NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE
TOMVS II.

PRAECEDIT HISTORIA EIVSDEM ACADEMIAE
AD ANNVM MDCCLXXXIV.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM MDCCLXXXVIII.

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

Année MDCCLXXXIV.

Avec une Planche.

HISTOIRE. Pag.

NOVA

NOVA ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS TOMVS II.

Cum XI. Tabulis aeri incisis.

MATHEMATICA

PHYSICO-MATHEMATICA

STEPH.

Errata.

Errata.

Pag. 222	*lin.* 20	*lege*	erit B aqua infera
223	10		In lagena
225	10		modo habuit
226	22		Franks
227	16		centum.

HIS-

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE

DES

SCIENCES.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES SCIENCES

ANNÉE MDCCLXXXIV.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw ayant conſidéré la néceſſité indiſpenſable de conſtruire un nouveau bâtiment, dans lequel on puiſſe placer plus commodement la librairie, établir des magazins de livres, diſpoſer des ſalles plus vaſtes & mieux arrangées pour les Aſſemblées des Académiciens & les Leçons publiques, enfin loger divers Officiers de l'Académie, qui jusqu'apréſent demeurent dans des maiſonettes de bois caduques, qu'il faudra démolir pour la ſureté de la Bibliothéque & des autres départemens académiques qui ſe trouvent dans le voiſinage, Son Excellence avoit formé déja l'année précédente le projet d'un pareil édifice de 47 toiſes & demie de longueur pour être bâti ſur le bord de la Néva entre la Bibliotheque & les Collèges Impériaux, vis à vis du chantier de l'Amirauté: & après en avoir fait executer le plan par M. Guarengi, Architecte de l'Impératrice, elle le préſenta à Sa Majeſté Impériale & La ſupplia d'aſſigner pour la conſtruction de ce nouveau bâtiment, qui ſelon le devis de pluſieurs Architectes coutera environ 106 mille roubles, une ſomme de 79 mille payable en quatre ans, eſpérant de ſuppléer le reſte de la caiſſe économique de l'Académie. Sa Majeſté approuva non ſeulement ce plan en applaudiſſant au zéle de Madame la Princeſſe, mais Elle ordonna encore que 15 mille roubles fuſſent payés tout de ſuite par le Cabinet, pour pouvoir commencer ſans délai la conſtruction du nouveau édifice, qui outre ſa néceſſité & ſon utilité immanquables devoit devenir un des plus beaux ornemens de la ville. En conſéquence de cet ordre gracieux, on commença encore en hyver à piloter le terrein, & en moins d'une année le fondement avec l'étage du rez de chauſſée revétu d'un beau granit furent déja achevés. Ce bâtiment tel qu'il a été approuvé & executé enſuite, ſe trouve repréſenté ſur la vignette qui decore le titre de ces nouveaux Actes. L'Architecture comme on l'y voit eſt ſimple & noble: la façade principale tournée vers l'Amirauté, eſt ornée de huit colonnes Joniques, & peut paſſer pour un modele de bon gout.

Un des ſoins principaux de Madame la Princeſſe étant d'augmenter les fonds de la caiſſe économique de l'Académie, la premiere année de ſa direction ſe trouva à peine écoulée, qu'elle l'avoit fait monter malgré les dépenſes extraordinaires dans tous les départemens académiques à une ſomme conſidérable; & comme elle croyoit de ſon devoir d'employer cette premiere épargne qui ſe trouva être de 30 mille roubles, à un bien de la patrie qui fut réel & qui répondit directement aux ſoins maternels de l'Auguſte Souveraine, elle conçut l'idée d'établir des cours publics de ſciences donnés en langue ruſſe, dont non ſeulement les étudians & les éléves de l'Académie pourroient profiter, mais qui ſeroient auſſi ouverts à des auditeurs étrangers, par où ces cours deviendroient d'autant plus utiles que les ſciences étant transferées dans la langue du païs répandroient d'avand'avantage leur lumiere. Mais pour donner à un tel établissement une autorité & une confistance plus grande, Madame la Princeffe trouva bon de s'addreffer encore à la Souveraine & de fupplier Sa Majefté d'agréer & d'ordonner que la fusdite fomme foit dépofée à la banque comme un capital permanent & que les 1500 roubles d'interêts foient employés à quatre cours publics, favoir de Mathématiques, de Phyfique, de Minéralogie & de Chymie, en payant à chacun des quatre Profeffeurs ruffes, qui voudront s'en charger, un honoraire annuel de 375 roubles: enfin que dans le cas qu'un de ces Profeffeurs fut empêché de tenir fes leçons foit par maladie foit par d'autres accidens, fa part ferve à augmenter le capital. Ce projet ne put que mériter l'approbation de la Souveraine, qui répondit en ces termes:

Княгиня Катерина Романовна! По содержанію доклада, отъ Васъ поданнаго, МЫ позволяемъ изъ собранной при Академіи Наукъ экономической суммы отдать въ здѣшній Банкъ, для дворянства учрежденный, тритцать тысячь рублей, съ тѣмъ, чтобъ получаемые изъ сего капитала проценты по тысячѣ по пяти сотъ рублей на годъ обратить на жалованье четыремъ Россійскимъ Профессорамъ, кои будутъ преподавать Лекціи Математическія, Физическія, Минералогическія и Химиче-

скія

Princeffe Cathérine Romanowna: Sur la requête que vous M'avez préfentée, Nous permettons de dépofer à la Banque établie pour la Nobleffe, les 30 mille roubles amaffés dans la caiffe économique de l'Académie des Sciences, & que les intérets de ce capital, favoir 1500 roubles, foyent employés à payer quatre Profeffeurs ruffes, qui donneront des Leçons publiques de Mathématiques, de Phy-

fique,

скія на Россійскомъ языкѣ. Пребываемъ въ прочемъ Вамъ благосклонны

ЕКАТЕРИНА

Во Царскомъ селѣ, Апрѣля 20 дня, 1784 года.

sique, de Minéralogie & de Chymie en langue russe. Étant au reste

votre affectionnée

CATHÉRINE.

à Sarskoye Selo le 20 Avril 1784.

Comme le nombre des associés étrangers se trouva être très considérable malgré la perte de plusieurs que l'Académie a faite dans le courant de l'année derniere, Madame la Princesse crut devoir pour l'honneur de cette association, prendre des mésures pour en diminuer la liste. Elle fit en conséquence déclarer & enrégistrer dans l'Assemblée du 5 Février le reglement suivant:

1.) Depuis le commencement de cette année 1784, l'Académie attendra toutes les fois six vacances, avant de passer à l'élection d'un nouveau membre externe.

2.) Ce feront alternativement les deux Classes de Mathématiques & de Physique qui proposeront au Chef les sçavans qu'elles jugeront mériter le plus cette distinction. La reception se fera ensuite dans une Assemblée des Académiciens & Adjoints, à la pluralité des voix & par la voie du scrutin.

3.) Le Chef se reserve toutefois de faire des exceptions en faveur des Génies supérieurs, ou des sçavans d'une célébrité distinguée, qui parviendront à sa connoissance.

4.)

4.) Cet arrangement subsistera, jusqu'à ce que le Chef & l'Assemblee des Académiciens auront trouvé le nombre des associés asses diminué pour pouvoir remplacer chaque vacance.

Le 22 Avril, Madame la Princesse addressa à l'Académie la notification suivante:

„ Ayant obtenu de Sa Majesté Impériale la permis-
„ sion de m'absenter pour trois mois à compter du 4 de Mai,
„ je n'ai point voulu laisser l'Académie sans un Vice-Directeur;
„ de façon que j'en ai prié Sa Majesté, qui à mon grand
„ contentement a bien voulu nommer S. E. M. le Senateur
„ de Strekalof, pour avoir soin des interéts de l'Académie pen-
„ dant mon absence: c'est donc à lui, Messieurs, que Vous au-
„ rez à Vous adresser desormais &c."

La Princesse de Daschkaw.

Madame la Princesse ne partit cependant que le 23 de Mai, & continua de diriger les affaires académiques jusqu'au dernier moment de son départ. M. le Conseiller-Privé & Sénateur, Chevalier de Strekalof parut dès le lendemain 24 à l'Académie, & après y avoir pris possession de la place du Directeur, il communiqua à l'Assemblée la lettre qu'il avoit reçue de Sa Majesté l'Impératrice, rélativement à la direction de l'Academie dont il se trouvoit chargé jusqu'au retour de Madame la Princesse de Daschkaw.

Cette lettre est conçue en ces termes:

Сme-

Степанъ Ѳедоровичь! Давъ позволеніе Княгинѣ Катеринѣ Романовнѣ Дашкавой по прошенію ея отлучиться на время для домашнихъ ея дѣлъ, МЫ поручаемъ Вамъ въ управленіе Санктпетербургскую Академію Наукъ до возвращенія Княгини Дашкавой. Пребываемъ въ прочемъ вамъ благосклонны

ЕКАТЕРИНА.

Въ Царскомъ селѣ,
Апрѣля 13 дня,
1784 года.

Stepan Fédorovitſch. Ayant donné à la Princeſſe Cathérine Romanowna Daſchkaw, à ſa ſollicitation, la permiſſion de s'abſenter pour quelque temps, pour ſes affaires domeſtiques, Nous vous chargeons de la direction de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg jusqu'au retour de la Princeſſe de Daſchkaw; Étant au reſte votre affectionnée

CATHÉRINE.

Sarskoe Zelo
le 13 Avril 1748.

M. de Strekalof prit donc dês le 24 Mai les rênes de la direction des affaires académiques avec autant de zèle que d'aſſiduité, & il ſçut par ſa droiture & ſes manieres obligéantes ſe concilier en peu de temps l'eſtime & la confiance de toutes les perſonnes attachées à l'Académie.

M. le Conſeiller Privé & Chambellan actuel de Zinowief, Miniſtre de Sa Majeſté l'Impératrice à la Cour de Madrit, ſe trouva alors à St. Pétersbourg & apprit à M. de Strekalof que le Comte de Florida-blanca, Premier Secrétaire d'État de S. M. Catholique lui avoit fait entrevoir, qu'il ſouhaitoit d'acquerir pour la nouvelle Académie des Sciences qu'il ſe propoſoit d'établir à Madrit ſous la protection du Roi ſon maître, tous les mémoires de l'Académie de St. Pétersbourg ainſi que les ouvrages de feu M. Euler. M. de Strekalof

kalof en donna connoiſſance à l'Académie, & ayant trouvé convenable de faire un préſent à la nouvelle Académie naiſſante de Madrit, de tout ce que ſon Illuſtre fondateur avoit demandé, il fut reſolu de ſaiſir l'occaſion du retour de M. de Zinowief à ſon poſte, pour envoyer une collection complette des dits mémoires & ouvrages académiques à S. E. M. le Comte de Florida-blanca avec une lettre que le Secrétaire lui écriroit au nom de l'Académie. Ce qui fut executé.

L'Aſſemblée des Académiciens reſolut le 26 Août, à l'occaſion d'un mémoire ſur les centres de gravité qui lui avoit éte adreſſe par M. Lhuilier ſon Correſpondant, & à laquelle elle avoit accordé une approbation diſtinguée, de décréter que, comme l'Academie poſſede deja divers pareils mémoires intéreſſans envoyes par des ſavans étrangers, & qui ſous ce titre ne ſauroient être inſerés dans les Actes, elle en fera des collections ſéparées & les publiera ſous le titre de Memoires préſentés par des ſavans étrangers, à meſure qu'elle en aura reçu aſſés pour en faire un volume.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw revint de ſon voyage le 6 Septembre & releva M. de Strekalof dès le lendemain, en reprenant les fonctions de Directeur de l'Académie. Le Secrétaire lui fit un rapport de tout ce qui s'etoit paſſé dans les ſéances académiques pendant ſon abſence, & S. E. fit enregiſtrer à celle du 13 Septembre, qu'elle conſentoit entiérement aux diverſes reſolutions priſes dans les aſſemblées des Academiciens & Adjoints; & qu'elle remercioit chacun de ces Meſſieurs en particulier du zéle avec lequel il a rempli ſes devoirs.

L'Académie devoit ſuivant l'uſage reçu, tenir vers la fin de l'année une Aſſemblée publique & y décerner le prix annuel:

nuel: celui de l'année préſente avoit pour ſujet une expoſition de la maniere que ſe fait la nutrition & l'accroiſſement des parties animales qui ſont déſtituées de vaiſſeaux, telles que les ongles, cornes &c. cette queſtion publiée en 1782 avoit encore été repétée dans le Programme de 1783, comme on peut la lire à la page 153ᵉ de la partie hiſtorique du 1ᵉʳ volume de ces nouveaux Actes. Cependant l'Académie n'avoit reçu qu'un ſeul mémoire ſur ce ſujet, & ce mémoire, outre qu'il étoit venu aprés le terme qui avoit été fixé au 1ᵉʳ Juillet de la préſente année, ne répondoit pas entiérement aux vües de la compagnie qui s'attendoit à quelque choſe de plus détaillé & de mieux conſtaté ſur une queſtion dont elle reconnoit les difficultés; il fut donc reſolu avec l'agrément de Madame la Princeſſe de Daſchkaw de ne point tenir d'Aſſemblée publique en cette année, & de publier ſimplement un nouveau Programme; d'y propoſer pour la ſeconde fois la même queſtion, & de fixer le terme de l'envoi des ouvrages au 1ᵉʳ Juillet 1786, en conſervant pour le concours le mémoire qu'elle avoit déja reçu, & qui eſt écrit en françois & déſigné par la deviſe: *Ignis vtique latet, naturam amplectitur omnem, cuncta parit, renouat, diuidit, vrit, alit.* Il ſeroit ſuperflu d'inſérer ici ce nouveau programme, qui contient encore une répétition de la queſtion minéralogique propoſée pour le prix de 1785: il ſuffira de rapporter, ce que l'Académie y avoit encore ajouté, ſavoir qu'elle ne s'attend à aucune explication complette, à aucune théorie parfaite de cette nutrition; mais qu'elle deſire qu'on y répande plus de jour, qu'elle exige ſeulement que tout ce que l'on avance, ſoit d'une entiere certitude, ou du moins de la plus grande probabilité. Qu'elle ſera même ſatisfaite ſi, ſans le ſecours de nouvelles expériences, on déduit de nouvelles aſſertions, d'une maniere nette & ſolide, des expériences déja connues, en les combinant heureuſement: mais qu'elle rejettera les hypothèſes qui ſeroient fon-

fondées arbitrairement fur des phenoménes quelconques, & qu'il eft toujours aifé de diftinguer d'avec les vérités évidentes & inconteftables.

Mais au defaut d'une Affemblée publique, il y eut le 18 Décembre une folemnité qui ne fut pas moins intéreffante; celle de l'emplacement du bufte de feu M. Euler, dans la falle d'affemblées. Après que Mrs. les Académiciens & Adjoints eurent pris unanimement la réfolution d'ériger à leurs dépens un monument à l'honneur de leur illuftre Doyen, & que Madame la Princeffe de Dafchkaw eut non feulement applaudi à cette marque de leur vénération, mais encore voulu y contribuer fa part; il fut nommé un comité pour prendre des engagemens avec M. Rachette un des meilleurs fculpteurs de la ville, qui avoit encore l'avantage d'avoir non feulement fréquenté beaucoup le defunt, mais qui en avoit déja fait avec le plus heureux fuccès le médaillon après vie. Il fut donc arreté que cet artifte feroit le bufte du defunt Académicien en marbre de Carrare: & Madame la Princeffe outre la part qu'elle avoit à la depenfe, envoya déja le 15 Mars une très belle colonne de marbre, qui fut placée à la falle d'affemblées & entourée d'un treillage de fer, pour fervir de piedeftal à ce bufte.

M. Rachette s'en acquitta à la grande fatisfaction de toute l'Académie, & réuffit dans la reffemblance à un point, que perfonne ne méconnut dans le marbre les traits du grand homme qu'il repréfente. Tout fe trouvant ainfi difpofé, Madame la Princeffe de Dafchkaw fixa le jour pour la ceremonie de l'emplacement, & avertit Mrs. les Académiciens & Adjoints de fe rendre à la falle de leurs affemblées vers 11 heures avant midi. Elle meme y vint à l'heure nommée, & après

après une courte expoſition du motif qui l'avoit engagé de convoquer cette aſſemblée extraordinaire, & qui fut de rendre un témoignage ſolemnel du grand cas qu'elle fait des vertus & des rares mérites du defunt Académicien Leonhard Euler, dont le nom ne périra jamais & que l'Académie ne ceſſera de régretter; S. E. s'approcha de la colonne placée vis-à-vis du fauteuil du Préſident, & après s'être fait donner le buſte, elle le poſa deſſus avec un ſentiment qui ſe dépeignoit ſur tout ſon viſage, & qu'elle exprima par ces paroles „ l'Académie „ peut ſe glorifier d'avoir poſſedé un homme ſi grand dans les „ ſciences: & il eſt pour moi un honneur & une ſatisfaction „ très flatteuſe d'avoir poſé en votre préſence & au vrai or„ nement de cette ſalle, l'image de ce ſavant plein de mérites. "

L'Académie a fait pendant le courant de cette année pluſieurs acquiſitions, à la tête desquelles nous rapportons à bon droit, un portrait peint à l'huile & parfaitement reſſemblant de S. M. le Roi Stanislas Auguſte de Pologne, que ce Monarque, que l'Académie a l'honneur de compter au nombre de ſes Honoraires, a bien voulu envoyer en préſent. L'Académie le reçut vers la fin du mois d'Octobre, avec des témoignages d'une reſpectueuſe reconnoiſſance, & Madame la Princeſſe le fit placer dans la ſalle des aſſemblées académiques, à la place de celui de ce même monarque qui s'y trouvoit déja, mais qui étoit bien inférieur tant à l'égard de la peinture, qu'à celui de la reſſemblance.

L'Obſervatoire aſtronomique reçut une excellente Pendule faite par le célebre artiſte Arnold à Londres, que M. le Prof. Lexell avoit commandée pour l'Académie pendant le ſéjour qu'il a fait en Angleterre.

La

La Bibliothéque fut enrichie de la *Flora Austriaca* & *du Hortus Vindobonensis*, deux ouvrages magnifiques & de grand prix, outre plusieurs autres livres dont Madame la Princesse avoit ordonné de faire l'achat.

Les autres acquisitions en livres & en productions d'histoire naturelle, envoyées en partie de la part de Sa Majesté Impériale, en partie par Madame la Princesse de Daschkaw & par diverses personnes, auteurs & éditeurs, se trouvent indiquées à l'Article des *Ouvrages présentés &c.*

L'Académie publia dans le courant de cette année outre les volumes 8^e & 9^e de ses Actes, qui comprennent le dernier semestre de 1780 & le premier de 1781, divers ouvrages scientifiques, entre lesquels ont un droit particulier d'etre indiqués ici:

Leonhardi Euleri Opuscula analytica, deux tomes in 4^{to} dont le premier contient 14 & le second 15 mémoires du defunt Academicien, qui n'avoient pas encore été imprimés.

Dissertationes de vniformitate motus diurni Terrae: auctoribus Jo. Fr. Hennert et Paul. Frisio, ab Academia Imper. Scient. Petropolitana praemio coronatae. 4^{to} c. f.

Mémoire sur la Théorie des Machines à feu, auquel l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg a adjugé le Prix: par M. Seb. Maillard. 4^{to}.

Sam. Gottl. Gmelins Reise durch Russland, zur Untersuchung der drey Natur-Reiche. 4^{ter} Theil. Zweyte Reise nach Persien in den Jahren 1772 — 1774, nebst

 dem

dem Leben des Verfassers 4^{to}: publié par ordre de Madame la Princesse de Daschkaw & avec l'approbation de l'Académie par M. le Conseiller de Collèges Pallas.

Madame la Princesse de Daschkaw gratifia de la pension académique de 200 roubles par an:

M. François Hermann, Professeur de Technologie, & Correspondant regnicole : présentement à Cathérinbourg dans le Gouvernement de Perme.

M. Eric Laxmann, Conseiller de Cour, ancien Académicien & Associé libre, demeurant à Irkoutzk : proposé pour la pension, par l'assemblée des Académiciens & agréé par S. E. Mr. le Sénateur de Strekalof, pendant l'absence de Madame la Princesse de Daschkaw, qui à son retour y donna son consentement.

S. E. augmenta considérablement les gages de Mrs. les Académiciens Roumovski, Krafft & Lexell.

Elle obtint pour Mrs. les Académiciens Inohodzof & Ozeretskovski & pour M. l'Adjoint Socolof le titre de Conseiller de Cour, qui leur fut décrété au mois d'Octobre par le haut & dirigeant Senat, en conséquence d'un rapport présenté à Sa Majesté l'Impératrice, par Madame la Princesse.

Sur les éloges réiterés que Mrs. les Académiciens des Classes de Mathématiques avoient donnés à l'assiduité & aux progrès du Sieur Martin Platzmann, éléve en Mathématiques de M. l'Académicien Lexell, Madame la Princesse de Daschkaw le fit proposer à l'Assemblée du 15 Janvier pour être reçu au au nombre des Adjoints : ſa reception ſe fit unanimement, & le nouvel Adjoint fut introduit le 29 du même mois, où il préſenta aux Académiciens aſſemblés, après les avoir remerciés ainſi que leur Illuſtre Chef de ſa promotion, un mémoire intitulé : *Solutio problematis ex methodo tangentium inuerſa*: inſéré dans le 10^e^ volume des Actes.

Le 27 Septembre. Madame la Princeſſe propoſa pour être reçu au nombre des Correſpondans étrangers, M. Jean Gerhard Koenig, Docteur en Médecine & célèbre Botaniſte à Trankebar, pour avoir fait parvenir à l'Académie un herbier & une collection conſiderable de ſemences indiennes avec le catalogue, dont il lui avoit fait préſent. Le Diplome fut adreſſé à ſon ami M. le Conſeiller de Conferences Muller à Copenhagen, mais M. Koenig mourut à Trankebar le 31 Juillet 1785 avant de recevoir ce gage de la diſtinction & de la reconnoiſſance que lui avoit deſtiné l'Académie.

L'Académie a fait dans le courant de cette année trois pertes, dont la plus douloureuſe eſt celle de M. André Jean Lexell decedé le 30 Novembre matin, après n'avoir été allité que pendant peu de ſemaines. Madame la Princeſſe de Daſchkaw l'honora de ſon eſtime particuliere, & le regretta bien vivement avec toute l'Academie.

Le 7 Janvier mourut à Dresden, M. Jean Ernſt Zeiher, Docteur en Philoſophie & Medecine, ancien Aſſocie ordinaire de l'Academie Impériale des Sciences pour la Mechanique & la Phyſique expérimentale, Profeſſeur de Phyſique à l'Univerſite de Wittenberg & Surintendant du Cabinet de Phyſique & de de Mathématique de S. A. Séreniſſime l'Electeur de Saxe à Dresden. Il nâquit à Weiſſenfels en Saxe en 1720: il fut appellé à St. Pétersbourg en 1756, où il arriva la même annee: il y rempliſſoit avec aſſiduité & zèle la place d'Académicien ordinaire & y fit imprimer diverſes pieces outre celles qui de lui ont été inſérées dans les Commentaires. Il quitta St. Pétersbourg & retourna dans ſa Patrie en 1764, où il a d'abord été Profeſſeur ordinaire à Wittenberg, & en dernier lieu depuis 1776 Surintendant du Sallon d'inſtrumens de Phyſique & de Mathématiques à Dresden.

Le 21 Juillet mourut à Paris M. Denis Diderot qui avoit été reçu au nombre des Académiciens en 1773, lorsqu'il ſe trouvoit à St. Pétersbourg, pour remercier & admirer de près l'Auguſte Souveraine, qui l'avoit comblé des marques de ſon eſtime & de ſa munificence.

Précis de la vie de M. Lexell.

André-Jean Lexell, Docteur en Philoſophie, Académicien ordinaire pour les Mathématiques, Membre des Academies Royales des Sciences de Stockholm & d'Upſal, de l'Académie Royale des Sciences de Turin & Correſpondant de celle de Paris: nâquit à Âbo le 24 Décembre 1740, de M. Jonas Lexell Magiſtrat de la même ville & Madélaine-Cathérine Björkegrén.

Il étudia à Âbo & s'appliqua de bonne heure aux ſciences abſtraites: il y prit le grade de Docteur en Philoſophie en 1760, après avoir disputé ſous la préſidence de M. Jacques Gadolino, Profeſſeur en Phyſique, & publié une diſſertation inaugurale intitulée *Aphorismi Mathematico-Phyſici.*

En

En 1763, M. Lexell se rendit à Upsala & s'y distingua par une Disputation *de Methodo inueniendi lineas curuas ex datis radiorum osculi proprietatibus*, qui lui valut la place de Lecteur en Mathématiques, & en 1766 celle de Professeur au Corps des Cadèts de Marine. Mais l'arrivée de M. Leonhard Euler à St. Pétersbourg, les préparatifs qu'on y faisoit pour observer en 1769 le passage de Venus devant le disque du Soleil en huit differens endroits du vaste Empire de Russie, & le nouveau lustre que l'Académie Impériale des Sciences alloit reprendre sous le regne de Son Auguste Protectrice CATHERINE II., furent pour M. Lexell des attraits trop forts pour ne pas chercher à participer aux travaux de cette Compagnie, & à profiter des lumieres des sçavans illustres qui la composoient. Il fit dans cette vüe parvenir à l'Académie en 1768 un mémoire sur le calcul intégral, intitulé: *Methodus integrandi nonnullis aequationum exemplis illustrata*, qui ne manqua point son but. Feu M. Euler chargé de l'examiner n'en porta non seulement un jugement très favorable, mais ce qui acheva d'en faire l'éloge, & ce qui mérite d'être rapporté, c'est que comme M. le Comte Wolodimer Orlov, qui dans ce temps dirigeoit l'Academie, objecta que c'étoit peut-être l'ouvrage de quelque habile Géomètre qui avoit bien voulu favoriser M. Lexell, M. Euler y repliqua avec sa vivacité ordinaire, que dans ce cas il n'y auroit que M. d'Alembert ou lui qui auroient pu le faire. Mais M. Lexell n'étoit alors connu ni de l'un ni de l'autre. Le Comte Orlov ne balança donc plus à envoyer à M. Lexell la vocation d'Adjoint pour les mathématiques, & M. Lexell l'accepta avec empressement: il obtint encore la même annee, le 17 Octobre 1768, l'agrément de S. M. Suédoise & partit sans délai pour St. Pétersbourg. Sa premiére occupation y étoit de se familiariser avec les instrumens astronomiques, pour être en état de faire l'observation du passage

 de

de Venus, dont il s'acquitta conjointement avec le Pere Meyer, que l'Académie avoit engagé à l'Obſervatoire pendant le temps de l'abſence de ſes Aſtronomes. M. Lexell s'attacha bientôt à feu M. Euler, qui l'employa à coucher par écrit tous les calculs & mémoires que ſon génie fécond méditoit. Il eut auſſi beaucoup de part à la nouvelle Théorie de la Lune & ſurtout à la détermination de la parallaxe du Soleil déduite des obſervations du paſſage de Venus, qui ſe trouve inſérée au XIV. Tome des nouveaux Commentaires. La réputation de M. Lexell s'accrut ainſi de jour en jour: En 1771 l'Académie le reçut au nombre des ſes Académiciens ordinaires, & le Comte Orlov lui donna une place d'Aſtronome: Les Académies de Stockholm & d'Upſala ſe l'aſſocierent en 1773 & 1774 & l'Académie Royale des Sciences de Paris lui envoya le diplome de Correſpondant en 1776. Le Roi de Suede ſon maître lui confera en 1775 la place de Profeſſeur en Mathématiques à l'Univerſité d'Åbo avec la permiſſion de reſter encore trois ans à St. Pétersbourg: cette permiſſion lui fut prolongée depuis deux fois d'une année; c'eſt à dire jusqu'en 1780. M. Lexell étoit ſur le point de quitter St. Pétersbourg pour aller ſe domicilier dans ſon lieu natal, & l'Académie l'auroit perdu immanquablement ſans la permiſſion que lui fit offrir M. de Domaſchnef, d'entreprendre un voyage littéraire par l'Allemagne, la France, & l'Angleterre, & de retourner ainſi par la Suede à St. Pétersbourg. M. Lexell ſe laiſſa tenter: il fut chargé des commiſſions de l'Académie & reçut pour cet effet une inſtruction par écrit. Il s'en acquitta à la grande ſatisfaction de l'Académie & revint ainſi en 1781, aprés une abſence d'un an, très content de ſa courſe.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw lui donna en 1783 la place vacante par la mort de M. Euler, & augmenta conſidéſidérablement ſes appointemens. L'Académie royale des Sciences de Turin le reçut la même année au nombre des ſes Aſſociés externes, & le comité des Longitudes à Londres le mit en 1784 ſur la liſte des ſçavans, qui reçoivent tous les ouvrages que public cet inſtitut rélativement à la détermination de la Longitude par mer.

M. Lexell n'en jouit gueres: il tomba malade encore avant l'hyver de cette année, & mourut fort regretté le 30 Novembre, d'une tumeur gangréneuſe ſuivie d'une fievre maligne.

M. Lexell parloit peu ſans être embaraſſé dans les cercles où il ſe trouvoit: il aimoit, il recherchoit même la bonne compagnie, & il en étoit payé d'un parfait retour.

OUVRAGES IMPRIMÉS OU MANUSCRIPTS, MACHINES ET INVENTIONS, PRODUCTIONS DE LA NATURE ET DE L'ART, ANTIQUITÉS ET CURIOSITÉS, présentés ou donnés à l'Académie en l'année 1784.

Dans l'Aſſemblée du Lundi 8 Janvier, S. Exc. Madame la Princeſſe de Daſchkaw, Directrice de l'Académie, a envoyé & fait préſent au cabinet de Curioſités, un traineau de Kamtſchatka avec les harnois pour l'attelage de cinq chiens.

M. le Conſeiller de Colleges Pallas a expoſé & donné de la part de S. E. Mr. de Klitſchka Gouverneur-Général d'Irkutzk', une caiſſe contenant diverſes plantes marines cueillies aux isles Kouriles, ainſi qu'une tulipe de mer très bien conſervée, (*Lepas tintannabulum & lepas aurita* Lin.) qui furent transportées au cabinet d'Hiſtoire naturelle.

Le 12 Janvier. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé les livres ſuédois indiqués ci-après, dont Sa Majeſté Impériale a daigné faire préſent à la Bibliotheque académique

Konunga Sagar, af Joh. Kankel 1670. fol.

Peringskiolds Heims Kringla 2 Tomes fol. Stockholm 1647.

Konunga ok Höfdinga Styrelſe. fol. Stockholm 1669.

Twå gamla ſwenska Rymkrôniken af Joh. Hadorph. 2 Volumes in 4^to Stockholm 1647.

Nor-

Nordisk Hjälta Prydnad af Gulringar. 4^{to} Stockholm 1739.
Gothrici et Rolfi Westrogothiae regum historia. 8^{vo} Upsaliae 1664.
Herrauds och Bosa Saga. 8^{vo} Upsal 1666.
St. Olaffs Saga pa Swenske Rimfördom öfwer 200 år sedan. 8^{vo}.

Le même 12 Janvier. Madame la Princesse a encore fait remettre pour la Bibliotheque académique, onze cahiers écrits en différentes langues asiatiques, qu'elle a reçus de la part de S. E. Mr. le Lieutenant - Général de Souvorof.

M. le Prof. Lexell a présenté de la part de l'élève Platzmann, digne d'eloges par son application: *Solutio Problematis geometrici.*

Le 19 Janvier. M. le Conseiller de Collèges Pallas a présenté de la part de M. le Conseiller de Cour Hablitzl', pour le jardin botanique & le cabinet d'Histoire naturelle, diverses semences apportées de Cherson, ainsi que l'écorce d'une espèce de citrouille des mêmes environs, qui croit en forme de Turban.

Le 22 Janvier. Le Secrétaire a lu une lettre latine de M. Joseph de Joseph, datée de Genes le 30 Juin 1783, qui pretend avoir trouvé une méthode de déterminer avec la plus grande exactitude la Longitude en mer, & qui l'offre aux Académies & sçavans, en les invitant à une souscription, pour lui faire une recompense proportionée à l'importance de sa decouverte. Comme l'Academie s'est fait une loi de ne point répondre à de pareilles propositions, la susdite lettre fut mise à l'ecart.

Le 26 Janvier. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Auteur Charles de Mertens, Docteur en Médecine: *Obſeruationes medicae* deux volumes in 8vo imprimés à Vienne, & de la part de M. Catteau, Paſteur de l'Egliſe françoiſe réformée à Stockholm, quelques exemplaires d'une lettre qu'il a fait imprimer ſur la mort de M. Wargentin, & qui en contient l'éloge. Ces exemplaires ont été diſtribués à Meſſieurs les Académiciens des Claſſes de Mathématiques.

Le 29 Janvier. Le Secrétaire à préſenté le Proſpectus de l'Cryctographie de Bruxelles par M. Burtin, Médecin conſultant de la même ville.

M. le Prof. Ferber a remis le Proſpectus de l'ouvrage de M. de Trebra à Zellerfeld, intitulé: *Erfahrungen vom Innern der Gebirge.* L'Académie a ſouſcrit pour l'un & l'autre ouvrage.

Le 23 Février. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de Sa Majeſté Impériale un *Oculus mundi* d'une rare beauté. L'Académie l'a fait dépoſer & enrégiſtrer dans ſon cabinet d'Hiſtoire naturelle.

Le 26 Février. Le Secrétaire a remis de la part de la Société royale des Sciences de Göttingen: *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Göttingenſis per An.* 1783. *Vol. V.*

—— —— il a lu un rapport de M. Jährig daté de Gouſinoi Ozero le 13 Décembre, qui envoie un extrait allemand de trois divers écrits indiens originaux, concernant le Bourghan Schigimunich, ſa vie & ſa doctrine.

Le 8 Avril. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de M. de Klopman, Marechal de la Cour du du Duc de Courlande & Chevalier des Ordres de Pologne, pour être depoſée au cabinet académique, une médaille en argent qu'il a fait frapper en mémoire de l'acquiſition glorieuſe de la Crimée & du Couban.

Le même 8 Avril. M. le Prof. Krafft a préſenté & lu une lettre de M. le Conſeiller d'État actuel Aepinus, qui contient l'annonce d'un microſcope achromatique d'une nouvelle conſtruction propre à voir les objets avec la lumiere réflechie de leur ſurface.

Le Secrétaire a préſenté une lettre circulaire imprimée de M. le Prof. Mederer à Fryboürg en Brisgau, qui annonce un remede infaillible contre la rage, & qui invite les Sociétés & les ſçavans de le conſtater par de nouveaux éſſais. À cette lettre ſe trouverent jointes deux brochures rélatives à cette cruelle maladie: ſavoir *M. J. J. Mederer Syntagma de rabie canina* & *F. J. Kern Diſſertatio inauguralis medica de infallibili remedio prophylactico ſiphileos.*

—— —— l'annonce d'une déſcription détaillée de la diſſection du fameux Jean Bec de Hambourg, qui avoit ſuppléé par un né & un palais artificiels à ces parties de ſon viſage & de ſon goſier, qu'il avoit perdues, & qui avoit enſuite couru le monde pour gagner ſa ſubſiſtance en faiſant voir ces parties.

—— —— il a lu une lettre de M. le Conſeiller de la Chancellerie Struve à Ratisbonne, datee du $\frac{16}{27}$ Janvier, qui envoie de la part de l'Auteur, M. Stoy, Prof. de la Pedagogie à Nurnberg: *Bilder-Academie für die Jugend, Ihro Königl. Hoheit dem Kronprinzen von Schweden zugeeignet. Achte Ausgabe, nebſt einigen Bogen Erklarung. Nürnberg* 1783. Il mande en même temps, avoir déja envoyé pour l'Academie & adreſſé à M. de Domaſchnef

maſchnef les parties précédentes de cet ouvrage, ſans avoir été honoré d'une réponſe. Le Secrétaire lui répondra que ni l'Académie, ni les perſonnes attachées à la Bibliotheque, en ont quelque connoiſſance.

—— —— il a lu une lettre de M. de Magellan datée de Londres le 6 Février, concernant les machines à feu, leur perfection par Mrs. Watt & Boulton, & les divers emplois qu'on en a faits en Angleterre, en rendant rotatoire le mouvement alternatif de ces machines.

—— —— il a préſenté diverſes obſervations météorologiques, qui lui avoient été adréſſées de Dublin, & de Varſovie.

Le 15 Avril. Mrs. les Académiciens Roumovski & Lexell ont communiqué une lettre de Madame la Princeſſe de Daſchkaw, qui les charge par ordre de Sa Majéſte l'Impératrice, d'examiner une horloge, qu'un artiſte de la nation a eu l'honneur de préſenter à la Souveraine, & qui ſe trouve dépoſée à l'Hermitage.

M. le Prof. Krafft a préſenté de la part de M. de Bohle, Major des Ingénieurs, une pierre ſemblable à celle de Labrador, qu'il a découverte près de Strelna, & qui par ſa beauté ne cede en rien à celles des Indes. À cette pierre ſe trouva joint un mémoire hiſtorique, dont M. Krafft a fait la lecture.

Le Secrétaire a lu une lettre que M. Patrin, Correſpondant de l'Académie, lui a écrite de la fonderie de Nertſchinsk, le 21 Décembre dernier, & où il rend compte des excurſions & obſervations d'Hiſtoire naturelle qu'il a faites en 1782.

Le

Le 19 Avril. M. le Conseiller d'État actuel de Stehlin a communiqué une lettre de M. le Prof. Scopoli, datée de Pavie le 15 Mars, qui envoie le prospectus de son ouvrage intitulé: *Deliciae Florae & Faunae Insubricae.*

Le 22 Avril. Le Secrétaire a lu une lettre de Madame le Princesse de Daschkaw, rélative à son prochain voyage de trois mois. Voyez ci-dessus. pag. 7.

Le 29 Avril. Le Secrétaire a lu une lettre de M. l'Astronome Bode à Berlin, datée du 25 Avril, qui annonce son ouvrage nouvellement publié sur la Planète Uranus, dans lequel il prouve que cette étoile avoit déja été observée par Flamstädt en 1690.

Le 3 Mai. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé pour être présenté & sousmis au jugement de l'Académie, un mémoire de M. le Prof. Hermann; sur la meilleure maniere de fondre & de forger le fer: Mrs. les Academiciens Pallas & Ferber après l'avoir examiné & en avoir fait un rapport avantageux dans une des séances suivantes, l'Académie en a publié une traduction russe à l'usage des nationaux qui possédent des minieres & fabriques de fer.

Le 10 Mai. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé pour être présenté à l'Académie: Rapport fait à l'Académie royale des sciences de Paris, sur la machine aërostatique inventée par Mrs. de Montgolfier. Et de la part de l'Auteur M. Lemort Démétigny, une disputation pour le grade de Bachélier en Médecine à la faculté de Montpellier, intitulée: *Tentamen Ψυχο-σωματο-ιατρικον: seu conspectus thesiformis de na-*

tura animae et corporis, ſiue de ſpiritu et materia quatenus Medicinam ſpectant.

Le 17 Mai. Le Secrétaire a préſenté le VIII^{e} Volume des *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, qui comprend le dernier ſemeſtre de l'année 1780.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé: Traité de la perſonnalité & de la réalité des loix, coutumes, ou ſtatuts, par forme d'obſervations; au quel on a ajouté l'ouvrage latin de Rodenburgh intitulé: *de jure quod oritur e ſtatutorum diverſitate*: par feu M. Louïs Boullenois, ancien Avocat au Parlement, deux tomes in 4to imprimés en 1766, avec une lettre de Mſgr. l'Ambaſſadeur Prince de Golitzin, datée de Vienne le 29 Avril, qui mande, que c'eſt le fils du defunt Auteur de cet ouvrage, qui a ſouhaité qu'il ſoit préſenté à l'Académie.

Le 24 Mai. Cette Aſſemblée a été préſidée par S. E. M. le Sénateur, Conſeiller-Privé & Chevalier de Strekalof, qui y a lu & communiqué la lettre de Sa Majeſté l'Impératrice, en vertu de la quelle il ſe trouve chargé de diriger l'Académie pendant l'abſence de Madame la Princeſſe de Daſchkaw. Voyez ci-deſſus, pag. 8.

Le Secrétaire a remis les ouvrages indiqués ci-après, que M. le Conſeiller d'État actuel & Chevalier de Peterſon, Réſident à Dantzig, lui a addreſſés pour les préſenter de la part des Auteurs.

1.) Genera et Species plantarum vocabulis characteriſticis definita. 8vo 1781. par M. le Docteur Wolff à Dantzig.

2.)

2.) Le même ouvrage augmenté de ce que l'Auteur avoit déja publié en 1776 fur la même matiere, fuivi d'une Concordance botanique.

3.) Précis hiftorique des faits rélatifs au magnetisme animal jusques en Avril 1781, par M. Mesmer, Docteur en Médecine de la faculté de Vienne: traduit de l'allemand.

4.) Lettre d'un Médecin de la faculté de Paris à un Médecin du College de Londres: ouvrage dans lequel on prouve contre M. Mesmer, que le magnetisme animal n'exifte pas.

5.) Obfervations fur le magnetisme animal, par M. d'Eslon, Docteur-régent de la faculté de Médecine de Paris, & Premier-Médecin ordinaire de Msgr. le Comte d'Artois. Londres 1780.

Le 27 Mai. M. le Confeiller de Colleges Pallas a préfenté de la part de M. Brunnich, Prof. d'Hiftoire naturelle à Copenhague: *Litteratura Danica fcientiarum naturalium: qua comprehenduntur. I.) Les progrés de l'Hiftoire naturelle en Dannemarc & en Norwège. II.) Bibliotheca patria autorum & fcriptorum fcientias naturales tractantium*: en un volume *in* 8vo.

Le 3 Juin. Le Secrétaire a lu la lettre de remerciment de M. de Lagus, Aide de Camp de S. E. Mr. le Gouverneur-Général de Kafchkin, reçu au nombre des Correfpondans regnicoles.

Le 10 Juin. Le Secrétaire a remis: *Bibliotheca viri, dum viverat, excellentiffimi & experimentiffimi Benj. Schwartz M. D. & Protophyfici Gedanenfis.* P. I — IV.

Le 14 Juin. Le Secrétaire a lu une lettre de M. Sideau, adreſſée à Mrs. les Académiciens & accompagnée d'un mémoire au ſujet d'un nouveau inſtrument conſtruit d'après les principes de feu M. Euler, pour repréſenter ſur une table oppoſée, debout & en grandeur naturelle, les perſonnes placées derriere l'inſtrument. Mrs. les Académiciens Lexell, Fuſs & le Secrétaire ayant été nommés de ſe rendre chez cet artiſte, pour y voir & examiner l'effet du ſon inſtrument, ont rapporté dans la ſéance ſuivante, que c'eſt une application ingénieuſe de la lanterne magique & du microſcope ſolaire propoſés par feu M. Euler & inſérés au 3ᵉ Tome des nouveaux Commentaires: que cette machine repréſente avec aſſés de préciſion & de clarté les objets, lorsqu'ils ſont ſuffiſament illuminés, ſoit par le Soleïl, ſoit par des bougies, & que ſa conſtruction fait honneur aux talens de M. Sideau, qui a ſçu ſurmonter aſſés heureuſement toutes les difficultés, qui s'oppoſent à une repréſentation en grandeur naturelle & droite.

M. le Conſeiller de Collèges Pallas a préſenté de la part de l'Auteur, Don Ferdinand Galliani, Conſeiller au Conſeil ſouverain du commerce de S. M. le Roi des deux Siciles: *Dé doveri dé principi neutrali verſo i principi guerreggianti e di queſti verſo i neutrali, libri due.*

Le Secrétaire a lu une lettre de M. de Magellan datée de Londres le 28 Mai, où il s'agit de la decouverte d'un volcan dans la Lune par M. Herſchel, d'une nouvelle balance hydroſtatique inventée par M. Nicholſen, & de diverſes autres nouveautés littéraires interéſſantes.

Le 17 Juin. M. le Prof. Fuſs a préſenté de la part de M. Fries, Chirurgien à Archangel, un flacon contenant dans de l'eſprit de vin, une partie du corps médullaire d'une balaine

laine, trouvée à ſec à l'embouchure de la Duina, à 70 verſtes de la ville d'Archangel, avec la deſcription détaillie de cet animal & de ſes dimenſions. Sa longueur a été de 13 toiſes, & le diamètre de ſa groſſeur de 5 toiſes. La longueur des os maxillaires 10 arſchines & un quart, & le poids de ſa graiſſe de 1314 Poudes.

Le même 17 Juin, le Secrétaire a préſenté de la part de l'Auteur: *Aſtronomiſches Jahrbuch für das Jahr 1786; von J. E. Bode, Aſtronom der Konigl. Akademie der Wiſſenſchafften in Berlin.*.

Le 21 Juin. M. le Conſeiller de Collèges Pallas a lu une lettre de M. le Conſeiller d'État actuel & Chevalier Aepinus, au ſujet de la decouverte d'un volcan dans la Lune, vû par M. Herſchel.

Le 1 Juillet. Le Secrétaire a remis de la part de l'Académie royale des ſciences & belles-lettres de Pruſſe, le Programme des queſtions, qu'elle propoſe pour les prix de l'année 1786.

——— il a lu une lettre de M. de Lagus, datée de Perme le 6 Juin, qui communique quelques obſervations ſur la crüe extraordinaire des eaux de l'Irtiche & de la Kama.

Le 8 Juillet. M. le Prof. Géorgi a lu une lettre de M. le Docteur Bloch, Médecin à Berlin, qui envoie & ſoumet à l'approbation de l'Académie: *Pleuronectarum duplex ſpecies, Zebra & Dentatus*, en manuſcript avec des deſſins faits d'après nature.

Le 12 Août. S. E. Mr. le Conſeiller privé & Chevalier de Strekalof a remis pour être examiné par l'Académie, un un manuſcript intitulé: Découverte des principes de l'Aſtronomie par M. René Trottier: ouvrage à la portée de tout le monde, même des gens les plus ruſtiques, avec une lettre de l'Auteur datée de Paris le 13 Juillet. M. le Prof. Lexell ayant été nommé pour lire cet écrit, il en a fait ſon rapport à la ſéance ſuivante, où il dit que cette découverte prétendue eſt au deſſous de toute critique.

Le même 12 Août, le Secrétaire a lu une lettre de M. Janin de Combe blanche à Mrs. de l'Académie, datée de Lyon le 16 Avril, qui envoie deux brochures intitulés: 1.) Lettre ſur l'Antiméphiſtique. 2.) Premiere & ſeconde Lettre à M. Cadet, Apoticaire de Paris.

—— —— Il a préſenté de la part de l'Académie royale des ſciences de Paris:

Hiſtoire de l'Académie royale des ſciences. Année 1779. avec les mémoires de Mathématiques & de Phyſique pour la même année.

Connoiſſance des mouvemens céleſtes, pour l'année commune 1785.

Le même ouvrage, pour l'année 1786.

& de la part des Auteurs:

Obſervations ſur la Phyſique, ſur l'Hiſtoire naturelle & ſur les Arts, par Mrs. l'Abbé Rozier & Mongez le jeune. Années 1782 & 1783, avec les ſupplémens.

M. le Prof. Lexell a préſenté de la part de l'Auteur: Théorie du mouvement & de la figure elliptique des planètes, par M. de la Place, de l'Académie royale des ſciences de Paris.

Le

Le 19 Août. Le Secrétaire a lu des lettres de M. le Conseiller de Cour Laxmann, datées d'Irkoutzk le 27 Avril, 18 Mai & 16 Juin, qui communique diverses remarques de botanique & de minéralogie, surtout des observations fort intéressantes sur la congélation du mercure. Il a aussi envoié pour le cabinet académique une collection de fossiles.

Le Secrétaire a présenté de la part de l'Académie royale des sciences de Berlin.

Nouveaux mémoires de l'Académie royale des Sciences & Belles-Lettres. Année 1781, avec l'Histoire pour la même année.

Quatre Dissertations qui ont remporté des Prix à cette Académie I.) Sur la force primitive: Prix de 1779. II.) De l'influence des Sciences sur le gouvernement & réciproquement: Prix adjugé en la même année III.) Sur la question extraordinaire: Est-il utile au peuple d'être trompé? adjugé en 1780: & IV.) Sur la question de ballistique proposée pour le Prix de 1782.

& de la part de l'Académie électorale des sciences de Manheim.

Historia & commentationes Academiae Scientiarum Electoralis Theodoro-Palatinae. Tom. V^us, pars Physica.

Le 23 Août. M. le Prof. Lexell a remis de la part de l'Académie royale des sciences de Stockholm.

Kongl. Vetenskaps Academiens nya Handlingar. Tom. IV. för År 1783.

Swen Rinman Förfök til Jarnets Historia 4^to År. 1782.

Le

Le 26 Août. Le Secrétaire a lu une lettre de M. de Lagus, qui envoie pour le cabinet académique & pour être analysées chymiquement, diverses pieces du spath-fusible-phosphorique; (*) ainsi qu'une mine de fer blanc qu'on trouve au fond de la riviere, à 30 verstes de Tioumen.

—— —— une lettre de M. Lhuilier, datée de Pulawy dans le Palatinat de Lublin le 18 Juillet, qui envoie un mémoire de Mathématiques en manuscript intitulé: Théoreme sur les centres de gravité.

Le 2 Septembre. M. le Prof. Krafft a présenté de la part de M. le Conseiller d'État actuel & Chevalier Aepinus, un imprimé intitulé: Description des nouveaux Microscopes, qui contient outre l'annoncé manuscript présenté le 8 Avril, divers éclaircissemens sur leur construction & leurs avantages principaux.

Le Secrétaire a présenté le prospectus d'une nouvelle édition des oeuvres complettes de M. le Comte de Buffon, qui paroitra à Deuxponts.

Le 6 Septembre. M. le Conseiller de Colleges Pallas a exposé, le 4e ou dernier Tome des voyages de feu M. Gmelin, qui venoit de quitter la presse sous le titre: *Samuel-Gottlieb Gmelin Reise durch Russland zur Untersuchung der drey Natur-Reiche &c.*

M. le Prof. Lexell a lu la lettre de remerciment de M. Maskelyne, à qui l'Académie avoit envoyé en présent plusieurs des ses ouvrages de Mathématiques, pour la peine qu'il s'étoit donnée à examiner à l'observatoire de Greenwich la pen-

(*) Noua Acta Acad. Imp. Sc. Tom. I. à la partie historique pag. 157.

pendule & le chronomètre de M. Arnold, avant qu'ils furent expediés pour St. Pétersbourg.

Le même 6 Septembre. M. Lexell a préſenté le proſpectus de l'ouvrage de M. Taylor: Table des ſinus & tangentes logarithmiques pour chaque ſeconde du quart-de-cercle, précédée d'une table logarithmique des nombres depuis 1 jusqu'à 100000. L'Académie a ſouſcrit pour deux exemplaires, pour être déposés à l'obſervatoire, à l'uſage de Mrs. les Aſtronomes.

—— —— il a préſenté de la part de l'Auteur: *Obſeruationes noui Planetae Manhemii culminantis ad quadrantem muralem Birdii 8 pedum. Auctore Carolo König, Aulae Palatinae Aſtronomo.*

Le 9 Septembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. Aug. Fréd. Rulffs, commiſſaire royal à Einbeck près de Göttingue: *Ueber die Preiſsfrage der königl. Societät der Wiſſenſchaften zu Göttingen: von der vortheilhafteſten Einrichtung der Werck- und Zuchthäuſer, mit einer Vorrede von Hrn. Prof. Joh. Beckmann.*

—— —— il a lu une lettre, datée de l'Amirauté de Londres le 24 Juin & addreſſée au Préſident de l'Académie Impériale, par M. H. Parker, Secrétaire du Comité des Longitudes, qui annonce que le dit comité vient de deſtiner à l'Académie Imperiale, un exemplaire de chaque ouvrage qu'il publie, & qu'il la prie de le faire rétirer du libraire Elmsley, où ces ouvrages ſeront régulierement déposés. L'Académie a ſur cela chargé M de Magellan ſon Aſſocié penſionaire à Londres, de recevoir pour elle ces ouvrages du Comité des Longitudes.

Le 13 Sept. Premiere ſéance tenue après le retour de Madame la Princeſſe de Daſchkaw. Le Secrétaire a lu une

 lettre

lettre adreſſée à Mad. la Princeſſe, par M. Muller, Conſeiller de Conférences à Copenhague, qui envoie de la part de M. König, célébre Phyſicien à Trankebar, un herbier & une collection de plus de 300 éſpeces de ſémences indiennes avec le catalogue, qui ont été remis à M. le Conſeiller de Cour Lepechin, pour le jardin académique.

Le 16 Septembre. Le Secrétaire a remis, de la part de l'Académie Impériale des Beaux-Arts: un Portefeuille avec 64 eſtampes gravées à la dite Académie, que Mad. la Princeſſe de Daſchkaw lui avoit envoyé, pour être dépoſé à la Bibliotheque académique.

Enſuite de la part des Commiſſaires nommés par le Roi de France pour examiner les myſtères du magnetisme animal: Rapport des Commiſſaires chargés de l'examen du magnétisme animal. Imprimé par ordre du Roi, à Paris en 1784.

Le 23 Septembre. S. E. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé, pour être dépoſé à la Bibliotheque académique: *Le Rifleſſioni ſopra i chirografi di N. S. Papa Pio VI. de' 25 Ottobre & 7 Novembre* 1780 *risguardanti la publica economia di Bologna eſaminate* 1781. *gr. in* 4to.

Le Secrétaire a préſenté de la part du Gymnaſe Illuſtre à Anſpac, les deux derniers Programmes que cet Inſtitut lu avoit adreſſés pour l'Académie.

Le 27 Septembre. Le Secrétaire a remis de la part de la Société électorale de Météorologie à Manheim, le premier volume de ſes collections qu'elle publie ſous le titre: *Ephemerides Societatis meteorologicae Palatinae.*

Le

Le 30 Septembre. Le Secrétaire a remis de la part de la Société royale des Sciences de Londres. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Vol. LXXIII. for the Year* 1783. *Part. I. & II.*

& de la part des Auteurs.

Elemens of Mineralogy by Richard Kirwan Esqr. London 1784. 8vo.

Déscription of a Glass-apparatus for making in a few minutes and a very small expence the best mineral waters of Pyrmont, Spa, &c. by J. H. de Magellan. Nouvelle édition.

Tableau de l'état présent des sciences & des arts en Angleterre, par Brissot de Warwille.

Tableau de la situation actuelle des anglois dans les Indes orientales & de l'état de l'Inde en général, par le même.

Licée de Londres, ou assemblée & correspondance établies à Londres, par le même.

Annonce des mémoires, voyages & découvertes du Comte de Benyovsky, proposés par souscription.

Diplomata & statuta regales Societatis Londini pro scientia naturali promovenda, iussu Praesidis et Concilii edita.

Le 4 Octobre. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé, pour être déposés à la Bibliothéque académique, les portraits de Sa Majeſté l'Impératrice & de S. A. Impériale Msgr. le Grand Duc Paul-Pétrowitſch, gravés par M. Scorodumof.

Le même 4 Octobre. Le S^r. Voroubief, un des méchaniciens de l'Académie a préſenté & ſousmis à l'examen de Mrs. les Académiciens un eudiomètre de ſa conſtruction. L'Aſſemblée ayant nommé M. le Prof. Krafft pour l'examiner, cet Académicien en a fait ſon rapport, en foi de quoi l'inſtrument a été approuvé.

Le Secrétaire a communiqué une lettre de M. Nepomuc-Antoine Herrmann, Docteur en Médecine, qui envoie & ſousmet à l'approbation de l'Académie: *Diſſertatio de ſpeculo cauſtico, cuius focus iuxta datam rectam in omnimodam diſtantiam dirigi & promoueri poteſt. Leopoli* 1784. M. le Prof. Krafft ayant lu cet imprimé, a rapporté dans la ſéance prochaine, qu'il n'y a pu découvrir qu'un amas d'abſurdités.

—— —— il a préſenté de la part de M. le Comte de Saluces à Turin: Lettre de M. le Comte Morozzo à M. Maquer ſur la décompoſition du gaz méphitique & du gaz nitreux.

M. le Prof. Krafft a préſenté des obſervations météorologiques, faites à Boſton depuis le commencement de l'année, dans lesquelles on s'eſt ſervi d'un Thermomètre de Reaumur fait à St. Pétersbourg, par le S^r. Morgan.

Le 18 Octobre. Le Secrétaire a préſenté le Programme des Prix de la Société Zélandoiſe des ſciences, établie a Fleſſingue, pour l'année 1784.

Le

Le 21 Octobre. M. l'Académicien Fuss a remis la médaille frappée à l'occasion de l'inauguration de l'Académie Impériale Russe, dont S. A. Madame la Princesse de Daschkaw, Présidente de cette Académie, fait présent à l'Académie des sciences, pour être placée dans son médailler.

Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé de la part de l'Auteur M. Jean Reinhold Forster: *Geschichte der Entdeckungen und Schiffahrten in Norden.*

Le 4 Novembre. Le Secrétaire a remis de la part de la Société royale des sciences de Londres: *Philosophical Transactions of the royal Society of London. Vol. LXXIV. for the Year* 1784. *Pars I.*

Le 11 Novembre. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé: *Conspectus nouissimae ac omnium locupletissimae Sacrorum Conciliorum editionis*, que l'Imprimeur Antoine Zatta de Venise a publié & qu'il offre à la Bibliotheque académique en échange de quelques ouvrages imprimés à l'Académie. Cette offerte a été acceptée.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. de Magellan, datée de Londres le 15 Octobre qui communique la découverte de M. Priestley, de produire en peu de temps une grande quantité d'air inflammable très pur, en faisant passer la vapeur de l'eau bouillante à travers des rognures de fer ardentes.

Le 15 Novembre. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé pour la Bibliotheque: *Oryctographie de Bruxelles, ou description des fossiles découverts dans les environs de cette ville, par M. François-Xavier Burtin*; avec 32 planches enluminées. Voyez ci-dessus le 29 Janvier.

Le même 15 Novembre. Le Secrétaire a présenté de la part de l'Auteur, M. le D. Schumlanski: *Dissertatio inauguralis anatomica de structura renum &c. Argentorati*: dédiée à S. A. Imp. Monseigneur le Grand-Duc.

—— —— il a lu une lettre d'un Anonyme, qui envoie une annonce de la découverte prétendue du mouvement perpétuel. Cette lettre a été renvoyée à l'auteur, sous l'adresse qu'il avoit indiquée, dans l'espérance que l'Académie entreroit avec lui en négociation.

Le 18 Novembre. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé de la part de l'Auteur M. William Coxe, deux volumes in 4to intitulés: *Travels into Poland, Russia, Sweden and Denmark.*

Le 22 Novembre. Le Secrétaire a remis de la part de l'éditeur, M. Jean Bernoulli, Astronome royal à Berlin: *Joh. Heinr. Lamberts deutscher gelehrter Briefwechsel* 4ter *Band.* Et de la part de l'Auteur M. le D. Jean Hedwig: *Fundamentum Historiae naturalis muscorum frondosorum.* 4to. deux parties avec des figures enluminées.

Le 29 Novembre. Le Secrétaire a présenté de la part de l'Auteur, M. Bode, Astronome de l'Académie royale des Sciences & Belles-Lettres de Berlin: 1.) *Astronomisches Jahrbuch für* 1787. & 2.) *Von dem neuentdeckten Planeten*, in 8vo Berlin 1784.

Le 9 Décembre. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé de la part de Sa Majesté l'Impératrice, pour être déposée au Cabinet académique, une médaille d'or frappée à l'occasion de l'incorporation de la Crimée à l'empire de Russie.

Le

Le même 9 Décembre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. Defay, datée d'Orleans le 1 Novembre 1783, qui envoie & soumet à l'approbation de l'Académie, un volume in 8vo intitulé: La nature considérée dans plusieurs de ses opérations, ou mémoires & observations sur diverses parties de l'histoire naturelle avec la minéralogie de l'Orleanois. M. Ferber ayant été chargé de le lire, il en fit son rapport à une des séances suivantes, où il dit que ce livre a bien le mérite de contenir de bonnes observations, mais qu'il ne s'y trouve rien de neuf.

—— —— une lettre de M. le Prof. Stoy datée de Nurnberg le 13 Août, qui sur ce que l'Académie lui avoit fait notifier, qu'elle n'a reçu que le dernier cahier de son ouvrage intitulé *Bilder-Académie*, voyez ci-dessus au 8 Avril, envoie & présente un exemplaire complet de tous ses ouvrages élémentaires.

Le 20 Décembre. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé deux pieces d'une espèce de Granit nommée Murkna, l'une n'ayant qu'une de ses surfaces polie, & l'autre étant taillée en tablette fort mince, dont S. E. fait présent au Cabinet de Minéralogie académique.

Le 23 Décembre. Madame la Princesse de Daschkaw a envoyé de la part de M. Stoutz, Capitaine au Service de France, présentement à Chemnitz en Hongrie, un beau morceau d'un Schoerl rouge & quatre mémoires manuscripts:

1.) Observations métallurgiques sur le fer.

2.) Gedanken über das Eisen unter einem physischen Gesichtspunct, die zufolge der metallurgischen Betrachtung dieses Metals genommen werden konnen.

3.) Mémoire ſur un objet minéralogique.

4.) Verſuche über die Blutlauge.

L'Académie a chargé Mrs. Ferber & Géorgi d'examiner ces mémoires & d'en faire leur rapport à une des ſéances prochaines.

Le Secrétaire a continué de préſenter tous les mois les obſervations météorologiques, que lui avoient adreſſé & communiqué M. l'Académicien Béguelin à Berlin & M. l'Aſſeſſeur Engel à Moscou.

Lettre

Lettre
de S. E. Mr. le Conſeiller d'Etat actuel & Chevalier Aepinus, à Meſſieurs de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg.

Lu à l'Academie le 8 Avril.

Meſſieurs!

Ayant l'honneur d'appartenir à Votre corps, depuis une longue ſuite d'années, je me flatte, que Vous me pardonnerez la liberté que je prends, de Vous adreſſer cette lettre, & que Vous agréerez la marque de la parfaite conſidération pour Vos mérites & Vos lumières, que je m'empreſſe de Vous donner, en ſoûmettant à Votre jugement la déſcription abrégée d'une invention, dont la premiere idée n'eſt venuë, il y a bien du temps, mais que je n'ai perfectionnée, & miſe en execution, que depuis quelques ſemaines. Vous la trouverez dans la ſuivante

Annonce d'un Microſcope achromatique, d'une nouvelle conſtruction, propre à voir les objets avec la lumiere réflechie de leur ſurface.

Toute repréſentation d'un objet, produite par des rayons de lumière directs, qui vont droit vers l'oeil, en traverſant l'objet, ou en paſſant à coté de lui, eſt inferieure à tous égards, & conſidérablement moins parfaite, qu'une image produite par des rayons réflechis, c'eſt à dire par des rayons, qui après être tombes ſur la ſurface d'un corps, en ſont renvoyés, & en en rejailliſſent. Les principales cauſes de cette différence ſont les ſuivantes:

1.) Dans le cas, où le corps eſt véritablement opaque, la lumière directe n'en trace & n'en repréſente que ſimplement le contour, & n'en forme rien autre choſe que ce qu'on s'eſt accoutumé de nos jours, d'appeller une peinture en Silhouette.

2.) Si l'objet eſt, ſoit parfaitement, ſoit imparfaitement transparent, ſes parties agiſſent ſur la lumière qui les traverſe, comme des prismes, la décompoſent en couleurs, & rendent la repréſentation très-confuſe. Ce defaut-ci eſt extrèmement remarquable dans le microſcope ſolaire ordinaire.

3.) Des rayons qui traverſent un corps, confondent & entremettent néceſſairement, dans la repréſentation qu'ils en forment, les peintures de la ſurface antérieure, de la ſurface poſtérieure, & de toutes les parties ſituées dans l'intérieur de ce corps, entre ſes deux ſurfaces; ce qui ne peut pas manquer de produire dans pluſieurs rencontres un véritable galimathias. Telle deviendroit p. e. l'image d'un homme, ſi après l'avoir repréſenté en face, on s'aviſoit de le peindre avec des couleurs tranſparentes, dans le même contour, du dos, & d'exprimer de la même maniere, & toujours dans le même contour, les os, les muſcles, les veines, & tous les viſceres & parties intérieures, chacune à ſa place.

4.) La lumière directe ne peut en aucune maniere fournir une repréſentation des différentes élévations & dépreſſions, qui ſe trouvent ſur la ſurface de l'objet. Ce qu'on ap-

appelle le bas-relief se perd donc entièrement dans ces sortes de peintures, tant pour les corps opaques, que pour ceux qui sont transparens; pour les premiers, parceque les rayons directs n'éclairent pas leur coté tourné vers l'oeil; & pour les derniers, parceque des rayons qui traversent l'objet ne produisent pas des ombres, de maniere que tout paroit uniforme & plat, & que tout, pour ainsi dire, est projetté & réuni dans un seul & même plan.

Il ne reste donc que deux cas, où l'on ait besoin & où l'on puisse tirer parti des rayons directs; celui où l'on veut reconnoitre le contour de l'objet avec beaucoup de précision, & celui où il s'agit d'examiner les parties situées dans l'intérieur d'un corps. Tout instrument optique par conséquent, qui n'est propre à rendre service, qu'avec des rayons directs, ne peut jamais fournir que des représentations très-imparfaites. Mais tous les microscopes dont nous faisons usage aujourd'hui, les simples aussi bien que les composés, se trouvent évidemment dans ce cas, par un défaut essentiel de leur construction. Les ouvertures de leurs objectifs sont toujours fort petites, & si ces instrumens doivent grossir un peu considérablement, elles deviennent incomparablement plus petites que l'ouverture de la prunelle de l'oeil humain. Les images par conséquent, que ces verres formeroient, si l'on ne vouloit se servir que de la lumière réflechie, n'auroient qu'une clarté bien inferieure à celle, qu'on appelle la clarté naturelle, & ne souffriroient pas dans un microscope composé, une augmentation tant soit peu considérable, par le moyen des oculaires, sans devenir faute de lumière tout à fait méconnoissables. On se trouve donc presque continuellement obligé, d'avoir recours à la lumière directe, comme toujours de beaucoup plus forte, que la lumière réflechie; car cette

 lu-

lumière directe va sans s'éparpiller droit vers l'objectif, qui en embrasse autant, que son ouverture peut admettre, au lieu que la lumière réfechie, qui tombe sur l'objet & en rejaillit, ne se rend pas toute vers l'objectif, mais se repand de tous côtés par un hémisphère, de maniere qu'il n'y a qu'une très petite portion de cette lumière, qui parvient à l'objectif.

Cette circonstance, que les foyers des lentilles objectives dans nos microscopes modernes sont extremement courts, les rend encore par une autre considération impropres à pouvoir servir avec la lumière réflechie, parcequ'il devient par là nécessaire d'approcher de fort près l'instrument de l'objet, & ordinairement au point, que celui-ci se trouve entièrement plongé dans une ombre épaisse.

On a crû pouvoir remédier à ce dernier inconvénient, en ajoutant au microscope un appareil, à l'aide du quel on cherche à renvoyer de la lumière vers l'objet & à l'éclairer, soit de coté, soit de face.

Ces appareils sont pour la plûpart du temps absolument inutiles, parceque quand les microscopes doivent grossir un peu considérablement, il les faut approcher des objets au point, que la lentille objective les touche presque immédiatement, & en général à cause du peu d'espace intermédiaire entre l'objet & l'instrument, la manipulation de ces appareils n'est, & ne peut jamais être, que fort embarassante, & l'effet qu'ils produisent très-imparfait; car pour pouvoir librement & commodement renvoyer la lumière vers l'objet, & pour le pouvoir éclairer par des rayons, qui ayent un degré de force, & une direction convenable, il faut nécessairement, qu'il reste un espace raisonnable entre l'instrument & l'objet, & que l'un ne soit pas trop près de l'autre.

Le

Le même moyen a paru pouvoir aussi remédier à l'obscurité originaire, pour ainsi dire, des images que produisent nos microscopes, à cause de la petitesse de l'ouverture de leurs objectifs, en éclairant les objets par une lumière très-forte, même celle du soleil, soit telle qu'elle nous vient de cet astre, soit concentrée par le moyen de verres & de miroirs, dans l'intention de compenser de cette façon le defaut de clarté, auquel ces instrumens sont sujets. Mais outre, qu'en général cela ne se peut executer, que d'une maniere fort incommode & fort imparfaite, comme je viens de le dire plus haut, il s'y joint souvent un inconvénient, qu'on n'auroit peut-être pas prévû, ou déviné d'abord. C'est qu'aux endroits luisans & polis des corps qu'on examine (& rarement en trouve-t-on qui en soyent exempts,) il se forme une image du soleil si brillante, que quelque petite qu'elle soit, elle éblouit l'oeil, & l'empêche de voir distinctement le reste.

Celui donc, qui veut perfectionner les microscopes, doit renoncer en premier lieu à la lumière directe, & se borner à n'employer au lieu d'elle que la lumière réflechie: & en second lieu, il doit également s'abstenir d'une lumière trop forte & trop brillante, comme seroit celle des rayons du soleil, & se contenter autant qu'il se peut de cette lumière douce & modérée, qu'on appelle la lumière du jour: en un mot, il doit tâcher de résoudre le Problème suivant:

„Trouver la construction d'un microscope, qui produi-
„sant une augmentation donnée, aye une ouverture de l'ob-
„jectif plus grande que celle de la prunelle de l'oeil humain,
„& dont dans l'usage, l'objectif reste éloigné de l'objet à
„une distance considérable, p. e. de 3, 4, 5 pouces, & même
„d'un demi-pied, ou d'un pied entier.„

 Rien

Rien de plus facile quant à la théorie, que la solution de ce problème. Ce sont les principes les plus connus & les plus élémentaires de l'optique, qui la fournissent sans difficulté: mais je n'entreprend pas à présent l'exposition de cette théorie, parceque je n'ai pas l'intention d'entrer ici dans aucun détail sur ce point.

Tous les obstacles, s'il y en a, ne peuvent donc venir que du coté de la pratique. Il faut que je m'explique un peu plus particulierement sur cet article.

Un microscope de ce nouveau genre ne peut qu'avoir une grandeur assès considérable, & il ne faut pas s'attendre, qu'il puisse étre d'un volume aussi petit que nos microscopes ordinaires. Mais aussi n'en vois-je pas la nécessité. Il est au contraire manifeste, que la grandeur dans un microscope n'est pas à beaucoucoup près aussi embarassante, que dans un telescope. Il faut pouvoir gouverner aisément le dernier de ces instrumens, pour le pouvoir pointer vers l'objet, au lieu qu'on n'a qu'à fixer & rendre immobile le microscope, quelle que soit sa grandeur, & faire mouvoir l'objet, pour l'améner à la situation convénable. Quiconque a la moindre idée de l'arrangement des machines, trouvera facilement plus d'un moyen, propre à produire cet effet avec aisance & avec sureté.

Je ne prétends pourtant pas, que la grandeur d'un microscope soit absolument indifferente, & qu'il ne puisse pas devenir si énorme, qu'il ne mériteroit pas d'etre mis en execution, surtout s'il ne devoit produire qu'un effet médiocre. Un microscope p. e. de la longueur de 200 ou 300 pieds, qui ne grossiroit le diamètre des objets, que 10 ou 20 fois, ne vaudroit certainement pas la peine, que sa construction demanderoit.

Quand

Quand je m'occupai, il-y-a plus de 20 ans, à ſuivre ces idées, je compris au premier abord, qu'avec les lentilles ordinaires, il n'y auroit pas grand choſe à faire dans ce genre, vû que les microſcopes qu'on en pourroit compoſer, ne laiſſeroient pas d'avoir une longueur deméſurée, & ne donneroient pourtant qu'une augmentation modique. J'ai donc tourné mes vües vers les miroirs, & la théorie auſſi bien que l'expérience m'ont convaincu dès-lors, qu'on pourroit bien parvenir à ſon but par leur moyen. C'étoit à peu près dans le même temps, qu'on avoit fait la découverte des verres achromatiques, qu'on avoit même déja amménés à un degré de perfection conſidérable. Je compris ſans difficulté, qu'ils ſeroient presque encore plus propres à obtenir la perfection des microſcopes que j'avois en vüe, que les miroirs. C'eſt pourquoi dans la queſtion ſur les verres achromatiques, que l'Académie propoſa dans ce temps pour le prix annuel, il fut fait mention expreſſe, à ma requiſition, de l'uſage de cette ſorte de verres pour la perfection des microſcopes. Mais autant que je me le rappelle, les ſçavans qui avoient traité cette matière, s'étoient contentés de recherches générales ſur la nature de ces verres, ſans diſcuter, quel parti on en pourroit tirer, & quel uſage on en pourroit faire, pour perfectionner tel ou tel inſtrument optique en particulier.

Depuis ce temps des travaux d'une autre nature ne m'ont guères permis de m'occuper d'objets de ce genre que pour ainſi dire, à la derobée, & avec de très-longues interruptions. Je n'ai pourtant jamais perdu entièrement cet objet de vüe, & depuis quelques mois que l'etat de ma ſanté m'oblige de m'interdire toute ſorte d'occupations, excepté celles qui peuvent repandre dans l'ame de la ſatisfaction & de la tranquillité, je ſuis allé les chercher dans la contemplation des ou-

ouvrages de l'auteur de la nature, ſource dans laquelle Newton avoit puiſé ce calme parfait, & cette ſérénité admirable d'ame, par laquelle il étoit également ſupérieur à ſon eſpéce, que par ſon génie; & je viens de conſtruire pour un coup d'eſſay, un microſcope de cette nouvelle eſpéce, dont les effèts répondent non ſeulement à mon eſpérance & à mes attentes, mais les ſurpaſſent au point, que je puis avancer ſans héſiter, que ce nouveau microſcope, quant à la clarté, la diſtinction, la nétteté, l'élegance, & la beauté ſurprenante des images qu'il produit, auſſi bien que pour la facilité de la manipulation, eſt plus qu'on ne le croiroit ſupérieur, à tout ce qu'on a vû dans ce genre, & aux meilleurs de nos microſcopes modernes.

Ce microſcope groſſit le diamètre des objets 60 à 70 fois. L'ouverture de ſon objectif eſt environ d'un pouce, & ſa diſtance à l'objet de 7 pouces. La longueur enfin de tout l'inſtrument, ſans l'appareil oculaire, eſt d'un peu moins de 3 pieds, méſure angloiſe. Je me borne à en parler maintenant fort en abrégé, en me reſervant néanmoins d'en donner par la ſuite une déſcription plus ſatisfaiſante, qui contiendra tous les détails, qu'on peut déſirer, tant ſur le microſcope que je viens de conſtruire actuellement, que ſur les microſcopes de ce genre en général.

Je ne dois pas manquer ici de faire mention expreſſe du microſcope ſolaire. Rien ne peut empecher, ce ſemble, que le nouveau microſcope dont il eſt queſtion ici, ſi l'on y ajoute un appareil convénable, ne puiſſe auſſi rendre ſervice comme microſcope ſolaire, & il eſt facile à prévoir, que comme tel, il aura un degré de perfection bien ſupérieur à celui du microſcope ſolaire de M. Lieberkühn, dont nous

nous

nous servons jusqu'à présent. Tout le monde connoit les peintures produites par la chambre obscure, & personne n'ignore leur beauté admirable, à laquelle ni l'art ni le pinceau humain ne pourront jamais atteindre. On seroit porté de s'imaginer d'abord, que le microscope solaire devroit fournir des peintures aussi excellentes, mais l'expérience démontre combien elles sont éloignées de ce degré de perfection. Le microscope solaire achromatique au contraire, ne pourra pas manquer d'égaler parfaitement la chambre obscure pour la beauté des représentations; car son usage ne demande que de la lumière réflechie, & par conséquent, il doit être complettement exempt de tous les defauts, qui résultent de la lumière directe, & qui sont précisement ceux, qui produisent les imperfections, aux quelles le microscope solaire ordinaire est sujet.

Si l'invention que je viens Vous communiquer ici, Messieurs, obtient Vos suffrages, & si Vous la jugez propre, à contribuer à l'avancement des sciences, que Vous cultivez avec tant de succès, je ne doute pas, que Vous ne veuillez bien m'aider de Vos lumières, & concourir avec moi, pour développer la théorie, & pour perfectionner la pratique de ces instrumens.

J'ai l'honneur d'être avec la considération la plus distinguée & la plus parfaite

Messieurs!

à St. Pétersbourg,
ce 20 Mars 1784.

Votre très-humble & très-obeïssant
Serviteur,
Aepinus.

Lettre

de S. E. Mr. le Conseiller d'Etat actuel & Chevalier Aepinus, à M. le Conseiller de Collèges Pallas: sur les Volcans de la Lune.

Lu à l'Académie le 21 Juin 1784.

Monsieur!

Rien assurément n'auroit pu me faire plus de plaisir, que la communication que Vous m'avez faite de la découverte que M. Herschel vient de faire de l'existence d'un volcan actuellement brulant dans la Lune. Quelque intéressante que doit être cette observation pour tous ceux qui aiment la Philosophie naturelle, elle m'intéresse comme vous savez plus particulierement, & pour ainsi dire plus personnellement, en ce que si elle se confirme pleinement, elle sert de démonstration de la vérité de mes conjectures sur l'origine volcanique des inégalites de la surface lunaire, formées l'année 1778, & exposées dans un mémoire imprimé à Berlin l'an 1781. Ce mémoire est écrit, comme vous savez, Monsieur, en langue allemande, (*) ce qui est sans doute la cause pourquoi il n'est gueres connu hors de ce pays, quoique j'en aye fait pavenir une traduction françoise en manuscript à M. le Chevalier Hamilton à Naples, dès le voyage de L. L. A. A. Impériales en Italie, l'an 1782.

Je vois de plus avec beaucoup de plaisir, que des idées parfaitement analogues aux miennes sur cet objet, sont venues

(*) *Schriften der Berlinischen Gesellschaft naturforschender Freunde. IIter Band pag. 1. seq.*

venues à M. Beccaria, presque en même temps. Nous voilà donc trois qui se sont rencontrés, car Vous savez, Monsieur, que le celébre M. Lichtenberg à Göttingue est tombé sur les mêmes conjectures à peu près à la même époque. Quoiqu' il puisse sembler assés singulier, que trois hommes si éloignés l'un de l'autre soient tombés sur la même idée presque en même temps, la chose n'est pourtant pas si étrange qu'elle le paroit. Après les descriptions détaillées, & les représentations exactes en figures, que plusieurs sçavans avoient données depuis une dixaine d'années, de la configuration des inégalités terrestres produites par les éruptions du feu souterrain, l'opinion de l'origine volcanique des inégalités de la Lune étoit un fruit parfaitement mur, qui ne pouvoit pas manquer de tomber dans les mains de celui qui s'avisoit par hazard, de sécouer l'arbre quelque legérement que ce fut.

Ni M. Beccaria, ni M. Lichtenberg, ni moi, n'avons pourtant pas l'honneur d'être les premiers, qui ayent imaginé cette opinion. Nous y avons été, tous les trois, dévancés, il-y-a plus d'un siecle, par un homme dont on lit & connoit peu aujourd'hui les ouvrages; que la nature avoit doué d'un prodigieux talent à imaginer des découvertes, mais dont l'imagination ardente l'entrainoit continuellement vers de nouveaux objets, & l'empêchoit ordinairement de les suivre & de les perfectionner. En un môt, c'est le fameux Robert Hoocke, dont je parle. Quand je composai mon mémoire sur les inégalités de la surface de la Lune, dont je viens de parler plus haut, je recherchai soigneusement, si je ne trouverois quelque part une trace, que quelqu'un avant moi soit tombé sur la même opinion. Les peines que je me donnai furent infructueuses alors, & ce n'eſt que longtemps après la publication de mon mémoire, que j'ai trouvé par hazard, que l'auteur mentionné avoit eu les mêmes idées, bien longtemps avant moi. À la vérité, cela m'avoit du échaper dans le temps, parceque il n'y avoit pas moyen de s'aviſer, de chercher des choſes de ce genre à l'endroit où je les ai trouvés: car c'eſt ſa *Micrographia*, imprimée à Londres en 1655, chapitre LX, où il propoſe cette opinion, & en parle fort en détail.

Je me fais un vrai plaiſir, Monſieur, de Vous communiquer cette particularité de l'hiſtoire du progrès des connoiſſances humaines, parceque je rens juſtice par là à un homme, que je ſuis tenté de regarder comme le premier génie, quand au talent inventif, qui a jamais exiſté. — — *Redit ad Dominum* — — — & en effet, ſi l'on étoit juſte envers cet homme extraordinaire, il ſe trouveroit qu'il en eſt de même de pluſieurs decouvertes & idées, très remarquables & très ingénieuſes, qui paſſent aujourd'hui pour nouvelles.

Ne ſeroit il pas juſte, Monſieur, d'appeller la nouvelle montagne volcanique, découverte par M. Herſchel, ſi on peut conſtater pleinement le fait, du nom de celui qui a le premier reconnu l'exiſtence des volcans dans la Lune?

J'ai l'honneur d'être, Monſieur, avec une parfaite conſidération.

à St. Pétersbourg,
ce 18 Juin 1784.

Votre très-humble & très-obeïſſant
Serviteur.
Aepinus.

EXTRAIT DES MÉMOIRES
CONTÉNUS DANS CE VOLUME.

CLASSE DE MATHÉMATIQUE.

I.

Commentatio de curuis tractoriis.

Auctore *L. Eulero.* p. 3.

Si l'on promène lentement, fur un plan horizontal, le long d'une ligne droite ou courbe quelconque, l'extrémité d'un fil, à l'autre bout duquel eft attaché un poids, ce poids décrira auffi une ligne courbe dont la forme dépend de la nature de la ligne, le long de laquelle le fil a été trainé, & cette courbe a été appellée par les Géomètres *Tractoire* ou *Tractrice*.

Le Problème de déterminer cette courbe paroît proprement appartenir à la Mécanique; mais les Géomètres qui l'ont traité en ont fait une recherche purement géométrique, & leurs folutions font fondées fur une fuppofition abfolument contraire aux vrais principes du mouvement. Car dans cette idee géométrique on fuppofe que le corps foit tiré à chaque inftant felon la direction du fil, ce qui arriveroit réellement, fi le mouvement du poids pouvoit ceffer & renaitre à chaque inftant, ou bien, fi à chaque inftant la direction du mouvement étoit la même. Or comme la direction change continuellement; il eft clair que le mouvement du poids, déterminé d'après cette fuppofition, n'eft pas dans la nature, à moins qu'on ne faffe le frottement infini, ou la viteffe infiniment petite.

Ce-

Cependant feu M. Euler reprend, au commencement de fon mémoire, le Problème dans le fens qu'il a dans les écrits des Géomètres qui ont examiné ces courbes; & il commence par le cas le plus fimple, où la ligne, le long de laquelle on tire le fil, & qu'on pourroit nommer la *Directrice*, eft droite; cas qui donne dejà une ligne courbe transcendante, l'équation entre fes ordonnées étant

$$x = a\,l\frac{a+\sqrt{(aa-yy)}}{y} - \sqrt{(aa-yy)}$$

où a marque la longueur du fil.

Il paffe enfuite à la folution générale du Problème, où la directrice eft une courbe quelconque repréfentée par une équation entre fes ordonnées t & u; & en mettant les ordonnées de la courbe décrite par le poids, x & y & $\partial y = p\,\partial x$, l'Auteur parvient à ces deux équations:

$$u - x = \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}};$$
$$t - y = \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}};$$

d'où il déduit, par la différentiation & par une combinaifon affez fimple, l'équation $\partial t - p\,\partial u = \frac{a\,\partial p}{\sqrt{(1+pp)}}$, dont la réfolution donneroit p par t & u, & ayant déterminé p on auroit

$$\partial x = \frac{\partial u + p\,\partial t}{1+pp} \;\&\; \partial y = \frac{p(\partial u + p\,\partial t)}{1+pp}.$$

Mais comme la réfolution de l'équation

$$\partial t - p\,\partial u = \frac{a\,\partial p}{\sqrt{(1+pp)}}$$

eft impoffible, on ne peut pas aller plus loin dans la folution générale du Problème. Cependant il y a une confidération qui rend ces recherches très-intéreffantes: c'eft que, fi l'on regarde comme connue la courbe que le poids décrit fur le plan où fe fait le mouvement (ce que l'on pourra faire avec d'autant

tant

tant plus de droit, qu'on peut la conſtruire mécaniquement par le mouvement tractoire) on pourra réſoudre l'équation mentionnée. C'eſt par ce même moyen que feu M. Euler a conſtruit autrefois l'équation de Riccati & pluſieurs autres de la même forme, dans un mémoire qu'on trouve dans le 8ᵉ volume des anciens Commentaires, ſous le titre: *De conſtructione aequationum ope motus tractorii, aliisque ad methodum tangentium inuerſam pertinentibus.*

Rebuté des difficultés du Problème général M. Euler ſe contente d'examiner le cas où la courbe, le long de laquelle on traine le fil, eſt un cercle, ce cas étant du petit nombre de ceux, où la ligne courbe, décrite par le poids attaché au fil, peut être déterminee, ce qui cependant n'eſt pas ſans difficultés. Les détails de cette ſolution ne ſont pas ſuſceptibles d'extrait, & le lecteur curieux de connoître les moyens que l'Auteur met en uſage pour intégrer & pour ſimplifier ſes calculs, ſont à renvoyer au mémoire même. Quant à l'équation pour la courbe décrite, dans ce cas, par le poids, elle eſt de la forme de celles qu'on nomme équations differentielles de Riccati, mais ſa réſolution paroit ſe refuſer à toutes les méthodes connues, quoique la courbe puiſſe être décrite facilement, en traçant la route, parcourue par le poids, lorsqu'on traine l'autre extrémité du fil le long d'un cercle.

Cette recherche eſt ſuivie de quelques réflexions ſur ces mouvemens hypothétiques & contraires aux loix de la Mécanique, & par la détermination du tems néceſſaire à l'extinction du mouvement, produite par le frottement, à compter du moment où l'on ceſſe de tirer le fil, tems qui, en ſuppoſant la viteſſe d'un pied par ſeconde, devient ſeulement $\frac{1}{10}$ ſeconde à peu près. Au reſte pour rendre les courbes décrites de cette manière plus conformes à celles que présente le calcul fondé sur la supposition que le mouvement cesse & renaisse alternativement; au lieu d'un mouvement continu M. Euler conseille de trainer le fil non seulement avec beaucoup de lenteur, mais de le faire outre cela par petits intervalles, en interrompant l'action de la main, & la laissant reposer plusieurs fois le long de la ligne qui en dirige le mouvement.

L'Auteur finit son mémoire par un essai de traiter le Problème des *Tractoires* comme une question de Mécanique & de chercher la véritable courbe que décrit le poids par un mouvement continu, pour le cas seulement, où la directrice est une ligne droite. Il y fait entrer, pour cet effet, le tems, la vitesse, le frottement & la tension du fil, en faisant sortir, dans la suite, la tension du calcul, & il parvient à une équation différentielle du second degré, qui, si l'on met le frottement nul, donne pour Tractoire une Cycloide inverse, engendrée par un cercle dont le rayon est égal à la longueur du fil; & en supposant le frottement infini, l'équation devient celle pour la Tractoire vulgaire, ce qui confirme l'assertion déjà rapportée au commencement de cet extrait: que la courbe décrite par le poids dans le mouvement tractoire, ne s'accorde avec celle que donnent les recherches géométriques, qu'en faisant le frottement infini. Quant à l'équation générale, quoique l'Auteur l'ait reduite facilement au premier degré & dégagée de l'irrationalité, il avoue pourtant qu'il ne voit pas comment la résoudre & qu'il attendroit encore beaucoup moins de succès, si l'on trainoit le fil selon une ligne courbe, ou si le mouvement n'étoit pas uniforme.

II.

II.
De curuis tractoriis compositis.

Auctore *L. Eulero*. pag. 28.

Dans ce second mémoire l'Auteur examine le cas, où le fil qu'on traine par une de ses extrémités sur un plan horizontal, est chargé dans sa longueur de deux ou plusiers poids, & il tâche de déterminer les lignes courbes que chacun de ces poids décrira sur le plan. Mais il observe d'abord que si l'on vouloit traiter cette question selon les principes de Mécanique, (ce qu'on devroit faire proprement) on parviendroit à des équations différentielles du second degré qu'on ne sauroit résoudre en aucune manière.

Pour éviter ces difficultés l'Auteur suppose que les forces sollicitantes soyent proportionelles, pas aux accélérations de chaque poids, mais aux espaces qu'ils parcourent pendant un intervalle de tems infiniment-petit, Hypothèse qui auroit lieu si le mouvement pouvoit cesser & renaître à chaque instant, ou bien, si le frottement étoit infini. M. Euler a montré, dans le mémoire précédent, comment il faut qu'on traine le fil, afin que les chemins tracés par les poids s'accordent avec les lignes courbes que fournit le calcul fondé sur cette Hypothèse.

Outre cette restriction l'Auteur se borne encore au cas, où la ligne qui dirige le mouvement de l'extrémité du fil, est droite, & il traite le Problème pour deux & pour trois corps; mais l'un & l'autre Problème le conduit à des equations différentielles, du premier degré, à la verité, mais à la résolution ulterieure desquelles M. Euler renonce. Aussi tout ce mémoire n'a pour but que de montrer combien de difficultés peuvent ſe preſenter dans la ſolution de Problèmes qui, au premier coup d'oeil, paroiſſent ſi faciles.

III.

De transformatione ſeriei diuergentis $1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 +$ etc. in fractionem continuam.

Auctore L. *Eulero*, pag. 36.

Dans un mémoire intitulé: *De ſeriebus diuergentibus*, qui ſe trouve dans le cinquième volume des nouveaux Commentaires de notre Académie, où feu M. Euler s'étoit occupé ſurtout à trouver la ſomme de la ſérie hypergéométrique de Wallis: $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 +$ etc., il avoit fait mention de la ſérie beaucoup plus générale expoſée dans le titre du préſent mémoire, & il en avoit aſſigné la valeur en fraction continue, ſans détailler les opérations qui la lui avoit fournie.

M. Euler croit l'avoir déduite alors d'une transformation de l'équation de Riccati & il ſe propoſe de donner ici une méthode plus ſimple; mais il s'eſt trompé apparemment: car en liſant ce qu'il en dit au bas de la pag. 231. du Tome cité des Commentaires, on voit qu'il y a fait uſage d'une méthode peu differente de celle qu'il détaille ici, & dont voici l'eſſentiel.

Il met $mx = a$ & $nx = b$, pour avoir à transformer la ſérie $1 - a + a(a+b) - a(a+b)(a+2b) +$ &c. qui, en en mettant $a = A$, $a + b = B$, $a + 2b = C$, & ainsi de suite, devient $S = 1 - A + AB - ABC +$ &c. d'où il fait

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{1 - A + AB - ABC + etc.} = 1 + \frac{A - AB + ABC - etc.}{1 - A + AB - ABC + etc.} = 1 + \frac{A}{P};$$

$$P = \frac{1 - A + AB - ABC + etc.}{1 - B + BC - BCD + etc.} = 1 + \frac{b - 2bB + 3bBC - etc.}{1 - B + BC - BCD + etc.} = 1 + \frac{b}{Q}.$$

De là même manière il trouve les valeurs suivantes:

$$Q = 1 + \frac{B}{R};\quad R = 1 + \frac{2b}{S};$$

$$S = 1 + \frac{C}{T};\quad T = 1 + \frac{3b}{U},$$

& ainsi de suite, de façon que

$$S = \cfrac{1}{1 + \cfrac{A}{1 + \cfrac{b}{1 + \cfrac{B}{1 + \cfrac{2b}{1 + \&c.}}}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a}{1 + \cfrac{b}{1 + a + \cfrac{b}{1 + \cfrac{2b}{1 + a + \cfrac{2b}{1 + \&c.}}}}}}$$

C'est ainsi qu'il faut lire la fraction continue pour S, & non pas comme elle est dans le mémoire pag. 40, où les traits qui separent les numerateurs $1 + a + b$, $1 + a + 2b$, &c. des denominateurs, sont mal placés.

M. Euler regarde avec raison de pareilles transformations des series divergentes en fractions continues comme la plus sure & peutêtre l'unique voye, de trouver, au moins à peu près, les sommes de ces series; puisqu'en resolvant la fraction continue en fractions simples, ces fractions sont alternativement trop grandes & trop petites, & s'approchent pourtant toujours plus de la véritable valeur.

h 3 M.

M. Euler finit ſes recherches ſur cette fraction continue par en reduire le nombre des termes à la moitié, moyennant une méthode bien ſimple, que les amateurs de ces ſortes de recherches ne manqueront pas de lire dans le mémoire même.

L'Auteur s'étoit occupé beaucoup autrefois à découvrir l'Analyſe qui pouvoit avoir conduit le feu Lord Brouncher à la fraction continue connue ſous ſon nom; car il lui avoit toujours paru peu vraiſemblable, qu'elle ait été trouvée par une voye auſſi longue & difficile que l'eſt celle dont Wallis a fait uſage. On trouve la ſommation de cette fraction de Brouncher faite de trois manières différentes dans le ſecond volume des Opuſcules analytiques de feu M. Euler page 149 & 199 & dans les Actes de l'Académie, Année 1779, Partie I, page 15. Et comme au premier des endroits cités l'Auteur avoit transformé la fraction de Brouncher dans la ſérie de Leibnitz $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ &c., il donne ici la méthode inverſe, à la fin de ce mémoire, & convertit la ſérie de Leibnitz en la fraction de Brouncher; & il lui paroît très-vraiſemblable que ce Mathématicien ait tiré ſa fraction de la même ſource.

IV.
De ſummatione ſerierum in quibus terminorum ſigna alternantur.

Auctore *L. Eulero*, pag. 46.

Dans le mémoire: *Inuentio ſummae cuiusque ſeriei ex dato termino generali*, qui ſe trouve dans le huitième Tome des anciens Commentaires de notre Académie; dans un autre mémoire du même volume intitulé: *Methodus vniuerſalis ſeries ſum-*

ſummandi ulterius promota, & plus récemment dans ſon Calcul differentiel, Partie Seconde, Chap. V. M. Euler avoit traité ce ſujet à fond; mais il n'a pas été tout-à-fait content du cas où les termes des ſeries ſont affectés alternativement du ſigne poſitif & du ſigne négatif. Dans ce mémoire il expoſe une methode directe & generale, qui paroît devoir contribuer à perfectionner cette partie de l'Analyſe.

Le premier Problème que l'Auteur traite, c'eſt de trouver la ſomme S de la ſerie $X - X' + X'' - X''' +$ &c., où X eſt une fonction quelconque de x & X', X'', X''', &c. les valeurs de cette fonction qui naiſſent lorſqu'on met $x+1$, $x+2$, $x+3$, &c. à la place de x. Cela poſé il eſt facile à voir, par la nature des differentielles, que la ſomme cherchée ſera

$$S = \tfrac{1}{2} X + \frac{\alpha \partial X}{\partial x} + \frac{\beta \partial \partial X}{\partial x^2} + \frac{\gamma \partial^3 X}{\partial x^3} + \text{\&c.}$$

où tout revient à déterminer d'une manière aiſée les coéfficiens α, β, γ, &c.

Pour cet effet M. Euler conſidère la ſuite

$$s = \tfrac{1}{2} + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \text{\&c.}$$

en obſervant que, ſi l'on eſt en état d'aſſigner la ſomme s de cette ſerie, on pourra auſſi reciproquement déterminer les coéfficiens α, β, γ, &c. les mêmes qui ſe trouvent dans la ſomme cherchée S.

Cette conſidération le conduit à l'équation $s(1+e^t) = 1$, qu'il transforme en celle ci : $vv - \frac{1}{4} = \frac{\partial v}{\partial t}$, où

$$v = s - \tfrac{1}{2} = \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \text{\&c.}$$

Mais afin de n'avoir que les puiſſances impaires de t dans la ſerie pour v, il met $v = At + Bt^3 + Ct^5 +$ &c. d'où, en ſub-

ſubſtituant à la place de $v\,v$ & de $\frac{\partial v}{\partial t}$ leurs valeurs, il eſt aiſé de déterminer les coéfficiens A, B, C, &c. & de là les α, γ, ε, &c. Pour mieux marquer la loix de progreſſion de ces coéfficiens l'Auteur introduit les nombres connus ſous le nóm de leur Inventeur, Jaques Bernoulli, qu'il déſigne par les lettres a, b, c, &c. De cette façon il obtient pour la ſomme cherchée l'expreſſion ſuivante:

$$S = \tfrac{1}{2}X - \frac{(2^2-1)}{2.3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{(2^4-1)}{2\ldots5} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{\partial^3 X}{\partial x^3} - \frac{(2^6-1)}{2\ldots7} \cdot \frac{c}{2} \frac{\partial^5 X}{\partial x^5} - \&c.$$

Dans une ſeconde ſolution du même Problème l'Auteur conſidère une fonction T, qui naît de la fonction S, en mettant $x + \frac{1}{2}$ à la place de x, & pour laquelle il trouve

$$T = \tfrac{1}{2}X + \frac{\alpha\,\partial\,\partial X}{\partial x^2} + \frac{\beta\,\partial^4 X}{\partial x^4} + \frac{\gamma\,\partial^6 X}{\partial x^6} + \&c.$$

& il détermine, les coéfficiens α, β, γ, &c. par une méthode ſemblable à celle de la ſolution précédente, & dont il ſe ſert auſſi dans les deux Problèmes ſuivans contenans la ſommation des ſéries

$$\text{I.}\quad S = n^x X - n^{x+1} X' + n^{x+2} X'' - n^{x+3} X''' + \&c.$$

$$\text{II.}\quad S = 1.2.3\ldots xX - 1.2.3..(x+1)X' + 1.2.3..(x+2)X'' - \&c.$$

où nous ne nous arrêterons pas, nous bornant à la notice qui a été donnée de la méthode en général dans le ſommaire du premier Problème.

V.

Problematum quorundam ſphaericorum Solutio.

Auctore *Nicolao Fuſs*, pag. 70.

Les trois Problèmes de Trigonométrie ſphérique dont on trouve la ſolution dans ce mémoire, ſont: De décrire, ſur

ſur une baſe donnée & entre deux grands cercles de la Sphère donnés, un triangle tel que 1°.) l'angle au ſommet devienne le plus grand poſſible; 2°.) que la ſomme des deux côtés qui renferment cet angle devienne la plus petite poſſible & 3°. que la ſurface d'un pareil triangle devienne un Maximum.

La ſolution du Problème premier conduiſant à une équation cubique, l'Auteur examine d'abord les conditions ſous lesquelles le Problème admet trois ſolutions, ce qu'il effectue par la triſection de l'angle, recherche qui eſt accompagnée des calculs pour un cas déterminé, & ſuivie de la conſidération du cas où l'inclinaiſon des deux grands cercles eſt un angle droit, cas qui reduit l'équation cubique à une autre du ſecond degré.

Le ſecond Problème, quoique très facile en apparence, conduit, par la voye ordinaire, à des équations dont la réſolution paroit avoir de grandes difficultés, que l'auteur a ſçu éviter cependant, en faiſant varier le ſommet du triangle d'un arc infiniment petit, ce qui lui fournit une ſolution très-ſimple.

Le troiſième Problème a dejà paru dans le ſecond cahier du Magazin de Mathématique de M. M. Bernoulli & Hindenbourg, Journal très-eſtimé qui ſe publie à Leipzig. Quoique la ſolution en paroiſſe encore plus difficile que celle du précédent Problème, elle ſe prête pourtant à une méthode ſemblable à celle dont l'auteur a fait uſage dans la précédente ſolution, & fournit une expreſſion encore plus élegante & conſtructible géométriquement ſur la Sphère.

VI.
De proiectione Sphaerae in superficiem conicam.

Auctore *F. T. Schubert*, pag. 84.

La différence, qui se trouve entre les superficies courbes, suivant laquelle il y en a, qui peuvent être développées en un plan, & d'autres incapables d'un tel développement, a porté l'auteur de ce Memoire à cette recherche. Comme on sait, que la Sphére apartient à la dernière classe, le Cone à la premiére, & que la Projection doit être une représentation exacte de la Sphére sur un plan, il paroît une idée naturelle, que de projetter la Sphére sur un Cone, & ensuite de reduire cette Projection à un plan. Car le Cone & le Cylindre comme des superficies à simple courbure sont, pour ainsi dire, mitoyens entre le plan & les superficies à double courbure, auxquelles apartient la Sphére. Une autre occasion fut donnée par la Projection inventée par Mr. *de l'Isle*, dont une considération légére montre, qu'elle n'est pas proprement Projection à la rigueur, mais qu'elle approche pourtant beaucoup de la Projection de la Sphére sur un Cone. Mais un peu plus d'attention en fait voir la difference.

Dans la Projection qui est l'objet de ce Memoire l'oeil se trouve au centre de la Sphére, la table de la Projection est la superficie d'un Cone qui touche la Sphére dans ce Parallele, qui est au milieu du pays qu'on veut dessiner. La Projection d'un point de la Sphére est là, où le rayon passant par ce point rencontre le Cone. Ensuite la superficie conique est développée en un plan. D'où il s'ensuit, que les Meridiens deviennent des lignes droites qui se rencontrent au

pole,

pole, & les Paralléles des cercles concentriques, dont le pole eſt le centre. La latitude du Paralléle mitoyen etant $= \lambda$, & celle d'un autre Paralléle $= \beta$, le rayon de celui-ci ſera dans la Projection $= \frac{\text{coſ.}\ \beta}{\text{ſin.}\ \lambda.\ \text{coſ.}\ (\beta - \lambda)}$. Pour avoir l'angle formé par deux Méridiens dans la Projection, il faut multiplier leur angle ſphérique par ſin. λ.

