vorderschenkel stark verdickt; Anhang der Hinterschienen sehr stark auftretend, spornartig. Flügelvorderrand kurz bewimpert; zweiter Abschnitt der Randader viel kürzer als der dritte, aber etwas länger als der vierte; von der sechsten Längsader ist nur eine ganz schwache Spur vorhanden; auch die beiden Queradern sind, wie die Basalhälfte der vierten Längsader, hell.

84. *Drapetis (Ctenodrapetis) ciliatocosta* Bezzi, Ann. Mus. nat. hung., II. 355. 39, Fig. 6, (1904), Taf. Fig. 17.

Ein Männchen aus Bolivien, Bellavista, Mapiri, 1200 m, 29. XII. 02.

Die Auffindung dieser australischen Art in Südamerika ist sehr interessant; gewifs handelt es sich, wie in ähnlichen Fällen, um eine Art, welche von dem Manne weit verbreitet worden ist. Das einzige Exemplar stimmt in allen Merkmalen mit meiner Beschreibung überein; die Vorderschienen zeigen am Grunde innen eine sehr lange Borste, von welcher in

der Beschreibung nichts zu lesen ist; vielleicht waren bei den damals untersuchten Exemplaren die Schienen gegen die Schenkel gelegt, wie das oft der Fall ist. Nach der Färbung erinnert diese Art an *flavida* Will.

85. *Drapetis* (*Ctenodrapetis*) *monochaeta* n. sp. ♂ ♀.

Nigra, thoracis dorso nitidissimo, pube albida fere nulla, abdominis basi ventre pedibusque luteis, femorum posticorum apice infuscato, tibiis posticis fuscis, extus pilo unico, longo in medio praeditis, alis elongatis immaculatis, margine antico ciliato, nervis tertio et quarto parallelis.

♂ genitalibus parvis, rotundatis nigris.

♀ terebra brevi, basi lata.

Long. corp. mm 1½, alar. mm 2¾.

Ein Pärchen aus Peru, Umahuankiali, Urubambafufs, 500 m, 21, VIII.—18. IX. 03.

Diese Art erinnert sehr auffallend an meine *gracilis*, 1904, aus N. Guinea; unterscheidet sich jedoch durch den kürzeren Hinterleib und die mehr oder weniger verdunkelten Hinterbeine, deren Schienen nur ein einziges mittleres Haar tragen.<sup>1)</sup>

Fühler abgebrochen, die Basalglieder schwarz; Taster weißlich, breit; Rüssel ziemlich vorstehend; Kopfborsten gelblich. Rückenschild stark glänzend; mit kaum wahrnehmbarer weißer Pubescenz; Borsten schwärzlich, ebenso die zwei sehr langen Hinterborsten des Schildchens. Hinterleib weißlich, beim Weibchen nur in der Mitte, beim Männchen in der Spitzenhälfte dunkelschwarz. Alle Tarsen verdunkelt; Apicalanhänge der Hinterschienen ganz kurz. Flügel graulich, mit dunkelgelben Adern; eine kaum bemerkbare Spur der sechsten Längsader vorhanden; untere Basalzelle doppelt so lang wie die vordere; zweiter Abschnitt der Randader viel kürzer als der dritte.

<sup>1)</sup> In meiner Arbeit von 1904 (Ann. Mus. nat. hung., II) ist auf S. 354, Zeile 3 von unten, nach dem Worte *dietro* das Komma zu streichen.

## 20. *Tachydromia* Meigen.

Diese Gattung ist bei den nordamerikanischen Dipterologen immer unter dem Namen *Platypalpus* zu finden. Die bis jetzt bekannten südamerikanischen Arten lassen sich wie folgt unterscheiden:

- |   |   |
|---|---|
| 1. Rückenschild rot, wenigstens an den Seiten   | 2.  |
| — Rückenschild ganz schwarz   | 5.  |
| 2. Rückenschild ganz rot  | 3.  |
| — Rückenschild nur an den Seiten rot  | <i>*caligata</i> Mel.                     |
| 3. Fühler ganz gelb   | <i>*sanguinea</i> F. Lynch. <sup>1)</sup> |
| — Letztes Fühlerglied schwarz   | 4.  |
| 4. Gelbliche Art, mit auf der Oberseite schwärzlichem Hinterleibe   | <i>*testacea</i> Phil. <sup>2)</sup>      |
| — Rötliche Art, mit ganz schwarzem Hinterleibe  | <i>*Paulseni</i> Phil.                    |
| 5. Drittes Fühlerglied und Fühlergriffel dicht behaart; Flügel gegen die Mitte mit einem schwärzlichen Flecke | <i>*pictipennis</i> n. sp.                |
| — Fühlergriffel nackt, Flügel ungefleckt  | 6.  |
| 6. Hüften und Schenkel alle gelb  | <i>chilensis</i> Phil.                    |
| — Hüften und Schenkel alle, oder zum Teil schwarz   | 7.  |
| 7. Schwinger tief schwarz, vordere Hüften gelb, mittlere Schenkel außerordentlich stark verdickt.             | <i>eumera</i> n. sp.                      |
| — Schwinger weiß, oder schmutzig gelb   | 8.  |
| 8. Vorderhüften und Vorderschenkel gelb   | <i>annularis</i> n. sp.                   |
| — Vorderhüften und Vorderschenkel schwarz   | 9.  |
| 9. Erste Flügellängsader am Ende schwielenförmig erweitert  | <i>Pluto</i> Mel.                         |
| — Erste Längsader am Ende nicht erweitert.  | <i>Proserpina</i> n. sp.                  |

86. *Tachydromia pictipennis* n. sp. ♂ (?) (Taf. Fig. 19).

Nigra, nitidissima, antennis basi lutescentibus, articulo tertio et stylo breviter dense plumatis, nigris, pedibus omnino

<sup>1)</sup> Diese Art erinnert wegen des schwarzen Schildchens an meine *Drapetis ciliatocosta*; die Mittelschenkel sind aber als verdickt und unten gedornet beschrieben.

<sup>2)</sup> Die Art *Bacis* Walk. ist von Coquillet und Melander der Gattung *Tachypeza* zugeschrieben; ich vermute aber, daß diese Art nichts anderes als *Drapetis flavida* Will. ist.

pallide luteis, femorum posteriorum dimidio apicalitamen nigro, femoribus intermediis crassis, subtus nigrospinulosis, alis hyalinis elongatis, basi cuneatis, lobo alari non prominenti, in medio ad nervos transversos macula fusca lata exornatis.

Long. corp. mm  $1\frac{2}{3}$ , alar. mm  $2\frac{1}{2}$ .

Zwei nicht gut erhaltene Exemplare aus Peru, Tarma, 3000 m, 19. I. 04.

Eine ganz eigentümliche Art mit gefleckten Flügel und behaartem Fühlergriffel; sie zeigt die Flügelform von *Symbalophthalmus*, hat aber verdickte Mittelschenkel und getrennte Augen.

Kopf ganz glänzend schwarz, auch die schmale Stirn, die kurzen Borsten und die wenigen Haare gleichfalls schwarz; das dritte Fühlerglied ist kegelförmig und scheinbar nicht verlängert; es ist aber schwierig zu sehen, wo das Glied endigt und wo der Griffel beginnt, da beide dicht und ziemlich lang behaart sind, der Komplex ist sehr lang, über zweimal so lang als der Kopf; Rüssel und Taster schwarz; Rückenschild stark glänzend, auf dem Rücken kurz behaart, hinten und an den Seiten mit etwas längeren hellen Haarborsten; das Schildchen zeigt in der Mitte einen vertieften Querstreifen. Die Schwinger sind gebrochen, der Stiel ist gelblich. Hinterleib kurz, ganz glänzend schwarz, kurz behaart, am Ende etwas beschädigt, so daß es unmöglich ist, das Geschlecht mit Sicherheit zu erkennen. Beine samt den Hüften ganz gelb und hell behaart; die schwarze Spitzenhälfte der Hinterschienen sehr auffallend; Mittelschenkel ziemlich stark verdickt, unten mit einer Reihe von langen Wimperhaaren; Mittelschienen kurz, gebogen, an der Spitze beinahe ungedornt. Flügelrand ziemlich lang bewimpert; Flügeladern gelblich, die dritte und vierte parallel laufend; die zwei Basalzellen gleich lang.