Un des principaux caracteres d'une bonne Projection eſt la reſſemblance des parties infiniment petites dans la Sphére & dans la Projection. Cette condition démande, que dans la Projection les deux cotés d'un rectangle infiniment petit ſoient comme $\partial \beta : \partial \gamma$ coſ. β, β étant la latitude, γ la longitude. Mais dans notre Projection ils ſont comme

$$\partial \beta : \partial \gamma \text{ coſ. } \beta \text{ coſ. } (\beta - \lambda).$$

Là reſſemblance n'exiſte donc que près du Paralléle mitoyen.

Là Projection d'un grand cercle quiconque ſur la ſurface du Cone eſt une ſection conique, ſavoir un angle rectiligne, ou un cercle, ou une parabole, ou une hyperbole, ou enfin une ellipſe, à meſure que la plus grande latitude de ce cercle eſt $= 90^\circ$, ou $= 0$, ou $= 90^\circ - \lambda$, ou $> 90^\circ - \lambda$, ou $< 90^\circ - \lambda$. Le Cone étant développé, les deux ſections premières, c'eſt à dire l'équateur & les Méridiens, ne ſe changent point. Mais les autres ſections changent de nature par ce developpément & deviennent des lignes tranſcendentes. Il n'y a qu'un ſeul cas, où elles ſauroient être exprimées par une équation algebraique ſavoir quand ſin. λ eſt une quantité rationelle; par exemple, λ étant $= 30^\circ$, & la plus grande latitude du cercle $= \alpha$, l'on a cette équation entre deux coordinées rectangles:

$$16\,(x^2 + y^2) = 3\,(x^2 + y)^2 + 2\ \text{tang.}\ \alpha \sqrt{3}\,(x^4 - y^4) + \text{tang.}\ \alpha^2\,(x^2 - y)^2.$$

L'axe des abſciſſes paſſe par le vertex de la courbe & par le pole, lequel eſt le point d'où les abſciſſes ſont comptées.

Entre cette Projection & celle de Mr. *de l'Isle* il y a la difference ſuivante: 1. dans la première le pole devient le centre commun de tous les Paralléles: dans la dernière la projection du pole eſt un cercle paralléle. 2. Dans la dernière tous les dégrés de latitude ſont égaux: dans la première ils croiſſent à deux cotés du Paralléle mitoyen en proportion des differences des tangentes. Au reſte ces deux Projections conviennent en cela, que tous les dégrés de longitude pris au même Paralléle ſont égaux, & que l'angle formé par deux Meridiens eſt toujours moindre que leur angle ſphérique.

Quand on veut deſſiner une région circonpolaire, le Cone devient un plan touchant la Sphére au Pole; auſſi dans ce cas notre Projection, la *centrale*, la *ſtéréographique* & celle de Mr. *de l'Isle* conviennent entièrement. Au contraire quand on veut deſſiner une région équatoriale, le Cone devient un Cylindre touchant la Sphére dans l'équateur, & la Projection ſouffre des changemens, que le Memoire détaille.

VII.

VII.
De Proiectione Sphaerae ad determinandam aream maxime idonea.

Auctore *F. T. Schubert.* pag. 94.

Parmi les avantages, que nous devons à la Géographie, c'est un des plus interessans non seulement pour le Géometre mais presque pour tout le monde, que de connoitre l'étenduë relative des états. C'est pourquoi l'on a imaginé plusieurs méthodes mecaniques, dont on se puisse servir pour venir à bout de cette recherche, sans avoir des connoissances mathematiques. Ce n'est point du calcul, que naissent les difficultés: il y a quantité de tables calculées pour abréger cet ouvrage. Mais le seul usage de ces tables est, de trouver le rapport entre l'aire d'une Carte & celle de la Sphére: ce qui suppose qu'on ait deja mésuré l'aire d'un pays dans la Carte; & c'est justement ce qui rend ce travail fort pénible même au Géometre, puisque dans les Cartes vulgaires ce rapport entre les aires se change selon les latitudes. Quand on a même subdivisé la Carte d'une précision la plus scrupuleuse, on ne se peut pas dispenser de juger à l'estimative des parties exterieures d'un pays: un procédé, qui se fonde sur la supposition, qu'une aire dans la Carte soit toujours proportionelle à celle qui lui répond sur la sphére; supposition absolument fausse. Pour épargner de la peine on a encore plus sacrifié l'exactitude, en pésant la Carte. Cette méthode, la plus courte que l'on puisse imaginer, est fondée sur la même fausse supposition. Ce seroit donc une chose fort utile, qu'une Projection, dont les aires sont proportionelles aux aires répondantes de la Sphére, c'est à dire, où l'aire d'un rectangle infiniment petit est $= \partial x \, \partial y \cos. y$, comme dans la Sphére; x étant la longitude,

y la latitude. A cette condition on peut ſatisfaire par une Projection, où les Méridiens & les Paralléles ſont des lignes droites qui s'entrecoupent perpendiculairement, & les latitudes ſont priſes égales à leurs Sinus. Conformement à cette Projection extrêmement ſimple, l'auteur de ce Mémoire dreſſa une Carte de la Ruſſie, mais il trouva d'abord, qu'à une diſtance conſidérable à l'equateur les degrés de latitude deviennent ſi petits, & ceux de longitude ſi enormes à l'egard des latitudes, que non ſeulement la figure des pays eſt entièrement difformée, mais que par une ſuite naturelle il eſt presqu' impoſſible de deſſiner & de méſurer les aires d'une exactitude mediocre, parceque de petites fautes ont une influence trés importante. Pour prévenir cet inconvenient, & pour rendre cette Projection utile à pluſieurs bûts, les reflexions ſuivantes peuvent ſervir. Afin que les aires de la Carte & de la Sphére ſoyent proportionelles, il n'eſt pas neceſſaire que les latitudes deviennent *égales* à leurs Sinus, mais ſeulement que λ ſoit $= m$ ſin. λ, λ étant la latitude, m un nombre conſtant quiconque. Ce nombre m peut être determiné pour chaque pays de ſorte, que la Projection de ce pays reſſemble à ſa vraie figure autant qu'il eſt poſſible. Quand on nomme la plus grande latitude d'un pays α, la plus petite β, & la mitoyenne μ, ou $\mu = \frac{\alpha + \beta}{2}$, le calcul donne $m = \frac{\alpha - \beta}{\text{coſ.}\,\mu\,(\text{ſin.}\,\alpha - \text{ſin.}\,\beta)}$. Par le même nombre il faut diviſer l'aire du pays méſurée.

Ce ſont les nombres m pour les principaux pays:

pour la Sphére entière	- - -	$m =$ 1, 57.
—— Novaja Zemlia	- - - - -	13, 0.
—— Suède & la Norvègue	- - -	5.
—— Ruſſie	- - - - - - -	4.
—— Grande Bretagne & l'Irlande	- -	3.

— Po-

——	Pologne & la Pruſſe - - - - -	$2\frac{3}{4}$.
——	Allemagne - - - - - - -	$2\frac{1}{2}$.
——	France - - - - - - -	2.
——	Italie, l'Eſpagne, Portugal, Hongrie & la Turquie Européenne - - - -	$1\frac{3}{4}$.

Au reſte le Mémoire contient des régles pratiques pour la méſure d'un pays deſſiné ſelon cette methode, & les aires de *Novaja Zemlia* & de *Kamczatka* trouvées d'après une telle Carte.

CLASSE

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

I.

Confideratio motus plane fingularis, qui in filo perfecte flexili locum habere poteft.

Auctore *L. Eulero.* p. 103.

„ Quoique, „dit l'Auteur dans l'introduction de ce Mémoire,"
„ la théorie de l'équilibre auffi bien que du mouvement pour
„ tous les fils tant parfaitement flexibles qu'élaftiques foit fi
„ bien achevée, qu'il femble qu'on n'y puiffe plus rien défi-
„ rer; les formules pour la détermination de ce mouvement
„ ont été néanmoins jusqu'à préfent fans aucun ufage, le mou-
„ vement de ces fils n'ayant encore pu être défini dans aucun
„ autre cas que dans ceux-là feuls, où ces fils font fufcepti-
„ bles d'un mouvement infiniment petit, réciproque ou ofcil-
„ latoire: défaut qu'on ne doit au refte attribuer en aucune
„ manière à la théorie méchanique, mais à l'imperfection de
„ l'Analyfe feule." Enfuite M. Euler ajoute, qu'il n'a même pu parvenir encore par aucun artifice a développer le cas le plus fimple, celui du mouvement d'un fil parfaitement flexible, qui n'eft follicité par aucune force, dans le même plan.

Pour éplucher donc entiérement ces difficultés, l'Auteur confidère un fil fléxible follicité par des forces quelconques à fe mouvoir dans un plan: il rapporte la figure, que le fil

fil prend après un certain tems t, à deux coordonnées x & y, & en nommant pour cet instant ∂s l'élément de la courbe, il suppose que deux forces $P \partial s$ & $Q \partial s$, parallèles aux coordonnées, agissent sur lui. Ces forces P & Q pourront dependre aussi du tems t, & les coordonnées x & y seront des fonctions de s & t.

Ayant établi ensuite les équations primordiales, il parvient, pour le cas même où les forces P & Q sont $= 0$, à une autre équation assés simple aux différences partielles, qu'il avoüe ne savoir comment traiter, & à la résolution de laquelle il exhorte les Géomètres à appliquer toutes leurs forces. En attendant il communique les efforts qu'il a faits lui-même pour cet objet, & il reduit le problême à la solution de cette equation-ci $(\frac{\partial \partial u}{\partial s^2})^2 + (\frac{\partial \partial v}{\partial s^2})^2 = s$. Mais étant arrété ici par les trop grandes difficultés, notre Illustre Auteur entreprend de traiter ce sujet dans un ordre contraire, en regardant la figure du fil comme donnée dans chaque instant, & en cherchant les forces P & Q propres à produire un tel mouvement.

Il remarque d'abord, que n'y ayant qu'une équation pour cette détermination, l'une des deux quantités P & Q peut être prise à volonté: après quoi le calcul le conduit à deux équations, qui renferment la détermination des forces accélératrices tangentielles & normales dirigées vers le centre. Mais le Problême general étant indéterminé, il passe à la solution de quelques Problêmes speciaux. Dans le premier il suppose les forces normales $= 0$, & recherche les forces tangentielles nécessaires pour produire le mouvement en question. Il applique la solution à un exemple particulier, & determine les symptomes, qui auront lieu pour differens instans & pour divers points du fil. Dans le 2. Problême il suppose au contraire

traire les forces tangentielles $= 0$, & recherche les forces normales requises pour le mouvement proposé. Il établit un exemple, & montre, que le Problème reste encore indéterminé. Dans le 3^e. Problème enfin il cherche les forces tangentielles & normales nécessaires pour le mouvement du fil, ensorte que la tension du fil dans tous ses points soit toujours $= 0$.

II.

Enodatio Difficultatis super figura terrae a vi centrifuga oriunda.

Auctore *L. Eulero.* pag. 121.

L'Auteur commence par la remarque de la grande différence, qu'on trouve dans le rapport du diamètre de l'Equateur à l'axe de la Terre, suivant que la figure de cette planète est déterminée par la combinaison de la force de la gravité avec la force centrifuge, ou par la mesure de differens dégrés du Méridien. Ce rapport varie de celui de 578 : 577 à celui de 201 : 200. Il ajoute que quoique Mrs. Hughens & Newton, qui les premiers sont parvenus par leurs calculs au rapport de 588 : 577, ayent regardé la terre comme uniformément épaisse, on trouveroit cependant le même résultat pour le rapport dont il s'agit, quelque différente qu'on supposat la structure des parties intérieures de la Terre, aussi longtems qu'on regarderoit l'action de la gravité comme dirigée vers le centre de la Terre. C'est ce que l'Auteur démontre par la Théorie de l'équilibre des fluides; pourvu cependant qu'à distances égales du centre la force de la gravité soit égale, & qu'on puisse regarder comme extrêmement petite la différence entre

entre le Diamètre de l'Equateur & l'axe de la Terre. Il faut donc néceſſairement, continue M. Euler, que chaque particule de la Terre ſoit non ſeulement attirée vers le centre, mais qu'il y ait encore d'autres forces latérales, dont la direction ſoit perpendiculaire à celle vers le centre: & en effet l'hypothèſe de la gravité univerſelle, par laquelle chaque particule eſt attirée vers l'autre, démontrent, que cette ſeconde eſpèce de force exiſte actuellement, & doit être conſidérée dans le calcul. Mais il n'eſt pas poſſible de determiner ces forces, ſans connoitre auparavant la figure de la Terre & toute ſa ſtructure. Auſſi cette recherche eſt-elle ſi couverte d'obſcurité, qu'on ne doit pas, dit l'Auteur, s'attendre à une explication parfaite, & tout ce que les géomètres ont propoſé jusqu'à préſent ſur ce ſujet, ne repoſe que ſur des hypothèſes précaires, & déſtituées de toute probabilité. Pour traiter donc, autant que poſſible, ce ſujet dans toute ſa généralité, M. Euler conſidère les deux forces perpendiculaires entre elles, dont nous avons parlé, & d'après ce qui eſt probable dans la nature, il fait celle, qui agit vers le centre, proportionelle à une fonction quelconque Z de la diſtance z du centre, & l'autre, latérale, qu'il nomme S, comme dépendante non ſeulement de la diſtance z, mais auſſi de l'angle Φ, que forme le diamètre de l'Equateur avec la ligne tirée de la particule vers le centre; il ajoute, que cette force doit s'évanouïr pour les particules ſituées dans l'axe & dans l'Equateur. D'après cela l'Auteur recherche la figure de la Terre ſelon les principes qu'il a expliqués dans le 13^e^. Tome des Nouv. Commentaires pour l'équilibre des fluides. Il parvient donc à une équation différentielle, & trouve que pour que l'intégration puiſſe avoir lieu, (ce qui eſt une condition abſolument néceſſaire de l'equilibre,) il faut que la force S ſoit une fonction homogène de -1 dimenſion des coordonnées perpendiculaires x & y, auxquelles chaque particule eſt réduite. Enſuite après avoir ſubſtitué à ces coordonnées leurs valeurs en z & ϕ, il remarque que la condition de l'équilibre demande encore, qu'à diſtances égales du centre la chaleur & la denſité ſoyent les mêmes. En faiſant maintenant la preſſion des particules $= 0$, il trouve l'équation pour la ſurface de la Terre, où cependant l'ignorance, dans laquelle nous ſommes ſur la ſtructure intérieure de ce globe, permet de faire encore pluſieurs ſuppoſitions arbitraires. Pour expliquer donc la choſe par un exemple, l'Auteur fait la force centrale égale à une puiſſance n de z, & la latérale égale à α ſin. ϕ coſ. ϕ, & après avoir ſubſtitué ces valeurs dans l'équation, il détermine la conſtante introduite par l'intégration, & le ſurplus du diamètre de l'Equateur ſur l'axe de la Terre; ce qui ſe fait en transportant d'abord la particule quelconque ſous les poles & enſuite ſous l'Equateur. Il ne reſte plus alors qu'à ſubſtituer pour α une fraction qui convienne au rapport trouvé de 201 : 200, & ainſi α devient $= \frac{1}{151}$. Le *Maximum* de la force latérale a lieu pour l'angle $\phi = 45°$, & devient, à la ſurface de la mer, presque égale à la force centrifuge.

D'un autre coté il eſt manifeſte, que la loi trouvée pour les forces latérales S ne peut pas avoir lieu, parcequ'autrement elles deviendroient infiniment grandes à des diſtances infiniment petites du centre: d'où il s'en ſuit, que ſi la Terre étoit toute fluide, ſa ſurface ne pourroit jamais être tranquille ou en équilibre. Mais comme ſelon toute probabilité l'Ocean n'eſt nulle part aſſés profond, pour que la différence entre la formule trouvée pour S & la vraye loi d'attraction, quelle qu'elle puiſſe être, devienne ſenſible, il ſera inconteſtablement poſſible, que l'Ocean ſe tienne en équilibre, ſi nous faiſons abſtraction de pluſieurs autres cauſes phyſiques, qui peuvent *y* exciter des agitations.

III.

III.

Sur le Mouvement gyratoire d'un corps attaché à un fil extenfible.

Second Mémoire.

Par M. *Jacques Bernoulli*, pag. 131.

Après avoir confidéré dans fon prémier Mémoire le cas le plus fimple, favoir celui, où le mouvement fe fait fans friction fur une table horizontale, l'Auteur traite ici le mouvement gyratoire, qui a lieu dans un plan vertical, où l'on doit donc outre la force centrifuge du corps, & la force reftringente du fil, introduire dans le calcul la force de la gravité, qui agit continuellement fur le corps. Un calcul aſſés court mène M. Bernoulli à une équation aux fecondes différences, fi compliquée, qu'il n'y a aucune efpérance de pouvoir l'intégrer. C'eft pourquoi il a recours à un moyen indirect pour parvenir à l'équation de la courbe cherchée. Il remarque d'abord, que comme dans le prémier Mémoire la courbe cherchée étoit compofée d'une infinité d'epicycloides toutes égales entre elles, la courbe qu'on cherche actuellement, doit de même avoir une infinité de *parties*, dont chacune ait fon *maximum* & fon *minimum*, avec cette difference, qu'ici les *parties* doivent toutes être inégales entre elles. Enfuite les ordonnées feront toûjours infiniment petites par rapport aux arcs, qui leur fervent d'abfciſſes, quoique l'arc, qui fait la bafe de chaque partie, foit partout auſſi infiniment petit. La preuve de ces Lemmes fe trouve deja dans le precédent mémoire, par la confidération de l'extenfibilité, fuppofée infiniment petite du fil, & du tems par cela-même infiniment

niment petit, que le corps doit employer pour faire ſes allées & venues. Ceci bien établi, on n'aura plus aucune peine à accorder, qu'on ne puiſſe pour tout le mouvement, qui ſe fait par une de ces parties, regarder comme conſtantes tant la viteſſe gyratoire du corps, que l'action de la gravité, ſuivant qu'elle contribue à augmenter ou à diminuer la tenſion du fil; M. Bernoulli recommence donc le calcul, en ſuppoſant conſtans les élémens dont on vient de parler. Il parvient encore à l'équation d'une épicycloïde infiniment allongée. Mais ce n'eſt encore là que l'équation pour une ſeule *partie* de la courbe, & il s'agit de paſſer à l'équation de la courbe entiére compoſée de toutes ſes parties. Pour effectuer cela il ſubſtitue de nouveau les valeurs variables de la viteſſe gyratoire & de l'action de la gravité dans la direction du fil, au lieu des conſtantes dont il s'étoit ſervi, & ainſi il parvient à l'équation de toute la courbe, qui eſt, comme on devoit s'y attendre, ſi compliquée, qu'on n'en pourroit rien conclure ſur ſa nature que très ſuperficiellement, ſi la méthode indirecte, dont l'Auteur s'eſt ſervi, n'avoit cet avantage ſur une méthode directe, qu'elle nous apprend de toute certitude, que la courbe en quéſtion eſt compoſée d'une infinité d'épicycloïdes infiniment allongées, & toutes différentes entre elles, qui néanmoins ſont compriſes dans cette équation. L'Auteur recherche enſuite la valeur des plus grandes & des plus petites ordonnées de la courbe pour les différentes régions plus ou moins élevées, dans leſquelles le corps ſe trouve pendant ſon mouvement, de même que l'arc, qui ſert de baſe à chaque épicycloïde; & il trouve, que ces ordonnées auſſi bien que ces arcs ſont les plus petits dans la partie élevée, & deviennent toûjours plus grands, à meſure que le corps approche du point le plus bas de ſon mouvement, & redeviennent plus petits à meſure qu'il s'en éloigne. Il remarque auſſi le rapport des plus gran-

des

des ordonnées aux bafes des epicycloïdes, & il montre que ce rapport eft le plus grand & donne les epicloides les plus élargies vers le bas, & les plus applaties vers le haut. Cet applatiffement peut même aller fi loin dans la partie la plus haute, que l'epicycloide fe confond entiérement avec le cercle immobile, qui lui fert de bafe: cela arrive, quand la viteffe du corps n'y eft due qu'à la moitié du rayon, ce qui rend, comme on fait, la force centrifuge égale à la force centripète, enforte qu'il n'en peut réfulter aucune extenfion du fil, fi, (comme on fuppofe,) il avoit commencé fon mouvement par le haut fans qu'il ait été tendu. Mais la viteffe indiquée eft auffi, comme l'Auteur fait voir, la plus petite, que la nature du problème permette de fuppofer au corps, parcequ'autrement le fil ne pourra pas toûjours refter tendu, ce qui cependant eft une condition effentielle.

Comme la détermination du tems, que le corps employe à décrire un arc quelconque, demande feule des calculs affés prolixes, l'Auteur a renvoyé cette recherche à la fin du Mémoire; il parvient à une infinité de feries infinies, toutes affés convergentes, & qui s'evanouiffent toutes à l'exception d'une feule, pour les 4 points cardinaux de la circonférence, c'eft-à-dire, quand l'arc decrit eft un multiple quelconque de 90 dégrés. Cette férie, qui refte, fera plus ou moint convergente, à proportion que la viteffe initiale du corps fera plus ou moins grande. La fomme de cette ferie étant une fois trouvée par approximation, l'Auteur fait voir la loi de progreffion, fuivant laquelle il eft très facile de déterminer le tems employé à décrire un multiple quelconque du quart de la circonférence, & il finit par l'application à un exemple, qui apprend, que fi un corps commence à tourner depuis le fommet de la circonference avec une viteffe due à la longueur du rayon,

rayon, il faudra que ce rayon ſoit de 2 pieds, 7 pouces de France, pour que le corps achève une révolution dans une ſeconde de tems.

IV.

Eſſay rélatif aux recherches de M. de la Grange ſur l'attraction des Sphéroïdes elliptiques.

Par M. *Krafft*, pag. 148.

Ce mémoire a pour objet de déterminer l'attraction, qu'un Sphéroïde elliptique de revolution exerce ſur un corpuſcule placé dans un endroit quelconque. L'illuſtre de la Grange s'eſt déja occupé de ce probleme dans les Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1773, où après avoir remarqué, que ce probleme eſt du nombre de ceux, auxquels l'Analyſe paroit en quelque façon inſuffiſante & la Syntheſe ſeule capable d'atteindre, il en donne une ſolution analytique, qui ne le cede en rien à la ſolution ſynthetique, que Maclaurin en a donnée & qu'on peut regarder à juſte titre comme un chef-d'oeuvre de Syntheſe. Dans cette nouvelle ſolution M. de la Grange employe un rayon vecteur tiré du corpuſcule attiré à l'élément attirant du Sphéroïde avec deux angles, qui en déterminent la poſition, au lieu des trois coordonnées orthogonales, dont on ſe ſert ordinairement dans l'Analyſe des problemes de cette eſpece; & après avoir fait ſentir les difficultés qu'on rencontre en appliquant ce procedé ordinaire au probleme en queſtion, même dans le cas le plus ſimple, où le corps attirant ſeroit une Sphere, il conclut, qu'en s'y prenant par le moyen de trois coordonnées, il ſera presque impoſſible de déterminer l'attraction même d'une Sphere ſur un corpuſcule pusculc placé dans un endroit quelconque. Ce mémoire de M. de la Grange a engagé notre Académicien de faire quelques recherches sur les moyens de vaincre les difficultés qu'on rencontre dans les intégrations des différentielles, auxquelles on parvient en traitant ce probleme par le moyen des trois coordonnées orthogonales; & il en a trouvé un, moyenant lequel il a réussi à déterminer l'attraction, qu' un Sphéroïde elliptique de révolution exerce sur un corpuscule placé dans un point quelconque de l'axe de révolution, soit en dedans soit au dehors du Sphéroïde, ou sous l'Équateur à la surface du Sphéroïde. Les expressions finies, qu'a trouvées M. Krafft pour les attractions dans ces trois cas, s'accordent parfaitement avec celles de M. de la Grange, & doivent être les sommes des séries infinies, que M. Euler a données pour les mêmes attractions.

CLASSE DE PHYSIQUE.

I.
Réflections sur l'ancienneté rélative des roches & des couches qui composent la croute du globe terrestre.

Trosieme Section.

Par M. *J. J. Ferber.* Pag. 163.

La Nature n'a pas formé la pâte des montagnes primitives d'une substance homogène, & n'a pas suivi scrupuleusement nos divisions minéralogiques. Rien n'est plus ordinaire au contraire, que de trouver réunies dans la même carriere des espèces & des variétés qu'on distingue avec raison dans les cabinets.

Si l'on examine p. ex. quelque montagne granitique, on y voit souvent confondues, non seulement toutes les variétés de cette roche, mais encore des rognons ou des masses de gneiss, de schiste ou de porphyre, qui ne sont, à la vérité, que dans une proportion infiniment petite, en comparaison du total de la masse. Et ces espèces de noeuds ne sont point des pierres étrangeres, ce sont des portions de la substance même du granite; & le tout a été formé par une seule & même opération de la nature.

Mais si ces petites masses de schiste, de gneiss ou de porphyre sont contemporaines au granite qui les contient, il ne ne s'en fuit nullement, que le porphyre, le gneifs & le fchifte qui forment des roches à part, & des bandes très épaiffes, toujours adoffées au granite dans les hautes montagnes, foient de la même ancienneté que cette roche fondamentale.

La même irrégularité accidentelle qui fe remarque dans le granite, a lieu pareillement dans le fchifte & le gneifs, dans lesquels on trouve quelquefois de petites maffes de granite ou de porphyre. Et ces anomalies locales peuvent avoir eu la même caufe; c'eft à dire que fi l'on fuppofe que le fchifte & le gneifs aient été dans un état de fluidité & de diffolution, les terres qui les compofent, ont pu fe combiner de maniere à produire ces variations.

Il eft néanmoins plus probable que le fchifte & le gneifs font le réfultat de la décompofition d'un granite préexiftant. Et cette décompofition étant plus ou moins parfaite, il a pu arriver, que les parties les plus groffieres & les moins altérées fe foient de nouveau agglutinées fous la forme de porphyre ou de granite, & fe foient trouvées enveloppées par les parties plus ténuës & déja argillifiées, qui ont produit le gneifs & le fchifte.

Quant aux filons granitiques inférés dans les roches fchifteufes, ils font, dit l'Auteur, d'une formation poftérieure à celle du fchifte, & ne font que des débris du granite primitif; foit que ces débris proviennent d'anciennes roches granitiques alterées par le temps, foit qu'ils aient été enlévés & transportés par les eaux, lorsque le granite étoit encore dans l'état de moleffe; & qui aiant été dépofés dans les fiffures des montagnes fchifteufes, s'y font agglutinés & cryftallifés.

M. Ferber paſſe enſuite à des obſervations ſur les roches calcaires, dont la pâte, dit-il, n'eſt pas plus homogène que celle des montagnes de granite, de gneiſs ou de ſchiſte. L'eau qui la dépoſoit, étoit en même temps chargée de terres argilleuſes, ſilicées &c., quelquefois même en très grande quantité; ce qui confirme la théorie de la formation des marbres & autres roches calcaires, poſtérieurement à celle des granites & des ſchiſtes. Les marbres qui paroiſſent les plus purs ne ſont pas exempts de ces mélanges: il n'eſt pas rare de trouver des cryſtaux de quartz dans le marbre de Carare; & les marbres blancs du Dicentin contiennent de la magnéſie en abondance. Les Cipolini ſont remplis de couches très régulieres de mica, qui vraiſemblablement doivent leur origine à la décompoſition d'un gneiſs ou d'un ſchiſte préexiſtant. L'Auteur rappelle encore nombre d'autres mélanges de matieres hétérogenes qui ſe rencontrent dans les diverſes eſpèces de marbres; & il conclud que cette altération s'eſt faite dans le temps même de la formation de la roche calcaire. Mais on ne ſauroit inférer delà, dit-il, que tout ſable, toute argile, & toute magnéſie qui forme la pâte d'autres montagnes du Globe, ſoit de même date de naiſſance que ces couches calcaires ou de marbre; & c'eſt pourtant ainſi que l'on raiſonne, ajoute-t-il, lorsqu'on veut conclure de quelques maſſes de granite trouvées dans l'intérieur du ſchiſte, que celui ci eſt de la même ancienneté que le granite.

Il y a deux manieres d'enviſager les roches: ou en Phyſicien Géologue, ou ſimplement en Minéralogiſte. Celuici ne cherche qu'à déterminer les genres, les eſpèces & les variétés des foſſiles, par leurs ſignes extérieurs, & par le ſecours de la Chymie. Le Géologue voit les choſes en grand; il obſerve la diſpoſition rélative des foſſiles dans le ſein

ſein de la Terre, & cherche à dévoiler la ſtructure même du Globe.

Celui qui ne ſeroit que minéralogiſte, & qui s'imagineroit que les montagnes de granite ou de marbre ſont partout auſſi pûres, auſſi homogenes que les morceaux d'inſtruction raſſemblés dans ſon cabinet, risqueroit de méconnoitre totalement ces roches dans certains endroits des grandes chaines; il ſeroit même tenté de dire peut-être, qu'il n' y a ſur la Terre qu'un petit nombre de montagnes de granite ou de marbre; & il ſeroit hors d'état de déchiffrer l'ordre qui regne dans la diſpoſition des roches.

La dénomination & la claſſification des montagnes, doit donc ſe tirer de l'eſpèce de roche dominante, & non des parties accidentelles qui peuvent s'y rencontrer.

La nature reſte fidèle à ſes principes lorsqu'elle agit en grand: c'eſt à l'obſervateur à les ſaiſir & ne pas croire, qu'elle s'en écarte au premier petit objet, qui lui paroit extraordinaire, parcequ'il ne l'a pas examiné comme il convenoit.

Si des montagnes de granite contiennent de petites maſſes de porphyre, il n' y a rien de ſurprenant: on ſait que le granite renferme ſouvent des veines argilleuſes & bolaires; ſi quelques parties de feldſpath ſe détachent, ſe disperſent dans ce bol, & qu'il vienne à ſe durcir, voila du porphyre tout formé. Il en eſt de même de celui qui ſe trouve dans les montagnes de gneiſs & de ſchiſte, puisque le gneiſs contient en abondance le feldſpath qui eſt une de ſes parties intégrantes. À l'égard du ſchiſte, comme il eſt formé des debris du granite, ou du gneiſs par un ſeconde deſtruction, il eſt très poſſible que quelques parties de feldſpath qui ont échappé à la décompoſition, ſe ſoient enclavées dans la maſſe encore boueuſe.

Si l'on prétend expliquer d'une autre maniere la formation de ces montagnes, toujours faudra-t-il convenir que la nature a la faculté de produire du feldſpath, ou toute autre eſpèce de pierre, lorsque les terres convenables & les autres circonſtances néceſſaires ſe trouvent réunies. Or le roches argilleuſes ne ſont nullement dépourvues des élémens du feldſpath; & l'état de fluidité où elles ont été, a favoriſé ſa cryſtalliſation. Il n'y a rien là qui répugne aux loix de la nature, puisquelle fait journellement ſous nos yeux des opérations parfaitement analogues. Ainſi donc, on peut dire qu'il y a des roches calcaires, des ſchiſtes, & même des granites de differens âges; & c'eſt au géologue à diſtribuer les roches de mêmes genres, eſpèces ou variétés en pluſieurs claſſes d'ancienneté rélative, ſuivant les obſervations & les découvertes qui l'éclairent ſur cet objet.

II.

De ordine fibrarum cordis. Diſſertatio VI. quae repetitas et nouas obſeruationes de fibris ventriculorum externis continet.

Pars prior. Ventriculus dexter.

Auctore *C. F. Wolff.* pag. 181.

La ſtructure des parties intérieures du corps humain eſt beaucoup plus variable encore, que la figure externe & la phyſiognofiognomie de l'homme. Et ce n'eft pas la moindre difficulté de connoitre dans cette ftructure compliquée, & dans ce chaos de fibres dont particulierement le coeur eft compofé, l'effentiel, ou le conftant, & de le discerner de ce, qui n'eft qu'individuel. Par cette raifon l'Auteur, après avoir donné dans les quatre premieres differtations fur l'ordre des fibres du coeur, inferées aux Actes de l'Académie, la déscription des fibres externes des deux ventricules, n'a pas manqué de réiterer fes obfervations dans plufieurs autres coeurs; & c'eft dans cette differtation, dont nous livrons ici la premiere partie, qu'il raconte ce qu'il y a ou à corriger, ou à confirmer, dans fes premieres déscriptions.

Mais comme auffi toutes les ftructures ne font pas également bien exprimées dans tous les corps, & qu'il y a dans les divers individus, des ftructures, ou plus, ou moins parfaites; l'Auteur, en faifant ces nouvelles recherches, a découvert encore plufieurs parties, qui dans fes premiers travaux lui étoient échappées, foit qu'elles n'étoient pas affés diftinctement exprimées, ou que tout-à-fait elles ne fe trouvoient pas dans les coeurs, fur lesquels il faifoit fes premieres recherches; & qu'on voit pourtant affés, qu'elles appartiennent effentiellement à la ftructure parfaite. Ainfi il ajoute dans la préfente differtation tout ce qu'il a remarqué de nouveau depuis ce temps-là.

Il n'y a eu qu'un feul petit muscle, que l'Auteur nommoit *fibrae interiectae*, & une certaine interruption de fibres, ou *raphe*, dans la furface fupérieure du ventricule droit, que l'Auteur avoit pris pour effenticls & conftans, & qui ne fe font pas confirmés. Tout le refte des muscles, qui compofent la furface externe des deux ventricules, & toutes les autres

tres parties du coeur dénoué de ses paux, se sont très-bien constatées.

Entre les parties observées en dernier lieu, la plûs considérable semble être celle, que l'Auteur nomme *cone artériel.* C'est une partie du ventricule droit; mais elle est aussi bien distinguée de ce ventricule, que l'artère pulmonaire qui en sort, l'est elle même. Le ventricule est attaché par toute sa surface postérieure à la cloison qui distingue les deux ventricules, & qui leur est commun. Il n'a par conséquent point de parois postérieur propre; mais au lieu de ce parois il n'y a que cette cloison même, qui fait aussi bien le parois antérieur du ventricule gauche, que le postérieur du droit. Or ce cone artériel, ou cette partie du ventricule droit que l'Auteur nomme ainsi, a son propre parois postérieur, comme l'artère pulmonaire, & est séparé du ventricule gauche & de la cloison aussi bien que celle-là. On auroit toute raison de considérer ce cone comme une partie de l'artère pulmonaire plûtot que du ventricule, si les valvules sémilunaires ne le distinguoient pas évidemment de l'artère & le réduisoient au ventricule. De plus le cone est pourvû aussi-bien que le ventricule de belles fibres musculaires, qui manquent à l'artère, & a la même structure comme celui-là. L'Auteur avoit trouvé le cone artériel dans ses premieres recherches, il l'avoit considéré comme une partie toute singuliere du ventricule droit, & l'avoit même nommé de ce nom; mais quoique ces cones avoient été pourvûs de leurs propres parois postérieurs dans les coeurs, qu'il avoit vû alors, ils avoient été attachés néansmoins par leur coté gauche au bord supérieur de la cloison; ainsi qu'ils ne pouvoient pas être réflechis comme l'artère pulmonaire. Dans ces dernieres observations le cone étoit détaché de la cloison & du ventricule gauche par toute sa surface & ne continuoit

tinuoit que par ſa baſe au ventricule droit, tout comme l'artère pulmonaire eſt continuée au cone. On la pouvoit réflechir en même temps avec cette artère, & les fibres musculaires, qui couvrent le cone dans ſa ſurface antérieure, continuoient en entourant le cone, dans ſa ſurface poſtérieure autour du coté gauche auſſi bien qu'autour du coté droit.

Une autre particularité que l'auteur à trouvé dans ce coeur, dont la ſtructure eſt repréſentée par les planches ajoutées à cette diſſertation, & qui pareillement ſemble appartenir à la ſtructure parfaite, eſt la diviſion de l'extrémité du coeur en deux pointes, dont l'une appartient au ventricule droit, & l'autre au gauche; ainſi qu'on ne peut pas dire proprement, que le coeur, c'eſt à dire les deux ventricules enſemble ſoient terminés par une pointe commune; mais bien, que chaque ventricule ſoit pourvû de la ſienne. Il y a trois muscles particuliers au ventricule gauche, que l'auteur appelle *fasciculi terminales*, qui prennant leur origine à la ſurface inférieure du coeur près de l'extrémité du ventricule gauche, vont delà obliquement par le milieu entre les deux extrémités des deux ventricules à la ſurface ſupérieure, & s'y attachent. Si ces muscles ſont forts & bien formés dans un coeur, ils produiſent par leur continuelle action une profonde & aſſés large impreſſion dans ce milieu entre les extrémités des deux ventricules; & par cela méme ces extrémités jailliſſent néceſſairement en avant, & forment des pointes différentes. C'eſt donc de la groſſeur & de la bonne exécution de ces muscles, & de la force de leur action, que depend la diviſion de l'extrémité du coeur en deux pointes; & c'eſt par cette raiſon que l'auteur croit pouvoir compter cette diviſion parmi la ſtructure parfaite du coeur; encore que le plus ſouvent on trouve les faſcicules terminaux foibles & mal exprimés

primés, & par conféquent auffi les extrémités des ventricules combinées dans une feule pointe obtufe.

Le refte de cette premiere partie de la fixieme differtation concerne pour la pluspart une déscription anatomique très exacte & détaillée des divers muscles, qui couvrent la furface externe du ventricule droit. Les remarques, qui regardent les fibres externes du ventricule gauche feront expofées dans la feconde partie.

III.

Analyfis chemica aquae fluvii Nevae vrbem Petropolin perfluentis.

Auctore *I. G. Georgi*, pag. 221.

On attribue communement à l'effet de l'eau de la Neva, les incommodités auxquelles les étrangers font fujets d'abord, ou peu de jours après leur arrivée à St. Pétersbourg; dont la pluspart fe plaignent de la diarrhée: quelques uns s'en reffentent moins que d'autres, mais il y en a peu qui en demeurent entierement exempts. Feu M. Model ayant analyfé cette eau chymiquement, après y avoir employé toute cette fcrupuleufe exactitude qu'on admire dans fes écrits, il n'y avoit cependant rien trouvé qui puiffe être cenfé de caufer ce dérangement de fanté: le réfultat de fes recherches ayant été que l'eau de la Neva ne cédoit pour la pureté presque en rien à celle de Briftol. Mais M. Model avoit fait puifer fon eau au haut de la ville & dans une profondeur confidérable au milieu de la riviere; tandis que la pluspart des habitans fe fervent pour leur boiffon de l'eau de la riviere qui eft la plus proche de leurs demeures, & qui fans ſans doute doit différer plus ou moins de celle qui eſt au haut de la ville. M. Géorgi a donc cru, que pour décider entierement la queſtion ſur la ſalubrité de l'eau de la Neva & ſur ſon effet prétendu, il faudroit non ſeulement ſe contenter d'avoir examiné l'eau, qui a été puiſee aux endroits, où elle doit naturellement être la plus pure, mais auſſi celle qui mouille les bords, ainſi que celle qui coule par les bras moins conſidérables de la riviere qui traverſent la ville. Il rapporte en conſéquence avoir employé des eaux puiſées en quatre endroits très éloignés entr'eux & très différens par rapport à leur local: il expoſe enſuite ſes expériences & conclud, que l'eau de la Neva eſt en général pure, limpide, legere, ſans ſaveur, & déliée, ſe conſervant longtemps ſans ſe corrompre, & très peu mélée de parties hétérogenes. Mais quelle ſeroit donc la cauſe de l'effet dont presque tous les étrangers ſe plaignent? M. Géorgi ne prétend pas être en cette matiere un juge compétent, il ſoupçonne cependant, que c'eſt un extrait de gluten animal, qui ſe trouve mélé à une matiere végétale & marécageuſe, ſurnageant quoiqu'en très petite quantité à la ſurface de la riviere, qui ſoit contraire à la ſanté des perſonnes qui n'y ſont pas accoutumées. Au reſte notre Académicien communique une analyſe chymique des eaux des puits & des foſſes ſtagnantes, qu'il trouve d'autant plus impure & malſaine.

IV.
Marina varia noua et rariora deſcripta.

Auctore *P. S. Pallas.* Pag. 229.

Ce mémoire donne la déſcription de quinze animaux marins, dont une partie a été envoyée des isles Couriles, & dont quelques autres ſont des productions des mers de l'Europe & des deux Indes.

Le genre des *Nereïdes* ou Millepieds de mer reçoit ici une augmentation de quatre nouvelles efpeces, & une cinquieme y a été rapprochée par des rapports que les auteurs avoient négligés.

Les autres defcriptions font connoitre: l'animal du petit *tuyau de mer*, qui fe trouve attaché fur les varecs des mers du Nord; un nouveau *limaçon* des isles Couriles; une *étoile de mer*, de la famille de celles qui font revétues d'écailles, à rayons extrèmement allongés, de la mer des Antilles; une *tulipe de mer* de forme applatie des isles Couriles; une très-petite *Pholade* qui perce les bois flottans dans la mer du Nord; un *Ofcabrion* ou Patelle articulée, dont les lames font revétues d'une groffe peau chagrinée; une *coquille* de la forme des oreilles de mer, qui eft presque totalement coriacée & dépourvue de fubftance calcaire; trois efpèces de *Fontaine de mer* (Afcidia), dont l'une recouverte d'écailles pierreufes, & une autre de la forme & de la couleur d'une orange, viennent des isles Couriles; la troifieme a été obfervée fur les plages de la mer glaciale. Les defcriptions de toutes ces efpeces, dont quelques unes font accompagnées de détails anatomiques, ne font pas fufceptibles d'extraits.

V.

Complementa varia Acad. Imperiali Scient. Petropolitanae communicanda ad Clar. ac Celeb. Virum P. S. Pallas.

Auctore *Petr. Camper.* Pag. 250.

M. Camper commence par l'expofé de la collection nombreufe qu'il a formée de fquelettes & de cranes de tous les

les quadrupedes de l'univers qu'il a pû se procurer, & d'ossemens fossiles dont il s'occupe à rechercher les originaux dans la nature. Il declare qu'il est maintenant de l'opinion que plusieurs especes d'animaux peuvent avoir été détruites par des catastrophes arrivées à nôtre globe.

Il parle ensuite en particulier de ces cranes fossiles de Bisons que M. Pallas a décrits dans le XVII^{me} tome des nouveaux Commentaires de l'Académie, & les compare à ceux du grand busle d'Afrique & du boeuf musqué de l'Amérique, qu'il a dans sa collection. Il panche à constater la ressemblance de ces cranes fossiles avec la derniere espece; ressemblance que M. Pallas avoit aussi confirmée lui-même dans sa déscription du busle à queue de cheval, imprimée dans les Actes de l'Académie.

M. Camper compare aussi les cranes de busles gigantesques fossiles, décrites par M. Pallas dans le XIII^{me} volume des nouveaux Commentaires, dont Madame la Princesse de Daschkaw lui a fait parvenir un echantillon, avec les plus grands cranes des busles de l'Asie qu'il a dans son cabinet & il les trouve différens en plusieurs points & plus ressemblans au crane de l'Urus, d'avec lequel cependant M. Pallas a très-bien observé la différence.

Nôtre celèbre anatomiste parle ensuite de grands os & dents molaires d'élephants & d'hippopotames, qui lui ont fait naitre l'idée de l'existence d'une race plus forte de ces mêmes animaux dans le monde ancien. Nous remarquerons ici que la plûpart des os & dents d'élephants fossiles, qui nous viennent de l'intérieur de la Russie & de la Sibérie se rapprochent assés, par la grandeur, à ceux de la squelette d'un élephant venu de Perse, que l'Académie conserve dans son cabinet avec un grand nombre de ces os fossiles, qui ne font pas soupçonner une taille gigantesque aux élephants antediluviens.

M. Camper a parfaitement raison de declarer les grands bois de cerfs, qu'on a trouvés fossiles en Irlande, pour avoir appartenu à un animal de ce genre dont l'espece vivante n'existe plus maintenant sur la terre, ou du moins n'a pas encore été observée.

Il s'attache enfin à éclaircir l'idée que l'on doit se faire de ce grand animal inconnu, dont les cranes ont été trouvés sur l'Ohio, & quelques dents molaires en Europe & même dans l'intérieur de la Russie; animal auquel il applique le nom de Mamont, que les Russes donnent aux ossemens fossiles d'élephants. M. Camper prouve bien incontestablement, par les dessins qu'il donne de deux palais entiers de ce grand animal inconnu, que cette espece n'a eu aucun rapport avec l'élephant; & que non seulement l'emplacement & la forme des molaires & la structure du palais, mais aussi le defaut d'alvéoles pour les defenses, qu'on avoit supposé à cet animal, prouvent sa différence générique; de sorte que les défenses trouvées dans le même endroit sur l'Ohio n'ont certainement pas appartenu au même animal.

M. Pallas, à qui ce mémoire du célèbre anatomiste est addressé, y ajoute quelques remarques nécessaires pour rectifier un petit nombre de faits allégués.

CLASSE

CLASSE D'ASTRONOMIE.

I.

Obſeruationes aſtronomicae Petropoli in ſpecula academica, anno 1786 habitae.

Auctore *Petro Inochodzow*. Pag. 267.

L'Auteur rapporte d'abord ſon obſervation du paſſage de Mercure par devant le disque du Soleil faite le $\frac{23 \text{ Avril}}{4 \text{ Mai}}$: il paſſe enſuite aux immerſions des ſatellites de Jupiter, que le temps lui a permis d'obſerver, & enfin à l'eclipſe du Soleil arrivée le $\frac{4}{15}$ Juin 1787, dont il a très bien vu le commencement & la fin, & pendant laquelle il a encore obſervé les immerſions des tàches dans le Soleil.

II.

De momento coniunctionis Mercurii cum Sole, nec non latitudine illius, tempore tranſitus per discum Solis anno 1786 die $\frac{23 \text{ April}}{4 \text{ Maii}}$ t. c.

Auctore *Steph. Rumovski*. Pag. 273.

L'Auteur dans ſon mémoire inſeré au 1^er Tome de ces nouveaux Actes, avoit ſousmis au calcul les obſervations faites ſur les diſtances des bords du Soleil & de Mercure: il en avoit deduit premierement la plus petite diſtance des centres de ces deux corps céleſtes, ainſi que le moment du milieu

lieu du passage, & enfin le moment de la conjonction, qu'il a trouvée pour le méridien de St. Pétersbourg être arrivé à $19^h. 14'. 2''$, ou bien pour le méridien de Paris à $17^h. 22'. 4''$. M. Roumovski eut la satisfaction de voir que ce moment s'accorde très parfaitement avec celui que M. Prosperin a déterminé des observations faites à Upsala. Mais ayant appris depuis que quelques Astronomes, qui n'ont pu observer que la sortie de Mercure, ont donné pour le moment de la conjonction un resultat différent du sien, il a cru valoir la peine de refaire les calculs sur les moments du contact interne observés à la sortie, pour s'assurer à laquelle des déterminations on doit se fier le plus. Après avoir rapporté quelques observations qui sont parvenües à sa connoissance, M. Roumovski détermine d'abord le demidiametre de Mercure, par le temps qu'il a employé à passer par le bord du Soleil, & trouve qu'il doit être contenu entre les limites de $4'', 14$ & $5'', 54$: & prennant un milieu entre les resultats que lui ont donné diverses observations, il estime que ce demidiametre ne sauroit excéder $4'', 77$. Supposant donc le demidiametre du Soleil $15'. 52'', 1$, celui de Mercure $4'', 1$ & calculant les parallaxes de Mercure en longitude & en latitude par les contacts internes observés à la sortie, M. Roumovski trouve pour le moment de la conjonction sous le méridien de l'endroit où l'observation a été faite, une expression dans laquelle il introduit comme inconnües les corrections que peuvent recevoir la différence des demidiametres, & la latitude de la planete: & afin de pouvoir avec quelque certitude porter un jugement de la valeur de ces deux corrections qu'il désigne par δ & y, il cherche de l'entrée observée à St. Pétersbourg une pareille expression, & acquiert par là une équation, qui lui achémine la détermination des valeurs de δ & y. Car quoiqu'une seule équation ne suffise pas à déterminer deux inconnues, la considéraſidération que le demidiametre du Soleil tiré des tables eſt fondé ſur les obſervations les plus certaines, & que le demidiametre du Mercure conclu par la durée ne ſauroit ſurpaſſer 4″, 77; la plus grande valeur qu'en pourra recevoir δ, ſeroit $= -0'',67$, laquelle étant ſubſtituée dans l'équation ſusmentionnée, on en obtient la correction de la latitude $y = +23'',5$. Cependant comme le contact interne à l'entrée, obſervé à St. Pétersbourg ne ſauroit être tenu pour exact, les valeurs trouvées pour δ & y ne ſeront qu'approchantes. En ſuppoſant donc la correction de la différence des demidiametres du Soleil & de la planete $-0'',5$ & celle de la latitude $+23''$, le moment de la conjonction apparente reduit au méridien de Paris pourra, en prennant un milieu, être établi à $17^h. 21'. 45''$. t. v. la correction de la longitude étant $+3'. 15'',3$.

III.

De tranſitu Mercurii per Solem anno 1786 die $\frac{23\ April}{4\ Maii}$ Bagdati obſeruato.

Auctore *Steph. Roumovski*, pag. 281.

Ce mémoire peut être regardé comme un ſupplement au précédent. M. Roumovski determine de l'obſervation du paſſage de Mercure par devant le disque du Soleil, faite à Bagdat, par une route ſemblable à celle qu'il avoit ſuivie en calculant l'obſervation faite à St. Pétersbourg, le temps de la conjonction apparente du Mercure & du Soleil, ainſi que la latitude de la planete au moment de la conjonction. Et comme le moment du contact intérieur dans l'entrée a été obſervé à Bagdat avec une certitude plus grande qu'à St. Pétersbourg, les conclusions trouvées dans cette ſeconde diſſertation doivent

 être

être cenſées approcher beaucoup plus de la vérité que celles de la précédente. Ainſi le temps vrai de la conjonction apparente ſera maintenant ſuivant ces dernieres déterminations, pour le méridien de Paris à $17^h. 22'. 4''$. La correction des tables de M. de la Lande pour la longitude $+ 3'. 16'', 7$, pour la latitude $+ 23'', 5$; & le demidiametre du Mercure, que M. Roumovski avoit ſuppoſé dans ſon premier mémoire de $4'', 6$, ſera maintenant très à peu près de $5''$. Au reſte nous renvoyons au mémoire même ce que notre Académicien differte ſur la diſſenſion qu'on trouve entre les obſervations de Paris & de Londres & celles des autres endroits.

IV.

Obſeruatio eclipſis Solis anno 1787, die $\frac{4}{15}$ Junii in obſeruatorio Petropolitano habita.

Auctore *Steph. Roumovski*, pag. 287.

M. Roumovski rapporte outre les momens du commencement & de la fin de l'eclipſe, les obſervations diverſes qu'il a faites pour s'aſſurer du mouvement de ſa pendule: quant aux autres obſervations faites pendant cette eclipſe ſur la grandeur des parties obſcurcies, notre Auteur ſe reſerve de les communiquer une autre fois, lorsqu'il aura ſousmis au calcul les momens du commencement & de la fin de l'eclipſe.

V.

V.

Extrait des obſervations météorologiques faites à St. Pétersbourg en l'année 1784. ſuivant le nouveau Stile.

Pag. 288.

I. Eté de 1784.

La Neva debacla le 25 Avril: elle fut repriſe le 6 Decembre: l'intervalle entre ces deux époques eſt de 225 jours.

Il géla pour la derniere fois le 20 Mai, & il recommença à géler le 30 Sept. ce qui donne un intervalle de 133 jours d'Ete, qui eſt par conſéquent de 20 jours moindre qu'en 1783.

La derniere neige tomba le 7 Juin, & il recommença à en tomber le 28 Sept. ainſi après 113 jours.

La plus grande chaleur a été obſervée le 29 Juillet à 2 heures après midi, de 103 degrés de Delisle; par conſequent de 3 degres plus grande qu'en 1783.

La moyenne chaleur deduite de celles qui ont été obſervées à 2 heures après midi, a été depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre de $127\frac{2}{15}$, & depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre de $118\frac{1}{4}$ degrés.

La moyenne chaleur tirée des obſervations faites aux heures du matin & du ſoir a éte pour les mêmes intervalles, depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre de $137\frac{1}{5}$, & depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre de $132\frac{1}{2}$ degrés.

La chaleur obfervée à 2 heures après midi, depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre, ce qui comprend un nombre de 184 jours, a été en

12 jours plus grande que 110
38 jours entre 120 & 110
47 jours entre 130 & 120
45 jours entre 140 & 130
41 jours entre 150 & 140 &
1 jour entre 160 & 150 degrés: ou bien 1 jour de gélée continuelle.

La chaleur obfervée aux heures du matin & du foir, pendant ces mêmes 6 mois, ou 184 jours, s'eft trouvée en

19 jours moindre que 150: c'eft à dire qu'il a gélé en 19 jours; en
65 jours entre 140 & 150
53 jours entre 130 & 140
42 jours entre 120 & 130 &
5 jours entre 110 & 120.

D'où nous concluons que l'Eté de 1784 a moins duré que celui de l'année 1783, que les nuits y ont été plus froides, mais que les chaleurs des après-midi ont été plus fortes.

Le Baromètre a été depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre

au plus haut: 28. 63, le 4 Octobre à 6 heures du matin. Therm. 146, ciel couvert, vent du NOu. médiocrement fort.

au

au plus bas: 27. 38, le 17 Mai à 8 heures du soir. Therm. 146, ciel couvert, vent fort du NOu, pluie. D'où

la variation totale 1. 25 &

le milieu - 28. 005.

Enfin la hauteur moyenne 28. 043: ou bien $28\frac{43}{1000}$ pouces de Paris.

Au reste la hauteur du Baromètre a été pendant ces mêmes six mois ou 184 jours d'Été, 125 jours 3 heures au dessus de 27. 90, 97 jours 21 heures au dessus de 28. 00, & 69 jours 15 heures au dessus de 28. 10 pouces.

Les vents forts ont soufflé depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre:

1 jour du Nord, le 3 Mai.

8 jours du NE. le 1. 27. 28. 29. 30 Mai, le 27. 28 Août & le 16 Septembre.

3 jours du SE. le 18. 24 Juillet & le 24 Septembre.

4 jours du Sud, le 16 Juillet & le 14. 24. 30 Août.

6 jours du SOu. le 19 Juillet, le 1. 8. 23. 31 Août & le 7 Octobre.

29 jours de l'Ouest, le 6. 7. 8. 15. 16. 23. 25 Mai, le 3. 4. 28 Juin, le 1. 7. 20 Juillet, le 2. 3. 4. 5. 15. 22. 29 Août, le 1. 9. 18. 25. 26 Septembre & le 10. 15. 16. 17 Octobre.

Parmi lesquels les vents du 8. 23. 25 Mai, du 1 Août, & du 9. 25. 26 Septembre, ont été les plus violens. Cet

Eté fut par conféquent moins venteux que le précédent, mais le vent dominant fut encore celui de l'Oueft.

Enfin il y eut depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre

42 jours de ciel entierement ferein,
42 jours de ciel entierement couvert,
11 jours de brouillard,
31 jours de pluie copieufe & 53 jours de pluie médiocre, en tout 84 jours de pluie,
9 jours de neige, & 3 jours de grèle,
7 orages complets, 5 jours où il n'a fait que tonner, & 3 aurores boreales peu confidérables.

II. Hyver de 1784 à 1785.

La Neva ayant été prife le 6 Décembre 1784, elle refta dans cet état de congélation pendant 148 jours, jusqu'au 2 Mai 1785; où elle debacla dans la nuit au 3^{me}, par une temperature de 146 à 155 degrés. Barom. 27. 65, ciel à demi-couvert, neige & vent du NOu. médiocrement fort.

L'intervalle entre la premiere gélée du 30 Septembre 1784 & la derniere du 11 Mai 1785, eft de 233 jours; c'eft à dire de 4 jours moindre que dans l'hyver précédent. La premiere neige étant tombée le 28 Septembre, il neigea pour la derniere fois le 10 Mai, & l'intervalle entre ces deux extrêmes eft de 234 jours.

Le plus grand froid a été obfervé le 3 Mars 1785 de grand matin, de 200 degrés après la graduation de Delisle. Baromètre 28, 32, ciel ferein, vent du SOu. peu fenfible.

Le

Le froid moyen deduit des obſervations faites aux heures du matin & du ſoir, a été trouvé pour les intervalles :

du 1 Novembre 1784 jusqu'au 1 Mai 1785 - $163,\frac{4}{5}$
du 1 Décembre 1784 jusqu'au 1 Avril 1785 - $168,\frac{1}{3}$ degrés.

Le froid moyen entre ceux qui ont été obſervés à 2 heures après midi, a été pour les mêmes intervalles

du 1 Novembre 1784 jusqu'au 1 Mai 1785 - $155\frac{1}{2}$
du 1 Décembre 1784 jusqu'au 1 Avril 1785 - $159\frac{2}{3}$ degrés.

Le froid de la nuit, ou pluſtôt celui des heures du matin & du ſoir, fut depuis le 1 Novembre 1784, jusqu'au 1 Mai 1785, ce qui comprend un intervalle de 181 jours d'hyver :

6 jours plus grand que 190
17 jours entre 180 & 190
24 jours entre 170 & 180
55 jours entre 160 & 170
67 jours entre 150 & 160 &
12 jours moindre que 150 degrés : c'eſt à dire, qu'il y avoit 12 jours de degel continuel.

Le froid des après midi, obſervé à 2 heures, fut pendant ce même intervalle

6 jours moindre que 140
58 jours entre 150 & 140
67 jours entre 160 & 150
36 jours entre 170 & 160

8 jours

8 jours entre 180 & 170
6 jours plus grand que 180 degrés.

Il a donc degélé en 64 après midi.

Le Baromètre a été pendant ces 6 mois d'hyver, depuis le 1 Novembre 1784 jusqu'au 1 Mai 1785:

au plus haut: 28. 87, le 12 Février à 1 heure après midi. Therm. 174, ciel ferein, calme.

au plus bas: 26. 78, le 4 Décembre à 10 heures avant midi. Therm. 151, ciel demi-couvert, vent fort du SOu. Donc

la variation totale 2, 09 pouces, &
le milieu 27. 825.

Enfuite la hauteur moyenne, 28. 012, ou 28 $\frac{12}{1000}$ pouces de Paris.

Enfin fa hauteur a été pendant ces mêmes 6 mois, ou 181 jours d'hyver, 114 jours 18 heures plus grande que 27. 90, 91 jours 12 heures plus grande que 28. 00 & 69 jours plus grande que 28. 10 pouces.

Les vents forts ont foufflé depuis le 1 Novembre jusqu'au 1 Mai 1785:

3 jours du Nord, le 25. 27 Février, & le 1 Avril 1785.
1 jour du NE, le 26 Février 1785.
4 jours de l'Eft, le 22 Nov. 1784, le 6. 7 Janv. & le 20 Févr. 1785.
4 jours du SE, le 10 Déc. 1784, le 8. 21 Févr. & le 27 Mars 1785.

9 jours

9 jours du Sud, le 12 Nov. & le 21 Déc. 1784, le 29 30 Janv. le 5. 7. 22. 28 Févr. & le 20 Mars 1785.

18 jours du SOu, le 14. 16. 18. 19. 27. 28 Nov. & le 1. 3. 4 Déc. 1784; le 10. 11. 18. 23. 24. 25 Janv. le 12 Mars & le 13. 24 Avril 1785.

9 jours de l'Ouest, le 2 Déc. 1784, le 9. 20. 28 Janv. le 9. 17. 25 Mars & le 26. 27 Avril 1785.

2 jours du NOu. le 1 Mars & le 5 Avril 1785.

Entre ces 50 jours venteux se sont trouvés être les plus violens, ceux du 12. 18. 19 Nov. du 3 Décembre, du 10. 18. 24 Janv. du 25. 26. 28 Février, du 1 Mars & du 1 Avril. Cet hyver a donc été considérablement plus venteux que le précédent, & le vent dominant a été celui du SOu.

Enfin depuis le 1 Novembre 1784 jusqu'au 1 Mai 1785, ont été annotés:

34 jours de ciel entierement serein,

75 jours de ciel entierement couvert,

25 jours de brouillard,

6 jours de neige copieuse, & 61 jours de neige médiocre: en tout 67 jours de neige,

2 jours de pluie copieuse, & 21 jours de pluie médiocre: en tout 23 jours de pluie.

5 Aurores boréales, en Janvier, Mars & Avril, dont celles du 29 Janvier, 6 Mars & 7 Avril ont été les plus splendides.

Un globe de feu vu le 5 Novembre à 7 heures du soir vers SE. d'une lumiere fort vive, & qui éclata avec un grand éclair.

Le 18. 19 Avril des parhélies d'une grande beauté avec des couleurs d'Iris: dont le premier est représenté sur la Planche ci-jointe.

Un pareil phénomène a aussi été observé le 19 Février à Moscou, ainsi qu'en diverses autres villes de la Russie.

MATHEMATICA.

COMMENTATIO
DE
CVRVIS TRACTORIIS.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 19. Iun. 1775.

§. 1.

Quae olim a Geometris de curuis tractoriis funt inueftigata, quanquam ad doctrinam motus pertinere videntur, tamen nullo modo ad Mechanicam referri poffunt: eiusmodi enim hypothefi innituntur, quae veris principiis motus manifefto refragatur. Nihilo vero minus, admiffa ifta hypothefi, fi res tantum geometrice confideretur, quae fuper hoc argumento funt inuenta omni attentione digna funt putanda, atque adeo ab experientia vix aberrare folent. Quamobrem haud inutile fore arbitror, totum hoc negotium accuratius perfcrutari et fecundum vera motus principia diiudicare.

§. 2. Confiderari autem folet via, quam corpufculum fuper plano horizontali defcribit, dum ope fili fecundum lineam fiue rectam fiue curuam protrahitur; atque haec quaeftio ita ad Geometriam reuocari folet, vt curua defcripta perpetuo a directione fili tangatur, atque adeo omnes tangentes iftius curuae defcriptae vsque ad lineam, iuxta quam

 filum

filum protrahitur, productae, vbique eiusdem sint longitudinis. Vt autem talis motus eueniat, auctores probe monuerunt, planum, super quo iste motus producitur, neutiquam politum, sed satis esse debere asperum; tum vero etiam necesse esse, vt filum lente promoueatur, quandoquidem, nisi hae conditiones obseruentur, curua descripta plurimum a calculo esset discrepatura.

Tab. I. Fig. 1. §. 3. Ita si corpusculo C alligatum sit filum $CA = a$, cuius terminus A iuxta lineam rectam AB protrahitur, corpusculum in linea quadam curua CY promouebitur, cuius tangentes YT e singulis punctis ad rectam AB productae vbique longitudini fili a aequentur; vnde si pro puncto Y vocetur abscissa $AX = x$ et applicata $XY = y$, elementum vero curuae $Yy = \partial s$, erit $-\partial y : \partial s = y : a$, ideoque $y\,\partial s = -a\,\partial y$ et $\partial s = -\frac{a\,\partial y}{y}$, vnde integrando statim colligitur arcus curuae $Cy = s = -a\,l\,y + C$. Quare si initio filum CA ad rectam AB fuerit normale, tum erat $y = a$ et $s = 0$, ex quo colligitur $s = a\,l\,\frac{a}{y}$. Vt autem aequatio inter coordinatas eruatur, loco ∂s scribatur eius valor $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, et sumtis quadratis erit $yy\,\partial x^2 + yy\,\partial y^2 = aa\,\partial y^2$, vnde deducitur $\partial x = -\frac{\partial y\sqrt{(aa-yy)}}{y}$, pro cuius integratione faciamus $\sqrt{(aa-yy)} = v$, eritque $yy = aa - vv$, hinc $\frac{\partial y}{y} = -\frac{v\,\partial v}{aa-vv}$, ergo

$$\partial x = \frac{vv\,\partial v}{aa-vv} = -\partial v + \frac{aa\,\partial v}{aa-vv},$$

consequenter

$$x = C - v + \tfrac{1}{2}a\,l\,\frac{a+v}{a-v} = C - \sqrt{(aa-yy)} + \tfrac{1}{2}a\,l\,\frac{a+\sqrt{(aa-yy)}}{a-\sqrt{(aa-yy)}},$$

et quia casu $x = 0$ fieri debet $y = a$, fiet

$$x = \tfrac{1}{2}a\,l\,\frac{a+\sqrt{(aa-yy)}}{a-\sqrt{(aa-yy)}} - \sqrt{(aa-yy)}, \text{ siue}$$

$$x = a\,l\,\frac{a+\sqrt{(aa-yy)}}{y} - \sqrt{(aa-yy)}.$$

Vnde

Vnde patet, corpusculum non ante ad rectam AB peruenire quam percurso spatio infinito.

§. 4. Consideremus nunc quoque casum, quo filum iuxta lineam curuam quamcunque AT protrahitur. Ita si Y sit punctum in Tractoria, eiusque tangens vsque ad curuam datam in T ducatur, recta YT perpetuo aequetur longitudini fili $= a$. Referatur curua data ad axem AB, ad quem ex T demittatur perpendiculum TU, sitque $AU = u$ et $UT = t$, atque ob curuam datam dabitur aequatio inter t et u. Nunc vero ex puncto Tractoriae Y ad eundem axem ducatur normalis YX, sitque $AX = x$ et $XY = y$ et arcus Tractoriae $= s$. Hinc cum YT curuam tangat, ducta ex T axi normali TS, ob $YT = a$, erit $\partial s : \partial x = a : TS$ et $\partial s : -\partial y = a : YS$, vnde fit $TS = (u - x) = \frac{a \partial x}{\partial s}$ et $SY = y - t = -\frac{a \partial y}{\partial s}$. Ponamus nunc $\partial y = p \partial x$, erit $\partial s = \partial x \sqrt{(1 + pp)}$, hincque fiet $u - x = \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$ et $t - y = \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$. Ex his igitur formulis, si curua tractoria esset cognita, facile determinaretur curua AT, iuxta quam filum produci debet. Tab. I. Fig. 2.

§. 5. Vt autem ex data aequatione inter t et u inuestigemus aequationem inter x et y, calculus ita instituatur. Ex binis formulis inuentis: $u = x + \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$ et $t = y + \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$, habebimus differentiando

$$\text{I. } \partial u = \partial x - \frac{a p \partial p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} \text{ et II. } \partial t = p \partial x + \frac{a \partial p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}},$$

vnde $\text{II} - \text{I} \times p$ praebet $\partial t - p \partial u = \frac{a \partial p}{\sqrt{(1+pp)}}$, ex qua, concessa aequationum differentialium resolutione, quantitas variabilis p definietur per coordinatas datas t et u; ita vt t spectari possit tanquam certa functio ipsius u, quia t per u dari assumitur.

Porro haec combinatio: I. + II. p dat $\partial u + p\partial t = \partial x(1+pp)$, vnde colligimus $\partial x = \frac{\partial u + p\partial t}{1+pp}$, hincque porro $\partial y = \frac{p(\partial u + p\partial t)}{1+pp}$, ſicque etiam x et y per eandem variabilem u determinabuntur.

§. 6. Hic quidem aſſumere ſumus coacti, reſolutionem aequationis differentialis $\frac{a\partial p}{\sqrt{(1+pp)}} + p\partial u = \partial t$ eſſe in poteſtate, quod tamen pauciſſimis tantum caſibus exſequi licet. Viciſſim igitur, ſi curuam tractoriam tanquam iam cognitam ſpectemus, quandoquidem eius deſcriptio mechanica datur, ipſam hanc aequationem differentialem reſoluere licebit. Atque adeo iam olim hoc modo conſtructionem aequationis *Riccatianae* exhibui.

§. 7. Vt hanc aequationem ab irrationalitate liberemus, faciamus $p = \frac{zz-1}{2z}$, vt fiat $\frac{\partial p}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{\partial z}{z}$, et noſtra aequatio differentialis erit $\frac{a\partial z}{z} + \frac{(zz-1)\partial u}{2z} = \partial t$, ſiue

$$a\partial z + \tfrac{1}{2}(zz-1)\partial u = z\partial t,$$

quam ergo ſemper per motum tractorium conſtruere licet, qualiscunque functio quantitas t fuerit ipſius u. Inuento valore literae z erit

$$x = \int \frac{4zz\partial u + 2z(zz-1)\partial t}{(1+zz)^2} \text{ et}$$

$$y = \int \frac{(2z\partial u + (zz-1)\partial t)(zz-1)}{(1+zz)^2}.$$

Euidens autem eſt, in hac aequatione formulam illam *Riccatianam* latiſſimo ſenſu acceptam contineri. Si enim ſtatuamus $z = e^{\frac{t}{a}}$, erit $\partial z = e^{\frac{t}{a}}\partial v + e^{\frac{t}{a}}\frac{v\partial t}{a}$, et aequatio noſtra hanc induet formam:

$$a\, e^{\frac{t}{a}}\partial v + \tfrac{1}{2} e^{\frac{2t}{a}} vv\partial u = \tfrac{1}{2}\partial u, \text{ ſiue}$$

$$a\partial v + \tfrac{1}{2} e^{\frac{t}{a}} vv\partial u = \tfrac{1}{2} e^{-\frac{t}{a}}\partial u,$$

vnde

vnde cum $e^{\frac{r}{a}}$ ſemper ſit certa functio ipſius u, quae ponatur $= U$, conſtrui poterit haec aequatio differentialis:

$$a\,\partial v + \tfrac{1}{2} v v U \partial u = \frac{\frac{1}{2}\partial u}{U}.$$

§. 8. Hanc igitur ob cauſſam ſi curua, iuxta quam filum protrahitur, pro lubitu accipiatur, determinatio Tractoriae plerumque vires Analyſeos ſuperat. At ſi filum iuxta peripheriam circuli protrahatur, cuius centrum ſit in C, et radius $AC = c$, ſingulari fortuna euenit, vt Tractoria definiri poſſit. Inceperit enim iſte motus, dum corpuſculum erat in B et filum $BA = a$ ad circulum erat normale; nunc autem corpuſculum peruenerit in Z, vbi recta tangens ZT circulo in T occurrat, ita vt ſit $ZT = a$. Iam ducta recta CZ vocetur angulus $ACZ = \omega$ et $CZ = z$, ita vt pro Tractoria inuenienda ſit aequatio inter rectam z et angulum ω, quae quidem inueſtigatio, niſi artificium adhibeatur, in calculos non parum moleſtos induceret. Tab. I. Fig. 3.

§. 9. Ad has difficultates euitandas in calculum introducamus angulum $CZT = \Phi$; ſic enim conſideratio trianguli CZT, cuius latera ſunt $CZ = z$, $ZT = a$ et $CT = c$, ſtatim praebet $cc = aa + zz - 2az \operatorname{coſ.} \Phi$, vnde deducitur $z = a \operatorname{coſ.} \Phi \pm \sqrt{(cc - aa \operatorname{ſin.} \Phi^2)}$, vbi ſignum ambiguum ad ſitum puncti z reſpicit, prouti id fuerit vel extra circulum vel intra circulum. Quia autem in figura punctum z extra circulum ſitum repraeſentatur, valebit ſignum ſuperius, eritque $z = a \operatorname{coſ.} \Phi + \sqrt{(cc - aa \operatorname{ſin.} \Phi^2)}$. Praeterea hinc ſimul innoteſcunt anguli ZCT et ZTC; erit enim $\operatorname{ſin.} ZCT = \frac{a \operatorname{ſin.} \Phi}{c}$ et $\operatorname{ſin.} ZTC = \frac{z \operatorname{ſin.} \Phi}{c}$. Nunc quia recta ZT eſt tangens Tractoriae in Z, ducatur recta proxima $Cz = z + \partial z$, et ex Z deſcripto arculo zs, in triangulo Zzs erit

Z s

$Zs = -\partial z$, et ob angulum $Zcz = \partial\omega$ erit $zs = z\,\partial\omega$, vnde ſtatim colligitur tang. sZz, hoc eſt tang. $\Phi = \frac{z\,\partial\omega}{-\partial z}$, hincque porro $\frac{\partial z}{z} = -\frac{\partial\omega}{tang.\,\Phi}$, ſiue $\partial\omega = -\frac{\partial z}{z}\,tang.\,\Phi$, ſicque angulus ω per z et Φ definitur. Iam vero relationem inter z et Φ inuenimus. Praeterea vero cum ipſum Tractoriae elementum Zz, quod vocemus $= \partial s$, ſit $\partial s = -\frac{\partial z}{cof.\,\Phi}$, hinc longitudo Tractoriae concluditur $BZ = s = -\int\frac{\partial z}{cof.\,\Phi}$.

§. 10. Cum igitur inuenerimus

$$z = a\,cof.\,\Phi + \sqrt{(cc - aa\,fin.\,\Phi^2)}, \text{ erit}$$

$$\partial z = -a\,\partial\Phi\,fin.\,\Phi - \frac{aa\,\partial\Phi\,fin.\,\Phi\,cof.\,\Phi}{\sqrt{(cc - aa\,fin.\,\Phi^2)}}$$

$$= -\frac{a\,\partial\Phi\,fin.\,\Phi\,(\sqrt{(cc - aa\,fin.\,\Phi^2)} + a\,cof.\,\Phi)}{\sqrt{(cc - aa\,fin.\,\Phi^2)}},$$

quae manifeſto reducitur ad hanc formam $\frac{-az\,\partial\Phi\,fin.\,\Phi}{\sqrt{(cc - aa\,fin.\,\Phi^2)}}$, ita vt ſit $\frac{\partial z}{z} = -\frac{a\,\partial\Phi\,fin.\,\Phi}{\sqrt{(cc - aa\,fin.\,\Phi^2)}}$. Quamobrem angulus ω ita determinabitur, vt ſit $\partial\omega = \frac{a\,\partial\Phi\,fin.\,\Phi\,tang.\,\Phi}{\sqrt{(cc - aa\,fin.\,\Phi^2)}}$; tum vero erit etiam

$$\partial s = \frac{az\,\partial\Phi\,tang.\,\Phi}{\sqrt{(cc - aa\,fin.\,\Phi^2)}} = \frac{aa\,\partial\Phi\,fin.\,\Phi}{\sqrt{(cc - aa\,fin.\,\Phi^2)}} + a\,\partial\Phi\,tang.\,\Phi,$$

vnde integrando prodit

$$s = -a\,l\,cof.\,\Phi + aa\int\frac{\partial\Phi\,fin.\,\Phi}{\sqrt{(cc - aa\,fin.\,\Phi^2)}}.$$

§. 11. Totum ergo negotium reducitur ad has formulas integrales; $\int\frac{\partial\Phi\,fin.\,\Phi}{\sqrt{(cc - aa\,fin.\,\Phi^2)}}$ et $\int\frac{\partial\Phi\,fin.\,\Phi\,tang.\,\Phi}{\sqrt{(cc - aa\,fin.\,\Phi^2)}}$. Quod ad priorem attinet, quia $-\partial\Phi\,fin.\,\Phi$ eſt differentiale ipſius $cof.\,\Phi$, ponamus $cof.\,\Phi = v$, et haec formula transformabitur in hanc:

$$\int\frac{\partial\Phi\,fin.\,\Phi}{\sqrt{(cc - aa\,fin.\,\Phi^2)}} = -\int\frac{\partial v}{\sqrt{(cc - aa(1 - vv))}},$$

cuius integrale eſt

$$-\frac{1}{a}\,l\left(\frac{av + \sqrt{(bb + aavv)}}{b}\right) = -\frac{1}{a}\,l\,\frac{av + \sqrt{(cc - aa + aavv)}}{\sqrt{(cc - aa)}},$$

vnde

vnde restituto valore cos. Φ loco v reperietur tandem

$$s = C - a\, l\, \text{cos.}\,\Phi - a\, l\, [a\, \text{cos.}\,\Phi + \sqrt{(cc - aa\, \text{fin.}\,\Phi^2)}].$$

Vbi ad constantem definiendam notetur, initio fuisse tam $s = 0$ quam $\Phi = 0$: erit igitur $C = a\, l\, (a + c)$, hinc fit

$$s = a\, l\, \frac{a + c}{\text{cof.}\,\Phi\, (a\, \text{cof.}\,\Phi + \sqrt{(cc - aa\, \text{fin.}\,\Phi^2)})},$$

vnde patet, rectificationem huius Tractoriae per solos logarithmos expediri.

§. 12. Praecipuum autem negotium versatur in integratione formulae $\omega = a \int \frac{\partial \Phi\, \text{fin.}\,\Phi\, \text{tang.}\,\Phi}{\sqrt{(cc - aa\, \text{fin.}\,\Phi^2)}}$, quae commodissime tractabitur si statuamus $\sqrt{(cc - aa\, \text{fin.}\,\Phi^2)} = x\, \text{fin.}\,\Phi$, vt fiat $\omega = a \int \frac{\partial \Phi\, \text{fin.}\,\Phi}{x\, \text{cof.}\,\Phi}$. Verum inde habebitur

$$cc - aa\, \text{fin.}\,\Phi^2 = xx\, \text{fin.}\,\Phi^2, \text{ hincque}$$

$$\text{fin.}\,\Phi^2 = \frac{cc}{aa + xx} \text{ et cof.}\,\Phi^2 = \frac{aa - cc + xx}{aa + xx}.$$

Sumtis logarithmis erit

$$2\, l\, \text{cof.}\,\Phi = l\, (aa - cc + xx) - l\, (aa + xx),$$

vnde differentiando fiet

$$\frac{\partial \Phi\, \text{fin.}\,\Phi}{\text{cof.}\,\Phi} = \frac{-x\, \partial x}{aa - cc + xx} + \frac{x\, \partial x}{aa + xx},$$

quo valore substituto prodit

$$\omega = a \int \frac{\partial x}{aa + xx} - a \int \frac{\partial x}{aa - cc + xx},$$

vbi pars prior manifesto fit

$$= \text{A tang.}\, \frac{x}{a} = \text{A tang.}\, \frac{\sqrt{(cc - aa\, \text{fin.}\,\Phi^2)}}{a\, \text{fin.}\,\Phi}.$$

Pro parte autem posteriore tres casus considerari conuenit, prouti fuerit vel $a > c$, vel $a < c$, vel $a = c$, quos singulos igitur percurramus.

Casus I.

$a > c.$

§. 13. Sit igitur primo $a > c$, ponaturque $aa - cc = bb$, eritque

$$\int \frac{a\,\partial x}{aa - cc + xx} = \int \frac{a\,\partial x}{bb + xx} = \frac{a}{b} \int \frac{b\,\partial x}{bb + xx},$$

cuius integrale est

$$\frac{a}{b}\,\text{A tang.}\,\frac{x}{b} = \frac{a}{b}\,\text{A tang.}\,\frac{\sqrt{(cc - aa\,\text{sin.}\,\Phi^2)}}{b\,\text{sin.}\,\Phi},$$

quocirca pro hoc casu habebimus

$$\omega = \text{A tang.}\,\frac{\sqrt{(cc - aa\,\text{sin.}\,\Phi^2)}}{a\,\text{sin.}\,\Phi} - \frac{a}{\sqrt{(aa - cc)}}\,\text{A tang.}\,\frac{\sqrt{(cc - aa\,\text{sin.}\,\Phi^2)}}{\text{sin.}\,\Phi\sqrt{(aa - cc)}} + C.$$

Pro constante C autem determinanda notetur, initio fieri tam $\omega = 0$ quam $\Phi = 0$, vnde concluditur $C = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a - \sqrt{(aa - cc)}}{\sqrt{(aa - cc)}}\right)$, quo valore inducto erit

$$\omega = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a - \sqrt{(aa - cc)}}{\sqrt{(aa - cc)}}\right) + \text{A tang.}\,\frac{\sqrt{(cc - aa\,\text{sin.}\,\Phi^2)}}{a\,\text{sin.}\,\Phi} - \frac{a}{\sqrt{(aa - cc)}}\,\text{A tg.}\,\frac{\sqrt{(cc - aa\,\text{sin.}\,\Phi^2)}}{\text{sin.}\,\Phi\sqrt{(aa - cc)}},$$

qui valor etiam ita referri potest:

$$\omega = \frac{a}{\sqrt{(aa - cc)}}\,\text{A tang.}\,\frac{\text{sin.}\,\Phi\sqrt{(aa - cc)}}{\sqrt{(cc - aa\,\text{sin.}\,\Phi^2)}} - \text{A tang.}\,\frac{a\,\text{sin.}\,\Phi}{\sqrt{(cc - aa\,\text{sin.}\,\Phi^2)}}.$$

Hoc igitur casu sin. Φ non vltra terminum $\frac{c}{a}$ augeri potest; quando autem fit sin. $\Phi = \frac{c}{a}$, tum fit angulus

$$\omega = \left(\frac{a}{\sqrt{(aa - cc)}} - 1\right) 90^\circ$$

et distantia $z = \sqrt{(aa - cc)}$.

§. 14. Hoc igitur casu angulus ω per solos arcus circulares, ideoque etiam per angulos definitur; vnde si modo hi anguli rationem teneant rationalem inter se, id quod euenit quoties $\frac{a}{\sqrt{(aa - cc)}}$ fuerit numerus rationalis, angulum ω geometrice definire licebit, sicque ipsa curua tractoria euadet algebraica, siue eius natura per aequationem algebraicam exprimi poterit. Haec igitur circumstantia vtique meretur, vt exemplo illustretur.

Exem-

Exemplum.

§. 15. Euoluamus igitur casum quo $\frac{a}{\sqrt{(aa-cc)}} = 2$, siue $c = \frac{a\sqrt{3}}{2}$: sic enim fiet $\sqrt{(aa-cc)} = \frac{1}{2}a$, hincque porro

$$\omega = 2 \text{ A tang. } \frac{\sin.\Phi}{\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}} - \text{A tang. } \frac{2\sin.\Phi}{\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}}.$$

Cum igitur in genere sit $2 \text{ A tang. } t = \text{A tang. } \frac{2t}{1-tt}$, nostro autem casu sit $t = \frac{\sin.\Phi}{\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}}$, erit

$$2 \text{ A tang. } \frac{\sin.\Phi}{\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}} = \text{A tang. } \frac{2\sin.\Phi\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}}{3-5\sin.\Phi^2},$$

ideoque erit

$$\omega = \text{A tang. } \frac{2\sin.\Phi\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}}{3-5\sin.\Phi^2} - \text{A tang. } \frac{2\sin.\Phi}{\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}}.$$

Cum porro sit $\text{A tang. } p - \text{A tang. } q = \frac{p-q}{1+pq}$, quia nostro casu est

$$p = \frac{2\sin.\Phi\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}}{3-5\sin.\Phi^2} \text{ et } q = \frac{2\sin.\Phi}{\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}}, \text{ erit}$$

$$p - q = \frac{2\sin.\Phi^3}{(3-5\sin.\Phi^2)\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}} \text{ et } 1+pq = \frac{3-\sin.\Phi^2}{3-5\sin.\Phi^2},$$

consequenter obtinebimus

$$\omega = \text{A tang. } \frac{2\sin.\Phi^3}{(3-\sin.\Phi^2)\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}}, \text{ ideoque}$$

$$\text{tang. } \omega = \frac{2\sin.\Phi^3}{(3-\sin.\Phi^2)\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}}.$$

Hoc igitur modo ex assumto angulo Φ colligitur angulus ω.

§. 16. Porro igitur cum pro hoc exemplo sit

$$z = a\cos.\Phi + \tfrac{1}{2}a\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)},$$

si ex puncto Z ad rectam CB ducatur normalis ZX, et pro Tractoria vocentur coordinatae $CX = x$ et $XZ = y$, fiet $x = z\cos.\omega$ et $y = z\sin.\omega$, sicque tam x quam y per eundem angulum Φ determinabitur. Ex tangente autem anguli ω concluditur

$$\sin.\omega = \frac{2\sin.\Phi^3}{3\cos.\Phi^2\sqrt{3}} \text{ et } \cos.\omega = \frac{(3-\sin.\Phi^2)\sqrt{(3-4\sin.\Phi^2)}}{3\cos.\Phi^2\sqrt{3}}.$$

Quodſi autem hinc ipſum angulum Φ eliminare vellemus, aequatio inter x et y ſine dubio ad plures dimenſiones aſſurgeret. Interim tamen conſtructio geometrica huius curuae non nimis eſt prolixa.

§. 17. Ad has formulas ſimpliciores reddendas ſtatuatur $\sqrt{(3-4\,\text{ſin.}\,\Phi^2)} = 2u\,\text{ſin.}\,\Phi$, vt fiat $z = a\,\text{coſ.}\,\Phi + a u\,\text{ſin.}\,\Phi$, et $\text{tang.}\,\omega = \frac{\text{ſin.}\,\Phi^2}{u(3-\text{ſin.}\,\Phi^2)}$; tum autem erit $\text{ſin.}\,\Phi^2 = \frac{3}{4(1+uu)}$, vnde fit $\text{tang.}\,\omega = \frac{1}{3+4uu}$. Deinde vero ob $\text{coſ.}\,\Phi^2 = \frac{1+4uu}{4(1+uu)}$ fiet $z = \frac{\sqrt{(1+4uu)}+u\sqrt{3}}{2\sqrt{(1+uu)}}$. Ponatur porro $\frac{u\sqrt{3}}{\sqrt{(1+4uu)}} = \text{coſ.}\,\theta$, erit $\text{ſin.}\,\theta = \sqrt{\frac{1+uu}{1+4uu}}$, vnde fit $\frac{z}{a} = \frac{1+\text{coſ.}\,\theta}{2\,\text{ſin.}\,\theta} = \frac{1}{2}\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}\theta$, deinde vero ob $uu = \frac{\text{coſ.}\,\theta^2}{3-4\,\text{coſ.}\,\theta^2}$ erit $\text{tang.}\,\omega = \frac{3-4\,\text{coſ.}\,\theta^2}{9-8\,\text{coſ.}\,\theta^2} = \frac{4\,\text{ſin.}\,\theta^2-1}{1+8\,\text{ſin.}\,\theta^2}$.

Caſus II.

$a < c$.

§. 18. Sit iam $a < c$, ponaturque $cc = aa + bb$, eritque

$$\omega = \text{A tang.}\,\frac{\sqrt{(cc-aa\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}{a\,\text{ſin.}\,\Phi} - a\int\frac{\partial x}{xx-bb}.$$

Eſt vero

$$\int\frac{a\,\partial x}{xx-bb} = \frac{a}{b}\int\frac{b\,\partial x}{xx-bb} = \frac{a}{2b}\,l\,\frac{x-b}{x+b}.$$

Cum igitur ſit $x = \frac{\sqrt{(cc-aa\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}{\text{ſin.}\,\Phi}$ et $b = \sqrt{(cc-aa)}$, hinc colligitur

$$\omega = C + \text{A tang.}\,\frac{\sqrt{(cc-aa\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}{a\,\text{ſin.}\,\Phi} - \frac{a}{2\sqrt{(cc-aa)}}\,l\,\frac{\sqrt{(cc-aa\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}-\text{ſin.}\,\Phi\sqrt{(cc-aa)}}{\sqrt{(cc-aa\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}+\text{ſin.}\,\Phi\sqrt{(cc-aa)}},$$

vbi quia initio fieri debet tam $\Phi = 0$ quam $\omega = 0$, erit conſtans $C = -\frac{\pi}{2}$, vnde fit

$$\omega = \frac{a}{2\sqrt{(cc-aa)}}\,l\,\frac{\sqrt{(cc-aa\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}+\text{ſin.}\,\Phi\sqrt{(cc-aa)}}{\sqrt{(cc-aa\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}-\text{ſin.}\,\Phi\sqrt{(cc-aa)}} - \text{A tang.}\,\frac{a\,\text{ſin.}\,\Phi}{\sqrt{(cc-aa\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}.$$

Manet autem vt ante $z = a\,\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{(cc-aa\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}$, vnde patet, has curuas ſemper eſſe tranſcendentes. Ceterum quia hic

hic $c > a$, euidens eſt, angulum Φ a o vsque ad 90° increſcere poſſe, cum primo caſu, vbi erat $c < a$, angulus Φ eo vsque tantum creſcere poterat, quoad fiat ſin. $\Phi = \frac{c}{a}$.

Caſus III.

$c = a$.

§. 19. Poſito autem $c = a$ ſtatim fit $z = 2a$ coſ. Φ et $\omega = a\int\frac{\partial x}{aa + xx} - \int\frac{a\,\partial x}{xx}$, ideoque

$$\omega = \text{A tang.}\ \frac{x}{a} + \frac{a}{x} + C = \text{A tang.}\ \frac{\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi} + \text{tang.}\ \Phi + C.$$

Hoc ergo modo determinata conſtante prodit $\omega =$ tang. $\Phi - \Phi$; vnde intelligitur, ſi angulus Φ increſcat vsque ad 90°, tum fore angulum $\omega = \infty$, ſcilicet hoc caſu filum per infinitas reuolutiones in circulo protrahi poterit. Tum autem denique fiet $z = 0$; vnde patet, confectis infinitis reuolutionibus corpuſculum tandem in ipſum centrum circuli peruenire, ibique in quiete eſſe permanſurum.

§. 20. Ceterum pro ſecundo caſu ſingulare phaenomenon ſeſe exſerit. Statim enim primae aequationi $aa + zz - 2az$ coſ. $\Phi = cc$ ſatisfieri manifeſtum eſt, ſi fuerit $\Phi = 90°$ et $z = \sqrt{(cc - aa)}$; tum autem angulus ω plane non determinatur; quia fit $\partial\omega = \frac{0}{0}$, et hoc caſu ipſa curua tractoria erit circulus etiam centro C radio $cc - aa$ deſcriptus: huius enim tangentes, ad circulum A C B productae, aequabuntur longitudini fili a; atque ad hunc caſum omnes reliqui motus poſt infinitas reuolutiones reducentur, ita vt hae Tractoriae tandem in circulum abeant. Neque tamen ex hac ſolutione ipſam formam harum Tractoriarum ſatis commode cognoſcere licet, vnde aliam ſolutionem ſubiungamus ad hunc ſcopum magis accommodatam.

Alia methodus
Tractorias ex circulo natas determinandi.

§. 21. Maneant denominationes ante adhibitae, ſcilicet longitudo fili $BA = ZT = a$, radius circuli $CA = CT = c$, diſtantia $CZ = z$, angulus $ACZ = \omega$ et angulus $CZT = \Phi$, vnde fit vt ante $\partial\omega = -\frac{\partial z}{z}\,\text{tang.}\,\Phi$. Nunc autem inſuper vocemus angulum $ZCT = \theta$, ad quem omnia elementa curvae reuocemus. Tandem etiam ſit angulus $ACT = \omega + \theta = \psi$, quandoquidem hoc modo ſtatim innoteſcet punctum T, quousque filum iam eſt protractum.

§. 22. His poſitis ex T ad rectam CZ agatur normalis TP, et ex triangulo CTP erit $TP = c\,\text{ſin.}\,\theta$ et $CP = c\,\text{coſ.}\,\theta$: at ex triangulo ZTP erit $TP = a\,\text{ſin.}\,\Phi$ et $ZP = a\,\text{coſ.}\,\Phi$, vnde ſtatim colligitur $z = a\,\text{coſ.}\,\Phi + c\,\text{coſ.}\,\theta$; tum vero $c\,\text{ſin.}\,\theta = a\,\text{ſin.}\,\Phi$, vnde $\text{ſin.}\,\Phi = \frac{c}{a}\,\text{ſin.}\,\theta$, $\text{coſ.}\,\Phi = \frac{\sqrt{(aa - cc\,\text{ſin.}\,\theta^2)}}{a}$ et $\text{tang.}\,\Phi = \frac{c\,\text{ſin.}\,\theta}{\sqrt{(aa - cc\,\text{ſin.}\,\theta^2)}}$. Differentiemus nunc binas illas aequationes, et prodibit

$$\text{I.}\quad -\partial z = a\,\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi + c\,\partial\theta\,\text{ſin.}\,\theta \quad \text{et}$$

$$\text{II.}\quad 0 = a\,\partial\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi - a\,\partial\theta\,\text{coſ.}\,\theta,$$

vnde combinatio: I. $\text{coſ.}\,\Phi$ — II. $\text{ſin.}\,\Phi$ praebet $-\partial z\,\text{coſ.}\,\Phi = c\,\partial\theta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\Phi + c\,\partial\theta\,\text{coſ.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\Phi = c\,\partial\theta\,\text{ſin.}\,(\theta + \Phi)$. At vero ex triangulo CAT habetur $CT : \text{ſin.}\,\theta = z : \text{ſin.}\,(\theta + \Phi)$, ideoque $\text{ſin.}\,(\theta + \Phi) = \frac{z\,\text{ſin.}\,\theta}{a}$: hoc ergo valore adhibito fiet $-\partial z\,\text{coſ.}\,\Phi = \frac{cz\,\partial\theta\,\text{ſin.}\,\theta}{a}$, ideoque $-\frac{\partial z}{z} = \frac{c\,\partial\theta\,\text{ſin.}\,\theta}{a\,\text{coſ.}\,\Phi}$.

§. 23. Ex hoc igitur valore nanciſcimur $\partial\omega = \frac{c\,\partial\theta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\Phi}{a\,\text{coſ}\,\Phi^2}$; erat autem $\text{ſin.}\,\Phi = \frac{c}{a}\,\text{ſin.}\,\theta$ et $\text{coſ.}\,\Phi^2 = \frac{aa - cc\,\text{ſin.}\,\theta^2}{aa}$, vnde rationationaliter angulum Φ ex calculo elidimus; prodibit enim

$$\partial\omega = \frac{cc\,\partial\theta\,\text{fin.}\,\theta^2}{aa - cc\,\text{fin.}\,\theta^2} = -\partial\theta + \frac{aa\,\partial\theta}{aa - cc\,\text{fin.}\,\theta^2},$$

vnde cum fit $\partial\omega + \partial\theta = \partial\psi$, erit

$$\partial\psi = \frac{aa\,\partial\theta}{aa - cc\,\text{fin.}\,\theta^2} + \frac{aa\,\partial\theta}{aa\,\text{cof.}\,\theta^2 + (aa - cc)\,\text{fin.}\,\theta^2}.$$

§. 24. Hinc euoluamus primo casum quo $a > c$, ac ponamus breuitatis gratia $aa - cc = bb$, vt habeamus $\partial\psi = \frac{aa\,\partial\theta}{aa\,\text{cof.}\,\theta^2 + ba\,\text{fin.}\,\theta^2}$, pro cuius integrali inueniendo ponamus $\frac{b\,\text{fin.}\,\theta}{a\,\text{cof.}\,\theta} = t$, eritque $\partial t = \frac{ab\,\partial\theta}{aa\,\text{cof.}\,\theta^2}$; tum vero etiam $1 + tt = \frac{aa\,\text{cof.}\,\theta^2 + bb\,\text{fin.}\,\theta^2}{aa\,\text{cof.}\,\theta^2}$, ideoque $\frac{\partial t}{1+tt} = \frac{ab\,\partial\theta}{aa\,\text{cof.}\,\theta^2 + bb\,\text{fin.}\,\theta^2} = \frac{b\,\partial\psi}{a}$, hinc integrando $\frac{b\psi}{a} = \text{A tang.}\,t$, quamobrem hinc angulus $ACT = \psi$ ita fuccincte exprimitur, vt fit

$$\psi = \frac{a}{b}\,\text{A tang.}\,\frac{b\,\text{fin.}\,\theta}{b\,\text{cof.}\,\theta}.$$

§. 25. Pro hoc ergo cafu, quo $aa - cc = bb$, ex folo angulo θ omnia elementa, quae ad curuam pertinent, fequenti modo fatis concinne exprimuntur: 1.) Pro angulo Φ inuenimus $\text{fin.}\,\Phi = \frac{c}{a}\,\text{fin.}\,\theta$. 2.) Diftantia $CZ = z = a\,\text{cof.}\,\Phi + c\,\text{cof.}\,\theta$, fiue $z = \sqrt{aa - cc\,\text{fin.}\,\theta^2} + \text{cof.}\,\theta$. Pro angulo $ACT = \psi$, prodiit $\psi = \frac{a}{b}\,\text{A tang.}\,\frac{b\,\text{fin.}\,\theta}{a\,\text{cof.}\,\theta}$, fiue $\psi = \frac{a}{b}\,\text{A tang.}\,\frac{b}{a}\,\text{tang.}\,\theta$, ita vt fit $\frac{b\psi}{a} = \text{A tang.}\,\frac{b}{a}\,\text{tang.}\,\theta$ et hinc $\text{tang.}\,\frac{b\psi}{a} = \frac{b}{a}\,\text{tang.}\,\theta$. Nunc igitur facile erit pro angulo θ valores continuo maiores fubftituere, indeque pro fingulis tam diftantiam z quam angulum ψ affignare. Hinc autem ftatim patet, fumto $\theta = 0$ fore 1.) $\Phi = 0$. 2.) $z = a + c$. 3.) $\psi = 0$.

§. 26. Hae igitur formulae imprimis idoneae ſunt ad curuam conſtruendam, ac fere ſufficiet angulos θ continuo per 90° vel ſaltem per 45° creſcentes aſſumere. Quod ſi enim breuitatis gratia angulos α, β, γ ita capiamus, vt ſit ſin. $\alpha = \frac{c}{a\sqrt{2}}$, tang. $\beta = \frac{b}{a}$ et ſin. $\gamma = \frac{c}{a}$, omnes valores ad curuam conſtruendam neceſſarii in ſequenti tabella exhibentur.

θ	Φ	z	ψ
0°	0°	$a + c$	0
45	α	a coſ. $\alpha + \frac{c}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{b}\,\beta$
90	γ	a coſ. γ	$\frac{a}{b}\,90^\circ$
135	α	a coſ. $\alpha - \frac{c}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{b}(180 - \beta)$
180	0	$a - c$	$\frac{a}{b}\,180$
225	$-\alpha$	a coſ. $\alpha - \frac{c}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{b}(180 + \beta)$
270	$-\gamma$	a coſ. γ	$\frac{a}{b}\,270$
315	$-\alpha$	a coſ. $\alpha + \frac{c}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{b}(360 - \beta)$
360	0	$a + c$	$\frac{a}{b}\,360$
405	α	a coſ. $\alpha + \frac{c}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{b}(360 + \beta)$
450	γ	a coſ. γ	$\frac{a}{b}\,450$
495	α	a coſ. $\alpha - \frac{c}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{b}(540 - \beta)$
540	0	$a - c$	$\frac{a}{b}\,540$
585	$-\alpha$	a coſ. $\alpha - \frac{c}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{b}(540 + \beta)$
630	$-\gamma$	a coſ. γ	$\frac{a}{b}\,630$
675	$-\alpha$	a coſ. $\alpha + \frac{c}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{b}(720 - \beta)$
720	0	$a + c$	$\frac{a}{b}\,720$

Vnde patet, quo maior fuerit fractio $\frac{a}{b}$, tum numerum reuolutionum anguli ψ eo magis multiplicari pro iisdem angulis θ;

Ac

ac si fuerit $b = 0$, ideoque $a = 0$, qui erat tertius casus, tum numerum reuolutionum anguli ψ iam fieri infinitum, dum angulus θ tantum vsque ad 90° augetur.

§. 27. Sin autem fuerit $aa < cc$, ponamus $cc - aa = bb$, tum erit $\partial\psi = \frac{aa\partial\theta}{aa\,cos.\theta^2 - bb\,sin.\theta^2}$. Ponatur $\frac{b\,sin.\theta}{a\,cos.\theta} = u$, eritque $\partial u = \frac{ab\partial\theta}{aa\,cos.\theta^2}$ et $1 - uu = \frac{aa\,cos.\theta^2 - bb\,sin.\theta^2}{aa\,cos.\theta^2}$, vnde fit

$$\frac{\partial u}{1 - uu} = \frac{ab\partial\theta}{aa\,cos.\theta^2 - bb\,sin.\theta^2} = \frac{b\partial\psi}{a},$$

hincque integrando colligitur $\frac{b\psi}{a} = \frac{1}{2}l\frac{1+u}{1-u}$, ex quo adipiscimur $\psi = \frac{a}{2b}l\frac{a\,cos.\theta + b\,sin.\theta}{a\,cos.\theta - b\,sin.\theta}$; vbi patet, quia valorem ipsius u non vltra vnitatem augere licet, angulum θ nunquam maiorem euadere posse, quam donec fiat tang. $\theta = \frac{a}{b}$, quippe quo casu angulus ψ iam in infinitum increscit; atque hinc simul intelligitur, si fuerit $b = 0$, siue $a = c$, tum ob $\partial\psi = \frac{\partial\theta}{cos.\theta^2}$, fore $\psi =$ tang. θ, qui erat tertius casus ante commemoratus.

§. 28. Quoniam igitur, si filum corpusculo alligatum per peripheriam circuli circumducitur, Tractoria semper assignari et construi potest, videamus cuiusmodi forma Riccatianae similis huic casui respondeat.