87. *Tachydromia chilensis* Phil., Verh. zool. bot. Ges., XV. 767. 1. (1865).

Viele Exemplare beider Geschlechter aus Chile, wo die Art weit verbreitert zu sein scheint; die Exemplare stammen aus Coronel an der See, 9. IX. 02, Concepcion, 150 m, 10. IX. 02 und Quillota, 1000 m, 20. IX. 02.

Ich glaube, daß diese Art mit der von Philippi beschriebenen zusammenfällt, da ich kein Merkmal finde, das der kurzen Beschreibung

Philippis widerspricht. In der Beschreibung ist aber *pectore* im Sinne von *thorace* zu nehmen; der Rückenschild scheint in der Tat erzfarbig wegen des dichten Toments. Das dritte Fühlerglied ist kurz kegelförmig; Taster gelblich; Kopf- und Thoraxborsten ziemlich lang und schwarz; Hinterleib glänzend schwarz, sparsam hell behaart; männliche Genitalien kolbig, abgerundet, schwarz; Sternopleuren glänzend, ohne Toment; die vier hinteren Hüften schwarz; Mittelschenkel stark verdickt, unten kurz schwarz gedörnelt; Mittelschienen an der Spitze mit ganz kurzem Dorne; Flügel ganz glashell, erste Längsader am Ende etwas schwielenförmig erweitert, dritte und vierte nach außen parallel; Flügellappen vortretend.

88. *Tachydromia eumera* n. sp. ♂.

Nigra, ubique nitida, antennarum basi pedibus anticis totis, tibiaram quatuor posteriorum dimidio apicali tarsisque praeter apicem luteis, femoribus intermediis maxime incrassatis, tibiaram intermediarum calcari apicali valido, halteribus nigerimis, alis hyalinis, immaculatis, nervo primo ad apicem non calloso, tertio et quarto extrinsecus parallelis.

Long. corp. mm 1½, alar. mm 2.

Ein Männchen aus Peru, Tarna, 3000 m, 19. I. 04.

Eine kleine, kurze, breite, sehr starke Art. Stirn ziemlich schmal; die Borsten und Haare sind kurz und schwarz; Rüssel ziemlich lang; Taster klein, schwärzlich; von den Fühlern sind nur die gelben Basalglieder vorhanden. Rückenschild ohne Toment, kurz behaart; längere Borsten fehlend oder abgefallen. Hinterleib kurz und stumpf, sparsam hell behaart; Genitalien ganz klein, zugespitzt. Die vorderen Beine sind ganz gelb, auch die Hüften, nur die äußerste Spitze der Tarsen schwarz; die vier hinteren Beine sind dagegen schwarz, mit den in der Diagnose angegebenen gelben Stellen; Mittelschenkel unten gedörnelt. Flügel ganz normal, die Adern gelblich, an der Wurzel etwas verdunkelt; beide Basalzellen gleich lang, aber ziemlich kurz.

89 *Tachydromia annularis* n. sp. ♀.

Nigra, nitida, antennis nigris, basi fuscis, articulo tertio elongato, pubescente, halteribus albidis, pedibus luteo-rufis,



femorum quatuor posteriorum annulo lato intermedio nigro, alis hyalinis immaculatis, nervo primo ad apicem paullulo calloso, dilatato, tertio et quarto extrinsecus parallelis.

Long. corp. mm 2, alar. mm  $2\frac{1}{2}$ .

Ein Weibchen aus Peru, Cuzco, 3500 m, 17. VI. 05.