§. 29. Vt igitur hunc casum ad figuram supra consideratam accommodemus, rectae B A C normaliter iungamus rectam C D, in eamque tam ex Z quam ex T, perpendicula Z X et T U demittamus, sitque, vt supra posuimus, C X $= x$ et X Z $= y$; tum vero C U $= u$ et U T $= t$, statuaturque porro $\partial y = p\partial x$, quibus positis supra deducti fuimus ad hanc aequationem: $\frac{a\partial p}{\sqrt{1 + pp}} + p\partial u = \partial t$, quae posito $p = \frac{qq - 1}{2q}$ transformatur Tab. I. Fig. 4.

formatur in hanc rationalem: $a\partial q + \frac{1}{2}(qq - 1)\partial u = q\partial t$, siue $a\partial q - q\partial t + \frac{1}{2}qq\partial u = \frac{1}{2}\partial u$. Pro praesente autem casu, ob angulum $ACZ = \omega$ et $CZ = z$, fit $x = z$ sin. ω et $y = z$ cos. ω. Deinde ob $CT = t$ et angulum $ACT = \psi$, erit $u = c$ sin. ψ et $t = c$ cos. ψ; praeterea vero habebimus

$$\partial x = \partial z \,\text{sin.}\,\omega + z\partial\omega \,\text{cos.}\,\omega \text{ et}$$

$$\partial y = \partial z \,\text{cos.}\,\omega - z\partial\omega \,\text{sin.}\,\omega, \text{ vnde fit}$$

$$p = \frac{\partial z \,\text{cos.}\,\omega - z\partial\omega \,\text{sin.}\,\omega}{\partial z \,\text{sin.}\,\omega + z\partial\omega \,\text{cos.}\,\omega}.$$

Erat autem $\frac{\partial z}{z} = -\frac{c\partial\theta \,\text{sin.}\,\theta}{a \,\text{cos.}\,\Phi}$, vnde nanciscimur

$$p = \frac{-c\partial\theta \,\text{sin.}\,\theta \,\text{cos.}\,\omega - a\partial\omega \,\text{cos.}\,\Phi \,\text{sin.}\,\omega}{-c\partial\theta \,\text{sin.}\,\theta \,\text{sin.}\,\omega + a\partial\omega \,\text{cos.}\,\Phi \,\text{cos.}\,\omega}.$$

Quia autem repertum est $\partial\omega = \frac{c\partial\theta \,\text{sin.}\,\theta \,\text{sin.}\,\Phi}{a \,\text{cos.}\,\Phi^2}$, erit exclusis differentialibus

$$p = \frac{\text{cos.}\,\omega \,\text{cos.}\,\Phi + \text{sin.}\,\omega \,\text{sin.}\,\Phi}{\text{sin.}\,\omega \,\text{cos.}\,\Phi - \text{cos.}\,\omega \,\text{sin.}\,\Phi} = \frac{\text{cos.}\,(\omega - \Phi)}{\text{sin.}\,(\omega - \Phi)} = \text{cot.}\,(\omega - \Phi),$$

tum vero, ob $q = p + \sqrt{(1 + pp)}$, erit nunc

$$q = \frac{1 + \text{cos.}\,(\omega - \Phi)}{\text{sin.}\,(\omega - \Phi)} = \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}(\omega - \Phi).$$

Hocque modo valor quantitatis q satis simpliciter per angulos ω et Φ exprimitur. Deinde vero ex valoribus pro t et u inventis erit $\partial t = -c\partial\psi$ sin. ψ et $\partial u = c\partial\psi$ cos. ψ, sicque formula nostra Riccatiana ita se habebit:

$$a\partial q + cq\partial\psi \,\text{sin.}\,\psi + \tfrac{1}{2}cqq\partial\psi \,\text{cos.}\,\psi = \tfrac{1}{2}c\partial\psi \,\text{cos.}\,\psi,$$

inuoluens duas tantum variabiles q et angulum ψ.

§. 30. Vicissim igitur, quoties occurrit huiusmodi aequatio differentialis resoluenda:

$$a\partial q + cq\partial\psi \,\text{sin.}\,\psi + \tfrac{1}{2}cqq\partial\psi \,\text{cos.}\,\psi = \tfrac{1}{2}c\partial\psi \,\text{cos.}\,\psi,$$

eius resolutio in nostra erit potestate, quandoquidem nouimus fore $q = \text{cot.}\,\frac{1}{2}(\omega - \Phi)$; quomodo autem anguli ω et Φ ab angulo ψ pendeant, ex superioribus est manifestum. Primo enim

enim eſt $\psi = \omega + \theta$; tum vero $a\,\text{ſin}.\,\Phi = c\,\text{ſin}.\,\theta$; denique vero inuenimus $\psi = \int \frac{a\,a\,\partial\,\theta}{a\,a\,\text{coſ}.\,\theta^2 + (a\,a - c\,c)\,\text{ſin}.\,\theta^2}$, cuius ope primo ex angulo ψ reperitur angulus θ, hincque porro angulus Φ ex formula $\text{ſin}.\,\Phi = \frac{c}{a}\,\text{ſin}.\,\theta$, ac tandem $\omega = \psi - \theta$. Ex his igitur angulus $(\omega - \Phi)$, per quem quantitas q exprimitur, erit $= \psi - \Phi - \theta$. Hunc in finem prolongetur recta Z T in S, et quia angulus C T S $= \theta + \Phi$ et C T U $= \psi$, erit angulus U T S $= \theta + \Phi - \psi$, ita vt iam ſit $q = -\,\text{cot}.\,\frac{1}{2}$ U T S.

§. 31. Quo hanc formulam Riccatianam ſimpliciorem reddamus, ponamus $c = 2\,n\,a$, vt prodeat

$$\partial q + 2\,n\,q\,\partial\,\psi\,\text{ſin}.\,\psi + n\,q\,q\,\partial\,\psi\,\text{coſ}.\,\psi = n\,\partial\,\psi\,\text{coſ}.\,\psi,$$

quam vt ab angulis liberemus, ponamus $\text{coſ}.\,\psi = s$, ita vt $\text{ſin}.\,\psi = \sqrt{(1 - s\,s)}$, eritque aequatio

$$\partial\,q - 2\,n\,q\,\partial\,s - \frac{n\,q\,q\,s\,\partial\,s}{\sqrt{(1 - s\,s)}} = - \frac{n\,s\,\partial\,s}{\sqrt{(1 - s\,s)}},$$

vel ſi ponamus $\text{ſin}.\,\psi = r$, prodibit haec forma:

$$\partial\,q - \frac{2\,n\,q\,r\,\partial\,r}{\sqrt{(1 - r\,r)}} + n\,q\,q\,\partial\,r = n\,\partial\,r.$$

Quod ſi ponamus $q = v + \frac{r}{\sqrt{(1 - r\,r)}}$, prodibit iſta aequatio:

$$\partial v + n\,v\,v\,\partial R = n\,\partial\,r - \frac{n\,r\,r\,\partial\,r}{1 - r\,r} + \frac{2\,n\,r\,r\,\partial\,r}{\sqrt{(1 - r\,r)}} - \frac{\partial\,r}{(1 - r\,r)^{\frac{3}{2}}},$$

cuius ergo reſolutionem ope noſtrae Tractoriae expedire licet.

§. 32. Reducamus eandem aequationem tantum ad ternos terminos, ponendo $q = e^{-2\,n\,\sqrt{(1 - r\,r)}}\,v$, ac peruenietur ad hanc formam:

$$\partial\,v + n\,e^{-2\,n\,\sqrt{(1 - r\,r)}}\,v\,v\,\partial\,r = n\,e^{2\,n\,\sqrt{(1 - r\,r)}}\,\partial\,r$$

quae porro, ponendo $\sqrt{(1 - r\,r)} = s$, induet hanc formam:

$$\partial v - n e^{-2ns} \frac{v v s \partial s}{\sqrt{(1-ss)}} + \frac{n e^{+2ns} s \partial s}{\sqrt{(1-ss)}} = 0.$$

Hae autem formulae ita comparatae videntur, vt per ſolitas methodos haud facile tractari queant.

Animaduerſiones generales in hunc motum tractorium.

§. 33. In hoc motu tractorio aſſumitur, corpuſculum quouis momento ſecundum ipſam fili directionem protrahi, quod quidem per principia mechanica eueniret, ſi corpuſculum quouis momento quieſceret, vel iam motum ſecundum eandem directionem habuiſſet, quod poſterius autem locum habere nequit, quandoquidem directionem motus continuo mutari aſſumimus; vnde patet, iſtam deſcriptionem per motum tractorium locum plane habere non poſſe, niſi quouis momento motus corpuſculo impreſſus ſubito rurſus extinguatur. Quod cum principiis motus directe aduerſetur, manifeſtam eſt talem motum tractorium in natúra neutiquam produci poſſe, niſi forte frictio infinite magna ſtatuatur.

§. 34. Vulgo quidem talis motus facile obtineri poſſe videtur, cum, experentia teſte, omnia corpora, quae in ſuperficie plana protrahi ſolent, eo ipſo momento, quo vis trahens ceſſat, ſubito ad quietem redigi cernuntur, quemadmodum currus ab equis protracti, ſimulac vis trahens ceſſat, ſubito ſubſiſtere ſolent; vnde plures philoſophi principiorum motus ignari concludere ſunt conati, omnia corpora niſu eſſe praedita ſeſe ad ſtatum quietis accommodandi. Quam abſurda autem ſit talis opinio nunc quidem non amplius probatione eget.

§. 35.

§. 35. Interim tamen, experientiam consulentes, negare non possumus, quin corpora, super plano tantillum aspero producta, quasi eo ipso momento omnem motum perdant, quo vis trahens cessauerit, quod certe nullo modo euenire posset, si planum perfecte esset politum, vt omnis frictio excluderetur, quippe quo casu corpus adeo motu semel acquisito perpetuo vniformiter esset progressurum; ex quo statim intelligitur, phaenomenon allatum nulli caussae, praeter frictionem adscribi posse.

§. 36. Neque vero etiam hoc modo omnibus difficultatibus occurri potest, dum ex motus principiis certum est, nullum plane motum a frictione, quantumuis fuerit magna, subito, atque eo ipso momento, quo vis trahens cessat, destrui posse, sed ad hoc semper aliquod tempus requiri, quantumuis id fuerit exiguum; ita vt certe affirmare debeamus, nullum plane motum frictione subito ad quietem redigi posse, ac si tale tempus sentiri nequeat, id ita esse exiguum, vt obseruari non possit.

§. 37. Quo igitur omnia dubia, quae in hoc negotio se produnt, clarius diluamus, consideremus corpus, quod super plano horizontali acceperit celeritatem $= c$, ac videamus quanto tempore opus sit, vt iste motus a frictione penitus extinguatur. Fuerit igitur istud corpus eo momento, quo vis sollicitans cessauit, in A, vnde celeritate sua c vlterius progredi conetur. Peruenerit igitur post tempus $= t$ vsque in p, confecto spatio $AP = s$, sitque massa corporis $= M$, et vis frictionis $= F$, celeritas autem in P vocetur $= v$, eritque $\partial v = -\frac{2gF}{M}\partial t$, vnde colligitur $v = C - \frac{2gFt}{M}$. Fiat nunc $v = 0$ ac reperietur tempus, quo hoc euenire potest, $t = \frac{Mc}{2gF}$, quod in minutis secundis exprimetur, si g fuerit altitudo, per quam Tab. I. Fig. 5.

 grauia

grauia vno minuto ſecundo delabuntur, celeritas autem c per ſpatium vno minuto ſecundo percurrendum exprimatur. Hine igitur ſi frictio, vt vulgo ſumi ſolet, tertiae parti ponderis M aequetur, vt ſit $F = \frac{1}{3} M$, erit tempus quo motus penitus extinguitur $= \frac{3c}{2g}$, vnde cum propemodum ſit $g = 16$ ped. Londin. et c in iisdem pedibus exprimatur, fiet $t = \frac{3}{32} c$ ped.

§. 38. Plerumque autem in huiusmodi motibus tractoriis celeritas corporibus impreſſa c tam exigua eſſe ſolet, vt tempuſculum ad motus extinctionem requiſitum t ſenſus noſtros effugiat. Si enim celeritati c pes integer tribuatur, tempus iſtud tantum erit $\frac{3}{32}$, ideoque nequidem decima pars minuti ſecundi, quod nemo facile obſeruare poteſt. Verum ſi quis forte tale tempuſculum animaduerti poſſe contendat, probe hic perpendendum, nullam vim trahentem ita ſubito ceſſare poſſe, quemadmodum in hoc calculo ſuppoſuimus, ſed potius paullatim ad nihilum redigi; vnde mirum non eſt ſi hoc tempuſculum plane non obſeruare licet, quoniam motus extinctio iam ante incepit, quam vis trahens ad nihilum fuit perducta.

§. 39. Ex his iam intelligitur, tales curuas, quales hactenus per calculum ſunt definitae, produci non poſſe, niſi ſuper plano horizontali ſatis aſpero; praeterea vero imprimis neceſſe eſſe vt motus, quo filum protrahitur, ſit non ſolum lentiſſimus, ſed etiam per interualla temporis quam minima penitus ſiſtatur et quaſi per ſaltus peragatur. Statim enim ac motus fili fuerit continuus, curua, quam corpuſculum deſcribet, plurimum aberrabit a Tractoria vulgari: cuiusmodi autem curvam ſit deſcripturum, ſi filum motu continuo protrahatur, quaeſtio eſt maxime ardua, cui reſoluendae Analyſis vix ſufficere videtur, ad quod oſtendendum caſum ſaltem ſimpliciſſimum,

quo

quo filum super plano horizontali iuxta lineam rectam vniformiter protrahitur, euoluamus.

De vera curua tractoria, dum filum per lineam rectam vniformiter protrahitur.

§. 40. Protrahatur igitur filum per lineam rectam A D celeritate $= c$, et elapso tempore $= t$ perductum sit vsque in T, dum motus inceperit in puncto A, eritque spatium $AT = ct$, corpusculum autem nunc sit in Y, ita vt fili longitudo sit $TY = a$. Vocemus autem angulum $ATY = \theta$, vnde demisso ex Y perpendiculo Y X erit $TX = a \cos.\theta$ et $YX = a \sin.\theta$, ita vt positis coordinatis $AX = x$ et $XY = y$, sit Tab. I. Fig. 6.

$$x = Ct - a \cos.\theta; \quad \partial x = c\,\partial t + a\,\partial\theta \sin.\theta,$$
$$y = a \sin.\theta \quad ; \quad \partial y = a\,\partial\theta \cos.\theta.$$

Ponamus autem porro $\frac{\partial y}{\partial x} = \text{tang.}\,\Phi$, ita vt Φ denotet angulum, sub quo elementum curuae descriptae Yy ad axem A B inclinatur, ita vt sit tang. $\Phi = \frac{a\,\partial\theta \cos.\theta}{c\,\partial t + a\,\partial\theta \sin.\theta}$.

§. 41. Denotet nunc M massam seu pondus corpusculi, et ponatur tensio fili $TY = T$, quae ergo est vis, qua corpusculum a filo protrahitur, quae secundum directiones coordinatarum resoluta praebet vim secundum $AX = T \cos.\theta$, et vim secundum $XY = T \sin.\theta$, vbi notandum est hanc vim T adhuc esse incognitam. Praeterea vero etiam corpusculum a frictione sollicitatur, cuius vis sit $= F$, quae cum semper directioni motus sit contraria, eius directio erit yY, quae ergo resoluta praebet vim secundum $AX = -F \cos.\Phi$ et vim secundum $XY = -F \sin.\Phi$. His igitur viribus colligendis sumto elemento temporis ∂t constante principia motus sequentes suppeditant aequationes:

I.)

I.) $\frac{M \partial \partial x}{2 g \partial t^2} = T$ cof. θ — F cof. Φ.

II.) $\frac{M \partial \partial y}{2 g \partial t^2} = -$ T fin. θ — F fin. Φ.

§. 42. Elidamus hinc ftatim tenfionem fili T, vtpote incognitam, et haec combinatio: I. fin. θ + II. cof. θ dabit hanc aequationem:

$$\frac{M (\partial \partial x \sin. \theta + \partial \partial y \cos. \theta)}{2 g \partial t^2} = - F (\cos. \Phi \sin. \theta + \sin. \Phi \cos. \theta)$$
$$= - F \sin. (\Phi + \theta).$$

Statuamus nunc breuitatis gratia $\frac{2 g F}{M} = b$; vbi notetur, g exprimere altitudinem lapfus grauium pro vno minuto fecundo, et fractionem $\frac{F}{M}$ vulgo aeftimari $= \frac{1}{3}$; ficque tota quaeftio reducta eft ad refolutionem huius aequationis:

$$\frac{\partial \partial x \sin \theta + \partial \partial y \cos \theta}{\partial t^2} = - b (\sin. \theta \cos. \Phi + \cos. \theta \sin. \Phi).$$

Cum autem fit

$$\partial \partial x = a \partial \partial \theta \sin. \theta + a \partial \theta^2 \cos. \theta \text{ et}$$
$$\partial \partial y = a \partial \partial \theta \cos. \theta - a \partial \theta^2 \sin. \theta,$$

aequatio refoluenda induet hanc formam:

$$\frac{a \partial \partial \theta}{\partial t^2} + b (\sin. \theta \cos. \Phi + \cos. \theta \sin. \Phi) = 0,$$

ex qua angulus Φ facile eliminatur per formulas

$$\sin. \Phi = \frac{a \partial \theta \cos. \theta}{\sqrt{(c c \partial t^2 + 2 a c \partial t \partial \theta \sin. \theta + a a \partial \theta^2)}} \text{ et}$$
$$\cos. \Phi = \frac{c \partial t + a \partial \theta \sin. \theta}{\sqrt{(c c \partial t^2 + 2 a c \partial t \partial \theta \sin. \theta + a a \partial \theta^2)}}.$$

His enim valoribus fubftitutis habebimus

$$\frac{a \partial \partial \theta}{\partial t^2} + \frac{b (a \partial \theta + c \partial t \sin. \theta)}{\sqrt{(c c \partial t^2 + 2 a c \partial t \partial \theta \sin. \theta + a a \partial \theta^2)}} = 0.$$

§. 43. Antequam autem refolutionem huius aequationis fufcipiamus, perpendamus cafum, quo frictio plane euanefcit

cit, ita vt fit $b = 0$, ac motus totus continebitur in hac fimplicifflima aequatione: $\frac{a\,\partial\,\partial\,\theta}{\partial\,t^2} = 0$, hinc $\frac{a\,\partial\,\theta}{\partial\,t} =$ conft. hoc eft celeritas angularis erit conftans, quae, quoniam angulus θ continuo minuitur, ponatur $\frac{a\,\partial\,\theta}{\partial\,t} = -f$, vnde fit $a\,\theta = k - f\,t$. Hinc fi ponamus initio, vbi $t = 0$, filum tenuiffe fitum A C normalem ad axem, ita vt tum fuerit $\theta = 90^\circ$, erit $k = a \,.\, 90^\circ$, ideoque $\theta = 90 - \frac{f}{a} \,.\, t$. Denotabit ergo $\frac{f}{a}$ certum angulum, qui fit $= \alpha$, ita vt habeamus $\theta = 90^\circ - \alpha\,t$, quo inuento habebimus $x = c\,t - a$ fin. $\alpha\,t$ et $y = a$ cof. $\alpha\,t$, hincque porro $\frac{\partial\,x}{\partial\,t} = c - a\,\alpha$ cof. $\alpha\,t$ et $\frac{\partial\,y}{\partial\,t} = -a\,\alpha$ fin. $\alpha\,t$. Vnde fi initio corpufculum in C quieuiffe fumamus, tam $\frac{\partial\,x}{\partial\,t}$ quam $\frac{\partial\,y}{\partial\,t}$ ibi euanuiffe neceffe eft, cui conditioni fatisfit fi fumatur $\alpha = \frac{c}{a}$, ita vt fit $\theta = 90^\circ - \frac{c\,t}{a}$, hincque

$$x = c\,t - a \text{ fin. } \frac{c\,t}{a} \text{ et } y = a \text{ cof. } \frac{c\,t}{a}.$$

Ex pofteriore fit $\frac{c\,t}{a} =$ A cof. $\frac{y}{a}$, quo valore fubftituto fiet

$$x = a \text{ A cof. } \frac{y}{a} - \sqrt{(a\,a - y\,y)},$$

vnde patet hanc curuam fore cycloidem inuerfam, a circulo, cuius radius $= a$, fub recta C D axi parallela, voluente defcriptam, cuius cufpis in ipfo pucto C fit fita.

§. 44. Contemplemur etiam cafum oppofitum, quo frictio effet infinita, ideoque $b = \infty$, et in noftra aequatione primum membrum prae altero euanefcet, eritque $a\,\partial\,\theta + c\,\partial\,t$ fin. $\theta = 0$, vnde fit $c\,\partial\,t = -\frac{a\,\partial\,\theta}{\text{fin.}\,\theta}$ et integrando $c\,t = -a\,l$ tang. $\frac{1}{2}\,\theta + $ C. Vnde fi pro $t = 0$ fuerit $\theta = 90^\circ$, erit C $= 0$ ideoque $c\,t = + a\,l$ cot. $\frac{1}{2}\,\theta$, ideoque $x = a\,l$ cot. $\frac{1}{2}\,\theta - a$ cof. θ, exiftente $y = a$ fin. θ, ex quibus formulis manifefto deducitur Tractoria vulgaris. Cum enim ob $c\,\partial\,t = -\frac{a\,\partial\,\theta}{\text{fin.}\,\theta}$, fit $\partial\,x = -\frac{a\,\partial\,\theta\,\text{cof.}\,\theta^2}{\text{fin.}\,\theta}$ et $\partial\,y = a\,\partial\,\theta$ cof. θ, erit $\frac{\partial\,y}{\partial\,x} = -$ tang. θ, vnde patet ipfum fi-ſum Y T eſſe tangentem curuae. Ex hoc iam intelligitur, quod ſupra obſeruauimus, Tractorias vulgares tum demum prodire, quando frictio eſt infinite quaſi magna, vel, quod eodem redit, quando vis trahens frictionem quam minime ſuperat.

§. 45. His praemiſſis videamus quomodo aequationem ſupra inuentam tractari conueniat. Ac primo quidem eam ad differentialem primi gradus reduci conueniet, quod fiet ſi ponatur $\partial t = \frac{\partial \theta}{p}$. Quia enim ∂t conſtans eſt aſſumtum, hinc fiet $\partial \partial \theta = \frac{\partial \theta \partial p}{p}$, quibus valoribus ſubſtitutis aequatio noſtra hanc induet formam:

$$\frac{a p \partial p}{\partial \theta} + \frac{b (a p + c \sin. \theta)}{\sqrt{(c c + 2 a c p \sin. \theta + a a p p)}} = 0,$$

quae autem quomodo ad integrabilitatem perduci queat nullo modo patet.

§. 46. Eam quidem ab irrationalitate liberare haud eſt difficile. Ponatur enim $\frac{a p + c \sin \theta}{c \cos. \theta} = \text{tang.}\, \omega$, ita vt ſit

$$p = \frac{c \cos. \theta \,\text{tang.}\, \omega - c \sin. \theta}{a}, \text{ vnde fit}$$

$$a p = \frac{c \sin. (\omega - \theta)}{\cos. \omega} \text{ et}$$

$$\partial p = -\tfrac{1}{a} (c \partial \theta \sin. \theta \,\text{tang.}\, \omega - \frac{c \partial \omega \cos. \theta}{\cos. \omega^2} + c \partial \theta \cos. \theta)$$

$$= + \frac{c \partial \omega \cos. \theta}{a \cos. \omega^2} - \frac{c \partial \theta}{a} \frac{\cos. (\theta - \omega)}{\cos. \omega},$$

formula autem irrationalis ſequentem induet formam: $\frac{c \cos. \theta}{\cos. \theta}$. Subſtituantur igitur iſti valores atque emerget ſequens aequatio:

$$\frac{a c \partial \omega \cos. \theta^2}{a \cos. \omega^3} - \frac{c c \partial \theta \cos. \theta \cos. (\theta - \omega)}{a \cos. \omega^2} + b \partial \theta + \frac{b \partial \theta \sin. \theta \cos. \omega}{\sin. (\omega - \theta)} = 0,$$

quae porro transformatur in hanc:

$$c c \partial \omega \cos. \theta - c c \partial \theta \cos. (\omega - \theta) \cos. \omega + \frac{a b \partial \theta \cos. \omega^3 \sin. \omega}{\sin. (\omega - \theta)} = 0.$$

Statu-

Statuatur porro $\frac{ab}{cc} = n$, eritque

$$\partial \omega \cos. \theta - \partial \theta \cos. \omega \cos. (\omega - \theta) + \frac{n \partial \theta \cos. \omega^2 \sin. \omega}{\sin. (\omega - \theta)} = 0.$$

Quanquam autem haec aequatio satis prodiit concinna tamen haud patet quomodo eam vlterius resoluere liceat; vnde haec quaestio vires analyseos superare videtur. Multo minus tales quaestiones suscipi poterunt, si filum per lineam curuam vel etiam motu non vniformi protrahatur. Quamobrem tales quaestiones prorsus relinquere cogimur.

DE CVRVIS TRACTORIIS COMPOSITIS.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 14. *Aug.* 1775.

§. 1.

Quando filo, cuius alter terminus ſuper plano horizontali per datam viam protrahitur, duo pluraue corpuſcula fuerint alligata, ita vt ſingula per curuas peculiares procedant, iſtae curuae *Tractoriae compoſitae* ſunt appellatae, quas hic ſimili modo, quo nuper Tractorias ſimplices tractaui, accuratius inveſtigare conſtitui.

§. 2. Primum autem hic obſeruo, ſi hanc quaeſtionem ſecundum principia mechanica, quorſum ea vtique proprie eſt referenda, euoluere vellemus, tunc quidem facile ad formulas differentiales ſecundi gradus perduceremur, quas autem nullo adhuc modo ob defectum Analyſeos reſoluere licet. Hinc iſtam quaeſtionem a Mechanica ad puram Geometriam ſimili modo ſum translaturus, quo Geometrae Tractoriam vulgarem contemplari ſunt ſoliti. Loco ſcilicet verorum principiorum motus hic ſubſtituam hanc Hypotheſin: quod viribus ſollicitantibus non accelerationes quibus ſingula corpuſcula promouentur, ſed ipſa ſpatiola tempuſculo minimo deſcripta, ſint proportionalia, cuiusmodi motum eſſent ſecutura, ſi quovis

vis momento motus iam genitus subito destrueretur et continuo de nouo generari deberet, quemadmodum vere eueniret, si frictio esset infinite magna. Iam olim quidem a Marchione Hospitalio in Analysi infinitorum tangentes huiusmodi curuarum definitae reperiuntur; non autem memini vtrum prorsus eadem Hypothesi sit vsus. Ceterum autem istas curuas accuratius hic determinare conabor, quo magis pateat, quantis difficultatibus huiusmodi quaestiones, quae primo intuitu faciles videantur, adhuc sint obuolutae.

Problema I.

Si filum duobus corpusculis A et B fuerit onustum, eiusque terminus R super plano horizontali iuxta lineam rectam I O protrahatur, inuestigare ambas curuas, quas haec duo corpuscula describent. Tab. I. Fig. 7.

Solutio.

§. 3. Elapso tempore t filum cum corpusculis iam perductum sit in situm A B R, sintque fili portiones $AB = a$ et $BR = b$, dum litterae maiusculae A et B exprimunt massam vtriusque corporis. Hinc ad rectam I O, tanquam ad axem, ducantur perpendicula A P et B Q, ponanturque coordinatae vtriusque curuae $IP = x$, $PA = y$ et $IQ = x'$, $QB = y'$; pro puncto R autem sit spatium $IR = x''$, existente $y'' = 0$. Praeterea vero vocemus angulos $PAB = p$ et $QBR = q$, ac manifestum est fore $IQ = x' = x + a \sin. p$ et $QB = y' = y - a \cos. p$; tum vero $x'' = x + a \sin. p + b \sin. q$ et $y'' = y - a \cos. p - b \cos. q = 0$. Hinc ergo sumtis differentialibus erit

$$\partial x' = \partial x + a \partial p \cos. p,$$
$$\partial y' = \partial y + a \partial p \sin. p;$$
$$\partial x'' = \partial x + a \partial p \cos. p + b \partial q \cos. q \text{ et}$$
$$\partial y'' = \partial y + a \partial p \sin. p + b \partial q \sin. q = 0.$$

 §. 4.

§. 4. Cum nunc corpuſcula alias vires non ſuſtineant, niſi quibus filum tenditur, quandoquidem ratio frictionis tanquam infinite ſpectatae iam in noſtra hypotheſi ſtabilita inuoluitur, ſit tenſio portionis $AB = T$, portionis autem $BR = T'$, quibus poſitis corpuſculum A in directione AB ſollicitatur vi $= T$, quae ſecundum coordinatas reſoluta praebet vim ſecundum $IP = T \operatorname{coſ.} p$ et ſecundum directionem $AP = - T \operatorname{coſ.} p$; alterum vero corpuſculum duas ſuſtinet vires, alteram ſecundum $BA = T$, alteram vero ſecundum $BR = T'$, ex quarum reſolutione naſcuntur: 1°) vis ſecundum $IQ = - T \operatorname{ſin.} p + T' \operatorname{ſin.} q$ et 2°) ſecundum QB vis $= + T \operatorname{coſ.} p - T' \operatorname{coſ.} q$. His igitur viribus proportionalia ſunt ſpatiola tempuſculo ∂t percurſa ſecundum easdem directiones, vel potius ipſe motus, qui oritur ſi ſpatiola illa per maſſas vtriusque corpuſculi multiplicentur, quandoquidem maſſarum ratio hic inprimis eſt habenda.

§. 5. Quod ſi ergo motus vtriusque corpuſculi etiam ſecundum directiones coordinatarum reſoluatur, formulae viribus proportionales erunt $A . \frac{\partial x}{\partial t}$ et $A . \frac{\partial y}{\partial t}$ pro corpuſculo A: at $B . \frac{\partial x'}{\partial t}$ et $B \frac{\partial y'}{\partial t}$ pro corpuſculo B, hincque nanciſcimur ſequentes quatuor aequationes:

$$\text{I. } \frac{A \partial x}{\partial t} = T . \operatorname{ſin.} p.$$

$$\text{II. } \frac{A \partial y}{\partial t} = - T . \operatorname{coſ.} p.$$

$$\text{III. } \frac{B \partial x'}{\partial t} = - T . \operatorname{ſin.} p + T' . \operatorname{ſin.} q.$$

$$\text{IV. } \frac{B \partial y'}{\partial t} = T . \operatorname{coſ.} p - T' . \operatorname{coſ.} q,$$

ex quarum binis prioribus deducitur $\frac{\partial x}{\partial y} = - \operatorname{tang.} p$, tum vero prima cum tertia praebet

$$\frac{A \partial x + B \partial x'}{\partial t} = T' \operatorname{ſin.} q;$$

ſecun-

ſecunda autem cum quarta:

$$\frac{A\,\partial y + B\,\partial y'}{\partial t} = - T' \operatorname{cof.} q.$$

Hacc igitur aequatio per illam diuiſa dat

$$\frac{A\,\partial x + B\,\partial x'}{A\,\partial y + B\,\partial y'} = - \operatorname{tang.} q;$$

ſicque ipſae tenſiones T et T′ e calculo ſunt eliſae.

§. 6. Nunc igitur loco x' et y' valores ante datos ſubſtituamus, et aequationes a tenſionibus T et T′ liberatae erunt

$$\text{I. } \frac{\partial x}{\partial y} = - \operatorname{tang.} p;$$

$$\text{II. } \frac{(A+B)\,\partial x + B\,a\,\partial p \operatorname{cof.} p}{(A+B)\,\partial y + B\,a\,\partial p \operatorname{fin.} p} = - \operatorname{tang.} q;$$

cum quibus aequationibus coniungi oportet ſupra inuentam

$$y - a \operatorname{cof.} p - b \operatorname{cof.} q = 0.$$

§. 7. Tota igitur noſtri problematis ſolutio perducta eſt ad tres iſtas aequationes, in quibus adhuc continentur quatuor quantitates variabiles, binae ſcilicet coordinatae principales x et y cum binis angulis p et q, quarum ergo ternas per quartam determinare licebit. Ex prima autem commodiſſime definimus $\partial x = - \partial y \operatorname{tang.} p$, qui valor in ſecunda ſubſtitutus dat

$$- \frac{(A+B)\,\partial y \operatorname{tang.} p + B\,a\,\partial p \operatorname{cof.} p}{(A+B)\,\partial y + B\,a\,\partial p \operatorname{fin.} p} = - \operatorname{tang.} q$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$(A+B)\,\partial y (\operatorname{tang.} p - \operatorname{tang.} q) = B\,a\,\partial p (\operatorname{fin.} p \operatorname{tang.} q + \operatorname{cof.} p),$$

hincque porro ad iſtam:

$$(A+B)\,\partial y \operatorname{fin.} (q-p) = B\,a\,\partial p \operatorname{cof.} p \operatorname{cof.} (q-p),$$

ideoque

$$\partial y = \frac{B\,a\,\partial p \operatorname{cof.} p . \operatorname{cof.} (q-p)}{(A+B) \operatorname{fin.} (q-p)}.$$

At vero ex tertia aequatione eſt $y = a \operatorname{cof.} p + b \operatorname{cof.} q$, vnde fit $\partial y = - a \partial p \operatorname{fin.} p - b \partial q \operatorname{fin.} q$, ex quo valore naſcitur haec aequatio:

$$\frac{B a \partial p \operatorname{cof.} p \operatorname{cof.} (q - p)}{(A + B) \operatorname{fin.} (q - p)} - \frac{B a \partial p \operatorname{cof.} p}{(A + B) \operatorname{tang.} (q - p)}$$
$$= - a \partial p \operatorname{fin.} p - b \partial q \operatorname{fin.} q.$$

Hic autem non liquet quomodo reſolutio ſit inſtituenda.

Problema II.

Tab. I. Fig. 8. *Si filo tria corpuscula A, B, C fuerint alligata, eiusque terminus D per lineam rectam $I O$ protrahatur, inueſtigare curuas, quas ſingula corpuscula deſcribent.*

Solutio.

§. 8. Vocentur fili portiones $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, ac demiſſis ad rectam IO perpendiculis AP, BQ, CR ponantur coordinatae:

$$IP = x, \quad IQ = x', \quad IR = x'';$$
$$PA = y, \quad QB = y', \quad RC = y'';$$

tum vero ſtatuantur anguli $PAB = p$, $QBC = q$, $RCD = r$, vnde ſtatim fluunt ſequentes relationes:

$$x' - x = a \operatorname{fin.} p, \quad x'' - x' = b \operatorname{fin.} q,$$
$$y - y' = a \operatorname{cof.} p, \quad y' - y'' = b \operatorname{cof.} q,$$

eſtque $y'' = a \operatorname{cof.} r$, hincque

$$y' = b \operatorname{cof.} q + c \operatorname{cof.} r \text{ et}$$
$$y = a \operatorname{cof.} p + b \operatorname{cof.} q + c \operatorname{cof.} r.$$

§. 9. Pro motu nunc definiendo denotent litterae T, T′ et T″ tenſiones portionum fili AB, BC et CD, ac per hypotheſin ſtabilitam habebimus ſequentes aequationes:

$$\frac{A\partial x}{\partial t} = T \sin. p,$$
$$\frac{A\partial y}{\partial t} = - T \cos. p,$$
$$\frac{B\partial x'}{\partial t} = - T \sin. p + T' \sin. q,$$
$$\frac{B\partial y'}{\partial t} = T \cos. p - T' \cos. q,$$
$$\frac{C\partial x''}{\partial t} = - T' \sin. q + T'' \sin. r$$
$$\frac{C\partial y''}{\partial t} = + T' \cos. q - T'' \cos. r.$$

Hinc autem formentur sequentes combinationes:

$$\frac{A\partial x + B\partial x'}{\partial t} = T' \sin. q$$
$$\frac{A\partial y + B\partial y'}{\partial t} = - T' \cos. q$$
$$\frac{A\partial x + B\partial x' + C\partial x''}{\partial t} = T'' \sin. r,$$
$$\frac{A\partial y + B\partial y' + C\partial y''}{\partial t} = - T'' \cos. r.$$

§. 10. Ex his iam aequationibus facile eliminantur tensiones T, T' et T'', quippe quae sunt incognitae, nihilque ad institutum refert eas nosse; tum autem ad tres istas aequationes peruenietur:

$$\text{I. } \frac{\partial x}{\partial y} = - \text{tang.} p;$$
$$\text{II. } \frac{A\partial x + B\partial x'}{A\partial y + B\partial y'} = - \text{tang.} q;$$
$$\text{III. } \frac{A\partial x + B\partial x' + C\partial x''}{A\partial y + B\partial y' + C\partial y''} = - \text{tang.} r;$$

quibus adiungi oportet aequationem iam supra inuentam

$$y = a \cos. p + b \cos. q + c \cos. r,$$

in quibus aequationibus, si loco x', x'' et y', y'' substituantur valores supra assignati, inerunt adhuc hae quinque variabiles: x, y, p, q, r, quarum ergo quaternas per quintam definiri oportet.

§. 11. Substituamus igitur loco x', x'' et y', y'' suos valores, et cum sit

 $x' =$

$$x' = x + a\,\text{ſin.}\,p,$$
$$y' = y - a\,\text{coſ.}\,p,$$
$$x'' = x + a\,\text{ſin.}\,p + b\,\text{ſin.}\,q,$$
$$y'' = y - a\,\text{coſ.}\,p - b\,\text{coſ.}\,q,$$

quatuor noſtrae aequationes ita ſe habebunt:

$$\text{I. } \frac{\partial x}{\partial y} = -\,\text{tang.}\,p,$$
$$\text{II. } \frac{(A+B)\partial x + Ba\partial p\,\text{coſ.}\,p}{(A+B)\partial y + Ba\partial p\,\text{ſin.}\,p} = -\,\text{tang.}\,q,$$
$$\text{III. } \frac{(A+B+C)\partial x + (B+C)a\partial p\,\text{coſ.}\,p + Cb\partial q\,\text{coſ.}\,q}{(A+B+C)\partial y + (B+C)a\partial p\,\text{ſin.}\,p + Cb\partial q\,\text{ſin.}\,q} = -\,\text{tang.}\,r,$$
$$\text{IV. } y = a\,\text{coſ.}\,p + b\,\text{coſ.}\,q + c\,\text{coſ.}\,r,$$

vbi ex vltima habetur

$$\partial y = -a\partial p\,\text{ſin.}\,p - b\partial q\,\text{ſin.}\,q - c\partial r\,\text{ſin.}\,r$$

ſicque ſolutio noſtri problematis a reſolutione harum aequationum pendet.

§. 12. Cum ex prima harum aequationum ſit $\partial x = -\partial y\,\text{tang.}\,p$, ſubſtituamus hunc valorem in reliquis, vt tantum tres nobis remaneant aequationes, quae erunt:

$$\text{I. } \frac{-(A+B)\partial y\,\text{tang.}\,p + Ba\partial p\,\text{coſ.}\,p}{(A+B)\partial y + Ba\partial p\,\text{ſin.}\,p} = -\,\text{tang.}\,q,$$
$$\text{II. } \frac{-(A+B+C)\partial y\,\text{tang.}\,p + (B+C)a\partial p\,\text{coſ.}\,p + Cb\partial q\,\text{coſ.}\,q}{(A+B+C)\partial y + (B+C)a\partial p\,\text{ſin.}\,p + Cb\partial q\,\text{ſin.}\,q} = -\,\text{tang.}\,r,$$
$$\text{III. } y = a\,\text{coſ.}\,p + b\,\text{coſ.}\,q + c\,\text{coſ.}\,r,$$

priores autem duae aequationes euolutae euadent

$$(A+B)\partial y(\text{tang.}\,q - \text{tang.}\,p) + Ba\partial p(\text{coſ.}\,p + \text{ſin.}\,p\,\text{tang.}\,q) = 0,$$
$$(A+B+C)\partial y(\text{tang.}\,r - \text{tang.}\,p) + (B+C)a\partial p(\text{coſ.}\,p + \text{ſin.}\,p\,\text{tang.}\,r)$$
$$+ Cb\partial q(\text{coſ.}\,q + \text{ſin.}\,q\,\text{tang.}\,r) = 0,$$

vbi ſi loco ∂y ſcriberemus eius valorem

$$-a\partial p\,\text{ſin.}\,p - b\partial q\,\text{ſin.}\,q - c\partial r\,\text{ſin.}\,r$$

nan-

nancifceremur duas aequationes inter ternos angulos p, q, r quorum binos per tertium definire oportebit.

§. 13. Quemadmodum autem has duas aequationes vlterius tractari conueniat multo minus patet quam in problemate praecedente, quam ob rem fuperfluum foret hanc inueftigationem ad plura corpuscula filo noftro alligata extendere; ita vt hoc negotium penitus abrumpere cogamur.

DE TRANSFORMATIONE SERIEI DIVERGENTIS

$$1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3$$
$$+ m(m+n)(m+2n)(m+3n)x^4 \text{ etc.}$$

IN FRACTIONEM CONTINVAM.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 11 *Ian.* 1776.

§. 1.

Cum olim indolem huiusmodi serierum diuergentium essem perscrutatus, et veram summam seriei hypergeometricae

$$1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - \text{etc.}$$

assignauissem ope transformationis in fractionem continuam, mentionem quoque feci istius seriei multo latius patentis:

$$1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3$$
$$+ m(m+n)(m+2n)(m+3n)x^4 - \text{etc.}$$

cuius summam inueneram aequari huic fractioni continuae:

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{mx}{1 + \cfrac{nx}{1 + \cfrac{(m+n)x}{1 + \cfrac{2nx}{1 + \cfrac{(m+2n)x}{1 + \text{etc.}}}}}}}$$

cuius

cuius rei veritatem ex conuersione aequationis Riccatianae in fractionem continuam deduxeram. Cum autem haec demonstratio nimis longe petita videri queat, eandem reductionem hic ex principiis simplicioribus sum traditurus.

§. 2. Primo autem istam seriem generalem in formam concinniorem contrahi conueniet ponendo $mx = a$ et $nx = b$, vt proposita sit ista series infinita:

$$1 - a + a(a+b) - a(a+b)(a+2b) + a(a+b)(a+2b)(a+3b) - \text{etc.}$$

Praeterea vero vt sequentes resolutiones commodius peragi queant, neque tot clausulis sit opus, statuam vt sequitur:

$$a = A,\ a+b = B,\ a+2b = C,\ a+3b = D, \text{ etc.}$$

sicque habebitur ista series:

$$1 - A + AB - ABC + ABCD - \text{etc.}$$

cuius summam quaesitam designemus littera S, ita vt sit

$$S = 1 - A + AB - ABC + ABCD - \text{etc.}$$

hinc porro

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{1 - A + AB - ABC + ABCD - \text{etc.}}.$$

§. 3. Cum igitur sit $\frac{1}{S} > 1$, postrema aequatio reducatur ad hanc formam:

$$\frac{1}{S} = 1 + \frac{A - AB + ABC - ABCD + \text{etc.}}{1 - A + AB - ABC + ABCD \text{ etc.}}.$$

Nunc autem ponamus $\frac{1}{S} = 1 + \frac{A}{P}$, eritque

$$P = \frac{1 - A + AB - ABC + ABCD \text{ etc.}}{1 - B + BC - BCD + BCDE \text{ etc.}},$$

quae expressio cum iterum vnitatem superet, ob $B - A = b$, $C - A = 2b$, $D - A = 3b$, etc. ea dabit

$$P = 1 + \frac{b - 2bB + 3bBC - 4bBCD + \text{etc.}}{1 - B + BC - BCD + BCDE - \text{etc.}}.$$

Ponatur ergo $P = 1 + \frac{b}{Q}$ eritque

$Q =$

$$Q = \frac{1 - B + BC - BCD + BCDE - \text{etc.}}{1 - 2B + 3BC - 4BCD + \text{etc.}},$$

vnde deducimus

$$Q = 1 + \frac{B - 2BC + 3BCD - 4BCDE \text{ etc.}}{1 - 2B + 3BC - 4BCD + \text{etc.}}.$$

Hanc ob rem ponamus nunc $Q = 1 + \frac{B}{R}$, ac prodibit

$$R = \frac{1 - 2B + 3BC - 4BCD + \text{etc.}}{1 - 2C + 3CD - 4CDE + \text{etc.}}.$$

§. 4. Hic ergo tam in numeratore quam in denominatore iidem coefficientes occurrunt, at litterae maiusculae in denominatore vno gradu sunt promotae. Cum igitur sit $C - B = b$, $D - B = 2b$, $E - B = 3b$, etc. fiet

$$R = 1 + \frac{2b - 2.3bC + 3.4bCD + 4.5bCDE - \text{etc.}}{1 - 2C + 3CD - 4CDE + 5.CDEF - \text{etc.}}.$$

Quod si ergo ponamus $R = 1 + \frac{2b}{S}$, erit

$$S = \frac{1 - 2C + 3CD - 4CDE + \text{etc.}}{1 - 3C + 6CD - 10CDE + \text{etc.}},$$

vbi in denominatore manifesto occurrunt numeri trigonales, quae expressio reducitur ad hanc:

$$S = 1 + \frac{C - 3CD + 6CDE - 10CDEF + \text{etc.}}{1 - 3C + 6CD - 10CDE + \text{etc.}}.$$

Quod si ergo statuamus $S = 1 + \frac{C}{T}$, erit

$$T = \frac{1 - 3C + 6CD - 10CDE + 15CDEF - \text{etc.}}{1 - 3D + 6DE - 10DEF + 15DEFG - \text{etc.}}.$$

§. 5. Ista forma ob $D - C = b$, $E - C = 2b$, $F - C = 3b$, etc. abit in hanc:

$$T = 1 + \frac{3b - 2.6bD + 3.10bDE - 4.15bDEF + \text{etc.}}{1 - 3D + 6DE - 10DEF + 15DEFG - \text{etc.}}.$$

Ponamus $T = 1 + \frac{3b}{U}$, vt fiat

$$U = \frac{1 - 3D + 6DE - 10DEF + 15DEFG - \text{etc.}}{1 - 4D + 10DE - 20DEF + 35DEFG - \text{etc.}},$$

vbi in denominatore reperiuntur numeri pyramidales primi siue summae trigonalium, hincque nanciscimur:

U =

$$U = 1 + \frac{D - 4DE + 10DEF - 20DEFG + etc.}{1 - 4D + 10DE - 20DEF + 35DEFG - etc.},$$

vbi iam ſupra et infra occurrunt numeri pyramidales. Statuatur porro $U = 1 + \frac{D}{V}$ fietque

$$V = \frac{1 - 4D + 10DE - 20DEF + 35DEFG - etc.}{1 - 4E + 10EF - 20EFG + 35EFGH - etc.}.$$

§. 6. Hinc calculum vt ſupra proſequendo, cum ſit $E - D = b$, $F - D = 2b$, $G - D = 3b$, erit

$$V = 1 + \frac{4b - 2.10bE + 3.20bEF - 4.35bEFG + etc.}{1 - 4E + 10EF - 20EFG + 35EFGH + etc.}.$$

Sit $V = 1 + \frac{4b}{X}$, vt fiat

$$X = \frac{1 - 4E + 10EF - 20EFG + 35EFGH - etc.}{1 - 5E + 15EF - 35EFG + 70EFGH - etc.},$$

quae expreſſio reducitur ad hanc:

$$X = 1 + \frac{E - 5EF + 15EFG - 35EFGH + etc.}{1 - 5E + 15EF - 35EFG + etc.}.$$

Sit $X = 1 + \frac{E}{Y}$ eritque

$$Y = \frac{1 - 5E + 15EF - 35EFG + 70EFGH - etc.}{1 - 5F + 15FG - 35FGH + 70FGHI - etc.}.$$

§. 7. Cum igitur ſit $F - E = b$, $G - E = 2b$, $H - E = 3b$, etc. erit

$$Y = 1 + \frac{5b - 2.15b.F + 3.35bFG - 4.70bFGH + etc.}{1 - 5F + 15FG - 35FGH + 70FGHI - etc.}.$$

Sit nunc $Y = 1 + \frac{5b}{Z}$, vt fiat

$$Z = \frac{1 - 5F + 15FG - 35FGH + 70FGHI - etc.}{1 - 10F + 21FG - 56FGH + 126FGHI - etc.}.$$

Cum igitur initio poſuerimus $\frac{1}{s} = 1 + \frac{A}{P}$, erit ſumma quaeſita $S = \cfrac{1}{1 + \frac{A}{P}}$; tum vero factae ſunt ſequentes poſitiones:

$P = 1 + \frac{b}{Q}$, $Q = 1 + \frac{B}{R}$, $R = 1 + \frac{2b}{S}$, $S = 1 + \frac{C}{T}$, $T = 1 + \frac{3b}{U}$,
$U = 1 + \frac{D}{V}$, $V = 1 + \frac{4b}{X}$, $X = 1 + \frac{E}{Y}$, $Y = 1 + \frac{5b}{Z}$, etc.

quibus

quibus valoribus ordine ſubſtitutis oritur iſta fractio continua:

$$S = \cfrac{1}{1 + \cfrac{A}{1 + \cfrac{b}{1 + \cfrac{B}{1 + \cfrac{2b}{1 + \cfrac{C}{1 + \cfrac{3b}{1 + \cfrac{D}{1 + \cfrac{4b}{1 + \text{etc.}}}}}}}}}}$$

Quod ſi ergo loco litterarum A, B, C, D, etc. valores aſſumtos reſtituamus, vt nobis ſit iſta ſeries diuergens:

$$1 - a + a(a+b) - a(a+b)(a+2b) + a(a+b)(a+2b)(a+3b) - \text{etc.}$$

eius ſumma exprimetur per ſequentem fractionem continuam:

$$S = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a}{1 + \cfrac{b}{1 + \cfrac{a+b}{1 + \cfrac{2b}{1 + \cfrac{a+2b}{1 + \cfrac{3b}{1 + \cfrac{a+3b}{1 + \cfrac{4b}{1 + \text{etc.}}}}}}}}}}$$

quae eſt eadem forma quam olim dederam.

§. 8.

§. 8. Haec transformatio eo magis eſt notatu digna, quod tutiſſimam ac fortaſſe vnicam nobis viam aperit, valorem feriei diuergentis vero proxime ſaltem determinandi. Si enim fractio continua more ſolito in fractiones ſimplices reſoluatur $1, \frac{1}{1+a}, \frac{1+b}{1+a+b}$, etc. cae alternatim ſunt maiores et minores quam valor ſeriei diuergentis, et continuo propius ad iſtum valorem accedunt. Tum vero etiam ſingularia olim expoſui artificia, quae multo promptius ad verum valorem deducunt.

§. 9. Praeterea vero etiam notaſſe iuuabit, talem fractionem continuam:

$$1+\cfrac{\alpha}{1+\cfrac{\beta}{1+\cfrac{\gamma}{1+\cfrac{\delta}{1+\text{etc.}}}}}$$

in genere ſatis commode ad dimidium partium numerum redigi poſſe. Poſito enim eius valore $= S$, eum ita repraeſentare licebit:

$$S = 1+\cfrac{\alpha}{1+\cfrac{\beta}{P}}, \quad P = 1+\cfrac{\gamma}{1+\cfrac{\delta}{Q}}, \quad Q = 1+\cfrac{\varepsilon}{1+\cfrac{\zeta}{R}}, \text{ etc.}$$

Iam prima harum formularum erit

$$S = 1+\frac{\alpha P}{P+\beta} = 1+\alpha-\frac{\alpha\beta}{\beta+P},$$

ſecunda deinde formula dat

$$P = 1+\frac{\gamma Q}{Q+\delta} = 1+\gamma-\frac{\gamma\delta}{\delta+Q},$$

eodem

eodem modo tertia praebet

$$Q = 1 + \frac{\varepsilon R}{R+\zeta} = 1 + \varepsilon - \frac{\varepsilon\zeta}{\zeta+R}, \text{ etc.}$$

Hi igitur valores fucceffiue fubftituti, producent hanc nouam fractionem continuam:

$$S = 1 + \alpha - \cfrac{\alpha\beta}{1 + \beta + \gamma - \cfrac{\gamma\delta}{1 + \delta + \varepsilon - \cfrac{\varepsilon\zeta}{1 + \zeta + \eta - \cfrac{\eta\theta}{1 + \theta + \iota + \text{etc.}}}}}$$

§. 10. Cum igitur noftro cafu feries diuergens

$$S = 1 - a + a(a+b) - a(a+b)(a+2b) + a(a+b)(a+2b)(a+3b) - \text{etc.}$$

perducta fit ad iftam fractionem continuam:

$$S = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a}{1 + \cfrac{b}{1 + \cfrac{a+b}{1 + \cfrac{2b}{1 + \cfrac{a+2b}{1 + \cfrac{3b}{1 + \cfrac{a+3b}{1 + \text{etc.}}}}}}}}}$$

fumamus hic

$$\alpha = a,\ \beta = b,\ \gamma = a+b,\ \delta = 2b,\ \varepsilon = a+2b, \text{ etc.}$$

eritque

S =

$$S = 1 + a - \cfrac{ab}{1 + a + 2b - \cfrac{2b(a+b)}{1 + a + 4b - \cfrac{3b(a+2b)}{1 + a + 6b - \cfrac{4b(a+3b)}{1 + a + \text{etc.}}}}}$$

Appendix.

De fractione continua Brounckeriana.

§. 11. Cum olim multum fuiſſem occupatus in Analyſi indaganda, quae *Brounckerum* ad iſtam ſingularem fractionem perduxerit, quandoquidem mihi haud probabile eſt viſum, eum per tot ambages, quales a *Walliſio* commemorantur, eo fuiſſe perductum, tandem mihi quidem ſatis dilucide oſtendiſſe ſum viſus, Brounckerum hanc formam ex ſerie Leibniziana $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ etc. quam magnus *Gregorius*, iam ante inuenerat, deduxiſſe potius quam ex interpolatione ſeriei $1, \frac{1}{2}, \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$, etc. quemadmodum Walliſius ſuſpicabatur, ſi quidem conſideratio illius ſeriei per ratiocinium ſatis planum ad formam Brounckerianam manuducit.

§. 12. Haec obſeruatio autem nunc quidem eo maiore attentione digna videtur, poſtquam Cel. *Dan. Bernoullius* memoriam formae Brounckerianae renouare haud ſit dedignatus. Quoniam igitur non ita pridem facilem methodum expoſui iſtam formam ex ſerie $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ etc. deriuandi, Geometris haud ingratum fore arbitror, ſi methodum inuerſam in medium protulero, cuius ope formulam Brounckerianam viciſſim ad ſeriem Leibnizianam reducere licet.

§. 13. Conſiderabo igitur fractionem iſtam continuam quaſi eius valor nondum eſſet cognitus, ſtatuendo:

$$S = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \text{etc.}}}}}}}$$

quam per partes ſequenti modo repraeſento:

$$S = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{-1 + P}}, \quad P = 3 + \frac{9}{-3 + Q}, \quad Q = 5 + \frac{25}{-5 + R}, \quad R = 7 + \frac{49}{-7 + S}, \ \text{etc.}$$

Ex his enim partibus debite coniunctis ipſa forma propoſita manifeſto enaſcitur.

§. 14. Singulas igitur has partes ſeorſim euoluamus, ac prima quidem reducta ad fractionem ſimplicem praebet $S = \frac{P-1}{P}$, ideoque $S = 1 - \frac{1}{P}$, ſecunda vero erit $\frac{3Q}{Q-3}$, vnde fit $\frac{1}{P} = \frac{Q-3}{3Q}$, ſiue $\frac{1}{P} = \frac{1}{3} - \frac{1}{Q}$, ſimili modo pars tertia dat $Q = \frac{5R}{R-5}$, ideoque $\frac{1}{Q} = \frac{1}{5} - \frac{1}{R}$; eodem modo ex ſequentibus partibus nanciſcemur $\frac{1}{R} = \frac{1}{7} - \frac{1}{S}$, $\frac{1}{S} = \frac{1}{9} - \frac{1}{T}$, etc. Quare ſi iſti valores ſucceſſiue ſubſtituantur, obtinebimus hanc expreſſionem:

$$S = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} - \text{etc.}$$

ita ita vt nunc certi ſimus eſſe $S = \frac{\pi}{4}$.

§. 15. Simili modo etiam aliarum huiusmodi fractionum continuarum valorem inueſtigare licebit. Veluti ſi propoſita fuerit

fuerit haec forma:

$$S = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{16}{1+\text{etc.}}}}}}$$

ea ſequenti modo in membra deſtribuatur:

$$S = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{-1+P}}, \quad P = 2+\cfrac{4}{-2+Q}, \quad Q = 3+\cfrac{9}{-3+R}, \quad R = 4+\cfrac{16}{-4+S}, \text{ etc.}$$

his enim ſingulis partibus euolutis reperietur:

$$S = 1 - \tfrac{1}{P}, \quad \tfrac{1}{P} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{Q}, \quad \tfrac{1}{Q} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{R}, \quad \tfrac{1}{R} = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{S}, \text{ etc.}$$

vnde ſequitur fore

$$S = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \text{etc.} = l\,2.$$

Haec igitur methodus haud parum in receſſu habere videtur.

DE SVMMATIONE SERIERVM IN QVIBVS TERMINORVM SIGNA ALTERNANTVR.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 22 Febr. 1776.

Cum olim essem perscrutatus quemadmodum ex dato termino generali cuiusque seriei eius summam definiri conveniat, casus quo termini seriei signis alternantibus + et — sunt affecti, non parum molestiae facessebat, ac demum post longas ambages mihi licuit ad formulam satis simplicem pertingere. Hac re igitur accuratius perpensa modum inueni qui directe ad istas formulas perducit, quem igitur hoc loco exponere constitui, quandoquidem aptus videtur hanc partem Analyseos vlterius perficiendi.

Problema I.

Sit X *functio quaecunque ipsius* x, *quae, dum loco* x *successiue scribuntur valores* $x+1$, $x+2$, $x+3$, *etc. induat hos valores:* X', X'', X''', *etc. propositaque sit ista series infinita:* $X - X' + X'' - X''' + X'''' -$ etc. *in infinitum* $= S$, *eius summam* S *inuestigare.*

Solutio

Solutio.

§. 1. Cum igitur S quoque ſit certa functio ipſius x, abeat ea in S', ſi loco x ſcribatur $x+1$, ac perſpicuum eſt fore $S' = X' - X'' + X''' - X'''' + X''''' -$ etc. in infinitum, cui ergo ſeriei ſi propoſita addatur, orietur iſta aequatio $S + S' = X$, ex qua valorem functionis quaeſitae S inueſtigari oportet.

§. 2. Quoniam igitur functio S' naſcitur ex functione S, dum loco x ſcribitur $x+1$, ex natura differentialium erit

$$S' = S + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial\partial S}{2\,\partial x^2} + \frac{\partial^3 S}{6\,\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{24\,\partial x^4} + \frac{\partial^5 S}{120\,\partial x^5} + \text{etc.}$$

vnde nobis reſoluenda proponitur iſta aequatio:

$$2S + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial\partial S}{2\,\partial x^2} + \frac{\partial^3 S}{6\,\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{24\,\partial x^4} + = X,$$

vbi euidens eſt valorem ipſius S per ſeriem infinitam expreſſum iri, cuius primus terminus ſit $S = \frac{1}{2}X$; ipſam vero hanc ſeriem huiusmodi formam eſſe habituram:

$$S = \tfrac{1}{2}X + \frac{\alpha\,\partial X}{\partial x} + \frac{\beta\,\partial\partial X}{\partial x^2} + \frac{\gamma\,\partial^3 X}{\partial x^3} + \frac{\delta\,\partial^4 X}{\partial x^4} + \text{etc.}$$

§. 3. Subſtituamus igitur hanc ſeriem in noſtra aequatione, et pro eius ſingulis partibus erit vt ſequitur:

$$\begin{array}{lllllllll}
2S & = X & + \frac{2\alpha\,\partial X}{\partial x} & + \frac{2\beta\,\partial\partial X}{\partial x^2} & + \frac{2\gamma\,\partial^3 X}{\partial x^3} & + \frac{2\delta\,\partial^4 X}{\partial x^4} & + \frac{2\varepsilon\,\partial^5 X}{\partial x^5} & + \frac{2\zeta\,\partial^6 X}{\partial x^6} \\
\frac{\partial S}{\partial x} & & \frac{1}{2}\ldots & +\alpha\ldots & +\beta\ldots & +\gamma\ldots & +\delta\ldots & +\varepsilon\ldots \\
\frac{\partial\partial S}{2\,\partial x^2} = & & & +\frac{1}{4}\ldots & +\frac{1}{2}\alpha\ldots & +\frac{1}{2}\beta\ldots & +\frac{1}{2}\gamma\ldots & +\frac{1}{2}\delta\ldots \\
\frac{\partial^3 S}{6\,\partial x^3} = & & & & +\frac{1}{12}\ldots & +\frac{1}{6}\alpha\ldots & +\frac{1}{6}\beta\ldots & +\frac{1}{6}\gamma\ldots \\
\frac{\partial^4 S}{24\,\partial x^4} = & & & & & +\frac{1}{48}\ldots & +\frac{1}{24}\beta\ldots & +\frac{1}{24}\beta\ldots \\
\frac{\partial^5 S}{120\,\partial x^5} = & & & & & & +\frac{1}{240}\ldots & +\frac{1}{120}\alpha\ldots \\
\frac{\partial^6 S}{720\,\partial x^6} = & & & & & & & +\frac{1}{1440}\ldots \\
\text{etc.} & & & & & & & \text{etc.}
\end{array}$$

qua-

quarum ſerierum ſumma quia aequari debet functioni X, hinc ſequentes orientur aequalitates:

$$2\alpha + \tfrac{1}{2} = 0$$
$$2\beta + \alpha + \tfrac{1}{4} = 0$$
$$2\gamma + \beta + \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{12} = 0$$
$$2\delta + \gamma + \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{6}\alpha + \tfrac{1}{48} = 0$$
$$2\varepsilon + \delta + \tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{1}{6}\beta + \tfrac{1}{24}\alpha + \tfrac{1}{240} = 0$$
$$2\zeta + \varepsilon + \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{6}\gamma + \tfrac{1}{24}\beta + \tfrac{1}{120}\alpha + \tfrac{1}{1440} = 0.$$
etc.

§. 4. Quanquam hae formulae iam ſufficiunt ad valores ſingularum litterarum α, β, γ, δ, etc. tamen hic labor nimis fieret moleſtus propter continuo plures fractiones in vnam ſummam colligendas, praecipue autem quoniam, vt mox videbimus, harum litterarum alternae ſponte in nihilum abeunt; quamobrem aliam viam inire conueniet veros valores harum litterarum expeditius determinandi, quae in hoc conſiſtit, vt euoluamus ſequentis ſeriei ſummationem:

$$s = \tfrac{1}{2} + \alpha t + \beta t t + \gamma t^3 + \delta t^4 + \text{ etc.}$$

Quod ſi enim huius ſeriei ſummam s aſſignare valuerimus, ex ea viciſſim valores ſingulorum coefficientium α, β, γ, δ, etc. inueſtigare licebit; vbi probe notetur, hos coefficientes prorſus conuenire cum iis qui in praecedentem aequationem ingrediuntur.

§. 5. Hac iam ſerie conſtituta ex inuentis relationibus inter litteras α, β, γ, δ, etc. ſequentes formemus ſeries:

$$\begin{array}{lllllllllll}
2s & = 1 & +2\alpha t & +2\beta t^2 & +2\gamma t^3 & +2\delta t^4 & +2\varepsilon t^5 & +2\zeta t^6 & +2\eta t^7 & +2\iota t^8 & +\text{etc.}\\
st & = & \tfrac{1}{2}t & +\alpha\,.. & +\beta\,.. & +\gamma\,.. & +\delta\,.. & +\varepsilon\,.. & +\zeta\,.. & +\eta\,.. & \\
\tfrac{1}{2}stt & = & & +\tfrac{1}{4}\,.. & +\tfrac{1}{2}\alpha\,.. & +\tfrac{1}{2}\beta\,.. & +\tfrac{1}{2}\gamma\,.. & +\tfrac{1}{2}\delta\,.. & +\tfrac{1}{2}\varepsilon\,.. & +\tfrac{1}{2}\zeta\,.. & \\
\tfrac{1}{6}st^3 & = & & & +\tfrac{1}{12}\,.. & +\tfrac{1}{6}\alpha\,.. & +\tfrac{1}{6}\beta\,.. & +\tfrac{1}{6}\gamma\,.. & +\tfrac{1}{6}\delta\,.. & +\tfrac{1}{6}\varepsilon\,.. & \\
\tfrac{1}{24}st^4 & = & & & & +\tfrac{1}{48}\,.. & +\tfrac{1}{24}\alpha\,.. & +\tfrac{1}{24}\beta\,.. & +\tfrac{1}{24}\gamma\,.. & +\tfrac{1}{24}\delta\,.. & \\
\tfrac{1}{120}st^5 & = & & & & & +\tfrac{1}{240}\,.. & +\tfrac{1}{120}\alpha\,.. & +\tfrac{1}{120}\beta\,.. & +\tfrac{1}{120}\gamma\,.. & \\
\tfrac{1}{720}st^6 & = & & & & & & +\tfrac{1}{1440}\,.. & +\tfrac{1}{720}\alpha\,.. & +\tfrac{1}{720}\beta\,.. & \\
\text{etc.} & & & & & & & & \text{etc.} & &
\end{array}$$

Hae igitur feries in vnam fummam collectae ob relationes fupra §. 3. affignatas praebebunt hanc aequationem:

$$s\,(2 + t + \tfrac{1}{2}\,t\,t + \tfrac{1}{6}\,t^3 + \tfrac{1}{24}\,t^4 + \tfrac{1}{120}\,t^5 + \tfrac{1}{720}\,t^6 + \text{etc.}) = 1.$$

§. 6. Cum igitur, denotante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, fit $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}tt + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \text{etc.}$ euidens eft aequationem inuentam reduci ad hanc formam finitam: $s\,(1 + e^t) = 1$, vnde totum negotium huc redit, vt valor litterae s per feriem exprimatur, cuius finguli termini fecundum poteftates litterae t progrediantur; tum enim femper coefficientes iftius feriei cum fupra affumtis α, β, γ, δ congruant neceffe eft. Quamobrem in hoc nobis erit incumbendum, quemadmodum iftam aequationem $s\,(1 + e^t) = 1$ aptiffime in feriem infinitam conuertamus.

§. 7. Ante omnia igitur hanc aequationem a quantitate exponentiali e^t liberemus, et cum fit $e^t = \frac{1}{s} - 1$, erit $t = l\,\frac{1-s}{s}$, hincque differentiando $\partial t = \frac{-\partial s}{s(1-s)}$. Ponamus hic $s = \frac{1}{2} + v$, et ifta aequatio fiet

$$\partial t = \frac{-\partial v}{(\frac{1}{2} + v)(\frac{1}{2} - v)} = \frac{+\partial v}{v\,v - \frac{1}{4}}.$$

 Nunc

Nunc autem v aequabitur isti seriei:

$$\alpha t + \beta t t + \gamma t^3 + \delta t^4 + \text{etc.}$$

cuius coefficientes quaerimus.

§. 8. Aequationi inuentae tribuamus hanc formam: $v v - \frac{1}{4} = \frac{\partial v}{\partial t}$, ex qua facile intelligitur, cum primus terminus seriei pro v inuestigandae debeat esse αt, sequentes terminos tantum per potestates impares ipsius t esse ascensuros, quam ob rem pro v constituamus sequentem seriem:

$$v = A t + B t^3 + C t^5 + D t^7 + E t^9 + \text{etc.}$$

eritque hinc

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A + 3 B t t + 5 C t^4 + 7 D t^6 + 9 E t^8 + 11 F t^{10} + 13 G t^{12} + \text{etc.}$$

pro parte vero aequationis nostrae sinistra erit

$$\begin{aligned} v v - \tfrac{1}{4} = -\tfrac{1}{4} + AA tt + 2AB t^4 &+ 2AC t^6 + 2AD t^8 + 2AE t^{10} + 2AF t^{12} + \text{etc.} \\ &+ BB \quad + 2BC \quad + 2BD \quad + 2BE \quad + \text{etc.} \\ &\qquad\qquad\quad + CC \quad + 2CD + \text{etc.} \end{aligned}$$

ex quarum serierum aequalitate statim concluditur fore: $A = -\frac{1}{4} = \alpha$, tum vero reliqui termini praebebunt has relationes:

$$\begin{aligned} 3 B &= A A, \\ 5 C &= 2 A B, \\ 7 D &= 2 A C + B B, \\ 9 E &= 2 A D + 2 B C, \\ 11 F &= 2 A E + 2 B D + C C, \\ 13 G &= 2 A F + 2 B E + 2 C D, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

vnde patet, cum valor ipsius A sit negatiuus $= -\frac{1}{4}$, reliquarum valores alternatim fore positiuos et negatiuos.

§. 9.

§. 9. Hac iam ſerie cum primum inuenta comparata colligitur fore:

$$\alpha = A,\ \beta = 0,\ \gamma = B,\ \delta = 0,\ \varepsilon = C,\ \zeta = 0,\ \eta = D, \text{ etc.}$$

ita vt alternae litterarum graecarum ſponte euaneſcant, vt iam ſupra innuimus, reliquarum vero determinatio per has nouas formulas multo facilius et promptius expediatur quam per relationes initio inuentas. Ante enim verbi gratia valores ipſius ε per quinque fractiones colligere oportebat, dum nunc littera C illi aequalis vnico membro exprimitur. His igitur nouis litteris A, B, C, D introductis ſummatio ſeriei propoſitae ita contrahetur vt ſit

$$S = \tfrac{1}{2} X + \frac{A \partial X}{\partial x} + \frac{B \partial^3 X}{\partial x^3} + \frac{C \partial^5 X}{\partial x^5} + \frac{D \partial^7 X}{\partial x^7} + \text{etc.}$$

§. 10. Quo autem inueſtigatio harum litterarum A, B, C, D, etc. facilior reddatur, quoniam $A = -\frac{1}{4}$ et ſequentium litterarum valores euadunt alternatim poſitiui et negatiui, denuo nouas litteras in calculum introducamus, ponendo

$$A = -\frac{\mathfrak{A}}{4},\ B = +\frac{\mathfrak{B}}{4^2},\ C = -\frac{\mathfrak{C}}{4^3},\ D = +\frac{\mathfrak{D}}{4^4},\ E = -\frac{\mathfrak{E}}{4^5}, \text{ etc.}$$

et nunc determinationes harum nouarum litterarum ſequenti modo ſe habebunt.

$$\mathfrak{A} = 1, \qquad \mathfrak{E} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{D} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{9},$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}{3}, \qquad \mathfrak{F} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{E} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{D} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}}{11},$$

$$\mathfrak{C} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{5}, \qquad \mathfrak{G} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{F} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{E} + 2\mathfrak{C}\mathfrak{D}}{13},$$

$$\mathfrak{D} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{B}}{7}, \qquad \mathfrak{H} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{G} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{F} + 2\mathfrak{C}\mathfrak{E} + \mathfrak{D}\mathfrak{D}}{15},$$

etc.

atque ex his litteris ſummatio noſtra ita ſe habebit:

$$S = \tfrac{1}{2} X - \frac{\mathfrak{A} \partial X}{4 \partial x} + \frac{\mathfrak{B} \partial^3 X}{4^2 \partial x^3} - \frac{\mathfrak{C} \partial^5 X}{4^3 \partial x^5} + \frac{\mathfrak{D} \partial^7 X}{4^4 \partial x^7} - \text{etc.}$$

§. 11. Harum igitur litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. valores numerice euoluamus et calculo non admodum molesto expedito reperiemus sequentes valores:

$$\mathfrak{A} = 1, \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{3}, \quad \mathfrak{C} = \frac{2}{3.5}, \quad \mathfrak{D} = \frac{17}{3^2.5.7}, \quad \mathfrak{E} = \frac{62}{3^2.5.7.9},$$
$$\mathfrak{F} = \frac{1382}{3^4.5^2 \ldots 11}, \quad \mathfrak{G} = \frac{21844}{3^5.5^2.7.11.13}.$$

Vbi numerator penultimi termini $1382 = 2.691$ commonefacere potest, hos numeros in arcto nexu cum numeris Bernoullianis dictis consistere.

§. 12. Designemus igitur numeros istos Bernoullianos litteris latinis minusculis a, b, c, d, etc. ita vt sit

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{3}, \quad c = \frac{1}{3}, \quad d = \frac{3}{3}, \quad e = \frac{5}{3}, \quad f = \frac{691}{105}, \quad g = \frac{35}{1}, \quad h = \frac{3617}{15},$$

quemadmodum hos numeros in Introductione mea in Analysin Infinitorum, pag. 131. exhibui, atque examine instituto valores nostrarum litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. sequenti modo exprimi poterunt:

$$\mathfrak{A} = \frac{2^1(2^2-1)}{2.3}.a \qquad\qquad \mathfrak{F} = \frac{2^{11}(2^{12}-1)}{2\ldots 13}.f$$
$$\mathfrak{B} = \frac{2^3(2^4-1)}{2.3.4.5}.b \qquad\qquad \mathfrak{G} = \frac{2^{13}(2^{14}-1)}{2\ldots 15}.g$$
$$\mathfrak{C} = \frac{2^5(2^6-1)}{2\ldots 7}.c \qquad\qquad \mathfrak{H} = \frac{2^{15}(2^{16}-1)}{2\ldots 17}.h$$
$$\mathfrak{D} = \frac{2^7(2^8-1)}{2\ldots 9}.d \qquad\qquad \mathfrak{J} = \frac{2^{17}(2^{18}-1)}{2\ldots 19}.i$$
$$\mathfrak{E} = \frac{2^9(2^{10}-1)}{2\ldots 11}.e \qquad\qquad \mathfrak{K} = \frac{2^{19}(2^{20}-1)}{2\ldots 21}.k$$

etc.

§. 13. In gratiam eorum, quibus non vacat istos numeros Bernoullianos ex mea Introductione depromere, eos hic, quousque equidem eos sum prosecutus, hic subiungam:

$a = 1,$ $\quad$ $i = \frac{43867}{21},$

$b = \frac{1}{3},$ $\quad$ $k = \frac{1222277}{55},$

$c = \frac{1}{3},$ $\quad$ $l = \frac{854513}{3},$

$d = \frac{3}{5},$ $\quad$ $m = \frac{1181820455}{273},$

$e = \frac{5}{3},$ $\quad$ $n = \frac{76977927}{1},$

$f = \frac{691}{105},$ $\quad$ $o = \frac{23749461029}{15},$

$g = \frac{35}{1},$ $\quad$ $p = \frac{8615841276005}{231},$

$h = \frac{3617}{15},$ $\quad$ $q = \frac{84802531453387}{85},$

$r = \frac{90219075042845}{3}.$

§. 14. His igitur numeris Bernoullianis in fubfidium vocatis fumma noftrae feriei propofitae

$$S = X - X' + X'' - X''' + X'''' - \text{etc.}$$

in infinitum fequenti modo exprimetur:

$$S = \tfrac{1}{2}X - \frac{(2^2-1)}{2.3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{(2^4-1)}{2.3.4.5}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} - \frac{(2^6-1)}{2\ldots 7}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{\partial^5 X}{\partial x^5}$$
$$+ \frac{(2^8-1)}{2\ldots 9}\cdot\frac{d}{2}\cdot\frac{\partial^7 X}{\partial x^7} - \frac{(2^{10}-1)}{2\ldots 11}\cdot\frac{e}{2}\cdot\frac{\partial^9 X}{\partial x^9} + \frac{(2^{12}-1)}{2\ldots 13}\cdot\frac{f}{2}\cdot\frac{\partial^{11} X}{\partial x^{11}} - \text{etc.}$$

ficque Problemati noftro penitus fatisfecimus.

Alia folutio Problematis propofiti.

§. 15. Cum fumma quaefita S fit functio ipfius x, abeat ea in T, fi loco x fcribatur $x + \frac{1}{2}$, atque viciffim ex hac functione T obtinebitur ipfa fumma S, fi loco x fcribatur $x - \frac{1}{2}$, ita vt, quando inuenerimus valorem litterae T, ex eo etiam ipfa fumma quaefita S innotefcat. Tum vero manifeftum eft, fi in hac functione T loco x fcribatur $x + \frac{1}{2}$, tum prodíturum effe valorem litterae S'. Hinc igitur ex natura differentialium habebimus

S =

$$S = T - \frac{\partial T}{2.\partial x} + \frac{\partial\partial T}{4.2\,\partial x^2} - \frac{\partial^3 T}{8.6\,\partial x^3} + \frac{\partial^4 T}{16.24\,\partial x^4} - \text{etc.}$$

$$S' = T + \frac{\partial T}{2.\partial x} + \frac{\partial\partial T}{4.2\,\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{8.6\,\partial x^3} + \frac{\partial^4 T}{16.24\,\partial x^4} + \text{etc.}$$

Quare cum ſolutio problematis contineatur in hac aequatione: $S + S' = X$; his valoribus ſubſtitutis emergit iſta aequatio:

$$T + \frac{\partial\partial T}{4.2\,\partial x^2} + \frac{\partial^4 T}{16.24\,\partial x^4} + \frac{\partial^6 T}{64.720\,\partial x^6} + \text{etc.} = \tfrac{1}{2} X.$$

§. 16. Hinc ſtatim manifeſtum eſt ſeriei pro T aſſumendae hanc formam tribui debere:

$$T = \tfrac{1}{2} X + \frac{\alpha\,\partial\partial X}{\partial x^2} + \frac{\beta\,\partial^4 X}{\partial x^4} + \frac{\gamma\,\partial^6 X}{\partial x^6} + \text{etc.};$$

hoc igitur valore in noſtram aequationem introducto habebimus

$$T = \tfrac{1}{2} X + \frac{\alpha\,\partial\partial X}{\partial x^2} + \frac{\beta\,\partial^4 X}{\partial x^4} + \frac{\gamma\,\partial^6 X}{\partial x^6} + \frac{\delta\,\partial^8 X}{\partial x^8} + \frac{\varepsilon\,\partial^{10} X}{\partial x^{10}} + \frac{\zeta\,\partial^{12} X}{\partial x^{12}} + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial\partial T}{4.2\,\partial x^2} = \frac{1}{2.4.2} + \frac{\alpha}{4.2} + \frac{\beta}{4.2} + \frac{\gamma}{4.2} + \frac{\delta}{4.2} + \frac{\varepsilon}{4.2} + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^4 T}{16.24\,\partial x^4} = + \frac{1}{2.16.24} + \frac{\alpha}{16.24} + \frac{\beta}{16.24} + \frac{\gamma}{16.24} + \frac{\delta}{16.24} + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^6 T}{64.720\,\partial x^6} = + \frac{1}{2.64.720} + \frac{\alpha}{64.720} + \frac{\beta}{64.720} + \frac{\gamma}{64.720} + \text{etc.}$$

etc. etc.

Quia igitur ſumma harum ſerierum aequari debet ipſi $\tfrac{1}{2} X$, hinc naſcentur ſequentes determinationes:

$$\alpha + \frac{1}{2.4.2} = 0,$$

$$\beta + \frac{\alpha}{4.2} + \frac{1}{2.16.24} = 0,$$

$$\gamma + \frac{\beta}{4.2} + \frac{\alpha}{16.24} + \frac{1}{2.64.720} = 0,$$

$$\delta + \frac{\gamma}{2^2.1.2} + \frac{\beta}{2^4.1\ldots4} + \frac{\alpha}{2^6.1\ldots6} + \frac{1}{2.256.5040} = 0,$$

$$\varepsilon + \frac{\delta}{2^2.1.2} + \frac{\gamma}{2^4.1\ldots4} + \frac{\beta}{2^6.1\ldots6} + \frac{\alpha}{2^8.1\ldots8} + \frac{1}{2.2^{10}.1\ldots10} = 0.$$

etc.

§. 17. Quanquam haud difficile foret hinc valores α, β, γ, δ, etc. elicere, ſiquidem prodiret $\alpha = -\frac{1}{16}$ et $\beta = \frac{5}{768}$; tamen

tamen ſimili modo, quo ſupra vſi ſumus, in aliam legem, qua iſti valores progrediuntur, inquiramus. Hunc in finem ponamus

$$s = \tfrac{1}{2} + \alpha tt + \beta t^4 + \gamma t^6 + \delta t^8 + \varepsilon t^{10} + \text{etc.}$$

vnde formemus ſequentes ſeries:

$$\begin{array}{l}
s = \tfrac{1}{2} + \alpha tt + \beta t^4 + \gamma t^6 + \delta t^8 + \varepsilon t^{10} + \zeta t^{12} + \eta t^{14} + \text{etc.} \\
\frac{stt}{2^2.1.2} = \frac{1}{2.2^2.1.2} + \frac{\alpha}{2^2.1.2} + \frac{\beta}{2^2.1.2} + \frac{\gamma}{2^2.1.2} + \frac{\delta}{2^2.1.2} + \frac{\varepsilon}{2^2.1.2} + \frac{\zeta}{2^2.1.2} + \text{etc.} \\
\frac{st^4}{2^4.1.4} = \frac{1}{2.2^4.1..4} + \frac{\alpha}{2^4.1..4} + \frac{\beta}{2^4.1...4} + \frac{\gamma}{2^4.1...4} + \frac{\delta}{2^4.1...4} + \frac{\varepsilon}{2^4.1...4} + \text{etc.} \\
\frac{st^6}{2^6.1...6} = \frac{1}{2.2^6.1..6} + \frac{\alpha}{2^6.1...6} + \frac{\beta}{2^6.1...6} + \frac{\gamma}{2^6.1...6} + \frac{\delta}{2^6.1...6} + \text{etc.} \\
\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}$$

Hae igitur ſeries in vnam ſummam collectae, ob ſuperiores litterarum α, β, γ, etc., determinationes, nobis ſuppeditabunt hanc aequationem:

$$s\left(1 + \frac{tt}{2^2.1.2} + \frac{t^4}{2^4.1..4} + \frac{t^6}{2^6.1...6} + \frac{t^8}{2^8.1...8} + \text{etc.}\right) = \tfrac{1}{2}.$$

Sicque totum negotium huc eſt reductum, vt valor litterae s per idoneam ſeriem ſecundum poteſtates ipſius t procedentem exprimatur. Vbi tantum notetur, poſito $t = 0$ fieri debere $s = \tfrac{1}{2}$.

§. 18. Cum iam, denotante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, ſit

$$e^{\frac{1}{2}t} = 1 + \frac{t}{2^1.1} + \frac{tt}{2^2.1.2} + \frac{t^3}{2^3.1...3} + \frac{t^4}{2^4.1...4} + \frac{t^5}{2^5.1....5} + \text{etc. et}$$

$$e^{-\frac{1}{2}t} = 1 - \frac{t}{2^1.1} + \frac{tt}{2^2.1.2} - \frac{t^3}{2^3.1...3} + \frac{t^4}{2^4.1...4} - \frac{t^5}{2^5.1....5} + \text{etc.}$$

harum duarum ſerierum ſemi-ſumma nobis praebebit

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}t} + e^{-\frac{1}{2}t}\right) = 1 + \frac{tt}{2^2.1.2} + \frac{t^4}{2^4.1...4} + \frac{t^6}{2^6.1...6} + \text{etc.},$$

hinc

hinc patet noſtram aequationem futuram eſſe $s(e^{\frac{1}{2}t}+e^{-\frac{1}{2}t})=1$, vnde valorem ipſius s per ſeriem euolui oportet.

§. 19. Ex iſta aequatione igitur deducimus ſtatim

$$e^{\frac{1}{2}t}+e^{-\frac{1}{2}t}=\frac{1}{s},$$

quae differentiata et bis ſumta praebet

$$e^{\frac{1}{2}t}+e^{-\frac{1}{2}t}=-\frac{2\partial s}{ss\partial t^2},$$

quarum aequalitatum ſumma dat

$$2e^{\frac{1}{2}t}=\frac{1}{s}-\frac{2\partial s}{ss\partial t};$$

differentia vero

$$2e^{-\frac{1}{2}t}=\frac{1}{s}+\frac{2\partial s}{ss\partial t};$$

harum autem productum praebet

$$4=\frac{1}{ss}-\frac{4\partial s^2}{s^4\partial t^2} \text{ ſiue } \frac{4\partial s^2}{\partial t^2}=ss-4s^4.$$

Differentietur iam iſta aequatio denuo, ſumto ∂t conſtante, ac habebimus $\frac{4\partial\partial s}{\partial t^2}=s-8s^3$, ſiue $\frac{4\partial\partial s}{\partial t^2}+8s^3-s=0$.

§. 20. Pro hac aequatione reſoluenda ſtatuamus vti ſupra aſſumſimus

$$s=\tfrac{1}{2}+\alpha tt+\beta t^4+\gamma t^6+\delta t^8+\text{etc.}$$

vnde fit

$$\frac{\partial\partial s}{\partial t^2}=1\cdot2\alpha+3\cdot4\beta tt+5\cdot6\gamma t^4+7\cdot8\delta t^6+9\cdot10\varepsilon t^8+\text{etc.}$$

Deinde ob $2s=1+2\alpha tt+2\beta t^4+2\gamma t^6+2\delta t^8+\text{etc.}$ erit cubum ſumendo

8 s^3

$$\begin{array}{lllllllll}
8s^3 = 1 + 6\alpha tt + & 6\beta t^4 + & 6\gamma t^6 + & 6\delta t^8 + & 6\varepsilon t^{10} + & 6\zeta t^{12} + & \text{etc.} \\
 & +12\alpha^2 & +24\alpha\beta & +24\alpha\gamma & +24\alpha\delta & +24\alpha\varepsilon & + \text{etc.} \\
 & & +8\alpha^3 & +12\beta\beta & +24\beta\gamma & +24\beta\delta & + \text{etc.} \\
 & & & +24\alpha\alpha\beta & +24\alpha\alpha\gamma & +12\gamma\gamma & + \text{etc.} \\
 & & & & +24\alpha\beta\beta & +24\alpha\alpha\delta & + \text{etc.} \\
 & & & & & +48\alpha\beta\gamma & + \text{etc.} \\
 & & & & & +8\beta^3 & + \text{etc.}
\end{array}$$

quae feries aequalis effe debet $s - \frac{4\partial\partial s}{\partial t^2}$.

§. 21. Haec igitur feries aequalis ftatui debet ifti:

$$s = \tfrac{1}{2} + \alpha tt + \beta t^4 + \gamma t^6 + \delta t^8 + \varepsilon t^{10} + \zeta t^{12} + \eta t^{14} + \text{etc.}$$

$$-\frac{4\partial\partial s}{\partial t^2} = -8\alpha - 4.3.4\beta - 4.5.6\gamma - 4.7.8\delta - 4.9.10\varepsilon - 4.11.12\zeta - \text{etc.}$$

vnde deducuntur fequentes determinationes:

$4.\ 1.\quad 2\alpha + \frac{1}{2} = 0;$

$4.\ 3.\quad 4\beta + 5\alpha = 0;$

$4.\ 5.\quad 6\gamma + 5\beta + 12\alpha^2 = 0;$

$4.\ 7.\quad 8\delta + 5\gamma + 24\alpha\beta + 8\alpha^3 = 0;$

$4.\ 9.\quad 10\varepsilon + 5\delta + 24\alpha\gamma + 12\beta\beta + 24\alpha\alpha\beta = 0.$

etc.

§. 22. Quoniam vero hae relationes multo magis funt complicatae quam eae ad quas primo fumus perducti, iftis potius inhaereamus earumque euolutionem fequenti modo fublevemus. Ponamus fcilicet

$$\alpha = -\frac{A}{2^3},\ \beta = +\frac{B}{2^5},\ \gamma = -\frac{C}{2^7},\ \delta = +\frac{D}{2^9},\ \varepsilon = -\frac{E}{2^{11}},\ \text{etc.}$$

vnde fummatio noftra induet hanc formam:

$$T = \tfrac{1}{2}X - \frac{A}{2^3}\cdot\frac{\partial\partial X}{\partial x^2} + \frac{B}{2^5}\cdot\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} - \frac{C}{2^7}\cdot\frac{\partial^6 X}{\partial x^6} + \frac{D}{2^9}\cdot\frac{\partial^8 X}{\partial x^8} - \text{etc.}$$

 ac

ac relationes pro his nouis litteris sequenti modo se habebunt:

$$A = \frac{1}{1.2};$$

$$B = \frac{A}{1.2} - \frac{1}{1\ldots 4};$$

$$C = \frac{B}{1.2} - \frac{A}{1\ldots 4} + \frac{1}{1\ldots 6};$$

$$D = \frac{C}{1.2} - \frac{B}{1\ldots 4} + \frac{A}{1\ldots 6} - \frac{1}{1\ldots 8};$$

$$E = \frac{D}{1.2} - \frac{C}{1\ldots 4} + \frac{B}{1\ldots 6} - \frac{A}{1\ldots 8} + \frac{1}{1\ldots 10}.$$

etc. etc.

§. 23. Quo calculum istarum litterarum magis contrahamus atque adeo totum negotium ad numeros integros reducamus, ponamus porro $A = \frac{a}{1.2}$, $B = \frac{b}{1\ldots 4}$, $C = \frac{c}{1\ldots 6}$, etc. vt nostra summatio fiat

$$T = \tfrac{1}{2} X - \frac{a}{2^3 . 1 . 2} \frac{\partial\partial X}{\partial x^2} + \frac{b}{2^5 . 1\ldots 4} \frac{\partial^4 X}{\partial x^4} - \frac{c}{2^7 . 1\ldots 6} \frac{\partial^6 X}{\partial x^6} + \text{etc.}$$

et nunc istae nouae litterae per sequentes formulas commodissime determinabuntur:

$a = \frac{2.1}{1.2}$, siue $a = 1$;

$b = \frac{4.3}{1.2} a - \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}$,

siue $b = 6a - 1 = 5$;

$c = \frac{6.5}{1.2} b - \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} a + \frac{6\ldots 1}{1\ldots 6}$,

siue $c = 15 b - 15 a + 1 = 61$;

$d = \frac{8.7}{1.2} c - \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} b + \frac{8\ldots 3}{1\ldots 6} a - \frac{8\ldots 1}{1\ldots 8}$,

siue $d = 28 c - 70 b + 28 a - 1 = 1385$;

$e = \frac{10.9}{1.2} d - \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} c + \frac{10\ldots 5}{1\ldots 6} b - \frac{10\ldots 3}{1\ldots 8} a + \frac{10\ldots 1}{1\ldots 10}$,

siue $e = 45 d - 210 c + 210 b - 45 a + 1 = 50521$;

$f = \frac{12.11}{1.2} e - \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4} d + \frac{12\ldots 7}{1\ldots 6} c - \frac{12\ldots 5}{1\ldots 8} b + \frac{12\ldots 3}{1\ldots 10} a - \frac{12\ldots 1}{1\ldots 12}$,

siue $f = 66 . e - 495 . d + 924 . c - 495 . b + 66 . a - 1$;

etc.

Mani-

Manifestum autem est coefficientes harum formularum congruere cum iis qui in potestatibus binomii occurrunt, si modo alterni omittantur.

§. 24. Valoribus igitur harum litterarum a, b, c, d inuentis series ante allata dabit valorem litterae T, qui quouis casu erit certa functio ipsius x, ex qua, si loco x scribatur $x - \frac{1}{2}$, orietur summa seriei propositae S. Veluti si fuerit $X = x^4$, haecque series summanda proponatur:

$$S = x^4 - (x+1)^4 + (x+2)^4 - (x+3)^4 + (x+4)^4 - \text{etc.}$$

ob $\frac{\partial \partial X}{\partial x^2} = 4 \cdot 3\, x\, x$ et $\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, altiora vero differentialia euanescentia, erit

$$T = \tfrac{1}{2} x^4 - \tfrac{3}{4} x\, x + \tfrac{5}{32}, \text{ hincque}$$

$$S = \tfrac{1}{2} (x - \tfrac{1}{2})^4 - \tfrac{3}{4} (x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{5}{32}.$$

Hinc ergo sumto $x = 1$, vt series summanda sit

$$S = 1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \text{etc.}$$

reperietur $S = 0$, vti aliunde constat. Alia exempla non subiungimus, quoniam olim iam copiose sunt tractata.

Problema II.

Si X *vt ante fuerit functio quaecunque ipsius* x, *ex qua, dum loco* x *ordine scribantur valores* x+1, x+2, x+3, etc. *nascantur functiones* X', X'', X''', *inuenire summam huius seriei in infinitum excurrentis*:

$$n^x X - n^{x+1} X' + n^{x+2} X'' - n^{x+3} X''' + n^{x+4} X'''' - \text{etc.}$$

Solutio.

§. 25. Ponatur huius seriei summa quaesita $n^x S$, vt sit

$$S = X - n X' + n^2 X'' - n^3 X''' + n^4 X'''' - \text{etc.}$$

 Hic

Hic iam loco x ſcribatur $x+1$, ac reperietur

$$S' = X' - n X'' + n^2 X''' - n^4 X'''' + \text{etc.}$$

quae ſeries ducta in n et priori addita praebet $S + n S' = X$. Quare cum ſit

$$S' = S + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial\partial S}{1.2\,\partial x^2} + \frac{\partial^3 S}{1.2.3\,\partial x^3} + \text{etc.}$$

habebitur iſta aequatio:

$$(1+n) S + \frac{n\,\partial S}{\partial x} + \frac{n\,\partial\partial S}{2\,\partial x^2} + \frac{n\,\partial^3 S}{6\,\partial x^3} + \frac{n\,\partial^4 S}{24\,\partial x^4} + \text{etc.} = X,$$

ex qua valorem litterae S erui oportet.

§. 26. Statuamus ergo pro S hanc ſeriem:

$$S = \alpha X + \frac{\beta\,\partial X}{\partial x} + \frac{\gamma\,\partial\partial X}{\partial x^2} + \frac{\delta\,\partial^3 X}{\partial x^3} + \text{etc.}$$

et factis ſingulis ſubſtitutionibus obtinebimus:

$$\begin{array}{llllll}
(1+n) S & = (1+n)\alpha X + & (1+n)\frac{\beta\,\partial X}{\partial x} + & (1+n)\frac{\gamma\,\partial\partial X}{\partial x^2} + & (1+n)\frac{\delta\,\partial^3 X}{\partial x^3} + & (1+n)\frac{\varepsilon\,\partial^4 X}{\partial x^4} \\
\frac{n\,\partial S}{\partial x} & = & n\alpha & +\,n\beta & +\,n\gamma & +\,n\delta \\
\frac{n\,\partial\partial S}{2\,\partial x^2} & = & & +\frac{1}{2}n\alpha & +\frac{1}{2}n\beta & +\frac{1}{2}n\gamma \\
\frac{n\,\partial^3 S}{6.\partial x^3} & = & & & +\frac{1}{6}n\alpha & +\frac{1}{6}n\beta \\
\frac{n\,\partial^4 S}{24\,\partial x^4} & = & & & & +\frac{1}{24}n\alpha \\
\text{etc.} & & & & & \text{etc.}
\end{array}$$

quarum ſerierum ſumma quia aequari debet ipſi X, hinc ſequentes determinationes reſultabunt:

$$(n+1)\alpha = 1;$$
$$(n+1)\beta + n\alpha = 0;$$
$$(n+1)\gamma + n\beta + \tfrac{1}{2}n\alpha = 0;$$
$$(n+1)\delta + n\gamma + \tfrac{1}{2}n\beta + \tfrac{1}{6}n\alpha = 0;$$
$$(n+1)\varepsilon + n\delta + \tfrac{1}{2}n\gamma + \tfrac{1}{6}n\beta + \tfrac{1}{24}n\alpha = 0.$$

etc.

§. 27. Reſolutio igitur harum aequalitatum nobis ſuppeditabit ſequentes valores:

$$\alpha = \frac{1}{n+1};$$
$$\beta = -\frac{n}{(n+1)^2};$$
$$\gamma = \frac{n(n-1)}{2(n+1)^3};$$
$$\delta = -\frac{n(nn-4n+1)}{6(n+1)^4}.$$
etc.

Nimis autem moleſtum foret euolutionem harum formularum vlterius proſequi, quamobrem conueniet, loco horum coefficientium alios in calculum introducere, qui ſint

$$\alpha = \frac{A}{n+1},\ \beta = -\frac{B}{(n+1)^2},\ \gamma = +\frac{C}{(n+1)^3},\ \delta = -\frac{D}{(n+1)^4},\ \text{etc.}$$

ita vt ſeries noſtra pro S inuenta hanc induat formam:

$$S = \frac{A}{(n+1)}X - \frac{B}{(n+1)^2}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{C}{(n+1)^3}\frac{\partial\partial X}{\partial x^2} - \frac{D}{(n+1)^4}\cdot\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} + \text{etc.}$$

§. 28. Nunc igitur iſtae nouae litterae A, B, C, D etc. per ſequentes formulas determinabuntur:

$$A = 1,$$
$$B = nA,$$
$$C = nB - \tfrac{1}{2}n(n+1)A,$$
$$D = nC - \tfrac{1}{2}n(n+1)B + \tfrac{1}{6}n(n+1)^2A,$$
$$E = nD - \tfrac{1}{2}n(n+1)C + \tfrac{1}{6}n(n+1)^2B - \tfrac{1}{24}n(n+1)^3A,\ \text{etc.}$$

vnde facilius iam colligentur ſequentes valores:

$$A = 1,$$
$$B = n,$$
$$C = \tfrac{1}{2}n(n-1),$$
$$D = \tfrac{1}{6}n(nn-4n+1),$$
$$E = \tfrac{1}{24}n(n^3-11nn+11n-1).$$

§. 29. Quo indolem horum numerorum A, B, C, D penitius perſcrutemur, contemplemur iſtam ſeriem easdem litteras inuoluentem:

$$s = A + Bt + Ctt + Dt^3 + \text{etc.}$$

ex qua ſecundum relationes ante inuentas formemus ſequentes ſeries:

$$\begin{array}{rl} s = & A + Bt + Ctt + Dt^3 + Et^4 + Ft^5 + \text{etc.} \\ -nst = & -nA - nB - nC - nD - nE - \text{etc.} \\ +\tfrac{1}{2}n(n+1)stt = & \tfrac{1}{2}n(n+1)A + \tfrac{1}{2}(n+1)B + \tfrac{1}{2}n(n+1)C + \tfrac{1}{2}n(n+1)D + \text{etc.} \\ -\tfrac{1}{6}n(n+1)^2st^3 = & +\tfrac{1}{6}n(n+1)^2A - \tfrac{1}{6}n(n+1)^2B - \tfrac{1}{6}n(n+1)^2C - \text{etc.} \\ +\tfrac{1}{24}n(n+1)^3st^4 = & +\tfrac{1}{24}n(n+1)^3A + \tfrac{1}{24}n(n+1)^3B + \text{etc.} \end{array}$$

etc.

His igitur ſeriebus in vnam ſummam collectis impetrabimus hanc aequationem:

$$s(1 - nt + \tfrac{1}{2}n(n+1)tt - \tfrac{1}{6}n(n+1)^2t^3 + \tfrac{1}{24}n(n+1)^3t^4 - \text{etc.}) = 1.$$

§. 30. Vt nunc hanc aequationem ad formam finitam reducamus, in ſubſidium vocemus hanc progreſſionem:

$$e^{-(n+1)t} = 1 - (n+1)t + \tfrac{1}{2}(n+1)^2tt - \tfrac{1}{6}(n+1)^3t^3 + \tfrac{1}{24}(n+1)^4t^4 - \text{etc.}$$

vnde fit

$$\frac{e^{-(n+1)t} - 1}{n+1} = -t + \tfrac{1}{2}(n+1)tt - \tfrac{1}{6}(n+1)^2t^3 + \tfrac{1}{24}(n+1)^3t^4 - \text{etc.}$$

conſequenter

$$\frac{n}{n+1}(e^{-(n+1)t} - 1) = -nt + \tfrac{1}{2}n(n+1)t^2 - \tfrac{1}{6}n(n+1)^2t^3 + \tfrac{1}{24}n(n+1)^3t^4 - \text{etc.}$$

Hinc igitur nanciſcemur ſequentem aequationem finitam:

$$s\left(1 + \frac{n}{n+1}(e^{-(n+1)t} - 1)\right) = s\left(\frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}e^{-(n+1)t}\right) = 1.$$

Ex hac autem aequatione, ſi valor ipſius s per ſeriem eliciatur, ipſa

ipsa series assumta prodire debet, ex qua idcirco nostrae litterae a, b, c, d innotescent. Hinc igitur erit

$$e^{-(n+1)t} = \frac{1+n-s}{ns},$$

ideoque $-(n+1)t = l(1+n-s) - lns$ et differentiando

$$-(n+1)\partial t = -\frac{\partial s}{1+n-s} - \frac{\partial s}{s} = -\frac{(1+n)\partial s}{s(1+n-s)};$$

ex qua aequatione colligitur $s(1+n-s) = \frac{\partial s}{\partial t}$.

§. 31. Statuatur nunc $s = \frac{1}{2}(n+1) + v$, vt fiat

$$v = -\tfrac{1}{2}(n+1)A + Bt + Ctt + Dt^3 + \text{etc.}$$

eritque nostra aequatio $\frac{1}{4}(n+1)^2 - vv = \frac{\partial v}{\partial t}$. Ad calculi igitur compendium ponamus $\frac{1}{2}(n+1) = m$, sitque $A - \frac{1}{2}(n+1) = \Delta$, vt series nostra sit

$$v = \Delta + Bt + Ctt + Dt^3 + Et^4 + Ft^5 + Gt^6 + Ht^7 + \text{etc.}$$

tum vero habebimus:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = mm - vv, \text{ siue } \frac{\partial v}{\partial t} + vv = mm.$$

In hac ergo aequatione loco v seriem assumtam substituamus eritque

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} &= B + 2Ct + 3Dtt + 4Et^3 + 5Ft^4 + 6Gt^5 + \text{etc.}\\
vv &= \Delta\Delta + 2\Delta B + 2\Delta C + 2\Delta D + 2\Delta E + 2\Delta F + \text{etc.}\\
& + BB + 2BC + 2BD + 2BE + \text{etc.}\\
& + CC + 2CD + \text{etc.}
\end{aligned}$$

quarum ergo seriErum summa debet esse $= mm$, vnde deducuntur sequentes determinationes:

$B + \Delta\Delta = mm$;	hinc	$B = mm - \Delta\Delta$;
$2C + 2\Delta B = 0$;		$2C = -2\Delta B$;
$3D + 2\Delta C + BB = 0$;		$3D = -2\Delta C - BB$;
$4E + 2\Delta D + 2BC = 0$;		$4E = -2\Delta D - 2BC$,
$5F + 2\Delta E + 2BD + CC = 0$;		$5F = -2\Delta E - 2BD - CC$.
etc.		etc.

§. 32.

§. 32. Cum iam posuerimus $\Delta = A - \frac{1}{2}(n+1) = A - m$, ob $A = 1$ erit $\Delta = 1 - m = \frac{1-n}{2}$. Retineamus autem litteram m in calculo, existente $m = \frac{1}{2}(n+1)$, ac reperiemus $B = n$, et quia est $-2\Delta = n - 1$, formulae nostrae euadent

$$2C = (n-1)B;$$
$$3D = (n-1)C - BB;$$
$$4E = (n-1)D - 2BC;$$
$$5F = (n-1)E - 2BD - CC;$$
$$6G = (n-1)F - 2BE - 2CD.$$
etc.

haeque formulae ad calculum magis accommodatae videntur quam superiores §. 28. quia hic occurrit minor terminorum numerus atque etiam factores sunt simpliciores. Ex his igitur valores supra inchoatos vlterius prosequemur:

$$A = 1;$$
$$B = n;$$
$$C = \frac{n(n-1)}{1.2};$$
$$D = \frac{n(nn-4n+1)}{1.2.3};$$
$$E = \frac{n(n^3-11nn+11n-1)}{1.2.3.4};$$
$$F = \frac{n(n^4-26n^3+66n^2-26n+1)}{1.2.3.4.5};$$
$$G = \frac{n(n^5-57n^4+302n^3-302nn+57n-1)}{1\ldots\ldots6}.$$

§. 33. Hae expressiones eo magis sunt notatu dignae, quod coefficientes in numeratoribus ad formulas generales reduci possunt; namque coefficientes terminorum secundorum, qui sunt 0, 0, 1, 4, 11, 26, 57, 120, etc. nascuntur ex forma generali $2^{z-1} - z$, coefficientes vero terminorum tertiorum,

rum, qui sunt 0, 0, 0, 1, 11, 66, 302, etc. oriuntur ex formula generali $3^{z-1} - 2^{z-1} z + \frac{z(z-1)}{1.2}$; simili modo terminorum quartorum, qui sunt 0, 0, 0, 0, 1, 26, 302, etc. terminus generalis est

$$4^{z-1} - 3^{z-1} . z + 2^{z-1} . \frac{z(z-1)}{1.2} - \frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3};$$

quintorum vero terminorum coefficientes, qui sunt 0, 0, 0, 0, 0, 1, 57, etc. oriuntur ex forma generali hac:

$$5^{z-1} - 4^{z-1} . z + 3^{z-1} . \frac{z(z-1)}{1.2.} - 2^{z-1} . \frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3} + \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{1 \ldots 4},$$

vnde iam satis clarum est, quomodo pro sequentibus terminis formulae generales constitui debeant.

§. 34. Inuentis igitur secundum has regulas valoribus litterarum A, B, C, D, etc. seriei propositae infinitae

$$n^x X - n^{x+1} X' + n^{x+2} X'' - n^{x+3} X''' + \text{etc.}$$

summa erit

$$n^x \left(\frac{A}{n+1} X - \frac{B}{(n+1)^2} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{C}{(n+1)^3} \frac{\partial \partial X}{\partial x^2} - \frac{D}{(n+1)^4} \frac{\partial^3 X}{\partial x^3} + \text{etc.}\right).$$

Ita si fuerit $X = 1$ et series summanda

$$n^x - n^{x+1} + n^{x+2} - n^{x+3} + n^{x+4} - \text{etc.}$$

ob $\frac{\partial X}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \partial X}{\partial x^2} = 0$, erit summa quaesita $= n^x \frac{A}{n+1} = \frac{n^x}{n+1}$.

At si sumatur $X = x$, vt series summanda sit

$$n^x . x - n^{x+1}(x+1) + n^{x+2}(x+2) - n^{x+3}(x+3) + \text{etc.}$$

ob $\frac{\partial X}{\partial x} = 1$, sequentia vero differentialia $= 0$, erit summa quaesita

$$= n^x \left(\frac{Ax}{n+1} - \frac{B}{(n+1)^2}\right) = n^x \left(\frac{x}{n+1} - \frac{n}{(n+1)^2}\right).$$

Hinc ergo si sumatur $x = 1$, huius seriei:

$$n - 2n^2 + 3n^3 - 4n^4 + 5n^5 - 6n^6 + \text{etc.}$$

ſumma erit $= \frac{n}{(n+1)^2}$, cuius fractionis euolutio manifeſto producit iſtam ſeriem. Plura exempla adiungere ſuperfluum foret, quia hoc argumentum iam alias fuſius eſt tractatum.

Problema III.

Si vt ante X denotet functionem quamcunque ipſius x, quae loco x ſcribendo ſucceſſiue x + 1, x + 2, x + 3, abeat in X′, X″, X‴, ac proponatur ſequens ſeries infinita cum progreſſione hypergeometrica commiſta:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots x \, X \\ - & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots (x+1) \, X' \\ + & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots (x+2) \, X'' \\ - & \textit{etc.} \end{aligned}$$

eius ſummam inueſtigare.

Solutio.

§. 35. Statuatur iſta ſumma quaeſita $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x S$, ita vt tantum functionem S indagari oporteat, eritque

$$S = X - (x+1)X' + (x+1)(x+2)X'' - (x+1)(x+2)(x+3)X''' + \text{etc.}$$

Hinc ergo ſi loco x vbique ſcribamus $x + 1$, fiet

$$S' = X' - (x+2)X'' + (x+2)(x+3)X''' - (x+2)(x+3)(x+4)X'''' + \text{etc.}$$

quae poſterior ſeries per $x + 1$ multiplicata ac priori adiecta producet iſtam aequationem: $S + (x+1)S' = X$, ex qua ergo valorem ipſius S definire oportet.

§. 36. Hic autem pro S talem ſeriem per differentialia ipſius X procedentem fingere non licet vt ſupra, propterea quod functio

$$S' = S + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial \partial S}{1 \cdot 2 \, \partial x^2} + \frac{\partial^3 S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \, \partial x^3} + \text{etc.}$$

per factorem variabilem $x + 1$ eſt multiplicata, quamobrem pro S aſſumamus ſeriem generalem $p + q + r + s + t +$ etc.

quae

quae ita ſit comparata, vt differentiale cuiusque partis cadat in locum ſequentem. Cum igitur noſtra aequatio ſit

$$(x+2)S+(x+1)\frac{\partial S}{\partial x}+(x+1)\frac{\partial\partial S}{2\partial x^2}+(x+1)\frac{\partial^3 S}{6\partial x^3}+\text{etc.}=X,$$

hic loco S eiusque differentialium ſecundum legem praeſcriptam ſeries aſſumta ſubſtituatur, ac peruenietur ad hanc aequationem:

$$\begin{aligned}X=(x+2)p&+(x+2)q+(x+2)r+(x+2)s+(x+2)t+(x+2)u+\text{etc.}\\&+(x+1)\tfrac{\partial p}{\partial x}+(x+1)\tfrac{\partial q}{\partial x}+(x+1)\tfrac{\partial r}{\partial x}+(x+1)\tfrac{\partial s}{\partial x}+(x+1)\tfrac{\partial t}{\partial x}+\text{etc.}\\&+(x+1)\tfrac{\partial\partial p}{2\partial x^2}+(x+1)\tfrac{\partial\partial q}{2\partial x^2}+(x+1)\tfrac{\partial\partial r}{2\partial x^2}+(x+1)\tfrac{\partial\partial s}{2\partial x^2}+\text{etc}\\&+(x+1)\tfrac{\partial^3 p}{6\partial x^3}+(x+1)\tfrac{\partial^3 q}{6\partial x^3}+(x+1)\tfrac{\partial^3 r}{6\partial x^3}+\text{etc.}\\&\text{etc.}\end{aligned}$$

hicque primum ſtatuatur $X=(x+2)p$, ita vt ſit $p=\frac{X}{x+2}$, tum vero pro reliquis habebuntur ſequentes aequationes:

$$(x+2)q+(x+1)\frac{\partial p}{\partial x}=0,$$

$$(x+2)r+(x+1)\frac{\partial q}{\partial x}+(x+1)\frac{\partial\partial p}{2\partial x^2}=0,$$

$$(x+2)s+(x+1)\frac{\partial r}{\partial x}+(x+1)\frac{\partial\partial q}{2.\partial x^2}+(x+1)\frac{\partial^3 p}{6\partial x^3}=0,$$

$$(x+2)t+(x+1)\frac{\partial s}{\partial x}+(x+1)\frac{\partial\partial r}{2\partial x^2}+(x+1)\frac{\partial^3 q}{6.\partial x^3}+(x+1)\frac{d^4 p}{24 dx^4}=0.$$

etc.

§. 37. Ex his igitur aequationibus haud difficile erit valores ſingularum litterarum q, r, s, t per praecedentes iam inuentas definire. In genere autem haec euolutio mox ad formulas nimis complicatas perduceret, namque cum ſit $p=\frac{X}{x+2}$. erit $\partial p=\frac{\partial X}{x+2}-\frac{X\partial x}{(x+2)^2}$, vnde colligitur

$$(x+2)q+\frac{(x+1)}{x+2}\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{(x+1)X}{(x+2)^2},$$

hincque

$$q=-\frac{(x+1)}{(x+2)^2}\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{x+1X}{(x+2)^3};$$

 cuius

cuius ergo differentiale non solum denuo sumi deberet, sed etiam differentio-differentiale ipsius p, vt inde deriuetur valor ipsius r. Interim tamen hi valores in genere commodius exprimuntur sequenti modo:

$$q = -\frac{(x+1)}{(x+2)\partial x}.\partial.p,$$
$$r = -\frac{(x+1)}{(x+2)\partial x}\partial\left(q + \frac{\partial p}{2\partial x}\right),$$
$$s = -\frac{(x+1)}{(x+2)\partial x}\partial\left(r + \frac{\partial q}{2\partial x} + \frac{\partial\partial p}{6\partial x^2}\right),$$
$$t = -\frac{(x+1)}{(x+2)\partial x}\partial\left(s + \frac{\partial r}{2\partial x} + \frac{\partial\partial q}{6\partial x^2} + \frac{\partial^3 p}{24\partial x^3}\right),$$
etc.

§. 38. In genere autem has formulas euoluere non est opus, quia quouis casu proposito euolutio haud difficulter institui poterit, quod vnico casu ostendisse sufficiet. Sumatur igitur $X = 1$ eruntque etiam omnes valores inde deriuati X', X'', etc. vnitati aequales. Ac primo hoc casu habebitur $p = \frac{1}{x+2}$, cuius ergo differentialia erunt

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{(x+2)^2},\quad \frac{\partial\partial p}{\partial x^2} = \frac{2}{(x+2)^3},\quad \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} = -\frac{6}{(x+2)^4},\ \text{etc.}$$

hinc igitur primo colligimus $q = +\frac{x+1}{(x+2)^3}$, qui valor resolvatur in has partes: $q = \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+2)^3}$, vnde fiet

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{2}{(x+2)^3} + \frac{3}{(x+2)^4}\ \text{et}$$
$$\frac{\partial\partial q}{\partial x^2} = \frac{6}{(x+2)^4} - \frac{12}{(x+2)^5},\ \text{etc.}$$

Ex his igitur porro fit

$$r = -\frac{x+1}{x+2}\left(-\frac{1}{(x+2)^3} + \frac{3}{(x+2)^4}\right).$$

Cum nunc sit $-\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = -1 + \frac{1}{x+2}$, fiet

$$r = +\frac{1}{(x+2)^3} - \frac{4}{(x+2)^4} + \frac{3}{(x+2)^5},$$

vnde fit

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{3}{(x+2)^4} + \frac{16}{(x+2)^5} - \frac{15}{(x+2)^6}$$

ex quo valore colligitur

$$s = -\frac{x+1}{x+2}\left(-\frac{1}{(x+2)^4} + \frac{10}{(x+2)^5} - \frac{15}{(x+2)^6}\right).$$

His igitur valoribus inuentis ſeriei infinitae

$$\begin{array}{l} 1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots x \\ -1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots (x+1) \\ +1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots (x+2) \\ -1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots (x+3) \\ \quad \text{etc.} \end{array}$$

ſumma erit

$$1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots x\,(p + q + r + s + \text{etc.}).$$

§. 39. Sumamus hic pro caſu ſpecialiſſimo $x = 0$, vt ſummanda proponatur haec ſeries hypergeometrica $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 +$ etc., pro qua ergo erit $1 \ldots\ldots x = 1$, tum vero reperietur

$$p = \tfrac{1}{2},\ q = \tfrac{1}{8},\ r = -\tfrac{1}{32},\ s = -\tfrac{1}{128}.$$

Calculo ergo hucusque producto ſumma deſiderata prodit

$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{32} - \tfrac{1}{128} = \tfrac{75}{128} \doteq 0,5859,$$

quae non multum diſcrepat ab ea quam olim omni ſtudio elicui.

§. 40. Sumamus nunc $x = 1$, vt ſummanda ſit haec ſeries $1 - 2 + 6 - 24 + 120 -$ etc., eritque $1 \ldots\ldots x = 1$, tum vero $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{27}$, $r = 0$, $s = -\frac{1}{729}$. Hinc ergo erit noſtra ſumma $\frac{1}{3} + \frac{2}{27} - \frac{1}{729} = \frac{293}{729} = 0,40192$, quae ſumma cum praecedente ſatis exacte conſpirat, quoniam hinc ambae ſeries iunctae prodeunt $0,9878$: prodire enim deberet vnitas; vnde patet, ſi vlterius ſeriem p, q, r, s eſſemus proſecuti, tum etiam ad veritatem multo propius acceſſiſſemus.

PROBLEMATVM QVORVNDAM SPHAERICORVM SOLVTIO.

Auctore
NICOLAO FVSS.

Conuent. exhib. d. 11 *Iun.* 1780.

Problema I.

Tab. II. Fig. I. *Datis in circulo maximo E A B F duobus punctis A et B, in superficie sphaerica triangulum describere A C B, cuius vertex C in alio circulo maximo dato E C F reperiatur et in quo angulus ad verticem A C B sit maximus.*

Solutio.

Sint E et F puncta interſectionis amborum circulorum maximorum, eorumque inclinatio mutua, ſeu angulus AEC $= \alpha$, vocenturque punctorum datorum A et B a puncto E diſtantiae E A $= a$, E B $= b$; et cum in circulo maximo E C F quaeratur punctum C tale, vt ductis arcubus circulorum maximorum AC et B C, angulus A C B fiat maximus: ponatur arcus E Z $= z$, et videamus quomodo haec incognita z per datas quantitates a, b, α, definiri debeat, vt conditio praeſcripta adimpleatur.

Hunc in finem notetur ex binis triangulis E C B et E C A oriri has determinationes:

tang.

$$\text{tang. } ECB = \frac{\text{fin. } b \,.\, \text{fin. } \alpha}{\text{cof. } b \text{ fin. } z - \text{fin. } b \text{ cof. } z \text{ cof. } \alpha},$$

$$\text{tang. } ECA = \frac{\text{fin. } a \,.\, \text{fin. } \alpha}{\text{cof. } a \text{ fin. } z - \text{fin. } a \text{ cof. } z \text{ cof. } \alpha},$$

vnde cum fit

$$\text{tang. } ACB = \frac{\text{tang. } ECB - \text{tang. } ECA}{1 + \text{tang. } ECB \,.\, \text{tang. } ECA},$$

pro angulo ad verticem C hanc obtinebimus expreffionem fatis complicatam:

$$\text{tang. } ACB = \frac{\text{fin. } \alpha \text{ fin. } z \text{ fin. } (b - a)}{\text{fin. } a \text{ fin. } b \text{ fin. } \alpha^2 + (\text{cof. } b \text{ fin. } z - \text{fin. } b \text{ cof. } z)(\text{cof. } a \text{ fin. } z - \text{fin. } a \text{ cof. } z \text{ cof. } \alpha)}.$$

Quo haec expreffio tractabilior reddatur, multiplicetur primum denominatoris membrum per fin. z^2 + cof. $z^2 = 1$, et facta euolutione, ponatur breuitatis gratia:

$$\text{fin. } a \text{ fin. } b \text{ fin. } \alpha^2 + \text{cof. } a \text{ cof. } b = A;$$

$$\text{fin. } a \text{ fin. } b = B;$$

$$\text{cof. } \alpha \text{ fin. } (a + b) = C;$$

quo facto expreffio fupra inuenta hanc induit formam paulo concinniorem:

$$\text{tang. } ACB = \frac{\text{fin. } \alpha \text{ fin. } (b - a) \text{ fin. } z}{A \text{ fin. } z^2 + B \text{ cof. } z^2 - C \text{ fin. } z \text{ cof. } z},$$

quam igitur expreffionem *Maximum* reddi oportet.

Facta iam differentiatione numerator nihilo aequandus, omiffo fcilicet factore conftante fin. α fin. $(b - a)$, erit

$$B \text{ cof. } z^3 + (2B - A) \text{ fin. } z^2 \text{ cof. } z - C \text{ fin. } z^3,$$

vnde diuidendo per cof. z^3 emergit aequatio:

$$B + (2B - A) \text{ tang. } z^2 - C \text{ tang. } z^3 = 0,$$

in qua ergo aequatione tertii gradus problematis folutio continetur. Vnde cum haec aequatio vel vnicam habeat vel omnes tres radices reales, fieri poteft vt etiam problema noftrum vel

vnicam

vnicam vel tres ſolutiones admittat, quo poſteriore ſcilicet caſu duae ſolutiones maximum exhibebunt, tertia vero minimum.

Euolutio caſuum

quibus tres ſolutiones locum habent.

Operae pretium erit caſus accuratius conſideraſſe, quibus hoc problema tres ſolutiones admittit; reliqui enim caſus per regulas notiſſimas haud difficulter expediuntur. Hunc in finem aequationi noſtrae cubicae aliam formam paulo concinniorem tribuemus, ſtatuendo tang. $z = v$, ita vt ſit

$$v^3 + \frac{A - 2B}{C} v^2 - \frac{B}{C} = 0;$$

quae aequatio poſito $v = \frac{k}{x}$ abit in hanc:

$$k^3 + \frac{(A - 2B)\, k k}{C}\, x - \frac{B}{C}\, x^3 = 0,$$

ſiue in iſtam:

$$x^3 = \frac{A - 2B}{B}\, k k \,.\, x + \frac{C}{B}\, k^3.$$

Iam vero ternae radices reales huius aequationis, ſi quidem habeat tales, commode per triſectionem anguli determinari poſſunt. Si enim ponamus coſ. $3\zeta = m$ et coſ. $\zeta = s$, conſtat eſſe coſ. $\zeta^3 = \frac{3}{4}$ coſ. $\zeta + \frac{1}{4}$ coſ. $3\,\zeta$, conſequenter $s^3 = \frac{3}{4} s + \frac{1}{4} m$, qua aequatione comparata cum noſtra:

$$x^3 = \frac{A - 2B}{B}\, k^2 \,.\, x + \frac{C}{B}\, k^3,$$

manifeſtum eſt fieri debere $x = s$; tum vero $\frac{A - 2B}{B}\, k k = \frac{3}{4}$ et $\frac{C}{B}\, k^3 = \frac{1}{4}\, m$: vnde fit $k^2 = \frac{3B}{4(A - 2B)}$ et $m = \frac{4Ck^3}{B}$. Inuento autem hoc valore m habebitur etiam coſ. $3\,\zeta$; vnde ſi angulus, cuius tripli coſinus $= m$, vocetur β, non ſolum erit $3\zeta = 3\beta$, ſed etiam $3\,\zeta = 3\,\beta \pm 360°$, ita vt terni valores anguli ζ ſint 1°) $\zeta = \beta$; 2°) $\zeta = \beta + 120$; 3°) $\zeta = \beta - 120°$; quocirca, ob $s = x = \frac{k}{v} = \frac{k}{tang.\, \zeta} = k$ cot. ζ, erit

1°)

1°) cot. $z = \frac{\cos. \beta}{k}$;

2°) cot. $z = \frac{\cos. (\beta + 120°)}{k}$;

3°) cot. $z = \frac{\cos. (\beta - 120°)}{k}$.

Nunc igitur haud difficile erit conditiones ſtabilire, quae requirentur, ſi problema tres ſolutiones admittere debeat. Manifeſtum enim eſt, quo ternae radices ſint reales, non ſolum requiri vt valor $k^2 = \frac{3B}{4(A - 2B)}$ ſit poſitiuus, ſed etiam, ob $m =$ coſ. $3\zeta = \frac{4Ck^3}{B}$, fieri debere $B > 4. C k^3$. Harum conditionum prior $\frac{3B}{4(A - 2B)} > 0$ poſtulat vt ſit $A - 2B > 0$, hoc eſt

ſin. a ſin. b (ſin. $\alpha^2 - 2$) + coſ. a coſ. $b > 0$, ſiue

ſin. $\alpha^2 - 2 +$ cot. a cot. $b > 0$, vel denique

ſin. $\alpha^2 > 2 -$ cot. a cot. b;

vnde patet, arcus a et b ita comparatos eſſe debere, vt productum cotangentium eorum ſit vnitate maior. Altera conditio declarat hos arcus a et b ita ſumendos eſſe, vt differentia inter valores A et 2 B fiat ſatis notabilis.

Exemplum.

Quo indolem huius ſolutionis clarius perſpiciamus, conſideremus caſum quendam determinatum, ſtatuendo arcus $EA = a = 17°$, $EB = b = 59°$ et angulum $AEC = \alpha = 85°$, et calculo pro valoribus litterarum A, B, C, inſtituto, inuenimus $A = 0,74124$; $B = 0,25061$; $C = 0,08457$, ex quibus porro deducimus $k = 0,88493$ et $m = 0,93537$, vnde fit coſ. $3\zeta = 0,93537$, conſequenter $3\zeta = 20°, 43'$ et $\zeta = 6°, 54'$ circiter. Terni igitur valores noſtrae cotangentis erunt ſequentes:

$$\cot. z = \frac{cos.(6^\circ, 54')}{0,88493} = +1,12185;$$

$$\cot. z = \frac{cos.(126^\circ, 54')}{0,88493} = -0,67850;$$

$$\cot. z = \frac{cos.(113^\circ. 6')}{0,88493} = -0,44336;$$

qui pro ipſo arcu $EC = z$ et angulo $A\ C\ B$ dant:

$z = 41^\circ, 33'$, $ACB = 46^\circ, 10'$. *Maximum.*
$z = 124, 9$; $ACB = 41, 23\frac{1}{2}$. *Maximum.*
$z = 113, 55$, $ACB = 41, 22$. *Minimum.*

Tab. II. Fig. 2. Quod ſi igitur conſideremus duos circulos maximos $EABF$ et $ECC'C''F$, ſe inuicem ſub angulo $AEC = 85^\circ$ interſecantes, in quorum priore capiantur arcus $EA = 17^\circ$, $EB = 59^\circ$, ita vt ſit arcus $AB = 42^\circ$; manifeſtum eſt, ſi trianguli ſuper baſi AB conſtruendi vertex capiatur in ipſo puncto E, tum angulum ad verticem nihilo fore aequalem; dum autem iſte vertex in circulo maximo ECF paulatim elevatur, angulus ad verticem continuo increſcit, donec peruenerit in punctum C, vbi, vt vidimus, arcus $EC = 41^\circ, 43'$, et angulus $ACB = 46^\circ, 10'$. Hinc autem ſi vlterius aſcendamus, angulus verticalis iterum decreſcit, vsque ad punctum C', vbi arcus $EC' = 113^\circ, 55'$ et angulus $AC'B = 41^\circ, 22'$; inde vero vlterius progrediendo iſte angulus denuo paululum augebitur, vsque dum vertex punctum C'' attigerit, in quo arcus $EC'' = 124^\circ, 9'$ et angulus $ACB = 41^\circ, 23\frac{1}{2}'$. Dehinc porro iſte angulus continuo decreſcit, donec tandem in puncto F penitus euaneſcat. Euidens autem eſt etiam in inferiore circuli maximi ECF ſemiſſe easdem tres ſolutiones exhiberi poſſe, ita vt hoc caſu omnino ſex ſolutiones locum habeant, tria maxima ſcilicet, totidemque minima. Maxima enim ACB et $AC''B$ in inferiore ſemiſſe, vtpote negatiua, in mini-

minima abeunt, minimum vero A C′ B in maximum, quemadmodum rei natura poſtulat, quandoquidem maxima et minima ſe alternatim ſemper excipere debent.

Euolutio caſus
quo angulus α eſt rectus.

Sit angulus A E C $= \alpha = 90°$; erit A $=$ coſ. $(b - a)$, B $=$ ſin. a ſin. b; C $= 0$, vnde pro hoc caſu aequatio ſolutionem problematis continens tantum fit quadratica:

$$B + (2B - A) \text{tang.} z^2 = 0;$$

vnde fit

$$\text{tang.} z^2 = \frac{B}{A - 2B} = \frac{\text{ſin.}\, a\ \text{ſin.}\, b}{\text{coſ.}\,(a + b)}.$$

Arcus z autem commodius per ſinum exprimitur; cum enim ſit ſin. $z^2 = \frac{\text{tang.}\, z^2}{1 + \text{tang.}\, z^2}$, erit ſin. $z^2 = \frac{\text{ſin.}\, a\ \text{ſin.}\, b}{\text{coſ.}\, a\ \text{coſ.}\, b}$, ergo ſin. $z = \sqrt{\text{tang.}\, a\ \text{tang.}\, b}$.

Hic quidem duae tantum ſolutiones prodire videntur; verum probe notandum eſt, omittendo in aequatione generali terminum C tang. z^3, vnam ſolutionem iam fuiſſe expulſam. Cum enim ſit tang. $z^3 = \frac{(2B - A)\, \text{tang.}\, z^2 + B}{C}$, euidens eſt caſu C $= 0$ prodire tang. $z = \infty$, ideoque arcum E C $= z$ quadranti aequalem; atque haec ſolutio vtique eſt tertia pro caſu $\alpha = 90°$, quae adeo ſemper locum habet, cum prior ſolutio ſin. $z = \sqrt{\text{tang.}\, a\ \text{tang.}\, b}$ imaginaria euadat, quoties tangentium arcuum a et b productum vnitate fit maius.

Quoties igitur fuerit tang. a tang. $b > 1$, hoc eſt $a + b > 90°$, tantum vnica ſolutio locum habebit, qua ſcilicet arcus E C quadranti fiet aequalis, hocque caſu ambo arcus A C et B C pariter erunt quadrantes et anguli ad verticem maximi men-

ſura

ſura erit ipſe arcus A B, id quod etiam noſtra formula declarat generalis, quae poſito $a = 90^\circ$ et $z = 90^\circ$ euadit

$$\text{tang. } ACB = \frac{\sin.(b-a)}{\cos.(b-a)} = \text{tang. }(b-a) = \text{tang. } AB,$$

ideoque $ACB = AB$.

Quoties autem fuerit $\text{tang.} a \, \text{tang.} b < 1$, hoc eſt $a + b < 90^\circ$, inſuper duae aliae ſolutiones locum habent, quibus ſcilicet $\sin. z = \sqrt{\text{tang. } a \, \text{tang. } b}$, vnde pro z duplex naſcitur valor, quorum alter alterius complementum ad 180°. Hoc autem caſu angulus ad verticem ita definietur. Cum ſit

$$\text{tang. } ACB = \frac{\sin.(b-a) \sin. z}{A \sin. z^2 + B \cos. z^2},$$

ob $\sin. z = \sqrt{\text{tang. } a \, \text{tang. } b}$ et $\cos. z = \sqrt{\frac{\cos.(a+b)}{\cos. a \cos. b}}$; $A = \cos.(b-a)$ et $B = \sin. a \sin. b$, erit

$$\text{tang. } ACB = \frac{\sin.(b-a) \sqrt{(\text{tang. } a \, \text{tang. } b}}{\text{tang. } a \, \text{tang. } b \, (\cos.(b-a) + \cos.(b+a))}, \text{ ſiue}$$

$$\text{tang. } ACB = \frac{\sin.(b-a)}{2 \cos. a \cos. b \sqrt{\text{tang. } a \, \text{tang. } b}} = \frac{\sin.(b-a)}{2 \sqrt{\cos. a \cos. b \sin. a \sin. b}},$$

quae expreſſio reducitur ad hanc ſimpliciorem:

$$\text{tang. } ACB = \frac{\sin.(b-a)}{\sqrt{\sin. 2a \sin. 2b}},$$

Simpliciſſime autem ſinus huius anguli exprimitur; ex forma enim penultima fit

$$\sin. ACB = \frac{\sin.(b-a)}{\sqrt{(\sin.(b-a)^2 + 4 \cos. a \cos. b \sin. a \sin. b)}},$$

hoc eſt $\sin. ACB = \frac{\sin.(b-a)}{\sin.(b+a)}$.

Quoniam haec expreſſio maior eſt illa quam prior ſolutio dederat: $\sin. ACB = \sin.(b-a)$, quoties $a + b < 90^\circ$, manifeſtum eſt illam ſolutionem exhibere minimum ſimile illi quod ſupra inuenimus pro caſu $a = 85^\circ$, hoc tantum diſcrimine, quod puncta maximi C et C'' hic a punctis E et F, aeque

Tab. II. Fig. 3.

aeque ac punctum minimi C′, aequaliter diſtent. Si ſumma arcuum a et b quadranti fuerit aequalis, puncta C et C″ in C′ incidunt; ſin autem $a + b > 90°$, bina puncta C et C″ fiunt imaginaria. Vtroque igitur caſu angulus A C′ B, qui erat minimus inter maxima, nunc ipſe fit maximus, arcu AB eius menſuram exhibente.

Euolutio caſus
quo $A = 2B$.

Hic caſus ideo attentione dignus videtur, quod poſito $A = 2B$ ſecundum membrum aequationis cubicae euaneſcat, ita vt habeamus $\text{tang.}\, z^3 = \frac{B}{C}$. Manifeſtum autem eſt ob $A = 2B$, hoc eſt

$$\text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, b\, \text{ſin.}\, \alpha^2 + \text{coſ.}\, a\, \text{coſ.}\, b = 2\, \text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, b, \text{ ſiue}$$
$$\text{ſin.}\, \alpha^2 = 2 - \text{cot.}\, a\, \text{cot.}\, b,$$

hunc caſum locum habere non poſſe, niſi productum cotangentium amborum arcuum a et b intra limites 1 et 2 contineatur, quia alioquin angulus α fieret imaginarius.

Arcubus autem a et b ita aſſumtis, vt $\text{cot.}\, a\, \text{cot.}\, b > 1 < 2$, habebimus pro arcu E C hanc expreſſionem:

$$\text{tang.}\, z^3\, \frac{\text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, b}{\text{coſ.}\, \alpha\, \text{ſin.}\, (b + a)}. \quad \text{At}$$
$$\text{coſ.}\, \alpha = \sqrt{(\text{cot.}\, a\, \text{cot.}\, b - 1)} = \sqrt{\frac{\text{coſ.}\, (a + b)}{\text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, b}}, \text{ ideoque}$$
$$\text{tang.}\, z^3 = \frac{(\text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, b)^{\frac{3}{2}}}{\text{ſin.}\, (a + b) \sqrt{\text{coſ.}\, (a + b)}}.$$

Tum autem tangens anguli maximi erit

$$\text{tang.}\, ACB = \frac{\text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, (b - a)\, \text{ſin.}\, z}{B\, (1 + \text{ſin.}\, z^2) - C\, \text{ſin.}\, z\, \text{coſ.}\, z}.$$

Problema II.

Tab. II. Fig. 4. *Datis in circulo maximo E A B F duobus punctis A et B, in superficie sphaerae triangulum describere A C B, cuius vertex C in alio circulo maximo dato E C F reperiatur, et in quo summa arcuum A C + B C fiat minima omnium.*

Solutio.

Sint vt supra E et F puncta intersectionis amborum circulorum maximorum, eorumque inclinatio mutua, seu angulus A E C $= \alpha$, vocenturque punctorum datorum A et B a puncto E distantiae, hoc est arcus E A $= a$, E B $= b$ et arcus incognitus E C $= z$; tum vero ponatur arcus A C $= p$ et arcus B C $= q$, atque ex Sphaericis constat fore ex triangulis binis A E C et B E C

$$\text{cos.}\, p = \text{cos.}\, a \,\text{cos.}\, z + \text{sin.}\, a \,\text{sin.}\, z \,\text{cos.}\, \alpha,$$
$$\text{cos.}\, q = \text{cos.}\, b \,\text{cos.}\, z + \text{sin.}\, b \,\text{sin.}\, z \,\text{cos.}\, \alpha,$$

vnde differentiando habebimus:

$$\partial p = \frac{\partial z\,(\text{cos.}\, a\, \text{sin.}\, z - \text{sin.}\, a\, \text{cos.}\, \alpha\, \text{cos.}\, z)}{\text{sin.}\, p},$$
$$\partial q = \frac{\partial z\,(\text{cos.}\, b\, \text{sin.}\, z - \text{sin.}\, b\, \text{cos.}\, \alpha\, \text{cos.}\, z)}{\text{sin.}\, q}.$$

Quum vero summa arcuum $p + q$ minima esse debeat, necesse est vt fiat $\partial p + \partial q = 0$; aequationis autem inde resultantis resolutio in calculos maxime taediosos praecipitaret, propterea quod sin. p et sin. q per formulas radicales satis complicatas exprimuntur; vnde aliam viam commodiorem ad Problema solvendum insistere debemus.

Consideremus igitur punctum c ipsi trianguli quaesiti vertici C proximum, ad quod si ducantur ex A et B arcus A c et B c, in eosque ex C demittantur perpendicula C r, C s,

Cs, erit $cr = \partial p$ et $cs = \partial q$; vnde ſi vocentur anguli $ECA = \Phi$, $ECB = \psi$, erit $cr = \partial p = \partial z \operatorname{coſ.} \Phi$ et $cs = \partial q = \partial z \operatorname{coſ.} \psi$. Cum igitur fieri debeat $\partial p + \partial q = 0$, habebimus $\partial z \operatorname{coſ.} \Phi + \partial z \operatorname{coſ.} \psi = 0$, vnde patet, quo $AC + BC$ fiat minimum, fieri debere $\operatorname{coſ.} \Phi = - \operatorname{coſ.} \psi$, ideoque $\Phi = 180° - \psi$, ſiue $\Phi + \psi = 180°$, ita vt etiam fieri debeat $\operatorname{tang.} \Phi + \operatorname{tang.} \psi = 0$.

Ex triangulis autem ECA et ECB colligitur

$$\operatorname{tang.} \Phi = \frac{\operatorname{ſin.} a \operatorname{ſin.} \alpha}{\operatorname{coſ.} a \operatorname{ſin.} z - \operatorname{ſin.} a \operatorname{coſ.} z \operatorname{coſ.} \alpha},$$

$$\operatorname{tang.} \psi = \frac{\operatorname{ſin.} b \operatorname{ſin.} \alpha}{\operatorname{coſ.} b \operatorname{ſin.} z - \operatorname{ſin.} b \operatorname{coſ.} z \operatorname{coſ.} \alpha},$$

vnde ſequens emergit aequatio:

$$\left.\begin{array}{l} + \operatorname{ſin.} a \operatorname{coſ.} b \operatorname{ſin.} z - \operatorname{ſin.} a \operatorname{ſin.} b \operatorname{coſ.} \alpha \operatorname{coſ.} z \\ + \operatorname{coſ.} a \operatorname{ſin.} b \operatorname{ſin.} z - \operatorname{ſin.} a \operatorname{ſin.} b \operatorname{coſ.} \alpha \operatorname{coſ.} z \end{array}\right\} = 0,$$

quae reducitur ad hanc ſimpliciorem:

$$\operatorname{ſin.} (a + b) \operatorname{ſin.} z = 2 \operatorname{ſin.} a \operatorname{ſin.} b \operatorname{coſ.} \alpha \operatorname{coſ.} z,$$

ex qua pro puncto C hanc deducimus determinationem:

$$\operatorname{tang.} z = \frac{2 \operatorname{ſin.} a \operatorname{ſin.} b \operatorname{coſ.} \alpha}{\operatorname{ſin.} (a + b)}.$$

Hoc igitur modo problema, quod in ſoluendo calculos moleſtiſſimos minari videbatur, facillime reſoluere licuit.

Corollarium 1.

Hic ſtatim patet, caſu quo ambo circuli maximi ſibi normaliter inſiſtunt, ſemper fore $z = 0$, ita vt trianguli vertex in ipſum punctum E incidat, quo caſu ſumma laterum erit maxima quando ſumma arcuum $a + b$ maior fuerit duobus quadrantibus, ſin autem minor, minima. At ſi iſta ſumma fuerit $a + b = 180$, neque maximum neque minimum locum habebit, propterea quod, vbicunque punctum C accipiatur,

piatur, summa arcuum A C + B C semper duobus quadrantibus aequalis manet.

Corollarium 2.

Quicquid autem sit angulus α, sumto $a + b = 180°$, erit tang. $z = \infty$, ideoque $z = 90°$, quo igitur casu punctum C quadrante distabit a puncto E. Sin autem fuerit $a + b = 90°$, fiet tang. $z = 2$ sin. a cos. a cos. $\alpha =$ sin. $2a$ cos. α.

Problema III.

Tab. II. Fig. 5. *Datis in circulo maximo E A B F duobus punctis A et B, in superficie sphaerae triangulum describere A C B, cuius vertex C in alio circulo maximo dato E C F reperiatur cuiusque area sit maxima.*

Solutio.

Sint omnia vt in binis praecedentibus problematibus, scilicet E A $= a$, E B $= b$, A E C $= \alpha$, E C $= z$; tum vero statuatur area trianguli A E C $=$ X et area trianguli B E C $=$ Y, eritque area trianguli A C B $=$ Y — X, quae cum maxima fieri debeat, necesse est vt fiat $\partial Y - \partial X = 0$; Hic autem iterum si areas X et Y more solito exprimere et differentialia sumere vellemus, in calculos inextricabiles illaberemur: sequenti autem modo res facillime expedietur.

Consideretur punctum vertici C proximum c, et ductis arcubus circulorum maximorum A c et B c habebimus duo triangula elementaria C A c et C B c, quae cum sint incrementa triangulorum A E C & B E C, eorum areae exprimentur per ∂X et ∂Y.

Tracte-

Tractemus nunc primo triangulum elementare $C A c$, cuius area, posito angulo infinite paruo $C A c = \partial \omega$ et arcu $A C = p$, vti constat, ita exprimitur: $\partial X = \partial \omega (1 - \text{cos.}\, p)$. Ponatur autem angulus $E C A = \Phi$, eritque in triangulo $C A c$, $\partial z : \partial \omega = \text{sin.}\, p : \text{sin.}\, \Phi$, vnde fit $\partial \omega = \frac{\partial z\, \text{sin.}\, \Phi}{\text{sin.}\, p}$, consequenter $\partial X = \frac{\partial z\, \text{sin.}\, \Phi (1 - \text{cos.}\, p)}{\text{sin.}\, p}$. At vero ex triangulo $E A C$ habebimus $\text{cos.}\, p = \text{cos.}\, a\, \text{cos.}\, z + \text{sin.}\, a\, \text{sin.}\, z\, \text{cos.}\, \alpha$; tum vero

$$\text{sin.}\, a : \text{sin.}\, \Phi = \text{sin.}\, p : \text{sin.}\, \alpha,$$

siue $\text{sin.}\, \Phi = \frac{\text{sin.}\, a\, \text{sin.}\, \alpha}{\text{sin.}\, p}$, quo in expressione pro ∂X inuenta substituto fiet $\partial X = \frac{\partial z\, \text{sin.}\, a\, \text{sin.}\, \alpha (1 - \text{cos.}\, p)}{\text{sin.}\, p^2}$, siue $\partial X = \frac{\partial z\, \text{sin.}\, a\, \text{sin.}\, \alpha}{1 + \text{cos.}\, p}$, consequenter $\partial X = \frac{\partial z\, \text{sin.}\, a\, .\, \text{sin.}\, \alpha}{1 + \text{cos.}\, a\, \text{cos.}\, z + \text{sin.}\, a\, \text{sin.}\, z\, \text{cos.}\, \alpha}$.

Cum in ista expressione tantum arcus $E A = a$, $E C = z$ vna cum angulo $A E C = \alpha$ occurrant, et triangulum $B E C$ eundem habeat arcum $E C$ et angulum $A E C$, eius incrementum, siue trianguli $C B c$ elementaris area inuenietur, si in expressione modo pro ∂X inuenta loco a scribatur b, vnde fiet $\partial Y = \frac{\partial z\, \text{sin.}\, b\, \text{sin.}\, \alpha}{1 + \text{cos.}\, b\, \text{cos.}\, z + \text{sin.}\, b\, \text{sin.}\, z\, \text{cos.}\, \alpha}$.

Quoniam igitur pro adimplenda conditione maximae areae fieri debet $\partial Y - \partial X = 0$, inde sequens emergit aequatio:

$$\partial z\, \text{sin.}\, \alpha \left(\frac{\text{sin.}\, b}{1 + \text{cos.}\, b\, \text{cos.}\, z + \text{sin.}\, b\, \text{sin.}\, z\, \text{cos.}\, \alpha} - \frac{\text{sin.}\, a}{1 + \text{cos.}\, a\, \text{cos.}\, z + \text{sin.}\, a\, \text{sin.}\, z\, \text{cos.}\, \alpha}\right) = 0$$

quae sublatis fractionibus, factaque diuisione per factorem communem $\partial z\, \text{sin.}\, \alpha$, abit in hanc:

$$\left\{\begin{matrix} + \text{sin.}\, b + \text{cos.}\, a\, \text{sin.}\, b\, \text{cos.}\, z + \text{sin.}\, a\, \text{sin.}\, b\, \text{cos.}\, \alpha\, \text{sin.}\, z \\ - \text{sin.}\, a - \text{sin.}\, a\, \text{cos.}\, b\, \text{cos.}\, z - \text{sin.}\, a\, \text{sin.}\, b\, \text{cos.}\, \alpha\, \text{sin.}\, z \end{matrix}\right\} = 0,$$

quae porro ad sequentem formam concinniorem reducitur:

 sin.

$\sin. b - \sin. a - \cos. z \sin. (a - b) = 0$, vnde fit $\cos. z = \frac{\sin. b - \sin. a}{\sin. (a - b)}$.

Corollarium 1.

Cum fit $\sin. b - \sin. a = 2 \sin. \frac{b - a}{2} . \cos. \frac{b + a}{2}$ et

$$\sin. (a - b) = - 2 \sin. \frac{b - a}{2} \cos. \frac{b - a}{2},$$

cofinus arcus E C $= z$ etiam hoc modo exprimi poteft:

$$\cos. z = - \frac{\cos. \frac{b + a}{2}}{\cos. \frac{b - a}{2}}, \text{ vnde fit}$$

$$\cos. FC = - \cos. EC = + \frac{\cos. \frac{1}{2} (b + a)}{\cos. \frac{1}{2} (b - a)};$$

vbi notaffe juuabit, ob arcus $\frac{1}{2} (b + a)$ et $\frac{1}{2} (b - a)$ quadrante minores, femper fore $\cos. \frac{1}{2} (b - a) > \cos. \frac{1}{2} (b + a)$, vnde euidens eft folutionem femper effe poffibilem.

Corollarium 2.

Cum fit $\cos. FC = \frac{\cos. \frac{1}{2} (b + a)}{\cos. \frac{1}{2} (b - a)}$, erit

$$\frac{1 - \cos. FC}{1 + \cos. FC} = \text{tang.} \tfrac{1}{2} FC^2 = \frac{\cos. \frac{1}{2} (b - a) - \cos. \frac{1}{2} (b + a)}{\cos. \frac{1}{2} (b - a) + \cos. \frac{1}{2} (b + a)},$$

hoc eft $\text{tang.} \frac{1}{2} FC^2 = \text{tang.} \frac{1}{2} a \text{ tang.} \frac{1}{2} b$, fiue etiam

$$\cot. \tfrac{1}{2} EC^2 = \text{tang.} \tfrac{1}{2} EA . \text{tang.} \tfrac{1}{2} EB;$$

vnde fequitur haec egregia proprietas: quod cotangens dimidii arcus E C fit media proportionalis inter tangentes dimidiorum arcuum E A et E B.

Corollarium 3.

Si ambo puncta A et B aequidiftent ab interfectionibus circulorum maximorum E et F, fibi diametraliter oppofitis, ob ob E A $=a$ et E B $=b=180^{\circ}-a$ erit $\frac{b+a}{2}=90^{\circ}$, ideoque cof. E C $=$ cof. F C $=0$, confequenter E C $=$ F C $=90^{\circ}$. Hoc igitur cafu triangulum, cuius area eft maxima erit ifofceles.

Scholion.

In hoc poftremo problemate id notatu dignum deprehenditur, primo quod quantitas arcus E C prorfus non pendeat ab inclinatione mutua circulorum maximorum, fed per folos arcus E A et E B determinetur; tum vero quod hoc problema quodammodo in Sphaera conftrui queat, quemadmodum fequentia breuiter monftrabunt.

Conftructio problematis.

Bifecta bafi A B in D, ex A ad eam normaliter erigatur arcus A G tantus, vt arcus D G aequalis fiat arcui D E, quo facto ex F abfcindatur in circulo maximo E C F arcus F C $=$ A G, eritque C vertex trianguli quaefiti, et trianguli A C B area maxima.

Demonftratio.

Cum fit E A $=a$, E B $=b$, erit A D $=\frac{b-a}{2}$ et E D $=\frac{b+a}{2}$. In triangulo rectangulo D A G habebimus

$$\text{cof. } DG = \text{cof. } ED = \text{cof. } AD \,.\, \text{cof. } AG,$$ confequenter

$$\text{cof. } AG = \frac{\text{cof. } ED}{\text{cof. } AD} = \frac{\text{cof. } \frac{1}{2}(b+a)}{\text{cof. } \frac{1}{2}(b-a)}.$$

At A C $=$ F C, ideoque cof. F C $=\frac{\text{cof. } \frac{1}{2}(b+a)}{\text{cof. } \frac{1}{2}(b-a)}$, quae cum fit ea ipfa expreffio quam pro vertice trianguli inuenimus, cuius area maxima, triangulum hoc modo conftructum maximam aream habeat neceffe eft.

DE PROIECTIONE SPHAERAE IN SVPERFICIEM CONICAM.

Auctore
F. T. SCHVBERT.

Comment. exhib. d. 7 Decembris 1786.

§. 1.

Cum ſuperficies Sphaerica in plano exacte repraeſentari nullo modo poſſit, via maxime naturalis videtur, vt illa primum in aliam ſuperficiem curuam proiiciatur, quae propius ad Planum accedit, adeoque quaſi inter Sphaeram atque Planum eſt medium quoddam, ac deinde haec proiectio ad Planum reducatur. Quemadmodum enim lineae curuae ſunt vel ſimplicis vel duplicis curuaturae, ita per analogiam ſuperficies curuae, quas inter maximum obſeruatur diſcrimen, ſi cum Plano conferantur, in ſuperficies curuas ſimplicis et duplicis curuaturae diuidi poſſent. Dantur ſcilicet ſuperficies, quas in Plano euoluere licet, quae adeo quoque vice verſa per incurvationem Plani generari poſſunt, vnde, vt ita dicam, ſemel tantum vel ſecundum vnam directionem incuruantur: dantur aliae, quae in Plano euolui ſeu per Plani flexionem gigni prorſus nequeunt, aut, ſi per Plani incuruationem ortae fingerentur, iſta incuruatio non ſecundum vnam ſed plures directiones facta concipi deberet, ſiue eſſe deberet *duplex* curuatura. Speciei

ciei posterioris est Sphaera, prioris Conus atque Cylindrus. Quantumuis enim heterogeneae sint superficies curuae ac planae, sine dubio tamen tanta non intercedit heterogeneitas inter Conum Cylindrumue et Planum, quanta inter Sphaeram Planumque. Cum itaque methodus in omnibus scientiis recepta iubeat, rem arduam successiue declarare, et velut in aequationibus Algebraicis complicatis nouam introducere incognitam, inquirere volui, quidnam esset resultaturum, si superficies Sphaerica in Conum Sphaeram tangentem proiiceretur, tumque Conus in Planum euolueretur. Quanquam enim ista methodus haud praebeat proiectionem, quae ceteris vsitatis palmam praeripiat, tamen ceu disquisitio geometrica de Coni cum Sphaera coniunctione potest considerari, quam eo magis cum Academia communicare conatus sum, cum munus ab Academia mihi impositum huiusmodi disquisitiones praecipue a me poscere videatur.

§. 2. Sit itaque A P Q hemisphaerium, A Q Aequator, P Polus, E e Parallelus per medium Zonae proiiciendae transiens, in quo Parallelo Sphaeram tangat Conus E p e, atque quoduis Sphaerae punctum d proiiciatur in D vbi radius C d Cono occurrit: ponitur igitur oculus in centro C. Hinc statim patet, quemcunque Meridianum P E proiici in lineam rectam p E, quae est coni latus; proiectio enim est sectio conica per Coni axem p C transiens. Paralleli vero in circulos basi coni parallelos proiiciuntur: est enim Parallelus $d\,\delta$ basis coni $d\,C\,\delta$, qui prolongatus vbi alteri cono E p e occurrit, determinat paralleli proiectionem. Ponatur nunc latitudo Paralleli medii $AE = \lambda$, $Ad = \beta$: erit $Ep = \cot.\lambda$, $Cp = \operatorname{cosec}.\lambda$, $ED = \operatorname{tang}.(\beta - \lambda)$, $pD = \frac{\cos.\beta}{\sin.\lambda\,\cos.(\beta-\lambda)}$, assumto radio Sphaerae $= 1$. Est enim Tab. III. Fig. 1.

 p D

$$pD = Ep - ED = \cot.\lambda - \tang.(\beta-\lambda) = \cot.\lambda - \frac{\tang.\beta - \tang.\lambda}{1+\tang.\beta \tang.\lambda}$$
$$= \frac{\cot.\lambda + \tang.\lambda}{1+\tang.\beta \tang.\lambda} = \frac{1+\tang.\lambda^2}{\tang.\lambda + \tang.\lambda^2 \tang.\beta} = \frac{\sec.\lambda^2}{\tang.\lambda + \tang.\lambda^2 \tang.\beta}$$
$$= \frac{\cos.\beta}{\sin.\lambda \cos.\lambda \cos.\beta + \sin.\beta \sin.\lambda^2} = \frac{\cos.\beta}{\sin.\lambda \cos.(\beta-\lambda)}.$$

§. 3. Si iam Conus in planum euoluatur, Paralleli iterum fiunt circuli, quorum radii funt Meridiani, atque centrum commune proiectio Poli p, et cuiuscunque Paralleli fub latitudine β radius eft $= \frac{\cos.\beta}{\sin.\lambda \cos.(\beta-\lambda)}$. Verum circuli ifti, licet totum Parallelum feu 360° repraefentent, non funt peripheriae integrae, fed bafis Coni Ee, quae erat circulus radii RE, euoluitur in circulum, cuius radius Ep. Cum itaque peripheria Ee eandem retineat longitudinem abfolutam, atque anguli, quos arcus aequales diuerforum circulorum metiuntur, fint inuerfe vt radii circulorum: fi bafis euoluta Ee contineat Φ gradus, erit $\Phi = \frac{RE}{Ep} 360°$. Idem quoque de ceteris Parallelis patet, quia funt omnes concentrici, infuperque inde fequitur, quod fit e. gr. pro Parallelo DL, $\Phi = \frac{SD}{pD} 360°$, et $SD : pD = RE : Ep$. Erit itaque

$$\Phi = \frac{\cos.\lambda}{\cot.\lambda} 360° = 360° \sin.\lambda.$$

Hic arcus Φ totam peripheriam vel 360° longitudinis exhibet; vnde cum omnes gradus longitudinis fint inter fe aequales, erit in proiectione arcus Paralleli, qui 1° longitudinis exhibet, $= \sin.\lambda$ in partibus vnius gradus.

Tab. III. Fig. 2. §. 4. Facilis ergo proiiciendi methodus hinc iam perfpicitur. Ducatur (Fig. 2.) recta pF, repraefentans Meridianum per medium regionis proiiciendae tranfeuntem. Sumatur in menfura arbitraria $pE = \cot.\lambda$, atque radio Ep ex centro p defcribatur circulus Ee, medium Parallelum exhibens. Abfcinſcindantur $ED = EF = \text{tang. } 1°$, $EG = \text{tang. } 2°$, etc. eruntque circuli ex centro p per D, F, G ducti Paralleli 1°, 2°, etc. a medio vtrinque diſtantes. Ponatur iam $\text{ſin.}\,\lambda = \mu$, pro radio $= 1$, et quaeratur chorda $5\,\mu$, $10\,\mu$, etc. graduum, ad radium $E\,p = \text{cot.}\,\lambda$ in ſcala aſſumta pertinens, eaque ab E ad e, et ſic porro vtrinque abſcindatur: atque arcu E e in 5 vel 10 partes aequales diuiſo, et per diuiſionum puncta ad p rectis ductis, erunt illae Meridiani 1° a ſe inuicem diſtantes. Si regio proiicienda Aequatori ſit propinqua, radii E p majores fient, quam vt eorum ope ex centro p circuli duci commode queant. Sumatur tunc E p pro axe, E pro abſciſſarum initio, abſcindantur $E\,n = x$ et $n\,e = v$ in ratione ſinus verſi ad ſinum rectum ſicque tot puncta e determinentur, vt per ea circulus E r e vel manu libera vel more vſitato mechanico duci poſſit: pariterque in ceteris Parallelis erit procedendum.

§. 5. Quodſi regio proiicienda ſit Zona Aequatorem includens, facile patet, Conum abire in Cylindrum Sphaeram tangentem. Fit nempe latus Coni $E\,p = \infty$, ſi $\lambda = 0$. Pro ceteris Parallelis eſt radius $p\,D = \frac{\text{coſ. } \beta}{\text{ſin. } \lambda \text{ coſ. } \beta} = \frac{1}{0} = \infty$, vnde Aequator omnesque Paralleli proiiciuntur in lineas rectas, aeque ac Meridiani in rectas iis normales. Gradus latitudinis in eadem proportione tangentium vt ſupra creſcunt. Fit enim $D\,E = \text{tang. } \beta$.

§. 6. Inquiramus nunc, quomodo, quae ad bonam requiruntur proiectionem, per hanc obtineantur. Primo quidem requiſito, vt Meridiani Parallelis ſint normales, ſatisfit. Ad cetera quod attinet, ducatur meridianus $p\,\pi$, priori $p\,F$ proximus, vt et Parallelus $\mu\,\nu$ Parallelo $D\,\delta$ infinite propinquus. Appelletur $E\,D = x$, arcus $D\,\delta = y$. Repraeſentet $D\,\delta$ longitudinem γ graduum, erit curuatura arcus $D\,\delta = \gamma°\ \text{ſin.}\,\lambda$, vel in par-

partibus radii, $y = \gamma\, p$ D fin. $\lambda = \frac{\gamma\, cof.\, \beta}{cof.\, (\beta - \lambda)}$, et $x =$ tang. $(\beta - \lambda)$, vnde

$$\partial x = \frac{\partial \beta}{cof.\, (\beta - \lambda)^2},\ \partial y = \frac{\partial \gamma\, cof.\, \beta}{cof.\, (\beta - \lambda)},$$

adeoque $\partial x : \partial y = \partial \beta : \partial \gamma$ cof. β cof. $(\beta - \lambda)$, cum in Sphaera obtineat proportio, $\partial \beta : \partial \gamma$ cof. β. Vnde patet, quo minor $\beta - \lambda$, eo magis hanc proportionem cum genuina in Sphaera conuenire, ac prope Parallelum medium E e figuras minimas in proiectione et Sphaera perfecte esse similes. Ibi nempe Conus cum Sphaera coincidit, ac fit E $m =$ tang. $(\beta - \lambda) = \beta - \lambda = \partial \beta$, et E $r = \partial \gamma$ E p fin. $\lambda = \partial \gamma$ fin. λ cot. $\lambda = \partial \gamma$ cof. λ, vti esse debebat. Ceterum est $\partial x\, \partial y = \frac{\partial \beta\, \partial \gamma\, cof.\, \beta}{cof.\, (\beta - \lambda)^3}$, vnde et prope parallelum medium areas eadem proportione, quae in Sphaera obtinet, repraesentari patet.

§. 7. Cum circuli maximi, qui vel sunt meridiani, vel Aequator, proiiciantur aut in lineas rectas aut in circulum, quaeramus iam, in qualem lineam alius quisque circulus maximus proiiciatur. Cum ille per Sphaerae centrum transeat, ideoque omnium eius punctorum proiectiones per rectas e centro in eius plano ductas determinentur, totius circuli proiectio in Coni superficie nondum euoluta erit sectio conica, quae sicut ex natura Coni constat, si simul per axem transeat, praebet angulum rectilineum, si vero axi sit normalis, oritur circulus: neque aliter euenire poterat, dum priore casu circulus proiiciendus est Meridianus, posteriore Aequator. Ex Coni natura porro sequitur: si angulus, quem circulus ille cum Aequatore facit, fuerit aequalis angulo pEe = ECP $= 90° - \lambda$, (Fig. 1.) proiectionem fore Parabolam; si vero angulus ille fuerit $> 90° - \lambda$, proiectionem fore Hyperbolam; Ellipsin autem, si angulus ille $< 90° - \lambda$. Cuiuscunque ergo circuli maximi proiectio in Cono erit aut angulus rectilineus, aut circulus, aut parabola, aut hyperbola,

bola, aut ellipsis, prout maxima eius latitudo seu inclinatio ad aequatorem fuerit $= 90^\circ$, vel $= 0$, vel $= 90^\circ - \lambda$, vel $> 90^\circ - \lambda$, vel denique $< 90^\circ - \lambda$. Primo atque secundo casu natura proiectionis non mutatur coni superficie in planum euoluta. Ceterae vero sectiones conicae euolutione coni in lineas diuersae naturae degenerant, imo fieri possunt transcendentes. Si enim (Fig. 3.) A M Q e sit proiectio circuli C e (Fig. 1.), $p\,e$ meridianus P e, atque dicatur Q H $=$ Q P H $= \gamma$; H K $= \beta$, (Fig. 1.) $p\,\varepsilon = x$, (Fig. 3.) ε Q $= y$, et Q proiectio puncti K, habemus Q $p\,\varepsilon = \gamma^\circ$ sin. λ, $y = x$ tang. (γ° sin. λ), et

$$x^2 + y^2 = p\,Q^2 = \frac{\cos.\beta^2}{\sin.\lambda^2(\cos.(\beta-\lambda))^2}$$

$$= \frac{1}{\sin.\lambda^2(\cos.\lambda^2 + \sin.2\lambda\,\tan g.\beta + \sin.\lambda^2\,\tan g.\beta^2)};$$

inter β et γ denique hanc analogiam, tang. H K $=$ sin. C H tg. K C H, vel posito K C H $= \alpha$, tang. $\beta =$ tang. α cos. γ. Quoniam hic in vna aequatione γ, in altera γ sin. λ occurrit, non nisi aequatio transcendens inter x et y obtinebitur, nisi forte sin. λ valorem habeat rationalem. Statuamus e. gr. $\lambda = 30^\circ$; erit $\frac{y}{x} =$ tang. $\frac{1}{2}\gamma$, adeoque sin. $\frac{1}{2}\gamma = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$, cos. $\frac{1}{2}\gamma = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$, vnde elicitur cos. $\gamma = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; fietque hocce valore loco cos. γ, et tang. α cos. γ loco tang. β substitutis,

$$x^2 + y^2 = \frac{16(x^2+y^2)^2}{3(x^2+y^2)^2 + 2\tan g.\alpha\sqrt{3}(x^4-y^4) + \tan g.\alpha^2(x^2-y^2)^2}$$

seu $16(x^2+y^2) = 3(x^2+y^2)^2 + 2$ tang. $\alpha\sqrt{3}(x^4-y^4) +$ tang. $\alpha^2(x^2-y^2)^2$.

§. 8. Si angulus α crescat vsque ad 90°, circulus C e abit in Meridianum P B (Fig. 1.), qui 90° distat a Meridiano P e seu nostro axe $p\,e$. Aequatio vero nostra diuisa per (tang. $\alpha)^2$, quia posito $\alpha = 90^\circ$, omnes termini prae vltimo euanescunt, praebet $x^2 - y^2 = 0$, vel $y = \pm x$. Proiicitur itaque

Meridianus P B in rectam p Q (Fig. 3.), quae axin secat sub angulo Q $p\,e = 45°$, ob $y = x$; prorsus vti esse debebat, cum angulus Q $p\,e$ sit $= \gamma$ sin. $\lambda = 45°$, ob $\gamma =$ B P $e = 90°$, et sin. $\lambda =$ sin. $30° = \frac{1}{2}$. Duplex valor ipsius y ex proiectione alterius partis Meridiani B P vltra P sese extendentis originem trahit.

Ponatur $\alpha = 0$, vt proiectio sit Aequatoris, quam circulum esse oportet. Pro hocce casu aequatio nostra praebet: $x^2 + y^2 = \frac{16}{3}$, quae est aequatio pro circulo, cuius centrum est p, et radius $= \frac{4}{\sqrt{3}}$. Hic scilicet radius proiectionis est (Fig. 1.)

$$p\,\mathrm{M} = p\,\mathrm{C}\ \text{sec.}\ \mathrm{C}\,p\,\mathrm{M} = \text{cosec.}\,\lambda\ \text{sec.}\,\lambda = \frac{1}{\sin.\lambda\ \cos.\lambda} = \frac{4}{\sqrt{3}},$$

sicut per aequationem inuenimus.

§. 9. Proiectionem nostram cum Delisliana non parum conuenire, solus intuitus vtriusque proiectionis iam docet. Differt autem nostra ab illa in eo, quod sit *proiectio* in sensu stricto, siquidem quoduis punctum per rectam ex oculo in certo puncto assumto ductam in tabulam proiicitur, quod in proiectione Delisliana aliter sese habet. Praeterea nostra a ceteris methodis eo differt, quod proiectionis tabula hic non sit Planum sed superficies conica. Cum porro in proiectione Delisliana centrum Parallelorum commune non sit Poli proiectio, sed aliquot gradus vltra eam situm sit, hinc sequitur, secundum hanc methodum Polum (si mappa eo vsque continuata supponeretur) in circulum proiici, cum ex nostra methodo Poli proiectio sit punctum, et quidem commune Parallelorum centrum.

§. 10. Quodsi iam regio proiicienda sit circumpolaris, Conus abit in Planum Sphaeram in Polo tangens, ac proiectio nostra

nostra cum proiectione sic dicta *centrali* coincidit. Eodem autem casu tres proiectiones, centralis, stereographica, et Delisliana, si huic casui adaptetur, haud sensibiliter differunt. Pro priore enim est cuiuscunque Paralleli, cuius a Polo distantia β, radius $=$ tang. β, pro secunda $= 2$ tang. $\frac{1}{2}\beta$, si nempe tabula proiectionis non in centro sed Sphaeram in Polo tangens assumitur. Quia vero β hic aliquot gradus non excedere statuitur, est sine errore perceptibili, 2 tang. $\frac{1}{2}\beta =$ tang. β.

Videamus adhuc, quomodo proiectio Delisliana huic casui adaptetur. Sint (Fig. 2.) $G g$, $E e$, bini Paralleli principales, quorum gradus sunt in proportione cosinuum latitudinis, vt in Sphaera. Si itaque distantia prioris a Polo $= \beta$, posterioris $= b$, $G g$, $E e$ arcus vnius gradus longitudinis, et longitudo assumta vnius gradus in Meridiano $= \delta$; erit $G g = \delta$ sin. β, $E e = \delta$ sin. b, angulus $G p g = \frac{\alpha \delta \text{ sin. } \beta}{p G}$, vbi $\alpha = 57^\circ.\ 17'.\ 44''\ldots$, seu gradus, minuta, etc. quae arcus radio aequalis continet. Eodem modo erit $E p e = \frac{\alpha \delta \text{ sin. } b}{p E}$; qui anguli cum sint aequales, habebimus $\frac{\text{sin. } \beta}{p G} = \frac{\text{sin. } b}{p E}$. Quia hic vero centrum p vltra Polum assumitur, sit Polus in q, x gradus citra p, vt fiat $p q = x \delta$: vnde erit $p G = (\beta + x)\delta$, $p E = (b + x)\delta$, et aequatio nostra: $\frac{\text{sin. } \beta}{\beta + x} = \frac{\text{sin. } b}{b + x}$, vnde reperitur $x = \frac{b \text{ sin. } \beta - \beta \text{ sin. } b}{\text{sin. } b - \text{sin. } \beta}$. Hinc statim perspicitur, x numquam fieri posse negatiuam, seu p non cadere posse infra Polum. Si enim numerator esset negatiuus, h. e. $\frac{b}{\text{sin. } b} < \frac{\beta}{\text{sin. } \beta}$, esse quoque oporteret $b < \beta$, quia omnis huiusmodi fractio $\frac{b}{\text{sin. } b}$ eo est minor, quo minor arcus b: est igitur et sin. $b <$ sin. β, seu denominator negatiuus, adeoque x numquam valorem recipit negatiuum. Inspiciamus autem, an fieri possit $x = 0$; tunc esse oportet

$b : \beta$

$b : \beta = \text{sin.}\, b : \text{sin.}\, \beta$, h. e. arcus esse debent in ratione sinuum, quod saltem de arcubus valde paruis dici potest, adeoque nostro casu poni potest $x = 0$. Tunc angulus $E p e$ fit $= \frac{\alpha\,\delta\,\text{sin.}\,\beta}{\delta\,\beta}$, vbi sin. β in partibus radii $= 1$, β vero in gradibus exprimitur. Loco β ergo sumi debet $\alpha\,\beta$, vt nempe β non gradus sed longitudinem arcus pro radio $= 1$ significet, vnde est

$$E\, p\, e = \frac{\text{sin.}\,\beta}{\beta} = 1^\circ,$$

quia nostro casu sinus ab arcubus vix differunt. Est itaque in projectione Delisliana non secus ac in ceteris, angulus, quem proiectiones duorum Meridianorum faciunt, idem, quem ipsi Meridiani in Sphaera formant. Ceterum est cuiuscunque Paralleli radius $= p\,G = \alpha\,\beta\,\delta$, vbi $\alpha\delta$ est radius vel vnitas assumta, quod sequitur ex proportione, $1^\circ : \delta = \alpha^\circ$ ad radium assumtum. Hinc $p\,G = \beta = \text{tang.}\,\beta = 2\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\,\beta$. Vnde patet, omnes istas proiectiones prope Polum conuenire, atque paruum segmentum polare in eadem proportione ac in ipsa Sphaera repraesentari.

§. 11. Supra iam monui, casu, quo regio proiicienda est Zona Aequatorialis, Conum abire in Cylindrum, Parallelos et Meridianos in lineas rectas inter se normales. Quodsi vnus gradus circuli maximi dicatur δ, erit in Aequatore omnibusque Parallelis vnus gradus longitudinis $= \delta$, siquidem integra Aequatoris peripheria in rectam euoluta in 360 partes aequales est diuidenda. Si vero A C N (Fig. 1.) $= 1^\circ$, erit in proiectione A N $= \text{tang.}\, 1^\circ$, et gradus latitudinis in ratione tangentium crescunt. Assumto ergo Aequatore pro axe, et nuncupatis abscissis x, ordinatis orthogonalibus y, longitudine γ, latitudine β, erit $x = \gamma$, $y = \text{tang.}\,\beta$, $\partial x = \partial\gamma$, $\partial y = \frac{\partial\beta}{\text{cos.}\,\beta^2}$,

adeo-

adeoque $\partial x : \partial y = \partial \gamma \operatorname{cof.} \beta^2 : \partial \beta$, cum proportio in Sphaera fit $\partial \gamma \operatorname{cof.} \beta : \partial \beta$. Eſt porro differentiale areae $= \partial x \, \partial y = \frac{\partial \beta \, \partial \gamma}{\operatorname{cof.} \beta^2}$, in Sphaera $\partial \beta \, \partial \gamma \operatorname{cof.} \beta$.

§. 12. Ceterum patet, vnum dari caſum, vbi haec proiiciendi methodus maiore cum vtilitate quam alia vlla adhiberi poſſe videtur; nimirum ſi pars globi terraquei proiicienda ſit Zona mediocris latitudinis.

DE PROIECTIONE SPHAERAE AD DETERMINANDAM AREAM MAXIME IDONEA.

Auctore.
F. T. SCHVBERT.

Conuent. exhib. d. 24 *Mai* 1787.

§. 1.

Varii ſunt fines, quibus mappae geographicae accurate delineatae inſeruire poſſunt; qui cum vnica mappa obtineri nequeant omnes, ſat multae iam excogitatae ſunt proiectionis methodi, quarum ſingulae certo cuidam fini ſunt accommodatae. Sic e. gr. haec proiectio ad determinandam Loxodromiam aptiſſima in mappis nauticis merito eligitur, illa in figura prouinciarum legitime repraeſentanda ceteris antecellit, alia locorum diſtantias quam fieri poteſt accuratiſſime exhibet, etc. Vnde ſane opus foret haud inutile, ſi cuiuscunque prouinciae tot diuerſae componerentur proiectiones, quot fines ſunt obtinendi. At nemo vnquam, quantum equidem ſciam, in delineandis mappis geographicis areae determinandae peculiarem habuit rationem, ſed omnes calculo hunc in finem inſtituendo fuere contenti, qui licet non parum tedioſus atque moleſtus, nihil tamen praebet certi, quoniam in limitibus prouinciarum aeſtimatione opus eſt, quae in mappis vſitatis falſo nititur principio. Quanti vero ſit momenti accurata areae prouinciarum notitia

notitia Geographo non minus quam Philofopho et Politico, non eſt quod dicam. Erudito inprimis, qui ſtatuum notitiam ſtudium ſibi fecit proprium, gratum erit atque acceptum, ſi facilis ei ſuppeditetur methodus, qui poſſit absque calculo aream ipſe idque accurate inuenire, adeoque Mathematicis credere non ſit coactus. Quamobrem non parum miratus ſum, nunquam adhuc adhibitam fuiſſe proiectionem, quam immediate atque accuratiſſime oculis offerre aream ſuperficiei delineatae, iam dudum in Commentariis Acad. Petrop. monuit immortalis nominis *Eulerus*. Officium mihi impoſitum requirere putaui, vt huiusmodi conficerem proiectionem, quae aream imperii Ruſſici, tantae telluris partis, calculo minutiſſimo oſtendat exactius. Sollertius in proiectionis huius indolem inquirens animaduerti, eam paululum immutatam reddi adhuc poſſe vtiliorem; id quod Academiae hic proponere mihi liceat, etſi temporis breuitas mihi nondum permiſit, totius imperii Ruſſici proiectionem abſoluere.

§. 2. Repraeſentet Fig. 4. portionem telluris, C Polum, AQ Aequatorem, CN, Cn duo Meridianos infinite propinquos. Per punctum M pro arbitrio aſſumtum tranſeat Parallelus Mμ, cui infinite propinquus Parallelus $m\nu$, vt fiat paruum rectangulum Mν elementum areae telluris. Quodſi iam longitudines computentur a Meridiano C A, dicatur longitudo puncti M, A N $= x$, latitudo N M $= y$, area telluris $=$ S; eritque $\partial S = M\mu \,.\, Mm = \partial x \cos. y \,\partial y$, poſito radio telluris $= 1$. In Fig. 5. Meridiani ac Paralleli ſint proiecti in lineas rectas ſibi inuicem normales, ſecundum hanc legem: Aequator A′ Q′ diuiditur in ſingulos gradus A′ D, qui competunt radio arbitrarie aſſumto, quem dicamus r. Latitudines autem aequantur ſinubus ſuis pro radio $= r$. Poſito itaque gradu longitudinis A′ D $= a$, erit $a = \alpha r$, exiſtente α numero ex- Tab. III.

pri-

primente arcum vnius gradus in partibus radii $= 1$. Vnde fit $a = \frac{\pi r}{180}$, et $r = \frac{180}{\pi} a$. Iam vero pro qualibet latitudine y eſt $N' M' = r$ ſin. $y = \frac{180}{\pi} a$ ſin. y, et $A' N' = r x$, ideoque $M' \mu' = r \partial x$, et $M' m' = r$ coſ. $y \partial y$. Quodſi itaque area in proiectione dicatur s, erit $\partial s = r r \partial x$ coſ. $y \partial y$. Differentialia ∂S et ∂s ſunt in ratione duplicata radiorum: in eadem ergo ratione erunt quoque integralia S et s, h. e. cuiuscunque partis proiectionis area erit proportionalis areae reſpondenti in telluris ſuperficie.

§. 3. Hinc methodus oritur plane mechanica, inueniendi aream portionis telluris. In carta oleo imbuta conſtruatur rectangulum, eiusque latera diuidantur in partes aequales, quarum quaeuis $= a$, ita vt tota figura diuiſa ſit in Quadrata, quorum ſingula $=$ vni gradui quadrato $= 225$ milliaribus $\square$. Haec carta proiectioni impoſita immediate dat aream. Eiusmodi proiectionem imperii Ruſſici rudem adhuc et tantum ſpeciminis inſtar confeci. Ne autem opus eſſet diuiſiones Meridiani e formula $N' M' = \frac{180}{\pi} a$ ſin. y computare, diuiſi ſcalam in gradus, minuta prima, etc. quorum ſinguli gradus $= a$; in qua ſcala cum longitudines tum latitudines cepi, priores quidem immediate, at latitudines modo ſequente: Ope tabulae, qualis habetur in *collectionis Berolinenſis tabularum aſtron.* Tom. III. p. 172—207. gradus, minuta prima, etc. inueni quibus ſinguli ſinus aequantur. Qui gradus, etc. in ſcala capti praebent Ordinatas $N' M'$. Diuiſio itaque mappae ſeu conſtructio reticuli, quae in ceteris proiectionibus plurimum difficultatis mouet, in noſtra eſt facillima. Mox autem aliud incommodum ſeſe obtulit. Creſcente latitudine ratio graduum latitudinis ad gradus longitudinis adeo decreſcit, vt vel optimis inſtrumentis inſtructus variationem latitudinis haud nimis magnam exprimere nequeas. Cum e contrario

trario in Sphaera ratio graduum latitudinis ad gradus longitudinis cum latitudine crescat, hinc non solum figura partis delineatae prorsus difformatur, sed ipsa quoque proiectio admodum difficilitatur. Minutissime licet facta mappae diuisione, tamen oculi iudicium sequi oportet, vnde delineatio non potest non fieri multo accuratior, si figura partis delineatae similis sit figurae superficiei sphaericae. Area praeterea multo exactius posset mensurari, si gradus latitudinis possent ampliari: vt nil dicam de forma magis commoda, quam mappa sic indueret. Quae omnia incommoda sic tolli possunt.

§. 4. Si manente $A'N' = rx$, fiat $N'M' = mr \sin. y$, erit $\partial s = mrr \cos. y \, \partial x \, \partial y$, ita vt quae ex mensura §. 3. reperta est area, sit diuidenda per m. Numerus m equidem ab arbitrio nostro pendet, dummodo sit > 1, per §. 3. Quo vero proiectio superficiei sphaericae, quantum fieri possit, reddatur similis, numerum m sic determinaui. Pars telluris proiicienda sit inclusa inter Meridianos C A, C Q, atque Parallelos B P, $b\,p$, (Fig. 4.). Capiatur $B\beta = P\pi = \frac{1}{2} B b = \frac{1}{2} P p$, ac ponatur $AQ = \gamma$, $Ab = \alpha$, $AB = \beta$; erit $A\beta = \frac{\alpha + \beta}{2} = \mu$, $\beta\pi = \gamma \cos. \mu$, et $Bb = \alpha - \beta$. In proiectione (Fig. 5.) fit $\beta'\pi' = r\gamma$, $A'b' = mr \sin. \alpha$, $A'B' = mr \sin. \beta$, ideoque $B'b' = mr(\sin. \alpha - \sin. \beta)$. Quo iam proiectio Originali fiat similis, quod quidem exacte obtineri nullo modo posse constat, tentandum esset, an partes minimae proiectionis ac Sphaerae euadere possint similes. Quem in finem esse oporteret

$$M\mu : Mm = M'\mu' : M'm', \text{ h. e.}$$

$$\partial x \cos. y : \partial y = \partial x : m \, \partial y \cos. y,$$

seu $\cos. y^2 = \frac{1}{m}$, vnde patet, hanc proportionem non nisi in vnico Parallelo locum habere posse, cuius nempe latitudinis cosinus $= \frac{1}{\sqrt{m}}$. Nihil itaque superest nisi vt certo cuidam

 paral-

parallelo debita ad Meridianum tribuatur ratio; qui quidem Parallelus optime certe sumitur medius. Statuatur ergo

$$\beta\,\pi : \mathrm{B}\,b = \beta'\,\pi' : \mathrm{B}'\,b', \text{ h. e.}$$

$$\gamma \cos.\,\mu : \alpha - \beta = \gamma : m\,(\sin.\,\alpha - \sin.\,\beta),$$

vnde habetur $m = \frac{\alpha - \beta}{\cos.\,\mu\,(\sin.\,\alpha - \sin.\,\beta)}$. Pro imperio Russico, cuius latitudo a $45°$ vtque ad $75°$ circiter sese extendit, sumi potest $\mu = 60°$, ideoque $\cos.\,\mu = \frac{1}{2}$, et $m = \frac{2\,(\alpha - \beta)}{\sin.\,\alpha - \sin.\,\beta} = \frac{60°}{\sin.\,75° - \sin.\,45°}$. Vbi vero $\alpha - \beta$ in partibus radii exprimi oportet ope tabularum satis obuiarum. Calculus praebet:

$$\begin{array}{rl} 60° = & 1{,}047198 \\ \sin.\,75° = & 0{,}9659258 \\ \sin.\,45° = & 0{,}7071068 \\ \hline \sin.\,75° - \sin.\,45° = & 0{,}2588190 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rl} l\,60° = & 0{,}0200289 \\ l(\sin.\,75° - \sin.\,45°) = & 9{,}4129961 \\ \hline l\,m = & 0{,}6070328 \\ \hline m = 4{,}046 \ldots & \text{seu } m = 4. \end{array}$$

Quia sic euenit, vt m sit numerus quadratus, ad euitandam diuisionem per m, in diuidenda carta oleo madefacta statim capi potest vnus gradus $= a\sqrt{m} = 2\,a$.

Quia sub latitudine, cuius cosinus $= \frac{1}{\sqrt{m}}$, partes minimae proiectionis ac Sphaerae similes sunt, hanc similitudinem in mappa imperii Russici sic delineata obtinere sequitur circa parallelum 60 graduum, ob $\sqrt{m} = 2$; h. e. in ipso parallelo medio $\beta\,\pi$.

§. 5. Eodem modo pro aliis quoque regionibus computaui numerum m atque inueni:

pro	Succia et Noruegia - - - - -	$m = 5$,
	Britannia et Hibernia - - - -	$m = 3$,
	Polonia et Borussia - - - - -	$m = 2\frac{3}{4}$
	Germania - - - - - - - -	$m = 2\frac{1}{2}$

Gallia

Gallia - - - - - - - - $m = 2$,
Italia, Hispania ac Lusitania,
Hungaria et Turcia - - - $m = 1\frac{3}{4}$

Pro regionibus Aequatori propinquis, ceu Africa, Asia citra Russicam, et media Americae parte, statui potest $m = 1$. Quodsi vniuersa Sphaera esset proiicienda, foret $AC : AQ = 90 : 360 = 1 : 4$, et $A'C' : A'Q' = mr : 2\pi r$. Vnde esse oportet $m = \frac{1}{2}\pi = 1,570796 \ldots$, seu $m = 1\frac{1}{2}$.

§. 6. Donec otium mihi detur mappam totius Russiae satis magnam delineandi, specimen tamen Academiae proponere volui, quem in finem elegi *Nouam Zemlam* atque *Kamczatkam*. Pro priore inueni calculo $m = 13,5$. pro Kamczatka $m = 3$. Ceterum vtraque secundum eandem proiecta est mensuram, seu gradus longitudinis sunt aequales. Cartam oleo imbutam diuisi in Quadrata, quorum latus $= 20'$, seu 5 milliaria geographica, vt adeo quoduis quadratum habeat aream 25 milliarium □, seu 1213, 36 Verstarum □. Eiusmodi quadrata pars *Nouae Zemlae* septentrionalis continet 1026, 29; meridionalis 1286, 05; et *Kamczatka* 477, 9. Bini priores numeri diuisi per $13\frac{1}{2}$, et tertius per 3, sequentia praebent quota: 76, 02; 95, 26; 159, 3; vnde sequentes resultant areae:

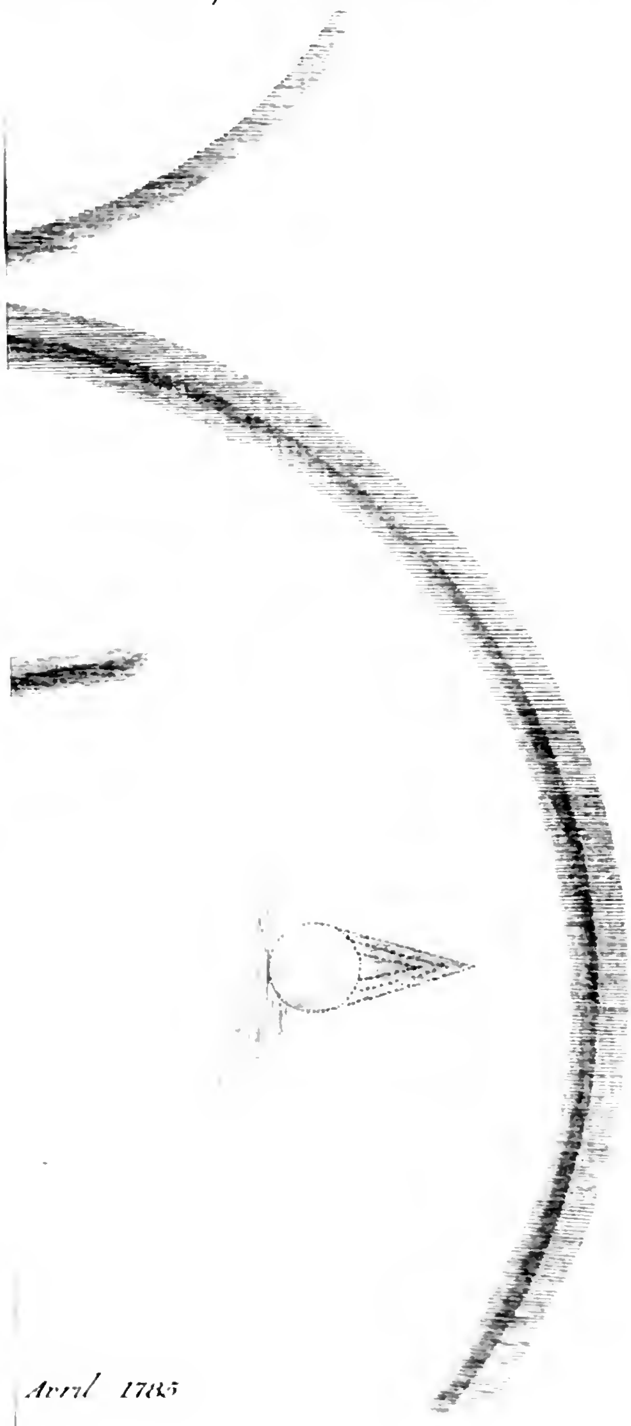
pro parte Nouae Zemlae septentrionali - -	= 1900,5 mill. □ =	92239,7 V. □
pro parte Nouae Zemlae meridionali - -	= 2381,5 - -	= 115584,8 —
ideoque pro tota insula Noua Zemla - - -	= 4282,0 - -	= 207824,5 —
et pro peninsula Kamczatka	= 3982,5 - -	= 193288,4 —

§. 7. Ceterum notari meretur, breuiore adhuc via ad ſcopum peruenire poſſe, qui ſummam exactitudinem non requirit. Ea nempe quadrata cartae oleo imbutae inſcripta, quae partim intra partim extra mappae limites cadunt aut denuo ſunt diuidenda, aut aeſtimatione iudicandum, quanta cuiusuis pars intra mappae limites cadat: atque hoc quidem negotium ſolum eſt, quod difficultate non caret. Quamobrem numerare conuenit omnia quadrata, quotquot mappam tegunt, ac ſummae illorum, quorum pars duntaxat intra mappae limites cadit, ſumere dimidium. Tentamen hoc feci in mappa Nouae Zemlae. Erant nempe 2054 quadrata, quae tota, at 481, quae nonniſi partim intra mappae limites cadebant. Horum pars dimidia eſt = 240, 5. Per ſubdiuiſionem autem et aeſtimationem hanc ſummam ſupra inueneram = 258, 3. Differentia = 17, 8 per $13\frac{1}{2}$ diuiſa et per 25 multiplicata dat errorem = 33 milliar. □. Qui error ſatis leuis prorſus fortaſſe tolli poſſet, ſi rectangulum mappae ſaepius diuerſis modis imponeretur, exque omnibus hisce ſummis medium ſumeretur.

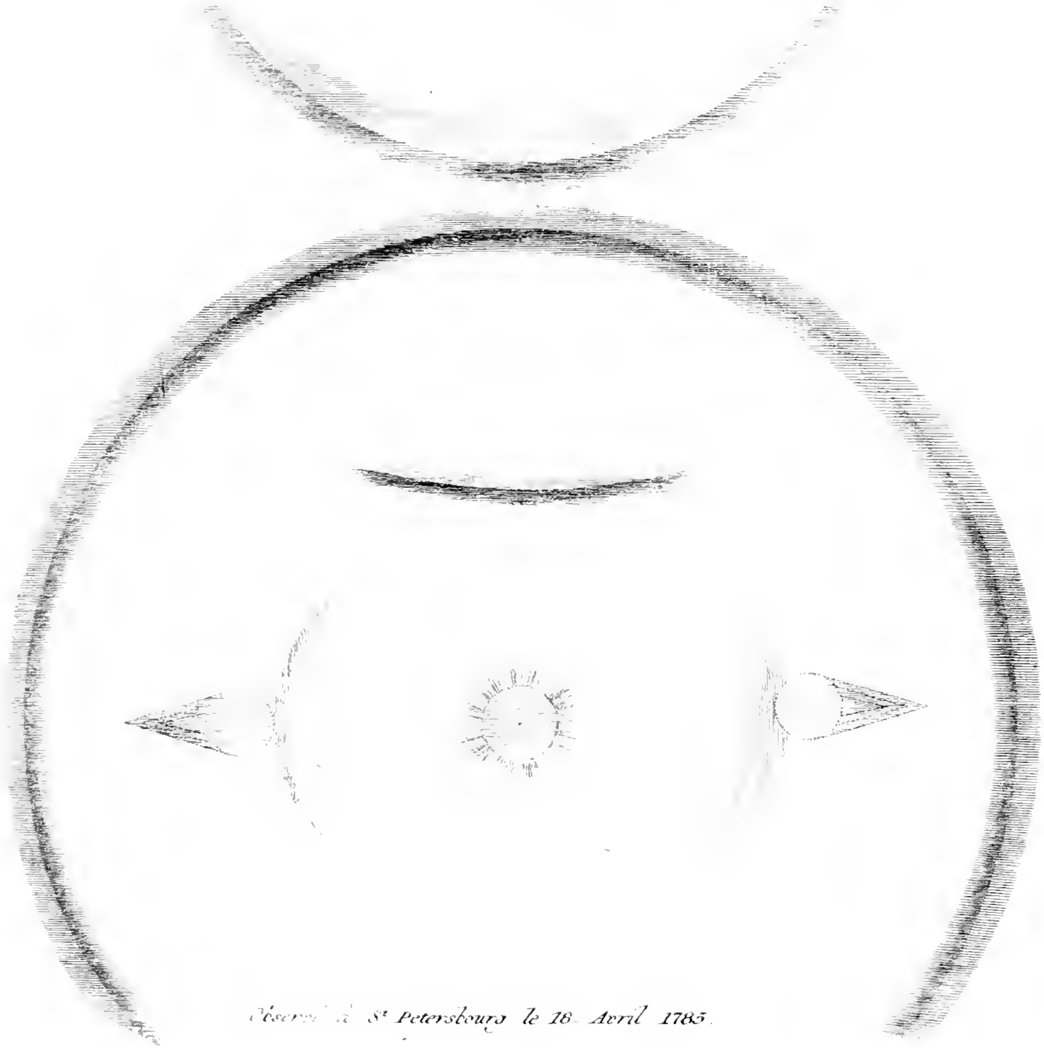
§. 8. Ad euitandum laborem, quem areae menſuratio requirit, nonnulli mappam e carta, in qua erat delineata, excindere ſolent, eiusque pondere ope librae ſatis accuratae reperto, et cum pondere cartae, cuius area eſt cognita, comparato, aream determinare. Haec methodus in mappis vulgari modo conſtructis non ſine inſigni errrore, in noſtra commodiſſime poterit adhiberi, inprimis ſi carta eligatur laeuis ac vniformis, eaque liquore ſeu alia materia homogenea obducatur, quo partim vniformior, partim ſpecifice grauior reddatur carta.

PHY-

PHYSICO-
MATHEMATICA.



Avril 1785



Observé à St. Petersbourg le 18 Avril 1785.

CONSIDERATIO
MOTVS PLANE SINGVLARIS,
QVI IN FILO PERFECTE FLEXILI LOCVM HABERE POTEST.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 5. *Iun.* 1775.

§. 1.

Quanquam theoria non solum aequilibrii sed etiam motus pro omnibus filis tam perfecte flexibilibus quam etiam elasticis ita perfecte sit explorata, vt nihil amplius desiderari posse videatur: tamen formulae pro motu determinando traditae etiamnunc omni vsu caruerunt; cum pro nullo adhuc casu motus huiusmodi filorum definiri potuerit exceptis solis illis casibus, quibus talia fila motum reciprocum seu oscillatorium eumque adeo infinite paruum recipere valent. Huius autem defectus causa neutiquam theoriae mechanicae est tribuenda sed vnica imperfectioni analyseos adscribi debet: ita vt ante vix quicquam in hoc genere sperari possit, quam scientia analyseos insignia incrementa acceperit.

§. 2. Quin etiam casus simplicissimus, quo motus fili perfecte flexilis a nullis plane viribus sollicitati in eodem plano concitari potest, nullis adhuc artificiis a me quidem adhibitis

bitis expediri potuit. Quod quidem eo minus eſt mirandum, cum ſi loco fili conſiderentur plures virgae ita inuicem iunctae, vt circa iuncturas liberrime commoueri queant, motus nullo adhuc modo perfecte aſſignari potuerit, ſtatim ac plures duabus virgis hoc modo fuerint coniunctae.

Tab. IV. Fig. I. §. 3. Quo igitur ſummas has difficultates penitius perſpiciamus, conſideremus filum quodcunque flexile E Y F quod a viribus quibuscunque ſollicitatum in ipſo plano tabulae vtcunque promoueatur, et ſumta in hoc plano recta fixa O A, pro axe habenda, elapſo tempore t teneat filum ſitum in figura exhibitum E Y F, a cuius puncto quocunque indefinito Y ad axem ducatur normalis Y X, vocenturque coordinatae $OX = x$ et $XY = y$, ipſa autem portio fili $EY = s$, vt ſit $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial s^2$. Tum vero hoc tempore fili elementum $Yy = \partial s$ ſollicitetur a duabus viribus $YP = P \partial s$ et $YQ = Q \partial s$, quarum directiones ſint coordinatis parallelae. Quibus poſitis manifeſtum eſt, ambas coordinatas x et y ſpectari debere tanquam functiones duarum variabilium, arcus ſcilicet $EY = s$ ac temporis t. Vnde ſumto tempore t conſtante, vt fili figura quam ipſo tempore tenet exploretur, erit per ea quae de functionibus duarum variabilium iam ſatis ſunt explicata, $\partial x = \partial s \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)$ et $\partial y = \partial s \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)$, hincque ergo $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = 1$. At vero ſumto ſolo tempore t variabili, manente arcu $EY = s$ inuariato, coordinatae x et y pro eodem fili puncto Y ita variabunt, vt ſit $\partial x = \partial t \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$ et $\partial y = \partial t \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$, vbi notetur formulam $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$ exprimere celeritatem puncti y ſecundum directionem YP, et $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$ celeritatem ſecundum directionem YQ, vnde porro acceleratio motus pro puncto Y ſecundum directionem YP erit $= \left(\frac{\partial \partial x}{\partial t^2}\right)$ et ſecundum directionem $YQ = \left(\frac{\partial \partial y}{\partial t^2}\right)$. Praeterea

terea vero hic erit monendum, etiam ipſas vires ſollicitantes P et Q vtcunque a tempore t pendere poſſe.

§. 4. His expoſitis ſecundum praecepta pro motu huius fili tradita ex viribus ſollicitantibus deriuentur iſti valores:

$$P' = P - \tfrac{1}{2g}\left(\tfrac{\partial\partial x}{\partial t^2}\right) \text{ et } Q' = Q - \tfrac{1}{2g}\left(\tfrac{\partial\partial y}{\partial t^2}\right),$$

vbi g denotat altitudinem lapſus grauium pro vno minuto ſecundo, ſiquidem tempus t in minutis ſecundis exprimere lubuerit. Tum vero hic littera s non ſolum nobis longitudinem arcus E Y ſed etiam eius pondus denotare aſſumitur, quandoquidem filo per totam longitudinem eandem craſſitiem tribuimus.

§. 5. Per has autem quantitates deriuatas P′ et Q′ totus fili motus ex hac aequatione ſatis ſimplici inueſtigari debet

$$\left(\tfrac{\partial y}{\partial s}\right)\int P'\partial s - \left(\tfrac{\partial x}{\partial s}\right)\int Q'\partial s = 0.$$

In quibus formulis integralibus ſola quantitas s pro variabili eſt habenda, tempore t manente conſtante. Hinc igitur ſi loco P′ et Q′ ſubſtituamus eorum valores, aequatio noſtra pro motu determinando erit

$$\left(\tfrac{\partial y}{\partial s}\right)\int P\partial s - \left(\tfrac{\partial x}{\partial s}\right)\int Q\partial s = \tfrac{1}{2g}\left(\tfrac{\partial y}{\partial s}\right)\int\partial s\left(\tfrac{\partial\partial x}{\partial t^2}\right) - \tfrac{1}{2g}\left(\tfrac{\partial x}{\partial s}\right)\int\partial s\left(\tfrac{\partial\partial y}{\partial t^2}\right).$$

Praeterea vero ſi tenſio fili hoc tempore in puncto Y ponatur $=$ T, erit

$$T = -\left(\tfrac{\partial x}{\partial s}\right)\int P'\partial s - \left(\tfrac{\partial y}{\partial s}\right)\int Q'\partial s, \text{ ſiue}$$

$$T = -\left(\tfrac{\partial x}{\partial s}\right)\int P\partial s - \left(\tfrac{\partial y}{\partial s}\right)\int Q\partial s + \tfrac{1}{2g}\left(\tfrac{\partial x}{\partial s}\right)\int\partial s\left(\tfrac{\partial\partial x}{\partial t^2}\right) + \tfrac{1}{2g}\left(\tfrac{\partial y}{\partial s}\right)\int\partial s\left(\tfrac{\partial\partial y}{\partial t^2}\right).$$

§. 6. Quod ſi ergo filum a nullis plane viribus ſollicitari ponamus, ita vt motus fili flexilis ſuper plano horizontali vtcunque proiecti determinari debeat, ob vires P $=$ 0 et

$Q = 0$, tota motus determinatio pendebit a resolutione huius aequationis satis simplicis:

$$0 = \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) \int \partial s \left(\frac{\partial \partial x}{\partial t^2}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) \int \partial s \left(\frac{\partial \partial y}{\partial t^2}\right),$$

quae autem quomodo tractari debeat nullo plane modo perspicitur. Tum vero tensio euadet:

$$T = \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) \int \partial s \left(\frac{\partial \partial x}{\partial t^2}\right) + \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) \int \partial s \left(\frac{\partial \partial y}{\partial t^2}\right).$$

Quamobrem Geometrae erunt hortandi, vt omnes vires intendere velint ad resolutionem huius aequationis expediendam.

§. 7. Equidem meos conatus etiam irritos hic communicare non dubito dum forte aliis occasionem praebere poterunt feliciori successu hunc laborem exsequendi. Primo igitur mihi erat propositum, hanc aequationem:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) \int \partial s \left(\frac{\partial \partial x}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) \int \partial s \left(\frac{\partial \partial y}{\partial t^2}\right),$$

a formulis integralibus liberare, quem in finem loco functionum x et y alias u et v in calculum introduxi, ponendo

$$\int \partial s \left(\frac{\partial \partial x}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial \partial u}{\partial t^2}\right) \text{ et } \int \partial s \left(\frac{\partial \partial y}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial \partial v}{\partial t^2}\right),$$

hinc autem differentiando sola variabili adhibita s, prodibit

$$\frac{\partial \partial x}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial s \partial t^2} \text{ et } \frac{\partial \partial y}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial s \partial t^2}.$$

Hinc autem porro colligemus, dum nunc solam t vt variabilem spectamus, cum sit $\partial t \left(\frac{\partial \partial x}{\partial t^2}\right) = \partial t \left(\frac{\partial^3 u}{\partial s \partial t^2}\right)$, erit integrando $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial \partial u}{\partial s \partial t}\right) + E$, quae constans E etiam arcum s vtcunque in se complecti potest, eodemque modo erit $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial \partial v}{\partial s \partial t}\right) + F$. Hae aequationes porro ducantur in ∂t ac denuo integrentur manente s constante, prodibit

$$x = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) + E t + G \text{ et } y = \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right) + F t + H,$$

vbi E, F, G, H possunt esse functiones ipsius s tantum.

§. 8. Hos valores denuo differentiemus sumta sola s pro variabili ac positis breuitatis gratia $\partial E = E' \partial s$, $\partial F = F' \partial s$, $\partial G = G' \partial s$ et $\partial H = H' \partial s$, obtinebimus

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) = \left(\frac{\partial \partial u}{\partial s^2}\right) + E' t + G' \text{ et } \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) = \frac{\partial \partial v}{\partial s^2} + F' t + H'.$$

Quare cum esse oporteat $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = 1$, omissis functionibus adiectis E, F, G, H, requiritur vt fiat $\left(\frac{\partial \partial u}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \partial v}{\partial s^2}\right)^2 = 1$. Tum vero ipsa aequatio pro motu induet hanc formam:

$$\left(\frac{\partial \partial v}{\partial s^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial \partial u}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial \partial u}{\partial s^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial \partial v}{\partial t^2}\right),$$

vbi quidem breuitati consulentes functiones illas arbitrarias ipsius s praetermisimus. Simili modo pro tensione habebimus:

$$T = \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial \partial u}{\partial s^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial \partial u}{\partial t^2}\right) + \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial \partial v}{\partial s^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial \partial v}{\partial t^2}\right).$$

§. 9. Totum ergo negotium iam huc est reductum, quemadmodum ambas functiones ipsarum s et t, quas posuimus u et v, comparatas esse oporteat, vt fiat

$$\left(\frac{\partial \partial v}{\partial s^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial \partial u}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial \partial u}{\partial s^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial \partial v}{\partial t^2}\right),$$

siue vt haec proportio non parum elegans locum habeat:

$$\frac{\partial \partial u}{\partial s^2} : \frac{\partial \partial u}{\partial t^2} = \frac{\partial \partial v}{\partial s^2} : \frac{\partial \partial v}{\partial t^2},$$

cui quidem conditioni haud difficulter infinitis modis satisfieri potest. At vero altera conditio adimplenda nunc maximae difficultati videtur obnoxia, vt scilicet euadat $\left(\frac{\partial \partial u}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \partial v}{\partial s^2}\right)^2 = 1$. Hinc igitur manifesto perspicitur, hunc casum, qui sine dubio in hoc genere tanquam simplicissimus est spectandus, tantis difficultatibus ac tenebris etiamnunc esse inuolutum, vt nulla plane via pateat ad scopum optatum perueniendi.

§. 10. Talis reductio etiam in genere fieri potest in aequatione latissime patente:

$$2g\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int P\partial s - 2g\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int Q\partial s = \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int\partial s\left(\frac{\partial\partial x}{\partial t^2}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int\partial s\left(\frac{\partial\partial y}{\partial t^2}\right),$$

atque adeo facilius ita instituetur. Ponatur statim $x = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)$ et $y = \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)$. Hinc igitur erit $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) = \left(\frac{\partial\partial u}{\partial s^2}\right)$ et $\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) = \left(\frac{\partial\partial v}{\partial s^2}\right)$, ita vt nunc esse debeat $\left(\frac{\partial\partial u}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\partial v}{\partial s^2}\right) = 1$. Porro vero erit $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial\partial u}{\partial s\partial t}\right)$ et $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial\partial v}{\partial s\partial t}\right)$, quae formulae exprimunt celeritates puncti Y secundum directiones YP et YQ. Tum vero habebimus insuper $\left(\frac{\partial\partial x}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial^3 u}{\partial s\partial t^2}\right)$ et $\left(\frac{\partial\partial y}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial^3 v}{\partial s\partial t^2}\right)$, atque nunc integratio succedit: erit enim

$$\int\partial s\left(\frac{\partial\partial x}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial u}{\partial t^2}\right) + \Gamma : t \text{ et}$$

$$\int\partial s\left(\frac{\partial\partial y}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial v}{\partial t^2}\right) + \Delta : t,$$

vbi functiones quascunque temporis loco constantium sunt adiectae, propterea quod in istis integrationibus tempus t vt constans est spectatum. Quamobrem si vires P et Q etiam x vel y inuoluunt, hoc modo tota aequatio inter binas functiones u et v subsistet.