Eine gewöhnliche, stark glänzende Art, mit besonderer Färbung der Beine. Obere Kopfborsten ziemlich lang, schwarz; Unterrand des Kopfes mit hellen Haaren; drittes Fühlerglied ziemlich lang, kegelförmig, deutlich behaart, Fühlergriffel dagegen nackt; Taster klein, weißlich. Rückenschild kurz behaart, mit langen Seitenborsten; Schildchen mit zwei langen Hinterborsten. Hinterleib ziemlich lang, breit, sparsam behaart; Legeröhre kurz, zylindrisch, mit ziemlich langen dunklen Apicallamellen. Die vorderen Beine sind samt den Hüften ganz gelb Mittel- und Hinterschenkel schwarz, an beiden Enden gelb; Mittelschenkel mälsig verdickt, unten schwarz gedörnelt; Mittelschienen am Ende mit kurzem Dorn. Die Tarsen sind am Ende verdunkelt. Flügel ganz normal; die Verdickung der Costa am Ende der ersten Längsader klein, gelb, nicht vortretend; beide Basalzellen von gleicher Länge.

90. *Tachydromia Proserpina* n. sp. ♂ ♀.

Nigra, nitida, tomento obscure cinereo in thoracis dorso levissime adpersa, antennis nigris, articulo tertio elongato, pubescenti, halteribus luride albidis, pedibus nigris, femorum apice tibiaram tarsorumque basi plus minusve lutescentibus, alis cinereo-hyalinis immaculatis, nervis fuscis, callositate costali ad exitum nervi primi parva ac minime prominenti, cellula basali secunda quam prima plerumque paullulo breviori.

♂ genitalibus rotundato-oblongis nigris clausis.

♀ terebra brevi, lamellis apicalibus longissimis, fuscis.

Long. corp. mm  $1\frac{3}{4}$ — $2\frac{1}{4}$ , alar. mm  $2\frac{1}{2}$ —3.

Einige Exemplare beider Geschlechter aus Peru, Cuzco, 3500 m, 17. III.—6. IV. 05 und aus Bolivien, Cordillere, 4000—5000 m, 14. V. 03.

Die Art steht der *Pluto* Mel. nahe, unterscheidet sich aber wegen der kleineren Costalschwiele und der Länge der Basalzellen. Kopf- und Rückenschildborsten schwarz und ziemlich lang; Taster verdunkelt; Schildchen mit zwei Borsten; an den Seiten sind die Sternopleuren stark glänzend, ohne alle Bereifung. Hinterleib breit und lang, sparsam behaart. Beine in der Färbung ziemlich veränderlich; bei einigen Exemplaren sind die Schenkel am Ende breiter und die Schienen fast ganz gelb, bei andern sind die hinteren Schenkel ganz schwarz, und die Schienen fast ganz verdunkelt; an den hinteren Tarsen ist zuweilen nur der Metatarsus an der Wurzel schmal gelblich; Mittelschenkel mittelmäßig verdickt, Mittelschienen am Ende mit kleinem Dorne. Flügel ganz von gewöhnlicher Gestalt; die mittlere Verdickung der Costa klein und nicht vortretend; dritte und vierte Längsader außen parallel laufend; die zwei Queradern, welche die beiden Basalzellen vorn abschließen, sind nur selten in gleicher Linie wie bei den meisten Arten, sondern häufiger steht die untere Querader etwas vor der oberen, während Melander bei seiner Figur der *Pluto* (Trans. amer. entom. Soc. XXVIII, 1902, tav. VI, fig. 39) das Gegenteil darstellt.