§. 11. Nihilo vero minus nullum adhuc fructum mihi quidem hinc percipere licuit, ac praecipua huius difficultatis caussa in hoc sita esse videtur: quod innumeras figuras diversas quas filum successiue induit, vix vllo modo ita per calculum exprimere licet, vt ad quoduis tempus definiri queat quales functiones ipsarum s et t binae coordinatae x et y sint futurae. Hanc ob rem istud argumentum ordine inuerso tractare institui, dum scilicet ad quoduis tempus figuram fili tanquam datam spectabo atque in vires P et Q inquiram, quae filo talem motum imprimere valeant.

Status quaestionis.

Tab. IV. Fig. 2. §. 12. Sumamus igitur initio, vbi erat $t = 0$, filum super plano horizontali in directum fuisse extensum, ita vt situm

tum tenuerit E F, eiusque longitudinem E F ſtatuamus $= a$. Hinc vero elapſo tempore $= t$ acceperit figuram E Y F′, quae ſit arcus circularis rectam E F pro axe aſſumtam tangens in ipſo puncto E, ita vt fili terminus E perpetuo maneat immotus. Radius autem huius circuli ſit E O $= r$, functio quaecunque data temporis t, vnde neceſſe eſt vt poſito $t = 0$ iſta functio r euadat infinita. Sit nunc E Y portio quaecunque indefinita fili $= s$, ductoque radio O Y erit angulus E O Y $= \frac{s}{r}$, cuius ſinus erit $\frac{EX}{EO} = \frac{x}{r}$, coſinus vero $1 - \frac{y}{r}$, vnde coordinatae E X $= x$ et X Y $= y$ ita per binas variabiles s et t exprimentur, vt ſit $x = r$ ſin. $\frac{s}{r}$ et $y = r\,(1 -$ coſ. $\frac{s}{r})$. Quibus poſitis quaeſtio ſoluenda huc redit: vt inueſtigentur vires P et Q, quae filo talem motum qualem hic deſcripſimus inducere valeant. Quae quidem quaeſtio maxime adhuc erit indeterminata, propterea quod pro motu determinando vnicam tantum habemus aequationem: Tab II. Fig. 2.

$$2g\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int P\,\partial s - 2g\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int Q\,\partial s = \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\int \partial s\left(\frac{\partial\partial x}{\partial t^2}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\int \partial s\left(\frac{\partial\partial y}{\partial t^2}\right),$$

vnde alterutra quantitatum P et Q arbitrio noſtro relinquetur.

Euolutio formularum
in hanc aequationem ingredientium.

§. 13. Cum littera r ſit functio temporis t tantum, ſumta ſola s variabili impetrabimus has formulas $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) =$ coſ. $\frac{s}{r}$ et $\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) =$ ſin. $\frac{s}{r}$, vnde ſponte fit $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = 1$, vti rei natura poſtulat. Sumto autem ſolo tempore t variabili ponamus breuitatis gratia $\partial r = r'\,\partial t$, ac differentiando reperiemus

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = r' \text{ ſin. } \frac{s}{r} - \frac{r's}{r} \text{ coſ. } \frac{s}{r} \text{ et}$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = r'\left(1 - \text{coſ. } \frac{s}{r}\right) - \frac{s\,r'}{r} \text{ ſin. } \frac{s}{r}.$$

 §. 14.

§. 14. Hae formulae cum ambas celeritates puncti Y exprimant, hinc istas celeritates pro statu fili initiali, vbi erat $t = 0$ filumque in directum extensum, cognoscere licebit, id quod patebit si statuamus $r = \infty$. Tum igitur erit sin. $\frac{s}{r} = \frac{s}{r}$ et cos. $\frac{s}{r} = 1 - \frac{ss}{2rr}$, ex quo pro hoc casu erit

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = \frac{r' s^3}{2 r^3} \text{ et } \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = -\frac{r' ss}{2 rr}.$$

Videndum igitur est, num istae formulae casu $r = \infty$ seu $t = 0$ valores finitos recipere queant nec ne, id quod ab indole functionis r pendet. Veluti si sit $r = \frac{1}{t^n}$ ita vt exponens n sit positiuus, quoniam posito $t = 0$ fieri debet $r = \infty$, eritque $r' = -\frac{n}{t^{n+1}}$, hoc casu habebitur

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = -\tfrac{1}{2} n s^3 t^{2n-1} \text{ et } \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = +\tfrac{1}{2} n ss t^{n-1}.$$

Hinc ergo intelligitur si n sit 1 fore

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = -\tfrac{1}{2} s^3 t = 0 \text{ et } \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \tfrac{1}{2} n ss.$$

Quo igitur casu sola celeritas $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$ euanescit. At si fuerit $n = \frac{1}{2}$, fiet $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = -\frac{1}{4} s^3$. Altera vero $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{ss}{4 \surd t} = \infty$. Hinc igitur patet, pro indole functionis r euenire posse vt celeritates initiales modo fiant $= 0$, modo determinatum obtineant valorem, modo etiam in infinitum excrescant, solo termino E ipso excepto vbi $s = 0$, ibe enim certe quieuisse necesse est.

§. 15. Progrediamur nunc etiam ad differentialia secunda sumendo solum t variabile, quem in finem statuamus $\partial r' = r'' \partial t$, et subducto calculo reperiemus:

$$\left(\frac{\partial \partial x}{\partial t^2}\right) = r'' \text{ sin. } \frac{s}{r} - \frac{r'' s}{r} \text{ cos. } \frac{s}{r} - \frac{r' r' ss}{r^3} \text{ sin. } \frac{s}{r} \text{ et}$$

$$\left(\frac{\partial \partial y}{\partial t^2}\right) = r'' \left(1 - \text{cos. } \frac{s}{r}\right) - \frac{r''}{r} s \text{ sin. } \frac{s}{r} + \frac{r' r' ss}{r^3} \text{ cos. } \frac{s}{r}.$$

§. 16. Nunc igitur has formulas ducamus in ∂s easque ita integremus vt sola quantitas s pro variabili habeatur, ac reperiemus:

$$\int \partial s \left(\frac{\partial \partial x}{\partial t^2}\right) = r'' \int \partial s \sin. \frac{s}{r} - \frac{r''}{r} \int s \partial s \cos. \frac{s}{r}$$
$$- \frac{r' r'}{r r} \int s s \partial s \sin. \frac{s}{r} + \Gamma : t,$$

eodemque modo

$$\int \partial s \left(\frac{\partial \partial y}{\partial t^2}\right) = r'' s - r'' \int \partial s \cos. \frac{s}{r} - \frac{r''}{r} \int s \partial s \sin. \frac{s}{r}$$
$$+ \frac{r' r'}{r r} \int s s \partial s \cos. \frac{s}{r} + \Delta : t,$$

vbi loco constantium adiecimus functiones quascunque ipsius t, propterea quod tempus spectatum est vt constans.

§. 17. Superest igitur tantum vt formulas integrales euoluamus, hoc modo:

$$\int \partial s \sin. \frac{s}{r} = - r \cos. \frac{s}{r}; \int \partial s \cos. \frac{s}{r} = r \sin. \frac{s}{r};$$
$$\int s \partial s \cos. \frac{s}{r} = r s \sin. \frac{s}{r} + r r \cos. \frac{s}{r};$$
$$\int s \partial s \sin. \frac{s}{r} = - r s \cos. \frac{s}{r} + r r \sin. \frac{s}{r};$$
$$\int s s \partial s \sin. \frac{s}{r} = - r s s \cos. \frac{s}{r} + 2 r r s \sin. \frac{s}{r} + 2 r^3 \cos. \frac{s}{r} \text{ et}$$
$$\int s s \partial s \cos. \frac{s}{r} = r s s \sin. \frac{s}{r} + 2 r r s \cos. \frac{s}{r} - 2 r^3 \sin. \frac{s}{r}:$$

hinc igitur erit

$$\int \partial s \left(\frac{\partial \partial x}{\partial t^2}\right) = - 2 \cos. \frac{s}{r} (r r'' + r' r')$$
$$- s \sin. \frac{s}{r} \left(r'' + \frac{2 r' r'}{r}\right) + \frac{r' r' s s}{r r} \cos. \frac{s}{r} \text{ et}$$
$$\int \partial s \left(\frac{\partial \partial y}{\partial t^2}\right) = - 2 \sin. \frac{s}{r} (r r'' + r' r')$$
$$+ s \left(r'' + \left(r'' + \frac{2 r' r'}{r}\right) \cos. \frac{s}{r}\right) + \frac{r' r' s s}{r r} \sin. \frac{s}{r} + \Delta : t.$$

§. 18. Nunc igitur ad aequationem nostram constituendam prior formula ducatur in $\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) = \sin. \frac{s}{r}$ altera vero in

— (∂x)

$-\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) = -\operatorname{cos}.\frac{s}{r}$, et membrum dextrum aequationis noſtrae euadet

$$-r'' s \operatorname{cos}.\tfrac{s}{r} - \left(r'' + \tfrac{2 r' r'}{r}\right) s + \operatorname{fin}.\tfrac{s}{r}\, \Gamma : t - \operatorname{cos}.\tfrac{s}{r}\, \Delta : t,$$

quoniam igitur membrum ſiniſtrum eſt

$$2 g \operatorname{fin}.\tfrac{s}{r} \int P \partial s - 2 g \operatorname{cos}.\tfrac{s}{r} \int Q \partial s,$$

aequatio, ex qua tota motus natura eſt definienda, erit

$$2 g \operatorname{fin}.\tfrac{s}{r} \int P \partial s - 2 g \operatorname{cos}.\tfrac{s}{r} \int Q \partial s = -r'' s \operatorname{cos}.\tfrac{s}{r}$$
$$- \left(r'' + \tfrac{2 r' r'}{r}\right) s + \operatorname{fin}.\tfrac{s}{r}\, \Gamma : t - \operatorname{cos}.\tfrac{s}{r}\, \Delta : t,$$

vnde cum duae adhuc inſint incognitae P et Q, alteram pro lubitu accipere licebit.

§. 19. Conſideremus etiam tenſionem T, quam filum in ſingulis punctis ſuſtinebit, quae cum in genere fuerit

$$T = -\left(\tfrac{\partial x}{\partial s}\right) \int P \partial s - \left(\tfrac{\partial y}{\partial s}\right) \int Q \partial s + \tfrac{1}{2g} \left(\tfrac{\partial x}{\partial s}\right) \int \partial s \left(\tfrac{\partial \partial x}{\partial t^2}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2g} \left(\tfrac{\partial y}{\partial s}\right) \int \partial s \left(\tfrac{\partial \partial y}{\partial t^2}\right),$$

ſubſtitutis valoribus modo inuentis fiet

$$T = -\operatorname{cos}.\tfrac{s}{r} \int P \partial s - \operatorname{fin}.\tfrac{s}{r} \int Q \partial s - \tfrac{1}{g}(r r'' + r' r')$$
$$+ \tfrac{1}{2g} r'' s \operatorname{fin}.\tfrac{s}{r} + \tfrac{1}{2g} \cdot \tfrac{r' r' s s}{r r} + \tfrac{1}{2g} \Gamma : t \operatorname{cos}.\tfrac{s}{r}$$
$$+ \tfrac{1}{2g} \Delta : t \operatorname{fin}.\tfrac{s}{r}.$$

§. 20. Cum igitur ex priore aequatione ſit

$$\int Q \partial s = \operatorname{tang}.\tfrac{s}{r} \int P \partial s + \tfrac{1}{2g} r'' s + \tfrac{1}{2g}\left(r'' + \tfrac{2 r' r'}{r}\right) \frac{s}{\operatorname{cos}.\frac{s}{r}}$$
$$- \tfrac{1}{2g} \operatorname{tang}.\tfrac{s}{r}\, \Gamma : t + \tfrac{1}{2g} \Delta : t,$$

ſi hic valor in expreſſione tenſionis ſubſtituatur, prodibit

T =

$$T = -\frac{\int P \partial s}{\operatorname{cos}.\frac{s}{r}} - \frac{1}{2g}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right) s \operatorname{tang}.\frac{s}{r} - \frac{1}{g}(rr'' + r'r')$$

$$+ \frac{1}{2g} \cdot \frac{r'r'ss}{rr} + \frac{1}{2g\operatorname{cos}.\frac{s}{r}}\Gamma : t$$

sicque per tensionem formula $\int P \partial s$ ita exprimitur, vt sit

$$\int P \partial s = -T\operatorname{cos}.\frac{s}{r} - \frac{1}{2g}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right) s \operatorname{sin}.\frac{s}{r} - \frac{1}{g}(rr'' + r'r')\operatorname{cos}.\frac{s}{r}$$
$$+ \frac{1}{2g}\operatorname{cos}.\frac{s}{r} \cdot \frac{r'r'ss}{rr} + \frac{1}{2g}\Gamma : t$$

vnde differentiando, si ponamus $\partial T = T' \partial s$ quandoquidem hic sola quantitas s variabilis assumitur, fiet

$$P = -T'\operatorname{cos}.\frac{s}{r} + \frac{T}{r}\operatorname{sin}.\frac{s}{r} - \frac{1}{2g}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right)\operatorname{sin}.\frac{s}{r} - \frac{s}{2gr}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right)\operatorname{cos}.\frac{s}{r}$$
$$+ \frac{1}{gr}(rr'' + r'r')\operatorname{sin}.\frac{s}{r} - \frac{1}{2gr}\operatorname{sin}.\frac{s}{r} \cdot \frac{r'r'ss}{rr} + \frac{r'r's}{grr}\operatorname{cos}.\frac{s}{r}$$

quae manifesto reducitur ad hanc

$$P = -T'\operatorname{cos}.\frac{s}{r} + \frac{T}{r}\operatorname{sin}.\frac{s}{r} + \frac{r''}{2g}\operatorname{sin}.\frac{s}{r} - \frac{s}{2gr}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right)\operatorname{cos}.\frac{s}{r}$$
$$- \frac{1}{2gr}\operatorname{sin}.\frac{s}{r} \cdot \frac{r'r'ss}{rr} + \frac{r'r's}{grr}\operatorname{cos}.\frac{s}{r}.$$

Simili modo, quia ex prima aequatione est

$$\int P \partial s = \operatorname{cot}.\frac{s}{r}\int Q \partial s - \frac{1}{2g\operatorname{sin}.\frac{s}{r}} r'' s \operatorname{cot}.\frac{s}{r}$$

$$- \frac{1}{2g}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right)\frac{s}{\operatorname{sin}.\frac{s}{r}} + \frac{1}{2g}\Gamma : t - \frac{1}{2g}\operatorname{cot}.\frac{s}{r}\Delta : t,$$

qui valor in expressione tensionis substitutus praebet

$$T = -\frac{\int Q \partial s}{\operatorname{sin}.\frac{s}{r}} + \frac{1}{2g\operatorname{sin}.\frac{s}{r}} r'' s + \frac{1}{2g}\left(r'' + \frac{2r'r'}{r}\right) s \operatorname{cot}.\frac{s}{r}$$

$$- \frac{1}{g}(rr'' + r'r') + \frac{1}{2g} \cdot \frac{r'r'ss}{rr} + \frac{1}{2g\operatorname{sin}.\frac{s}{r}}\Delta : t,$$

inde porro colligitur

$$\int Q\partial s = -T\,\text{ſin.}\,\tfrac{s}{r} + \tfrac{r''s}{2g} + \tfrac{1}{2g}\left(r'' + \tfrac{2r'r'}{r}\right)\text{coſ.}\,\tfrac{s}{r}$$
$$-\tfrac{1}{g}(rr'' + r'r')\,\text{ſin.}\,\tfrac{s}{r} + \frac{\text{ſin.}\,\tfrac{s}{r}.\tfrac{r'r'ss}{rr}}{2g} + \tfrac{1}{2g}\Delta t$$

vnde tandem differentiando elicitur Q

$$Q = -T'\,\text{ſin.}\,\tfrac{s}{r} - \tfrac{T}{r}\,\text{coſ.}\,\tfrac{s}{r} + \tfrac{r''}{2g} + \tfrac{1}{2g}\left(r'' + \tfrac{2r'r'}{r}\right)\text{coſ.}\,\tfrac{s}{r}$$
$$-\tfrac{s}{2gr}\left(r'' + \tfrac{2r'r'}{r}\right)\text{ſin.}\,\tfrac{s}{r} - \tfrac{1}{gr}(rr'' + r'r')\,\text{coſ.}\,\tfrac{s}{r}$$
$$+\tfrac{1}{2gr}\,\text{coſ.}\,\tfrac{s}{r}.\tfrac{r'r'ss}{rr} + \tfrac{1}{g}\,\tfrac{r'r's}{rr}.\text{ſin.}\,\tfrac{s}{r};\ \text{ſiue}$$
$$Q = -T'\,\text{ſin.}\,\tfrac{s}{r} - \tfrac{T}{r}\,\text{coſ.}\,\tfrac{s}{r} + \tfrac{r''}{2g} - \tfrac{rr''}{2gr}\,\text{coſ.}\,\tfrac{s}{r}$$
$$-\tfrac{sr''}{2gr}\,\text{ſin.}\,\tfrac{s}{r} + \tfrac{r'r'ss}{2gr^3}\,\text{coſ.}\,\tfrac{s}{r}.$$

§. 22. Hoc igitur modo ambas litteras incognitas P et Q per tenſionem definiuimus, vbi notari meretur has litteras deſignare vires acceleratrices filo in puncto y applicatas. Quoniam enim elementi $Yy = \partial s$ maſſa quoque exprimitur per ∂s, vires motrices vtique erunt $P\partial s$ et $Q\partial s$, prouti ſupra asſumſimus. Non ſolum autem ipſas has vires P et Q per tenſionem expreſſimus, ſed etiam formulas integrales $\int P\partial s$ et $\int Q\partial s$.

§. 23. Cum autem in formulis pro P et Q inuentis non ſolum tenſio ipſa T inſit ſed etiam eius differentiale $\partial T = T'\partial s$, operae pretium erit per combinationem harum formularum ſiue T ſiue T' eliminare. Hoc modo reperiemus

$$P\,\text{ſin.}\,\tfrac{s}{r} - Q\,\text{coſ.}\,\tfrac{s}{r} = \tfrac{T}{r} - \tfrac{r''}{2g}\,\text{coſ.}\,\tfrac{s}{r} - \tfrac{1}{2g}\left(r'' + \tfrac{2r'r'}{r}\right)$$
$$+\tfrac{1}{gr}(rr'' + r'r') - \tfrac{r'r'ss}{2gr^3} = \tfrac{T}{r} - \tfrac{r''}{2g}\,\text{coſ.}\,\tfrac{s}{r} + \tfrac{r''}{g} - \tfrac{r'r'ss}{2gr^3};$$
$$P\,\text{coſ.}\,\tfrac{s}{r} + Q\,\text{ſin.}\,\tfrac{s}{r} = -T' + \tfrac{r''}{2g}\,\text{ſin.}\,\tfrac{s}{r} - \tfrac{s}{2gr}\left(r'' + \tfrac{2r'r'}{r}\right)$$
$$+\tfrac{r'r's}{grr} = -T' + \tfrac{r''}{2g}\,\text{ſin.}\,\tfrac{s}{r} - \tfrac{r''s}{2gr};$$

vbi

vbi notasse iuuabit, exprimere formulam posteriorem $P \operatorname{cof.} \frac{s}{r} + Q \operatorname{fin.} \frac{s}{r}$ vim tangentialem qua filum in puncto Y sollicitatur, alteram vero formulam $P \operatorname{fin.} \frac{s}{r} - Q \operatorname{cof.} \frac{s}{r}$ vim normalem eidem puncto applicatam, quarum ergo vtraque ex tensione T, quam quidem pro lubitu fingere licet, perfecte determinabitur. Atque hinc pro ipso fili initio E vbi $s = 0$ fiet

$$P \operatorname{fin.} \frac{s}{r} - Q \operatorname{cof.} \frac{s}{r} = \frac{T}{r} = -Q$$

ideoque $Q = -\frac{T}{r}$. Similique modo

$$P \operatorname{cof.} \frac{s}{r} + Q \operatorname{fin.} \frac{s}{r} = -T' = P.$$

§. 24. His formulis euolutis ponamus vim tangentialem acceleratricem secundum directionem Yy agentem $= \Theta$, at vim normalem secundum directionem Y O versus centrum circuli tendentem $= \Pi$, ita vt sit

$$\Theta = P \operatorname{cof.} \frac{s}{r} + Q \operatorname{fin.} \frac{s}{r} \text{ et}$$

$$\Pi = Q \operatorname{cof.} \frac{s}{r} - P \operatorname{fin.} \frac{s}{r}$$

atque valores harum duarum virium erunt

$$\Theta = -T' + \frac{r''}{2g} \operatorname{fin.} \frac{s}{r} - \frac{r''s}{2gr} \text{ et}$$

$$\Pi = -\frac{T}{r} + \frac{r''}{2g} \operatorname{cof.} \frac{s}{r} - \frac{r''}{2g} + \frac{r'r'ss}{2gr^3}.$$

Nunc igitur cum quaestio in se sit indeterminata, sequentia Problemata specialia percurramus, in quibus ratio virium sollicitantium praescribitur, vt filo motus supra assignatus inducatur.

Problema I.

§. 25. *Definire vires tangentiales ad motum supra descriptum in filo producendum requisitas.*

Solutio.

Cum igitur hic solae vires tangentiales requirantur, vires normales Π euanescent ita vt sit $\Pi = 0$, vnde ex postrema aequatione colligitur tenſio:

$$T = \frac{r''r}{2g}\,\text{coſ.}\,\frac{s}{r} - \frac{rr''}{2g} + \frac{r'r'}{2grr}\,ss,$$

cuius differentiale ſumto ſolo s variabili praebet

$$T' = -\frac{r''}{2g}\,\text{ſin.}\,\frac{s}{r} - \frac{r'r's}{grr},$$

quo valore ſubſtituto reperimus vim tangentialem:

$$\Theta = \frac{r''}{g}\,\text{ſin.}\,\frac{s}{r} - \left(\frac{rr''-2r'r'}{2grr}\right)s + \frac{r''}{g}\,\text{ſin.}\,\frac{s}{r} - \frac{r''s}{2gr},$$

quae ergo in ipſo termino E vbi $s = 0$ euadit $\Theta = 0$, in fine autem fili ſeu puncto T vbi $s = a$ erit

$$\Theta = \frac{r''}{g}\,\text{ſin.}\,\frac{a}{r} - \frac{(rr'' - 2rr)}{2grr}\,a.$$

Corollarium.

§. 26. Quia hic r denotat radium circuli ſecundum quem filum elapſo tempore t incuruatur, iam ſupra monuimus r talem eſſe debere functionem ipſius T, quae fiat infinita poſito $P = 0$: conſideremus vnicum caſum.

Exemplum.

§. 27. Sumamus $r = \frac{1}{t}$, erit $r' = -\frac{1}{tt}$ et $r'' = \frac{2}{t^3}$; hinc igitur fiet vis tangentialis quaeſita $\Theta = \frac{2}{gt^3}\,\text{ſin.}\,st$; tenſio autem erit $T = \frac{-1}{gt^4}(1 - \text{coſ.}\,st) + \frac{ss}{2gtt}$: hinc igitur ſequentia notari merentur: 1) In ipſo igitur initio vbi $t = 0$ vires tangentiales vbique infinitae requiruntur, vnde etiam tenſio euadet infinita. 2) Elapſo autem quouis tempore pro ſingulis fili punctis vires tangentiales erunt reciproce vt cubus temporis. 3) Pro ipſo autem fili termino E, vbi $s = 0$, tam vis tangentialis Θ quam tenſio euaneſcit, id quod natura rei poſtulat, cum punctum E maneat immotum. 4) Supra vidimus, celeritates puncti Y ſecundum directiones YP et YQ eſſe, priorem

rem $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = r' \sin. \frac{s}{r} - \frac{r's}{r} \cos. \frac{s}{r}$. Alteram vero

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = r'\left(1 - \cos. \frac{s}{r}\right) - \frac{r'}{r} s \sin. \frac{s}{r},$$

quae ergo hoc casu euadent

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{-(1 - \cos. s t)}{t t} + \frac{1}{t} s \sin. s t$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = -\frac{1}{t t} \sin. s t + \frac{1}{t} s \cos. s t,$$

quae casu $t = 0$, quo fit $\sin. s t = s t$ et $\cos. s t = 1 - \frac{s s t t}{2}$, erunt $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = -\frac{1}{2} s^3 t = 0$ et $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{1}{2} s s$, vnde patet, quo hic casus locum habere queat, initio singulis fili punctis Y in directione YQ eiusmodi celeritates imprimi debere, quae sint quadrato arcus $EY = s$ proportionales. Tum vero ipso initio viribus opus esse infinitis, quae deinceps in ratione triplicata temporis decrescent.

Problema II.

§. 28. *Definire vires normales* Π, *ad motum supra descriptum in filo producendum requisitas.*

Solutio.

Hic igitur esse debet $\Theta = 0$, vnde colligimus:

$$T' = \frac{r''}{2g} \sin. \frac{s}{r} - \frac{r''s}{2gr},$$

vnde deducimus integrando:

$$T = -\frac{r r''}{2g} \cos. \frac{s}{r} - \frac{r'' s s}{4 g r} + f : t,$$

quo valore substituto reperitur vis normalis quaesita

$$\Pi = -\frac{r''}{2g}\left(1 - 2 \cos. \frac{s}{r}\right) + \left(\frac{r r'' + 2 r' r'}{4 g r^3}\right) s s - \frac{1}{r} f : t,$$

vnde pro termino fili E fiet $\Pi = + \frac{r''}{2g} - \frac{1}{r} f : t$ et tensio $T = -\frac{r r''}{2g} + f : t$.

Exemplum.

§. 29. Consideremus hic iterum casum quo $r = \frac{1}{t}$, ideoque $r' = -\frac{1}{tt}$ et $r'' = \frac{2}{t^3}$, eritque vis normalis:

$$\Pi = -\frac{1}{g t^3}(1 - 2 \operatorname{cof.} s t) + \frac{1}{g t} s s - t f : t,$$

et tensio

$$T = -\frac{1}{g t^4} \operatorname{cof.} s t - \frac{s s}{2 g t t} + f : t.$$

Hinc igitur pro termino fili E vbi $s = 0$ fiet

$$\Pi = +\frac{1}{g t^3} - t : f : t \text{ et } T = -\frac{1}{g t^4} + f : t,$$

motus autem filo in ipso initio imprimendus erit vt ante

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = 0 \text{ et } \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{1}{2} s s.$$

Corollarium.

§. 30. Hoc igitur problema etiam nunc est indeterminatum, quoniam functio arbitrio nostro relinquitur. Eam igitur ita assumere licebit, vt tensio in ipso fili termino E euanescat, quod ergo fiet si functio $f : t = \frac{1}{g t^4}$, vnde fiet vis normalis:

$$\Pi = \frac{-2}{g t^3}(1 - \operatorname{cof.} s t) + \frac{1}{g t} s s,$$

quae ergo in ipso puncto E euanescit. Hinc igitur patet quo maius euadat tempus t, has vires normales continuo fieri minores.

Problema III.

§. 31. *Inuenire tam vires tangentiales quam normales ad motum propositum fili requisitas, ita vt durante motu tensio fili in singulis punctis perpetuo sit nulla.*

Solutio.

Solutio.

Cum igitur fit $T = 0$ ideoque etiam $T' = 0$, vires quaesitae sequenti modo exprimentur:

$$\Theta = \frac{r''}{2g} \text{ fin. } \frac{s}{r} - \frac{r'' s}{2 g r} \text{ et}$$

$$\Pi = \frac{-r''}{2g} (1 - \text{cof. } \frac{s}{r}) + \frac{r' r'}{2 g r^3} s s,$$

quae ambae euanefcunt pro termino fili E vbi fit $s = 0$. Ex his duabus viribus etiam vires initio confideratae P et Q affignari poterunt. Cum enim fit

$$P = \Theta \text{ cof. } \frac{s}{r} - \Pi \text{ fin. } \frac{s}{r} \text{ et}$$

$$Q = \Theta \text{ fin. } \frac{s}{r} + \Pi \text{ cof. } \frac{s}{r},$$

hinc colligitur fore

$$P = \frac{r''}{2g} \text{ fin. } \frac{s}{r} - \frac{r''}{2 g r} s \text{ cof. } \frac{s}{r} - \frac{r' r'}{2 g r^3} s s \text{ fin. } \frac{s}{r} \text{ et}$$

$$Q = \frac{r''}{2g} (1 - \text{cof. } \frac{s}{r}) - \frac{r''}{2 g r} s \text{ fin. } \frac{s}{r} + \frac{r' r'}{2 g r^3} s s \text{ cof. } \frac{s}{r}.$$

Exemplum.

§. 32. Sit iterum $r = \frac{1}{t}$, vt fit $r' = \frac{-1}{t t}$ et $r'' = \frac{2}{t^3}$, fietque $\Theta = \frac{1}{g t^3} \text{ fin. } s t - \frac{s}{g t t}$ et

$$\Pi = - \frac{1}{g t^3} (1 - \text{cof. } s t) + \frac{s s}{2 g t},$$

vel loco harum duarum virium applicatae concipi poffunt fequentes:

$$P = \frac{1}{g t^3} \text{ fin. } s t - \frac{1}{g t t} s \text{ cof. } s t - \frac{1}{2 g t} s s \text{ fin. } s t.$$

$$Q = \frac{1}{g t^3} (1 - \text{cof. } s t) - \frac{1}{g t t} s \text{ fin. } \frac{s}{r} + \frac{1}{2 g t} s s \text{ cof. } \frac{s}{r},$$

ab his fcilicet viribus filum, quod initio erat in directum extenfum, tandem poft tempus infinitum quafi in vnicum punctum conglomerabitur.

Scho-

Scholion.

§. 33. Hinc igitur infinitos casus deducere licet, quibus motus fili, dum a certis viribus continuo sollicitatur, perfecte determinari potest. Atque hi casus maxime sunt memorabiles, cum hactenus nullo plane casu talem motum inuestigare licuerit, ne eo quidem excepto, quo filo nullae plane vires applicatae concipiuntur. Simili autem modo infinitos alios huiusmodi casus euoluere licebit, quibus filum successiue secundum alios atque alios arcus circulares quacunque lege incuruatur; semper enim per theoriam generalem eiusmodi vires assignare licebit, quibus tales motus producentur.

ENODA-

ENODATIO DIFFICVLTATIS SVPER FIGVRA TERRAE A VI CENTRIFVGA ORIVNDA.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 2 Nouembr. 1775.

§. 1.

Notum est, si Terrae figura ex sola vi grauitatis cum vi centrifuga coniuncta definiatur, rationem Diametri aequatoris ad axem Terrae non maiorem reperiri quam 578 : 577, cum tamen haec ratio post mensuras diuersorum graduum institutas multo maior deprehendatur 201 : 200 propemodum. *Hugenius* quidem et *Newtonus*, qui primi hanc rationem inuestigarunt, totam Terram tanquam ex materia vniformi compositam sunt contemplati, interim tamen quaecunque diuersa structura in partibus Terrae interioribus statuatur, eadem semper ratio diametri aequatoris ad axem resultat, quamdiu scilicet grauitatis directio ad centrum Terrae tendens assumitur.

§. 2. Quod si enim intra Terram grauitatio potestati cuicunque distantiae a centro, quae sit $= z$, proportionalis statuatur, vt ea sit $= z^{n-1}$, dum semi-axis Terrae per vnitatem exprimitur, ex Theoria aequilibrii fluidorum deducitur ista aequatio: $\frac{z^n}{n} = C + \frac{xx}{2f}$, vbi si CA pro radio aequatoris et Tab. IV. Fig. 3.

C B $=1$ pro ſemi-axe Terrae accipiatur, littera z denotat diſtantiam cuiusque particulae Z a centro terrae C, at x intervallum C X demiſſo ex Z ad C A perpendiculo C X, littera vero f denotat numerum 289 ex motu vertiginis Terrae ortum; tum vero littera C eſt quantitas conſtans ex ipſo ſtatu Terrae determinanda. Primo igitur punctum indefinitum Z capiatur in ipſo polo B, fietque $x=0$; at prodire debet $z=1$, vnde colligitur conſtans $C=\frac{1}{n}$. Nunc punctum Z transferatur in aequatorem A, vt fiat $x=z$, atque habebitur iſta aequatio: $\frac{z^n}{n}=\frac{1}{n}+\frac{zz}{2f}$. Hinc autem, quia nouimus valorem ipſius z quam minime vnitatem eſſe ſuperaturum, ponamus $z=1+\omega$, eritque ſatis exacte $z^n=1+n\omega$, et ob $2f=578$ loco $\frac{zz}{2f}$ ſcribi ſufficiet $\frac{1+2\omega}{578}$, hincque aequatio noſtra praebebit $\frac{1+n\omega}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1+2\omega}{578}$, vnde colligitur $\omega=\frac{1}{576}$, ita vt hinc fiat radius aequatoris $C=1+\frac{1}{576}$, ideoque diameter aequatoris ad axem Terrae vt 577 : 576, vnde patet hanc rationem ab exponente indefinito n prorſus non pendere.

§. 3. Ex his etiam manifeſtum eſt, quaecunque alia functio ipſius z pro grauitate accipiatur, perpetuo eandem concluſionem inde ſequi debere. Quamobrem cum vera proportio inter axem Terrae et diametrum aequatoris tantopere ab iſta inuenta ratione diſſideat, neceſſario ſtatui oportet, ſingulas Terrae particulas Z non ſolum ad centrum Terrae C vrgeri, ſed inſuper alias vires adeſſe debere, quibus particula in Z ſecundum directionem Z S ad C Z normalem ſollicitetur; tales etiam vires hypotheſis grauitatis vniuerſalis qua ſingulae particulae ad omnes alias attrahi ſupponuntur reuera oſtendit, ita vt in figura Terrae determinanda etiam iſtae vires laterales in computum duci debeant. Verum has ipſas vires ex theoria gravitavitationis ne determinare quidem licet, nisi iam ante figura Terrae cum vniuersa eius structura fuerit cognita, quandoquidem harum virium determinatio non solum a densitate materiae per totam Terram dispositae sed etiam ab ipsa figura externa totius Terrae pendet; vnde satis intelligitur, hanc inuestigationem tantopere esse absconditam, vt eius perfecta explicatio nullo modo sperari possit. Quicquid enim a Geometris super hoc argumento in medium est allatum, meris hypothesibus iisque precario assumtis innititur, quae plerumque adeo omni probabilitate destituuntur.

§. 4. Quod si vero hanc inquisitionem generalissime suscipere velimus, binas illas vires, quibus singulae Terrae particulae Z secundum directiones ZC et ZS ob grauitatem vniuersalem sollicitantur, generaliter in computum introduci conueniet, vnde autem ob summam generalitatem vix quicquam concludere licebit; cum non constet, a quibusnam elementis istae vires pendere sint censendae; vis quidem prior ad centrum C vrgens probabili ratione functioni cuipiam ipsius distantiae $CZ = z$ proportionalis statui posse videtur, quam designemus littera Z, altera vero vis lateralis secundum ZS quae sit $= S$, manifesto non solum a distantia $CZ = z$ pendere potest, sed insuper angulum ACZ ita inuoluere debet, vt ea euanescat tam casu quo ille angulus euanescit, quam vbi fit rectus; quoniam ex rei natura euidens est, istam vim lateralem tam in aequatore CA quam in axe CB euanescere debere, siquidem nullum est dubium quin tam sub polis quam in aequatore omnia corpora directe versus centrum C sollicitentur, quamobrem vim illam alteram S tanquam functionem binarum variabilium $CZ = z$ et $CX = x$ spectari oportebit.

§. 4. His igitur praenotatis figuram Terrae secundum principia aequilibrii fluidorum, quemadmodum ea in Tom. XIII.

 nouor.

nouor. Commentar. expoſui inueſtigemus, ac primo quidem ſtatum preſſionis in puncto quocunque Z definiamus, quae altitudine p definiatur. Hunc in finem pro puncto Z vocemus binas coordinatas $CX = x$ et $XZ = CY = y$: hic enim tertia coordinata, quae ibi vocata erat $= z$, carere poſſumus, quandoquidem certum eſt, in omnibus ſectionibus per axem factis terram eandem figuram habere debere. Nunc igitur ambae vires Z et S ſecundum binas directiones ZX et ZY reſoluantur, ac prior quidem Z ſecundum ZC pro directionibus ZY et ZX, praebet vires $\frac{Zx}{z}$ et $\frac{Zy}{z}$. Altera vero vis $ZS = S$ pro iisdem directionibus dat has vires: $-\frac{Sy}{z}$ et $+\frac{Sx}{z}$. Praeterea vero vis centrifuga a motu diurno Terrae orta praebet vim ſecundum $YZ = \frac{x}{f}$, vnde ex ternis viribus quas in genere deſignaui per litteras P, Q, R, primo erit $R = o$, ſecundo $P = \frac{x}{f} - \frac{Zx}{z} + \frac{Sy}{z}$ et tertio $Q = -\frac{Zy}{z} - \frac{Sx}{z}$. Ex his autem viribus, ſumta littera q pro denſitate in puncto Z, principia aequilibrii hanc dederunt aequationem: $\frac{\partial p}{q} = P\,\partial x + Q\,\partial y$, quae ergo noſtro caſu induet hanc formam,

$$\frac{\partial p}{q} = \frac{x\,\partial x}{f} - \frac{Zx.\partial x}{z} + \frac{Sy.\partial x}{z} - \frac{Zy.\partial y}{z} - \frac{Sx.\partial y}{z},$$

ſiue

$$\frac{\partial p}{q} = \frac{x\,\partial x}{f} - \frac{Z}{z}(x\,\partial x + y\,\partial y) + \frac{S}{z}(y\,\partial x - x\,\partial y).$$

Haec autem aequatio porro, ob $x\,\partial x + y\,\partial y = z\,\partial z$, contrahitur in hanc

$$\frac{\partial p}{q} = \frac{x\,\partial x}{f} - Z\,\partial z + \frac{S}{z}(y\,\partial x - x\,\partial y).$$

§. 6. Nunc autem ante omnia tenendum eſt, niſi haec formula integrationem admittat, ſtatum aequilibrii nullo modo locum inuenire poſſe; quamobrem, cum tuto aſſumere queamus, in Terra dari ſtatum aequilibrii, quia alioquin quaeſtio de de figura ne ſuſcipi quidem poſſet, neceſſe eſt vt formula haec inuenta integrationem admittat, quod quidem in primo termino $\frac{x \partial x}{y}$ ſponte euenit; tum vero etiam integratio in ſecundo termino ſemper ſuccedit, dummodo Z fuerit functio ipſius z vti aſſumſimus; quamobrem ſupereſt vt poſtremum membrum $\frac{S}{z}(x \partial x - x \partial y)$ integrationem admittat, quod cum hoc modo repraeſentari poſſit $\frac{Sxy}{z}(\frac{\partial x}{x} - \frac{\partial y}{y})$, integratio locum habere nequit, niſi $\frac{Sxy}{z}$ ſit functio ipſius $\frac{x}{y}$, ideoque functio nullius dimenſionis ipſarum x et y; quare cum $z = \surd(xx + yy)$ vnam habeat dimenſionem, neceſſe eſt vt S ſit functio homogenea ipſarum x et y, cuius dimenſionum numerus ſit -1, vnde iam ſatis clare cognoſcimus indolem functionis S, ſiquidem pro certo aſſumamus, figuram terrae aequilibrio eſſe praeditam.

§. 7. Quo hoc clarius appareat, loco coordinatarum x et y in poſtremo membro introducamus angulum $ACZ = \Phi$, eritque $x = z \cos. \Phi$ et $y = z \sin. \Phi$, vnde fit $y \partial x - x \partial y = - zz \partial \Phi$, ita vt iam noſtra aequatio hanc induat formam:

$$\frac{\partial p}{q} = \frac{x \partial x}{y} - Z \partial z - S z \partial \Phi,$$

quae manifeſto integrationem non admittit, niſi fuerit Sz functio anguli Φ. Sit igitur Φ iſta functio, eritque vis lateralis $S = \frac{\Phi}{z}$; vbi patet, iſtam functionem Φ ita debere eſſe comparatam, vt euaneſcat tam poſito $\Phi = 0$, quam $\Phi = 90°$. Hinc igitur integrando adipiſcemur

$$\int \frac{\partial p}{q} = C + \frac{xx}{2y} - \int Z \partial z - \int \Phi \partial \Phi.$$

Atque hic porro obſeruandum eſt aequilibrium ſubſiſtere non poſſe, niſi etiam formula $\int \frac{\partial p}{q}$ ſit integrabilis. Quoniam autem hic denſitatem aquae q vbique conſtantem aſſumere liceat, erit

 vtique

vtique

$$\frac{p}{q} = C + \frac{xx}{2f} - \int Z \partial z - \int \Phi \partial \phi.$$

Si enim ob diuerſos caloris gradus denſitas q eſſet variabilis, iam ſatis euictum eſt, aequilibrium locum habere non poſſe, niſi q ſit functio ipſius p tantum, hoc eſt niſi per ſingula ſtrata vbi eadem eſt preſſio p etiam denſitas ſit eadem.

§. 8. His de aequilibrio per totam fluidi maſſam praemiſſis, nil aliud ſupereſt niſi vt aequatio inuenta ad ſupremam aquae ſuperficiem accommodetur, vbi cum preſſio p ſit euaneſcens, poſito $p = 0$ aequatio haec

$$0 = C + \frac{xx}{2f} - \int Z \partial z - \int \Phi \partial \phi,$$

exprimet figuram quam ſuprema aquae ſuperficies in ſtatu aequilibrii accipiet. Ex iam allatis autem patet, parum referre, cuiusmodi functio ipſius z pro Z aſſumatur, quoniam diſcrimen inter diametrum aequatoris et axem Terrae nimis eſt paruum, quam vt ex natura functionis Z ſenſibilis diuerſitas oriri poſſit.

§. 9. Deſignemus igitur vti incepimus vnitate ſemiaxem Terrae CB, ſitque ſub ipſo polo in B vis grauitatis acceleratrix etiam vnitate expreſſa, ita vt poſito $z = 1$, fieri quoque debeat $Z = 1$; quamobrem ſtatuamus aliquanto generalius $Z = z^{n-1}$, vt fiat $\int Z \partial z = \frac{z^n}{n}$. Deinde quia functio Φ euaneſcere debet caſibus $\phi = 0$ et $\phi = 90°$, pro Φ capiamus functionem ſimpliciſſimam huic conditioni ſatisfacientem, ponendo $\Phi = \alpha \sin. \phi \cos. \phi$, vnde fit $\int \Phi \partial \phi = \frac{1}{2} \alpha \sin. \phi^2$. His igitur valoribus ſubſtitutis aequatio pro ſuperficie aquae erit $0 = C + \frac{xx}{2f} - \frac{z^n}{n} - \frac{1}{2} \alpha \sin. \phi^2$, quae ergo ſimul exprimit

mit figuram Terrae, quam ob vim centrifugam recipere debet, vbi vt ante eſt $f = 289$.

§. 10. Ante omnia hic conſtantem C definire oportet, id quod commodiſſime fiet transferendo punctum Z in ipſum B, vbi fieri neceſſe eſt $z = 1$, $x = 0$ et $\Phi = 90°$, vnde colligitur conſtans $C = \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\alpha$. Sicque aequatio pro figura Terrae erit

$$0 = \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{2}\alpha + \frac{xx}{2f} - \frac{z^n}{n} - \tfrac{1}{2}\alpha \sin.\Phi^2, \text{ ſiue}$$

$$0 = \frac{1 - z^n}{n} + \frac{xx}{2f} + \tfrac{1}{2}\alpha \cos.\Phi^2,$$

ſeu quia $\cos.\Phi = \frac{x}{z}$, erit

$$z^n = 1 + \tfrac{nxx}{2f} + \tfrac{\alpha nxx}{2zz},$$

vnde ob $z = \sqrt{(xx + yy)}$ facile deducitur aequatio inter binas coordinatas x et y.

§. 10. Hinc igitur quaeramus ſemi-diametrum aequatoris transferendo punctum Z in A, vbi ergo fiet $x = z = CA$, cuius propterea valor ex hac aequatione elici debet

$$z^n = 1 + \tfrac{nzz}{2f} + \tfrac{1}{2}\alpha n.$$

Quia vero nouimus, valorem ipſius z parum ab vnitate diſcrepare, ponamus $z = 1 + \omega$, vt fiat $z^n = 1 + n\omega$ et $zz = 1 + 2\omega$, quibus valoribus inductis fiet $\omega = \frac{1 + \alpha f}{2(f - 1)}$. Sin autem hunc valorem accuratius deſideremus, loco z^n ſcribamus

$$1 + n\omega + \tfrac{1}{2}n(n - 1)\omega\omega$$

et $1 + 2\omega + \omega\omega$ loco zz, et noſtra aequatio fiet

$$\omega + \tfrac{1}{2}(n - 1)\omega\omega = \tfrac{1 + 2\omega + \omega\omega}{2f} + \tfrac{1}{2}\alpha,$$

vbi cum ſit

(2

$$(2(f-1)+(f(n-1)-1)\omega)\omega = 1+\alpha f,$$

inde fit $\omega = \frac{1+\alpha f}{2(f-1)+(f(n-1)-1)\omega}$, vbi si loco f scribatur 289, fiet $\omega = \frac{1+289\alpha}{576+(289n-290)\omega}$, in quo denominatore loco ω sufficit scripsisse valorem vero proximum, qui est $\frac{1+289\alpha}{576}$, vnde obtinebitur valor correctus $\frac{(1+289\alpha)576}{576^2+(289n-290)(1+289\alpha)}$.

§. 11. Quoniam igitur ex mensuris variorum graduum meridiani ratio diametri aequatoris ad axem Terrae conclusa est vt 201 ad 200, erit pro prima approximatione $\omega = \frac{1}{200}$, atque hinc valor coefficientis α definiri poterit, cum esse debeat $\frac{1}{200} = \frac{1+289\alpha}{576}$, vnde igitur fiet $\alpha = \frac{376}{200 \cdot 289} = \frac{47}{25 \cdot 289} = \frac{1}{154}$, proxime. Superfluum autem foret determinationem magis exactam desiderare, cum ratio assumta 201 : 200 satis notabiliter a veritate recedere possit; quamobrem hinc plus concludere non licet, quam esse propemodum $\alpha = \frac{1}{155}$, vnde simul patet, exponentem n prorsus non in computum ingredi.

§. 12. Hinc igitur discimus, vt superficies oceani in statu quo Terra actu reperitur in aequilibrio subsistere possit, necessario requiri, vt in visceribus Terrae singulae particulae non solum ad centrum Terrae in directione Z C sollicitentur, sed praeterea accedat vis lateralis secundum directionem ad Z C normalem agens, cuius quantitas propemodum erit $\frac{\Phi}{z} = \frac{\sin. \Phi \cos. \Phi}{150 z}$, dum scilicet grauitas sub ipso Polo vnitate exprimitur. Ita igitur vis lateralis maxima euadet vbi angulus A C Z $= \Phi$ fit semirectus, quippe cui respondebit vis lateralis $= \frac{1}{300 z}$, quae ergo in superficie maris vbi fit proxime $z = 1$ euadit $\frac{1}{300}$, ideoque vi centrifugae fere aequalis.

§. 13.

§. 13. Nisi igitur istae vires laterales ita fuerint comparatae, maria in superficie Terrae in aequilibrio subsistere nequeunt, sed in perpetua agitatione versarentur, id quod imprimis intelligendum est, si totus Terrae globus ex materia fluida constaret; tum enim, etiamsi suprema superficies talem figuram accepisset, vt vires totales, quibus singula puncta ibi sollicitantur, essent ad ipsam superficiem normales, tamen quia in maioribus profunditatibus aqua non foret in quiete, mox ille situs perturbaretur, neque igitur tota Terra ad certam figuram se componere posset.

§. 14. Manifestum autem est, talem legem circa vires laterales in ipsa natura locum habere nullo modo posse, quandoquidem pro minimis a centro Terrae distantiis hae vires laterales in infinitum excrescerent, cuiusmodi effectus ab attractione mutua neutiquam oriri potest; vnde pro certo affirmare possumus: Si tota Terra esset fluida, eius superficiem nunquam ad vllum statum aequilibrii peruenire posse.

§. 15. Cum autem maxime verisimile sit, maria nusquam tantam profunditatem occupare, vt discrimen nostrae formulae pro S inuentae a vera lege attractionis, quaecunque ea fuerit, vnquam sentiri queat, ideoque perinde, vtrum vires laterales nostram legem sequantur an vero quamcunque aliam, vtique fieri poterit, vt vniuersus oceanus in aequilibrio subsistat, siquidem hic ab exiguis agitationibus, quae a plurimis caussis oriri possunt, mentem abstrahamus, cuiusmodi sunt venti, imprimis autem varietas caloris. Cum enim sub aequatore calor perpetuo multo maior sit quam versus polos, quoniam ibi densitas aquae aliquanto minor euadit, aequilibrium etiam ob hanc caussam locum habere nequit, sed per ea, quae in Theoria motus fluidorum demonſtraui, aqua ſuprema perpetuo fluxu ab aequatore verſus polos deferri debet, quae autem iactura ab aqua prope fundum a polis ad aequatorem affluente iterum reſarcietur. Talis igitur motus oceano aeque eſt naturalis atque ille, quo perpetuo ab oriente occidentem verſus profertur.

SUR

SUR LE MOUVEMENT GYRATOIRE D'UN CORPS ATTACHÉ À UN FIL EXTENSIBLE.

PAR

JACQUES BERNOULLI.

Présenté à la Conférence le 8 Janv. 1787.

Second Mémoire.

Dans le premier Mémoire sur cette matière j'ai traité & développé, à ce qu'il me paroit avec toute l'étendue & la clarté nécessaires, le cas le plus simple, qu'on puisse se proposer dans ces recherches. Je passe maintenant à un second cas, qui ne différera du premier que dans la supposition, que le mouvement, au lieu de se faire sur une table horizontale, se fasse dans un plan vertical, ensorte que l'action de la gravité devienne un élément de plus à considérer dans le calcul.

§. 1. Soit donc encore le cercle BP décrit avec la longueur naturelle du fil, & CM la courbe décrite par le corps. En supposant que AB soit un rayon vertical, nommons de nouveau

AB - - - - - - - a,
l'angle BAP - - - - - - ω,

le double de l'espace, que décrit un corps en tombant librement pendant une seconde - - - - - g,
la plus grande extension possible du fil - - - θ,
le poids requis pour la produire - - - - - P,
la masse du corps en mouvement - - - - M,
la vitesse du corps en M, exprimée par le nombre de pieds, qu'il peut parcourir avec cette vitesse dans une seconde - - - - - - u,
l'élément du tems exprimé en secondes - - - ∂t,
le rayon osculateur en M - - - - - - R.

Le poids M étant résolu en deux forces, l'une selon AP, & l'autre perpendiculaire à celle-ci, la première sera $= M \operatorname{cos.} \omega$, & l'autre $= M \operatorname{sin.} \omega$.

§. 2. Nous aurons donc d'abord cette équation

$$\frac{uu}{R} - \frac{gPz}{M\theta} - g \operatorname{cos.} \omega = \frac{\partial \partial z}{\partial t^2},$$

ou, puisque $u = \frac{a \partial \omega}{\partial t}$,

$$\frac{aa \partial \omega^2}{R \partial t^2} - \frac{gPz}{M\theta} - g \operatorname{cos.} \omega = \frac{\partial \partial z}{\partial t^2}.$$

Or $R = \frac{aa \partial \omega^3}{a \partial \omega^3 + \partial z \partial \partial \omega - \partial \omega \partial \partial z}$, où $\partial \partial \omega$ n'est pas censée être $= 0$, puisque nous avons pris ∂t pour constant, & que la vitesse gyratoire n'est plus constante comme dans le premier cas. Substituant donc la valeur de R, l'équation devient

$$\frac{a \partial \omega^3 + \partial z \partial \partial \omega - \partial \omega \partial \partial z}{\partial t^2 \partial \omega} - \frac{gPz}{M\theta} - g \operatorname{cos.} \omega = \frac{\partial \partial z}{\partial t^2}.$$

§. 3. Mais on voit que uu doit être $= - 2ga \operatorname{cos.} \omega$ + une quantité constante, qui dépendra de la vitesse initiale au point B. Faisons donc $uu = 2C - 2ga \operatorname{cos.} \omega$, ce qui donnera $\partial t = \frac{aa \partial \omega^2}{uu} = \frac{aa \partial \omega^2}{2C - 2ga \operatorname{cos.} \omega}$. Substituant cette valeur dans l'équation du §e précédent, & otant les fractions, nous aurons

2 C

$$2 C a \partial \omega^3 - 3 g a a \operatorname{cof.} \omega \partial \omega^3 + 2 C \partial z \partial \partial \omega$$
$$- 2 g a \operatorname{cof.} \omega \partial z \partial \partial \omega - 4 C \partial \omega \partial \partial z$$
$$+ 4 g a \operatorname{cof.} \omega \partial \omega \partial \partial z - \frac{g \nu a a z \partial \omega^3}{n \partial} = 0.$$

§. 4. Comme on voit d'abord que l'intégration de cette équation est sujette à de très grandes difficultés, si non absolument impossible; j'ai imaginé un autre moyen tout aussi sur, quoiqu'indirect, pour parvenir au même but, savoir à l'équation cherché de la courbe décrite par le corps. Il ne s'agira que de me suivre avec quelque attention dans mon raisonnement.

§. 5. Dans le premier cas, que nous avons traité, nous avons vu, que la courbe étoit composée d'une infinite de *parties* toutes égales entre elles, savoir la même epicycloide toujours renouvellée: que chacune de ces parties ou de ces epicycloides étoit infiniment-petite, & que les ordonnées z sont dans un rapport infinement petit avec les arcs correspondans $a\,\omega$, que nous avons regardés comme les abscisses. Or à n'envisager que superficiellement le cas, que nous traitons à présent, on voit d'abord, que plusieurs de ces proprietés doivent concourir encore dans la courbe quelconque, que nous cherchons. En effet le fil s'étendant & se resserrant alternativement sans cesse, il doit y avoir encore une infinité de plus-petites ordonnées; seulement, comme la vitesse & l'effet de la gravité varient continuellement, les *parties* de la courbe, comprises entre chaque paire voisine des plus grandes ou des plus petites ordonnées, ne pourront pas être égales entre elles, comme dans le précédent cas.

§. 6. D'un autre coté, comme la vitesse selon la direction du fil doit toujours, par les raisons indiquées dans le prémier Mémoire, être infiniment plus petite que la viteſſe gyratoire, il faudra encore ici, que z et ∂z ſoyent dans un rapport infiniment-petit avec $a\,\omega$ et $a\,\partial\,\omega$.

§. 7. Mais une remarque, à laquelle on doit ſurtout faire attention, parceque c'eſt ſur elle, que repoſera principalement tout notre raiſonnement ſuivant, c'eſt, que chaque augmentation de l'arc $a\,\omega$, qui ſert de baſe à une *partie* de courbe, compriſe entre une paire voiſine des plus grandes ou plus petites ordonnées, ſera, comme dans notre premier cas, toûjours auſſi infiniment-petite. Car, comme ce ſont des forces finies, qui agiſſent ſur le corps dans la direction du fil, & que ce corps ne parvient pourtant jamais qu'à décrire des espaces z infiniment-petits, il eſt conſtant par les loix de la méchanique, qu'il ne peut non plus employer à ces allées & venues, que des tempuſcules infiniment-petits: & dans chacun de ces tempuſcules le corps ne pourra décrire non plus avec ſa viteſſe gyratoire finie, qu'un angle ou un arc infiniment-petit.

§. 8. Ceci étant donc démontré, que ce que nous déſignons particuliérement par le nom de *partie de courbe*, n'embraſſe qu'un angle-au-centre infiniment petit, il n'y a pas la moindre difficulté, qu'on ne puiſſe pour tout le mouvement, qui ſe fait par une de ces *parties*, regarder comme conſtantes la viteſſe gyratoire du corps, & l'action de la gravité pour augmenter ou diminuer la tenſion du fil; puisque c'eſt encore un principe généralement reconnu dans la méchanique, que, quelque variables que puiſſent être la viteſſe d'un corps & la force qui agit ſur lui, on les peut néanmoins regarder comme conſtantes, pendant un tems ∂t ou un eſpace ∂x infiniment-petits.

§. 9.

§. 9. D'après ceci recommençons nos calculs, en supposant u constante, & en mettant pour l'action de la gravite dans la direction du fil, que nous avons vu être $= g \operatorname{cos.} \omega$, une autre constante b. Ces suppositions, comme nous venons de voir, ne peuvent avoir lieu que pour une seule *partie* de la courbe; & nous verrons ensuite, comment il faudra s'y prendre, pour embrasser dans l'équation tout le nombre infini de ses diverses *parties*.

§. 10. Nous aurons donc à-présent cette équation:
$$\frac{uu}{R} - \frac{gPz}{M\vartheta} - b = \frac{\partial\partial z}{\partial t^2} = \frac{uu\partial\partial z}{aa\partial\omega^2}.$$
Substituons de nouveau pour R sa valeur, en remarquant, qu'aussi long-tems que u est regardée comme constante, $a\partial\omega$ est aussi proportionelle à ∂t, & par conséquent $\partial\partial\omega = 0$, donc $R = \frac{aa\partial\omega^2}{a\partial\omega^2 - \partial\partial z}$, ce qui donne
$$\frac{auu\partial\omega^2 - uu\partial\partial z}{aa\partial\omega^2} - \frac{gPz}{M\vartheta} - b = \frac{uu\partial\partial z}{aa\partial\omega^2}, \text{ ou}$$
$$auu\partial\omega^2\partial z - 2uu\partial z\partial\partial z - \frac{gPaaz\partial z\partial\omega^2}{M\vartheta} - aab\partial z\partial\omega^2 = 0.$$
Intégrant & ajoutant la constante $D\partial\omega^2$, on trouve
$$(auu - aab)z\partial\omega^2 - uu\partial z^2 - \frac{gPaazz\partial\omega^2}{2M\vartheta} + D\partial\omega^2 = 0,$$
d'où l'on tire
$$\partial\omega = \sqrt{\frac{2M\vartheta uu}{gPaa}} \times \frac{\partial z}{\sqrt{\frac{2M\vartheta}{gPa}(uu - ab)z + \frac{2MD\vartheta}{gPaa} - zz}}.$$
Faisons
$$z = \frac{M\vartheta}{gPa}(uu - ab) - y, \text{ et } \sqrt{\frac{2M\vartheta uu}{gPaa}} = \lambda,$$
substituons ces valeurs, et mettons ensuite de nouveau
$$\frac{M^2\vartheta^2}{g^2P^2a^2}(uu - ab)^2 + \frac{2MD\vartheta}{gPaa} = bb,$$
l'équation se changera en celle-ci $\partial\omega = \frac{-\lambda\partial y}{\sqrt{(bb - yy)}}$. Intégrant donc de nouveau, on aura

$\omega =$

$$\omega = \lambda\,(E - A\,.\,\text{fin.}\,\tfrac{y}{b}),\ \text{ou}\ y = b\,\text{fin.}\,(E - \tfrac{\omega}{\lambda}).$$

Parlà on voit, que chaque *partie de courbe* eſt encore une epicycloïde *infiniment*-allongée, dont la baſe (λ étant infiniment-petit) n'eſt qu'un arc infiniment-petit, tel que je l'avois prévu d'avance, comme un point néceſſaire pour la validité de notre calcul.

§. 12. Commençons par remettre pour y, λ, et b leurs valeurs, ce qui donnera

$$\omega = \sqrt{\tfrac{2\,M\,\theta\,u\,u}{g\,P\,a\,a}} \times (E - A\,.\,\text{fin.}\,\tfrac{M\,\theta\,(u\,u - a\,b) - g\,P\,a\,z}{M^2\,\theta^2\,(u\,u - a\,b) + 2\,g\,P\,M\,D\,\theta}),\ \text{et}$$

$$z = \tfrac{M\,\theta}{g\,P\,a}\,(u\,u - a\,b) - \sqrt{\tfrac{M^2\,\theta^2}{g^2\,P^2\,a^2}\,(u\,u - a\,b)^2 + \tfrac{2\,M\,D\,\theta}{g\,P\,a\,a}} \times \text{fin.}\,(E - \tfrac{a\,\omega}{u}\sqrt{\tfrac{g\,P}{2\,M\,\theta}}).$$

§. 12. Comme on aura donc

$$\partial z = \sqrt{\tfrac{M^2\,\theta^2}{g^2\,P^2\,a^2}\,(u\,u - a\,b)^2 + \tfrac{2\,M\,D\,\theta}{g\,P\,a\,a}} \times \tfrac{a\,\partial\omega}{u}\sqrt{\tfrac{g\,P}{2\,M\,\theta}} \times \text{cof.}\,(E - \tfrac{a\,\omega}{u}\sqrt{\tfrac{g\,P}{2\,M\,\theta}}),$$

la viteſſe ſelon la direction du fil, que dans le précédent Mémoire j'ai nommée v, & qui eſt $= \frac{u\,\partial z}{a\,\partial\omega}$, deviendra

$$= \sqrt{\tfrac{M\,\theta}{2\,g\,P}\,(\tfrac{u\,u - a\,b}{a})^2 + \tfrac{D}{a\,a}} \times \text{cof.}\,(E - \tfrac{a\,\omega}{u}\sqrt{\tfrac{g\,P}{2\,M\,\theta}}).$$

§. 13. Pour paſſer maintenant d'une *partie* de la courbe à la courbe entiére, & pour trouver l'équation, qui embraſſe à la fois toutes ces parties, il n'y a qu'à ſubſtituer pour u & b, que nous avons priſes conſtantes jusqu'à-preſent, les valeurs variables, que nous leur avions trouvées plus haut, ſavoir pour u, $\sqrt{(2\,C - 2\,g\,a\,\text{cof.}\,\omega)}$ d'après le §. 3, & pour b, $g\,\text{cof.}\,\omega$; ce qui donnera pour équation de la courbe complète

$z =$

$$z = \frac{M\theta}{gPa}(2C - 3ga\,\text{cos}.\,\omega) - \sqrt{\frac{M^2\theta^2}{g^2P^2a^2}(2C - 3ga\,\text{cos}.\,\omega)^2 + \frac{2MD\theta}{gPaa}} \times$$
$$\text{sin}.\left(E - a\omega\sqrt{\frac{gP}{4MC\theta - 4gM\theta a\,\text{cos}.\,\omega}}\right).$$

§. 14. En faisant les mêmes substitutions, on trouvera la valeur générale de

$$v = \sqrt{\frac{M\theta}{2gP}\left(\frac{2C - 3ga\,\text{cos}.\,\omega}{a}\right)^2 + \frac{D}{aa}} \times \text{cos}.\left(E - a\omega\sqrt{\frac{gP}{4MC\theta - 4gM\theta a\,\text{cos}.\,\omega}}\right).$$

§. 15. L'équation que nous avons trouvée pour la courbe, est, comme on voit, si compliquée, que si nous y étions parvenus directement avec le seul secours du calcul, il nous seroit impossible de nous faire une idée de la nature & des propriétés de la courbe; au lieu que la manière indirecte, qui nous a conduit à cette équation, renferme le grand avantage, qu'elle nous a fait entrer dans son essence, & fait voir, sans laisser le moindre doute, que la courbe est composée d'une infinité d'epicycloïdes infiniment allongées, & toutes différentes entre elles, à moins qu'après un ou plusieurs tours le corps ne vienne justement à décrire de nouveau les mêmes epicycloïdes, qu'il avoit décrites auparavant; ce qui arrivera, si $\frac{gP}{4MC\theta - 4gM\theta a}$ est un quarré.

§. 16. Notre équation renferme trois constantes à déterminer, ce qui se fera par la considération de l'etat initial du corps, quand $\omega = 0$. Supposons qu'alors sa vitesse gyratoire soit due à la hauteur f, &, pour plus de simplicite, que la vitesse selon la direction du fil $= 0$, & z aussi $= 0$. Nous aurons donc, 1°. $u = \sqrt{(2C - 2ga\,\text{cos}.\,\omega)} = \sqrt{(2C - 2ga)} = \sqrt{2gf}$, ce qui donne $C = g(a + f)$. 2°. En mettant pour C la valeur qu'on vient de trouver,

$$v = 0 = \sqrt{\frac{M\theta}{2gP}\left(\frac{2gf - ga}{a}\right)^2 + \frac{D}{aa}} \times \text{cos}.\,E,$$

 où

où l'on peut encore rester en doute, si c'est cos. E, ou l'autre facteur, qui doit être mis $= 0$. Prenons donc l'équation

$$z = 0 = \frac{M\theta}{gPc}(2gf - ga) - \sqrt{\frac{M^2\theta^2}{g^2P^2c^2}(2gf-ga)^2 + \frac{2MD\theta}{gPaa}} \times \text{fin. } E.$$

A-présent l'on voit qu'on peut mettre $E = (4m + 1)\,90^\circ$, (entendant par m un nombre entier quelconque), & satisfaire parlà à toutes les deux équations. En effet on aura pour la derniere fin. $E = 1$, & $D = 0$; & comme cos. $E = 0$,

$$\sqrt{\frac{M\theta}{2gP}\left(\frac{2gf-ga}{a}\right)^2 + \frac{D}{aa}} \times \text{cof. } E \text{ fera auffi } = 0.$$

Subftituant donc dans les équations trouvées pour z & v, les valeurs trouvées pour C, D & E, elles se changeront en celles-ci

$$z = \frac{M\theta}{Pa}(2f + 2a - 3a\,\text{cof.}\,\omega) - \frac{M\theta}{Pa}(2f + 2a - 3a\,\text{cof.}\,\omega) \times$$
$$\text{cof. } a\,\omega\sqrt{\frac{P}{4Mf\theta + 4Ma\theta - 4Ma\theta\,\text{cof.}\,\omega}},$$
$$v = \sqrt{\frac{gM\theta}{2P}\left(\frac{2f+2a-3a\,\text{cof.}\,\omega}{a}\right)^2} \times \text{fin. } a\,\omega\sqrt{\frac{P}{4Mf\theta + 4Ma\theta - 4Ma\theta\,\text{cof.}\,\omega}}.$$

§. 17. Tachons d'entrer encore d'avantage dans la nature de notre courbe, & cherchons prémiérement les plus grandes & les plus petites ordonnées. Comme pour cet effet il faut faire $\partial z = 0$, & que v eft proportionnelle à ∂z, il n'y a qu'à mettre l'expreffion, que nous venons de trouver pour v, $= 0$. Or, comme ces plus grandes & plus petites ordonnées font infiniment proches l'une de l'autre, & reviennent, pour peu que l'angle ω reçoive d'accroiffement, on voit que ce n'eft pas le premier facteur

$$\sqrt{\frac{gM\theta}{2P}\left(\frac{2f+2a-3a\,\text{cof.}\,\omega}{a}\right)^2},$$

qui doit étre mis $= 0$, mais le fecond

$$\text{fin. } a\,\omega\sqrt{\frac{P}{4Mf\theta + 4Ma\theta - 4Ma\theta\,\text{cof.}\,\omega}}.$$

Ce

Ce fecond facteur étant donc $= 0$, on aura (en entendant encore par m un nombre entier quelconque),

$$a\,\omega\,\sqrt{\frac{P}{4mf\theta + 4Ma\theta - 4Ma\theta\,\text{cof.}\,\omega}} = 2\,m\,90°, \text{ ou}$$

$$\omega = \frac{m\,180°}{a}\sqrt{\frac{4mf\theta + 4Ma\theta - 4Ma\theta\,\text{cof.}\,\omega}{P}}.$$

Mettant cette valeur de ω dans l'expreffion générale de z, on aura, puisque cof. $m\,180° = \pm 1$,

$$z = \tfrac{M\theta}{Pa}(2f + 2a - 3a\,\text{cof.}\,\omega) \mp \tfrac{M\theta}{Pa}(2f + 2a - 3a\,\text{cof.}\,\omega),$$

ou bien $z = 0$, & $= \frac{2M\theta}{Pa}(2f + 2a - 3a\,\text{cof.}\,\omega)$.

Les plus petites ordonnées feront donc toutes $= 0$, & les plus grandes varieront fuivant la *partie* de courbe, ou l'epicycloïde, à laquelle elles appartiendront, c'eft-à-dire fuivant l'angle ω plus ou moins grand. Ainfi par exemple au commencement, ou au plus haut point du mouvement, quand $\omega = 0$, la plus grande ordonnée fera la plus petite de toutes les plus grandes, favoir $= \frac{2M\theta}{Pa}(2f - a)$. Quand $\omega = 90°$ ou $270°$, la plus grande ordonnée devient $= \frac{2M\theta}{Pa}(2f + 2a)$, & quand $\omega = 180°$, la plus grande ordonnée devient la plus grande de toutes les plus grandes, favoir $= \frac{2M\theta}{Pa}(2f + 5a)$.

§. 18. Ici l'on pourroit faire une objection affés fpécieufe, favoir que z ayant été fuppofée $= 0$, quand $\omega = 0$, elle ne peut pas en même tems être $= \frac{2M\theta}{Pa}(2f - a)$, & que de même il n'eft point démontré, qu'aux arcs de 90, 180, ou 270 dégrés répondra précifément chaque fois une plus grande ordonnee de la courbe. Pour réfoudre cette difficulté il faut faire attention, que ces plus grandes ordonnees font, comme je l'ai deja fait obferver, toutes infiniment voifines les unes des autres, & que par-conféquent fi une plus grande ordonnee ne répond pas au point précis d'un certain nombre de dégrés, comme de o, 90 &c., elle s'en trouvera à la diſtance d'un ſi petit angle, qu'il ne changera en rien la valeur de l'ordonnée, & que ce petit angle pourra être négligé. Cet angle cependant, que nous nommerons β, ſera chaque fois déterminé de la manière ſuivante. Nous avons vu, que la plus grande ordonnée z devient $= \frac{2M\theta}{Pa}(2f+2a)$, quand $\omega = 90°$; mais comme ceci n'eſt vrai que très à-peu-près, ſuppoſons que ω ſoit alors $= 90° + \beta$, par-conſéquent ſin. $\omega = 1$, & coſ. $\omega = \beta$; nous aurons, en ſubſtituant ces valeurs de z & de ω dans l'équation à la fin du §. 16,

$$\frac{2M\theta}{Pa}(2f+2a) = \frac{M\theta}{Pa}(2f+2a) - \frac{M\theta}{Pa}(2f+2a) \times$$
$$\text{coſ. } a(90°+\beta)\sqrt{\frac{P}{4Mf\theta+4Ma\theta}} \text{ ou}$$
$$\text{coſ. } a(90°+\beta)\sqrt{\frac{P}{4Mf\theta+4Ma\theta}} = -1,$$

d'où l'on tire

$$\beta = \frac{m\,180°}{a}\sqrt{\frac{(4Mf\theta+4Ma\theta)}{P}} - 90°,$$

(où m ſignifie un nombre impair.) Comme β ne peut être qu'infiniment-petit, & que θ l'eſt auſſi, il faut que m ſoit infiniment grand; β n'eſt donc pas déterminé, & il ne peut pas l'être, en conſervant toute la rigueur de nos ſuppoſitions, parcequ'il y aura pluſieurs plus grandes ordonnées aux environs de $\omega = 90°$, qui ſeront toutes $= \frac{2M\theta}{Pa}(2f+2a)$, & à chacune deſquelles répondra un autre angle β. Mais ſi au lieu de regarder θ comme rigoureuſement infiniment petit, on lui donne une valeur finie quoique très petite par rapport à a, m devra auſſi être un nombre impair fini, & il faudra choiſir celui, qui donnera pour

$$\beta = \frac{m\,180°}{a}\sqrt{\frac{(4mf\theta+4Ma\theta)}{P}} - 90°$$

la plus petite valeur. Le même raiſonnement aura lieu, quand

$z =$

$$z = \frac{2M\theta}{Pa}(2f + 5a), \text{ \& } \omega = 180^\circ + \beta;$$

car alors on trouve

$$\beta = \frac{m\,180^\circ}{a}\sqrt{\frac{4Mf\theta + 8Ma\theta}{P}} - 180^\circ.$$

Mais quand

$$z = \frac{2M\theta}{Pa}(2f - a), \text{ et } \omega = 0 + \beta, \text{ on a}$$

$$\beta = \frac{m\,180^\circ}{a}\sqrt{\frac{4Mf\theta}{P}},$$

où, n'y ayant rien à foustraire, m devra être mis $= 1$, que θ foit infiniment petit ou feulement très petit.

§. 19. Cherchons encore l'angle ou l'arc, qui doit fervir de bafe à chaque epicycloïde. Pour cet effet il n'y a qu'à voir, quelle eft la diftance entre deux plus petites ordonnées voifines. Comme nous avons trouvé, que $a\omega\sqrt{\frac{P}{4M\theta(f+a-a\cos.\omega)}}$ doit être $= 2m\,90^\circ$, pour que z devienne une plus grande ou plus petite ordonnée; on aura les plus grandes ordonnées, quand m eft un nombre impair, par ce qu'alors cof. $2m\,90^\circ$ devient négatif; & les plus petites ordonnées, par la raifon contraire, reviendront, quand m fera un nombre pair. Si donc à telle plus petite ordonnée que ce foit, répond un certain angle ω, & un certain nombre m, il eft clair, que pour la plus petite ordonnée voifine le nombre m deviendra $m + 2$, & l'angle ω prendra un petit accroiffement Φ, deforte qu'on aura encore

$$a(\omega + \Phi)\sqrt{\frac{P}{4M\theta(f + a - a\cos.\omega)}} = 2(m + 2)\,90^\circ;$$

fouftrayant l'autre équation de celle-ci, il reftera

$$a\Phi\sqrt{\frac{P}{4M\theta(f + a - a\cos.\omega)}} = 360^\circ, \text{ ou bien}$$

$$\Phi = 360^\circ\sqrt{\frac{4M\theta(f + a - a\cos.\omega)}{Paa}}.$$

Cet angle Φ ou l'arc $a\Phi$ eft la bafe, que nous cherchions, &

comme nous voyons, que cof. ω revient encore dans fon expreffion, c'eft une marque, que les bafes varieront fuivant les différentes epicycloïdes, auxquelles elles appartiendront. Ainfi au point le plus haut, quand $\omega = 0$, l'angle Φ fera $= 360° \sqrt{\frac{4Mf\vartheta}{Paa}}$; quand $\omega = 90°$ ou $270°$, on aura $\Phi = 360° \sqrt{\frac{4M\vartheta(f+a)}{Paa}}$; & quand $\omega = 180°$, l'angle de bafe fera le plus grand de tous, favoir $= 360° \sqrt{\frac{4M\vartheta(f+2a)}{Paa}}$, comme alors on a auffi de même la plus grande de toutes les plus grandes ordonnées.

§. 20. Il vaut la peine que nous nous arrètions un moment à un cas particulier, favoir celui, quand la hauteur f, due à la viteffe gyratoire initiale du corps eft $= \frac{1}{2} a$. Alors on a $vv = ga$. Or on fait que, lorsque la viteffe d'un corps, qui tourne autour d'un centre, eft égale à celle qu'il pourroit acquérir, en parcourant avec fa force centripète la moitié du rayon, les forces centripète & centrifuge deviennent égales, & c'eft ce que donne auffi l'expreffion $\frac{uu}{R}$, que nous avons pour la force centrifuge; car quand $u = \sqrt{2k.\frac{1}{2}R}$, (où k répréfente la force centripète), on a $\frac{uu}{R} = k =$ à la force centripète. Que le corps commence donc au point le plus haut à tourner avec une viteffe $= \sqrt{(2g.\frac{1}{2}a)} = \sqrt{ga}$; fa force centrifuge fera précifément en équilibre avec l'action de la gravité; il n'y aura donc dans ce premier moment aucune tenfion du fil, toutes les ordonnées z feront $= 0$, & le corps, au lieu de décrire une epicycloïde, ne décrira d'abord qu'un petit arc du cercle immobile, dont le rayon $= a$, jusqu'à ce qu'après un tems infiniment petit la force centrifuge ait pris le deffus fur l'action de la gravité, enforte que les z commencent à prendre une petite valeur, & que le corps décrive des epicycloïdes, qui d'abord feront incomparablement plus applaties que les fuivantes, qui répondront a des angles ω plus grands. Tout ceci eft eſt parfaitement d'accord avec ce qui réſulte de nos formules. En effet, nous avons vu, que la plus grande ordonnée, quand $\omega = 0$, étoit $= \frac{2 M \theta}{P a} (2 f - a)$; or cette expreſſion devient $= 0$, quand $f = \frac{1}{2} a$. L'angle Φ au contraire ne devient pas pour cela auſſi $= 0$, mais ſon expreſſion $360^\circ \sqrt{\frac{4 M f \theta}{P a a}}$ ſe change en celle-ci $360^\circ \sqrt{\frac{2 M \theta}{P a}}$. Si ω augmente jusqu'à devenir $= \psi$, que je ſuppoſe être un angle fort petit encore, on aura $\text{coſ.}\,\omega = \text{coſ.}\,\psi = 1 - \frac{1}{2} \psi \psi$. Delà

$$\Phi = 360^\circ \sqrt{\frac{4 M \theta (f + a - a\,\text{coſ.}\,\omega)}{P a a}} = 360^\circ \sqrt{\frac{2 M \theta (1 + \psi \psi)}{P a}}$$
$$= 360^\circ \sqrt{\frac{2 M \theta}{P a}},$$

puisqu'on pourra négliger encore le $\psi \psi$ en comparaiſon de l'unité. Pour la plus grande ordonnée

$$z = \frac{2 M \theta}{P a} (2 f + 2 a - 3 a\,\text{coſ.}\,\omega),$$

elle ſe changera, en faiſant les mêmes ſubſtitutions, en $\frac{3 M \theta \psi \psi}{P}$, deſorte que le rapport de la plus grande ordonnée de l'epicycloide à ſa baſe, l'arc $a \Phi$, ſera exprimé par

$$\frac{3 M \theta \psi \psi}{P} : a\, 360^\circ \sqrt{\frac{2 M \theta}{P a}} = \frac{\psi \psi}{120^\circ} \sqrt{\frac{M \theta}{2 P a}}.$$

Mais quand $\omega = 90^\circ$ ou 270°, la plus grande ordonnée z devient $= \frac{6 M \theta}{P a}$, & la baſe $a \Phi = a\, 360^\circ \sqrt{\frac{6 M \theta}{P a}}$, enſorte que le rapport entre z & $a \Phi$ eſt $= \frac{1}{120^\circ} \sqrt{\frac{2 M \theta}{3 P a}}$; & quand $\omega = 180^\circ$, ce rapport devient $= \frac{1}{120^\circ} \sqrt{\frac{8 M \theta}{3 P a}}$. Ces differens rapports ſont donc entre eux, comme $\psi \psi \sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{2}{3}} : \sqrt{\frac{8}{3}}$. D'où l'on voit que ce rapport eſt le plus grand, & qu'on a l'epicycloide la plus elargie au point le plus bas, où $\omega = 180^\circ$; & qu'au contraire, comme ψ eſt ſuppoſé extrêmement petit, ce rapport eſt encore, pour ainſi dire, infiniment petit, & donne des epicycloides ſi applaties vers les régions les plus élevées du mouvement, qu'elles ſe confondent presque avec le cercle qui leur ſert de baſe.

§. 21.

§. 21. Il nous reſte une remarque à faire, ſavoir que la plus petite viteſſe gyratoire, que notre calcul permette de ſuppoſer, doit être telle, que $f = \frac{1}{2} a$. Car ſi $f < \frac{1}{2} a$, on aura, auſſi long-tems que ω ne ſera pas fort grand, des z négatives, & dans non prémier Mémoire j'ai expliqué ſuffiſamment les raiſons, qui ne permettent pas de former des ſuppoſitions, qui donneroient des quantités négatives pour z.

§. 22. Jusqu'ici je n'ai pas encore parlé du tems, que le corps employera à décrire quelque arc que ce ſoit de ſa courbe. Comme cette recherche ſeule demande des calculs aſſés prolixes, j'ai cru qu'il vaudroit mieux la renvoyer à la fin du Mémoire: & c'eſt de quoi ſeul il nous reſte donc à nous occuper. La formule générale pour l'expreſſion du tems eſt $\partial t = \frac{\partial s}{u}$, qui dans notre cas préſent ſe change en celle-ci

$$\partial t = \frac{a\,\partial\omega}{\sqrt{(2c - 2g\,a\cos.\omega)}} = \frac{a}{\sqrt{2c}} \times \frac{\partial\omega}{\sqrt{(1 - \lambda\cos.\omega)}},$$

(en faiſant $\frac{g\,a}{c} = \lambda$). Or $(1 - \lambda\cos.\omega)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\lambda\cos.\omega$

$$+ \frac{1.3}{2.4}\lambda^2\cos.\omega^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\lambda^3\cos.\omega^3 + \frac{1.3.5.7\,\lambda^4\cos.\omega^4}{2.4.6.8}$$
$$+ \frac{1.3.5.7.9\,\lambda^5\cos.\omega^5}{2.4.6.8.10} + \&c.$$

Donc

$$t = \frac{a}{\sqrt{2c}}\Big(\int\partial\omega + \tfrac{1}{2}\lambda\int\partial\omega\cos.\omega + \frac{1.3\,\lambda^2}{2.4}\int\partial\omega\cos.\omega^2$$
$$+ \frac{1.3.5\,\lambda^3}{2.4.6}\int\partial\omega\cos.\omega^3 + \frac{1.3.5.7\,\lambda^4}{2.4.6.8}\int\partial\omega\cos.\omega^4$$
$$+ \frac{1.3.5.7.9\,\lambda^5}{2.4.6.8.10}\int\partial\omega\cos.\omega^5 + \&c.\Big).$$

Or $\int\partial\omega = \omega$, et $\frac{1}{2}\lambda\int\partial\omega\cos.\omega = \frac{1}{2}\lambda\,\text{ſin.}\,\omega$. De plus, faiſant $\cos.\omega = p$, on a

$$\int\partial\omega\cos.\omega^2 = \int\frac{-pp\,\partial p}{\sqrt{(1-pp)}} = \tfrac{1}{2}p\sqrt{(1-pp)} - \tfrac{1}{2}A.\,\text{ſin.}\,p.$$
$$\int\partial\omega\cos.\omega^3 = \int\frac{-p^3\,\partial p}{\sqrt{(1-pp)}} = \tfrac{1}{3}pp\sqrt{(1-pp)} + \tfrac{1}{3}p\sqrt{(1-pp)}$$
$$- \tfrac{1}{3}A.\,\text{ſin.}\,p.$$

$\int\partial\omega$

$$\int \partial \omega \,\text{cof.}\, \omega^4 = \int \frac{-p^4 \partial p}{\sqrt{(1-pp)}} = \tfrac{1}{4} p^3 \sqrt{(1-pp)} + \tfrac{3}{4\cdot 2} p \sqrt{(1-pp)}$$
$$+ \tfrac{1}{4} p \sqrt{(1-pp)} - \tfrac{1}{4} A.\,\text{fin.}\, p.$$
$$\int \partial \omega \,\text{cof.}\, \omega^5 = \int \frac{-p^5 \partial p}{\sqrt{(1-pp)}} = \tfrac{1}{5} p^4 \sqrt{(1-pp)} + \tfrac{1}{5} p^3 \sqrt{(1-pp)}$$
$$+ \tfrac{1}{5} pp \sqrt{(1-pp)} + \tfrac{1}{5} p \sqrt{(1-pp)} - \tfrac{1}{5} A.\,\text{fin.}\, p.$$

Subſtituant de nouveau pour p & $\sqrt{(1-pp)}$ leurs valeurs cof. ω & fin. ω, & pour A . fin. p, $90^\circ - \omega$, l'on aura donc, en ajoutant la conſtante D,

$$t = \frac{a}{\sqrt{2c}} [D + \omega + \tfrac{1}{2}\lambda)\,\text{fin.}\,\omega$$
$$- \frac{1.3\,\lambda^2}{2.2.4} (90^\circ - \omega) + \frac{1.3\,\lambda^2}{2.2.4}\,\text{fin.}\,\omega\,\text{cof.}\,\omega$$
$$- \frac{1.3.5\,\lambda^3}{3.2.4.6} (\ldots) + \frac{1.3.5.\,\lambda^3}{3.2.4.6} \ldots + \frac{1.3.5\,\lambda^3}{3.2.4.6}\,\text{fin.}\,\omega\,\text{cof.}\,\omega^2$$
$$- \frac{1.3.5.7\,\lambda^4}{4.2.4.6.8} (\ldots) + \frac{1.3.5.7\,\lambda^4}{4.2.4.6.8} \ldots + \frac{1.3.5.7\,\lambda^4}{4.2.4.6.8} \ldots + \frac{1.3.5.7\,\lambda^4}{4.2.4.6.8}\,\text{fin.}\,\omega\,\text{cof.}\,\omega^3$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \&c.$$
$$- \frac{1.3.5\ldots(2n-1)\lambda^n}{n.2.3.6\ldots 2n} (\ldots) + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)\lambda^n}{n.2.4.6\ldots 2n} \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)\lambda^n \ldots}{n.2.4.6\ldots 2n} + \&c.$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$- \frac{1.3.5\ldots 2\infty\lambda^\infty}{\infty.2.4.6\ldots 2\infty} + \frac{1.3.5\ldots 2\infty\lambda^\infty}{\infty.2.4.6\ldots 2\infty} + \frac{1.3.5\ldots 2\infty\lambda^\infty}{\infty.3.4.6\ldots 2\infty} + \&c.]$$

ces termes de la derniére ſuite ſont tous $= 0$, puisque λ eſt une fraction plus petite que l'unité. En effet C étant $= ga + gf$, on a $\lambda = \frac{gn}{4up} = \frac{a}{a2+f\lambda}$ & f ne pouvant, comme nous avons vu, être plus petit que $\frac{1}{2}a$, λ ne pourra pas non plus être plus grand que $\frac{2}{3}$; d'où l'on voit que les ſeries verticales

 ſont

ſont toutes aſſés convergentes, & la manière, dont ces ſéries ſe ſont formées, montre, qu'on n'eſt obligé de prendre qu'autant de ces ſéries, qu'on prend de termes dans chacune. Mais ſi l'on ne veut ſavoir le tems que pour les 4 points cardinaux de la circonférence, c'eſt à dire quand $\omega = 0, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$, &c., toutes ces ſéries à l'exception d'une ſeule, s'evanouïront, parceque dans tous ces points on a ou ſin. ω ou coſ. $\omega = 0$.

§. 23. Pour déterminer la conſtante, on remarquera, que t & ω doivent être en même tems $= 0$, ce qui donne

$$0 = \frac{a}{\sqrt{2c}} \left(D - \frac{1.3\,\lambda^2\,90^\circ}{2.\,2.\,4} - \frac{1.3.5\,\lambda^3\,90^\circ}{3.\,2.\,4.\,6} - \frac{1.3.5.7\,\lambda^4\,90^\circ}{4.\,2.\,4.\,6.\,8} - \frac{1.3.5.7.9\,\lambda^5\,90^\circ}{5.\,2.\,4.\,6.\,8.\,10} - \&c.\right)$$

d'où l'on a, en faiſant $180^\circ = \pi$

$$D = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1.3\,\lambda^2}{2.\,2.\,4} + \frac{1.3.5\,\lambda^3}{3.\,2.\,4.\,6} + \frac{1.3.5.7\,\lambda^4}{4.\,2.\,4.\,6.\,8} + \frac{1.3.5.7.9\,\lambda^5}{5.\,2.\,4.\,6.\,8.\,10} + \&c.\right).$$

§. 24. Nommant t' le tems employé à parcourir le premier quart-de-cercle, t'' celui requis pour les deux premiers, t''' celui pour les trois premiers, &c. on aura

$$t' = \frac{a}{\sqrt{2c}} \left(\frac{\pi + \lambda}{2} + D\right); \qquad t'' = \frac{a}{\sqrt{2c}} (\pi + 2D);$$

$$t''' = \frac{a}{\sqrt{2c}} \left(\frac{3\pi - \lambda}{2} + 3D\right); \qquad t^{IV} = \frac{a}{\sqrt{2c}} (2\pi + 4D);$$

$$t^{V} = \frac{a}{\sqrt{2c}} \left(\frac{5\pi + \lambda}{2} + 5D\right); \qquad t^{VI} = \frac{a}{\sqrt{2c}} (3\pi + 6D);$$

$$t^{VII} = \frac{a}{\sqrt{2c}} \left(\frac{7\pi - \lambda}{2} + 7D\right); \qquad t^{VIII} = \frac{a}{\sqrt{2c}} (4\pi + 8D);$$

&c. &c.

§. 25. Puisque donc tout dépend principalement de la conſtante D, commençons par la chercher pour un cas particulier, en ſuppoſant $f = a$, ce qui donne $C = 2ga$, & $\lambda = \frac{1}{2}$. On aura donc

1. 3.

$$\frac{1.3\lambda^2}{2.2.4} = \frac{3}{64} = 0.0469$$

$$\frac{1.3.5\lambda^3}{3.2.4.6} = \frac{5}{384} = 0.0130$$

$$\frac{1.3.5.7\lambda^4}{4.2.4.6.8} = \frac{35}{8192} = 0.0043$$

$$\frac{1.3.5.7.9\lambda^5}{5.2.4.6.8.10} = \frac{63}{40960} = 0.0015$$

$$\frac{1.3.5.7.9.11\lambda^6}{6.2.4.6.8.10.12} = \frac{231}{393216} = 0.0006$$

$$\frac{1.3.5.7.9.11.13\lambda^7}{7.2.4.6.8.10.12.14} = \frac{3003}{18845056} = 0.0003$$

$$\overline{0.0666.}$$

On a donc $D = \frac{\pi}{2}(0.0666) = \frac{1}{30}\pi$. Et comme pour cet exemple on a $\frac{a}{12c} = \sqrt{\frac{a}{4g}}$, on déterminera donc facilement en secondes le tems employé à décrire différens quarts-de-cercle, si l'on exprime a en telles mesures qu'on veut, pourvû qu'on donne en même tems à g la valeur requise. Ainsi a étant exprimée en pieds de France, g sera $= 30.167$. Le tems employé à décrire un tour entier, ou t^{IV}, sera

$$= \sqrt{\frac{a}{4g}}\left(2\pi + \frac{4}{30}\pi\right) = \frac{16}{15}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Si l'on veut que ce tems soit justement d'une seconde, on fera $\frac{16}{15}\pi\sqrt{\frac{a}{g}} = 1$, ce qui donne $a = \frac{15.15g}{16.16\pi\pi} = \frac{15 \times 15 \times 30.167}{16 \times 16 \times \pi\pi} = 2$ pieds, 7 pouces de France. Si au contraire la longueur a est précisément celle du pendule simple à secondes, c'est-à-dire $a = \frac{30.167}{\pi\pi}$, le tems d'une révolution entiére sera

$$= \frac{16}{15}\pi\sqrt{\frac{30.167}{30.167\pi\pi}} = 1\tfrac{1}{15} \text{ secondes.}$$

ESSAY
RELATIF AUX RECHERCHES DE M. DE LA GRANGE SUR L'ATTRACTION DES SPHEROIDES ELLIPTIQUES.

PAR
W. L. KRAFFT.

Lu à l'Académie le 8 Mars 1787.

I.

M. *de la Grange*, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin pour l'année 1773, a donné une nouvelle méthode on ne peût plus ingenieuse de déterminer l'attraction d'un Sphéroide elliptique sur un corpuscule placé dans un endroit quelconque. Après avoir remarqué, que ce problème est du nombre de ceux, auxquels l'Analyse paroit en quelque sorte insuffisante, & la Synthese seule capable d'atteindre, il observe, qu'il est extremement surprenant, que depuis Maclaurin, qui dans son Traité sur le flux & le reflux de la mer a resolû le premier ce problème par un chef-d'oeuvre de Synthese, il n'ait pas éte resolû d'une maniere directe & analytique; que la cause en doit être attribuée aux difficultés que renferme l'integration des différentielles, auxquelles on parvient, lorsqu'on envisage ce problème sous un point de vûe purement analytique; & qu'il paroit, qu'on n'a pû y réussir jusqu'à-présent, qu'en se bornant à l'hypothese, que

que le Sphéroïde soit très peu différent d'une Sphére, ou en se contentant, à la place d'une solution rigoureuse, d'une simple approximation par le moyen des series.

2.) Le but, que M. *de la Grange* se propose dans cet excellent mémoire, est de faire voir, que bien loin que le problême, dont il s'agit, se refuse à l'Analyse, il peut par ce moyen être resolù même plus directement & plus généralement, que par la voye de la Synthese; ce, que cet illustre Géometre a executé d'une façon extremement judicieuse, en employant un rayon vecteur tiré du corpuscule attiré à l'élément attirant du Spheroide avec deux angles, qui en déterminent la position, au lieu des trois coordonnées orthogonales, dont on se sert pour cet effet dans l'Analyse ordinaire des problêmes de cette espéce. Avant que de donner sa nouvelle méthode & pour faire voir, combien il est important dans cette recherche, d'employer à la place des trois coordonnées orthogonales d'autres variables, qui puissent faciliter les intégrations, qu'elle demande, M. *de la Grange* fait sentir les difficultés de la méthode ordinaire, en l'appliquant au cas le plus simple du problême, où le corps attirant seroit une Sphére; & il conclut, qu'en s'y prennant par le moyen des trois coordonnées orthogonales il sera presqu' impossible de déterminer l'attraction même d'une Sphere sur un corpuscule placé dans un endroit quelconque, qu'il observe être cependant facile à trouver en envisageant la Sphere comme partagee en une infinité de petits cylindres, ayant pour leur axe commun la ligne, qui joint le corpuscule attiré & le centre de la Sphere. On contribueroit sans doute beaucoup au but de ce mémoire de M. *de la Grange*, si l'on trouvoit moyen de déterminer pas le procedé des trois coordonnees orthogonales l'attraction des Sphéroides elliptiques sur un corpuscule placé dans un endroit quelconque & conféquemment de refoudre par la voye analytique ordinairement employée dans cette efpece de recherches les problèmes, dont la plûpart n'ont pû fe refufer aux moyens ingénieux de fa nouvelle méthode. Ce n'eft qu'en forme d'un petit effay de cette efpece, que j'ai crû pouvoir faire ici l'expofé d'une telle folution de deux cas du problème, lorsque le corpuscule attiré fe trouve dans un point quelconque de l'axe de revolution, ou fous l'equateur à la furface du fphéroïde, d'autant plus, que ces deux cas ont été auffi traités par M. *Euler* dans un mémoire inféré au Tome X. des Commentaires de l'Académie, où par une approximation moyennant des feries, il calcule l'attraction d'un Sphéroïde de revolution fur un point placé à la furface fous le Pole ou fous l'Equateur du Sphéroïde.

Problème I.

Determiner la valeur de l'attraction, qu'un Sphèroïde elliptique exerce fur un corpuscule placé dans un point quelconque de l'axe de revolution, en fuppofant l'attraction reciproquement proportionelle aux quarrés des diftances.

Toutes les furfaces du 2 ordre, qui font renfermées dans un efpace fini, étant repréfentées par l'équation $z^2 + m x^2 + n y^2 = k^2$ où m & n font des coëfficiens pofitifs quelconques & le commencement des abfciffes pris dans le centre de la furface; fi l'on y fait $m = n$ l'équation $z^2 + m(x^2 + y^2) = k^2$ repréfente un Sphéroïde elliptique formé par la révolution d'une ellipfe, dont l'équation feroit $z^2 + m u^2 = k^2$, autour de l'axe des abfciffes z (voy. le Mem. de M. *la Grange*, §. 6.) Mettons $z = k - v$; & nous aurons $v^2 + m u^2 = 2 k v$ pour l'équation de l'ellipfe & $v^2 + m(x^2 + y^2) = 2 k v$ pour l'équation à la furface du Sphéroïde engendré par la revolution de

cette

cette ellipſe autour de l'axe des abſciſſes v, dont le commencement ſera pris dans le ſommet de l'axe.

Soit α l'élément du Sphéroïde, dont la poſition ſoit determinée par les trois coordonnées orthogonales v, y & t, enſorte que $\alpha = \partial v . \partial y . \partial t$. Soit e la diſtance entre le corpuſcule attiré dans l'axe de révolution & le ſommet de l'axe; enſorte, que ce corpuſcule étant ſuppoſé être hors du Sphéroïde, ſa diſtance à l'élément α du Sphéroide ſoit

$$\sqrt{((v + e)^2 + y^2 + t^2)} = D.$$

On aura donc $\frac{\partial v \partial y \partial t}{D^2}$ pour l'élément de l'attraction ſuivant la ligne, qui joint le corpuſcule attiré & la particule α du Sphéroide, laquelle étant décompoſée ſuivant la direction des trois coordonnées v, y & t donne les trois attractions élémentaires

$$\frac{(v + e) \partial v . \partial y . \partial t}{D^3};\ \frac{y \partial v \partial v \partial t}{D^3}\ \&\ \frac{t \partial t . \partial v . \partial y}{D^3}.$$

Or comme il eſt evident par la nature de la choſe même, que les deux attractions perpendiculaires à l'axe de revolution ſeront nulles; il ne reſte, que l'attraction ſuivant l'axe de revolution, dont l'élément eſt

$$\frac{(v + e) \partial v . \partial y . \partial t}{((v + e)^2 + y^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'intégrale de cette differentielle par rapport à la ſeule variable t ſe trouve

$$\frac{(v + e) \partial v . \partial y}{((v + e)^2 + y^2)} . \frac{t}{\sqrt{((v + e)^2 + y^2 + t^2)}}.$$

Or la valeur extreme de t, qui répond à la ſurface du ſolide, étant $t = x$; on aura $t = \mp \sqrt{\frac{2kv - v^2 - my^2}{m}}$, & l'integrale priſe en ſorte, qu'elle ſoit $= 0$ lorſque $t = 0$, & étendue à ces deux valeurs extremes de t, ſe change en celle-cy:

$$\frac{2(v + e) \partial v}{\sqrt{(2kv - v^2 + m(e + v)^2)}} . \frac{\partial y . \sqrt{(2kv - v^2 - my^2)}}{(v + e)^2 + y^2)}.$$

Inte-

Integrant cette differentielle par rapport à la variable y, & faisant pour abreger

$$\frac{m e^2}{1-m} = \alpha; \quad \frac{k+m e}{1-m} = \beta;$$
$$\frac{\sqrt{(2 k v - v^2 - m y^2)}}{y} = \mathrm{Y}, \quad \& \quad \frac{\sqrt{(\alpha + 2\beta v - v^2)}}{v+e} = \mathrm{V}$$

nous aurons l'integrale

$$\frac{2}{\sqrt{(1-m)}} \cdot \frac{\partial v}{\mathrm{V}} [\sqrt{m}. \text{Arc. tg.} \frac{\mathrm{Y}}{\sqrt{m}} - \mathrm{V}. \sqrt{(1-m)}. \text{Arc. tg.} \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{V}.\sqrt{(1-m)}} + \text{Conſt.}]$$

Or la valeur extreme de y, qui répond à la ſurface du Sphéroïde, étant $y = u$; on aura $y = \mp \sqrt{\frac{2 k v - v^2}{m}}$, & l'integrale priſe enſorte, qu'elle evanouiſſe lorsque $y = 0$ & étant etendûe à ces deux valeurs extremes de y ſe transforme en celle-cy:

$$\partial v \left(1 - \frac{(v+e).\sqrt{m}}{\sqrt{(\alpha + 2\beta v - v^2)}\sqrt{(1-m)}}\right). 360°.$$

Avant que d'integrer par rapport a la variable v il faut diſtinguer deux cas, ſuivant que le corpuscule attiré ſe trouve au dehors ou au dedans du Sphéroïde, & que conſequemment la diſtance e eſt poſitive ou negative. Le cas intermediaire, où le corpuscule attiré eſt placé à la ſurface meme du Sphéroïde, & conſequemment $e = 0$, ſe reduit aiſément à l'un ou l'autre des deux cas precedens.

Cas premier: Le corpuscule attiré etant hors du Sphéroïde.

Pour ce cas on a $\alpha = \frac{m e^2}{1-m}$ & $\beta = \frac{k+m e}{1-m}$. Integrant par rapport à la variable v & faiſant pour abreger

$$\sqrt{(\alpha + 2\beta v - v^2)} = \mathrm{U},$$

on aura l'integrale

$$[v + \mathrm{U}.\sqrt{\frac{m}{1-m}} - (\beta+e)\sqrt{\frac{m}{1-m}}. \text{Arc. tang.} \frac{\mathrm{U}}{\beta - v} + \text{Conſt.}]. 360°$$

& cette integrale doit s'evanouir pour la valeur $v = 0$ & étre étendue a la valeur $v = 2k$. Or pour ces deux valeurs de v, on a

U =

$$U = \sqrt{\alpha} \ \& \ U = (2k + e)\sqrt{\tfrac{m}{1-m}}.$$
$$\beta - v = \beta \ \& \ \beta - v = \tfrac{(2k+e)m - k}{1-m},$$

moyennant quoi l'integrale complette ſera

$$\tfrac{360°}{1-m}\left(2k - (k+e)\sqrt{\tfrac{m}{1-m}}\left[\begin{array}{l}\text{Arc. tang.}\tfrac{(2k+e)\sqrt{m(1-m)}}{(2k+e)m-k}\\ -\text{Arc. tang.}\tfrac{e\sqrt{m(1-m)}}{k+me}\end{array}\right]\right)$$

la quelle, en réduiſant la différence des deux arcs en un ſeul, ſe change en celle-cy

$$\tfrac{360°}{1-m}\left(2k - (k+e)\sqrt{\tfrac{m}{1-m}}.\,\text{Arc. tang.}\tfrac{2k(k+e)\sqrt{m(1-m)}}{(k+e)^2.m - k^2(1-m)}\right).$$

Or cet arc étant le double de celui, qui a $\frac{k}{k+e}\sqrt{\frac{1-m}{m}}$ pour tangente, l'integrale trouvée ſera

$$\tfrac{360°}{1-m}\left(2k - 2(k+e)\sqrt{\tfrac{m}{1-m}}.\,\text{Arc. tang.}\tfrac{k}{k+e}\sqrt{\tfrac{1-m}{m}}\right)$$

& comme $k+e$ deſigne la diſtance du corpuſcule attiré au centre du Sphéroïde, en mettant cette diſtance $= c$, on aura

$$\tfrac{360°}{1-m}\left(2k - 2\sqrt{\tfrac{mc^2}{1-m}}.\,\text{Arc. tang.}\frac{k}{\sqrt{\frac{mc^2}{1-m}}}\right)$$

pour la valeur de l'attraction, que le Sphéroïde exerce dans la direction de l'axe de revolution ſur un corpuſcule placé dans le prolongement de cet axe à la diſtance c du centre, & cette valeur eſt parfaitement d'accord avec celle, qu'a trouvée M. *de la Grange.*

Cas ſecond: Le corpuſcule attiré etant au dedans du Sphéroïde.

Pour ce cas en prenant e negative, on a $\alpha = \frac{mc^2}{1-m}$ & $\beta = \frac{k - me}{1-m}$, & l'attraction du Sphéroïde vers ſon centre ſur un corpuſcule placé au dedans dans ſon axe de revolution ſera

$$\int . \partial v \left(1 - \frac{(v-e)}{\sqrt{(\alpha + 2\beta v - v^2)}} \cdot \sqrt{\frac{m}{1-m}} \right) \cdot 360^\circ \begin{bmatrix} \text{de } v = e \\ \text{jusqu'à } v = 2k \end{bmatrix}$$

$$- \int . \partial v \left(1 - \frac{(e-v)}{\sqrt{(\alpha + 2\beta v - v^2)}} \cdot \sqrt{\frac{m}{1-m}} \right) \cdot 360^\circ \begin{bmatrix} \text{de } v = 0 \\ \text{jusqu'à } v = e \end{bmatrix}.$$

Or si nous designons par E, 2 K & O les valeurs de la quantité U pour les cas $v = e$, $v = 2k$ & $v = 0$, on aura

$$\int . \partial v \left(1 - \frac{(v-e)}{\sqrt{(\alpha + 2\beta v - v^2)}} \cdot \sqrt{\frac{m}{1-m}} \right) \cdot \begin{bmatrix} \text{de } v = e \\ \text{jusqu'à } v = 2k \end{bmatrix}$$

$$= 2k - e + [2\mathrm{K} - \mathrm{E}] \sqrt{\frac{m}{1-m}} - (\beta - e) \sqrt{\frac{m}{1-m}} \begin{bmatrix} \text{Arc. tang.} \frac{2\mathrm{K}}{\beta - 2k} \\ - \text{Arc. tg.} \frac{\mathrm{E}}{\beta - e} \end{bmatrix}$$

et

$$\int . \partial v \left(1 - \frac{(e-v)}{\sqrt{(\alpha + 2\beta v - v^2)}} \sqrt{\frac{m}{1-m}} \right) \begin{bmatrix} \text{de } v = 0 \\ \text{jusqu'à } v = e \end{bmatrix}$$

$$= e - [\mathrm{E} - \mathrm{O}] \sqrt{\frac{m}{1-m}} + (\beta - e) \left(\text{Arc. tang.} \frac{\mathrm{E}}{\beta - e} - \text{Arc. tang.} \frac{\mathrm{O}}{\beta} \right),$$

& consequemment l'attraction cherchée sera

$$360^\circ \left(2(k-e) + (2\mathrm{K} - \mathrm{O}) \sqrt{\frac{m}{1-m}} - (\beta - e) \sqrt{\frac{m}{1-m}} \begin{bmatrix} \text{Arc. tang.} \frac{2\mathrm{K}}{\beta - 2k} \\ - \text{Arc. tang.} \frac{\mathrm{O}}{\beta} \end{bmatrix} \right).$$

Or on trouve

$$2\mathrm{K} = (2k - e) \sqrt{\frac{m}{1-m}}; \quad \mathrm{O} = e \sqrt{\frac{m}{1-m}}$$

$$\beta - e = \frac{k-e}{1-m} \text{ et } \beta - 2k = \frac{(2k-e)m - k}{1-m}.$$

Substituant ces valeurs, on change l'expression precedente en celle-ci :

$$\frac{360^\circ}{1-m} \left(2(k-e) - (k-e) \sqrt{\frac{m}{1-m}} \begin{bmatrix} \text{Arc. tang.} \frac{(2k-e)\sqrt{m(1-m)}}{(2k-e)m - k} \\ - \text{Arc. tang.} \frac{e\sqrt{m(1-m)}}{k - me} \end{bmatrix} \right),$$

ou en reduisant la difference des deux arcs en un seul, en celle cy :

360°

$$\frac{360^\circ}{1-m}\left[2\,(k-e)-(k-e)\sqrt{\frac{m}{1-m}}\,.\,\text{Arc. tang.}\,\frac{2\sqrt{m(1-m)}}{2m-1}\right].$$

Or on ſait, que

$$\text{Arc. tang.}\,\frac{2\sqrt{m(1-m)}}{2m-1}=2\,.\,\text{Arc. tang.}\sqrt{\frac{1-m}{m}},$$

moyennant quoi & en mettant $k-e=c$, qui deſigne la diſtance du corpuſcule attiré au centre du Sphéroïde, on aura

$$360^\circ\,.\,\frac{2c}{1-m}\left(1-\sqrt{\frac{m}{1-m}}\,.\,\text{Arc. tang.}\sqrt{\frac{1-m}{m}}\right),$$

pour la valeur de l'attraction, que le Spheroïde exerce vers ſon centre ſur un corpuſcule placé au dedans dans ſon axe de revolution à la diſtance c du centre, & cette valeur eſt parfaitement d'accord avec celle, qu'a trouvée Mr. *de la Grange.*

4.) Pour le cas intermediaire, où le corpuſcule attiré ſe trouve à la ſurface du Sphéroïde, l'un & l'autre des deux cas precedens, à cauſe de $e=0$ & conſequemment $c=k$, donne

$$360^\circ\,.\,\frac{2k}{1-m}\left(1-\sqrt{\frac{m}{1-m}}\,.\,\text{Arc. tang.}\sqrt{\frac{1-m}{m}}\right),$$

pour la valeur de l'attraction du Sphéroïde ſur un corpuſcule placé à ſa ſurface dans ſon axe de revolution, & cette valeur, que nous venons de trouver, eſt la ſomme de la ſerie infinie, que Mr. *Euler* a donnée pour cette attraction.

Probleme II.

5.) *Determiner la valeur de l'attraction, qu'un Sphéroïde elliptique exerce ſur un corpuſcule placé à ſa ſurface ſous l'Equateur, en ſuppoſant l'attraction reciproquement proportionelle aux quarrés des diſtances.*

Les abſciſſes x etant priſes ſur l'axe de l'Equateur $=2A$ & de ſon ſommet, l'appliquée orthogonale étant u, on aura

$u^2 + m v^2 = 2 A m v$ pour l'equation de l'ellipſe, qui tournant autour de l'axe parallele à celui des appliquées u engendre le Sphéroïde elliptique, qui ſera repreſenté par l'equation

$$y^2 + m(v^2 + x^2) = 2 A m . v.$$

Soit α l'element du Sphéroide, dont la poſition ſoit determinée par les trois coordonnées orthogonales v, x et t, enſorte que $\alpha = \partial v . \partial x . \partial t.$ & la diſtance de cet element au corpuſcule attiré $= \sqrt{(v^2 + x^2 + t^2)}$; on aura, comme cy desſûs, $\frac{v \partial v \partial x \partial t}{(v^2 + x^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}}$, pour l'element de l'attraction ſelon l'axe de l'Equateur, lequel par rapport à la ſeule variable t donne l'integrale $\frac{v \partial v . \partial x \;\; t}{(v^2 + x^2) \sqrt{(v^2 + x^2 + t^2)}}$. Or la valeur extreme de t, qui repond à la ſurface du Sphéroïde, étant $t = y$; on aura $t = \mp \sqrt{m . (2 A . v - v^2 - x^2)}$, et l'integrale etendûe à ces deux valeurs extremes de t ſera transformée en celle-ci :

$$2 \sqrt{m} . \frac{v \partial v . \partial x \sqrt{(2 A v - v^2 - x^2)}}{(v^2 + x^2) . (2 A m v + (1 - m)(v^2 + x^2))}$$

differentielle, qu'il n'y a pas moyen d'integrer généralement. Soit pour abreger $2 A v - v^2 = \alpha^2$; $2 A v = \beta$ et $1 - m = \delta$; la differentielle propoſée ſera

$$2 \sqrt{m} . \frac{v \partial v . \partial x.}{\beta - (\alpha^2 - x^2)} \sqrt{\frac{\alpha^2 - x^2}{\beta - \delta(\alpha^2 - x^2)}}.$$

En developpant le denominateur ſuivant les puiſſances de $(\alpha^2 - x^2)$ & faiſant pour abreger:

$$P = (1 + \tfrac{1}{2}\delta) . \tfrac{1}{\beta};$$

$$Q = (1 + \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1.3}{2.4}\delta^2) . \tfrac{1}{\beta^2};$$

$$R = (1 + \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1.3}{2.4}\delta^2 + \tfrac{1.3.5}{2.4.6}\delta^3) . \tfrac{1}{\beta^3},$$

&c.

on aura la differentielle :

$2 \sqrt{m}$

$$\frac{2\sqrt{m}\,.\,v\,\partial\,v}{\beta\sqrt{\beta}}\,.\,\partial\,x\,\sqrt{(\alpha^2-x^2)}\left\{\begin{array}{l}1+P\,(\alpha^2-x^2)\\ +\,Q\,(\alpha^2-x^2)^2\\ +\,R\,(\alpha^2-x^2)^3\\ +\,\&c.\end{array}\right\}$$

Or les valeurs extremes de x étant

$$x=\pm\sqrt{(2\,A\,v-v^2)}=\mp\,\alpha\,;$$

l'integrale de cette differentielle doit être prise pour les deux termes d'integration $x=+\alpha$ & $x=-\alpha$; & l'on sait, que pour ces deux valeurs de la variable on a

$$\int.\,\partial\,x\,(\alpha^2-x^2)^{\frac{2\lambda+1}{2}}=\frac{(2\lambda+1)}{2(\lambda+1)}\,\alpha^2\,.\int.\,\partial\,x\,(\alpha^2-x^2)^{\frac{2\lambda-1}{2}}.$$

En vertù de ce theoreme du calcul integral, l'integrale sera

$$\frac{2\sqrt{m}}{\beta\sqrt{\beta}}.\,v\,\partial\,v\,(1+\tfrac{3}{4}\alpha^2\,P+\tfrac{3.\,5}{4.\,6}\,\alpha^4\,Q+\tfrac{3.\,5.\,7}{4.\,6.\,8}\,\alpha^6\,.\,R+\ldots)\int\partial\,x\sqrt{(\alpha^2-x^2)}.$$

Or pour ces mêmes termes d'integration, on a

$$\int.\,\partial\,x\sqrt{(\alpha^2-x^2)}=\mp\,\tfrac{1}{2}\,\alpha^2\,.\,90^\circ,$$

donc en faisant pour abreger

$$1+\tfrac{3}{4}\,\alpha^2\,.\,P+\tfrac{3.\,5}{4.\,6}\,\alpha^4\,.\,Q+\,.\,.\,.\,.\,.\,.=S,$$

l'integrale de la differentielle par rapport à la variable x sera $\frac{180^\circ\,\,S.\,\sqrt{m}}{\beta\sqrt{\beta}}\,.\,\alpha^2\,.\,v\,\partial\,v.$ Or puisque $\alpha^2=2\,A\,v-v^2$; $\beta=2\,A\,v$ & consequemment $\frac{\alpha^2}{\beta}=1-\frac{v}{2\,A}$; on aura

$$S=1+\tfrac{3}{4}\,(1+\tfrac{1}{2}\,\delta)\,(1-\tfrac{v}{2\,A})+\tfrac{3.\,5}{4.\,6}(1+\tfrac{1}{2}\,\delta+\tfrac{1.\,3}{2.\,4}\,\delta^2)\,(1-\tfrac{v}{2\,A})^2+\&c.$$

& en faisant $1-\frac{v}{2\,A}=u$, & l'axe de revolution $=2\,B$, en sorte que $m=\frac{B^2}{A^2}$ la differentielle proposée sera

$$-\,360^\circ.\,B.\,S.\,u\,.\,\partial\,u\sqrt{(1-u)}$$

$$=-\,360^\circ.\,B\,.\,\partial\,u\,.\sqrt{(1-u)}\left\{\begin{array}{l}u+\tfrac{3}{4}\,(1+\tfrac{1}{2}\,\delta)\,.\,u^2\\ \quad+\tfrac{3.\,5}{4.\,6}\,(1+\tfrac{1}{2}\,\delta+\tfrac{1.\,3}{2.\,4}\,\delta^2)\,u^3\\ \quad+\,\&c.\end{array}\right.$$

Or les valeurs extremes de v étant $v=0$ & $v=2\,A$; il est clair, que l'integrale de cette differentielle par rapport à la

 variable

variable u doit être prife pour les deux termes d'integration $u = 1$ & $u = 0$ & on fait, que pour ces deux valeurs de la variable on a

$$\int u^{\lambda} \partial u \sqrt{(1-u)} = \frac{2\lambda}{2\lambda+3} \int . u^{\lambda-1} . \partial u . \sqrt{(1-u)}.$$

En vertù de ce theoreme du calcul integral la différentielle propofée deviendra :

$$-6 . B . 360^{\circ} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1.1}{3.5} + \frac{1.1}{5.7}(1 + \frac{1}{2}\delta) \\ \quad + \frac{1.1}{7.9} . (1 + \frac{1}{2}\delta + \frac{1.3}{2.4}\delta^2) \\ \quad + \text{\&c.} \end{array} \right\} \int . \partial u \sqrt{(1-u)},$$

& confequemment l'integrale :

$$4 B . 360^{\circ} (\tfrac{1.1}{3.5} + \tfrac{1.1}{5.7}(1 + \tfrac{1}{2}\delta) + \tfrac{1.1}{7.9}(1 + \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1.3}{2.4}\delta^2) + \text{\&c.}$$

Soit $\frac{1.1}{3.5} + \frac{1.1}{5.7} + \frac{1.1}{7.9} + \ldots\ldots = \Sigma$,

& l'integrale trouvée fera

$$4 B . 360^{\circ} \left\{ \begin{array}{l} \Sigma + \frac{1}{2}\delta(\Sigma - \frac{1.1}{3.5}) + \frac{1.3}{2.4}\delta^2(\Sigma - \frac{1.1}{3.5} - \frac{1.1}{5.7}) \\ \quad + \text{\&c.} \end{array} \right.$$

Or comme on a en général

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \frac{1}{(a+2b)(a+3b)} + \ldots = \frac{1}{ab},$$

on aura en mettant $a = 3$ & $b = 2$

$$\Sigma = \tfrac{1.1}{3.5} + \tfrac{1.1}{5.7} + \tfrac{1.1}{7.9} + \text{\&c.} = \tfrac{1}{6},$$

& confequemment

$$\Sigma - \tfrac{1.1}{3.5} = \tfrac{1.1}{2.5};\ \Sigma - \tfrac{1.1}{3.5} - \tfrac{1.1}{5.7} = \tfrac{1.1}{2.7} \ \text{\&c.}$$

& fubftituant ces valeurs on aura l'integrale

$$2 B . 360^{\circ} (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} . \tfrac{\delta}{5} + \tfrac{1.3}{2.4} . \tfrac{\delta^2}{7} + \text{\&c.}).$$

Soit la fomme de cette ferie $= X$, enforte que

$$X . \delta \sqrt{\delta} = \tfrac{1}{3}\delta^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2} . \tfrac{\delta^{\frac{5}{2}}}{5} + \text{\&c.} = \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial \delta \sqrt{\delta}}{\sqrt{(1-\delta)}}.$$

Con-

Conſequemment en faiſant $\sqrt{\delta} = \text{ſin.}\, \Phi$; on aura

$$X \delta \sqrt{\delta} = \int . \partial \Phi . \text{ſin.}\, \Phi^2 = \tfrac{1}{2} \Phi - \tfrac{1}{2} \text{ſin.}\, \Phi . \text{coſ.}\, \Phi;$$

d'où l'on trouve

$$X = \frac{1}{2\delta\sqrt{\delta}} . \text{Arc. ſin.}\, \sqrt{\delta} - \tfrac{1}{2} . \frac{\sqrt{(1-\delta)}}{\delta}$$

& cette valeur étant ſubſtituée, on aura l'expreſſion finie

$$360^\circ \tfrac{B}{\delta} \left[\tfrac{1}{\sqrt{\delta}} . \text{Arc. ſin.}\, \sqrt{\delta} - \sqrt{(1-\delta)}\right],$$

ou en exprimant l'arc par la tangente

$$360^\circ . \tfrac{B}{\delta} \left[\tfrac{1}{\sqrt{\delta}} . \text{Arc. tang.}\, \sqrt{\frac{\delta}{1-\delta}} - \sqrt{(1-\delta)}\right].$$

Ce qui eſt la valeur de l'attraction, que le Sphéroïde exerce ſur un corpuſcule placé à ſa ſurface ſous l'Equateur, & cette valeur s'accorde avec celle, qu'on trouve par la nouvelle méthode de M. *de la Grange*. Elle doit auſſi être la ſomme de la ſerie infinie, que M. *Euler* a donnée pour la valeur de cette attraction, ce qui paroit difficile à demontrer directement à cauſe de la complication de cette ſerie.

6.) En mettant $m = 1$, et conſequemment $\delta = 0$, on obtient $\tfrac{2}{3} . \tfrac{B^3}{c^2} . 360^\circ$; $\tfrac{2}{3} B . 360^\circ$ & $\tfrac{2}{3} c . 360^\circ$ pour les valeurs des attractions, qu'une Sphére, dont le rayon $= B$, exerce vers ſon centre ſur un corpuſcule placé en dehors à la diſtance c du centre, ou à la ſurface, ou en dedans à la diſtance c du centre de la Sphére, comme il eſt connû d'ailleurs.

7.) En reſumant les reſultats des calculs precedens, nous avons les expreſſions ſuivantes:

Attraction vers le centre du Sphéroïde dans l'axe de révolution

en

en dehors à la diſtance c du centre

$$360^\circ \cdot \frac{2}{\delta}\left[B - c\sqrt{\frac{1-\delta}{\delta}} \cdot \text{Arc. ſin. } B \cdot \sqrt{\frac{\delta}{c^2 + (B^2 - c^2)\delta}}\right]$$

à la ſurface

$$360^\circ \cdot \frac{2B}{\delta}\left[1 - \sqrt{\frac{1-\delta}{\delta}} \cdot \text{Arc. ſin. } \sqrt{\delta}\right],$$

en dedans à la diſtance c du centre

$$360^\circ \cdot \frac{2c}{\delta}\left[1 - \sqrt{\frac{1-\delta}{\delta}} \cdot \text{Arc. ſin. } \sqrt{\delta}\right],$$

dans l'Equateur à la ſurface

$$360^\circ \cdot \frac{B}{\delta}\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}} \cdot \text{Arc. ſin. } \sqrt{\delta} - \sqrt{(1-\delta)}\right].$$

En ſuppoſant $A : B = 101 : 100$, M. Euler trouve que la peſanteur ſous le Pole eſt à celle ſous l'Equateur dans le rapport de 1 à 0, 99803. Les expreſſions finies, que nous venons de trouver, donnent ce rapport comme 1 à 0, 99773.

PHYSICA.

RÉFLEXIONS SUR L'ANCIENNETÉ RÉLATIVE DES ROCHES ET DES COUCHES TERREUSES QUI COMPOSENT LA CROUTE DU GLOBE TERRESTRE.

PAR
J. J. FERBER.

Troisieme Section.

Présenté à la Conférence & lu le 13 *Fevrier* 1786.

§. 19.

Il n'est pas rare de voir que quelques auteurs moins habitués aux recherches orologiques, qui ne connoissent les mineraux qu'à force de les voir souvent dans leurs cabinets & qui negligent leur characteres chymiques, confondent les pierres les plus simples & les plus faciles à connoitre, prénant par ex: pour du fluor, ce qui est du feldspath ou du spath pésant; ou pour un quartz, ce qui est du fluor; pour de la zeolithe, quelque cristallisation calcaire ou gipseuse en rayons concentriques; pour un nouveau genre de roche, une pierre calcaire melée d'un peu de terre siliceuse & argileuse; pour un schiste

 des

des alpes, une ardoise secondaire; pour de la laue, quelque pierre qui y resemble, les amygdalojdes, le schiste corné &c.; ou réciproquement les cendres, les pozzolanes, les laues & d'autres veritables productions des volcans, pour des matieres aqueuses. Les pierres melangées, très communes dans les hautes montagnes, étant plus difficiles à connoitre & à distinguer, à cause de la grande varieté qui regne dans la proportion & la grosseur de leurs parties integrantes mécaniquement combinées, occasionnent encore plus de méprises, & reçoivent quelquefois, dans certains ouvrages, des noms qui ne leur conviennent pas du tout. Combien de fois n'a-t-on pas donné le nom de granit ou de gneiss aux poudings, aux ophites, aux variolites, à certaines laues, à des pierres sablonneuses, qui en different totalement! au contraire on a nommé grés ce qui est effectivement du granit! Il ne doit donc pas surprendre que des observations énoncées en faux termes s'accordent mal avec celles qui sont faites & decrites avec plus de précision, & donnent lieu à de mauvaises consequences qu'on se plait d'en tirer. Tout ce qui resemble au premier coup d'oeil au gneiss, au granit, ne l'est pas en effet. Les roches composées de plusieurs espéces de pierres simples, pouvant varier infiniment en quantité, en grain, en figure, en couleur, en dureté & en liaison de leurs parties, il en resulte plusieurs nuances assés difficiles à determiner, si on n'a pas occasion de les comparer ensemble. Quelqu'un donc qui se fait apporter un ou deux échantillons d'une roche, dont quelque montagne est composée, sans la visiter lui même, s'expose à s'en former une fausse idée, si ces échantillons sont ramassés par des personnes peu versées dans l'étude des montagnes. Avant que la connoissance des roches ne devienne plus générale & plus familiere à tous ceux qui entreprennent des voyages orologiques, il faut s'attendre à trouver plusieurs rela-

relations paradoxes de ce qu'ils ont vû, parcequ'ils designent mal les pierres examinées, faute de précision dans les termes & de correction dans la nomenclature.

§. 20. Il-y-a une autre confusion qu'il faut éviter, laquelle derive d'un prèjugé asses commun; sçavoir, que dans les montagnes on rencontre tout, de même que dans les cabinets d'histoire naturelle; & que pour faire des observations orologiques il suffit de connoitre les mineraux. Il en resulte qu'on voit, sans être à même d'apprecier les objets & de distinguer les phénomenes accidentels, les jeux de la nature, de ses productions foncieres, confondant les uns avec les autres. Je m'exprime plus clairement & plus en detail. La nature en composant les montagnes n'a pas suivi scrupuleusement nos distinctions & divisions mineralogiques, qui d'ailleurs sont tres utiles & très necessaires en elles mêmes pour connoitre les pierres & les mineraux, & pour en parler d'une maniere intelligible à tout le monde qui est au fait des termes & du systeme reçû. Elle n'a pas, dis-je, fait la pâte des montagnes de la meme pureté ou homogeneité, qu'il faut rechercher dans les morceaux qu'on se pique d'obtenir pour les placer dans nos cabinets, ni arrangé les rochers dans le même ordre qu'on doit garder dans leur disposition méthodique, & dans nos collections systematiques. On trouve au contraire plusieurs varietés d'une roche, qu'on separe & qu'on distingue avec raison dans les cabinets, melées & reuniés ensemble dans la même carriére. Examinons par ex: quelque montagne granitique! Nous y verrons souvent toutes les varietés de cette roche confondues ensemble. Mr. *de Saussure* fait la même rémarque. 1.) Nous y trouverons des parties, des rognons,

1.) Voyage dans les Alpes, T. I. p. 105. 106.

nons, des noeuds ou petites maſſes ramaſſées, qui vraiment ſont des pierres de Gneiſs, de ſchiſte ou de porphyre, quoique le reſte de la roche, ou ſon plus grand volume, ſoit parfaitement granitique, & que ces acceſſoires n'occupent qu'un éſpace infiniment petit en comparaiſon avec le total. Ces noeuds ne ſont pourtant pas toujours des pierres étrangeres, ou des débris d'autres montagnes deplacés ou tombés par haſard dans la maſſe du granit, lorsqu'il ſe formoit. Ils ſont au contraire ſouvent une partie du granit meme & ſont formés avec lui, par la meme operation naturelle & de la meme pâte, dont eſt produit le granit. Pourvû qu'on réflechiſſe un moment, comment la nature compoſoit ces montagnes, à l'aide de l'eau ou du feu, par la criſtalliſation, la coagulation, la concretion ou par la fuſion: on n'aura point de difficulté à concevoir comment des pareilles alterations locales ont pû exiſter. Croit-on que le granit eſt une production du feu, quelle varieté ne trouve-t-on pas dans une ſeule coulée de Laue! Le prend-on pour un ouvrage de l'eau, on a lieu d'être ſurpris qu'une maſſe d'un tel volume a pû devenir uniforme par tout & autant qu'elle l'eſt en effét. À peine l'art peut-il melér ou unir, criſtalliſer ou combiner dans une quantité tant ſoit peu conſiderable 2 ou 3 ſubſtances au point, que le melange ſoit par tout le meme, encore moins ſi ce melange, cette union ſe doit faire d'un ſeul coup ou tout à la fois. Qu'on ſe repréſente donc cette maſſe énorme de matiere dont les montagnes granitiques ſont compoſées; le genre d'operation, quel qu'on voudra l'imaginer, qui les formoit; & les circonſtances qui y devoient concourrir, tant les accidents qui pouvoient ſurvenir pendant l'ouvrage: on expliquera facilement les inégalités du mélange ou de l'union & les variations locales dans l'intérieur de ces roches. On verra qu'un ſimple dérangement des molecules prêtes à s'unir de la même

même façon qu'elles se trouvent liées dans le reste du granit, occasionné par quelque remûement ou par quelque repos de la masse encore liquide, qui n'y avoit pas lieu auparavant, étoit plus que suffisant pour déterminer les parties à se combiner tout autrement que dans le reste de la masse. Outre cela la difference minéralogique entre le granit, le Gneiss & le schiste primitif ne consiste que dans la finesse ou dans la grosseur du grain & dans le tissu feuilleté ou non feuilleté, ou plus ou moins feuilleté de ces pierres, leurs parties integrantes étant essentiéllément les memes. Si le schiste ne montre pas ordinairement des parties de feldspath, cela ne vient que de la résolution argileuse que cette pierre a éprouvée avant d'entrer dans le schiste, ou peut être dans le cas dont il s'agit ici, plutôt de quelque accident qui empechoit les terres composantes du feldspath de s'unir dans la proportion requise & de se cristalliser sous cette forme. Le gneiss & le granit contiennent souvent une terre argileuse, toujours melée de terre siliceuse, au lieu du feldspath ou du mica: quelquefois la terre argileuse y entre conjointement avec du mica & du feldspath. Quant au porphyre contenu en petits amas dans l'intérieur du granit, c'est rarement du vrai porphyre, n'ayant pas du jaspe, mais une terre argileuse pour base; quoique d'ailleurs cette terre unie à une portion de terre siliceuse & d'ochre martiale n'a qu'à se durcir pour former du jaspe. On voit par là qu'on vient à bout d'expliquer toutes les variations dans l'intérieur du granit par un simple changement de la combinaison méchanique des parties. Faudroit-il encore supposer quelque alteration chymique de l'union des terres contenues au commencement dans la masse liquide du granit, pour mieux expliquer la formation des noeuds porphyreux qu'on y trouve quelquefois? on sait que differentes affinités ou attractions électives ont agi sur les terres contenues,

alors

alors en état de dissolution, dans la masse liquide, & qu'il y manquoit d'éspace & de vuide pour leur combinaison réguliere & uniforme par tout. Il est certain que le granit contient toutes les terres necessaires pour former toutes les variations qu'on rencontre dans son intérieur. Qu'elles s'y formoient par ci, par là, & que si toute la masse ne se ressemble pas parfaitement par tout, cela ne vient que des circonstances & des accidents qui determinoient une partie de ces terres à s'unir autrement en quelques endroits que dans le plus grand volume de la masse. Nous convenons donc que les parties porphyreuses, gneissieuses & schisteuses, qui se trouvent par noeuds ou petites masses dans l'intérieur du granit, sont de la même ancienneté, de la même formation que la roche entiere qui les recéle; mais on auroit tort d'en conclùre que le porphyre, le gneiss & le schiste qui forme des roches à part, des bandes trés épaisses, toujours adossées au granit dans les hautes montagnes, soit de la même ancienneté que cette roche fondamentale.

§. 21. La même irrégularité accidentelle que nous avons remarquée dans l'intérieur des montagnes granitiques, se manifeste aussi, par ci par là, dans le gneiss & le schiste. On y trouve quelquefois des noeuds, des parties & des petites masses de granit ou de porphyre soudés avec la roche principale. Ces anomalies locales dependent également de quelque alteration particuliere & mechanique des parties en ces endroits, lorsque le gneiss ou le schiste se formoit. Le croiron formé de la meme maniere dont le granit est produit, c'est à dire que le gneiss ou le schiste se trouvoient parfaitement liquide au commencement, & que les terres, qui entrent dans leur composition, se trouvoient en dissolution plus ou moins complette dans l'eau: les accidents survenus pendant l'opéra-
des

tion, les effets d'une combinaiſon plus promte ou plus lente des terres primitives, ont pû produire ces variations. Il-y-a des agates rayées de pluſieurs couleurs & ſtriées de lignes parralleles, qui forment pluſieurs angles, qui repréſentent la figure d'une fortreſſe (Fortifications Agate); il-y-a des jaſpes polyzones ou rubanés de pluſieurs couleurs (Bänder jaſpis) dont les zones reſemblent à des couches, appliquées l'une à l'autre: mais ces jeux ne dependent point d'une formation ſucceſſive d'une zone aprés l'autre; elles ſont toutes formées en meme tems & n'exiſtent qu'accidentellement, quelle que ſoit la cauſe de leur diviſion apparente. Ce que je viens de dire me paroit ſuffiſant pour expliquer les irrégularités & les nûances des diverſes combinaiſons des parties qu'on rencontre quelquefois dans l'intérieur du gneiſs & du ſchiſte, ſi on lui aſſigne la meme formation que celle du granit. Mais il eſt plus probable que le gneiſs & le ſchiſte tirent leur origine de la décompoſition des roches granitiques, comme nous l'avons remarqué plus haut. Cette décompoſition eſt toujours plus ou moins parfaite & produit du gravier, du ſable ou une réſolution plus argilleuſe & plus complette des parties integrantes de ces roches. L'eau ayant entrainé, melé & agité ces detrimens, les a enfin dépoſés au fond; les plus groſſiers ont été enveloppés & entourés de plus fins, plus pulveriſés, plus argileux; & le ſchiſte s'eſt formé ſucceſſivement par la ſuite de ces depôts. Les noeuds granitiques ou porphyreux, qu'on remarque quelquefois dans l'interieur du ſchiſte, ne ſont donc que des fragmens moins detruits du vieux granit ſoudés les uns contre les autres de maniere, qu'ils reſemblent tantot au porphyre, tantot au granit. Le gneiſs en général eſt compoſé de debris plus groſſiers du granit que le ſchiſte, qui en contient les plus ſubtils, reduits à l'état d'argile, melée de terre ſiliceuſe. Si on connoiſſoit l'ancien état des hauteurs graniti-

 ques,

ques, qui exiſtoient avant la formation des ſchiſtes, & la qualité de leurs roches en chaque endroit, on pourroit vraiſemblablement indiquer la raiſon, pourquoi certains pays ne contiennent que des montagnes de gneiſs, d'autres uniquement des ſchiſtes.

Il me reſte encore quelques mots à dire ſur les filons granitiques inſerés dans les roches ſchiſteuſes. Ce granit eſt formé des débris des montagnes granitiques plus elevées, qui y ſont amenés par les eaux, & conſolidés & petrifiés depuis, ou peut-être eſt il enlevé au granit primitif, lorsqu'il étoit encore pateux ou peu durci, & rejetté dans les fiſſures ou fentes de la roche ſchiſteuſe. M. de *Sausſure* a deja donné cette explication fort ſimple. Dans tous les deux cas le granit des filons n'eſt que ſecondaire dans ce ſite, & le ſchiſte eſt naturellement plus ancien que la gangue qu'il contient, ſans qu'il en reſulte la moindre objection contre le rang d'ancienneté plus reculée du granit d'ou ces dèblais derivent. Les bandes porphyreuſes qui traverſent le ſchiſte à Joachimsthal en Bohème 2.) meritent d'ètre regardées comme des larges filons. Si on aime mieux, on peut auſſi les regarder comme des modifications locales du ſchiſte. L'une ou l'autre explication ne ſouffre point de difficulté aprés ce que nous avons expoſé ci-deſſus.

§. 22. La pâte des roches calcaires n'eſt pas plus homogène dans ſon intérieur, que celle des montagnes granitiques, gneiſſeuſes ou ſchiſteuſes. Les melanges qu'on y trouve prouvent aſſés que l'eau qui la dépoſoit ou la cryſtalliſoit en certains endroits, étoit chargée d'autres terres encore, outre la ter-

---

2.) Ferbers Mineralgeſchichte von Böhmen. S. 68.

terre calcaire combinée avec l'acide aërien. Ces terres étrangères ſont plus ou moins intimement melées avec la terre calcaire, & ſervent d'appui à notre théorie de la formation poſtérieure des marbres & autres roches calcaires, à celle des granits & des ſchiſtes. Pluſieurs couches en ſont tellement infectées, qu'elles préſentent une marne argilleuſe, plutot qu'une pierre, & qui eſt hors d'état de ſervir à en bruler de la chaux. D'autres contiennent de la terre ſiliceuſe en telle quantité, que certains auteurs ne les ont plus reconnues, mais en ont voulù faire un nouveau genre de roche. Les marbres mêmes dont les characters extérieurs & l'uſage qu'on en fait, ne laiſſent aucun doute ſur leur nature, & qui ſont beaucoup plus purs, que les couches des Alpes calcaires, dont je viens de parler, ſe trouvent ordinairement melés d'une portion de terre argilleuſe, ſiliceuſe & magneſienne, quelquefois au point qu'ils en deviennent trés durs & donnent des étincelles quand on les frappe avec le briquet. Les analyſes de pluſieurs marbres d'Eſpagne, d'Italie & de la France faites par M. *Bayen* & celles des marbres de Finnlande & de la Sibérie entrepriſes par M. *Georgi* en font foi. Il n'eſt pas rare de trouver des criſtaux de roche dans l'intérieur du marbre de Carrare; & le marbre d'Éna & d'autres Alpes autour de Recoaro, Roſena, Arſiero, Velo, Tretto & Schio dans le Vicentin, qui eſt blanc comme la neige, & ſe trouve en larges filons ou bandes dans le ſchiſte, dans lequel on a anciennement exploité une mine d'argent, contient autant de terre magneſienne, qu'on en peut extraire du ſel amer avec de l'acide vitriolique 3.). Les ophites par exemple le marbre de Kolmården en Suede, le Verd'antico, & la Polzevera di Genova, ſont parſemes de glandes & de taches de ſerpentin. Combien de parties hétéro-

3.) Sammlung einiger mineralogiſch-chymiſcher ꝛc. Abhandlungen des Herrn Arduini und einiger Freunde deſſelben. Dresden 1778. in 8. S. 39 u. 49.

rogénes ne se trouvent pas dans les Broccatelles, les marbres breches (brecciati) & les Lumachelles? Ceux qu'on nomme Cipolini, sont remplis de couches entieres de mica, dont l'épaisseur est quelquefois trés considerable, souvent au contraire elle n'excedé pas celle d'une lame de couteau, formant des lignes horizontales dans le marbre, tracées comme à la regle. Cette disposition ne paroit elle pas prouver que les écailles du mica tirent leur origine de montagnes gneisseuses ou schisteuses préexistantes à la formation de ces marbres? A peine il-y-a-t'il une seule carriére de marbre, où l'on se puisse dispenser d'en rejetter plusieurs couches, parcequ'elles sont marneuses, argileuses ou sablonneuses. Il est même rare de trouver de gros blocs de marbre exemts de tout mélange étranger & qui gate la couleur, dans les couches les plus pures. Pour s'en convaincre on n'a qu'à visiter les marbriéres sur la côte d'Italie entre Genes & Livourne, ou d'en lire la description inserée dans les voyages de M. *Targioni Tozzetti* par la Toscane. Le marbre de Putilowa à 20 Werst de Schlusselbourg sur le Ladoga, contient de l'Acide marin, suivant les essais de M. *Georgi*, qui les a faits sur ma demande. On conviendra que tous ces mélanges hétérogènes dans les marbres & dans les differentes couches des alpes calcaires, ne dépendent que de matieres étrangeres, ammenées & introduites pendant la formation de ces masses. Elles sont donc *dans ce site* de même ancienneté que toute la couche ou la roche contenante. Mais comment en pourroit on inférer que tout sable, toute terre argileuse ou magnesienne qui forme la pâte d'autres montagnes du globe, soit de meme date de naissance que ces couches calcaires ou de marbre? C'est cependant ainsi, qu'on raisonne, lorsqu'on veut conclûre de quelques masses de granit, trouvées dans l'intérieur du schiste & qui y ont été jettées

tées par hasard, que le schiste est de la même ancienneté que le granit.

§. 23. De ce qui est dit dans les §§. précédens, il s'en suit, qu'il - y - a deux manieres differentes de considerer les minéraux, sur tout les roches qui forment la croute de notre globe: ou simplement en mineralogiste, ou en Physicien Géologue. Le premier ne cherche qu'à determiner & bien caracteriser les genres, les espéces & les variétés des fossiles, à l'aide de la Chymie & des marques exterieures, afin qu'il puisse les distinguer lui - meme & les faire connoitre à ceux qui veulent s'en instruire ou en tirer quelque parti, & il n'a proprement pour objet, que de se mettre au fait de leurs proprietés, de leur usage, & de tout ce qui peut contribuer à leur connoissance individuelle. Le second va plus loin. Il ajoute à la recherche du mineralogiste celle de la distribution, de la disposition, & de la liaison relative des fossiles dans le sein de la terre. Il en tire des conclusions pour dévoiler la construction & la composition materielle de notre globe & dans cette recherche il s'impose la plus grande précaution pour se garantir de l'illusion des faux raisonnemens. Le simple mineralogiste quelque habile qu'il soit, n'est pas en etat de faire des decouvertes dans ce genre, à moins qu'il ne s'applique en meme tems assiduement aux observations géologiques, & gagne par là l'habitude de bien voir, & de bien entendre ce qu'il voit. Juge - t - il d'aprés les échantillons conservés dans son cabinet, & choisis, comme il convient, dans l'état de la plus grande pureté, & du caractère le mieux exprimé, de la constitution effective des montagnes, il est sujet à se tromper, & se forme souvent des idées absolument fausses. On sait par exemple que le granit est une pierre composée de quartz, de feldspath & de mica, ajoutons de schoerl si on veut. Il est

 egaégalement connû, que pour former du marbre, la nature n'a befoin que de terre calcaire, d'acide aërien & d'eau. Mais fi quelqu'un s'imaginoit que les montagnes de granit ou de marbre font par tout de la meme pureté & d'une compofition auffi homogéne, que dans les morceaux choifis exprés pour l'inftruction, & qu'il a appris à connoitre dans fon cabinet: il rifqueroit de meconoitre totalement ces roches en certains endroits des Alpes, & il feroit tenté de dire peut-être, qu'il n'y a fur la terre qu'un petit nombre de montagnes de granit ou de marbre. Encore moins feroit-il en état de déchiffrer l'ordre qui y règne dans la difpofition des roches; car la qualité d'une pierre ne decide pas toujours, ni de fa place dans les montagnes, ni de fon âge. On ne s'apperçoit que trop du défaut de pareilles connoiffances géologiques dans les ouvrages de plufieurs favans qui n'ont pas eu occafion d'étudier les mines, de voir beaucoup de montagnes, d'y faire frequemment des obfervations, & de comparer un pays avec l'autre. La moindre variation accidentelle d'une roche, foit dans la fituation ou dans la compofition, les confond au point, qu'ils la defignent fouvent par des noms qui ne lui conviennent point du tout & qu'ils tirent de mauvaifes conféquences de pareilles obfervations fautives. Je ne ferois pas embarraffé d'en trouver plufieurs exemples; mais je me borne volontiers à ceux qui ont trop de rapport avec l'objet de ce memoire pour pouvoir me difpenfer d'en parler.

Ayant fuffifamment expliqué ci-deffus, comment les noeuds & les petit s maffes de porphyre, de gneifs ou de fchifte, qui fe trouvent quelquefois dans l'interieur des granits, ainfi que les petites maffes de granit & de porphyre qu'on rencontre dans l'interieur des fchiftes, ont pù s'y former par la rencontre des molecules accidentellement derangées

gées de leur liaiſon ou de leur combinaiſon ordinaire; ayant auſſi remarqué, que ces variations locales n'y occupent que des éſpaces infiniment petits, en comparaiſon avec le volume de toute la maſſe de la roche, dont le genre ſe manifeſte ſans aucune équivoque: je demande, ſi la dénomination d'une telle roche ſe doit faire *a potiori*, comme on dit, ou ſi les variations accidentelles, de peu d'étendue, autoriſent à en changer le nom & à le modifier ſelon ces accidents? Je parle ici plutot du rang qu'il faut accorder à une telle roche dans la claſſification des montagnes, que de ſon nom purement minéralogique. Il ſeroit ſans doute ſingulier de nommer du granit ce qui eſt du porphyre ou du ſchiſte; mais la queſtion eſt proprement: ſi une roche ſchiſteuſe qui contient quelques noeuds de granit ou de porphyre, doit être conſiderée comme appartenant à l'enveloppe ſchiſteuſe ou granitique du globe terreſtre? On voit bien qu'il ne s'agit pas ici des mots ou de la ſimple nomenclatùre, mais d'un objet eſſentiel de la géographie phyſique. Mettant de coté la conſideration, que de petits noeuds de granit ou de porphyre dans l'intérieur d'une montagne ſchiſteuſe n'y ſont rien moins qu'eſſentiels, & ne changent pas la nature & le phyſique de cette montagne, il ſuffit de ſe rappeller, comment on s'exprime en d'autres occaſions, ſemblables au cas preſent. Lorsqu'on parle des monts de Faſtenberg à Johanngeorgenſtadt en Saxe ou d'Andréasberg au Hartz, dit-on que ce ſont des montagnes d'argent, ou plutot que ce ſont des montagnes ſchiſteuſes qui contiennent des filons de mine d'argent? La réponſe eſt fort facile à donner. Mais voyons comme on s'y prend quelquefois.

§. 24. La roche que M. *de Born* a nommé *Saxum metalliferum*, faute d'autre nom plus convenable & plus diſtinſtinctif, qu'elle merite à tous égards, 4.) contient la plupart des mines d'or & d'argent en Hongrie & en Tranſylvanie. De la deſcription qu'en a donné M. *de Born*, dans ſes lettres à moi ſur la Minéralogie de ces pays, & dans le Catalogue de ſon cabinet, & enfin de ce que j'en dis dans mon ouvrage ſur les mines de hongrie, il eſt connù que le *ſaxum metalliferum* n'eſt qu'une roche argilleuſe de couleur bleûatre, trés compacte, ou ſans feuilles propres aux ſchiſtes, & qu'elle repoſe ſur le granit, ténant lieu du gneiſs & du ſchiſte qui y eſt adoſſé en d'autres pays. C'eſt donc la bande argilleuſe de ces montagnes, melée de terre ſiliceuſe ou de quartz, comme toute argile, tout ſchiſte d'ancienne formation, quelquefois auſſi d'autres terres hétérogènes. De ces mélanges dépend la vitrification de cette roche au feu; qualité qui pourroit porter à la ranger avec le Trapp. En quelques endroits cette roche eſt trés dure & contient des taches ou criſtaux de feldſpath & de ſchoerl; en un mot, elle approche alors du porphyre, & pourroit mériter ce nom, en de tels endroits, s'il n'étoit queſtion que de la claſſification minéralogique. Mais il s'en faut de beaucoup que tout le *ſaxum metalliferum* ſoit porphyreux. Il ne l'eſt qu'en peu d'endroits; & ces portions ſont infiniment petites en les comparant avec le volume prodigieux du reſte vraiment argilleux. Expoſée à l'air cette roche manifeſte clairement ſon genre, y tombant facilement en defaillance. Neaumoins quelques auteurs qui apparament n'ont reçu que quelques morceaux mal choiſis de cette roche, ont jugé d'après ces échantillons, & l'ont rangée parmi les porphyres; erreur qui

4.) M. Haidinger voulant donner un nom allemand à cette éſpéce de roche, l'a nommé Grauſtein. Elle n'eſt pas toujours de couleur griſe, mais plus ſouvent bleûatre. Outre cela il en pourroit reſulter quelque confuſion de ce nom, parceque ce qu'on entend par Grauſtein en Suede (Greſten, Groberg) c'eſt du granit gris.

qui ne tire pas à grande conſéquence dans la minéralogie, mais qui n'eſt pas indifférente pour la connoiſſance phyſique du globe. M. *Hacquet* prononce 5.) que le *ſaxum metalliferum* n'eſt qu'une lave, & croit avoir découvert, que les mines d'or de Nagy-ag en Tranſylvanie ſont exploitées dans un ancien crater volcanique; mais laiſſons lui ſes viſions & ne nous y arrêtons pas.

Feu M. *Mojſienkow*, auteur d'un traité ſur les mines d'étain, a publié des idées ſur les roches, qui contiennent les mines d'Altenberg en Saxe, & de Zinnwald en Bohême, contraires aux obſervations faites ſur les lieux, tant par M. *Charpentier* que par moi même. M. *Charpentier* 6.) eſt d'accord avec moi 7.) que l'amas d'étain eſt dans du granit à Altenberg; mais M. *Mojſienkow* donne cette roche pour du Porphyre 8.). Le motif qui l'a engagé à choiſir ce nom, n'eſt qu'une alteration ou variation locale du rocher, de même genre que ſont les noeuds & les amas dont nous avons deja parlé. M. *Charpentier* remarque (p. 150.) que ce granit reſſemble en certains endroits au porphyre, mais la deſcription qu'il en donne (p. 163. XXVI.) fait bien voir que ce porphyre ne l'eſt pas en effet. Il n'eſt qu'une variété du granit qui contient des criſtaux reguliers de quartz, telle que je l'ai decrite dans l'ouvrage cité note 7, p. 124. M. *Charpentier* convient encore avec moi (V. ſa Geographie miner. p. 164 & mes mémoires ſur les mines de la Bohême p. 132.) que les mines d'étain à Zinnwald ſont ſituées dans le granit, & que les bancs ou

5.) V. le journal de Phyſique 1785 janvier

6.) Mineralogiſche Geographie der Churſächſiſchen Lande. S. 149. 150. 153. 159.

7.) Ferbers neue Beyträge zur Mineralgeſchichte verſchiedener Länder. 1. Band.

8.) Mojſienkow Abhandlung von Zinnſtein. S. 63.

ou lits de cette roche, qui environnent les filons du minerai, font des variétés de ce granit; mais M. *Mojſienkow* (p. 74, 75.) prétend que les filons ou couches d'Étain repoſent ſur du granit & ſont couverts de porphyre. Ce porphyre n'eſt pourtant nommé ainſi qu'à cauſe de la reſſemblance extérieure qu'il montre avec le vrai porphyre par ſes taches blanches ſur un fond rouge; ſans faire attention à la qualité des parties; car le vrai porphyre a du Jaſpe pour baſe, & ſes taches ſont de feldſpath: celui-ci eſt compoſé d'une terre molle argileuſe & de grains de quartz 9.). Ce n'eſt donc pas de vrai porphyre ni même dans le ſens purement minéralogique, mais une variété du granit, comme j'ai dit, & comme l'auteur d'une nouvelle deſcription des mines de Zinnwald 10.) le confirme encore, en expliquant leur origine d'une manière trés plauſible & conforme aux modifications ordinaires de telles roches. On voit par là, quelle incertitude & quelle confuſion de pareilles obſervations peu exactes jettent dans nos connoiſſances ſur la compoſition du globe, ſi on reçoit toutes celles qu'on publie de toutes parts, avec la même confiance, ſans aucun examen ſcrupuleux. La nature reſte fidéle à ſes principes lorsqu'elle agit en grand; c'eſt à nous de les ſaiſir & de ne pas croire qu'elle s'en eſt écartée, au premier petit objet qui nous ſemble extraordinaire, ſi nous ne l'examinons pas comme il faut. Au reſte je ne veux pas abſolument nier, qu'on ne puiſſe trouver de vrai porphyre dans l'intérieur d'une montagne granitique, ou pour mieux dire, qu'il n'y ait des montagnes granitiques dont quelques parties, quelques noeuds ou petites maſſes puſſent être compoſées de vrai porphyre. On ſait que les granits contiennent ſouvent des parties, des veines ou des maſſes

9.) Charpientier Mineral. Geographie. ꝛc. S. 150 und 163. XXVI.

10.) Magazin der Bergbaukunde, 1ſter Theil. Dresden 1785, in 8. S. 102.

ſes argileuſes & bolaires. Il ſuffit que quelques debris de feld-ſpath tombent & ſe diſperſent dans ce bol & qu'il ſe durciſſe, ou ſubiſſe la lapidification dez-lors, voilà le porphyre formé. De la même maniere, il ſe peut former du porphyre dans l'intérieur des montagnes gneiſſeuſes, ſchiſteuſes ou argileuſes par exemple dans la roche metallifére de hongrie, dans le ſchiſte en Bohême 11.) &c. Les montagnes gneiſſeuſes contiennent abondamment le feldſpath qui fait une partie integrante de cette roche. Les montagnes ſchiſteuſes ſont formées de debris des roches granitiques, ou peut-être en partie des roches gneiſſeuſes par une ſeconde deſtruction. On conçoit donc facilement que quelques parties du feldſpath ont pû échapper à la detrition & à la reſolution que les autres parties ont éprouvée & ont pu s'enclaver dans la maſſe boueuſe. Veut-on expliquer la formation de ces montagnes de telle autre manière, qu'on jugera la plus probable, perſonne ne diſputera à la nature la faculté de produire du feldſpath ou quelque autre pierre toutes les fois que les terres & les moyens neceſſaires ſe trouvent reunis par haſard, dans la proportion requiſe. Or les roches argilleuſes ne ſont pas dépourvues de ces matières. Elles ont été dans un état de fluidité, ou au moins dans celui d'un mélange liquide. Il-y-a des fentes, des filons, qui ſont infiltrer l'eau en pluſieurs endroits. Cette eau entraine avec elle pluſieurs molecules terreuſes & les dépoſe où les circonſtances le permettent. Il s'y peut donc former toute ſorte de pierre, & auſſi du feldſpath, ſi les circonſtances y contribuent, ſi les terres neceſſaires ſe trouvent dans un état de ſolution moyennant quelque acide, & ſi la cryſtalliſation peut avoir lieu. Que cette opération ne repugne pas aux forces actuelles de la nature, mais au contraire qu'elle

11.) Ferbers Mineralgeſchichte von Böhmen. S. 68 und 124.

puiſſe s'effectuer & agir encore aujourd'hui dans l'interieur, dans les fentes & dans les interſtices de roches, cela eſt connù & trés bien demontré par les cryſtalliſations calcaires, quartzeuſes & méme metalliques, qui ſe forment en partie ſous nos yeux ou qui portent des marques évidentes d'une formation recente 12.). Concluons donc, que l'identité des parties conſtituantes ou integrantes de deux roches de même genre ou éſpece, ſuivant la claſſification mineralogique, ne décide rien de leur formation contemporaine ou ſimultanée. Il-y-a des ſchiſtes, des roches calcaires, des quartz, des feldſpaths &c. &c. probablement auſſi des granits, de differents âges. Le phyſicien géologue doit diſtribuer les roches de même genre, éſpece ou varieté, en pluſieurs claſſes d'ancienneté relative, à meſure qu'il fait des découvertes qui l'éclairent ſur cet objet, tandis que le ſimple minéralogiſte auroit tort de ſéparer des minéraux, qui conviennent en compoſition, ſoit chymique ou mechanique, lorsque c'eſt celle-ci qui decide de leur place dans le ſyſteme, comme c'eſt le cas des roches mélangées.

12.) On croit avoir trouvé des criſtaux de Quartz encore moux ou gelatineux, On trouve des ſtalactites calcaires dans les mines, ſur lesquelles des criſtaux quartzeux ou metalliques ſe ſont formées depuis.

DE

DE ORDINE FIBRARVM CORDIS.

Diſſertatio VI.

QVAE REPETITAS ET NOVAS OBSERVATIONES DE FIBRIS VENTRICVLORVM EXTERNIS CONTINET.

Auctore
C. F. WOLFF.

Conuent. exhib. d. 22 Iun. 1786.

Pars Prior.

VENTRICVLVS DEXTER.

Cur obſeruationibus repetitis in cognoſcenda fabrica cordis opus ſit.

Vti in partibus corporis fere reliquis omnibus; vti in ipſa cordis figura et fabrica; ſic in fibris quoque earumque diſpoſitione, haud raro, nec minus inſignes, varietates occurrunt. Hae vero nonniſi phoenomena ſunt, apparentia forte aliquoties poſtea, aut ſemel, forte nunquam, quae minus confundere oportet cum ſolita et conſtanti ſtructura, quae ſola tanquam vera et naturalis conſiderari debet. Vt ergo, an vere ſit conſtans, quae talis in primo corde videbatur, certo conſtet, operae praetium eſſe duxi, in pluribus corporibus has fibras

bras non modo inquirere, earumque notare et tradere differentias, sed iconibus quoque illas, eadem diligentia et fide factis, repraesentare, qua primum harum fibrarum exemplar tradidi. Hoc eo magis consultum mihi visum est de eo, quod nunc trado, corde, cum in eodem externas non modo, quas hactenus ex vno corde exhibui, sed medias quoque omnes, earumque in sinistro ventriculo varia strata, et septi fibras, a mediis continuatas, inquisiuerim, in tredecimque iconibus notauerim; quod fieri omnino oportet, vt, qua ratione se fibrae in variis stratis erga se mutuo habeant, accuratius intelligatur. In hoc ergo imprimis nouo corde, quaenam ex hactenus descriptis eaedem reperiantur singulares aut notabiles structurae, et quae ergo verae sint et naturales; quae contra aut plane non inueniantur, aut alio ac diuerso modo structa, iudicabo primum, et conferam, quae in aliis viderim cordibus; quae noua vero inuenerim, suis locis addam. Deinde fibras medias in sequentibus dissertationibus exponam.

Partes et regiones cordis nudi pluribus obseruationibus confirmatae: conus arteriosus, infundibulum, angulus cordis dexter et pars basilaris.

Partes et regiones cordis nudi propriae, et diuersae ab iis, quae in corde obseruantur, membrana et adipe obducto, conus scilicet arteriosus *a*), infundibulum ventriculi dextri *b*), angulus cordis *c*), pars basilaris ventriculi dextri *d*), singulae sicut in primo corde, cuius descriptionem hactenus tradidi, repertae sunt. Conus imprimis arteriosus figura et magni-

a) Tab. I J. 14. C L. Tab. IV. F. G. C. D.
b) Tab. I. G. H. I. C. Tab. IV. F. L. C. M.
c) Tab. I. G. M. 25. Tab. IV. . L. N. I.
d) Tab. I. O. Tab. IV. V. Tab. II. L. H. 16. 17. *k*. Tab. V. 12. 15. 8. 19. 20.

gnitudine non solum, quemadmodum in prima descriptione, cum in aliis cordibus repertum esse, monueram, multo quam in primo corde speciosiorem in nouo hoc corde, sed fabrica quoque et structura tam pulchrum, se praebuit, vt peculiarem cordis partem eum esse, notatu maxime dignam, multo luculentius nunc appareat. Explicabo autem eam structuram peculiarem vbi de fibris circumflexis sinistris agendum erit.

Aliae quaedam partes eiusdem addendae: Angulus cordis sinister, apex ventriculi sinistri, partes eiusdem arteriosa et venosa.

Pauca modo iis, quae de partibus cordis nudi in prima dissertatione dixi, addenda sunt. *Angulus cordis sinister*, aut *pars gibbosa ventriculi sinistri a*), haud minus notari meretur, quam angulus dexter, et *pars arteriosa* quoque a *venosa* in sinistro aeque, atque in dextro eam distinxeram, ventriculo distinguenda est. Distinguit autem eas partes linea diagonalis, quae a fine fili cartilaginei anterioris sinistri *b*), conformis directioni fibrarum, oblique sinistrorsum ad marginem ducta, *c*) in inferiorem porro superficiem transit *d*), eamque percurrit *e*), terminalemque fasciculum inferiorem prope eius principium secando *f*) in vallecula tandem finitur *g*); eaque ratione ventriculum in duas partes obliquas diuidit, alteram superiorem *h*), posterius ad basin angustiorem *i*), vbi angulum totum

a) Tab. I. *w*. 59. 62. Tab. IV. *p*. Q 50.
b) Tab. IV. *p*.
c) Tab. IV. 50. 54.
d) Tab. VI. 14. 15.
e) Tab. VI. 65. 55. 68.
f) Tab. VI. 6.
g) Tab. VI. 8. 101.
h) Tab. IV. *p*. C. K. E. T R. 54. 52. Tab. VI. 15. 65. 63. 10. 119. 15.
i) Tab. IV, 52. 60.

tum *a*) excludit, partique addit inferiori, latiorem anterius ad apicem *b*), vbi apicem includit totum, inferiorique aufert parti *c*); alteram inferiorem *d*), latiorem posterius ad basin, vbi angulum includit totum, aufertque superiori parti *e*), anterius versus apicem angustiorem *f*), vbi apicem totum excludit *g*), partique superiori addit. Superior pars ventriculi *arteriosa*, inferior *venosa*, est. Et patet, venosam fibras complectere omnes ordinis primi, et, quas in sequentibus dicam, primas fibras siue funiculos ordinis secundi, arteriosam contra reliquis tectam funibus esse et fibris omnibus ordinis tertii et quarti. Plura de his partibus ventriculi in dissertatione V[ta] de actione fibrarum externarum ventriculi sinistri dicta sunt, vbi causa simul patet, cur necesse sit, vt accuratius illae definiantur. Denique apîcem quoque ventriculi sinistri notare oportet, *h*) remotum a finibus crenae et striae, inter duas distinctas partes marginis contentum, quarum alteram, maiorem, *sinistrum i*), alteram, minorem, *anteriorem marginem k*) dicas, et de quibus, vti et de apice, pariter in sequentibus agetur.

Fila cartilaginea confirmata.

Fila cartilaginea, inter cordis et sinuum bases contenta, easque distinguentia, recte vbique reperi quidem, at nusquam tamen tam magna et pulchre formata, quam in primo corde. Neque

a) Tab. IV. *p*. Q. 50.
b) Tab. IV. 98. T. Tab. VI. 8. 80. 25.
c) Tab. IV. E. T. 74. 74. Tab. VI. 55. 8. 101. 80. 22.
d) Tab. V. F. C. 4. 55. 65. 14. 13. Tab. IV. 50. *p*. Q.
e) Tab. VI. 5. F. 13. Tab. IV. Q. P.
f) Tab. VI. 53.
g) Tab. VI. 55. 8. 101. 80. 24.
h) Tab. IV. T. Tab. VI. 80.
i) Tab. IV. Q. T. Tab. VI. 13. 80.
k) Tab. IV. T. E. Tab. VI. 4. 80.

Neque cartilagineum filum ipſum a vaginula celluloſa, qua tegitur, in poſterioribus periculis diſtinguere potui. Imo in ipſo hoc corde anterius dextrum filum valde obſcurum erat, vt vix cognoſceretur *a*) ſiniſtrum tamen *b*) et poſteriora *c*), ſatis manifeſta apparuerunt. Conſtantia eſſe, nullum dubium eſt. Raro tamen tam pulchra eorum ſtructura, quam in primo corde, reperiri videtur.

Differentia inter fibras externas ventriculi dextri et ſiniſtri confirmata.

Planis et latioribus *faſciis* exterius dextrum ventriculum, *d*) ſiniſtrum *funiculis* ramificatis et fibris tectum eſſe teretibus *e*), omnino certum eſſe videtur, cum in nullo non corde hanc fibrarum diſpoſitionem poſtea inuenerim. Nec minus conſtans eſt, *latas* magnas *fibras* in ſuperiori, aut baſi propiore, parte ventriculi dextri, et in faſciis, quae eam efficiunt *f*), manifeſto *tenues* contra in parte ventrali et apice, inuenire *g*); ex quo ſolo argumento videas, quam parum Auctores, qui omnes has fibras per vniuerſam cordis ſuperficiem aequales ſimileſque rectilineas pingere ſolent, aut attente eas conſideraverint, aut viderint vnquam. Nam ſane quaedam loca tantum in cordis ſuperficie exploraſſe videntur, ex quorum fibris conditionem omnium fibrarum concluſerint. Neque ad quidquam aliud, niſi ad directionem fibrarum, attenti fuerunt. *Con-*

a) Tab. IV. *o.*
b) Tab. IV. *p.* Tab. V. *g.*
c) Tab. VI. F. N.
d) Tab. I. J. K. G. M. 32. 36. 39. 43. 50 etc. Tab. IV. F. G. L. N. 30. 34. 35. 36. 37. etc.
e) Tab. I 70. 71. 72. 73. 93. 95. 98. 100 etc. Tab. IV. 52. 54. 55. 77. 78. 82. 97. etc.
f) Tab. I. J. K. G. M. L. 3. 10. 27. 28. Tab. IV. F J. N. C. D. K.
g) Tab. I. M. H. F. Tab. IV. N. K. P.

Confirmata complicatio fibrarum cordis, variaeque nexuum species.

Haud minus *nexum* fingularum fibrarum fafciarumque et fafciculorum, quos illae collectae efficiunt, conftantem effe reperi. Extremitatibus fuis fafcias inter fe mutuo, idque variis modis, ferratim, aut pennatim, aut obfcuriori continuationis interruptione *a*), aut obliqua demum aliarum in alias infertione *b*), connexas inuenire, vti in primo, fic et in reliquis, quae hactenus inquifiui, cordibus, et in eo, cuius hic iconem adiungo, folitum eft. Fafciculi conftanter, vti ramificati, fic anaftomofibus quoque coniuncti reperiuntur *c*). Tum et per latera fibrarum fafciae et fafciculi, imprimis per fibrillas obliquas nectentes, conftanter inter fe coniuncti funt. *d*) Imo et nouo genere fibrillarum fafciculos, fiue funes, in hoc et in aliis cordibus connexas effe vidi. Solis enim profundioribus fibrillis obliquis fafciculi in corde priori coniuncti *e*) inueniebantur. Superficialibus, manifefto ex altero in alterum funem continuatis, egregiis, robuftis, fibrillis breuibus eos connexos in hoc corde reperi *f*); et in aliis fedibus fibrillae nectentes quafi in funiculos, breues quidem, at fatis craffos, collectae erant *g*). Neque vllo modo in repetitis his periculis dubiofum cuiquam effe poffe videbatur, quin carneae illae fibrillae nectentes fint, quae tanta craffitie et magnitudine *h*) reperiuntur. Inordinata coalitione quoque in multis fedibus, im-

a) Tab. IV. 68. 66. 69.
b) Tab. IV. 25. 27. 29. 30. 33. 34,
c) Tab. I. 72 76. Tab. V. 33. 35. 30. 38.
d) Tab. I. 14. 15. 16. 18. 68. 74. Tab. IV. 17. 18. 21. 24. 69. 72. Tab. V. 37. 40. 41. 46. Tab. III. 20. 20. 21. 37. 43. Tab. VI. 31. 61. 65. 17. 20. 23.
e) Tab. I. 65. 68. 74. 77.
f) Tab. V. 41.
g) Tab. V. 47.
h) Tab. I. 77. Tab. V. 47.

imprimis in iis ipſis, quas in deſcriptione prima citaueram *a*) fibras connexas eſſe reperi.

Ortus progreſſus inſertio fibrarum ventriculi dextri confirmati.

Nihil dico de ortu, progreſſu et inſertione fibrarum ventriculi dextri in vniuerſum, neque de limitibus huius ventriculi, in tertia diſſertatione determinatis. In iis enim reliquae ſtructurae fundamentis haud magis natura, quam in ſitu cordis, aut in figura, aut in partibus eius primariis, variat.

Crena confirmata.

Crenam etiam ſimili modo, vt in primo corde, ſic in hoc et in caeteris reperi, niſi vt frequentius fibrae ex dextro in ſiniſtrum ventriculum continuarent. Sedes vero, figura, ductus, vbique eadem *b*); vt ex latere coni ſiniſtro primo ſiniſtrorſum *c*), hinc porro dextrorſum *d*), poſt iterum ſiniſtrorſum, inclinando *e*), ad finem progrediatur.

Et ſtria.

Similiter et *ſtriam* in caeteris, ſic vt in hoc praeſenti corde, reperi, modo vt ſaepius, velut in hocce, haud prorſus ad apicem cordis vsque peruenerit, ſed citius, diſſoluta in fibras, continuatas in ventriculum dextrum, ceſſauerit. Separatis fibris in hoc corde *f*), venarum inſtar transuerſalibus ramis *g*) frequenter coniunctis, a principiis, ſicut in primo corde

A a 2

a) Tab. I. 29. etc. Tab. IV. 14. 16. 17. 79. 73.
b) Tab. IV. C. D. H. M. E. Tab. I. C. 89. H. D.
c) Tab. IV. C. D. H. Tab. I. C. 89.
d) Tab. IV. H. M. Tab. I. 89. H.
e) Tab. IV. M. E. Tab. I. H. D.
f) Tab. VI. *r. e. k. r. s. y.*
g) Tab. VI. *t. p.*

de *a*), filorum cartilagineorum posteriorum oritur. Format progrediendo insulas notabiliores, profundiori fibrarum strato repletas *b*). Dat latere dextro deinde fibras ventriculi dextri ventrales *c*). Recipit sinistro fibras ventriculi sinistri *d*). Dum eas recipit, aliae, praecipue primae, continuant in striam *e*), exacte in hoc vti in priori *f*) corde, aliae, imprimis vltimae, ad striam se applicant, videnturque sub fibras sublimiores eius in profundiores continuare pariter in vtroque corde *g*) Dum edit fibras ventriculi dextri stria, aliae ex sublimioribus eius fibris continuantur *h*) aliae sub illis prodeunt, continuatae ex profundioribus *i*). Finitur tandem cauda equina, citius quam in primo corde dextrorsum effusa *k*).

Striae variationes.

Haud pari constantia tamen stria cum crena aliisque cordis structuris existit. Nimirum perfectior in aliis cordibus, vt in priori, longiorque, et ad finem vsque superficiei inferioris producta est, in aliis imperfectior, breuior, cuius in fibras resoluta euanescit, vti in hoc corde. In aliquo feminae corde paruo, vix quartam partem longitudinis superficiei fibrae, a principiis filorum ortae, apicem versus continuabant, quin dispersae cessarent. Reliquam partem longitudinis superficiei aliqua vmbra tamen striae occupabat. Fibrae enim ventriculi

---

a) Tab. VI. *b. c. d.* Tab. III. 4. 6. 7. 53.
b) Tab. VI. *n. n. q. v.*
c) Tab. VI. 89. 90. 91. 92. 93. Tab. III. 54 61. 63. 68.
d) Tab. VI. 32. 35. 39. 41. Tab. III. 9. 11. 13. 16. 25.
e) Tab. VI. *y.* 30. 32. 35. 36.
f) Tab. III. 6. 8. 9. 9. 11.
g) Tab. VI. 39. 40. 41. Tab. III 13. 20. 21. 16.
h) Tab. VI. *g. l.* 93. Tab. III 60. 65 67.
i) Tab. VI. 91. 92. Tab. III. 54. 60. 61. 68.
k) Tab. VI. *m. x.* 3. 1. Tab. III. 70. 72. 75.

triculi finiftri ad marginem finiftrum vsque huius ftriae productae ſecedebantur antrorſum, quaſi in ſtriam continuaturae. mox vero iterum flexae ad marginem tranſiebant dextrum, vbi flexae denuo continuabant in fibras ventriculi dextri, incluſa inter duas flexiones parte ſui ſtriae ſpeciem efficiendo, plus quam ſemipollicem latam. Neque tamen ad finem ſuperficiei vsque haec ſtria quoque continuabat; cum aliquod ſpatium ad apicem relinqueret, quo tranſitus liber fibris patebat quatuor vel quinque, recta ex ſiniſtro ventriculo in dextrum continuatis. Atque idem etiam in veriori huius cordis ſtria accidit, quae ceſſando prope apicem duas fibras ventriculi ſiniſtri *a)* in dextrum continuare ſinit.

Raphe non confirmata.

Sola fere *raphe*, quam in ſuperiori ventriculi dextri ſuperficie obſeruaueram, haud confirmata inuenta eſt. Videtur partim impreſſione arteriae coronariae dextrae, partim etiam fortuitis fibrarum interruptionibus, in eo corde formata fuiſſe. Quum arteria vero vario frequenter ductu prodeat; interruptiones fibrarum deſunt; factum eſt, vt aut alia prorſus, aut nulla omnino, raphe in cordibus, quae poſt haec inquiſiui, inveniretur. Raphe ergo omnino ex numero notabilium cordis excludenda eſſe videtur.

Faſciae ventriculi dextri confirmatae.

At tanto maiori conſtantia in varias illas portiones, ſeu *faſcias*, fibras ventriculi dextri externas, directione non modo, ſed etiam ortu et fine, et vſu, et natura, determinatas, quas obſeruare ne in mentem quidem Auctoribus venerat, diuiſas reperi. Equidem magis in aliis cordibus quaedam earum, in

 aliis

a) Tab. VI. 44. 45.

aliis minus, insignes apparuerunt, quaedam paulo aliter etiam, quam in primo corde, formatae fuerunt; semper tamen easdem portiones distinctas, ortuque et fine et vsu similes, reperi. Et, si quaedam minus insignes in aliis cordibus; tanto eaedem in aliis eminentiores quoque singulari sua structura, insignioresque multo, quam in primo corde, apparuerunt, sicuti exempla in hoc corde repraesentato habemus. Vt facile videas, non phaenomena fortuita, sed vera instituta naturae, has structuras esse. Sic enim cum varietatibus hisce comparatum est, vt aliis certae singulares structurae vix recognoscantur, aliis mire confirmentur.

Circumflexus sinister et conus arteriosus.

Ad haec posteriora exempla maxime *circumflexus sinister* in hoc corde pertinet, et *conus arteriosus*, cuius latus sinistrum ille efficit. Hic paucis, vix tribus vel quatuor, fibris breuissimis in priori corde constat *a*). Neque aliquid singulare hunc musculum esse credidissem, nisi in alio iam corde insigniorem, pluribusque constantem fibris, inflexis, et profundius in crenam insertis, vidissem, quo se manifesto a sequentibus fibris pulmonalibus, quae planae recta in pontem transeunt, distingueret. Ea in hoc corde huius musculi structura est, vt nemo non pro peculiari musculo eum habuerit. Fibrae satis crassae *b*), a parte fere dimidia basis arteriae pulmonalis ortae, oblique ad marginem coni sinistrum transeunt *c*), pollicem fere latae. In nullam ibi crenam inseruntur, sed flexae omnino circa marginem huius coni in superficiem eius posteriorem transeunt *d*), continuantque in eadem, continuo oblique dextror-

a) Tab. I. *x*. C. L.
b) Tab. IV. *t*. *s*. C.
c) Tab. IV. C. D.
d) Tab. V. *x*. *z*. 1.

dextrorſum antrorſum deſcendendo, vsque in baſin coni *a*), adeo vt totus conus, magnitudine ſatis ſpectabilis *b*), vna cum arteria pulmonali a corde eleuari, et recta, non oblique vt in priori corde, antrorſum verſus apicem reflecti poſſit. In dicta ſuperficie coni poſteriori primae fibrae, ſiniſterius a baſi arteriae ortae, *c*) quae in ſuperficie anteriori breuiſſimae ſunt, longiores decurrunt *d*); dexteriores contra, longioresque in anteriori coni ſuperficie *e*), breuiores in poſteriori ſunt *f*); vt ſiniſteriores maximam ſui partem in poſteriori, dexteriores in anteriori ſuperficie, habeant. Praeter eas, quae in anteriori ſuperficie a baſi arteriae pulmonalis oriuntur, aliae etiam, in hac ſuperficie non apparentes, in poſteriori a baſi arteriae pulmonalis ortae *g*), in hac ſola decurrunt, et in ipſum parietem poſteriorem *h*) inſeruntur. Vbi eiusmodi circumflexus ſiniſter datur, dimidia pars coni ſiniſtra actione eius et conſtringitur latitudinis reſpectu, et ſecundum longitudinem quoque contrahitur his fibris obliquis, a baſi arteriae pulmonalis ad baſin coni deſcendentibus, ſimulque circa conum volutis, et baſis arteriae pulmonalis, arteriaque ipſa, pulſo ex dextro ventriculo ſanguini obuiam retractae ducuntur eundemque recipiunt. Quamuis omnino rariorem hanc fabricam eſſe crediderim, qua pars notabilis ventriculi dextri, ſeparata a ſiniſtro, ſepto incumbit, ſiniſterque pariter magna parte liber a dextro, pariete dextro gaudet, qui ſeptum eſt, aut continuatio ſepti; tamen hanc perfectiorem ſtructuram eſſe arbitror, et nor-

a) Tab. V. 51.
b) Tab. IV. F. G. C. D.
c) Tab. IV. C *s*.
d) Tab. V. *x*. 54. 52. 53.
e) Tab. IV. *s*. *t* D
f) Tab. V. 54. *z*. 51. *z*.
g) Tab. V. *x*. *y*
h) Tab. V. 1. 53.

normam, quam in minus perfectis natura imitatur. Caeterum insertas quidem semper in crenam in cordibus aliis circumflexi sinistri fibras, at musculum ipsum tamen, proinde et conum arteriosum, maiorem, magisque longe spectabilem, quam in primo corde, inueni.

Fibrae pulmonales anteriores.

Fibrae pulmonales anteriores, ortae a basi arteriae pulmonalis, transeuntes in ponte recta super crenam, *a)* eoque a circumflexis sinistris distinctae, constanter repertae sunt, modo vt non pennatim aliae earum in alias insererentur, veluti in primo corde, sed parallelae singulae inter se, vt fibrae musculares solent, progrederentur. Duae insignes fibrae latae in hoc corde *b*), a media parte anteriori basis arteriae pulmonalis ortae, quas facile, comparatas cum corde primo, pro fibris iisdem recognoueris, hunc musculum efficiunt.

Circumflexus dexter superior.

Circumflexus dexter superior, vel *pulmonalis posterior* haud minus constans repertus est. Mirae quidem musculorum basilarium generatim, imprimis qui coni arteriosi posteriorem superficiem tegunt, varietates in hoc corde occurrunt, sicuti Tabula V. cum secunda comparata docet, sed mire quoque conuenire hos musculos cum iis, quos ex primo corde tradidi, in aliis cordibus vidi. Et ipsa, quae in hoc corde omnium maxime aberrat, structura non eo tamen vsque aliena est, quin quilibet musculus facile cognoscatur. Circumflexus dexter superior

a) Tab. I. y. 1. 2. z. 3. Tab. IV. t. v. 66.

b) Tab. IV. t. v. w. x.

perior *a*), ficut in corde primo *b*), duabus fuis portionibus, longiori *c*) et breuiori *d*), conftat. Illa a bafi arteriae pulmonalis, velut in primo corde, in pofteriori coni fuperficie oritur, flectiturque circa marginem bafilarem, et prodit in fuperficiem fuperiorem. Haec vero breuior portio haud tota, ficut in illo corde, ad aorticum minorem fe applicat, fed pars eius *e*), adiuncta portioni longae, cum ea in fuperiorem fuperficiem tranfit. Deinde fingularis portio mufcularis in hoc corde ad fuperficiem pofteriorem coni arteriofi datur *f*) quae dubium, vtrum ad pulmonalem pofteriorem, an potius, vti verifimile eft, ad aorticum minorem fit referenda. Haec vna cum prioribus portionibus in fuperficiem fuperiorem progreditur. Huc productae variae hae portiones *g*), non furfum oblique redeuntes ad pulmonales anteriores fibras fe applicant, velut in corde primo *h*) fed videntur potius continuare *i*) in eas, quas interiectas dixi *k*). Tamen aliqua alicuius interruptionis veftigia in ea fede, vbi in primo corde circumflexi finiuntur *l*) appa-

a) Tab. V. 2. 1. 53. 51. 6. 7. 8.
b) Tab. II. 10. 9. 14.
c) Tab. V. 1. 2. 4. 5. Tab. II. 11. 9. 14.
d) Tab. V. 1. 6. 7. 8. Tab. II. 10.
e) Tab. V. 8.
f) Tab. V. 9. 10. 11.
g) Tab. IV. F. y,
h) Tab. I. 4. 5.
i) Tab. IV. 2.
k) Tab. IV. 2. 5. 4. 5. Tab. I. 7.
l) Tab. I. 4. 5.

apparent *a*), et in aliis cordibus diſtinctiorem quoque impresſionem, haud adeo manifeſtum tamen diſcrimen, quam in primo corde, reperi, vt diſtincte circumflexorum fibrae omnes in vltimam pulmonalium anteriorum inſertae eſſent.

Et inferior.

Circumflexus dexter inferior, ſiue *aorticus*, ſimillimus ei, quem ex primo corde *b*) pinxi, tam in hoc *c*) quam in reliquis cordibus repertus eſt. Ortus a latere dextro baſis aortae, diuiſus in duas portiones, ſeu musculos, aorticum minorem *d*) et maiorem *e*), ſuper marginem baſilarem tranſit, in vtroque hoc corde vti in caeteris, quae vidi, omnibus; modo vt portio ſingularis, cuius mentionem iam feci, in hoc corde *f*) minori accedat, cuius fibrae continuatae vna cum fibris portionis maioris, ſicut in primo corde *g*), ſuper marginem baſilarem progrediuntur *h*). In aliis cordibus neque haec quidem portio acceſſoria apparuit; vt in ſingulis conditionibus totus aorticus illi cordis primi ſimillimus eſſet. Hoc tamen frequentius reperi, vt, etiamſi ſuperior ad pulmonales anteriores in ſuperiori ſuperficie ſe applicaret, quemadmodum aliquae eius fibrae etiam in hoc corde ſe applicant, inferior tamen interrupta continuatione in interiectas potius tranſiret. Corrigenda ergo in deſcriptione circumflexi inferioris inſertio eius omnino videtur

a) Tab. IV. 2.
b) Tab. I. II. 12. 15. 16.
c) Tab. V. 14. 15. 16. 17. 18.
d) Tab. II. 12. Tab. V. 14.
e) Tab. II. 15. 15. 16. 16. Tab. V. 15. 16. 17. 18.
f) Tab. V. 9. 10. 11.
g) Tab. II. 14.
h) Tab. V. 18.

tur esse, qua scilicet non ad pulmonales se applicet is musculus, sed potius in interiectas transeat.

Haud satis constantes fibrae interiectae.

Verum quas *interiectas* dixi fibras, hae minime satis se confirmarunt. *a*) Credideram, fore constanter, vt circumflexi dextri oblique sursum redeundo ad pulmonales se applicarent anteriores, quo spatium inter pulmonales, circumflexas, et fasciam infundibuli, oriretur, quod completum fibris, a circumflexis diuersis, necessario interiectas repraesentaret. Verum haec res me fefellit. Parallelae in hoc corde fibrae circumflexorum, dum super marginem basilarem transeunt *b*), pulmonalibus et fasciae infundibuli progrediuntur, eaque ratione in fibras continuant, quae sedem occupant interiectarum *c*), sed minus a circumflexis distinctae sunt, minusque differunt a vicinis, vt tanquam singulares fibrae considerari possent. Si omnino continuarent, circumflexae essent ipsae, non ad pulmonales applicatae, sed in pontem transeuntes. Verum, est aliqua obscura continuationis interruptio in ea sede, vbi circumflexi finiri et interiectae incipere solent *d*); et primae fibrae, vel duae, ad pulmonales omnino se applicant; et datur fibra in hoc corde *e*) singularis, ex circumflexo inferiori continuata, qua caeterae interiectarum fibrae *f*) a fibris circumflexi distinguuntur, a qua illae quasi oriuntur. In alio corde, vbi circumflexus superior pulchre in pulmonales insertus, inferior manifesto, at singulari

 modo,

a) Tab. I. 7.
b) Tab. IV. F. y. z.
c) Tab. IV 2 3. 5.
d) Tab. IV. 2.
e) Tab IV. 4.
f) Tab. IV. 4. 4. 5. 6.

modo, ab interiectis diſtinctus erat, duplices interiectas, admodum diſtinctas, vidi; alteras ſuperiores, ſeu poſteriores, a circumflexo inferiori ortas, in regione coni arterioſi, qui multo maior etiam quam in hoc corde, at non ſeparatus erat, in crenam inſertas; alteras inferiores, inter circumflexum inferiorem et fasciam infundibuli contentas, inſertas in pontem. Mea ergo ſententia minime quidem excludendae fibrae interiectae ex numero fibrarum cordis, verum admodum variabiles tamen, cenſendae eſſe videntur, quae nunc hoc, nunc alio, modo ſe habeant, diſtinctius nunc et manifeſto, nunc obſcure, appareant, veſtigia tamen ſui vbique oſtendant, et hoc ſaltim habeant conſtans, vt tranſeant in pontem, nec tamen vel ab arteria pulmonali, vel ab aorta, vel filo oriantur cartilagineo dextro, ſed ab aliis potius fibris originem ducant, ab iisque includantur. Atque eiusmodi fibras in hac cordis ſede vix vnquan defuturas eſſe arbitror.

Nec magis fasciola, quae pontis inſtar ſuper crenam tranſit.

Simili fere modo cum illa fasciola comparatum eſt, quam *pontem* dixi *a*). Hic in hoc corde apparet, *b*) ſed minus diſtincte, imprimis inferius, terminatus, minusque eleuatus. In alio corde duplicem pontem reperi, alterum ſuperiorem, qui minus, alterum inferiorem, qui magis, eleuatus erat. Modo propior baſi, modo magis ab ea remotus, modo diſtinctior, modo minus diſtinctus, eſt, imprimis in margine ſuo inferiori. Pendet a decurſu arteriae coronariae ſiniſtrae. Haec in corde priori, vbi ad pontem venerat, ramum edebat ſuperficialem, ad adipem ſuper pontem progreſſum. Truncus ipſe in carnem deſcendit, continuatque ſub ponte, exitque rurſum ad marginem

a) Tab I. 87.
b) Tab. IV. 73. 75.

nem eius inferiorem, quo fibrae ergo, quae pontem efficiunt, infigniter eleuantur, et diftinctae fiunt a vicinis. In aliis cordibus non ipfe truncus, fed ramus, maior vel minor, in carnes cordis defcendit, minusque ergo quam truncus pontem eleuat; truncus fuperficialis in crena verfus apicem defcendit, continuo ramos penetrantes carnem, producens. Prout ergo vel truncus ipfe fub pontem fe recipit, vel ramum mittit maiorem, vel minorem, pons magis vel minus infignis eft; provt illud poft breuiorem aut longiorem progreffum fit, propior bafi vel remotior ab ea pons efficitur. Pons ergo dari vbique videtur, fed variabilis figura magnitudine et fede, ficut fibrae interiectae.

Conftantiffimae vero infundibuli fascia magna.

Multo conftantiores funt fascia infundibuli magna, fascia angularis, et ventralis. *Fascia infundibuli*, orta a filo cartilagineo anteriori dextro, mediam tranfitu occupare partem, angulo tamen propiorem, marginis bafilaris, nec dimidia minorem, latis conftare fibris, frequenti nexu confufis, tranfire vsque ad crenam, inferique in vltimam regionem pontis, conftanter obferuata eft. In hoc corde orta a filo *a*), tranfiensque fuper partem bafilarem *b*), marginemque bafilarem *c*), ficut in corde primo *d*), in fuperiorem fuperficiem venit *e*), et in crenam vsque progreditur *f*), ficut in corde primo *g*). In eo folo differt, vt anguftiori fine ad crenam terminetur *h*), cum in primo

a) Tab. V. 16. 19.
b) Tab. V. 15. 17. 19. 20.
c) Tab. V. 17. 20.
d) Tab. II. 16. 17. 17. 17.
e) Tab. IV. z. 16.
f) Tab. IV. 9. 17.
g) Tab. I. K. G. 9. 17.
h) Tab. IV. 9. 17.

mo corde *a*), vti in reliquis, aequali magnitudine ad crenam vsque progrediatur.

Et fascia angularis.

Angularis fascia, constantissima, extremitate oritur, vt in caeteris, sic in his cordibus duobus, acuta, ex angulo inter striam et filum cartilagineum posterius sinistrum *b*); in hoc quidem principio, tecto fibris solitariis striae *c*). Hinc latescendo magis magisque ad angulum cordis peruenit latissima, eumque flexa inuoluit *d*). Sic prodit in superiorem superficiem *e*), vbi, diuisa in duas portiones, longam *f*), et breuem *g*), in priorem insertam, latitudine successiue imminuta, fine demum angusto in crenam se inserit *h*). Et id praeterea peculiare habet in cordibus his ambobus, vti in caeteris, quae vidi, cordibus, vt frequenter tum sui ipsius fibrae inter se, tum etiam istae cum fibris fasciae infundibuli, vti et huius fibrae inter se, inordinata coalitione et fibrillis copiosis connectantur *i*). Denique, vti primae fibrae fasciae angularis in corde primo, resolutae in fibrillas, in vltimam fasciae infundibuli magnam fibram se inserebant *k*), et sequentes mediae tandem *l*) longam efficiebant portionem, in quam breuis inserebatur; in hoc nouo corde

---

a) Tab. I. 9. 17. 17. 17.
b) Tab. VI. 82. 83. 84. 85. 87. 88. Tab. III. D. G. E. M.
c) Tab. VI. e. i.
d) Tab. VI. 83. 88. Tab. III. G. M.
e) Tab. IV. 16. 30. Tab. I. 24. M.
f) Tab. IV. 19. 26 27 28. Tab. I. 18. 29. 27. 28.
g) Tab. IV. 29. 30. Tab. I. 24 30. 31.
h) Tab. IV. 19. 29. 25. 30. 27. 28. Tab. I. 18 24. 30. 27. 28.
i) Tab. IV, 17. 17, etc. Tab. I. 19. 29. 29. etc.
Tab. IV. 20. 24. Tab. I. 18. 16.
k) Tab. I. 18. 19.
l) Tab. I. 25. 26. 27.

corde etiam multo luculentius res eadem apparet, vbi prima portio *a*) ad fasciae infundibuli insignem latamque fibram fibrillis resolutis redit, media vero *b*) longam efficit portionem, dum breuis ad longam se applicat *c*). Vidi tamen in aliis cordibus eiusmodi primam portionem, insertam in infundibuli fasciam, deficere. Vides ex his, fere singula, quae de angularibus fibris in descriptione earum dixi, duobus his communia esse cordibus, nec quidquam prope illi descriptioni inesse, quod ad indiuiduum pertineret, nisi forte acutum rostriformem, quo in crenam se inserit, finem in primo corde, et qui simplex in hoc et aliis repertus est, huc referre velis. Deinde omnino transuersim in hoc corde angularis fascia progreditur, quae obliquior in corde primo erat, vnde et angustior in hoc corde extremitas fasciae infundibuli pendere videtur. Similique modo et in caeteris, quae vidi, cordibus hae fibrae cum descriptis conueniunt.

Et ventralis in vniuersum.

Ventralis fascia, in vniuersum spectata, haud minus constans reperta. Orta ex fibris, a stria secedentibus, *d*) transuersim fere ad marginem progreditur in corde vtroque, circa quem flexa, in multas minores fasciolas diuiditur, et in crenam se inserit. Minores has fasciolas minime constantes inueni. Neque id in prima earum descriptione speraui. Comparatio huius cordis *e*) cum corde primo *f*) facile docebit, vix vllam

a) Tab. IV. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25.

b) Tab. IV. 26. 27. 28.

c) Tab. IV. 29. 30. Tab. I. 24. 30. 31.

d) Tab. VI. *h. f. g. l. m. x.* 3. 48. 100. Tab. III. 54. 60. 63. 68. 70. 72.

e) Tab. IV. 32. 33. 34. 35. etc.

f) Tab. I. 37. 38. 40. 41. 44.

vllam harum fasciolarum eandem reperiri in altero corde quae in altero obseruata esset. Inueni in alio aliquo corde fasciolas satis simili modo dispositas, vti in corde primo. Cum tamen similem similitudinem in aliis haud porro reperirem cordibus, casui potius aliqualem illam, quam veritati structurae, similitudinem adscripsi. Non negauerim quidem, aliquam constantiam etiam his fasciolis inesse, verum enucleare eam ex paucioribus meis obseruationibus hactenus non potui.

Vti et apicis fasciola.

Apicis vero *fascia*, seu vltima ventralis pars, egregie satis in pluribus cordibus conuenire inuenta est. Distincta a caeteris fasciolis ventralibus *a*) oritur ab vltima parte striae, vbi haec in fibras resolui incipit *b*), flexaque circa marginem, in multas minores fasciolas, directione fibrarum diuersas, diuisa ad crenam progreditur. Inter has maxime se distinguit vltima, quae ipsum apicem efficit, fasciola in corde vtroque *c*), fibris constans parallelis, transuersis in priori, oblique adscendentibus in hoc posteriori, corde.

Duo in hoc corde singularia qua ratione et descriptam fabricam cordis confirment, et vltro doceant. Alterum, conus arteriosus.

Duo in hoc corde singularia occurrunt, quibus id differt a corde priori, et reliquis, quae vidi nudata, cordibus, at quibus minime, vt fieri solet varietatibus, obscurior structura et dubiosa redditur, sed potius luculentius explicatur et demonstratur. Alterum est, cuius mentionem iam feci, *conus arterio-*

a) Tab. IV. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. Tab. I. 47. 48. 49. 50. 51. 52 — 58.
b) Tab. VI. 93. x. 3 45. 98. 100. Tab. III. 67. 68. 70. 72. 75.
c) Tab. IV. 45. Tab. I. 58. 58.

arteriosus. Videram in alio quodam corde hunc conum margine sinistro terminatum, magis multo, quam caetera pars marginis sinistri ventriculi dextri ad crenam distincto, magisque eminente. Idem margo in eo corde et longior multo fuerat quam in corde delineato priori. Videbam post haec eundem conum in corde dicto delineato primo, margine quidem sinistro breuiori, at satis eminente tamen instructum. Quum in vtroque, quod tum videram, corde per totam suam superficiem posteriorem separatus a ventriculo sinistro et septo, quod hunc in ea sede terminat, conus esset, et solo margine suo sinistro crenae adhaereret, quin totus reflecti possit; non poteram non pro peculiari et distincta ventriculi dextri parte hunc conum habere. Is nunc ergo in hoc repraesentato corde non modo margine sinistro satis longo et eminente, superficieque posteriori ad eum marginem vsque libera apparet, quo prior structura confirmaretur, sed margine sinistro ipso libero conus totus a corde, cui incumbit, separatus existit adeo, vt totus reflecti possit. Fibrae scilicet circumflexae sinistrae, quae ad crenam marginem sinistrum coni annectere solent, circa hunc marginem flectuntur, atque in coni superficie posteriori descendunt, quemadmodum in superioribus dictum est. Sic conum ergo, qualem in structura perfecta eum esse oportet, vides; nonnisi imperfectiorem structuram esse solitam, qua margine sinistro crenae inhaeret, intelligis.

Alterum apices ventriculorum.

Alterum singulare *apices* offerunt *ventriculorum*, mire in hoc corde eminentes *a*) insignique interstitio *b*), in quo crena et

a) Tab. IV. P. T. Tab. VI. 80. 100.
b) Tab. IV. E. Tab. VI. 101.

et ſtria concurrunt, diſtincti; vnde et proprium cuique ventriculo apicem eſſe vides, et conditionem intelligis horum apicum. Dexter *a*) figura papillaris, ſitu prope crenam collocatus *b*), oppoſitus orificio venoſo ventriculi dextri, *c*) longitudinem huius ventriculi ad lineam redigit, a medio margine baſiliari, ſiue ab orificio venoſo, ad apicem ductam, *d*) et fibras ergo ventriculi transuerſales efficit. Siniſter contra *e*) obtuſus, rotundus, remotus a crena et ſtria *f*), orificio arterioſo ſui ventriculi oppoſitus, *g*) longitudinem ventriculi ab illo orificio ad apicem ducendo, fibras ventriculi longitudinales eſſe facit.

Explicatio Tabularum.

Cor hominis ſani, robuſti, triginta aliquot annorum, frigore necati.

Tabula IV.

Superficies huius cordis ſuperior. Fibrae externae.

A. Ventriculus dexter.

B. Siniſter.

C. D. E. Margo ſiniſter ventriculi dextri, quo applicato ad ventriculum ſiniſtrum crena effici ſolet.

C. D.

a) Tab. IV. P. Tab VI. 100.
b) Tab. IV. E.
c) Tab IV. *o*.
d) Tab. IV. *o*. 8. P.
e) Tab. IV T. Tab. VI. 80.
f) Tab. IV. T. E. Tab. V. 80. 101.
g) Tab. IV. *z*. T.

C. D. Pars huius marginis, quae margo ſimul ſiniſter coni arterioſi eſt, quae pariter, ac reliquus margo (D. E.) crenae adhaerere, eiusque poſtremam partem efficere ſolet, in hoc corde vero ſeparatus eſt; vt totus conus arterioſus (C. D. F. G.) vna cum arteria pulmonali eleuari et antrorſum reflecti poſſit.

D. E. Crena.

C. Marginis ventriculi extremitas ſuperior, apex coni, arteriaeque pulmonalis baſis, in latere ſiniſtro. (Tab. I. C.).

D. Baſis coni arterioſi in latere ſiniſtro, et terminus quo vsque conus liber ab adhaeſione reflecti poteſt. (Tab. I. L.)

E. Vallecula inter apices ventriculorum diſtinctos, in qua finis crenae. Vt nullus ergo detur communis apex cordis. (Tab. I. D.)

F. Apex coni arterioſi et baſis arteriae pulmonalis in latere dextro. (Tab. I. J.)

F. C. Apex coni arterioſi et baſis arteriae pulmonalis. (Tab. I. J. C.)

F. G. J. Margo baſilaris. (Tab. I. J. K. 25.)

G. Sedes in hoc margine, ad quam vsque conus arterioſus in latere dextro reflecti poteſt. (Tab. I. J. G.)

G. D. Baſis coni arterioſi. (Tab. I. O. L.)

G. D. F. C. Conus arterioſus totus. (Tab. I. J. K. C. L.) ſeparatus in hoc corde tota ſua ſuperficie a ventriculo ſiniſtro et a ſepto, ſola baſi cordi adhaerens; nimirum parte eius anteriore parieti ventriculi dextri ſuperiori, poſteriori ſepto, continuus.

H. D. Pars media crenae, ſeu regio pontis. (Tab. I. L. 21.)

I. Angulus cordis dexter (Tab. I. G. M.)

I. K. F. C. Pars infundibuliformis. (Tab. I. 25. 28. J. C.)

K. Terminus fibrarum latarum ventriculi dextri ad crenam. (Tab. I. 28.)

L. M. F. C. Pars arteriofa ventriculi. (Tab. I. G. H. J. C.)

L. A. E. M. Pars venofa. (Tab. I. G. A. D. H.).

L. I. N. 30. Pars angularis. (Tab. I. G. M.).

O. A. Pars ventralis. (Tab. I. M. A. N.).

O. M. P. Regio apicis. (Tab. I. N. H. D.).

P. Apex ventriculi dextri papillaris, mire prominens in hoc corde. Videtur a robore mufculi (99. 100.), quo vallecula (E.) in crenam retrahitur; adeoque interftitium inter binos ventriculorum apices (P. T.) augetur, prominentia pendere apicum ipforum. Vt ergo validioris, proinde perfectioris, ftructurae indicium fit apicum prominentia; confequenter norma ftructurae humanae.

Q. Angulus cordis finifter. (Tab. I. 59.) feu tuber ventriculi finiftri.

Q. p. 48. Tuberis huius feu anguli limites.

Q. C. D. R. Regio funium. (Tab. I. 59. C. L. 85.).

R. D. S. H. Regio crenae media feu regio pontis. (Tab. I. L. 21. 85. 91.). Fibrae ordinis tertii, non fatis accurate notatae in corde priori.

S. H. E. T. fiue 83. 84. 88. 88. 99. 98. 93. 85. Regio apicis feu regio radiata fuperior. Fibrae ordinis quarti (Tab. I. 94. 95. 98. 104. 97).

T. Apex ventriculi finiftri. (Tab. I. E.) marginibus inclufus finiftro, (Q. T.) et anteriori (T. E.). Ad hunc apicem proxime, in fuperiori fuperficie centrum focorum (102.).

T. B.

T. B. Q. Margo ventriculi et cordis ſiniſter.

T. E. Margo ventriculi ſiniſtri anterior, breuis, ad quem in inferiori ſuperficie focus inferior, in ſuperiori funiculus terminalis ſuperior (99. 100.) collocatus.

T. E. ſiue 100. 99. 108. 104. 106. Portio regionis radiatae inferioris. Pars marginis enim (E. T. 88. 105. 104.) magis in icone in ſuperiorem ſuperficiem retracta eſt, vt focus ſuperior totus in ea et centrum focorum (102.) repraeſentari poſſit. In ſitu naturali funiculi procurrentes (74. 88.) in ipſo margine ſiti ſunt, (103. 104. 106.) minimeque in ſuperiori, ſed potius in inferiori ſuperficie apparent; et funiculus (99. 100.) ſuperficiem ſuperiorem fere terminat cum extremitatibus funiculorum (103. 104.) in illum inſertis.

Ad eas ventriculi regiones intelligendas, notentur hic etiam, quae in ſequentibus plenius explicabuntur: (73. 73. 73. 74. 74.) Funiculus procurrens longus, ſiue maior, quo pontis regio a regione funium, et tertius fibrarum ordo a ſecundo, diſtinguitur. (83. 84. 85. 86. 87. 88.) Funiculus procurrens breuis, ſiue minor, quo pontis regio a regione radiata, et tertius fibrarum ordo a quarto, diſtinguitur. (p. 50. 54.) Linea diagonalis, quo vsque in ſuperiori ſuperficie apparet, qua ſcilicet pars venoſa ventriculi ab arterioſa diſtinguitur. Vt (p. Q. 50.) ergo ad venoſam, (p. C. E. T. B. 54.) ad arterioſam, pertineat.

V. Pars baſilaris (Tab. I. O.).

W. Arteria pulmonalis.

X. Eius ramus ſiniſter. Y. dexter.

Z. Aorta.

a. Innominata.

b. Arteria ſubclauia dextra.

c. Carotis dextra.

d. Carotis ſiniſtra.

e. Subclauia arteria ſiniſtra.

f. Aorta deſcendens.

g. Arteria coronaria dextra, in ſuo ſitu, ſuper carnes elevata, in adipe dextrorſum antrorſum ſublimior progrediens (Tab. I. *b*.).

h. Sinus ſiniſtri pars. (Tab. I. *i*.)

i. Auricula ſiniſtra reflexa (Tab. I. *k*.)

k. *l*. Sinus dexter (Tab. I. *l*. 133.).

m. Auricula dextra in ſuo ſitu naturali, remota a baſi cordis in corde nudo (Tab. I. *n*.), vbi adeps ad baſin remotus.

n. Vena caua ſuperior.

o. Filum cartilagineum dextrum anterius, quod valde obſcurum in hoc corde et vix vllum fuit.

p. Filum cartilagineum anterius ſiniſtrum recte formatum (Tab. I. *w*).

q. Sinus valuulae ſemilunaris anterioris ſiniſtrae arteriae pulmosnalis (Tab. I. S.).

r. Sinus valuulae dextrae (Tab. I. T.).

s. *t*. *w*. C. Fibrae circumflexae ſiniſtrae (Tab. I. *x*. C. L.); flexae in hoc corde circa marginem ſiniſtrum coni in poſteriorem huius ſuperficiem, in qua oblique deſcendunt (Tab. V. *x*. Z. *v*. *y*.).

t. *v*. *w*. *x*. Fibrae pulmonales anteriores (Tab. I. *y*. *z*. 1. 2. 3.).

w. For-

w. Foramen pro arteriae caronariae ramo maximo, cuius loco in corde priori ipſe truncus ſub pontem ſe recipiebat (Tab. I. *e*.).

x. Alterum minus foraminulum pro ramulo minore.

y. Terminus inter circumflexum dextrum ſuperiorem et inferiorem in margine baſilari.

y. F. *v*. 2. Circumflexus dexter ſuperior ſiue pulmonalis poſterior (Tab. I. 4.), qui primis fibris, vt ſolet, in baſin arteriae pulmonalis et in latam magnam fibram pulmonalem, ſequentibus autem continuando in ipſas interiectas fibras (2.) tranſit.

y. *z*. 1. Circumflexus dexter inferior, ſiue aorticus, (Tab. I. 5.) cuius primae fibrae in interiectas continuando tranſeunt (3.), ſequentes in ſingularem huius muſculi fibram longam (1.), quae ipſa ad crenam pervenit, inſeruntur.

z. Terminus inter circumflexum dextrum inferiorem et faſciam magnam infundibuli in margine baſilari.