## Errata.

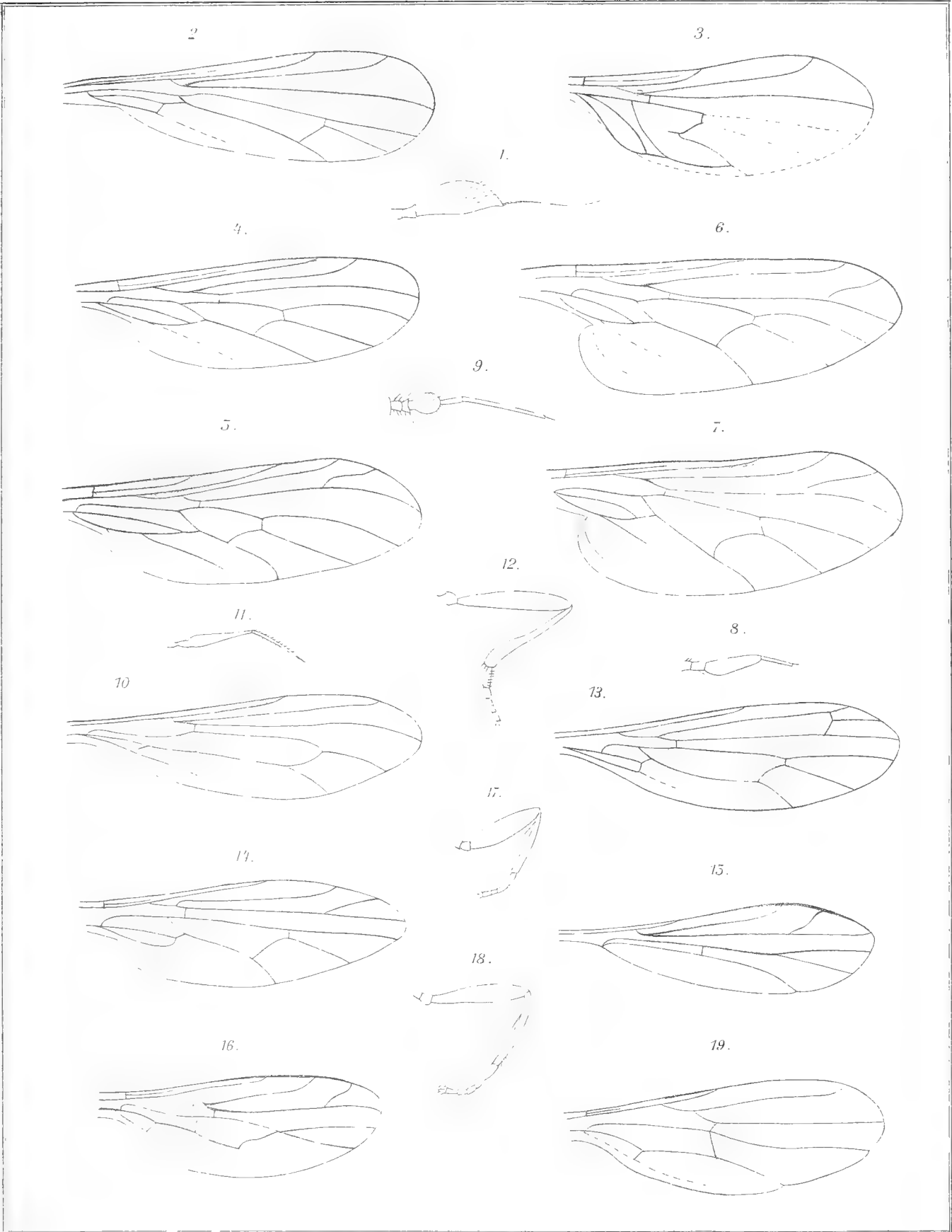
- S. 300. Z. 11 statt *Phoneutisea* lies *Phoneutisca*.  
„ 302. Die Noten 1), 2) und 3) sind resp. zu den Gattungen *Atrichopleura*, *Phlebotena*  
und *Amictoides* zu legen.  
„ 322. Z. 19 statt *galictodes* lies *galactodes*.  
„ 334. Z. 30 vor *brevibus* schalte ein *alis*.  
„ 341. Die Note 1) ist auf die Art *Columbi* zu beziehen.  
„ 357. Z. 25 statt *prima vista* lies *primo visu*.

### Anmerkung.

Da diese Arbeit schon Ende 1907 abgeschlossen war, so war es mir unmöglich, die Meigenschen Namen *Noeza*, *Atalanta* und *Coryneta* für *Hybos*, *Clinocera* und *Tachydromia* brauchen zu können.

M. Bezzi.





Sci.

Lith. Anst. v. Paul Schindler, Leipzig

M. Bezzi : Empididae.













K. Leopold. Card  
v. 91  
1909

AMNH LIBRARY



100185068