1. Fibra longa in hoc corde circumflexi inferioris, in quam reliquae fibrae (7. 7.) inſeruntur.

2. 3. 4. 4. 5. 5. 6. Fibrae interiectae (Tab. I. 7.), quarum primae a' circumflexo ſuperiori (2.), aliae (3.), ab inferiori, aliae (4. 4.) a fibra longa inferioris (1.), oriuntur, inſeruntur in pontem (5. 5. 6.), vt ſolent.

7. 7. Inſertio circumflexi inferioris.

8. *z*. 9. 12. 13. 14. 15. 16. 17. Faſcia magna infundibuli (Tab. I. 8. 14. 9. 17.).

8. 9. Primae eius fibrae ad crenam peruenientes.

10. 11. Sequentes fibrae ad priores applicatae.

12. 13. Sequentes ad crenam tranſeuntes.

14. 15. Sequentes ad priores applicatae.

16. 17. 17. Vltimae ad praecedentes partim applicatae, partim productae ad crenam.

18. Fibrillae, fibras connectentes, superficiales.

19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. Fascia angularis (Tab. I. 18. 24. 26. 27. 28. 30. 31.)

19. 20. 22. 25. Eius portio in fasciam infundibuli inserta (Tab. I. 18. 19. 25.)

26. 27. 28. Portio media, longa, in crenam inserta (Tab. I. 25. 24. 29. 29. 26. 27. 28.).

29. 30. Portio tertia brevior, in priorem inserta (Tab. I. 24. 30. 31.).

19. Primae huius fasciae fibrae latae breuissimae, fibrillis, in quas resoluuntur, in vltimam fasciae infundibuli fibram insertae. Harum simillimae in corde primo (Tab. I. 19. 18.).

20. Earum resolutio et insertio (Tab. I. 18.)

21. Alia fibra lata, solutis fibrillis in fasciam infundibuli inserta.

22. 23. 24. 25. Alia fibra lata, aliqua parte integra, (24.) altera, in fibras resoluta (25.), in fasciam inserta. Sic variis scilicet modis fibrae inter se connectuntur, et distribuuntur.

26. 27. 28. Fibrae sequentes in tenuiores iam resolutae, quae longam portionem efficiunt.

29. 30. Portio breuis. Vti fascia angularis, terminum efficiens fibrarum latarum ventriculi dextri, constanter ortui funiculi procurrentis breuis (83. 85.) ad crenam sua insertione respondet, ea ratione, vt prima illius portio (83.) angularem (27. 28.) secunda (85.) primis

ven-

ventrales fibras (31.) recipiat; videtur hic infertionis fibrarum dextri ventriculi ordo conftans effe: vt circumflexae finiftrae poftremam partem crenae (*s. t.* C. *w.* Tab. I. *v.* C. L.), pulmonales et interiectae fibrae pontem (2. 3. 4. 5. 5. Tab. I. *y.* 2. *z.* 3. 7. 9.), fascia infundibuli reliquam regionem pontis (8. 9. 14. 15. 16. 17. Tab. I. 11. 11. 11.) et ventrales denique fiue tenues fibrae omnes radiatam crenae regionem fua infertione occupent.

31. &c. vsque ad 45. Fasciolae ventrales, inconftantes, quae in hoc corde fequenti modo fe habent.

31. 32. Fasciolae fub angularibus fibris prodientes, interftitium, quod vltimae angulares, ad fuas praecedentes fe applicando, reliquerunt, replentes.

33. Nouae adfcendentes fibrae ad primas fe applicantes.

34. Aliae adfcendendo ad priores fe applicantes.

35. 36. 37. 38. Fasciolae fere parallelae oblique adfcendentes.

39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. Apicis fibrae. Hae et in corde priori (Tab. I. 47. 48. 49. 50. vsque ad 58.) reperiuntur.

45. Vltimae apicis fibrae (Tab. I. 58. 58.).

46. 66. 71. fiue Q. C. D. R. Funes, fiue fecundus ordo fibrarum ventriculi finiftri.

46. 47. 48. 49. 50. Funiculi minores, feu primae fibrae ordinis fecundi (Tab. I. 59. 60. 61. 62.).

51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. Funis magnus fiue diuifus, feu laceratus (Tab. I. 64. 65. 66. 67.)

51. 55. 56. Portio altera in hoc corde maior (Tab. I. 67.)

52. 54. Altera portio (Tab. I. 64.)

53. Anaftomofis.

57. Fibrae longitudinales.

58. Interſtitium fibrillis repletum ſolitis transuerſis.
59. Fibrae nectentes ſuperficiales.
60. 61. 62. Funis ramificatus (Tab. I. 70. 71. 72. 73.)
63. Fibrillae nectentes ſolitae profundae.
64. Fibrae nectentes transuerſae ſuperficiales in ventriculo ſiniſtro, quae et in fibrillas paſſim abire videntur, breves, craſſae, ex fibris alterius funis in alterius fibras continuatae.
65. 66. Funis applicatus, qui duplex in corde priori (Tab. I. 81. 82. 83. 84.)
65. Eius origo praecipue ab aorta.
66. Tum et a columna triangulari.
67. Notabilis fouea ſeu ſpelunca inter conum arterioſum (C. D.) et funem applicatum (65.) quae retro conum dextrorſum continuat et cuius funis ſiniſterius oram efficit. Reflexo cono fouea continuata apparet.
68. Foramen in hac fouea pro primo ramo arteriae coronariae ſiniſtrae.
69. Fibrillae ſuperficiales nectentes.
70. 71. Rami funis applicati.
72. Foueolae, fibrillis nectentibus repletae, fibris diſtinctae breuibus craſſis nectentibus.
73. 75. 79. Pontis regio (Tab. I. 87. 17. 17. 17.)
73. 75. Pons primus imperfectior. (Tab. I. 87.)
79. Caetera pontis regio, ſeu pons ſecundus. (17. 17. 17.)
73. 74. 75. 77. 79. 81. 82. Fibrae ordinis tertii, procurrente longo conſtantes et fibris, ad eum applicatis, ortae a tota pontis regione, collectae ad procurrentem, eoque in terminalem inferiorem inſertae.
73. 73. 73. Funiculus procurrens longus, ex ſuprema pontis regione (73.), cui applicatus accedit (72. 69.), ortus, continuatus ad marginem vsque.

74.

74. 74. Eius ad marginem continuatio.

105. Eius infertio in fasciculum terminalem inferiorem (104.). Haec procurrentis funiculi longi extremitas, inferta in terminalem, prima fibra eft foci inferioris, quam poftea ordinis fecundi fibrae ordine retrogrado fequuntur (106.).

75. 77. 78. 79. 81. 82. Fibrae reliquae ordinis tertii, ad procurrentem longum applicatae.

75. 77. 78. Fibrae earum, ex ponte primo in hoc corde ortae, ad procurrentem vsque continuatae, in eumque infertae.

76. Foraminulum pro ramo arteriae coronariae finiftrae.

79. 81. 82. Fibrae ex reliqua regione pontis fubortae, in angulum concurrentes inter procurrentem longum et breuem (84. 88.), fub eosque fe recipientes funiculos procurrentes, infertae tandem in longum.

80. Foraminulum pro ramo arteriae coronariae.

83 — 87. 88. 101. 89. 90. 92. 95. 97. 98. Fibrae ordinis quarti, feu fibrae radiatae, quae figuram radiatam fuperiorem inter fe concurrendo, et focum fuperiorem, efficiunt, procurrente conftantes breui, et fibris radiatis reliquis, ad illum applicatis.

83. 84. 85. 86. 87. 88. Procurrens minor fiue breuis; musculus biceps, ortus a prima parte regionis radiatae crenae, vbi vltimis latis primisqui tenuibus fibris ventriculi dextri refpondet.

83. Eius alterum caput, pofterius, quo fibris angularibus et fasciae infundibuli fibris partim refpondet.

84. Huius capitis continuatio.

85. Caput alterum, anterius, quo primis ventralibus fibriis refpondet.

86. Fibrae transuerfales nectentes fuperficiales, breues craffae,

quibus bina capita inter se connectuntur, interstitiis fibrillis repletis profundioribus tenuioribusque.

87. Binorum capitum coniunctio et progressus ad marginem.

87. 88. 88. Cauda procurrentis breuis, siue ea eius pars, qua caeteras radiatas fibras recipit, focumque ea ratione efficit superiorem. Is focus nimirum pennatus est, vt fibrae (89. 90. 93. 92. 94. 95. 97. 98.) successiue ad eum se applicent, non in vnum concurrant punctum; deinde et ramificatus idem est, vt aliae longiores (93. 95. 96.) ad evm ipsum perueniant, aliae breuiores (97.) ad illas longiores se applicent, cum iisque se tandem in procurrentem inserant.

89. 90. 91. Primae fibrae radiatae curuatae, pennatim se ad procurrentem ipsum applicantes.

93. 93. Fibra, quae nunc sequitur, radiata longior, procurrentis ramus, alias recipiens breuiores fibras, ipsa in procurrentem inserta.

92. 94. 94. Fibrae radiatae minores, in fibram (93. 93.) insertae.

95. 96. Fibra secunda radiata longior, secundus ramus procurrentis minoris, aut foci ramificati ramus secundus, insertus in procurrentem, recipiens omnes reliquas fibras radiatas, pennatim sibi insertas.

97. 98. Fibrae radiatae reliquae, transuersim fere, et minus curuatae, marginem versus tendentes, pennatim in secundum ramum (95. 96.) foci ramificati superioris insertae.

99. 100. Fasciculus terminalis superior, ortus in inferiori cordis superficie (Tab. VI. 8.), vel potius in ipsa vallecula aut interstitio inter apices ventriculorum, a fasciculo terminali ventriculi dextri (Tab. VI. 98. 100.) recta in superiorem, quasi attractus, superficiem properans.

99.

99. Vbi quasi attractus partem interstitii apicum ventriculorum prominentium replet, transiens in superiorem superficiem.

100. Extremitas vnciformis, seu vncus, applicatus ad extremitatem procurrentis funiculi breuis, pariter vnciformem.

101. Extremitas vnciformis, seu vncus funiculi procurrentis breuis, applicatus pariter contra vncum fasciculi terminalis.

102. Centrum commune focorum, quod duobus descriptis vncis, ad se mutuo applicatis, continuatisque in se mutuo, vt circulum inclusa foueola rotunda efficiant, formatur.

103. Fasciculus terminalis medius, ortus in inferiori superficie ex vallecula a capitato principio in hoc corde fasciculi terminalis ventriculi dextri (Tab. VI. 6.), continuatus per marginem prominentem ventriculi sinistri (Tab. VI. 6. 7.), et oblique flexus in superiorem superficiem (103.), vbi in superiorem fasciculum inseritur.

104. Fasciculus terminalis inferior, ortus in inferiori superficie proxime super valleculam (Tab. VI. 4.), continuatus maximam partem in inferiori superficie (Tab. VI. 5.), denique flexus in superiorem (104), partim in terminalem medium, partim in superiorem ante medium, inseritur.

105. 106. Portio superior dexterior (Tab. VI. 75. 76.) foci inferioris (Tab. VI. 52. 53. 55. 68. 69. 72. 75. 76.). Nimirum sedes centri focorum communis cum sedibus vtrinque vicinis crenam et basin versus oblique in superiorem retractae sunt superficiem, vt et focus superior, et centrum commune, et huius connexio cum foco vtroque, in icone repraesentari possit. Eaedumque sedes simili ratione in inferiorem superficiem retractae

funt ob caufam eandem, cum inferior fuperficies delinearetur. Vera focorum et centri communis fedes in margine potius aut proxime ad eum in altervtra fuperficie, in Differtatione praecedente defcripta eft.

105. Extremitas funiculi procurrentis longi, quae prima fibra foci inferioris (Tab. VI. 76.) eft, et extremitatem eius fuperiorem finifteriorem efficit, proximam centro communi.

106. Pars proxime fequens foci inferioris (Tab. VI. 75.), vltimis conftans fibris ordinis fecundi, vti a caeteris huius ordinis fibris focus inferior reliquus efficitur.

Tab. V.

Eiusdem cordis fibrae externae in fuperficie bafilari et origines funium; aorta et arteria pulmonali, vt in corde priori, refectis, cono arteriofo reflexo.

a. Aortae abfciffae lumen.

b. Angulus dexter aortae ad bafin (Tab. II. 13.).

c. Angulus finifter (Tab. II. 3.), cui nodulus cartilagineus finifter infidet.

d. Concauitas aortae anterior (Tab. II. D.)

e. Latus pofterius, quod pariter in hoc corde ac anterius concauum, cum potius introrfum conuexum id in corde priori eft. (Tab. II.).

f. Alia in hoc corde varietas, defectus fili cartilaginei dextri. Nimirum fola cellulofa in tota hac fede, loco fili cartilaginei, finus dexter cum dextro ventriculo coniunctus erat; vt foluta praeparatione fibrarum remotaque omni cellulofa, fiffura, in cauitatem cordis hians, appareret. Membrana fcilicet interna, a valuulae duplicatura continuata difrupta fuit.

g. Fi-

g. Filum cartilagineum anterius finiſtrum ſatis manifeſtum, nodulo, ſeu baſi larga fortique, aortae innata. (Tab. II. 4.)
h. Sinus pulmonalis.
i. Auricula ſiniſtra reflexa.
k. *l*. Rami venae pulmonalis anterioris dextrae.
m. Vena pulmonalis anterior ſiniſtra.
n. Sinus dexter.
o. Vena caua ſuperior.
p. Auricula dextra.
q. Lumen reſectae ad baſin arteriae pulmonalis.
r. *s*. Cornua, ſeu termini vtrinque valuulae ſemilunaris dextrae arteriae pulmonalis. Vt fere maior valuulae pars poſteriori, minor anteriori, baſis arteriae lateri ſua baſi inſideat.
r. Sedes cornu anterioris valuulae dextrae; ſeu noduli inter valuulam dextram et anteriorem.
s. Sedes cornu poſterioris valvulae dextrae, ſeu noduli inter valuulam dextram et poſteriorem.
t. *r*. Sedes valuulae anterioris.
t. Sedes cornu ſiniſtri valuulae anterioris, ſeu noduli inter valuulam anteriorem et poſteriorem. *r*. ſedes cornu dextri valuulae anterioris, aut noduli inter anteriorem et dextram.
s. *t*. Valuulae poſterioris ſedes.
s. Sedes cornu dextri valuulae poſterioris, ſeu noduli inter valuulam poſteriorem et dextram. *t*. Sedes cornu ſiniſtri valuulae poſterioris, ſeu noduli inter valuulam anteriorem et poſteriorem.

Valuula ergo anterior tota parieti arteriae anteriori, poſterior tota poſteriori, dextra lateri dextro, partimque anteriori, partim poſteriori, parieti adhaeret.

u. Portio minor funis applicati (Tab. IV. 66.), quae retro baſin

basin coni ad columnam triangularem transit, et speluncam vna cum cono in situ naturali et cum maiori portione funis efficit. (Tab. IV. 67.). Oritur a columna triangu'ari, vltimumque efficit funem.

v. Orificium pro primo ramo arteriae coronariae sinistrae in hac portione funis (Tab. IV. 68.).

w. Basis coni arteriosi in latere sinistro (Tab. IV. *w*.).

x. *z*. 5. 17. Conus arteriosus reflexus, totus liber in hoc corde, et separatus a septo.

x. Apex coni in latere sinistro.

z. Basis in eodem, qua portioni minori funis applicati adhaeret.

x. *z*. Latus coni reflexi sinistrum, liberum ad basin seu insertionem fibrae circumflexae (*z*.) vsque.

x. *z*. 51. 53. 1. *y*. Fibrae circumflexae sinistrae in posteriori coni superficie.

x. *z*. 51. 52. 53. Fibrae circumflexae sinistrae, quae a latere anteriori basis arteriae pulmonalis eiusque angulo sinistro oriuntur (Tab. IV. *s*. *t*. C. D.), circa latus sinistrum coni in hoc corde flectuntur (*x*. *z*. Tab. IV. C. D.) in superficiem eius posteriorem, in eaque porro oblique descendunt; cum ad ipsum coni marginem (*x*. *z*.) in aliis cordibus hae fibrae finiantur, insertae in crenam.

x. 53. Fibra ex ipso angulo basis arteriae pulmonalis sinistro orta, in situ naturali vix apparens, ideoque in icone non expressa (Tab. IV. ad C.). Quae in aliis cordibus prima circumflexa sinistra, omniumque breuissima est, et in supremam partem crenae, eiusque ipsum principium inseritur. Quae ergo in hoc corde longa ad super-

ſuperficiem poſteriorem coni deſcendit in eademque (53.) inſeritur.

54. 52. Fibra (Tab. IV. C.) in aliis cordibus ſecunda, in crenam inſerta, quae in hoc circa conum flexa in eius ſuperficie poſteriori inſeritur (52.).

z. 54. Reliquae fibrae, in anteriori ſuperficie coni a baſi arteriae pulmonalis ortae, circa conum flexae, et in poſteriori eius ſuperficie inſertae (51. 52.).

z. z. Vltima harum fibrarum, (Tab. IV. *t.* D.) pariter in poſteriorem ſuperficiem flexa, in eaque breuiſſima, quae in anteriori longiſſima fuit.

x. y. 1. 53. Prioribus additae in hoc corde fibrae, a parte ſiniſteriori parietis poſterioris baſis arteriae pulmonalis ortae, iuxta priores (53. 1.) inſertae, in pariete anteriori plane non apparentes.

1. 53. 52. 51. Linea inſertionis circumflexarum ſiniſtrarum in pariete coni poſteriori.

1. 2. 3. 4. 5. 1. 6. 7. 8. Pulmonalis poſterior, ſeu circumflexus dexter ſuperior (Tab. II. 10.).

1. 2. 3. 4. 5. Solita portio longior huius musculi, a baſi arteriae pulmonalis poſterius orta, circumflexa in anteriorem ſuperficiem. (Tab. II. 9. 10. 11. 14.).

1. 6. 7. 8. Eadem, quae in aliis cordibus portio breuior, orta a foſſa triangulari, ad aorticum minorem applicata (Tab. II. 10. 11. L.), quae maxima parte fibrarum ad aorticum pariter ſe applicat quidem (7.), alias tamen fibras (8.) ad marginem baſilarem et in ſuperficiem ſuperiorem mittit, longiori portioni adiunctas.

9. 10. 11. Portio ſingularis carnea in hoc corde, quae videtur ad aorticum referenda eſſe, orta ab aorta, producta ad marginem baſilarem, adiuncta aortico maiori.

9. Principium huius portionis ab aorta.

10. Portio eius minor ad aorticum maiorem applicata.

11. Eius continuatio, qua tota portio circa conum flectitur.

12. Portio carnea in hoc corde, qua aorticus minor (14.) cum portione circumflexi in hoc corde (9.) coniungitur.

13. Foueola, quam longiorem, fiſſurae inſtar, in aliis cordibus frequentius vidi, et quae ramulum ab arteria coronaria recipere ſolet.

14. Aorticus minor conſtantiſſimus (Tab. II. 12.).

15. 16. 17. 18. Aorticus maior, aeque conſtans. (Tab. II. 13. 13. 14. 15. 16. 16.).

15. Eius principium ab angulo baſis aortae dextro (Tab. II. 13.).

16. 17. Terminus inter eum musculum et fasciam infundibuli magnam in principio (16.) et margine baſilari (17.).

18. Terminus inter aorticum ſeu circumflexum inferiorem et ſuperiorem.

19. 20. 16. 17. Portio baſilaris fasciae magnae infundibuli (Tab. II. 17. 16. 17. 17.).

19. 20. Terminus inter fasciam infundibuli et fasciam angularem in hac parte baſilari.

21. Portio baſilaris fibrarum angularium ſiue faſciae angularis.

22. Crena baſilaris, quam non ſatis recte in corde priori expreſſeram, quae tamen conſtanter reperitur. Incipit haec

hacc a fossula, seu fissura (13.), continuat per apicem aortici minoris, per medium porro aorticum maiorem et fasciam infundibuli in corde vtroque. Pluribus de hac crena in prima Dissertatione, vbi de parte basilari dictum est, egi.

22. 23. 24. 25. 26. 27. Primae fibrae ordinis secundi, seu funiculi tenues. (Tab. IV. 46. 46. 47. 48. 49. 50. Tab. VI. 13. 14. Tab. I. 59. 60. 61. 62.).

28. 29. Fibrae longitudinales interstitii.

30. 31. 32. 38. 39. Funis magnus siue laceratus (Tab. IV. 51. 52. 54. 55. 56. Tab. I. 64. 67.).

30. Portio funiculi lacerati in hoc corde minor (Tab. IV. 52. 54. Tab. I. 64.).

31. Interstitium magnum fibris tenuioribus repletum.

32. Portio maior (Tab. IV. 51. Tab. I. 67.).

33. Ramus anastomoticus (Tab. IV. 53.).

34. Foueola, fibrillis nectentibus repleta.

35. Ramulus anastomoticus.

37. Interstitium, fibrillis solitis nectentibus repletum.

38. Ramus huius portionis maioris primus (Tab. IV. 55.).

39. Secundus ramus eiusdem portionis (Tab. IV. 56.).

40. Interstitium, solitis fibrillis transuersis profundis repletum.

41. Fibrae, in hoc corde primum inter funes visae, transuersae superficiales. (Tab. IV. 59.).

42. Interstitium, fibris longitudinalibus repletum.

43. Funis ramificatus (Tab. IV. 60. Tab. I. 70. 71. 72.).

44. 45. Eius rami (Tab. IV. 61. 62.).

46. Interstitium solitis fibrillis repletum.

47. Fibrillae ſuperficiales, in faſciculos collectae. (Tab. IV. 64.).

48. *u*. Funis applicatus. (Tab. IV. 65. 66. Tab. I. 81. 82. 83.).

49. 50. Huius funis rami (Tab. IV. 70. 71.).

48. Eius portio maior in hoc corde *u*. Portio minor.

51. Similes fibrillae nectentes.

52. Columna triangularis ſolita.

53. Solita foſſa triangularis.

54. Principium portionis minoris funis applicati.

55. Repetita columna triangularis, varietas in hoc corde.

56. Foſſula triangularis repetita, ſimilis varietas.

ANALYSIS CHEMICA
AQVAE FLVVII NEVAE
VRBEM PETROPOLIN PERFLVENTIS,

Auctore
J. G. GEORGI.

Conuent. exhib. d. 12 *Octobre* 1786.

Situs vrbis, quae a diuo imperatore PETRO I. condita eſt, in planitie circa oſtia Neuae fluuii poſitae, fontes et ſcaturigines incolas circumſpicere vetat; adeoque aqua fluuii, iam per nauigationis emolumenta vti iſſimi, etiam ad potum et vſus domeſticos ſumme neceſſaria et magni eſt momenti.

Haec fluuialis aqua Neuae a multis in genere, adeoque et in ipſa vrbe, admodum pura, atque ſanitati proficua creditur; alii vero, nec pauciores, in ea cauſam quaerunt diarrhoeae, cutaneorum morborum, aliorumque quibus aduenae vulgo Petropoli conflictantur. Celeberrimus *Model* itaque analyſin huius aquae in ſe ſuſceperat, quae in eius opuſculis (kleine Schriften p. 103. ſeq.) exſtat, quaque eam puritate fere aquae Briſtolienſis, adeoque omni labe et culpa expertem declarat. Attamen experientia quotidie inculpationem praeconceptam renouat, et laudes aquae a Modelio tributas redarguit. Volui igitur, quandoquidem Modelius aquam ſupra vrbem e medio et profundo fluuii hauſtam adhibuit, denuo experiri qualis eſſet in ipſa vrbe, vbi vulgo hauriri ſolet, et vbi eam vndique canales ex vrbe deducti aliaque defluuia inquinant.

Equidem in ipſa vrbe iam nudis oculis apparet, aquam Nevae non perfecte puram eſſe. Pluribus riparum in locis fundus fluuii adeo lutoſus et inflamabili aëre foetus eſt, vt agitando limum breui aliquot lagenas huius aëris colligere facile ſit. Tranquillo etiam aëre ita parum pellucet aqua, vt vix diſcernas obiecta in pedali vel bipedali profunditate poſita; vento autem agitata etiam turbida euadit et fluctuum ſpumae, vel remorum agitatione excitatae, euidenter flaueſcunt. Eandemque tincturam prodit aqua magnis lagenis puriſſime pellucidis infuſa. Glacies fluuii hinc inde quidem pura et hyalina, paſſim vero etiam gryſea vel vireſcens, immo ſaepe nigricans, apparet.

Aqua, cuius analyſin trado, initio Julii anni 1785 poſt plurium dierum continuam ſerenam tempeſtatem, ſequentibus locis hauſta fuit:

1. Supra vrbem prope monaſterium S. Alexandri, e medio fluminis; hanc litt. A notatam *aquam ſuperam* appellabo.

2. In infera parte vrbis ex aduerſo decimae habitationum in Inſula Baſilii ſeriei (lineam 10^{mam} vocant); haec mihi erit *A. aqua infera*, e medio flumine hauſta.

3. In littore Inſulae Baſilii ad lineam ſeu ſeriem quintam, loco aquationis ſolito; hanc C. *aquam littoralem* vocabo.

4. E brachio Neuae *Moyka* dicto, directe verſus ſinum Fennicum tendente; D. *aqua Moyka.*

5. Comparationis ergo *aquam puteorum* in hortis et cellis inferae partis vrbis effoſſorum etiam explorare volui, quae quidem tanquam mere paludoſa, hominum potui inſeruire non ſolet, attamen multum in vſu domeſtico adhibetur.

Cuius-

Cuiusuis aquae quinquaginta libras medicas seu sexcentas vncias sumsi et deperditionis supplendae causa quinque vncias ponderi superaddidi.

Experimentum I.

Aqua supera A. per quadraginta octo horas in lagena hyalina asseruata, puluisculum quasi in fundo deposuisse visa est.

Limpiditas caeterum, odorisque et saporis defectus perpuram indicant. Agitata bullulas haud copiosas edit; neque ponderosior est quam aqua pluuialis.

Inla gena vitrea obturata, per quatuordecim menses cellae commissa, nihil omnino mutata est.

Aquae reliquae B, C et D. fere eodem modo se habuerunt, nisi quod lagena D. copiosiorem, quam reliquae, puluisculum deposuisse. visa est. Plures autem aquae potatores aquam e medio fluminis haustam, ab aqua littorali et Moycae, gustu distinguere bene callent.

Experimentum II.

Agitatione *aqua Neuae A.* bullulas non copiose prodit, neque calore digestiuo multum aëris in vesicam collo appensam expellit, et licet haec subinflectus a calore, refrigerata tamen vesica iterum collebascit. Destillata per retortam Tincturam heliotropii suppositam non decolorat. Adhibita ad confectionem aquae selteranae artificialis plus aëris absorbet, quam aqua fontana. Forsitan is defectus aëris atque acidi aërii, cuius causa in cursu fluminis celeriore, aqueas particulas adterente, et in superficiei, quam occupat, latitudine quaerenda esse videtur

detur, ex parte coëfficit aegritudinem, quam aduenae a continuo aquae potu experiuntur.

In reliquis aquis *B*, *C* et *D* non plus aëris expectabam, vnde singulas hoc scopo scrutari non opere pretium esse credidi.

Experimentum III.

Aqua omnis A, B, C et D ad chartas tinctas, et cum acidis vitrioli et sachari, itemque cum tinctura gallarum spiritnosa et solutione salis tartari nullam mutationem demonstravit; a solutione tamen sachari saturni atomi natantes, et a solutione argenti in acido nitri opalinus apparuit in omnibus, sed debilis, et insequenti die in phialis probatoriis puluisculus violascens ex *aqua D. Moycae* copiosior, in fundum subsederat.

Experimentum IV.

Quinquaginta libras medicas *aquae superae A.* in vitro aperto leni calore euaporando exposui. Tota mole ad viginti circiter vncias redacta, residuum vinaceo - flauescens, terreas particulas deponere coepit; cum acido sachari nunc apparuit terra calcarea admixta; opalinus color a solutione argenti intensior et puluisculus violascens praecipitatus fuit. Ad reliqua reagentia non magis mutatum est, quam aqua cruda (Exper. III.) Terra filtro separata, et residuum a plenaria euaporatione fuscescens, squamulosum, granorum quadraginta quatuor pondus aequabant.

Experimentum V.

Hoc residuum

1. in aëre subhumescit;

2. seu-

2. feruida aqua edulcoratum, quatuor grana amisit et terrae flauescentis 40 grana praebuit.

Hanc terram, 1. cum efferuescentia omnem soluebat acidum nitri; 2. Solutio alcali phlogisticato addito caerulea facta est;

3. eadem a solutione salis tartari terram puram calcaream, albam praecipitem dedit.

Quod a residuo lotione secesserat, erat extractum mucilaginosum vegetabile, pondere quatuor granorum.

Aqua infera B. omnino eodem se modod habuit, easdem materiae residuae proportiones dedit.

Verum ex *aquae littoralis C.* libris quinquaginta, residui prodierunt quadraginta septem grana, in quibus terrae calcareae, vestigio martiali foetae quadraginta duo grana, et quinque grana extracti lubrici vegetabilis fuere.

Quinquaginta librae *aquae Moycanae D.* residui praebuerunt quadraginta nouem grana, in quibus quadraginta tres calcis et 6 extracti vegetabilis inueni.

Ex his sequitur, aquam Nevae in genere esse puram, limpidam, leuem, sapidam, siue potius saporis expertem, tenuem, diu sine corruptione asseruabilem, et parum admodum heterogeneis particulis inquinatam; continet nempe, in libra, minus grano vnico terrae calcareae; in quinquaginta scilicet libris quadraginta, ad quadraginta tres grana; et quatuor ad

 sex

ſex grana extracti mucoſi in eadem quantitate; cum veſtigio perexiguo martis.

Cel. *Model aquae Neuae ſuperae* ſeptuaginta grana reſidui obtinuit in eoque ſexaginta octo grana terrae, quam *aquatilem* (Waſſererde) appellat, et tria grana extracti vegetabilis reperit. Videtur autem reſiduum, quod calcinatione deinde ponderis inſignem proportionem amiſit, non ſatis exſiccatum fuiſſe.

Extractum vegetabile paludoſum quod aqua Nevae largitur, rarius in aquis occurrit. Neua illud forſan extrahit e ratibus et trabibus, quibus paſſim copioſe obtecta eſt, et per defluvia paludum et ipſius vrbis recipit. Forſan huic extracto etiam animale gluten admixtum eſt, quod defluuiorum natura, et odor extracti vſtulati veroſimile reddunt. Et quamuis proportio huius extracti perexigua ſit (vnius circiter grani in 10 libris) attamen in eo praecipue, et in aëris priuatione quaerenda eſſe videtur ratio aegritudinum, quas aduenae a potu aquae noſtrae vulgo experiuntur. Aquae fluuiatiles, teſtante Cel. *Thouvenel*, qui plurimorum fluminum Galliae aquas tractauit, etiamſi heterogeneis principiis minus, quam fontium aquae foetae ſint, tamen ſanitati minus, quam hae conducunt (Cf. Frantz medicin. Polizey Vol.) Tempeſtatis ſubita mutatio Petropoli effectum aquae augere quoque poteſt. Sed haec non mea ſunt; volui tantum chemica principia aquae Neuae noſtrae extra dubium ponere

---

Aqua puteorum in hortis et cellis huius vrbis ad vnam alteramue orgyam effoſſorum, vere eſt paludoſa ſeu collectus

ſupra

ſupra argilloſum ſtratum, per totam planitiem, in qua vrbs eſt condita, extenſum, paludoſi ſuperioris ſoli ſudor.

Haec aqua 1. coloris eſt luteſcentis turbida, odore et ſapore nauſeoſa; quiete euadit foetidior et ſedimentum mucoſo-terreum deponit, ſine limpiditatis incremento. Calida tempeſtate etiam vermiculos generat.

2. A ſolutione ſalis tartari, ſachari ſaturni, et argenti turbida euadit et praecipitatum praebet cineraſcens. Cum tinctura gallarum fuſceſcit.

3. Deſtillatione prima aquula admodum foetido volatili odore praedita eſt. Suppoſita tinctura Heliotropii euidenter rubeſcit.

4. Reſiduum quinquaginta librarum euaporatae aquae putei in Inſula Baſilii cellaris, hauſtae menſe Iulio, referebat magma fuſcum et curioſiore analyſi praebuit.

a. terrae calcareae centrum cum 10 grana.

b. terrae argilloſae quindecim grana.

c. ſalis mirabilis Glauberi viginti octo grana.

d. ſalis communis centum et quadraginta duo grana.

e. extracti mucilaginoſi nigricantis ſicci ad trecenta grana; hoc vero extractum euidenter oleoſum, oleo turfae imbutum eſt; vſtulatum fumat et animalem odorem ſpargit a reliquiis inſectorum (niſi a latrinis) oriundum. Maximam partem tamen vegetabilis eſt indolis et cine-

 res

res largitur gryſeas, ſalis alcalini vegetabilis ſex grana praebentes.

f. producta omnia martiale principium produnt.

g. acidum No. 3. indicatum videtur hic originis eſſe vegetabilis e turfacea et paludoſa terra collectum.

Vſus huius aquae internus hominibus pariter et animalibus nauſeoſus aeque ac ſanitati noxius neceſſario eſſe debet. Attamen pigri e plebecula homines et a flumine longius degentes eandem ſaepe, praeſertim pro potu animalium adhibetur. Magis vtilis eſt ad irrigandos hortos et parandum caementum murarium, in quo etiam aquam fluuiatilem puram vincit.

MARI-

MARINA VARIA
NOVA ET RARIORA;

descripsit

P. S. PALLAS.

Conuent. exhib. d. 5. April 1787.

Multa et varia Zoologica in Aduersariis inuenio, quae temporis et otii penuria publici iuris facere diu prohibuit. Haec quoque nunc successiue *Nouis Actis Academiae* inserere animus est, et breuiter quidem, prout tempus permittit, absque commentis describam. Hic primum Nereides varias, tanquam auctarium ad illustratas quondam in *Miscellaneis Zoologicis* (*Hagae com.* 1766. *editis*) Aphroditas, dein varia marina ex oceano orientali allata et Asteriam singularem maris americani proponam.

I.
Nereis aphroditoïs.

Tab. V. fig. 1. *ad* 7.

Corpus subsesquipedale, crassitie infra minimum digitum, antice teretius, retrorsum lente adtenuatum ad calami cygnei molem, annulosum, teres, ventrali latere (*fig.* 1.) depressiusculum, conualle longitudinali, obsoletissima exaratum.

Segmenta 148. vel vltra; priora et posteriora sensim longiora. Segmentum singulum vtrinque instructum *pedunculo* (*fig.* 6.) carnoso, composito e *papilla* a ventrali latere adnata, producta, obtusa et *mammilla* medio exserente *penicillum* exiguum, e pilis gryseis, retractilem, et exsertam *setam* nigram rigidam. *Cirrhus* supra singulum pedunculum crassus, in dorsum prostratus, ad cuius basin superius enascitur branchia.

Branchiae in octo prioribus segmentis nullae, tribus proximis simplices cirrhiformes, sequentibus sensim maiores (*fig.* 7.) vno versu pinnatae, pinnulis linearibus, dorsoque varie acclines. Quantum hae branchiae versus posteriora crescunt, tantundem cirrhi decrescunt.

Caput animalis (*fig.* 2. 3. 4. 5.) refert praeputium truncatum, margine subcrenatum, basi annulo transuersali tantum a dorso, *cirrhis*que binis crassis, distantibus, subtus vero crena marginis et incisura longitudinali notatum.

Os intra praeputium, *laminis* a ventrali latere (*fig.* 3.) binis in oesophagum longitudinalibus, antice triangulo nigro in praeputio prominentibus instructum. *Palatum* elongatum in massam carneam, praeputio supra adnatam, eiusque cauum explentem (*fig.* 2. 3. *a. a.*), bilobam, superne intra praeputii marginem instructam *cirrhis* maximis quinis vel senis.

Color animalis in liquore seruati gryseo-cinereus, epidermide iridescente obnebulatus.

Habui specimina ex Oceano Indico, Ceylonam alluente, et forsitan in omni calidioris plagae mari datur. Figura a naturali magnitudine imminuta est.

II.

II.

Nereis ebranchiata.

Tab. V. fig. 8 — 10.

Corpus pedale, craſſitie calami ſcriptorii, annuloſum, teres, lumbriciforme, vtraque extremitate, at inſignius verſus poſteriora adtenuatum, bifariam pinnatum *pedunculis* ſingulo ſegmento vtrinque ſingulis (*fig.* 8.).

Segmenta corporis 269. ſingula a ventrali latere medio puncto impreſſo notata, prima et poſtrema ſenſim minora; vltimum crenatum, ani aperturam coronans.

Pedunculi cylindrici, breues, apice transuerſim bifidi, portione antica papillari, poſtica multo longiore, ſubulata; inter quas enaſcuntur pili rariuſculi, gryſeo-aureoli, rigidi (*fig.* 10.).

Capitis *praeputium* conſtat annulis binis (*fig.* 9.) pedunculorum apparatu carentibus, ſubtus vnitis et crenatis.

Os contractum rugis binis et lobo palati globoſo prominulum.

Branchiae cirrhiue capitis in hac ſpecie plane abſunt.

Color gryſeo-fuſcus, cuticula irideſcente. *Ventriculus* exilis, carnoſus.

Haec quoque ſpecies e mari indico adlata fuit, ſed datur affinis in mari germanico, coeruleſcens.

III.

III.

Nereis lamellifera.

Tab. V. fig. 11. *ad* 17.

Corpus in mari germanico ad ſummum bipedale, in Indico ſpecimine bipedale, craſſitie pennae gallinaceae, annuloſum, teres, antice parum, verſus poſteriora lentiſſime adtenuatum, vtroque latere lamelloſo-pedunculatum (*fig.* 11.).

Segmenta numero incerta, in noſtratibus inter 200 et 300, in ſpecimine exotico vltra 550, vniuerſa a ventrali latere inſigni foſſula impreſſa.

Pedunculi (*fig.* 18.) compreſſi, ſetulis flauicantibus praepilati, ſubtus aucti *foliolo* (*a. b.*) ſemilunato, apice libero. Ad dorſum ſingulo pedunculo inſidet *foliolum* aliud maius, ſemicordatum, ſubtiliſſime venoſum, apice reflexum. Foliola pedunculorum et dorſalia confertim retrorſum imbricata, latera totius animalis velut laxe ſquamoſa ſiſtunt.

Caput inſtructum *cirrhis* quatuor parium, quorum duo a dorſo, remotiora, maiora, vnum vtrinque verſus latus, (*Fig.* 12. 13. ex indica, 14. 15. aucta magnitudine ex atlantica, *A A* naturali mole ex eadem). *Palatum* prominens papilla quatuor mucronibus carneis ſtellata (*fig.* 14. 15. *a a.*), ſub qua, compreſſo vel macerato poſt mortem animali, protruditur *oeſophagus* (*fig.* 16. 17. *c c.* aucta *B B.* naturali magnitudine) extrorſum ſubuerſus, lineis longitudinalibus parallelis, dentatis duodecim, ſeu ſeriebus punctorum muricata.

Supra papillam oris quadriſpinoſam, *puncta* duo nigra diſtincta (*fig.* 12. 16.) pro oculis forte habenda.

Color

Color Nereidis europaeae recentis flauefcente - gryfeus, pallidus et ob epidermidem iridefcens; in dorfo lituris fingulo fegmento fingulis, viridicantibus, obfoletis diftinctus. Foliola lateralia margine fufcefcunt.

In multis fpeciminibus poftica corporis extremitas abrupta reperitur, et in non paucis teneriorem tenuioremque caudam e praeruptae partis vulnere repullulaffe obferuaui; vnde Nereidi noftrae, et congeneribus forte omnibus, facultatem corporis amiffam partem refarciendi datam apparet.

Reperitur haec fpecies, vaga inter vegetabilia et quisquilias marinas, in Mari Indico, mediterraneo et feptentrionali, tantum magnitudine diuerfa. Videtur illam *Plancus* indicaffe.

IV.
Nereis lumbricoides.
Tab. V. fig. 19. 19 *.

Hoc nomine mihi venit Lumbricus marinus *Linnaei*, qui omnino quidem affinitatem genericam, inter Nereides et Lumbricos, etiam alias infignem complet, attamen propter branchias fetis dorfalibus additas mihi potius priori generi adnumerandus videtur.

Notum eft, hunc vermem, vt Nereides etiam aliquae faciunt, inftar Lumbricorum in fundo maris arenofo, praefertim vadorum, delitefcere et recedente aeftu gyros excrementorum e fubtiliffimo fabulo conftantium fupra canalem, in quo latent, egerere. Notum etiam, a pifcatoribus e profunditate fefquipedali et vltra effodi ad inefcandos hamos capiendis Gadis et Pleuronectibus deftinatos. Anglis ideo nomine *Lugs* vel

Logworms ſunt notiſſimi. Summa magnitudo, qua occurrunt, eſt octo ad decem pollicum, et digiti minoris craſſities. Icone noſtra (*fig.* 19.) minorem expreſſi.

Corpus molle, teres, antice craſſius, ſubadtenuatum, convexe annuloſum, vulgo ſemipedale, craſſitie calami cygnei vel antice minoris digiti.

Os laxum, truncatum, labio papillis conicis mollibus conſertis obſito, quae et in oeſophagum, pro lubitu vermis exſerendum, continuantur.

Annuli corporis conuexo-turgiduli, granuloſo-ſtriati, prominentiores circiter 19. aequidiſtantes, iisque interiecti vbique quaterni, niſi inter duos primos, vbi tantum bini (*fig.* 19.*).

Faſciculus ſeu penicillus ſetularum ſubaurearum ſetaceus vtrinque ad dorſum in ſingulo annulorum prominentiorum, adeoque 19. parium; quorum ſeptem priora ſimplicia, reliqua poſtice ſtipata *branchiolis* ſeu cirrhis pinnatis (*fig.* 19.*). Hae branchiae interne et poſtice ad penicillos enaſcuntur, longiores vbique 2. et aliquot minores, lineari adtenuatae, pinnatae pinnulis conſertis, ramoſis.

Annuli prominentiores, praeſertim poſteriores, ad latera ſubbilabiati, vt quaſi pedunculorum carneorum in Nereidibus veſtigia exprimant.

Poſtica corporis extremitas aequaliter annulata, truncata; *ani* apertura terminali.

Color animalis recentis quaſi cutis quorundam Nigritarum, carneus, nigredine obductus. Branchiae albidae.

V.

V.

Nereis chryſocephala.

Tab. V. fig. 20. 20*.

Tubulos in fundo maris Indici colit, et eſt affinis *Nereidi tophigenae*, quae Sabella alucolata *Linnaei.*

Corpus molle, continuum, adtenuatum, vtrinque criſtis transuerſis carnoſis, confertis, lamelloſum (*fig.* 20.). Latus dorſale (B.) latius, planiuſculum.

Pedunculi ſeu criſtae transuerſae lateraliter ſubacuto limbo prominuli, ad ventrale latus producti atque terminati *mucrone* carneo, ſubulato, antrorſum incuruo, et ante mucronem *penicillo* pilorum ſubtiliſſimo, exalbido - aureolo (B.).

Ad dorſum pariter producti pedunculi terminantur *cirrho* maximo, craſſo, dorſo acclini, in prioribus minore, poſticis ſenſim exiliore (*fig. A.*).

E criſtarum lateralium vtrinque ſecunda, tertia, quartaque poſtice oritur *brachiolum* ſeu proceſſus carneus planus, retrorſum adpreſſus corpori, margine terminali recto, ciliatus ſetis aureis, parallelis, circiter nouem. Horum brachiolorum priores minores ſunt.

Caput animalis diſcretum a corpore, truncatum, a dorſali latere (*B.*) integrum, conuexum, a ventre profunde exſciſſo - excauatum (*A.*), extremo vertice truncato, biſulco (*fig.* 20 *.). Sciſſurae limbi margine et intus *cirrhis* numeroſiſſimis, confertis, capillaribus ciliato - hirti (*A.*). Truncati

 ver-

verticis discus coronatus *paleolis* aureis (*fig.* 20 *.) confertis, bifariam dispositis, *exterioribus* latioribus, acutis diuergentibus; *interioribus* introrsum et versus scissuram directis, longioribus setaceis. Sub corona paleolarum exteriore *limbus* carneus crenatus (*fig.* 20. *B.*).

Os infra scissuram seu sinum capitis, longitudinaliter conniuens, postice cinctum *ruga* semicirculari, crenata (*B.*).

Postica corporis pars producta *intestino* cylindrico, fere pollicari, contorto, quod, saltem ex parte, naturaliter in viuo quoque verme exsertum esse videtur.

Longitudo vermis, quem descripsi, erat quatuor circiter pollicum.

VI.
Serpula spirillum.

Tab. V. fig. 21.

Vulgaris haec in Fuco vesiculoso maris germanici serpula, quoad testam notissima, meretur etiam ipsa describi, quippe elegantissima. Obseruaui viuam anno 1767, ad Trauae ostium aduerso vento retentus, quum Rossiam peterem.

Animalculum intra tubum lumbriciforme, rubicundum, antice truncatum (*A a.*).

Branchiae octo, ab vtroque scilicet latere quatuor, ciliatae seu pinnatae filis vtrinque circiter duodenis, tenerrimae, subrecuruatae vbi animal illas exserit (*A. B.*).

Os

Os ſpathulaeforme (*A B. b b.*), extremitate rubicundum, ſecundum ſpiram curuatum, apice vnguiformi, vix excauato.

VII.

Limax tetraquetra.

Tab. V. fig. 22.

Limacem huncce marinum e Curilis inſulis accepi, vbi crudum coctumque edunt et *Tochui* appellant incolae. Paulo maiores icone dantur, et ſiccatae formam bene ſeruant. Poſſet ad *Linnaei* mentem Doridis ſpecies videri; mihi vero neque Dorides, nec Laplyſia *Linnaei* ſatis a Limacibus genere diſtinguendae videntur.

Corpus huic Limaci (*fig.* 22.) quadrangulare, poſtice acutum, anterius obtuſum, totum coriaceum, planilaterum. *Latus dorſale* cartilagineo coriaceum, grandinoſo - inaequale, angulis caruncula to - hiulcis; *laterales* facies laeuiores, molliores-que, dextrum orificio reſpiratorio (*E.*) perforatum. *Inferior* facies pedem limacinum pulpoſum, vndique ſubmarginatum refert.

Os in extremitate anteriore (*C.*) ſupra pedem oblique truncata, vnilabiatum, longitudinale, cinctum rugis aliquot concentricis, infra deficientibus. Supra has imminet limbus ſubreflexus, vtrinque in laciniam lacero - dentatam (*A.*) productus, pone quas forſitan ad *B.* vtrinque tentaculum exſeritur, quod tamen detegere in ſiccatis, denuo emollitis haud potui.

Intus areae os ambienti ſubiacent *laminae* binae corneo - oſſeae (*fig.* 22 *. *A.*) luteae, extrorſum conuexae, laeviſſivissimae, interiore margine crassiore intra labia oris prominulae dentium loco.

Interiora animalis, propter duritiem et conglutinationem accurate scrutari haud licuit; quae ex analogia diuinari fere potuerunt, haec sunt:

Posticam cauitatem corporis, totius animalis facile vltra dimidium, occupabat *parenchyma* hepatis compactum, luteum.

In anterioribus, a sinistris *glomus* anfractuosus compactus iacebat, qui tenui canali ab ore ortus, subaequali crassitie canalis pergebat in gyros contortuplicatus, et intus parenchymatosus videbatur, separari enim membrana vix potuit. Extrema pars huius intestini, quod 5″. circiter aequare videbatur, inter lactes immergebatur et versus orificium magnum dextri lateris (*fig.* 22 *. *B.* 22. *E.*) tendebat.

Ad dextrum latus, anterius, statim pone caput, positus erat fibris adnatus *folliculus* vacuus, fibris carnosis praeditus, introrsum rugose retractus mole fabae, in cuius fundo *corpus* carnosum, valde fibrosum, conico-acuminatum, laeue, folliculo adnatum latebat, quod externo amplo orificio (*B a.*) exseri posse videbatur.

Pone hunc folliculum *corpus* insigne lobato-pampiniforme, parenchymatoso-lacteum, conglomeratum, quod in ductum collectum exiliori orificio (*B. b.*) extus hiat.

Pone spiraculum *B a.* ad ipsam cutem laterum ampullula mole pisi, miniacea massa, subtilissimum arenae puluerem ad tactum aemulante, repleta.

Inter

Inter folliculum rubrum, corpus lacteum et maiorem folliculum compressus interiacet *folliculus* alius minor *triqueter*, e crassiuscula membrana et vt videtur glandulosa factus, pisi capax, ipsam ad cutem sessilis, vacuus, exteriusque hians orificio proprio (*B. c.*).

Intestinum ad ipsum quoque orificium *b.* videbatur insertum, intra extimam eius oram, vt extus hocce orificium tantum simplex appareret.

Minutiora distingui haud potuere, neque formae viscerum bene determinari.

Oris apparatus insignis: sub cute externa *lamina* carnosa oualis, medio fissa, vti externa apertura. Ab hac facile secedebant laminae osseo corneae (22 *. *A.*) quarum cauum postice carne larga seu robustis musculis erat repletum, inferior pars fibris firmis pedi limacino adnata.

VIII.

Asterias oligactes.

Tab. VI. fig. 23. A. B.

Ad Asterias ophiuras pertinet, omniumque huius affinitatis maxime abnormi proportione gaudet. Adhaerentem inveni Gorgoniae cuidam simplici (Milleporae alcicorni innatae) quam Curassoa adlatam quondam misit Illust. *Baro à Rengers.* Radiis intortis Gorgoniae implicata haerebat.

Corpusculum duriusculum, exiguum, magnitudine ea quam figura exprimit, (*fig. 23. A. B.*), pentagonum, angulis truncatis;

catis; *superiore* facie (*B.*) medio impressa, stellataque costis rotundatis denis, per paria versus angulos truncatos subparallelis, extrorsum crassescentibus; *inferiore* facie plana, *ore* in medio rimis linearibus discisso, stellato et ad ortum radiorum *fissura* vtrinque subobliqua incisa.

Radii proportione corporis enormi longitudine ad 15. pollices et vltra explere visi, quantum mensurari filo potuere, tereti-filiformes, lentissime adtenuati, compositi *articulis* creberrimis, crustaceis, osseis, consistentia et colore vt in Asteria Medusae. Singuli articuli ad latus ori respondens instructi pedunculis seu *stylis* binis mobilibus, ipso articulo vix longioribus, approximatis.

Color totius albo-flauescens, consistentia dura, crustacea.

IX.

Lepas cariosa.

Tab. VI. fig. 24. A. B.

Hanc testam singularem, admodum crassam in hoc genere et solidam, e Curilis insulis accepi. Alba est, magnitudine exacte, quam figurae exprimunt, (A. *a* superiore, B. ab inferiore latere delineatae). Admodum depressa est, margine ambitus extenuato, interiore circa orificium crasso, inaequali. Superficies exterior sulcato-cariosa; interior inaequalis, laeuis, obsoletissime in laminas coalitas diuisae.

X.

Pholas Teredula.

Tab. VI. fig. 25. A. ad D.

In littore maris germanici ad Belgium aliquando reperi frustum ligni quercini, adhuc bene duri, quod innumeris huius Pho-

Pholadis teftis erat perforatum, fimul Sertulariis obductum, quibus remotis, minutiflima patebant foramina, quae fubito dilatato, fed breui cauo in lignum penetrabant incerta directione (*fig.* 25. *D.*). Vacua alia erant caua, teftulas tantum continentia, nulla intus vifibili crufta calcarea obueftita, attamen ab infufo fpiritu nitri efferuefcentia. In aliis integra et viua aderant animalcula quae hic defcribo, teftulis fuis Teredinem naualem, fed breui corpore Pholadem ita mentientia, vt etiam hinc affinitas fumma, iam ab *Adanfonio* indicata, inter Teredinem et Pholades appareret.

Fig. 25. *a.* refert Pholadem Teredulam magnitudine naturali, quae cauis ligni, cuius fragmentum, naturali item magnitudine, ad *D.* fiftitur, inhaefit. *A.* Refert animal aucta mole, vbi teftae, et corpus dactyliforme, futura granulata, fufca longitudinaliter infignitum, apparet; *B.* teftas albas ab animali disiunctas a bafi, et *C.* vnicam ab interno latere, vbi etiam dens *b.* a cardine introrfum exfertus confpicitur, qui in aliis Pholadibus pariter obferuatur.

Ne quis confundat, addo: etiam in mari germanico reperiri faepe ligni putridi fragmenta maiora, varie perforata breuibus canalibus, fed paulo maioribus, quibus Mya quaedam elegantiflima continetur. Pholas vero noftra in exilibus ligni fragmentis, faepe in ramulis pollice non craflioribus, fed femper in ligno putredine nondum confecto nidulatur.

XI.

Chiton amiculatus.

Tab. VII. fig. 26 *ad* 30.

Maximus eft omnium huius generis qui hucusque innotuerunt, quippe qui faepe in longitudinem fex pollicum anglicorum (*Stellero* obferuante) excrefcit, mihique ipfi inter minores plures, quadripollicaris, licet ficcus, e Curilis infulis adlatus eft.

Forma ficcati, Chitones vulgares refert; fed officula fcuti (*fig.* 26.) obducta corio cartilaginofo, extus fcabro et fubverrucofo, continuato que margini vndique fcutum ambienti, craffo, arguto, cartilagineo, fubtus plano, laeui.

Pes fubtus (*fig.* 28.) lanceolatus, circumferentia fcuti multo minor, et fere triplo anguftior, poftice fubacutus, antice obtufus. *Os* in corpufculo plano, calcis equinae formam referente, a pede diftincto (*a*).

Inter pedem et marginem fcuti foffa ambiens impreffa, intra quam fluctuat *limbus* fcuto interius adnatus (*b b.*), pectinatus barbulis mollibus, compreffis, confertis, branchias pifcium ruditer referentibus, fimilique forfitan functioni deftinatis.

Scutum corio denudatum (*fig.* 27.) et a circumadnato margine cartilaginofo feparatum, feu fceleton animalis, conftat offculis octonis albis, lapideae indolis, fragiliffimis, imbricatis; quorum primum (*fig.* 30.) forma fere vngulae equinae feu patellae dimidiatae, reniforme, margine antico leviter crenatum et fupra per ambitum fubtiliffime ftriatum; intermedia (*b. b.*) 2 ad 7, quorum maximum quartum, quafi e duobus planis orbiculatis compofita, angulo obtufo coadunatis (*fig.* 29.), margine praefertim poftico extenuatis integris, difco et fymphyfi incraffatis, fupraque transuerfa infcriptione obfolete turgefcente inftructis.

His

His omnibus 1 — 7. in ipſo ſinus poſtici angulo (*c. c.*) foſſula pentagona, argute marginata, poſtice truncata.

Oſſiculum vltimum (*d.*) angulatum, quaſi e duobus pentagonis compoſitum, poſtice exciſum, foſſulaque ſymphyſeos a margine remota diuerſum.

Stellerus de Chitone noſtra haec habet: „Circa por-
„tum D. Petri et Pauli et Lopatka promontorium abunde eii-
„citur a fluctibus oceani; comeditur, nec mali ſaporis eſt,
„corio cartilaginem Sturionis, ſubſtantia interna vitellum oui
„forma, colore, et ſapore referente. Camtſchadalis vocatur
„ſua lingua *Keru*. Dorſum luteſcens, multis papillis rubris ob-
„ſitum; ſubtus glaber luteſcens. Fimbriae pectinatae carneae
„branchiarum piſcium ſimiles„.

Mitella, Balani ſpecies tertia verrucoſa *Sebae theſ. vol.* II. *tab.* 61. *fig.* 5. *p.* 61. eſt Chitonis ſpecies corio itidem verrucoſo obducta, noſtrae in eo ſimilis, quod ſcuta non appareant. Locum natalem non indicat Seba.

XII.
Helix coriacea.
Tab. VII. fig. 31 *ad* 33.

Solum fere exemplum Teſtacei coriacei e Curilis inſulis accepi, vbi inquilinis *Tſchoma*, Camtſchatice *Chonochtur* appellatur. Magnitudinem ſummam, quam vidi, icon (*fig.* 31.) exprimit; ſed dantur maiores. A Camtſchadalis hac potiſſimum teſtae pro cymbis habentur quibus Mures oeconomos migrantes maris ſinus transfretare fabulantur, vnde Ruſſis hac teſtae *Baidarki* vulgo audiunt.

Hh 2 *Teſta*,

Testa, cum humet, cartilagineo cornea, vel mollusce corneola, ficca membranaceo-cornea, lutescens, subpellucens, dimidiam Bucardii testam fere referens, paulo irregulari circumscriptione ouata, gibba, hinc vmbilicata *spira* simplici (*a.*), margini ibidem ventricose collecto (*b.*) proxima, impressa, quaeque interius, praesertim in iunioribus (*fig.* 32. 33.), tenui calcarea crusta obducitur. Circumferentia (*c. c. c.*) effusa, et ad dextram spirae margo leniter extrorsum flexus. Superficies tota in iunioribus striis circularibus, margini effuso parallelis; in maiori obsoletis rugis annotinis imbricata, versus marginem hirsutie quadam asperata.

Varietates recenset *Stellerus* sequentes: „ *Auris marinae* „ (sic testam vocat) varietas, turbine dextrum latus spectante. „ — *Eadem* cuius turbo sinistrum latus spectat. — *Eadem* mem- „ branacea, spadicea, cuius primum superioris testae rudimen- „ tum necdum absolutum. — *Eadem* membranacea, virides- „ cens ac diaphana. Ochoti et ad Bolschaja fl. ostium ejici- „ untur copiose et a Laris auide deuorantur. „.

XIII.
Ascidia squamata.

Tab. VII. fig. 34. — 37.

Simile huic nostro Curilico Molluscum nomine Holothuriae squamatae in *Faunae Danicae Fasc. I. Tab. X. fig.* 1. 2. 3. delineauit *Müllerus*, sed multo minus. Specimina nostra, copiose satis missa, sed siccata, circa os etiam reliquias mucosas tentaculorum referebant, quae tamen, aqua macerata, nullam organicam texturam prodiderunt. Adfuisse similes Noruagicae *Mülleri* verosimile est; et tamen mihi vtrumque molluscum potius

tius ad Afcidias, quam ad Holothuria pertinere videtur, licet tranfitum ad haec efficiat.

Animal, fi poëtico genio indulgere velis, Sirenum vel Nereïdum quafi mammas fquamofas refert. *Magnitudinem* fummam fpeciminum viforum icon exprimit.

Bafis oblonga, coriacea, laeuis, inftar pedis Actiniae plana, colore coccineo, etiam in ficcatis, rutila.

Corpus non multo magis gibbum, quam vt infignem mammarum foeminearum tumorem aequet, fupra conuexe bituberum, altero tubere paulo maiore, vbi os et tentaculorum veftigia, vtroque perforato.

Totum corpus tegunt *fquamae* lapidofae, fragiles, fubrotundo quadratulae, furfum imbricatae, quarum difpofitio ex icone patet. Squamas immerfas connectit et obueftit *epidermis* mollis, hinc inde inter fquamas *callis* minutis adfperfa, faltem in maximis. *Calli* maiores feu fquamae imperfectae, fenfim imminutae, circa orificia tuberum.

Interanea fingularis ftructurae, fed in ficcatis, maceratione emollitis speciminibus imperfecte fucceffit anatome. Cauitas interna exhibet primo *mufculum* circularem, marginem teftudinis fquamatae legentem, a quo fibrae radiatim fecundum teftudinem in dorfum eiusdem conuergunt. *Fibrae* aliquot inter orificia longitudinales.

Orificium a. ducit in folliculum tympaniformem (*fig.* 35. *c. d. e.*), rubicundo vel ruberrimo magmate plenum, cuius inferioferiorem marginem coronat series *officulorum* (*e e.*) concatenatorum, e lapidea fragiliffima fubftantia factorum, quae (*fig.* 37.) tricruria funt, vno crure truncato verfus os directa, duobus inferioribus inter fe concatenata (*fig.* 36.). *Mufculi* quinque (*d. d. d.*) infignes, circa hoc tympanum feu ventriculum inferti, illum fundo teftudinis adligant.

E medio difci officulis cincti pergit *inteftinum* (*f.*) magmate gryfeo plenum, flexuofum, inferiturque *veficulae* (*g.*) vacuae, intus glabrae, quae altero orificio animalis (*fig.* 34. *b.*) refpondet, et circa quam corpus tubulofo fibrofum haeret, quod fcrutari haud potui.

Ventriculi ftructura vtique Actiniis ambulatoriis feu Holothuriis affine reddunt hoc animal, nifi quod plano laterali affixum haereat, duobus orificiis furfum patens.

XIV.

Afcidia aurantium

Tab. VII. fig. 38.

Cum praecedenti complura ficcata fpecimina etiam huius ex infulis Curilis adlata funt.

Magnitudo faepe pomi aurantii maioris. *Forma*, praeter bafin truncatam teftis lapillisque infidentem et papillas ofculiferas, fubglobofa.

Corium externum in ficcatis paffim in magnas rugas crispatum, naturaliter aequabile, tenaciffimum, rigidiufculum, vix

vngue

vngue craſſius, extus totum *punctis* duriuſculis, diſtantibus ſcabratum.

Papillae in vertice ſphaerae binae cylindraceae, rugoſae, altera maior, vtraque orificio cruciatim diſſiſſo peruia.

Intra cauum corii continetur *follis* ductibus duobus carnoſis orificiis papillarum inſertus, conſtans ſtrato fibrarum extus circularium interioreque groſſiorum longitudinalium, in discum baſeos tendinoſum, circularem conuergentibus. Hic follis ſeu *ventriculus* facile integer a corio ſecedit et enucleatur, intus vacuus, aquam marinam recepturus, ſtipatus adnato *viscere* parenchymatoſo, in anfractus inteſtiniformes effictο, flaveſcente, a baſi per latus arcuato-adſcendente.

Color extus coccineus.

XV.

Aſcidia globularis.

Tab. VII. fig. 39. 40.

In littoribus vadoſis arena ſubtili ſtratis maris hyperborei ad Carae ſinum copioſa collegit ſpecimina Amiciſſ. *Sujef*, quum an. 1770. oram iſtam glacialem adiit. In ſpiritu frumenti optime conſeruari potuit, licet molle corpus.

Maximae Ceraſum maiorem aequabant. *Corpus* ſimpliciſſimum, ex ouali globoſum, ſemipellucidum, glabrum, ſubtus pedunculo breuiſſimo ſupra arenam vel lapillos adfixum, ſupra pertuſum oſculis binis, diſtantibus, vix quidquam prominulis.

Corium

Corium externum epidermidis humanae craſſioris, diu maceratae ſimile, cineraſcente-pellucens, extus ſubtiliſſime punctato ſcabrum et plerumque arena ſubtili adglutinata confertim obſitum.

Diſſecto corio *intus* apparet *ſaccus* ſeu ventriculus (*d. b. c. c. a. d.*) forma externo inuolucro ſimilis, ad marginem pedunculi gemino ligamento (*c. c.*) inſertus et ſupra orificiis (*d. d.*) adnatus, caeterum vndique ſolutus; in quo *fibrae* diſtinctae paulum inter ſe diſtantes, transuerſae, neruique longitudinales, magis inter ſe diſtantes, paralleli, interiores apparent. Superficies interior ſacci *circulo* verſus orificium ſtriato laeui; caeterum plicis longitudinalibus, mollibus rugoſa, quas efficit interior tunica villoſa. Ad fundum ſacci, inter orificium maius et pedunculum, inter externam fibroſo-nerueam, internamque tunicam plicatam, latet *viſcus* (*a.*) depreſſum, totum globulis minutis, magnitudine arenulae, albis refertiſſimum, quod certe ouarium eſt, neque in omnibus adeſt; in minoribus enim ne veſtigium quidem eius vidi. Viſus mihi ſum videre porum exiguum ad ipſum pedunculum externi inuolucri, cui alterum e ligamentis baſilaribus ventriculi ſeu folliculi interni adhaeret, quique forte ouiductus eſt.

Ab altero latere, inter tunicas, latet *viſcus* (*b.*) parenchymatoſum, luteſcens, cylindraceum, vtrinque obtuſum, quod hepatis vel pancreatis analogum diceres, quodque nulli deeſt.

In ſacco nunquam heterogenei quidquam, praeter liquorem limpidum inueni in pluribus diſſectis; vt ſola aqua marina nutriri animal vix dubitem.

Ab

Ab Afcidio Pruno *Faunae Danicae Icon. XXXIV. fig.* 1. 2. 3. noftra fpecies differt pedunculo, forma orificiorum et vifcerum, imo fubftantia.

Ex eadem plaga arctici maris adlata mihi funt *Ouaria* (*fig.* 40.) membranacea, in difculum medio perforatum effícta, nigricantis et tenacioris fubftantiae, ouulis minutis per ambitum fcatentia, quae libera fupra fabulofum vadofi littoris fundum reperta funt, et forfitan ad hanc noftram Afcidiam pertinent.

COMPLEMENTA VARIA
ACAD. IMPER. SCIENT. PETROPOLITANAE COMMVNICANDA,
AD
CLAR. AC CELEB. *PALLAS*;

Auctore
PETRO CAMPER.

Conuent. exhib. d. 6. Sept. 1787.

Praefatio.

Sceletorum diuerſorum animalium, in primis quadrupedum numerum magnum, in initio ſtudiorum meorum collegi eo, quam maxime, ſcopo, vt Galeni adminiſtrationes anatomicas intelligerem, et ex Anatome comparata Corporis Humani fabricam euidentius inluſtrarem, et facilius. In animalium capitibus vero maximam diuerſitatem obſeruans, tantam eorum mihi comparaui copiam, vt vltra nonaginta in Muſeo meo numerem crania, praeter illa Cetaceorum, Trichechorum, Manatorum, Dugonum etc.

Mechanismo omnium, ac dentium varietate ſtupenda, qua generantur, ac reconditi ſunt, rite examinatis, coepi foſſilia Crania, et oſſa varia vndequaque mihi comparare, vt, quid veteri orbi contigerit, determinarem plenius, et curatius. De

Cranio

Cranio Rhinocerotis differens in post. Parte Tom. II. Actorum huius Acad. p. 202. Credere nondum ausus sum, Animalium diversorum extinctionem, seu annihilationem, tamquam Diuinae prouidentiae repugnantem! Hodie vero quam plurima extinctorum specimina, in Museo meo reperiunda, et meditationes magis seriae persuaserunt mihi, sapientiae Diuinae non repugnare, legem, qua res illas, vel animalia illa desinere iubeat, simul ac scopo primario, nobis incognito, satisfecerunt penitus. Conuictus etiam cum maxime sum, orbem nostrum variis illis, ac horrendis catastrophis fuisse expositum aliquot seculis, antequam homo fuit creatus: numquam enim hucusque, nec in vllo museo, videre mihi contigit verum os humanum petrifactum, aut fossile, etiamsi Mammonteorum, Elephantorum, Rhinocerotum, Bubalorum, Equorum, Draconum, seu Pseudoursorum, Leonum, Canum, Vrsorum, aliorumque perplura viderim ossa, et eorum omnium haud pauca specimina in Museo meo conseruem!

Operae igitur pretium fuit viuentium ossa bene cognoscere, vt fossilia ad sua genera ac species reducere possemus. Ossa non modo, sed et dentes pleniori examine digna euaserunt, vt species aliquot definirentur curatius: Ex incisiuis enim solis asiaticos Rhinocerotes ab africanis, et Apros aethopicos a se inuicem distinguere licet. Adserere ex eodem principio audeo Mammonteum animal extinctum non modo esse, sed nullam omnino habuisse cum Elephanto similitudinem! Etiam Elephantos, et Hippopotamos olim giganteos fuisse; quemadmodum Bubalos, Alcesque, Vrsosque, giganteos re-vera extitisse vel ipsis speciminibus, vel iconibus fidelibus ad obiecta ipsa a me ad amussim Londini factis, euidentissime, hoc momento, demonstrare queo.

Academia Petropolitana, Musei Brittannici Curatores, ac Viri perplures in litterarum orbe Celebres, inter quos *Hoffmannos*, *G. Hunteros*, *Palierios*, *Pallasios*, *Burtinios*, *Forsteros*, *Soemmeringios*, *Menkios*, *Banckfios*, *Burkeos*, *Watsonos*, *Vosmaerios*, aliosque nominare licet, generositate incomparabili Museum meum locupletarunt.

Egregia quoque specimina inprimis ex Westphalia mihi adtulit filius meus Adrianus, qui in Gallia similiter multa ex monte martyrum exemplaria pro museo meo collegit. Taceo, quae ex monte St. Petri ab haeredibus *Hofmanni* et aliunde emerim.

Thesaurus hoc modo pedetentim collectus indigebat indies pleniore examine, indigebam igitur ipse necessario omnis generis ossibus rariorum quadrupedum, praeprimis si classem non modo, sed ordinem, immo genera ipsa, ac species animalium determinare vellem, ad quae ossa illa fossilia, vndequaque acquisita, pertinuerunt.

Exemplis iam veritatem hanc illustrabo.

De Cranio Bisontis fossili.

§. 1. Exhibuisti, Vir clarissime, Tom. XVII. Nou. Com. Acad. Imp. Scient. Petrop. pro Ann. 1772. p. 576. cranium fossile Bubali, quod succincta descriptione et figuris tribus valde nitidis illustrasti, pro solita tua prudentia, speciem determinare recusasti, dubius ad Bubalum capensem, an vero ad Bisontem pertineret americanum? Cl. *Vosmaerius* mihi ante aliquot annos dono dederat Bubali capensis cranium egregium, integrum, siccatum: sed anno praeterito, ex consensu Inlustrium Musei Brittannici Curatorum, postquam rara quaedam petre trefacta, ad permutanda duplicata, miferam, acquifiui Bifontis Americani cranium, cute fimiliter ornatum; maceraueram ambo, vt depurata conferre poffem cum accuratiffimis figuris, quas de hoc foffili cranio, quemadmodum etiam de Vro dedifti.

Animaduerti, praeter defcriptionem, in vniuerfum foffili cranio et recenti Bifonti conuenientem, lacrymales in offibus vnguis foueas, quas Bubalus capenfis omnino non habet. Frons ipfa Bifontis, et cornuum bafes infuper refpondent adeo exacte iconibus tuis, vt ouum ouo fimilius effe nequeat! Foffile cranium tamen minus grande eft recenti, quod iterum capenfi multo minus eft. Nullus dubito, quin fpecimen, mihi conceffum, ipfum id ficcatum Bifontis caput fit, quod olim in Mufeo Brittannico a Te vifum p. 601. ib. memorafti.

Mirabar Ill. Pennantium *Hift. of Quadrup. p.* 27. adfeverantem, Te non de foffilibus, fed de recentibus egiffe craniis, fuper glaciem ex America allatis; quum euidenter ex toto tenore conftet Te foffilia fola collineaffe (*).

Praeter lacrymalium fouearum, et cornuum diffimilitudinem in Capenfi Bubalo, obferuaui complementa offium maxillari-

(*) Crania a me defcripta in plaga arctica circa oftia fluuii Ob, paffim in fuperficie terrae reperta funt, et omnino recentia, nec foffilia, ab atmofphaerae tamen variationibus corrupta et cariofa, videbantur. Mihi itaque omnino verofimile vifum eft, Bifontum americanorum cadauera in oceanum arcticum cafu delata, cum glacie vel et fluctibus ad noftras oras adpuliffe, vbi facile feras longe a littore cranium et offa diftraxiffe credas. *Pallas.*

xillarium, seu ossa intermaxillaria ad nasi ossa vsque in capensi, sed longe minus alte, et nullo modo eousque adscendere in Bisonte.

Ossa ea deperdita videntur in specimine Acad. Imperialis; alterum integrum, postea detegendum, etiam hanc similitudinem comprobabit. Concludo ex collatione horum cum fossili, Cranium, a Te descriptum ad Bisontem Americanum referendum esse.

Ill. Comes de Buffon in Suppl. Tom. 3. pag. 57. quaedam satis laudabilia de Bisonte addit, sed quae scopum nostrum non spectant; videtur Boues omnes, etiam Vrum pro eiusdem speciei animalibus habere et gibbos a climate et nutrimento deducere. Addidit figuram Tab. V. pag. 64. quae cornuum illam flexuram, adeo characteristicam in hoc animali, non exprimit. *Ill. Buffoni s* dein Bisontis Americani longe meliorem iconem dedit in Supplem. Tom. VI. pag. 46. Tab. III. in vniuersum non admodum correctam, quemadmodum etiam non est eius obseruatio, ac si cornua originem communem haberent, pag. 47. In cranio musei mei cornua visibiliter separata sunt, minus tamen quam in Bubalo capensi. Cranium longum 2 ped. 4½ poll. pag. 47. ex vno centro oculi ad aliud 1 ped. 4 poll. ib. Pupillam non transuersalem, quemadmodum in omnibus ruminantibus, sed rotundam depinxit.

De Bubalo giganteo.

§. 2. In Volumine XIII. Nou. Comment. eiusdem Acad. pro Anno 1769. Bufalum giganteum fossile admirabili cum perspicuitate descripsisti. Dissertationis illius pretium magnifacere didici ex summa generositate Sereniss. Principissae *Dasckkow* Acad. nostrae Directricis, qua placuit meis ita satisfacere desi-

desideriis, vt inter cetera, de quibus alia occasione, ad me mitti curauerit summam partem Cranii Bubali eiusmodi, quod, cum ingenti Asiatici recentis cranio in meo museo collatum, duplo maius repertum fuit.

Ex cornuum positione mihi probabile videtur non esse Bubali, sed alterius speciei Boum fragmentum: resupinata enim cornua sunt Bubalis omnibus, quotquot crania vera, vel figurata viderim: (**) notum praeterea est omnibus, a Chinensibus perplures similibus cornibus ex porcellana fictos vtique venumdari! Ludit tamen aliquando Natura in his, vti in aliis bobus nam ex Asia accepi a *Cl. van der Steege* egregium Bubali cranium sine cornuum vlla nota, et ab altero quondam meo discipulo, quem mors praematura nobis eripuit, *Hoffmanno* cranium Bubali Asiatici cornibus adeo longis instructum, vt apices octo pedes rhenol. a se inuicem distent! cornua ipsa 5 pedes sint longa! chorda, ex basi ad apicem incuruum ducta 4 ped. cum 3 poll.; videtur *Sloanius* Phil. Trans. abridgd by *Badham*, Tom. VIII. pag. 191. similem lusum cornuum indicasse: haec pedes 6. longa fuere, chorda 4 ped. 5 poll. cet.

Ex positione cornuum *primo* ad Bufalos non pertinuisse censeo; *secundo* quod foueam lacrymalem habuisse videantur, quibus Bubali carent omnes.

Quaeri

(**) Crania gigantea sibirica equidem cornua minus reclinata habent vulgari Bubalo domestico, magis tamen quam Vrus, et carinata vt itidem Bubalis sunt. Forsan aliquando innotescat magis maxima illa stirps Bubalorum in alpino iugo Tibetana regna circumambiente spontanea, cuius in descriptione Bubali grunnientis mentionem inieci; et quam nunc suspicor crania nostra fossilia maxima quondam suppeditasse. *Pallas.*

Quaeri igitur nunc poteſt, an non ad Vrum pertinere potuerit? Datur ſine dubio aliqua ſimilitudo, verum foueae lacrymales adeo inſignes in Vri fig. 4. Tab. XII. et adeo characteriſticae in Ruminantium claſſe, vt quae in eadem ſpecie, licet modis diuerſis figuratae perpetuo adſunt, in giganteo cranio Tab. XI. fig. 1 et 2. tantummodo delineamentum quoddam fouearum praebent, et exoriuntur altius.

In Bobus noſtratibus ne nota quidem talis foueae reperitur, quam ob cauſſam mihi non arridet *Linnaei* adnotatio edit. XII. pag. 98. tamquam ſi Vrus varietas eſſet Taurorum Europeorum? Doleo interea quam maxime quod eiusmodi crania mihi comparare nequeam, pondus enim inſigne adderent ratiocinationibus noſtris de Orbe antiquo.

Admiratione autem dignum mihi videtur, quod in Promontorio freti Gaditani, ſeu in Rupe Gibraltarenſi ac in inſula Liſſa prope Dalmatiam, tantus numerus oſſium dentiumque ruminantium reperiatur! Fateor me in egregio ſpecimine Muſei Brittan. Londini ſcalpris variis denudaſſe dentes animalis cuiusdam rapacis, forte Leonis; etiam cuniculorum maxillas inferiores quatuor, in paruo rupis Gibraltarenſis fragmento, quod mihi dono dederat *Ill. Eques Bancks*, dum ad finem An. 1785. Londini morabar. Innumera equidem habeo fragmenta ex ea rupe, ſed omnia oſſibus maiorum ruminantium et eorum molaribus referta, inter quae Limacum terreſtrium variae cochleae.

Nob. Watſonius ſimiliter dono mihi dedit fragmentum ex inſula Liſſa, in quo maxillae pars cum quatuor molaribus ruminantis iunioris, noſtra ouium ſpecie non maioris.

Cuncta

Cuncta illa fragmenta conglutinata ſunt inter ſe materia ſtalactitica fuſca, ſubrubra, cui interjacet ſaepe ſpathum informe, fragmenta marmoris coerulei, aliquando argilla digitos maculans, et cochleae variae terreſtres. Mirum ſane, quod in locis tam diſſitis, vti eſt Dalmatia a promontorio Freti Gaditani, inter quae tot regiones et maria reperiuntur, oſſa ſibi plane ſimilia, eodem modo inter ſe conglutinata rupes illas conſtituant, materies lapidea in plerisque praeprimis oſſium ſpongioſorum, vertebrarum v. c. ac digitorum cancellos impleuerit, oſſaque albicantiſſima firmitatem ſuam ſatis bene retinuerint. Cochleae vero ſemper vacuae. Oſſa in fragmenta minuta diffracta, et inter ſe confuſe mixta!

De molaribus Elephantorum giganteorum, et eorum oſſibus.

§. 3. De oſſibus giganteis agens praeterire nequeo, me in Muſeo Brittannico vidiſſe dentes molares Elephantinos adeo ingentes, quo ad laminarum craſſitiem, vt etiamſi ex primordialibus fuerint, triplo maiora animalia fuiſſe videantur, quam maximi Elephanti, qui hodie extant.

Eadem proportio locum habet in Elephanti oſſe femoris foſſili, quod in Hollandia repertum et a me deſcriptum eſt in *Actis Harlem. Tom. XII. p.* 379. Id, licet epiphyſes vtrinque abſint, longitudinem habet 52 poll. ſeu 4 ped. cum 4 poll.; ac tredecim pollicibus maius integro oſſe femoris Elephanti aſiatici ſenio mortui, cuius aliquot oſſa Londini emi. Circumferentia huius eſt 11 pollicum, foſſilis vero 15 poll. in media parte; patet tamen ex epiphyſibus deperditis os femoris foſſile iunioris fuiſſe animalis.

De dentibus molaribus Hippopotamorum giganteorum.

§. 4. In eodem museo ad amussim delineaui molarem dentem medium Hippopotami gigantei, qui superat quater maximum illum molarem Hippopotami cuius figuram a me delineatam descripsisti Tab. VIII. Act. Acad. Imp. Scient. Petrop. Tom. I. P. II. p. 214.

De Alcibus giganteis Hiberniae.

§. 5. Inter gigantea crania numeranda quoque sunt illa Ceruorum, seu Alcium vti appellantur in Hibernia obvia, cuius notabile exemplum prostat in Archaeolog. Brit. Tom. VI. Anni 1785. Nob. D. *Percy egregium* id cranium emit: distantia inter extremos apices cornuum erat 14 ped. et 4 poll. Latitudo frontis 11 poll. cum ½. etc. Cel. *Pennant* meretur qui super his consulatur, Hist. of quadr. p. 98.

Ipse possideo duo specimina, satis integrum vnum, sed adeo diuersum a recentibus Alcibus, vt nullus dubitem, quin extinctum sit genus, quemadmodum etiam Cel. *Percy*, ac *Pennantio* visum fuit.

Magis audacter diuersitatem inter recentes, et fossiles Alces adfirmare audeo, non modo ob cornuum dissimilitudinem, sed et ob varietatem totius compagis. Eius interea humanitatis fuit Nobilissimus D. *Stehlin*, vt ex Lithuania adhuc miserit perelegans cranium cum cornibus Alcis, quod, licet iunioris animalis, longius tamen est fossili, et magis tenerum. Fossile enim est latius, robustius, et annosi praeterea animalis. Cornua terribiliter ampla, et densa.

Na-

Narium apertura $4\frac{1}{2}$ poll. longa, duplo minor illa recentis capitis. Ossa intermaxillaria ossibus nasi inserta, quae tantum ad dimidiam altitudinem ossium maxillarium adscendunt in recenti. Verbo, diuersa et ad ceruos magis accedens species mihi videtur et exstincta!

Robur haec addunt obseruatis tuis Tom. XIII. p. 468. animaduertendum tantum, crania illa, licet bipedalia, minus longa esse recentibus.

Monere hac occasione oportet, capita pleraque adultorum Boum, Bufalorum, Equorum, Camelorum, Camelopardalum, Rhinocerotum, Hippopotamorum, duos pedes ad minimum, et in vniuersum longa esse.

De ossibus Mamonteis.

§. 6. Memini me in Parte II. Tom. I. Actor. Academ. Imp. Sc. Petrop. p. 219. ad finem p. 222. coniecturas meas proposuisse circa ossa Mamontea, eorumque molares, atque plausibilibus argumentationibus, Ill. *Hunteri* obseruatis fidentem, monstrasse: Mamonteum animal Elephanto simile, atque proboscide ornatum fuisse; quia in Phil. Trans. Lond. Vol. 58. p. 45. pro certo statuit habuisse *dentes exsertos*, sed *intortos*!

Ab ipso *W. Huntero*, cuius amicitia fruitus sum ab Anno 1746. acceperam Anno 1778. dentis talis exserti plus minus incurui, 2 ped. cum 4 poll. longi, partem solidam, 12 poll. crassam, non procul a fluuio Ohione Americes repertam: hac epistola concomitatam: London Dec. 24. 1778. *I sent to you the tooth of the american incognitum for your museum, — this is but a third part of it.* Id est, „mitto Tibi dentem incogniti „Americes pro tuo museo — est tantummodo tertia pars „totius.“

Sub-

Subſtantia eius interim, et fibrarum decurſus ebur Elephantinum mihi videntur declarare. Nullos vero molares huius incogniti niſi pictos, nulla oſſa eius vllibi videram; etiamſi Muſea Europae maxime celebria ſatis curioſe examinaſſem; carniuorum tamen non fuiſſe animal p. 202. ex molarium figuratione ſimpliciter, determinaui.

Nouum deinceps curioſitati meae ſtimulum addidit Celeb. *Michaëlis* iam Marpurgi Celebris Med. Profeſſor. Is ex America redux ad me miſit figuram palati Mamontei magnitudine naturali, atramento Indico egregie depictam. Obſtupui!

Quatuor ei inhaerebant dentes molares, poſteriores duo magni, minores anteriores, figurae eiusdem et formae, quales iam plures inprimis a *Collinſono*, a *Guil. Huntero*, atque a Comite *de Buffon a*) repraeſentatos videram.

In hoc palato nullus erat pro exſertis locus, dehiſcebant oſſa intermaxillaria ipſa, quae erant exigua! Omnes igitur meae coniecturae eo ipſo, momento vanae non modo, ſed ridiculae euadebant. Scilicet, ſi huic Cl. *Michaëlis* figurae, vnicae, fides habenda eſſet. Tanto autem cum artificio exarato erat pictura, ſtylo adeo naturali et vero, vt impoſſibile mihi videretur, fictam, ſeu ex imaginatione Pictoris factam fuiſſe tabulam!

Arri-

a) In Supplem. Hiſt. Nat. Tom. V. *notes iuſtificatiues* p. 511. Tab. I. et II. Radices mamonteorum molarium non bene ſunt repraeſentatae, deficiunt transuerſales annuli, quos omnes habent; ſuppoſuit Ill. Comes ib. p. 512. vtrinque quatuor vel ſex adeſſe. Tab. V. quidem eiusdem animalis, ſed magis detritos depingi curauit. Fig. Collinſonii Phil. Tranſ. Vol. 57 Tab. XXII. p. 469. egregia quidem, ſed annulos non exprimit.

Arriſerant mihi valdequam, quae ib. p. 217. de Muſeo veſtro Academico pronunciaſti: Mamontea oſſa tam varia, et tanto in eo reperiri numero, vt ſperare auſus ſim, me duplicata quaedam, ſi Sereniſſimam Principiſſam *Daſchkaw* ſupplicarer, ex immenſa illa collectione haud difficulter acquiſiturum; reſpondit autem, duplicata Mamontea, in ditiſſimo ſecus, Imperiali Muſeo non fuiſſe reperta ***). Gratioſe tamen ad me miſit *Elephanti inferiorem maxillam foſſilem*, gigantei *Bubali cranium*, cum *dente exſerto valde incuruo*, maximam partem decompoſito, non Mamontei monſtri, ſed veri Elephanti. Longitudo externe menſurata eſt 5 ped. cum 2 pollicibus, chorda e baſi ad apicem ducta = 3 ped. cum 4 poll. Circumferentia pedem magna eſt; interna cauitas pedem cum octo poll. profunda reperta fuit.

Londinum interea profectus in Muſeo Britannico permultos offendi, ingentesque molares ex America olim aduectos, atque maxillae ſuperioris ſeu palati fragmentum, quod exactisſime reſpondebat Iconi a Celeb. *Michaelis* mihi communicatae.

En vtriusque Monogramma! Patet ex ſimilitudine roſtrum huius animalis fuiſſe anguſtum nimis, quam vt exſertos tantae mo-

(***) Mamontea oſſa a Rusſis, praeſertim per Sibiriam, vulgo appellantur Elephantina, quae ſumma abundantia foſſilia in ſtratis ſuperficialibus reperiuntur; eaque in Muſeo noſtro Academico copioſe proſtant, immo dentes eburnei fosſiles ſed recentiores, a Portu S. Archangeli vulgo pro tornatili opere exportantur. Ill. *Campero* autem placuit incognitae, per Americanas foſſiles reliquias celebratae et neſcio annon forte inter Cetacea marina adhuc latenti Belluae Mamonteum nomen, contra noſtratium mentem, adpropriare, cuius oſſa nunquam, dentes rariſſime apud nos repertos fuiſſe alibi iam monui. Mihi omnino tantum duo imperfecti iſti molares eius, ad Demam fl. inter ferri mineram effoſſi innotuerunt, quorum alterum quondam deſcripſi et delineavi. *Pallas.*

molis, quantae ipſi praeprimis, a *W. Huntero* tribuuntur, continere potuerit. Reſpondebat huic palato maxilla inferior eiusdem Muſei a *W. Huntero* Phil. Tranſ. Vol. 58. p. 42. omni cura repraeſentata; continet maiorem dentem cum tuberibus quatuor, deficit anterior minor. Adnotauit Cl. *Michaëlis* huic maxillae ſimilem repertam fuiſſe cum fragmento palati.

Veriſimile igitur eſt, animal illud magnum quidem, ſed nullo modo carniuorum, neque Elephanto ſimile fuiſſe, quid de eo ſentiendum ſit, iam incertus haereo! Vobis ſolis, ſodales Inluſtriſſimi! contingit adire Corinthum. Agite quaeſo, et examinate omnia illa oſſa foſſilia quae in Muſeo Acad. Imperialis tanta copia reperiuntur; et facito vt cognitum euadat animal cuius reliquiae tot Celebres Hiſt. Nat. Cultores fruſtra occupauerunt, atque ſuperarunt.

Si oſſa femoris, forte fortuna, interſperſa reperirentur, attendendum ſedulo ad eorum capita: carent Elephanti ligamento tereti, quod in Rhinocerotis oſſis femoris capite adeſt: Os femoris Rhinocerotis aſiatici magnam, compreſſam, ſed rotundam habet apophyſin infra trochanterem. Illud Elephanti eſt aequabile, absque vllo proceſſu, excepto trochantere, qui in vtroque ſimplex eſt.

Spina ſcapulae in Elephanto furcam repraeſentat, in Rhinocerote vncum, deorſum incuruatum et retrorſum.

Hac ratione poſteri lente quidem, ſed his inſtructi obſeruationibus totum tandem myſterium extricabunt. Gaudeo interea quammaxime, quod, venia Inluſtriſſimorum Britan. Muſei Curatorum, ex duplicatis duos dentes molares Ohionenſes, egregios, mihi comparare licuerit; aliosque delineare, inter quos pro-

procul dubio ille, cuius coronam *N. Grewius* deſcripſit, atque repraeſentauit a parte ſuperiore Tab. 19. nomen ipſi dans dentis Animalis marini. *R. Waller*, qui Opera Immortalis *R. Hookii* poſthuma edidit, hunc eundem dentem Tab. V. p. 285. explicuit, tanquam ad Balaenam, aut Elephantum pertinentem.

Vidi non modo ſaepius, ſed, vti monui, accuratiſſime delineaui, obſeruavique eſſe ſimilem mamonteis, ſed iunioris animalis, cuius molares radices nondum egerant. In fragmento maxillae ſuperioris cuius monogramma addidi, dens molaris dexter anterior eandem habet faciem. Nuper in Burgundia ſimilis repertus eſt.

Id autem in omnibus, etiamſi longiſſimis radicibus inſtructis, verum deprehendi, quod intus caui ſint: generantur igitur humanorum, non Elephantorum molarium inſtar. In his enim, ex multis lamellis, ſibi applicatis dens formatur ſolidus, in quarum meditulliis cruſta vitrea recondita eſt. In illis primum coronae cruſta vitrea oritur, dein radicum principia annulatim, quorum caua implentur ſubſtantia minus dura pedetentim depoſita.

Praeterire interea nequeo ex Dentium molarum magnitudine ac mole concludendum non eſſe ad ipſam animalis magnitudinem, aut molem. Dentes enim in omnibus, quotquot noui, animalibus rationem nullo modo habent ad corporis vaſtitatem, ſed ad naturam alimentorum, quae vſurpant. Elephas molares decuplo maiores habet Rhinocerote. forte decies quinquies maiores, licet decuplo maius non ſit animal. Equus quamquam minor Camelopardali, dentes maiores habet. Apri aethiopici ſimiliter ingentes habent molares, etiamſi noſtratibus aequale, immo minus habeant corpus. De exſertis idem pronuntiandum.

In

In omnibus attendendum eſt ad capitis magnitudinem relatiue ad colli longitudinem: in iis enim in quibus molares valde magni ſunt, collum eſt breuius.

Pronuntiare nunc certo licet, Mamonteum animal non fuiſſe carniuorum, quoniam neque inciſores, neque laniarios habuit; probabiliter vero ſolidioribus radicibus fuiſſe nutritum, vel durioribus arborum ramis. Omnia enim, quae organicam habent ſtructuram, animalia plantaeve ſint vel inſecta, alimentum praebent omnis generis viuentibus animalibus.

Haec ſi grata fuiſſe Academiae Imperiali percepero, Supplementa reliqua, de Apris Aethiopicis, de Rhinocerote Aſiae et Africae, de Didelphide Aſiatica, et Myrmecophaga Capenſi, quae parata ſunt, debita cum reuerentia data occaſione mittam.

Explicatio tabularum. Tab. VIII.

A. B. Dens molaris anterior maxill. ſuperioris videtur iunioris animalis fuiſſe.

B. C. Poſterior lat. dextri.

D. E. Anterior ſiniſter.

E. T. Poſterior.

G. et H. Sulci pro neruis palatinis.

Tab. IX.

A. B. Sinus $\frac{1}{4}$ vel plus minus $\frac{1}{2}$ poll. profundi, intus glabri.

C. D. E. C. D. E. Oſſa intermaxillaria.

D. E. D. Fiſſura, quae recepit procul dubio canales inciſiuos.

F. G. H. Molares anteriores.

I. K. Poſterior.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE PETROPOLI IN SPECVLA ACADEMICA ANNO 1786 HABITAE.

Auctore

PETRO INOCHODZOW.

Conuent. exhib. d. 4 Octobr. 1787.

Quas poſt reditum ab expeditione obſeruationes aſtronomicas facere mihi licuit, eas breuiter exponere conſtitui. Primo loco occurrit in diario meo tranſitus Mercurii per diſcum Solis die $\frac{23\ \textit{Aprilis}}{4\ \textit{Maii}}$ tempore ciuili obſeruatus, deinde ſequuntur nonnullae immerſiones ſatellitum Iouis: his adieci obſeruationem Eclipſis Solis die $\frac{4}{15}$ Iunii anni currentis.

Mercurius omnium ſyſtematis noſtri planetarum minimus et proximus Soli, in cuius radiis continue fere deliteſcens nonniſi raro ſub diluculum aut crepuſculum et plerumque in vaporibus horizontis conſpiciendum ſe praebet, vnde tritum ſermone prouerbium felix Aſtronomus qui Mercurium vidit. Magnum ſane temporis interuallum praeterlapſum, donec primum pro planeta agnoſceretur, et plura ſecula requirebantur

 ad

ad exactam motus eius cognitionem, vt occursus ipsius cum Sole praedici possent. Ante telescopiorum inuentionem theoriam huius planetae mancam et imperfectam fuisse facile patet; imo nouissimae ac meliores motuum eius tabulae nonnullis adhuc defectibus laborant, quod ipsa haec obseruatio satis superque testatur: nam ingressus planetae in solem et egressus plus quam tribus quadrantibus horae a calculis Astronomicis dissentiunt; nec mirum est, quia hucusque paucas eas que incompletas obseruationes transitus Mercurii circa nodum eius descendentem et prope Aphelium versantis, Vraniae cultoribus instituere licuit. Hinc elementa motuum eius indigent correctione, quae ex obseruationibus vltimi huius transitus obtineri potest. Vtinam nostra huic negotio, aliquid vtilitatis conferat.

Tempestas obseruationi admodum fauebat, nisi excipias vndulationem limbi solaris, quae praesertim circa introitum notabilis erat. Motum penduli, ad quod momenta signata sunt, per altitudines solis correspondentes diebus 3, 4, 5 et 6 Maii captas bene exploratum habui; atque tam ingressum quam egressum planetae telescopio Schorti catoptrico $2\frac{1}{2}$ pedum obseruaui. Illucescente die obseruationis limbus Solis superior ad horizontem appulit - - - - - - $3^h. 53'$.
Totus discus apparuit - - - - - - - - 3. 58.

Principalia momenta memorabilis huius phaenomeni sequentem in modum a me notata sunt.

In Ingressu.	Temp. vero.		
Contactus primus siue externus - -	$5^h.$	$0'.$	$6''$
Contactus secundus seu internus - -	5.	3.	13
Vnde centrum Mercurii in limbo Solis -	5.	1.	$39\frac{1}{2}$

In

In Egreſſu.	Temp. vero.
Contactus tertius ſiue interior - -	$10^h. 27'. 12''$
Contactus quartus ſiue exterior - -	10. 30. 15
Adeoque centrum planetae in limbo Solis -	10. 28. $43\frac{1}{2}$
Hinc duratio totius phaenomeni - -	5. 30. 9
Et centri planetae in ſole viſi - -	5. 27. 4
Medium tranſitus ex primo et quarto cont. -	7. 45. $10\frac{1}{2}$
Idem ex ſecundo et tertio cont. - -	7. 45. $12\frac{1}{2}$.

Durante tranſitu obſeruaui appulſus limborum Solis et Mercurii ad fila quadrantis micrometrica horizontale et verticale; verum ob craſſitiem horum filorum et vndulationem aëris, praeciſionem vnius ſcrupuli ſecundi temporis, adeoque 15 ſecundorum circuli, vix ipſis ineſſe ingenue fateor, illisque referendis ſuperſedeo; quum multo tutius diſtantiae a celeberrimo Domino *Rumovski* micrometro obiectiuo menſuratae et rigoroſe iam ſupputatae ſunt. Progredior nunc ad Eclipſes ſatellitum Iouis:

$\frac{23 \text{ Iulii}}{3 \text{ Aug.}}$ Immerſio ſecundi ſatellitis

Lumen ſatellitis imminutum - -	$11^h. 25'. 50''$
Difficulter iam conſpicitur - -	11. 26. 21
Immerſio certa - - - -	11. 26. 30.

Coelo ſereno, faſciis ſatis conſpicuis. Emerſionem eiusdem ſatellitis videre non potui, quamuis Iupiter bene terminatus et reliqui tres ſatellites diſtincte apparebant.

$\frac{23 \text{ Iulii}}{3 \text{ Aug.}}$ Immerſionem primi ſatellitis ob nubes diſperſas exacte obſeruare non licuit, ſatellitem vidi ad - $12^h. 3'. 14''$ quo momento nube tectus, propulſa illa 12. 8. 0 Satelles iam Immerſus erat.

$\frac{1}{12}$ Aug.

$\frac{1}{12}$ Aug. Immerſio primi ſatellitis. Lumen ſatellitis debelitatum - - - - - - - - $14^h. 0'. 0''$
Immergi videtur - - - - - 14. 0. 55
Immerſio certa - - - - - - 14. 0. 59
Aere poſt pluuiam vaporoſo, faſciae dubie videbantur.

$\frac{10}{21}$ Aug. Immerſio primi ſatellitis - - $10^h. 24'. 25''$
Ioue in vaporibus horizontis verſante ſatellites minus diſtincte conſpiciebantur. Obſeruatio dubia.

$\frac{17}{28}$ Aug. Immerſio primi ſatellitis: decrementum luminis ſenſibile - - - - - - $12^h. 19'. 30''$
Satelles vix iam videtur - - 20. 17
Immerſio certa - - - - - - 20. 22
Coelo ſereno et pacato Ioue bene terminato et faſciis conſpicuis.

$\frac{22 \text{ Aug.}}{2 \text{ Sept.}}$ Immerſio tertii ſatellitis - - - - $11^h. 28'. 40''$
Coelo vaporoſo. Emerſionem eiusdem ob nebulam obſeruare non potui.

$\frac{24 \text{ Aug.}}{4 \text{ Sept.}}$ Immerſio ſecundi ſatellitis coelo ſereno - $11^h. 19'. 48''$
Eodem Immerſio primi ſatellitis intra hiatus nubium - - - - - - - - 14. 16. 15

$\frac{28 \text{ Aug.}}{8 \text{ Sept.}}$ Occultatio λ ♓ a Luna - - - - 11. 39. 29
In reductione temporis veri vltimae obſeruationis adeſt dubium 5 v. 6 ſecundorum, quia in motum horologii ob dies nubilos inquirere non licuit.

Eclipſin Lunae die $\frac{23 \text{ Dec.}}{3 \text{ Ian.}}$ nubila coeli facies obſeruare impediuit.

His

His paucis adiungo obſeruationem Eclipſeos Solis die $\frac{4}{15}$ Iunii 1787 factam.

Diebus eclipſin hanc praecedentibus $\frac{1}{12}$, 2, 3 et $\frac{4}{15}$ examinaui motum penduli per altitudines correſpondentes, eumque vniformem reperi.

Initium eclipſis iam coepit - - -	$5^h. 56'. 25''$
Idem aeſtimatum - - - -	5. 56. 20.

Diſcus Solis abundabat maculis, quas in appoſita tabula IV. fig. 5. videre licet.

Omnes hae maculae Luna tectae, earum Immerſiones et Emerſiones ita a me obſeruatae ſunt.

Immerſiones.	Temp. vero.
Limbus Lunae tangit maculam *c* - -	$6^h. 24'. 21''$
totam texit - - -	24. 34
Macula *h* tegitur - - - - -	26. 34
—— *f* - - - - - - -	26. 43
—— *e* - - - - - - -	32. 24
—— *d* - - - - - - -	33. 26
Margo maculae *a* - - - - -	34. 44
Nucleus eiusdem - - - - -	35. 24
Totus Nucleus - - - - - -	36. 37
Macula *k* - - - - - - -	37. 2
—— *i* - - - - - - -	38. 46
Margo maculae *b* - - - - -	41. 26
Tota macula *b* - - - - - -	42. 8.

Emer-

Emersiones.	Temp. vero.
Macula *a* tota (per tubum quadrantis) - -	$6^h. 54'. 25''$
—— *i* per telescopium - - -	7. 2. 55
—— *b* tota - - - - - -	8. 11
—— *c* —— - - - - - -	17. 20
—— *e* —— - - - - - -	23. 37
—— *d* —— - - - - - -	25. 42
Finis eclipseos - - - - -	7. 36. 3
Duratio eclipsis - - - - -	1. 39. 43
Medium —— - - - - -	6. 46. $11\frac{1}{2}$.

Gradus Thermometri paulo ante eclipsin + 17.
in maxima obscurat. + 15.
post eclipsin - + 16.

DE

DE MOMENTO CONIVNCTIONIS MERCVRII CVM SOLE NEC NON LATITVDINE ILLIVS TEMPORE TRANSITVS PER DISCVM SOLIS ANNO 1786

Auctore
STEPHANO RUMOVSKY.

Conuent. exhib. d. 18 *Octobr.* 1787.

§. 1.

Quae hucusque ad notitiam meam peruenere momenta, a diuersis Astronomis pro coniunctione Mercurii cum Sole prolata, tantopere interse dissentiunt, vt vix dici possit cuinam determinationi maior fides sit habenda. In Notitia temporum pro anno 1789 Parisiis edita momentum coniunctionis ad meridianum Parisinum iuxta computum Cel. *de Lambre* statuitur $17^{h.}\ 10'.\ 7''$, Tabularum Cel. *de la Lande* error in Longitudinem $2'\frac{2}{3}$. de errore autem in Latitudinem nulla fit mentio. In actis Academiae Regiae Stockholmiensis Cel. *Prosperin* pro tempore coniunctionis elicit eiusmodi momentum, quod cum momento ex obseruatione Petropolitana deducto optime consentit sc. $17^{h.}\ 22'.\ 4''$. t. v. Suspicior equidem in momento a Dno. *de Lambre* assignato rationem habitam esse aberrationis, verum applicata etiamnum aberratione momento coniunctionis Vpsaliensi vel Petropolitano differet illud a Parisino 5 circiter minutis primis. Quamobrem non ingratum Aſtronomiae cultoribus facturum me exiſtimo, ſi originem huius discrepantiae et tandem vocatis in ſubſidium non nullis in aliis locis inſtitutis obſeruationibus verum momentum coniunctionis apparentis Mercurii cum Sole demonſtrauero.

§. 2. Quanquam diameter Mercurii in calculis meis de tranſitu Mercurii per diſcum Solis anno praeterito Academiae Scientiarum traditis tanta fuerit adhibita, quanta ſequitur ex immediatis obſeruationibus nempe $8''$, 2 et in quantitate illius parum a vero aberraſſe me exiſtimem, attamen quia modus, quo nunc momentum coniunctionis indagaturus ſum, non parum pendet a quantitate diametri Mercurii, conſultum eſſe iudicaui ante omnia ex mora Mercurii in limbo Solis diuerſis in locis obſeruata ſtabilire illius diametrum. Hunc in finem conſpectui hic exhibeo non nullas obſeruationes, quae ad notitiam meam peruenire. Anno 1786 die $\frac{22\ \text{Apr.}}{3\ \text{Maii}}$ temp. Aſtr. ver.

	Cont. intern in exitu	Cont. extern. in exitu	Mora.
Londini - - - - -	$20^h.26'.51'',3$	$20^h.29'.51'',3$	$3'.\ 0''$
Pariſiis - - - - -	20. 36. 28,3	20. 39. 57,7	3. 29,4
Manheimiae - - - -	21. 0. 21	21. 4. 13	3. 52
Lundae - - - - -	21. 18. 47,8	21. 22. 47,8	4. 0
Vpſaliae - - - - -	21. 36. 39,5	21. 41. 40,5	5. 1
Excluſis *Godolini* interno et *Nicandri* externo Stockholmiae - -	21. 38. 18	21. 41. 48	3. 21
Sumto medio Petropoli	22. 27. 5	22. 30. 25	3. 20

Mora

Mora Vpſaliae obſeruata differt ab omnibus reliquis, id circo conſentiente Cel. *Proſperino*, qui in momento contactus externi loco 41′ legenda eſſe 40′ exiſtimat, moram Vpſaliae obſeruatam 4′. 1″. ſupponemus.

§. 3. Vt ex mora Mercurii in limbo Solis obſeruata diameter illius determinetur, cognita debet eſſe inclinatio orbitae relatiuae ad Eclipticam, nec non minima tempore tranſitus centrorum diſtantia. Primum horum elementorum ſtatuo 10°. 18′. 30″. tale nempe, quale requirunt motus horarii e Tabulis Cel. *de la Lande* deducti ſc. motus horarius Mercurii a Sole 3′. 57″,53 in Longitudinem, et 43″,21 in Latitudinem. Quod ſpectat minimam centrorum Solis et Mercurii diſtantiam eam iure 9′. 32″. vt veram vel ſaltem vero proximam aſſumere me poſſe exiſtimo; tantam etenim praebuit immediata obſeruatio circa tempus medii tranſitus a me inſtituta. Aſſumtis his elementis pro ſemidiametro Mercurii ſequentes obtinui valores

Semidiameter ☿ ex mora	Londini	obſeruata		4″, 14
	Pariſiis	-	-	4, 82
	Manheimiae		-	5. 34
	Lundae	-	-	5, 52
	Vpſaliae	-	-	5, 54
	Stockholmiae		-	4, 62
	Petropoli	-	-	4, 60
	Medium	-	-	4, 77.

Niſi igitur alterutram obſeruationem reliquis praeferre velimus, maxime probabile videtur ſemidiametrum Mercurii in Sole viſi non maiorem 4″, 77 ſtatui debere.

§. 4. Vt iam ex contactu interno in exitu obſeruato eruerem momentum coniunctionis, poſita parallaxi Solis 8″, 5 et parallaxi

laxi Mercurii a Sole 6″, 8 computaui pro locis ſupra memoratis parallaxes Mercurii in Longitudinem et in Latitudinem, ac obtinui

Cont. internus in exitu.		Parall. Long.	Latit. ☿ Bor.	Parall. Latit.	Diff. Long. apparens.
Londini	20ʰ.26′.51″	+ 1″,90	8′.59″,6	5″,21	783″,02
Pariſiis	20. 36. 28	+ 2, 06	8. 59,6	4, 97	782, 86
Manheim	21. 0. 21	+ 2, 08	9. 0, 1	4, 54	782, 23
Lundae	21. 18. 47	+ 0, 97	9. 0, 5	5, 10	782, 33
Pragae	21. 23. 53	+ 1, 39	9. 0, 5	4, 72	782, 08
Vpſaliae	21. 36. 39	+ 0, 43	9. 0, 4	5, 24	782, 50
Stockh.	21. 38. 18	+ 0, 45	9. 0, 4	5, 20	782, 47
Petropol.	22. 27. 5	— 0, 16	9. 0, 6	4, 96	782, 04

§. 5. Quoniam parallaxis Solis in computo adhibita nulla eget correctione, vt in eruendo momento coniunctionis reliquarum correctionum ratio habeatur, ponamus correctionem differentiae ſemidiametrorum Solis et Mercurii δ, Latitudinis vero Mercurii y, atque pro momentis coniunctionum ex contactu interno in exitu ſequentes prodibunt expreſſiones

ex Londinenſi	17ʰ. 8′. 35″	$-18,40\,\delta + 10,43\,y$.
Pariſino	17. 18. 12	$-18,40\,\delta + 10,43\,y$.
Manheim	17. 42. 14	$-18,41\,\delta + 10,44\,y$.
Lundenſi	18. 0. 55	$-18,41\,\delta + 10,45\,y$.
Pragenſi	18. 5. 58	$-18,41\,\delta + 10,44\,y$.
Vpſalienſi	18. 18. 53	$-18,40\,\delta + 10,43\,y$.
Stockholm.	18. 20. 32	$-18,40\,\delta + 10,44\,y$.
Petropolit.	19. 9. 34	$-18,41\,\delta + 10,45\,y$.

Per-

§. 6. Perpendenti has expreſſiones facile patet differentias meridianorum hinc oriundas nullam ſubituras mutationes, quantaecunque ſint correctiones δ et y, dummodo contactus recte ſint obſeruati; momenta vero coniunctionum neglectis his correctionibus proditura eſſe non parum erronea. Cum igitur ſemidiameter Solis in computo adhibita $15'. 52'', 1$ certiſſimis fundata ſit obſeruationibus, valor ipſius δ pendebit tantum a ſemidiametro Mercurii, quam ſupra probauimus non vltra $4'', 77$ adſcendere poſſe, et cum ſemidiameter Mercurii a nobis adhibita fuerit $4'', 1$ maxima correctio, quam differentia ſemidiametrorum recipere poteſt, erit $= - 0'', 67$, vnde momenta coniunctionum non niſi $12''$ prorogabuntur. Aliter vero res ſe habet cum correctione Latitudinis Mercurii y, cum illa ad plura minuta ſecunda adſcendere queat. Deficientibus igitur aliis obſeruationibus pro definiendo valore ipſius y ad obſeruationem Petropolitanam erit confugiendum, vbi cum pro contactu interno in introitu $17^h. 2'. 19''$ parallaxis in Longitudinem ſit $+ 1'', 38$ Latitudo Mercurii $12'. 54'', 5$ et parallaxis in Latitudinem $6'', 60$ habebitur momentum coniunctionis

ex introitu $19^h. 22'. 23'' + 25, 88\,\delta - 20, 98\,y$. Eſt autem
ex exitu $19.\ 9.\ 34\ - 18, 41\,\delta + 10, 45\,y$

vnde pro definiendo valore ipſius y obtinemus ſequentem aequationem

$$12'. 49'' + 44, 29\,\delta - 31, 43\,y = 0,$$

quae poſito $\delta = 0$ dat $y = 24'', 5$ poſito vero $\delta = - 0'', 67$ praebet $y = 23'', 5$ prorſus fere idem, quod in Diſſertatione de tranſitu Mercurii per Solem Academiae Scientiarum exhibita, ex diſtantiis limborum micrometro captis elicueram: atque hinc perſpicuum ſit, momentum coniunctionis vltra 4 minuta prima proditurum eſſe erroneum, ſi non habeatur reſpectus ad correctionem Latitudinis, quam omnes neglexiſſe videntur

tur, qui ex contactu ſolum interno tempus coniunctionis apperentis eruendum ſibi propoſuerant. Ponamus igitur $\delta = - 0'', 5$ et $y = 23''$: ac momenta coniunctionum ſequentia obtinebuntur

Ex contactu interno	Pariſino	17^h.	$22'$.	$21''$
	Londinenſi	17.	12.	43
	Manheim.	17.	46.	23
	Lundenſi	18.	5.	4
	Pragenſi	18.	10.	7
	Vpſalienſi	18.	23.	2
	Stockholm.	18.	24.	41
	Petropolit. I.	19.	14.	8
	- - - II.	19.	13.	43

§. 7. Praeter has, quas retuli, ad calculum reuocaui non nullas alias obſeruationes, verum eas ſilentio praetereo, quia illae manifeſto errori cuidam obnoxiae eſſe videntur. Quodſi momenta ſupra relata per cognitas differentias meridianorum reducantur ad meridianum Pariſinum, prodibit momentum coniunctionis

					Diff. mer.			
ex obſeruatione	Pariſina	17^h.	$22'$.	$21''$				
	Londinenſi	17.	22.	21	0^h.	$9'$.	$38''$	occ.
	Manheim	17.	21.	40	0.	24.	43	or.
	Lundenſi	17.	21.	38	0.	43.	26	
	Pragenſi	17.	21.	47	0.	48.	20	*)
	Vpſalienſi	17.	21.	48	1.	1.	14	
	Stockholm.	17.	21.	46	1.	2.	55	
	Petropol. I.	17.	22.	10	1.	51.	58	
	- - - II.	17.	21.	45				

Con-

*) Longitudo Pragae deſumta eſt ex Ephemeridibus Aſtronomicis ad meridianum Windobonenſem Viennae editis, in Notitia temporum ſtatuitur illa 48′. 58″. quae mihi peccare videtur in exceſſu.

§. 8. Conferenti determinationes has facile patet momenta coniunctionis ex obſeruationibus Manheimiae, Lundae, Pragae, Vpſaliae, Stockholmiae et Petropoli habitis deducta optime inter ſe conſentire, cum contra momentum coniunctionis ex obſeruatione Pariſina et Londinenſi elicitum differat ab omnibus ſupra dictis plus quam 30″. Non meum eſt rationem reddere huius discrepantiae; interim tamen veroſimile videtur originem illius in ipſis obſeruationibus eſſe quaerendam. Nam computatis pro quouis ſupra memoratorum locorum effectibus parallaxeos, et contactibus internis in exitu obſeruatis ad centrum reductis Longitudines reſpectiuae Manheimiae, Lundae, Vpſaliae, Stockholmiae et Petropolis prodeunt cum Longitudinibus aliunde cognitis optime conſentientes; collatis vero iisdem cum obſeruationibus Pariſiis et Londini habitis in Longitudinibus inde reſultantibus idem fere diſcrimen deprehenditur ac in momentis coniunctionum ad meridianum Pariſinum reductis, prout patet ex ſequenti laterculo.

Contact. intern. in exitu t. v.		Effectus Parall.	Contact. ad centr. reduct.	Longit. reſultans	Diff. a vera
Pariſiis	$20^h.36'.28''$	$-1'.35''$	$20^h.34'.53''$		
Londini	20. 26. 51	− 1. 32	20. 25. 19	$0^h.\ 9'.34''$	
Manheim	21. 0. 21	− 1. 23	20. 58. 59	0. 24. 6	37″
Lunda	21. 18. 47	− 1. 17	21. 17. 30	0. 42. 37	+9
Pragae	21. 23. 53	− 1. 20	21. 22. 33	0. 47. 42	+8
Vpſaliae	21. 36. 39	− 1. 10	21. 35. 27	1. 0. 34	+0
Stockh.	21. 38. 18	− 1. 10	21. 37. 8	1. 2. 15	+0
Petropoli	22. 27. 5	− 55	22. 26. 17	1. 51. 17	+2

§. 9. His rationibus inducor, vt credam propius me ad veritatem acceſſurum, ſi excluſis determinationibus ab obſeruatione

tione Parisina et Londinensi petitis, medium sumsero e reliquis, ac tempus verum coniunctionis apparentis $17^h. 21'. 45''$ supposuero, pro quo cum Longitudo Solis ex tabulis Cel. *de la Lande* sit $1^s. 13°. 50'. 2'',3$ Longitudo Mercurii Heliocentrica $7^s. 13°. 53'. 48''$, Geocentrica vero $1^s. 13°. 46'. 47''$ sequitur hinc Tabulas Cel. *de la Lande* aberrare in Longitudinem in defectu $3'. 15'',3$ et in Latitudinem $23''$ quam proxime, sic vt Latitudo Mercurii tempore coniunctionis statui debeat $11'. 42'',6$. Quodsi ratio habeatur obseruationis Parisiensis et Londinensis prodibit momentum coniunctionis parum abludens a supra inuento sc. $17^h. 21'. 55''$ positionibus Solis et Mercurii iisdem fere manentibus.

Constituto hoc modo momento coniunctionis apparentis facile erit eidem applicare, si cui libuerit, correctionem ab aberratione oriundam.

DE

DE

TRANSITV MERCVRII PER SOLEM

ANNO 1786 DIE $\frac{23}{4}$ $\frac{\text{April}}{\text{Maii}}$.

BAGDATI OBSERVATO.

Auctore

STEPHANO RUMOVSKY.

Conuent. exhib. d. 22 Nouembr. 1787.

§. 1.

Post praelectam demum coram Academia Scientiarum dissertationem de momento coniunctionis Mercurii cum Sole ad manus meas peruenit obseruatio transitus Mercurii per Solem Bagdati habita. Obseruatio ista omnibus Europaeis praetiosior est, et quod introitum spectat palmam praeripere videtur obseruationi Petropolitanae; nam momento contactus interni in introitu Bagdati altitudo Solis fuit 8°. 45′ circiter, in qua refractio certitudinem obseruationum infringere cessat, cum contra Petropoli Sol non nisi ad 6°. 50′ fuerit eleuatus. Igitur simulac compos factus sum huius obseruationis, reuocaui eam ad calculum, quem eo lubentius Academiae Scientiarum exhibeo, quod obseruatio Bagdati instituta egregie confirmet consectaria ex obseruatione Petropolitana elicita.

§. 2. Obseruatio Bagdati instituta ita se habet:

Contactus internus in introitu	18^h.	0′.	5″
- - - internus in exitu	23.	22.	52
- - - externus in exitu	23.	26.	48.

§. 3.

§. 3. In Notitia temporum ad annum 1788 Latitudo Bagdati statuitur $33°. 21'\frac{3}{4}$ Bor. Longitudo vero a meridiano Parisino versus ortum numerata $2^h. 48'. 18''$. Assumtis igitur iisdem Elementis, quibus in dissertatione praecedente vsus sum, nempe pro $17^h. 18'. 40''$. t. m. Parisini Longitudine Solis $1^s. 13°. 50'. 3'',3$, Longitudine Mercurii Geocentrica $1^s. 13°. 46'. 46'',5$, Latitudine $11'. 19'',6$, motu horario Mercurii a Sole in Longitudinem $3'. 57'',53$ et $43'',21$ in Latitudinem, parallaxi Solis horizontali $8'',5$, parallaxi Mercurii a Sole $6'',8$, $\frac{1}{2}$ Diametro Solis $15'. 52'',1$, $\frac{1}{2}$ Diametro Mercurii $4'',1$ pro contactu interno in introitu reperi Longitudinem Mercurii augeri $4'',34$ Latitudinem vero imminui $5'',12$, atque denotante δ correctionem differentiae semidiametrorum Solis et Mercurii, y vero Latitudini Mercurii inducendam pro momento coniunctionis sequentem obtinui expressionem

$$20^h. 19'. 14'' + 25,87\,\delta - 20.98\,y.$$

Pari modo ex contactu interno in exitu, computata parallaxi Mercurii in Longitudinem $+ 0'',23$ et in Latitudinem $- 2'',21$ pro momento coniunctionis sequens obtinetur expressio

$$20^h. \quad 5'. \; 27'' - 18,40\,\delta + 10,44\,y.$$

$$\text{Vnde} \qquad 13. \; 37 + 44,27\,\delta - 31,42\,y = 0.$$

§. 4. Hinc patet valores in praecedenti dissertatione pro y et δ assignatos non prorsus satisfacere aequationi ex obseruatione Bagdatensi erutae, et exiguam aberrationem in valoribus ipsorum δ et y producere non spernendam in momento coniunctionis mutationem. Vt propius ad veritatem accederem ex praecedentibus disquisitionibus aucta Latitudine Mercurii $23''$ et differentia semidiametrorum Solis et Mercurii imminuta $0'',5$ computaui denuo momenta coniunctionum ex contactibus internis Bagdati obseruatis, prodiitque momentum coniunctionis

ex

ex introitu	$20^h. 10'. 50'' + 27,56\,\delta - 23,02\,y$	
ex exitu	$20. 10. 5 - 18,82\,\delta + 11,16\,y$	
Hinc	$45 + 46,38\,\delta - 34,18\,y = 0.$	

§. 5. Eodem modo reuocando ad calculum obseruationem Petropolitanum vidi momentum contactus interni in introitu Cel. *Inochodzoff* melius ac meum consentire cum obseruatione Bagdatensi. Assumto igitur Petropoli pro contactu interno in introitu $17^h. 3'. 13''$ et pro contactu interno in exitu medio ex tribus obseruationibus $22^h. 27'. 5''$ pro momento coniunctionis sequentes resultabunt expressiones

ex introitu	$19^h. 14'. 53'' + 27,58\,\delta - 23,05\,y$	
ex exitu	$19. 13. 49 - 18,78\,\delta + 11,08\,y$	
Vnde	$64 + 46,36\,\delta - 34,13\,y = 0.$	

§. 6. Collatis inter se his aequationibus patet eas non differre inter se nisi numeris absolutis, et cum ex vtraque iidem valores pro δ et y prodire debeant, necesse est vel Bagdatensem aberrare in defectu vel Petropolitanam in excessu $19''$. Cum vero coelum magis fauerit pro introitu Bagdati quam Petropoli, errorem hunc in Petropolitanam potius reiiciendum esse existimo. Quo posito, ac momento contactus interni in introitu statuto $17^h. 2'. 54''$ obseruatio Petropolitana ad egregium consensum cum Bagdatensi reuocabitur, et pro definiendo valore ipsorum δ et y sequens habebitur aequatio.

$$45'' + 46,37\,\delta - 34,15\,y = 0.$$

Cui posito $\delta = -0'',2$ satisfacit $y = 1'',4$, posito vero $\delta = -0'',4$ prodit $y = 0'',7$.

§. 7. Valores modo inuenti eatenus locum habere censendi sunt, quatenus momenta contactuum internorum Bagdati

 obser-

obſeruatorum omnibus numeris exacta ſupponuntur, id circo ſine metu erroris in ſuperioribus expreſſionibus ponere licebit $\delta = -0'',4$ et $y = 0'',5$ vt ſemidiameter Mercurii ſit $= 5''$, quod etiam non nullae obſeruationes indicare videntur, et tota Latitudinis correctio $+ 23'',5$, ac obtinebitur momentum coniunctionis

			Differ. merid.
Bagdati	ex introitu	$20^h. 10'. 16''$	
	ex exitu	20. 10. 18	
Petropoli	ex introitu	19. 14. 0	$0^h. 56'. 16''$
	ex exitu	19. 14. 2	0. 56. 16

et Longitudo Bagdati a meridiano Pariſino numerata $2^h. 48'. 14''$ quatuor tantum minutis ſecundis diuerſa ab ea, quae in Notitia temporum ſupponitur.

§. 8. Pari modo applicata primum correctione Latitudini $+ 23''$, et differentiae ſemidiametrorum $- 0'',5$ computaui momenta coniunctionum ex obſeruationibus in diſſertatione praecedente relatis, ac obtinui ex contactu interno in exitu

Londinenſi	$17^h. 12'. 49''$	$- 18,74\,\delta + 11,02\,y$
Pariſino	17. 22. 28	- - - -
Manheim	17. 46. 33	- - - -
Lundenſi	18. 5. 11	vt ſupra
Pragenſi	18. 10. 15	- - - -
Vpſalienſi	18. 23. 9	- - - -
Stockholm.	18. 24. 47	$- 17,74\,\delta + 11,02\,y.$

In his demum expreſſionibus ſtatuendo $\delta = - 0'',4$ et $y = + 0'',5$ habebitur momentum coniunctionis cuilibet obſeruationi conueniens

Contact.

Contact. internus in exitu.		Momentum coniunct.	ad mer. Parif. reductum.
Londini	$20^h. 26'. 51''$	$17^h. 13'. 2''$	$17^h. 22'. 40''$
Parifiis	20. 36. 28	17. 22. 41	
Manheim.	21. 0. 21	17. 46. 46	17. 22. 0
Lundae	21. 18. 47	18. 5. 24	17. 21. 58
Pragae	21. 23. 53	18. 10. 28	17. 22. 8
Vpfaliae	21. 36. 39	18. 23. 22	17. 22. 8
Stockholm.	21. 38. 18	18. 25. 0	17. 22. 5
Petropoli	22. 27. 5	19. 14. 2	17. 22. 4
Bagdati	23. 22. 52	20. 10. 18	17. 22. 0

§. 9. Pro confirmando confenfu obferuationis Bagdatenfis cum Petropolitana computaui effectus parallacticos pro introitu aeque ac pro exitu, pro Bagdato illum reperi $+ 14''$ hunc vero $- 32''$; pro contactu autem interno Petropolitano in introitu inueni nunc $+ 1'. 42''$ et in exitu $- 1'. 0''$. Vnde momenta contactuum ad centrum telluris reducta prodibunt fequentia

	Cont. intern. I.	ad Centr. reduct.	Cont. intern. II.	ad Centr. reduct.	Mora.
Bagdatum	$18^h. 0'. 5''$	$18^h. 0'. 46''$	$23^h. 22'. 52''$	$23^h. 22'. 20''$	$5^h. 21'. 36''$
Petropoli	17. 2. 54	17. 4. 36	22. 27. 5	22. 26. 5	5. 21. 29
Differ. meridian.		0. 56. 10		0. 56. 15	

§. 10. Cum viderem ob variatam Latitudinem Mercurii pro Petropoli effectus parallacticos nonnihil immutari, e re effe iudicaui pro reliquis locis eosdem computare adhibitis

 Lati-

Latitudini Mercurii et differentiae ſemidiametrorum ſupra relatis correctionibus; calculo peracto contactus interni in exitu ad centrum reuocati atque ad meridianum Pariſinum reducti ſequentes prodiere.

	Cent. intern. in introitu	Effect. Parall.	Cont. ad Centr. reuoc.	ad mer. Paris. reductus
Londinum	$20^h.26'.51''$	$-1'.36''$	$20^h.25'.15''$	$20^h.34'.53''$
Lutet. Pariſ.	20. 36. 28	— 1. 39	20. 34. 47	
Manheimia	21. 0. 21	— 1. 34	20. 58. 47	20. 34. 13
Lunda	21. 18. 47	— 1. 18	21. 17. 29	20. 34. 3
Praga	21. 23. 53	— 1. 20	21. 22. 33	20. 34. 13
Vpſalia	21. 36. 39	— 1. 11	21. 35. 28	20. 34. 14
Stockholm.	21. 38. 18,4	— 1. 10,6	21. 37. 8	20. 34. 13
Petropolis	22. 27. 5	— 1. 0	22. 26. 5	20. 34. 7
Bagdatum	23. 22. 52	— 32	23. 22. 20	20. 34. 6

Tali ratione diſſenſus obſeruationum Londinenſis et praeſertim Pariſinae a reliquis a me recenſitis diminuitur quidem, ſed non penitus tollitur; videant alii qua ratione obſeruationes iſtae ad conſenſum cum reliquis reuocari queant, mihi ſatis erit per obſeruationes ſupra relatas euiciſſe momentum coniunctionis apparentis ad meridianum Pariſinum ſtatui debere $17^h. 22'. 4''$, t. v. ſiue $17^h. 18'. 36''$. t. m. Hinc ſequitur Longitudinem Mercurii Geocentricam fuiſſe $1^s. 13°. 50'. 3'',3$ et Longitudini Mercurii e Tabilis Cel. *de la Lande* deductae applicandam eſſe correctionem $+ 3'. 16'',7$ Latitudinem vero $+ 23'',5$ poſita ſemidiametro Mercurii $5''$, quae, ſi ad diſtantiam mediam Mercurii a Sole reducatur, prodibit $7'',2$.

OB-

OBSERVATIO
ECLIPSIS SOLIS
ANNO 1787. DIE $\frac{4}{15}$ IVNII HABITA IN OBSERVATORIO PETROPOLITANO.

Auctore

STEPHANO RUMOVSKI.

Conuent. exhib. d. 22 Nou. 1787.

Die $\frac{28 \text{ Maii}}{8 \text{ Iun.}}$	Merid. ver. ex alt. Solis Corresp.	$22^h. 54'. 14'',4$
$\frac{31 \text{ Maii}}{11 \text{ Iun.}}$	- - - - - - - -	23. 7. 44, 3
$\frac{4}{15}$ Iunii	- - - - - -	23. 25. 42, 1

	Temp. Horol.	Temp. ver.
Initium Eclipsis - - - - -	$5^h. 22'. 30''$	$5^h. 55'. 36''$
Finis - - - - -	7. 3. 16	7. 36. 3

Durante Eclipsi tubo Achromatico trium pedum, micrometro obiectiuo instructo, eodem nempe, quo vsus sum in transitu Mercurii per discum Solis obseruando, mensuraui non nullas partes lucidas Solis, quas dum ipsam Eclipsin ad calculum reuocauero, conuentui Academico sum exhibiturus.

EX-

EXTRAIT DES OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES FAITES À ST. PÉTERSBOURG. EN L'ANNÉE MDCCLXXXIV.

Suivant le nouveau Stile.

Présenté à l'Académie le 15. Octobre 1787.

La déscription des instrumens, leur exposition, & ma méthode d'observer les variations que les changemens de l'atmosphère y produisent, se trouvent suffisamment expliquées au premier volume de ces nouveaux Actes: je me contenterai donc de répéter que l'échelle du Baromètre est divisée en pouces & centiemes parties de pouce de Paris, & que la graduation de mes Thermomètres à mercure est celle qu'on nomme de Délisle. La chaleur de l'eau bouillante y est marquée par zéro o, & à chaque degré répond en descendant une diminution d'une dix-millieme partie du volume de toute la masse de mercure contenue dans l'instrument, d'où il a été constaté par les

les expériences, que le froid de la congélation de l'eau, ou le o de Réaumur tombe au 150 degré, & celui de la glace pilée, mélée à parties égales avec du ſel amoniac, ou le o de Fahrenheit, entre le 176 & 177 degré: c'eſt à dire que 15 degrés de Délisle font 8 degrés de Réaumur, & 5 degrés de Délisle, 6 de Fahrenheit.

I. Baromètre.

1.) Les hauteurs extrèmes, la variation, le milieu & la hauteur moyenne pour chaque mois de l'année.

Mois.	Au plus haut			Au plus bas			Variat.	Milieu	Hauteur moyenne
	P. cent.	jour,	heure	P. cent.	jour,	heure	cent.	P. cent.	P. mill.
Janvier	28.57	4.	9. s.	27.07	16.	12. s.	150	27.82	27.934
Février	28.73	14.	4. s.	27.25	28.	6. s.	148	27.99	28.127
Mars	28.20	29.	12. s.	27.41	1.	10. s.	79	27.80	27.789
Avril	28.43	29.	9. m.	27.51	25.	9. s.	92	27.97	28.048
Mai	28.43	27.	11. m.	27.38	17.	8. s.	105	27.90	27.997
Juin	28.39	2.	6. m.	27.49	5.	3. m.	90	27.94	27.938
Juillet	28.31	30.	12. m.	27.52	18.	8. s.	79	27.91	27.916
Août	28.52	13.	3. m.	27.60	26.	10. m.	92	28.06	28.035
Sept.	28.38	4.	6. s.	27.52	13.	9. m.	86	27.95	27.988
Octobr.	28.63	4.	6. m.	27.41	17.	6. m.	122	28.02	28.257
Novembr.	28.63	1.	11. s.	27.39	19.	7. m.	124	28.01	28.014
Décembr.	28.53	27.	10. s.	26.78	4.	10. m.	175	27.65	27.912

m. ſignifie *matin* ou *avant-midi*, & s. *ſoir* ou *après-midi*.

2.) Nombre des jours, auxquels la hauteur du Baromètre a surpassé quelques points principaux de l'échelle; avec la hauteur qui répond au demi-mois.

Mois.	Au dessus de										Baromètre, un demi-mois au dessus de	
	27. 80		27. 90		28. 00		28. 10		28. 20			
	jours	h.	jours	h.	jours	h.	jours	h.	jours	h.	Pouces.	cent.
Janvier.	18.	12	16.	3	10.	12	9.	0	8.	12	27.	907
Février	23.	6	21.	0	17.	6	14.	15	12.	18	28.	104
Mars	14.	0	8.	0	4.	0	1.	12	0.	0	27.	780
Avril	24.	0	22.	3	20.	0	15.	3	8.	21	28.	103
Mai	23.	6	19.	6	15.	3	12.	12	9.	0	27.	997
Juin	23.	9	17.	21	11.	15	4.	15	2.	3	27.	960
Juillet	19.	15	16.	9	10.	15	6.	9	3.	21	27.	918
Août	25.	9	23.	15	19.	12	13.	0	6.	9	28.	070
Sept.	23.	6	19.	3	15.	18	12.	6	7.	3	28.	025
Oct.	29.	15	28.	21	25.	6	20.	21	19.	4	28.	290
Nov.	23.	9	19.	6	14.	15	9.	9	8.	0	27.	992
Déc.	21.	18	17.	9	13.	0	9.	18	6.	21	27.	944

La plus grande hauteur du Baromètre a donc été observée en l'année 1784, le 14 Février à 4 heures après-midi de 28. 73. Therm. 170. Ciel entiérement serein, vent doux du NE.

La plus petite hauteur a été de 26. 78 le 4 Décembre à 10 heures avant midi. Therm. 151. Ciel à demi couvert, vent fort du SOu. La riviere charia beaucoup de glaces.

La variation totale 195, ou 1 pouce $\frac{95}{100}$.

Le milieu 27. 755.

La hauteur moyenne 27,996: c'est à dire 27 pouces $\frac{996}{1000}$, ou de $\frac{4}{1000}$ plus petite que 28 pouces.

Le

Le Baromètre a été en cette année
269 jours 9 heures au dessus de 27. 80
229 —— 0 —— au dessus de 27. 90
177 —— 9 —— au dessus de 28. 00
129 —— 6 —— au dessus de 28. 10 &
92 —— 15 —— au dessus de 28. 20 pouces.

Par conséquent la hauteur, au dessus de laquelle le Baromètre a été pendent la demi-année, ou pendant 183 jours, répond à 28. 012, ou à $28 \frac{12}{1000}$ pouces. Cette hauteur est donc de $\frac{16}{1000}$ pouces plus grande que la moyenne.

3.) Variations considérables & subites du Baromètre.

Mois.	Temps jours	heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc. $\frac{1}{100}$	Differ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmosphère.
Janv.	1.	9. m.	45	27. 02	+90	162	SOu.	c. couvert, neige.
	3.	6. m.		28. 52		177	N.	ciel serein.
	9.	12. s.	24	28. 52	−57	168	SOu.	c. couvert.
	10.	12. s.	12	27. 95	−57	165	SOu. ff.	c. couvert, neige.
	11.	12. m.		27. 38		154	SOu. fort.	c. demi-couvert.
	13.	6. m.	24	27. 90	−48	169	Ou.	c. couvert, ensuite neige.
	14.	6. m.		27. 42		155	Ou.	c. couvert & neige.
	14.	12. s.	12	27. 65	−56	157	Ou. fort.	c. couvert, ensuite neige.
	15.	12. m.		27. 09		149	Ou.	c. couvert.
	16.	12. s.	24	27. 07	+42	152	SOu.	c. couvert, neige.
	17.	12. s.		27. 49		155	S.	ciel couvert.
	19.	12. m.	36	27. 51	+46	148	S.	c. couvert, neige & pluie.
	20.	6. s.		27. 97		165	S. E.	ciel couvert.
Févr.	11.	9. m.	39	27. 73	+70	156	E. fort	ciel demi-couvert.
	12.	12. s.		28. 43		160	E.	ciel couvert.
	27.	3. m.	39	28. 00	−75	159	N. calme	c. demi-couvert.
	28.	6. s.		27. 25		160	S. fort.	c. couvert & neige.

Mois.	Temps jours	heure.	Diff. heur	Baromètr. Pouc.	$\frac{1}{100}$	Differ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmosphère.
Mars.	19.	12. s.	30	28.	00	—47	170	SE.	c. demi-couvert.
	21.	6. m.		27.	53		156	Ou.	c. couv. neige.
	26.	12. s.	30	27.	92	—46	180	E.	c. ferein.
	28.	6. m.	36	27.	46	+74	162	N.	c. couvert, neige.
	29.	6. s.		28.	20		157	NE.	c. ferein.
	30.	6. s.	24	28.	15	—58	156	S.	c. en partie ferein.
	31.	6. s.		27.	57		160	E. fort.	c. couv. beaucoup de neige.
Avril	1.	6. m.	24	27.	55	+47	157	E. calme	c. couv. enfuite neige.
	2.	6. m.		28.	02		157	Ou.	c. couvert.
	21.	10. s.	48	28.	17	—64	144	S.	c. couv. pluie.
	23.	10. s.		27.	53		139	S. fort.	c. demi-couvert, pluie.
	25.	10. s.	26	27.	52	+36	148	S.	c. en partie ferein.
	26.	12. s.	24	27.	88	+32	147	Ou.	c. couv. enfuite ferein.
	27.	12. s.	30	28.	20	+23	149	S. fort.	c. ferein.
	29.	6. m.		28.	43		150	E.	c. ferein.
Mai	9.	6. m.	39	27.	45	+55	148	NOu. fort.	c. en partie ferein.
	10.	9. s.	33	28.	00	+28	154	NE.	c. couvert, neige.
	12.	6. m.		28.	28		154	NOu. fort	c. en partie ferein.
	16.	12. s.	20	28.	01	—63	147	NOu.	c. demi-couvert.
	17.	8. s.	22	27.	38	+32	146	NOu. fort	c. couv. beauc. de pluie.
	18.	6. s.	36	27.	70	+43	144	NOu. fort	c. demi-couv. pluie, neige.
	20.	6. m.		28.	13		150	NOu.	c. ferein.
	20.	12. m.	42	28.	13	—59	138	NOu. fort.	c. demi-couvert.
	22.	6. m.	17	27.	54	+27	142	NOu. ff.	c. couvert, pluie.
	22.	11. s.		27.	81		143	calme.	c. couvert.
	24.	8. s.	15	28.	06	—33	137	NOu.	c. couvert.
	25.	11. m.		27.	73		136	Ou. ff.	c. couv. & beauc. de pluie.

* ff défigne un vent très fort.

Mois

Mois.	Temps jours	heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc.	$\frac{1}{153}$	Différ. $\frac{1}{153}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmosphère.
Mai	25.	12. s.	34	27.	87	+56	138	Ou. ff.	c. demi-couvert.
	27.	10. m.		28.	43		138	NE. fort.	c. demi-couvert.
Juin.	2.	9. m.		28.	38		130	NOu. fort.	c. ferein.
	2.	12. s.	24	28.	27	−47	135	NOu.	c. ferein.
	3.	12. s.		27.	80		136	Ou. fort.	c. demi-couvert, pluie.
	4.	11. m.	16	27.	90	−40	124	E.	c. ferein.
	5.	3. m.	33	27.	50	+47	133	NOu. fort.	c. demi-couvert.
	6.	12. m.		27.	97		135	NOu.	c. couvert.
Août	26.	10. m.	20	27.	60	+43	120	Ou. ff.	c. couv. beaucoup de pluie.
	27.	6. m.		28.	03		130	NE.	c. demi-couvert.
	27.	3. s.	18	28.	03	−41	129	SE. fort.	c. demi-couvert.
	28.	9. m.		27.	62		130	S.	c. couv. beaucoup de pluie.
Sept.	3.	6. m.	30	27.	98	+39	139	N.	c. couv. pluie.
	4.	12. m.		28.	37		134	NOu.	c. ferein.
	11.	12. m.	21	27.	83	−31	136	Ou.	c. demi-couv. enfuite pluie.
	12.	9. m.		27.	52		137	Ou.	c. couv. pluie copieufe.
Oct.	8.	3. m.	24	28.	20	+34	146	N.	c. couvert, pluie.
	9.	3. m.		28.	54		146	Ou.	c. couvert.
	11.	6. m.	42	28.	03	+38	145	Ou.	c. demi-couv. enfuite ferein.
	12.	12. s.	24	28.	41	−38	148	Ou.	c. couvert, enfuite pluie.
	13.	12. s.	21	28.	03	+29	148	NOu.	c. demi-couvert.
	14.	9. s.		28.	32		154	E.	c. ferein, enfuite couvert.
	16.	6. m.	24	28.	05	−64	143	Ou. fort.	c. couvert.
	17.	6. m.	36	27.	41	+69	144	Ou. fort.	c. couv. pl. puis c. demi-couv.
	18.	6. s.		28.	10		151	N.	c. ferein.
Nov.	11.	12. s.	36	28.	00	−53	150	S. ff.	c. couvert.
	13.	12. m.		27.	53		145	S.	pluie & neige, c. couvert.

Mois.	Temps jours	heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc.	$\frac{1}{100}$	Différ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmosphère.
Nov.	15.	3. s.	21	28.	12	—39	149	SOu.	c. demi-couvert.
	16.	12. m.		27.	73		139	NOu. fort.	c. couvert, pluie.
	17.	12. s.	30	27.	98	—59	146	SE.	c. couvert, ensuite pluie.
	19.	6. m.	24	27.	39	+69	147	SOu. ff.	c. demi-couv. pluie cop. neige.
	20.	6. m.		28.	08		149	E.	c. couvert.
	24.	12. m.	45	27.	61	+71	150	S.	c. couvert.
	26.	9. m.		28.	32		160	E.	brouillard, c. demi-couvert.
	28.	6. m.	16	28.	08	—31	148	Ou.	c. couvert, ensuite pluie.
	28.	10. s.		27.	77		145	SOu. fort.	pluie.
	29.	6. s.	15	27.	76	+25	148	N.	c. couv. & neige.
	30.	9. m.		28.	01		155	NOu. calm	c. serein.
Déc.	3.	2. m.	32	27.	68	—90	156	SOu. fort	c. couvert, ensuite neige.
	4.	10. m.	35	26.	78	+59	151	SOu. ff.	c. demi-couv. puis neige.
	5.	9. s.		27.	37		166	calme S.	c. couv. charie des glaces.
	6.	12. m.	28	27.	18	+71	162	variable.	brouillard, neige, aurore bor.
	7.	4. s.		27.	89		168	E.	c. couvert.
	8.	12. m.	24	27.	57	+45	161	E.	brouillard, beauc. de neige.
	9.	12. m.		28.	02		163	E.	c. couvert, ensuite serein.
	10.	3. s.	19	27.	70	+44	150	SE. fort	beaucoup de neige, c. couv.
	11.	10. m.		28.	14		154	S.	c. demi-couvert.
	15.	12. m.	34	27.	76	+46	155	NE.	c. couvert, neige.
	16.	10. s.		28.	22		162	NOu.	c. couv.
	18.	8. s.	40	28.	47	—70	170	calme SOu	brouillard, c. demi-couvert
	20.	12. m.		27.	77		160	SE.	neige, c. couvert.
	21.	4. m.		27.	63		151	S.	c. couvert.

La descente la plus considérable du Baromètre à donc été de $\frac{2}{10}$ pouce en 32 heures, le 3 Décembre: & la montée la plus considérable de $\frac{9}{10}$ pouces en 45 heures, le 1. Janvier.

II. Thermomètre.

1.) Hauteurs extrèmes, leur différence, & état moyen, pour chaque mois de l'année.

Mois.	Hauteurs extremes. Au plus bas Degré.	jour	heure.	Au plus haut. Degré.	jour	heure.	Différence. Degré	Etat moyen. Froid moyen. Degré.	Chaleur moyen. Degré.
Janvier	188	30.	7. m.	147	16.	2. s.	41	166,3	160,1
Février	183	17.	7. m.	150	21.	2. s.	33	170,4	160,4
Mars	183	5.	6. m.	142	8.	2. s.	41	171,7	155,2
Avril	161	10.	6. m.	127	21.	2. s.	34	150,7	136,5
Mai	158	11.	6. m.	122	2.	2. s.	36	146,8	136,6
Juin	146	6.	6. m.	111	23.	2. s.	35	135,2	124,7
Juillet	134	16.	6. m.	103	29.	2. s.	31	126,7	115,2
Août	132	21. 27.	6. m.	109	4. 14.	2. s.	23	126,9	115,9
Sept.	150	30.	6. m.	126	8.	2. s.	24	141,4	133,2
Octobr.	154	12. 14.	6. m. 11. s.	138	20. 29.	2. s.	16	145,7	142,1
Novem.	167	25.	11. s.	139	16.	2. s.	28	152,0	148,9
Décem.	177	28.	7. m.	146	12.	2. s.	31	163,6	157,1

2.) Nom-

2.) Nombre des jours, auxquels le froid & la chaleur ont surpassé quelques divisions principales du Thermomètre de Délisle.

Mois.	Froid plus grand que					Chaleur plus grande que					
	180 jours.	170 jours.	160 jours.	150 jours.	140 jours.	110 jours.	120 jours.	130 jours.	140 jours.	150 jours.	160 jours.
Janv.	2	9	22	31	31					5	14
Févr.	4	14	26	29	29					1	13
Mars	5	17	29	31	31					4	24
Avril			1	15	30			3	22	30	30
Mai				9	28			4	23	30	31
Juin					7		5	25	30	30	30
Juillet						8	21	31	31	31	31
Août						4	24	31	31	31	31
Sept.				1	18			6	23	30	30
Oct.				9	31				4	31	31
Nov.			2	22	30				1	21	30
Déc.		10	20	31	31					4	18
1784.	11	50	100	178	266	12	50	100	165	248	313

Nous tirons de ces deux Tableaux les conclusions suivantes.

Le plus grand froid, qui surpasse ordinairement 200^d. n'a été cette année-ci que de 188^d, ou suivant le Thermomètre de Réaumur de $20\frac{1}{3}$, le 30 Janvier à 7 heures du matin: Baromètre 27, 98, ciel serein, vent d'Ouest.

La plus grande chaleur a été observée de 103^d, ou de 25^d de Réaumur le 29 Juillet à 2 heures après midi: Baromètre 28. 27, ciel serein parsémé de quelques nuages, vent d'Est.

La

La différence entre ces deux extrémités de froid & de chaleur eſt de 85 degrés de Délisle, ou $45\frac{1}{3}$ degrés de Réaumur.

Le froid moyen de toute l'année; c'eſt-à-dire la ſomme de toutes les hauteurs thermomètriques obſervées le matin & le ſoir, diviſée par leur nombre, a été trouvé de $149^d.7$, ou bien de $\frac{3}{15}$ degré moindre que le froid de la congélation de l'eau.

La chaleur moyenne de toute l'année, ou la ſomme de toutes les hauteurs thermomètriques obſervées à 2 h. après midi, diviſée par leur nombre, a été de $140^d.4$, qui répond à une chaleur de $5\frac{1}{10}$ degrés ſelon la graduation de Réaumur.

Séparons encore, comme nous l'avons fait dans nos extraits précédens, les mois d'hyver, Janvier, Février, Mars, Avril, Novembre & Décembre, des mois d'été, Mai, Juin, Juillet, Août, Septembre & Octobre, & nous trouvons pour ceux-là:

le froid moyen $162^d.5$ de Délisle, ou $6\frac{2}{3}$ degrés de Réaumur.

la chaleur moyenne 153^d, de Délisle, qui répond ſuivant Réaumur à un froid d'$1\frac{2}{3}$ degré.

Et pour les ſix mois d'été:

le froid moyen 137^d, qui ſuivant Réaumur répond à une chaleur de $6\frac{5}{6}$ degrés.

la chaleur moyenne 127,9, ou ſuivant Réaumur de $11\frac{2}{3}$ degrés.

Il n'y a eu cette année que 11 jours, où le froid a ſurpaſſé 180^d, 50 jours, où il a été plus grand que de 170^d, 100 jours où il a été plus grand que 160^d, & 178 jours où l'eau a ſimplement gélé.

Enſuite il y a eu 12 jours où il a fait plus chaud que $110^{d.}$, 50 jours où il a fait plus chaud que $120^{d.}$, 100 jours où la chaleur à ſurpaſſé $130^{d.}$, 165 jours où elle a été plus grande que $140^{d.}$, & 248 jours où il n'a point gélé, au moins à midi.

Indiquons ces jours plus en détail.

Le froid a été obſervé entre

		jours
180 & 190	le 29. 30 Janv. le 15. 16. 17. 19 Févr. le 5 18. 19. 27 & 29 Mars - - -	11
170 & 180	le 2 — 6. 28. 31 Janv. le 1 — 5. 14. 18. 20. 22. 24 Févr. le 4. 6. 15 — 17. 22 — 26. 28. 30 Mars, & le 6. 7. 17. 18. 19. 22. 23. 26 — 28 Décembre - - -	39
160 & 170	le 1. 7 — 13. 20 — 22. 26. 27 Janv. le 6 — 10. 13. 21. 23. 25. 26. 28. 29, Févr. le 1 — 3. 7. 9 — 12. 14. 20. 21. 31. Mars, le 10 Avril, le 25. 26 Nov. & le 5. 8. 9. 15. 16. 20. 24. 25. 29. 31 Décembre -	50
150 & 160	le 14 — 19. 23 — 25 Janv. le 11. 12. 27 Févr. le 8. 13 Mars, le 1 — 9. 11 — 13. 28. 29 Avril, le 4. 5. 7. 8. 10 — 13. 20 Mai, le 30 Sept. le 1. 3. 11. 12. 14. 15. 18. 30. 31 Octobre, le 1. 2. 4 — 12. 14. 15. 19. 20. 23. 24. 27. 29. 30 Novembre, & le 1 — 4. 10 — 14. 21. 30 Décembre.	78

La

La chaleur a été obfervée entre

110 & 100	le 9. 10. 13. 24. 28 — 31 Juillet, & le 4. 6. 14. 25 Août - - - -	jours 12
120 & 110	le 19. 21. 23. 28. 29 Juin, le 2. 4. 6 — 8. 11. 12. 16. 20 — 24. 27 Juillet & le 1 — 3. 5. 7 — 9. 11 — 13. 15 — 19. 21 — 23. 26 Août - - - -	38
130 & 120	le 21. 29. 30 Avril, le 1. 2. 30. 31 Mai, le 1 — 4. 9 — 11, 13 — 18 20. 22. 24 — 27. 30 Juin, le 1. 3. 5. 14. 15. 17 — 19. 25. 26 Juillet, le 10. 20. 27 — 31 Août, & le 1. 5 — 9 Septembre - - -	50
140 & 130	le 4 — 7. 10. 12 — 20. 22 — 25. 28 Avril, le 3. 5 — 9. 15 — 17. 19 — 28 Mai, le 5 — 8. 12 Juin, le 2 — 4. 10 — 12. 14. 15. 18 — 26 Sept. le 19 — 21. 29 Oct. & le 16 Novembre - - - -	65
150 & 140	le 15 — 17. 19. 23 Janv. le 27 Févr. le 8. 12. 13. 30 Mars, le 1. 2. 3. 8. 9. 11. 26. 27 Avril, le 4. 10. 12 — 14. 18. 29 Mai, le 13. 16. 17. 27 — 30 Sept. le 1 — 18. 22 — 28. 30. 31 Oct. le 1 — 4. 10 — 15. 17 — 23. 27 — 29 Nov. & le 10. 12 — 14 Décembre - - - - -	83

III. Vent.

Tableau général de la force & de la direction des vents, pour chaque mois de l'année.

Mois.	Calme	Vent doux	Vent fort	Vent très fort	Nord.	NE.	Eſt.	SE.	Sud.	SOu.	Oueſt.	NOu.
	jours.	jours	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.
Janv.	5	20	5	1	2	0	6	2	3	6	7	5
Févr.	9	8	12	0	8	3	6	4	4	4	0	0
Mars	10	18	3	0	3	2	6	3	7	1	6	3
Avril	13	9	8	0	5	1	8	2	7	1	6	0
Mai	3	6	19	3	2	11	0	0	0	0	8	10
Juin	9	16	5	0	1	3	8	1	1	0	9	7
Juillet	8	16	7	0	3	2	3	5	1	2	15	0
Août	7	7	16	1	2	2	1	1	4	7	11	3
Sept.	5	16	6	3	3	3	2	1	0	0	14	7
Oct.	8	18	5	0	2	2	3	2	4	3	14	1
Nov.	2	20	5	3	2	1	4	2	10	10	0	1
Déc.	6	19	5	1	2	3	5	3	4	7	6	1
Annee 1784.	85	173	96	12	35	33	52	26	45	41	96	38

D'où l'on conclud que le mois de Mai a été le plus venteux, & après lui les mois d'Août, de Novembre & de Septembre. Le mois le moins venteux, ou le plus calme a été Mars, & après lui Juin, Avril & Octobre.

Le vent dominant de l'année a encore été celui de l'Oueſt, lequel a ſurtout regné aux mois de Juillet, Septembre, Octobre & Août.

Le

Le rapport des quatre plages a été: Nord, 70: Est, 82: Sud, 78: Ouest, 136.

La direction des vents forts a été

Direction	Jours	Nombre des Jours.
Nord.	le 3 Mai - - - - - - - -	1
NE.	le 10 Février, 30 Avril, 1. 27 — 30 Mai, 27. 28 Août, & le 16 Septembre - - - -	10
Est.	le 24 Janvier, 7. 9. 11 Févr. 31 Mars, & le 22 Novembre - - - - - - -	6
SE.	le 2. 8. 29 Févr. 19 Avril, 18. 24 Juillet, 24 Sept. & le 10 Décembre - - - -	8
Sud.	le 3. 4. 6. 28 Févr. 1. 2 Mars, 21. 22. 23. 25 Avril, 16 Juillet, 14. 24. 30 Août, 12 Novembre & le 21 Décembre - - - -	16
SOu.	le 1. 10. 11 Janv. 5 Févr. 28 Avril, 19 Juillet, 1. 8. 23. 31 Août, 7 Oct., 14. 16. 18. 19. 27. 28 Nov. & le 1. 3. 4 Decembre - -	20
Ouest.	le 13. 15 Janv. 24 Avril, 6. 7. 8. 15. 16. 23. 25 Mai, 3. 4. 28 Juin, 1. 7. 20 Juillet, 2 — 5. 15. 22. 29 Aout, 1. 2. 18. 25. 26 Sept. 10. 15. 16. 17 Oct. & le 2 Décembre - -	33
NOu.	le 9. 12. 17 — 20. 22. 24. 26 Mai, 2. 5 Juin, 16 Août, & le 9. 10 Septembre - - - -	14

	Entre ces vents se trouvoient être les plus violens, ceux du	
Sud.	12 Novembre - - - - - - -	1
SOu.	du 10 Janv. 1 Août, 18. 19 Nov. & du 3 Décembre - - - - - - - -	5
Oueſt.	du 8. 25 Mai, & du 25. 26 Septembre - -	4
NOu.	du 22 Mai & du 9 Septembre - - - -	2

IV. Atmoſphère.

Mois.	Ciel. ſerein jours.	Ciel. couvert jours.	Brouillard jours.	Pluie. forte jours	Pluie. petite jours.	Neige. copieuſe jours.	Neige. petite jours.	Eau de pluie & de neige Pouces	$\frac{1}{100}$
Janv.	5	16	2		1	2	12	0	21
Févr.	4	11	9		0		8	0	49
Mars	4	11	6		0	9	16	1	17
Avril	17	7	7		9		2	0	24
Mai	11	5	0	3	8		6	0	88
Juin	5	9	0	7	10		1	3	60
Juillet	8	3	1	7	10		0	1	90
Août	8	4	0	6	6		0	1	60
Sept.	6	6	6	7	8		1	1	00
Oct.	4	15	4	1	11		1	0	81
Nov.	2	19	2	2	8		12	2	00
Déc.	1	12	10		1	3	7	1	21
Année 1784.	75	118	47	33	72	14	66	15	11
				$\underbrace{33 \quad 72}_{105}$		$\underbrace{14 \quad 66}_{80}$			

Il tomba de la grêle le 5. 15 & 16 Juillet.

Il y eut cette année 8 orages complets, le 31 Mars à 11 h. du foir, quoique dans un grand éloignement, le 12 & 19 Juin, le 5 Juillet, & le 4. 6. 25. 30 Août. Il ne fit que tonner de loin, le 25 & 29 Juin, le 9 & 11 Juillet, & le 9 Septembre.

Le nombre des aurores boréales ne monte qu'à 7, dont deux furent très fplendides, favoir ceux du 8 Avril & du 29 Décembre: les autres obfervées le 29 Mars, le 12. 21 & 30 Aout & le 6 Décembre furent moins confidérables.

Le Neva débacla le 25 Avril, après avoir été prife pendant 160 jours: Baromètre 27. 70 à 27. 52 pouces, Thermomètre de Delisle depuis 149 à 134, vent du Sud mediocrement fort, pluie, ciel en grande partie couvert. Les glaçons du lac de Ladoga parurent le 4 Mai, & la riviere les charia, le 6. 8 & 9 du même mois.

Les glaces reparurent le 2 Décembre, & la riviere en fut prife dans la nuit du 5 au 6 Décembre. Baromètre 27. 35, Thermomètre 165, ciel couvert en grande partie, & vent du Sud, presque infenible.

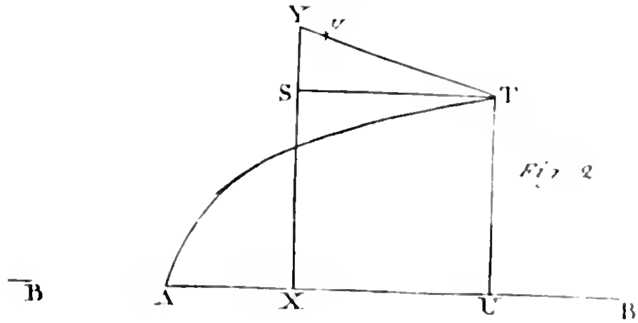


Fig. 2

Fig. 5.

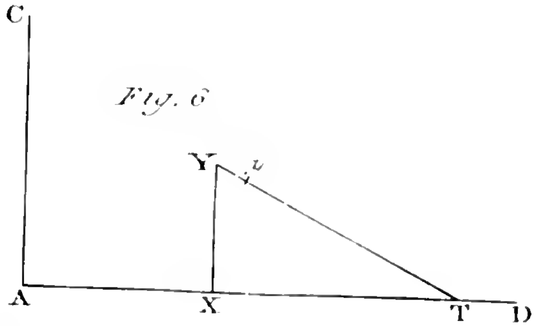


Fig. 6

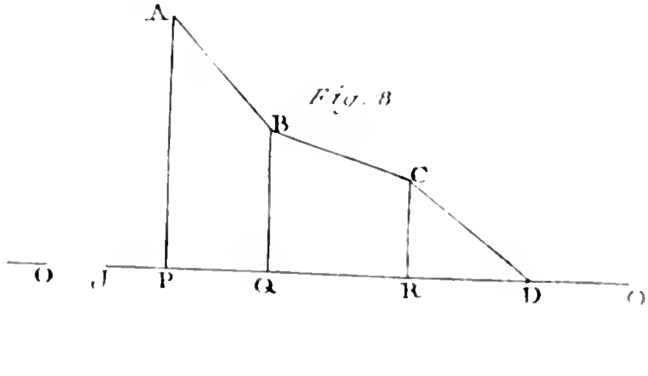


Fig. 8

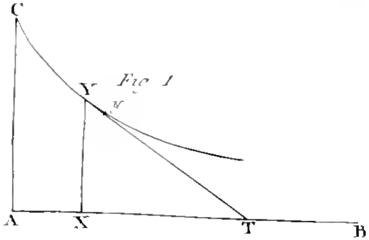


Fig 1

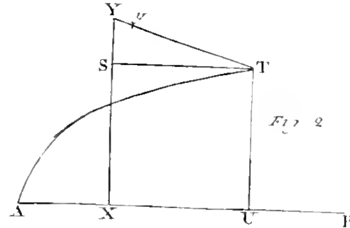


Fig 2

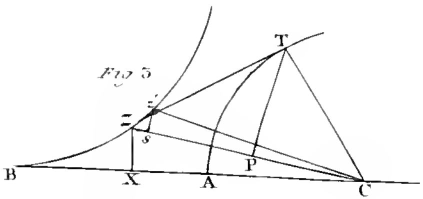


Fig 3

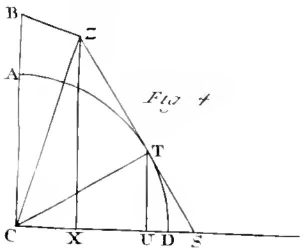


Fig 4

Fig 5

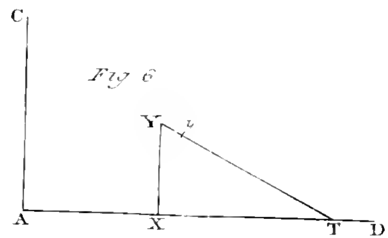


Fig 6

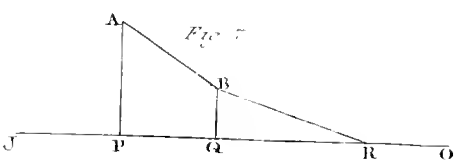


Fig 7

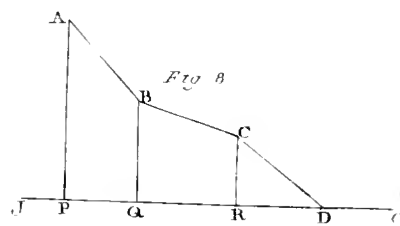


Fig 8

Fig. 2.

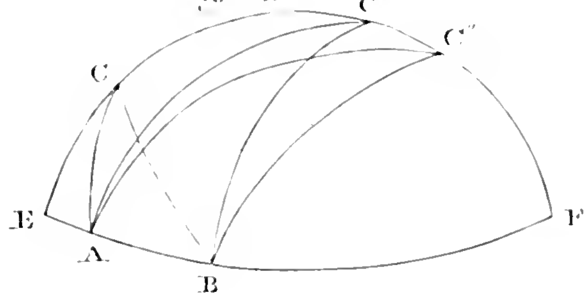
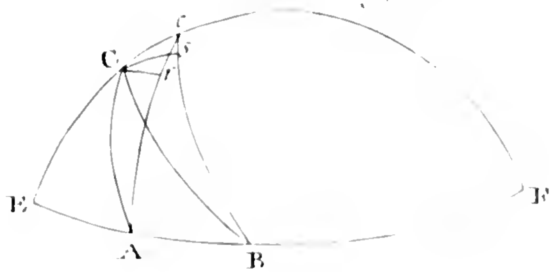


Fig. 4.



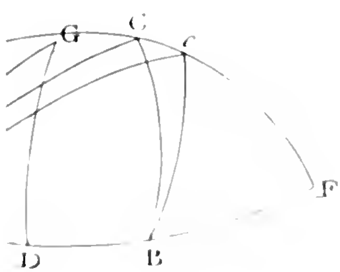


Fig. 1.

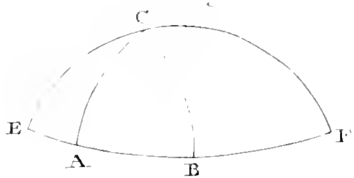


Fig. 2.

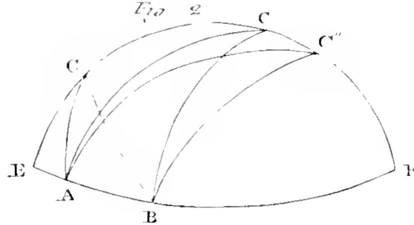


Fig. 3.

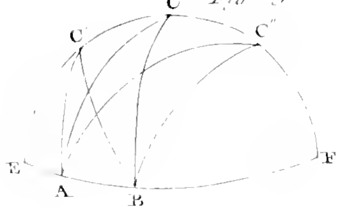


Fig. 4.

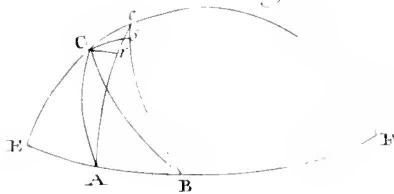
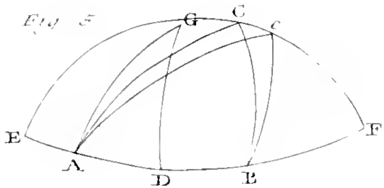


Fig. 5.



.1.

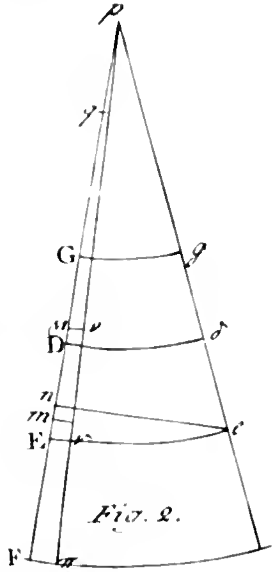


Fig. 2.

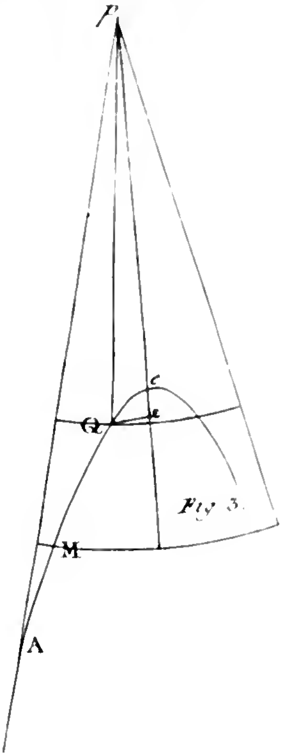
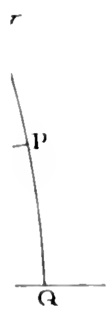


Fig. 3.



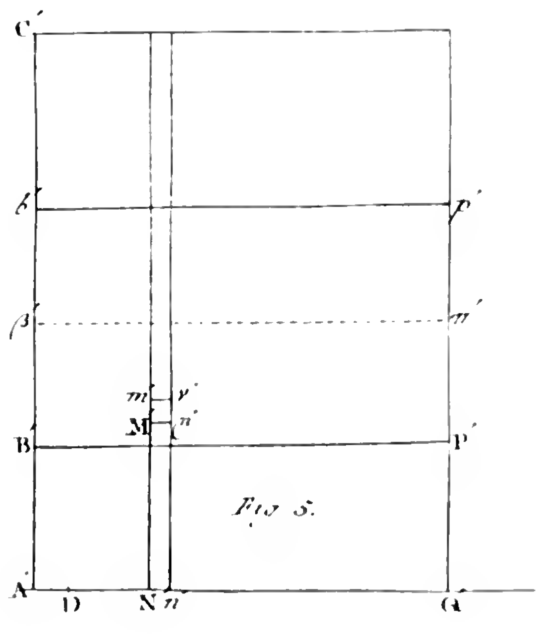


Fig. 5.

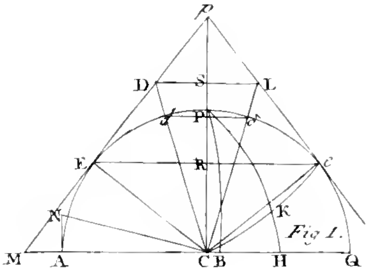


Fig 1.

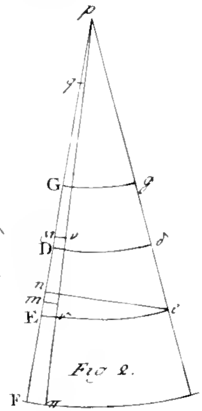


Fig 2.

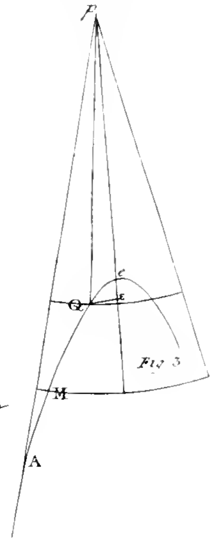


Fig 3.

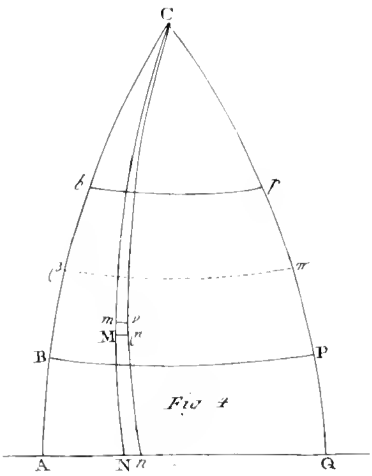


Fig 4.

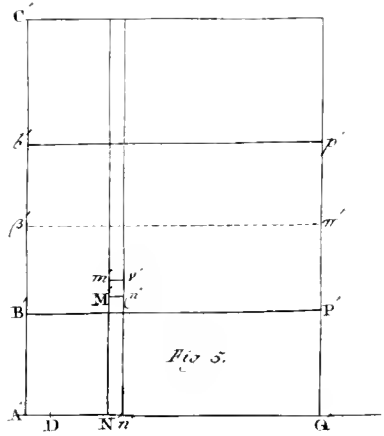


Fig 5.

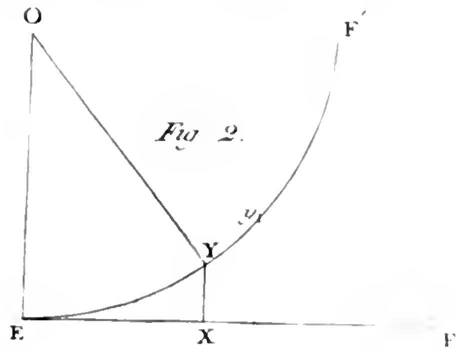


Fig. 2.

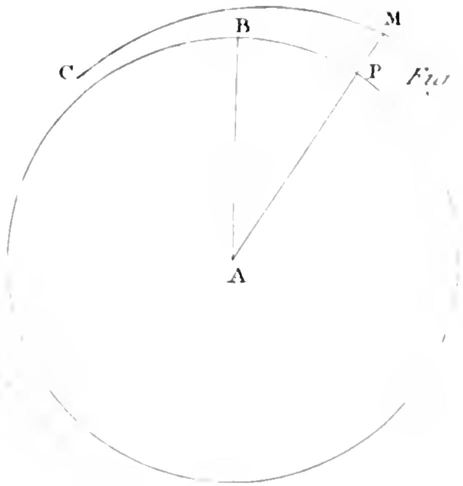


Fig. 1.

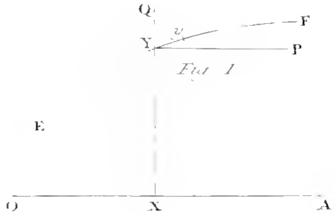


Fig. 1

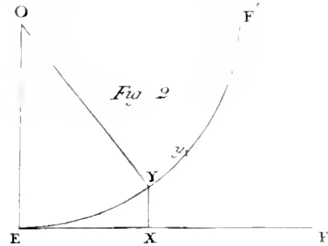


Fig. 2

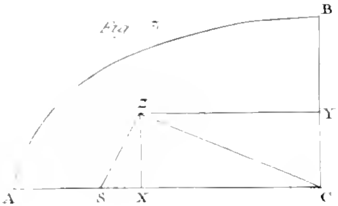


Fig. 3

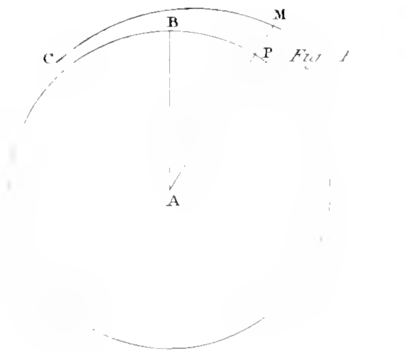
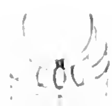
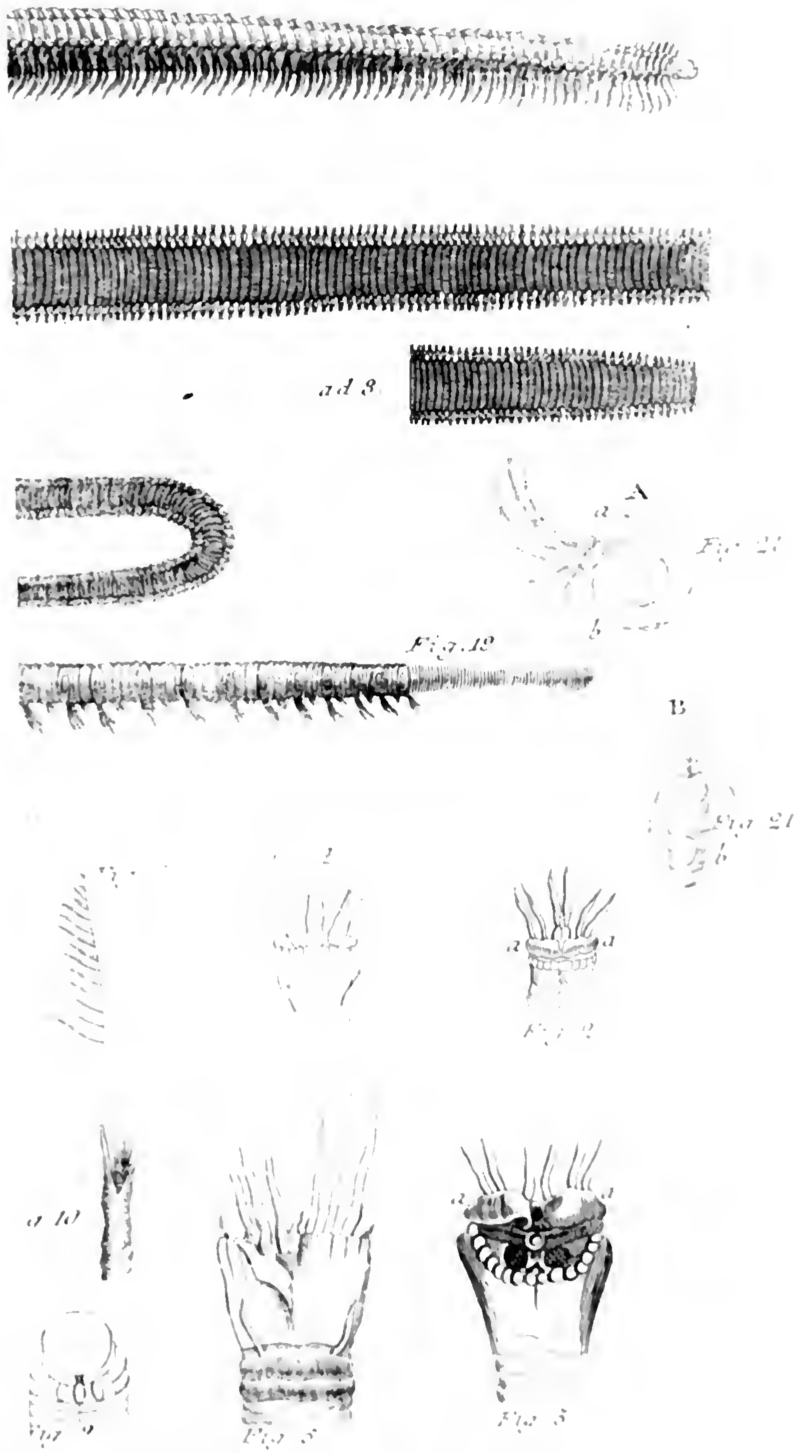


Fig. 4

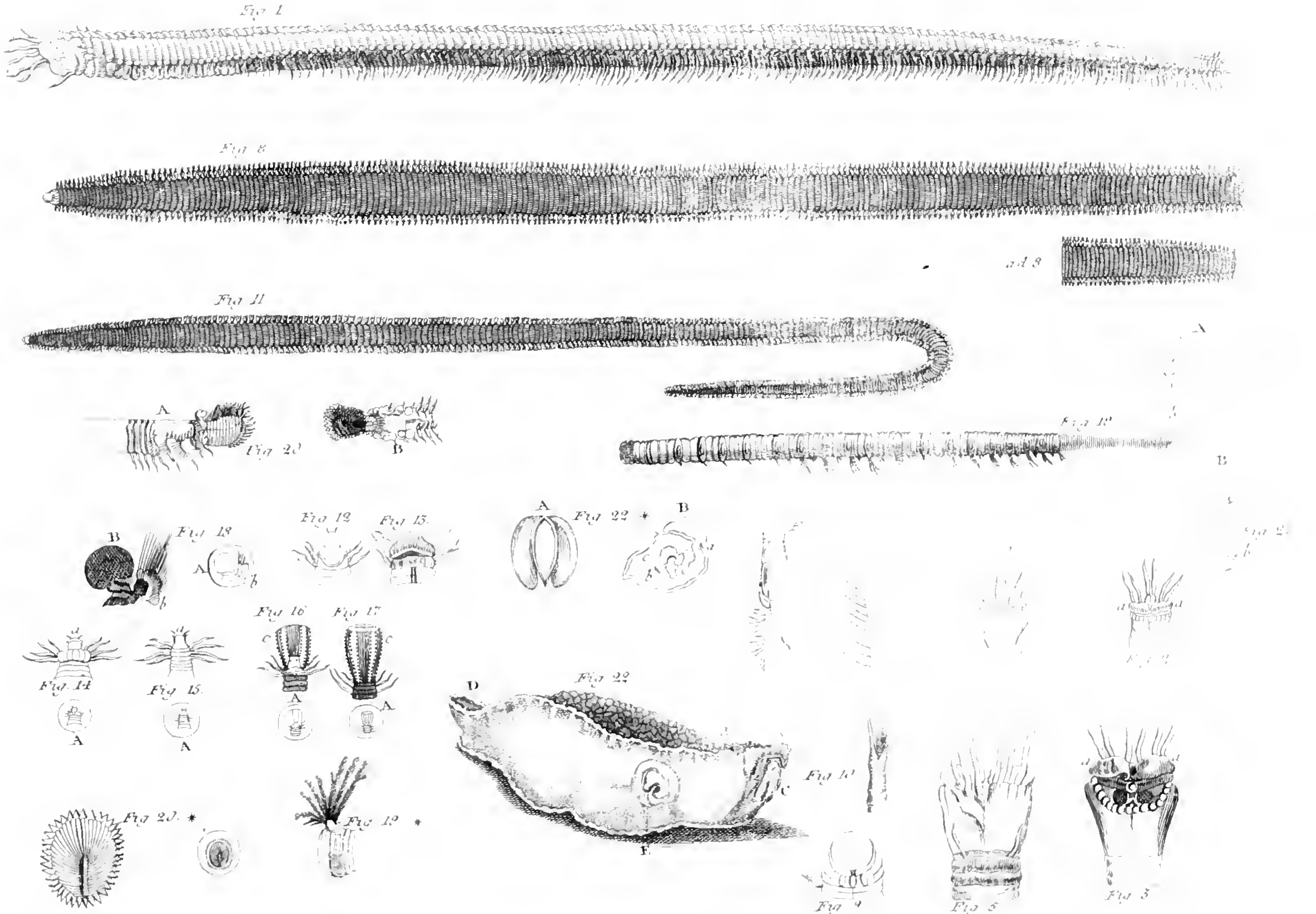
Fig. 5

Y
l
m
F
q
y
V
1
o
z
8
G
L
k
16
I





Nova Acta Ac. Imp. Sc. Petropol. Tom II. tab I



15 5
6
21 16
14
19
12
13
20 7
10
3
17
4
2
18

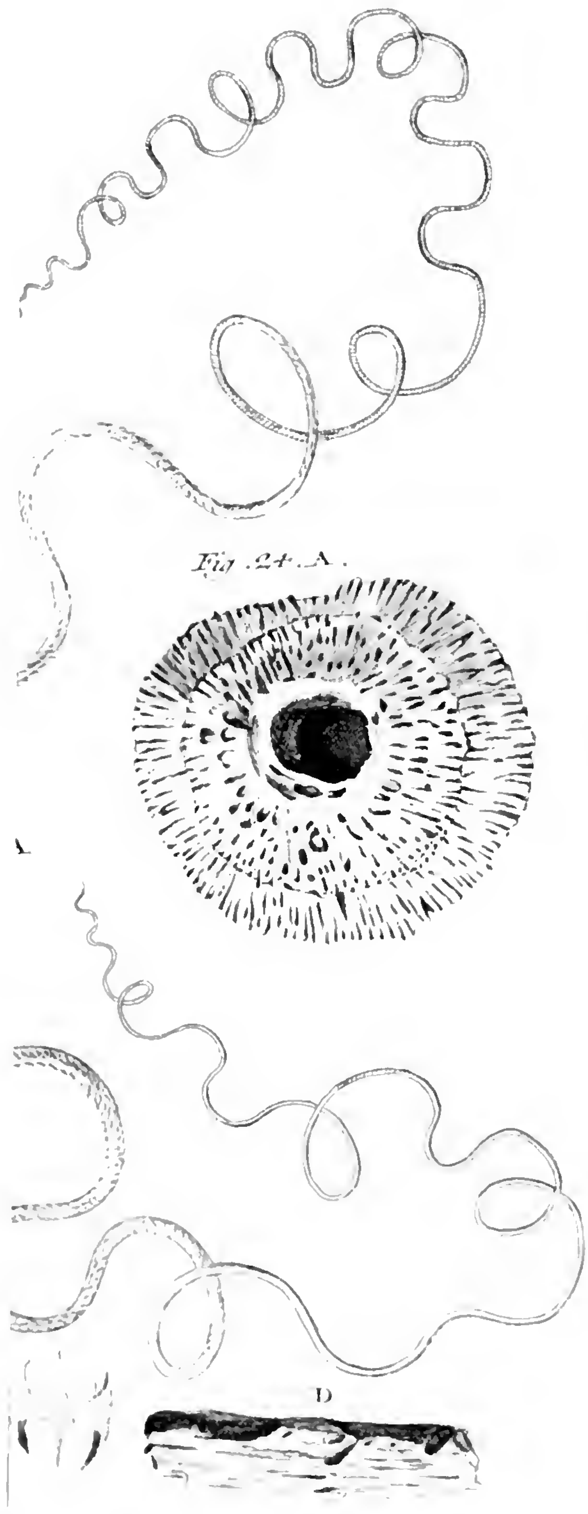


Fig. 24. A.
D

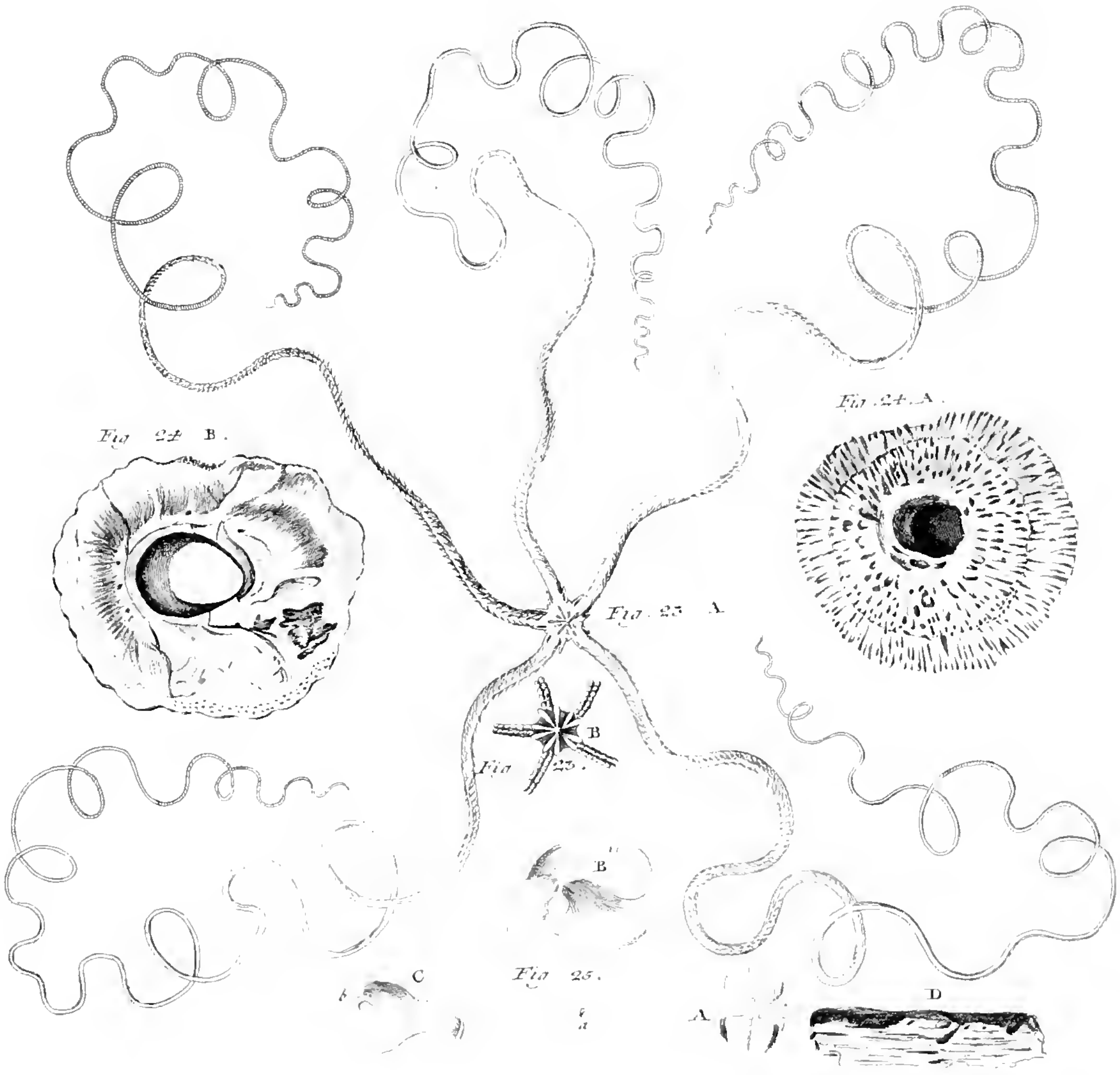


Fig. 24. B.
Fig. 24. A.
Fig. 23. A.
B
Fig. 23.
B
C
Fig. 25.
A
D

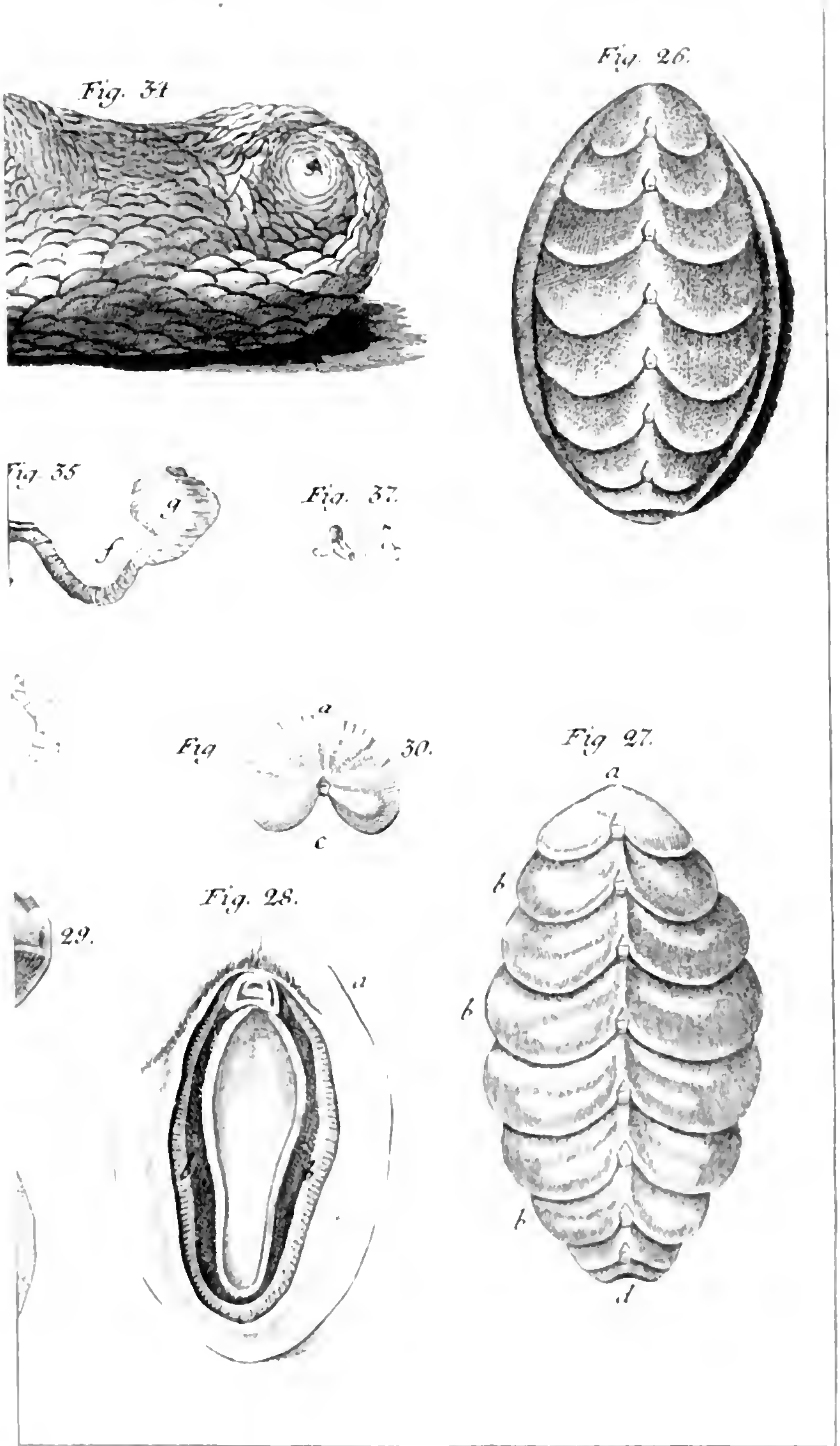


Fig. 34
Fig. 26.
Fig. 35
g
f
Fig. 37.
a
Fig 30.
c
Fig 27.
a
b
b
b
d
Fig. 28.
a
29.

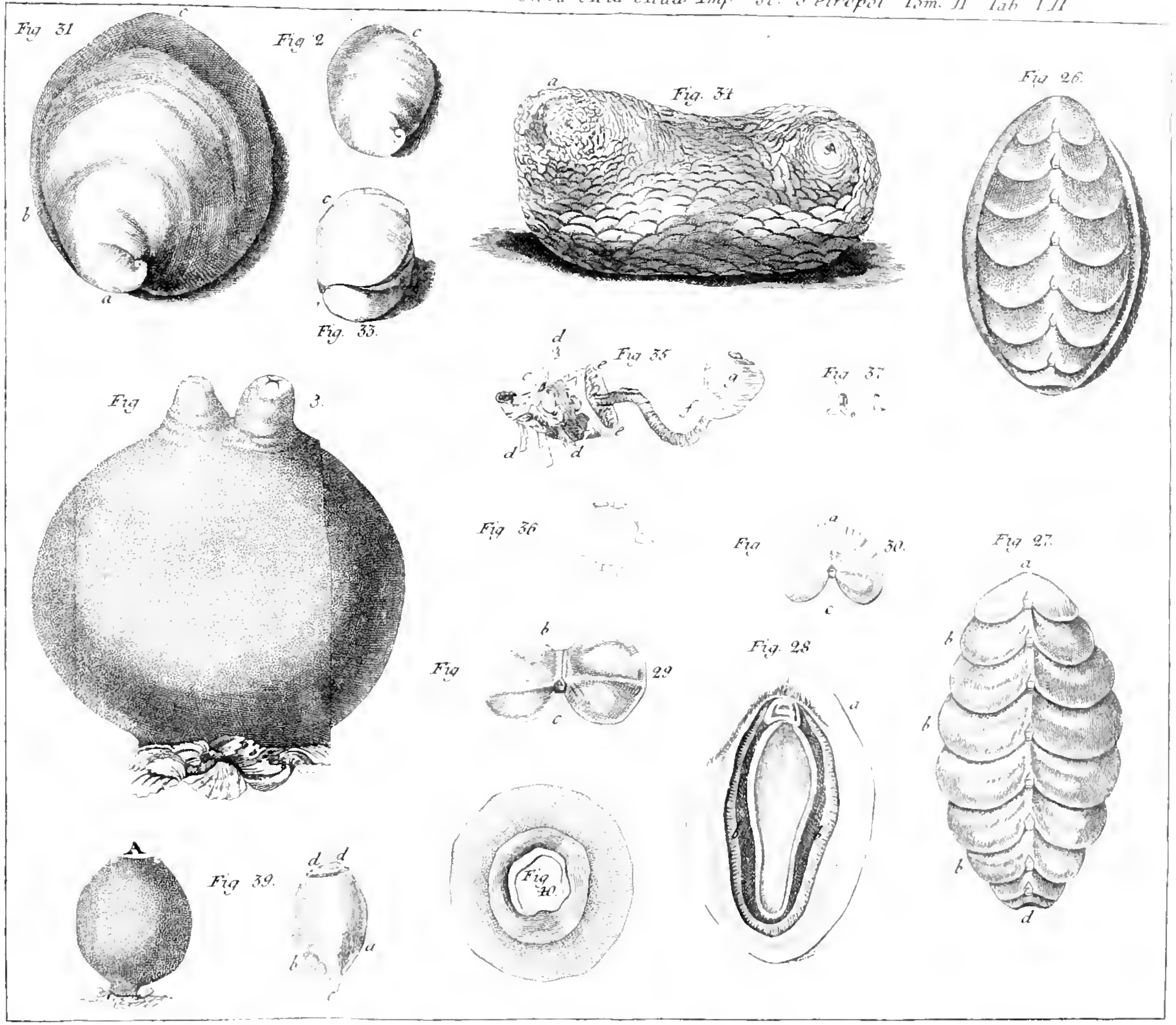
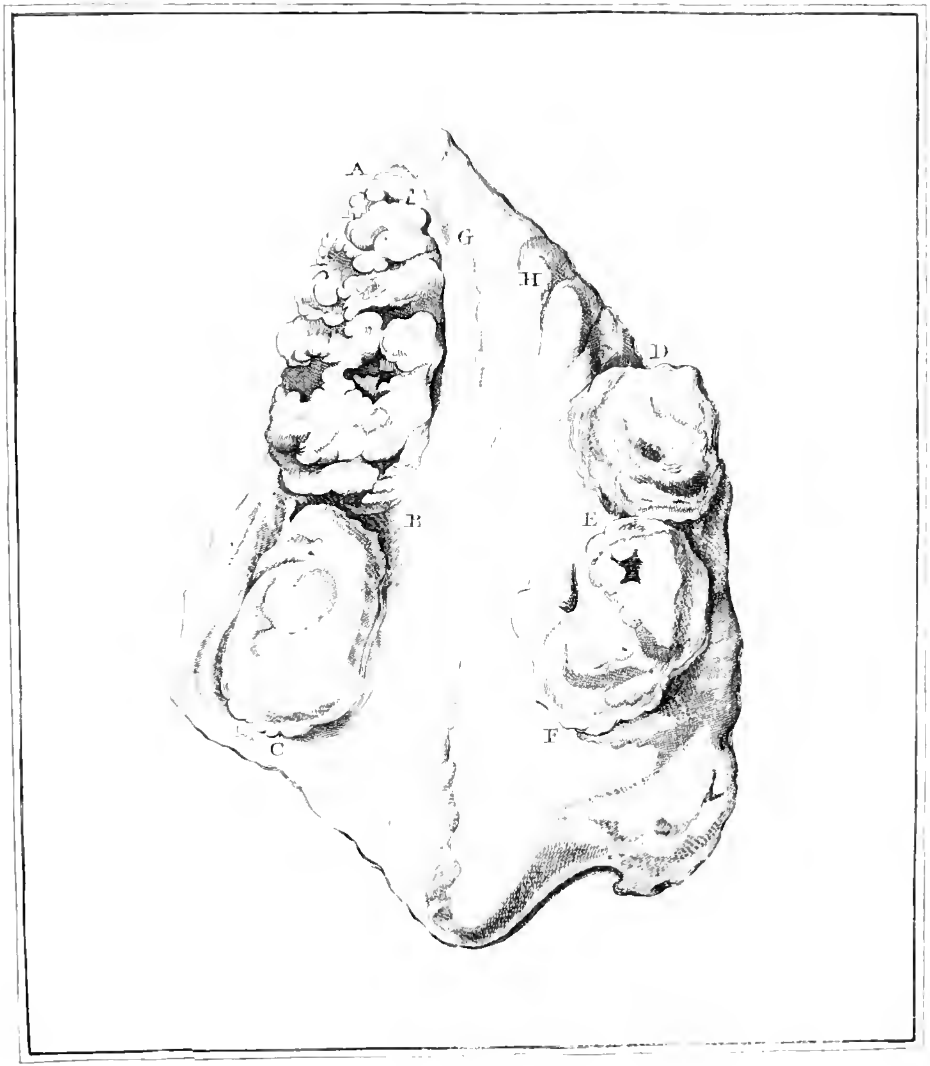
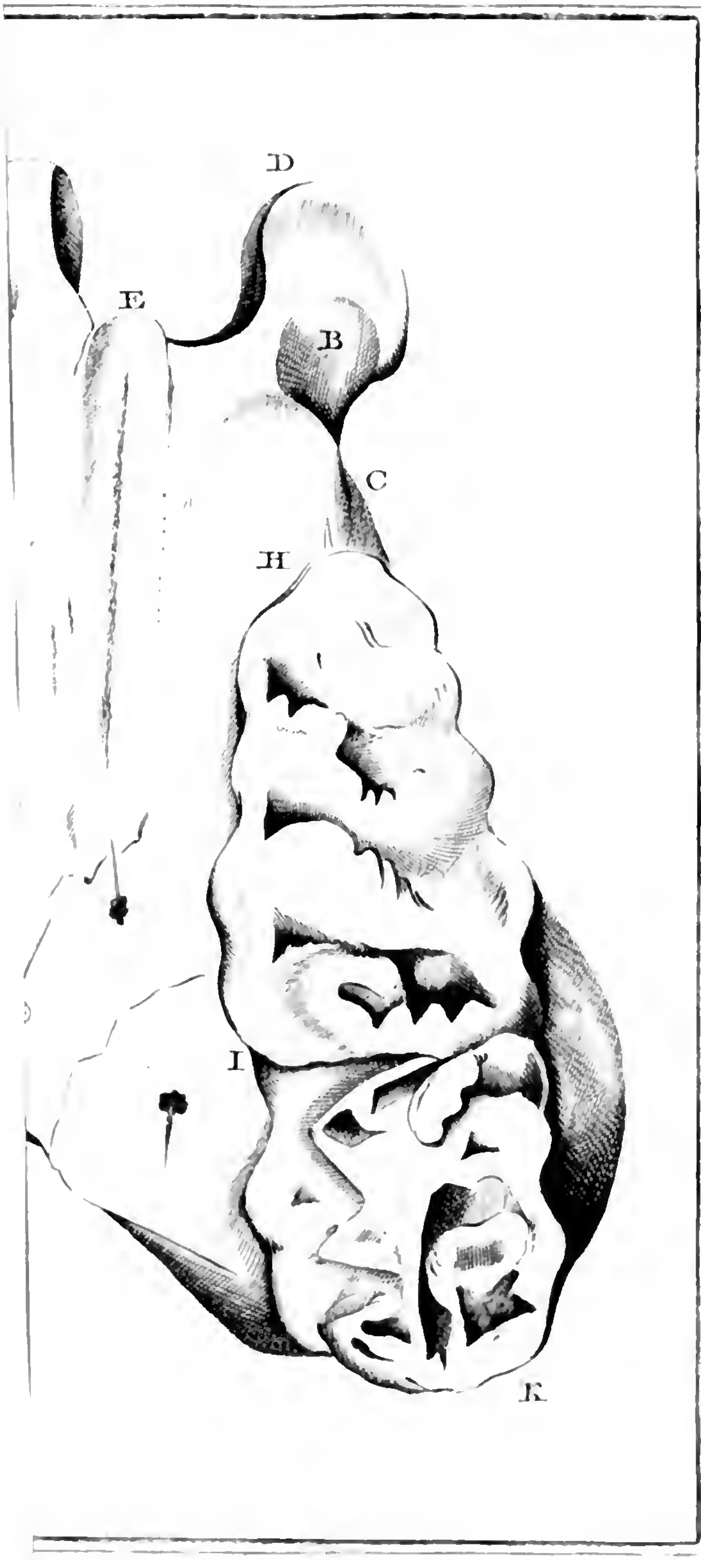
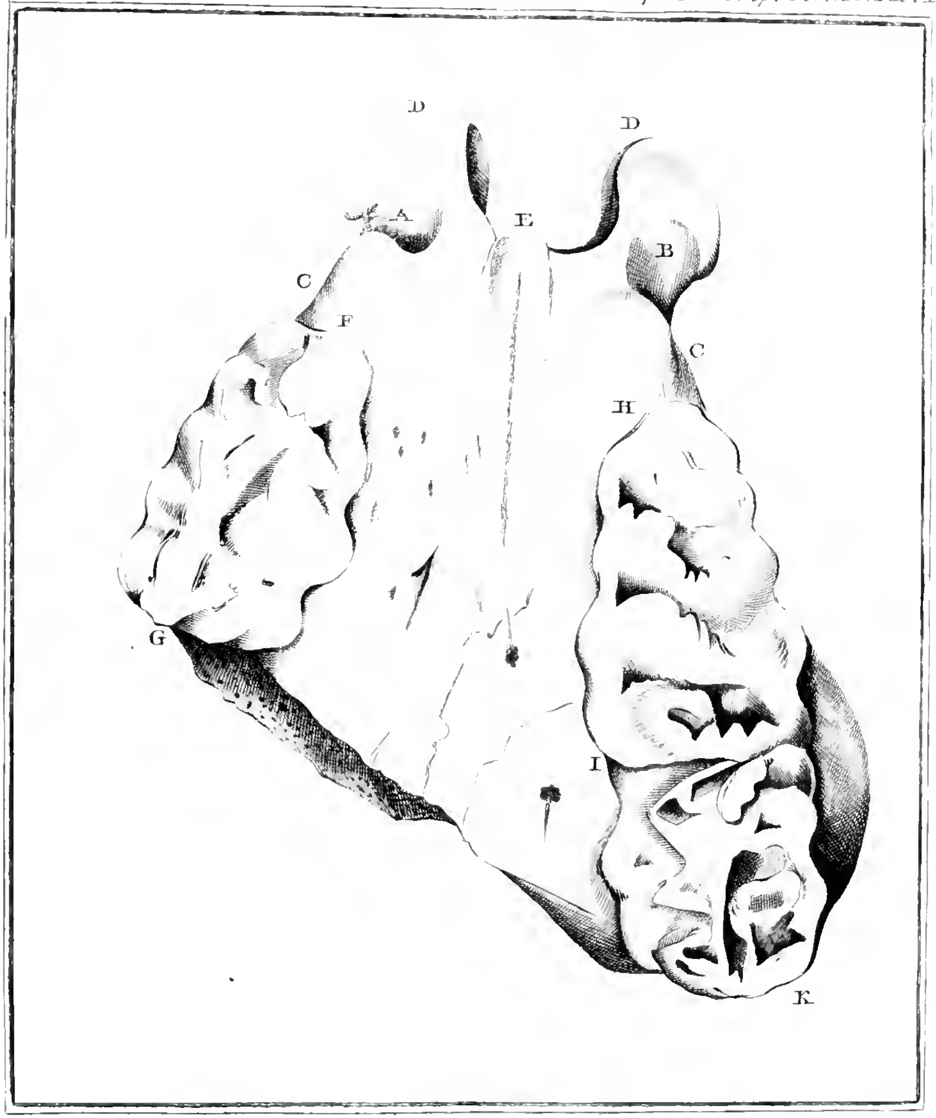


Fig 31
Fig 2
Fig. 33.
Fig. 34
Fig 26.
Fig 35
Fig 37
Fig 3.
Fig 36
Fig 30.
Fig 27.
Fig 29
Fig. 28
Fig 39.
Fig 40.


H
D
E
F


A
G
H
D
B
E
C
F


D
E
B
C
H
I
K


D
D
A
E
B
C
F
C
H
G
I
K